

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

CÁLCULO DE CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS TRIDIMENSIONAIS UTILIZANDO
ELEMENTOS FINITOS: MAGNETOSTÁTICA, QUASE-ESTÁTICA E AQUECIMENTO INDUTIVO

TESE SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS (D.Sc.)

RENATO CARDOSO MESQUITA

FLORIANÓPOLIS, DEZEMBRO DE 1990

Renato Cardoso Mesquita

Nascido em 16 de novembro de 1959, em Belo Horizonte, MG. Engenheiro Eletricista pela Universidade Federal de Minas Gerais em dezembro de 1982. Mestre em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal de Minas Gerais em abril de 1986. Professor Assistente do Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais.

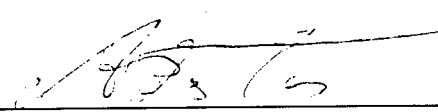
CÁLCULO DE CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS TRIDIMENSIONAIS UTILIZANDO
ELEMENTOS FINITOS: MAGNETOSTÁTICA, QUASE-ESTÁTICA E AQUECIMENTO INDUTIVO

RENATO CARDOSO MESQUITA

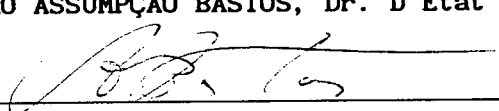
ESTA TESE RECEBEU PARECER FAVORÁVEL PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

DOUTOR EM CIÊNCIAS (D.Sc.)

ESPECIALIDADE ENGENHARIA ELÉTRICA E FOI APROVADA EM SUA FORMA FINAL
PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

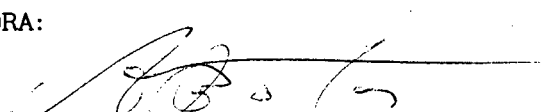


JOÃO PEDRO ASSUMPCÃO BASTOS, Dr. D'Etat - ORIENTADOR

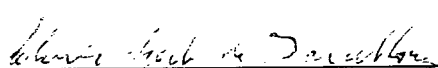


JOÃO PEDRO ASSUMPCÃO BASTOS, Dr. D'Etat - COORDENADOR


BANCA EXAMINADORA:



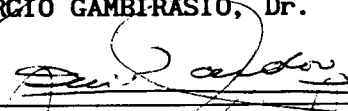
JOÃO PEDRO ASSUMPCÃO BASTOS, Dr. D'Etat - ORIENTADOR



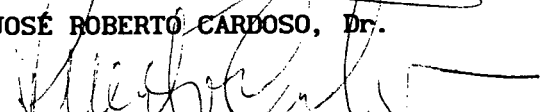
CLÓVIS SPERB DE BARCELLOS, Ph.D.



GIORGIO GAMBIRÁSIO, Dr.



JOSÉ ROBERTO CARDOSO, Dr.



RENATO CARLSON, Dr. Ing.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho, desenvolvido no Grupo de Concepção e Análise de Dispositivos Eletromagnéticos (GRUCAD) da Universidade Federal de Santa Catarina, foi realizado com o apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior (CAPES) através do seu programa institucional de Capacitação de Docentes (PICD). A estas duas instituições o meu agradecimento: à primeira por me haver acolhido e à segunda pelo apoio financeiro.

Ao Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais pelo período de afastamento que me concedeu.

Ao professor João Pedro Assumpção Bastos, orientador e amigo, por seus conselhos eficazes e por ter proporcionado um ambiente de total liberdade no desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores do GRUCAD: Nelson Sadowsky, Renato Carlson e Sérgio Roberto Arruda pelo apoio e interesse.

Ao professor Clóvis Sperb de Barcellos do Departamento de Engenharia Mecânica da UFSC pela formação teórica que me propiciou através de seus cursos de teoria matemática de elementos finitos.

Ao professor Michel Lajoie-Mazenc pelo período que passei em seu laboratório (LEEI-ENSEEHIT, Toulouse, França) desenvolvendo uma parte deste trabalho. Agradeço também ao engenheiro Jean Hector, deste mesmo laboratório, pelo apoio computacional durante este período.

Ao professor Gerard Meunier do LEG-INPG, Grenoble, França, pelas discussões, sempre proveitosas, que pudemos ter.

Aos colegas do GRUCAD, LABSPOT (Laboratório de Sistemas de Potência), LAMEP (Laboratório de Máquinas Elétricas e Eletrônica de Potência) e GRANTE (Grupo de Análise de Tensões - Engenharia Mecânica) por todos os bons momentos passados em uma atmosfera de franca camaradagem.

À Dolores, cujo companheirismo permitiu que estes quatro anos de Doutorado não fossem tão árduos.

Agradeço, enfim, aos meus pais por me ensinarem a apreciar o conhecimento e a lhe dar o seu justo valor. Sem isto eu não teria jamais estudado.

RESUMO

Neste trabalho estudam-se várias técnicas relacionadas com o cálculo de campos eletromagnéticos tridimensionais, utilizando o método de elementos finitos.

Inicialmente, são analisadas detalhadamente diversas formulações matemáticas que implementam o cálculo de campos magnetostáticos tridimensionais. Um programa que emprega a formulação dos dois potenciais escalares magnetostáticos é, então, desenvolvido.

Na seqüência, analisam-se várias formulações para o cálculo de campos quase-estáticos tridimensionais, concluindo-se que as formulações existentes têm domínio de aplicação bem definidos.

A seguir, é proposto um novo método para o cálculo do problema acoplado termo-eletromagnético tridimensional. Este método utiliza a formulação do potencial vetor modificado associado aos potenciais escalares, reduzido e total, para representar a parcela eletromagnética do problema. A parte térmica do sistema é modelada de modo a incluir as não linearidades associadas às características constitutivas dos materiais, à passagem pelo ponto de Curie e à condição de contorno de radiação térmica.

Finalmente, são apresentados resultados que validam os programas de cálculo dos problemas tridimensionais analisados: o magnetostático, o quase-estático e o de aquecimento indutivo.

ABSTRACT

In this work some techniques related to the three-dimensional electromagnetic field computations, using the finite-element method, are presented.

The formulations for the three-dimensional magnetostatic field computations are studied and a software using the two-scalar potentials (total and reduced) is implemented.

The methods for three-dimensional eddy-currents computations are analysed and it is concluded that the formulations have well-defined applications.

A new computational method for the three-dimensional thermo-electromagnetic problem is proposed. This method uses the modified vector potential coupled to two scalar potentials to represent the electromagnetic part of the problem. The systems thermal part is modelled so as to include the non-linearities associated to radiation boundary conditions, as well as to the thermal and electric material properties variation with the temperature and the Curie temperature point.

Finally, some results are presented. They validate the software for the three problems: the magnetostatic problem, the eddy-currents problem and the induction-heating problem.

NOMENCLATURA.....	ix
INTRODUÇÃO:.....	1
CAPÍTULO I: CONCEITOS BÁSICOS.....	4
I.1. Introdução.....	4
I.2. Equações fundamentais do Eletromagnetismo.....	4
I.3. Formulação matemática de um problema de contorno.....	7
I.3.1. Modelamento matemático: Formulação clássica.....	7
I.3.2. A forma fraca.....	10
I.3.3. O método de Galerkin.....	16
I.3.4. O método de Elementos Finitos.....	18
CAPÍTULO II: PROBLEMAS ESTÁTICOS.....	20
II.1. Introdução.....	20
II.2. Utilização do potencial escalar total.....	21
II.2.1. Modelamento matemático: Formulação clássica.....	21
II.2.2. A forma fraca.....	23
II.2.3. Aplicação dos métodos de Galerkin e de Elementos Finitos.....	26
II.3. Utilização do potencial vetor magnético.....	30
II.3.1. Modelamento matemático: Formulação clássica.....	30
II.3.2. A forma fraca.....	36
II.3.3. Aplicação dos métodos de Galerkin e de Elementos Finitos.....	40
II.4. Utilização do potencial escalar reduzido.....	43

II.4.1. Modelamento matemático: Formulação clássica.....	43
II.4.2. A forma fraca e a aplicação dos métodos de Galerkin e de Elementos Finitos.....	46
II.5. Utilização do potencial escalar total associado ao potencial escalar reduzido.....	47
II.5.1. Modelamento matemático: Formulação clássica.....	47
II.5.2. A forma fraca.....	52
II.5.3. Aplicação dos métodos de Galerkin e de Elementos Finitos.....	54
II.5.4. A formulação com dois potenciais estendida.....	56
II.6. Comparação entre as formulações para o problema magnetostático...	58
 CAPÍTULO III: PROBLEMAS QUASE-ESTÁTICOS: CORRENTES DE FOUCAULT.....	 60
III.1. Introdução.....	60
III.2. Formulações utilizando o potencial vetor magnético.....	62
III.2.1. O método A-V com calibre de Coulomb: modelamento matemático.....	62
III.2.2. O método A-V- ϕ - ψ com calibre de Coulomb: modelamento matemático.....	68
III.2.3. O método A [*] - ψ - ϕ : modelamento matemático.....	74
III.2.4. A forma fraca para os métodos que utilizam A com calibre de Coulomb.....	78
III.2.5. Aplicação dos métodos de Galerkin e de elementos finitos....	84
III.2.6. Outras formulações utilizando o potencial vetor magnético...	87
III.2.6.1. O potencial vetor magnético com calibre de Lorentz.....	88
III.2.6.2. O potencial vetor com dois componentes.....	90
III.2.6.3. Formulação sem imposição de qualquer condição sobre o <i>div</i> A.....	91
III.3. Formulação utilizando o potencial vetor elétrico: o método T- Ω	92
III.4. Formulação utilizando o vetor campo: a formulação H.....	97
III.4.1. Introdução: Formulação básica.....	97

III.4.2. Os elementos de aresta.....	98
III.4.3. Aplicação dos elementos de aresta: acoplamento entre Ω_f e Ω_k	102
III.5. Comparação entre as formulações para o problema de correntes de Foucault.....	107
 CAPÍTULO IV : CÁLCULO DO AQUECIMENTO.....	 111
IV.1. Introdução.....	111
IV.2. Fundamentos da transmissão de calor.....	111
IV.2.1. Transferência de calor por condução.....	111
IV.2.2. Transferência de calor por convecção.....	112
IV.2.3. Transferência de calor por radiação.....	113
IV.2.4. Transferencia de calor em um corpo metálico envolvido pelo ar: equação básica e condições de contorno.....	115
IV.3. Variação das propriedades constitutivas com a temperatura.....	115
IV.4. A forma fraca do problema térmico: acoplamento termo-eletromagnético.....	119
IV.5. A semidiscretização por elementos finitos.....	122
IV.6. A discretização temporal.....	124
IV.6.1. Conceitos básicos: o algoritmo.....	124
IV.6.2. Mudança do passo de integração.....	127
IV.7. Algoritmo final para resolução do sistema acoplado com passo variável.....	127
 CAPÍTULO V: ASPECTOS COMPUTACIONAIS.....	 130
V.1. Introdução.....	130

V.2. Estrutura dos programas.....	130
V.3. Estrutura dos dados.....	131
V.3.1. Estrutura de dados gerada pelo pré-processador.....	132
V.3.2. Estrutura de dados utilizada pelo processador.....	133
V.3.3. Gerenciamento dinâmico da memória.....	135
V.4. Resolução do sistema de equações lineares.....	137
V.4.1. O método de gradientes conjugados para matrizes reais, simétricas, positivas definidas.....	138
V.4.2. O método de gradientes bi-conjugados para matrizes reais, não-simétricas e indefinidas.....	146
V.4.3. O método de gradientes bi-conjugados complexos para sistemas de equações complexas.....	150
V.5. Problemas não lineares: o método de Newton-Raphson.....	152
V.5.1. O método de Newton-Raphson.....	152
V.5.2. Aplicação ao problema magnetostático com dois potenciais escalares.....	153
V.5.3. Aplicação ao problema de correntes de Foucault utilizando o método $A-V-\phi-\psi$	155
 CAPÍTULO VI: RESULTADOS OBTIDOS.....	 160
VI.1. Introdução.....	160
VI.2. Problemas magnetostáticos.....	160
VI.2.1. Blindagem magnética: casca esférica em um campo magnético uniforme.....	160
VI.2.2. O problema do IEEJ.....	163
VI.2.3. Um problema magnetostático não linear.....	167
VI.3. Problemas de correntes induzidas.....	172
VI.3.1. Esfera em campo uniforme.....	172
VI.3.2. O "Bath-cube".....	174
VI.3.3. O "Bath-plate".....	179

VI.4. Problemas termo-eletromagnéticos.....	186
VI.4.1. Um problema de aquecimento axi-simétrico.....	186
VI.4.2. Um problema de aquecimento indutivo axi-simétrico.....	190
VI.4.3. Um problema de aquecimento indutivo tridimensional.....	196
CONCLUSÃO.....	203
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	204
APÊNDICE: CÁLCULO DO CAMPO MAGNÉTICO CRIADO POR CONFIGURAÇÕES TÍPICAS DE CORRENTE.....	221

SIMBOLOGIA

A	-Potencial vetor magnético
A^*	-Potencial vetor magnético modificado
$B(v, u)$	-Forma bilinear entre v e u
B	-Indução magnética
B_r	-Indução magnética remanente
b	-Vetor segundo membro (método de Gradientes Conjugados)
c	-Capacidade térmica
c_0	-Capacidade térmica a 0°C .
c_i	-Cada um dos coeficientes da aproximação de Galerkin
C^{-1}	-Matriz de pré-condicionamento (método de gradientes conjugados)
D	-Densidade de fluxo elétrico
div	-Operador divergente
E_j	-Região na qual circulam as correntes impostas externamente
e_t	-Aproximação do erro devido à discretização temporal
e_n	-Aproximação do erro devido à solução incompleta do problema não linear
E	-Campo elétrico
f	-Vetor segundo membro da aproximação gerada pelo método de elementos finitos
$f(u)$	-Funcional linear de u
f_i	-Elemento da linha i do vetor do 2° membro da aproximação gerada pelo método de elementos finitos
G_1	-Valor do salto entre ψ e ϕ na interface Γ_{kj}
h	-Coeficiente de transferência de calor por convecção
h^2	-Forma quadrática a ser minimizada no método de gradientes conjugados
$H(\Omega)$	-Classe das funções de teste
$H^1(\Omega)$	-Espaço das funções com derivadas de ordem 1 com quadrado integrável em Ω
$\underline{H}^1(\Omega)$	-Produto cartesiano de dimensão 3 de $H^1(\Omega)$
$\overline{H}^1(\Omega)$	-Espaço das funções com derivadas de ordem 1 de quadrado integrável em Ω e que se anulam na fronteira de Ω (isto é, têm suporte compacto em Ω)
$H^h(\Omega)$	-Espaço gerado pelas funções de base
$\overline{H}^h(\Omega)$	-Espaço gerado pela intersecção de \overline{H}^1 e H^h .
H	-Campo magnético

H_m	-Parcela do campo magnético produzida pelos dipolos magnéticos (induzidos ou permanentes)
H_r	-Contribuição dos condutores não incluídos em Ω_j para o campo H .
H_s	-Campo magnético criado pelas correntes impostas externamente, com $\mu = \mu_0$ constante em todo o espaço.
$\mathcal{H}(\Omega)$	-Classe das funções admissíveis
$\underline{\mathcal{H}}(\Omega)$	-Classe das funções admissíveis (Potencial vetor)
$\mathcal{H}_0(\Omega)$	-Classe de funções teste para o potencial escalar (= classe das funções admissíveis com condições de contorno homogêneas)
$\underline{\mathcal{H}}_0(\Omega)$	-Classe das funções teste para o potencial vetor (= funções admissíveis com condições de contorno homogêneas)
$\mathcal{H}^h(\Omega)$	-Classe de funções obtida pela intersecção entre espaço das funções admissíveis (\mathcal{H}) e o espaço gerado pelas funções de base (H^h).
h	-Superescrito: indica uma função aproximada por elementos finitos
H	-Superescrito: indica a transposição de um vetor ou matriz complexa com seus elementos sendo trocados pelos complexos conjugados.
I	-Funcional quadrático
J	-Matriz jacobiano
J	-Densidade de corrente elétrica
K	-Matriz do sistema de equações gerado pelo método de elementos finitos
K_{ij}	-Um dos elementos da matriz K da aproximação gerada pelo método de Galerkin e de elementos finitos
k	-Condutividade térmica
k_0, k_1	-Coeficientes de variação da condutividade térmica com a temperatura
LU	-Matriizes resultantes da decomposição da matriz não simétrica
N	-Número total de nós da malha de elementos finitos
$N_k, N_j, N_f,$	
N_a, N_u	-Número de nós em $\Omega_k, \Omega_j, \Omega_f, \Omega_b \cup \Omega_f$ e $\Omega_k \cup \Omega_j$, respectivamente.
$N_{kfb}, N_{jk},$	
N_{jfb}	-Número de nós sobre $\Gamma_{kf} \cup \Gamma_{kb}, \Gamma_{kf} \cup \Gamma_{kb} \cup \Gamma_{jf} \cup \Gamma_{jbe} \Gamma_{jf} \cup \Gamma_{jb},$ respectivamente
n_{eq}	-Número de equações independentes
\underline{n}	-Vetor normal a uma superfície
N_i	-Funções de base de $H^h(\Omega)$. Para o método de elementos finitos são as funções de forma globais
N_i	-Funções de base vetoriais

p_i	-Direção de busca no espaço, na iteração i (método de Gradientes Conjugados)
\bar{p}_i	-bi-direção de busca no passo i (método de gradientes bi-conjugados)
q	-Calor gerado por unidade de volume
r	-Função resíduo escalar
\underline{r}	-Função resíduo vetorial
r^i	-Resíduo da iteração i (método de Newton-Raphson)
r_i	-Resíduo da iteração i (método de gradientes conjugados)
\bar{r}_i	-Bi-resíduo no passo i (método de gradientes bi-conjugados)
\mathbb{R}	-Conjunto dos números reais
\mathbb{R}^n	-Produto cartesiano n -dimensional do espaço \mathbb{R}
rot	-Operador rotacional
S	-Superfície através da qual ocorre a transferência de calor
Sig	-Parâmetro que permite variar a abertura da curva gaussiana que representa a variação da capacidade térmica com a temperatura
\underline{s}	-Coordenadas de um ponto no domínio padrão (s_1, s_2, s_3)
$\underline{s}(\underline{x})$	-Mapeamento que gera o elemento padrão, a partir dos elementos finitos
t	-Tempo
T	-Temperatura
T_a	-Temperatura ambiente
T_c	-Temperatura de Curie
T_p	-Temperatura a partir da qual se desenvolve a série de Taylor a fim de linearizar o termo de radiação
\underline{t}	-Vetor tangente a uma superfície
\underline{T}^i	-Vetor de temperaturas no instante de tempo t_i
\underline{T}_i	-Vetor tangente à aresta associada a s_i
T	-Potencial vetor elétrico
τ	-Superescrito: indica transposição
T^θ	-Vetor de temperaturas no instante t_θ
t_θ	-Instante de tempo $t_i + \theta \Delta t$
u	-Função de teste escalar
V	-Potencial escalar elétrico
V^*	-Potencial escalar elétrico modificado
\underline{V}_e	-Vetor de variáveis eletromagnéticas (Problema acoplado termo-eletromagnético)
\underline{v}	-Função de teste vetorial
\underline{v}_i	-Funções de interpolação de aresta

x, y, z	-Coordenadas espaciais
x_j, y_j, z_j	-Coordenadas de cada um dos nós da malha de elementos finitos
\underline{x}	-Coordenadas de um ponto no domínio mapeado (x, y, z)
$\underline{x}(\underline{s})$	-Mapeamento que gera os elementos finitos a partir de um elemento de referência
w	-Uma função genérica
\underline{w}	-Uma função vetorial genérica
Z_i	- $C^{-1}r_i$, método de gradientes conjugados com pré-condicionamento.
α_i	-Parâmetro que minimiza o erro segundo a direção p_i (método de Gradientes conjugados)
α^i	-Valor médio da derivada temporal no intervalo de integração i
$\underline{\alpha}^i$	-Vetor das derivadas temporais no intervalo de integração i
α_p^i	-Valor de α^i na fase de previsão
β_0, β_1	-Coeficientes de variação da resistividade elétrica com a temperatura
$\beta(T)$	-Função utilizada para levar em conta a variação da permeabilidade magnética com a temperatura
β_i	-Parâmetro utilizado para forçar que p_{i+1} seja A-conjugado a p_i (método de gradientes conjugados)
γ	-Constante de Stefan-Boltzmann
Γ	-Fronteira do problema
Γ_1	-Cap. II: Parcela da fronteira onde são impostas condições de contorno de Dirichlet -Cap. III: Parcela da fronteira onde se impõe a condição $B \cdot \underline{n} = 0$
$\Gamma_{1j}, \Gamma_{1k},$	
Γ_{1f}, Γ_{1b}	-Parcela de Γ_1 que está conectada a $\Omega_j, \Omega_k, \Omega_f$ e Ω_b , respectivamente
Γ_2	-Cap. II: Parcela da fronteira onde são impostas condições de contorno de Neumann -Cap. III: Parcela da fronteira onde se impõe a condição $H \wedge \underline{n} = 0$
$\Gamma_{2j}, \Gamma_{2k},$	
Γ_{2f}, Γ_{2b}	-Parcela de Γ_2 que está conectada a $\Omega_j, \Omega_k, \Omega_f$ e Ω_b , respectivamente
Γ_{bf}	-Interface entre as regiões Ω_b e Ω_f
Γ_{jb}	-Interface entre as regiões Ω_j e Ω_b
Γ_{jf}	-Interface entre as regiões Ω_j e Ω_f
Γ_{kb}	-Interface entre as regiões Ω_k e Ω_b
Γ_{kj}	-Interface entre as regiões Ω_k e Ω_j
Γ_{kf}	-Interface entre as regiões Ω_k e Ω_f

Γ_m	-Interface de descontinuidade entre regiões de permeabilidade magnética contínua.
Γ_σ	-Interface de descontinuidade entre regiões de condutividade elétrica contínua.
δI	-Primeira variação de I
δ_{ij}	-Delta de Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ se $i=j$, $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$)
Δt	-Intervalo de integração temporal
Δx	-Atualização na solução (Método de Newton-Raphson)
ϵ	-Permissividade elétrica (Cap. I & II), ou emissividade da superfície cinza (Cap. IV, V e VI).
ϵ_m	-Valor do erro máximo permitido durante o processo de integração no tempo
η_i	-Cada uma das funções de forma locais do método de elementos finitos
$\bar{\eta}_i$	-Funções de forma locais sobre o domínio padrão
θ	-Variável que indica o instante, dentro de cada intervalo de integração, para o qual a equação temporal discretizada é aproximada
μ	-Permeabilidade magnética
μ_0	-Permeabilidade magnética do vácuo
μ_{eq}	-Valor da permeabilidade equivalente para 1 ciclo da excitação
ν	-Relutividade magnética
ξ	-Energia, por unidade de volume, necessária para atravessar o ponto de Curie
ρ	-Densidade de carga elétrica (Cap. I & II) ou resistividade elétrica (Cap. IV)
σ	-Condutividade elétrica
τ_k	-Constante que dita a variação exponencial da condutividade térmica com a temperatura
τ_β	-Constante que dita a variação exponencial da permeabilidade magnética com a temperatura
ϕ	-Potencial escalar reduzido
ψ	-Potencial escalar magnético (também chamado de potencial escalar total)
ω	-Frequência angular do campo eletromagnético
Ω	-Domínio do problema ou potencial escalar elétrico (método T- Ω)
Ω_b	-Região do domínio em que não circulam correntes de Foucault mas onde se utiliza o potencial vetor magnético, de maneira a tornar $\Omega \cup \Omega_b$ simplesmente conexa

Ω_e	-Cada um dos elementos finitos gerados a partir do domínio padrão
Ω_f	-Região do domínio onde são induzidas correntes de Foucault
Ω_i	-Cada um dos subdomínios regulares do problema
Ω_j	-Região do domínio onde existem correntes impostas externamente e materiais magnéticos de permeabilidade baixa
Ω_k	-Região do domínio onde existem materiais magnéticos de alta permeabilidade e não existem correntes
$\bar{\Omega}$	-Elemento finito de referência
$\partial\Omega_i$	-Fronteira da região Ω_i
$\ \cdot \ $	-Norma euclidiana
$\ \cdot \ _1$	-Norma de Sobolev de ordem 1
$[\cdot]$	-Indica a variação de uma grandeza em um ponto (se diferente de zero, a grandeza é descontínua)
\wedge	-Indica o produto vetorial
\cdot	-Indica o produto escalar
$\dot{\cdot}$	-(Sobre uma variável): Indica derivação em relação ao tempo
$*$	-Indica o conjugado complexo
\forall	-Para todo
\subset	-Indica que um conjunto é subconjunto de outro (ou está contido no outro)
\subseteq	-Indica que um conjunto está contido ou é igual a outro
\cup	-União entre conjuntos
\cap	-Intersecção entre conjuntos
\in	-Indica que um elemento pertence a um conjunto
\emptyset	-Conjunto vazio
\times	-Indica o produto cartesiano entre classes de funções
$O(\cdot)$	-Indica a ordem de convergência de um método numérico

The internal relations of the different branches of the science which we have to study are more numerous and complex than those of any science hitherto developed. Its external relations, on the one hand to dynamics, and on the other to heat, light, chemical action, and the constitution of bodies, seem to indicate the special importance of electrical science as an aid to the interpretation of nature.

James Clerk Maxwell

In: *A Treatise on Electricity & Magnetism*

INTRODUÇÃO

Os dispositivos eletromagnéticos- máquinas elétricas, transformadores, transistores, guias de onda, etc.- têm seu comportamento governado pela distribuição dos campos eletromagnéticos em seu interior e na região vizinha a eles. Estes campos seguem as equações de Maxwell (Maxwell, 1891; Stratton, 1941).

Para o projeto e análise destes dispositivos é necessário, portanto, solucionar as equações de Maxwell. A resolução destas equações é uma área que vem recebendo a atenção de engenheiros, físicos e matemáticos há muito tempo. Em seu tratado sobre Eletricidade e Magnetismo, escrito em 1873, Maxwell (3^a ed. 1891) já apresentava uma série de métodos para a solução de suas equações. Estes métodos, assim como outros desenvolvidos nos anos seguintes (Para uma compilação deles, ver Binns & Lawrenson, 1973), utilizam conceitos matemáticos sofisticados, resultando em processos de cálculo demorados e difíceis. Além disto, estas técnicas só se aplicam a algumas geometrias específicas e não podem tratar, de forma geral, os problemas não lineares. A complexidade geométrica crescente, assim como a necessidade de otimização dos dispositivos projetados, exigiu o desenvolvimento de métodos de cálculo mais genéricos.

O advento dos computadores digitais permitiu a utilização de métodos numéricos para a resolução dos problemas do eletromagnetismo. Inicialmente, utilizando-se o método de diferenças finitas e, desde o final dos anos 60 (Winslow, 1967; Silvester, 1969; Silvester & Chari, 1970), o método dos Elementos Finitos.

O método de Elementos Finitos vem sendo empregado, desde então, no auxílio ao projeto dos mais variados tipos de dispositivos eletromagnéticos: máquinas elétricas rotativas de todas as faixas de potência, transformadores, reatores, equipamentos de alta tensão, disjuntores, dispositivos semicondutores, equipamentos para a Física Nuclear, sondas para ensaios não destrutivos, guias de onda, antenas, dispositivos para gravação magnética, equipamentos médicos(ressonância magnética), etc...

O cálculo dos campos que, inicialmente, era feito em duas dimensões, passou a ser feito, também, em três dimensões. Na realidade, a maior parte dos dispositivos utilizados em Engenharia Elétrica é tridimensional. O cálculo bidimensional é apenas uma aproximação da situação real (na maior parte dos casos ela é uma boa aproximação; porém, em muitos casos, ela é uma aproximação

muito ruim).

As décadas de 70 e, principalmente, 80 viram surgir uma grande quantidade de formulações matemáticas para a resolução dos problemas eletromagnéticos tridimensionais utilizando a técnica de elementos finitos. Primeiramente, foram abordados os problemas eletrostáticos e magnetostáticos. Os programas desenvolvidos para efetuar o cálculo destes problemas, apesar da atenção que receberam dos maiores grupos de pesquisa em cálculo de campos eletromagnéticos do mundo, não atingiram, ainda, o nível de generalidade e facilidade de utilização que se tem hoje com os programas de cálculo bidimensionais. Por isto, esta é, ainda, uma área de pesquisa intensa, principalmente no que diz respeito ao desenvolvimento de técnicas computacionais auxiliares, referentes aos pré e pós-processadores, geradores automáticos de malha 3-D, etc.

Se, com relação às formulações matemáticas, pode-se dizer que o cálculo magnetostático tridimensional é baseado em métodos universalmente aceitos, o mesmo não se aplica às formulações para a solução dos problemas quase-estáticos e dinâmicos. Esta é uma área de pesquisa intensa - ainda no nível das formulações matemáticas - o que pode ser comprovado consultando-se os anais dos últimos congressos mundiais de cálculo de campos eletromagnéticos.

Outro tipo de problema que vem merecendo uma atenção cada vez maior são os acoplados, pois uma característica importante de grande parte dos sistemas em Engenharia é a sua natureza acoplada. Uma máquina elétrica, por exemplo, é um dispositivo complexo onde acontecem fenômenos eletromagnéticos, mecânicos e térmicos simultaneamente. Estes fenômenos estão interligados e afetam o desempenho global da máquina. Como o método de Elementos Finitos permite também a solução dos problemas térmicos e mecânicos, o cálculo deste acoplamento é feito de forma elegante e natural.

Um dos problemas acoplados mais importantes para o projetista de equipamentos em Engenharia Elétrica é o termo-eletromagnético. Normalmente, a capacidade de fornecer, transmitir ou transformar potência dos equipamentos elétricos está limitada por sua capacidade de refrigeração, isto é, pela possibilidade de transmissão das perdas ocorridas internamente para o meio ambiente. Uma análise do aquecimento deve ser feita para evitar condições que possam causar superaquecimento e avaria dos equipamentos. Outro problema termo-eletromagnético importante é o cálculo dos dispositivos de aquecimento por indução.

Apesar da sua importância, este é um problema que mereceu, até hoje, pouca atenção. Em duas dimensões ele foi explorado por alguns grupos de pesquisa. Em

três dimensões ele ainda é um problema em aberto e acreditamos que, neste trabalho, tem-se a primeira tentativa de analisá-lo levando em conta os fenômenos associados à passagem pela temperatura de Curie.

O objetivo desta tese é o desenvolvimento de ferramentas computacionais para a análise dos problemas eletromagnéticos em 3 dimensões. Parte-se de estudos já desenvolvidos no GRUCAD (Grupo de Concepção e Análise de Dispositivos eletromagnéticos) da Universidade Federal de Santa Catarina para o cálculo de campos eletrostáticos e magnetostáticos em regiões onde não existem correntes (Bastos, 1984; Raizer, 1987) e amplia-se a faixa de problemas possíveis de serem calculados, incluindo:

- 1- Os problemas magnetostáticos tridimensionais em regiões do espaço onde existem correntes;
- 2- Os problemas quase-estáticos (correntes de Foucault) tridimensionais;
- 3- O problema acoplado termo-eletromagnético tridimensional.

Os estudos desenvolvidos e os resultados obtidos estão organizados da seguinte forma:

No capítulo I são relembrados alguns conceitos básicos associados ao Eletromagnetismo e ao método de Elementos Finitos. No capítulo II é feita a análise dos principais métodos utilizados para a resolução dos problemas magnetostáticos tridimensionais. No capítulo III analisam-se os métodos de resolução dos problemas quase-estáticos tridimensionais.

Estes três primeiros capítulos são fundamentais para o desenvolvimento das técnicas de resolução do problema de aquecimento indutivo tridimensional, apresentadas no capítulo IV.

No capítulo V apresentam-se algumas das técnicas computacionais utilizadas para a implantação dos programas de resolução dos problemas anteriores. Finalmente, no capítulo VI, apresentam-se os resultados obtidos com estes programas.

CAPÍTULO I CONCEITOS BÁSICOS

I.1 Introdução

Para a aplicação do método de Elementos Finitos na resolução das equações do Eletromagnetismo, é preciso relembrar alguns conceitos básicos. Neste capítulo faz-se esta revisão. Inicialmente, são apresentadas as equações fundamentais do Eletromagnetismo. A seguir são abordados os conceitos de formulação clássica de problemas de contorno, condições de contorno, formulação forte, formulação fraca e formulação variacional. Nesta abordagem são caracterizados os espaços das funções admissíveis e das funções teste. Finalmente, são apresentados os métodos de Galerkin e de Elementos Finitos.

I.2 Equações Fundamentais do Eletromagnetismo

Um campo eletromagnético é caracterizado por quatro grandezas vetoriais, dependentes da posição espacial e do tempo: o campo elétrico E , o campo magnético H , a indução magnética ou densidade de fluxo magnético B e a densidade de fluxo elétrico ou indução elétrica D . Assume-se que estes vetores sejam finitos em seu domínio e que, em todos os pontos ordinários, eles sejam funções contínuas com derivadas contínuas. Por ponto ordinário entende-se um ponto em cuja vizinhança as propriedades constitutivas do meio (permeabilidade, condutividade e permissividade) sejam contínuas. Descontinuidades nos vetores de campo ou em suas derivadas podem ocorrer, entretanto, em superfícies onde exista uma mudança abrupta das propriedades constitutivas do meio.

As leis básicas do Eletromagnetismo são as equações de Maxwell (Stratton, 1941):

$$\text{rot } E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0 \quad (\text{I.1})$$

$$\text{rot } H - \frac{\partial D}{\partial t} = J \quad (\text{I.2})$$

$$\text{div } B = 0 \quad (\text{I.3})$$

$$\text{div } D = \rho \quad (\text{I.4})$$

Onde:

t - Tempo;

J - Densidade de corrente elétrica;

ρ - Densidade de carga elétrica;

div - Divergente;

rot - Rotacional.

Neste estudo, considera-se que os materiais do domínio não possuem movimento relativo, estando todos eles em repouso em relação a um referencial inercial. Os vetores de campo estão expressos neste referencial.

As equações de Maxwell não são as únicas relações existentes entre os vetores do campo. As relações adicionais, denominadas equações constitutivas, dependem do meio onde existe o campo:

$$D = [\epsilon] E \quad (I.5)$$

$$B = [\mu] H + B_r \quad (I.6)$$

$$J = [\sigma] E \quad (I.7)$$

onde:

$[\epsilon]$ - Tensor de permissividade elétrica do meio;

$[\mu]$ - Tensor de permeabilidade magnética do meio;

$[\sigma]$ - Tensor de condutividade elétrica do meio;

B_r - Indução magnética remanente.

A indução magnética remanente é acrescentada para que se possa tratar ímãs permanentes porventura existentes no domínio.

No caso em que os materiais são isotrópicos, os tensores $[\epsilon]$, $[\mu]$ e $[\sigma]$ se reduzem aos escalares ϵ , μ e σ . A isotropia não impede que os escalares sejam função do ponto, ou mesmo dos vetores E e H . Normalmente, ϵ e σ são insensíveis às variações em E . Por outro lado, μ pode variar muito com H .

A faixa de frequências com a qual se trabalha em Eletrotécnica permite que se simplifique a equação (I.2). Suponha-se o trabalho em regime permanente senoidal. Então, de (I.2):

$$\text{rot } H = j\omega D + \sigma E \quad (I.8)$$

onde ω é a frequência angular do campo eletromagnético.

Supondo-se que

$$j\omega D \ll \sigma E$$

obtem-se:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (\text{I.9})$$

Para que (I.9) seja válida,

$$f \ll \frac{\sigma}{2\pi\epsilon} \quad (\text{I.10})$$

onde f é a frequência linear do campo eletromagnético. A restrição (I.10) é geralmente verificada na Eletrotécnica, onde se trabalha em baixas frequências. Portanto, utilizam-se as equações de Maxwell na forma quase-estática (Macedo, 1988):

$$\text{rot } \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (\text{I.11})$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (\text{I.12})$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (\text{I.13})$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho \quad (\text{I.14})$$

Aplicando-se o operador div a ambos os lados da equação (I.12), obtém-se a equação de continuidade da corrente:

$$\text{div } \mathbf{J} = 0 \quad (\text{I.15})$$

Na interface entre materiais com diferentes propriedades constitutivas, verificam-se as seguintes condições sobre os vetores de campo (Bastos, 1989):

$$\underline{n} \cdot \mathbf{B}_1 = \underline{n} \cdot \mathbf{B}_2, \quad \text{ou} \quad \underline{n} \cdot \llbracket \mathbf{B} \rrbracket = 0 \quad (\text{I.16})$$

$$\underline{n} \wedge \mathbf{H}_1 = \underline{n} \wedge \mathbf{H}_2, \quad \text{ou} \quad \underline{n} \wedge \llbracket \mathbf{H} \rrbracket = 0 \quad (\text{I.17})$$

$$\underline{n} \cdot \mathbf{J}_1 = \underline{n} \cdot \mathbf{J}_2, \quad \text{ou} \quad \underline{n} \cdot \llbracket \mathbf{J} \rrbracket = 0 \quad (\text{I.18})$$

$$\underline{n} \wedge \mathbf{E}_1 = \underline{n} \wedge \mathbf{E}_2, \quad \text{ou} \quad \underline{n} \wedge \llbracket \mathbf{E} \rrbracket = 0 \quad (\text{I.19})$$

$$\underline{n} \cdot \mathbf{D}_1 = \underline{n} \cdot \mathbf{D}_2, \quad \text{ou} \quad \underline{n} \cdot \llbracket \mathbf{D} \rrbracket = 0 \quad (\text{I.20})$$

onde:

\underline{n} - Vetor normal à superfície entre os dois meios;

\cdot - Indica o produto escalar;

\wedge - Indica o produto vetorial;

1 e 2 - Caracterizam os dois diferentes meios;

$\llbracket \cdot \rrbracket$ - Indica a variação da grandeza no ponto.

As equações (I.16) e (I.17) estabelecem que o componente normal da indução magnética e os tangenciais do campo magnético são contínuos na interface entre dois meios de permeabilidade magnética diferentes. Isto implica na descontinuidade tangencial de \mathbf{B} e normal de \mathbf{H} nesta interface. Análise semelhante pode ser feita em relação a \mathbf{J} e \mathbf{E} na interface entre dois meios de condutividades distintas e em relação a \mathbf{D} e \mathbf{E} , na interface entre dois meios de permissividades elétricas diferentes.

I.3 Formulação matemática de um problema de contorno

I.3.1 Modelamento matemático: Formulação clássica

O objetivo desta seção é introduzir uma série de idéias fundamentais para este estudo. Considera-se um problema de contorno extremamente simples, porém com estrutura matemática próxima à existente em problemas mais complexos.

Trata-se de um problema eletrostático em uma barra não condutora unidimensional, composta por dois materiais (Fig. I.1.).

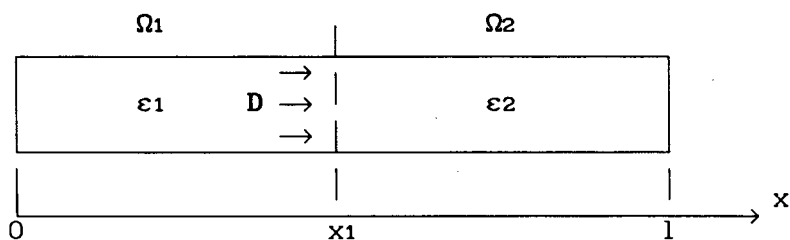


Figura I.1: Problema eletrostático unidimensional.

No ponto x_1 a permissividade do material sofre uma descontinuidade. Porém ela é regular (contínua, com derivadas contínuas) dentro de Ω_1 e Ω_2 . Sobre a barra é introduzida uma distribuição regular de carga, $\rho(x)$.

A estrutura matemática do problema é analisada a seguir:

1. Equações que descrevem o problema:

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0 \quad (\text{I.21})$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho(x) \quad (\text{I.22})$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (\text{I.23})$$

De (I.21), pode-se definir o potencial escalar elétrico:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } V \quad (\text{I.24})$$

visto que $\text{rot}(\text{grad } V) = 0$, desde que V seja suficientemente diferenciável. Substituindo-se (I.24) em (I.23) e (I.22), obtém-se:

$$-\text{div}(\epsilon \text{ grad } V) = \rho(x) \quad (\text{I.25})$$

para o caso unidimensional, a equação (I.25) se reduz a:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left[\epsilon \frac{\partial V}{\partial x} \right] = \rho(x) \quad (\text{I.26})$$

e a equação (I.23) a:

$$\mathbf{D} = -\epsilon \frac{\partial V}{\partial x} \quad (\text{I.27})$$

2. Nos pontos ordinários, ϵ é regular, e a equação (I.26) pode ser escrita como:

$$-\epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} = \rho(x) \quad (\text{I.28})$$

3. No ponto de descontinuidade na permissividade (x_1), o princípio de continuidade de \mathbf{D} , (I.20), é válido. Porém, como ϵ não é diferenciável em x_1 , as equações (I.26) e (I.28) não são válidas.
4. A escolha das condições de contorno do problema é governada pela situação física que se está modelando. No presente caso, esta escolha está limitada às seguintes alternativas:
- a) Condição de contorno de Dirichlet, onde o valor do potencial escalar elétrico é especificado.
- $$V(0) = V_0, \quad V(1) = V_1 \quad (\text{I.29})$$
- b) Condição de contorno de Neumann, onde o valor do componente normal da densidade de fluxo elétrico é especificado:

$$\underline{n}_0 \cdot D(0) = D_0 \quad , \quad \underline{n}_1 \cdot D(1) = D_1 \quad (I.30)$$

c) Condição de contorno de Cauchy, onde uma combinação linear do componente normal da densidade de fluxo e do potencial são especificados no contorno:

$$\underline{n} \cdot D = k (V - V_0) \quad (I.31)$$

d) Condições de contorno mistas: Condições de contorno de um tipo em uma parcela do contorno e de outro tipo em outra parcela. Por exemplo,

$$V(0) = V_0 \quad e \quad \underline{n}_1 \cdot D(1) = D_1$$

É importante ressaltar que se forem especificadas condições de contorno de Neumann nos dois extremos da barra, os valores estipulados de densidade de fluxo devem obedecer à condição de conservação global do fluxo:

$$\underline{n}_0 \cdot D(0) + \underline{n}_1 \cdot D(1) = \int_0^1 \rho(x) dx$$

para que exista solução. Neste caso, a solução do problema será única a menos de uma constante. Isto é, se V for solução do problema, então

$$V' = V + c$$

, onde c é uma constante arbitrária, também será. Esta arbitrariedade na solução pode ser eliminada estipulando-se o valor do potencial V em um ponto do domínio.

Em suma, tem-se a seguinte formulação matemática para o problema: Dados ϵ , ρ , e as condições de contorno do problema, determinar a função V que satisfaz:

1. A equação diferencial parcial em todos os pontos interiores dos subdomínios regulares:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left[\epsilon \frac{\partial V}{\partial x} \right] = \rho(x) \quad , \quad x \in \Omega_i, \quad i = 1, 2 \quad (I.32a)$$

2. A condição de continuidade de D nos pontos de descontinuidade de ε :

$$\left[\varepsilon \frac{\partial V}{\partial x} \right] = 0, \quad x = x_1 \quad (\text{I.32b})$$

3. As condições de contorno em $x = 0$ e em $x = 1$ (Equações (I.29), ou (I.30), ou (I.31), ou condições de contorno mistas). (I.32c)

I.3.2 A Forma Fraca

O tratamento clássico de equações diferenciais exige que a solução V de (I.32) satisfaça a equação diferencial em *todos* os pontos do domínio. Esta é uma exigência muito forte para o presente caso, devido à existência da descontinuidade em ε .

Para vencer esta dificuldade, reformula-se o problema de contorno de maneira a se admitir condições mais fracas para a solução e suas derivadas.

É importante ressaltar que se existir uma solução clássica ela também será solução fraca. Não se perde nada na reformulação do problema na forma fraca, além de se poder solucionar problemas com dados irregulares (Becker et al., 1981). Além disto, a formulação fraca é a maneira utilizada para se construir a aproximação por elementos finitos.

Suponha-se, inicialmente, o problema (I.32) com ε contínuo e condições de contorno de Dirichlet homogêneas:

$$V(0) = V(1) = 0 \quad (\text{I.33})$$

A formulação fraca pode ser obtida a partir da seguinte formulação forte: determinar a função V tal que a equação diferencial é satisfeita em um sentido de médias ponderadas, isto é:

$$\int_0^1 \left[- \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right] \cdot u \, dx = \int_0^1 \rho(x) \cdot u \, dx, \quad \forall u \in H \quad (\text{I.34})$$

u é uma função pertencente a uma classe de funções de teste H suficientemente regular para que as integrais em (I.34) tenham sentido. O conjunto \mathcal{H} ao qual pertence a solução V é denominado classe das funções admissíveis. A esta

classe pertencem as funções que satisfazem as condições de contorno (I.33) e que sejam suficientemente regulares para que sua derivada segunda, quando multiplicada por uma função de teste u , produza uma função que seja integrável no intervalo $0 < x < 1$. Observe-se que o problema não é simétrico pois as classes H e \mathcal{H} são distintas e em (I.34) V não pode ser intercambiado com u indistintamente.

Para se obter a formulação fraca, efetua-se a integração por partes:

$$\int_0^1 \left[- \frac{\partial}{\partial x} \left[\varepsilon \frac{\partial V}{\partial x} \right] \right] \cdot u \, dx = \int_0^1 \varepsilon \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \, dx - \varepsilon(x) \frac{\partial V}{\partial x} u \Big|_0^1 \quad (\text{I.35})$$

Estabelecendo-se que as funções de teste devem se anular no contorno, a formulação forte (I.34) pode ser substituída pela seguinte formulação fraca: Determinar $V \in H^1(0,1)$, tal que:

$$\int_0^1 \varepsilon \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \, dx = \int_0^1 \rho(x) u \, dx \quad , \quad \forall u \in H^1(0,1) \quad (\text{I.36})$$

onde $H^1(0,1)$ é uma nova classe de funções que será caracterizada a seguir.

A formulação agora é simétrica: a mesma ordem de derivadas nas funções admissíveis e nas funções de teste aparece na integral e $H = \mathcal{H} = H^1(0,1)$.

Como (I.34) contém derivadas de segunda ordem da solução, ao passo que (I.36) contém apenas derivadas de primeira ordem, conclui-se que ao se passar de (I.34) para (I.36) diminui-se a regularidade necessária para a solução, aumentando-se a classe de funções para as quais o problema faz sentido.

Retorna-se, agora, à caracterização da classe $H^1(0,1)$ das funções admissíveis para o problema. Este conjunto contém todas as funções que satisfazem as condições de contorno homogêneas e que são suficientemente regulares para que a integral em (I.36) tenha sentido. O termo mais irregular em (I.36) é

$$\varepsilon \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} .$$

Se V e u são irregulares, certamente suas derivadas são mais irregulares ainda. Como V pode ser qualquer função do conjunto de funções admissíveis, pode-se considerar a possibilidade $u = V$. Então, é necessário que

$$\left[\frac{\partial V}{\partial x} \right]^2 \quad (I.37)$$

seja suficientemente regular para que sua integral seja calculável no intervalo (0,1). Funções satisfazendo esta condição são funções de derivada primeira de quadrado integrável; escreve-se $V \in H^1(0,1)$. Portanto, o conjunto $H_0^1(0,1)$ consta de todas as funções que se anulam nos extremos do intervalo (de onde vem o índice 0 de H_0^1) e cuja derivada primeira tenha quadrado integrável (de onde vem o índice 1 de H_0^1). Portanto, uma função w qualquer pertence a $H_0^1(0,1)$ se:

$$\| w \|_1 = \left[\int_0^1 \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + w^2 \right] dx \right]^{1/2} < \infty, \quad (I.38a)$$

e

$$w(0) = w(1) = 0 \quad (I.38b)$$

A definição de H_0^1 pode ser compactada da seguinte maneira:

$$H_0^1(0,1) = \{ w : w \in H^1(0,1); w(0) = w(1) = 0 \} \quad (I.39)$$

O fato de que H_0^1 é um conjunto é indicado pelas chaves. A notação para um elemento típico do conjunto, no caso w , vem em primeiro lugar. Seguindo o sinal ":" vêm as propriedades satisfeitas pelos elementos do conjunto.

A norma definida por (I.38a) é chamada de "norma de Sobolev". Pode-se mostrar que $H^1(0,1)$ e $H_0^1(0,1)$, equipados com a norma (I.38) são espaços de Sobolev (Oden & Reddy, 1976). Além disto, se for definido um produto escalar compatível com esta norma, tem-se também espaços de Hilbert.

Analisa-se, agora, o problema (I.32) completo. Considera-se que a solução V tem ao menos derivadas de segunda ordem dentro de cada subdomínio Ω_i , devido à regularidade de ε e ρ dentro destes subdomínios. Define-se a função resíduo em cada subdomínio:

$$r(x) = - \frac{\partial}{\partial x} \left[\varepsilon \frac{\partial V}{\partial x} \right] - \rho(x), \quad x \in \Omega_i, \quad i = 1, 2 \quad (I.40)$$

Multiplica-se r por uma função de teste $u \in H$, suficientemente regular, definida sobre o intervalo $0 < x < 1$. Integra-se o resultado por partes sobre cada subdomínio regular Ω_i :

$$\int_{\Omega_i} ru \, dx = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial x} u \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} + \int_{\Omega_i} \varepsilon \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - \int_{\Omega_i} \rho(x)u \, dx, \quad i=1,2 \quad (\text{I.41})$$

onde x_{i-1} e x_i são o ponto inicial e final de cada subdomínio.

Como V é solução do problema, em cada subdomínio o resíduo se anula, isto é:

$$\int_{\Omega_i} ru \, dx = 0, \quad \forall u \in H \quad (\text{I.42})$$

logo:

$$\sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} ru \, dx = 0, \quad \forall u \in H \quad (\text{I.43})$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varepsilon \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \, dx + \varepsilon(0) \frac{\partial V(0)}{\partial x} u(0) + \left[\varepsilon(x_1) \frac{\partial V(x_1)}{\partial x} \right] u(x_1) - \varepsilon(1) \frac{\partial V(1)}{\partial x} u(1) = \\ = \int_0^1 \rho(x) u \, dx, \quad \forall u \in H \quad (\text{I.44}) \end{aligned}$$

Novamente, $[[\cdot]]$ denota o salto da variável no ponto. Levando-se em conta a condição (I.32b), o termo de salto em x_1 é nulo, obtendo-se:

$$\int_0^1 \varepsilon \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \, dx = \varepsilon(1) \frac{\partial V(1)}{\partial x} u(1) - \varepsilon(0) \frac{\partial V(0)}{\partial x} u(0) + \int_0^1 \rho(x)u \, dx, \quad \forall u \in H \quad (\text{I.45})$$

Este resultado é muito importante. Transformou-se o sistema composto pela equação diferencial, condições de salto e condições de contorno em uma única equação na qual todas as características da solução e do problema de dados descontínuos estão representados.

Para especificar totalmente o problema, é necessário, ainda, caracterizar as classes das funções às quais pertencem V e u . Primeiramente, para que a integral em (I.45) tenha sentido, V e u devem pertencer a $H^1(0,1)$. Por fim, as condições de contorno são introduzidas na formulação fraca de duas formas distintas: as condições de contorno de Dirichlet são levadas em conta através da especificação do espaço das funções admissíveis, enquanto as condições de

Neumann e de Cauchy são levadas em conta na própria formulação fraca (Reddy, 1986).

Com condições de contorno de Dirichlet, (I.29), define-se a classe de funções \mathcal{H} :

$$\mathcal{H} = \left\{ w : w \in H^1(0,1) ; w(0) = V_0, w(1) = V_1 \right\} \quad (\text{I.46})$$

a formulação, então, é: achar a função $V \in \mathcal{H}$ tal que:

$$\int_0^1 \varepsilon \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx = \int_0^1 \rho(x) u dx, \quad \forall u \in H^1(0,1) \quad (\text{I.47})$$

Para condições de contorno de Neumann (I.30) ou de Cauchy (I.31), tem-se: achar $V \in H^1(0,1)$ tal que (I.45) seja verificado para todas as funções teste $u \in H^1(0,1)$.

Observações:

1. As classes de funções H^1 e H^0 são espaços vetoriais de funções. O termo espaço vetorial denota uma estrutura linear no seguinte sentido: se c_1 e c_2 são constantes e v e w pertencem a H^1 , então $c_1 v + c_2 w$ também pertence a H^1 . Já a classe de funções \mathcal{H} , definida pela equação (I.46), não é um espaço vetorial devido às condições de contorno não homogêneas. Por exemplo, se u e $v \in \mathcal{H}$, $u+v \notin \mathcal{H}$ pois $u(0) + v(0) = 2V_0$, devido à definição (I.46). Por outro lado, se $w = u-v$, então $w \in H^0$, pois $w(0) = w(1) = 0$. O ponto chave a observar aqui é que se $g \in \mathcal{H}$, qualquer função $u \in \mathcal{H}$ pode ser escrita como $u = g + w$, onde $w \in H^0$. Isto é, a menos da função g , \mathcal{H} e H^0 são compostas pelas mesmas funções. Usando a terminologia matemática, \mathcal{H} é uma variedade linear de H^0 (Luenberger, 1969).
2. Equivalência entre a forma fraca e as formulações variacionais: A formulação fraca é frequentemente chamada de "formulação variacional" por um abuso de linguagem que será justificado e explicado. Para isto, são introduzidas algumas notações adicionais com o intuito de simplificar as deduções subsequentes. Considere-se a seguinte representação da forma fraca (I.47):

$$B(V, u) = f(u) \quad , \quad \forall u \in H^1_0(0, 1) \quad (I.48)$$

onde $B(V, u)$ é a forma bilinear simétrica:

$$B(V, u) = \int_0^1 \varepsilon \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

e $f(u)$ é o funcional linear :

$$f(u) = \int_0^1 \rho(x) u dx$$

A notação (I.48) é extremamente concisa. Ao mesmo tempo ela representa propriedades matemáticas essenciais e conduz a um entendimento mais simples de problemas variacionais. Vários tipos de problemas físicos podem ser descritos por formas idênticas a (I.48). Por isto, as idéias a serem desenvolvidas e os resultados obtidos têm grande generalidade.

Considere-se, agora, o funcional quadrático:

$$I(V) = B(V, V) - 2 f(V) \quad (I.49)$$

onde $V \in \mathcal{H}$ (I.46). Para $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in H^1_0(0, 1)$, $V + \alpha u \in \mathcal{H}$. Usando as propriedades de bilinearidade e simetria de B , e a linearidade de f , tem-se:

$$I(V + \alpha u) = I(V) + 2 \alpha (B(V, u) - f(u)) + \alpha^2 B(u, u) \quad (I.50)$$

A primeira variação $\delta I(V, u)$ se anula no ponto de mínimo do funcional $I(V)$, isto é:

$$\delta I(V, u) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} [I(V + \alpha u) - I(V)] = 2 [B(V, u) - f(u)] = 0 \quad (I.51)$$

Ou seja, o ponto de mínimo de I é $V \in \mathcal{H}$, tal que:

$$B(V, u) = f(u) \quad , \quad \forall u \in H^1_0(0, 1) \quad (I.52)$$

Nota-se que (I.52) é idêntico a (I.48), isto é, a formulação variacional e a forma fraca são equivalentes (de onde vem a propensão de se chamar de "formulação variacional" a forma fraca).

Na realidade, a equivalência só existe quando B é simétrica. Porém, seguindo este abuso de linguagem, chamar-se-á de "formulação variacional" o sistema (I.48), mesmo quando B não for simétrica. Pode-se pensar, neste caso, em uma "formulação variacional abstrata" (Oden & Reddy, 1976).

I.3.3 O método de Galerkin

Como visto na seção anterior, a resolução do problema variacional consiste na procura da função V, para a qual (I.48) é verificada. Esta procura é feita em \mathcal{H} (definido por (I.46)), uma classe de funções de dimensão infinita. Por isto, nesta classe, a procura é extremamente difícil.

O método de Galerkin consiste na procura de uma solução aproximada para (I.48) em uma classe de funções de dimensão finita. Para exprimir este fato de maneira um pouco mais formal, seja $\{N_i\}$, $i=1, N$, uma família de funções do espaço $H^1(0,1)$. Explicita-se, mais tarde, como estas "funções de base" são selecionadas. Seja $H^h(0,1)$ o conjunto de todas as combinações lineares do tipo:

$$w^h = \sum_{i=1}^N c_i N_i \quad (I.53)$$

O superscrito h se refere a uma associação de H^h com uma malha, ou discretização do domínio, à qual é associado o parâmetro h, um comprimento característico da malha (Becker et al, 1981).

Suponha-se que $H^h(0,1)$ e \mathcal{H} tenham funções em comum. Define-se:

$$\mathcal{H}^h = \mathcal{H} \cap H^h(0,1) \quad (I.54)$$

e

$$H_0^h = H_0^1(0,1) \cap H^h(0,1) \quad (I.55)$$

Desta maneira, \mathcal{H}^h e H_0^h são subconjuntos de \mathcal{H} e H_0^1 , respectivamente.

O método de Galerkin consiste na procura de $V^h \in \mathcal{H}^h$, tal que:

$$B(V^h, u^h) = f(u^h) \quad , \forall u^h \in H_0^h(0,1) \quad (I.56)$$

isto é:

$$B \left[\sum_{i=1}^N c_i N_i, \sum_{j=1}^N b_j N_j \right] = f \left[\sum_{j=1}^N b_j N_j \right] \quad (I.57)$$

utilizando-se a bilinearidade de B e a linearidade de f:

$$\sum_{j=1}^N b_j \left[\sum_{i=1}^N c_i B(N_i, N_j) - f(N_j) \right] = 0 \quad (I.58)$$

Como os b_j são arbitrários, obtém-se o sistema de equações lineares:

$$\sum_{i=1}^N c_i K_{ij} = f(N_j), \quad j=1, N \quad (I.59)$$

onde

$$K_{ij} = B(N_i, N_j) \quad (I.60)$$

Para o problema (I.47) tem-se:

$$K_{ij} = \int_0^1 \varepsilon \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} dx \quad (I.61)$$

$$f(N_j) = \int_0^1 \rho(x) N_j dx \quad (I.62)$$

Resolvendo-se o sistema (I.59) determina-se os coeficientes c_i da aproximação de Galerkin.

Observações:

1. Ortogonalidade do erro: Como (I.48) é verificada para qualquer $u \in H_0^1(0,1)$, ela é verificada, em particular, para $u^h \in H_0^h(0,1) \subset H_0^1(0,1)$. Portanto:

$$B(V, u^h) = f(u^h), \quad \forall u^h \in H_0^h(0,1) \quad (I.63)$$

Subtraindo-se (I.56) de (I.63), obtém-se:

$$B(V - V^h, u^h) = 0, \quad \forall u^h \in H_0^h(0,1) \quad (I.64)$$

Pode-se interpretar este resultado como uma condição de ortogonalidade: o erro de aproximação $e = V - V^h$ é ortogonal ao subespaço $H_0^h(0,1)$ no sentido de (I.64), isto é, com relação ao mapeamento bilinear B .

2. Melhor aproximação: Suponha que $B(V,u)$ seja simétrica e positiva definida (i.e., $B(u,u) \geq 0, = 0 \Leftrightarrow u=0$). Sejam V^h e w^h pertencentes a \mathcal{H}^h . V^h é a solução de (I.56) e w^h é arbitrário. Seja $u^h = V^h - w^h$, $u^h \in H_0^h(0,1)$. Seja V a solução de (I.48). Então,

$$\begin{aligned} B(V - w^h, V - w^h) &= B((V - V^h) + (V^h - w^h), (V - V^h) + (V^h - w^h)) = \\ &= B((V - V^h) + u^h, (V - V^h) + u^h) = \\ &= B(V - V^h, V - V^h) + B(V^h - w^h, V^h - w^h) \end{aligned} \quad (I.65)$$

Na última passagem, foi utilizada a propriedade de ortogonalidade do erro, equação (I.64). Como V^h é fixo e B é positiva definida, a equação (I.65) indica que a menor distância entre V e w^h (no sentido da métrica induzida por B) ocorre quando $w^h = V^h$. Em outras palavras, de todas as funções $w^h \in \mathcal{H}^h$ aquela que mais se aproxima da solução real V do problema é a aproximação de Galerkin V^h .

I.3.4 O Método de elementos finitos

O método de Galerkin é extremamente poderoso, porém ineficaz se não se dispuser de uma técnica sistemática para a construção das funções N_i da base de $H^h(0,1)$. Para problemas geometricamente complexos, a seleção das funções de base N_i é uma tarefa formidável. Mesmo em casos onde as funções de base são conhecidas, o cálculo dos coeficientes K_{ij} (Eq. I.60) não pode ser automatizado porque as funções são dependentes do problema. O método de Galerkin só é efetivo se associado a uma técnica sistemática de construção de funções de base simples, para domínios arbitrários. Uma das técnicas mais interessantes é fornecida pelo método de elementos finitos.

No método de elementos finitos, o domínio é, primeiramente, particionado em subdomínios simples conhecidos por elementos finitos. Em cada elemento são

selecionados alguns pontos - chamados de nós. A cada um dos nós está associada uma função de forma local η_i -normalmente um polinômio de grau baixo - , que pode ser construída de maneira sistemática. η_i é igual a 1 sobre o nó i e 0 nos demais nós. A solução do problema sobre o elemento é aproximada pela combinação linear destas funções.

A construção das funções de base globais, N_i , pode ser encarada como o processo de acoplamento das funções de forma locais nos nós. As funções de base globais são distintas de zero somente nos elementos contendo o nó localizado em x_i , isto é, têm suporte compacto (Reddy, 1986). Além disto, elas devem ser suficientemente regulares para pertencer a $H^1(0,1)$. Por fim, os parâmetros c_i , que definem a solução aproximada V^h , devem ser precisamente os valores de $V^h(x)$ nos nós. Então, a aproximação (I.53) para w^h se escreve:

$$w^h = \sum_{i=1}^N w_i N_i \quad (\text{I.66})$$

onde w_i é o valor de w^h no nó i . Torna-se fácil a caracterização dos elementos pertencentes a \mathcal{K}^h e $H_0^h(0,1)$ através das propriedades dos graus de liberdade w_i . De fato, se $w_i = 0$ nos nós pertencentes ao contorno do problema, a função resultante pertence a $H_0^h(0,1)$. Por outro lado, se para o nó correspondente a $x=0$, $w_i = V_0$ e, para o nó correspondente a $x = 1$, $w_i = V_1$, tem-se uma função pertencente a \mathcal{K}^h .

Detalhes sobre o método de elementos finitos são encontrados em alguns livros básicos (Becker et al, (1981); Bastos, (1989); Chung, (1977); Dhatt & Touzot, (1984); Hughes, (1987); Zienkiewicz, (1977)), e não serão repetidos neste trabalho.

II.1 Introdução

Neste capítulo, faz-se uma revisão dos métodos utilizados para a resolução dos problemas estáticos tridimensionais em eletromagnetismo.

Problemas estáticos são aqueles nos quais já se atingiu um regime permanente estático, onde as variações temporais dos campos eletromagnéticos não mais existem.

Por exemplo, as equações do problema eletrostático podem ser obtidas das equações de Maxwell (I.1 a I.4) e das relações constitutivas (I.5) a (I.7) anulando-se os termos variáveis no tempo e desprezando-se as equações que não influenciam o fenômeno. Obtém-se:

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0 \quad (\text{II.1})$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho \quad (\text{II.2})$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (\text{II.3})$$

Já o problema magnetostático é descrito pelas equações:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (\text{II.4})$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (\text{II.5})$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \mathbf{B}_r \quad (\text{II.6})$$

O problema eletrostático apresenta equações semelhantes às do caso magnetostático sem correntes, podendo ser calculado facilmente por um programa magnetostático tridimensional. Por isto, neste trabalho somente é feita a análise do problema mais geral, isto é, o magnetostático.

Muitos métodos foram propostos na literatura para a resolução por elementos finitos deste problema. Os principais foram a utilização do potencial escalar total, do potencial escalar reduzido, do potencial vetor magnético e do potencial escalar reduzido associado ao potencial escalar total. A seguir, discute-se cada um destes métodos, utilizando os conceitos apresentados no

capítulo I, generalizados para o problema tridimensional.

II.2. Utilização do potencial escalar total

II.2.1 Modelamento matemático: Formulação clássica

Se no domínio, Ω , onde se estuda o problema magnetostático não existirem correntes, a equação (II.4) torna-se:

$$\text{rot } \mathbf{H} = 0 \quad (\text{II.7})$$

Desta maneira, pode-se definir um potencial escalar magnético, ψ , tal que (Bastos, 1984):

$$\mathbf{H} = -\text{grad } \psi \quad (\text{II.8})$$

Esta relação, que normalmente é admitida sem discussões, não é tão direta. É necessário que Ω seja "simplesmente conexo" (Apostol, 1957), isto é, sem "furos". Isto significa que todo circuito fechado dentro de Ω deve ser redutível a um ponto por deformação contínua (o que não é verificado, por exemplo, em um toroide). Maiores detalhes são encontrados nos trabalhos de Kotiuga (1982) e Deschamps (1981).

Aplicando-se (II.8) em (II.6) e (II.5), obtém-se:

$$\text{div}(-\mu \text{grad} \psi + \mathbf{B}_r) = 0$$

isto é:

$$\text{div}(\mu \text{grad} \psi) = \text{div}(\mathbf{B}_r) \quad (\text{II.9})$$

A equação (II.9) descreve o fenômeno nos pontos ordinários de Ω . Nos pontos de descontinuidade de μ são válidas as relações (I.16) e (I.17), isto é:

$$\underline{n} \cdot [-\mu \text{grad} \psi + \mathbf{B}_r] = 0 \quad (\text{II.10})$$

$$\underline{n} \wedge [\text{grad } \psi] = 0 \quad (\text{II.11})$$

A equação (II.10) implica a descontinuidade do componente normal de $\text{grad} \psi$

na interface entre dois meios de permeabilidade magnética distintas. Já a equação (II.11) tem como conseqüência a continuidade tangencial de $\text{grad}\psi$. Esta condição é automaticamente satisfeita por um potencial ψ contínuo.

Na fronteira de Ω , Γ , tem-se as seguintes condições de contorno:

a) Condição de contorno de Dirichlet:

$$\psi = \psi_0, \text{ em } \Gamma_1 \quad (\text{II.12})$$

b) Condição de contorno de Neumann:

$$-\mu \frac{\partial \psi}{\partial \underline{n}} + \mathbf{B}_r \cdot \underline{n} = g, \text{ em } \Gamma_2 \quad (\text{II.13})$$

onde:

Γ_1 - Parcela de Γ onde se impõem condições de contorno de Dirichlet;

Γ_2 - Parcela de Γ onde se impõem condições de contorno de Neumann.

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma; \quad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$$

Normalmente, a condição de contorno de Neumann é estipulada com indução tangente à fronteira, isto é, indução normal nula:

$$-\mu \frac{\partial \psi}{\partial \underline{n}} + \mathbf{B}_r \cdot \underline{n} = 0, \text{ em } \Gamma_2 \quad (\text{II.14})$$

Além disto, se for tomado $\psi = \psi_0$ constante sobre Γ_1 , então:

$$\mathbf{H} \wedge \underline{n} = -\text{grad}\psi \wedge \underline{n} = 0, \text{ em } \Gamma_1$$

isto é, o campo magnético é perpendicular a Γ_1 .

Seja o problema tridimensional representado esquematicamente na figura II.1. Suponha-se μ_1 e μ_2 contínuos dentro de cada subregião Ω_1 e Ω_2 e que haja descontinuidade de μ na interface Γ_m entre Ω_1 e Ω_2 .

A formulação clássica para este problema é: ache a função ψ que satisfaça:

1. A equação diferencial parcial em pontos interiores às subregiões regulares Ω_1 e Ω_2 .

$$\text{div}(\mu \text{grad}\psi) = \text{div}(\mathbf{B}_r), \text{ em } \Omega_i, i=1,2 \quad (\text{II.15a})$$

2. A condição de salto em pontos da interface Γ_m :

$$\underline{n} \cdot [-\mu \operatorname{grad} \psi + \mathbf{B}_r] = 0 \quad , \text{ em } \Gamma_m \quad (\text{II.15b})$$

3. A condição de contorno de Dirichlet em Γ_1

$$\psi = \psi_0 \quad , \text{ em } \Gamma_1 \quad (\text{II.15c})$$

4. A condição de contorno de Neumann em Γ_2

$$-\mu \frac{\partial \psi}{\partial \underline{n}} + \mathbf{B}_r \cdot \underline{n} = 0 \quad , \text{ em } \Gamma_2 \quad (\text{II.15d})$$

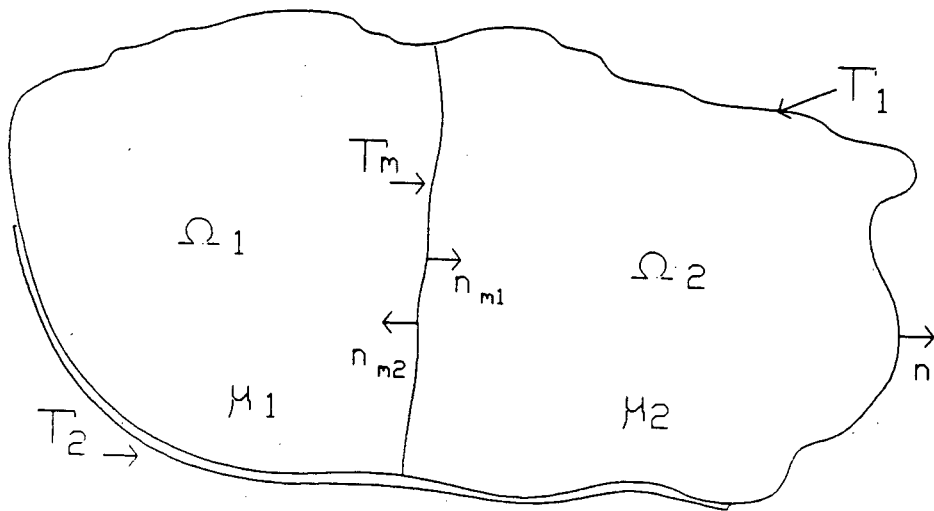


Figura II.1 Representação esquemática de um problema tridimensional contendo uma interface entre dois materiais de permeabilidades magnéticas diferentes.

II.2.2 A forma fraca

A forma fraca para o problema magnetostático descrito pelo potencial escalar total pode ser obtida utilizando-se uma técnica semelhante à empregada na seção I.3.. Define-se o resíduo :

$$r = \operatorname{div}(-\mu \operatorname{grad} \psi + \mathbf{B}_r) = 0 \quad (\text{II.16})$$

em cada subdomínio regular de Ω . Multiplica-se r por uma função de teste $u \in H(\Omega)$, suficientemente regular. Utiliza-se, então, a fórmula de Green (Becker et al., 1981) sobre cada subdomínio:

$$\int_{\Omega_i} \operatorname{div}(-\mu \operatorname{grad} \psi + \mathbf{B}_r) u \, d\Omega =$$

$$= \int_{\Omega_i} \operatorname{grad} u \cdot (\mu \operatorname{grad} \psi - \mathbf{B}_r) \, d\Omega + \int_{\partial\Omega_i} (-\mu \operatorname{grad} \psi + \mathbf{B}_r) \cdot \underline{n}_i u \, d\Gamma = 0 \quad (\text{II.17})$$

onde $\partial\Omega_i$ é a fronteira da região i e \underline{n}_i é a normal à região i . Ao se somar a contribuição dos dois subdomínios, obtém-se:

$$\int_{\Omega} \operatorname{grad} u \cdot (\mu \operatorname{grad} \psi - \mathbf{B}_r) \, d\Omega + \sum_{i=1}^2 \int_{\partial\Omega_i} (-\mu \operatorname{grad} \psi + \mathbf{B}_r) \cdot \underline{n}_i u \, d\Gamma = 0 \quad (\text{II.18})$$

Note-se que as fronteiras $\partial\Omega_i$ consistem de duas partes: as partes de $\partial\Omega_i$ que não coincidem com a interface Γ_m são denotadas $\partial\Omega_i - \Gamma_m$, $i=1,2$. A outra parte coincide com Γ_m . Além disto,

$$\bigcup_i (\partial\Omega_i - \Gamma_m) = \Gamma \quad (\text{II.19})$$

e em Γ_m a equação (II.15b) deve ser verificada. Portanto, (II.18) se reduz a:

$$\int_{\Omega} \operatorname{grad} u \cdot (\mu \operatorname{grad} \psi - \mathbf{B}_r) \, d\Omega + \int_{\Gamma} (-\mu \operatorname{grad} \psi + \mathbf{B}_r) \cdot \underline{n} u \, d\Gamma = 0 \quad (\text{II.20})$$

Esta equação pode ser generalizada para problemas envolvendo mais de duas regiões de permeabilidade magnética regular de maneira bastante simples (Bossavit, 1988(e)).

São definidas, agora, as seguintes classes de funções:

$$\mathcal{H} = \{ w : w \in H^1(\Omega) ; w = \psi_0 \text{ em } \Gamma_1 \} \quad (\text{II.21})$$

$$\mathcal{H}_0 = \{ w : w \in H^1(\Omega) ; w = 0 \text{ em } \Gamma_1 \} \quad (\text{II.22})$$

onde $H^1(\Omega)$ é o espaço das funções que têm derivadas primeiras suficientemente regulares para que seu quadrado seja integrável sobre Ω . Isto é, w deve ser tal que:

$$\|w\|_1 = \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + w^2 \right] d\Omega < \infty \quad (\text{II.23})$$

A formulação "variacional" do problema, então, é: achar $\psi \in \mathcal{H}$, tal que

$$\int_{\Omega} \mu \text{grad} \psi \cdot \text{grad} u \, d\Omega = \int_{\Omega} B_{\Gamma} \cdot \text{grad} u \, d\Omega, \quad \forall u \in \mathcal{H}_0 \quad (\text{II.24a})$$

ou, usando a notação da seção (I.3):

$$B(\psi, u) = f(u), \quad \forall u \in \mathcal{H}_0 \quad (\text{II.24b})$$

Observações:

1. É importante notar que nesta formulação o termo de contorno desapareceu porque:

a) em Γ_1 , $u=0$, pois $u \in \mathcal{H}_0$

b) em Γ_2 , $-\mu \text{grad} \psi + B_{\Gamma} = 0$

e $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$

2. Unicidade da solução: A unicidade da solução pode ser provada de maneira simples. Suponha existirem em \mathcal{H} dois potenciais, ψ_1 e ψ_2 , distintos, tais que (II.24) seja verificado. Escreve-se (II.24a) para cada um deles e subtrai-se membro a membro, obtendo-se

$$\int_{\Omega} \mu \text{grad}(\psi_1 - \psi_2) \cdot \text{grad} u \, d\Omega = 0, \quad \forall u \in \mathcal{H}_0 \quad (\text{II.25})$$

mas $\psi_1 - \psi_2 \in \mathcal{H}_0$. Portanto, u pode ser escolhido como $\psi_1 - \psi_2$. Logo:

$$\int_{\Omega} \mu \left[\text{grad}(\psi_1 - \psi_2) \right]^2 d\Omega = 0 \quad (\text{II.26})$$

Isto é, $\text{grad}(\psi_1 - \psi_2) = 0$ sobre todo o domínio Ω . Portanto:

$$\psi_1 = \psi_2 + c$$

onde c é uma constante arbitrária. Mas, como ψ_1 e $\psi_2 \in \mathcal{H}$, $\psi_1 = \psi_2 = \psi_0$ em Γ_1 ; portanto $c = 0$, isto é $\psi_1 = \psi_2$.

