

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

O MÉTODO DA LINEARIZAÇÃO EQUIVALENTE  
APLICADO ÀS ONDAS ELÁSTICAS COM AMORTECIMENTO

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA

MARCÍLIO ALVES

FLORIANÓPOLIS, SETEMBRO DE 1987

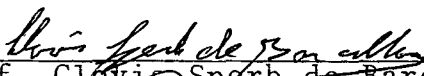
O MÉTODO DA LINEARIZAÇÃO EQUIVALENTE  
APLICADO AS ONDAS ELÁSTICAS COM AMORTECIMENTO

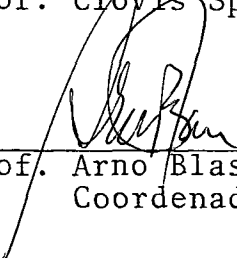
MARCÍLIO ALVES

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

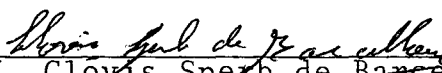
MESTRE EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO PROJETOS,  
E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

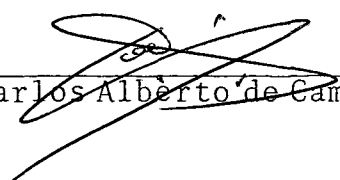
  
Prof. Clovis Sperb de Barcellos, Ph.D.  
Orientador

  
Prof. Arno Blass, Ph.D.  
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:

  
Prof. Clovis Sperb de Barcellos, Ph.D.  
Presidente

  
Prof. Nelson Back, Ph.D.

  
Prof. Carlos Alberto de Campos Selke, Ph.D.

A ti pai,  
por cantares nas manhãs de sol

A ti mãe,  
pelo amor que plantas e  
germina em tudo o que fazes

A ti Isabel,  
por seres e mostrar-me

Cinzenta, caro amigo, é toda a teoria,  
Verdejante e dourada é a árvore da Vida!

Fausto, de Goethe

## AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer profundamente:

- Aos brasileiros que, através da CAPES, tornaram financeiramente viável meu curso de Pós-Graduação;
- Ao Prof. Barcellos, por se dispor a orientar esta dissertação;
- Ao Prof. Nelson Back, por receber-me na PG de modo confortante;
- Aos amigos da PG que compartilharam comigo a alegria do aprender e o drama do realizar, em especial ao Luiz;
- Ao Sílvio, pela imprescindível programação e solta amizade;
- Ao amigo Luiz (Papa), por sua alegria e profundidade, permeando ao longas noites de operação do computador;
- Ao amigo e educador Willibaldo, por cooperar com minha formação;
- À vó Bola, vó Chica e à Tia Santa;
- Aos vizinhos, por todo este clima de solidariedade;
- Aos amigos da TELESC pela convivência durante este ano;
- À Gudrun por sermos amigos;
- Ao amigo Endre, pelos papos que têm cooperado com a minha caminhada em direção a uma ciência humana, e sua mulher, minha amiga Regina, por plantar a Europa no meu coração;
- Aos amigos Caldeira e Leuzi por serem;
- Ao Hilton, Marilane e Mônica pela gostosa família;
- Ao Renato, Heron e Jaime pela profunda amizade e pelo impulso que o trio traz ao quarteto;
- A DEUS, por eu ter tantos amigos a agradecer e por dar-me a possibilidade da liberdade.

## ÍNDICE

	Pág.
AGRADECIMENTOS .....	vi
SIMBOLOGIA .....	xi
RESUMO .....	xv
ABSTRACT .....	xvi
PARTE I - INTRODUÇÃO .....	1
CAPÍTULO 1 - ONDAS ELÁSTICAS .....	2
1.1 - Preliminares .....	2
1.2 - Equações e Conceitos Básicos .....	3
1.2.1 - Equação da Onda .....	3
1.2.2 - Equações de Equilíbrio .....	5
1.2.3 - Modos de Conversão no Contorno .....	7
1.3 - Energia das Ondas Elásticas .....	9
1.4 - Aplicações .....	14
1.5 - O Problema e a Revisão Bibliográfica .....	17
PARTE II - MODELOS LINEARES DE ATRITO .....	21
CAPÍTULO 2 - ONDAS SH COM E SEM AMORTECIMENTO - SO LUÇÃO EXATA PARA ATRITO LINEAR FUNÇÃO DO DESLIZAMENTO .....	22
2.1 - Introdução .....	22
2.2 - Formulação .....	23
2.3 - Deslizamento e Mudanças de Fase .....	29
2.4 - Resultados Gráficos .....	31

2.4.1 - Amortecimento Nulo sem Reflexão Total .....	32
2.4.2 - Amortecimento Nulo com Reflexão Total .....	35
2.4.3 - Sólidos com Amortecimento e sem Reflexão Total .....	38
2.4.3.1 - Influência da Frequência ..	42
 CAPÍTULO 3 - ONDAS SV E P COM E SEM AMORTECIMENTO - SOLUÇÃO EXATA PARA ATRITO LINEAR FUNÇÃO DO DESLIZAMENTO .....	 47
3.1 - Introdução .....	47
3.2 - Formulação .....	47
3.3 - Deslizamento e Reflexão Total .....	54
3.4 - Resultados Gráficos .....	56
3.4.1 - Onda SV Incidente - Amortecimento Nulo sem Reflexão Total da Onda SV Transmitida .....	56
3.4.2 - Onda SV Incidente - Amortecimento Nulo com Reflexão Total da Onda SV Transmitida .....	60
3.4.3 - Onda SV Incidente com Amortecimento e sem Reflexão Total .....	65
3.4.4 - Onda SV Incidente - A Frequência como uma Variável do Problema .....	72
3.4.5 - Onda P Incidente com Amortecimento e sem Reflexão Total .....	76
3.4.6 - Onda P Incidente - A Frequência como uma Variável do Problema .....	83



PARTE III - MODELOS NÃO-LINEARES DE ATRITO .....	87
CAPÍTULO 4 - O MÉTODO DA LINEARIZAÇÃO EQUIVALENTE - ONDAS SH COM AMORTECIMENTO .....	88
4.1 - Introdução .....	88
4.2 - O Método da Linearização Equivalente - MLE ..	89
4.3 - Onda SH com Amortecimento .....	90
4.4 - O MLE Aplicado a Atrito de Coulomb .....	95
4.5 - Resultados Gráficos para Atrito de Coulomb ..	98
4.5.1 - Amortecimento Nulo sem Reflexão To- tal .....	99
4.5.2 - Sólidos com Amortecimento e sem Re- flexão Total .....	102
4.5.3 - Onda SH sem Amortecimento - A Fre- quência como uma Variável do Proble ma .....	104
4.5.4 - Onda SH com Amortecimento - A Fre- quência como uma variável do Pro- blema .....	108
4.6 - Comentários sobre o MLE .....	112
CAPÍTULO 5 - O MÉTODO DA LINEARIZAÇÃO EQUIVALENTE - ONDAS SV E P COM AMORTECIMENTO .....	113
5.1 - Introdução .....	113
5.2 - Ondas SV ou P com Amortecimento .....	113
5.3 - Resultados Gráficos para Atrito de Coulomb ..	126
5.3.1 - Onda SV sem Amortecimento e com Re- flexão Total .....	127
5.3.2 - Onda SV com Amortecimento e sem Re- flexão Total .....	131

5.3.3 - Onda SV com e sem Amortecimento - A Frequência como uma Variável do Pro- blema .....	134
5.3.4 - Onda P sem Amortecimento e com Re- flexão Total .....	139
5.3.5 - Onda P com Amortecimento e sem Re- flexão Total .....	142
5.3.6 - Onda P com e sem Amortecimento - A Frequência como uma Variável do Pro- blema .....	145
 CAPÍTULO 6 - COMENTÁRIOS FINAIS .....	 152
6.1 - Contribuições e Conclusões .....	152
6.1.1 - Modelo de Atrito Linear Viscoso .....	153
6.1.2 - Modelo de Atrito de Coulomb .....	155
6.2 - Sugestões .....	157
 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	 159
 PARTE IV - APÊNDICES .....	 166
APÊNDICE 1 - O PRINCÍPIO DO TEMPO MÍNIMO .....	167
APÊNDICE 2 - TEORIA DOS POTENCIAIS APLICADA ÀS ON- DAS ELÁSTICAS .....	170

## SIMBOLOGIA

$a$	$\cotg \text{ } r_p$
$a'$	$\cotg \text{ } t_p$
$b$	$\cotg \text{ } r_s$
$b'$	$\cotg \text{ } t_s$
$A_0$	Amplitude da onda P incidente
$B_0$	Amplitude da onda S incidente
$A_1$	Amplitude da onda refletida P
$B_1$	Amplitude da onda refletida S
$A_2$	Amplitude da onda transmitida P
$B_2$	Amplitude da onda transmitida S
$A_{in}$	Amplitude da onda incidente
$c$	Velocidade de propagação da onda na direção x
$c_1$	Velocidade de propagação da onda P no meio I
$c_1'$	Velocidade de propagação da onda P no meio II
$c_2$	Velocidade de propagação da onda S no meio I
$c_2'$	Velocidade de propagação da onda S no meio II
$C_{ij}$	Constantes usadas no Método da Linearização Equivalente
$D$	Amplitude da onda de deslizamento
$d$	Deslizamento localizado na interface
$\dot{d}$	Velocidade do deslizamento
$E_1$	Razão entre as energias das ondas refletida P e incidente
$E_2$	Razão entre as energias das ondas refletida S e incidente
$E_3$	Razão entre as energias das ondas transmitida P e incidente

$E_4$	Razão entre as energias das ondas transmitida e incidente	S
EN	Energia normalizada. Definida como a soma das razões entre as energias das ondas refletidas e transmitidas e a incidente	
EA	Energia absorvida por fricção, na interface de separação dos sólidos	de
frs	Ângulo de fase da onda refletida S	
frp	Ângulo de fase da onda refletida P	
fts	Ângulo de fase da onda transmitida S	
ftp	Ângulo de fase da onda transmitida P	
fd	Ângulo de fase da onda de deslizamento	
g, h	Constantes usadas na solução de ondas SH	
i	Unidade imaginária	
in	Ângulo de incidência da onda elástica	
K	Número de onda na direção x	
$K_t$	Número de onda. Definido como a frequência dividida pela velocidade de propagação da onda	
$L_i, i=1, \dots, 4$	Constantes usadas no Método da Linearização Equivalente para minimizarem o erro introduzido pela linearização	
$M_{ij}$	Matriz do sistema de equações que determina as amplitudes das várias ondas envolvidas no fenômeno	
m	Coefficiente de amortecimento do sólido	
$\vec{n}$	Vetor que define a direção e sentido da onda ao se propagar	
$N_i, i=1, \dots, 14$	Constantes usadas na solução do sistema de equações do Método de Linearização Equivalente	
PAC	Parâmetro de Atrito de Coulomb. É uma constante, definida por $PAC \equiv \mu B_0 / \tau_d$ , que representa o grau de aderência dos sólidos	

rs	Ângulo de reflexão da onda S
rp	Ângulo de reflexão da onda P
ts	Ângulo de transmissão da onda S
tp	Ângulo de transmissão da onda P
t	Tempo
u	Deslocamento na direção x causado por uma onda
v	Deslocamento na direção y causado por uma onda
$V_i$	Vetor coluna do sistema de equações cuja matriz é $M_{ij}$
x	Coordenada x do problema
$X_1$	Razão entre a amplitude da onda P refletida e a incidente
$X_2$	Razão entre a amplitude da onda S refletida e a incidente
$X_3$	Razão entre a amplitude da onda P transmitida e a incidente
$X_4$	Razão entre a amplitude da onda S transmitida e a incidente
$X_5$	Razão entre a amplitude da onda de deslizamento e a incidente
$Y_i, i=1, \dots, 5$	Módulo correspondente de $X_i$
z	Coordenada z do problema
w	Deslocamento na direção z causado por uma onda
'	Símbolo que se refere ao sólido onde ocorre a transmissão das ondas
$\alpha$	Razão entre as rigidezes torcionais dos sólidos. $\alpha \equiv \mu/\mu'$
$\eta$	Viscosidade cinemática do fluido lubrificante
$\lambda$	Coeficiente elástico de Lamé
$\mu$	Rigidez torsional do sólido
$\nu$	Coeficiente de Poisson

$\rho$	Massa específica do sólido
$\sigma$	Tensões provocadas pela propagação da onda
$\tau$	Tensão de atrito na interface de contato dos sólidos
$\phi$	Potencial de onda que causa dilatação
$\chi$	Potencial de onda que causa distorção
$\psi$	Constante de adesão. Define o grau de aderência de sólidos sujeitos a atrito viscoso linear
$\omega$	Frequência da onda

## RESUMO

Esta dissertação trata da propagação de ondas elásticas SH, SV e P, com amortecimento, ao atingirem a interface de contato entre dois sólidos lineares, isotrópicos e homogêneos.

A interface está sujeita a atrito que é, inicialmente, considerado linear, função do deslizamento. Quando a interface é sujeita a atrito viscoso linear resultados são apresentados. A consideração do amortecimento torna a frequência uma variável do fenômeno.

Para modelos de atrito não lineares, o Método da Linearização Equivalente é empregado, visando linearizar o sistema de equações. O amortecimento também é considerado e os resultados apresentados referem-se ao modelo de atrito de Coulomb.

## ABSTRACT

This dissertation is about the propagation of elastic SH, SV and P waves, with damping, when they reach the contact interface between two linear, isotropic and homogeneous solids.

The interface is submitted to a friction that is initially considered as a linear function of slipping. When the interface is submitted to linear viscous friction the results are shown. The damping consideration makes the frequency a variable of the phenomenon.

For nonlinear models of friction, the Linearization Equivalent Method is used in order to linearize the equations of the system. The damping also is considered, and the results are referred to the Coulomb friction laws.



P A R T E I

I N T R O D U Ç Ã O

## CAPÍTULO 1

### ONDAS ELÁSTICAS

#### 1.1 - Preliminares

Há muito que a propagação de ondas em geral tem despertado o interesse do homem. Isto talvez porque fenômenos os mais corriqueiros como o som, as cores, os tremores de terra possuem caráter ondulatório. O esforço humano, objetivando a compreensão total do fenômeno, tem motivado inúmeros estudos sobre este tema, tanto de caráter teórico quanto experimental.

As primeiras investigações teóricas no campo das ondas elásticas voltaram-se à determinação dos tipos de ondas existentes, sua velocidade de propagação e o seu comportamento ao atingir a região de contato de dois meios.

Atualmente vários pesquisadores estudam a interação das ondas com a interface de separação de sólidos, pois muitos fenômenos podem ser assim analisados. Em particular, o conhecimento das forças dissipativas na interface tem sido abordado, embora com muitas dificuldades matemáticas já que as forças reais de atrito possuem caráter não linear.

Esta não linearidade tem motivado a aplicação de métodos matemáticos de linearização que facilitam a análise do problema.

Este trabalho abordará o fenômeno de ondas elásticas ao atingirem interfaces sujeitas a leis de atrito lineares ou não. O

amortecimento das ondas, sendo uma realidade da natureza, também é considerado.

Para modelos não lineares de atrito é usado o Método da Linearização Equivalente visto este método já ter sido usado para ondas elásticas sem amortecimento, com bons resultados.

## 1.2 - Equações e Conceitos Básicos\*

### 1.2.1 - Equação da Onda

Na natureza deparamo-nos com fenômenos que possuem a característica de se repetirem a intervalos de tempo quaisquer. Assim é que o som, a agitação do mar, a luz, etc. são manifestações palpáveis de uma perturbação repetida que recebe, hoje em dia, a denominação genérica de onda \*\*.

A velocidade de propagação de uma onda é função do meio onde esta ocorre. Se as ondas necessitam de um meio material para se propagarem são classificadas como mecânicas, sendo o som o tipo mais comum. Quando uma onda mecânica se propaga em um sólido denominamos-a, genericamente, de onda elástica.

---

(\*) -Números entre colchetes referem-se à bibliografia apresentada ao final.

(\*\*)-Do Latim unda, undae. No século XIII esta palavra entra para o nosso idioma com o sentido de água de mar ou rio que se eleva, e já na forma de "onda". Tecnicamente parece ter sido usada pela primeira vez por Descartes (1596-1650) em sua geometria analítica, sendo mais tarde, incorporada à Física.

De acordo com o tipo de sólido em que uma onda se propaga pode-se fazer uma classificação. Assim, materiais isotrópicos comportam-se diferentemente à passagem de uma perturbação, bem como materiais homogêneos e heterogêneos, lineares e não-lineares\*.

Nesta dissertação tratar-se-á de ondas mecânicas a se propagarem em meios sólidos, homogêneos, isotrópicos, lineares e livres de pré-tensões. Esta última condição deve ser satisfeita no presente estudo já que, recentemente, foram publicados artigos [15], [16] que demonstram o quanto as pré-tensões afetam não só a velocidade de propagação das ondas como também as suas amplitudes. Daqui por diante o termo "ondas elásticas" estará associado a tais propriedades.

Matematicamente uma onda deve ser representada por uma função capaz de indicar a propagação de uma perturbação. Assim:

$$\vec{u} = f_1(x-ct) + f_2(x+ct) \quad (1.1)$$

onde  $f_1$  representa uma onda propagando-se em uma direção  $x$ , no sentido positivo, e  $f_2$  no sentido negativo.  $c$  é a velocidade de propagação,  $t$  o tempo e  $\vec{u}$  o deslocamento,

A equação diferencial cuja solução é (1.1) consiste em:

$$\vec{u}_{;tt} = c^2 \vec{u}_{;xx} \quad (1.2)$$

---

(\*) - Ondas elásticas ao se propagarem em meios não-lineares requerem um apurado tratamento matemático. Para tanto veja, por exemplo, BLAND, D.R. - Nonlinear Dynamic Elasticity, 1<sup>a</sup> Edição, Blaisdell Publishing Company, pp. v-93, 1969.

onde a vírgula representa a diferenciação em relação, e tantas vezes quanto, à variável que a segue.

Esta "equação de onda" pode ser generalizada para o espaço tridimensional como:

$$\vec{q}_{,tt} = c^2 \nabla^2 \vec{q} \quad (1.3)$$

onde  $\nabla^2 \equiv ,_{xx} + ,_{yy} + ,_{zz}$  é o chamado Laplaciano e  $\vec{q}$  é um vetor referenciado ao sistema ortogonal  $x, y, z$  com componentes  $(u, v, w)$ .

### 1.2.2 - Equações de Equilíbrio

Uma onda elástica, ao se propagar, imprime às partículas do meio um certo tipo de movimento, cuja investigação baseia-se nas chamadas "Equações de Equilíbrio da Elasticidade".

Estas equações surgiram da necessidade de se fundamentar de maneira mais rigorosa a mecânica dos corpos elásticos. Navier (1785-1836) foi um dos primeiros a se ocupar de tais equações ao apresentar um trabalho em 1821 [57]. Porém, foi só a partir dos trabalhos de Augustin Cauchy (1789-1857) que as mesmas foram corretamente obtidas, isto com o uso do conceito de tensão e deformação. Cauchy obteve também as necessárias condições de contorno, provou a simetria do tensor tensão e relacionou estas às deformações através de duas constantes elásticas, hoje chamadas constantes de Lamé (1795-1840). Modernamente, e em notação indicial, estas equações são:

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{q}_i \quad (1.4)$$

onde  $\rho$  é a massa específica,  $\sigma_{ij}$  as tensões,  $t$  o tempo e  $\vec{q}$  o vetor deslocamento. Forças de corpo e efeitos de temperatura foram desprezados. As relações tensão-deformação são:

$$\sigma_{ij} = \lambda e \delta_{ij} + 2 \mu \epsilon_{ij} \quad (1.5)$$

onde  $\epsilon_{ij}$  são as deformações,  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker ( $\delta_{ij} = 0$  se  $i \neq j$  e  $\delta_{ij} = 1$  se  $i = j$ ),  $\lambda$  e  $\mu$  as constantes de Lamé.  $e = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}$  é chamada de dilatação volumétrica.

Foi S.D. Poisson (1781-1840) quem investigou mais detidamente o problema de propagação de ondas elásticas em sólidos [34]. Em 1830 ele publica um trabalho onde demonstra existir dois tipos básicos de onda. A primeira, chamada de onda de dilatação ou onda P (Principal), causa mudança de volume e altera o movimento de partículas do meio na direção normal à frente de onda. O segundo tipo de onda apresenta distorção, sendo o movimento das partículas perpendicular à direção de propagação. Esta onda é chamada de onda de distorção ou S (Secundária).

Para um tratamento matemático [33] introduz-se (1.5) em (1.4) obtendo-se

$$\rho u_{,tt} = (\lambda + \mu) e_{,x} + \mu \nabla^2 u \quad (1.6)$$

$$\rho v_{,tt} = (\lambda + \mu) e_{,y} + \mu \nabla^2 v \quad (1.7)$$

$$\rho w_{,tt} = (\lambda + \mu) e_{,z} + \mu \nabla^2 w \quad (1.8)$$

Diferenciando-se (1.6), (1.7) e (1.8) em relação a  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente, e somando, vem

$$e_{,tt} = \frac{\lambda+2\mu}{\rho} \nabla^2 e \quad (1.9)$$

de onde se conclui que a dilatação volumétrica  $e$  se propaga com velocidade:

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} \quad (1.10)$$

Eliminando-se  $e$  de (1.7) e (1.8) (diferenciando (1.7) em relação a  $z$ , (1.8) em relação a  $y$  e subtraindo) vem:

$$\rho \bar{w}_{x,tt} = \mu \nabla^2 \bar{w}_x \quad (1.11)$$

onde  $\bar{w}_x = (w_{,y} - v_{,z})$  com equações similares para  $v$  e  $w$ . Obtém-se então a velocidade de propagação de uma onda que causa somente distorção (cf. (1.3)):

$$c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (1.12)$$

### 1.2.3 - Modos de Conversão no Contorno

Quando uma frente de onda atinge um contorno plano, fenômenos de reflexão e transmissão têm lugar. Estes são mais complicados que os da ótica já que pode ocorrer mais de um tipo de onda na reflexão e transmissão.

As ondas, cujo movimento das partículas é perpendicular a sua direção de propagação, são chamadas ondas do tipo S. Esta

pode sempre ser decomposta em duas parcelas: uma, cuja vibração se dá na direção perpendicular ao plano formado pelos vetores  $\vec{n}_s$  e  $\vec{n}_p$  (Figura 1.1), chamada onda **SH**. A outra parcela provoca movimentos no plano definido por  $\vec{n}_s$  e  $\vec{n}_p$ , mas perpendicular à  $\vec{n}_p$ , e é chamada de **SV**.

Assim, quando uma onda SH atinge uma interface (Figura 1.1) uma parte é refletida e outra transmitida, porém com as direções de vibração permanecendo as mesmas.

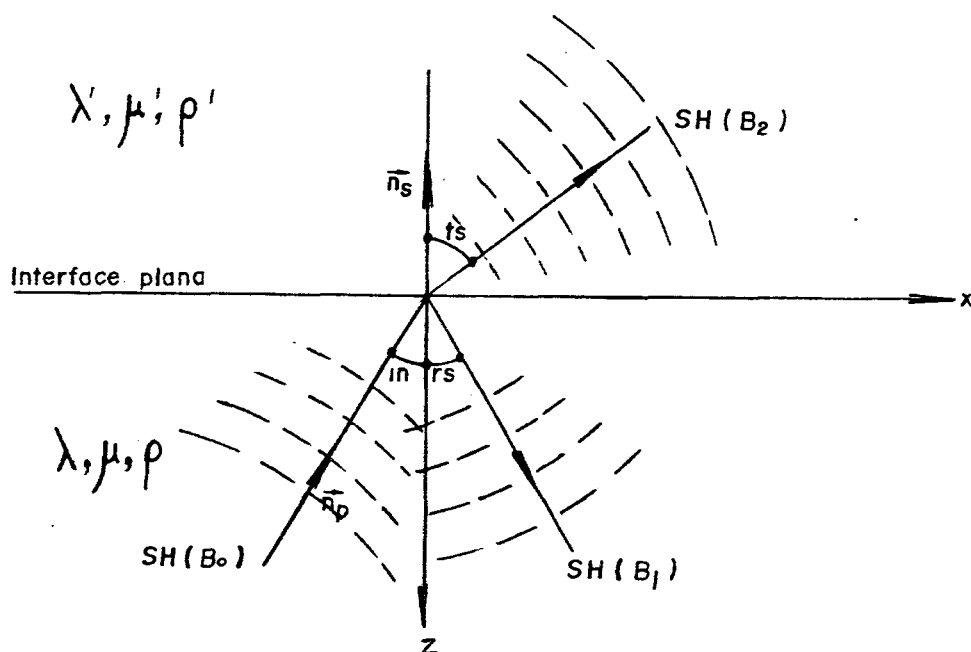


Fig. 1.1 - Onda SH incidindo numa interface plana.

Já quando uma onda SV ou P atinge o mesmo contorno, ocorre o fenômeno chamado de "modo de conversão", onde a onda incidente divide-se em duas parcelas, uma SV e outra P, tanto na reflexão como na transmissão, Figura 1.2.

O tratamento matemático deste fenômeno será apresentado no Apêndice 2 e é baseado na Teoria dos Potenciais.



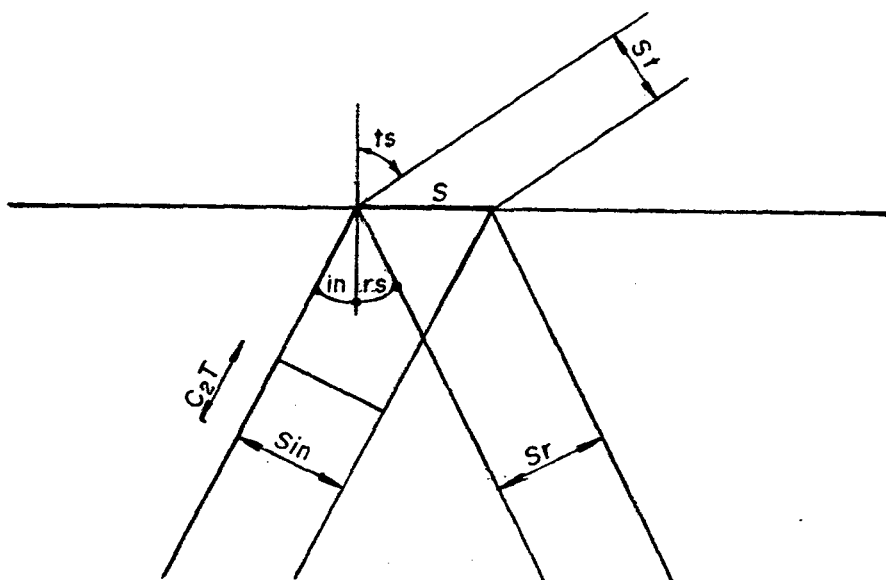


Fig. 1.3 - Uma frente de onda SH com secção transversal qualquer.

$$u_i = B_0 e^{i\omega\left(\frac{x}{c_2} \text{sen } in - \frac{z}{c_2} \text{cos } in - t\right)} \quad (1.13)$$

$$\dot{u}_i = -i\omega B_0 e^{i\omega\left(\frac{x}{c_2} \text{sen } in - \frac{z}{c_2} \text{cos } in - t\right)} \quad (1.14)$$

A velocidade máxima é dada então por:

$$\dot{u}_i = -i\omega B_0 \quad (1.15)$$

A massa pode ser escrita como:

$$m = \rho V \quad (1.16)$$

onde  $\rho$  é a densidade volumétrica do meio de propagação e  $V$  o volume.