II.2.3 Aplicação dos métodos de Galerkin e de elementos finitos

A aplicação dos métodos de Galerkin e de elementos finitos à forma fraca (II.24) é trivial. Como feito na seção (I.3.3), procura-se a solução aproximada de (II.24) em uma classe de funções de dimensão finita \mathcal{K}^h contida em \mathcal{K} . As funções de base N_i são fornecidas pelo método de elementos finitos.

Para a aplicação do método, é necessário discretizar-se Ω em uma malha de elementos finitos. Pode-se definir a malha por uma seqüência de transformações que, a partir de um elemento padrão $\bar{\Omega}$, geram cada elemento finito Ω_e . As funções de forma locais, η_i , são imagens das funções de forma polinomiais $\bar{\eta}_i$ definidas sobre $\bar{\Omega}$. Os pontos nodais são escolhidos de modo que as funções de base globais N_i sejam contínuas nas fronteiras entre elementos.

Neste trabalho, utiliza-se um elemento finito isoparamétrico, hexaédrico, 8 nós, com funções de forma de Lagrange trilineares, para as quais existe farta bibliografia (Bathe, 1982; Bastos, 1989; Chung, 1977; Dhatt & Touzot, 1984; Hughes, 1987; Raizer, 1987; Zienkiewicz, 1977). Por este motivo, apenas as suas características principais serão revistas. O elemento de referência $\bar{\Omega}$ é um cubo, mapeado pelas funções de forma no elemento hexaédrico Ω_e (Fig. II.2), utilizando-se as relações:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^8 \eta_j x_j \\ y &= \sum_{j=1}^8 \eta_j y_j \\ z &= \sum_{j=1}^8 \eta_j z_j \end{aligned} \quad (\text{II.27})$$

onde x_j , y_j e z_j são as coordenadas nodais.

As funções de base globais verificam a propriedade:

$$N_i(x_j, y_j, z_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (\text{II.28})$$

Logo, se

$$\psi^h = \sum_{i=1}^N \psi_i N_i \quad (\text{II.29})$$

então:

$$\psi_i = \psi^h(x_i, y_i, z_i) \quad (\text{II.30})$$

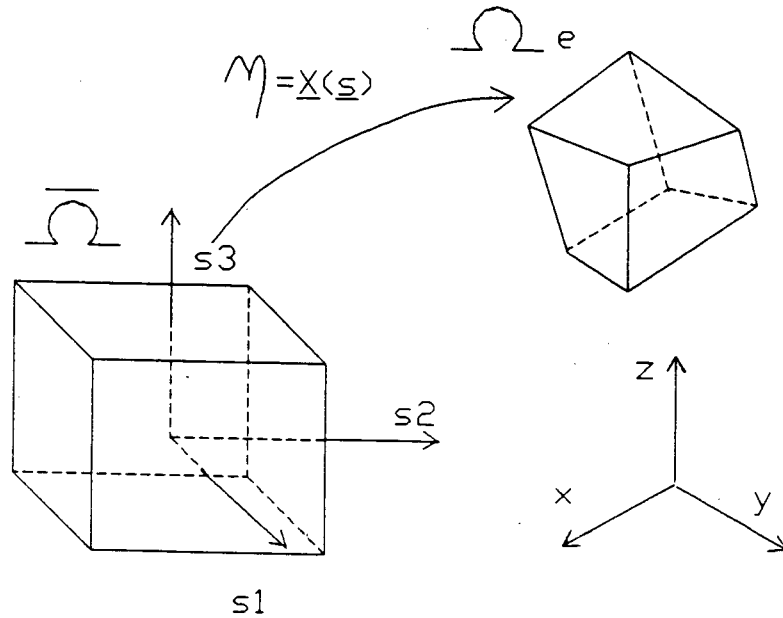


Fig. II.2. Elemento de referência $\bar{\Omega}$, mapeado pelas funções de forma em um elemento hexaédrico correspondente.

Portanto, pode-se definir:

$$\mathcal{H}^h(\Omega) = \left\{ w^h : w^h = \sum_{i=1}^N \psi_i N_i ; \psi_i = \psi_0, \text{ se o nó } i \in \Gamma_1 \right\} \quad (\text{II.31})$$

$$\mathcal{H}_0^h(\Omega) = \left\{ u^h : u^h = \sum_{i=1}^N u_i N_i ; u_i = 0, \text{ se o nó } i \in \Gamma_1 \right\} \quad (\text{II.32})$$

e a aproximação por elementos finitos de (II.24) é dada por: achar $\psi^h \in \mathcal{H}^h(\Omega)$, tal que:

$$\int_{\Omega} \mu \text{grad}(\psi^h) \cdot \text{grad}(u^h) \, d\Omega = \int_{\Omega} B_{\Gamma} \cdot \text{grad}(u^h) \, d\Omega \quad , \quad \forall u^h \in \mathcal{H}_0^h(\Omega) \quad (\text{II.33a})$$

ou

$$B(\psi^h, u^h) = f(u^h), \quad \forall u^h \in \mathcal{H}_0^h(\Omega) \quad (\text{II.33b})$$

Esta relação pode ser transformada, como visto na seção I.3.3, no seguinte sistema matricial:

$$\sum_{j=1}^N K_{ij} \psi_j = f_i, \quad i = 1, N \quad (\text{II.34})$$

onde:

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \mu \text{grad}(N_i) \cdot \text{grad}(N_j) \, d\Omega = B(N_i, N_j) \quad (\text{II.35})$$

$$f_i = \int_{\Omega} B_r \cdot \text{grad}(N_i) \, d\Omega = f(N_i) \quad (\text{II.36})$$

Observações:

1. Condições de contorno: Pela definição de $\mathcal{H}_0^h(\Omega)$, vê-se que $u^h(x_i, y_i, z_i) = 0$, \forall nó $i \in \Gamma_1$. Conclui-se que os termos K_{ij} e f_i correspondentes à função de interpolação N_i serão nulos. Ou seja, a linha i pode ser retirada da matriz K . Conseqüentemente, o número de equações de (I.34) não é N e sim $neq = N - NCOND$, onde $NCOND$ é o número de nós situados na fronteira Γ_1 . Note-se, porém, que ψ_i é distinto de zero nesta fronteira (Eq. II.31). Portanto, o termo K_{ji} não é nulo. Este fato, que poderia levar a uma quebra de simetria na matriz K , é evitado simplesmente pela não adição do termo K_{ji} à matriz global, e pela subtração do termo $K_{ji}\psi_i$ de f_j (Dhatt & Touzot, 1984). Como resultado, a matriz K tem dimensão $neq \times neq$ e só contém informações referentes aos graus de liberdade desconhecidos.
2. Propriedades da matriz K :
 - a) Simetria: Como a formulação "variacional" é simétrica e levando-se em conta a Observação 1., obtém-se uma matriz simétrica, $neq \times neq$, na formulação por elementos finitos.
 - b) Somabilidade: A integração para a obtenção de K_{ij} não precisa ser feita globalmente sobre Ω , podendo ser feita elemento por elemento e

depois somando-se ("condensando-se") a contribuição de cada elemento na matriz K global.

- c) Esparsidade: Para funções N_i e N_j que não compartilham um mesmo elemento, tem-se $K_{ij}=0$. Isto implica que numa malha com muitos elementos, a maior parte dos K_{ij} vai ser nulo, isto é, a matriz K é esparsa.
- d) Matriz positiva definida: Uma matriz K, $neq \times neq$ é definida positiva se:

i) $c^T K c \geq 0$, \forall vetor c de dimensão neq;

ii) $c^T K c = 0$, implica que $c = 0$.

Devido às características da formulação, a matriz K é positiva definida. A prova é simples:

- i) Seja c um vetor arbitrário de dimensão neq, onde neq, definido na observação 1, é o número de equações independentes do sistema. Utiliza-se c para construir um membro de $H^0(\Omega)$:

$$w^h = \sum_{i=1}^{neq} c_i N_i$$

onde c_i é um dos componentes do vetor c. Mas:

$$\begin{aligned} c^T K c &= \sum_{i,j=1}^{neq} c_i K_{ij} c_j \\ &= \sum_{i,j=1}^{neq} c_i B(N_i, N_j) c_j \end{aligned}$$

Utilizando a propriedade de bilinearidade de B, obtém-se:

$$\begin{aligned} &= B\left(\sum_{i=1}^{neq} c_i N_i, \sum_{j=1}^{neq} c_j N_j\right) \\ &= B(w^h, w^h) \end{aligned}$$

Usando a definição de B, obtém-se:

$$= \int_{\Omega} \mu (\text{grad} w^h)^2 d\Omega \geq 0$$

ii) Se $c^T K c = 0$,

$$\int_{\Omega} \mu (\text{grad} w^h)^2 d\Omega = 0$$

Portanto, $w^h = \text{constante}$. Mas $w^h \in H_0^1(\Omega)$, então, w^h é nulo, isto é, $c = 0$.

É importante ressaltar que uma matriz positiva definida possui inversa única, isto é, o sistema (II.34) possui solução única (Lascaux & Théodor, 1986).

3. Solução do sistema de equações: Deve-se utilizar para a resolução do sistema de equações (II.34) um método que aproveite ao máximo as características da matriz K . Vários métodos podem ser utilizados, como a eliminação de Gauss, a fatorização de Cholesky ou o método de gradientes conjugados. Este método será discutido no capítulo V.
4. Cálculo das integrais em II.35 e II.36: Através de transformações geométricas, pode-se levar o elemento distorcido Ω_e de volta ao elemento padrão $\bar{\Omega}$ (Becker et al., 1981 ; Raizer, 1987). Neste elemento a integração é feita mais facilmente do que no elemento distorcido, e pode ser utilizado um método de integração numérica como, por exemplo, o método de quadratura de Gauss (Dhatt & Touzot, 1984).

II.3 Utilização do potencial vetor magnético

II.3.1 Modelamento matemático: Formulação clássica

O método de cálculo de campos magnetostáticos 3-D utilizando o potencial escalar total só pode ser empregado se na região de estudo não existirem correntes elétricas. Este fato limita a sua utilização a poucos casos. A formulação utilizando o potencial vetor magnético elimina este problema.

Este método é a extensão para geometrias tridimensionais de um método muito utilizado em 2 dimensões. Em 2-D o potencial vetor possui apenas 1 componente ortogonal ao plano de análise (Bastos, 1989). Para problemas 3-D todos os 3 componentes do vetor devem ser calculados. Sob este ponto de vista, a utilização do potencial vetor é menos interessante que a utilização de potenciais escalares. Apesar disto, este é um método que ainda é utilizado por vários grupos de pesquisa em cálculo de campos eletromagnéticos (Chari et al., 1981 & 1982; Coulomb, 1981; Demerdash et al., 1981(a) & (b)).

A equação (II.5)

$$\text{div } \mathbf{B} = 0$$

implica na existência de um potencial vetor magnético, \mathbf{A} , tal que:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (\text{II.37})$$

substituindo-se esta expressão em (II.6) e (II.4), obtém-se:

$$\text{rot}(\nu \text{ rot } \mathbf{A}) = \mathbf{J} + \text{rot}(\nu \mathbf{B}_r) \quad (\text{II.38})$$

onde ν é a relutividade magnética, igual ao inverso da permeabilidade magnética μ .

A equação (II.38) descreve o fenômeno nos pontos ordinários do domínio Ω . Nos pontos de descontinuidade de ν (Γ_m) são válidas as relações (I.16) e (I.17), isto é:

$$[[\text{rot } \mathbf{A}]]. \underline{n} = 0 \quad (\text{II.39})$$

$$[[\nu(\text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{B}_r)]]. \wedge \underline{n} = 0 \quad (\text{II.40})$$

As equações acima têm por consequência a continuidade do componente normal do $\text{rot } \mathbf{A}$ e a descontinuidade dos componentes tangenciais do $\text{rot } \mathbf{A}$. A equação (II.39) é satisfeita automaticamente por um potencial com componentes tangenciais contínuos.

Para completar a especificação do problema, condições de contorno apropriadas devem ser especificadas:

a) Condição de contorno de Dirichlet:

$$\mathbf{A} \wedge \underline{n} = \underline{a} \wedge \underline{n} \quad , \text{ em } \Gamma_1 \quad (\text{II.41})$$

onde \underline{a} é um vetor arbitrário.

b) Condição de contorno de Neumann:

$$\nu (\text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{B}_r) \wedge \underline{n} = \underline{h} \wedge \underline{n} \quad , \text{ em } \Gamma_2 \quad (\text{II.42})$$

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma \quad ; \quad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$$

onde \underline{h} é um vetor arbitrário.

É importante notar que a equação (II.38) associada às condições de contorno (II.41 e II.42) não são suficientes para assegurar a unicidade do potencial vetor. De fato, seja

$$\mathbf{A}_g = \mathbf{A} + \text{grad } \phi \quad (\text{II.43})$$

com

$$\phi = \phi_0 \quad , \text{ constante em } \Gamma_1 \quad (\text{II.44})$$

ϕ contínuo, com derivadas parciais contínuas. Por conseqüência, as seguintes relações são válidas:

$$\text{rot}(\nu \text{ rot } \mathbf{A}_g) = \text{rot}(\nu \text{ rot } \mathbf{A})$$

tendo em vista que $\text{rot}(\text{grad } \phi) = 0$.

$$\mathbf{A}_g \wedge \underline{n} = \mathbf{A} \wedge \underline{n} + \text{grad } \phi \wedge \underline{n} = \mathbf{A} \wedge \underline{n} \quad , \text{ em } \Gamma_1$$

tendo em vista que $\text{grad } \phi$ é perpendicular à fronteira Γ_1 .

$$\nu (\text{rot } \mathbf{A}_g - \mathbf{B}_r) \wedge \underline{n} = \nu (\text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{B}_r) \wedge \underline{n} \quad , \text{ em } \Gamma_2$$

Logo, \mathbf{A}_g também é solução de (II.38) sujeito a (II.40), (II.41) e (II.42). Isto é, a solução do problema não é única. Para se eliminar este problema, são estipuladas duas condições adicionais sobre \mathbf{A} :

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \operatorname{div} \mathbf{b} \quad , \text{ em } \Omega \quad (\text{II.45})$$

$$\mathbf{A} \cdot \underline{\mathbf{n}} = \mathbf{b} \cdot \underline{\mathbf{n}} \quad , \text{ em } \Gamma_3 \quad (\text{II.46})$$

onde \mathbf{b} é uma função vetorial qualquer, suficientemente derivável e Γ_3 é uma parcela da fronteira Γ .

Tomando-se o *div* de ambos os lados da equação (II.43), conclui-se que:

$$\operatorname{div}(\mathbf{A} - \mathbf{A}g) = \operatorname{div} \operatorname{grad} \phi = \operatorname{div}(\mathbf{b} - \mathbf{b}) = 0 \quad , \text{ em } \Omega \quad (\text{II.47})$$

Sobre a fronteira Γ_3 , efetua-se o produto escalar entre \mathbf{A} e $\underline{\mathbf{n}}$, obtendo-se:

$$(\mathbf{A} - \mathbf{A}g) \cdot \underline{\mathbf{n}} = \frac{\partial \phi}{\partial \underline{\mathbf{n}}} = (\mathbf{b} - \mathbf{b}) \cdot \underline{\mathbf{n}} = 0 \quad , \text{ em } \Gamma_3 \quad (\text{II.48})$$

O problema composto por (II.47), (II.48) e (II.44) estará sobre especificado se

$$\Gamma_3 \cap \Gamma_1 \neq \emptyset$$

Portanto, é necessário que

$$\Gamma_3 \subseteq \Gamma_2$$

Como o objetivo aqui é restringir ao máximo a solução, toma-se

$$\Gamma_3 = \Gamma_2$$

Portanto, o potencial ϕ deve satisfazer:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \phi = 0 \quad , \text{ em } \Omega \quad (\text{II.49a})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \underline{\mathbf{n}}} = 0 \quad , \text{ em } \Gamma_2 \quad (\text{II.49b})$$

$$\phi = \phi_0 \quad , \text{ constante em } \Gamma_1 \quad (\text{II.49c})$$

A solução de (II.49) é $\phi = \phi_0$, constante em Ω . Portanto $\operatorname{grad} \phi = 0$ e $\mathbf{A} = \mathbf{A}g$: a solução é única. As condições (II.45) e (II.46) são estipuladas para \mathbf{b} qualquer. Portanto, pode-se tomar $\mathbf{b} = 0$. Com isto, a condição (II.45) passa a

ser a condição de Coulomb, ou calibre (gauge) de Coulomb, $\text{div } \mathbf{A} = 0$. Além disto, a condição de contorno (II.42) normalmente é tomada com $\underline{h} \wedge \underline{n} = 0$, isto é:

$$\nu (\text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{B}_r) \wedge \underline{n} = 0 \quad , \text{ em } \Gamma_2 \quad (\text{II.50})$$

Com base nestes resultados, passa-se à análise do problema da figura II.1. A formulação clássica para este problema é: ache a função vetorial \mathbf{A} que satisfaz:

1. A equação diferencial parcial em pontos interiores às subregiões regulares Ω_1 e Ω_2 :

$$\text{rot}(\nu \text{ rot } \mathbf{A}) = \mathbf{J} + \text{rot}(\nu \mathbf{B}_r) \quad , \text{ em } \Omega_i, i=1,2 \quad (\text{II.51a})$$

2. O calibre de Coulomb:

$$\text{div } \mathbf{A} = 0 \quad , \text{ em } \Omega \quad (\text{II.51b})$$

3. A condição de salto na interface entre Ω_1 e Ω_2 , Γ_m :

$$[\nu (\text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{B}_r)] \wedge \underline{n} = 0 \quad , \text{ em } \Gamma_m \quad (\text{II.51c})$$

4. A condição de contorno de Dirichlet em Γ_1 :

$$\mathbf{A} \wedge \underline{n} = \underline{a} \wedge \underline{n} \quad , \text{ em } \Gamma_1 \quad (\text{II.51d})$$

5. A condição de contorno de Neumann em Γ_2 :

$$\nu (\text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{B}_r) \wedge \underline{n} = 0 \quad , \text{ em } \Gamma_2 \quad (\text{II.51e})$$

6. A condição sobre o componente normal de \mathbf{A} em Γ_2 :

$$\mathbf{A} \cdot \underline{n} = 0 \quad , \text{ em } \Gamma_2 \quad (\text{II.51f})$$

Observações:

1. Interpretação física das condições de contorno: Às condições de contorno

(II.51d-e-f) pode-se associar interpretações físicas úteis. Para isto, seja a parcela da fronteira representada na Fig. II.3.

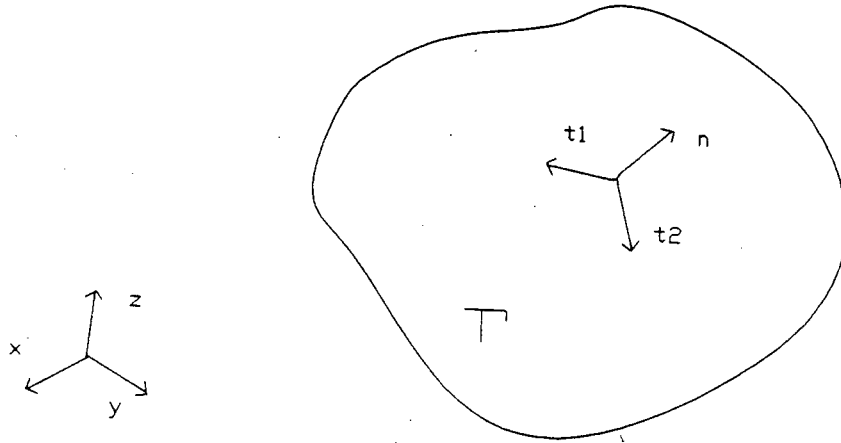


Figura II.3: Parcela da fronteira com sistema local de coordenadas $(\underline{t}_1, \underline{t}_2, \underline{n})$.

Seja \underline{n} o vetor unitário normal à fronteira e \underline{t}_1 e \underline{t}_2 dois vetores ortogonais unitários tangenciais à fronteira, definidos de maneira que:

$$\underline{t}_1 \wedge \underline{t}_2 = \underline{n}$$

Estes vetores definem um sistema de coordenadas cartesiano local $(\underline{t}_1, \underline{t}_2, \underline{n})$. O vetor A pode ser referido a este sistema, gerando:

$$A = (A_{t_1}, A_{t_2}, A_n)$$

Tome-se agora o vetor B neste sistema de coordenadas:

$$B = \text{rot } A = \left[\frac{\partial A_n}{\partial t_2} - \frac{\partial A_{t_2}}{\partial n} \right] \underline{t}_1 + \left[\frac{\partial A_{t_1}}{\partial n} - \frac{\partial A_n}{\partial t_1} \right] \underline{t}_2 + \left[\frac{\partial A_{t_2}}{\partial t_1} - \frac{\partial A_{t_1}}{\partial t_2} \right] \underline{n}$$

Se é especificado um valor constante de \underline{a} sobre a fronteira Γ_1 , então:

$$\frac{\partial A_{t_i}}{\partial t_j} = 0 \quad , \quad i, j = 1, 2 \quad , \quad \text{em } \Gamma_1$$

Portanto:

$$\mathbf{B} \cdot \underline{n} = 0, \text{ em } \Gamma_1$$

Ou seja, a indução magnética \mathbf{B} é tangencial à fronteira onde se especificam os componentes tangenciais do potencial vetor \mathbf{A} .

Já em Γ_2 , a condição (II.51e) é válida. Sabendo-se que o produto vetorial $\mathbf{H} \wedge \underline{n}$ preserva somente os componentes tangenciais de \mathbf{H} , conclui-se que o campo magnético \mathbf{H} é normal a Γ_2 .

2. Validade da formulação apresentada: A formulação matemática (II.51) é válida se:

- a) A região Γ_1 onde os componentes tangenciais do potencial vetor são estipulados for conexa.
- b) A região Ω for simplesmente conexa.

Para o caso geral, com Ω n-uplamente conexo e Γ_1 composto por "ilhas" onde se impõem os componentes tangenciais do potencial vetor, restrições adicionais, de caráter topológico, são utilizadas para se garantir a unicidade da solução. Estas restrições envolvem conceitos matemáticos mais avançados do que os que nos propomos a utilizar neste trabalho (Para maiores detalhes ver Kotiuga, 1982 e Bossavit, 1988(b)).

II.3.2 A forma fraca

A forma fraca para o problema (II.51) é obtida a seguir. Primeiramente, define-se o resíduo vetorial

$$\underline{r} = \text{rot}(v \text{ rot } \mathbf{A}) - \mathbf{J} - \text{rot}(v \mathbf{B}_r) = 0 \quad (\text{II.52})$$

em cada subdomínio regular de Ω . Efetua-se o produto escalar de \underline{r} por uma função de teste vetorial \underline{v} , suficientemente regular. A partir da identidade vetorial

$$\underline{u} \cdot \text{rot } \underline{v} = -\text{div}(\underline{u} \wedge \underline{v}) + \underline{v} \cdot \text{rot } \underline{u} \quad (\text{II.53})$$

e o do teorema da divergência, obtém-se a expressão:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_i} \underline{v} \cdot \overbrace{\text{rot}(v(\text{rot } \underline{A} - \underline{B}_r))}^{\vee} d\Omega = \\ & = \int_{\Omega_i} \overbrace{v(\text{rot } \underline{A} - \underline{B}_r)}^{\vee} \cdot \overbrace{\text{rot}(\underline{v})}^{\mathcal{M}} d\Omega + \int_{\partial\Omega_i} \underline{v} \cdot (\underline{n} \wedge v(\text{rot } \underline{A} - \underline{B}_r)) d\Gamma \end{aligned}$$

Efetua-se o produto escalar do resíduo \underline{r} (eq. II.52) pelas funções de teste vetoriais \underline{v} e utiliza-se a relação acima, obtendo-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} \underline{r} \cdot \underline{v} d\Omega &= \int_{\Omega_i} (v \text{ rot } \underline{A} \cdot \text{rot } \underline{v} - \underline{J} \cdot \underline{v} - v \underline{B}_r \cdot \text{rot } \underline{v}) d\Omega + \\ &- \int_{\partial\Omega_i} \underline{v} \cdot (\underline{n} \wedge v(\text{rot } \underline{A} - \underline{B}_r)) d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.54})$$

Ao se somar a contribuição dos dois subdomínios, deve-se levar em conta as condições (II.51c) e (II.19), obtendo-se:

$$\int_{\Omega} (v \text{ rot } \underline{A} \cdot \text{rot } \underline{v}) d\Omega = \int_{\Omega} (\underline{J} \cdot \underline{v} + v \underline{B}_r \cdot \text{rot } \underline{v}) d\Omega - \int_{\Gamma} \underline{v} \cdot (\underline{n} \wedge v(\text{rot } \underline{A} - \underline{B}_r)) d\Gamma \quad (\text{II.55})$$

Definem-se, agora, algumas classes úteis de funções:

$$\underline{H}^1(\Omega) = H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \quad (\text{II.56})$$

$$\underline{\mathcal{H}} = \{ \underline{w} : \underline{w} \in \underline{H}^1(\Omega); \underline{w} \wedge \underline{n} = \underline{a} \wedge \underline{n}, \text{ em } \Gamma_1; \underline{w} \cdot \underline{n} = 0, \text{ em } \Gamma_2 \} \quad (\text{II.57})$$

$$\underline{\mathcal{H}}_0 = \{ \underline{w} : \underline{w} \in \underline{H}^1(\Omega); \underline{w} \wedge \underline{n} = \underline{0}, \text{ em } \Gamma_1; \underline{w} \cdot \underline{n} = 0, \text{ em } \Gamma_2 \} \quad (\text{II.58})$$

onde \times indica o produto cartesiano de espaços e $H^1(\Omega)$ foi definido na seção II.2.2 como o espaço das funções que têm derivadas primeiras de quadrado integrável sobre Ω .

De posse destas definições, obtém-se a seguinte forma fraca para o problema definido pelo conjunto de equações (II.51): achar a função $\underline{A} \in \underline{\mathcal{H}}$, tal que:

$$\int_{\Omega} (v \text{ rot } \underline{A} \cdot \text{rot } \underline{v}) d\Omega = \int_{\Omega} (\underline{J} \cdot \underline{v} + v \underline{B}_r \cdot \text{rot } \underline{v}) d\Omega, \quad \forall \underline{v} \in \underline{\mathcal{H}}_0 \quad (\text{II.59a})$$

isto é:

$$B(\mathbf{A}, \underline{\mathbf{v}}) = f(\underline{\mathbf{v}}) \quad , \quad \forall \underline{\mathbf{v}} \in \underline{\mathcal{H}}_0 \quad (\text{II.59b})$$

Além disto, o calibre de Coulomb deve ser satisfeito, isto é:

$$\text{div } \mathbf{A} = 0 \quad (\text{II.59c})$$

Observações:

1. O termo do contorno desaparece nesta formulação porque:

- a) Em Γ_1 , $\underline{\mathbf{v}} \wedge \underline{\mathbf{n}} = \underline{\mathbf{0}}$, pois $\underline{\mathbf{v}} \in \underline{\mathcal{H}}_0$ e uma propriedade bem conhecida do produto misto pode ser utilizada na integral de superfície de (II.55):

$$\underline{\mathbf{v}} \cdot (\underline{\mathbf{n}} \wedge \underline{\mathbf{h}}) = \underline{\mathbf{h}} \cdot (\underline{\mathbf{v}} \wedge \underline{\mathbf{n}}) = 0 \quad , \quad \text{em } \Gamma_1$$

- b) Em Γ_2 a condição (II.51e) é válida.

c) $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$

2. O calibre de Coulomb está forçado de maneira explícita por (II.59c). Esta forma não é eficiente do ponto de vista computacional. Várias maneiras foram propostas para incluir esta condição na formulação (II.59a), dentre as quais destacamos:

- a) Coulomb (1981) propôs um funcional onde a condição (II.59c) entra como uma penalidade. O método da penalidade é bastante utilizado em outras áreas da Engenharia, como a Mecânica dos Fluidos (Carey & Oden, 1983), e consta dos seguintes passos:

- i) Define-se um funcional equivalente a (II.59a). Como visto na seção (I.3.2), este funcional é dado por:

$$I(\mathbf{A}) = B(\mathbf{A}, \mathbf{A}) - 2 f(\mathbf{A})$$

isto é:

$$I(\mathbf{A}) = \int_{\Omega} \nu (\text{rot } \mathbf{A})^2 \, d\Omega - 2 \int_{\Omega} (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A} + \nu \mathbf{B}_r \cdot \text{rot } \mathbf{A}) \, d\Omega \quad (\text{II.60})$$

ii) A penalidade sobre a condição (II.59c)

$$\nu' \int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{A})^2 \, d\Omega$$

é adicionada a (II.60) gerando o funcional penalizado:

$$I(\mathbf{A}) = \int_{\Omega} \nu (\text{rot } \mathbf{A})^2 \, d\Omega - 2 \int_{\Omega} (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A} + \nu \mathbf{B}_r \cdot \text{rot } \mathbf{A}) \, d\Omega + \nu' \int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{A})^2 \, d\Omega \quad (\text{II.61})$$

ν' é uma função de peso que, se não for corretamente escolhida, pode levar à instabilidade computacional (o chamado "locking" (Carey & Oden, 1983)). Coulomb (1981) sugere que ν' deve ser igual a ν , o que Morisue (1990) mostrou ser a melhor escolha.

iii) Ao se calcular o ponto de mínimo do funcional (II.61) encontra-se: Achar $\mathbf{A} \in \underline{\mathcal{H}}$, tal que:

$$\int_{\Omega} \nu (\text{rot } \mathbf{A} \cdot \text{rot } \underline{\mathbf{v}} + \text{div } \mathbf{A} \text{ div } \underline{\mathbf{v}}) \, d\Omega = \int_{\Omega} (\mathbf{J} \cdot \underline{\mathbf{v}} + \nu \mathbf{B}_r \cdot \text{rot } \underline{\mathbf{v}}) \, d\Omega \quad \forall \underline{\mathbf{v}} \in \underline{\mathcal{H}}_0 \quad (\text{II.62})$$

que é a nova forma fraca para o problema (II.59), para $\nu' = \nu$.

b) Demerdash et al. (1981(a)) simplesmente utilizaram a formulação (II.59a) sem qualquer referência à equação (II.59c). Mohammed et al. (1982) provaram que (II.59a), quando restrito às aproximações geradas por elementos finitos tetraédricos de ordem 1, apresenta solução única. Posteriormente, Hoole et al. (1988) generalizaram esta prova retirando algumas de suas restrições geométricas: porém, ainda se mantiveram presos a elementos tetraédricos. Hoole et al. sustentam que, como o valor de $\text{div } \mathbf{A}$ não tem significado físico relevante - o que importa para o cálculo de \mathbf{B} é o seu rot -, a formulação de Coulomb fornece resultados piores do que a formulação não penalizada, porque ela tenta resolver ao mesmo tempo a equação fisicamente

importante (II.59a) e a equação do *div* (II.59c). Com isto, a equação (II.59a) não é verificada tão bem quanto na formulação não penalizada.

As conclusões de Hoole, porém, não são compartilhadas por todos os grupos de pesquisa em cálculo de campos 3D, e uma série de testes ainda devem ser efetuados para que suas conclusões sejam aceitas (Hoole, 1989). Além disto, elas somente são válidas para elementos tetraédricos. Por isto, nesta tese adota-se a formulação de Coulomb (II.62).

II.3.3 Aplicação dos métodos de Galerkin e de elementos finitos

A discretização da região de estudos Ω em elementos finitos pode ser feita como descrito na seção II.2.3. A equação (II.27) ainda é válida. Porém, a aproximação para a função vetorial \mathbf{A} deve ser efetuada usando funções de base vetoriais, \mathbf{N}_i . Estas funções são construídas tomando-se:

$$\mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix}$$

onde N_i é a função de base "escalar" ligada ao nó i . Desta maneira, a aproximação para \mathbf{A} é dada por:

$$\mathbf{A}^h = \sum_{i=1}^N N_i \mathbf{A}_i \quad (\text{II.63})$$

onde \mathbf{A}_i é o valor de \mathbf{A} no nó i . Definem-se as classes de funções:

$$\underline{\mathcal{H}}^h(\Omega) = \left\{ \underline{\mathbf{w}}^h : \underline{\mathbf{w}}^h = \sum_{i=1}^N N_i \mathbf{A}_i; \mathbf{A}_i \wedge \underline{\mathbf{n}} = \underline{\mathbf{a}} \wedge \underline{\mathbf{n}} \quad \forall \text{ nó } i \in \Gamma_1; \mathbf{A}_i \cdot \underline{\mathbf{n}} = 0, \quad \forall \text{ nó } i \in \Gamma_2 \right\} \quad (\text{II.64})$$

$$\underline{\mathcal{H}}_0^h(\Omega) = \left\{ \underline{\mathbf{v}}^h : \underline{\mathbf{v}}^h = \sum_{i=1}^N N_i \mathbf{v}_i; \mathbf{v}_i \wedge \underline{\mathbf{n}} = \underline{\mathbf{0}} \quad \forall \text{ nó } i \in \Gamma_1; \mathbf{v}_i \cdot \underline{\mathbf{n}} = 0, \quad \forall \text{ nó } i \in \Gamma_2 \right\} \quad (\text{II.65})$$

A aproximação por elementos finitos de (II.62) é dada por: achar $\mathbf{A}^h \in$

$\underline{\mathcal{H}}^h(\Omega)$, tal que:

$$\int_{\Omega} (\nu(\text{rot } \underline{v}^h \cdot \text{rot } \underline{A}^h + \text{div} \underline{v}^h \text{ div} \underline{A}^h)) d\Omega = \int_{\Omega} (\underline{v}^h \cdot \underline{J} + \nu \text{ rot } \underline{v}^h \cdot \underline{B}_r) d\Omega, \quad \forall \underline{v}^h \in \underline{\mathcal{H}}^h(\Omega) \quad (\text{II.66})$$

Desenvolvendo:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nu \left[\text{rot} \left(\sum_{i=1}^N \underline{N}_i \underline{v}_i \right) \cdot \text{rot} \left(\sum_{j=1}^N \underline{N}_j \underline{A}_j \right) + \text{div} \left(\sum_{i=1}^N \underline{N}_i \underline{v}_i \right) \text{div} \left(\sum_{j=1}^N \underline{N}_j \underline{A}_j \right) \right] d\Omega = \\ = \int_{\Omega} \left[\left(\sum_{i=1}^N \underline{N}_i \underline{v}_i \right) \cdot \underline{J} + \nu \text{ rot} \left(\sum_{i=1}^N \underline{N}_i \underline{v}_i \right) \cdot \underline{B}_r \right] d\Omega, \quad (\text{II.67}) \end{aligned}$$

Levando-se em conta que os produtos escalares são efetuados com os primeiros vetores transpostos e considerando-se a linearidade e bilinearidade dos termos de (II.67), obtém-se:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \underline{v}_i^T \int_{\Omega} \nu \left[[\text{rot} \underline{N}_i]^T \cdot \left(\sum_{j=1}^N [\text{rot} \underline{N}_j] \underline{A}_j \right) + [\text{div} \underline{N}_i]^T \left(\sum_{j=1}^N [\text{div} \underline{N}_j] \underline{A}_j \right) \right] d\Omega = \\ = \sum_{i=1}^N \underline{v}_i^T \int_{\Omega} [\underline{N}_i]^T \cdot \underline{J} + \nu [\text{rot} \underline{N}_i]^T \cdot \underline{B}_r d\Omega, \quad (\text{II.68}) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} [\text{rot } \underline{N}_i] &= \begin{bmatrix} 0 & -\partial \underline{N}_i / \partial z & \partial \underline{N}_i / \partial y \\ \partial \underline{N}_i / \partial z & 0 & -\partial \underline{N}_i / \partial x \\ -\partial \underline{N}_i / \partial y & \partial \underline{N}_i / \partial x & 0 \end{bmatrix} \\ [\text{div } \underline{N}_i] &= \left[\partial \underline{N}_i / \partial x, \quad \partial \underline{N}_i / \partial y, \quad \partial \underline{N}_i / \partial z \right] \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} \nu \left[[\text{rot } \underline{N}_i]^T \cdot [\text{rot } \underline{N}_j] + [\text{div } \underline{N}_i]^T [\text{div } \underline{N}_j] \right] d\Omega \underline{A}_j = \\ = \int_{\Omega} [\underline{N}_i]^T \cdot \underline{J} + \nu [\text{rot } \underline{N}_i]^T \cdot \underline{B}_r d\Omega, \quad (\text{II.69}) \end{aligned}$$

Isto é:

$$\sum_{j=1}^N K_{ij} A_j = f_i, \quad i = 1, N \quad (\text{II.70})$$

onde:

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \nu \left[[\text{rot } \mathbf{N}_i]^T \cdot [\text{rot } \mathbf{N}_j] + [\text{div } \mathbf{N}_i]^T [\text{div } \mathbf{N}_j] \right] d\Omega = B(\mathbf{N}_i, \mathbf{N}_j) \quad (\text{II.71})$$

$$f_i = \int_{\Omega} [\mathbf{N}_i]^T \cdot \mathbf{J} + \nu [\text{rot } \mathbf{N}_i]^T \cdot \mathbf{B}_r d\Omega = f(\mathbf{N}_i) \quad (\text{II.72})$$

Observações:

1. As observações feitas na seção (II.2.3) sobre a introdução de condições de contorno, as propriedades da matriz K, etc ... , também são válidas para o sistema (II.70). Mostra-se, a seguir, que K é positiva definida:

- i) Seja \underline{c} um vetor arbitrário de dimensão neq , onde neq é o número de equações do sistema, isto é, o número total de variáveis menos os graus de liberdade impostos por condições de contorno (ver observação 1 da seção II.2.3). Utiliza-se \underline{c} para construir um membro de $\underline{\mathcal{H}}^h(\Omega)$:

$$\underline{v}^h = \sum_{i=1}^N \mathbf{N}_i \underline{c}_i$$

Observe-se que N é o número total de nós do problema e que \mathbf{N}_i e \underline{c}_i têm dimensão $3-\text{NCNO}_i$, onde NCNO_i é o número de condições de contorno impostas no nó i . Portanto, no desenvolvimento a seguir, K_{ij} tem dimensão $(3-\text{NCNO}_i, 3-\text{NCNO}_j)$.

$$\begin{aligned} \underline{c}^T \mathbf{K} \underline{c} &= \sum_{i,j=1}^N \underline{c}_i K_{ij} \underline{c}_j \\ &= \sum_{i,j=1}^N \underline{c}_i B(\mathbf{N}_i, \mathbf{N}_j) \underline{c}_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= B \left(\sum_{i=1}^N N_i c_i, \sum_{j=1}^N N_j c_j \right) \\
&= B(\underline{v}^h, \underline{v}^h) \\
&= \int_{\Omega} \nu [(\operatorname{rot} \underline{v}^h)^2 + (\operatorname{div} \underline{v}^h)^2] d\Omega \geq 0
\end{aligned}$$

ii) Se $c^T K c = 0 \Rightarrow$

$$\int_{\Omega} \nu [(\operatorname{rot} \underline{v}^h)^2 + (\operatorname{div} \underline{v}^h)^2] d\Omega = 0$$

isto é, $\operatorname{rot} \underline{v}^h = 0$ e $\operatorname{div} \underline{v}^h = 0$. Levando-se em conta que $\underline{v}^h \in \underline{H}_0^h(\Omega)$, conclui-se, por argumentos semelhantes aos utilizados na seção (II.3.1), que \underline{v}^h é nulo; isto é, $c = 0$. Observe-se que se não fosse introduzida a penalidade na formulação (II.59a) o termo em $\operatorname{div} \underline{v}^h$ não estaria presente no resultado, e se poderia ter $c^T K c = 0$ com $c \neq 0$.

II.4 Utilização do potencial escalar reduzido

II.4.1 Modelamento matemático: Formulação clássica

As formulações para o problema magnetostático tridimensional apresentadas na seção II.2 e II.3 apresentam as seguintes deficiências:

1. A formulação utilizando o potencial escalar total, ψ , não permite a inclusão de correntes elétricas no domínio de estudos;
2. A formulação utilizando o potencial vetor magnético, A , apresenta três incógnitas por nó.

Devido a estes problemas, formulações que permitem a inclusão de correntes elétricas, mas que utilizam potenciais escalares foram desenvolvidas. A primeira delas foi proposta por Zienkiewicz et al. (1977). Ela parte do princípio de que a determinação do campo H_s , solução da equação (II.4) e (II.5) se μ for constante em todo o espaço e com o campo se anulando no infinito, é relativamente simples. Este campo é dado, em qualquer ponto do

espaço, pela lei de Biot-Savart (Stratton, 1941):

$$H_s = \frac{1}{4\pi} \int_{E_j} \frac{J \wedge \underline{r}_0}{|\underline{r}|^2} d\Omega \quad (\text{II.73})$$

onde

\underline{r}_0 - Vetor unitário, posicionado entre o elemento portador de corrente e o ponto de observação;

$|\underline{r}|$ - Módulo da distância entre os dois pontos anteriores;

E_j - Região na qual circulam as correntes.

A geometria pertinente à lei de Biot-Savart é mostrada na figura II.4. Em casos geometricamente simples, a expressão (II.73) pode ser integrada analiticamente, de maneira a fornecer uma fórmula para H_s . Para distribuições complexas de corrente, a equação pode ser integrada usando quadratura numérica ou um processo analítico - numérico. No Apêndice apresentam-se maneiras de se calcular H_s para algumas geometrias típicas (ver também Mesquita & Bastos, 1989(b)). Para configurações mais complexas, combinações destas geometrias podem ser tomadas.

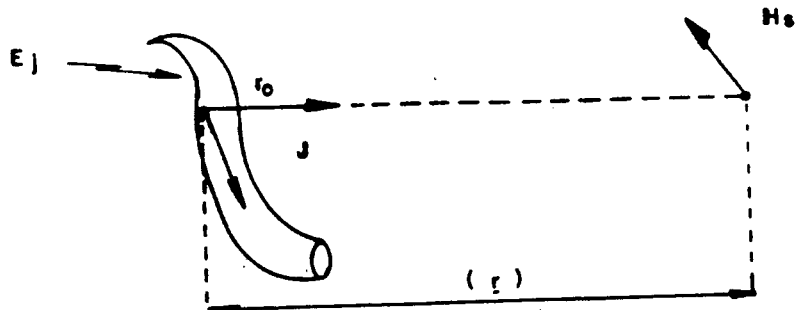


Figura II.4 Geometria pertinente à lei de Biot-Savart.

H_s satisfaz:

$$\text{rot } H_s = J \quad (\text{II.74})$$

Com H_s conhecido, pode-se dividir H :

$$H = H_s + H_m \quad (\text{II.75})$$

onde H_m é o campo produzido pelos dipolos magnéticos (induzidos ou permanentes).

De (II.4), (II.74) e (II.75), obtém-se:

$$\text{rot } H_m = 0 \quad (\text{II.76})$$

logo, H_m pode ser representado pelo gradiente de um potencial escalar, denominado potencial escalar reduzido, por representar apenas uma parcela do campo total H (Simkin & Trowbridge, 1978):

$$H_m = -\text{grad } \phi \quad (\text{II.77})$$

Combinando (II.77) com (II.75) e (II.5), tem-se:

$$\text{div}(\mu(H_s - \text{grad } \phi) + Br) = 0 \quad (\text{II.78})$$

Nos pontos de descontinuidade de μ , as seguintes equações, obtidas de (I.16) e (I.17) devem ser verificadas:

$$\underline{n} \cdot [-\mu \text{ grad } \phi + \mu H_s + Br] = 0 \quad (\text{II.79})$$

$$\underline{n} \wedge [\text{grad } \phi] = 0 \quad (\text{II.80})$$

Estas equações são semelhantes às equações (II.10) e (II.11) e foram obtidas considerando-se que o campo H_s é contínuo com derivadas contínuas. A condição (II.80) é automaticamente verificada por um potencial ϕ contínuo.

As condições de contorno são:

a) Condição de contorno de Dirichlet:

$$\phi = \phi_0 \quad , \text{ em } \Gamma_1 \quad (\text{II.81})$$

b) Condição de contorno de Neumann:

$$-\mu \frac{\partial \phi}{\partial \underline{n}} + \mu H_s \cdot \underline{n} + Br \cdot \underline{n} = 0 \quad , \text{ em } \Gamma_2 \quad (\text{II.82})$$

Deve-se notar que um potencial $\phi = \phi_0$ constante em Γ_1 significa que:

$$\mathbf{H} \wedge \underline{n} = (-\text{grad } \phi + \mathbf{H}_s) \wedge \underline{n} = \mathbf{H}_s \wedge \underline{n} \quad (\text{II.83})$$

Logo, somente se o campo \mathbf{H}_s for perpendicular a Γ_1 , o campo resultante \mathbf{H} também será.

II.4.2 A forma fraca e a aplicação dos métodos de Galerkin e de Elementos Finitos

A forma fraca para este problema é obtida de maneira similar à utilizada em II.2.2. Definindo-se as classes de funções \mathcal{H} e \mathcal{H}_0 como em (II.21) e (II.22), chega-se à seguinte formulação para o problema: Achar $\phi \in \mathcal{H}$, tal que:

$$\int_{\Omega} \mu \text{grad} \phi \cdot \text{grad} u \, d\Omega = \int_{\Omega} (\mu \mathbf{H}_s + \mathbf{B}_r) \cdot \text{grad} u \, d\Omega, \quad \forall u \in \mathcal{H}_0$$

Os métodos de Galerkin e de elementos finitos também são aplicados da mesma maneira, obtendo-se:

$$\mathbf{K} \phi = \mathbf{f} \quad (\text{II.84})$$

com

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \mu \text{grad} N_i \cdot \text{grad} N_j \, d\Omega = B(N_i, N_j) \quad (\text{II.85})$$

$$f_i = \int_{\Omega} (\mu \mathbf{H}_s + \mathbf{B}_r) \cdot \text{grad} N_i \, d\Omega = f(N_i) \quad (\text{II.86})$$

Observações:

1. As equações obtidas são muito parecidas com as obtidas para o potencial escalar total (Eqs. II.34, II.35 e II.36). A única diferença está no termo em \mathbf{H}_s utilizado no cálculo de \mathbf{f} . Portanto, todas as conclusões relativas àquela formulação também são válidas para esta, com a diferença que esta permite a existência de correntes no domínio de estudos.

2. O método aqui apresentado segue o artigo de Zienkiewicz et al. (1977). McDaniel et al. (1983) desenvolveram um método um pouco mais eficiente computacionalmente, porque transformaram as integrais de volume em H_s sobre todo o espaço em integrais sobre as superfícies de descontinuidade de μ e nos seus volumes de variação contínua.
3. O único problema desta formulação é o erro de cancelamento que ocorre quando (II.75) é utilizado para o cálculo de H dentro de materiais ferromagnéticos de alta permeabilidade. Nestes casos,

$$B = \mu(H_s - \text{grad } \phi)$$

e a quantidade calculada é ϕ , cujo gradiente tem a mesma ordem de grandeza de H_s (no limite, com $\mu \rightarrow \infty$, $H \rightarrow 0$). Como resultado, dois números relativamente grandes são subtraídos um do outro, e o campo total, H , é determinado por uma diferença na faixa dos erros de truncamento. Este comportamento foi percebido por vários autores (Simkin & Trowbridge, 1979; Mayergoyz et al., 1987; Magele et al., 1988; Sussmam, 1988), e ele torna uma solução precisa de um problema magnetostático não linear virtualmente impossível, porque, neste caso, uma boa precisão no cálculo dos campos dentro dos materiais magnéticos é necessária a cada iteração do método não linear, para que a determinação das permeabilidades magnéticas seja efetuada de maneira correta. Para eliminar esta dificuldade, uma formulação utilizando os dois potenciais escalares (o reduzido e o total) foi proposta, e será discutida na próxima seção.

II.5 Utilização do potencial escalar total associado ao potencial escalar reduzido

II.5.1 Modelamento matemático: Formulação clássica

Para se evitar o problema de cancelamento associado à utilização do potencial escalar reduzido dentro dos materiais magnéticos de alta permeabilidade e ainda permitir o cálculo em regiões onde existam correntes utilizando potenciais escalares, Simkin & Trowbridge (1978, 1979 e 1980) propuseram o acoplamento entre o potencial escalar total e o reduzido.

Considere-se a figura II.5. O domínio de estudo, Ω , é dividido em dois sub-domínios Ω_j e Ω_k . Em Ω_j , existem correntes e a permeabilidade magnética é constante igual à permeabilidade do ar, μ_0 . Utiliza-se o potencial escalar reduzido, ϕ , nesta região. A equação que descreve o seu comportamento, (II.78), é:

$$\text{div}(\mu_0(\mathbf{H}_s - \text{grad } \phi) + \mathbf{B}_r) = 0$$

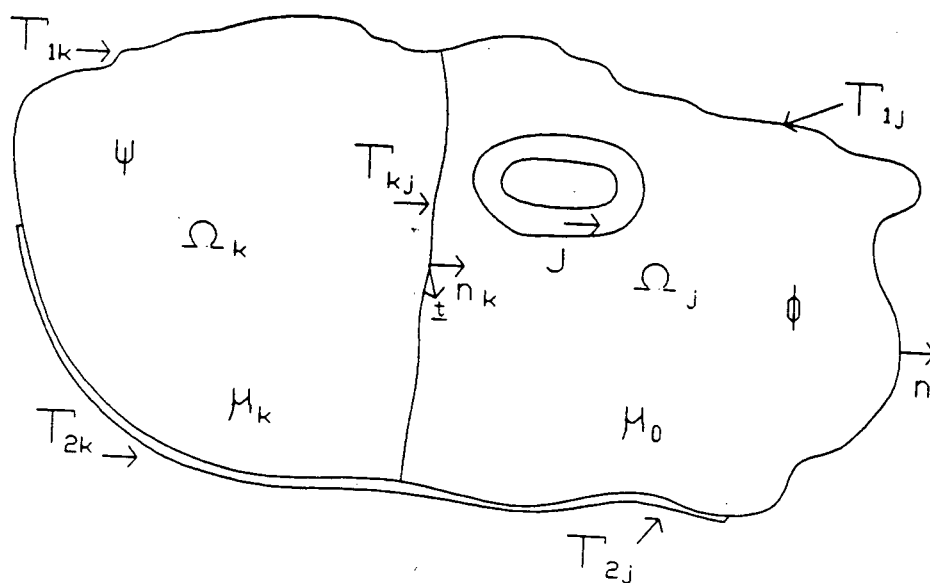


Figura II.5 Representação esquemática do domínio dos potenciais e topologia para o problema do potencial escalar total associado ao potencial escalar reduzido.

Note-se que \mathbf{B}_r pode ser eliminado desta equação porque no ar não existem ímãs permanentes. Além disto, com $\mu = \mu_0$ constante, $\text{div}(\mu_0 \mathbf{H}_s) = 0$. Portanto, a equação acima se reduz a:

$$\text{div}(\mu_0(-\text{grad}\phi)) = 0 \quad (\text{II.87})$$

Em Ω_k , simplesmente conexa, existem volumes de materiais magnéticos quaisquer e não existem correntes. Utiliza-se o potencial escalar total, ψ . A equação (II.9) descreve o seu comportamento nos pontos ordinários de Ω_k :

$$\text{div}(-\mu \text{grad}\psi + \mathbf{B}_r) = 0 \quad (\text{II.88})$$

Nos pontos de descontinuidade de μ , a equação (II.10) deve ser satisfeita, isto é:

$$\underline{n} \cdot [-\mu \text{grad } \psi + \mathbf{B}_r] = 0 \quad (\text{II.89})$$

Na interface Γ_{kj} entre as regiões Ω_k e Ω_j , as equações relativas ao salto dos componentes do campo (I.16 e I.17) devem ser verificadas. Se \underline{n} é um vetor unitário normal a Γ_{kj} e \underline{t} um vetor unitário tangente (Fig. II.5), então, para satisfazer a condição (I.16):

$$(-\mu \text{grad} \psi + \mathbf{B}_r) \cdot \underline{n} = \mu_0 (\mathbf{H}_s - \text{grad} \phi) \cdot \underline{n} \quad , \text{ em } \Gamma_{kj} \quad (\text{II.90})$$

Para satisfazer a condição (I.17):

$$-\text{grad} \psi \cdot \underline{t} = (\mathbf{H}_s - \text{grad} \phi) \cdot \underline{t} \quad , \text{ em } \Gamma_{kj} \quad (\text{II.91})$$

A equação (II.91) pode ser integrada utilizando qualquer caminho sobre a fronteira Γ_{kj} . Sejam A e B dois pontos pertencentes a esta fronteira. Então:

$$\psi_A - \psi_B = \phi_A - \phi_B + \int_A^B \mathbf{H}_s \cdot \underline{t} \, dl \quad (\text{II.92})$$

Seja A o ponto onde se estipula, de forma arbitrária, a igualdade entre os potenciais ψ e ϕ . Tem-se, então, em um ponto l genérico de Γ_{kj} :

$$\phi_l = \psi_l + \int_0^{t_l} \mathbf{H}_s \cdot \underline{t} \, dl = \psi_l + G_l \quad (\text{II.93})$$

A integral em (II.93) é calculada por um caminho sobre Γ_{kj} , iniciando-se no ponto de igualdade de potenciais e terminando no ponto onde se quer calcular a diferença entre os potenciais. Esta integral é independente do caminho de integração, desde que não sejam atravessadas as regiões portadoras de corrente, o que é garantido se a integração é feita sobre Γ_{kj} .

No contorno do domínio, Γ , tem-se as seguintes condições:

a) Condições de Contorno de Dirichlet:

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_0 & , & \text{ em } \Gamma_{1j} \\ \psi &= \psi_0 & , & \text{ em } \Gamma_{1k} \end{aligned} \quad (\text{II.94})$$

b) Condições de Contorno de Neumann:

$$\begin{aligned} -\mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial \underline{n}} + \mu_0 \text{Hs} \cdot \underline{n} &= 0 & , & \text{ em } \Gamma_{2j} \\ -\mu \frac{\partial \psi}{\partial \underline{n}} + \mathbf{B}_r \cdot \underline{n} &= 0 & , & \text{ em } \Gamma_{2k} \end{aligned} \quad (\text{II.95})$$

Com $\Gamma_{1j} \cup \Gamma_{1k} \cup \Gamma_{2j} \cup \Gamma_k = \Gamma$; $\Gamma_{1j} \cup \Gamma_{2j} \cup \Gamma_{kj} = \partial(\Omega_j)$; $\Gamma_{1k} \cup \Gamma_{2k} \cup \Gamma_{kj} = \partial(\Omega_k)$; $\partial(\Omega_j) \cap \partial(\Omega_k) = \Gamma_{kj}$.

Com base nestes resultados, apresenta-se a formulação clássica para o problema de dois potenciais: Dados Ω_j e Ω_k e definidos os potenciais ϕ e ψ sobre estas regiões, determine ϕ e ψ que satisfazem:

1. A equação diferencial parcial em Ω_j :

$$\text{div}(-\mu_0 \text{grad } \phi) = 0 \quad , \text{ em } \Omega_j \quad (\text{II.96a})$$

2. A equação diferencial parcial em pontos interiores das subregiões regulares de Ω_k :

$$\text{div}(-\mu \text{grad } \psi + \mathbf{B}_r) = 0 \quad , \text{ em } \Omega_k \quad (\text{II.96b})$$

3. A condição de salto nas interfaces entre as regiões regulares de Ω_k :

$$\underline{n} \cdot [-\mu \text{grad } \psi + \mathbf{B}_r] = 0 \quad (\text{II.96c})$$

4. A condição de continuidade do componente normal de \mathbf{B} em Γ_{kj} :

$$(-\mu \text{grad } \psi + \mathbf{B}_r) \cdot \underline{n} = \mu_0 (\text{Hs} - \text{grad } \phi) \cdot \underline{n} \quad , \text{ em } \Gamma_{kj} \quad (\text{II.96d})$$

5. A condição de descontinuidade entre os potenciais ψ e ϕ em Γ_{kj} :

$$\phi_1 = \psi_1 + \int_0^{t_1} \text{Hs} \cdot \underline{t} \, dl = \psi_1 + G_1 \quad , \text{ em } \Gamma_{kj} \quad (\text{II.96e})$$

6. As condições de contorno de Dirichlet em Γ_{1j} e Γ_{1k} :

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_0 & , & \text{ em } \Gamma_{1j} \\ \psi &= \psi_0 & , & \text{ em } \Gamma_{1k} \end{aligned} \quad (\text{II.96f})$$

7. As condições de contorno de Neumann em Γ_{2j} e Γ_{2k} :

$$\begin{aligned} -\mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial \underline{n}} + \mu_0 \mathbf{H}_s \cdot \underline{n} &= 0 & , & \text{ em } \Gamma_{2j} \\ -\mu \frac{\partial \psi}{\partial \underline{n}} + \mathbf{B}_r \cdot \underline{n} &= 0 & , & \text{ em } \Gamma_{2k} \end{aligned} \quad (\text{II.96g})$$

Observações:

1. Se Ω_k for simplesmente conexa o potencial ψ terá valor único. Se for multiplamente conexa e envolver uma região portadora de corrente (conforme a Fig. II.6) o potencial em Ω_k não será único. Este fato é facilmente verificável através da aplicação da lei de Ampere a um caminho fechado interior a Ω_k . Se este caminho envolver a corrente I , a integral:

$$\oint \mathbf{H} \cdot \underline{t} \, dl = \oint -(\text{grad } \psi) \cdot \underline{t} \, dl = I = \psi(a) - \psi(a)$$

Onde "a" é o ponto inicial e final do caminho. Portanto, o potencial em "a" tem mais de um valor. Para eliminar-se este problema, deve-se através de cortes, tornar Ω_k simplesmente conexa (Harrold & Simkin, 1985 ; Verité, 1987).

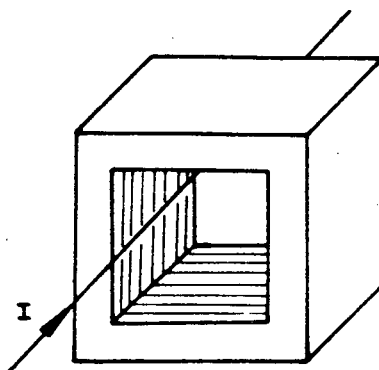


Figura II.6: Região multiplamente conexa envolvendo uma região portadora de corrente.

II.5.2 A forma fraca

A forma fraca é determinada tomando-se a formulação em cada região e adicionando-se os resíduos (Mesquita & Bastos, 1989(a)). Na região Ω_k define-se o resíduo

$$r_k = \operatorname{div}(-\mu \operatorname{grad} \psi + \mathbf{B}_r) = 0$$

em cada região regular de Ω_k . Multiplicando-se por funções de teste $u \in H(\Omega_k)$ suficientemente regulares e adotando-se o mesmo procedimento da seção II.2.2, obtém-se uma equação semelhante à equação (II.20)

$$\int_{\Omega_k} \operatorname{grad} u \cdot (\mu \operatorname{grad} \psi - \mathbf{B}_r) \, d\Omega + \int_{\partial(\Omega_k)} (-\mu \operatorname{grad} \psi + \mathbf{B}_r) \cdot \underline{n} \, u \, d\Gamma = 0 \quad (\text{II.97})$$

De forma semelhante, em Ω_j é definido o resíduo:

$$r_j = \operatorname{div}(-\mu_0 \operatorname{grad} \phi) = 0$$

que é multiplicado por uma função de teste $w \in H(\Omega_j)$, resultando ao final do processo:

$$\int_{\Omega_j} \operatorname{grad} w \cdot (\mu_0 \operatorname{grad} \phi) \, d\Omega + \int_{\partial(\Omega_j)} (-\mu_0 \operatorname{grad} \phi) \cdot \underline{n} \, w \, d\Gamma = 0 \quad (\text{II.98})$$

Estipulando-se a condição $u = w$ em Γ_{kj} pode-se definir uma única função de teste para (II.97) e (II.98), isto é $u \in H(\Omega)$. Além disto, lembrando-se que a normal \underline{n} tem sentidos opostos em Γ_{kj} se vista a partir de Ω_j ou Ω_k , obtém-se através da soma de (II.97) e (II.98):

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_k} \operatorname{grad} u \cdot (\mu \operatorname{grad} \psi - \mathbf{B}_r) \, d\Omega + \int_{\Omega_j} \operatorname{grad} u \cdot (\mu_0 \operatorname{grad} \phi) \, d\Omega + \int_{\Gamma_{kj}} (\mu \operatorname{grad} \psi - \mathbf{B}_r - \mu_0 \operatorname{grad} \phi) \cdot \underline{n}_j \, u \, d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_{1k} \cup \Gamma_{2k}} (-\mu \operatorname{grad} \psi + \mathbf{B}_r) \cdot \underline{n} \, u \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{1j} \cup \Gamma_{2j}} (-\mu_0 \operatorname{grad} \phi) \cdot \underline{n} \, u \, d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.99})$$

onde \underline{n}_j é a normal à região Ω_j em Γ_{kj} .

São definidas, agora, as seguintes classes de funções:

$$\mathcal{H}_0(\Omega) = \{ u : u \in H^1(\Omega) ; u = 0 \text{ em } \Gamma_{1j} \cup \Gamma_{1k} \} \quad (\text{II.100})$$

$$\mathcal{H}(\Omega_j) = \{ \phi : \phi \in H^1(\Omega_j) ; \phi = \phi_0 \text{ em } \Gamma_{1j} \} \quad (\text{II.101})$$

$$\mathcal{H}(\Omega_k) = \{ \psi : \psi \in H^1(\Omega_k) ; \psi = \psi_0 \text{ em } \Gamma_{1k} \} \quad (\text{II.102})$$

A classe a seguir é definida para os pares $\{\psi, \phi\}$

$$\mathcal{H}(\Omega) = \{ \{\psi, \phi\} : \phi \in \mathcal{H}(\Omega_j) ; \psi \in \mathcal{H}(\Omega_k) ; \phi = \psi + G_1 \text{ em } \Gamma_{kj} \} \quad (\text{II.103})$$

Utilizando-se estas definições, a condição (II.90) e as condições de contorno de Neumann (II.94) sobre a equação (II.99), obtém-se a seguinte formulação fraca: achar $\{\psi, \phi\} \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que:

$$\int_{\Omega_k} \text{gradu.} (\mu \text{grad} \psi) d\Omega + \int_{\Omega_j} \text{gradu.} (\mu_0 \text{grad} \phi) d\Omega = \int_{\Omega_k} \text{gradu.} B_{\Gamma} d\Omega + \int_{\Gamma_{kj}} \mu_0 (Hs. \underline{n}_j) u d\Gamma + \int_{\Gamma_{2j}} \mu_0 (Hs. \underline{n}) u d\Gamma, \quad \forall u \in \mathcal{H}_0(\Omega) \quad (\text{II.104})$$

ou

$$B(\varphi, u) = f(u), \quad \forall u \in \mathcal{H}_0(\Omega) \quad (\text{II.105})$$

Observações:

1. Unicidade da solução: Suponha existirem em $\mathcal{H}(\Omega)$ dois pares de potenciais $\{\psi_1, \phi_1\}$ e $\{\psi_2, \phi_2\}$ tais que (II.104) seja verificado. Escreve-se (II.104) para cada um destes pares e subtrai-se membro a membro, obtendo-se:

$$\int_{\Omega_k} \text{gradu.} (\mu \text{grad}(\psi_1 - \psi_2)) d\Omega + \int_{\Omega_j} \text{gradu.} (\mu_0 \text{grad}(\phi_1 - \phi_2)) d\Omega = 0, \quad \forall u \in \mathcal{H}_0(\Omega)$$

Seja $\varphi_d = \{\psi_d, \phi_d\} = \{\psi_1 - \psi_2, \phi_1 - \phi_2\}$. $\varphi_d \in \mathcal{H}_0(\Omega)$, pois $\varphi_d = 0$ em Γ_{1k} e Γ_{1j} e φ_d é contínuo em Γ_{kj} pois:

$$\phi_1 - \phi_2 = \psi_1 + G_1 - (\psi_2 + G_1) = \psi_1 - \psi_2, \quad \text{em } \Gamma_{kj} \quad (\text{II.106})$$

Logo, u pode ser igual a φ_d , gerando:

$$\int_{\Omega_k} \mu(\text{grad}(\psi_1 - \psi_2))^2 d\Omega + \int_{\Omega_j} \mu_0(\text{grad}(\phi_1 - \phi_2))^2 d\Omega = 0$$

Logo $\psi_1 - \psi_2 = \text{constante}$; $\phi_1 - \phi_2 = \text{constante}$. Levando-se em conta as condições de contorno e a condição (II.106), conclui-se que $\psi_1 - \psi_2 = \phi_1 - \phi_2 = 0$, isto é, a solução é única.

II.5.3. Aplicação dos métodos de Galerkin e de elementos finitos

A aplicação dos métodos de Galerkin e de elementos finitos à forma fraca (II.104) é feita de maneira padrão. As classes de funções definidas para a aproximação por elementos finitos são:

$$\mathcal{H}^h(\Omega) = \left\{ u^h : u^h = \sum_{i=1}^N N_i u_i ; u_i = 0, \forall \text{ nó } i \in \Gamma_{1k} \cup \Gamma_{1j} \right\} \quad (\text{II.107})$$

$$\mathcal{H}^h(\Omega_j) = \left\{ \phi^h : \phi^h = \sum_{i=1}^{N_j} N_i \phi_i ; \phi_i = \phi_0, \forall \text{ nó } i \in \Gamma_{1j} \right\}$$

$$\mathcal{H}^h(\Omega_k) = \left\{ \psi^h : \psi^h = \sum_{i=1}^{N_k} N_i \psi_i ; \psi_i = \psi_0, \forall \text{ nó } i \in \Gamma_{1k} \right\}$$

$$\mathcal{H}^h(\Omega) = \left\{ \{\psi^h, \phi^h\} : \psi^h \in \mathcal{H}^h(\Omega_k) ; \phi^h \in \mathcal{H}^h(\Omega_j) ; \phi_1^h = \psi_1^h + G_1, \forall \text{ nó } 1 \in \Gamma_{kj} \right\} \quad (\text{II.108})$$

Onde N_j é o número de nós em Ω_j , N_k é o número de nós em Ω_k e N é o número total de nós.

Com estas aproximações, obtém-se, a partir da equação (II.104) o sistema de equações:

$$\sum_{j=1}^{N_k} \left[\int_{\Omega_k} \mu \text{grad} N_i \cdot \text{grad} N_j d\Omega \psi_j \right] + \sum_{j=1}^{N_j} \left[\int_{\Omega_j} \mu_0 \text{grad} N_i \cdot \text{grad} N_j d\Omega \phi_j \right] =$$

$$= \int_{\Omega_k} \text{grad} N_i \cdot B_r d\Omega + \int_{\Gamma_{kj} \cup \Gamma_{2j}} \mu_0 (\text{Hs. } \underline{n}_j) N_i d\Gamma, \quad i = 1, N \quad (\text{II.109})$$

Para verificar o que ocorre com nós situados sobre a interface Γ_{kj} , o segundo termo do lado esquerdo da equação (II.109) é isolado e dividido em duas parcelas: uma contendo os nós sobre a fronteira Γ_{kj} e a outra os demais nós:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_j} \left[\int_{\Omega_j} \mu_0 \text{grad} N_i \cdot \text{grad} N_j d\Omega \phi_j \right] &= \sum_{l \in \Gamma_{kj}} \left[\int_{\Omega} \mu_0 \text{grad} N_i \cdot \text{grad} N_l d\Omega \phi_l \right] + \\ &+ \sum_{j=1, j \notin \Gamma_{kj}}^{N_j} \left[\int_{\Omega} \mu_0 \text{grad} N_i \cdot \text{grad} N_j d\Omega \phi_j \right] \end{aligned} \quad (\text{II.110})$$

Nos nós sobre a fronteira Γ_{kj} , o valor de ϕ_l é dado por (III.96(e)). Com isto, pode-se eliminar ϕ_l nestes nós (Simkin & Trowbridge, 1978; Pissanetzky, 1982), obtendo-se:

$$\begin{aligned} \sum_{l \in \Gamma_{kj}} \left[\int_{\Omega_j} \mu_0 \text{grad} N_i \cdot \text{grad} N_l d\Omega \phi_l \right] &= \\ \sum_{l \in \Gamma_{kj}} \left[\int_{\Omega_j} \mu_0 \text{grad} N_i \cdot \text{grad} N_l d\Omega \psi_l + \int_{\Omega_j} \mu_0 \text{grad} N_i \cdot \text{grad} N_l d\Omega G_l \right] \end{aligned} \quad (\text{II.111})$$

Substituindo (II.111) em (II.110) e esta em (II.109), obtém-se:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_k} \left[\int_{\Omega_k} \mu \text{grad} N_i \cdot \text{grad} N_j d\Omega \psi_j \right] &+ \sum_{j=1, j \notin \Gamma_{kj}}^{N_j} \left[\int_{\Omega_j} \mu_0 \text{grad} N_i \cdot \text{grad} N_j d\Omega \phi_j \right] + \\ + \sum_{l \in \Gamma_{kj}} \left[\int_{\Omega_j} \mu_0 \text{grad} N_i \cdot \text{grad} N_l d\Omega \psi_l \right] &= - \sum_{l \in \Gamma_{kj}} \left[\int_{\Omega_j} \mu_0 \text{grad} N_i \cdot \text{grad} N_l d\Omega G_l \right] + \\ + \int_{\Omega_k} \text{grad} N_i \cdot B_r d\Omega + \int_{\Gamma_{kj} \cup \Gamma_{2j}} \mu_0 (\text{Hs. } \underline{n}_j) N_i d\Gamma, \quad i=1, N \end{aligned} \quad (\text{II.112})$$

Isto é:

$$\sum_{j=1}^N K_{ij} \varphi_j = f_i \quad (\text{II.113})$$

Observações:

1. Observe-se que nos nós l da interface Γ_{kj} é calculado apenas o potencial ψ_1 , isto é, $\varphi_1 = \psi_1$ em Γ_{kj} . Para se obter o potencial ϕ_1 , deve-se utilizar a equação (II.96e).
2. A forma geral da matriz obtida é a mesma do problema com potencial escalar total (Equações II.34 e II.35). As observações daí decorrentes continuam válidas (Inclusão de condições de contorno, simetria, somabilidade, esparsidade e matriz positiva definida).
3. O vetor do segundo membro é modificado em relação às equações (II.34 e II.35) pela inclusão do termo em G_1 e da integral de superfície em $\Gamma_{kj} \cup \Gamma_{2j}$.

II.5.4 A Formulação com dois potenciais estendida

Como visto na seção II.4.1, o campo magnético H só é perpendicular à fronteira Γ_1 onde se impõe condição de contorno de Dirichlet $\phi = \phi_0$ constante se H_s também for perpendicular a esta fronteira. Em diversos problemas, esta condição leva à necessidade de se representar todas as regiões portadoras de corrente, mesmo aquelas situadas fora do domínio de estudos. Por exemplo, no problema da Figura II.7a existe uma simetria evidente, fazendo com que somente metade do problema precise ser calculado, como representado na Figura II.7b.

Porém, se só a metade superior dos condutores é representada, o campo H_s não é normal à fronteira onde se especifica condição de Dirichlet. Este fato impõe que se leve em conta também os condutores situados na metade inferior da peça, pois só assim o campo H_s resultante da soma dos campos produzidos pelos dois condutores vai ser normal à fronteira. Isto, além de ser uma fonte de erros, contradiz a noção matemática de que um problema de contorno pode ser completamente especificado em seu domínio de solução. Do ponto de vista computacional, o problema com mais condutores leva a tempos de processamento maiores, pois o tempo necessário para o cálculo de H_s é proporcional ao número

de condutores.

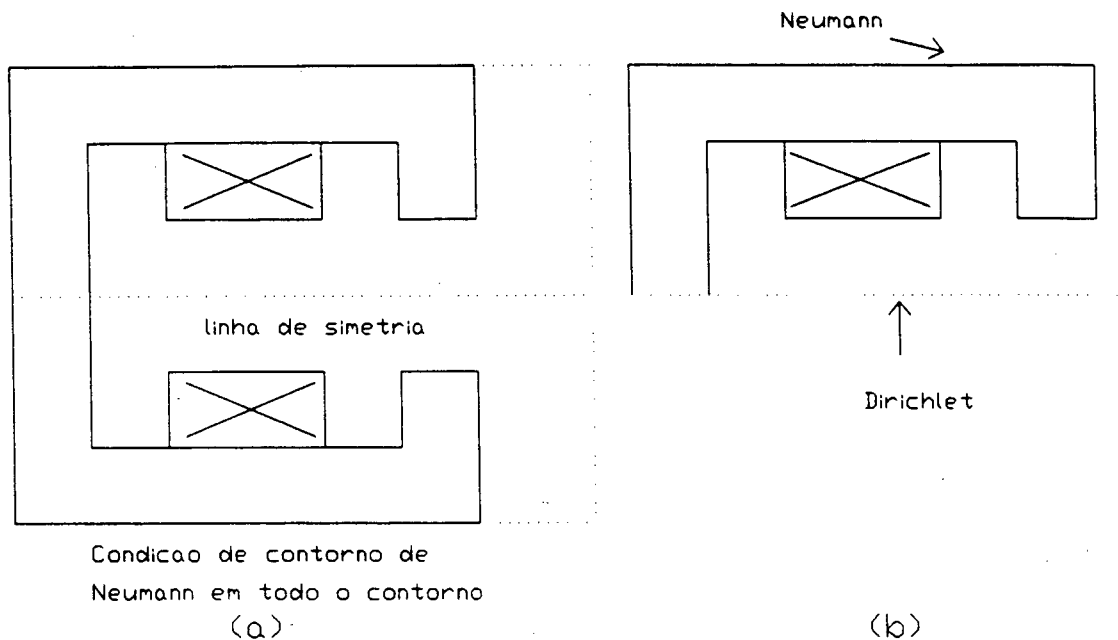


Figura II.7 Problema magnetostático com linha de simetria: (a) Problema completo; (b) Com simetria considerada

Pissanetzky & Xiang (1990) propuseram um método, "Formulação com dois potenciais escalares extendida", que elimina este problema. A idéia é simples: em Ω_j , escreve-se:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_m + \mathbf{H}_s + \mathbf{H}_r$$

\mathbf{H}_m é definido como em (II.75). \mathbf{H}_s é a contribuição dos condutores internos a Ω_j . \mathbf{H}_r é a contribuição dos condutores não incluídos em Ω_j . Como os condutores adicionais estão situados fora da região Ω_j , tem-se:

$$\text{rot}(\mathbf{H}_m + \mathbf{H}_r) = 0$$

isto é

$$\mathbf{H}_m + \mathbf{H}_r = -\text{grad}\phi$$

Então, a equação II.96a é novamente obtida para ϕ , mas agora ϕ é definido de

maneira diferente.