A energia por ciclo de oscilação vale:

$$E_{in} = \frac{1}{2} \frac{\rho V}{T} \omega^2 B_0^2 \quad (1.17)$$

$$E_{in} = \frac{1}{2} \rho \frac{S_{in} c_2 T}{T} \omega^2 B_0^2 \quad (1.18)$$

$$E_{in} = \frac{1}{2} \gamma \omega^2 B_0^2 S_{in} \quad (1.19)$$

com  $\gamma = \sqrt{\rho\mu}$  e  $T$  o período.

Do mesmo modo, as energias refletida e transmitida podem ser expressas, respectivamente, por:

$$E_r = \frac{1}{2} \gamma \omega^2 B_1^2 S_r \quad (1.20)$$

$$E_t = \frac{1}{2} \gamma' \omega^2 B_2^2 S_t \quad (1.21)$$

$S_{in}$ ,  $S_r$ ,  $S_t$  representam as secções transversais das ondas incidente, refletida e transmitida, respectivamente.

As secções transversais relacionam-se por:

$$S_{in} = S_r = S \cos in \text{ e } S_t = S \cos ts \text{ de onde:}$$

$$\frac{E_r}{E_{in}} = \left(\frac{B_1}{B_0}\right)^2 \quad (1.22)$$

$$\frac{E_t}{E_{in}} = \frac{\mu' b'}{\mu b} \left(\frac{B_2}{B_0}\right)^2 \quad (1.23)$$

com  $b = \cotg rs$  e  $b' = \cotg ts$  (Veja Apêndice 2).

Quanto às amplitudes estas podem ser números complexos significando isto uma mudança de fase no contorno, que ocorre quan

do a onda o atinge. Assim  $B_1$ , por exemplo, pode ser um número complexo do tipo  $r + ic$  (Veja Figura 1.4).

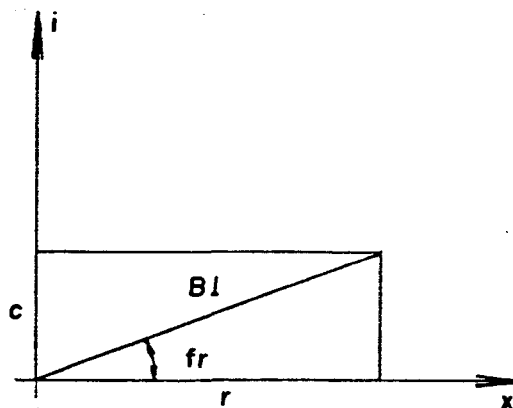


Fig. 1.4 - Representação de um número complexo.

Seu módulo  $\sqrt{r^2+c^2}$  é que é efetivamente usado no cálculo da energia, pois:

$$B_1 = r + ic \quad (1.24)$$

$$B_1 = \sqrt{r^2+c^2} (\cos fr + i \operatorname{sen} fr) \quad (1.25)$$

A mudança de fase passa a ser determinada pela relação:

$$fr = \operatorname{tg}^{-1} (c/r) \quad (1.26)$$

As várias razões de amplitudes podem, então, ser apresentadas como segue:

$$X_1 = \frac{A_1}{A_{in}} = Y_1 (\cos frp + i \operatorname{sen} frp) \quad (1.27)$$

$$X_2 = \frac{B_1}{A_{in}} = Y_2 (\cos frs + i \sin frs) \quad (1.28)$$

$$X_3 = \frac{A_2}{A_{in}} = Y_3 (\cos ftp + i \sin ftp) \quad (1.29)$$

$$X_4 = \frac{B_2}{A_{in}} = Y_4 (\cos fts + i \sin fts) \quad (1.30)$$

onde  $A_{in} = A_0$  se a onda incidente for P e  $A_{in} = B_0$  no caso de onda SV. frp, frs, ftp e fts representam as eventuais mudanças de fase ocorridas no contorno onde o índice f refere-se à fase, p à onda P, s à onda S, r ou t se a onda é refletida ou transmitida.  $Y_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  são os módulos das amplitudes.

É conveniente apresentar não a energia das ondas mas a razão entre esta e a energia da onda incidente. As várias razões de energias ficam, então, em função do quadrado das razões de amplitudes  $X_i$  [21], [58]. Mais à frente, resultados gráficos apresentarão a raiz quadrada destas razões de energias. Tem-se então que:

$$E_i = K_i X_i^2 \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (1.31)$$

onde  $K_i$ , para a onda P incidente, vale:

$$K_1 = 1, \quad K_2 = \frac{b}{a}, \quad K_3 = \frac{\rho' a'}{\rho a}, \quad K_4 = \frac{\rho' b'}{\rho a} \quad (1.32)$$

e, para onda SV:

$$K_1 = \frac{a}{b}, \quad K_2 = 1, \quad K_3 = \frac{\rho' a'}{\rho b}, \quad K_4 = \frac{\rho' b'}{\rho b} \quad (1.33)$$

com  $a = \cotg rp$ ,  $a' = \cotg tp$ .

#### 1.4 - Aplicações

O campo de aplicação do fenômeno de propagação de ondas em meios materiais é vastíssimo e fascinante, atingindo as áreas mais diversas.

Como exemplos existem os processos de fabricação onde são exigidas altas cargas dinâmicas, o estudo de propagação de trincas [31] ou o estudo de impacto entre corpos elásticos, em que o emprego da teoria de ondas é decisivo [25], [32].

Outras aplicações aproveitam o fato que a velocidade de propagação de uma onda depende do seu meio, sendo então possível avaliar as propriedades do mesmo. Tal aspecto pode ser estendido à estrutura interna do planeta tornando possível o mapeamento de descontinuidades, localização de prováveis depósitos de petróleo, etc... Da análise dos fenômenos de reflexão e transmissão de ondas também é possível projetar estruturas sujeitas a terremotos [1], [6].

Outro campo de aplicação é a emissão acústica, que visa analisar as ondas emitidas pelas deformações de uma dada estrutura. É possível desta forma, e dentro de certos limites, prever e/ou garantir a segurança de um equipamento. Objetivos desumanos também são alcançados através da aplicação em larga escala dos princípios ondulatórios na área militar.

Baseado na propagação de ondas tem-se também a engenharia ultrassônica cujas características gerais são o uso de ondas de alta frequência, baixo nível de energia e a observação da propagação desta energia com o uso de transdutores. A análise dos sinais obtidos pode revelar as mais variadas particularidades de

um corpo (Figura 1.5), inclusive a de um organismo vivo, semelhante à técnica de Raio-X [23]. Entre outras, as referências [4], [37], [48] podem ser consultadas.

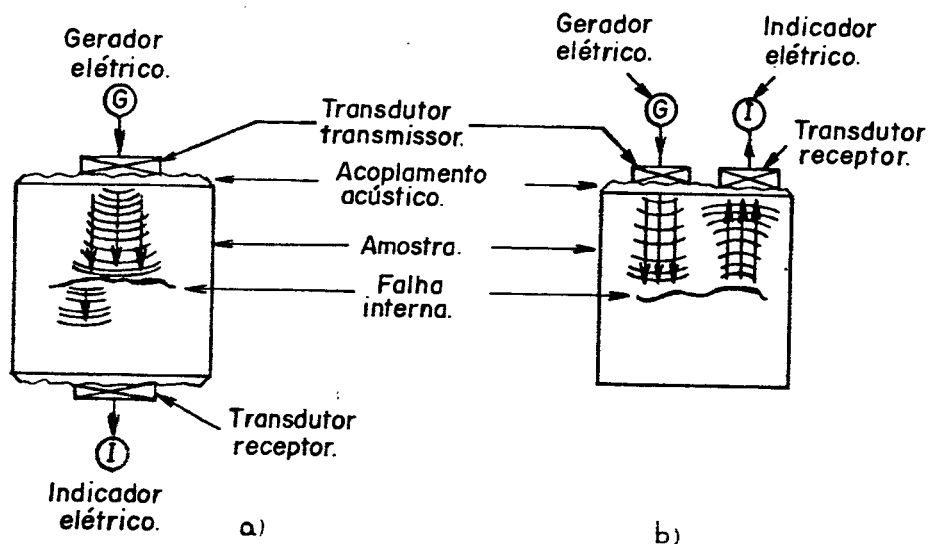


Fig. 1.5 - Métodos básicos de testes:

- a) Detecção da falha por decaimento da energia no receptor.
- b) Detecção da falha por energia refletida ao receptor.

Por último, o assunto que mais será tratado nesta dissertação tem como principal aplicação, até o momento, a detecção de defeitos em materiais laminados, ou seja, aqueles formados pela superposição sucessiva de camadas de diferentes materiais (Figura 1.6).

Da mesma forma que é indispensável um processo de fabricação que garanta a adesão das várias camadas, também o é um ensaio não-destrutivo que permita avaliar o grau de adesão das partes. É possível ocorrer, p.ex., uma região em que a adesão não é completa, Figura 1.7 [48], e as áreas descoladas podem então ser determinadas com base nos princípios de reflexão e transmis-

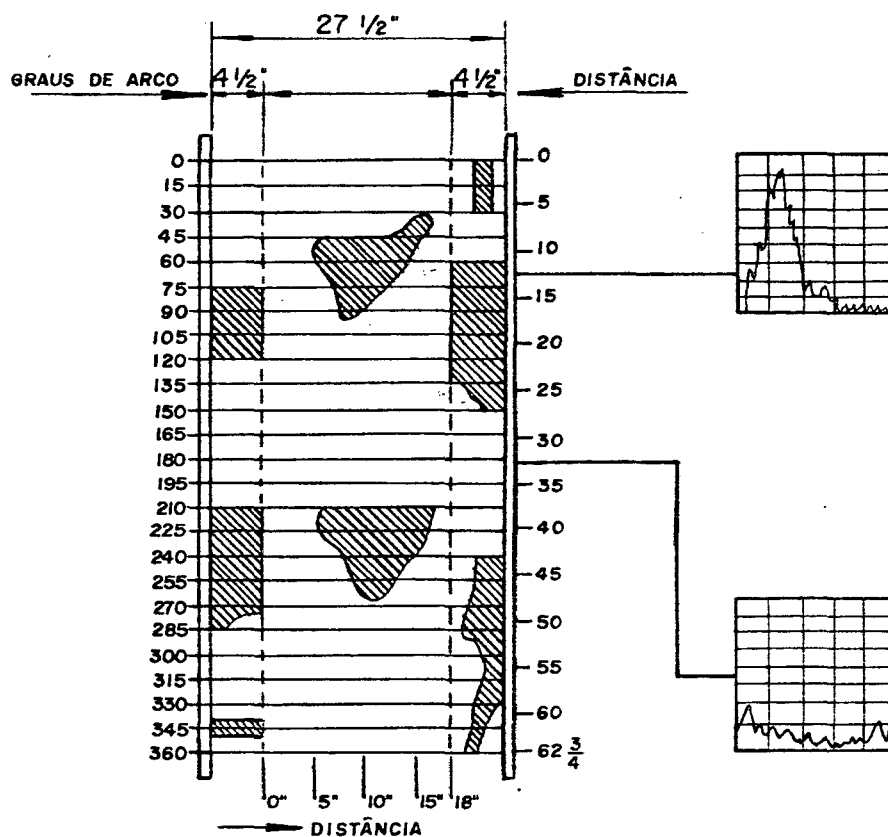


Fig. 1.7 - Teste para detecção de áreas não-aderentes.

### 1.5 - O Problema e a Revisão Bibliográfica

Vários são os autores que têm cooperado para o desenvolvimento do conhecimento científico e tecnológico sobre ondas elásticas.

O interesse deste trabalho volta-se a sólidos em contato segundo um contorno plano e, sob este aspecto, um dos modelos mais simples estudados refere-se a ondas SH percorrendo sólidos semi-infinitos que estão, ou rigidamente conectados [20], ou em deslizamento perfeito [27]. As condições intermediárias de deslizamento serão analisadas nos Capítulos 2 e 3.

A partir daí foi introduzido o conceito de deslizamen-

to, aderência e separação com o intuito de analisar regiões atingidas por frentes de ondas onde tais aspectos se fazem presentes |19|.

Em face disto também foi possível a avaliação da extensão das zonas de deslizamento, aderência e separação quando uma carga horizontal |9| ou vertical |7|, é apoiada em um substrato |8| e move-se à velocidade constante. Entre o substrato e o sólido semi-infinito o atrito de Coulomb foi adotado, sendo este expresso por  $F_{at} = fN$  onde  $F_{at}$  = Força de Atrito,  $f$  é o coeficiente de atrito e  $N$  a força normal.

A análise de trincas em sólidos sujeitos a cargas normais à superfície, movendo-se a velocidade constante, é apresentada em |53| (o atrito considerado foi o de Coulomb).

Maria Comninou e John Dundurs trataram também |10|, |11| as ondas elásticas de interface ou "Ondas de Stoneley"\* concluindo sua existência mesmo quando ocorre separação localizada e os sólidos não podem transmitir tensões de tração.

Ondas incidindo em estruturas enterradas |14|, estruturas em geral |59| ou em sólidos semi-infinitos quando aquelas são de natureza aleatória |41|, também foram estudadas, modelando-se o atrito pela Lei de Coulomb.

O estudo de zonas de separação entre sólidos também está desenvolvido, tanto envolvendo ondas senoidais |12|, |13| como

---

(\*) Ondas de Stoneley são um tipo particular de ondas de Rayleigh que ocorrem na interface de dois sólidos. Veja |20|, |21| e também o artigo |45| onde é apresentado uma solução numérica para tais ondas considerando-se entre os sólidos atrito viscoso linear.



de formas as mais variadas |18|.

Um fato comum a tais estudos é o uso do modelo de atrito de Coulomb pois este representa, em primeira aproximação, as forças dissipativas. Modelos de atrito do tipo  $F_{at} = K.d$ , onde  $K$  é uma constante e  $d$  o deslizamento, também são usados.

Contudo a natureza atua independentemente de nossos modelos sendo o atrito, na realidade, um fenômeno muito complexo |3|, |35|, |51|, |55| dependente de muitos fatores\*. A interrelação destes implica em leis matemáticas não-lineares.

Para a consideração dos mesmos é necessária grande sofisticação matemática e numérica (quando possível), razão pela qual muitos são os métodos para se transformar uma equação ou sistema não-linear em um linear |28|, |29|, |47| tentando garantir bons resultados.

Em fins de 1977, Richard K. Miller aplicou o **Método da Linearização Equivalente** (MLE) |40| ao problema de ondas elásticas  $S$  incidindo normalmente em um contorno plano sujeito a um modelo de atrito "qualquer". Mais tarde, junto com Hoi T. Tran, publicaram resultados para ondas  $SH$ ,  $SV$  e  $P$  |42|, |43|, |58| comparando-os a uma solução exata para atrito de Coulomb, com boa concordância.

Devido à crescente importância da consideração do amor-

---

(\*).- Madakson, em excelente artigo |35|, formula a seguinte lei para a força de atrito entre duas superfícies em contato:

$F_{at} = K W^n (\rho v^2 A)^d$  onde  $K$  é uma constante,  $W$  a força normal,  $\rho$  a densidade,  $v$  a velocidade de fricção,  $A$  a área real de contato,  $n$  e  $d$  coeficientes cujos valores dependem da deformação ser plástica ou elástica.

tecimento em ondas [37], o presente trabalho aborda este aspecto e desenvolve soluções para ondas amortecidas incidindo em contornos planos.

Inicialmente, o modelo de atrito empregado é o linear viscoso. Ondas SH (Cap. 2), SV e P (Cap. 3) são tratadas e a solução exata é apresentada graficamente, inclusive para o caso especial de não-amortecimento.

Em seguida o MLE é desenvolvido para ondas SH (Cap. 4), SV e P (Cap. 5) com amortecimento, demonstrando-se que o caso não amortecido tratado em [58] é apenas um aspecto particular do primeiro. Exemplos numéricos são resolvidos assumindo-se um modelo de atrito de Coulomb.

P A R T E    I I

MODELOS LINEARES DE ATRITO

## CAPÍTULO 2

### ONDAS SH COM E SEM AMORTECIMENTO - SOLUÇÃO EXATA PARA ATRITO LINEAR FUNÇÃO DO DESLIZAMENTO

#### 2.1 - Introdução

Em 1976 Guarajuda S. Murty publicou um trabalho [44] em que apresentou a solução analítico-numérica do problema de uma onda P atingindo o contorno entre dois sólidos quaisquer sujeitos a um modelo de atrito linear, função do deslizamento.

Quando este atrito é do tipo viscoso, surge uma constante - chamada constante de adesão - que relaciona a tensão de atrito com o deslizamento. Tal constante pode representar todos os diferentes graus de adesão (e, portanto, de deslizamento) entre as superfícies dos dois sólidos em contato.

O artigo não tratou explicitamente de ondas SH e SV bem como o amortecimento inerente a uma onda propagando-se no interior de um sólido.

É objetivo deste capítulo e do seguinte apresentar uma solução analítico-numérica para ondas SH, SV e P onde o amortecimento das mesmas será considerado. Além disso mostrar-se-á que o caso não amortecido é uma particularidade de um meio quando sua absorção é nula.

Os sólidos serão considerados semi-infinitos e pressionados um contra o outro de tal forma que a separação normal ao plano de contato é evitada.

No decorrer deste trabalho estas duas considerações se-

rão mantidas mesmo com o comentário prévio quanto ao efeito das pré-tensões nas amplitudes e velocidades de propagação. Isto pode ser assumido pois as pré-tensões necessárias para impedir a separação não são elevadas.

## 2.2 - Formulação

Considere dois sólidos semi-infinitos, homogêneos, lineares, isotrópicos, livres de tensões residuais e em contato segundo uma superfície plana. Considere, também, uma onda SH harmônica com amortecimento atingindo este contorno plano (Fig. 2.1).

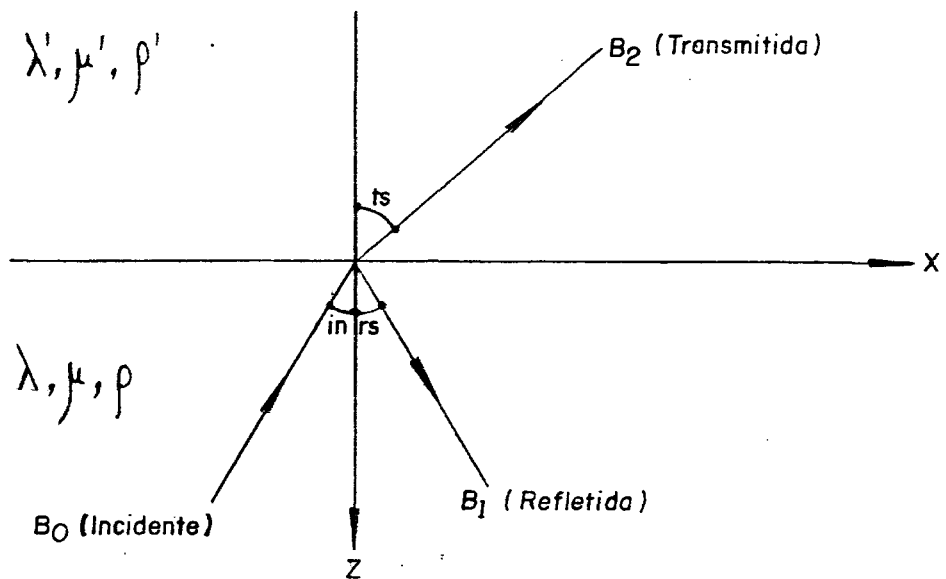


Fig. 2.1 - Uma onda SH incidindo num contorno plano:

Como a onda é harmônica, os deslocamentos abaixo relacionados satisfazem a equação da onda para amortecimento nulo (veja Apêndice 2 ou |20|):

$$\vec{v}_i = B_0 e^{-m \text{ sen } in (-x+bz)} e^{ik(bz-x+ct)} \quad (2.1)$$

$$\vec{v}_r = B_1 e^{-m} \text{sen } rs \quad (-x-bz) \quad e^{ik(-bz-x+ct)} \quad (2.2)$$

$$\vec{v}_t = B_2 e^{-m'} \text{sen } ts \quad (-x+b'z) \quad e^{ik(b'z-x+ct)} \quad (2.3)$$

onde  $m$  e  $m'$  são os coeficientes de amortecimento dos sólidos inferior e superior, respectivamente.

Desta forma, uma frente de onda SH de amplitude conhecida ( $B_0$ ), ao atingir um contorno plano, gera outras duas cujas amplitudes e energias deseja-se determinar. As partículas do sólido inferior experimentam um deslocamento  $v_i + v_r$  e as do superior um deslocamento  $v_t$ , de tal modo que a diferença entre estes deslocamentos, na interface, pode gerar um deslizamento localizado dado por  $v_i + v_r - v_t$ .

A este deslizamento opõem-se as forças de atrito que, para um modelo de atrito linear, podem ser descritas como:

$$\tau = \beta d \quad (2.4)$$

onde  $\beta$  é uma constante e  $d$  o deslizamento.

Um caso especial de tal modelo, e que será tratado com detalhes, consiste na existência de uma fina película de líquido lubrificante entre os sólidos. Quando ocorre o deslizamento surge um gradiente de velocidade, permitindo que o atrito possa ser expresso por (Figura 2.2).

$$\tau = \eta v_{,tz} \quad (2.5)$$

onde  $\eta$  é o coeficiente de viscosidade,  $v$  o deslocamento e  $t$  o tem

po.

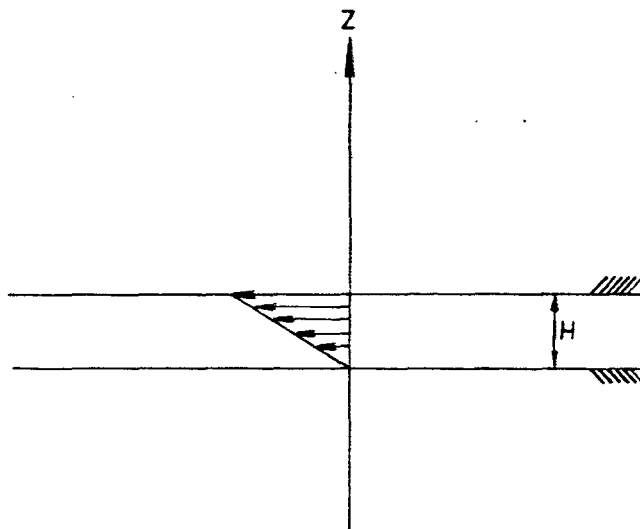


Fig. 2.2 - Região plana de contato entre dois sólidos.

A derivada da velocidade com  $z$  pode, aproximadamente, ser escrita como:

$$v',tz = \frac{v_t - v'_t}{H} \quad (2.6)$$

Mas como o deslocamento é do tipo  $v = e^{ik(ct-x)}$ , segue que  $v_t = -i\omega v$  e, conseqüentemente:

$$\tau = \frac{\eta}{H} i\omega (v' - v) \quad \text{ou} \quad (2.7)$$

$$\tau = \frac{\eta}{\mu H} i \frac{c_2}{\text{sen } in} k (v' - v) \mu \quad (2.8)$$

onde  $\mu$  é a constante de rigidez torsional.

Fazendo  $\eta c_2 / \mu H = -\xi$  pode-se redefinir esta constante que varia de 0 a  $\infty$  por uma outra que varia de 0 a 1:

$$\xi \equiv \frac{\Psi}{1-\Psi} \quad (2.9)$$

Esta constante  $\Psi$  será chamada constante de adesão. Quando  $\Psi = 0$ , têm-se superfícies perfeitamente lubrificadas, e quando  $\Psi = 1$ , têm-se os sólidos em contato perfeito. Assim, a equação para o modelo de atrito torna-se:

$$\tau = i\mu k \frac{\Psi}{1-\Psi} \frac{v'-v}{\text{sen in}} \quad (2.10)$$

As condições de contorno do problema são obtidas da igualdade de tensões cisalhantes nos sólidos superior e inferior  $\sigma_{yz} = \sigma_{yz}'$  e da consideração do modelo de atrito (2.10), ambas em  $z = 0$ .

Aplicando-se a primeira condição de contorno vem:

$$\begin{aligned} \sigma_{yz} &= \sigma_{yz}' \quad |_{z=0} \\ \mu(v_i + v_r)_{,z} &= \mu'v_{t,z} \\ X_2 + g e^{(m' \text{sen } ts - m \text{sen } rs)x} X_4 &= 1 \end{aligned} \quad (2.11)$$

onde  $X_2 = B_1/B_0$ ,  $X_4 = B_2/B_0$  e

$$g = \frac{\mu'b'}{\mu b} \frac{m' \text{sen } ts - ik}{m \text{sen } rs - ik} \quad (2.12)$$

A segunda condição de contorno fornece

$$\begin{aligned} \sigma_{yz} &= \tau \quad |_{z=0} \\ \mu(v_i + v_r)_{,z} &= i\mu k \frac{\Psi}{1-\Psi} \frac{v_t - v_r - v_i}{\text{sen in}} \\ (1-\Psi-h) X_2 + h e^{(m' \text{sen } ts - m \text{sen } rs)x} X_4 &= 1-\Psi+h \end{aligned} \quad (2.13)$$



onde

$$h = \frac{ik}{m \operatorname{sen} rs - ik} \frac{\Psi}{\cos rs} \quad (2.14)$$

Matricialmente, tem-se o sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & g e^{(m' \operatorname{sen} ts - m \operatorname{sen} rs)x} \\ 1-\Psi-h & h e^{(m' \operatorname{sen} ts - m \operatorname{sen} rs)x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_2 \\ X_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1-\Psi+h \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

A solução é:

$$X_2 = \frac{h - g(1-\Psi+h)}{h - g(1-\Psi-h)} e \quad (2.16)$$

$$X_4 = \frac{2h}{h - g(1-\Psi-h)} e^{(-m' \operatorname{sen} ts + m \operatorname{sen} rs)x} \quad (2.17)$$

Quando o amortecimento não é considerado e os sólidos estão em contato perfeito, tem-se:

$$X_2 = \frac{1 - \bar{g}}{1 + \bar{g}} e \quad (2.18)$$

$$X_4 = \frac{2}{1 + \bar{g}} \quad (2.19)$$

onde:

$$\bar{g} = \frac{\mu' b'}{\mu b} \quad (2.20)$$

que é a solução encontrada em, por exemplo, |20|, |21|, |27|, |33|.