As condições entre Ω_j e Ω_k são tratadas da mesma maneira que na formulação anterior. Todas as condições de contorno também, a menos das condições de contorno de Dirichlet em Γ_{1j} . Especificando-se em Γ_{1j}

$$H \cdot \underline{t} = 0 = H_s \cdot \underline{t} - \text{grad} \phi \cdot \underline{t} = 0$$

e integrando-se, obtém-se:

$$\phi_B = \phi_A + \int_A^B H_s \cdot \underline{t} \, dl$$

que é a condição necessária. Esta condição é levada em conta facilmente na formulação (II.112), gerando um termo adicional igual ao primeiro termo do lado direito de (II.112), com $l \in \Gamma_{1j}$.

II.6 Comparação entre as formulações para o problema magnetostático

Foram apresentadas 4 diferentes formulações matemáticas para o problema magnetostático tridimensional: a utilização do potencial escalar total (PET), do potencial vetor magnético (PVM), do potencial escalar reduzido (PER) e dos potenciais escalares reduzido e total (PERT).

A utilização do PET só é justificável em problemas eletrostáticos ou em problemas magnetostáticos que não incluam correntes.

O PVM permite que se tratem problemas onde existam correntes, exigindo, porém, o cálculo de 3 incógnitas por nó, o que gera sistemas matriciais de dimensões muito grandes.

O PER apresenta problemas numéricos em regiões de alta permeabilidade magnética, ficando restrito a casos onde não existam materiais ferromagnéticos.

Como consequência, o uso dos PERT se impõe. Este método não sofre de nenhuma das desvantagens dos métodos anteriores e apresenta apenas 1 incógnita por nó. Por isto, esta é a formulação adotada neste trabalho. A versão implantada utiliza a extensão de Pissanetzky & Xiang (1990) apresentada na seção (II.5.4). Os únicos problemas desta formulação são:

- a) O cálculo de H_s consome, para geometrias complicadas dos condutores, tempos de processamento consideráveis.

- b) Problemas topológicos associados à existência de regiões Ω_k multiplamente conexas demandando cortes para tornar estas regiões simplesmente conexas.

CAPÍTULO III PROBLEMAS QUASE-ESTÁTICOS: CORRENTES DE FOUCAULT

III.1 Introdução

Um grande número de pesquisadores de vários grupos e países está trabalhando na solução do problema de correntes de Foucault em 3 dimensões. Isto gerou uma série de formulações diferentes, cada qual com suas vantagens e desvantagens. Não existe, hoje, um consenso sobre qual é o melhor método e nem se existiria um método que superaria, somente com vantagens, todos os outros (Trowbridge, 1988). Existem grupos de pesquisadores que defendem que um programa geral para correntes induzidas deve conter uma combinação de formulações matemáticas diferentes, cada qual sendo utilizada para resolver o problema específico para o qual está mais adaptada (Rodger et al., 1990; Biró & Preis, 1990; Nakata et al., 1990(a)).

Por estarem estas questões em aberto, neste capítulo faz-se uma revisão das principais formulações propostas para a resolução de problemas envolvendo correntes de Foucault em 3 dimensões. Esta apresentação se restringe aos métodos mais utilizados e aos que utilizam elementos finitos, sem esquecer que a técnica de elementos de contorno também tem sido utilizada com grande sucesso nesta área (Nicolas, 1983 e 1988; Rucker & Richter, 1990), apresentando a vantagem de reduzir os problemas 3-D às suas fronteiras e interfaces e a desvantagem de introduzir matrizes cheias e apresentar dificuldades para tratar os problemas não lineares.

Todas as formulações para o problema de correntes de Foucault têm como ponto de partida as equações de Maxwell no regime quase-estático:

$$\text{rot } \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (\text{III.1})$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (\text{III.2})$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (\text{III.3})$$

$$\text{div } \mathbf{J} = 0 \quad (\text{III.4})$$

Mais as equações constitutivas, com meios isotrópicos:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (\text{III.5})$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (\text{III.6})$$

na equação (III.5) desprezou-se o termo \mathbf{B}_r , indução remanente, que, se não traz complicações teóricas no desenvolvimento feito a seguir, traz um aumento do número de termos a serem manipulados nas equações, sem nenhuma contribuição conceitual.

Tem-se, também, as condições de continuidade dos vetores de campo nas interfaces entre materiais com diferentes propriedades constitutivas:

$$\underline{n} \cdot [\mathbf{B}] = 0 \quad (\text{III.7})$$

$$\underline{n} \wedge [\mathbf{H}] = 0 \quad (\text{III.8})$$

$$\underline{n} \cdot [\mathbf{J}] = 0 \quad (\text{III.9})$$

$$\underline{n} \wedge [\mathbf{E}] = 0 \quad (\text{III.10})$$

Um problema típico de correntes de Foucault é representado na Fig. III.1. Ele consiste de uma região condutora Ω_r , onde são induzidas correntes de Foucault, envolvida por regiões não condutoras. A região sem correntes de Foucault, por sua vez, é dividida em duas partes: a primeira, Ω_j , onde existem correntes externas impostas e que possui materiais com permeabilidade magnética igual à do ar; a outra, Ω_k , possui materiais magnéticos de alta permeabilidade e não tem correntes impostas externamente.

As fronteiras entre regiões são denotadas Γ_{jr} , Γ_{kr} e Γ_{kj} . O domínio total do problema, Ω , é igual à união dos subdomínios Ω_r , Ω_k e Ω_j . A fronteira de Ω , Γ , é dividida em 2 partes, de acordo com as condições de contorno impostas: em Γ_1 , o componente normal de \mathbf{B} é imposto; em Γ_2 , são impostos os componentes tangenciais de \mathbf{H} . Normalmente, estas condições de contorno são homogêneas:

$$\mathbf{B} \cdot \underline{n} = 0 \quad , \text{ em } \Gamma_1 \quad (\text{III.11})$$

$$\mathbf{H} \wedge \underline{n} = 0 \quad , \text{ em } \Gamma_2 \quad (\text{III.12})$$

As fronteiras Γ_1 e Γ_2 , por sua vez, podem ser subdivididas em Γ_{1j} , Γ_{1k} , Γ_{1r} e Γ_{2j} , Γ_{2k} , Γ_{2r} , com os novos índices indicando a sub-região conectada à fronteira.

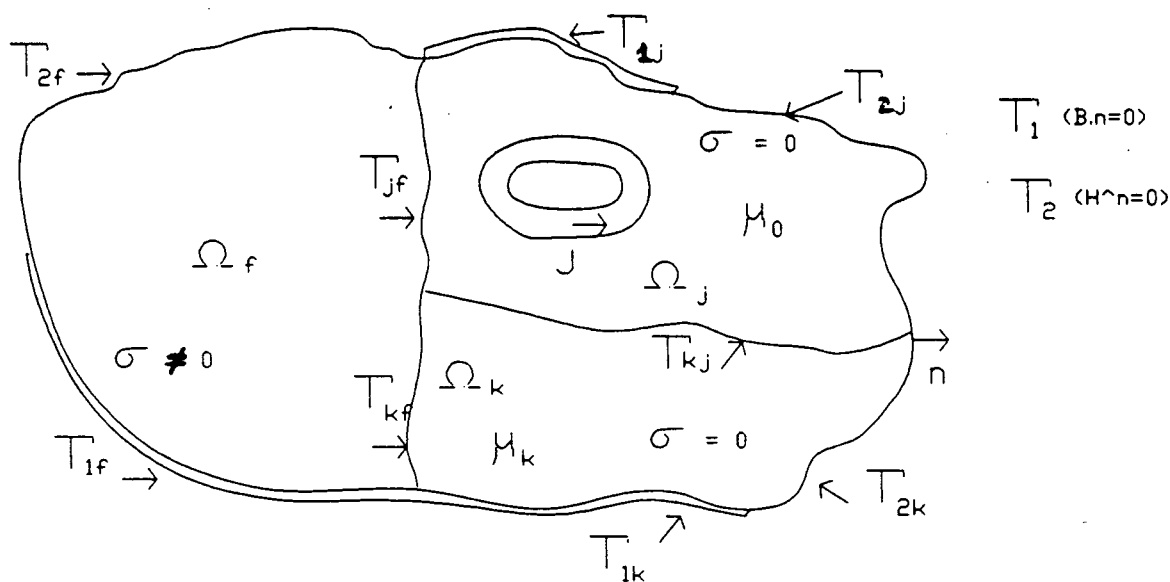


Figura III.1 Topologia de um problema típico de correntes de Foucault.

As formulações existentes para a resolução do problema de correntes de Foucault tridimensional podem ser divididas em 3 grupos: os métodos baseados no potencial vetor magnético (\mathbf{A}), os baseados no potencial vetor elétrico, (\mathbf{T}), e os baseados na utilização direta dos vetores de campo (\mathbf{H}). Nas seções a seguir discute-se cada uma delas.

III.2 Formulações utilizando o potencial vetor magnético

Na literatura, existem várias formulações para o problema de correntes de Foucault 3-D utilizando o potencial vetor magnético. Nesta seção são apresentadas, detalhadamente, as formulações que utilizam o calibre de Coulomb, mostrando-se o seu modelamento matemático (Seções III.2.1, III.2.2, III.2.3), a sua forma fraca (Seção III.2.4) com a devida aplicação dos métodos de Galerkin e de elementos finitos (Seção III.2.5). Na seção III.2.6 apresentam-se, resumidamente, outras formulações que utilizam o potencial vetor magnético, com o intuito de obter as suas características básicas.

III.2.1 O método A-V com calibre de Coulomb: modelamento matemático

O método A-V é, provavelmente, a técnica de resolução de problemas com correntes de Foucault tridimensionais mais direta, pois é uma extensão de um

método tradicionalmente utilizado em 2 dimensões. Talvez por isto, ele tenha merecido a atenção de inúmeros grupos de pesquisa (Biddlecombe et al., 1982; Bíró & Preis, 1989; Bryant et al., 1990; Chari et al., 1982 e 1986; Kameari, 1988; Morisue, 1982, 1988 e 1990; Morisue & Fukumi, 1988; Renhart et al., 1988; Rodger, 1983; Rodger et al., 1990; Salon & Peng, 1984)

O potencial vetor, \mathbf{A} , é parcialmente definido, como na seção II.3, por:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (\text{III.13})$$

Mas, de (III.1):

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial (\text{rot } \mathbf{A})}{\partial t} \quad (\text{III.14})$$

e integrando, obtém-se:

$$\mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } V \quad (\text{III.15})$$

Nesta equação foi introduzido o potencial escalar elétrico quase estático, V , que se reduz corretamente ao potencial eletrostático quando o potencial vetor não depende do tempo.

A combinação desta relação com as equações (III.2), (III.4), (III.11) e (III.5) gera:

$$\text{rot } (\nu \text{ rot } \mathbf{A}) = -\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \sigma \text{ grad } V \quad , \text{ em } \Omega_f \quad (\text{III.16})$$

Note-se que a equação estipulando que a densidade de corrente elétrica possui divergente nulo está implícita nesta equação, o que pode ser verificado tomando-se o *div* de ambos os lados de (III.16). Além disto, como em Ω_j $\sigma = 0$, a equação que descreve o problema nestas regiões é:

$$\text{rot } (\nu \text{ rot } \mathbf{A}) = \mathbf{J}_s \quad , \text{ em } \Omega_j \quad (\text{III.17})$$

onde \mathbf{J}_s é a corrente imposta externamente em Ω_j . Conclui-se que, nestas regiões, a equação do problema, em termos do potencial vetor, é idêntica à equação do problema magnetostático (II.38). Em Ω_k , o termo da direita de (III.17) é nulo e esta equação se reduz a:

$$\text{rot } (\nu \text{ rot } \mathbf{A}) = 0 \quad , \text{ em } \Omega_k \quad (\text{III.18})$$

As condições de interface (III.7) e (III.8) geram as condições (II.39) e (II.40), aqui repetidas:

$$\underline{n} \cdot [\text{rot } \mathbf{A}] = 0 \quad (\text{III.19})$$

$$\underline{n} \wedge [\nu(\text{rot } \mathbf{A})] = 0 \quad (\text{III.20})$$

Estas equações devem ser verificadas em Γ_{kj} , Γ_{kf} , Γ_{jf} e em todos os pontos de descontinuidade de ν . A adoção de um potencial vetor contínuo faz com que (III.19) seja automaticamente verificada.

Nos pontos de descontinuidade de σ deve-se verificar:

$$\underline{n} \cdot \left[-\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \sigma \text{grad } V \right] = 0 \quad (\text{III.21})$$

Desta expressão e, levando-se em conta que $\sigma = 0$ em Ω_k e Ω_j , conclui-se que, nas interfaces Γ_{kf} e Γ_{jf} , o componente normal de \mathbf{J} deve ser nulo, isto é, nenhuma corrente sai da região Ω_f .

Para que o sistema de equações no potencial vetor tenha solução única, devem ser fixados o $\text{div } \mathbf{A}$ e condições de contorno apropriadas. Existem várias escolhas para o $\text{div } \mathbf{A}$, cada uma gerando métodos de cálculo diferentes. As principais são:

- a) $\text{div } \mathbf{A} = 0$, que é o calibre de Coulomb, já utilizado na seção II.3 para o problema magnetostático (Bíró & Preis, (1989); Morisue (1982, 1988, 1990); Pillsbury, (1983); Renhart et al., (1988), Rodger , (1983) e Rodger et al., (1990)).;
- b) $\text{div } \mathbf{A} = -\mu\sigma V$, que é o calibre de Lorentz em baixa frequência (Bryant et al., 1990).

A seguir apresenta-se a formulação que implementa o calibre de Coulomb. O calibre de Lorentz é discutido na seção (III.2.6).

Garante-se a unicidade de \mathbf{A} , estabelecendo-se:

$$\text{div } \mathbf{A} = 0 \quad , \text{ em } \Omega \quad (\text{III.22})$$

$$\mathbf{A} \wedge \underline{n} = 0 \quad , \text{ em } \Gamma_1 \quad (\text{III.23})$$

$$\mathbf{A} \cdot \underline{n} = 0 \quad , \text{ em } \Gamma_2 \quad (\text{III.24})$$

Sujeita a estas condições, a formulação composta pelas equações (III.16), (III.17), (III.18), (III.20), (III.21) admite solução única, o que é provado recorrendo-se aos mesmos argumentos utilizados na seção (II.3) (Ver Bíró & Preis, 1989).

Rodger (1983) impôs o calibre de Coulomb utilizando multiplicadores de Lagrange. Esta técnica introduz mais algumas incógnitas na equação resultante e, por isto, não será vista neste trabalho.

Outra possibilidade é utilizar a técnica da penalidade, já apresentada na seção II.3 para o problema magnetostático. Como visto, esta técnica consta da adição do termo $\nu(\text{div } \mathbf{A})^2$ ao funcional associado à equação (II.59a). Porém, no presente caso, não existe um funcional para a equação (III.14), porque esta equação não é auto-adjunta.

Uma solução para este problema foi esboçada por Cendes et al. (1982) e Morisue (1982) e, posteriormente, desenvolvida por Renhart et al. (1988), Bíró & Preis (1989) e Morisue (1990). Ela consta de se adicionar ao lado esquerdo de (III.16), (III.17) e (III.18) o termo $-\text{grad}(\nu \text{ div } \mathbf{A})$. Note-se que, com isto, a condição de divergente zero para a densidade de corrente não estará mais implícita na equação (III.16) modificada e, por isto, ela deve ser explicitamente estipulada. Acrescentando estas condições o sistema de equações (III.16), (III.17) se transforma em:

$$\text{rot}(\nu \text{ rot } \mathbf{A}) - \text{grad}(\nu \text{ div } \mathbf{A}) = -\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \sigma \text{ grad } V \quad , \text{ em } \Omega_f \quad (\text{III.25})$$

$$\text{div}(-\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \sigma \text{ grad } V) = 0 \quad , \text{ em } \Omega_f \quad (\text{III.26})$$

$$\text{rot}(\nu \text{ rot } \mathbf{A}) - \text{grad}(\nu \text{ div } \mathbf{A}) = \mathbf{J}_s \quad , \text{ em } \Omega_j \text{ e } \Omega_k \quad (\text{III.27})$$

(Obviamente, em Ω_k , $\mathbf{J}_s = 0$). Tomando-se o divergente de (III.25) e (III.27) e levando-se em conta a equação (III.26) e que \mathbf{J}_s deve ter divergente nulo, obtém-se:

$$\text{div grad}(\nu \text{ div } \mathbf{A}) = 0 \quad , \text{ em } \Omega \quad (\text{III.28})$$

Se condições de contorno homogêneas de Dirichlet ou de Neumann puderem ser

forçadas sobre $\nu \operatorname{div} A$ ao longo de Γ , a verificação da condição de Coulomb é assegurada. Com isto, é justificada a inclusão do termo $-\operatorname{grad}(\nu \operatorname{div} A)$ em (III.25) e (III.27), isto é, o sistema de equações (III.25, III.26, III.27) passa a ser equivalente ao sistema (III.16, III.17, III.18, III.22). Observe-se que tomando o componente normal de (III.25 ou III.27) em Γ_2 , obtém-se:

$$\underline{n} \cdot (\operatorname{rot}(\nu \operatorname{rot} A)) - \underline{n} \cdot \operatorname{grad}(\nu \operatorname{div} A) = \underline{n} \cdot J = 0$$

Nesta equação, levou-se em conta que qualquer corrente atravessando Γ_2 levaria à não verificação de (III.12). Além disto, a equação (II.53) permite escrever:

$$\underline{n} \cdot (\operatorname{rot}(\nu \operatorname{rot} A)) = -\operatorname{div}(\underline{n} \wedge (\nu \operatorname{rot} A)) + \nu \operatorname{rot} A \cdot \operatorname{rot}(\underline{n}) = 0 \quad (\text{III.29})$$

Conclui-se que:

$$\underline{n} \cdot \operatorname{grad}(\nu \operatorname{div} A) = 0, \quad \text{em } \Gamma_2 \quad (\text{III.30})$$

que é uma condição de contorno homogênea de Neumann em $\nu \operatorname{div} A$. Por consequência, para que a condição de Coulomb seja verificada, condições de contorno de Dirichlet homogêneas devem ser fixadas em Γ_1 :

$$\nu \operatorname{div} A = 0, \quad \text{em } \Gamma_1 \quad (\text{III.31})$$

Com isto garante-se que o calibre de Coulomb é satisfeito desde que $\nu \operatorname{div} A$ seja contínuo ao longo das interfaces Γ_{fk} , Γ_{kj} e Γ_{fj} e nos demais pontos de descontinuidade de ν .

Para finalizar, devem ser estabelecidas condições de contorno sobre V em Γ_{1f} e Γ_{2f} . Em Γ_2 , $\underline{n} \cdot J = 0$. Levando-se em conta a condição (III.24), conclui-se que:

$$-\sigma \frac{\partial V}{\partial \underline{n}} = 0, \quad \text{em } \Gamma_{2f}$$

Em Γ_{1f} , para que a condição (III.11) se verifique, $J \wedge \underline{n} = 0$. Levando-se em conta a condição (III.23) conclui-se que:

$$V = V_0, \quad \text{constante}, \quad \text{em } \Gamma_{1f}$$

Em suma, o problema de correntes de Foucault 3-D, utilizando o potencial vetor magnético \mathbf{A} com calibre de Coulomb é: determinar \mathbf{A} e V que satisfaçam:

1. As equações diferenciais parciais nos pontos ordinários de Ω_f :

$$\text{rot}(\nu \text{rot} \mathbf{A}) - \text{grad}(\nu \text{div} \mathbf{A}) = -\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \sigma \text{grad} V, \text{ em } \Omega_f \quad (\text{III.32a})$$

$$\text{div}(-\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \sigma \text{grad} V) = 0, \text{ em } \Omega_f \quad (\text{III.32b})$$

2. A equação diferencial parcial em Ω_j :

$$\text{rot}(\nu \text{rot} \mathbf{A}) - \text{grad}(\nu \text{div} \mathbf{A}) = \mathbf{J}_s, \text{ em } \Omega_j \quad (\text{III.32c})$$

3. A equação diferencial parcial nos pontos ordinários de Ω_k :

$$\text{rot}(\nu \text{rot} \mathbf{A}) - \text{grad}(\nu \text{div} \mathbf{A}) = 0, \text{ em } \Omega_k \quad (\text{III.32d})$$

4. A condição de interface em Γ_{jf} , Γ_{kf} e em pontos de descontinuidade de σ :

$$\underline{n} \cdot \left[-\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \sigma \text{grad} V \right] = 0, \text{ em } \Gamma_{jf} \text{ e } \Gamma_{kf} \quad (\text{III.32e})$$

5. As condições de interface em Γ_{jf} , Γ_{kf} , Γ_{kj} e em pontos de descontinuidade de ν :

$$\underline{n} \wedge \left[\nu(\text{rot} \mathbf{A}) \right] = 0, \text{ em } \Gamma_{jf}, \Gamma_{kf}, \Gamma_{kj} \quad (\text{III.32f})$$

$$\left[\nu \text{div} \mathbf{A} \right] = 0, \text{ em } \Gamma_{jf}, \Gamma_{kf}, \Gamma_{kj} \quad (\text{III.32g})$$

6. As condições de contorno em Γ_1 :

$$\underline{n} \wedge \mathbf{A} = 0, \text{ em } \Gamma_1 \quad (\text{III.32h})$$

$$\nu \text{div} \mathbf{A} = 0, \text{ em } \Gamma_1 \quad (\text{III.32i})$$

7. As condições de contorno em Γ_2 :

$$\underline{n} \wedge (\nu(\text{rot } \mathbf{A})) = 0 \quad , \text{ em } \Gamma_2 \quad (\text{III.32j})$$

$$\underline{n} \cdot \mathbf{A} = 0 \quad , \text{ em } \Gamma_2 \quad (\text{III.32k})$$

8. As condições de contorno em Γ_{1f} e Γ_{2f} :

$$V = V_0 \quad , \text{ constante} \quad , \text{ em } \Gamma_{1f} \quad (\text{III.32l})$$

$$-\sigma \frac{\partial V}{\partial \underline{n}} = 0 \quad , \text{ em } \Gamma_{2f} \quad (\text{III.32m})$$

III.2.2 O Método A-V- ϕ - ψ com Calibre de Coulomb: modelamento matemático

Este método é um aperfeiçoamento do método A-V, no sentido de diminuir o número de graus de liberdade por nó (Kameari, 1988; Leonard & Rodger, 1988). Originalmente, a formulação A-V tem 4 incógnitas por nó da região Ω_f e 3 nas regiões Ω_k e Ω_j . A idéia básica deste método é utilizar a formulação A-V somente na região Ω_f e os potenciais escalares reduzido e total nas regiões Ω_j e Ω_k , respectivamente. As equações a serem resolvidas são:

$$\text{rot} (\nu \text{ rot } \mathbf{A}) = -\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \sigma \text{ grad } V \quad , \text{ em } \Omega_f \quad (\text{III.33})$$

$$\text{div}(-\mu \text{ grad } \psi) = 0 \quad , \text{ em } \Omega_k \quad (\text{III.34})$$

$$\text{div}(-\mu_0 \text{ grad } \phi) = 0 \quad , \text{ em } \Omega_j \quad (\text{III.35})$$

Na fronteira Γ as condições de contorno são:

a) Em Γ_1 :

$$-\mu \frac{\partial \psi}{\partial \underline{n}} = 0 \quad , \text{ em } \Gamma_{1k}$$

$$-\mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial \underline{n}} + \mu_0 H_s \cdot \underline{n} = 0 \quad , \text{ em } \Gamma_{1j}$$

(III.36)

$$\underline{n} \wedge \mathbf{A} = 0 \quad \text{ e } \quad \nu \text{ div } \mathbf{A} = 0 \quad , \text{ em } \Gamma_{1f}$$

$$V = V_0 \quad , \text{ constante} \quad , \text{ em } \Gamma_{1f}$$

b) Em Γ_2 :

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_0 && , \text{ em } \Gamma_{2k} \\ \phi &= \phi_0 && , \text{ em } \Gamma_{2j} \\ \underline{n} \cdot \mathbf{A} &= 0 \quad \text{ e } \quad \underline{n} \wedge (\nu \text{ rot } \mathbf{A}) &= 0 && , \text{ em } \Gamma_{2r} \\ -\sigma \frac{\partial V}{\partial \underline{n}} &= 0 && , \text{ em } \Gamma_{2f} \end{aligned} \tag{III.37}$$

Note-se que em relação à formulação para o problema magnetostático com dois potenciais, as condições de contorno sobre os potenciais escalares magnéticos estão invertidas (Compare com as eq. II.96f e II.96g).

As condições de interface em Γ_{kj} são:

$$\phi = \psi + \int_0^{t_1} \mathbf{H}_s \cdot \underline{t} \, dl \tag{III.38}$$

$$-\mu \text{ grad } \psi \cdot \underline{n} = \mu_0(-\text{grad}\phi + \mathbf{H}_s) \cdot \underline{n} \tag{III.39}$$

Estas condições podem ser utilizadas, como na seção II.5, para fazer o acoplamento em Γ_{kj} entre as regiões Ω_k e Ω_j . Em Γ_{kr} , as condições de interface são:

$$-\text{grad } \psi \wedge \underline{n} = (\nu \text{ rot } \mathbf{A}) \wedge \underline{n} \tag{III.40}$$

$$-\mu \text{ grad } \psi \cdot \underline{n} = \text{rot } \mathbf{A} \cdot \underline{n} \tag{III.41}$$

$$\left(-\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \sigma \text{ grad } V\right) \cdot \underline{n} = 0 \tag{III.42}$$

Em Γ_{jr} , as condições de interface são:

$$(-\text{grad}\phi + \mathbf{H}_s) \wedge \underline{n} = \nu \text{ rot } \mathbf{A} \wedge \underline{n} \tag{III.43}$$

$$\mu_0(-\text{grad}\phi + \mathbf{H}_s) \cdot \underline{n} = \text{rot } \mathbf{A} \cdot \underline{n} \tag{III.44}$$

$$\left(-\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \sigma \operatorname{grad} V\right) \cdot \underline{n} = 0 \quad (\text{III.45})$$

Além disto, as condições usuais de continuidade dos campos devem ser verificadas nos pontos onde haja descontinuidade das características constitutivas dos materiais.

Para garantir-se a unicidade da solução, o calibre de Coulomb é forçado na equação (III.33) da mesma maneira que na seção anterior. Porém existem algumas diferenças, relativas à introdução das condições de contorno. Agora o contorno da região com potencial vetor é $\Gamma_{jf} \cup \Gamma_{kf} \cup \Gamma_{1f} \cup \Gamma_{2f}$ e não mais Γ .

Nas interfaces Γ_{jf} e Γ_{kf} , como será visto na seção III.2.4, as condições III.40 e III.43 são utilizadas como condições de contorno para o potencial vetor em Ω_f . Ao mesmo tempo, as equações III.41 e III.44 são utilizadas como condições de contorno para os potenciais escalares em Ω_k e Ω_j , respectivamente. Isto significa que, do ponto de vista de Ω_f , as interfaces Γ_{jf} e Γ_{kf} podem ser encaradas como fronteiras onde se impôs os componentes tangenciais de \mathbf{H} , isto é, como uma fronteira do tipo Γ_2 . Como visto na seção anterior, para se assegurar a unicidade de \mathbf{A} em fronteiras deste tipo, deve-se fixar o valor do componente normal de \mathbf{A} , isto é:

$$\mathbf{A} \cdot \underline{n} = 0 \quad , \text{ em } \Gamma_{jf}, \Gamma_{kf} \quad (\text{III.46})$$

Mostra-se, de forma semelhante à utilizada na seção anterior, que com esta condição adicional, obtém-se a unicidade da formulação (Bíró & Preis, 1989). Em suma, tem-se o seguinte problema de contorno: determinar as funções \mathbf{A} - V - ϕ - ψ que satisfazem:

1. As equações diferenciais parciais em Ω_f :

$$\operatorname{rot}(\nu \operatorname{rot} \mathbf{A}) - \operatorname{grad}(\nu \operatorname{div} \mathbf{A}) = -\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \sigma \operatorname{grad} V \quad , \text{ em } \Omega_f \quad (\text{III.47a})$$

$$\operatorname{div}\left(-\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \sigma \operatorname{grad} V\right) = 0 \quad , \text{ em } \Omega_f \quad (\text{III.47b})$$

2. A equação diferencial parcial em Ω_j :

$$\operatorname{div}(-\mu_0 \operatorname{grad} \phi) = 0 \quad , \text{ em } \Omega_j \quad (\text{III.47c})$$

3. A equação diferencial parcial em Ω_k :

$$\operatorname{div} (-\mu \operatorname{grad} \phi) = 0 \quad , \text{ em } \Omega_k \text{ (III.47d)}$$

4. A condição de interface em Γ_{jf} , Γ_{kf} e em pontos de descontinuidade de σ :

$$\underline{n} \cdot \left[-\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \sigma \operatorname{grad} V \right] = 0 \quad , \text{ em } \Gamma_{jf}, \Gamma_{kf} \text{ (III.47e)}$$

5. As condições de interface em Γ_{jf} :

$$(-\operatorname{grad} \phi + H_s) \wedge \underline{n} = (\nu \operatorname{rot} \mathbf{A}) \wedge \underline{n} \quad , \text{ em } \Gamma_{jf} \text{ (III.47f)}$$

$$\mu(-\operatorname{grad} \phi + H_s) \cdot \underline{n} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot \underline{n} \quad , \text{ em } \Gamma_{jf} \text{ (III.47g)}$$

6. As condições de interface em Γ_{kf} :

$$-\operatorname{grad} \psi \wedge \underline{n} = \nu \operatorname{rot} \mathbf{A} \wedge \underline{n} \quad , \text{ em } \Gamma_{kf} \text{ (III.47h)}$$

$$-\mu \operatorname{grad} \psi \cdot \underline{n} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot \underline{n} \quad , \text{ em } \Gamma_{kf} \text{ (III.47i)}$$

7. As condições de interface em Γ_{kj} :

$$\phi = \psi + \int_0^{t_1} H_s \cdot \underline{t} \, dl \quad , \text{ em } \Gamma_{kj} \text{ (III.47j)}$$

$$-\mu \operatorname{grad} \psi \cdot \underline{n} = \mu_0(-\operatorname{grad} \phi + H_s) \cdot \underline{n} \quad , \text{ em } \Gamma_{kj} \text{ (III.47k)}$$

8. A condição sobre o componente normal de \mathbf{A} em Γ_{jf} e Γ_{kf} .

$$\underline{n} \cdot \mathbf{A} = 0 \quad , \text{ em } \Gamma_{kf} \text{ e } \Gamma_{jf} \text{ (III.47l)}$$

9. As condições de contorno em Γ_1 :

$$-\mu \frac{\partial \psi}{\partial \underline{n}} = 0 \quad , \text{ em } \Gamma_{1k} \text{ (III.47m)}$$

$$-\mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial \underline{n}} + \mu_0 H_s \cdot \underline{n} = 0 \quad , \text{ em } \Gamma_{1j} \text{ (III.47n)}$$

$$\underline{n} \wedge \mathbf{A} = 0 \quad ; \quad \nu \operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \quad ; \quad V = V_0, \text{ const.} \quad , \text{ em } \Gamma_{1f} \text{ (III.47o)}$$

10. As condições de contorno em Γ_2 :

$$\psi = \psi_0 \quad , \text{ em } \Gamma_{2k} \quad (\text{III.47p})$$

$$\phi = \phi_0 \quad , \text{ em } \Gamma_{2j} \quad (\text{III.47q})$$

$$\underline{n} \cdot \mathbf{A} = 0 \quad ; \quad \underline{n} \wedge (\nu \text{ rot } \mathbf{A}) = 0 \quad ; \quad -\sigma \frac{\partial V}{\partial \underline{n}} = 0 \quad , \text{ em } \Gamma_{2f} \quad (\text{III.47r})$$

11. As condições de salto dos campos nos pontos não ordinários de Ω_f e Ω_k .

Observações:

1. Uma característica da formulação $\mathbf{A}-V-\psi-\phi$ deve ser ressaltada: se não existir uma fronteira Γ_{1f} (isto é, se não houver planos de simetria onde a corrente de Foucault é perpendicular ao plano) as únicas condições de contorno impostas sobre V são condições de contorno de Neumann. Neste caso, o valor de V deve ser fixado em um ponto qualquer de Ω_f , para assegurar a unicidade da solução.
2. Problemas multiplamente conexos e a utilização de potenciais escalares nas regiões não condutoras: A formulação (III.47) é válida para problemas onde a região Ω_f é simplesmente conexa. Para problemas como o da Fig III.2, a integral de linha de \mathbf{H} ao longo do caminho "c" fechado deve ser igual à corrente induzida que atravessa a superfície "A". Conseqüentemente, esta integral é distinta de zero. Porém, se o campo magnético for representado por um potencial escalar na região não condutora, esta integral será nula.

Para resolver esta contradição, Kameari (1988) propôs o uso de cortes na região complementar a Ω_f de modo a tornar Ω_f simplesmente conexa. Nestes cortes, o potencial escalar é descontínuo e o salto no potencial é igual ao valor da corrente que atravessa a superfície "A". Rodger & Easthan (1987) também adotaram esta solução, além de propor a utilização do método de multiplicadores de Lagrange para resolver o problema. Uma outra solução, mais simples, foi proposta por Rodger & Easthan (1987) e Leonard & Rodger (1988). Ela consta da utilização do potencial vetor magnético nos "buracos" dos condutores. Bíró & Preis (1989) desenvolveram um pouco mais este método que foi denominado

A-V-A- ψ - ϕ . As equações são as mesmas do método A-V- ϕ - ψ , porém deve-se levar em consideração que uma parcela de Ω_j (e/ou de Ω_k), que denota-se Ω_b , não vai mais ter o campo descrito por um potencial escalar, e sim pelo potencial vetor magnético.

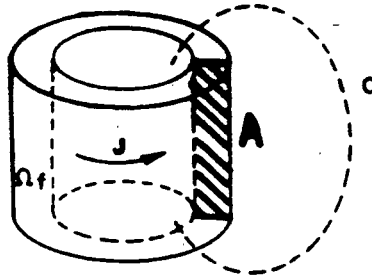


Fig. III.2: Um problema de corrente de Foucault 3-D multiplamente conexo.

Na Fig. III.3 Ω_f é multiplamente conexa.

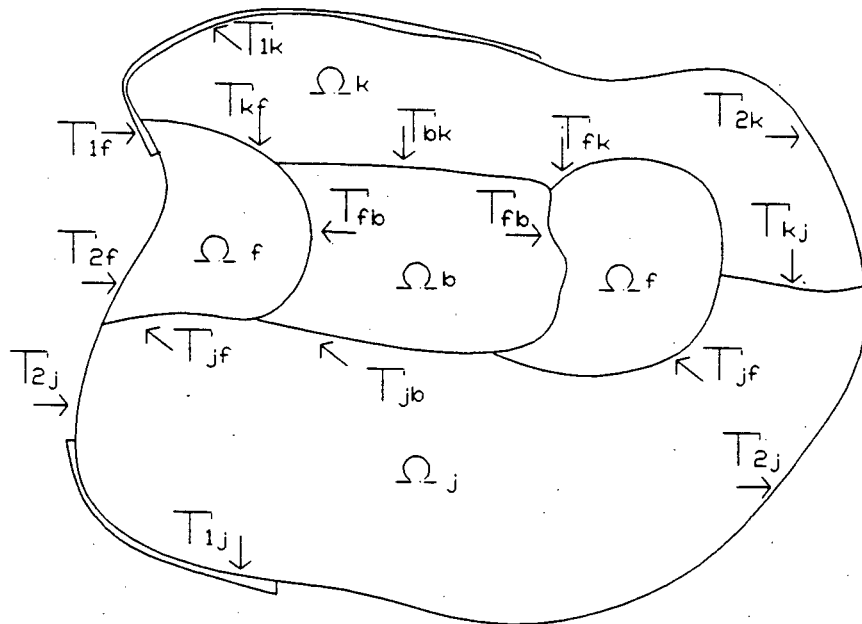


Figura III.3: Topologia de um problema com região Ω_f multiplamente conexa.

A região Ω_b é selecionada de modo que sua união com Ω_f resulte em uma região simplesmente conexa. Para este problema, as condições a seguir devem ser satisfeitas, em adição às outras 11 condições do sistema (III.47): determinar a função A que satisfaz:

12. A equação diferencial nas regiões de "buracos" dos condutores, Ω_b :

$$\text{rot}(\nu \text{ rot } A) - \text{grad}(\nu \text{ div } A) = 0 \quad , \text{ em } \Omega_b \quad (\text{III.47s})$$

13. As condições de interface em Γ_{bf} :

$$\underline{n} \wedge \left[\nu \text{ rot } A \right] = 0 \quad , \text{ em } \Gamma_{bf} \quad (\text{III.47t})$$

$$\left[\nu \text{ div } A \right] = 0 \quad , \text{ em } \Gamma_{bf} \quad (\text{III.47u})$$

$$\underline{n} \cdot \left[-\sigma \frac{\partial A}{\partial t} - \sigma \text{ grad } V \right] = 0 \quad , \text{ em } \Gamma_{bf} \quad (\text{III.47v})$$

14. Condições de interface em Γ_{jb} idênticas a (III.47f), (III.47g) e (III.47l) ; Condições de interface em Γ_{kb} idênticas a (III.47h), (III.47i) e (III.47l).

15. Condições de contorno em Γ_{1b} e Γ_{2b} :

$$\underline{n} \wedge A = 0 \quad ; \quad \nu \text{ div } A = 0 \quad , \text{ em } \Gamma_{1b} \quad (\text{III.47x})$$

$$\underline{n} \cdot A = 0 \quad ; \quad \underline{n} \wedge (\nu \text{ rot } A) = 0 \quad , \text{ em } \Gamma_{2b} \quad (\text{III.47y})$$

III.2.3 O método $A^* \psi$ - ϕ : modelamento matemático

A formulação A - V - ϕ - ψ tem quatro incógnitas por nó da região Ω_f . Porém, como mostrado a seguir, o potencial escalar elétrico V pode ser eliminado desta região, gerando uma formulação com apenas três incógnitas por nó de Ω_f (Emson & Simkin, 1983; Polak et al., 1983; Rodger & Eastham, 1983).

A equação básica do método A - V em Ω_f é:

$$\text{rot}(\nu \text{ rot } A) = -\sigma \frac{\partial A}{\partial t} - \sigma \text{ grad } V \quad , \text{ em } \Omega_f \quad (\text{III.48})$$

Escolhe-se como potencial vetor a função \mathbf{A}^* , tal que:

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A} + \int_0^t \text{grad } V \, dt \quad (\text{III.49})$$

O potencial \mathbf{A}^* é denominado potencial vetor modificado (Emson & Simkin, 1983). Substituindo-se (III.49) em (III.48), obtém-se:

$$\text{rot}(v \text{ rot } \mathbf{A}^*) = -\sigma \frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial t}, \quad \text{em } \Omega_f \quad (\text{III.50})$$

Nesta equação eliminou-se o potencial escalar elétrico, obtendo-se uma formulação com uma incógnita a menos na região Ω_f .

Note-se que a condição sobre o divergente de \mathbf{A}^* inerente a esta formulação está implícita em (III.50). De fato, tomando-se o *div* em ambos os lados de (III.50), obtém-se:

$$\text{div}\left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial t}\right) = 0 \quad (\text{III.51})$$

Porém, se não houver variação de \mathbf{A}^* em relação ao tempo, esta condição deixa de ser válida; em outras palavras, a formulação não funciona para o caso estático. Além disto, para o funcionamento em regime permanente senoidal, é razoável esperar-se que o condicionamento das equações piore à medida que a frequência diminui (Emson et al., 1985). Prevê-se, também, um pior condicionamento à medida em que a condutividade for diminuindo. Este é um dos problemas desta formulação.

Outro problema é a impossibilidade de serem representadas descontinuidades na condutividade utilizando-se um potencial contínuo. Com efeito, na interface entre dois meios de diferentes condutividades tem-se a condição (III.9):

$$[[\mathbf{J}]]. \underline{n} = 0 \quad (\text{III.52})$$

portanto

$$\underline{n} \cdot \left[\left[-\sigma \frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial t} \right] \right] = 0 \quad (\text{III.53})$$

Integrando em relação ao tempo e desdobrando a equação, obtém-se:

$$\underline{n} \cdot \mathbf{A}_1^* = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (\underline{n} \cdot \mathbf{A}_2^*) \quad (\text{III.54})$$

Esta equação mostra que, na interface entre dois meios de condutividades diferentes, existirá uma variação no componente normal de \mathbf{A}^* igual à razão entre as condutividades das duas regiões. Portanto, um potencial \mathbf{A}^* contínuo só pode ser utilizado em regiões onde não existam descontinuidades de σ . Isto não impede, porém, que σ possa sofrer variações contínuas (Mesquita & Bastos, 1990(b)).

O problema de contorno final tem estrutura semelhante à do método $\mathbf{A}-\mathbf{V}-\phi-\psi$, com pequenas diferenças. Em síntese, tem-se: determinar as funções $\mathbf{A}^*-\phi-\psi$ que satisfaçam:

1. A equação diferencial parcial em Ω_f :

$$\text{rot} (\nu \text{rot} \mathbf{A}^*) = -\sigma \frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial t} \quad , \text{ em } \Omega_f \quad (\text{III.55a})$$

2. A equação diferencial parcial em Ω_j :

$$\text{div} (-\mu_0 \text{grad} \phi) = 0 \quad , \text{ em } \Omega_j \quad (\text{III.55b})$$

3. A equação diferencial parcial em Ω_k :

$$\text{div} (-\mu \text{grad} \psi) = 0 \quad , \text{ em } \Omega_k \quad (\text{III.55c})$$

4. A condição de interface em Γ_{jf} e Γ_{kf} :

$$\underline{n} \cdot \left[-\sigma \frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial t} \right] = 0 \quad , \text{ em } \Gamma_{jf} \text{ e } \Gamma_{kf} \quad (\text{III.55d})$$

5. As condições de interface em Γ_{jf} :

$$(-\text{grad} \phi + \mathbf{H}_s) \wedge \underline{n} = (\nu \text{rot} \mathbf{A}^*) \wedge \underline{n} \quad , \text{ em } \Gamma_{jf} \quad (\text{III.55e})$$

$$\mu_0(-\text{grad} \phi + \mathbf{H}_s) \cdot \underline{n} = \text{rot} \mathbf{A}^* \cdot \underline{n} \quad , \text{ em } \Gamma_{jf} \quad (\text{III.55f})$$

6. As condições de interface em Γ_{kf} :

$$- \text{grad } \psi \wedge \underline{n} = (\nu \text{ rot } \underline{A}^*) \wedge \underline{n} \quad , \text{ em } \Gamma_{kf} \quad (\text{III.55g})$$

$$-\mu \text{ grad } \psi \cdot \underline{n} = \text{rot } \underline{A}^* \cdot \underline{n} \quad , \text{ em } \Gamma_{kf} \quad (\text{III.55h})$$

7. As condições de interface em Γ_{kj} :

$$\phi = \psi + \int_0^{t_1} H_s \cdot \underline{t} \, dl \quad , \text{ em } \Gamma_{kj} \quad (\text{III.55i})$$

$$-\mu \text{ grad } \psi \cdot \underline{n} = \mu_0 (-\text{grad } \phi + H_s) \cdot \underline{n} \quad , \text{ em } \Gamma_{kj} \quad (\text{III.55j})$$

8. A condição de salto de \underline{A}^* nos pontos de descontinuidade de σ :

$$\underline{n} \cdot \underline{A}_1^* = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (\underline{n} \cdot \underline{A}_2^*) \quad (\text{III.55k})$$

9. As condições de contorno em Γ_1 :

$$-\mu \frac{\partial \psi}{\partial \underline{n}} = 0 \quad , \text{ em } \Gamma_{1k} \quad (\text{III.55l})$$

$$-\mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial \underline{n}} + \mu_0 H_s \cdot \underline{n} = 0 \quad , \text{ em } \Gamma_{1j} \quad (\text{III.55m})$$

$$\underline{n} \wedge \underline{A}^* = 0 \quad ; \quad , \text{ em } \Gamma_{1f} \quad (\text{III.55n})$$

10. As condições de contorno em Γ_2 :

$$\psi = \psi_0 \quad , \text{ em } \Gamma_{2k} \quad (\text{III.55o})$$

$$\phi = \phi_0 \quad , \text{ em } \Gamma_{2j} \quad (\text{III.55p})$$

$$\underline{n} \cdot \underline{A}^* = 0 \quad ; \quad \underline{n} \wedge (\nu \text{ rot } \underline{A}^*) = 0 \quad ; \quad , \text{ em } \Gamma_{2f} \quad (\text{III.55q})$$

11. As condições de salto dos campos nos pontos de descontinuidade de μ em Ω_f e Ω_k .

Observações:

1. A prova da unicidade da formulação é efetuada da maneira análoga às

provas de unicidade anteriores. Uma prova alternativa é apresentada por Polak et al. (1983).

2. O problema de regiões condutoras múltiplamente conexas é mais difícil de ser solucionado com esta formulação do que com a formulação $A-V-\phi-\psi$. Isto porque não se pode preencher a região do buraco dos condutores, Ω_b , com o potencial A^* , pois o seu *div* não é definido em regiões de condutividade nula. Uma possível solução é preencher-se Ω_b com um condutor de baixa condutividade. Porém, deve-se levar em conta que na interface Γ_b o componente normal de A^* será descontínuo e que quanto menor σ , pior será o condicionamento das equações, o que dificulta esta solução.

III.2.4 A forma fraca para os métodos que utilizam A com calibre de Coulomb

A dedução da forma fraca vai ser feita para o método $A-V-A-\phi-\psi$, porque as demais formulações ($A-V-A$, $A-V-\phi-\psi$ e $A^*-\phi-\psi$) podem ser consideradas como casos particulares desta formulação.

Os seguintes resíduos, funções das coordenadas espaciais e do tempo são definidos:

$$\underline{r}_f = \text{rot}(v \text{ rot } A) - \text{grad}(v \text{ div } A) + \sigma \frac{\partial A}{\partial t} + \sigma \text{ grad } V = 0 \quad , \text{ em } \Omega_f \quad (\text{III.56a})$$

$$r_f = \text{div}(-\sigma \frac{\partial A}{\partial t} - \sigma \text{ grad } V) = 0 \quad , \text{ em } \Omega_f \quad (\text{III.56b})$$

$$r_j = \text{div}(-\mu_0 \text{ grad } \phi) = 0 \quad , \text{ em } \Omega_j \quad (\text{III.56c})$$

$$r_k = \text{div}(-\mu \text{ grad } \psi) = 0 \quad , \text{ em } \Omega_k \quad (\text{III.56d})$$

$$\underline{r}_b = \text{rot}(v \text{ rot } A) - \text{grad}(v \text{ div } A) = 0 \quad , \text{ em } \Omega_b \quad (\text{III.56e})$$

Estes resíduos são definidos no interior de cada subdomínio regular de Ω_i , $i = f, j, k, b$ e no intervalo $0 \leq t \leq t_f$, onde t_f é o instante de tempo final. Os resíduos \underline{r}_f e \underline{r}_b são vetores, e os demais são escalares. O produto escalar dos resíduos vetoriais é efetuado com funções de teste vetoriais \underline{v}_i suficientemente regulares e independentes de t . Para os resíduos escalares são utilizadas funções de teste escalares u_i , também independentes de t . Obtém-se:

$$\int_{\Omega_f} \underline{v}_f \cdot [\text{rot}(v \text{ rot } \mathbf{A}) - \text{grad}(v \text{ div } \mathbf{A}) + \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \sigma \text{grad } V] d\Omega = 0 \quad (\text{III.57a})$$

$$\int_{\Omega_f} u_f \text{div}(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \sigma \text{grad } V) d\Omega = 0 \quad (\text{III.57b})$$

$$\int_{\Omega_j} u_j \text{div}(-\mu_0 \text{grad} \phi) d\Omega = 0 \quad (\text{III.57c})$$

$$\int_{\Omega_k} u_k \text{div}(-\mu \text{grad} \psi) d\Omega = 0 \quad (\text{III.57d})$$

$$\int_{\Omega_b} \underline{v}_b \cdot [\text{rot}(v \text{ rot } \mathbf{A}) - \text{grad}(v \text{ div } \mathbf{A})] d\Omega = 0 \quad (\text{III.57e})$$

Utilizando-se a identidade II.53, o teorema da divergência e a identidade vetorial:

$$(\text{grad } u) \cdot \underline{v} = \text{div}(u\underline{v}) - u \text{div}(\underline{v}) \quad (\text{III.58})$$

Obtém-se, a partir de (III.57):

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_f} v [\text{rot } \underline{v}_f \cdot \text{rot } \mathbf{A} + \text{div } \underline{v}_f \text{ div } \mathbf{A}] + \sigma \underline{v}_f \cdot [\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \text{grad } V] d\Omega = \\ & - \int_{\partial\Omega_f} \underline{v}_f \cdot (\underline{n}_f \wedge (v \text{ rot } \mathbf{A})) d\Gamma + \int_{\partial\Omega_f} \underline{v}_f \cdot \underline{n}_f v \text{ div } \mathbf{A} d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{III.59a})$$

$$\int_{\Omega_f} \sigma \text{grad}(u_f) \cdot (\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \text{grad } V) d\Omega = \int_{\partial\Omega_f} u_f \sigma (\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \text{grad } V) \cdot \underline{n}_f d\Gamma \quad (\text{III.59b})$$

$$\int_{\Omega_j} \mu_0 \text{grad}(u_j) \cdot \text{grad} \phi d\Omega = \int_{\partial\Omega_j} \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial \underline{n}_j} u_j d\Gamma \quad (\text{III.59c})$$

$$\int_{\Omega_k} \mu \text{grad}(u_k) \cdot \text{grad} \psi d\Omega = \int_{\partial\Omega_k} \mu \frac{\partial \psi}{\partial \underline{n}_k} u_k d\Gamma \quad (\text{III.59d})$$

$$\int_{\Omega_b} v [\text{rot } \underline{v}_b \cdot \text{rot } \mathbf{A} + \text{div } \underline{v}_b \text{ div } \mathbf{A}] d\Omega =$$

$$- \int_{\partial\Omega_b} \underline{v}_b \cdot (\underline{n}_b \wedge (\nu \operatorname{rot} \mathbf{A})) \, d\Gamma + \int_{\partial\Omega_b} \underline{v}_b \cdot \underline{n}_b \nu \operatorname{div} \mathbf{A} \, d\Gamma \quad (\text{III.59e})$$

Para a obtenção destas equações, considerou-se a continuidade dos componentes dos campos (equ. III.7-III.10) nos pontos não ordinários de cada região. Com isto, as equações são válidas sobre todo o domínio Ω_i , $i=f,k,j,b$, e não somente sobre os subdomínios regulares. Desta forma, $\partial\Omega_i$ é definida por:

$$\partial\Omega_i = \bigcup_{\substack{j=1,2,f,k,j,b \\ j \neq i}} \Gamma_{ji}, \quad i = f,k,j,b \quad (\text{III.60})$$

As integrais de volume em (III.59) são simétricas, com exceção dos termos em (III.59a) e (III.59b) acoplando o potencial vetor com o potencial escalar elétrico. A simetria pode ser restaurada, definindo-se V como a derivada em relação ao tempo de V^* (Chari et al., 1982):

$$V = \frac{\partial V^*}{\partial t} \quad (\text{III.61})$$

Escolhe-se \underline{v}_f e \underline{v}_b de maneira que estas funções sejam coincidentes em Γ_{fb} . Com isto, pode-se substituí-las por funções \underline{v} definidas em $\Omega_f \cup \Omega_b$. Da mesma maneira, as funções escalares u_j e u_k são coincidentes em Γ_{kj} e são substituídas por u , cujo domínio é $\Omega_j \cup \Omega_k$.

Sejam as seguintes classes de funções:

$$\mathcal{H}(\Omega_j) = \{ \phi : \phi \in H^1(\Omega_j); \phi = \phi_0 \text{ em } \Gamma_{2j} \}$$

$$\mathcal{H}(\Omega_k) = \{ \psi : \psi \in H^1(\Omega_k); \psi = \psi_0 \text{ em } \Gamma_{2k} \}$$

$$\mathcal{H} = \{ \{ \psi, \phi \} : \phi \in \mathcal{H}(\Omega_j); \psi \in \mathcal{H}(\Omega_k); \phi = \psi + G_1 \text{ em } \Gamma_{kj} \} \quad (\text{III.62})$$

$$\mathcal{H}_0 = \{ w : w \in H^1(\Omega_j \cup \Omega_k); w = 0 \text{ em } \Gamma_{2j} \cup \Gamma_{2k} \} \quad (\text{III.63})$$

$$\mathcal{H}_V = \{ w : w \in H^1(\Omega_f); w = V_0 \text{ em } \Gamma_{1f} \} \quad (\text{III.64})$$

$$\mathcal{H}_{0V} = \{ w : w \in H^1(\Omega_f); w = 0 \text{ em } \Gamma_{1f} \} \quad (\text{III.65})$$

$$\underline{H}^1(\Omega_f \cup \Omega_b) = H^1(\Omega_f \cup \Omega_b) \times H^1(\Omega_f \cup \Omega_b) \times H^1(\Omega_f \cup \Omega_b) \quad (\text{III.66})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 = \{ \underline{w} : \underline{w} \in \underline{H}^1(\Omega_f \cup \Omega_b); \underline{n} \wedge \underline{w} = 0 \text{ em } \Gamma_{1f} \cup \Gamma_{1b}; \underline{n} \cdot \underline{w} = 0, \\ \text{em } \Gamma_{2f} \cup \Gamma_{2b} \cup \Gamma_{kf} \cup \Gamma_{jf} \cup \Gamma_{kb} \cup \Gamma_{jb} \} \end{aligned} \quad (\text{III.67})$$

De posse destas definições, analisam-se os diversos termos de (III.59):

1. Equações III.59a e III.59e: As funções de teste vetoriais $\underline{v} \in \mathcal{H}_0$. Com isto, a segunda integral de contorno em (III.59a) e (III.59e) é nula em Γ_{2f} , Γ_{2b} , Γ_{kf} , Γ_{jf} , Γ_{kb} e Γ_{jb} . Levando-se em conta que $\nu \operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ em Γ_{1f} e Γ_{1b} (eq. III.47o e III.47x), conclui-se que esta integral só possui integrando não nulo em Γ_{bf} .

A primeira integral de contorno tem integrando nulo em Γ_{1f} e Γ_{1b} devido às propriedades de \underline{v} e da comutatividade do produto misto. O integrando também é nulo em Γ_{2f} e Γ_{2b} devido ao fato de $\underline{n} \wedge (\nu \operatorname{rot} \mathbf{A})$ ser nulo nestas interfaces (Eq III.47r e III.47y). Com isto, ele vai ser distinto de zero somente em Γ_{bf} , Γ_{kf} , Γ_{jf} , Γ_{kb} e Γ_{jb} . Nestas fronteiras, são válidas as condições (III.47f e III.47h).

Levando-se em conta estas considerações, as equações (III.59a) e (III.59e) podem ser somadas, gerando:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_f \cup \Omega_b} \nu [\operatorname{rot} \underline{v} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} + \operatorname{div} \underline{v} \operatorname{div} \mathbf{A}] + \sigma \underline{v} \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \operatorname{grad} \frac{\partial V}{\partial t} \right] d\Omega = \\ \int_{\Gamma_{jf} \cup \Gamma_{jb}} \underline{v} \cdot (\underline{n}_j \wedge (-\operatorname{grad} \phi + \mathbf{H}_s)) d\Gamma + \int_{\Gamma_{kf} \cup \Gamma_{kb}} \underline{v} \cdot (\underline{n}_k \wedge (-\operatorname{grad} \psi)) d\Gamma, \\ \forall \underline{v} \in \mathcal{H}_0 \quad (\text{III.68}) \end{aligned}$$

Observe-se que:

- a. Os termos em Γ_{bf} desaparecem devido à utilização de (III.47t) na primeira integral de superfície e de (III.47u) na segunda integral de superfície.
- b. σ é nulo em Ω_b ;

- c. \underline{n}_j é igual a $-\underline{n}_f$ e $-\underline{n}_b$ em Γ_{jf} e Γ_{jb} , respectivamente. Observação semelhante pode ser feita para \underline{n}_k em Γ_{kf} e Γ_{kb} . Nestas fronteiras, foram utilizadas as relações (III.47f) e (III.47h), o que fez surgir os termos em ϕ e ψ .
2. Equação III.59b: O termo de contorno em III.59b é nulo em Γ_{1f} porque $u_f \in \mathcal{H}_{0v}$; é nulo em Γ_{2f} devido à primeira e à terceira condição em (III.47r); é nulo em Γ_{jf} , Γ_{kf} e Γ_{bf} , devido às condições (III.47e) e (III.47v); com isto, esta equação torna-se:

$$\int_{\Omega_f} \sigma \text{grad}(u_f) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \text{grad} \frac{\partial V^*}{\partial t} \right) d\Omega = 0 \quad \forall u_f \in \mathcal{H}_{0v} \quad (\text{III.69})$$

3. Equações III.59c e III.59d: O termo de contorno em (III.59c e III.59d) é nulo em Γ_{2j} , Γ_{2k} e Γ_{1k} porque $u \in \mathcal{H}_0$ e devido à condição (III.47m); em Γ_{1j} , a condição (III.47n) é utilizada; em Γ_{kj} as condições (III.47j) e (III.47k) podem ser utilizadas para efetuar um acoplamento semelhante ao desenvolvido na seção (II.5); em Γ_{fj} e Γ_{bj} , a condição (III.47g) é válida; em Γ_{fk} e Γ_{bk} a condição (III.47i) pode ser utilizada; somando-se as equações (III.59c) e (III.59d) e efetuando-se estas operações, obtém-se:

$$\int_{\Omega_j} \mu_0 \text{grad}(u) \cdot \text{grad}\phi \, d\Omega + \int_{\Omega_k} \mu \text{grad}(u) \cdot \text{grad}\psi \, d\Omega = \int_{\Gamma_{kj} \cup \Gamma_{2j} \cup \Gamma_{fj} \cup \Gamma_{bj}} \mu_0 (\mathbf{H}_s \cdot \underline{n}_j) u \, d\Gamma - \int_{\Gamma_{fk} \cup \Gamma_{bk} \cup \Gamma_{fj} \cup \Gamma_{bj}} (\text{rot } \mathbf{A} \cdot \underline{n}_{jk}) u \, d\Gamma, \quad \forall u \in \mathcal{H}_0 \quad (\text{III.70})$$

onde \underline{n}_{jk} é a normal à região Ω_k ou à região Ω_j , conforme a situação. A equação (III.70) e a equação (III.68) são assimétricas devido às suas integrais de superfície. Para torná-las simétricas, utiliza-se um artifício desenvolvido por Emson & Simkin (1983): a partir da identidade vetorial:

$$u \text{ rot } \mathbf{A} = \text{rot}(u\mathbf{A}) - (\text{grad } u) \wedge \mathbf{A} \quad (\text{III.71})$$

aplicada ao último termo de (III.70) e do teorema de Stokes, obtém-se:

$$\int_{\Omega_j} \mu_0 \text{grad}(u) \cdot \text{grad}\phi \, d\Omega + \int_{\Omega_k} \mu \text{grad}(u) \cdot \text{grad}\psi \, d\Omega = \int_{\Gamma_{kj} \cup \Gamma_{2j} \cup \Gamma_{fj} \cup \Gamma_{bj}} \mu_0 (\mathbf{Hs} \cdot \underline{n}_j) u \, d\Gamma$$

$$- \int_{\partial(\Gamma_{fk} \cup \Gamma_{bk} \cup \Gamma_{fj} \cup \Gamma_{bj})} \mathbf{A} \cdot \underline{t} \, dl + \int_{\Gamma_{fk} \cup \Gamma_{bk} \cup \Gamma_{fj} \cup \Gamma_{bj}} \mathbf{A} \cdot (\underline{n}_{jk} \wedge \text{grad} u) \, d\Gamma, \quad \forall u \in \mathcal{H}_0 \quad (\text{III.72})$$

A integral de linha acima é calculada sobre o contorno da superfície gerada pela união de Γ_{fk} , Γ_{fj} , Γ_{bk} e Γ_{bj} . Este contorno só existirá se na união resultar uma superfície aberta, isto é, se Ω_f ou Ω_b tiverem parcela de seu contorno sobre o contorno Γ . Neste caso, o caminho $\partial(\Gamma_{fk} \cup \Gamma_{fj} \cup \Gamma_{bk} \cup \Gamma_{bj})$ estará localizado na interface de fronteiras dos tipo: $(\Gamma_{1k}, \Gamma_{1j}, \Gamma_{1b}, \Gamma_{1f})$ ou do tipo $(\Gamma_{2k}, \Gamma_{2j}, \Gamma_{2b}, \Gamma_{2f})$. Em Γ_{1b} e Γ_{1f} os componentes tangenciais de \mathbf{A} são nulos (Eq. III.47o e III.47x). Em Γ_{2k} e Γ_{2j} , u é nulo. (Eq III.63). Portanto, a integral de linha em (III.72) é nula. Multiplicando-se a equação resultante por -1 , obtém-se:

$$- \int_{\Omega_j} \mu_0 \text{grad}(u) \cdot \text{grad}\phi \, d\Omega - \int_{\Omega_k} \mu \text{grad}(u) \cdot \text{grad}\psi \, d\Omega =$$

$$- \int_{\Gamma_{kj} \cup \Gamma_{2j} \cup \Gamma_{fj} \cup \Gamma_{bj}} \mu_0 (\mathbf{Hs} \cdot \underline{n}_j) u \, d\Gamma - \int_{\Gamma_{fk} \cup \Gamma_{bk} \cup \Gamma_{fj} \cup \Gamma_{bj}} \mathbf{A} \cdot (\underline{n}_j \wedge \text{grad} u) \, d\Gamma, \quad \forall u \in \mathcal{H}_0 \quad (\text{III.73})$$

Associando-se (III.68), (III.69) e (III.73), obtém-se a formulação fraca do problema: Determinar $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\underline{x}, t)$; $V = V(\underline{x}, t)$ e $\{\phi, \psi\} = \{\phi(\underline{x}, t), \psi(\underline{x}, t)\}$, tais que, para cada instante t , $0 \leq t \leq t_f$, $\mathbf{A} \in \underline{\mathcal{H}}_0$, $V \in \mathcal{H}_V$ e $\{\psi, \phi\} \in \mathcal{H}$, satisfazem:

$$\int_{\Omega_f \cup \Omega_b} \underline{v} [\text{rot} \underline{v} \cdot \text{rot} \mathbf{A} + \text{div} \underline{v} \text{div} \mathbf{A}] + \sigma \underline{v} \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \text{grad} \frac{\partial V}{\partial t} \right] \, d\Omega =$$

$$\int_{\Gamma_{jf} \cup \Gamma_{jb}} \underline{v} \cdot (\underline{n}_j \wedge (-\text{grad}\phi + \mathbf{Hs})) \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{kf} \cup \Gamma_{kb}} \underline{v} \cdot (\underline{n}_k \wedge (-\text{grad}\psi)) \, d\Gamma, \quad \forall \underline{v} \in \underline{\mathcal{H}}_0 \quad (\text{III.74a})$$

$$\int_{\Omega_f} \sigma \text{grad}(u_f) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \text{grad} \frac{\partial V}{\partial t} \right) \, d\Omega = 0 \quad \forall u_f \in \mathcal{H}_0 \quad (\text{III.74b})$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega_j} \mu_0 \operatorname{grad}(u) \cdot \operatorname{grad} \phi \, d\Omega - \int_{\Omega_k} \mu \operatorname{grad}(u) \cdot \operatorname{grad} \psi \, d\Omega = \\
& - \int_{\Gamma_{kj} \cup \Gamma_{2j} \cup \Gamma_{fj} \cup \Gamma_{bj}} \mu_0 (\mathbf{Hs} \cdot \underline{n}_j) u \, d\Gamma - \int_{\Gamma_{fk} \cup \Gamma_{bk} \cup \Gamma_{fj} \cup \Gamma_{bj}} \mathbf{A} \cdot (\underline{n}_{jk} \wedge \operatorname{grad} u) \, d\Gamma \quad , \quad \forall u \in \mathcal{H}_0 \quad (\text{III.74c})
\end{aligned}$$

Observações:

1. A formulação (III.74) é simétrica.
2. Como já ressaltado, esta formulação para o método A-V-A- ψ - ϕ engloba as demais formulações, que são casos particulares dela; a forma fraca para os outros casos é obtida facilmente:
 - a) Método A-V: A equação (III.74c) não é utilizada, os termos de contorno de (III.74a) desaparecem e esta equação é estendida para todo o domínio Ω . Obviamente, em Ω_k e Ω_j , $\sigma = 0$, e em Ω_j o termo de corrente induzida é substituído pela corrente imposta. A definição de \mathcal{H}_0 deve ser estendida para as fronteiras Γ_1 e Γ_2 (ver eq. III.67).
 - b) Método A-V- ϕ - ψ : A região Ω_b não é mais utilizada: os domínios de integração nas integrais de (III.74a) passam a ser: Ω_f , Γ_{jf} e Γ_{kf} . Em (III.74c) o domínio de integração do último termo de contorno passa a ser $\Gamma_{fk} \cup \Gamma_{fj}$.
 - c) Método A^{*}- ψ - ϕ : A equação III.74b não é utilizada; em (III.74a) e (III.74c) \mathbf{A} é substituído por \mathbf{A}^* ; em (III.74a) os termos em V^* e $\operatorname{div} \mathbf{A}$ são retirados; os domínios de integração passam a ser Ω_f , Γ_{jf} e Γ_{kf} . Na definição de \mathcal{H}_0 (eq. III.67), $\underline{n} \cdot \underline{w} = 0$ somente em Γ_{2f} .

III.2.5 Aplicação dos métodos de Galerkin e de Elementos Finitos:

As seguintes classes de funções são definidas para a aproximação por elementos finitos do problema (III.74):

$$\mathcal{H}_0^h(\Omega_j \cup \Omega_k) = \left\{ u^h : u^h = \sum_{i=1}^{Nu} N_i u_i ; u_i = 0, \forall \text{ nó } i \in \Gamma_{2k} \cup \Gamma_{2j} \right\} \quad (\text{III.75})$$

$$\mathcal{H}^h(\Omega_j) = \left\{ \phi^h : \phi^h = \sum_{i=1}^{N_j} N_i \phi_i ; \phi_i = \phi_0, \forall \text{ n\u00f3 } i \in \Gamma_{2j} \right\}$$

$$\mathcal{H}^h(\Omega_k) = \left\{ \psi^h : \psi^h = \sum_{i=1}^{N_k} N_i \psi_i ; \psi_i = \psi_0, \forall \text{ n\u00f3 } i \in \Gamma_{2k} \right\}$$

$$\mathcal{H}^h(\Omega_j \cup \Omega_k) = \left\{ \{\psi^h, \phi^h\} : \psi^h \in \mathcal{H}^h(\Omega_k); \phi^h \in \mathcal{H}^h(\Omega_j); \phi_1^h = \psi_1^h + G_1, \forall \text{ n\u00f3 } 1 \in \Gamma_{kj} \right\} \quad (\text{III.76})$$

$$\mathcal{H}_0^h(\Omega_f) = \left\{ u^h : u^h = \sum_{i=1}^{N_f} N_i u_i ; u_i = 0, \forall \text{ n\u00f3 } i \in \Gamma_{1f} \right\} \quad (\text{III.77})$$

$$\mathcal{H}^h(\Omega_f) = \left\{ u^h : u^h = \sum_{i=1}^{N_f} N_i u_i ; u_i = v_0, \forall \text{ n\u00f3 } i \in \Gamma_{1f} \right\} \quad (\text{III.78})$$

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{H}}_0^h(\Omega_f \cup \Omega_b) = & \left\{ \underline{v}^h : \underline{v}^h = \sum_{i=1}^{N_a} N_i \underline{v}_i ; \underline{v}_i \wedge \underline{n} = \underline{0}, \forall \text{ n\u00f3 } i \in \Gamma_{1f} \cup \Gamma_{1b} ; \right. \\ & \left. \underline{v}_i \cdot \underline{n} = 0, \forall \text{ n\u00f3 } i \in \Gamma_{2f} \cup \Gamma_{2b} \cup \Gamma_{kf} \cup \Gamma_{jf} \cup \Gamma_{kb} \cup \Gamma_{jb} \right\} \quad (\text{III.79}) \end{aligned}$$

onde N_u \u00e9 o n\u00famero de n\u00f3s na regi\u00e3o $\Omega_k \cup \Omega_j$; N_f \u00e9 o n\u00famero de n\u00f3s em Ω_f ; N_a \u00e9 o n\u00famero de n\u00f3s em $\Omega_f \cup \Omega_b$; N_j \u00e9 o n\u00famero de n\u00f3s na regi\u00e3o Ω_j ; N_k \u00e9 o n\u00famero de n\u00f3s na regi\u00e3o Ω_k . As fun\u00e7\u00f5es N_i e N_j s\u00e3o definidas como nas se\u00e7\u00f5es II.3.3 e II.2.3, respectivamente. Observe-se que, agora, as vari\u00e1veis nodais s\u00e3o dependentes do tempo. Por exemplo, os A_j s\u00e3o, na realidade, $A_j(t)$.

De posse destas defini\u00e7\u00f5es, e desenvolvendo (III.74a) de forma an\u00e1loga \u00e0 da se\u00e7\u00e3o (II.3.3) obt\u00eam-se a aproxima\u00e7\u00e3o por elementos finitos:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{N_a} \int_{\Omega_f \cup \Omega_b} \nu \left[[\text{rot } N_i]^T \cdot [\text{rot } N_j] + [\text{div } N_i]^T [\text{div } N_j] \right] d\Omega A_j + \\ & \sum_{j=1}^{N_f} \left[\int_{\Omega_f} \sigma N_i N_j d\Omega \frac{\partial A_j}{\partial t} + \int_{\Omega_f} \sigma N_i \cdot \text{grad } N_j d\Omega \frac{\partial V_j^*}{\partial t} \right] = \\ & - \sum_{j=1}^{N_{kfb}} \left[\int_{\Gamma_{kf} \cup \Gamma_{kb}} N_i (\underline{n}_k \wedge \text{grad } N_j) d\Gamma \psi_j \right] - \sum_{j=1}^{N_{jfb}} \left[\int_{\Gamma_{jf} \cup \Gamma_{jb}} N_i (\underline{n}_j \wedge \text{grad } N_j) d\Gamma \phi_j \right] + \end{aligned}$$

$$+ \int_{\Gamma_{jf} \cup \Gamma_{jb}} \mathbf{N}_i (\underline{n}_j \wedge \mathbf{H}_s) d\Gamma \quad i = 1, N_a \quad (\text{III.80a})$$

De (III.74b), obtém-se:

$$\sum_{j=1}^{Nf} \left[\int_{\Omega_f} \sigma \text{grad}(\mathbf{N}_i) \mathbf{N}_j d\Omega \frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial t} + \int_{\Omega_f} \sigma \text{grad} \mathbf{N}_i \cdot \text{grad} \mathbf{N}_j d\Omega \frac{\partial \mathbf{V}_j^*}{\partial t} \right] = 0 \quad i=1, Nf \quad (\text{III.80b})$$

De (III.74c) obtém-se:

$$\begin{aligned} & - \sum_{j=1}^{Nk} \left[\int_{\Omega_k} \mu \text{grad} \mathbf{N}_i \cdot \text{grad} \mathbf{N}_j d\Omega \psi_j \right] - \sum_{j=1; j \notin \Gamma_{kj}}^{Nj} \left[\int_{\Omega_j} \mu_0 \text{grad} \mathbf{N}_i \cdot \text{grad} \mathbf{N}_j d\Omega \phi_j \right] \\ & - \sum_{l \in \Gamma_{kj}} \left[\int_{\Omega_j} \mu_0 \text{grad} \mathbf{N}_i \cdot \text{grad} \mathbf{N}_l d\Omega \psi_l \right] = \sum_{l \in \Gamma_{kj}} \left[\int_{\Omega_j} \mu_0 \text{grad} \mathbf{N}_i \cdot \text{grad} \mathbf{N}_l d\Omega G_l \right] \\ & - \int_{\Gamma_{kj} \cup \Gamma_{2j} \cup \Gamma_{fj} \cup \Gamma_{bj}} \mu_0 (\mathbf{H}_s \cdot \underline{n}_j) \mathbf{N}_i d\Gamma - \sum_{j=1}^{Njk} \int_{\Gamma_{kf} \cup \Gamma_{kb} \cup \Gamma_{jf} \cup \Gamma_{jb}} \mathbf{N}_j (\underline{n}_{jk} \wedge \text{grad} \mathbf{N}_i) d\Gamma \mathbf{A}_j \quad i=1, N_u \quad (\text{III.80c}) \end{aligned}$$

onde N_{kfb} é o número de nós sobre $\Gamma_{kf} \cup \Gamma_{kb}$; N_{jfb} é o número de nós sobre $\Gamma_{jf} \cup \Gamma_{jb}$; N_{jk} é o número de nós sobre a fronteira $\Gamma_{kf} \cup \Gamma_{jf} \cup \Gamma_{kb} \cup \Gamma_{jb}$; \underline{n}_{jk} é o vetor normal a estas fronteiras, vistas de Ω_j ou de Ω_k , conforme o caso; \underline{n}_j é a normal a Ω_j ; \underline{n}_k é a normal a Ω_k . Para se obter a equação (III.80c), foi utilizado o mesmo método empregado na seção (II.5.3) para eliminar o potencial escalar reduzido na interface Γ_{kj} , gerando-se com isto o termo em G_l do lado direito de (III.80c).