Quando a onda SH incide normalmente à interface, a solução acima deixa de ser válida pois os deslocamentos (2.1), (2.2) e (2.3) tornam-se incorretos ( $b$  e  $b'$  são infinitos). O Apêndice 2 mostra os potenciais de onda quando a incidência é normal. A partir deles, aplicam-se as condições de contorno discutidas anteriormente, obtendo-se então um sistema de equações semelhante a (2.15).

Da solução acima apresentada depreende-se que as amplitudes dependem da frequência. Isto é um aspecto muito importante que surge quando da consideração do amortecimento da onda. Mais à frente serão apresentados gráficos que mostrarão o comportamento das várias ondas em função da frequência.

O sistema (2.15) possui solução dependente da coordenada  $x$ . Esta surge para a determinação da razão das amplitudes em um ponto  $x$  qualquer do contorno. A Figura 2.3 abaixo ajuda na compreensão do fenômeno. Considerando-se que  $B_0$  é a amplitude no ponto  $(0,0)$  esta decrescerá com o aumento de  $x$  já que existe amortecimento. Com a diminuição de  $B_0$  a razão  $X_4$  aumentará muito, conforme (2.17). Naturalmente que  $X_2$  não depende de  $x$  (Equação 2.16).

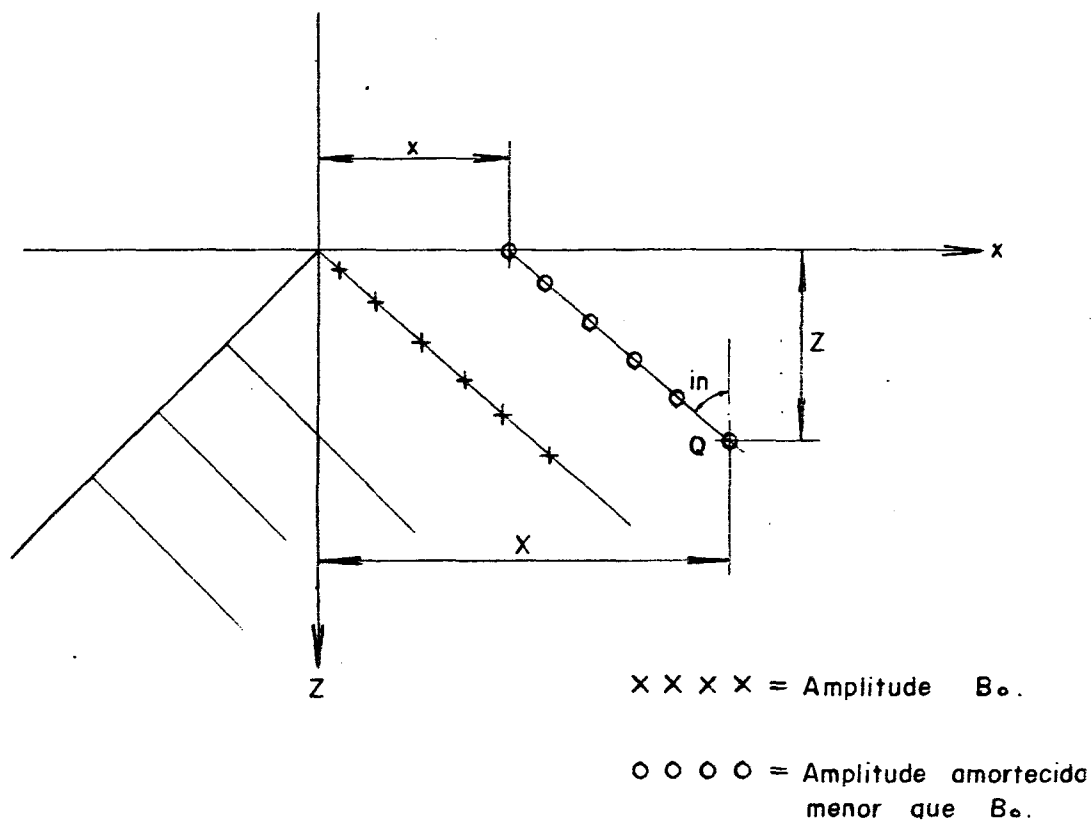


Fig. 2.3 - Sistema de coordenadas.

### 2.3 - Deslizamento e Mudanças de Fase

Como já foi comentado, uma onda provoca movimento das partículas do meio; na interface de contato entre sólidos tal movimento pode provocar um deslizamento localizado. Localizado por que não é todo o sólido que adquire movimento relativo mas sim regiões atingidas pela onda, originando, desta forma, "faixas de deslizamento localizadas".

Matematicamente pode-se exprimi-lo como sendo:

$$d = v_i + v_r - v_t \quad \text{em } z = 0 \quad (2.21)$$

$$d = \{(1 + \chi_2)e^{m \text{ sen } rs \ x} - \chi_4 e^{m' \text{ sen } ts \ x}\} B_0 e^{ik(ct-x)} \quad (2.22)$$

Para apresentação posterior pode-se adimensionalizar esta expressão como segue:

$$D = \frac{d}{B_0 e^{ik(ct-x)}} = (1 + \chi_2)e^{m \text{ sen } rs \ x} - \chi_4 e^{m' \text{ sen } ts \ x} \quad (2.23)$$

É interessante notar de (2.22) que as regiões de deslizamento propagam-se na interface como ondas e com velocidade  $\dot{c}$ .

Quanto à mudança de fase, esta ocorre por ser a onda uma perturbação contínua no espaço e no tempo. Quando o amortecimento não é considerado, as expressões para as amplitudes são números reais enquanto a reflexão total não ocorre. As mudanças de fase possíveis de ocorrerem são então 0 ou  $\pi^*$ , indicando ou não uma inversão de movimento. Ainda sem o amortecimento, as mudanças de fase diferentes de 0 ou  $\pi$  começam a ocorrer quando o ângulo de incidência passa a ser maior que o ângulo crítico. Neste caso as expressões para as amplitudes tornam-se números complexos e um tratamento matemático não-trivial toma lugar.

Quando o amortecimento é considerado, as amplitudes são números complexos independentemente do ângulo de incidência e o sistema depende da frequência. Assim, as mudanças de fase são de tratamento analítico laborioso e a consideração da reflexão total passa a ser uma particularidade. Numericamente estas mu

---

\*A rigor  $n\pi$  tal que  $n = 0, 1, 2, \dots$

danças de fase são facilmente obtidas, como será visto na seção 2.4.

## 2.4 - Resultados Gráficos

As conclusões obtidas matematicamente dependem de vários fatores. Para a consideração total dos mesmos, foi desenvolvido um programa de computador no qual vários casos são analisados. As amplitudes, razões de energias, deslizamento, ângulos, etc.... são calculados e os resultados plotados em gráficos.

Computacionalmente, a consideração da reflexão total é feita tomando o valor de  $b'$  como um número complexo. Assim:

$$b' = \cotg ts = \sqrt{\left(\frac{c}{c_1/2}\right)^2 - 1} \quad (2.24)$$

ou, no caso de reflexão total, quando  $ts$  não é mais definido, vem:

$$b' = i\sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_1/2}\right)^2} \quad (2.25)$$

onde  $i$  é a unidade imaginária.

As amplitudes, quando números complexos do tipo  $r + ci$ , possuem as mudanças de fase dadas por:

$$f = \text{tg}^{-1}(c/r) \quad (2.26)$$

Para o cálculo das energias a partir de amplitudes complexas do tipo  $r + ci$  estas são tomadas em módulo  $\sqrt{r^2 + c^2}$ .

As razões de energias que serão apresentadas foram obtidas de (1.31) e (1.33). Aos sólidos foram atribuídas as constantes:  $\nu = \nu' = 0.3$  ( $\nu$  é o coeficiente de Poisson),  $\mu/\mu' = 1$ ,  $c_2 = 3000$  m/s. As várias curvas, a seguir apresentadas, relacionam-se às várias constantes de adesão, que foram tomadas como sendo  $\Psi = 0, 0.25, 0.5, 0.75$  e 1.

#### 2.4.1 - Amortecimento Nulo sem Reflexão Total

Neste sub-ítem serão apresentados os resultados para  $m = m' = 0$  e  $c_2/c_2' = 1.1$ . Esta razão de velocidades faz com que não ocorra a reflexão total. As variáveis do problema são descritas em função do ângulo de incidência.

O comportamento da raiz quadrada da razão entre a energia refletida e a energia incidente ( $E_2$ ) está apresentado na Figura 2.4 enquanto a Figura 2.5 apresenta a onda transmitida  $E_4$ .

Percebe-se que, para certos ângulos de incidência, nenhuma onda é refletida e, a eles associado, a onda transmitida possui intensidade máxima. Poderia ser esperado que a transmissão fosse a maior possível para incidência normal. Porém, para este ângulo ( $i_n = 0^\circ$ ), o deslizamento é máximo (Figura 2.8), dificultando a transmissão da onda ao meio II. Assim, existe um comprometimento entre o deslizamento e a energia transmitida, fazendo com que esta seja maior para incidências diferentes da normal. Isto só é válido quando os sólidos não estão rigidamente conectados pois, do contrário, não ocorre deslizamento e, portanto, não existe a influência deste na transmissão da onda. Neste caso ela

será máxima para incidência normal.

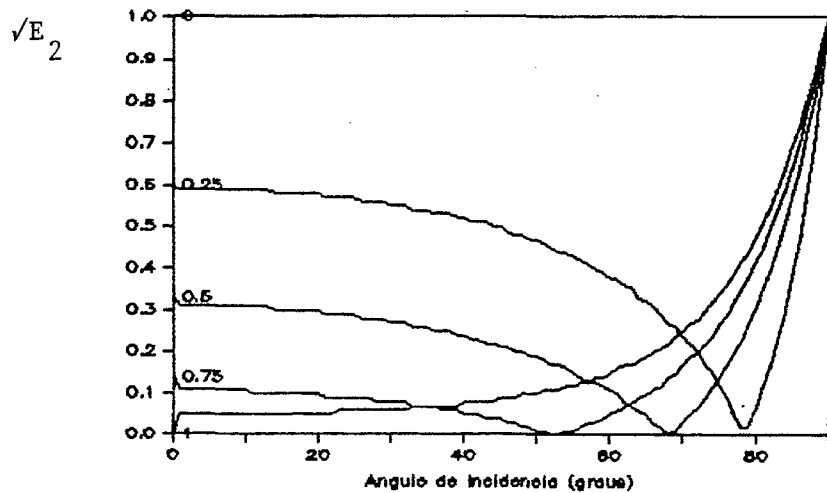


Fig. 2.4 - Comportamento da Onda Refletida em função do ângulo de incidência.

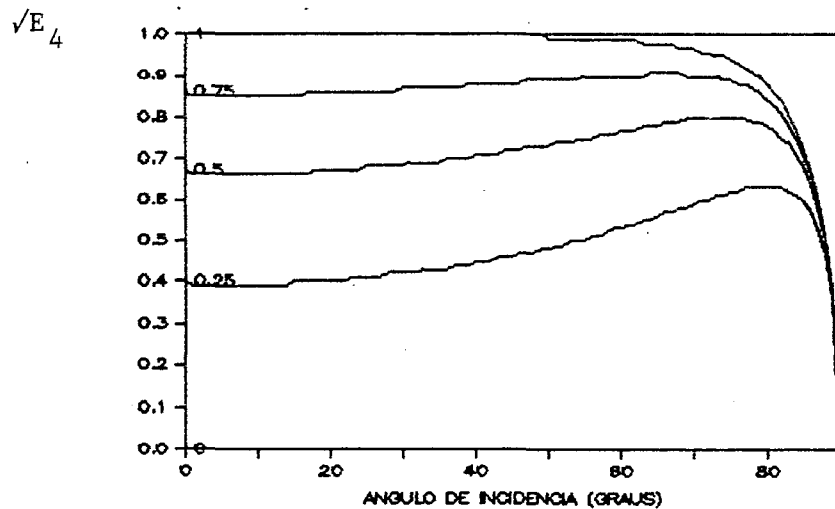


Fig. 2.5 - Onda Transmitida para  $c_2/c_1 = 1.1$  e amortecimento nulo.

Observa-se que quando ocorre uma incidência rasante ( $\text{in}=90^\circ$ ) nenhuma onda é transmitida ao meio II. O mesmo ocorre quando os sólidos em contato podem escorregar livremente ( $\Psi=0$ ).

As Figuras 2.6 e 2.7 mostram a energia normalizada (EN) e a energia absorvida (EA). Neste trabalho estas estão definidas por (para o caso de onda SH):

$$EN = E_2 + E_4 \quad (2.27)$$

$$EA = 1 - EN \quad (2.28)$$

Os mecanismos de absorção de energia são muitos [3], [33] mas aqui não serão tratados. A expressão (2.28) acima, apesar de simples, é capaz de estimar a energia absorvida devido à fricção dos pares em contato. O amortecimento também causa absorção de energia mas é possível afirmar que (2.28) representa apenas a dissipação de energia por fricção. Isto porque os resultados mostrados em todo o trabalho são válidos no ponto (0,0), ou seja, no ponto em que a amplitude da onda incidente é  $A_0$ . Se a coordenada  $x$  do problema fosse diferente de 0 então a absorção de energia seria também atribuída ao amortecimento da onda incidente devido à distância que esta percorreria entre o ponto (0,0) e o ponto (x,0) (veja a Figura 2.3). Ressalta-se também que as energias normalizada e absorvida são a representação de fenômenos oscilatórios. Energias associadas a perturbações não periódicas, caso da reflexão total, não são aqui consideradas.

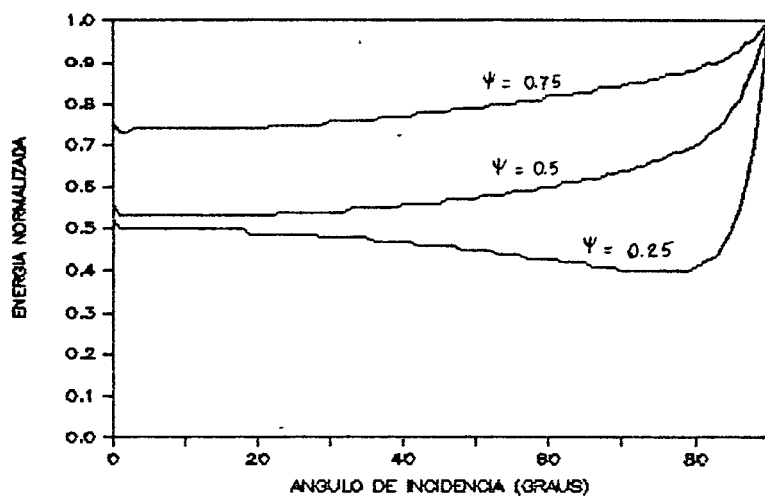


Fig. 2.6 - Energia normalizada em função do ângulo de incidência para vários graus de aderência dos sólidos.



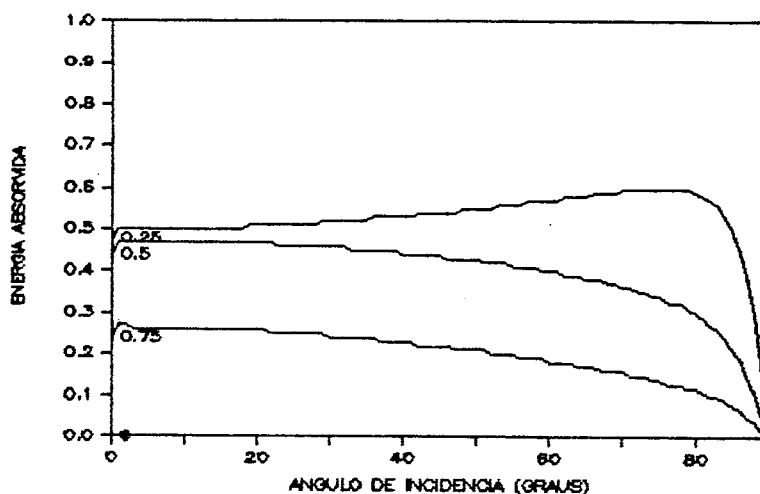


Fig. 2.7 - Energia absorvida pela fricção do contorno.

Quando  $EA=0$  isto sugere que nenhuma perda ocorre no contorno por fricção, com o deslizamento nulo ou máximo. Isto está confirmado na Figura 2.8 que mostra o deslizamento definido em (2.23) em função do ângulo de incidência da onda SH.

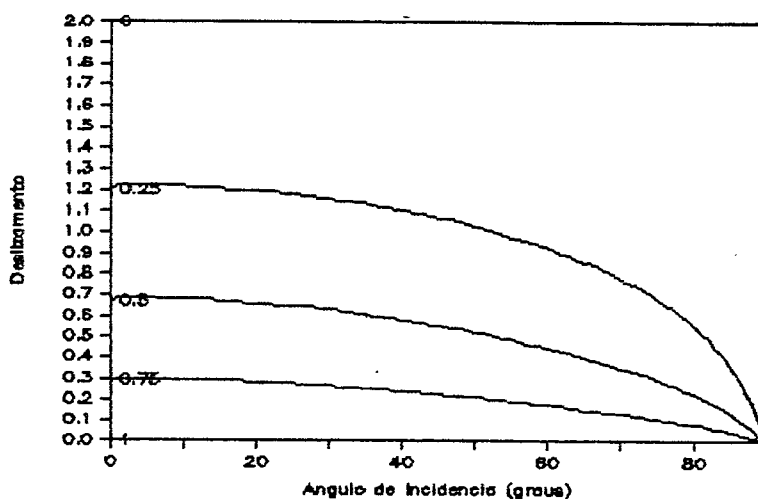


Fig. 2.8 - Amplitude da Onda de Deslizamento dividida pela Amplitude da Onda Incidente.

#### 2.4.2 - Amortecimento Nulo com Reflexão Total

Para o segundo conjunto de gráficos, valem as mesmas

constantes consideradas anteriormente exceto que  $c_2/c_2' = 0.9$ . Este valor faz com que ocorra a reflexão total, ou seja, a partir de  $\theta_{in} = \text{sen}^{-1}(0.9) = 64.16^\circ$  nenhuma onda é transmitida ao meio II, conforme mostra a Figura 2.9. No ângulo crítico toda a onda incidente é refletida (Figura 2.10).

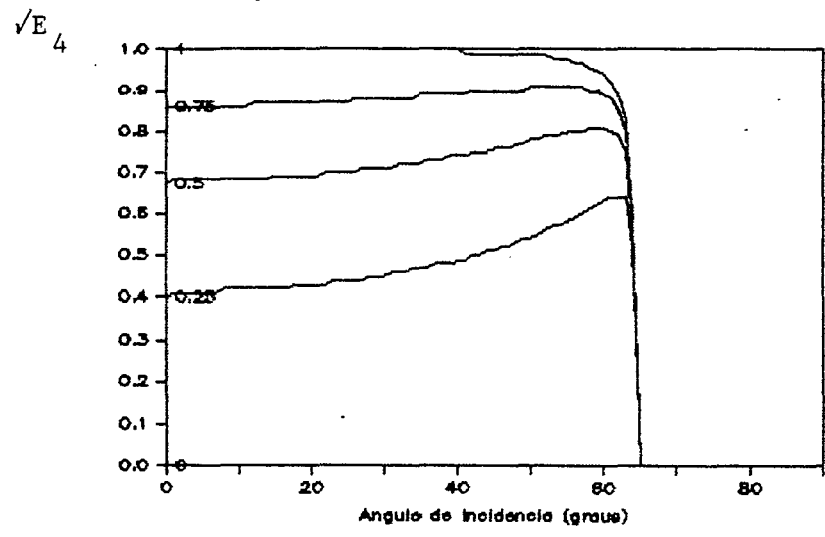


Fig. 2.9 - Onda Transmitida. Amortecimento nulo com reflexão total.

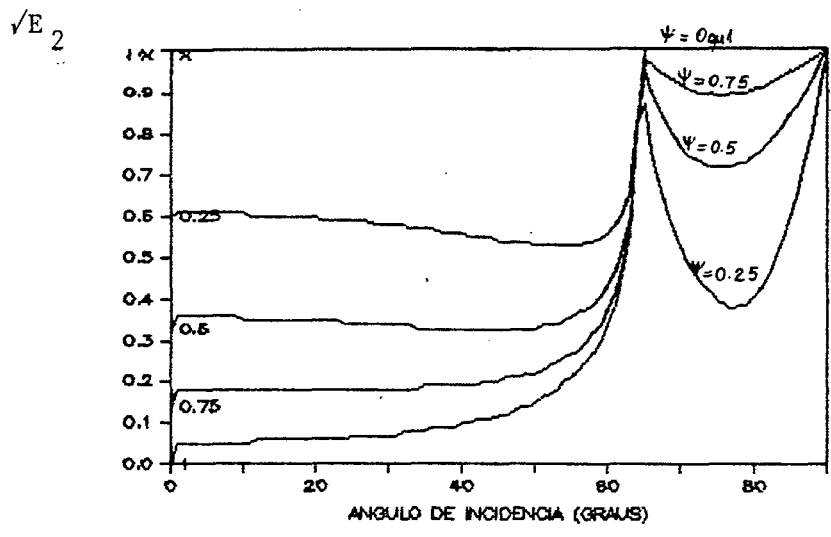


Fig. 2.10 - Onda Refletida para  $\mu/\mu' = 1.0$ ,  $v=v' = 0.3$  e  $c_2/c_2' = 0.9$ .

As Figuras 2.11, 2.12 e 2.13 apresentam a energia nor-

malizada, absorvida e o deslizamento. Como já foi comentado, para amortecimento nulo e ângulo de incidência maior que o crítico, as mudanças de fase serão diferentes de  $n\pi$  ( $n=0,1,2,\dots$ ). Aqui elas não serão apresentadas.

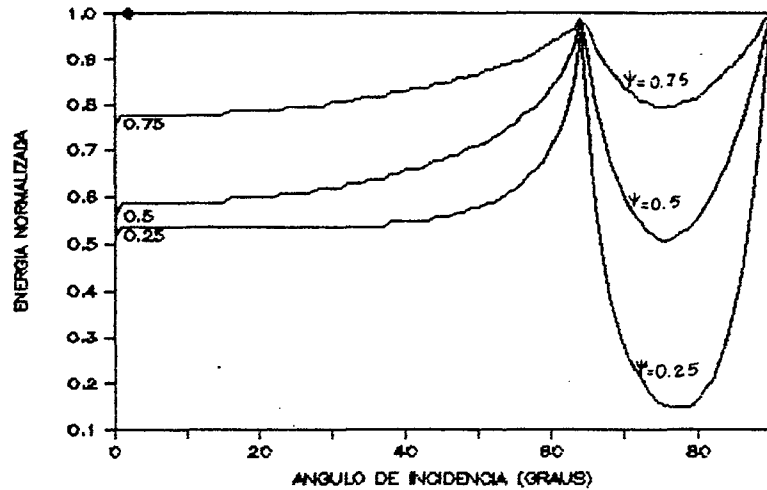


Fig. 2.11 - Energia normalizada para  $c_2/c_2' = 0.9$ .

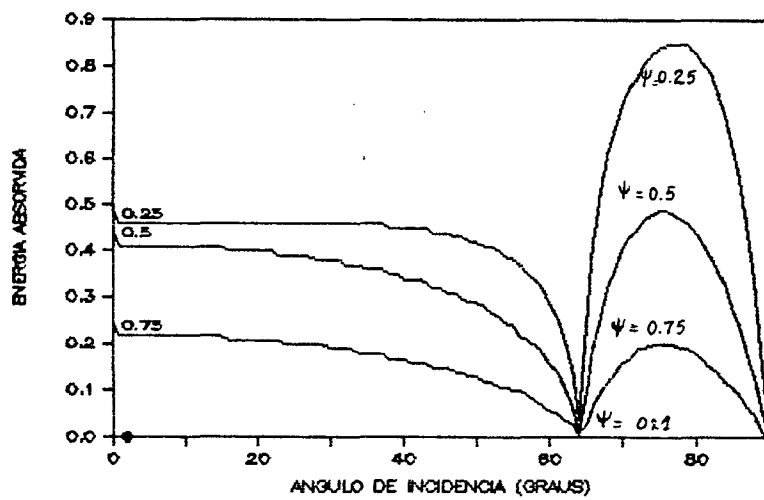


Fig. 2.12 - Energia absorvida em função do ângulo de incidência.

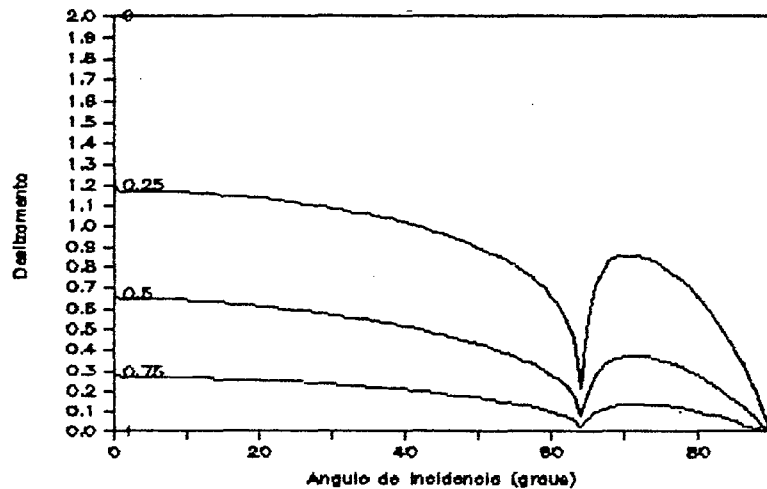


Fig. 2.13 - Deslizamento em função do ângulo de incidência para  $c_2/c_2' = 0.9$ .

#### 2.4.3 - Sólidos com Amortecimento e sem Reflexão Total

O amortecimento foi considerado fazendo  $m = 0.01$  Np/m e  $m' = 0.1$  Np/m (Np - Neper - é adimensional [37], m-metros). Isto torna a frequência uma variável do problema. Tomando as mesmas constantes anteriores e  $c_2/c_2' = 1.1$  apresenta-se, a seguir, o comportamento do fenômeno para  $\omega = 1$  Hz.

A Figura 2.14 mostra a raiz quadrada de  $E_4$  para as várias constantes de adesão e em função do ângulo de incidência. Percebe-se que só para sólidos rigidamente conectados é que ocorre transmissão de energia ao meio II. Para as outras constantes de adesão quase nada se transmite. O inverso ocorre com a energia refletida, Figura 2.15, ou seja, quase toda a energia incidente é rebatida pela interface.