Pode-se agrupar o sistema III.80 em um sistema matricial único:

$$\begin{bmatrix} [\underline{C}_{aa}] & [\underline{C}_{av}] & \underline{0} \\ [\underline{C}_{av}]^T & [\underline{C}_{vv}] & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\dot{A}} \\ \underline{\dot{V}}^* \\ \{\underline{\psi}, \underline{\phi}\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [\underline{K}_{aa}] & \underline{0} & [\underline{K}_{a\psi\phi}] \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ [\underline{K}_{a\psi\phi}]^T & \underline{0} & [\underline{K}_{\psi\phi}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A} \\ \underline{V}^* \\ \{\underline{\psi}, \underline{\phi}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{f}_a \\ \underline{0} \\ \underline{f}_{\psi\phi} \end{bmatrix} \quad (\text{III.81a})$$

onde:

$$\underline{C}_{aa}^{ij} = \int_{\Omega_f} \sigma N_i N_j d\Omega \quad (\text{III.81b})$$

$$\underline{C}_{av}^{ij} = \int_{\Omega_f} \sigma N_i \cdot \text{grad} N_j d\Omega \quad (\text{III.81c})$$

$$\underline{C}_{vv}^{ij} = \int_{\Omega_f} \sigma \text{grad} N_i \cdot \text{grad} N_j d\Omega \quad (\text{III.81d})$$

$$\underline{K}_{aa}^{ij} = \int_{\Omega_f \cup \Omega_b} \nu \left[[\text{rot} N_i]^T \cdot [\text{rot} N_j] + [\text{div} N_i]^T [\text{div} N_j] \right] d\Omega \quad (\text{III.81e})$$

$$\underline{K}_{a\psi\phi}^{ij} = \int_{\Gamma_{kf} \cup \Gamma_{kb} \cup \Gamma_{jf} \cup \Gamma_{jb}} N_i (\underline{n}_{kj} \wedge \text{grad} N_j) d\Gamma \quad (\text{III.81f})$$

$$\underline{K}_{\psi\phi} = - \int_{\Omega_k} \mu \text{grad} N_i \cdot \text{grad} N_j d\Omega \quad (\text{III.81g})$$

$$\underline{f}_a^i = \int_{\Gamma_{jf} \cup \Gamma_{jb}} N_i (\underline{n}_j \wedge H_s) d\Gamma \quad (\text{III.81h})$$

$$\underline{f}_{\psi\phi}^i = \sum_{l \in \Gamma_{kj}} \left[\int_{\Omega_j} \mu_0 \text{grad} N_i \cdot \text{grad} N_l d\Omega G_l \right] - \int_{\Gamma_{kj} \cup \Gamma_{2j} \cup \Gamma_{fj} \cup \Gamma_{bj}} \mu_0 (H_s \cdot \underline{n}_j) N_i d\Gamma \quad (\text{III.81i})$$

No regime permanente senoidal, $\dot{A} = j\omega A$ e $\dot{V}^* = j\omega V^*$ e a equação (III.81a) torna-se:

$$\begin{bmatrix} [\underline{K}_{aa}] + j\omega[\underline{C}_{aa}] & j\omega[\underline{C}_{av}] & [\underline{K}_{a\psi\phi}] \\ j\omega[\underline{C}_{av}]^T & j\omega[\underline{C}_{vv}] & \underline{0} \\ [\underline{K}_{a\psi\phi}]^T & \underline{0} & [\underline{K}_{\psi\phi}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ V^* \\ \{\psi, \phi\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{f}_a \\ \underline{0} \\ \underline{f}_{\psi\phi} \end{bmatrix} \quad (\text{III.82})$$

III.2.6. Outras formulações utilizando o potencial vetor magnético:

Nesta seção, apresentam-se outras formulações que utilizam o potencial

vetor magnético, discutindo-se, resumidamente, as suas principais características.

III.2.6.1 O potencial vetor magnético com calibre de Lorentz:

Seja o problema de correntes de Foucault da figura III.1. Suponha uma representação dos campos magnéticos em cada divisão de Ω feita de forma semelhante à da seção III.2.2: em Ω_j e Ω_k utilizam-se os potenciais escalares reduzido e total, respectivamente; em Ω_r , utiliza-se o potencial vetor magnético. A equação que descreve o fenômeno nesta região é a (III.16):

$$\text{rot} (\nu \text{ rot } \mathbf{A}) = -\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \sigma \text{ grad } V, \quad \text{em } \Omega_r$$

O calibre de Lorentz

$$\text{div } \mathbf{A} = -\mu \sigma V, \quad \text{em } \Omega_r$$

foi utilizado por Bryant et al. (1990) para assegurar a unicidade de \mathbf{A} . Substituindo este calibre em (III.16), obtém-se:

$$\text{rot} (\nu \text{ rot } \mathbf{A}) = -\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \sigma \text{ grad} \left[\frac{\nu}{\sigma} \text{div } \mathbf{A} \right], \quad \text{em } \Omega_r \quad (\text{III.83})$$

A equação (III.16) gera ainda:

$$\text{div} \left[-\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \sigma \text{ grad } V \right] = 0, \quad \text{em } \Omega_r \quad (\text{III.84})$$

Para garantir a unicidade da solução, condições de contorno apropriadas devem ser aplicadas sobre \mathbf{A} e V . Isto é:

$$\mathbf{A} \wedge \underline{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{e} \quad V = V_0, \text{ constante}, \quad \text{em } \Gamma_{1r} \quad (\text{III.85})$$

$$\mathbf{A} \cdot \underline{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{e} \quad -\sigma \frac{\partial V}{\partial \underline{\mathbf{n}}} = 0, \quad \text{em } \Gamma_{2r} \quad (\text{III.86})$$

Em Γ_{1r} e Γ_{2r} fixa-se $\mathbf{A} \cdot \underline{\mathbf{n}}$, por motivos análogos aos da seção III.2.2. Bryant et al. (1990) mostraram que, ao invés de se usar $\mathbf{A} \cdot \underline{\mathbf{n}} = 0$ como no problema com calibre de Coulomb, uma boa solução para o problema com calibre de Lorentz é escolher:

$$\mathbf{A} \cdot \underline{n} = k^2 V \quad , \text{ em } \Gamma_{kf} \cup \Gamma_{jf} \quad (\text{III.87})$$

onde k é uma constante arbitrária cujo valor pode variar entre 10^{-6} e 10^6 (Bryant et al., 1990). Como condição adicional, tem-se, nas fronteiras de descontinuidade de σ interiores a Ω_f (Γ_σ) (Bryant et al., 1990):

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \underline{n} = k^2 V \quad , \text{ em } \Gamma_\sigma \quad (\text{III.88})$$

A forma fraca para o problema descrito por (III.83 - III.88) pode ser obtida facilmente (Bryant et al., 1990):

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_f} v [\text{rot } \underline{v} \cdot \text{rot } \mathbf{A} + \frac{1}{\sigma} \text{div}(\sigma \underline{v}) \text{div } \mathbf{A}] + \sigma \underline{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \,] \, d\Omega = \\ & - \int_{\partial\Omega_f} \underline{v} \cdot (\underline{n}_f \wedge (v \text{rot } \mathbf{A})) \, d\Gamma - \frac{1}{k^2} \int_{\Gamma_{kf} \cup \Gamma_{jf}} \sigma \underline{v} \cdot \underline{n} \, \mathbf{A} \cdot \underline{n} \, d\Gamma - \frac{1}{k^2} \int_{\Gamma_\sigma} \sigma \underline{v} \cdot \underline{n} \, \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \underline{n} \, d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{III.89a})$$

e

$$\int_{\Omega_f} \sigma \text{grad}(u) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \text{grad } V \right) \, d\Omega = 0 \quad (\text{III.89b})$$

As condições de continuidade dos campos podem ser utilizadas para acoplar a equação (III.89a) com as equações das regiões Ω_j e Ω_k , de maneira análoga à da seção III.2.4.

Observações:

1. A equação (III.89a) é desacoplada de (III.89b). Portanto, pode-se resolver (III.89a), determinando-se \mathbf{A} e só solucionar (III.89b) se for necessário o cálculo da densidade de corrente (que precisa de \dot{V} para a sua determinação).
2. Se σ não for constante em cada elemento, o segundo termo na integral de volume da equação (III.89a) gera um sistema de equações não simétrico.

III.2.6.2. O potencial vetor magnético com dois componentes:

Em 1982, Hammond, seguindo resultados clássicos apresentados por Morse & Fesbach (1953) e Smythe (1968), propôs a utilização do potencial vetor de segunda ordem para o cálculo tridimensional de correntes de Foucault. Este potencial possui apenas dois componentes, o que reduz ainda mais o número de incógnitas na região Ω_r . Sua desvantagem principal é que a permeabilidade magnética e a condutividade elétrica devem ser constantes nesta região. Emson et al. (1985), seguindo Hammond, exploraram esta formulação, sem, no entanto, apresentar resultados que a validassem.

Bíró (1988) utilizou um outro artifício matemático para eliminar um dos componentes do potencial vetor magnético, mostrando que, sob certas condições, o cálculo de correntes de Foucault em três dimensões pode ser feito com apenas duas incógnitas por nó nas regiões condutoras. Nesta formulação, é utilizado o calibre de Lorentz, e a sua equação básica é a (III.83):

$$\text{rot} (v \text{ rot } \mathbf{A}) = -\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \sigma \text{grad} \left[\frac{v}{\sigma} \text{div } \mathbf{A} \right] \quad , \text{ em } \Omega_r \quad (\text{III.90})$$

É possível eliminar-se um dos componentes de \mathbf{A} , sem que haja interferência sobre \mathbf{B} e \mathbf{E} . Sem perda de generalidade, eliminar-se-á o componente z de \mathbf{A} , isto é:

$$\mathbf{A} = [A_x , A_y , 0]^T \quad (\text{III.91})$$

Para isto, mostra-se que a transformação:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \text{grad } \alpha \quad (\text{III.92})$$

sobre o vetor \mathbf{A} não altera \mathbf{E} ou \mathbf{B} , desde que a função escalar α satisfaça:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} - \frac{v}{\sigma} \text{div grad } \alpha = c \quad (\text{III.93})$$

onde c é uma constante arbitrária. De fato :

$$\mathbf{B}' = \text{rot } \mathbf{A}' = \text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B} \quad (\text{III.94})$$

e

$$\mathbf{E}' = -\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} + \text{grad}\left(\frac{\nu}{\sigma} \text{div} \mathbf{A}'\right) \quad (\text{III.95})$$

isto é:

$$\mathbf{E}' = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \text{grad}\left(\frac{\nu}{\sigma} \text{div} \mathbf{A}\right) + \text{grad}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} - \frac{\nu}{\sigma} \text{div} \text{grad} \alpha\right) \quad (\text{III.96})$$

portanto, se a equação (III.93) for verificada, então:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}$$

A transformação (III.92) é utilizada sobre \mathbf{A} , um potencial vetor com 3 componentes. Escolhe-se

$$\alpha(x, y, z) = \int_0^z A_z(x, y, \xi) d\xi + \beta(x, y) \quad (\text{III.97})$$

onde A_z é o componente na direção z de \mathbf{A} e $\beta(x, y)$ é uma função escalar independente de z . Aplicando-se (III.92), obtém-se:

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} A_x^2 \\ A_y^2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x - \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^z A_z(x, y, \xi) d\xi \right) + \frac{\partial \beta}{\partial x} \\ A_y - \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_0^z A_z(x, y, \xi) d\xi \right) + \frac{\partial \beta}{\partial y} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.98})$$

$\beta(x, y)$ deve ser selecionado de modo que α , dado pela equação (III.97), satisfaça a equação (III.93). Pode-se provar facilmente que este β existe, desde que σ e ν sejam constantes dentro da região Ω_f (Biró, 1988). Este fato prova a existência do potencial vetor com 2 componentes.

Em seu artigo, Biró (1988) descreve a aplicação do método de Galerkin à formulação e a introdução das condições de interface na fronteira Γ_f . É importante ressaltar que as equações finais, por ele obtidas, não são simétricas e que, para se obter as densidades de corrente, é necessário, uma vez obtida a distribuição de \mathbf{A} , resolver-se a equação acoplada (III.89b). A principal restrição deste método é o fato de que σ e ν devem ser constantes em Ω_f .

III.2.6.3. Formulação sem imposição de qualquer condição sobre o $\text{div} \mathbf{A}$.

Alguns autores (Biddlecombe et al., 1982; Kameari, 1988) resolveram diretamente as equações (III.81) e (III.84) sem a imposição explícita de nenhuma condição sobre o $\text{div } A$. A solução, a princípio, deixa de ser única. Porém, Biddlecombe et al. (1982) mostraram que estas equações, quando restritas às aproximações geradas por elementos hexaédricos com condições de contorno especificadas de maneira particular, geram solução única. Note-se que a formulação não possui solução única para elementos tetraédricos.

III.3 Formulação utilizando o potencial vetor elétrico: O método T- Ω .

O método T- Ω foi originalmente proposto por Carpenter (1977) e utilizado pela primeira vez por Preston & Reece (1982). Outros autores introduziram alguns aperfeiçoamentos, modificando o nome do método para R- ψ , mas mantendo as características principais do método T- Ω (Biddlecombe et al., 1982). Outras melhorias foram introduzidas posteriormente por Nakata et al. (1988b) e Albanese e Rubinacci (1988, 1990(a), 1990(b)). O método, como aqui apresentado, é uma síntese destas propostas, introduzindo ainda o calibre de Coulomb como proposto por Biró & Preis (1990).

A topologia para este método é a da figura III.1. Porém, para simplificar o desenvolvimento a seguir, considera-se que não existem correntes impostas externamente. Com isto, a região Ω_k engloba a região Ω_j .

A definição do potencial vetor elétrico T é feita na região Ω_f a partir da equação (III.4):

$$\text{div } J = 0 \quad , \text{ em } \Omega_f \quad (\text{III.99})$$

gerando:

$$J = \text{rot } T \quad , \text{ em } \Omega_f \quad (\text{III.100})$$

Combinando esta equação com a equação (III.2) e integrando, obtém-se:

$$H = T - \text{grad } \Omega \quad , \text{ em } \Omega_f \quad (\text{III.101})$$

onde Ω é o potencial escalar magnético. De (III.6) e (III.1), associadas a (III.5), (III.100) e (III.101), obtém-se:

$$\text{rot}\left(\frac{1}{\sigma} \text{rot } \mathbf{T}\right) = - \frac{\partial(\mu\mathbf{T} - \mu\text{grad } \Omega)}{\partial t}, \text{ em } \Omega_f \quad (\text{III.102})$$

Aplicando-se o operador *div* a esta equação, obtém-se:

$$\text{div} \left[\frac{\partial(\mu\mathbf{T} - \mu\text{grad } \Omega)}{\partial t} \right] = 0, \text{ em } \Omega_f \quad (\text{III.103})$$

Note-se que esta equação não é independente da equação (III.102).

Em Ω_k

$$\text{rot } \mathbf{H} = 0$$

portanto:

$$\mathbf{H} = - \text{grad } \psi \quad (\text{III.104})$$

Na interface Γ_{kf} , as seguintes equações, deduzidas das equações de continuidade dos campos, devem ser verificadas:

$$\underline{n} \wedge \left[\mathbf{T} - \text{grad } \Omega \right] = \underline{n} \wedge \left[- \text{grad } \psi \right], \text{ em } \Gamma_{kf} \quad (\text{III.105})$$

$$\underline{n} \cdot \left[\mu_1 \mathbf{T} - \mu_1 \text{grad } \Omega \right] = \underline{n} \cdot \left[-\mu_2 \text{grad } \psi \right], \text{ em } \Gamma_{kf} \quad (\text{III.106})$$

$$\underline{n} \cdot \text{rot } \mathbf{T} = 0, \text{ em } \Gamma_{kf} \quad (\text{III.107})$$

Verifica-se que existe a possibilidade de adotar

$$\Omega = \psi, \text{ em } \Omega_f \quad (\text{III.108})$$

e, com isto, obter-se de (III.105):

$$\underline{n} \wedge \mathbf{T} = 0, \text{ em } \Gamma_{kf} \quad (\text{III.109})$$

As equações anteriores, associadas a condições de contorno em Γ_1 e Γ_2 e a condições de interface nos pontos de descontinuidade de μ e σ não são suficientes para assegurar a unicidade de \mathbf{T} e ψ . Novamente, pode-se adotar o calibre de Coulomb:

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = 0 \quad , \text{ em } \Omega_f \quad (\text{III.110})$$

ou o calibre de Lorentz:

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = -\mu \sigma \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad , \text{ em } \Omega_f \quad (\text{III.111})$$

para assegurar-se a unicidade da solução. A prova da unicidade é feita de maneira semelhante à apresentada nas seções II.3 e III.2. (ver também Albanese & Rubinacci, (1990(a))).

A introdução do calibre de Coulomb é feita de forma semelhante à apresentada na seção III.2.1. Subtrai-se o termo

$$\operatorname{grad} \left(\frac{1}{\sigma} \operatorname{div} \mathbf{T} \right) \quad (\text{III.112})$$

de (III.102) e adiciona-se a equação (III.103) ao sistema para garantir-se a verificação da equação (III.3). Além disto, condições de contorno homogêneas em $\frac{1}{\sigma} \operatorname{div} \mathbf{T}$ devem ser introduzidas em Γ_{kf} e Γ_{zf} .

Então, o problema de correntes de Foucault 3-D, utilizando o potencial vetor elétrico com calibre de Coulomb, torna-se: determinar \mathbf{T} e ψ que satisfaçam:

1. As equações diferenciais parciais nos pontos ordinários de Ω_f :

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\sigma} \operatorname{rot} \mathbf{T} \right) - \operatorname{grad} \left(\frac{1}{\sigma} \operatorname{div} \mathbf{T} \right) + \frac{\partial (\mu \mathbf{T} - \mu \operatorname{grad} \psi)}{\partial t} = 0 \quad , \text{ em } \Omega_f \quad (\text{III.113a})$$

$$\operatorname{div} \left[\frac{\partial (\mu \mathbf{T} - \mu \operatorname{grad} \psi)}{\partial t} \right] = 0 \quad , \text{ em } \Omega_f \quad (\text{III.113b})$$

2. A equação diferencial parcial nos pontos ordinários de Ω_k :

$$-\operatorname{div} (\mu \operatorname{grad} \psi) = 0 \quad , \text{ em } \Omega_k \quad (\text{III.113c})$$

3. As condições de interface em Γ_{kf} :

$$\underline{n} \wedge \mathbf{T} = 0 \quad , \text{ em } \Gamma_{kf} \quad (\text{III.113d})$$

$$\underline{n} \cdot \left[\mu_f \mathbf{T} - \mu_f \operatorname{grad} \psi \right] = \underline{n} \cdot \left[-\mu_k \operatorname{grad} \psi \right] \quad , \text{ em } \Gamma_{kf} \quad (\text{III.113e})$$

$$\frac{1}{\sigma} \operatorname{div} \mathbf{T} = 0 \quad , \text{ em } \Gamma_{kf} \quad (\text{III.113f})$$

4. As condições de continuidade dos campos em pontos de descontinuidade de σ e μ :

$$\underline{n} \wedge \left[\frac{1}{\sigma} \text{rot } \mathbf{T} \right] = 0 \quad , \text{ em } \Omega_f \quad (\text{III.113g})$$

$$\left[\frac{1}{\sigma} \text{div } \mathbf{T} \right] = 0 \quad , \text{ em } \Omega_f \quad (\text{III.113h})$$

$$\underline{n} \cdot \left[\mu (\mathbf{T} - \text{grad } \psi) \right] = 0 \quad , \text{ em } \Omega_f \quad (\text{III.113i})$$

$$\underline{n} \cdot \left[\mu \text{grad } \psi \right] = 0 \quad , \text{ em } \Omega_k \quad (\text{III.113j})$$

5. As condições de contorno em Γ_1 :

$$\mathbf{T} \cdot \underline{n} = 0 \quad , \text{ em } \Gamma_{1f} \quad (\text{III.113k})$$

$$-\mu \frac{\partial \psi}{\partial \underline{n}} = 0 \quad , \text{ em } \Gamma_{1f} \cup \Gamma_{1k} \quad (\text{III.113l})$$

$$\underline{n} \wedge \left(\frac{1}{\sigma} \text{rot } \mathbf{T} \right) = 0 \quad , \text{ em } \Gamma_{1f} \quad (\text{III.113m})$$

6. As condições de contorno em Γ_2 :

$$\mathbf{T} \wedge \underline{n} = 0 \quad , \text{ em } \Gamma_{2f} \quad (\text{III.113n})$$

$$\psi = \psi_0 \quad , \text{ em } \Gamma_{2f} \cup \Gamma_{2k} \quad (\text{III.113o})$$

$$\frac{1}{\sigma} \text{div } \mathbf{T} = 0 \quad , \text{ em } \Gamma_{2f} \quad (\text{III.113p})$$

Observações:

1. As condições de interface (III.107) e (III.105) são satisfeitas automaticamente, devido à condição (III.113n) e pelo fato de se ter ψ contínuo em Γ_{kf} .
2. A dedução da forma fraca e o acoplamento entre as regiões Ω_f e Ω_k são feitos de maneira bem mais simples do que na seção III.2, devido ao fato de se ter o mesmo potencial escalar ψ de ambos os lados da interface Γ_{kf} .

3. Ao invés da utilização dos calibres de Coulomb e de Lorentz, é possível tornar a solução única anulando-se um dos componentes de T . Com isto, o número de incógnitas se reduz a 3 na região Ω_f (Carpenter, 1977). A prova de que a solução é única neste caso é apresentada por Brown (1982). Esta técnica foi adotada por Albanese e Rubinacci (1988, 1990(b)), mas traz problemas nas interfaces de descontinuidade de σ . O exemplo a seguir mostra este fato claramente (Albanese & Rubinacci, 1990(a)): suponha que se faça $T_y = 0$ e que se tenha descontinuidade de σ através do plano $x = \text{constante}$. Então, os componentes de J são:

$$J_x = \frac{\partial T_z}{\partial y} ; \quad J_y = \frac{\partial T_x}{\partial z} - \frac{\partial T_z}{\partial x} ; \quad J_z = - \frac{\partial T_x}{\partial y}$$

Se o campo tangencial E_z não for nulo nesta interface, ele deve ser contínuo para verificar a condição (III.10). No entanto, como σ sofre descontinuidade segundo x , J_z deve ser descontínua, isto é, deve haver descontinuidade do componente normal de T , T_x , nesta interface. Esta dificuldade pode ser evitada utilizando-se elementos de aresta (Albanese & Rubinacci, 1988, 1990(a) e (b)) que forçam a continuidade apenas dos componentes tangenciais de T , permitindo que seus componentes normais sejam descontínuos. Neste caso, esta formulação se torna semelhante à formulação de Bossavit & Verité (1983), a ser estudada na próxima seção.

4. O método tem problemas de cancelamento semelhantes aos encontrados para o potencial escalar reduzido. De fato, o campo magnético H é calculado pela equação (III.101) e, em regiões de alta permeabilidade magnética, ele é o resultado da subtração de duas grandezas de valor semelhante e várias vezes superior a H , o que pode dar origem a erros substanciais (Preston & Reece, 1982; Deshmukh & Mukherji, 1987). Um artigo mais recente de Nakata et al. (1990(b)), porém, faz um estudo destes erros e indica que eles não são relevantes, se é utilizada dupla precisão no cálculo. Mais uma vez é necessário efetuar-se uma série de testes adicionais para se chegar a uma conclusão definitiva.
5. Se a região condutora for laminada (como em transformadores), o método $T-\Omega$ pode ser otimizado, utilizando-se, nestas regiões, apenas um componente de T , além de ψ . Este caso é descrito por Tokumasu et al. (1984), Rodger & Atkinson (1987) e Jack & Mecrow (1987).

6. Para regiões condutoras multiplamente conexas, o método T- Ω apresenta potencial escalar ψ não único. Para torná-lo único, pode-se efetuar cortes, de modo a tornar Ω_r simplesmente conexa. O potencial escalar vai sofrer um salto sobre estes cortes, como observado na seção III.2.2. A outra solução para este problema, proposta naquela seção -o preenchimento dos "buracos" dos condutores com uma região onde se utiliza o potencial vetor- não pode ser aplicada no caso do método T- Ω , porque o potencial vetor elétrico não é definido em regiões não condutoras. Uma solução alternativa é o preenchimento do "buraco" com uma região de baixa condutividade. Outra possibilidade é efetuar o acoplamento do método T- Ω com o método A (Bíró & Preis, 1990), utilizando A na região Ω_b .

III.4 Formulação utilizando o vetor campo: a formulação H.

III.4.1. Introdução: Formulação básica

Neste método são utilizados diretamente os vetores campo, isto é, não é usado um potencial magnético ou elétrico para representá-los em Ω_r . Esta formulação é interessante, visto que não há perda de precisão causada pela diferenciação de potenciais para a obtenção dos campos, nem existe o problema de cancelamento resultante da subtração de campos parciais, pois os campos são calculados diretamente. Além disto, em Ω_r existirão apenas 3 incógnitas em cada ponto da discretização. Em Ω_k e Ω_j , os potenciais escalares magnéticos podem ser utilizados para representar os campos.

O método parte da equação (III.1):

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{III.114})$$

Utilizando-se (III.6) e (III.5) obtém-se:

$$\text{rot } \frac{\mathbf{J}}{\sigma} = - \frac{\partial \mu \mathbf{H}}{\partial t} \quad (\text{III.115})$$

aplicando-se (III.2):

$$\text{rot} \left(\frac{\text{rot } \mathbf{H}}{\sigma} \right) = - \frac{\partial \mu \mathbf{H}}{\partial t} \quad (\text{III.116})$$

Supondo-se que no tempo $t=0$ a solução do problema satisfaz:

$$\text{div } \mathbf{B}(0) = 0 \quad (\text{III.117})$$

então $\text{div } \mathbf{B}$ vai automaticamente ser nulo ao longo do tempo, devido à equação (III.116). As condições de contorno para este problema são dadas pelas equações (III.11) e (III.12), e as condições de continuidade dos vetores de campo nas interfaces entre materiais com diferentes propriedades constitutivas são dadas pelas equações (III.7), (III.8), (III.9) e (III.10).

Suponha-se, para simplificar, que o problema está restrito a Ω_f e Ω_k . Na região Ω_f , o produto escalar entre o resíduo associado à equação (III.116) e uma função de teste vetorial \underline{v} pode ser efetuado, gerando:

$$\int_{\Omega_f} \underline{v} \cdot \left[\text{rot} \left(\frac{1}{\sigma} \text{rot } \mathbf{H} \right) + \frac{\partial \mu \mathbf{H}}{\partial t} \right] d\Omega = 0 \quad , \text{ em } \Omega_f \quad (\text{III.118})$$

Em Ω_k , $\text{div} \left(\frac{\partial \mu \mathbf{H}}{\partial t} \right) = 0$, o que gera:

$$\int_{\Omega_k} u \text{div} \left(\frac{\partial (-\mu g \text{grad} \psi)}{\partial t} \right) d\Omega = 0 \quad , \text{ em } \Omega_k \quad (\text{III.119})$$

Onde u é uma função de teste escalar definida em Ω_k . Efetuando integrações por partes nas equações acima, obtém-se:

$$\int_{\Omega_f} \left[\frac{1}{\sigma} [\text{rot } \underline{v} \cdot \text{rot } \mathbf{H}] + \underline{v} \cdot \frac{\partial \mu \mathbf{H}}{\partial t} \right] d\Omega = - \int_{\partial \Omega_f} \underline{v} \cdot (\underline{n}_f \wedge \left(\frac{1}{\sigma} \text{rot } \mathbf{H} \right)) d\Gamma \quad , \text{ em } \Omega_f \quad (\text{III.120})$$

$$- \int_{\Omega_k} \text{grad } u \cdot \frac{\partial (\mu g \text{grad} \psi)}{\partial t} d\Omega = \int_{\partial \Omega_k} u \left(- \frac{\partial (\mu g \text{grad} \psi)}{\partial t} \right) \cdot \underline{n}_k d\Gamma \quad , \text{ em } \Omega_k \quad (\text{III.121})$$

Estas equações serão utilizadas na seção III.4.3 para a obtenção da forma fraca do problema.

III.4.2. Os elementos de aresta

A tentativa de resolução das equações (III.120) e (III.121) utilizando elementos finitos tradicionais é feita com três graus de liberdade para \mathbf{H} em cada nó de Ω_f , um por componente de \mathbf{H} . Com isto, os três componentes de \mathbf{H} são

contínuos. Este fato impõe nas interfaces entre materiais de diferentes permeabilidades uma continuidade inexistente, pois o componente normal de H é descontínuo nestas interfaces (equação III.7)..

Damidau (1990) resolveu este problema através da escolha de um conjunto de variáveis contínuas nos nós situados sobre as interfaces magnéticas. Nesta formulação são utilizados os componentes tangenciais de H e o normal de B como variáveis nodais nestes pontos. Isto traz uma série de complicações computacionais adicionais (por exemplo, cada elemento tem variáveis de cálculo diferentes, dependendo dele estar ou não situado sobre uma fronteira).

Uma solução mais elegante para este problema foi utilizada por Bossavit e Vêrité (1982). Trata-se do uso de elementos de aresta, que são elementos finitos que forçam a continuidade tangencial das grandezas calculadas, permitindo, ao mesmo tempo, a descontinuidade do componente normal. Neles, os graus de liberdade não devem ser interpretados como os componentes de um dado campo vetorial nos nós da malha, mas como a circulação, ao longo das arestas, do campo a ser aproximado (Bossavit, 1988(a)).

Bossavit (1988(c)) mostrou que, exprimindo as equações de Maxwell na linguagem das formas diferenciais (Deschamps, 1981), os elementos de aresta nada mais são do que formas de Whitney (Whitney, 1957) de grau 1, assim como os elementos nodais são formas de Whitney de grau 0.

Nedelec (1980) desenvolveu elementos de aresta tetraédricos e cúbicos. Os elementos tetraédricos foram utilizados por Bossavit & Vêrité (1982, 1983) em seu programa "TRIFOU". Posteriormente, Van Welij (1985) desenvolveu elementos de aresta hexaédricos de 1ª ordem e Kameari (1990) estendeu-os para elementos de 2ª ordem.

Como estes elementos são menos conhecidos do que os elementos nodais, para os quais existe farta bibliografia (Bastos, 1989; Chung, 1977; Dhatt & Touzot, 1984; Hughes, 1987; Zienkiewicz, 1977), apresenta-se a seguir a dedução das "funções de interpolação de aresta" e de suas propriedades para um elemento hexaédrico. Para elementos tetraédricos ver Nedelec (1980), Bossavit (1985), Mur & Hoop (1985) e Barton & Cendes (1987).

Seja o elemento hexaédrico gerado pelo mapeamento trilinear $\underline{x}(\underline{s})$ a partir de um elemento padrão cúbico $\bar{\Omega}$ (fig. III.4). Sejam \underline{s} e \underline{x} as coordenadas de um ponto no domínio padrão e no domínio mapeado, respectivamente.

O mapeamento inverso $\underline{s}(\underline{x})$ também existe, se \underline{x} for restrito a um único elemento. A superfície $s_3(\underline{x}) = 1$, por exemplo, corresponde ao topo do elemento. Evidentemente, $\text{grad } s_3$ é normal a esta superfície.

Como pode ser visto na fig. III.4, este elemento possui 12 arestas. Cada

grau de liberdade está associado a uma das arestas. Portanto, a aproximação de H sobre o elemento é dada por:

$$H^h = \sum_{i=1}^{12} \underline{v}_i h_i \quad (\text{III.122})$$

onde \underline{v}_i são as funções de interpolação associadas às arestas e h_i são os graus de liberdade associados a cada função de interpolação. A função \underline{v}_1 associada à aresta 1 onde $s_2 = s_3 = 1$ (Fig. III.4) é definida por:

$$\underline{v}_1 = \frac{1}{8} (s_2+1)(s_3+1) \text{ grad } s_1 \quad (\text{III.123})$$

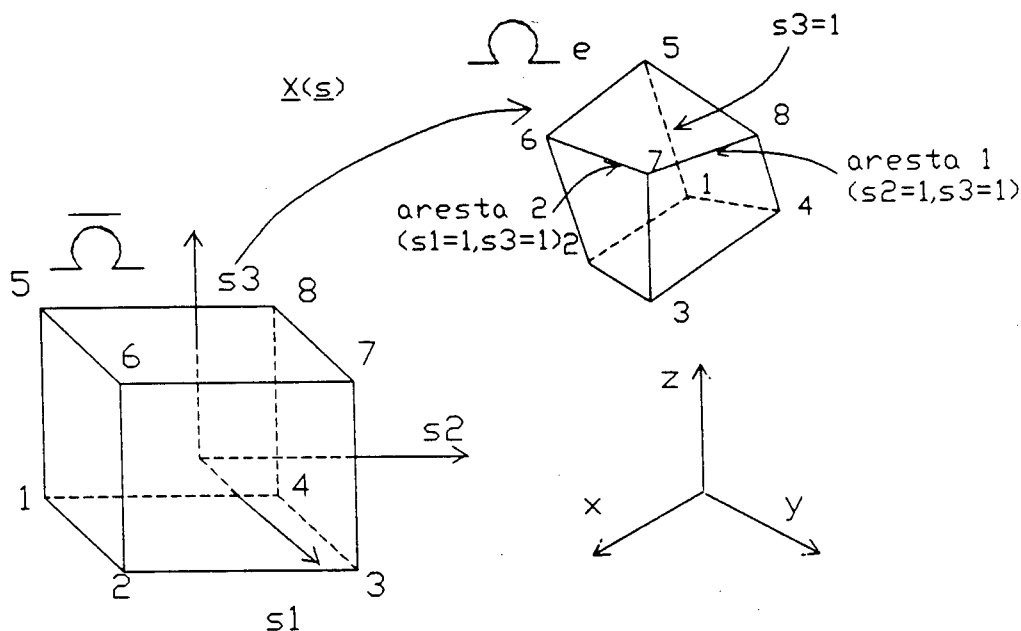


Figura III.4: Definição dos elementos de aresta: Elemento padrão e elemento hexaédrico

Esta função vetorial é normal às faces $s_1 = -1$ e $s_1 = 1$. Portanto, ela não contribui para os componentes tangenciais de H sobre estas faces. Isto inclui todas as oito arestas que não correm na direção de s_1 . Nas outras 3 arestas na direção s_1 , $(s_2 = -1, s_3 = 1; s_2 = s_3 = -1; s_2 = 1, s_3 = -1)$, o produto $(1+s_2)(1+s_3)$ é sempre nulo. Portanto a contribuição de \underline{v}_1 para o componente tangencial de H em qualquer aresta diferente da aresta 1 é nula.

Para verificar o que ocorre sobre a aresta 1 são necessárias algumas

definições adicionais. Sejam o vetor tangente à aresta associada a s_i (Dhatt & Touzot, 1984):

$$\underline{T}_i = \partial \underline{x} / \partial s_i \quad (\text{III.124})$$

a matriz Jacobiano da transformação dos sistemas de coordenadas (Dhatt & Touzot, 1984):

$$J = \begin{bmatrix} \partial x / \partial s_1 & \partial y / \partial s_1 & \partial z / \partial s_1 \\ \partial x / \partial s_2 & \partial y / \partial s_2 & \partial z / \partial s_2 \\ \partial x / \partial s_3 & \partial y / \partial s_3 & \partial z / \partial s_3 \end{bmatrix} \quad (\text{III.125})$$

e a matriz Jacobiano inversa:

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} \partial s_1 / \partial x & \partial s_2 / \partial x & \partial s_3 / \partial x \\ \partial s_1 / \partial y & \partial s_2 / \partial y & \partial s_3 / \partial y \\ \partial s_1 / \partial z & \partial s_2 / \partial z & \partial s_3 / \partial z \end{bmatrix} \quad (\text{III.126})$$

A matriz J^{-1} tem colunas iguais a $\text{grad } s_i$ e é inversa da matriz J que tem os \underline{T}_i como linha. Portanto:

$$\underline{T}_i \cdot (\text{grad } s_j) = \delta_{ij} \quad (\text{III.127})$$

Onde δ_{ij} é o delta de Kronecker ($\delta_{ij}=1$, se $i=j$; $\delta_{ij}=0$, se $i \neq j$). Usando (III.127) e (III.123), conclui-se que $\underline{T}_1 \cdot \underline{v}_1 = 1/2$, sobre a aresta 1, isto é, a projeção de \underline{H}^h sobre a aresta 1 é uma constante ao longo de toda a aresta.

Para associar um sentido físico aos h_i da equação (III.122), calcula-se o valor da integral de linha de \underline{H}^h ao longo da aresta i . Seja \underline{t} o vetor unitário tangente à aresta. Então:

$$\int_{a_i} \underline{H}^h \cdot \underline{t} \, dl = \int_{a_i} \frac{h_i \underline{v}_i \cdot \underline{T}_i}{|\underline{T}_i|} \, dl = \frac{h_i}{2} \int_{a_i} \frac{1}{|\underline{T}_i|} \, dl = \frac{h_i}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{|\underline{T}_i|}{|\underline{T}_i|} \, dl = h_i$$

Verifica-se que h_i é igual à integral de linha de \underline{H}^h sobre a aresta i .

Outras propriedades importantes podem ser obtidas a partir da equação (III.127). Por exemplo, um exame atento desta equação e da equação (III.124)

leva a:

$$\text{grad } s_1 = (\underline{I}_2 \wedge \underline{I}_3) / [(\underline{I}_2 \wedge \underline{I}_3) \cdot \underline{I}_1] \quad (\text{III.128})$$

A validade desta equação é confirmada facilmente, efetuando-se os produtos escalares com \underline{I}_1 , \underline{I}_2 e \underline{I}_3 e constatando que (III.127) é satisfeita. Permutando-se ciclicamente os termos em (III.128) obtém-se as expressões de $\text{grad } s_2$ e $\text{grad } s_3$.

A prova da continuidade tangencial inter-elemento também segue facilmente. Em todas as quatro faces que não contêm a aresta 1, a sua contribuição para o componente tangencial de H^h se anula. Para as duas faces restantes, existe contribuição desta aresta. Tome-se, por exemplo, a face superior ($s_3 = 1$). O vetor unitário normal a esta face é paralelo a $\text{grad } s_3$. Portanto, efetuando a permutação cíclica em (III.125) para obter $\text{grad } s_3$ e normalizando o valor de \underline{n} , obtém-se:

$$\underline{n} = (\underline{I}_1 \wedge \underline{I}_2) / |\underline{I}_1 \wedge \underline{I}_2|$$

Os componentes tangenciais de \underline{v}_1 sobre esta face podem ser obtidos por:

$$\begin{aligned} \underline{v}_1 \wedge \underline{n} &= \frac{(s_2+1)(s_3+1)(\underline{I}_2 \wedge \underline{I}_3) \wedge (\underline{I}_1 \wedge \underline{I}_2)}{8 [(\underline{I}_2 \wedge \underline{I}_3) \cdot \underline{I}_1] |\underline{I}_1 \wedge \underline{I}_2|} = \\ &= - \frac{(s_2+1)(s_3+1)[[(\underline{I}_1 \wedge \underline{I}_2) \cdot \underline{I}_3] \underline{I}_2 - [(\underline{I}_2 \wedge \underline{I}_2) \cdot \underline{I}_3] \underline{I}_1]}{8 [(\underline{I}_2 \wedge \underline{I}_3) \cdot \underline{I}_1] |\underline{I}_1 \wedge \underline{I}_2|} = \\ &= -(s_2+1)(s_3+1) \underline{I}_2 / [8 |\underline{I}_1 \wedge \underline{I}_2|] \quad (\text{III.131}) \end{aligned}$$

Todas as grandezas que aparecem nesta expressão são contínuas ao se passar deste elemento para o elemento imediatamente superior. Por simetria, conclusões semelhantes podem ser obtidas para as demais faces. Segue que os componentes tangenciais de \underline{v}_1 são contínuos nas interfaces inter-elementos e, conseqüentemente os componentes tangenciais de H^h também são.

III.4.3. Aplicação dos elementos de aresta: acoplamento entre Ω_r e Ω_k .

Sejam as seguintes classes de funções:

$$\mathcal{H} = \{ w : w \in H^1(\Omega_k) ; w = \psi_0 , \text{ em } \Gamma_{2k} \} \quad (\text{III.132})$$

$$\mathcal{H}_0 = \{ w : w \in H^1(\Omega_k) ; w = 0 , \text{ em } \Gamma_{2k} \} \quad (\text{III.133})$$

$$\underline{\mathcal{H}}_0 = \{ \underline{w} : \underline{w} \in \underline{H}^1(\Omega_f) ; \underline{n} \cdot \underline{w} = 0 , \text{ em } \Gamma_{1f} ; \underline{n} \wedge \underline{w} = 0 , \text{ em } \Gamma_{2f} \} \quad (\text{III.134})$$

De posse destas definições, pode-se somar as equações (III.120) e (III.121), obtendo-se:

$$\int_{\Omega_f} \left[\frac{1}{\sigma} [\text{rot } \underline{v} \cdot \text{rot } H] + \underline{v} \cdot \frac{\partial \mu H}{\partial t} \right] d\Omega - \int_{\Omega_k} \text{grad } u \cdot \frac{\partial (\mu \text{grad } \psi)}{\partial t} d\Omega =$$

$$\int_{\Gamma_{kf}} \left[-\underline{v} \cdot (\underline{n}_f \wedge E) + u(\text{rot } E) \cdot \underline{n}_j \right] d\Gamma \quad , \quad \forall \underline{v} \in \underline{\mathcal{H}}_0 \text{ e } \forall u \in \mathcal{H}_0 \quad (\text{III.135})$$

Os termos de contorno se reduziram ao termo em Γ_{kf} porque:

1. Em Γ_{2k} , $u = 0$ ($u \in \mathcal{H}_0$)
2. Em Γ_{1k} , a condição $B \cdot \underline{n} = 0$ deve ser verificada.
3. Em Γ_{2f} , $\underline{n} \wedge \underline{v} = 0$ ($\underline{v} \in \underline{\mathcal{H}}_0$)
4. Em Γ_{1f} , $B \cdot \underline{n} = 0$, logo $J \wedge \underline{n} = 0$, isto é, $E \wedge \underline{n} = 0$

Utilizando-se a equação (III.71), o teorema de Stokes e argumentos semelhantes aos desenvolvidos para eliminar a integral de linha da equação (III.72), a equação (III.135) torna-se:

$$\int_{\Omega_f} \left[\frac{1}{\sigma} [\text{rot } \underline{v} \cdot \text{rot } H] + \underline{v} \cdot \frac{\partial \mu H}{\partial t} \right] d\Omega - \int_{\Omega_k} \text{grad } u \cdot \frac{\partial (\mu \text{grad } \psi)}{\partial t} d\Omega =$$

$$\int_{\Gamma_{kf}} \left[E \cdot (\underline{n}_f \wedge \underline{v}) + E \cdot (\underline{n}_f \wedge \text{grad } u) \right] d\Gamma \quad , \quad \forall \underline{v} \in \underline{\mathcal{H}}_0 \text{ e } \forall u \in \mathcal{H}_0 \quad (\text{III.136})$$

Se for adotado:

$$\underline{n}_f \wedge \underline{v} = -\underline{n}_f \wedge \text{grad } u \quad , \quad \text{em } \Gamma_{kf} \quad (\text{III.137})$$

o termo de contorno de (III.133) será nulo, isto é:

$$\int_{\Omega_f} \left[\frac{1}{\sigma} [\text{rot} \underline{v} \cdot \text{rot} H] + \underline{v} \cdot \frac{\partial \mu H}{\partial t} \right] d\Omega - \int_{\Omega_k} \text{grad} u \cdot \frac{\partial (\mu \text{grad} \psi)}{\partial t} d\Omega = 0 \quad (\text{III.138})$$

A equação (III.137) deve ser forçada sobre a definição das classes de funções \mathcal{H} , \mathcal{H}_0 e $\underline{\mathcal{H}}_0$, para que (III.138) seja verificada. Seja o par $\{u, \underline{v}\}$. Sejam $\mathcal{H}-\underline{\mathcal{H}}_0$ e $\mathcal{H}_0-\underline{\mathcal{H}}_0$ as classes dos pares $\{u, \underline{v}\}$ definidas por:

$$\mathcal{H}-\underline{\mathcal{H}}_0 = \{ \{u, \underline{v}\} : u \in \mathcal{H} ; \underline{v} \in \underline{\mathcal{H}}_0 ; \underline{n}_f \wedge \underline{v} = -\underline{n}_f \wedge \text{grad} u, \text{ em } \Gamma_{kf} \} \quad (\text{III.139})$$

$$\mathcal{H}_0-\underline{\mathcal{H}}_0 = \{ \{u, \underline{v}\} : u \in \mathcal{H}_0 ; \underline{v} \in \underline{\mathcal{H}}_0 ; \underline{n}_f \wedge \underline{v} = -\underline{n}_f \wedge \text{grad} u, \text{ em } \Gamma_{kf} \} \quad (\text{III.140})$$

Utilizando estas definições, a forma fraca do problema torna-se: determinar $\{\psi, H\} = \{\psi(\underline{x}, t), H(\underline{x}, t)\}$, tais que, para cada instante de tempo t , $0 \leq t \leq t_f$, $\{\psi, H\} \in \mathcal{H}-\underline{\mathcal{H}}_0$, satisfaz:

$$\int_{\Omega_f} \left[\frac{1}{\sigma} [\text{rot} \underline{v} \cdot \text{rot} H] + \underline{v} \cdot \frac{\partial \mu H}{\partial t} \right] d\Omega - \int_{\Omega_k} \text{grad} u \cdot \frac{\partial (\mu \text{grad} \psi)}{\partial t} d\Omega = 0, \quad \forall \{u, \underline{v}\} \in \mathcal{H}_0-\underline{\mathcal{H}}_0 \quad (\text{III.141})$$

A aproximação por elementos finitos da equação (III.141) é feita utilizando-se elementos de aresta em Ω_f e elementos nodais em Ω_k . Para verificar que a condição (III.137) é satisfeita no domínio discretizado, toma-se a função de interpolação nodal associada ao nó $s_1 = s_2 = s_3 = 1$ da figura III.4 (Dhatt & Touzot, 1984):

$$u = \frac{1}{8} (1+s_1)(1+s_2)(1+s_3) \quad (\text{III.142})$$

Utilizando a regra da derivação em cadeia, obtém-se:

$$\text{grad} u = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u}{\partial s_i} \text{grad} s_i \quad (\text{III.143})$$

Sobre a face $s_3=1$, o vetor normal \underline{n} tem a direção de $\text{grad} s_3$. Portanto, o produto vetorial de $\text{grad} u$ com \underline{n} nesta face preserva somente os componentes em $\text{grad} s_1$ e $\text{grad} s_2$, isto é:

$$\begin{aligned} \text{grad} u \wedge \underline{n} &= \left[\frac{1}{8} (1+s_2)(1+s_3) \text{grad} s_1 + \frac{1}{8} (1+s_1)(1+s_3) \text{grad} s_2 \right] \wedge \underline{n} = \\ &= (\underline{v}_1 + \underline{v}_2) \wedge \underline{n} \end{aligned} \quad (\text{III.144})$$

Nesta equação foi utilizada a definição de \underline{v}_1 (III.123) e uma definição equivalente para a função \underline{v}_2 , associada à aresta 2 (Fig. III.4). Estas duas arestas terminam no nó $s_1 = s_2 = s_3 = 1$. A definição de \underline{v}_i dá um sentido às arestas. Arestas começando em um nó aparecem com sinal negativo. Conseqüentemente, os graus de liberdade associados às arestas situadas sobre Γ_k podem ser condensados fazendo-os iguais à diferença entre os graus de liberdade nodais que limitam a aresta, isto é:

$$h_i = \psi_b - \psi_a \quad (\text{III.145})$$

onde o nó a é o nó inicial da aresta i e o nó b o seu nó final.

Observações:

1. O acoplamento entre Ω_r e Ω_j pode ser efetuado de forma semelhante (Morinais et al., 1990). Será gerado um termo adicional no lado direito de (III.141) igual a:

$$\int_{\Gamma_{rj}} u \frac{\partial \mu_0 H_s}{\partial t} \cdot \underline{n}_j \, d\Gamma \quad (\text{III.146})$$

Além disto, h_i será dado por:

$$h_i = \phi_b - \phi_a + \int_a^b H_s \cdot \underline{t} \, dl \quad (\text{III.147})$$

2. Bossavit & Vérité (1982, 1983) também utilizaram o potencial escalar reduzido em Ω_j . Porém, ao invés de usarem o método de elementos finitos nesta região, usaram o método de elementos de contorno, estendendo a fronteira do problema até o infinito.
3. Esta formulação também apresenta o problema de potencial escalar não único se a região Ω_r for multiplamente conexa. Novamente, a solução para este problema é a imposição de cortes de modo a tornar Ω_r simplesmente conexa (Vérité, 1987).
4. Depois do trabalho pioneiro de Bossavit & Vérité (1982), vários autores

usaram elementos de aresta em outras situações: Mur & Hoop (1985) apresentaram novos elementos, nos quais o valor das variáveis sobre as arestas não é constante, mas uma aproximação de 1ª ordem. Com isto, conseguiram erros menores do que com os elementos propostos por Nedelec.

Bossavit (1985) mostrou que a utilização de elementos de aresta na formulação com o potencial vetor modificado A^* (seção III.2.3) permite a descontinuidade do componente normal de A^* nas superfícies de descontinuidade de σ , retirando a principal restrição à utilização desta formulação, além de produzir uma formulação dual à formulação H.

Barton & Cendes (1987) utilizaram elementos de aresta e o potencial vetor magnético para o cálculo magnetostático tridimensional.

Albanese & Rubinacci (1988, 1990(a) e (b)) utilizaram elementos de aresta associados ao método T- Ω , gerando um método semelhante ao método H (pois T e H são idênticos, a menos de *grad* Ω). Neste caso, T é interpolado pelas funções de aresta e Ω pelas funções nodais. Eles utilizaram o calibre $T \cdot \underline{w} = 0$, onde \underline{w} é um vetor arbitrário que não possui linhas de campo fechadas (Carpenter, 1977; Brown, 1982), podendo ser escolhido na direção das arestas de que formam uma árvore na malha de Ω_r . Com isto, os graus de liberdade associados a esta árvore são eliminados (Albanese & Rubinacci, 1990(c)). A principal vantagem deste método em relação à formulação de Bossavit & Vèrité (1982) é que ela pode ser utilizada também para o cálculo do problema magnetostático, além de não necessitar do cálculo de H_s (Albanese & Rubinacci, 1990(c)). Albanese & Rubinacci também utilizaram os elementos de aresta para o cálculo magnetostático com o potencial vetor magnético, usando o calibre $A \cdot \underline{w} = 0$ (Albanese & Rubinacci, 1990(c)). Com isto, obtiveram uma formulação com menos incógnitas do que a formulação de Barton & Cendes (1987).

Ren et al. (1990) formularam o problema de correntes de Foucault em termos do campo elétrico E. A dificuldade desta formulação está no acoplamento da região Ω_r com a região Ω_j , onde se utiliza o potencial escalar reduzido, pois agora a equação (III.147) não é mais válida. Ren et al. (1990) evitaram esta dificuldade adotando o método de elementos de contorno em Ω_j . Assim como o método T- Ω é semelhante ao método H quando formulado em termos de elementos de aresta, a formulação de Ren et al. (1990) é semelhante à formulação A^* com elementos de aresta proposta por Bossavit (1985).

Mur (1990) usou uma formulação mista E-H, com o intuito de calcular

os campos elétrico e magnético com a mesma precisão em problemas eletromagnéticos contendo meios com propriedades constitutivas extremamente variáveis, como o corpo humano ou o solo terrestre. O seu método usa elementos de aresta nas regiões de variação acentuada das propriedades constitutivas e elementos nodais nas demais regiões (Mur, 1988).

Kanayama et al. (1990) utilizaram o campo magnético H para efetuar o cálculo magnetostático. Neste caso, como o termo em derivada temporal da equação (III.116) é nulo, é necessário impor a condição $\text{div } B = 0$ através do uso de multiplicadores de Lagrange, gerando uma formulação mista.

Finalmente, Bossavit (1989) aplicou os elementos de aresta nos problemas de propagação de ondas eletromagnéticas e mostrou que, com isto, evita-se o problema de "modos espúrios" que aparece quando se utilizam elementos nodais (Bossavit, 1990).

III.5 Comparação entre as formulações para o problema de correntes de Foucault

Nas seções anteriores foram apresentadas as principais formulações matemáticas para a solução do problema de cálculo de correntes de Foucault tridimensionais: o método $A-V$ com calibre de Coulomb ($A-V:C$), o método $A-V-\phi-\psi$ com calibre de Coulomb ($A-V-\phi-\psi:C$) e de Lorentz ($A-V-\phi-\psi:L$), o método $A-V-A-\phi-\psi$ com calibre de Coulomb ($A-V-A-\phi-\psi:C$), o método $A^*-\phi-\psi$ que possui calibre implícito ($A^*-\phi-\psi$), o método do potencial vetor com 2 componentes ($A^2-\phi-\psi$), o método $T-\Omega$ com calibre de Coulomb ($T-\Omega:C$) e o método H com elementos de aresta ($H-\phi-\psi$).

Na tabela III.1 são sintetizadas as principais características destes métodos. As colunas indicam:

- a) O número de incógnitas por nó em cada região, com a divisão do problema feita como na Fig. (III.3).
- b) Se o método permite a solução de problemas onde ocorre descontinuidade das características constitutivas dentro de cada região.
- c) Se o método permite a variação contínua das características constitutivas dentro de cada elemento finito.

- d) Se as equações resultantes são simétricas, gerando uma matriz do sistema também simétrica.
- e) Se as condições de interface entre as diversas regiões são implantadas de maneira simples ou complicada.

TABELA III.1: MÉTODOS PARA CÁLCULO DE CORRENTES DE FOUCAULT 3-D

Método	Incógnitas por nó				Descontinuid.		Variac. continu		Simet das equac	Cond de intrf	Ω_r mult. conex	Regim estac	Resol sist. adic.
	Ω_j	Ω_k	Ω_f	Ω_b	σ	μ	σ	μ					
A-V: C	3	3	4	3	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	N/A	Sim	Sim	Não
A-V- ϕ - ψ : C	1	1	4	1	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Compl	Não	Sim	Não
A-V- ϕ - ψ : L	1	1	3	1	Sim	Sim	Sim	Sim	Depen	Compl	Não	Sim	Sim
A-V-A- ϕ - ψ : C	1	1	4	3	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Compl	Sim	Sim	Não
* A- ϕ - ψ	1	1	3	1	Não	Sim	Sim	Sim	Sim	Compl	Não	Não	Não
A ² - ϕ - ψ	1	1	2	1	Não	Não	Não	Não	Não	Compl	Não	Sim	Sim
T- Ω : C	1	1	4	1	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Simpl	Não	Sim	Não
H- ϕ - ψ	1	1	3	1	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Simpl	Não	Não	Não

Obs: N/A = Não se aplica (A formulação é única em todo o domínio)

Depen = Depende da aplicação

Compl/Simpl = Complicadas/Simples.

- f) Se o método permite o tratamento de regiões Ω_r multiplamente conexas sem a adoção de complicadores adicionais (cortes).
- g) Se a formulação permite que se trabalhe no regime permanente estático, ou seja, se o problema pode ser calculado com frequência de alimentação nula.
- h) Se é necessário resolver-se um sistema de equações adicional para determinar J.

A partir destes dados, efetua-se uma análise comparativa entre os métodos chegando-se às seguintes conclusões:

- 1) O método A-V tem somente valor didático e histórico, pois o número de graus de liberdade por nó é tão alto que sua implementação prática só

pode ser feita em computadores de grande porte.

- 2) Os métodos $A-V-\phi-\psi$ com calibre de Coulomb e o método $T-\Omega$ disputam uma mesma faixa de aplicações. O número de incógnitas por nó é o mesmo. Ambos permitem descontinuidades da permeabilidade magnética e da condutividade elétrica. O método $T-\Omega$ tem como vantagem o fato de que as condições de interface entre as regiões condutoras e não condutoras são impostas de forma simples e direta. Por outro lado, alguns autores observaram erros de cancelamento em regiões condutoras de alta permeabilidade magnética quando se utiliza este método (Preston & Reece, 1982; Deshmukh & Mukherji, 1987), embora outros afirmem que estes erros não são significativos (Nakata et al., 1990(b)). Além disto, o tratamento de regiões multiplamente conexas é mais simples com o método $A-V-\phi-\psi$ (gerando-se o método $A-V-A-\phi-\psi$) do que com o método $T-\Omega$.
- 3) Uma comparação entre os métodos $A-V-\phi-\psi$ com calibres de Coulomb e de Lorentz mostra que a grande diferença entre eles se deve ao fato de que o método com calibre de Lorentz necessita de apenas 3 incógnitas por nó em Ω_r . Porém, se for necessário o cálculo das densidades de corrente, será preciso resolver um sistema de equações adicional para a determinação de V em Ω_r . Além disto, se houver variação da condutividade dentro dos elementos finitos, o sistema de equações resultante do método com calibre de Lorentz não será simétrico.
- 4) O método $A^*-\phi-\psi$ tem aplicações particulares. Ele tem o mesmo número de incógnitas que o método $A-V-\psi-\phi$ com calibre de Lorentz, porém não necessita da resolução de um sistema de equações adicional para a determinação de J . Além disto, permite a variação contínua de σ mantendo a simetria das equações. Por outro lado, ele não permite a existência de descontinuidade de σ dentro de Ω_r nem pode trabalhar com faixas de frequência muito baixas, porque não se reduz corretamente ao regime permanente estático.
- 5) A utilização do potencial vetor com dois componentes é indicada para os casos em que os meios sejam lineares e homogêneos nas regiões onde circulam correntes de Foucault. Nestes casos ele é o método que apresenta o número mínimo de incógnitas por nó em Ω_r . Porém, o sistema de equações não é simétrico e, para a determinação das densidades de

corrente, é necessário solucionar um sistema de equações adicional.

- 6) O método H emprega elementos de aresta, técnica que é ainda relativamente nova dentro do domínio de cálculo de campos eletromagnéticos. Esta é a sua principal desvantagem, pois a sua utilização gera a necessidade de modificações substanciais nos programas de cálculo de campo por elementos finitos baseados em elementos nodais. Por outro lado, as suas vantagens são grandes: o campo magnético é calculado diretamente, sem a necessidade de diferenciação de potenciais; possui apenas três incógnitas nas regiões condutoras e permite, sem a resolução de um sistema de equações adicional, que σ e μ tenham variação qualquer. Além disto, o seu acoplamento com o método de elementos de contorno é muito simples. Por isto, este é um método que está recebendo a atenção de inúmeros grupos de pesquisa no mundo.

Estas conclusões reforçam o que foi dito na introdução do capítulo. Não existe um método que seja melhor que os outros em todas as condições. Cada método tem as suas características e são as particularidades do problema a ser resolvido que indicarão o melhor método.

CAPÍTULO IV CÁLCULO DO AQUECIMENTO

IV.1 Introdução

O problema acoplado termo-eletromagnético é de grande relevância para um projetista de equipamentos em Engenharia Elétrica. A capacidade de gerar, transmitir ou transformar potência dos equipamentos elétricos está limitada por sua capacidade de refrigeração, isto é, pela possibilidade de transmissão para o meio ambiente das perdas ocorridas internamente por efeitos eletromagnéticos. Uma análise do aquecimento deve ser feita para evitar condições que possam causar super-aquecimento e avaria dos equipamentos.

Um problema termo-eletromagnético importante é o problema de aquecimento indutivo. O cálculo deste problema em duas dimensões foi tratado por vários autores utilizando diferenças finitas (Gibson, 1976) e elementos finitos (Lavers, 1983; Bleuvin, 1984; Massé et al., 1985; Baudon et al., 1985). Vérité et al. (1989) apresentaram um método para o cálculo do problema de aquecimento indutivo 3-D acoplando o programa TRIFOU, que usa o método H para o cálculo das correntes induzidas (Bossavit & Vérité, 1983) com um programa térmico. Porém, o método de Vérité et al. (1989) não pode ser utilizado nas proximidades do ponto de Curie, pois não prevê o tratamento das não linearidades associadas a este ponto.

Neste capítulo apresenta-se um novo método para o cálculo do problema de aquecimento indutivo 3-D que prevê o tratamento das não linearidades associadas às características dos materiais e à passagem pelo ponto de Curie. Inicialmente, são revistos os princípios básicos da transferência de calor e as equações que regem este fenômeno. A seguir, apresentam-se as justificativas para a escolha do modelo utilizado. O método de cálculo é, então, apresentado.

IV.2. Fundamentos da transmissão de calor

A transmissão de calor pode ser definida como a ciência que estuda a transferência de energia sob a forma térmica entre duas regiões que não estejam a uma mesma temperatura.

Existem três maneiras distintas através das quais se processa a transmissão de calor: condução, radiação e convecção. O mecanismo básico de cada uma delas é apresentado a seguir.

IV.2.1 Transferência de calor por condução

A condução é um processo pelo qual o calor flui dentro de um meio (sólido, líquido ou gasoso) ou entre meios diferentes em contato físico.

O mecanismo da condução de calor pode ser explicado de forma relativamente simples: de acordo com a teoria cinética, a temperatura de um elemento de matéria é proporcional à energia cinética média de suas moléculas constituintes (Kreith, 1973). Quando as moléculas em uma região adquirem uma energia cinética média maior do que a da região adjacente (o que é manifestado por uma diferença de temperatura), as moléculas possuidoras de maior energia transmitirão parte dela para as moléculas da região de temperatura mais baixa.

Nos gases e nos líquidos, a transferência de calor tem lugar pelo impacto entre moléculas. Nos sólidos, a energia é conduzida de duas maneiras: vibração da estrutura do material e transporte por elétrons livres. O transporte por elétrons livres é o meio mais efetivo e, por esta razão, os bons condutores elétricos são, quase sempre, bons condutores de calor, enquanto os isolantes elétricos são, geralmente, bons isolantes térmicos (ver, por exemplo, Holman, 1983).

A equação básica que descreve a condução unidimensional de calor é a lei de Fourier:

$$q_s = -kS \frac{\partial T}{\partial \underline{n}} \quad (\text{IV.1})$$

onde:

q_s - Taxa de transferência de calor através da superfície S (W);

S - Área através da qual ocorre a transferência de calor (m^2);

k - Condutividade térmica do material ($\text{W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$);

T - Temperatura ($^\circ\text{C}$);

\underline{n} - Direção normal a S .

A equação que descreve a condução tridimensional de calor é (Holman, 1983):

$$c \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div}(-k \text{ grad } T) = q \quad (\text{IV.2})$$

onde:

c - Capacidade térmica do material ($\text{J}/(\text{m}^3 \cdot ^\circ\text{C})$).

q - Calor gerado por unidade de volume (W/m^3).

IV.2.2. Transferência de calor por convecção

Se uma partícula de um fluido (líquido ou gás) tiver contato com uma superfície aquecida, ela será aquecida por condução. Assim, pode-se calcular o

calor transferido a esta partícula, utilizando-se a equação (IV.1):

$$q_s = -kS \frac{\partial T}{\partial \underline{n}} \quad (IV.3)$$

Esta partícula, ao se aquecer, vai dilatar, tornando-se menos densa. Assim, afastar-se-á da superfície quente, fazendo com que uma partícula mais densa - portanto mais fria - aproxime-se da superfície, propiciando um movimento de partículas denominado de correntes de convecção. Esta convecção, unicamente comandada pela diferença de densidade de partículas, é chamada convecção livre ou convecção natural.

Em outros casos, onde existe circulação forçada do fluido, utilizando, por exemplo, ventiladores, tem-se a chamada convecção forçada.

O efeito global da convecção pode ser expresso através da lei de Newton do resfriamento:

$$q_s = hS(T_p - T_\infty) \quad (IV.4)$$

onde:

h - Coeficiente de transferência de calor por convecção ($W/m^2 \cdot ^\circ C$);

T_p - Temperatura da parede que está em contato com o fluido ($^\circ C$);

T_∞ - Temperatura do fluido em um ponto suficientemente distante da parede.

Associando-se as equações (IV.3) e (IV.4), obtém-se:

$$k \frac{\partial T}{\partial \underline{n}} = -h(T_p - T_\infty) \quad (IV.5)$$

O parâmetro h não é, normalmente, facilmente calculável. Para alguns sistemas, é possível o cálculo analítico de h . Para situações complexas, a determinação é experimental ou numérica. Pode-se afirmar (Holman, 1983) que este parâmetro apresenta dependência da viscosidade do fluido, de sua condutividade térmica, calor específico, densidade e velocidade, além de depender, também, da geometria da superfície do sólido.

IV.2.3. Transferência de calor por radiação

Para que ocorra a transmissão de calor por condução e convecção é preciso que haja a participação de um meio material entre as fontes quentes e frias. Todavia, pode haver transmissão de calor no vácuo, associada a uma outra forma de transmissão de calor, bem diferente das duas anteriores: trata-se da

radiação térmica.

Todo corpo em uma temperatura diferente do zero absoluto emite radiações eletromagnéticas que, ao atravessarem um meio que lhes seja transparente, prosseguirão sem nenhuma alteração de trajetória. Porém, estas radiações, ao colidirem com um meio que lhes seja opaco, serão em parte absorvidas e em parte refletidas pelo meio. Com isto, uma parcela da energia radiante da onda será transformada em energia térmica, aquecendo o meio opaco.

Define-se um irradiador ideal, ou corpo negro, como um corpo que absorve toda a radiação incidente sobre ele. Uma relação quantitativa entre a temperatura e a potência emissiva de um corpo negro foi obtida pelo físico austríaco Stefan, em 1879. Esta lei foi deduzida posteriormente, através de considerações termodinâmicas, por Boltzmann, gerando a equação conhecida como lei de Stefan-Boltzmann (Kreith, 1973):

$$E_n = S\gamma T^4 \quad (\text{IV.6})$$

onde:

E_n - Potência irradiada pelo corpo negro;

γ - Constante de Stefan-Boltzmann, $\gamma = 5.669 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ } ^\circ\text{K}^4)$

Nesta equação a temperatura é expressa em graus Kelvin.

Quando dois corpos negros trocam calor por radiação, a troca líquida de calor é proporcional à diferença de temperatura na potência 4. Assim, sendo T_1 a temperatura do corpo negro emissor 1 e T_2 a temperatura do corpo negro que envolve completamente o corpo 1, tem-se:

$$q_n = \gamma S(T_1^4 - T_2^4) \quad (\text{IV.7})$$

Os corpos reais não preenchem as especificações de um irradiador ideal, emitindo radiação a uma taxa menor do que a dos corpos negros. Se eles emitem, a uma temperatura igual à do corpo negro, uma fração constante da emissão do corpo negro a cada comprimento de onda, eles são chamados de corpos cinzas. A razão de transmissão de calor líquida de um corpo cinza à temperatura T_1 , para um corpo negro envolvente, à temperatura T_2 , é:

$$q_n = \epsilon\gamma S(T_1^4 - T_2^4) \quad (\text{IV.8})$$

onde:

ϵ - Emissividade da superfície cinza: Razão entre a emissão da superfície cinza e a emissão do corpo negro à mesma temperatura.

As emissividades das substâncias variam com a natureza do material, a temperatura e o acabamento da superfície (Araújo, 1978).

IV.2.4. Transferência de calor em um corpo metálico envolvido pelo ar: Equação básica e condições de contorno

Dentro de um corpo metálico, o mecanismo de transferência de calor é, basicamente, a condução. Portanto, tem-se a equação (IV.2) :

$$c \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div}(-k \text{ grad } T) = q \quad (\text{IV.9})$$

Na superfície do corpo, ocorrerão transferências de calor por convecção e por radiação. Portanto, levando-se em conta as equações (IV.1), (IV.4) e (IV.8), obtém-se:

$$-k \frac{\partial T}{\partial \underline{n}} = h(T - T_a) + \epsilon \gamma (T^4 - T_a^4) \quad (\text{IV.10})$$

onde:

T_a - Temperatura ambiente.

O segundo termo do segundo membro da equação (IV.10) é, normalmente, muito pequeno. Somente se a temperatura T for muito maior que T_a o seu valor será comparável ao termo convectivo.

Em algumas situações especiais - notadamente sobre os planos de simetria - não existem trocas de calor através da fronteira. Nestes casos, tem-se uma condição de Neumann homogênea:

$$k \frac{\partial T}{\partial \underline{n}} = 0 \quad (\text{IV.11})$$

Outra condição de contorno básica é a condição de Dirichlet, que aparece quando uma superfície é mantida em temperatura fixa, isto é:

$$T = T_0 \quad (\text{IV.12})$$

IV.3 Variação das propriedades constitutivas com a temperatura

A Fig. IV.1 apresenta a variação dos parâmetros de um material utilizado em aquecimento indutivo (Massé et al., 1985).

Pode-se notar uma variação forte das características do material

(principalmente da capacidade térmica, c) na vizinhança do ponto de Curie do material (neste caso, 760°C). Uma maneira simples de representar estas variações é apresentada por Bleuvin (1984):

1. Resistividade elétrica ($\Omega.m$):

$$\begin{aligned} \rho(T) &= \rho_0(1 + \beta_0 T) && , \text{ para } T \leq T_c \\ \rho(T) &= \rho_1(1 + \beta_1 T) && , \text{ para } T \geq T_c \end{aligned} \quad (\text{IV.12})$$

onde T_c é a temperatura de Curie. Para o material da Fig. IV.1, tem-se:

$$\rho(T) = 13.75 \times 10^{-8} (1 + 0.004T) \quad \text{para } T \leq 760^{\circ}\text{C}$$

$$\rho(T) = 31.56 \times 10^{-8} (1 + 0.001T) \quad \text{para } T > 760^{\circ}\text{C}$$

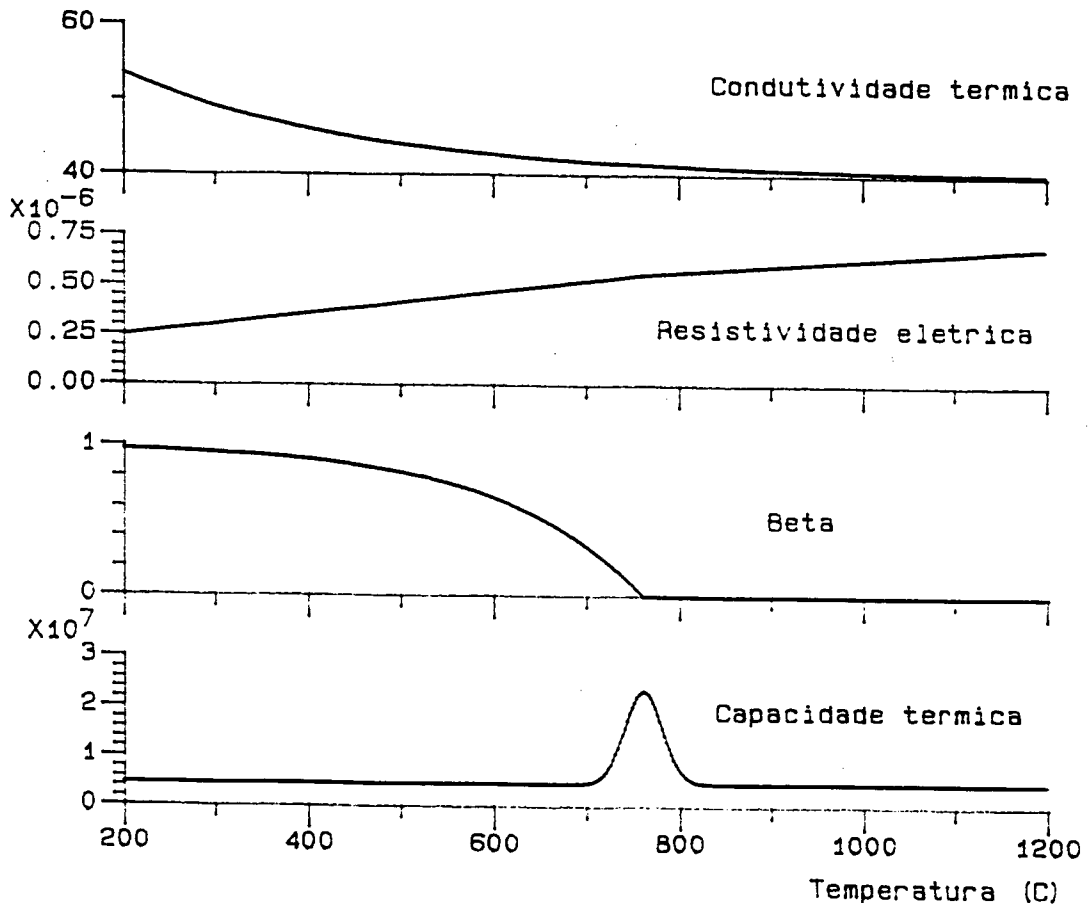


Fig IV.1. Variação das propriedades constitutivas de um material utilizado em aquecimento indutivo.

2. Condutividade térmica (W/(m.°C))

$$k(T) = K_0 + K_1 e^{-(T/\tau_k)} \quad (\text{IV.13})$$

Para o material da Fig. IV.1 tem-se:

$$k(T) = 40 + 30 e^{-(T/250)}$$

3. Permeabilidade magnética

$$\mu(T) = \mu(0) \beta(T) \quad (\text{IV.14a})$$

onde $\mu(0)$ é o valor da permeabilidade magnética à temperatura de 0 °C (uma função apenas das condições magnéticas do problema), e $\beta(T)$ é a função:

$$\beta(T) = 1 - e^{(T-T_c)/\tau\beta} \quad (\text{IV.14b})$$

Observe-se que se

$$\mu(T) < \mu_0$$

adota-se

$$\mu(T) = \mu_0$$

Para o material da Fig. IV.1:

$$\beta(T) = 1 - e^{(T-760)/150}$$

4. A capacidade térmica (c) tem modelamento mais complexo. Para facilitar o tratamento numérico, supõe-se que a sua curva seja regular e simétrica em relação à temperatura de Curie. Com isto, uma curva de Gauss pode ser adotada (Bleuvin, 1984):

$$c = \frac{\xi}{\text{Sig} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(T-T_c)^2}{2 \text{Sig}^2}} + c_0 \quad (\text{IV.15})$$

onde:

T_c - Temperatura de Curie

c_0 - Capacidade térmica a 0°C

ξ - Energia por unidade de volume necessária para atravessar o ponto de Curie

Sig - Parâmetro que permite variar a abertura da curva em torno do ponto de Curie

A curva (a) da Fig. (IV.2) foi obtida com: $\xi = 9.4 \times 10^8 \text{ J/m}^3$; Sig = 20°C ; $T_c = 760^\circ\text{C}$; $c_0 = 4.68 \times 10^6 \text{ J/(m}^3 \text{ }^\circ\text{C)}$. Na curva (b) modifica-se somente Sig, que torna-se igual a 5°C .