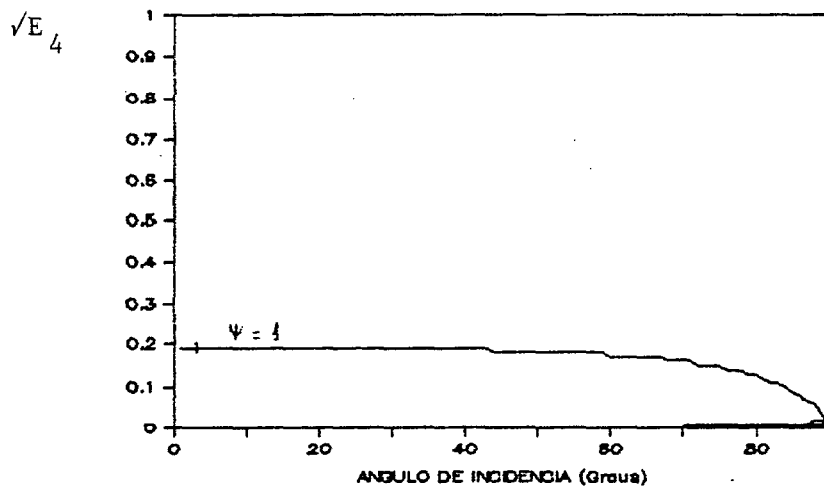


Fig. 2.14 - Onda transmitida quando  $m = 0.01 \text{ Np/m}$ ,  
 $m' = 0.1 \text{ Np/m}$  e  $\omega = 1 \text{ Hz}$ .

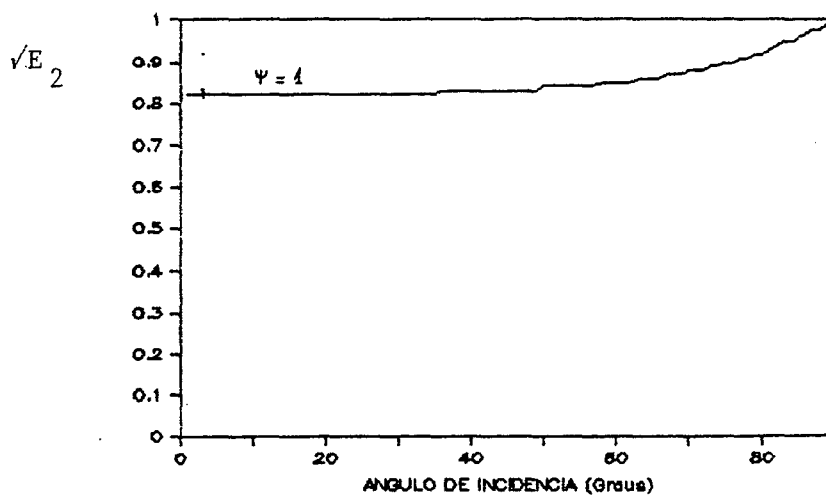


Fig. 2.15 = Onda Refletida para  $\omega = 1 \text{ Hz}$ . Quase toda a  
onda incidente é rebatida pela interface.

Um aumento da frequência para  $\omega = 10^3 \text{ Hz}$  altera sensivelmente os resultados (mesmas constantes anteriores são assumidas). As Figuras 2.16 e 2.17 apresentam  $E_2$  e  $E_4$ .  $E_N$ ,  $E_A$  e o deslizamento estão apresentados nas Figuras 2.18, 2.19 e 2.20, respectivamente.

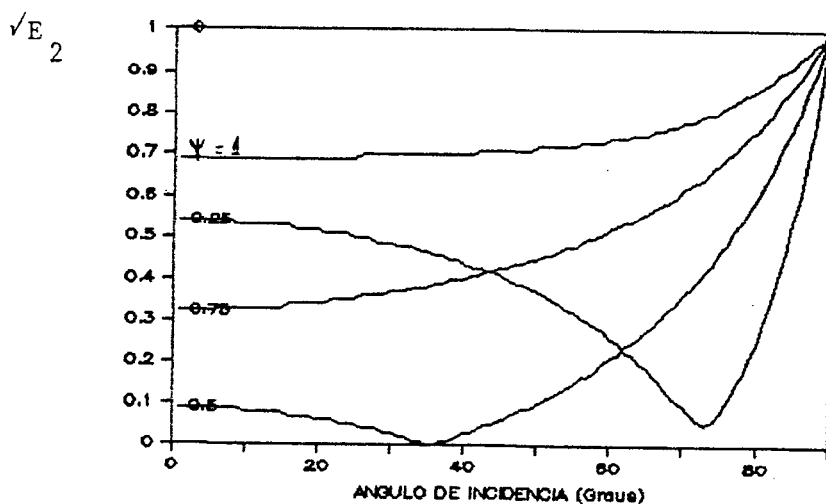


Fig. 2.16 - Comportamento da Onda Refletida para  $m = 0.01 \text{ Np/m}$ ,  $m' = 0.1 \text{ Np/m}$  e  $\omega = 10^3 \text{ Hz}$ .

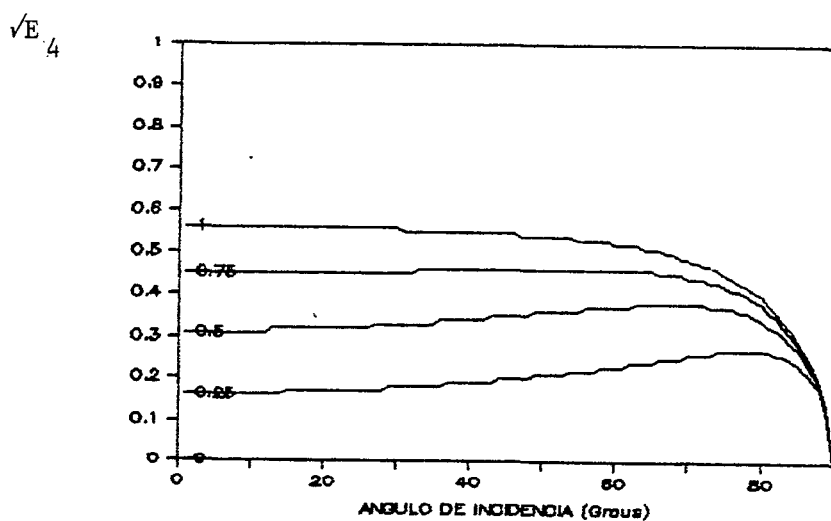


Fig. 2.17 - Onda Transmitida para  $\omega = 10^3 \text{ Hz}$ . Observa-se um sensível aumento do poder de penetração da onda quando comparado à frequências mais baixas.

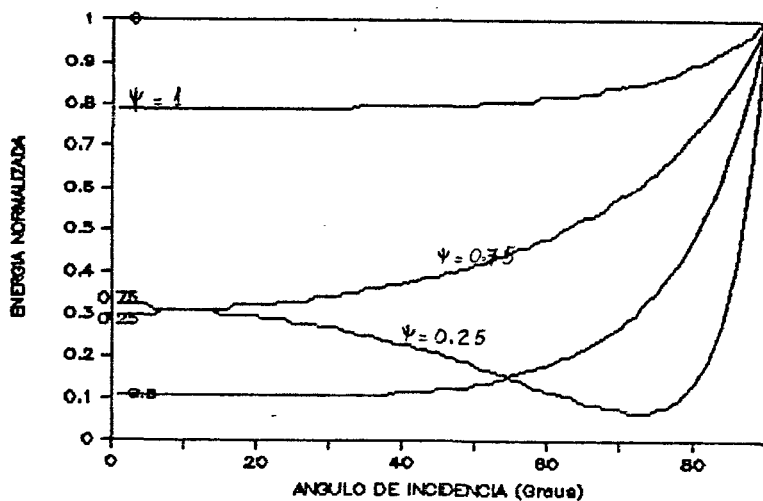


Fig. 2.18 - Energia normalizada em função do ângulo de incidência.

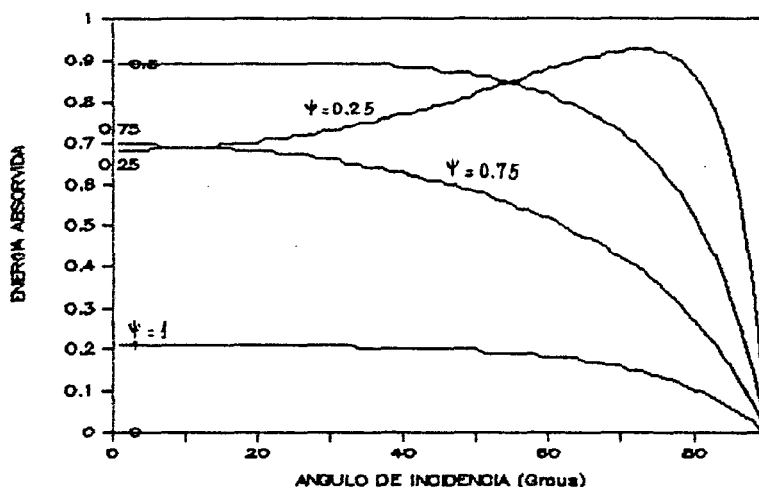


Fig. 2.19 - Energia absorvida pelo atrito na interface.

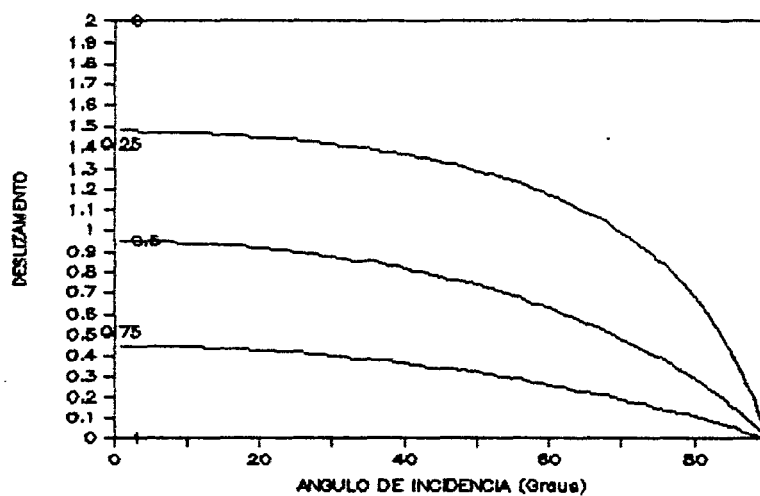


Fig. 2.20 - Amplitude da onda de deslizamento dividida pela da incidente.  $\omega = 10^3$  Hz.

A Figura 2.21 mostra o comportamento da amplitude da onda de tensão no contorno. Esta amplitude está adimensionalizada como segue.

$$\sigma_{yz} = (1 - X_1)(m \operatorname{sen} in - ik) b e^m \operatorname{sen} in x \quad (2.29)$$

$$\bar{T}_1 = \frac{\sigma_{yz} \operatorname{sen} in}{(m \operatorname{sen} in - ik)} \quad (2.30)$$

$$\bar{T}_1 = \frac{\sigma_{yz}}{(m - ik_t)} \quad (2.31)$$

$$T_1 = \|\bar{T}_1\| \quad (2.32)$$

onde  $k_t$  é o número de onda da onda SH e  $\|\ \|\$  representa o módulo de um número complexo.

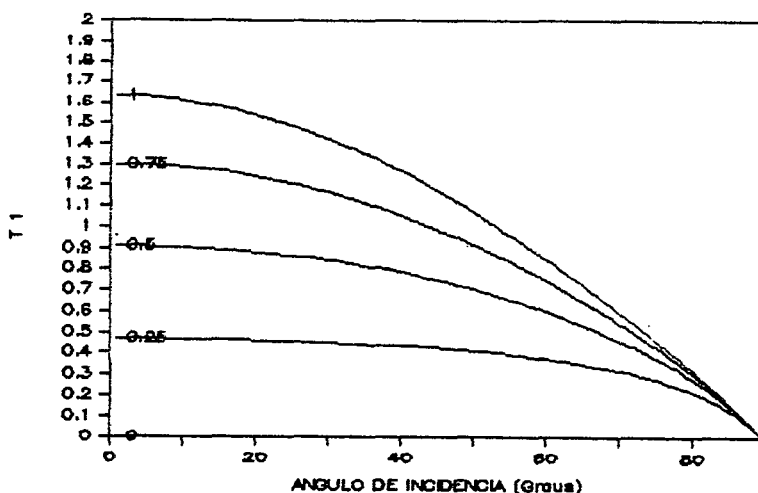


Fig. 2.21 - Amplitude adimensionalizada da onda de tensão cisalhante no contorno.  $\omega = 10^3$  Hz.

#### 2.4.3.1 - Influência da Frequência

Para ficar mais claro a influência da frequência no comportamento das várias ondas serão, a seguir, apresentados mais um conjunto de resultados.

As mesmas variáveis anteriores serão apresentadas em função da frequência. As constantes adotadas são:  $\mu/\mu' = 1.0$ ,  $\nu = \nu' = 0.3$ ,  $m = 0.01$  Np/m,  $m' = 0.1$  Np/m e  $c_2/c_2' = 1.1$ . Se o amortecimento fosse nulo as várias curvas seriam simples retas paralelas ao eixo x. Será mostrado que a influência da frequência



situa-se, no caso presente, na faixa aproximada de 0 a 20 KHz.

As Figuras 2.22 e 2.23 mostram as ondas refletidas e transmitida quando  $\theta_i=40^\circ$ . Dependendo do grau de aderência dos sólidos  $E_2$  aumenta ou diminui com  $\omega$ . A energia normalizada é apresentada na Figura 2.24 e a 2.25 mostra as tensões no contorno. O deslizamento é mostrado na Figura 2.26 e verifica-se que este *diminui* com o aumento da frequência. Este fenômeno possui íntima analogia com as frequências naturais de uma estrutura e os seus modos de vibração, ou seja, quanto maior a frequência menor a amplitude de vibração.