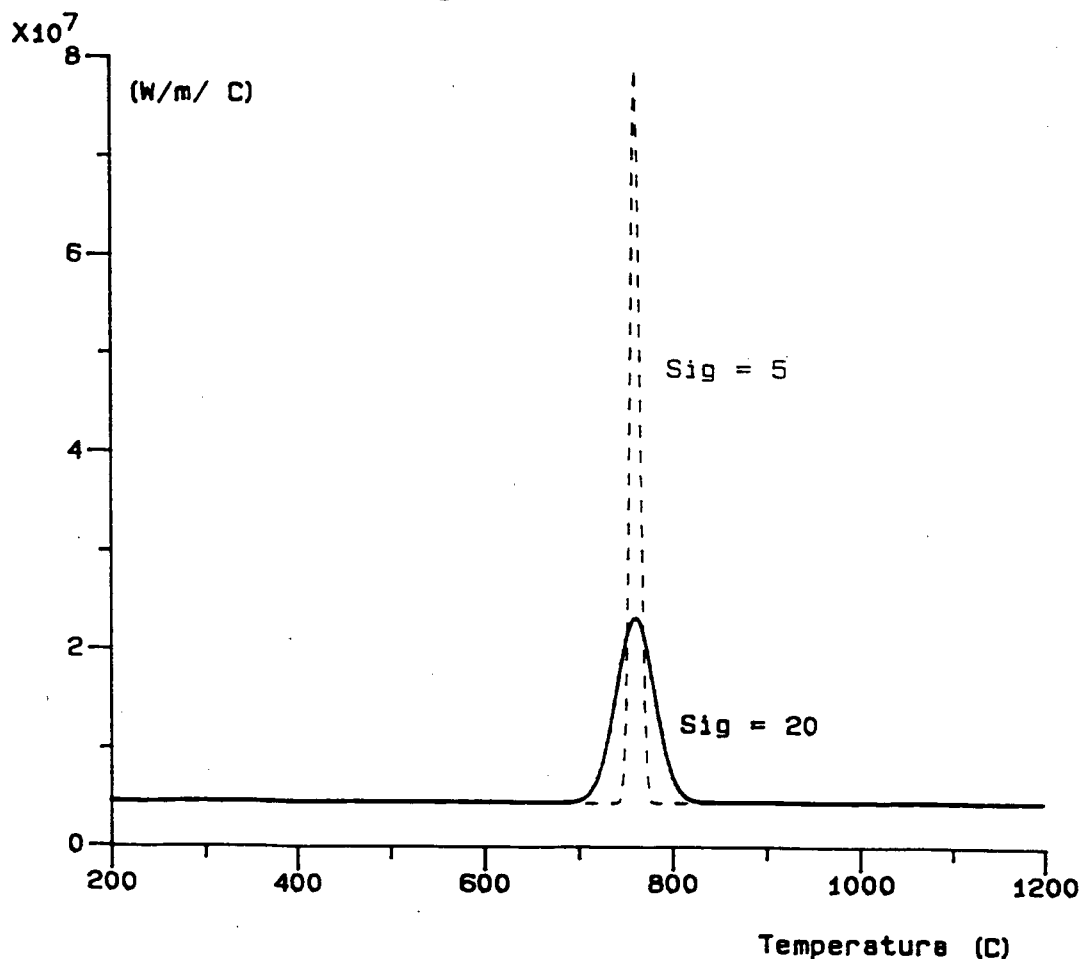


Figura IV.2 Representação da variação da capacidade térmica com a temperatura.

Com isto consegue-se modelar variações mais bruscas da capacidade térmica em torno do ponto de Curie, mantendo a mesma energia necessária para ultrapassar este ponto.

5. O coeficiente de transferência de calor por convecção (h) e a emissividade da superfície cinza (ϵ) são considerados constantes independentes da temperatura.

IV.4. A forma fraca do problema térmico: acoplamento termo-eletromagnético

Seja o cálculo do transitório térmico gerado pelas correntes de Foucault em um problema como o da Fig. III.1. Supõe-se, neste caso, que o problema térmico está limitado à região Ω_f e que as condições de contorno são de convecção/radiação (IV.10) ou, nos planos de simetria, condições de Neumann homogêneas (IV.11). A classe das funções de teste é $H^1(\Omega_f)$. As funções admissíveis, a cada instante de tempo t , $0 \leq t \leq t_f$, também pertencem a $H^1(\Omega_f)$. Seja o resíduo associado à equação (IV.9):

$$r_T = c \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div}(-k \text{grad } T) - q = 0 \quad (\text{IV.16})$$

Efetuando-se o produto escalar deste resíduo com as funções de teste u e integrando-se por partes, obtém-se:

$$\int_{\Omega_f} u c \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega_f} k \text{grad } u \cdot \text{grad } T d\Omega + \int_{\partial\Omega_f} -k \frac{\partial T}{\partial n} = \int_{\Omega_f} u q d\Omega$$

$$, \forall u \in H^1(\Omega_f) \quad (\text{IV.17})$$

Substituindo-se as condições de contorno (IV.10), obtém-se:

$$\int_{\Omega_f} u c \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega_f} k \text{grad } u \cdot \text{grad } T d\Omega + \int_{\partial\Omega_f} h(T - T_a) u d\Gamma +$$

$$+ \int_{\partial\Omega_f} \epsilon \gamma (T^4 - T_a^4) u d\Gamma = \int_{\Omega_f} u q d\Omega \quad \forall u \in H^1(\Omega_f) \quad (\text{IV.18})$$

Para se efetuar o acoplamento desta equação com as equações eletromagnéticas, os seguintes fatos devem ser considerados:

1. q é a potência dissipada por unidade de volume pelas correntes de Foucault, isto é:

$$q = \rho \| J \|^2 \quad (\text{IV.19})$$

Portanto, a solução do problema térmico depende da solução do problema eletromagnético. Por outro lado, como visto na seção IV.3, a resistividade elétrica e a permeabilidade magnética dependem da temperatura, ou seja, a solução do problema eletromagnético depende da solução do problema térmico.

2. O sistema elétrico e o térmico têm constantes de tempo completamente diferentes. A constante de tempo térmica é, normalmente, várias vezes superior à constante de tempo elétrica. Para que a equação de transmissão de calor possa ser integrada utilizando um intervalo Δt compatível com a constante de tempo térmica, é necessário que a parte eletromagnética do problema seja representada por seu regime permanente senoidal. Se esta aproximação não fosse adotada, seria preciso utilizar tempos de integração compatíveis com as constantes de tempo eletromagnéticas, e o processo de cálculo se tornaria muito pesado. Lavers et al. (1985) comprovaram que, ao se adotar uma aproximação senoidal para um caso de aquecimento unidimensional por correntes de Foucault, não se cometem erros apreciáveis em relação aos valores previstos pela integração numérica das equações eletromagnéticas. Desta forma, os operadores $\frac{\partial}{\partial t}$ das equações eletromagnéticas são processados como $j\omega$, onde ω é a frequência angular (rd/s) do campo eletromagnético.
3. Como a distribuição espacial da temperatura é contínua, σ e μ também terão variação contínua (se houver um único material na região portadora de correntes de Foucault). Portanto, a formulação a ser adotada para o problema eletromagnético deve permitir a variação contínua de σ e μ . Este fato elimina a possibilidade de utilização do método **A** com dois componentes, pois este não permite esta variação, e do método **A-V- ϕ - ψ** com calibre de Lorentz, que produz matrizes não simétricas quando existe variação de σ dentro dos elementos.
4. O resultado de maior interesse no cálculo eletromagnético é a densidade de potência gerada pelas correntes de Foucault, pois é ela que gera o aquecimento. Quando se utiliza o potencial vetor **T** ou o campo magnético

H como variáveis base, a densidade de corrente J é obtida calculando-se o *rot* destas variáveis, ou seja, é preciso efetuar a diferenciação das variáveis, o que traz como consequência a perda de precisão do cálculo. Por outro lado, quando se utiliza o potencial vetor A , a densidade de corrente, no regime permanente senoidal, é dada por:

$$J = -j\omega\sigma (A + \text{grad } V) \quad (\text{IV.20})$$

Neste caso, *grad* V não possui a mesma precisão de A , o que também gera imprecisão. Quando se utiliza o potencial vetor modificado A^* a densidade de corrente é:

$$J = -j\omega\sigma A^* \quad (\text{IV.21})$$

isto é, J é obtida diretamente de A^* , sem nenhum tipo de diferenciação incluído. Isto implica que a precisão do cálculo de J deve ser maior neste caso.

5. As peças a serem aquecidas são, normalmente, compostas por um material único. Com isto, não existe o problema de descontinuidade da condutividade dentro da região Ω_f .
6. A frequência de trabalho no aquecimento indutivo é freqüentemente a industrial, isto é, 60 Hz, ou uma frequência superior a esta. Portanto, não é preciso que o regime permanente estático seja calculável pelo método escolhido.

Utilizando a tabela III.1 e as observações acima, conclui-se que o método com menor número de variáveis e que melhor se adapta às características deste problema é o $A^* - \psi - \phi$.

Escolhido o método para a representação da parcela eletromagnética do problema, utilizam-se as equações III.62, III.63 e III.66 para definir \mathcal{H} , \mathcal{H}_0 e $\underline{H}^1(\Omega_f)$ e define-se \mathcal{H}_0 por:

$$\mathcal{H}_0 = \{ \underline{w} : \underline{w} \in \underline{H}^1(\Omega_f); \underline{n} \wedge \underline{w} = 0 \text{ em } \Gamma_{1f}; \underline{n} \cdot \underline{w} = 0 \text{ em } \Gamma_{2f} \} \quad (\text{IV.22})$$

Assim, a forma fraca do problema acoplado é: Determinar $A^* = A^*(\underline{x}, t)$, $\{\psi, \phi\} = \{\psi(\underline{x}, t), \phi(\underline{x}, t)\}$ e $T = T(\underline{x}, t)$, tais que, para cada instante t , $0 \leq t \leq t_f$, $A^* \in$

\underline{H}_0 , $\{\psi, \phi\} \in \mathcal{H}$ e $T \in H^1(\Omega_f)$, satisfazem:

$$\int_{\Omega_f} u c \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega_f} k \text{grad } u \cdot \text{grad } T d\Omega + \int_{\partial\Omega_f} h(T - T_a) u d\Gamma +$$

$$+ \int_{\partial\Omega_f} \varepsilon \gamma (T^4 - T_a^4) u d\Gamma = \int_{\Omega_f} u \sigma \omega^2 A^{*2} d\Omega, \quad \forall u \in H^1(\Omega_f) \quad (\text{IV.23a})$$

$$\int_{\Omega_f} \nu \text{rot } \underline{v} \cdot \text{rot } \underline{A}^* + j\omega\sigma \underline{v} \cdot \underline{A}^* d\Omega = \int_{\Gamma_{jf}} \underline{v} \cdot (\underline{n}_j \wedge (-\text{grad}\phi + H_s)) d\Gamma$$

$$+ \int_{\Gamma_{kf}} \underline{v} \cdot (\underline{n}_k \wedge (-\text{grad}\psi)) d\Gamma, \quad \forall \underline{v} \in \underline{H}_0 \quad (\text{IV.23b})$$

$$- \int_{\Omega_j} \mu_0 \text{grad}(u) \cdot \text{grad}\phi d\Omega - \int_{\Omega_k} \mu \text{grad}(u) \cdot \text{grad}\psi d\Omega =$$

$$- \int_{\Gamma_{kj} \cup \Gamma_{2j} \cup \Gamma_{fj}} \mu_0 (H_s \cdot \underline{n}_j) u d\Gamma - \int_{\Gamma_{fk} \cup \Gamma_{fj}} \underline{A}^* \cdot (\underline{n}_j \wedge \text{grad } u) d\Gamma, \quad \forall u \in \mathcal{H}_0 \quad (\text{IV.23c})$$

IV.5 A semidiscretização por elementos finitos

Utilizando o método de elementos finitos, pode-se discretizar, especialmente, a forma fraca (IV.23), fazendo-se:

$$T^h(\underline{x}, t) = \sum_{i=1}^{N_f} N_i(\underline{x}) T_i(t) \quad (\text{IV.24})$$

onde \underline{x} são as coordenadas espaciais, N_i são as funções de interpolação nodais do método de elementos finitos e $T_i(t)$ são os valores nodais das temperaturas no instante de tempo t . Derivando em relação ao tempo, obtém-se:

$$\frac{\partial T^h}{\partial t} = \sum_{i=1}^{N_f} N_i(\underline{x}) \frac{\partial T_i}{\partial t} \quad (\text{IV.25})$$

Definições semelhantes à (IV.24) podem ser adotadas para ϕ e ψ . Para \underline{A}^* ,

tem-se:

$$\mathbf{A}^{*h}(\underline{x}, t) = \sum_{i=1}^{N_f} \mathbf{N}_i(\underline{x}) \mathbf{A}_i^*(t) \quad (\text{IV.26})$$

onde \mathbf{N}_i são as funções de interpolação vetoriais (Eq. II.63).

O termo de contorno em (IV.23a) pode ser expresso por:

$$\varphi_T = \int_{\partial\Omega_f} u (hT + \varepsilon\gamma T^4) d\Gamma - \int_{\partial\Omega_f} u (hTa + \varepsilon\gamma Ta^4) d\Gamma$$

O termo em T^4 pode ser linearizado através do desenvolvimento em série de Taylor em torno de um ponto de funcionamento T_p , gerando:

$$\varphi_T \approx \int_{\partial\Omega_f} u hT + u[\varepsilon\gamma T_p^4 + 4\varepsilon\gamma T_p^3(T-T_p)] d\Gamma - \int_{\partial\Omega_f} u (hTa + \varepsilon\gamma Ta^4) d\Gamma$$

isto é:

$$\varphi_T \approx \int_{\partial\Omega_f} u (h + 4\varepsilon\gamma T_p^3) T d\Gamma - \int_{\partial\Omega_f} u [3\varepsilon\gamma T_p^4] d\Gamma - \int_{\partial\Omega_f} u (hTa + \varepsilon\gamma Ta^4) d\Gamma$$

Com estas aproximações, as equações a seguir são obtidas. Elas são denominadas forma semi-discreta do problema (IV.23) porque estão discretizadas espacialmente, mas formam um sistema de equações contínuo em relação ao tempo:

$$[\underline{C}] \dot{\underline{T}} + [\underline{K}] \underline{T} = \underline{f}(\underline{A}^*, \underline{T}) \quad (\text{IV.27a})$$

$$\begin{bmatrix} [\underline{K}_a] + j\omega[\underline{C}_{aa}] & [\underline{K}_{a\psi\phi}] \\ [\underline{K}_{a\psi\phi}]^T & [\underline{K}_{\psi\phi}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A}^* \\ \{\underline{\psi}, \underline{\phi}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{f}_a \\ \underline{f}_{\psi\phi} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.27b})$$

onde:

$$C_{ij} = \int_{\Omega_f} c N_i N_j d\Omega \quad (\text{IV.27c})$$

$$K_{ij} = \int_{\Omega_f} k \text{grad } N_i \cdot \text{grad } N_j d\Omega + \int_{\partial\Omega_f} (h + 4\varepsilon\gamma T_p^3) N_i N_j d\Gamma \quad (\text{IV.27d})$$

$$f_i(\underline{A}^*, \underline{I}) = \int_{\partial\Omega_f} N_i [3\varepsilon\gamma T_p^4 + hTa + \varepsilon\gamma T_a^4] d\Gamma + \int_{\Omega_f} N_i \sigma \omega^2 A^{*2} d\Omega \quad (IV.27e)$$

$$K_a^{ij} = \int_{\Omega_f} \nu [\text{rot } N_i]^T [\text{rot } N_j] d\Omega \quad (IV.27f)$$

C_{aa} é definido pela equação (III.81b), $K_{a\psi\phi}$ pela equação (III.81f), $K_{\psi\phi}$ pela equação (III.81g), f_a pela equação (III.81h) e $f_{\psi\phi}$ pela equação (III.81i).

IV.6. A discretização temporal

IV.6.1. Conceitos básicos: o algoritmo

O sistema de equações (IV.27) é um sistema de equações diferenciais ordinárias não lineares de 1ª ordem. A forma mais óbvia de solução deste sistema, sob o ponto de vista matemático, é a resolução global de (IV.27) como um único sistema de equações (Molfino & Repetto, 1990). Porém, esta solução exige uso intensivo de recursos computacionais e só é justificável se não existir outra alternativa.

Um esquema alternativo consta da resolução separada dos dois sistemas em cada passo da integração temporal (Bastos et al., 1990; Molfino & Repetto, 1990). Este esquema parte da equação (IV.27), representada abaixo de maneira condensada:

$$[C] \dot{\underline{I}} + [K] \underline{I} = \underline{f}(\underline{V}_e, \underline{I}) \quad (IV.28a)$$

$$\underline{K}_e \underline{V}_e = \underline{f}_e \quad (IV.28b)$$

onde \underline{V}_e é o vetor de variáveis eletromagnéticas, \underline{K}_e e \underline{f}_e são a matriz e o vetor do segundo membro do sistema (IV.27b). Considere-se que num instante de tempo t_1 qualquer são conhecidos os valores de $\underline{I}^i = \underline{I}(t_1)$ e $\underline{V}_e^i = \underline{V}_e(t_1)$. Neste trabalho utiliza-se o método θ para prever o valor de $\underline{I}^{i+1} = \underline{I}(t_1 + \Delta t)$. A dedução das equações do método θ é efetuada escrevendo-se a equação (IV.28a) no instante

$$t_\theta = t_1 + \theta \Delta t \quad (IV.29)$$

com $0 \leq \theta \leq 1$. Para isto, sejam as aproximações:

$$\dot{\underline{T}}(t_\theta) = \underline{\alpha}^i \approx \frac{1}{\Delta t} [\underline{T}^{i+1} - \underline{T}^i] \quad (\text{IV.30})$$

$$\underline{T}^\theta = \underline{T}(t_\theta) \approx (1-\theta)\underline{T}^i + \theta \underline{T}^{i+1} \quad (\text{IV.31})$$

Definem-se:

$$[\underline{C}]^\theta = [\underline{C}(\underline{T}^\theta)] ; [\underline{K}]^\theta = [\underline{K}(\underline{T}^\theta)] ; \underline{v}_e^\theta = \underline{v}_e(\underline{T}^\theta) ; \underline{f}^\theta = \underline{f}(\underline{T}^\theta, \underline{v}_e^\theta)$$

Então, no instante t_θ , (IV.28a) fornece:

$$[\underline{C}]^\theta \frac{1}{\Delta t} [\underline{T}^{i+1} - \underline{T}^i] + [\underline{K}]^\theta [(1-\theta)\underline{T}^i + \theta \underline{T}^{i+1}] = \underline{f}^\theta \quad (\text{IV.32})$$

Rearranjando, obtém-se:

$$\left[[\underline{C}]^\theta + \theta \Delta t [\underline{K}]^\theta \right] \frac{1}{\Delta t} [\underline{T}^{i+1} - \underline{T}^i] = \underline{f}^\theta - [\underline{K}]^\theta \underline{T}^i$$

ou

$$\left[[\underline{C}]^\theta + \theta \Delta t [\underline{K}]^\theta \right] \underline{\alpha}^i = \underline{f}^\theta - [\underline{K}]^\theta \underline{T}^i \quad (\text{IV.33})$$

o algoritmo básico do método é:

1. Calcule $\underline{\alpha}^i$ pela equação (IV.33)
2. Calcule \underline{T}^{i+1} usando

$$\underline{T}^{i+1} = \underline{T}^i + \underline{\alpha}^i \Delta t \quad (\text{IV.34})$$

Observe que este algoritmo só funciona para o caso linear, onde as matrizes e vetores necessários ao cálculo de $\underline{\alpha}^i$ são constantes. Para o caso não linear, o algoritmo pode ser refinado incluindo uma fase de previsão dos valores de \underline{T}^{i+1} , posterior cálculo das matrizes, e correção dos valores de \underline{T}^{i+1} , ou seja:

$$1. \underline{\alpha}_p^i = \left[[\underline{C}]^i + \theta \Delta t [\underline{K}]^i \right]^{-1} \left[\underline{f}^\theta - [\underline{K}]^i \underline{T}^i \right] \quad (\text{IV.35a})$$

$$2. \underline{T}^{i+1} = \underline{T}^i + \underline{\alpha}_p^i \Delta t \quad (\text{IV.35b})$$

$$3. \underline{T}^\theta = (1-\theta)\underline{T}^i + \theta \underline{T}^{i+1} \quad (\text{IV.35c})$$

$$4. \text{ Calcule } [\underline{C}]^\theta, [\underline{K}]^\theta, \underline{f}^\theta \quad (\text{IV.35d})$$

$$5. \underline{\alpha}^i = \left[[\underline{C}]^\theta + \theta \Delta t [\underline{K}]^\theta \right]^{-1} \left[\underline{f}^\theta - [\underline{K}]^\theta \underline{T}^i \right] \quad (\text{IV.35e})$$

$$6. \underline{T}^{i+1} = \underline{T}^i + \underline{\alpha}^i \Delta t \quad (\text{IV.35f})$$

Observe que os passos de 3 a 6 são repetidos até que haja convergência para o valor de \underline{T}^{i+1} . Este método é também conhecido como método de Euler semi-implícito (Dhatt & Touzot, 1984) e é incondicionalmente estável para $0.5 \leq \theta \leq 1$.

Se $\theta = 0$, tem-se o método de Euler explícito, que tem precisão de ordem $O(\Delta t)$ (Bathe, 1982). A principal característica deste método é que as matrizes e vetores utilizados no cálculo de $\underline{\alpha}^i$ no passo 5 do algoritmo são calculados no tempo t_i , ou seja, são calculados com valores de \underline{T}^i e \underline{V}_e^i conhecidos. Portanto, pode-se eliminar a fase de previsão e o cálculo iterativo do algoritmo (IV.35). A sua desvantagem é ser condicionalmente estável, isto é, existe um valor máximo de passo de integração, dependente de $[\underline{C}]$ e $[\underline{K}]$, acima do qual o problema é instável.

Se $\theta = 1$, tem-se o método de Euler implícito, que também tem precisão de $O(\Delta t)$. A sua desvantagem em relação ao método explícito é que as matrizes e vetores do passo 2 do algoritmo são calculadas no tempo $t = t_i + \Delta t$, ou seja, elas são função de \underline{T}^{i+1} e \underline{V}_e^{i+1} que, a princípio, são desconhecidos. Por isto, para um problema não linear, os passos de 3 a 6 devem ser resolvidos iterativamente, até que haja convergência no valor de \underline{T}^{i+1} . A sua vantagem em relação ao método explícito é ser incondicionalmente estável, isto é, seja qual for o passo de cálculo adotado, o sistema não apresenta instabilidade numérica. A escolha do passo de cálculo está limitada, somente, pela precisão a ser obtida.

Se $\theta = 1/2$ tem-se o método de Crank-Nicholson, de ordem de precisão $O(\Delta t^2)$ (Bathe, 1982), também incondicionalmente estável. A sua desvantagem em relação ao método de Euler implícito é que ele pode apresentar oscilações não físicas na solução. Estas oscilações não aparecem no método de Euler implícito (Dhatt & Touzot, 1984).

IV.6.2 Mudança do passo de integração

Através da análise dos termos que são desprezados no desenvolvimento em série de Taylor do sistema de equações diferenciais de primeira ordem, Zienkiewicz et al. (1984) obtiveram uma medida aproximada do erro cometido em cada passo de integração. Esta medida é dada por:

$$\underline{e}_t = \frac{(\alpha^i - \alpha^{i-1}) \Delta t}{2} \quad (\text{IV.36})$$

A norma deste erro pode ser usada como critério para a mudança do intervalo de integração. Um procedimento razoável é reduzir (por exemplo à metade) o intervalo de integração, se a norma do erro for maior do que um erro máximo, ϵ_m , pré-estabelecido, e aumentá-la (por exemplo, dobrar) quando a norma do erro for menor do que uma fração do erro máximo.

A mudança do intervalo de integração pode se usada, também, como estratégia para evitar o cálculo iterativo não linear dentro de cada passo de integração. Sabendo-se que a diferença entre $\underline{\alpha}^i$ e $\underline{\alpha}_p^i$ é causada pela não linearidade do problema, o erro associado à solução incompleta do problema não linear pode ser calculado, aproximadamente, por (Mesquita & Bastos, 1990(c)):

$$\underline{e}_n = (\underline{\alpha}^i - \underline{\alpha}_p^i) \Delta t \quad (\text{IV.37})$$

Então, ao invés de efetuar o cálculo iterativo nos passos de 3 a 6 do algoritmo (IV.35), pode-se fazer uma redução do passo de integração (à metade) toda vez que a norma do erro associado à solução incompleta do problema não linear, $\|\underline{e}_n\|$, se tornar maior do que ϵ_m . Além disto, agora, o critério para aumento de Δt deve ser verificado não somente por $\|\underline{e}_t\|$, mas, também, por $\|\underline{e}_n\|$.

IV.7 Algoritmo final para a resolução do sistema acoplado com passo variável

Levando-se em conta os argumentos das seções anteriores, tem-se o seguinte algoritmo para o cálculo do problema acoplado termo-eletromagnético:

Início

1. Inicialize o passo de integração Δt , os vetores \underline{I} e $\underline{\alpha}$: $\underline{I}^0 = \underline{I}(0)$ e $\underline{\alpha}^0 = 0$.

2. Calcule o sistema eletromagnético com $\underline{\mathbf{I}} = \underline{\mathbf{I}}^i$, determinando $\underline{\mathbf{V}}_e^i$ (Eq. IV.28b)
3. Calcule $[\underline{\mathbf{C}}]^i$, $[\underline{\mathbf{K}}]^i$ e $\underline{\mathbf{f}}^i$ (Eq. IV.27 c,d,e)
4. Calcule α_p^i (Eq. IV.35a)
5. Calcule $\underline{\mathbf{I}}^{i+1}$ (Eq. IV.35b)
6. Calcule $\underline{\mathbf{I}}^\theta$ (Eq. IV.35c)
7. Calcule o sistema eletromagnético com $\underline{\mathbf{I}} = \underline{\mathbf{I}}^\theta$ (Eq. IV.28b)
8. Calcule $[\underline{\mathbf{C}}]^\theta$, $[\underline{\mathbf{K}}]^\theta$ e $\underline{\mathbf{f}}^\theta$ (Eq. IV.27 c, d, e)
9. Calcule $\underline{\alpha}^i$ (Eq. IV.35e)
10. Calcule $\| \underline{\mathbf{e}}_t \|$ e $\| \underline{\mathbf{e}}_n \|$ (Eq. IV.36 e IV.37)
11. Se $\| \underline{\mathbf{e}}_t \| \geq \epsilon_m$, ou $\| \underline{\mathbf{e}}_n \| \geq \epsilon_m$, então:

$$\Delta t = \Delta t/2$$
Vá para o passo 2
Fim se
12. $\underline{\mathbf{I}}^{i+1} = \underline{\mathbf{I}}^i + \underline{\alpha}^i \Delta t$
 $i = i+1$
 $t = t + \Delta t$
13. Se $\| \underline{\mathbf{e}}_t \| < \epsilon_m/N\epsilon$ e $\| \underline{\mathbf{e}}_n \| < \epsilon_m/N\epsilon$, então:

$$\Delta t = 2*\Delta t$$
Fim se
14. Se $t < t_f$ vá para o passo 2

Fim

Observações:

1. Neste algoritmo, $N\epsilon$ é um número que indica quão pequeno o erro deve ser para que o intervalo de integração possa ser dobrado. Tipicamente, $N\epsilon = 4$.
2. Levando-se em conta que as variações nas grandezas eletromagnéticas não são muito grandes em cada passo de integração, o passo 7 do algoritmo pode ser eliminado, utilizando-se \underline{V}_e^i para calcular \underline{f}^θ .

V.1 Introdução

Neste capítulo são apresentados alguns aspectos relativos à implantação dos programas computacionais utilizados para resolução dos problemas dos Capítulos II, III e IV.

A estrutura simplificada dos programas é apresentada na Seção V.2 e a estrutura de dados utilizados nestes programas é apresentada na Seção V.3. Nesta seção são discutidas, também, as técnicas empregadas para o gerenciamento da utilização da memória do computador.

Na Seção V.4 apresenta-se o método de solução de equações lineares adotado, e na Seção V.5 o método de resolução de problemas não lineares.

V.2 Estrutura dos programas

Os programas para cálculo de campos eletromagnéticos utilizando o método de elementos finitos, são, normalmente, separados em, no mínimo, três módulos distintos (Bastos, 1989):

1. **Pré-processador:** neste módulo, de grande interação com o utilizador, é introduzida a geometria do problema. Descrevem-se as características dos materiais magnéticos, a sua distribuição, especificam-se as condições de contorno, as fontes de corrente, as condições iniciais, etc. Ainda nesta etapa, a malha de elementos finitos é gerada por um programa malhador.
2. **Processador:** neste módulo é efetuado o cálculo utilizando o método de elementos finitos.
3. **Pós-processador:** neste módulo exploram-se os resultados obtidos pelo processador. Os resultados são apresentados de forma gráfica (traçado de equipotenciais, de campos, etc) ou sob a forma numérica (valores de campos, fluxos, forças, indutâncias, etc).

No presente trabalho, existem três módulos processadores distintos: um para o problema magnetostático; outro para o problema de correntes de Foucault e

outro para o problema acoplado termo-eletromagnético. No entanto, tem-se módulos pré-processador e pós-processador únicos e utilizáveis pelos 3 módulos de cálculo.

O módulo pré-processador, por ser o de maior interação com o usuário, tem estrutura na forma de árvore de menus. Desta maneira, a entrada e modificação de dados é extremamente facilitada, podendo ser efetuada em qualquer sentido, não seguindo uma ordem seqüencial pré-estabelecida pelo programa. Para os usuários não treinados, existe uma opção de funcionamento seqüencial, com o programa comandando a entrada de dados.

Este módulo gera a malha de elementos finitos para o programa processador. Esta geração não é totalmente automática, isto é, o utilizador deve fornecer uma série de parâmetros para auxiliar o gerador. O método empregado é apresentado na tese de mestrado de Raizer, (1987).

O módulo pré-processador permite, também, a visualização da estrutura geométrica do problema, através da projeção da figura em um plano bidimensional e do tratamento de linhas escondidas. Se houver algum problema, ele é facilmente detectável por inspeção visual.

O módulo pós-processador também é estruturado na forma de árvore de menus, com seqüência de comandos ditada pelo usuário. Neste módulo, além da função de visualização gráfica de resultados sob a forma de superfícies equipotenciais, tem-se a representação de grandezas vetoriais (campos, induções, densidades de corrente, etc), a representação no tempo de uma grandeza sobre um ponto, a variação de uma grandeza, num determinado instante de tempo sobre uma linha reta, um arco de círculo, etc. De fundamental importância em um programa tridimensional é a possibilidade de mudança do ângulo de observação da estrutura, além do tratamento de linhas escondidas, que é efetuado por um método bastante simples, porém com algumas limitações.

O módulo processador não possui nenhuma interação com o usuário. Ele simplesmente lê a estrutura de dados gerada pelo pré-processador, calcula a matriz do sistema, resolve o sistema de equações e grava os resultados obtidos. Isto é, a sua estrutura é seqüencial e completamente automática.

V.3 Estrutura de dados

A estrutura de dados em um programa de elementos finitos é extremamente importante, pois a eficácia dos algoritmos utilizados está intimamente relacionada com ela.

Nesta seção apresenta-se a estrutura adotada. A seção é dividida em três partes: na primeira, apresentam-se os dados gerados pelo pré-processador que são utilizados pelos módulos seguintes; na segunda, a estrutura de dados do processador e, na terceira, os métodos utilizados para gerenciamento dinâmico da memória do computador.

V.3.1 Estrutura de dados gerada pelo pré-processador

O pré-processador gera uma série de tabelas que descrevem a topologia e geometria do problema a ser resolvido. As principais variáveis escalares são:

- NEL —→ Número de elementos
- NNO —→ Número de nós
- NFACE —→ Número de faces
- NCOND —→ Número de superfícies com condições de contorno impostas
- IREP —→ Números de nós periódicos
- ICOR —→ Número de condutores com corrente imposta (fontes de Hs)

Os principais arranjos são:

- MMAT(NEL) —→ Indica o número do material que preenche cada elemento
- ICONEC(8, NEL) —→ Tabela de conectividade: nós ligados a cada elemento
- ICOFAC(6, NEL) —→ Tabela de conectividade: faces ligadas a cada elemento
- MREP(2, IREP) —→ Indica os pares de nós periódicos
- INTF(NNO) —→ Indica o posicionamento dos nós em relação às divisões em regiões do problema (isto é, se o nó pertence a Ω_f , Ω_k ou Ω_j , ou se está localizado sobre uma interface (Γ_{kf} , Γ_{kj} , Γ_{fj})).
- FACE(NFACE) —→ Indica o posicionamento das faces em relação às divisões em regiões do problema. (Se a face é interna a uma das regiões, ou se está localizada sobre uma interface).
- XCOR(NNO), YCOR(NNO)
- ZCOR(NNO) —→ Coordenadas dos nós do problema

ITIPC(ICOR), CORR(ICOR)

CORJ(ICOR)

—> Indicam, para cada condutor com corrente imposta, a sua topologia (forma geométrica), parâmetros geométricos e densidade de corrente.

ARESTA(6, NNO)

—> Vetor lógico que indica, para cada nó, as arestas que fazem parte da interface Γ_{kj} e da fronteira Γ_{1j} .

DDP(NCOND), NCTIP(NCOND),

NC(NCOND)

—> Vetores utilizados para estipular as condições de contorno.

Outros arranjos são fornecidos por uma base de dados de materiais: permeabilidade magnética (materiais não saturáveis), curva $B \times H$, condutividade elétrica (temperatura fixa), parâmetros para calcular a variação da condutividade elétrica, da permeabilidade magnética, da condutividade térmica e da capacidade térmica em função da temperatura.

V.3.2 Estrutura de dados utilizada pelo processador

Além dos dados gerados pelo pré-processador, o processador gera e utiliza alguns dados adicionais. As principais variáveis escalares são:

NGRL —> Número de graus de liberdade. É igual a soma de todos os graus de liberdade associados a cada nó do problema.

NEQU —> Número de equações. É igual ao número de graus de liberdade menos o número de graus de liberdade impostos no contorno.

NUTIL —> Número de termos não nulos da matriz do sistema.

Os principais arranjos são:

DLNC(NNO+1) —> Tabela que armazena, de forma cumulativa, os graus de liberdade de cada nó. DLNC(I+1) representa a soma do número de graus de liberdade dos nós 1, 2, ..., I-1, I. O número de graus de liberdade do nó I é, conseqüentemente, DLNC(I+1) - DLNC(I).

Se DLNC(1) = 1, o número de graus de liberdade do sistema pode ser calculado por:

$$NGRL = DLNC(NNO+1) - 1$$

Exemplo: Suponha-se uma malha com 4 nós:

Nó 1: 3 graus de liberdade

Nó 2: 1 grau de liberdade

Nó 3: 2 graus de liberdade

Nó 4: 4 graus de liberdade.

O vetor DLNC é:

$$DLNC = [1 \ 4 \ 5 \ 7 \ 11]$$

O número de graus de liberdade é:

$$NGRL = DLNC(4+1) - 1 = 11 - 1 = 10$$

O número de graus de liberdade do nó 3 é:

$$DLNC(3+1) - DLNC(3) = 7 - 5 = 2$$

KNEQ(NGRL) → Número da equação associada a cada grau de liberdade. $J = KNEQ(I)$:

a) $J < 0$ - o grau de liberdade I é conhecido (imposto por condições de contorno) e seu valor é dado por $VDR(NGRL+2-J)$

b) $J > 0$ - o grau de liberdade I é uma incógnita e corresponde à equação J do sistema de equações.

VDR(NGRL+2) → a) VDR(1:NEQU): vetor do 2º membro do sistema de equações;

b) VDR(NEQU+1:NGRL): graus de liberdade impostos, acessados por $J = KNEQ(I)$, quando $J < 0$.

SS(NUTIL) → Matriz gerada pelo método de elementos finitos. Somente os termos não nulos da parcela triangular inferior são armazenados, pois a matriz é simétrica. Dois vetores, PONT(NEQU+1) e INDIC(NUTIL) são utilizados para endereçar os seus elementos.

PONT(NEQU+1) → PONT(I) indica o início da linha I no vetor INDIC. PONT(I+1)-1 indica o último elemento da linha I no vetor INDIC.

INDIC(NUTIL) → Indica o número das colunas não nulas em cada linha da matriz SS.

Exemplo de armazenamento utilizando a estrutura acima:

$$\text{SS} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & & & & & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & & & & & & & & \\ 0 & a_{32} & a_{33} & & & & & & & & & \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} & & & & & & & & \\ 0 & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & & & & & & & \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{NUTIL} = 11 \\ \text{NEQU} = 5 \end{array}$$

SIMÉTRICA

$$\text{SS} = [a_{11} \ a_{21} \ a_{22} \ a_{32} \ a_{33} \ a_{41} \ a_{44} \ a_{52} \ a_{53} \ a_{54} \ a_{55}]$$

$$\text{PONT} = [1 \ 2 \ 4 \ 6 \ 8 \ 12]$$

$$\text{INDIC} = [1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 3 \ 1 \ 4 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5]$$

V.3.3 Gerenciamento dinâmico da memória

Devido ao tamanho variável dos arranjos de dados para cada problema a ser resolvido, pode se tornar extremamente ineficiente fixar o seu dimensionamento no programa fonte. A alocação dinâmica da memória permite o dimensionamento dos arranjos em tempo de execução.

A linguagem FORTRAN, porém, não permite o dimensionamento em tempo de execução. Para contornar este problema, utiliza-se a alocação "pseudo-dinâmica" da memória (Dhatt & Touzot, 1984), apresentada a seguir:

1. Todos os arranjos volumosos, inteiros, reais ou complexos são armazenados seqüencialmente em uma tabela complexa única: VA(NVA).
2. Cada tabela, 'ttttt', é referenciada pela posição Lttttt de seu primeiro elemento em VA. Por exemplo, o primeiro elemento da tabela DLNC se encontra na posição VA(LDLNC) (ver figura V.1).
3. O ponteiro IVA aponta para a última posição ocupada na tabela VA.
4. A criação de uma nova tabela (cálculo do ponteiro Lttttt e modificação do ponteiro IVA) é efetuada por uma subrotina denominada SPACE. Um dos

parâmetros desta subrotina é o tamanho (em bytes) de cada elemento da tabela, (Ex.: tabela real = 4, tabela complexa = 8), e outro é o número de posições da tabela. A supressão de uma tabela (mudança de posição das tabelas que a seguem, modificação dos apontadores destas tabelas e do apontador IVA) é efetuada por uma subrotina denominada VIDE.

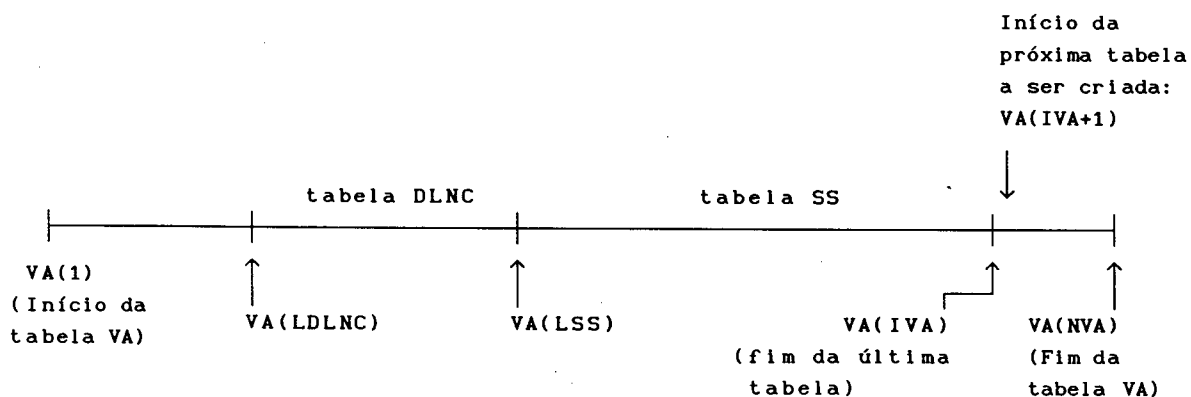


Fig. V.1 - Alocação "pseudo-dinâmica" da memória

5. A passagem de um arranjo para uma subrotina é feita utilizando-se a posição do primeiro elemento do arranjo. Seja por exemplo, a seguinte subrotina:

```
SUBROUTINE TRIFRM(PONT, INDIC, ICONEC, KNEQ, SS, ...)
```

```
INTEGER PONT(1), INDIC(1), ICONEC(8, 1), KNEQ(1)
```

```
COMPLEX SS(1)
```

```
END
```

A chamada desta subrotina é feita por:

```
CALL TRIFRM(VA(LPONT), VA(LINDIC), VA(LICONE), VA(LKNEQ), VA(LSS), ...)
```

Note-se que VA armazena vetores e matrizes inteiras, reais ou complexas indistintamente. Além disto, não importa se VA corresponde a um vetor ou uma matriz. Neste exemplo VA(LICONE) corresponde ao primeiro elemento da

matriz ICONEC. Isto é possível porque, em FORTRAN, as matrizes são armazenadas na memória por coluna. Conseqüentemente, o endereço de ICONEC(I,J) é dado por:

$$\text{LICONE} + 8(\text{J}-1) + \text{I} - 1$$

Portanto, as únicas informações necessárias para se determinar os endereços da posição (I,J) de uma matriz são o endereço de início (isto é, LICONE), que é passado através do CALL, e o número de linhas (no caso 8) que é estipulado pela declaração da variável dentro da subrotina. Isto explica porque não é necessário definir o número de colunas de uma matriz bidimensional dentro de subrotinas (elas podem ser feitas iguais a 1). Para arranjos tridimensionais, as duas primeiras dimensões devem ser fixadas, ao passo que a terceira pode ser igual a 1, etc...

V.4 Resolução do sistema de equações lineares

Para se resolver o sistema de equações

$$A x = b \tag{V.1}$$

quando a matriz A é real, utiliza-se o método dos gradientes conjugados com pré-condicionamento por decomposição incompleta de Cholesky (ICCG - Incomplet Cholesky Conjugated Gradients). Quando a matriz A é complexa, utiliza-se o método dos gradientes bi-conjugados complexos, com pré-condicionamento por decomposição incompleta de Cholesky (ICBCG - Incomplet Cholesky Complex Bi-Conjugated Gradients).

O método dos gradientes conjugados tem sido cada vez mais empregado pelos grupos de pesquisa em cálculo de campos eletromagnéticos (Trowbridge, 1988). Este método foi apresentado por Hestenes e Stieffel (1952). Na teoria, ele é um método direto que resolve (V.1) em, no máximo, N iterações, onde N é a ordem do sistema. Na prática os erros de truncamento computacional destroem esta propriedade, e, de qualquer maneira, N iterações é um número excessivamente alto. Portanto, ele é um método iterativo.

Este método não era muito usado até meados da década de 70, quando o desenvolvimento de estratégias de pré-condicionamentos (Meijerink & Van Vorst, 1977) tornaram possível a modificação do sistema (V.1) para um sistema onde o método de gradientes conjugados funciona melhor. O pré-condicionamento é

efetuado por uma matriz que se aproxima da matriz A^{-1} e assim, a matriz do sistema se aproxima da matriz identidade, para a qual o método de gradientes conjugados converge em uma única iteração.

A forma básica do método ICCG funciona para matrizes reais, simétricas e positivas definidas. Para matrizes não simétricas, Fletcher (1976) desenvolveu o método de gradientes bi-conjugados. O método foi estendido, para sistemas complexos, por Jacobs (1980), gerando o ICCBCG.

A seguir, são apresentados o método ICCG para matrizes reais simétricas positivas definidas, o método de gradientes bi-conjugados para matrizes não simétricas e o método de gradientes bi-conjugados complexos, para matrizes complexas. Esta apresentação é feita de maneira condensada. Para maiores detalhes ver Nabeta (1990), Jacobs (1980), Lascaux & Théodor (1986), Aziz & Jennings (1984) e Angeleri et al (1989).

V.4.1 O método de Gradientes conjugados para matrizes reais, simétricas, positivas definidas

Seja x_1 uma aproximação para a solução do sistema de equações V.1. Define-se o resíduo do sistema para o vetor x_1 por:

$$r_1 = b - A x_1 \quad (V.2)$$

Deseja-se obter um novo valor x_{1+1} para o qual $r_{1+1} = 0$. Para isto, minimiza-se a forma quadrática:

$$h^2 = r^T A^{-1} r \quad (V.3)$$

que é equivalente a:

$$h^2 = x^T A x - 2x^T b + b^T A^{-1} b$$

Para que o mínimo de h^2 ocorra em $r = 0$, é necessário que A^{-1} seja positiva definida, isto é, que A seja positiva definida. Seja p_1 uma direção no espaço \mathbb{R}^n . Então:

$$x_1 + \alpha p_1 \quad (V.4)$$

define uma reta que passa por x_1 e tem a direção p_1 . Procura-se um ponto sobre

esta linha para o qual h^2 atinge um mínimo. Isto ocorre para:

$$\frac{\partial h^2}{\partial \alpha} = 0 \quad (\text{V.5})$$

isto é:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h^2}{\partial \alpha} &= 2r^T A^{-1} \left[\frac{\partial r}{\partial \alpha} \right] \quad \text{onde } r = b - A(x_1 + \alpha p_1) \\ &= -2r^T A^{-1} A p_1 \\ &= 2p_1^T (\alpha A p_1 - r_1) \end{aligned}$$

Portanto, o mínimo ocorre em:

$$\alpha p_1^T A p_1 - p_1^T r_1 = 0$$

isto é:

$$\alpha = \alpha_1 = \frac{p_1^T r_1}{p_1^T A p_1} \quad (\text{V.6})$$

Portanto, o ponto

$$x_{i+1} = x_1 + \alpha_1 p_1 \quad (\text{V.7})$$

com α_1 escolhido por (V.6) minimiza a medida de erro h^2 ao longo da direção p_1 .

Resta o problema de escolher p_1 . No método do gradiente, p_1 é tomado na direção do gradiente da medida de erro h^2 , isto é:

$$p_1 = \nabla (h^2) \Big|_{x=x_1} = 2 r^T \cdot A^{-1} \nabla r \quad (\text{V.8})$$

Logo, p_1 é paralelo a r_1 . Portanto, pode-se adotar:

$$p_1 = r_1 \quad (\text{V.9})$$

No método de gradientes conjugados p_i é feito tão próximo quanto possível da direção do gradiente de h^2 , porém sujeito à restrição adicional de ser A-conjugado (isto é, $p_i^T A p_{i-1} = 0$) a todas as direções de busca precedentes. Daí decorre a propriedade teórica de término do processo de busca em N iterações: procura-se o mínimo de h^2 em um espaço N-dimensional. h^2 é uma função quadrática das coordenadas do espaço e, portanto, se direções mutuamente ortogonais são escolhidas, ao longo das quais h^2 é minimizado, N destas direções (ou destes vetores) formam uma base do espaço (isto é, geram o espaço \mathbb{R}^N) e, portanto, após no máximo N passos, $h^2 = 0$.

Suponha que se calculou x_{i+1} a partir de x_i utilizando a equação (V.7). A direção p_{i+1} é selecionada de modo que:

$$p_{i+1} = r_{i+1} + \beta_i p_i \quad (V.10)$$

onde β_i é escolhido de maneira que p_{i+1} seja A-conjugado a p_i , isto é:

$$p_{i+1}^T A p_i = 0 \quad (V.11)$$

Substituindo-se a expressão (V.10) em (V.11), obtém-se:

$$\beta_i = \frac{-r_{i+1}^T A p_i}{p_i^T A p_i} \quad (V.12)$$

Pode-se mostrar (Nabeta, 1990) que esta escolha de β_i força, não somente a condição (V.11), mas, também:

$$p_i^T A p_j = 0 \quad \forall j \neq i \quad (V.13)$$

A prova de (V.13) exige que A seja simétrica. Se a matriz não for simétrica, os vetores de direção de busca não são necessariamente mutuamente A-conjugados e o método pode não convergir em N iterações.

Pode-se mostrar também (Jacobs, 1980) que:

$$r_i^T p_j = 0 \quad , \text{ para } i > j \quad (V.14)$$

e

$$r_i^T r_j = 0 \quad , \text{ para } i \neq j \quad (V.15)$$

Para se obter o algoritmo final do método de gradientes conjugados, utilizam-se formas alternativas para (V.2), (V.6) e (V.12). Substituindo-se (V.7) em (V.2), tem-se:

$$r_{i+1} = r_i - \alpha_i A p_i \quad (\text{V.16})$$

De (V.6), (V.10) e (V.14) obtém-se:

$$\alpha_i = \frac{(r_i + \beta_{i-1} p_{i-1})^T \cdot r_i}{p_i^T A p_i} = \frac{r_i^T r_i}{p_i^T A p_i} \quad (\text{V.17})$$

De (V.12), (V.16), (V.10), (V.15) e (V.14) obtém-se:

$$\beta_i = \frac{-r_{i+1}^T (r_i - r_{i+1}) / \alpha_i}{(r_i + \beta_{i-1} p_{i-1})^T (r_i - r_{i+1}) / \alpha_i} = \frac{r_{i+1}^T r_{i+1}}{r_i^T r_i} \quad (\text{V.18})$$

O algoritmo do método de gradientes conjugados é, então, obtido:

$$1. \quad (a) \quad r_0 = b - A x_0 \quad (\text{V.19a})$$

$$(b) \quad p_0 = r_0 \quad , \quad i = 0 \quad (\text{V.19b})$$

$$2. \quad \alpha_i = \frac{r_i^T r_i}{p_i^T A p_i} \quad (\text{V.19c})$$

$$3. \quad x_{i+1} = x_i + \alpha_i p_i \quad (\text{V.19d})$$

$$4. \quad r_{i+1} = r_i - \alpha_i A p_i \quad (\text{V.19e})$$

$$5. \quad \text{Se } r_{i+1}^T \cdot r_{i+1} < \varepsilon \quad \text{houve convergência: PARE.}$$

$$6. \quad \beta_i = \frac{r_{i+1}^T r_{i+1}}{r_i^T r_i} \quad (\text{V.19f})$$

$$7. p_{i+1} = r_{i+1} + \beta_i p_i \quad (\text{V.19g})$$

8. $i = i + 1$, vá para o passo 2.

Para cada passo do método o número de operações é o seguinte (c é o número médio de coeficientes não nulos por linha de A):

	Multiplicações ou divisões	Adições ou Subtrações
Cálculo de $q = Ap$	Nc	$N(c-1)$
Produto escalar $p^T q$	N	$N-1$
α	1	-
x	N	N
r	N	N
$r^T \cdot r$	N	$N-1$
β	1	-
p	N	N
Total	$(c + 5)N + 2$	$(c + 4)N - 2$

Portanto o número total de operações é igual a $(2c + 9)N$. Se o número de iterações i se aproxima de N , o número de operações é da ordem de $2cN^2$. Se c for grande, este número se torna muito elevado (se $c = N$, tem-se $2N^3$ operações, ao passo que o método de Cholesky necessita de $N^3/3$ operações! (Lascaux & Théodor, 1986)). Por isto, para que o número de iterações seja pequeno, é necessário efetuar-se o pré-condicionamento de A.

O pré-condicionamento de uma matriz consiste na substituição da equação (V.1) pelo sistema equivalente.

$$C^{-1} A x = C^{-1} b \quad (\text{V.20})$$

com C^{-1} escolhido com o objetivo de melhorar o condicionamento do sistema original. Na teoria, a melhor escolha é $C^{-1} = A^{-1}$, porque assim o condicionamento do sistema é 1. Na prática, acha-se C^{-1} o mais próximo possível de A^{-1} , sem que o cálculo de C^{-1} seja muito custoso. Observe-se, porém, que não se pode aplicar o algoritmo de gradientes conjugados

diretamente sobre o sistema (V.20) pois, mesmo que C^{-1} seja simétrica, $C^{-1}A$ não é necessariamente simétrica. Supondo-se que C^{-1} seja positiva definida, pode-se definir $C^{-1/2}$ simétrica e definida positiva (Lascaux & Théodor, 1986) tal que:

$$(C^{-1/2})^2 = C^{-1}$$

Então:

$$C^{1/2} (C^{-1} A) C^{-1/2} = C^{-1/2} A C^{-1/2}$$

é uma matriz simétrica e positiva definida. Portanto, ao invés de considerar o sistema (V.20), considera-se o sistema:

$$(C^{-1/2} A C^{-1/2})(C^{1/2} x) = (C^{-1/2} b) \quad (V.21)$$

ou

$$\tilde{A} \tilde{x} = \tilde{b} \quad (V.22)$$

o método de gradientes conjugados é, então, aplicado ao sistema (V.22). A equação (V.2) torna-se:

$$\tilde{r}_i = C^{-1/2} b - (C^{-1/2} A C^{-1/2})(C^{1/2} x_i) = C^{-1/2}(b - Ax_i) = C^{-1/2} r_i \quad (V.23)$$

Define-se:

$$\tilde{p}_i = C^{1/2} p_i \quad (V.24)$$

Em paralelo, pode-se escrever as equações para as diversas variáveis utilizadas pelo algoritmo (V.19), levando-se em conta as igualdades anteriores:

$$\tilde{\alpha}_i = \frac{\tilde{r}_i^T \tilde{r}_i}{\tilde{p}_i^T \tilde{A} \tilde{p}_i} \quad \tilde{\alpha}_i = \frac{(r_i^T C^{-1} r_i)}{p_i^T A p_i} \quad (\text{V.25a})$$

$$\tilde{x}_{i+1} = \tilde{x}_i + \tilde{\alpha}_i \tilde{p}_i \quad x_{i+1} = x_i + \tilde{\alpha}_i p_i \quad (\text{V.25b})$$

$$\tilde{r}_{i+1} = \tilde{r}_i - \tilde{\alpha}_i \tilde{A} \tilde{p}_i \quad r_{i+1} = r_i - \tilde{\alpha}_i A p_i \quad (\text{V.25c})$$

$$\tilde{\beta}_i = \frac{\tilde{r}_{i+1}^T \tilde{r}_{i+1}}{\tilde{r}_i^T \tilde{r}_i} \quad \tilde{\beta}_i = \frac{(r_{i+1}^T C^{-1} r_{i+1})}{r_i^T C^{-1} r_i} \quad (\text{V.25d})$$

$$\tilde{p}_{i+1} = \tilde{r}_{i+1} + \tilde{\beta}_i \tilde{p}_i \quad p_{i+1} = C^{-1} r_{i+1} + \tilde{\beta}_i p_i \quad (\text{V.25e})$$

Portanto, o algoritmo (V.19) transforma-se no seguinte algoritmo, quando o pré-condicionamento por C^{-1} é efetuado:

$$1. \quad (a) \quad r_0 = b - A x_0 \quad (\text{V.26a})$$

$$(b) \quad C Z_0 = r_0 \quad (\text{V.26b})$$

$$(c) \quad p_0 = Z_0 \quad , \quad i = 0 \quad (\text{V.26c})$$

$$2. \quad \alpha_i = \frac{r_i^T Z_i}{p_i^T A p_i} \quad (\text{V.26d})$$

$$3. \quad x_{i+1} = x_i + \alpha_i p_i \quad (\text{V.26e})$$

$$4. \quad r_{i+1} = r_i - \alpha_i A p_i \quad (\text{V.26f})$$

5. Se $r_{i+1}^T \cdot r_{i+1} < \epsilon$ houve convergência: PARE.

$$6. \quad (a) \quad C Z_{i+1} = r_{i+1} \quad (\text{V.26g})$$

$$(b) \beta_i = \frac{r_{i+1}^T Z_{i+1}}{r_i^T Z_i} \quad (V.26h)$$

$$7. p_{i+1} = Z_{i+1} + \beta_i p_i \quad (V.26i)$$

8. $i = i + 1$, vá para o passo 2.

Note-se que, a cada iteração, além das operações habituais, é necessário resolver um sistema da forma:

$$CZ = r \quad (V.27)$$

Portanto, é essencial que esta resolução seja a mais simples possível. Quando se utiliza a fatorização incompleta de Cholesky, C é decomposta no produto de uma matriz triangular inferior por sua transposta, isto é:

$$C = T T^T \quad (V.28)$$

Com isto, a resolução do sistema (V.27) é direta.

A fatorização incompleta de Cholesky é semelhante à fatorização completa, exceto pelo fato de que os únicos elementos que serão calculados na matriz T são os que ocupam posições em que existem elementos não nulos na matriz A original, isto é:

$$t_{ij} = 0 \quad \text{se} \quad a_{ij} = 0$$

Supondo-se calculados todos os elementos da matriz T até a linha $i-1$, os elementos da linha i são obtidos por:

$$t_{ij} = \left[a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} t_{ik} t_{jk} \right] / t_{jj}, \quad j \leq i-1 \quad (V.29a)$$

$$t_{ii}^2 = \left[a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ik}^2 \right] \quad (V.29b)$$

Uma modificação do procedimento acima, proposta por Manteuffel (1978) consiste em utilizar um fator de deslocamento α_s para escalonar os elementos

fora da diagonal por $1/(1+\alpha_s)$. A fatorização incompleta padrão é efetuada, então, sobre a matriz modificada. Este procedimento, denominado Fatorização incompleta deslocada ("Shifted Incomplete factorization") mostra-se bastante efetivo, mesmo para pequenos valores de α_s , em problemas que apresentam convergência ruim com a fatorização incompleta padrão (Angeleri et al., 1989).

V.4.2 O método de gradientes bi-conjugados para matrizes reais não-simétricas e indefinidas

Considere a resolução do sistema

$$Ax = b \quad (V.30)$$

onde A agora não é simétrica nem positiva definida.

Define-se o resíduo:

$$r = b - Ax \quad (V.31a)$$

e o bi-resíduo

$$\bar{r} = b - A^T x \quad (V.31b)$$

e se estabelece a forma quadrática

$$h^2 = \bar{r}^T A^{-1} r + r^T (A^T)^{-1} \bar{r} \quad (V.32)$$

Substituindo as expressões (V.31) em (V.32) obtém-se:

$$h^2 = x^T (A + A^T)x - 4b^T x + b^T (A^{-1} + (A^T)^{-1})b \quad (V.33)$$

A matriz $A + A^T$ é simétrica, positiva-definida e, portanto, o método de gradientes conjugados pode ser aplicado a este sistema. No passo i do algoritmo toma-se a direção de busca p_i e a bi-direção \bar{p}_i para os dois resíduos acima e é feita a procura do ponto ao longo destas direções para o qual h^2 é minimizado. Ou seja:

$$x_{i+1} = x_i + \alpha_i p_i \quad (V.34a)$$

$$\bar{x}_{i+1} = \bar{x}_i + \alpha_i \bar{p}_i \quad (\text{V. 34b})$$

Pode ser mostrado, de maneira análoga à utilizada na seção V.4.1, que o mínimo de h^2 com relação a α_i ocorre quando

$$p_i^T \bar{r}_i - \alpha_i p_i^T A^T \bar{p}_i + \bar{p}_i^T r_i - \alpha_i \bar{p}_i^T A p_i = 0$$

Portanto

$$\alpha_i = \frac{1}{2} \frac{p_i^T \bar{r}_i + \bar{p}_i^T r_i}{\bar{p}_i^T A p_i} \quad (\text{V. 35})$$

Adotando a seguinte escolha dos valores iniciais: $p_0 = r_0$ e $\bar{p}_0 = \bar{r}_0$, os termos do numerador são iguais, na iteração $i = 0$. Jacobs (1980) prova que esta igualdade é mantida nas iterações subseqüentes, se a seguinte generalização da expressão (V.18)

$$\beta_i = \frac{\bar{r}_{i+1}^T \cdot r_{i+1}}{\bar{r}_i^T r_i} \quad (\text{V. 36})$$

que força a restrição A-bi-conjugado para os vetores de direção:

$$\bar{p}_i^T A p_j = 0 \quad , \text{ para } i \neq j \quad (\text{V. 37})$$

for verificada. Portanto, a expressão (V.35) torna-se:

$$\alpha_i = \frac{\bar{p}_i^T r_i}{\bar{p}_i^T A p_i}$$

Pode-se mostrar (Jacobs, 1980) que uma expressão equivalente para α_i é:

$$\alpha_i = \frac{\bar{r}_i^T r_i}{\bar{p}_i^T A p_i} \quad (\text{V. 38})$$

Tendo em vista estas expressões, o algoritmo para o método de gradientes bi-conjugados para matrizes reais não simétricas é:

1. (a) $r_0 = b - A x_0$ (V.39a)
- (b) $\bar{r}_0 = r_0$ (V.39b)
- (c) $p_0 = r_0$ (V.39c)
- (d) $\bar{p}_0 = \bar{r}_0$, $i = 0$ (V.39d)

$$2. \alpha_i = \frac{\bar{r}_i^T r_i}{\bar{p}_i^T A p_i} \quad (\text{V.39e})$$

$$3. x_{i+1} = x_i + \alpha_i p_i \quad (\text{V.39f})$$

$$4. (a) r_{i+1} = r_i - \alpha_i A p_i \quad (\text{V.39g})$$

$$(b) \bar{r}_{i+1} = \bar{r}_i - \alpha_i A^T \bar{p}_i \quad (\text{V.39h})$$

5. Se $r_{i+1}^T r_{i+1} < \varepsilon$ houve convergência: PARE.

$$6. \beta_i = \frac{\bar{r}_{i+1}^T r_{i+1}}{\bar{r}_i^T r_i} \quad (\text{V.39i})$$

$$7. (a) p_{i+1} = r_{i+1} + \beta_i p_i \quad (\text{V.39j})$$

$$(b) \bar{p}_{i+1} = \bar{r}_{i+1} + \beta_i \bar{p}_i \quad (\text{V.39k})$$

8. $i = i + 1$, vá para o passo 2.

No caso em que a matriz A é simétrica, o algoritmo (V.39) se reduz ao algoritmo (V.19), isto é, este é um caso especial do algoritmo mais geral (V.39).

O pré-condicionamento do sistema não pode ser feito por uma matriz obtida pela fatorização incompleta de Cholesky, pois esta só é válida para matrizes simétricas. Uma solução é efetuar uma fatorização incompleta de Gauss, ou fatorização LU (Lascaux & Théodor, 1986), isto é:

$$C = L U \quad (V. 40)$$

Neste caso, o algoritmo (V.39) se transforma em:

$$1. \quad (a) \quad r_0 = b - A x_0 \quad (V. 41a)$$

$$(b) \quad \bar{r}_0 = r_0 \quad (V. 41b)$$

$$(c) \quad LU Z_0 = r_0 \quad (V. 41c)$$

$$(d) \quad p_0 = Z_0 \quad (V. 41d)$$

$$(e) \quad (LU)^T \bar{p}_0 = \bar{r}_0, \quad i = 0 \quad (V. 41e)$$

$$2. \quad \alpha_i = \frac{\bar{r}_i^T Z_i}{\bar{p}_i^T A p_i} \quad (V. 41f)$$

$$3. \quad x_{i+1} = x_i + \alpha_i p_i \quad (V. 41g)$$

$$4. \quad (a) \quad r_{i+1} = r_i - \alpha_i A p_i \quad (V. 41h)$$

$$(b) \quad \bar{r}_{i+1} = \bar{r}_i - \alpha_i A^T \bar{p}_i \quad (V. 41i)$$

5. Se $r_{i+1}^T \cdot r_{i+1} < \varepsilon$ houve convergência: PARE

$$6. \quad (a) \quad LU Z_{i+1} = r_{i+1} \quad (V. 41j)$$

$$(b) \quad \beta_i = \frac{\bar{r}_{i+1}^T Z_{i+1}}{\bar{r}_i^T Z_i} \quad (V. 41k)$$

$$7. \quad (a) \quad p_{i+1} = Z_{i+1} + \beta_i p_i \quad (V. 41l)$$

$$(b) \quad (LU)^T \bar{Z}_{i+1} = \bar{r}_{i+1} \quad (V. 41m)$$

$$(c) \quad \bar{p}_{i+1} = \bar{Z}_{i+1} + \beta_i \bar{p}_i \quad (V. 41n)$$

8. $i = i + 1$, vá para o passo 2.

V.4.3 O método de gradientes bi-conjugados complexos para sistemas de equações complexas

Na resolução do regime permanente senoidal dos problemas de cálculo de correntes de Foucault é necessário determinar a solução de sistemas de equações com coeficientes complexos do tipo:

$$A x = b \quad (V.42)$$

Jacobs (1980) generalizou o método de gradientes bi-conjugados para estes sistemas. O algoritmo resultante, já levando em conta o pré-condicionamento, é:

1. (a) $r_0 = b - A x_0$ (V.43a)
 (b) $\bar{r}_0 = (r_0)^*$ (V.43b)
 (c) $C Z_0 = r_0$ (V.43c)
 (d) $p_0 = Z_0$ (V.43d)
 (e) $C^H \bar{Z}_0 = \bar{r}_0$ (V.43e)
 (f) $\bar{p}_0 = \bar{Z}_0$ (V.43f), $i = 0$

2. $\alpha_1 = \frac{(\bar{r}_1, Z_1)}{(\bar{p}_1, A p_1)}$ (V.43g)

3. $x_{i+1} = x_i + \alpha_i p_i$ (V.43h)

4. (a) $r_{i+1} = r_i - \alpha_i A p_i$ (V.43i)
 (b) $\bar{r}_{i+1} = \bar{r}_i - (\alpha_i)^* A^H \bar{p}_i$ (V.43j)

5. Se $\|r_{i+1}\| < \varepsilon$, houve convergência: PARE.

6. (a) $C Z_{i+1} = r_{i+1}$ (V.43k)

$$(b) \beta_i = \frac{(\bar{r}_{i+1}, Z_{i+1})}{(\bar{r}_i, Z_i)} \quad (V.431)$$

$$7. (a) p_{i+1} = Z_{i+1} + \beta_i p_i \quad (V.43m)$$

$$(b) C^H \bar{Z}_{i+1} = r_{i+1} \quad (V.43n)$$

$$(c) \bar{p}_{i+1} = \bar{Z}_{i+1} + (\beta_i)^* \bar{p}_i \quad (V.43o)$$

8. $i = i + 1$, vá para o passo 2.

Note que * denota o conjugado complexo, C^H denota a transposição de um vetor ou uma matriz com seus elementos sendo trocados pelos complexos conjugados. Os produtos internos indicados são complexos, isto é:

$$(x, y) = x^H y = (x^*)^T y \quad (V.44)$$

A matriz C, no caso de sistemas complexos simétricos, é obtida pela fatorização incompleta de Cholesky da matriz A:

$$C = TT^T$$

onde T é uma matriz triangular inferior. No caso de sistemas complexos não simétricos, C é obtida pela fatorização incompleta de Gauss:

$$C = L U$$

Vários grupos utilizam o método de Gradientes Bi-conjugados complexos na resolução de sistemas complexos simétricos (Lavers & Kalaichelvan, 1985; Armstrong & Biddlecombe, 1982; Biddlecombe et al., 1982). Se a matriz A for Hermitiana ($A = A^H$) este método se reduz ao método de gradientes conjugados com coeficientes complexos (Jacobs, 1980).

Em um artigo recente, Van der Vorst & Melissen (1990) apresentaram um método para matrizes complexas simétricas não Hermitianas, por eles denominado método dos gradientes ortogonalmente conjugados (COCG: Conjugate Orthogonal Conjugate Gradients), que é semelhante ao método de gradientes conjugados (Algoritmo V.26) com a substituição dos produtos internos $x^T y$ por formas

bilineares complexas:

$$[x, y] = (x)^T y = (x^*, y) \quad (\text{V. 45})$$

Segundo os autores, este método apresenta taxa de convergência semelhante à do método de gradientes bi-conjugados com, aproximadamente, metade das operações por iteração. O método vinha sendo utilizado com sucesso por alguns grupos de pesquisa em cálculo de campos eletromagnéticos, mas, antes do trabalho de Van der Vorst & Mellissen (1990), não existia o ferramental teórico para validá-lo.

V.5 Problemas não lineares: o método de Newton-Raphson

V.5.1 O método de Newton-Raphson

O método de gradientes conjugados, apresentado na seção anterior, é aplicável a sistemas de equações lineares. Em problemas não lineares, ele deve ser associado ao método de Newton-Raphson, que é um método iterativo de resolução de sistemas de equações não lineares.

Seja o sistema de equações:

$$A x = b \quad (\text{V. 46})$$

onde A e b dependem do valor de x . Define-se o resíduo:

$$r = A x - b \quad (\text{V. 47})$$

Supõe-se conhecida uma estimativa para x , x^1 . Com este valor, pode-se calcular $A^1 = A(x^1)$ e $b^1 = b(x^1)$. Com isto, o resíduo $r^1 = r(x^1)$ é dado por:

$$r^1 = A^1 x^1 - b^1 \quad (\text{V. 48})$$

Deseja-se calcular uma aproximação x^{1+1} da solução, tal que:

$$r^{1+1} = r(x^{1+1}) = r(x^1 + \Delta x) \approx 0 \quad (\text{V. 49})$$

O algoritmo do método de Newton-Raphson é obtido desenvolvendo este resíduo em série de Taylor em torno do ponto x^1 :

$$r^{i+1} = r(x^i) + \left[\frac{\partial r}{\partial x} \right]^i \cdot \Delta x + \text{termos de ordem superior a 1} = 0 \quad (\text{V.50})$$

Desprezando-se os termos de ordem superior a 1 na equação (V.50) obtém-se:

$$\left[\frac{\partial r}{\partial x} \right]^i \Delta x = - r^i \quad (\text{V.51})$$

Define-se a matriz Jacobiana:

$$J = \left[\frac{\partial r}{\partial x} \right]^i = A^i + \left[\frac{\partial A}{\partial x} \right]^i x^i - \left[\frac{\partial b}{\partial x} \right]^i \quad (\text{V.52})$$

Com isto, o sistema (V.51) torna-se:

$$J \Delta x = - r(x^i) \quad (\text{V.53})$$

Resolvendo-se este sistema de equações (usando, por exemplo, o método de gradientes conjugados com pré-condicionamento), determina-se Δx . O valor de x^{i+1} pode, então, ser calculado:

$$x^{i+1} = x^i + \Delta x \quad (\text{V.54})$$

Se não houver convergência, este vetor é usado para calcular os novos valores de J e r (equação (V.53)) e novos valores de Δx . O processo continua, até que a convergência seja alcançada.

V.5.2 Aplicação ao problema magnetostático com dois potenciais escalares

No problema magnetostático com dois potenciais escalares (seção II.5), o sistema de equações a ser resolvido é:

$$K U = f \quad (\text{V.55})$$

onde o termo geral da matriz K é dado por (equação (II.112)):

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \mu \operatorname{grad} N_i \operatorname{grad} N_j \, d\Omega \quad (\text{V. 56})$$

e o termo geral do vetor do segundo termo é:

$$f_i = \sum_{I \in \Gamma_{kj}} \left[\int_{\Omega_j} \mu_0 \operatorname{grad} N_i \operatorname{grad} N_1 \, d\Omega \, G1 \right] + \int_{\Omega_k} \operatorname{grad} N_i \cdot \operatorname{Br} \, d\Omega \\ + \int_{\Gamma_{kj} \cup \Gamma_{2j}} \mu_0 (\mathbf{H}_s \cdot \mathbf{n}_j) N_i \, d\Gamma \quad (\text{V. 57})$$

Supondo-se que a indução remanente não varie com o valor do campo nos ímãs, o termo f_i é independente dos potenciais. Portanto, o termo geral da matriz Jacobiana é dado por:

$$J_{ij} = K_{ij} + \sum_m \frac{\partial K_{im}}{\partial U_j} U_m \quad (\text{V. 58})$$

Porém, o único termo de K_{im} que depende dos potenciais é a permeabilidade magnética (quando se está na região Ω_k , pois na região Ω_j , $\mu = \mu_0$ constante). Portanto:

$$\frac{\partial K_{im}}{\partial U_j} = \int_{\Omega_k} \operatorname{grad} N_i \operatorname{grad} N_m \frac{\partial \mu}{\partial U_j} \, d\Omega \quad (\text{V. 59})$$

Mas,

$$\frac{\partial \mu}{\partial U_j} = \frac{\partial \mu}{\partial \|\mathbf{H}\|^2} \cdot \frac{\partial \|\mathbf{H}\|^2}{\partial U_j} \quad (\text{V. 60})$$

e

$$\|\mathbf{H}\|^2 = \left(\sum_K \operatorname{grad} N_K U_K \right) \cdot \left(\sum_{K=1} \operatorname{grad} N_K U_K \right) \quad (\text{V. 61})$$

Portanto:

$$\frac{\partial \|\mathbf{H}\|^2}{\partial U_j} = 2 \operatorname{grad} N_j \cdot \left(\sum_K \operatorname{grad} N_K U_K \right) \quad (\text{V. 62})$$

Substituindo (V.62) em (V.60) e o resultado em (V.59) e (V.58), obtém-se:

$$J_{ij} = K_{ij} + \sum_m \int_{\Omega_k} \text{grad } N_i \cdot (\text{grad } N_m U_m) \frac{\partial \mu}{\partial \|H\|^2} \cdot 2 \left[\sum_K \text{grad } N_K U_K \right] \cdot \text{grad } N_j \, d\Omega \quad (\text{V.63})$$

Levando-se em conta a definição do campo H dentro da região Ω_k , obtém-se:

$$J_{ij} = K_{ij} + \int_{\Omega_k} 2 (\text{grad } N_i \cdot H) \frac{\partial \mu}{\partial \|H\|^2} (\text{grad } N_j \cdot H) \, d\Omega \quad (\text{V.64})$$

$\frac{\partial \mu}{\partial \|H\|^2}$ pode ser obtido facilmente da curva B-H do problema.

A expressão (V.64) é válida para elementos situados dentro da região Ω_k . Para estes elementos, J_{ij} deve ser recalculado a cada iteração. Para elementos situados na região Ω_j , $\mu = \mu_0$, constante, e J_{ij} é dado por:

$$J_{ij} = K_{ij} = \int_{\Omega_j} \mu_0 \text{grad } N_i \text{grad } N_j \, d\Omega \quad (\text{V.65})$$

Esta contribuição pode ser calculada somente na primeira iteração do método de Newton-Raphson, mantendo-se constante nas demais iterações.

V.5.3 Aplicação ao problema de correntes de Foucault utilizando o método A-V- ψ - ϕ

Suponha-se o regime permanente senoidal. A equação a ser resolvida é a (III.82), isto é:

$$\begin{bmatrix} \underline{K}_{AA} + j\omega C_{AA} & j\omega C_{AV} & \underline{K}_{A\psi\phi} \\ [j\omega C_{AV}]^T & j\omega C_{VV} & 0 \\ [K_{A\psi\phi}]^T & 0 & \underline{K}_{\psi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A} \\ \underline{V}^* \\ \{\underline{\psi}, \underline{\phi}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{f}_A \\ 0 \\ \underline{f}_{\psi\phi} \end{bmatrix} \quad (\text{V.66})$$

Neste sistema de equações, vários termos não dependem das incógnitas. Usando as definições das submatrizes (equações (III.81) e sabendo-se que σ não varia com a intensidade dos campos, conclui-se que \underline{C}_{AA} , \underline{C}_{AV} , $\underline{K}_{A\psi\phi}$, \underline{C}_{VV} , \underline{f}_A e $\underline{f}_{\psi\phi}$ são independentes de \underline{A} , \underline{V}^* ou $\{\underline{\psi}, \underline{\phi}\}$. Portanto, a matriz Jacobiana deste

sistema é dada por:

$$J = \begin{bmatrix} \underline{K}_{-AA} + j\omega C_{-AA} & j\omega C_{-Av} & \underline{K}_{-A\psi\phi} \\ [j\omega C_{-Av}]^T & j\omega C_{-Vv} & 0 \\ [K_{-A\psi\phi}]^T & 0 & \underline{K}_{-\psi\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [\partial \underline{K}_{-AA} / \partial \underline{A}] \underline{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [\partial \underline{K}_{-\psi\phi} / \partial \{\underline{\psi}, \underline{\phi}\}] \end{bmatrix} \{\underline{\psi}, \underline{\phi}\} \quad (V.67)$$

A matriz $\underline{K}_{-\psi\phi}$ é dada pela mesma expressão da matriz K do problema magnetostático. Portanto, a sua contribuição para a matriz Jacobiana é calculada pela expressão (V.64). A única contribuição adicional é o termo:

$$\frac{\partial \underline{K}_{-AA}}{\partial \underline{A}} \cdot \underline{A}$$

que é calculado a seguir. \underline{K}_{-AA} é dado pela expressão (III.81e):

$$\underline{K}_{-AA}^{ij} = \int_{\Omega_f \cup \Omega_b} \nu \left[[\text{rot } \underline{N}_i]^T \cdot [\text{rot } \underline{N}_j] + [\text{div } \underline{N}_i][\text{div } \underline{N}_j] \right] d\Omega \quad (V.68)$$

Portanto, o único termo que depende do potencial A é a relutividade ν . (Quando se está em Ω_f , pois em Ω_b $\nu = 1/\mu_0 = \text{constante}$). Portanto:

$$\underline{J}_{-AA}^{ij} = \underline{K}_{-AA}^{ij} + j\omega C_{-AA} + \sum_m \frac{\partial \underline{K}_{-AA}^{im}}{\partial \underline{A}_j} \cdot \underline{A}_m \quad (V.69)$$

Mas:

$$\frac{\partial \underline{K}_{-AA}^{im}}{\partial \underline{A}_j} = \int_{\Omega_f} \frac{\partial \nu}{\partial \underline{A}_j} \left[[\text{rot } \underline{N}_i]^T \cdot [\text{rot } \underline{N}_m] + [\text{div } \underline{N}_i]^T [\text{div } \underline{N}_m] \right] d\Omega \quad (V.70)$$

Mas:

$$\frac{\partial \nu}{\partial \underline{A}_j} = \frac{\partial \nu}{\partial \|\underline{B}\|^2} \cdot \frac{\partial \|\underline{B}\|^2}{\partial \underline{A}_j} \quad (V.71)$$

Mas:

$$\|B\|^2 = \left[\sum_K [\text{rot } \mathbf{N}_K] \mathbf{A}_K \right]^H \cdot \left[\sum_K [\text{rot } \mathbf{N}_K] \mathbf{A}_K \right] \quad (\text{V.72})$$

onde H indica a transposição conjugada. Portanto:

$$\frac{\partial \|B\|^2}{\partial \mathbf{A}_j} = 2 [\text{rot } \mathbf{N}_j] \cdot \left[\sum_K [\text{rot } \mathbf{N}_K] \mathbf{A}_K^* \right] \quad (\text{V.73})$$

Substituindo-se (V.73) em (V.71) e o resultado em (V.70) e (V.69) obtém-se:

$$J_{-AA}^{ij} = K_{-AA}^{ij} + j\omega C_{-AA} + \int_{\Omega_f} 2 \frac{\partial v}{\partial \|B\|^2} \left[[\text{rot } \mathbf{N}_i]^T \cdot \mathbf{B} + [\text{div } \mathbf{N}_i][\text{div } \mathbf{A}] \right] \cdot \left[\mathbf{B}^* [\text{rot } \mathbf{N}_j] \right] d\Omega \quad (\text{V.74})$$

onde:

$$\mathbf{B} = \sum_m [\text{rot } \mathbf{N}_m] \mathbf{A}_m$$

$$[\text{div } \mathbf{A}] = \sum_m [\text{div } \mathbf{N}_m] \mathbf{A}_m$$

Observações:

1. Como B e H não são mais grandezas instantâneas, passando a ser tratados em cada ponto do espaço, por fasores, um valor de permeabilidade, μ_{eq} , deve ser utilizado, de modo a representar, de maneira "equivalente", toda a parcela da curva de magnetização percorrida durante um ciclo pelas grandezas senoidais. Do ponto de vista de cálculo dos valores instantâneos de B ou H, esta aproximação leva a erros grosseiros (Jack & Mecrow, 1990). Isto porque, na presença de materiais saturáveis, a excitação do sistema a uma determinada frequência leva ao aparecimento de outras frequências na resposta. A consideração de uma permeabilidade equivalente não inclui estes efeitos no modelo e a resposta contém

apenas componentes fundamentais. Do ponto de vista das perdas causadas pela circulação de correntes de Foucault, porém, esta aproximação traz bons resultados, (Jack & Mecrow, 1990). Segundo Jack & Mecrow (1990) isto é devido ao fato da excitação do problema ser feita em uma frequência única e que, portanto, somente o 1^o harmônico da resposta produz potência ativa ao longo de um ciclo da excitação.

Diferentes formas de se calcular μ_{eq} foram propostas na literatura (Du Terrail et al, 1984; Lavers, 1983; Minnich et al., 1984; Jack & Mecrow, 1990).

Lavers (1983) e Minnich et al. (1984) definiram μ_{eq} como a razão entre os valores rms de **B** e **H**;

$$\mu_{eq} = \frac{(B)_{rms}}{(H)_{rms}} \quad (V.75)$$

Du Terrail et al. (1984) definiram μ_{eq} como o valor rms de μ sobre um período de excitação, T:

$$\mu_{eq} = \left[\frac{2}{T} \int_0^{T/2} \mu^2(t) dT \right]^{1/2} \quad (V.76)$$

Jack & Mecrow (1990) definiram μ_{eq} como a razão entre os componentes fundamentais de **B** e **H**:

$$\mu_{eq} = \frac{(B)_f}{(H)_f} \quad (V.77)$$

Segundo Jack & Mecrow (1990) estas últimas aproximações levam aos mesmos resultados desde que se considere que a excitação (não necessariamente a resposta) é senoidal. Isto porque somente harmônicos de mesma frequência produzirão um valor médio diferente de zero sobre um ciclo da senoide de entrada.

2. A resolução do sistema de equações lineares gerado a cada passo do método de Newton-Raphson é feita utilizando-se o método de gradientes conjugados com pré-condicionamento. Suponha-se que o método de Newton-Raphson atinja a precisão desejada após N iterações. As N-1 iterações anteriores são somente passos intermediários para se alcançar

a solução final. Portanto, não é necessário estipular-se uma precisão muito elevada para o término do método de Gradientes Conjugados durante estes passos. Com isto, o tempo de computação é diminuído.

Além disto, a matriz Jacobiano sofre grandes variações nos primeiros passos do método de Newton-Raphson. Após alguns passos ela não muda muito. Portanto, o cálculo da fatorização incompleta de Cholesky, pode ser feita somente nos m primeiros passos do método de Newton-Raphson e, nos passos seguintes, utiliza-se a mesma matriz de pré-condicionamento calculada no passo m .

Esta estratégia para acelerar o método foi proposta por Henneberger et al (1990). Segundo os autores, mesmo com m igual a 2, são obtidos resultados excelentes.

CAPÍTULO VI - RESULTADOS OBTIDOS

VI.1. Introdução

Neste capítulo apresentam-se os resultados obtidos com os três programas processadores, isto é, o magnetostático, o de correntes de Foucault e o de aquecimento indutivo. Os programas foram implantados em um microcomputador compatível com o IBM-PC-AT.

Para os problemas escolhidos existem soluções analíticas ou resultados experimentais. Com isto, se consegue validar os métodos empregados. Somente no caso de aquecimento indutivo esta estratégia não foi obedecida, por não haver resultados disponíveis. A comparação, neste caso, é efetuada com os resultados de um problema axi-simétrico obtidos por um programa bidimensional (Bleuvin, 1984).

VI.2. Problemas magnetostáticosVI.2.1. Blindagem magnética: casca esférica em um campo magnético uniforme

Este exemplo possui solução analítica (Jackson, 1983) e é um bom teste para se checar o programa magnetostático em domínios onde não existem correntes elétricas. O problema consta de uma casca esférica de raio interno igual a "a" e externo igual a "b", feita de material com permeabilidade relativa μ , e localizada em um campo magnético uniforme H_0 , posicionado segundo a direção z, conforme a figura VI.1.

Deseja-se calcular o campo na região próxima à esfera. A solução analítica para este problema é dada, em coordenadas esféricas, por (Jackson, 1983):

$$H = \begin{cases} -\delta \cos \theta \underline{r} + \delta \sin \theta \underline{\theta} & , r < a \\ (-\beta + 2\gamma / r^3) \cos \theta \underline{r} + (\beta + \gamma / r^3) \sin \theta \underline{\theta} & , a < r < b \\ (H_0 + 2\alpha / r^3) \cos \theta \underline{r} + (-H_0 + \alpha / r^3) \sin \theta \underline{\theta} & , r > b \end{cases} \quad (\text{VI.1})$$

onde:

$$\delta = - \left[\frac{9 \mu}{(2\mu+1)(\mu+2) - 2a^3(\mu-1)^2 / b^3} \right]$$

$$\beta = \frac{(2\mu+1)\delta}{3\mu} \quad \gamma = \frac{a^3(\mu-1)\delta}{3\mu}$$

$$\alpha = \frac{-(2\mu+1)(\mu-1)(b^3-a^3)\delta}{9\mu}$$

e \underline{r} e $\underline{\theta}$ são os vetores unitários nas direções r e θ .

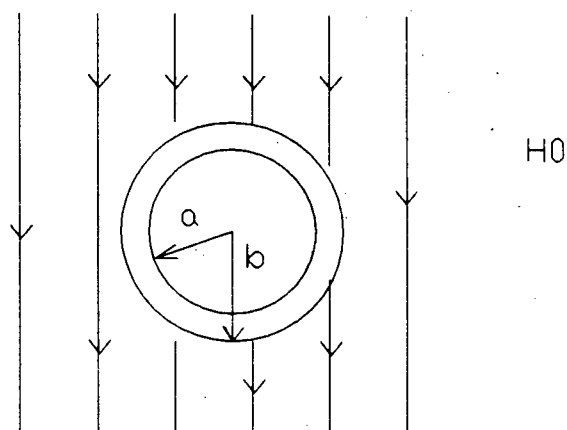


Fig. VI.1. Casca esférica em um campo uniforme

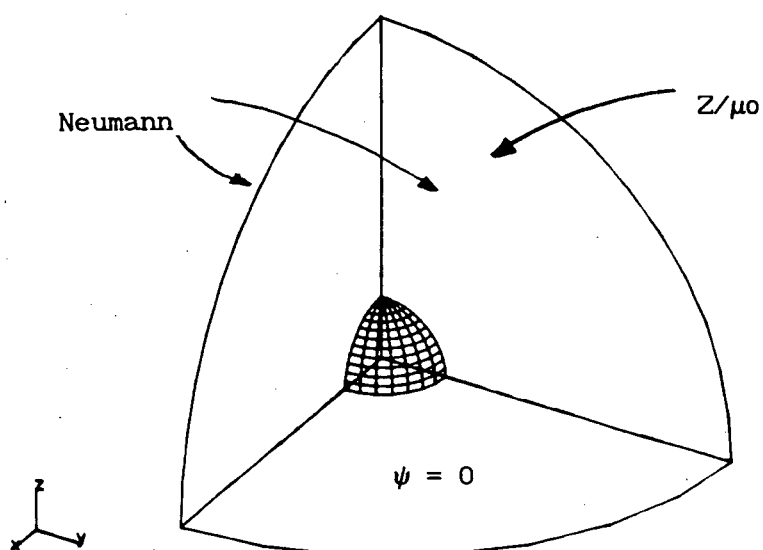


Fig. VI.2. Esfera vazada em um campo uniforme: Geometria e condições de contorno.

Devido ao fato da esfera possuir 3 planos de simetria, ela pode ser representada por apenas 1 octante (Fig. VI.2). Escolhe-se $\mu = 1000$, $a = 0.05$ m, $b = 0.055$ m. A fronteira esférica externa é localizada a 3 diâmetros de distância, em um raio de 0.3 m. O campo H_0 é igual a $1/\mu_0$, o que gera uma indução, B_0 , igual a 1 T. As condições de contorno são escolhidas de maneira a que se tenha esta indução segundo a direção z . Uma escolha coerente consiste em aplicar um potencial de magnitude z/μ_0 nos nós externos, onde z é a coordenada z do nó. No plano de simetria $z = 0$, o potencial é nulo. Nas demais fronteiras, tem-se condição de contorno de Neumann (Fig. VI.2).

O módulo do campo é constante dentro da esfera, servindo como teste para a precisão do programa. Na Fig. VI.3 tem-se o erro percentual sobre este valor para várias malhas de elementos finitos diferentes. Na figura VI.4., o mesmo gráfico é apresentado em escala logarítmica, o que fornece uma idéia da taxa de convergência do programa. Pode-se notar neste gráfico que, para atingir precisão da ordem de 1% ($\log(0.01)=-2$), seriam necessárias, aproximadamente, 5600 equações ($\approx 10^{3.75}$).

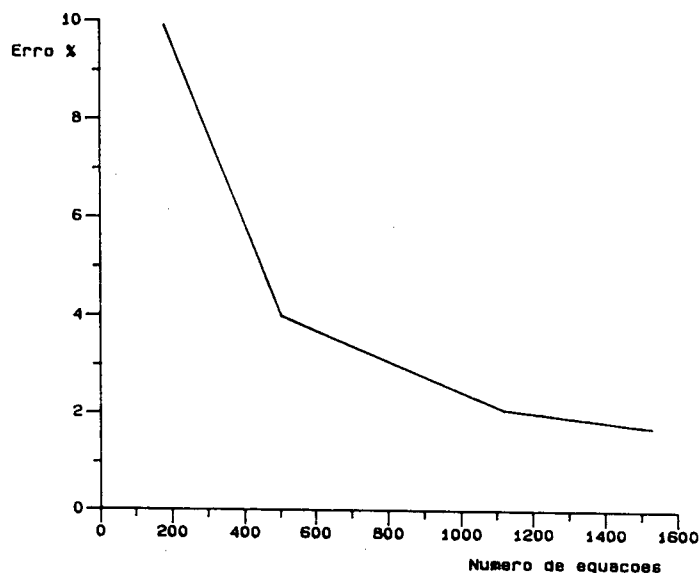


Fig. VI.3. Erro percentual para o campo no interior da esfera em função do número de equações.

O erro entre os resultados analíticos e numéricos deve ser resultante do erro de aproximação do método de elementos finitos e do fato da geometria não estar representada de maneira totalmente correta (a esfera é aproximada por

superfícies planas e a fronteira externa não está no infinito, mas somente a 3 diâmetros do centro da esfera). Este erro, porém, é extremamente pequeno e tende a diminuir à medida em que a malha é refinada.

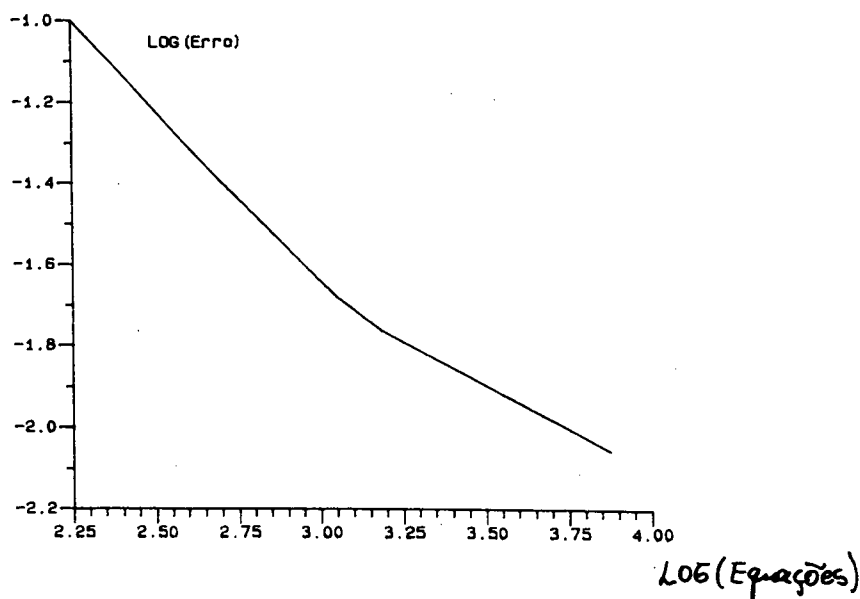


Fig. VI.4. Erro em escala logarítmica

VI.2.2. O problema do IEEJ

Este problema foi proposto por um comitê do Instituto de Engenheiros Eletricistas do Japão (IEEJ) para testar e comparar programas de cálculo magnetostático tridimensional (Nakata et al., 1989).

A figura VI.5. mostra o modelo proposto. Um núcleo retangular aberto é envolvido por um enrolamento com 457 espiras no qual circula uma corrente contínua de valor igual a 6.56 A (Número de Ampère-espiras = 3000).

Uma caixa de blindagem, de espessura igual a 1.6 mm fecha o núcleo. As permeabilidades relativas do núcleo e da blindagem são assumidas iguais a 1000, e problema é linear devido ao grande entreferro presente.

A fig. VI.6. mostra os pontos nos quais os valores calculados e medidos são comparados. A medição da densidade de fluxo é feita por uma sonda de efeito Hall e, como a área da sonda não é suficientemente pequena, a densidade de fluxo não pode ser medida com precisão em regiões onde a amplitude e a direção do vetor indução variam abruptamente. Portanto, os pontos onde existe menor variação das induções são escolhidos para comparação.

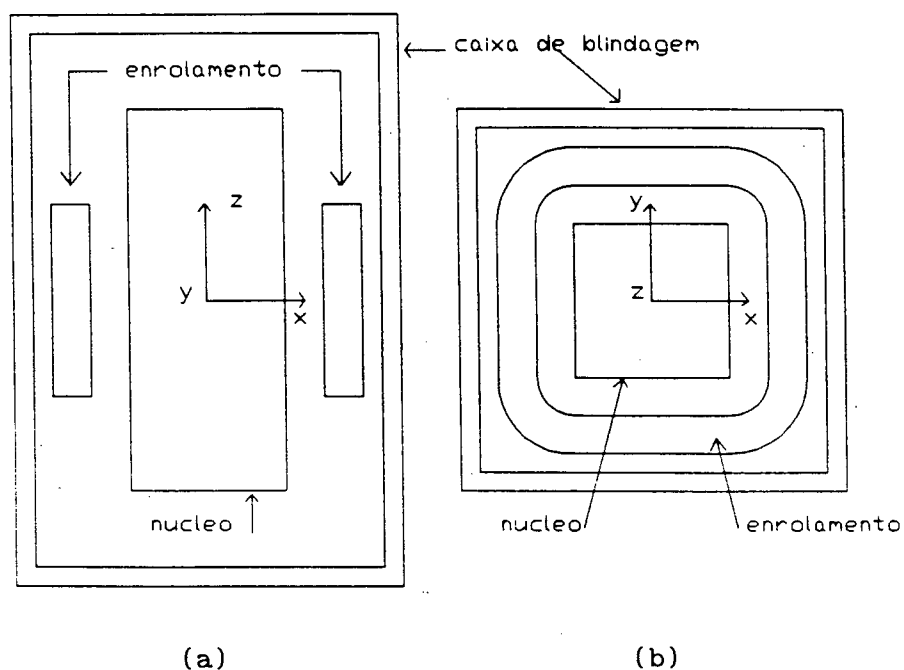


Fig. VI.5. O problema do IEEJ. (a) Vista lateral. (b) Vista superior.

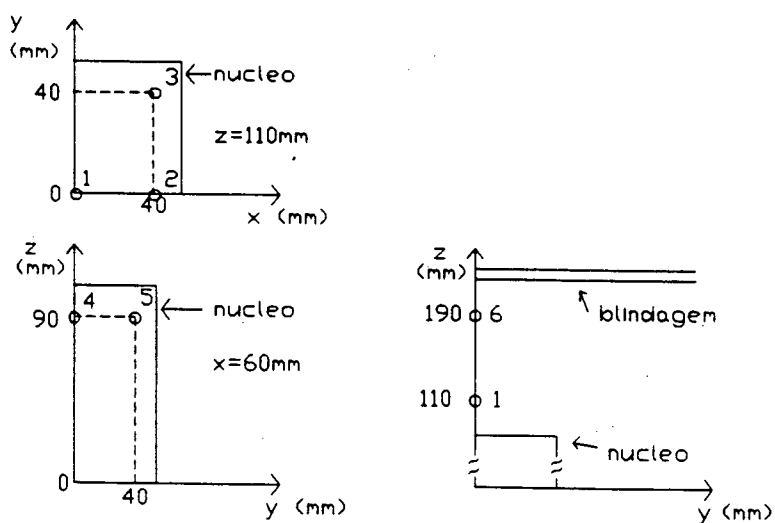


Fig. VI.6. Pontos de comparação entre os valores medidos e calculados.

As medições foram efetuadas na Universidade de Okayama e nas empresas Fuji, Meidensha e Yaskawa, todas no Japão.

Devido à simetria do problema, apenas $1/8$ dele é analisado, conforme a Fig. VI.7. Pode-se fixar condições de contorno de Dirichlet no plano $z=0$, porque o campo magnético é perpendicular a ele. As outras fronteiras têm condição de contorno de Neumann homogêneas.

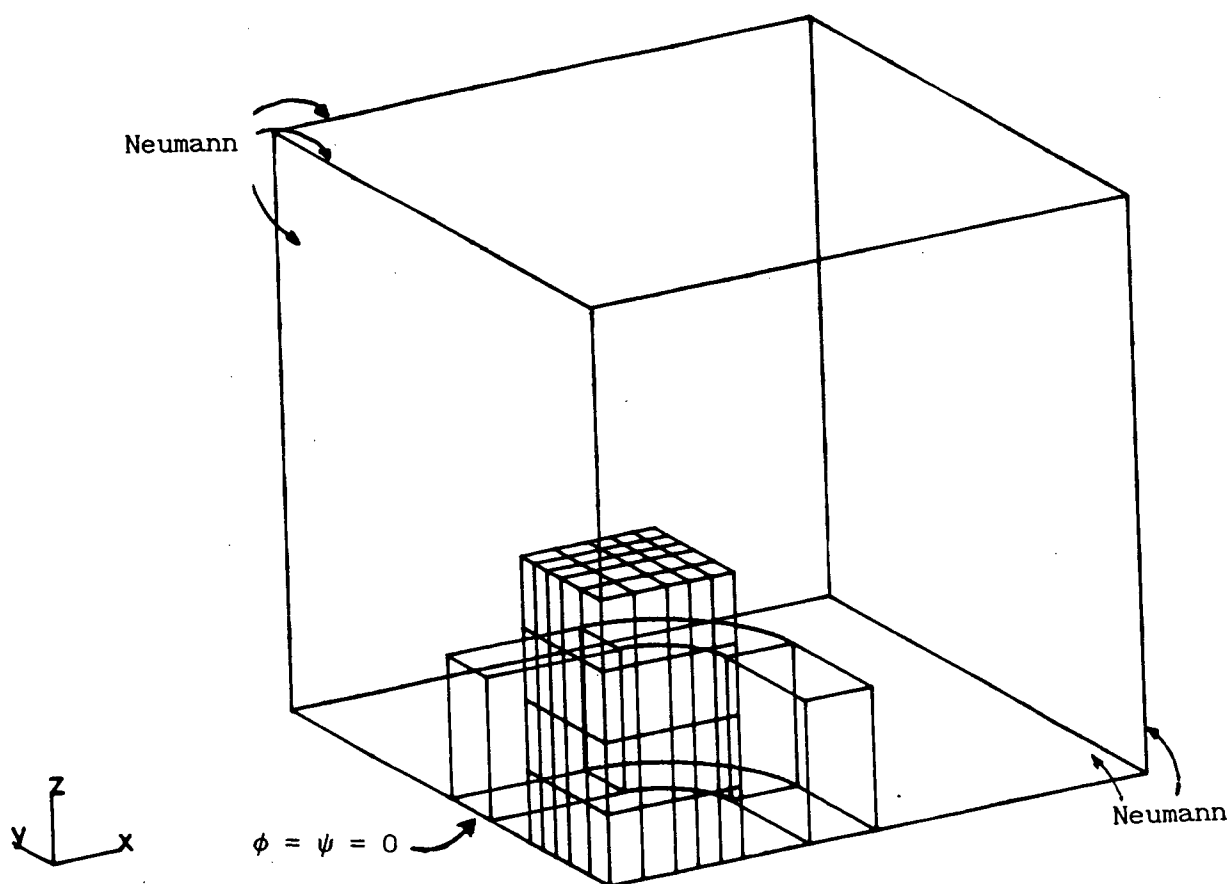


Fig. VI.7. Região analisada e condições de contorno

A malha de elementos finitos utilizada é representada esquematicamente na Fig. VI.8. Nesta figura aparece somente a discretização dos materiais magnéticos. O problema tem um total de 1440 elementos e 1859 nós. O número de equações é igual a 1690.

Na figura VI.9. apresenta-se a distribuição da indução magnética sobre os materiais magnéticos.

Na tabela VI.1 apresentam-se os valores calculados e os experimentais nos pontos indicados na Fig. VI.6.

Para os pontos de 1 a 4, os erros estão em um limite de 4%. O ponto 5 apresenta um erro intermediário e o ponto 6 apresenta um erro muito elevado. Os pequenos erros entre os resultados calculados e os medidos podem ser resultantes de ter-se desprezado a não linearidade do núcleo e da blindagem e pelo fato da área ativa da sonda de efeito Hall não ser suficientemente pequena para efetuar medidas precisas nas regiões onde a variação do campo

magnético é grande. O erro muito grande na proximidade da blindagem (ponto 6) pode ser devido à existência de um orifício em seu ponto central superior, necessário para a introdução da sonda no interior da caixa magnética (Nakata et al., 1989).

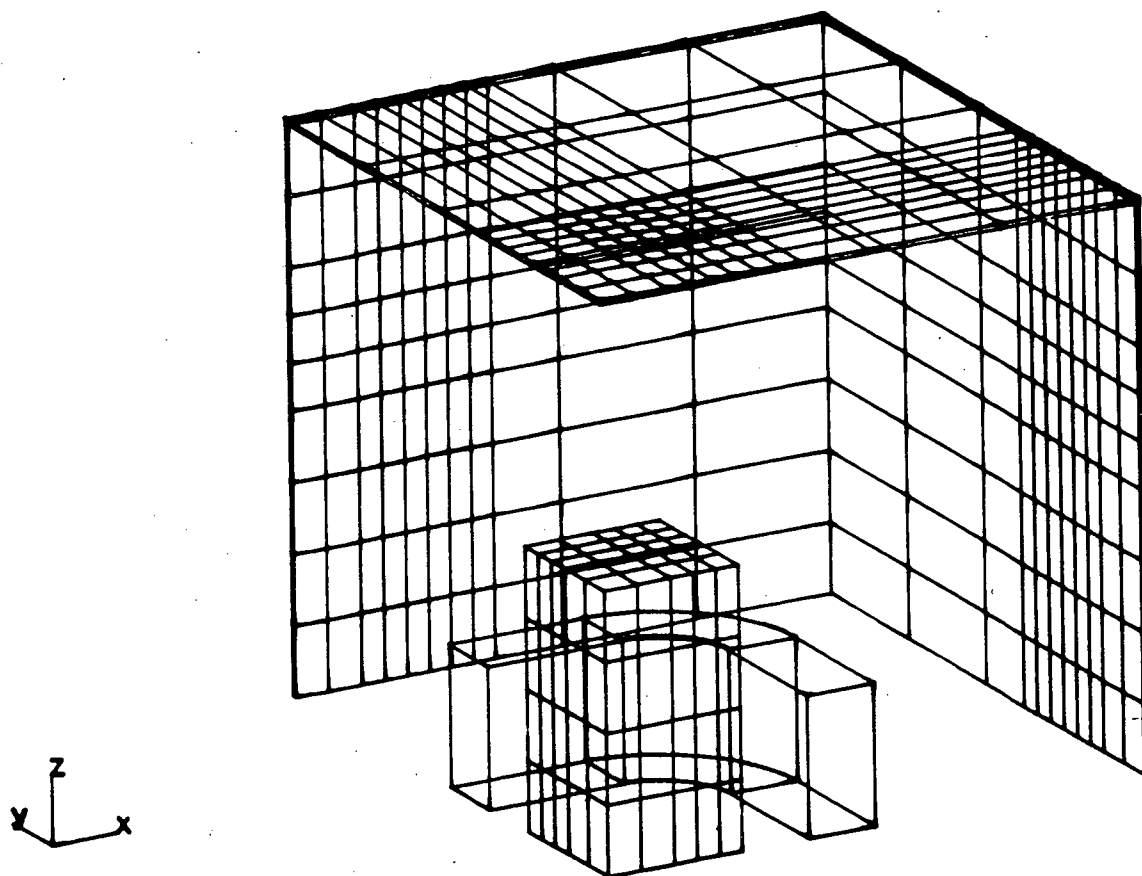


Fig. VI.8. Malha do problema.

Tabela VI.1. Comparação entre os valores calculados e experimentais

Ponto	Coordenadas (mm)			B ($\times 10^{-2}$) T		Erro
	x	y	z	Calcul.	Experim.	
1	0	0	110	2.3595	2.400	-1,69 %
2	40	0	110	2.9391	2.981	-1.41 %
3	40	40	110	3.5274	3.550	-0.64 %
4	60	0	90	2.6793	2.773	-3.38 %
5	60	40	90	3.1058	3.405	-8.79 %
6	0	0	190	1.2707	1.090	+16.58%

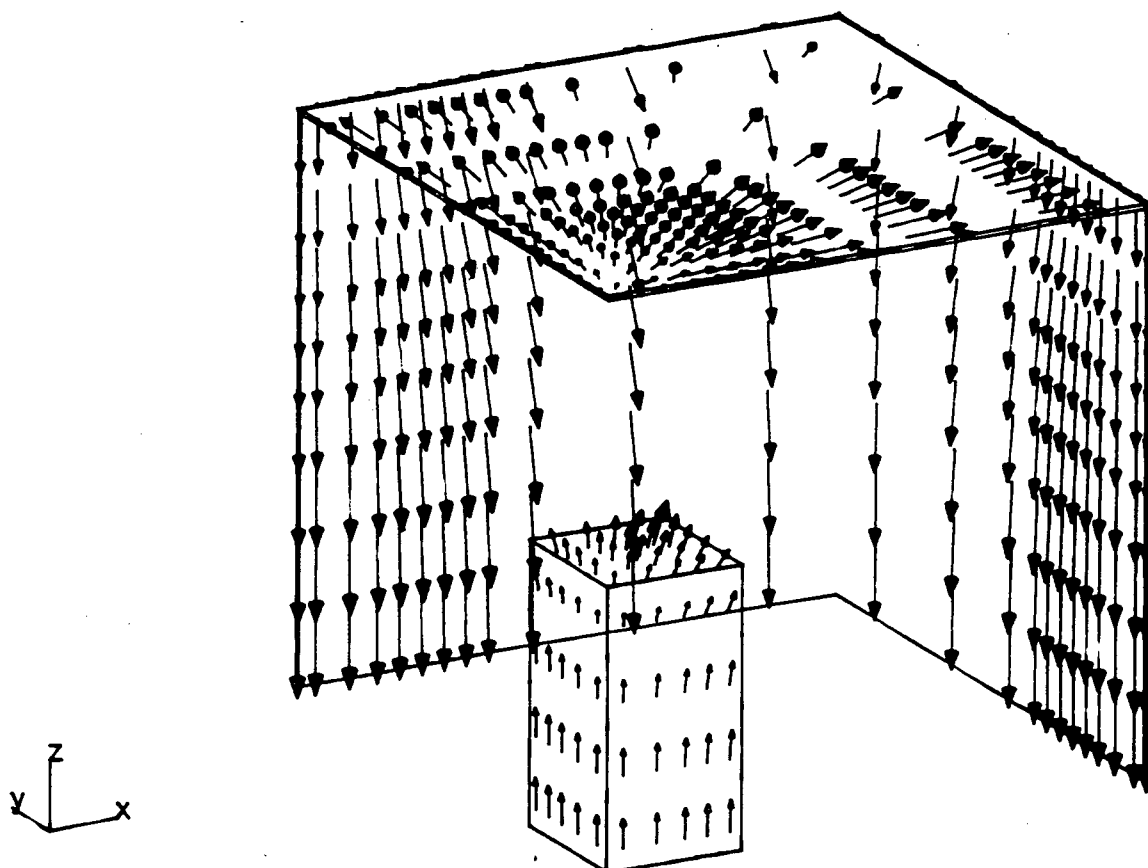


Fig. VI.9. Distribuição da indução magnética sobre os materiais magnéticos.

VI.2.3. Um problema magnetostático não linear

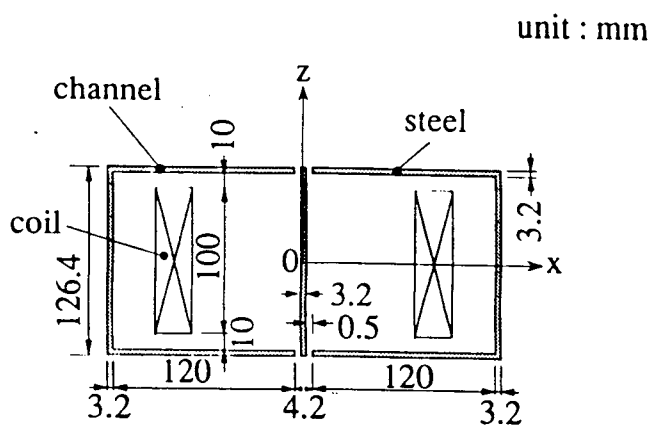
Este problema foi adotado como um dos problemas-teste para comparação de programas de cálculo de campos eletromagnéticos tridimensionais (Turner, 1990).

Ele consta de um enrolamento que atravessa dois núcleos de aço abertos e deslocados em relação ao centro da bobina (Fig. VI.10). Entre os núcleos existe uma placa, também de aço, através da qual o fluxo dos núcleos se fecha. A curva B-H do aço utilizado está representada na fig. VI.11.

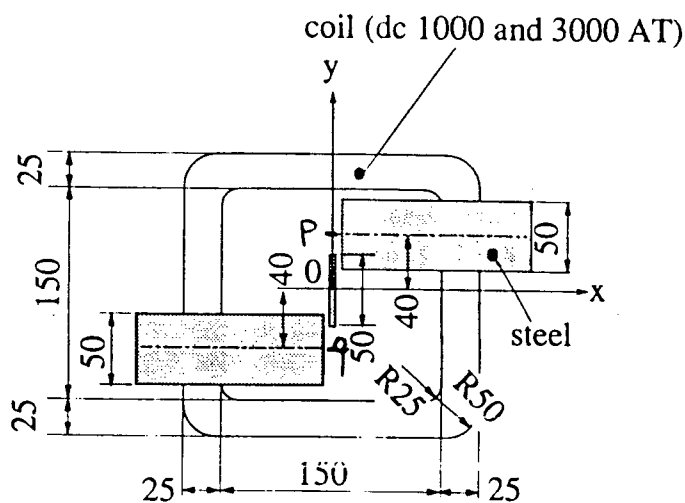
Somente 1/4 da geometria precisa ser considerada, se a sua simetria em relação ao plano $z = 0$ e a condição de periodicidade entre os planos o-p e o-q, isto é:

$$\phi_p = \phi_q \quad (\text{VI.2})$$

são consideradas.



(a) front view



(b) plan view

Fig. VI.10 Problema magnetostático não linear: (a) Vista de frente; (b) Vista superior (Turner, 1990).

A figura VI.12 (a) mostra a distribuição da indução magnética segundo um plano na direção x-y, com $z = 63.2$ mm. Na figura VI.12 (b) é mostrada uma vista 3-D desta distribuição.

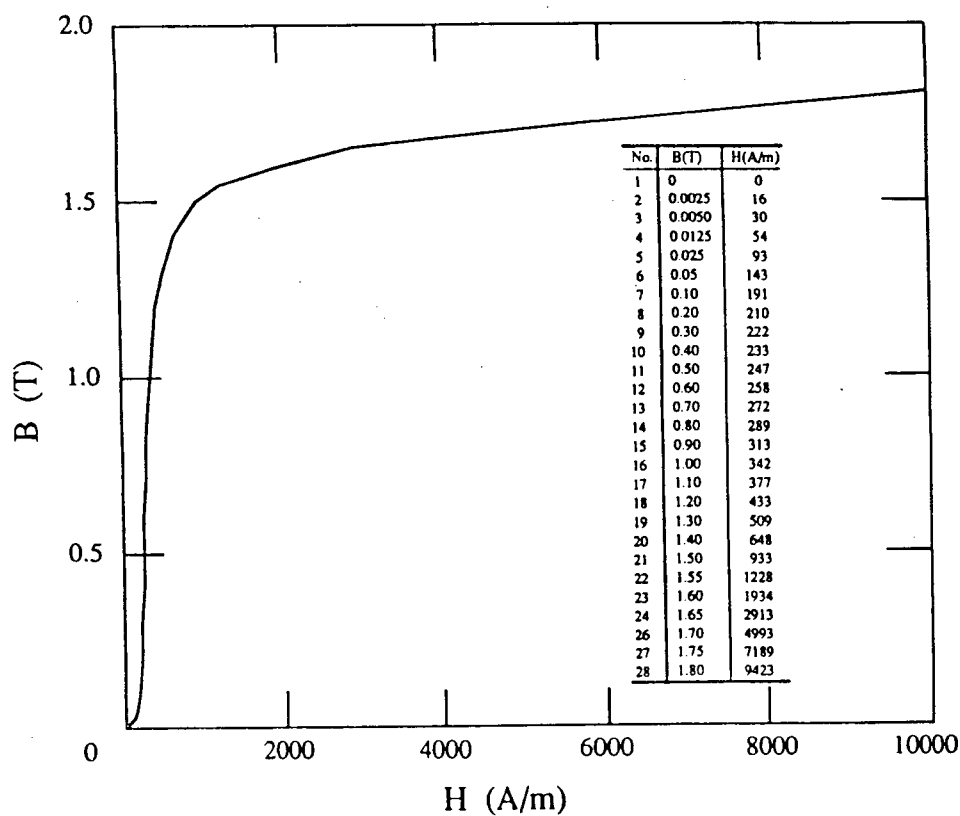


Fig. VI.11. Curva B-H do aço (Turner, 1990)

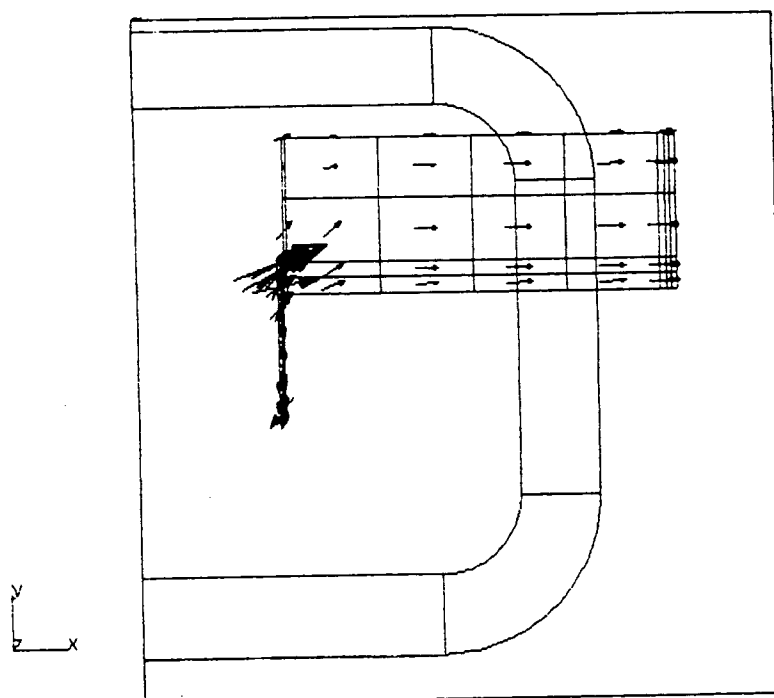
Nakata et al. (1990(c)) efetuaram medições do fluxo magnético nas seções Sa, Sb e Sc do núcleo e da placa central (Fig. VI.13) com a f.m.m. de excitação igual a 1000 e 3000 A-espiras.

Na fig. VI.14 os valores médios da densidade de fluxo nestas seções são comparados com os valores obtidos através do cálculo 3D.

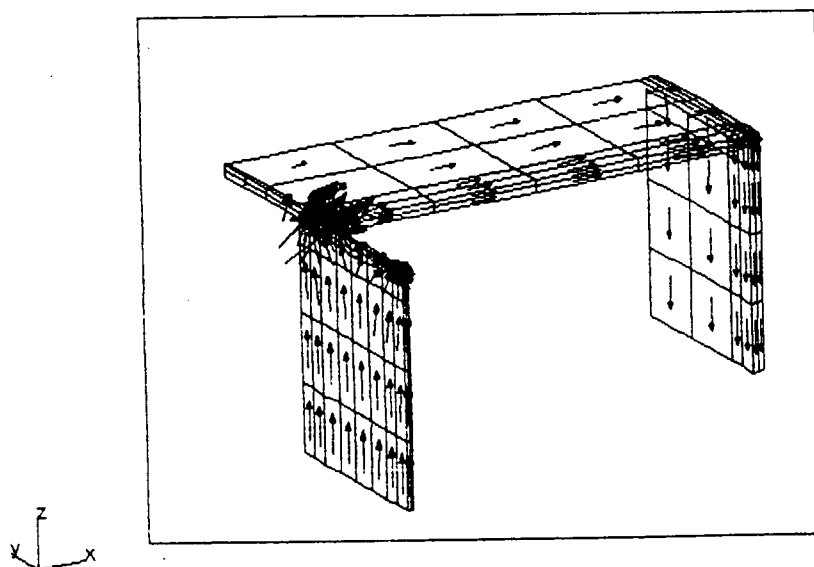
A aproximação entre os valores calculados e os medidos é melhor para excitação igual a 3000 A-espiras do que para 1000 A-espiras. O erro existente na excitação mais baixa deve ser devido a erros intrínsecos ao experimento (determinação da curva B-H, medição de B) e à variação de B dentro de cada seção. É importante ressaltar que os resultados obtidos são compatíveis com os calculados numericamente por outros grupos (Nakata et al., 1990(c)).

Este problema, por envolver um número de variáveis elevado e ser não linear demanda tempos de processamento elevados. A malha de elementos finitos adotada possui 1560 nós. Destes, 56 são periódicos e 195 estão sobre o plano $z = 0$, onde se impõe o valor do potencial, o que reduz o número de equações a 1316. A

matriz gerada possui 15554 coeficientes não nulos (parcela triangular inferior: matriz simétrica).



(a)



(b)

Fig. VI.12. Distribuição das densidades de fluxo com excitação igual a 3000
A-e: (a) Vista superior (b) Vista 3-D.

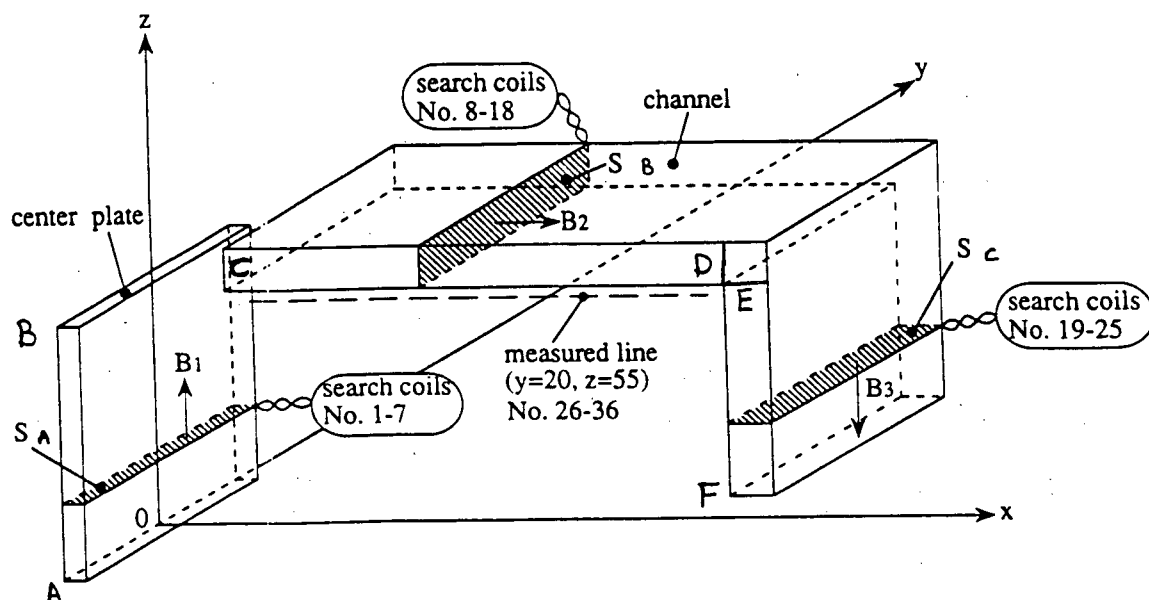


Fig. VI.13. Pontos de medição do fluxo magnético (Turner, 1990).

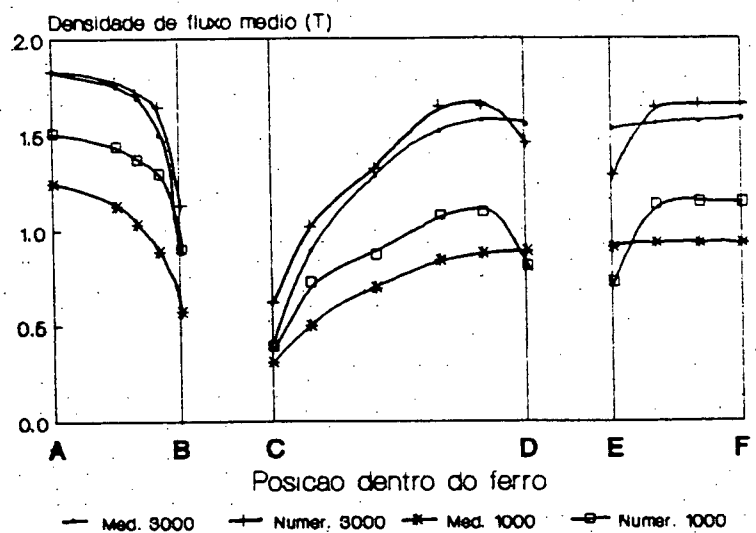


Fig. VI.14. Comparação entre valores medidos e calculados para excitações iguais a 1000 A-e e 3000 A-espiras.

O sistema não linear convergiu após 14 iterações, sendo 3 efetuadas pelo método de aproximações sucessivas e 11 pelo método de Newton-Raphson. O tempo total de processamento em um microcomputador IBM-PC-AT foi igual a 2 h e 17 minutos.

VI.3. Problemas de correntes induzidas

Existem vários problemas-teste definidos pela comunidade de cálculo de campos eletromagnéticos (Turner et al., 1988; Turner, 1988; Turner, 1990) com o objetivo de comparar programas de cálculo e seus resultados. A cada ano, são promovidos vários "Workshops" internacionais com esta finalidade. Estes Workshops foram denominados de TEAM-Workshops (TEAM = Testing Electromagnetic Analysis Methods). Os problemas incluem cálculos transitórios, o regime permanente senoidal, materiais magnéticos e não magnéticos, etc. Para todos eles existem soluções analíticas ou resultados experimentais. Os problemas apresentados nesta seção fazem parte dos TEAM-Workshops.

VI.3.1. Esfera em campo uniforme

Este problema é semelhante ao apresentado na seção VI.2.1 e também possui solução analítica (Emson, 1988). A geometria é a mesma, porém a casca esférica é condutora (condutividade igual a 5×10^8 S/m e permeabilidade relativa igual a 1). O campo magnético, apesar de uniforme, tem variação senoidal no tempo, a uma frequência de 50 Hz, e amplitude de pico de 1 T.

Devido à existência de simetria, apenas 1 octante da esfera precisa ser calculado. O raio interno é igual a 0.05 m e o externo, 0.055 m. A fronteira esférica externa é localizada a 3 diâmetros, em um raio igual a 0.3 m. As condições de contorno sobre o potencial escalar são escolhidas de maneira a conduzir ao campo de 1 T segundo a direção z. Na fronteira externa adota-se $\psi = z/\mu_0$, onde z é a coordenada z do nó. No plano $z=0$, $\psi = 0$. Nos planos $y = 0$ e $x = 0$, $\partial\psi/\partial n = 0$.

As condições de contorno sobre o potencial vetor \mathbf{A}^* são:

1. plano $z = 0$, $A_z^* = 0$;
2. plano $x = 0$, $A_y^* = 0$ e $A_z^* = 0$;
3. plano $y = 0$, $A_x^* = 0$ e $A_z^* = 0$.

Estas condições estão representadas na figura VI.15.

Na Fig. VI.16. apresenta-se a variação de B_z (resultados numéricos e analíticos), ao longo da linha radial correspondente ao eixo x. A linha se estende da origem até um raio de 0.1 m (duas vezes o raio da esfera). Mais uma

vez, verifica-se uma ótima aproximação entre os resultados numéricos e analíticos.

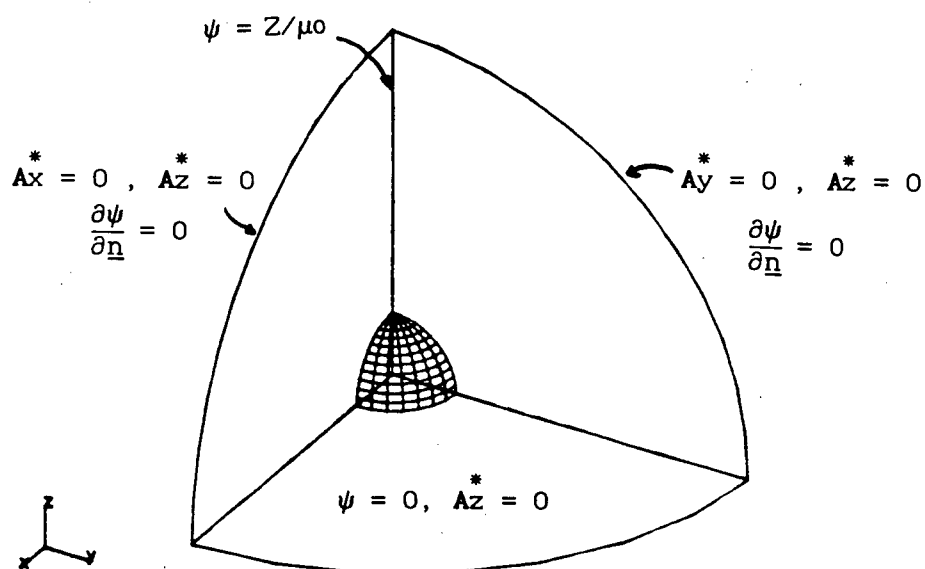


Fig. VI.15. Condições de contorno para o problema da esfera em campo uniforme.

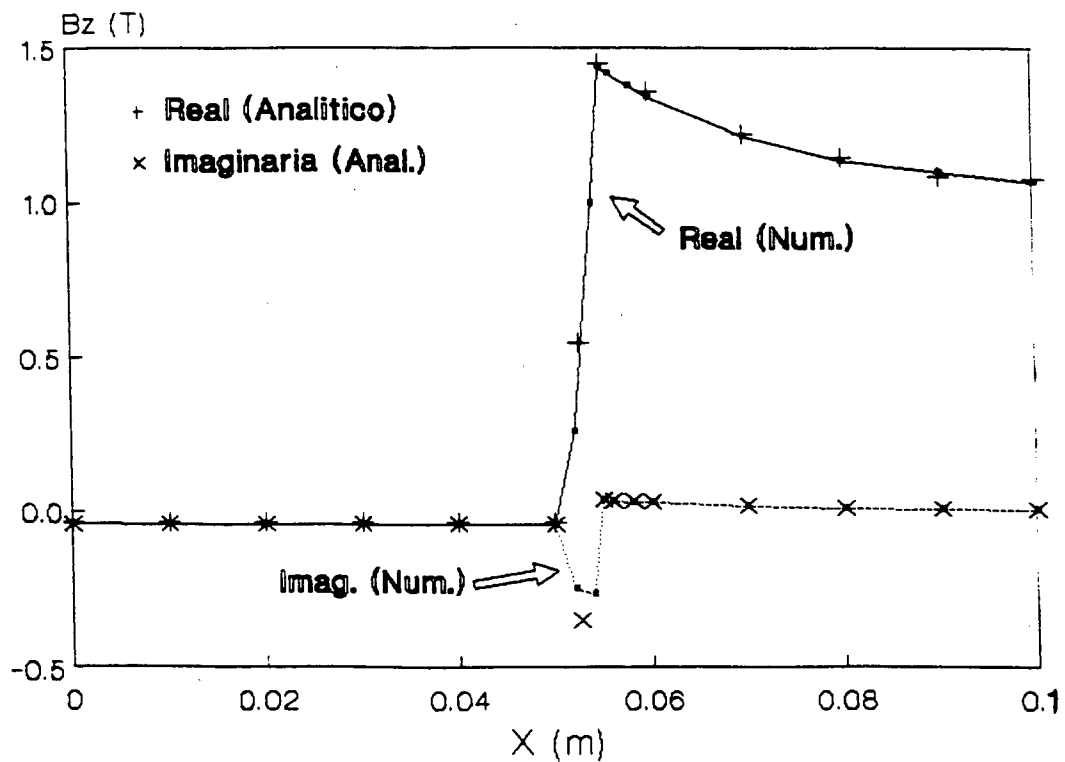


Fig. VI.16. Componentes real e imaginário de B_z em função de x (em $z=0$ e $y=0$).

VI.3.2. O "Bath-cube"

O "Bath-cube" é um experimento desenvolvido na Universidade de Bath (Inglaterra) com a finalidade de comparar os resultados de programas de cálculo de correntes de Foucault 3D com resultados experimentais (Davidson & Balchin, 1981).

Ele consta de uma cavidade localizada entre os pólos de um eletroímã (Fig. VI.17). O pólo inferior é vazado, e é denominado de "caixa". O pólo superior (daqui para frente denominado de pólo) quase fecha completamente a caixa. No espaço em forma de paralelepípedo assim delimitado são distribuídos, simetricamente, quatro blocos de alumínio (daqui para frente chamados de cubos). Uma força magnetomotriz senoidal, de amplitude de pico igual a 1000 A-e e frequência de 50 Hz é aplicada entre o pólo e a caixa.

Entre os blocos de alumínio e a caixa é deixado um entreferro de 4mm, espaço suficiente para a passagem de uma sonda de efeito Hall, que pode ser movida paralelamente à direção y, ao longo da linha $z = 2$ mm, $x = 70$ mm. A sonda mede a amplitude de B segundo a direção z e a sua fase com relação à força magnetomotriz de excitação.

Devido à simetria do problema, pode-se calcular apenas 1/4 dele, no caso o quadrante $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Como o pólo e a caixa são feitos de aço laminado, assume-se que sua permeabilidade magnética é infinita, isto é, que o campo H é normal às suas superfícies. Levando-se em conta a força magnetomotriz aplicada, estipula-se:

$$\psi = 1000 \quad , \text{ sobre o pólo}$$

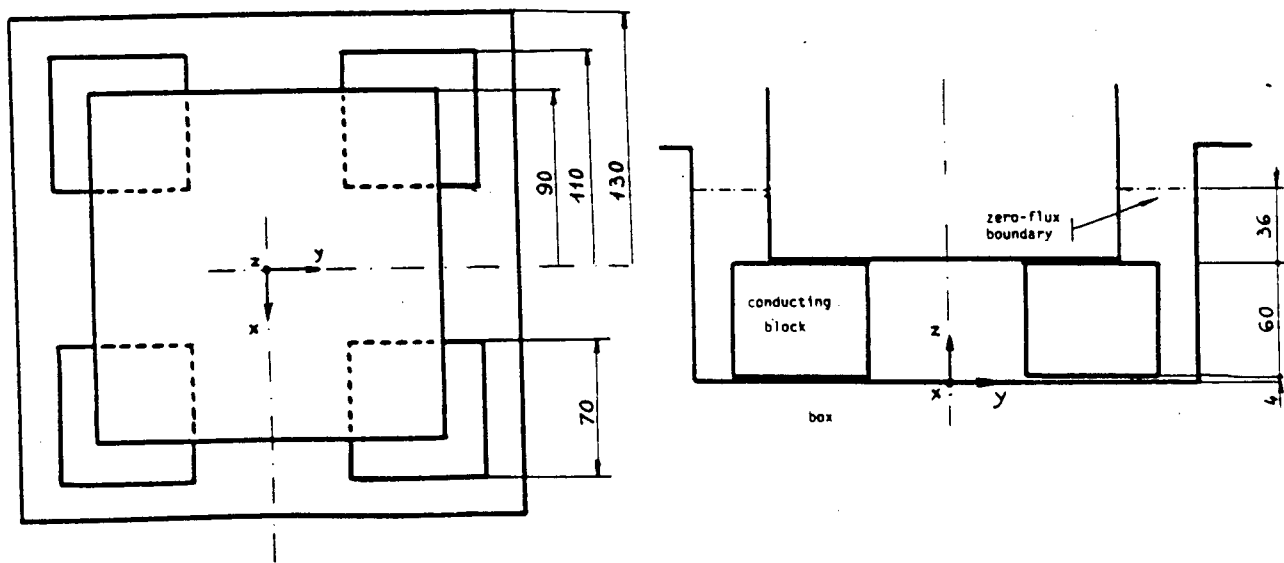
$$\psi = 0 \quad , \text{ sobre a caixa.}$$

No restante do contorno, tem-se o campo H tangente à fronteira, e a condição de contorno de Neumann:

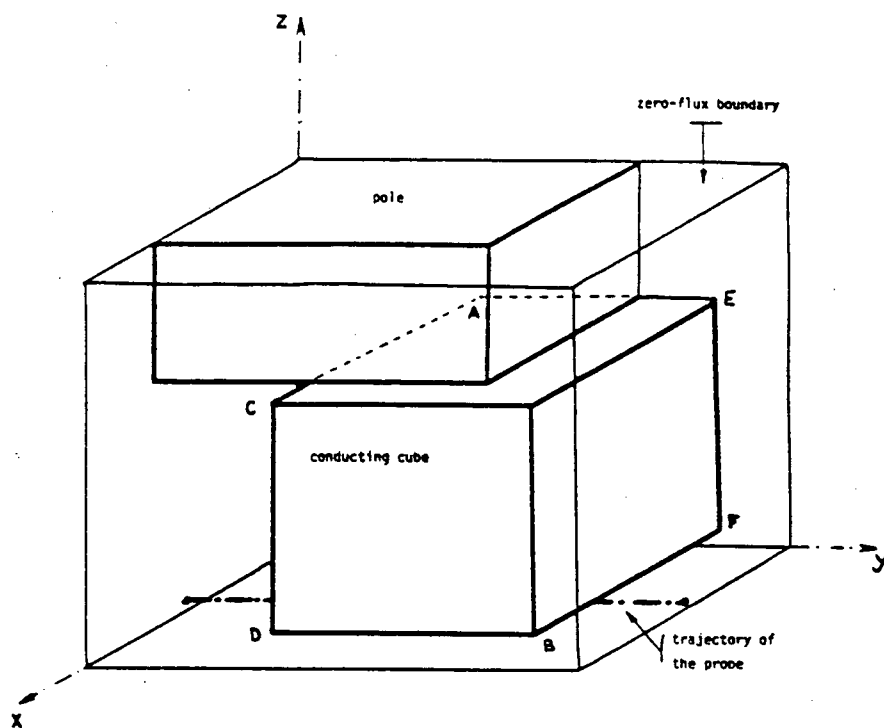
$$\mu_0 \frac{\partial \psi}{\partial \underline{n}} = 0 \quad (\text{VI.3})$$

Em $z = 96$ mm, utiliza-se, também, esta condição (Bossavit, 1988(d)). Neste caso, a equação (VI.3) é apenas uma aproximação da situação real.

Na Fig. VI.18 apresentam-se os valores do módulo e fase de B_z ao longo da linha $x = 70$ mm, $z = 2$ mm (Mesquita & Bastos, 1990(a)).

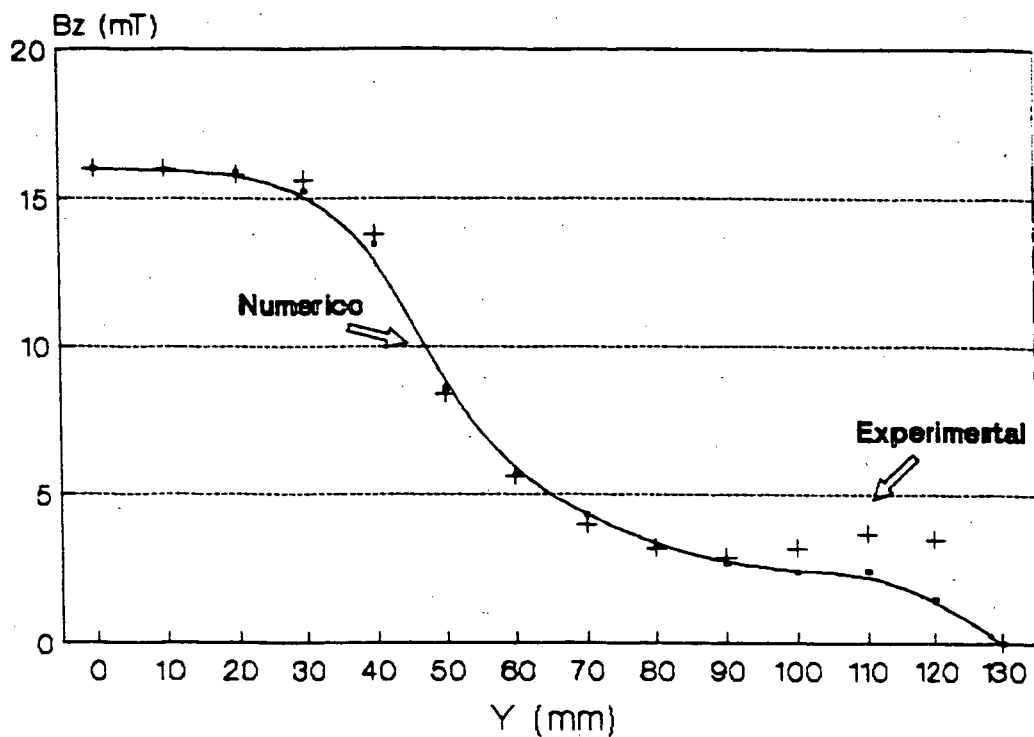


(a)

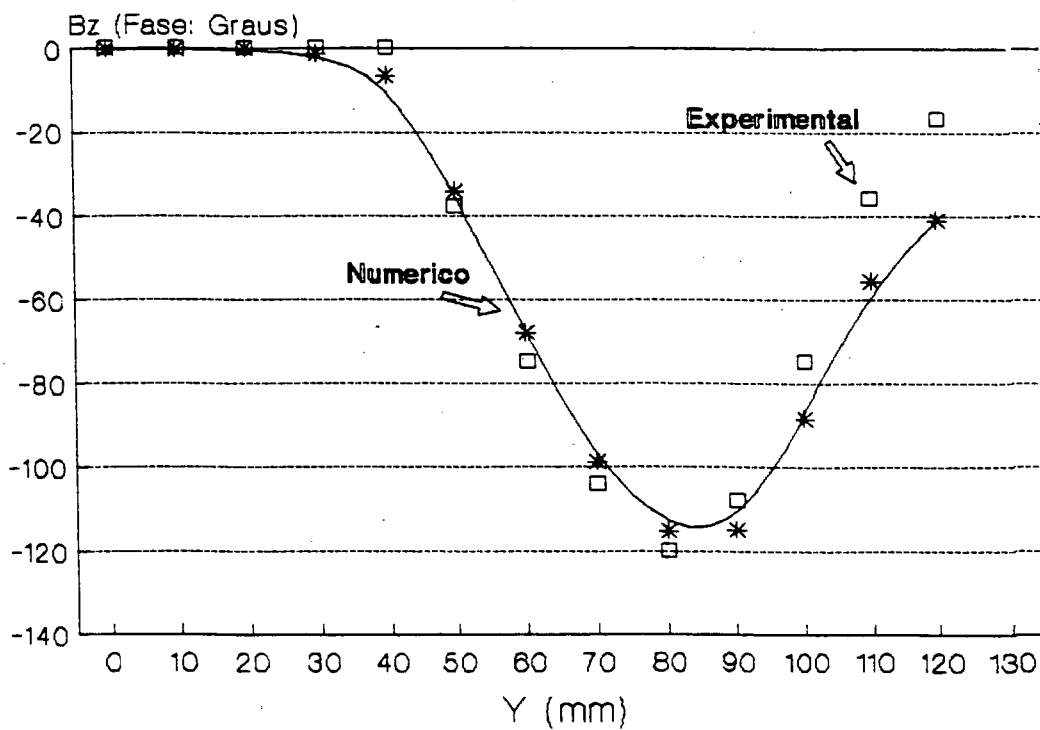


(b)

Fig. VI.17. Geometria do "Bath-cube": (a) Vista superior e lateral; (b) Vista em perspectiva.



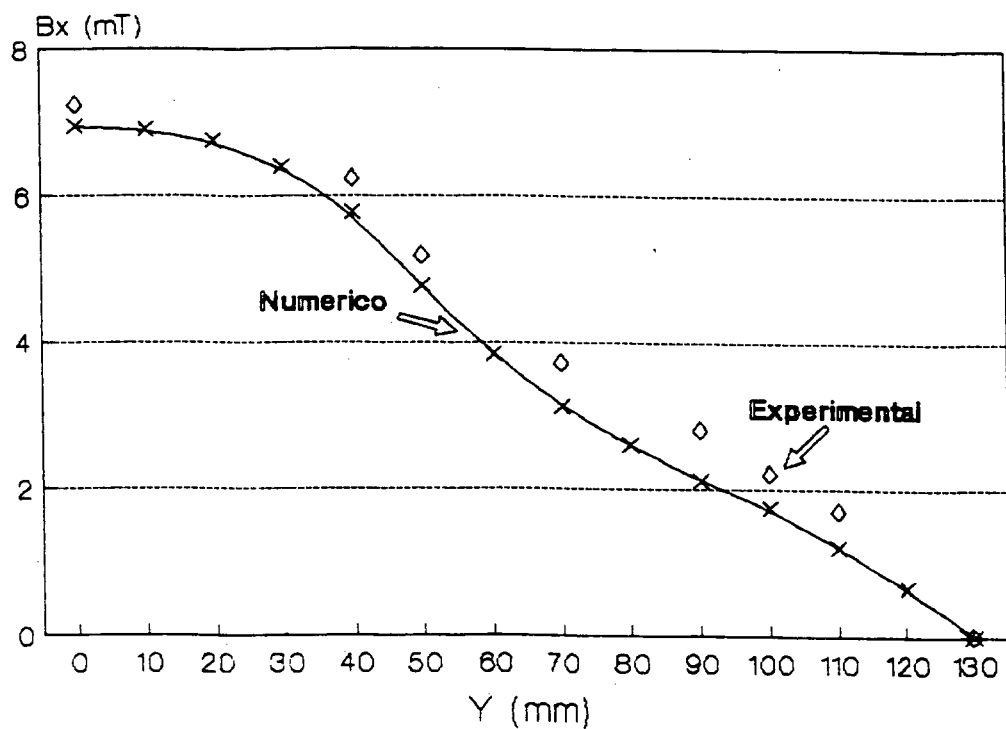
(a)



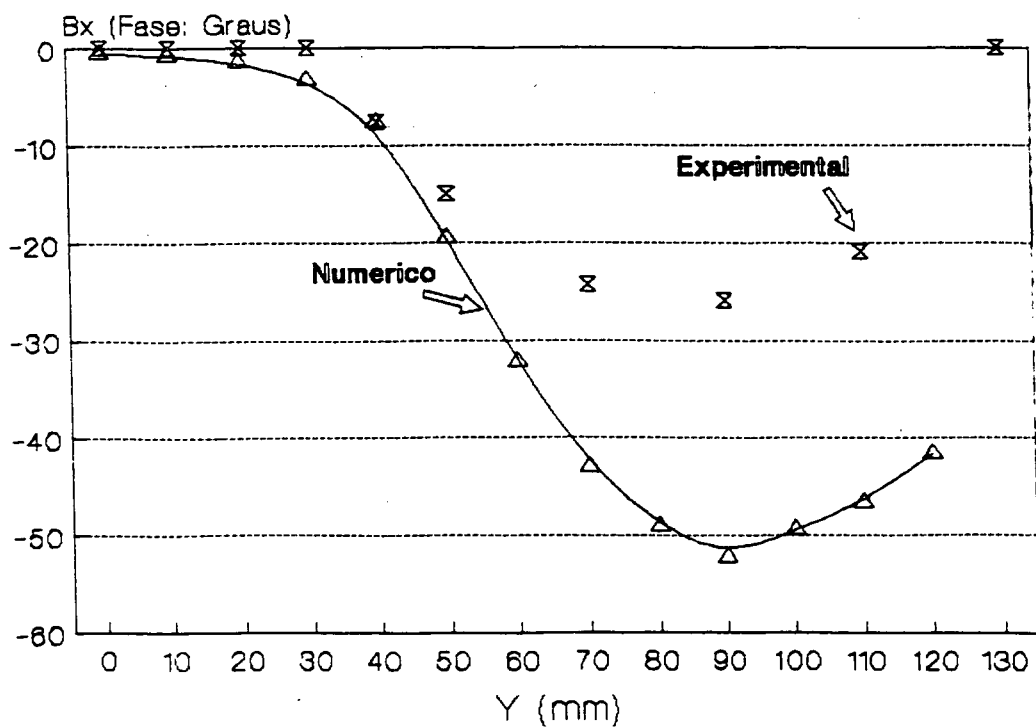
(b)

Fig. VI.18. (a) Módulo e (b) Fase de B_z ao longo da linha $x = 70$ mm, $z = 2$ mm.

Na Figura VI.19 mostram-se os valores do módulo e fase de B_x ao longo da linha $x = 120$ mm, $z = 20$ mm.



(a)



(b)

Fig. VI.19 (a)Módulo e (b)Fase de B_x ao longo da linha $x = 120$ mm e $z = 20$ mm.

Existe boa aproximação entre os valores experimentais e numéricos dos módulos nos dois casos. A fase, porém, apresenta grandes discrepâncias. Estes erros, também aparecem nos resultados obtidos por outros grupos de pesquisa (Bossavit, 1988 (d) e Emson, 1990, entre outros) e ocorrem na região de baixos valores de densidade de fluxo, onde erros numéricos no cálculo da fase são comuns (Bossavit, 1988(d)).

A figura VI.20 mostra a distribuição da densidade de corrente e da indução magnética sobre a superfície do cubo (componentes reais). Nota-se o efeito de blindagem sobre a indução magnética, causada pela circulação das correntes no cubo.

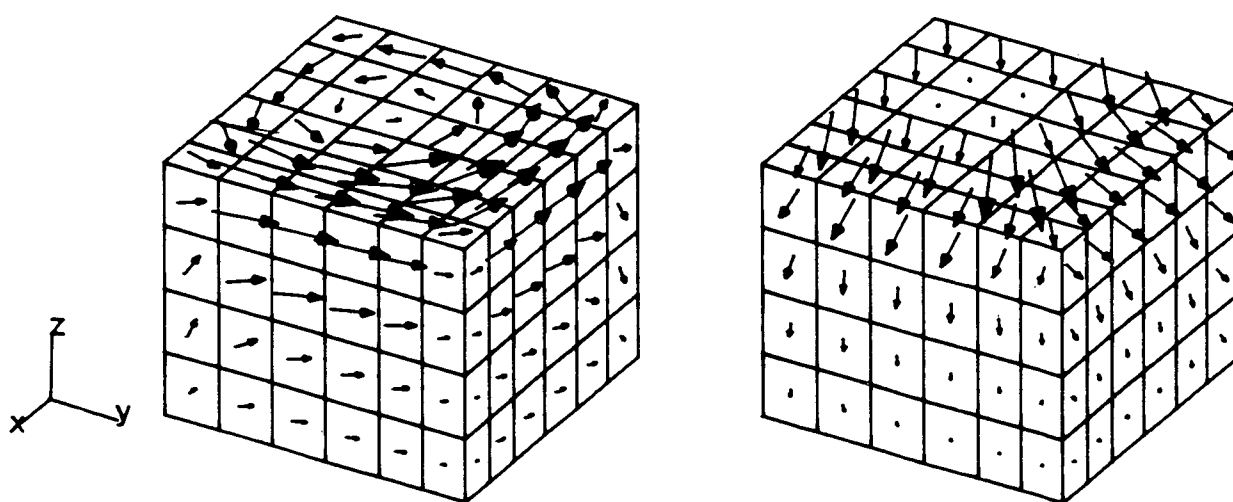


Fig. VI.20. Distribuição da densidade de corrente e indução magnética sobre a superfície do cubo (componentes reais).

A figura VI.21 apresenta as densidades de potência induzidas sobre a superfície do cubo.

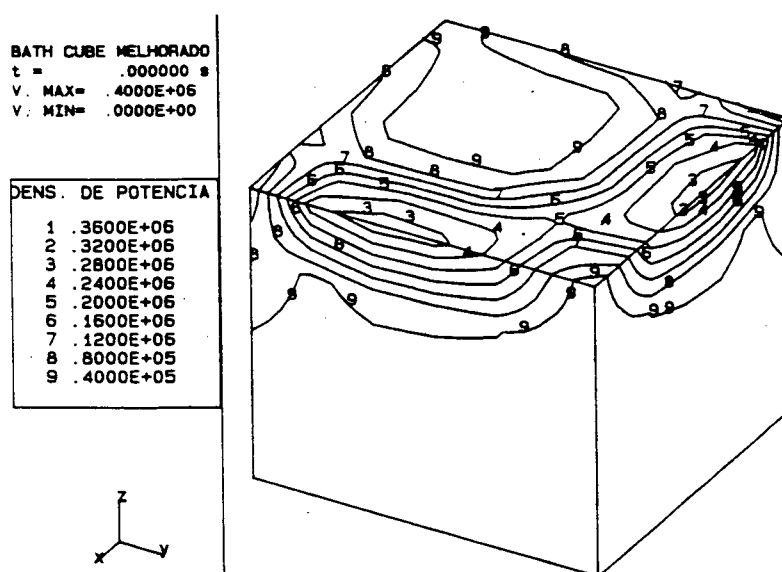


Fig. VI.21. Densidade de potência sobre a superfície do cubo.

VI.3.3. O "Bath-plate"

O "Bath-plate" é outro experimento desenvolvido na Universidade de Bath (Rodger, 1988).

Neste problema, correntes de Foucault são induzidas em uma placa retangular de alumínio com dois furos internos, por ação de uma bobina indutora por onde circulam correntes senoidais que criam uma força magnetomotriz de amplitude igual a 1260 A-e nas freqüências de 50 ou 200 Hz (Fig. VI.22).

O topo da bobina ocupa a posição $z = 235$ mm. As fronteiras do problema são estendidas até $x = \pm 255$ mm, $y = \pm 280$ mm, $z = 400$ mm e $z = 0$ mm.

A bobina indutora é cilíndrica e pode ocupar duas posições diferentes. Na primeira, o seu eixo está localizado sobre o centro do prato. Neste caso, pode-se calcular apenas 1/4 do problema, conforme indicado na Fig. VI.23a.

As condições de contorno para os diversos potenciais neste caso são:

1. Em $x = 0$, $B \cdot \underline{n} = 0$ e $J \wedge \underline{n} = 0$. Logo:

$$\mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial \underline{n}} = 0$$

e

$$\underline{A}^* \wedge \underline{n} = 0, \text{ isto é: } A_y^* = 0 \text{ e } A_z^* = 0.$$

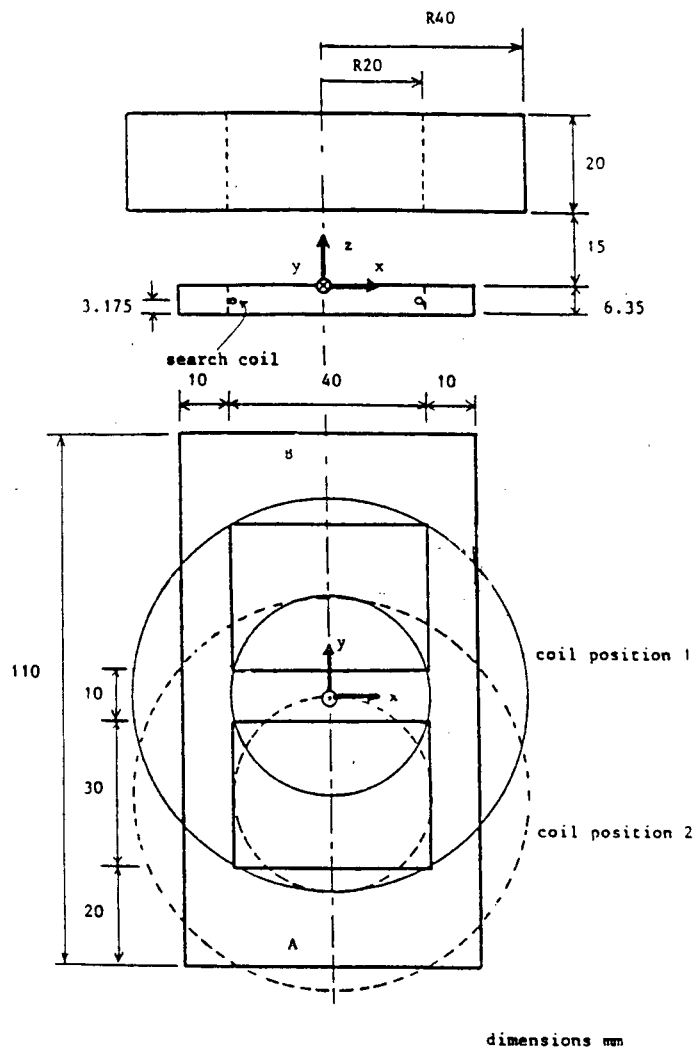


Fig. VI.22. Geometria do Bath-plate (Rodger, 1988).

2. Em $y = 0$, $\mathbf{B} \cdot \underline{\mathbf{n}} = 0$ e $\mathbf{J} \wedge \underline{\mathbf{n}} = 0$. Logo:

$$\mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial \underline{\mathbf{n}}} = 0$$

e

$$\mathbf{A}^* \wedge \underline{\mathbf{n}} = 0, \text{ isto é: } \mathbf{A}_x^* = 0 \text{ e } \mathbf{A}_z^* = 0.$$

3. Nas demais fronteiras tem-se $\mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial \underline{\mathbf{n}}} = 0$.

Na segunda posição, o eixo da bobina está localizado no centro de um dos buracos do prato. Neste caso, existe simetria somente em relação à linha $x = 0$, e metade do problema deve ser calculado (Fig. VI.23b). As condições de

contorno, em $x=0$, são:

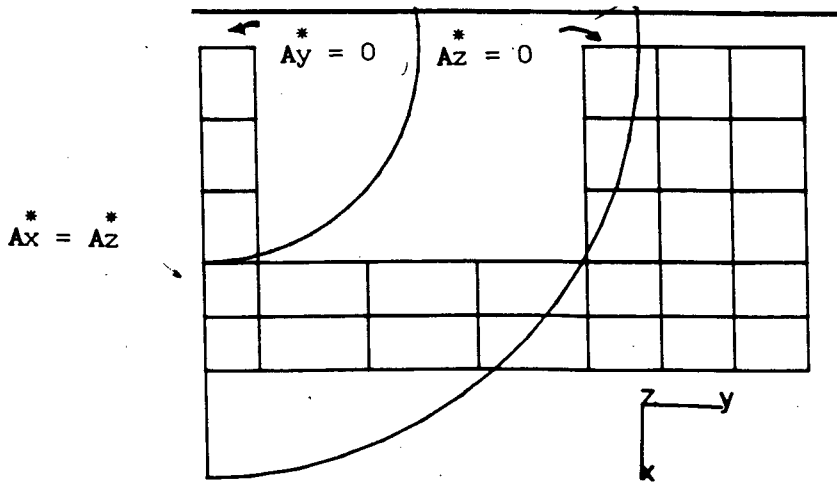
$$\mathbf{B} \cdot \underline{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{J} \wedge \underline{\mathbf{n}} = 0. \text{ Logo:}$$

$$\mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial \underline{\mathbf{n}}} = 0$$

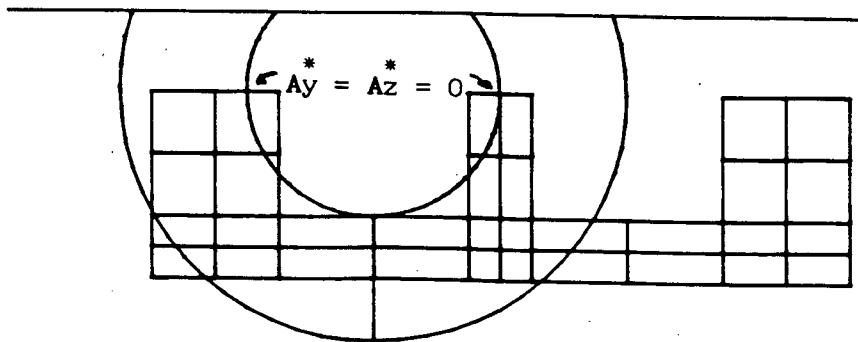
e

$$\mathbf{A}^* \wedge \underline{\mathbf{n}} = 0, \text{ isto é: } A_y^* = 0 \text{ e } A_z^* = 0.$$

Nas demais fronteiras, $\mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial \underline{\mathbf{n}}} = 0$.



(a)



(b)

Fig. VI.23: Condições de contorno para o "Bath-plate". (a) Bobina com eixo no centro do prato. (b) Bobina com eixo no centro de um dos buracos do prato.

Devido à existência dos "buracos" no prato, a região Ω_f é multiplamente

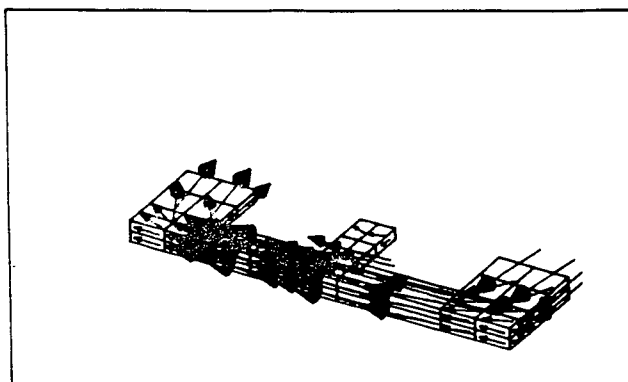
conexa. Por isto, introduz-se uma região de condutividade baixa no "buraco", de modo a tornar Ω simplesmente conexa.

Na interface entre as regiões de diferentes condutividades força-se:

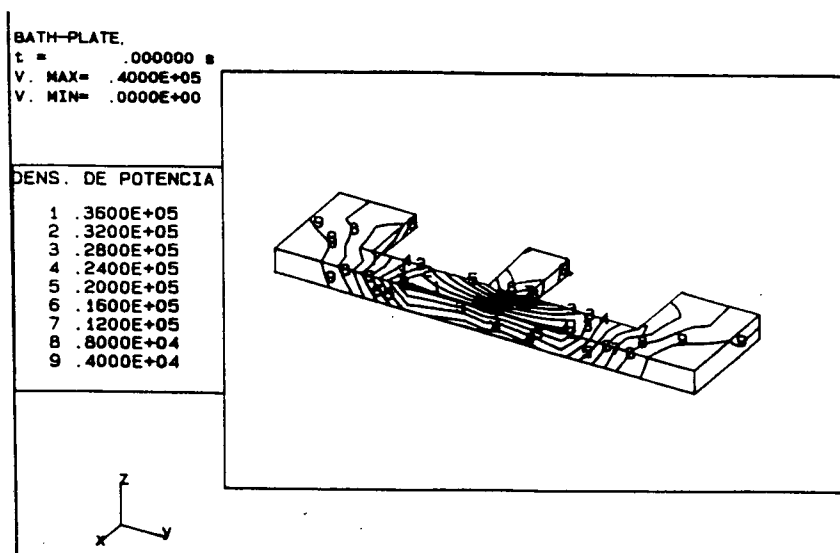
$$\mathbf{A}^* \cdot \underline{n} = 0$$

onde \underline{n} é o vetor normal à interface entre as duas regiões. Com isto, o problema de salto no componente normal de \mathbf{A}^* nesta interface não aparece neste caso.

A figura VI.24(a) mostra a distribuição da densidade de corrente na placa, para a bobina com eixo no centro da placa e frequência de 50 Hz. A figura VI.24(b) mostra a distribuição da densidade de potência sobre a placa.



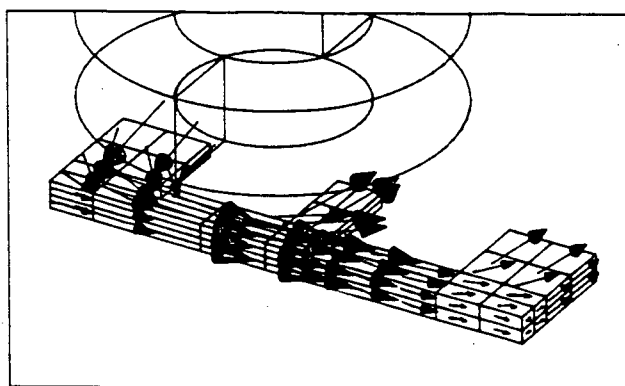
(a)



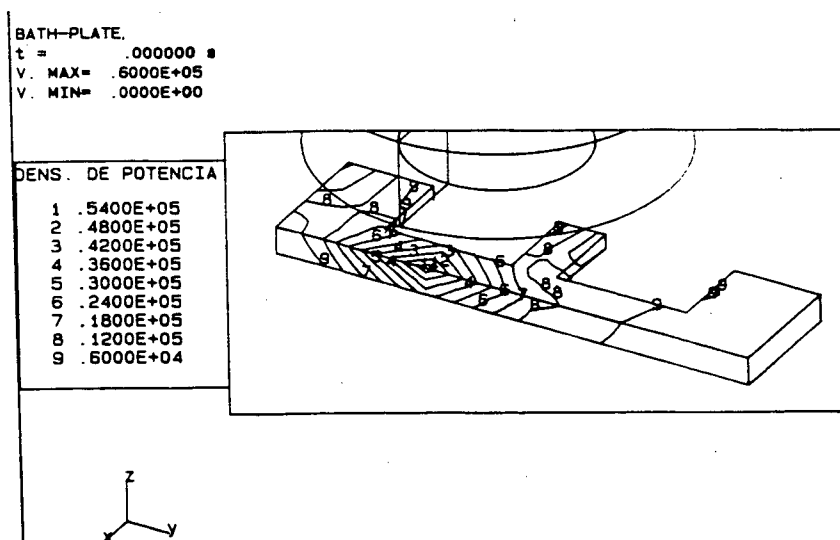
(b)

Fig.VI.24. (a) Correntes, (b) Densidade de potência: Bobina no centro da placa

A Figura VI.25 mostra a distribuição da densidade de corrente (a) e da densidade de potência (b) na placa, para a bobina com eixo no centro de um dos buracos da placa (50 Hz).



(a)



(b)

Fig. VI.25. (a) Correntes induzidas. (b) Densidade de potência: Bobina com eixo no centro de um dos buracos da placa, 50 Hz.

A Figura VI.26 mostra a variação de B_z (módulo e fase) ao longo da linha $x = 0$, $z = 200.5$ mm, com y variando entre 0 e 55 mm, na frequência de 50 Hz, quando a bobina está centralizada.

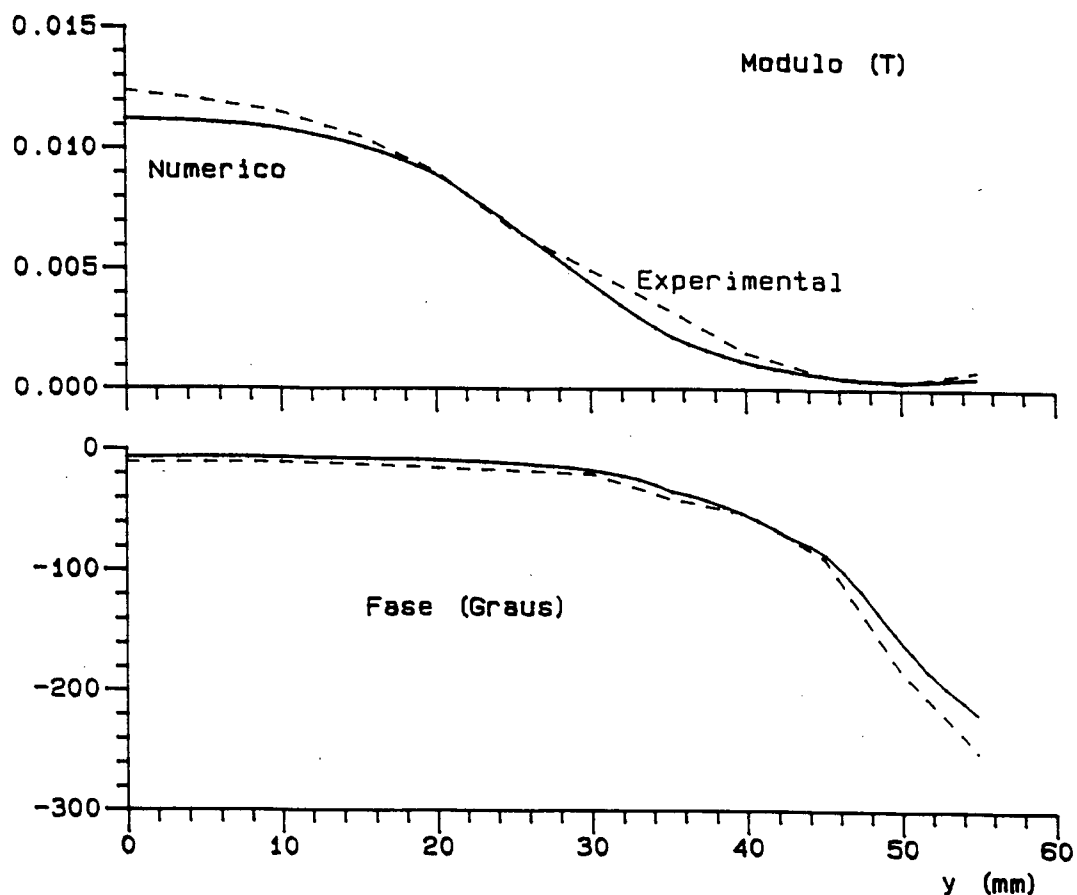


Fig. VI.26. B_z , 50 Hz, bobina centrada. (a) Módulo ; (b) Fase.

A figura VI.27 mostra a variação de B_z ao longo da mesma linha (porém com y entre ± 55 mm), com a bobina descentralizada.

A figura VI.28 repete as condições da Figura VI.25, porém com frequência de 200 Hz.

Verifica-se que os resultados numéricos e os experimentais apresentam uma boa correlação. Além disto, o erro aumenta com o aumento da frequência, o que é razoável, pois a 200 Hz a profundidade de penetração é bem menor que a 50 Hz, e a malha de elementos finitos torna-se pior.

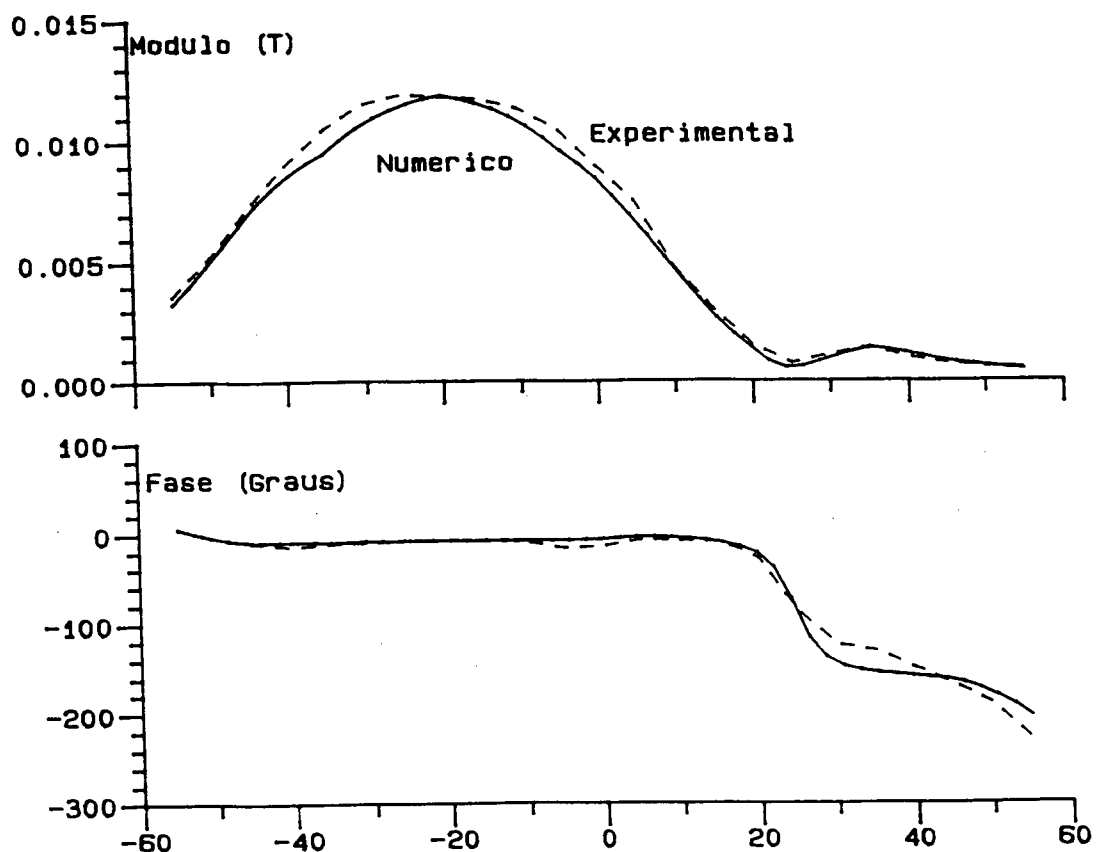


Fig. VI.27. B_z , 50 Hz, bobina descentrada. (a) Módulo; (b) Fase.

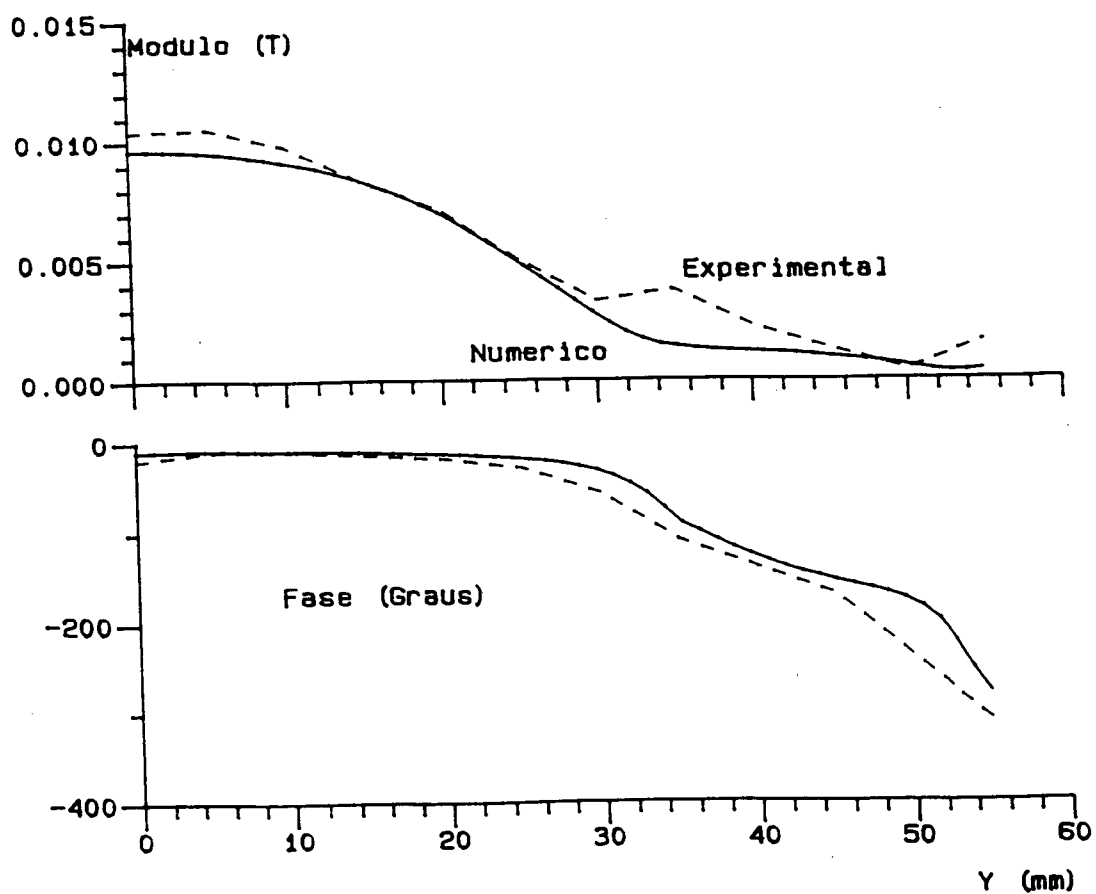


Fig. VI.28. B , 200 Hz, bobina centrada. (a) Módulo; (b) Fase.

VI.4. Problemas termo-eletromagnéticos

Para estes problemas não foi possível a utilização de exemplos com resultados analíticos ou experimentais. Por isto, para validar o programa, calculou-se um problema com simetria axial para o qual existem resultados obtidos por um programa de aquecimento indutivo bidimensional (Bleuvin, 1984). Somente depois de verificado que os resultados eram semelhantes é que se calculou um caso totalmente tridimensional, onde as potencialidades do método podem ser exploradas.

VI.4.1. Um problema de aquecimento axi-simétrico

O problema apresentado na figura VI.29 (Bleuvin, 1984) é composto de um enrolamento indutor percorrido por uma corrente de excitação senoidal, de frequência angular ω , mais uma armadura que canaliza as linhas de campo. A bobina induz correntes de Foucault em um tarugo metálico, que sofre um processo de aquecimento por indução.

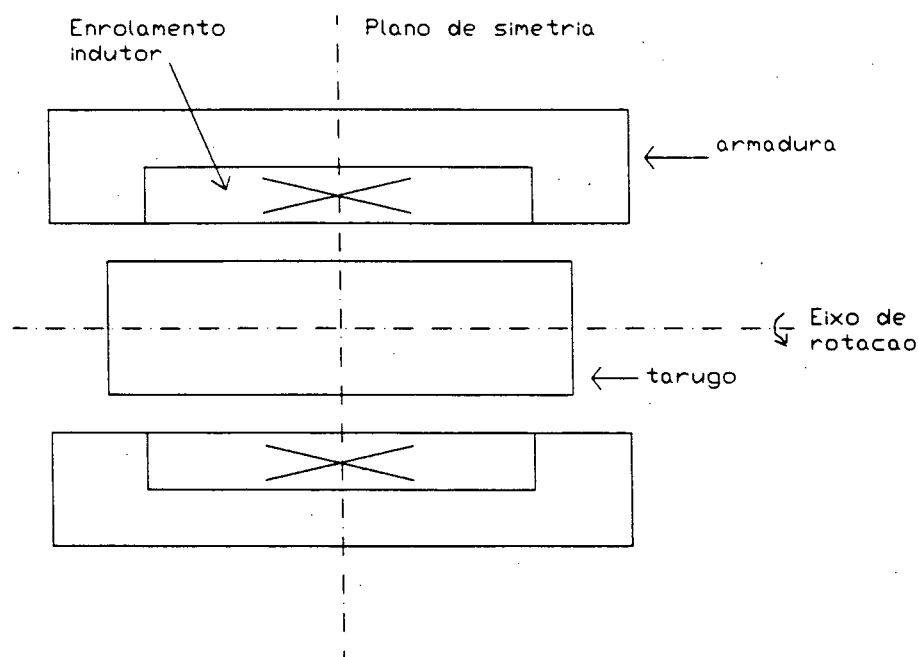


Fig. VI.29. Problema de aquecimento indutivo axi-simétrico.

Com a finalidade de comparação de resultados, adotam-se as mesmas aproximações empregadas por Bleuvin (1984), isto é:

1. Leva-se em conta o eixo de simetria do problema (Fig. VI.29), o que reduz a parcela da geometria a ser calculada;
2. A densidade de potência elétrica é calculada por um programa de cálculo bidimensional e é mantida constante ao longo de todo o transitório de aquecimento. Limita-se a região de circulação de corrente induzida à parte hachurada da figura VI.30. Mantém-se, nesta região, uma densidade de potência constante no tempo e no espaço igual a $q = 2.35 \times 10^7 \text{ W/m}^3$.
3. As propriedades térmicas do material são descritas pelas equações (IV.13) e (IV.15). Os seguintes coeficientes são adotados: $K_0 = 40$; $K_1 = 89.46$; $\tau_k = 250$; $\xi = 9.36 \times 10^8$; $\text{Sig} = 20$; $T_c = 1033 \text{ }^\circ\text{K}$; $c_0 = 4.68 \times 10^6$. As temperaturas são expressas em $^\circ\text{K}$. Note-se que, para este exemplo, Bleuvin adotou uma representação parabólica para a variação de k com a temperatura, o que dá origem a pequenas diferenças de resultados.
4. As condições de contorno térmicas são representadas na Figura VI.30. Os valores adotados para os coeficientes de contorno térmico são: $h = 10$ e $\varepsilon = 0.8$. A temperatura ambiente é igual a 300°K .

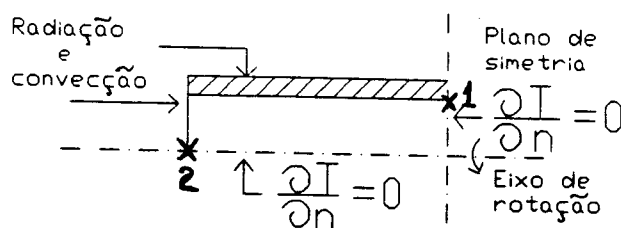


Fig. VI.30. O domínio térmico e suas condições de contorno.

Com estas condições, pode-se simular o crescimento da temperatura no tarugo submetido a uma fonte térmica constante. Esta consideração torna o modelamento do fenômeno físico original - aquecimento por indução - imperfeito, pois a variação das características eletromagnéticas com a temperatura não está sendo levada em conta, assim como a passagem do problema de magnético para não magnético em torno do ponto de Curie. Porém, a preocupação deste exemplo é apenas analisar as características transitórias do problema do ponto de vista térmico, com a finalidade de compará-las com um exemplo que possui solução numérica conhecida.

A figura VI.31. mostra as linhas isotermas em vários instantes de tempo ao longo do processo de aquecimento.

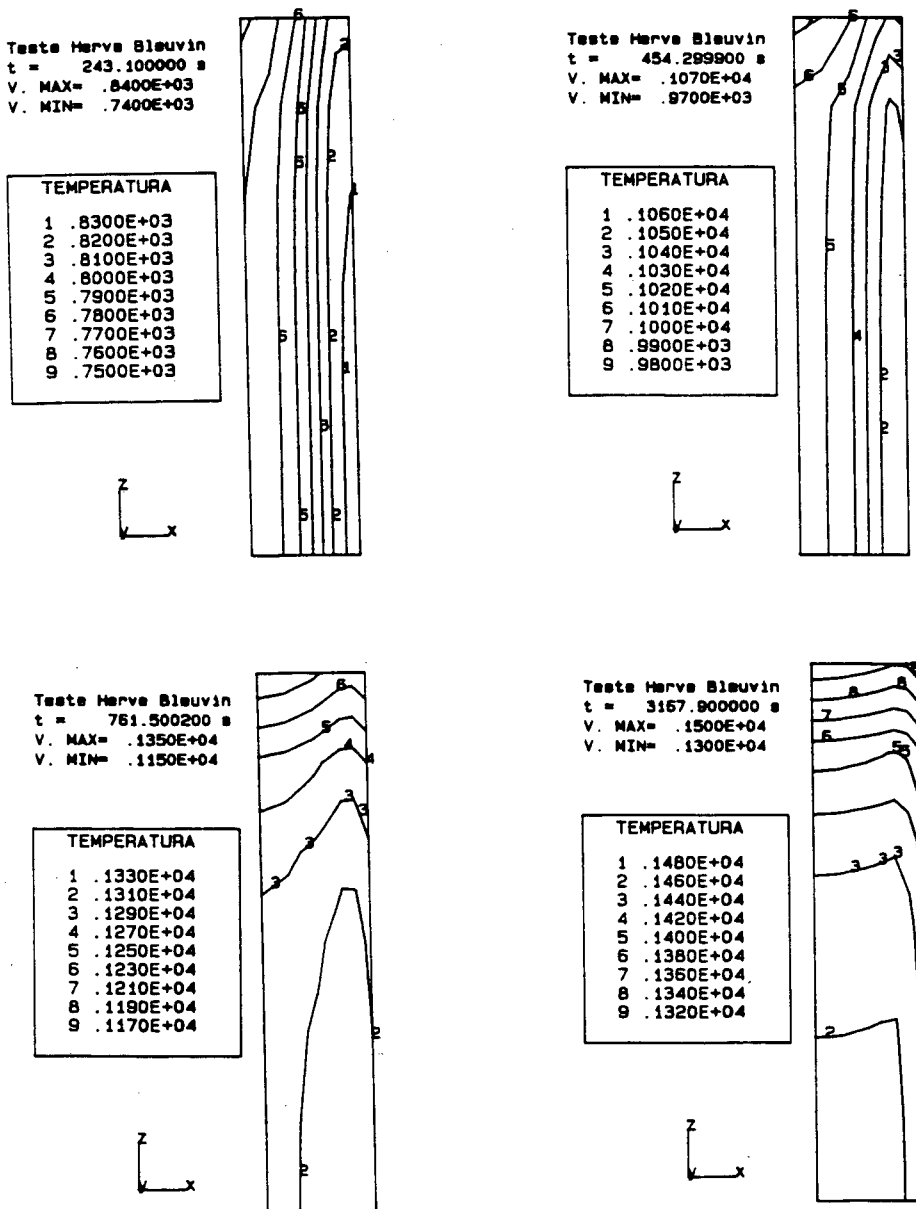


Fig. VI.31. Isothermas em vários instantes de tempo ao longo do processo de aquecimento.

A Fig. VI.32 mostra a variação da temperatura nos pontos mais quente (ponto 1) e mais frio (ponto 2) em regime permanente (ver Figura VI.30). Estes resultados são comparados com os obtidos com o programa 2-D de Bleuvin (1984). Verifica-se uma diferença pequena entre os resultados dos dois programas, que deve ter sido causada pela representação distinta da condutividade térmica

pelos 2 programas.

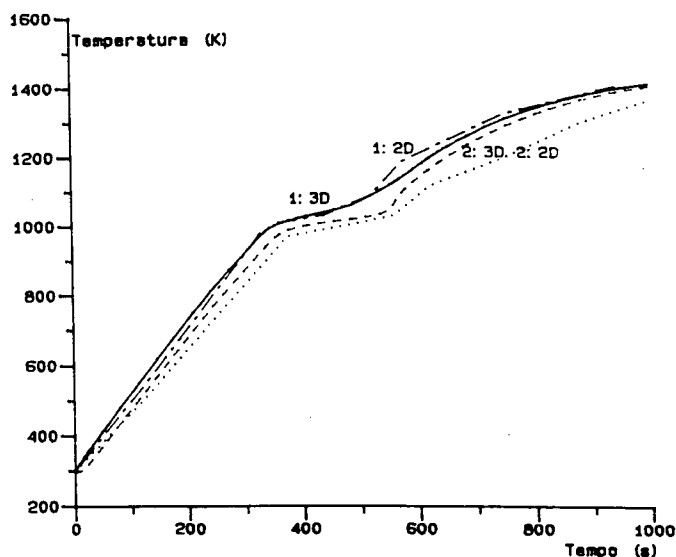


Fig. VI.32. Evolução da temperatura nos pontos 1 e 2.

A figura VI.33. mostra a variação do intervalo de integração ao longo do tempo. Verifica-se que este intervalo cresce, até que seja atingida a vizinhança do ponto de Curie ($t \approx 270$ s), onde ele é reduzido automaticamente para diminuir os erros causados pela rápida variação das características do material. Enquanto todo o tarugo não ultrapassa a temperatura de Curie, o que acontece em torno dos 600 s, o passo de integração se mantém baixo, com alguns instantes de crescimento e decréscimo.

A variação do intervalo de integração é comandada pelos estimadores de erro de discretização temporal (EDT) e de não linearidade (ENL) do problema, cuja curva no tempo é representada na figura VI.34.

Observa-se que o ENL é significativo quando se atinge a vizinhança do ponto de Curie. Além disto, os picos do EDT e do ENL ocorrem, quase sempre, nos mesmos instantes de tempo. Note-se, porém, que os picos do ENL são mais intensos do que os picos do EDT.

Um fato a ressaltar é que, apesar de presentes nos gráficos da Fig. VI.34., erros superiores a 100% do valor do erro máximo especificado nunca ocorrem na realidade, pois, se ocorrerem, o passo de integração é reduzido e o cálculo do passo atual é refeito.

Este exemplo comprova o bom funcionamento da parcela térmica do programa.

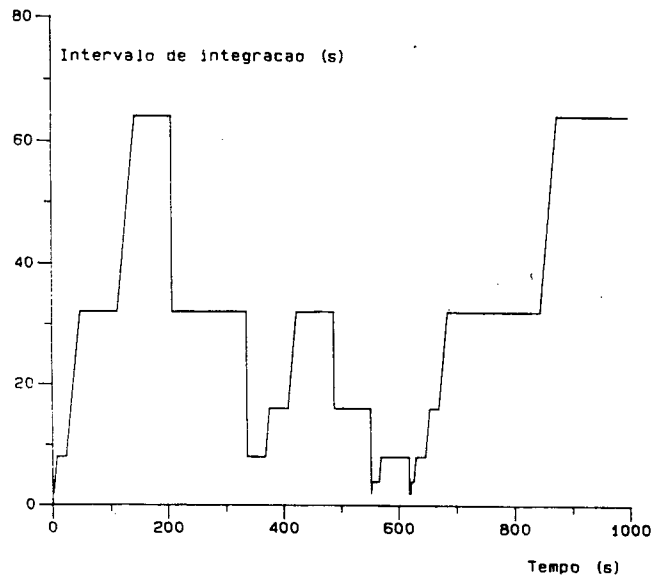


Fig. VI.33. Variação do intervalo de integração (Δt) ao longo da simulação

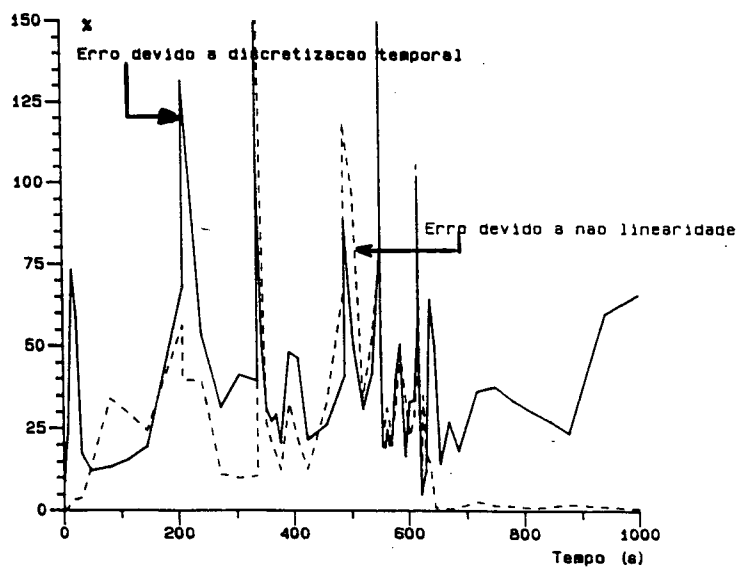


Fig. VI.34. Erros estimados máximos.

VI.4.2. Um problema de aquecimento indutivo axi-simétrico

O problema a seguir é composto por uma bobina indutora, percorrida por corrente senoidal, induzindo correntes de Foucault em um tarugo metálico. O comprimento do sistema na direção axial é muito superior ao seu raio. Com

isto, pode-se eliminar os efeitos de borda e efetuar o cálculo para uma pequena seção do problema, representada na figura VI.35.

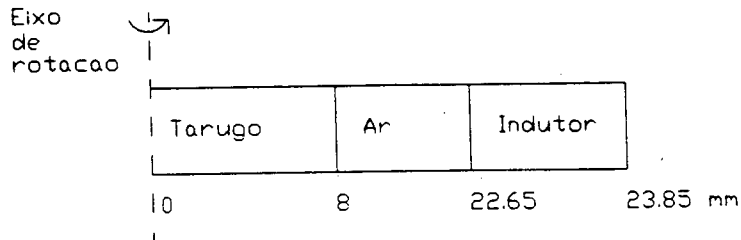


Fig. VI.35. Problema de aquecimento indutivo axi-simétrico.

A bobina cria, sem a presença do tarugo, um campo magnético constante, de valor de pico igual a 76367 A/m.

Para se resolver este problema em 3D, utiliza-se apenas 1/4 da geometria, conforme apresentado na Fig. VI.36.

Nesta figura estão também representadas as condições de contorno eletromagnéticas, isto é:

$$\phi = 0 \quad , \text{ em } z = 0;$$

$$\phi = 76367 \quad , \text{ em } z = 1\text{mm};$$

$$A_z^* = 0 \quad , \text{ em } z = 0 \text{ e } z = 1 \text{ mm};$$

$$A_x^* = A_z^* = 0 \quad , \text{ em } y = 0$$

$$A_y^* = A_z^* = 0 \quad , \text{ em } x = 0$$

As condições de contorno térmicas são estipuladas sobre a superfície do tarugo, conforme a figura VI.36b, isto é, condição de radiação/convecção em $r=8$ mm e condição de contorno adiabática nas demais superfícies.

Os valores dos coeficientes de troca convectiva, h , e de emissividade, ϵ , são:

$$h = 10 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}) \quad ; \quad \epsilon = 0.8$$

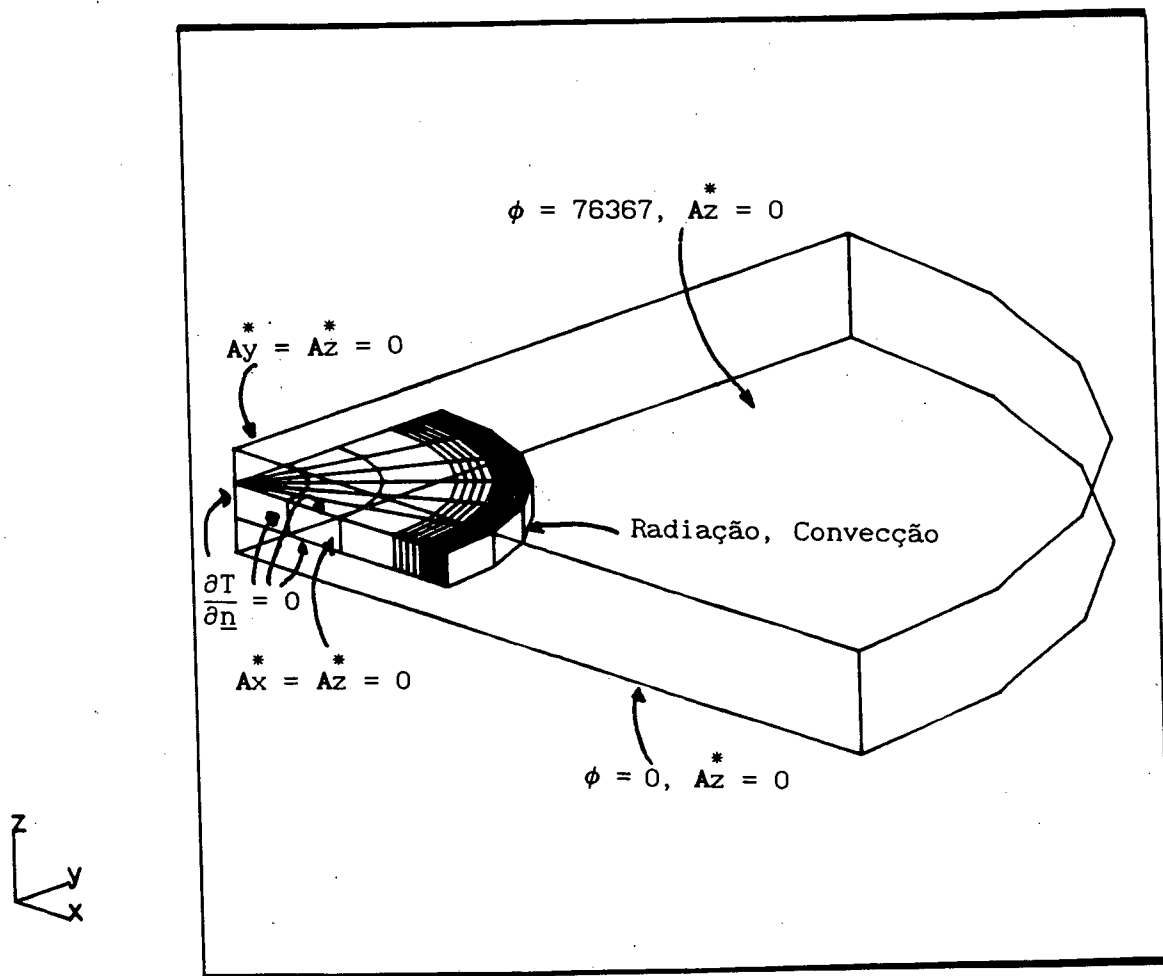


Fig. VI.36. Geometria do problema 3D, malha de elementos finitos sobre o tarugo e condições de contorno eletromagnéticas e térmicas.

As propriedades térmicas do material são descritas pelas equações (IV.13) e (IV.15). Os seguintes coeficientes são adotados: $K_0 = 40$; $K_1 = 30$; $\xi = 9.36 \times 10^8$; $\tau_k = 250$; $\text{Sig} = 20$; $T_c = 760^\circ\text{C}$, $c_0 = 4.68 \times 10^8$. As temperaturas são expressas em $^\circ\text{C}$.

As propriedades eletromagnéticas do material são descritas pelas equações (IV.12) e (IV.14), com: $\mu(0) = 50 \mu_0$; $\tau_\beta = 150$; $\rho_0 = 13.75 \times 10^{-8}$; $\beta_0 = 0.004$; $\rho_1 = 31.56 \times 10^{-8}$; $\beta_1 = 0.001$.

A frequência de alimentação é igual a 4000 Hz e a profundidade de penetração das correntes induzidas é, à temperatura inicial, igual a 0.42 mm.

A figura VI.37. mostra a evolução da temperatura em dois pontos do tarugo: o ponto 1, situado em $r = 0$ e o ponto 2, situado em $r = 8$ mm.

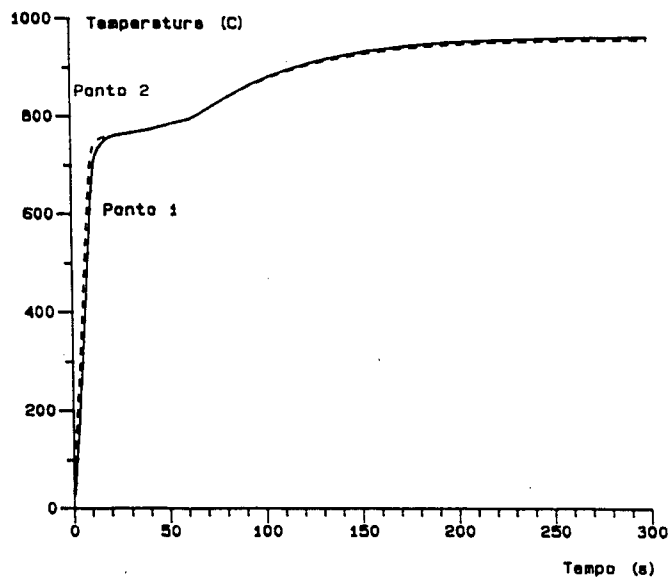
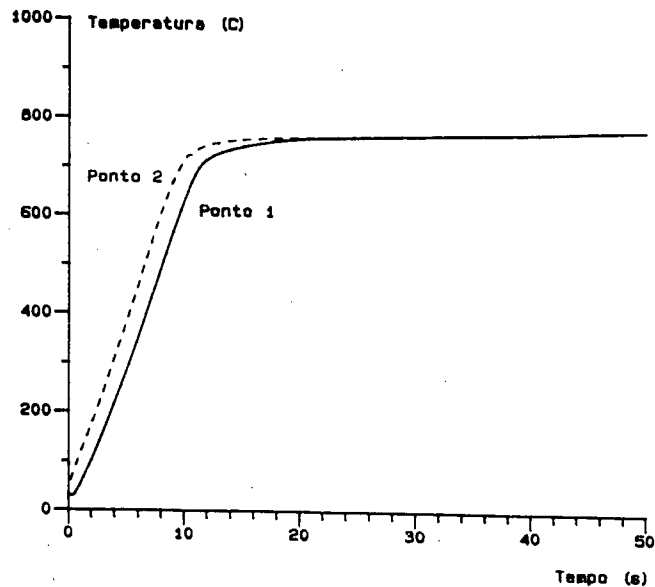


Fig. VI.37. Evolução da temperatura nos pontos 1 ($r = 0$ mm) e 2 ($r = 8$ mm)

A figura VI.38. mostra a evolução do passo de integração ao longo do tempo.

A figura VI.39. mostra a potência dissipada ao longo de uma linha radial em vários instantes de tempo. A figura VI.40 mostra a distribuição da temperatura sobre esta linha nos mesmos instantes de tempo.

A análise das figuras (VI.37), (VI.39) e (VI.40) pode ser feita em conjunto. Verifica-se que, inicialmente, quando as temperaturas estão todas abaixo da temperatura de Curie, a potência dissipada se concentra na

superfície do tarugo e atinge valores muito elevados (curva correspondente a 7.72 s, fig. VI.39). Por isto, nestes instantes iniciais o aquecimento se processa de forma rápida e a superfície externa tende a se aquecer mais rapidamente do que a parte interna do tarugo (Fig. VI.37 e curva correspondente a 7.72 s na figura VI.40).

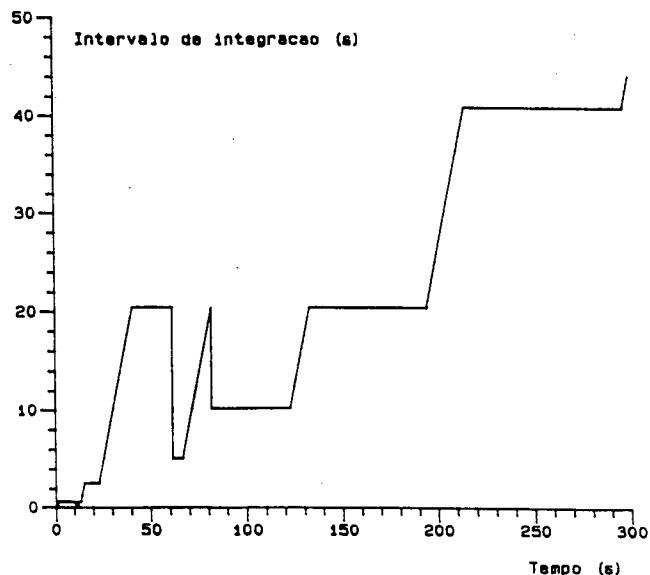


Fig. VI.38. Evolução do passo de integração.

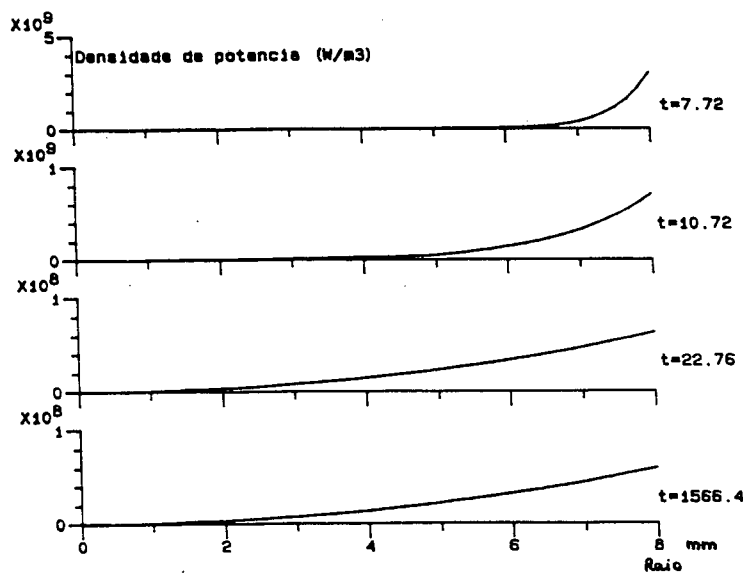


Fig. VI.39. Potência dissipada ao longo de uma linha radial em vários instantes de tempo.

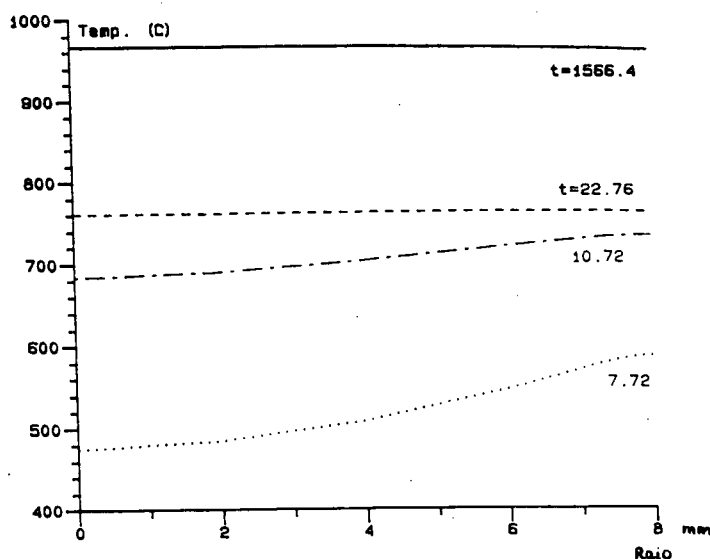


Fig. VI.40. Temperatura ao longo de uma linha radial em vários instantes de tempo.

Quando se atinge a vizinhança da temperatura de Curie, o material do tarugo se torna não magnético. A densidade de potência é cada vez menor (curvas correspondentes a 10.72 s e 22.76 s na figura VI.39) e a profundidade de penetração é maior. Com isto, a diferença de temperatura entre um ponto interno e outro na superfície do tarugo torna-se menor (figura VI.37. e curvas correspondentes a $t = 10.72$ s e 22.76 s na figura VI.40).

Nos instantes anteriores ao regime permanente, todo o tarugo está em temperatura superior à de Curie, as fontes de calor são fracas, a temperatura cresce lentamente e há uma inversão do gradiente térmico: o ponto mais quente é o ponto do centro do tarugo (ponto 1) devido às trocas de calor por radiação e convecção que ocorrem na superfície da peça (curvas correspondentes a $t=1566.4$ s nas figuras (VI.39 e VI.40).

É de se notar a eficácia do algoritmo de discretização temporal e a sua estabilidade numérica, que permitem o cálculo desde a temperatura inicial (30 °C) até a final (aproximadamente 960 °C) em apenas 60 passos de integração, apesar do problema atravessar duas fases críticas sob o ponto de vista numérico: a fase de aquecimento inicial, durante a qual o processo de aquecimento é muito rápido, e a passagem pelo ponto de Curie, durante a qual a variação das características do material é muito acentuada.

VI.4.3. Um problema de aquecimento indutivo tridimensional

O exemplo a seguir é uma adaptação do "Bath-cube" (seção VI.3.2) para problemas termo-eletromagnéticos.

Nesta adaptação, a geometria do problema é mantida, assim como a frequência de alimentação (50 Hz). Porém, a intensidade da força magnetomotriz de alimentação é aumentada para 20000 A-e e o material do cubo é substituído pelo material do problema da seção VI.4.2, que possui permeabilidade relativa igual a 50. Com isto, as intensidades das correntes induzidas e da potência dissipada vão aumentar, fazendo com que o cubo se aqueça.

Ao problema de aquecimento indutivo, assim definido, devem ser acrescentadas condições de contorno térmicas, que são especificadas sobre a superfície do cubo. Supõe-se que as fronteiras internas ($x = 40$ mm e $y = 40$ mm) e as fronteiras superior e inferior do cubo estão isoladas do pólo e da caixa por um material termo-isolante. Portanto, estas fronteiras são adiabáticas. Nas outras duas fronteiras ($x=110$ mm e $y=110$ mm) há troca de calor com o ambiente por convecção e radiação. Os coeficientes destas trocas são estipulados em $h = 10$ e $\epsilon = 0.8$.

A profundidade de penetração à temperatura ambiente é igual a 3.8 mm.

A figura VI.41. mostra a evolução no tempo da temperatura em alguns pontos do cubo: o ponto A ($x = 70$ mm, $y = 110$ mm, $z = 64$ mm), o ponto B ($x = 40$ mm, $y = 40$ mm, $z = 64$ mm), o ponto C ($x = 110$ mm, $y = 110$ mm, $z = 40$ mm) e o ponto D ($x = 40$ mm, $y = 70$ mm, $z = 64$ mm) (ver também a figura VI.43).

A figura VI.42. mostra a evolução do intervalo de integração. A figura VI.43. apresenta as curvas isotérmicas sobre a superfície do cubo nos instantes de tempo $t = 2.1$ s, 8.5 s, 13 s, 59 s, 187 s e 1877 s. A figura VI.44 apresenta as densidades de potência sobre a superfície do cubo nestes mesmos instantes.

Nota-se que, inicialmente, ($t = 2.1$ s), todo o cubo está em temperatura baixa, e a densidade de potência é elevada na parte superior externa do cubo. À medida em que as temperaturas vão aumentando, esta distribuição vai se modificando ($t = 8.5$ s e $t = 13$ s), tendendo a se tornar menos intensa nos pontos onde a temperatura se aproxima da temperatura de Curie (760°C), pois o material nestas regiões se torna não magnético.

Verifica-se que, nestes instantes iniciais, os pontos que se aquecem mais rapidamente são aqueles localizados em regiões de densidade de potência alta, como o ponto A, situado na intersecção entre as faces superior ($z = 64\text{mm}$) e lateral externa ($y = 110$ mm) do cubo.

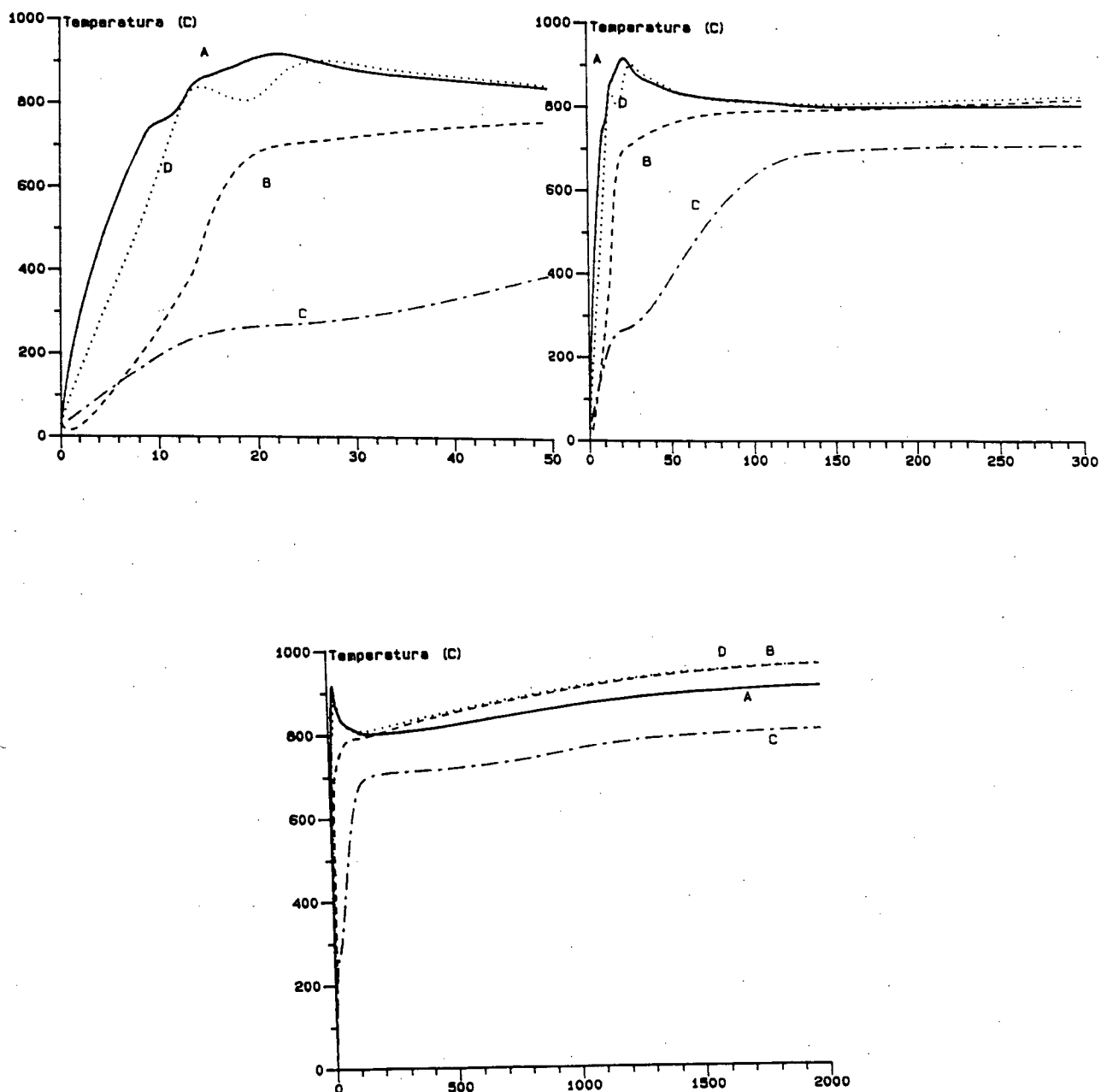


Fig. VI.41. Evolução da temperatura em alguns pontos, com diferentes escalas de tempo.

À medida que a temperatura aumenta, e a densidade de potência diminui, esta situação vai se alterando ($t = 59\text{s}$, $t = 187\text{s}$ e $t = 1876.6\text{s}$). Os pontos mais quentes vão se situando nas regiões mais distantes das faces onde há troca de calor com o meio ambiente, como os pontos D e B. Os menos quentes se situam sobre as faces onde há troca de calor, como, por exemplo, os pontos A e C. Nota-se, inclusive, que ocorre queda de temperatura no ponto A, devido à

diminuição da potência dissipada na sua vizinhança e à troca de calor com o ambiente que ocorre na fronteira $y = 110$ mm).

Em regime permanente ($t = 1877$ s), o ponto B é o mais quente do cubo (apesar da densidade de potência nele ser baixa) e o ponto C é o mais frio.

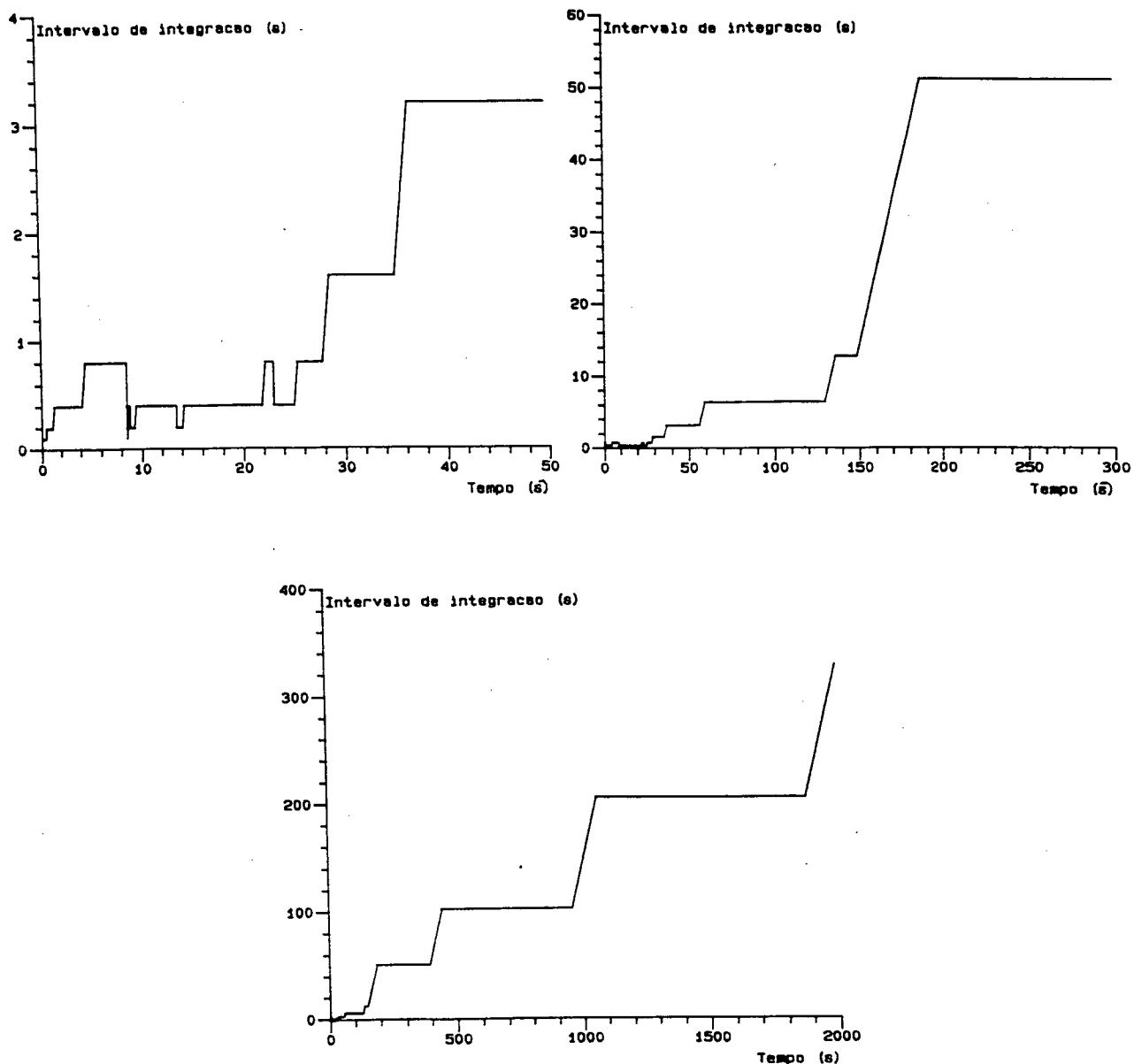


Fig. VI.42. Evolução do intervalo de integração, com diferentes escalas de tempo.

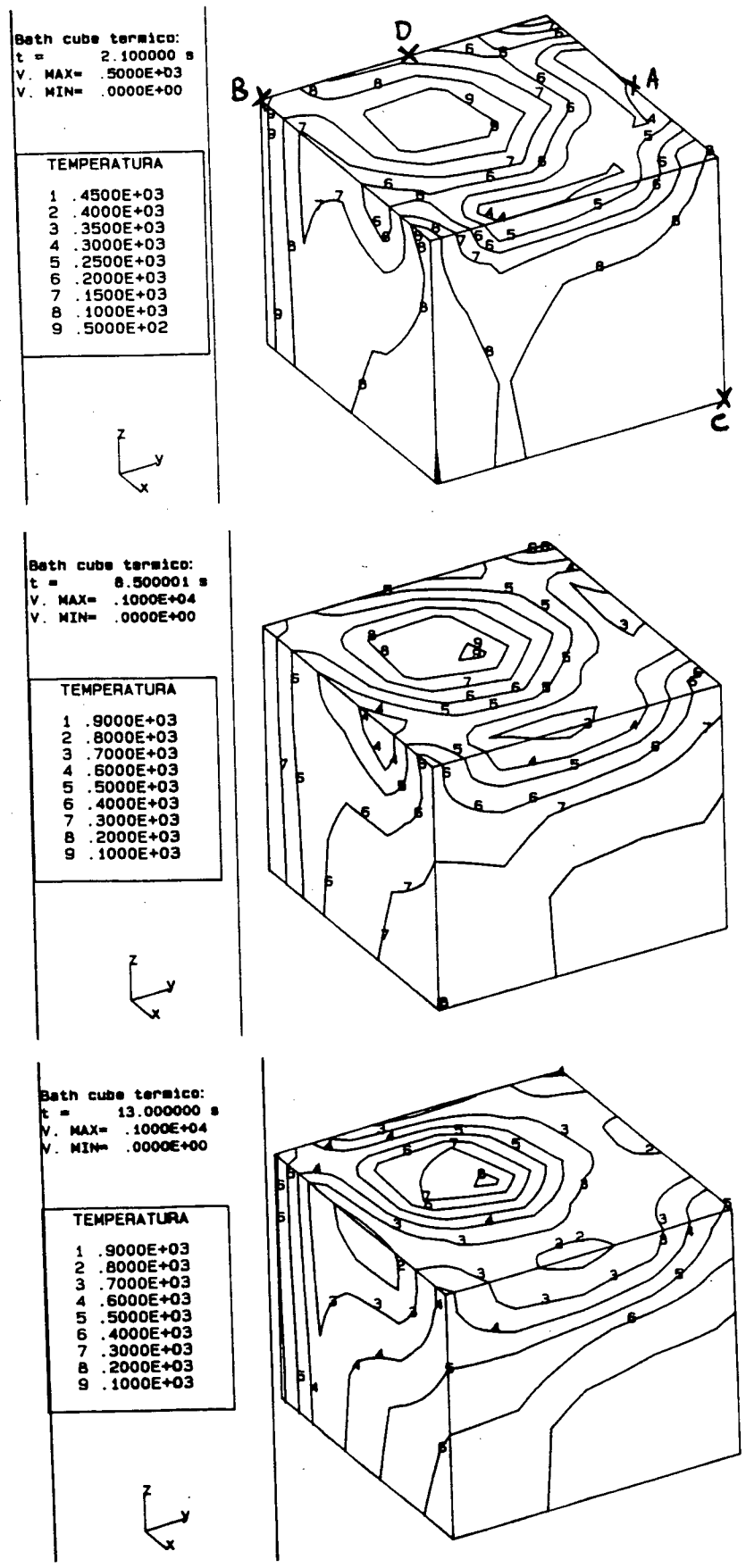


Fig VI.43 (Parte I): Isotermas (t = 2.1, 8.5 e 13 s)

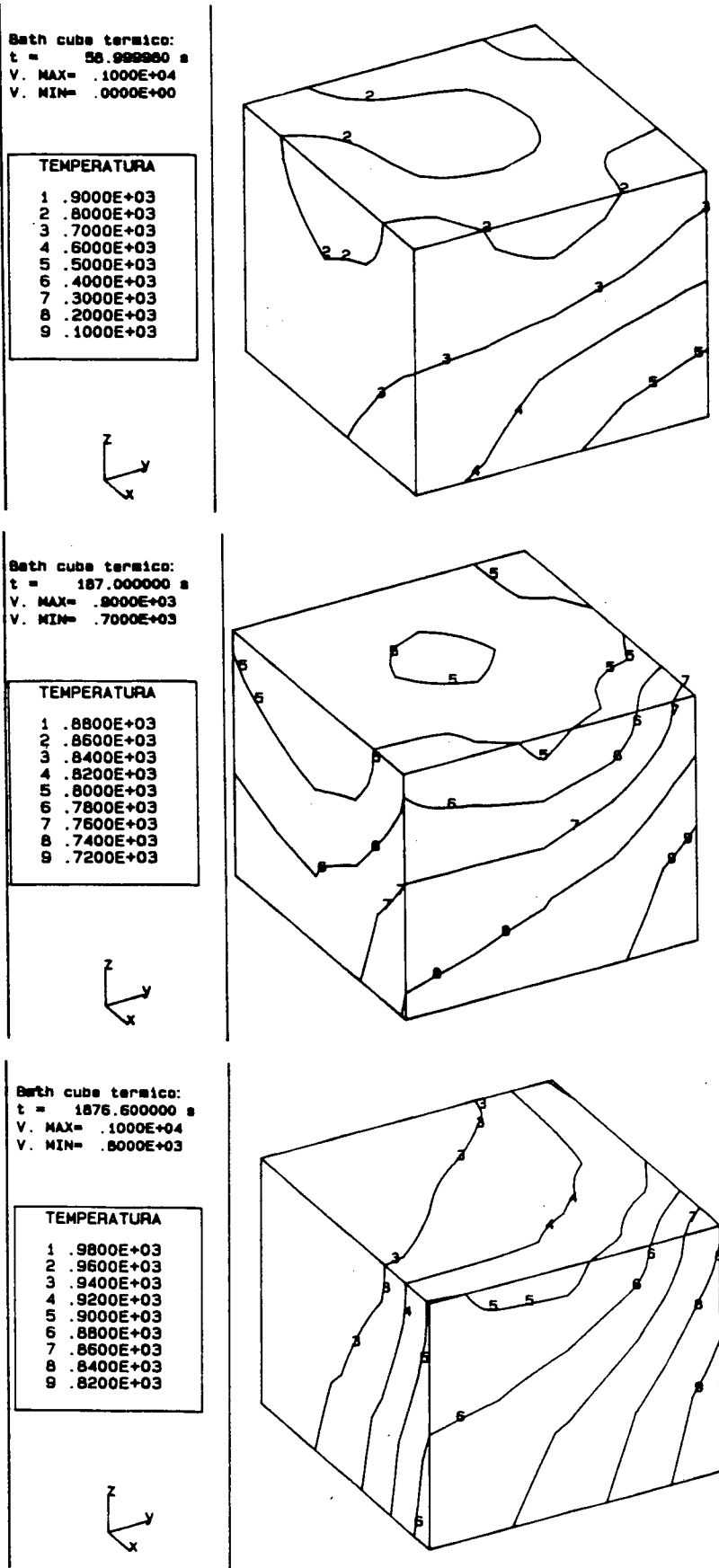


Fig. VI.43 (Parte II): Isotermas ($t = 59, 187 \text{ e } 1877 \text{ s}$)

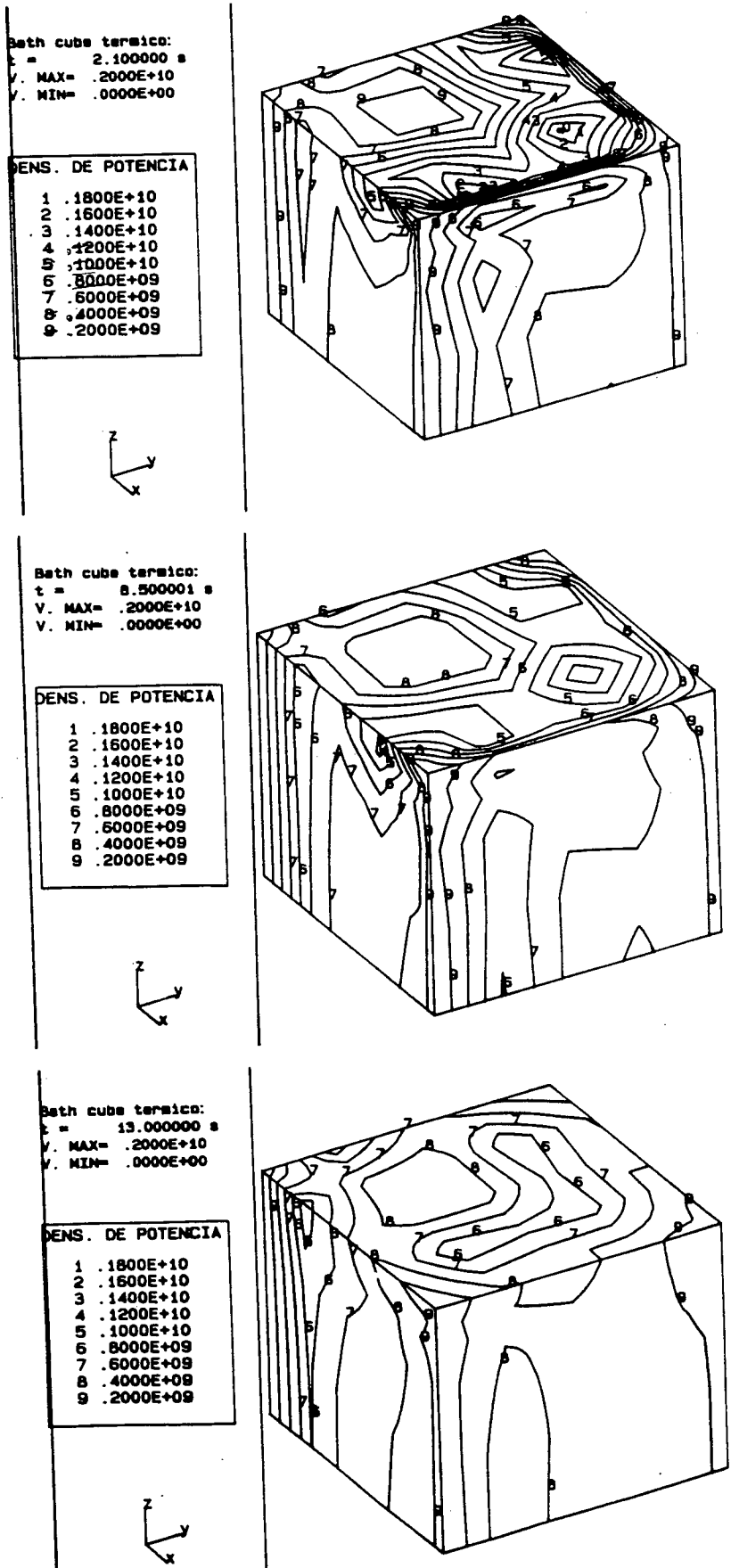


Fig. VI.44. (Parte I): Densidades de potência ($t = 2.1, 8.5 \text{ e } 13 \text{ s}$)

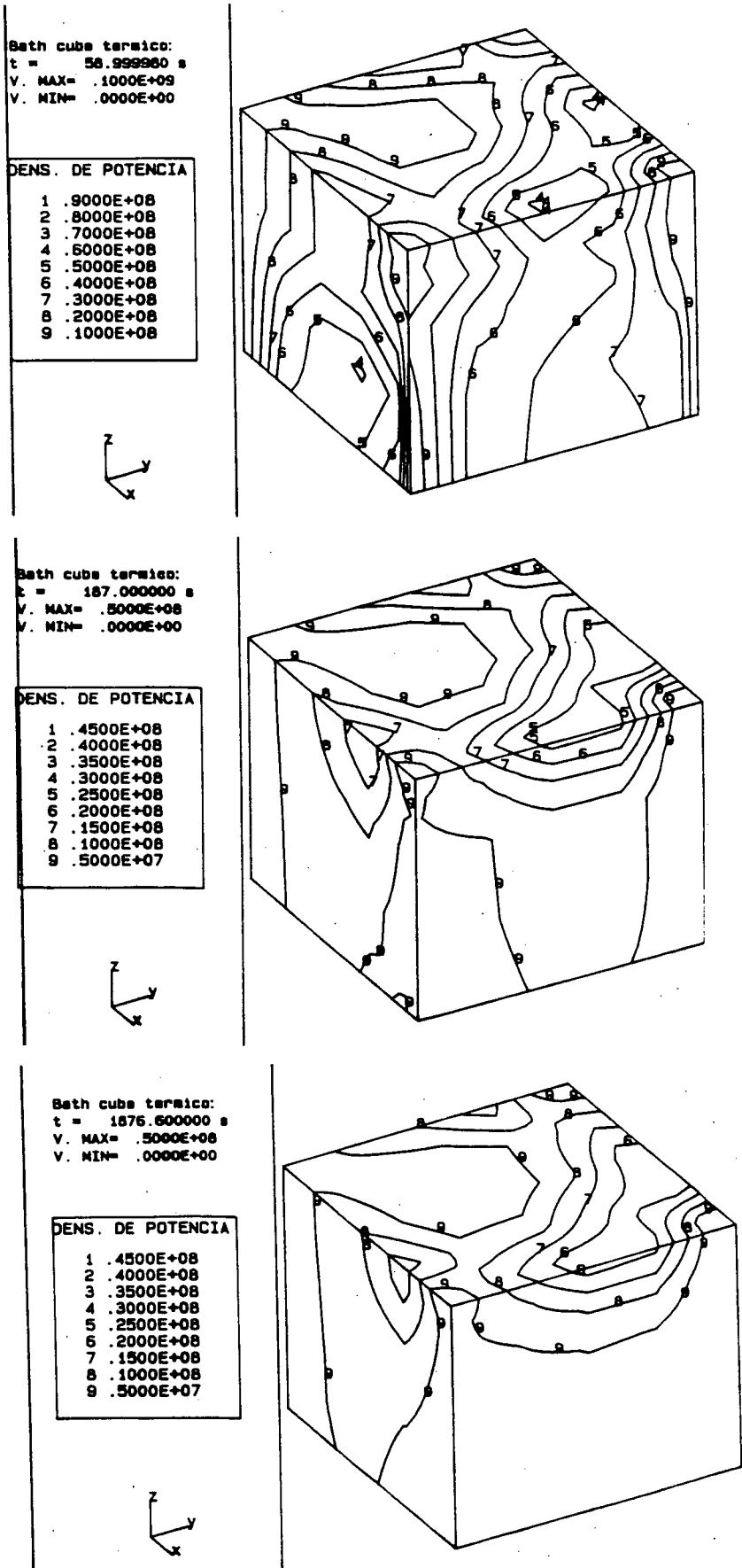


Fig. VI.44. (Parte II): Densidades de potência (t = 59, 187 e 1877 s)

CONCLUSÃO

No decorrer deste trabalho foram apresentadas várias técnicas relacionadas com o cálculo de campos eletromagnéticos tridimensionais utilizando elementos finitos.

Estudou-se detalhadamente os principais métodos existentes para se efetuar o cálculo de campos magnetostáticos 3-D no capítulo II. Após a análise crítica destas técnicas, escolheu-se a formulação dos dois potenciais escalares - o total e o reduzido - para ser desenvolvida e implantada em computador. O método foi testado através de problemas com solução analítica ou resultados experimentais, obtendo-se boa precisão.

No capítulo III, foram analisados os métodos existentes para o cálculo de campos eletromagnéticos quase-estáticos. Neste caso, não existe uma formulação com vantagens evidentes sobre todas as outras: para cada problema, existe uma técnica que melhor se adapta.

Para o caso específico do aquecimento indutivo, concluiu-se que o método mais indicado é o do potencial vetor modificado - A^* - associado aos potenciais escalares total e reduzido - ψ e ϕ . Por isto, ele foi adotado neste trabalho. O seu algoritmo foi desenvolvido, implantado e validado através de problemas mundialmente aceitos como padrão de teste.

No capítulo IV apresentou-se uma nova técnica para o cálculo do aquecimento indutivo em 3 dimensões. Ela permite a inclusão de fenômenos não lineares associados à variação das características constitutivas dos materiais com a temperatura e à passagem pela temperatura de Curie. O algoritmo adotado usa um método de discretização temporal que evita o cálculo iterativo não linear em cada intervalo de integração, atuando sobre o passo de tempo toda vez que o erro associado à resolução incompleta do problema não linear ultrapassa limites superiores ou inferiores pré-especificados. O método leva em conta, também, o erro associado à discretização temporal, que atua sobre o intervalo de integração de forma semelhante à anterior.

As técnicas desenvolvidas podem ser aplicadas a um grande número de problemas da Engenharia Elétrica para os quais a aproximação bidimensional não é válida.

Esperamos, assim, que este trabalho tenha contribuído para o aperfeiçoamento das técnicas de cálculo de campos eletromagnéticos tridimensionais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1-ABRAMOWITZ, M. & STEGUN, I.A. Handbook of mathematical functions, New York, Dover, 1972. pp: 589-626.
- 2-ALBANESE, R. & RUBINACCI, G. Solution of three dimensional eddy current problems by integral and differential methods. IEEE Trans. on Magn., MAG-24(1):98-101, January, 1988.
- 3-ALBANESE, R. & RUBINACCI, G. Formulation of eddy-current problem. IEE Proceedings, 137-(A) (1):16-22, January, 1990(a).
- 4-ALBANESE, R. & RUBINACCI, G. Eddy current computation using the \underline{I} , Ω method: The Bath-cube. COMPEL - The International Journal for computations and mathematics in Electrical and Electronic Engineering, Vol. 9, Sup. A: 206-208, 1990(b).
- 5-ALBANESE, R. & RUBINACCI, G. Magnetostatic field computations in terms of two-component vector potentials. Int. j. numer. methods eng., Vol. 29, 515-532, 1990(c).
- 6-ANGELERI, F.; SONNAD, V.; BATHE, K.J. Studies of finite element procedures - an evaluation of preconditioned iterative solvers, Computers & Structures, Vol. 32 (3/4): 671-677, 1989.
- 7-APOSTOL, T.M. Mathematical Analysis, Palo Alto, Addison-Wesley, 1957. p. 177-181.
- 8-ARAÚJO, C. Transmissão de calor, Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1978. 390 p.
- 9-ARMSTRONG, A.G.A.M & BIDDLECOMBE, C.S. The PE2D Package for transient eddy current analysis, IEEE Trans. on Magn., MAG-18(2): 411-415, March, 1982.
- 10-AZIZ, M.A. & JENNINGS, A. A robust incomplete Cholesky conjugate Gradient Algorithm, Int. j. numer. methods eng., Vol. 20, 949-966, 1984.
- 11-BARTON, M.L. & CENDES, Z.J. New vector finite elements for three

dimensional magnetic field computation. Journal of Applied Physics, 61(8): 3919-3921, 1987.

- 12-BASTOS, J.P.A. Calcul de Champs Magnétiques par une méthode d'éléments finis à 2 et 3 dimensions - Contribution à la détermination des caractéristiques de machine à reluctance variable polydiscoides, Paris, Université Pierre et Marie Curie, 1984. Tese de Doctorat d'Etat ès-Sciences.
- 13-BASTOS, J.P.A. Eletromagnetismo e Cálculo de campos, Florianópolis, Editora da UFSC, 1989. 452 p.
- 14-BASTOS, J.P.A.; SADOWISKI, N.; CARLSON, R. A modeling approach of a coupled problem between electrical current and its thermal effects, IEEE Trans. on Magn., MAG-26(2): 536-539, March, 1990.
- 15-BATHE, K.J. Finite Element procedures in Engineering Analysis. Englewood Cliffs (New Jersey-USA), Prentice Hall, 1982.
- 16-BAUDON, Y.; BRASSARD, S.; MASSE, Ph. The use of a generator system to solve magnetothermodynamic problems by the finite element method. IEEE Trans. on Magn., MAG-21(6): 2563-2566, November, 1985.
- 17-BECKER, E.B.; CAREY, G.F.; ODEN, J.T. Finite elements: an introduction, Vol I in the Texas Finite Element series, Englewood Cliffs (New Jersey - USA), Prentice Hall, 1981.
- 18-BIDDLECOMBE, C.S.; HEIGWAY, E.A.; SIMKIN, J.; TROWBRIDGE, C.W. Methods for eddy current computation in three dimensions , IEEE Trans. on Magn., MAG-18(2): 492-497, March, 1982.
- 19-BINNS, K.J. & LAWRENSON, P.J. Analysis and computation of Electric and Magnetic Field Problems. Oxford, 1973, 324 p.
- 20-BÍRÓ, O. Use of a two-component vector potential for 3-D Eddy current calculations. IEEE Trans. on Magnetics, MAG-24(1): 102-105, January, 1988.
- 21-BÍRÓ, O. & PREIS, K. On the use of the magnetic vector potential in the

- finite element analysis of three-dimensional eddy currents, IEEE Trans. on Magn., Vol. 25(4): 3145-3159, July 1989.
- 22-BÍRÓ, O. & PREIS, K. Finite element analysis of 3-D Eddy currents, IEEE Trans. on Magn., Vol. 26(2): 418-423, March, 1990.
- 23-BLEUVIN, H. Analyse par la methode des elements finis des phenomenes magneto-thermiques - application aux systemes de chauffage par induction., Grenoble (França), Institute National Polytechnique de Grenoble, 1984. Tese de Docteur-Ingenieur.
- 24-BOSSAVIT, A. On the numerical analysis of eddy-current problems, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 27 : 303-318, 1981
- 25-BOSSAVIT, A. Two dual formulations of the 3-D eddy-current problem. COMPEL - The Int. Journal for computations and mathematics in electrical and electronic engineering, Vol. 4(2): 103-116, 1985.
- 26-BOSSAVIT, A. A rationale for edge-elements in 3-D fields computations. IEEE Trans. on Magn., MAG-24(1): 74-79, Jan., 1988(a).
- 27-BOSSAVIT, A. Magnetostatic problems in multiply connected regions: some properties of the curl operator. IEE Proceedings, 135-A (3): 179-187, March, 1988(b)
- 28-BOSSAVIT, A. Whitney forms: a class of finite elements for three-dimensional computations in electromagnetism. IEE Proceedings, 135-A (8): 493-500, November, 1988(c).
- 29-BOSSAVIT, A. Results for Benchmark problem 5, The Bath-cube experiment: an aluminium block in an alternating field. COMPEL - The Int. Journal for computations and mathematics in electrical and electronic engineering, Vol. 7 (1&2): 81-88, 1988(d).
- 30-BOSSAVIT, A. Introduction aux formulations variationnelles in electromagnetisme, Paris, Publicação interna da Ecole Supérieure d'Electricité, dezembro, 1988(e).

- 31-BOSSAVIT, A. Simplicial Finite elements for scattering problems in electromagnetism. Computer Methods in applied mechanics and engineering, 76: 299-316, 1989.
- 32-BOSSAVIT, A. Solving Maxwell equations in a closed cavity and the question of 'spurious modes', IEEE Trans. on Magn., Vol. 26(2): 702-705, March 1990.
- 33-BOSSAVIT, A. & VERITÉ, J.C. A mixed FEM-BIEM method to solve 3-D eddy current problems. IEEE Trans. on Magn., MAG-18(2): 431-435, March, 1982.
- 34-BOSSAVIT, A. & VERITÉ, J.C. The Trifou Code: solving the 3-D Eddy-currents problem by using H as state variable. IEEE Trans. on Magn., MAG-19(6): 2465-2470, November, 1983.
- 35-BROWN, M.L. Calculation of 3-dimensional eddy currents at power frequencies, IEE Proceedings, 129-A(1): 46-53, January, 1982.
- 36-BRYANT, C.F.; EMSON, C.R.I.; TROWBRIDGE, C.W. A comparison of Lorentz Gauge Formulations in eddy currents computations. IEEE Trans. on Magn., MAG-26(2):430-433, March, 1990.
- 37-CARPENTER, C.J. Comparison of alternative formulations of 3- dimensional magnetic-field and eddy-current problems at power frequencies, IEE Proceedings, 124(11): 1026-1034, November, 1977.
- 38-CHARI, M.V.K.; CSENDES, Z.J.; SILVESTER, P.; KONRAD, A.; PALMO, M.A. Three-dimensional magnetostatic field analysis of electrical machinery by the finite-element method. IEEE Trans.on Power Apparatus and Systems , PAS-100 (8): 4007-4019, August, 1981.
- 39-CHARI, M.V.K.; KONRAD, A.; PALMO, M.A.; D'ANGELO, J. Three dimensional vector potential analysis for machine field problems IEEE Trans. on Magn. , MAG-18(2): 436-446, March, 1982.
- 40-CHARI, M.V.K.; D'ANGELO, J.; PALMO, M.A.; SHARMA, D.K. Application of three-dimensional electromagnetic analysis method to electrical machinery and devices -Parts I and II - IEEE Trans. on Energy Conversion , EC-1(2):

145-157, June, 1986.

- 41-CHUNG, T.J. Finite Element Analysis in Fluid Dynamics , New York, McGraw-Hill, 1977. 615 p.
- 42-COULOMB, J.L. Analyse Tridimensionnelle des champs électriques et magnétiques par la méthode des éléments finis , Grenoble (France), Institute National Polytechnique de Grenoble, 1981. Tese de Docteur ès-sciences physiques.
- 43-CSENDES, Z.J.; WEISS, J.; HOOLE, S.R.H. Alternative vector potential formulations of 3-D magnetostatic field problems. IEEE Trans. Magn., MAG-18(2): 367-372, March, 1982.
- 44-DAVIDSON, J.A.M. & BALCHIN, M.J. Experimental verification of network method for calculating flux and eddy-current distributions in three dimensions, IEE Proceedings, 128-A (7): 492-496, 1981.
- 45-DEMERDASH, N.A.; NEHL, T.W.; FOUAD, F.A.; MOHAMMED, O.A. Three dimensional finite element vector potential formulation of magnetic fields in electrical apparatus. IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems , PAS-100 (8) : 4104-4111, August, 1981(a)
- 46-DEMERDASH, N.A.; NEHL, T.W.; MOHAMMED, O.A.; FOUAD, F.A. Experimental verification and application of the three dimensional finite element magnetic vector potential method in electrical apparatus. IEEE Trans. on Power Apparatus and systems, PAS-100(8): 4112-4122, August, 1981(b)
- 47-DESCHAMPS, G.A. Electromagnetics and differential forms, Proc. IEEE, Vol-69 (6): 676-696, June, 1981.
- 48-DESHMUKH, N.K. & MUKHERJI, K.C. Finite-element analysis of three-dimensional eddy currents in attractive electromagnetic levitation. IEE Proceedings , 134(A)(8): 651-662, September, 1987.
- 49-DHATT, G. & TOUZOT, G. Une présentation de la méthode des éléments finis, Paris, Maloine, 1984. 543 p.

- 50-DISERENS, N.J. A search for faster magnetic field routines for curved conductors. IEEE Trans. on Magn., MAG-19(6): 2304-2306, November, 1983
- 51-DU TERRAIL, Y.; SABONNADIÈRE, J.C.; MASSE, P.; COULOMB, J.L. Nonlinear complex Finite Elements analysis of electromagnetic field in steady-state AC devices. IEEE Trans. on Magn. , MAG-20(4) : 549-552, July, 1984.
- 52-EMSON, C.R.I. Results for a hollow sphere in uniform field (Benchmark Problem 6) COMPEL-The International Journal for comput. and math. in electrical and electronic engineering, Vol-7 (1&2): 89-101, 1988.
- 53-EMSON, C.R.I. Summary of TEAM Workshop test problems 5, 7 and 11 using the package CARMEN, COMPEL- The International Journal for comput. and math. in electrical and electronic engineering, Vol-9, Sup. A: 191-196, 1990.
- 54-EMSON, C.R.I. & SIMKIN, J. An optimal method for 3-D eddy currents, IEEE Trans. on Magnetics , MAG-19(6): 2450-2452, November , 1983.
- 55-EMSON, C.R.I.; SIMKIN, J.; TROWBRIDGE, C.W. Further developments in three dimensional eddy current analysis , IEEE Trans. on Magnetics , MAG-21(6) : 2231-2234, November, 1985.
- 56-FLETCHER, R. Conjugate gradient methods for indefinite systems, In: Proceedings of Dundee Conference on numerical analysis - 1976, edited by G.A. Watson, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- 57-GIBSON, R.C. A computer method of calculation of eddy current heating of magnetic material with a comparison between predicted and measured results in a 2 MVA induction furnace. In: 1st Conference on the computation of electromagnetic fields (COMPUMAG), Anais..., Oxford (Inglaterra), 1976: 294-300.
- 58-GRANDSHTEYN, I.S. & RYZHIC, I.M. Table of integrals, series and products, New York, Academic Press, 1980.
- 59-HAMMOND, P. Use of potentials in calculation of electromagnetic fields, IEE Proceedings , 129-A(2): 106-112, March, 1982.

- 60-HARROLD, C.S. & SIMKIN, J. Cutting multiply connected domains, IEEE Trans. on Magn., MAG-21(6): 2495-2498, November, 1985.
- 61-HASEBE, S. & KANO, Y. About treatment of gauge of A in 3-D magnetostatic analysis. IEEE Trans. on Magn., MAG-23(5) : 3305-3307, September, 1987.
- 62-HENNEBERGER, G.; SABONNADIÈRE, J.C.; SATTLER, Ph.K.; SHEN, D. An accelerated Newton-Raphson method associated with the ICCG method. IEEE Trans. Magn., MAG-26 (2): 709-711, March, 1990.
- 63-HESTENES, M.R. & STIEFEL, E. Methods of conjugate gradients for solving linear systems, J. Res. Nat. Bur. Standards, 49: 404-436, 1952.
- 64-HOLMAN, J.P. Transferência de calor , São Paulo, McGraw-Hill, 1983. 639 p.
- 65-HOOLE, S.R.H. Computer-aided analysis and design of electromagnetic devices, New York, Elsevier Science Publishing, 1989. 479 p.
- 66-HOOLE, S.R.H.; RIOS, R.; YOGANATHAN, S. Vector potential formulations and finite element trial functions, International Journal for numerical methods in eng., Vol-26: 95-108, 1988.
- 67-HUGHES, T.J.R. The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis, Englewood Cliffs (New Jersey - USA), Prentice Hall International, 1987. 803 p.
- 68-JACK, A.G. & MECROW, B.C. Calculation of three-dimensional electromagnetic fields involving laminar eddy currents. IEE Proceedings , 134(A)(8) : 663-671, September, 1987.
- 69-JACK, A.G. & MECROW, B.C. Methods for magnetically nonlinear problems involving significant hysteresis and eddy currents. IEEE Trans. on Magn., MAG-26 (2): 424-429, March, 1990.
- 70-JACOBS, D.A.H. Generalizations of the conjugate gradient method for solving non-symmetric and complex systems of algebraic equations, Central Electricity Generating Board, RD/L/N 70/80, 1980.

- 71-JIABING, W. & BAOQUIN, T. Calculation of 3D eddy current problems using a modified $T-\Omega$ method, IEEE Trans. on Magn., MAG-24 (1): 114-117, January, 1988.
- 72-KAMEARI, A. Three dimensional eddy current calculation using finite element method with $A-V$ in conductor and Ω in vacuum. IEEE Trans. on Magn., MAG-24 (1):118-121, January, 1988.
- 73-KAMEARI, A. Calculation of transient 3D eddy current using edge-elements. IEEE Trans. on Magn., MAG-26 (2):466-469, March, 1990.
- 74-KANAYAMA, H.; MOTOYAMA, H.; ENDO, K.; KIUKUCHI, F. Three-dimensional magnetostatic analysis using Nedelec's elements. IEEE Trans. on Magn., MAG-26 (2): 682-685, March, 1990.
- 75-KOTIUGA, P.R. Well-posed three dimensional magnetostatics formulations, Montreal (Canada), McGill University, 1982. Tese: Master of engineering.
- 76-KREITH, F. Principios da Transmissão de calor , São Paulo, Edgar Blücher, 1973. 650 p.
- 77-LASCAUX, P. & THÉODOR, R. Analyse Numérique Matricielle appliquée a l'art de l'ingénieur, Paris, Masson, 1986. Vol. 1 & 2. 790 p.
- 78-LAVERS, J.D. Numerical solution methods for electroheat problems IEEE Trans. on Magn., MAG-19(6): 2566-2572, November , 1983.
- 79-LAVERS, J.D.; AHMED, M.R.; CAO, M.; KALAICHELVAN, S. An evaluation of loss models for nonlinear eddy currents problems. IEEE Trans. on Magn., MAG-21 (5): 1850-1852, September, 1985.
- 80-LAVERS, J.D. & KALAICHELVAN, S. Experience using a preconditioned complex bi-conjugate gradient method with finite element eddy current and electroheat problems. IEEE Trans. on Magn., MAG-21 (6): 2351-2354, Nov., 1985.
- 81-LEONARD, P.J. & RODGER, D. Finite element scheme for transient 3D eddy

- currents, IEEE Trans. on Magn., MAG-24(1): 90-93, January, 1988.
- 82-LUENBERGER, D.G. Optimization by vector space methods, New York, John Wiley & Sons, 1969. 325 p.
- 83-MACEDO, A. Eletromagnetismo, Rio de Janeiro, Guanabara, 1988, 638 p.
- 84-MAGELE, C.; STOGNER, H.; PREIS, K. Comparison of different finite element formulations for 3D magnetostatic problems, IEEE Trans. on Magn., MAG-24 (1): 31-34, January, 1988.
- 85-MANTEUFFEL, T.A. The shifted incomplete Cholesky factorization. Sandia Laboratories SAND 78-8226, 1978.
- 86-MASSÉ, Ph; MOREL, B.; BREVILLE, T. A finite element prediction correction scheme for magneto-thermal coupled problem during Curie transition, IEEE Trans. on Magn., MAG-21 (5): 1871-1873, September, 1985.
- 87-MAXWELL, J.C. A treatise on electricity and magnetism, New York, Dover, 1891. 3rd edition. (2 vol.) Vol. 1: 506 p.; Vol. 2: 500 p.
- 88-MAYERGOYZ, I.D.; CHARI, M.V.K.; D'ANGELO, J. A new scalar potential formulation for three dimensional magnetostatic problems IEEE Trans. on Magn., MAG-23(6): 3889-3894, November, 1987.
- 89-McDANIEL, T.W.; FERNANDEZ, R.B.; ROOT, R.R.; ANDERSON, R.B. An accurate scalar potential finite element method for linear, two-dimensional magnetostatics problems. Intern. j. num. Meth. engng., 19: 725-737, 1983.
- 90-MEIJERINK, J.A. & Van der VORST, H.A. An iterative solution method for linear systems of which the coefficient matrix is a symmetric M-matrix, Mathematics of computations, Vol-31 (137): 148-162, January, 1977.
- 91-MESQUITA, R.C. & BASTOS, J.P.A. Cálculo de campos magnetostáticos não lineares tridimensionais utilizando elementos finitos. In: II Simpósio Franco-Brasileiro sobre cálculo de campos elétricos e magnéticos, Anais ..., São Paulo, Universidade de São Paulo, 1989(a). p: 58-69.

- 92-MESQUITA, R.C. & BASTOS, J.P.A. Cálculo do campo magnético criado por configurações típicas de corrente. In: II Simpósio Franco-Brasileiro sobre cálculo de campos elétricos e magnéticos, Anais ..., São Paulo, Universidade de São Paulo, 1989(b). p: 155-169.
- 93-MESQUITA, R.C. & BASTOS, J.P.A. Solution of the TEAM Workshop problem 5 using a personal computer. COMPEL - The International Journal for Computation and mathematics in electrical and electronic engineering, Vol-9 (Sup. A): 203-205, 1990(a).
- 94-MESQUITA, R.C. & BASTOS, J.P.A. Cálculo de correntes de Foucault em 3 dimensões utilizando elementos finitos. In: 8^o Congresso Brasileiro de Automática, Anais ..., Belém (PA), Universidade Federal do Pará, 1990(b). p:518-523.
- 95-MESQUITA, R.C. & BASTOS, J.P.A. 3D Finite element solution of induction heating problems with efficient time-stepping. Artigo aceito para apresentação no: The Fourth Biennial IEEE Conference on Electromagnetic field computation. Toronto (Canadá), outubro, 1990(c).
- 96-MINNICH, S.H.; TANDON, S.C.; ATKINSON, D.R. Comparison of two methods for modeling large signal alternating magnetic fields using finite-elements. IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems , PAS-103(10): 2953-2960, October, 1984.
- 97-MOHAMMED, O.A.; DAVIS, W.A.; POPOVIC, B.D.; NEHL, T.W.; DEMERDASH, N.A. On the uniqueness of solution of magnetostatic vector potential problems by three-dimensional finite-element methods. Journal of Applied Physics , 53 (11): 8402-8404, Nov., 1982.
- 98-MOLFINO, P. & REPETTO, M. Comparison of different strategies for the analysis of nonlinear coupled thermo-magnetic problems under pulsed conditions, IEEE Trans. on Magn., MAG-24 (3): 559-562, March, 1990.
- 99-MORINAIS, G.C.; RAIZER, A.; MEUNIER, G. Cálculo de correntes de Foucault tridimensionais em dispositivos eletromagnéticos. In: 8^o Congresso Brasileiro de Automática, Anais ..., Belém (PA), Universidade Federal do Pará, 1990. p: 530-535.

- 100-MORISUE, T. Magnetic vector potential and electric scalar potential in three-dimensional eddy current problem. IEEE Trans. on Magn. , MAG-18(2): 531-535, March, 1982.
- 101-MORISUE, T. A new formulation of the magnetic vector potential method in 3-D multiply connected regions, IEEE Trans. on magn., MAG-24 (1): 110-113, Jan., 1988
- 102-MORISUE, T. The gauge and topology problem in using the magnetic vector potential, COMPEL - The International Journal for computations and mathematics in electrical and electronic engineering, Vol-9 (Sup. A): 1-6, 1990.
- 103-MORISUE, T. & FUKUMI, M. 3D Eddy current calculation using the magnetic vector potential, IEEE Trans. on Magn., MAG-24 (1): 106-109, Jan., 1988.
- 104-MORSE, P.M. & FESBACH, H. Methods of theoretical Physics , New York, McGraw-Hill, 1953, p. 1762-1767.
- 105-MUR, G. Optimum choice of finite elements for computing three-dimensional electromagnetic fields in inhomogeneous media. IEEE Trans. on Magn., MAG-24 (1): 330-333, Jan., 1988.
- 106-MUR, G. A mixed finite element method for computing three-dimensional time-domain electromagnetic fields in strongly inhomogeneous media, IEEE Trans. on Magn., MAG-26 (2): 674-677, March, 1990.
- 107-MUR, G. & HOOP, A.T. A finite element method for computing three-dimensional electromagnetic fields in inhomogeneous media, IEEE Trans. on Magn., MAG-21 (6): 2188-2191, Nov., 1985.
- 108-NABETA, S.I. Solução de problemas magnetostáticos por elementos finitos utilizando o ICCG, São Paulo, Universidade de São Paulo, 1990. 67 p. Dissertação de mestrado.
- 109-NAKATA, T.; TAKAHASHI, N.; FUJIWARA, K. Physical meaning of $\text{grad}\phi$ in eddy current analysis using magnetic vector potentials. IEEE Trans. on Magn. ,

- MAG-24 (1): 178-181, Jan. , 1988(a).
- 110-NAKATA, T.; TAKAHASHI, N.; FUJIWARA, K.; OKADA, Y. Improvements on the T- Ω method for eddy current analysis. IEEE Trans. on Magn. , MAG-24 (1): 94-97, January, 1988(b).
- 111-NAKATA, T.; TAKAHASHI, N.; FUJIWARA, K. 3D Finite element analysis of magnetic fields of IEEJ model. In: Electromagnetic fields in electrical Engineering, Oxford (Inglaterra), International Academic Publishers (Pergamon Press), 1989: p. 285-288.
- 112-NAKATA, T.; TAKAHASHI, N.; FUJIWARA, K.; MURAMATSU, K. Investigation of effectiveness of various methods with different unknown variables for 3-D eddy current analysis. IEEE Trans. on Magn., MAG-26 (2):442-445, March, 1990(a).
- 113-NAKATA, T.; TAKASHI, N.; FUJIWARA, K.; IMAI, T. Effects of permeability of magnetic materials on errors on the T- Ω method, IEEE Trans. on Magn., MAG-26 (2): 698-701, March, 1990(b)
- 114-NAKATA, T.; TAKAHASHI, N.; FUJIWARA, K.; MURAMATSU, K.; IMAI, T. Comparison of various methods of analysis and finite elements in 3-D magnetic field analysis. Artigo apresentado na: The Fourth Biennial IEEE Conference on Electromagnetic field computation. Toronto, Canadá, outubro, 1990(c).
- 115-NEDELEC, J.C. Mixed Finite elements in \mathbb{R}^3 . Numerische Mathematik, Vol. 35: 315-341, 1980.
- 116-NICOLAS, A. Application de la methode des equations integrales de frontiere a la modelisation des phenomenes d'induction, Lyon (França), L'Universite Claude Bernard, 1983. 118 p. Tese de Doctorat d'etat ès-sciences.
- 117-NICOLAS, A. 3D Eddy current solution by BIE techniques. IEEE Trans. on Magn. , MAG-24 (1): 130-133, January, 1988.
- 118-ODEN, J.T. & REDDY, J.N. An Introduction to the mathematical theory of

- finite elements, New York, John Wiley & Sons, 1976. 429 p.
- 119-PILLSBURY Jr., R.D. A three dimensional eddy current formulation using two potentials: The magnetic vector potential and total magnetic scalar potential. IEEE Trans. on Magn., MAG-19 (6): 2284-2287, November, 1983.
- 120-PISSANETZKY, S. Solution of three-dimensional, anisotropic, nonlinear problems of magnetostatics using two scalar potentials, finite and infinite multipolar elements and automatic mesh generation. IEEE Trans. on Magn., MAG-18 (2): 346-350, March, 1982.
- 121-PISSANETZKY, S. & XIANG, Y. The extended two-scalar potentials formulation of 3-D nonlinear magnetostatics. COMPEL - The International Journal for computations and mathematics in electrical and electronic engineering, Vol-9 (Sup. A): 21-24, 1990.
- 122-POLAK, S.J.; WACHTERS, A.J.H.; van WELIJ, S.S. A new 3-D eddy current model. IEEE Trans. on Magn. , MAG-19(6): 2447-2449, November, 1983.
- 123-PRESTON, T.W. & REECE, A.B.J. Solution of 3-dimensional eddy current problems: the T- Ω method. IEEE Trans. on Magn. , MAG-18 (2): 486-491, March, 1982.
- 124-RAIZER, A. Contribuição a elaboração de um sistema tridimensional de cálculo de campos elétricos e magnéticos, utilizando a técnica de elementos finitos . Florianópolis, Universidade Federal de Santa Catarina, 1987. 144 p. Tese de Mestrado.
- 125-REDDY, J.N. Applied functional analysis and variational methods in engineering, New York, McGraw-Hill, 1986. 546 p.
- 126-REN, Z.; BOUILLAULT, F.; RAZEK, A.; BOSSAVIT, A.; VÉRITÉ, J.C. A new hybrid model using electric field formulation for 3D eddy current problems, IEEE Trans. on Mag., MAG-26 (2): 470-473, March, 1990.
- 127-REINHART, W.; STOGNER, H.; PREIS, K. Calculation of 3-D-Eddy current problems by finite element method using either an electric or a magnetic vector potential. IEEE Trans. on Magn., MAG-24(1): 122-125, January, 1988.

- 128-RODGER, D. Finite-element method for calculating power frequency 3-dimensional electromagnetic field distributions. IEE Proceedings , 130-A (5): 233-238, July, 1983.
- 129-RODGER, D. Benchmark Problem 3 (The Bathe-plate) COMPEL- The International journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineerig, Vol-7 (1&2): 47-63, 1988.
- 130-RODGER, D. & ATKINSON, N. 3D Eddy currents in multiply connected thin sheet conductors IEEE Trans. on Magn. , MAG-23 (5): 3047-3049, September, 1987.
- 131-RODGER, D. & EASTHAM, J.F. A formulation for low frequency eddy current solutions, IEEE Trans. on Magn., MAG-19 (6): 2443-2446, November, 1983.
- 132-RODGER, D. & EASTHAM, J.F. Multiply connected regions in the $A-\psi$ three dimensional eddy-current formulation. IEE Proceedings ; 134(A) (1): 58-66, January, 1987.
- 133-RODGER, D.; LEONARD, P.J.; LAI, H.C. Some recent developments in 3D eddy current computation. COMPEL-The International Journal for computations and mathematics in electrical and electronic engineering, Vol-9 (Sup. A): 25-30, 1990.
- 134-RUCKER, W.M. & RICHTER, K.R. A BEM code for 3-D eddy current calculations, IEEE Trans. on Magn., MAG-26 (2): 462-465, March, 1990.
- 135-SALON, S.J. & PENG, J.P. Three dimensional eddy currents using a four component finite element formulation. IEEE Trans. on Magn. , MAG-20 (5): 1992-1994, September, 1984.
- 136-SILVESTER, P. A general high-order finite-element waveguide analysis program. IEEE Trans. Microwave Theory Tech., MTT-17 (4): 204-210, April, 1969.
- 137-SILVESTER, P. & CHARI, M.V.K. Finite element solution of saturable magnetic field problems. IEEE Trans. on Power Apparatus and System,

PAS-89 (7): 1642-1650, Sept/Oct., 1970.

- 138-SILVESTER, P. & FERRARI, R.L. Finite elements for electrical engineers, Cambridge (UK), Cambridge University Press, 1983.
- 139-SIMKIN, J. & TROWBRIDGE, C.W. Which Potential? A comparison of various scalar and vector potentials for the numerical solution of the non-linear Poisson problem. Rutherford Laboratory, RL-78-009/B, January, 1978.
- 140-SIMKIN, J. & TROWBRIDGE, C.W. On the use of the total scalar potential in the numerical solution of field problems in electromagnetics. Intern. j. num. Meth. engng., 14: 423-440, 1979.
- 141-SIMKIN, J. & TROWBRIDGE, C.W. Three dimensional nonlinear electromagnetic field computations, using scalar potentials. IEE Proceedings , 127(B)(6): 368-374, November, 1980.
- 142-SIMKIN, J. Eddy current modelling in three dimensions, IEEE Trans. on Magn. , MAG-22(5): 609-613, September, 1986.
- 143-SMYTHE, W.R. Static and Dynamic Electricity , New York, McGraw- Hill, 1968, p. 284-287.
- 144-STRATTON, J.A. Electromagnetic Theory , New York, McGraw-Hill, 1941. 615p.
- 145-SUSSMAN, M.M. Remarks on computational magnetostatics. Int. j. numer. methods eng., Vol-26: 987-1000, 1988
- 146-TOKUMASU, T.; DOI, S.; ITO, K.; YAMAMOTO, M. An electric vector potential method approach for 3-D electromagnetic field in turbine generator stator core end. IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems , PAS-103(6): 1330-1338, June, 1984.
- 147-TROWBRIDGE, C.W. Low frequency electromagnetic field computation. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering , 52: 653-674, 1985.
- 148-TROWBRIDGE, C.W. Electromagnetic computing: the way ahead? IEEE Trans. on Magn. , MAG-24(1): 13-18, January, 1988.

- 149-TURNER, L. TEAM Workshops: Test problems, Argonne (USA), Argonne National Laboratory, April, 1988.
- 150-TURNER, L. TEAM (Testing Electromagnetic Analysis Methods) Workshops: Problems for round 3, Argonne (USA), Argonne National Laboratory, April, 1988.
- 151-TURNER, L.R.; DAVEY, K.; EMSON, C.R.I.; MIYA, K.; NAKATA, T.; NICOLAS, A. Problems and Workshops for eddy current code comparison. IEEE Trans. on Magn., MAG-24(1): 431-434, January, 1988.
- 152-Van der VORST, H.A. & MELLISSEN, J.B.M. A Petrov-Galerkin type method for solving $Ax = b$, where A is symmetric complex, IEEE Trans. on Magn., MAG-26 (2): 706-708, March, 1990.
- 153-VAN WELIJ, J.S. Calculation of eddy currents in terms of H on hexaedra. IEEE Trans. on Magn., MAG-21(6): 2239-2241, November, 1985.
- 154-VÉRITÉ, J.C. Calculations of Multivalued Potentials in exterior regions. IEEE Trans. on Magn., MAG-23(3): 1881-1887, May, 1987.
- 155-VÉRITÉ, J.C.; BUNOUF, G.; TANNEAU, G. Derniers développements en calcul tridimensionnel de courants de Foucault. In: II Simpósio Franco-Brasileiro sobre cálculo de campos elétricos e magnéticos, São Paulo, Universidade de São Paulo, 1989: (artigo apresentado em separado, não consta dos anais).
- 156-WHITNEY, H. Geometric integration theory, Princeton (New Jersey, USA), Princeton University Press, 1957. 387 p.
- 157-WINSLOW, A.M. Numerical solution of quasilinear Poisson equation in a nonuniform triangle mesh, J. Comp. Phys., Vol. 2 : 149-172, 1967.
- 158-YOSHIMOTO, T.; YAMADA, S.; BESSHO, K. Four component three dimensional fem analysis of flux concentration apparatus with four plates. IEEE Trans. on Magn., MAG-24(1): 126-129, January, 1988.
- 159-ZIENKIEWICZ, O.C. The finite element method. London, McGraw-Hill, 1977,

787 p.

- 160-ZIENKIEWICZ, O.C.; LYNESS, J.; OWEN, D.P.J. Three-dimensional magnetic field determination using a scalar potential. A finite element solution. IEEE Trans. on Magn., MAG-13(5): 1649- 1656, September, 1977.
- 161-ZIENKIEWICZ, O.C.; WOOD, W.L.; HINE, N.W.; TAYLOR, R.L. A unified set of single step algorithms - Part 1: General formulation and applications, Int. j. numer. methods eng., Vol-20: 1529-1552, 1984.

APÊNDICE : CÁLCULO DO CAMPO MAGNÉTICO CRIADO POR CONFIGURAÇÕES TÍPICAS DE CORRENTE

Este apêndice apresenta técnicas para o cálculo do campo magnético criado por algumas configurações típicas de corrente:

- Um segmento de reta;
- Um arco de círculo;
- Uma casca bidimensional plana;
- Uma casca cilíndrica;
- Um paralelepípedo;
- Um arco volumétrico de cilindro.

A combinação destes condutores típicos permite a representação de praticamente todos os enrolamentos condutores possíveis de serem encontrados em Engenharia Elétrica.

O campo H_s é dado, em qualquer ponto do espaço, pela lei de Biot-Savart:

$$H_s = \frac{1}{4\pi} \int_{E_j} \frac{J \wedge \underline{r}_0}{\|\underline{r}\|^2} d\Omega \quad (A1)$$

onde:

\underline{r}_0 - vetor unitário, posicionado entre o elemento portador de corrente e o ponto de observação;

$\|\underline{r}\|$ - módulo da distância entre os dois pontos anteriores;

E_j - região na qual circulam as correntes.

A geometria pertinente à lei de Biot-Savart é mostrada na figura A1.

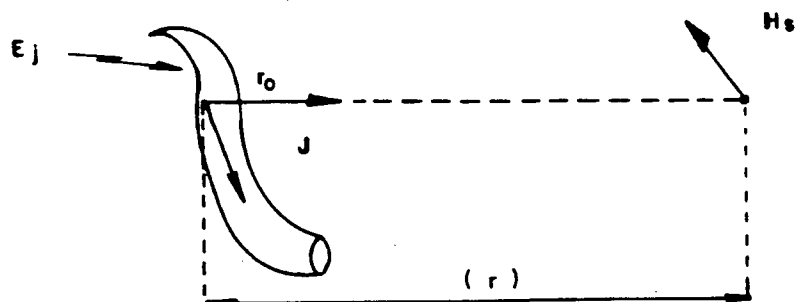


Figura A1: Geometria pertinente à lei de Biot-Savart.

O cálculo de H_s absorve uma grande parte do tempo de processamento de programas que utilizam a técnica dos dois potenciais escalares. Alguns autores (Diserens, 1983) chegam a citar porcentagens da ordem de 50% do tempo de cálculo. Adotando-se uma integração estritamente numérica, o cálculo da integral (A1) realmente torna-se demorado. Por isto, procedimentos analíticos, ou analítico-numéricos são importantes no sentido do aumento da velocidade de cálculo. As seções a seguir apresentam técnicas para este cálculo, para algumas configurações típicas.

Segmento de reta filamental

Seja um condutor reto de seção transversal desprezível em relação ao seu comprimento, conforme a figura A2.

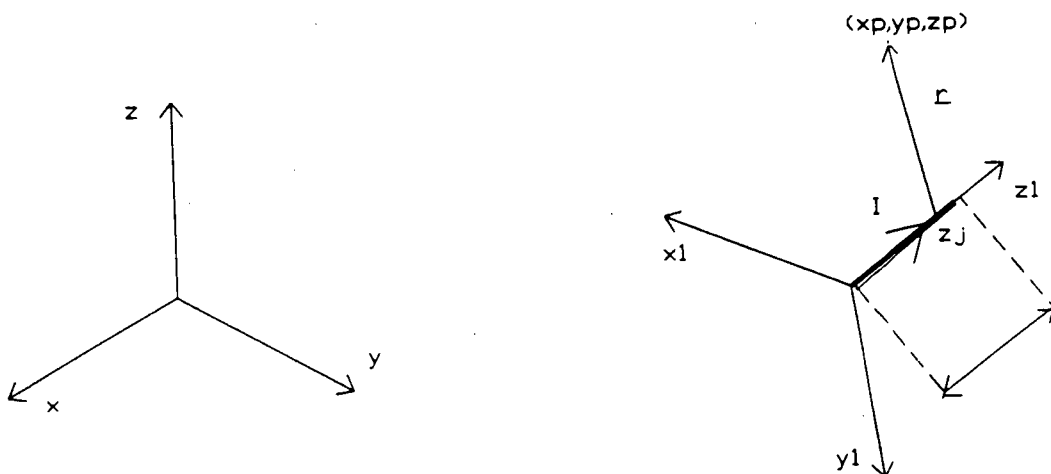


Figura A2: Condutor reto filamental

Adota-se um sistema de coordenadas local x_1, y_1, z_1 , tal que o eixo z_1 é paralelo ao condutor e sua origem é coincidente com o ponto A, uma das extremidades do condutor. Sejam $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ os vetores unitários nas direções x_1, y_1 e z_1 , respectivamente. Então

$$\underline{r} = x_p \underline{i} + y_p \underline{j} + (z_p - z_j) \underline{k} \quad (A2)$$

onde x_p, y_p e z_p são as coordenadas do ponto onde se calcula H_s , no sistema de coordenadas local, e z_j é a coordenada do ponto sobre o fio. Além disto:

$$\underline{r}_0 = \underline{r} / \|\underline{r}\| \quad (A3)$$

$$\underline{J} = \frac{I}{S} \underline{k} \quad (A4)$$

onde I é a corrente do fio e S a sua seção transversal. Portanto:

$$\underline{H}_s = \frac{I}{4\pi} (-y_p \underline{i} + x_p \underline{j}) \int_0^d \frac{1}{(x_p^2 + y_p^2 + (z_p - z_j)^2)^{3/2}} dz_j \quad (A5)$$

onde d é o comprimento do fio. Logo:

$$\underline{H}_s = \frac{I}{4\pi} (-y_p \underline{i} + x_p \underline{j}) \left[\frac{(z_p - z_j)}{(x_p^2 + y_p^2) \sqrt{x_p^2 + y_p^2 + (z_p - z_j)^2}} \right]_0^d \quad (A6)$$

Este vetor está expresso no sistema de coordenadas local. É necessário efetuar uma transformação de coordenadas para retornar ao sistema global.

Placa retangular

Condutores retos de espessura desprezível podem ser representados por placas retangulares finas, conforme a figura A3. Nesta figura, já está posicionado um sistema de coordenadas cartesianas local, x_1, y_1, z_1 , com x_1 e z_1 paralelos à placa e y perpendicular a ela. A origem do sistema local é fixada em um dos vértices da placa, que tem lados de comprimento a e b. Um ponto sobre a placa tem coordenadas $x_j, 0, z_j$ e o ponto de cálculo do campo tem coordenadas x_p, y_p, z_p . Então:

$$\underline{r} = (x_p - x_j) \underline{i} + y_p \underline{j} + (z_p - z_j) \underline{k} \quad (A7)$$

$$\underline{J} = \frac{J}{l} \underline{k}$$

onde l é a espessura da placa. Logo:

$$\underline{H}_s = \frac{J}{4\pi} \int_0^b \int_0^a \frac{(-y_p \underline{i} + (x_p - x_j) \underline{j})}{((x_p - x_j)^2 + y_p^2 + (z_p - z_j)^2)^{3/2}} dx_j dz_j \quad (A8)$$

efetuando uma mudança de variáveis: $x^* = x_p - x_j$, $z^* = z_p - z_j$ e integrando, obtém-se

$$H_s = -\frac{J}{4\pi} \left[\left[\operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{x^* z^*}{y_p (x_p^{*2} + y_p^2 + z_p^{*2})^{1/2}} \right] \right] \underline{i} + \operatorname{sh}^{-1} \left[\frac{z^*}{(x_p^{*2} + y_p^2)^{1/2}} \right] \right] \begin{bmatrix} x_p - a \\ x_p \\ z_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_p - b \\ z_p \end{bmatrix} \quad (A9)$$

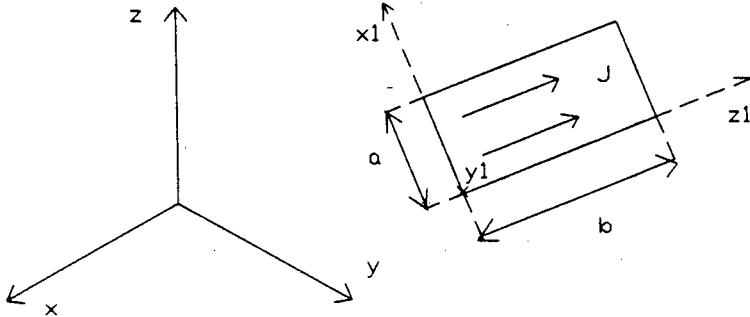


Figura A3: Placa retangular de corrente.

Condutor paralelepipedico

Seja um condutor reto de espessura não desprezível. Adota-se um sistema local de coordenadas cartesianas (x_1, y_1, z_1) , posicionado conforme a figura A4.

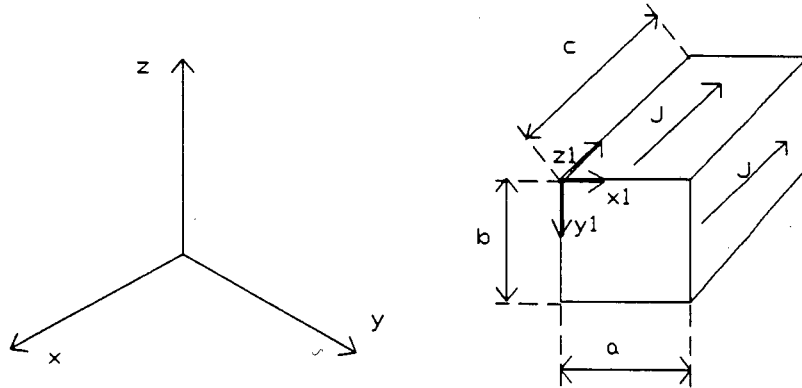


Figura A4: Condutor paralelepipedico

Seja (x_j, y_j, z_j) um ponto sobre o condutor e (x_p, y_p, z_p) o ponto onde se quer calcular o campo criado pelo condutor. Então:

$$\underline{r} = (x_p - x_j) \underline{i} + (y_p - y_j) \underline{j} + (z_p - z_j) \underline{k} \quad (\text{A10})$$

$$J = J \underline{k}$$

Portanto:

$$H_s = \frac{J}{4\pi} \int_0^c \int_0^b \int_0^a \frac{(-(y_p - y_j) \underline{i} + (x_p - x_j) \underline{j})}{((x_p - x_j)^2 + (y_p - y_j)^2 + (z_p - z_j)^2)^{3/2}} dx_j dy_j dz_j \quad (\text{A11})$$

Efetuada a seguinte mudança de variáveis:

$$x^* = x_p - x_j, \quad y^* = y_p - y_j, \quad z^* = z_p - z_j$$

e integrando, obtém-se:

$$\begin{aligned} H_s = & \frac{J}{4\pi} \left[\left[\left[\left[y^* \operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{x^* z^*}{y^* (x^{*2} + y^{*2} + z^{*2})^{1/2}} \right] - x^* \operatorname{sh}^{-1} \left[\frac{z^*}{(x^{*2} + y^{*2})^{1/2}} \right] - \right. \right. \right. \right. \\ & z^* \operatorname{sh}^{-1} \left[\frac{x^*}{(y^{*2} + z^{*2})^{1/2}} \right] \underline{i} + \left[y^* \operatorname{sh}^{-1} \left[\frac{z^*}{(x^{*2} + y^{*2})^{1/2}} \right] + z^* \operatorname{sh}^{-1} \left[\frac{y^*}{(x^{*2} + z^{*2})^{1/2}} \right] \right. \\ & \left. \left. \left. - x^* \operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{y^* z^*}{x^* (x^{*2} + y^{*2} + z^{*2})^{1/2}} \right] \right] \underline{j} \right] \right] \begin{matrix} z_p^{-c} & y_p^{-b} & x_p^{-a} \\ z_p & y_p & x_p \end{matrix} \quad (\text{A12}) \end{aligned}$$

Arco filamental de corrente

Para os condutores curvos de seção transversal desprezível, define-se um sistema de coordenadas cilíndricas local (ρ, φ, z_1) com origem localizada no centro do arco, conforme a Figura A5. O arco tem raio R e compreende um ângulo φf . O campo no ponto de cálculo, de coordenadas (ρ_p, φ_p, z_p) , é dado por:

$$H_s = \frac{I}{4\pi} \int_0^{\varphi f} \frac{\underline{a}\varphi \wedge \underline{r}}{\|\underline{r}\|^2} R d\varphi \quad (\text{A13})$$

onde $\underline{a}\varphi$ é o vetor unitário na direção φ e \underline{r} , expresso no ponto de cálculo, é:

$$\underline{r} = (\rho_p - R(\cos(\varphi_j - \varphi_p)))\underline{a}_\rho + (R\sin(\varphi_j - \varphi_p))\underline{a}_\varphi + z_p \underline{a}_z \quad (\text{A14})$$

\underline{a}_ρ é o vetor unitário na direção ρ .

$$\|\underline{r}\|^2 = \rho_p^2 + R^2 + z_p^2 - 2R\rho_p \cos(\varphi_j - \varphi_p) \quad (\text{A15})$$

Portanto:

$$H_s = \frac{IR}{4\pi} \int_0^{\varphi_f} \frac{z_p \cos(\varphi_j - \varphi_p)\underline{a}_\rho + z_p \sin(\varphi_j - \varphi_p)\underline{a}_\varphi + (R - \rho_p \cos(\varphi_j - \varphi_p))\underline{a}_z}{[\rho_p^2 + R^2 + z_p^2 - 2R\rho_p \cos(\varphi_j - \varphi_p)]^{3/2}} d\varphi_j \quad (\text{A16})$$

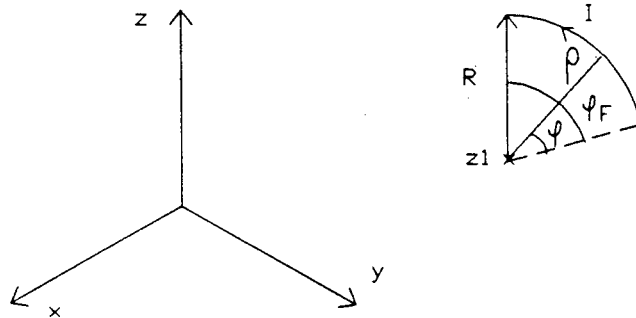


Figura A5: Arco filamental de corrente

Efetuada a transformação de variável:

$$\varphi_j = \pi - 2\alpha + \varphi_p$$

obtem-se:

$$H_s = \frac{IR}{2\pi((R+\rho_p)^2 + z_p^2)^{3/2}} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{z_p \cos 2\alpha \underline{a}_\rho - z_p \sin 2\alpha \underline{a}_\varphi - (R + \rho_p \cos 2\alpha)\underline{a}_z}{[1 - k^2 \sin^2 \alpha]^{3/2}} d\alpha \quad (\text{A17})$$

onde:

$$\alpha_1 = (\pi + \varphi_p)/2$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 - \varphi_f/2$$

$$k^2 = 4R\rho_p / ((R+\rho_p)^2 + z_p^2) \quad (A18)$$

Define-se:

$$\Delta = \sqrt{(1-k^2 \text{sen}^2 \alpha)}$$

$$A = \frac{IR}{2\pi((R+\rho_p)^2 + z_p^2)^{3/2}}$$

$$k'^2 = 1-k^2$$

$$H_s = H_\rho \underline{a}_\rho + H_\varphi \underline{a}_\varphi + H_z \underline{a}_z$$

Portanto:

$$H_\rho = A z_p \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\cos 2\alpha}{\Delta^3} d\alpha \quad (A19)$$

Integrando, segundo Grandshteyn & Ryzhik (1980), obtém-se:

$$H_\rho = Az_p \left[\frac{2}{k^2} F(\alpha, k) - \frac{(1+k'^2)}{k^2 k'^2} E(\alpha, k) + \frac{(1+k'^2) \text{sen} 2\alpha}{2k'^2 \Delta} \right]_{\alpha_1}^{\alpha_2} = Az_p \text{Xint1} \quad (A20)$$

onde F é a integral elíptica incompleta de 1ª classe e E é a integral elíptica incompleta de 2ª classe. H_φ é dado por:

$$H_\varphi = -Az_p \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\text{sen} 2\alpha}{\Delta^3} d\alpha = -Az_p \left[\frac{2}{k^2 \Delta} \right]_{\alpha_1}^{\alpha_2} = -Az_p \text{Xint2} \quad (A21)$$

e H_z por:

$$H_z = -A \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{(R+\rho_p) \cos 2\alpha}{\Delta^3} d\alpha \quad (A22)$$

Mas, de acordo com Grandshteyn & Ryzhik (1980):

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{1}{\Delta^3} d\alpha = \left[\frac{1}{k'^2} E(\alpha, k) - \frac{k^2 \text{sen} 2\alpha}{2k'^2 \Delta} \right]_{\alpha_1}^{\alpha_2} = \text{Xint3} \quad (A23)$$

Portanto:

$$H_z = -A(R \text{Xint3} + \rho_p \text{Xint1}) \quad (\text{A24})$$

Observação:

Os resultados anteriores são válidos para $0 < k < 1$. Para $k = 0$, isto é, $\rho_p = 0$, tem-se $\Delta = 1$. Portanto:

$$H_\rho = A z_p \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos 2\alpha \, d\alpha = \frac{A z_p}{2} \left[\text{sen} 2\alpha \right]_{\alpha_1}^{\alpha_2} \quad (\text{A25})$$

$$H_\varphi = - A z_p \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \text{sen} 2\alpha \, d\alpha = \frac{A z_p}{2} \left[\cos 2\alpha \right]_{\alpha_1}^{\alpha_2} \quad (\text{A26})$$

$$H_z = - A \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} R + \rho_p \cos 2\alpha \, d\alpha = -A \left[R\alpha + \frac{\rho_p \text{sen} 2\alpha}{2} \right]_{\alpha_1}^{\alpha_2} \quad (\text{A27})$$

Para $k=1$, isto é, $z_p=0$ e $\rho_p = R$, tem-se:

$$H_\rho = H_\varphi = 0 \quad (\text{A28})$$

$$H_z = -2AR \left[\ln(\text{tg}(\pi/4 + \alpha/2)) \right]_{\alpha_1}^{\alpha_2} \quad (\text{A29})$$

Arco superficial de corrente

Para condutores curvos, de espessura desprezível, define-se um sistema de coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z) com origem localizada no centro do arco, conforme a Fig.A6.

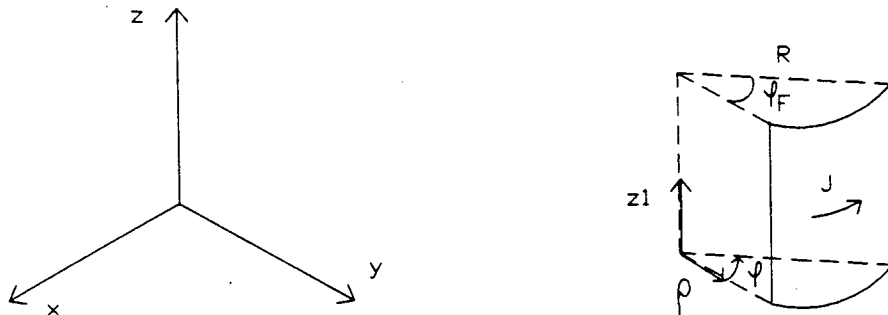


Fig A6: Arco superficial de corrente

O arco tem raio R, compreende o ângulo φ_f e tem altura a. O ponto de cálculo do campo tem coordenadas ρ_p , φ_p , z_p e um ponto genérico sobre o arco tem coordenadas R, φ_j e z_j . O campo Hs é dado por:

$$H_s = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\varphi_f} \int_0^a \frac{z_j \varphi_p R}{\|\underline{r}\|^2} dz_j R d\varphi_j \quad (A30)$$

onde:

$$\underline{r} = (\rho_p - R(\cos(\varphi_j - \varphi_p)))\underline{a}_\rho + (R\sin(\varphi_j - \varphi_p))\underline{a}_\varphi + (z_p - z_j)\underline{a}_z \quad (A31)$$

e

$$\|\underline{r}\|^2 = \rho_p^2 + R^2 + (z_p - z_j)^2 - 2R\rho_p \cos(\varphi_j - \varphi_p) \quad (A32)$$

Portanto:

$$H_s = \frac{JR}{4\pi} \int_0^{\varphi_f} \int_0^a \left[\frac{(z_p - z_j)\cos(\varphi_j - \varphi_p)\underline{a}_\rho + (z_p - z_j)\sin(\varphi_j - \varphi_p)\underline{a}_\varphi}{[\rho_p^2 + R^2 + (z_p - z_j)^2 - 2R\rho_p \cos(\varphi_j - \varphi_p)]^{3/2}} + \frac{(R - \rho_p \cos(\varphi_j - \varphi_p))\underline{a}_z}{[\rho_p^2 + R^2 + (z_p - z_j)^2 - 2R\rho_p \cos(\varphi_j - \varphi_p)]^{3/2}} \right] dz_j d\varphi_j \quad (A33)$$

seja $z^* = z_p - z_j$ e definindo α , α_1 e α_2 como na seção anterior, obtém-se:

$$H_s = -\frac{JR}{2\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{z_p}^{z_p - a} \frac{z^* \cos 2\alpha \underline{a}_\rho - z^* \sin 2\alpha \underline{a}_\varphi - (R + \rho_p \cos 2\alpha) \underline{a}_z}{[\rho_p^2 + R^2 + z^{*2} + 2R\rho_p \cos 2\alpha]^{3/2}} dz^* d\alpha \quad (A34)$$

integrando em z^*

$$H_s = \left[A \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\cos 2\alpha \underline{a}_\rho - \sin 2\alpha \underline{a}_\varphi}{(1 - k^2 \sin^2 \alpha)^{1/2}} + \frac{z^* (R + \rho_p \cos 2\alpha) \underline{a}_z}{(\rho_p + R)^2 (1 - n \sin^2 \alpha) (1 - k^2 \sin^2 \alpha)^{1/2}} d\alpha \right]_{z_p}^{z_p - a} \quad (A35)$$

onde:

$$n = 4R\rho_p / (R + \rho_p)^2 \quad (A36)$$

$$k^2 = 4R\rho_p / ((R + \rho_p)^2 + z_p^2) \quad (A37)$$

$$A = \frac{IR}{2\pi((R+\rho_p)^2+z_p^2)^{3/2}} \quad (\text{A38})$$

Seja $\Delta = \sqrt{(1-k^2 \sin^2 \alpha)}$ e $k'^2 = 1-k^2$. Segundo Grandshteyn & Ryzhik (1980):

$$H\rho = \left[\frac{A}{k^2} \left[2E(\alpha, k) - (1-k'^2)F(\alpha, k) \right] \right]_{\alpha 1}^{\alpha 2} z_p^{-a} \quad (\text{A39})$$

$$H\varphi = \left[\left[\frac{2A}{k^2} \Delta \right] \right]_{\alpha 1}^{\alpha 2} z_p^{-a} \quad (\text{A40})$$

$$Hz = \left[\frac{Az^*}{(\rho_p+R)^2} \int_{\alpha 1}^{\alpha 2} \frac{(R+\rho_p \cos 2\alpha)}{(\rho_p+R)^2(1-n \sin^2 \alpha)(1-k^2 \sin^2 \alpha)^{1/2}} d\alpha \right]_{\alpha 1}^{\alpha 2} z_p^{-a} \quad (\text{A41})$$

Integrando segundo Grandshteyn & Ryzhik (1980):

$$Hz = \left[\frac{Az^*}{2R} \left[\frac{(R-\rho_p)}{(R+\rho_p)} \Pi(n; \alpha, k) + F(\alpha, k) \right] \right]_{\alpha 1}^{\alpha 2} z_p^{-a} \quad (\text{A42})$$

onde $\Pi(n; \alpha, k)$ é a integral elíptica incompleta de terceira classe, parâmetro k , amplitude α e característica n .

Observação:

Os resultados anteriores somente são válidos para $n \neq k^2$ e $\neq 0$ e $\neq 1$.

Para $k=0$ e $n=0$ ($\rho_p=0$) tem-se:

$$H\rho = A \left[\int_{\alpha 1}^{\alpha 2} \cos 2\alpha d\alpha \right]_{\alpha 1}^{\alpha 2} z_p^{-a} = \left[\frac{A}{2} \left[\sin 2\alpha \right] \right]_{\alpha 1}^{\alpha 2} z_p^{-a} \quad (\text{A43})$$

$$H\varphi = \left[-A \int_{\alpha 1}^{\alpha 2} \sin 2\alpha d\alpha \right]_{\alpha 1}^{\alpha 2} z_p^{-a} = \left[\frac{A}{2} \left[\cos 2\alpha \right] \right]_{\alpha 1}^{\alpha 2} z_p^{-a} \quad (\text{A44})$$

$$Hz = \left[\frac{Az^*}{R^2} \int_{\alpha 1}^{\alpha 2} R d\alpha \right]_{\alpha 1}^{\alpha 2} z_p^{-a} = \left[\left[\frac{Az^*}{R} \alpha \right] \right]_{\alpha 1}^{\alpha 2} z_p^{-a} \quad (\text{A45})$$

Para $n=1$, $k \neq 1$ ($\rho_p = R$, $z^* \neq 0$) $H\rho$ e $H\varphi$ são dados pelas equações (39) e (40).

$$H_z = \left[\frac{Az^*}{2R} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{1}{\Delta} d\alpha \right]_{z_p}^{z_p^{-a}} = \left[\left[\frac{Az^*}{2R} F(\alpha, k) \right]_{\alpha_1}^{\alpha_2} \right]_{z_p}^{z_p^{-a}} \quad (A46)$$

Para $n=1$ e $k=1$ ($\rho_p = R$, $z^* = 0$)

$$H_z = 0 \quad (A47)$$

$$H_\rho = \frac{J}{4\pi} \left[2\text{sen}\alpha - \ln(\text{tg}(\pi/4 + \alpha/2)) \right] \quad (A48)$$

$$H_\varphi = \frac{J}{2\pi} \cos\alpha \quad (A49)$$

Para $n = k^2 \neq 1$ ($\rho_p \neq R$, $z^* = 0$) H_ρ e H_φ são dados pelas equações (39) e (40). $H_z = 0$.

Arco volumétrico de corrente

Seja um arco de cilindro, conforme a Figura A7. Neste caso não se conseguem expressões analíticas fechadas semelhantes às anteriores, e um procedimento analítico-numérico deve ser utilizado. De acordo com a seqüência de integração adotada, são obtidos diferentes métodos de cálculo (Diserens, 1983). No presente estudo, adotou-se o método do cilindro fino (Diserens, 1983).

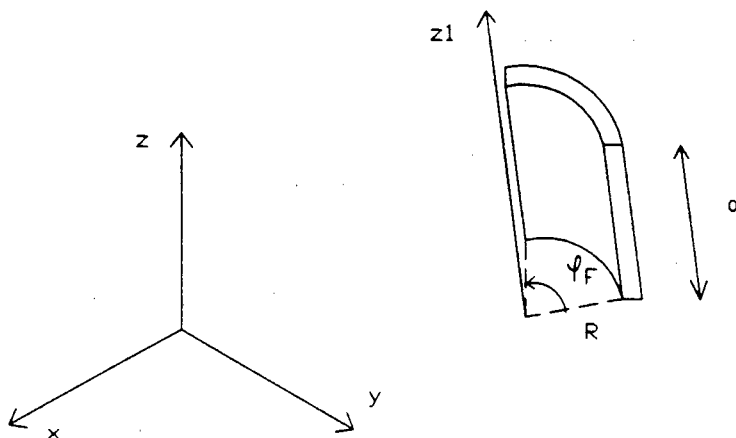


Figura A7: Arco volumétrico de corrente

Neste método, integra-se a equação de Biot-Savart inicialmente na direção axial e, em seguida, na direção angular, resultando em uma expressão para o

campo criado por uma casca cilíndrica : equações (A39), (A40) e (A42). Estas equações são, então, integradas numericamente, segundo a direção radial, de ρ_1 até ρ_2 .

É importante notar que o componente H_φ do campo pode ser integrado analiticamente, fornecendo no caso geral:

$$H_\varphi = \frac{J}{8\pi\rho_p} \left[\left[\left[(\rho + \rho_p \cos 2\alpha) \sqrt{\rho^2 + (2\rho_p \cos 2\alpha)\rho + (\rho_p^2 + z^{*2})} + (z^{*2} + \rho_p^2 \sin^2 2\alpha) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. (\ln(2(\sqrt{\rho^2 + (2\rho_p \cos 2\alpha)\rho + (\rho_p^2 + z^{*2})} + \rho + \rho_p \cos 2\alpha))) \right] \right] \right]_{\rho_1}^{\rho_2} \left[\alpha_2 \right]_{z_p}^{-a} \quad (A50)$$

Condições especiais:

1. $z^* = 0$ e $\cos 2\alpha = \pm 1$

$$H_\varphi = \frac{J}{4\pi\rho_p} (\rho^2/2 \pm \rho_p \rho) \quad (A51)$$

2. $k^2=0$, ($\rho_p = 0$)

$$H_\varphi = \left[\left[\left[\frac{J}{4\pi} \sqrt{\rho^2 + z^{*2}} \cos 2\alpha \right] \right] \right]_{\rho_1}^{\rho_2} \left[\alpha_2 \right]_{z_p}^{-a} \quad (A52)$$

O método adotado para a integração numérica de H_ρ e H_z foi o de Gauss. Utilizou-se uma integração adaptativa: para se calcular o campo em pontos próximos do arco são utilizados mais pontos de integração do que para pontos mais distantes do arco.

Observação: As expressões dos campos criados por arcos (filamentares, superficiais ou volumétricos) necessitam do cálculo numérico de integrais elípticas de 1^a, 2^a e 3^a classe. A seguir apresentam-se métodos para efetuar este cálculo

a) Definições:

A integral elíptica de 1^a classe é definida por:

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi^*}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi^*}} \quad (\text{A53})$$

φ é a amplitude de F e k é o seu módulo. A partir do módulo define-se o módulo complementar, k' :

$$k' = \sqrt{1 - k^2} \quad (\text{A54})$$

Quando, na integral anterior, o limite de integração é $\varphi = \pi/2$, a integral é denominada integral elíptica completa de 1^a classe. Neste caso, adota-se o símbolo:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi^*}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi^*}} \quad (\text{A55})$$

A integral completa de módulo k' é notada:

$$K'(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi^*}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi^*}} \quad (\text{A56})$$

A integral elíptica incompleta de 2^a classe é definida por:

$$E(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi^*} \, d\varphi^* \quad (\text{A57})$$

Quando o limite superior de integração é $\varphi = \pi/2$, a integral é completa, e adota-se o símbolo $E(k)$.

A integral elíptica incompleta de 3^a classe é definida por:

$$\Pi(n; \varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi^*}{(1 - n \sin^2 \varphi^*) (1 - k^2 \sin^2 \varphi^*)^{1/2}} \quad (\text{A58})$$

k é o seu módulo, φ a sua amplitude e n é a sua característica. No presente caso, $1 \geq n \geq k^2 > 0$, situação que configura o caso circular (Abramowitz & Stegun, 1972).

b) Cálculo numérico de integrais elípticas.

Para se calcular as integrais elípticas incompletas de 1^a e 2^a classes,

utiliza-se o método conhecido como processo da média aritmética geométrica (Abramowitz & Stegun, 1972). A seqüência a seguir é formada, começando com $a_0 = 1$, $b_0 = k'$, $c_0 = k$:

$$\begin{array}{lll} a_1 = (a_0 + b_0)/2 & b_1 = (a_0 b_0)^{1/2} & c_1 = (a_0 - b_0)/2 \\ a_2 = (a_1 + b_1)/2 & b_2 = (a_1 b_1)^{1/2} & c_2 = (a_1 - b_1)/2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n = (a_{n-1} + b_{n-1})/2 & b_n = (a_{n-1} b_{n-1})^{1/2} & c_n = (a_{n-1} - b_{n-1})/2 \end{array}$$

A tabela é calculada até que c_n seja muito pequeno. Para o cálculo das integrais elípticas, uma série, $\varphi_0, \varphi_1 \dots \varphi_n$ é calculada, com $\varphi_0 = \varphi$, utilizando a relação de recorrência:

$$\operatorname{tg}(\varphi_{n+1} - \varphi_n) = \frac{b_n}{a_n} \operatorname{tg}(\varphi_n) \quad (\text{A59})$$

A integral elíptica incompleta de 1^a classe é calculada por:

$$F(\varphi, k) = \frac{\varphi_n}{2^n a_n} \quad (\text{A60})$$

A integral elíptica incompleta de 2^a classe é dada por:

$$E(\varphi, k) = F(\varphi, k) + \sum_{i=1}^n c_i \operatorname{sen} \varphi_i - \frac{\varphi_n}{2^{n+1} a_n} \sum_{i=0}^n 2^i c_i^2 \quad (\text{A61})$$

As integrais completas são dadas por:

$$K(k) = \pi / (2a_n) \quad (\text{A62})$$

$$E(k) = \frac{\pi}{2a_n} \left[1 - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n 2^i c_i^2 \right] \quad (\text{A63})$$

para ângulos $\varphi < 0$, as propriedades a seguir podem ser usadas (Abramowitz & Stegun, 1972):

$$F(\varphi, k) = -F(|\varphi|, k) \quad (\text{A64})$$

$$E(\varphi, k) = -E(|\varphi|, k) \quad (\text{A65})$$

Para ângulos $\varphi > \pi/2$, usam-se as propriedades:

$$F(s\pi \pm \varphi, k) = 2sK(k) \pm F(\varphi, k) \quad (\text{A66})$$

$$E(s\pi \pm \varphi, k) = 2sE(k) \pm E(\varphi, k) \quad (\text{A67})$$

Para a integral elíptica incompleta de 3ª ordem - caso circular - adota-se o seguinte algoritmo (Abramowitz & Stegun, 1972):

Define-se:

$$\varepsilon = \text{sen}^{-1} \left[\left(\frac{(1-n)}{k'^2} \right)^{1/2} \right]$$

$$\beta = \frac{\pi F(\varepsilon, k')}{2K(k)}$$

$$q = \exp \left[\frac{-\pi K'(k)}{K(k)} \right]$$

$$v = \frac{\pi F(\varphi, k)}{2K(k)}$$

$$\delta 2 = \left\{ \frac{n}{(1-n)(n-k^2)} \right\}^{1/2}$$

$$\lambda = \text{tg}^{-1} \left\{ \text{tgh}(\beta) \text{tg}(v) \right\} + 2 \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} \frac{q^{2s} \text{sen}(2sv) \text{sh}(2s\beta)}{s(1 - q^{2s})}$$

$$\mu = \left[\sum_{s=1}^{\infty} s q^{s^2} \text{sh}(2s\beta) \right] \left[1 + 2 \sum_{s=1}^{\infty} q^{s^2} \text{cosh}(2s\beta) \right]^{-1}$$

então:

$$\Pi(n; \varphi, k) = \delta 2(\lambda - 4\mu v) \quad (\text{A68})$$

para $\varphi < 0$, a propriedade a seguir é válida (Abramowitz & Stegun, 1972):

$$\Pi(n; \varphi, k) = -\Pi(n; |\varphi|, k) \quad (\text{A69})$$

para $\varphi > \pi/2$, utiliza-se:

$$\Pi(n; s\pi \pm \varphi, k) = 2s\Pi(n; k) \pm \Pi(n; \varphi, k) \quad (\text{A70})$$

onde $\Pi(n; k)$ é a integral elíptica completa de 3^a classe, que pode ser calculada por:

$$\Pi(n; k) = K(k) + \frac{\pi}{2} \delta_2(1 - \Lambda_0(\varepsilon, k)) \quad (\text{A71})$$

onde Λ_0 é a função lambda de Heuman, dada por:

$$\Lambda_0(\varphi, k) = \frac{2}{\pi} \left\{ K(k)E(\varphi, k') - (K(k) - E(k))F(\varphi, k') \right\} \quad (\text{A72})$$