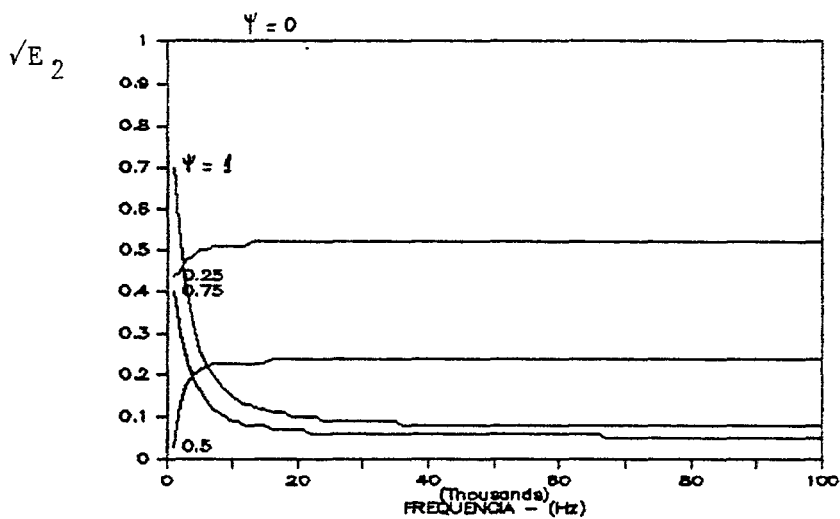


Fig. 2.22 - Onda Refletida para  $\theta_i=40^\circ$  e em função da frequência.

Por fim, nos próximos gráficos, o ângulo de incidência passa a ser  $80^\circ$  permanecendo inalteradas as demais constantes.

As ondas refletida e transmitida comportam-se inversamente, esta última aumentando com  $\omega$ , Fig. 2.27 e 2.28. Para este ângulo de incidência  $\omega$  influi muito pouco no deslizamento, Fig. 2.29.

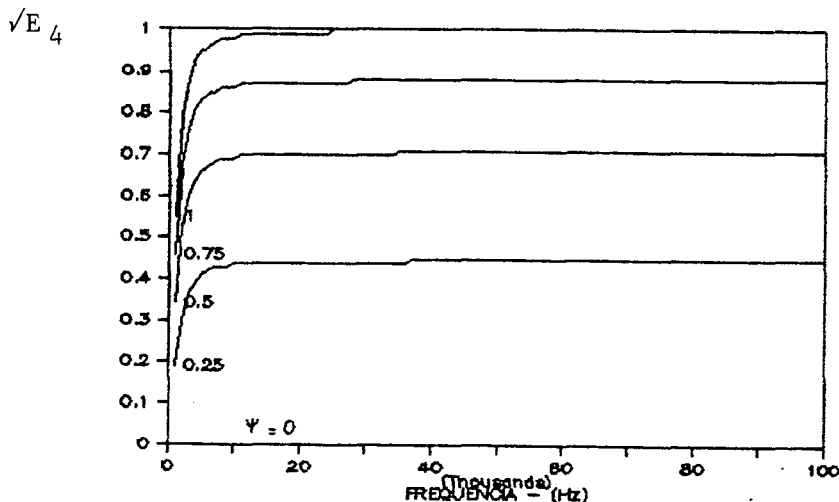


Fig. 2.23 - Onda transmitida aumentando com frequência.

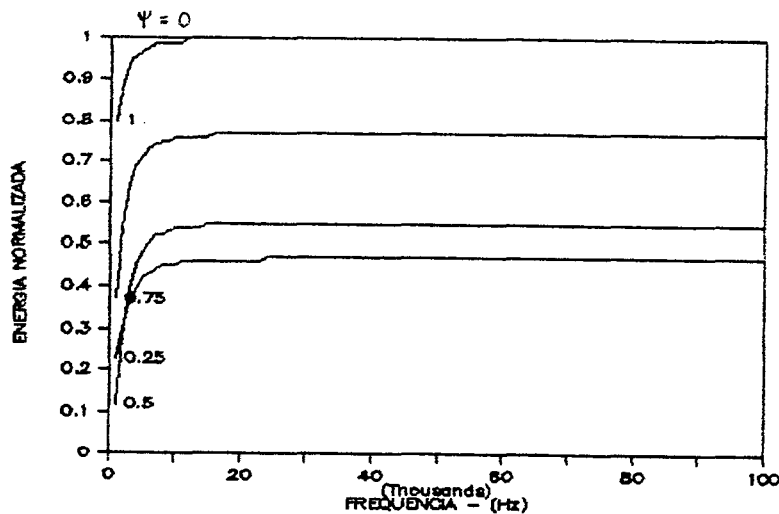


Fig. 2.24 - Energia normalizada.  $i_n=40^\circ$ ,  $\mu/\mu' = 1.0$ ,  $\nu=\nu' = 0.3$  e  $c_2/c_2' = 1.1$ .

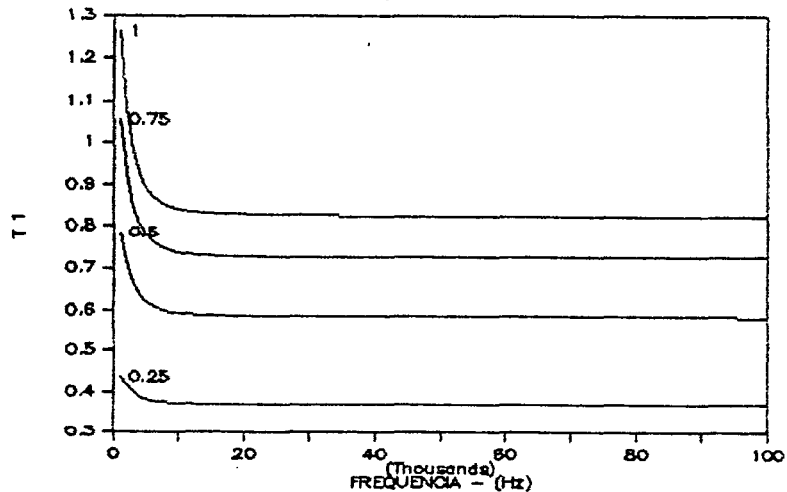


Fig. 2.25 - As Tensões de Fricção em função da frequência para  $i_n=40^\circ$ .

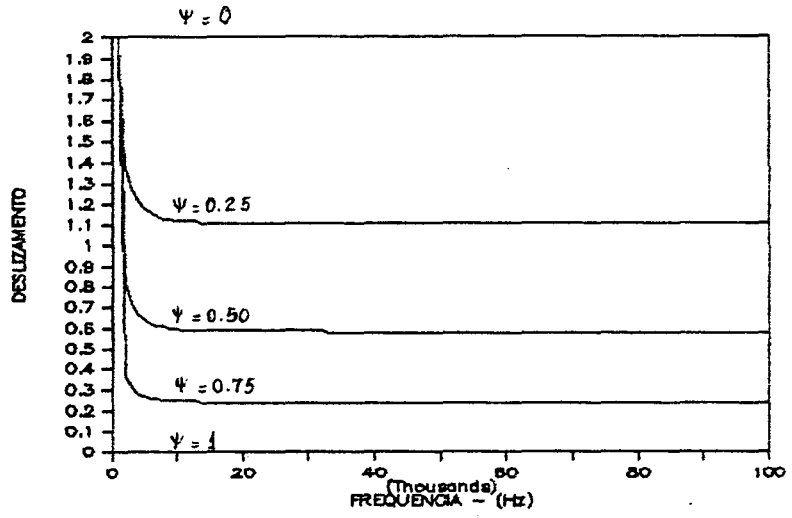


Fig. 2.26 - O deslizamento diminui com o aumento da frequência.  $i_n = 40^\circ$ .

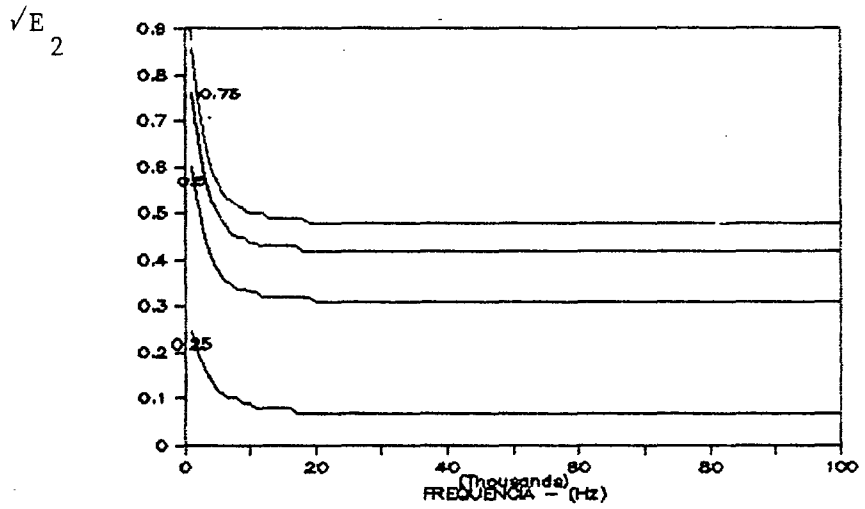


Fig. 2.27 - Onda refletida para  $i_n = 80^\circ$ .

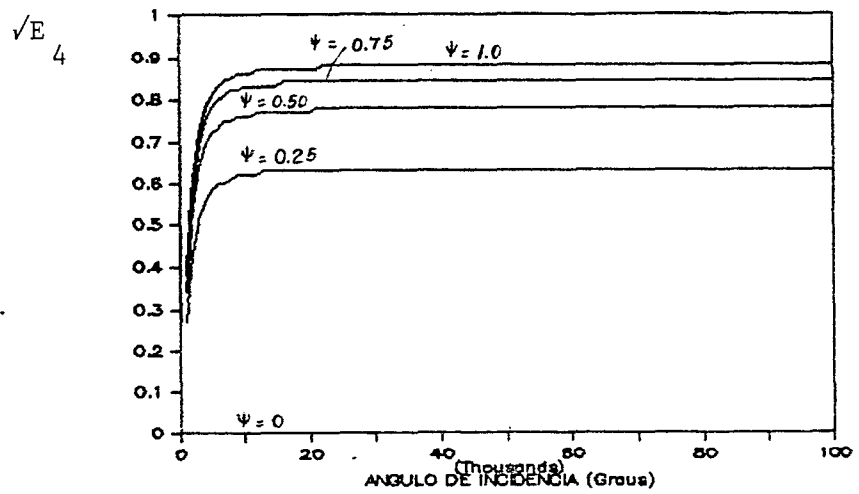


Fig. 2.28 - Onda transmitida SH em função da frequência.  $i_n = 80^\circ$ .

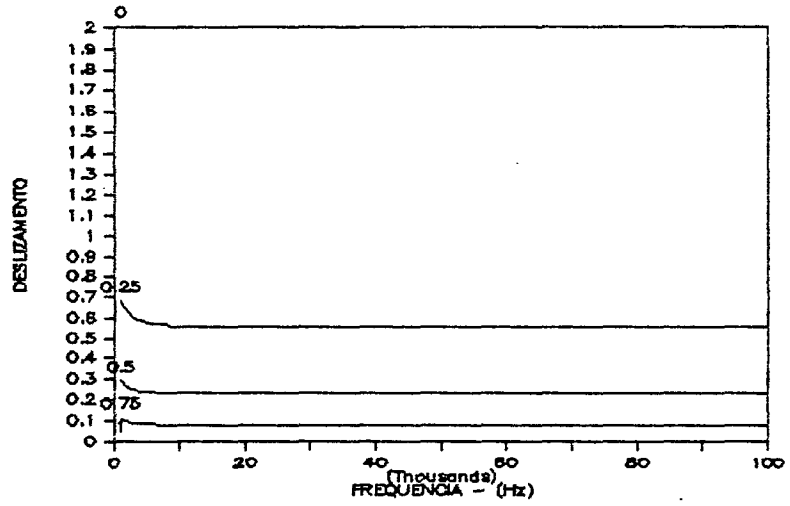


Fig. 2.29 - Para  $i_n=80^\circ$  a freqüência influi muito pouco no deslizamento.

## CAPÍTULO 3

### ONDAS SV E P COM E SEM AMORTECIMENTO - SOLUÇÃO EXATA PARA ATRITO LINEAR FUNÇÃO DO DESLIZAMENTO

#### 3.1 - Introdução

No Capítulo 1 foi apresentado o fenômeno de modo de conversão no contorno e o Apêndice 2 refere-se ao seu tratamento matemático. Assim, quando uma onda SV ou P atinge uma interface plana, outras quatro ondas são geradas.

É objetivo deste capítulo apresentar a solução deste problema quando os sólidos podem deslizar um contra o outro; incluindo o efeito do amortecimento. O modelo de atrito adotado na interface é o *Viscoso Linear*.

#### 3.2 - Formulação

Sejam dois sólidos em contato ao longo de uma superfície plana como na Figura 3.1. Os potenciais  $\phi$  e  $\chi$  referem-se às ondas P e SV respectivamente e as linhas (') ao sólido superior.

Os vários potenciais podem ser apresentados (Cf. o Apêndice 2) como segue:

$$\begin{aligned} \phi = & A_0 e^{-m \operatorname{sen} in} (az-x) e^{ik(az-x+ct)} + \\ & A_1 e^{-m \operatorname{sen} rp} (-az-x) e^{ik(-az-x+ct)} \end{aligned} \quad (3.1)$$

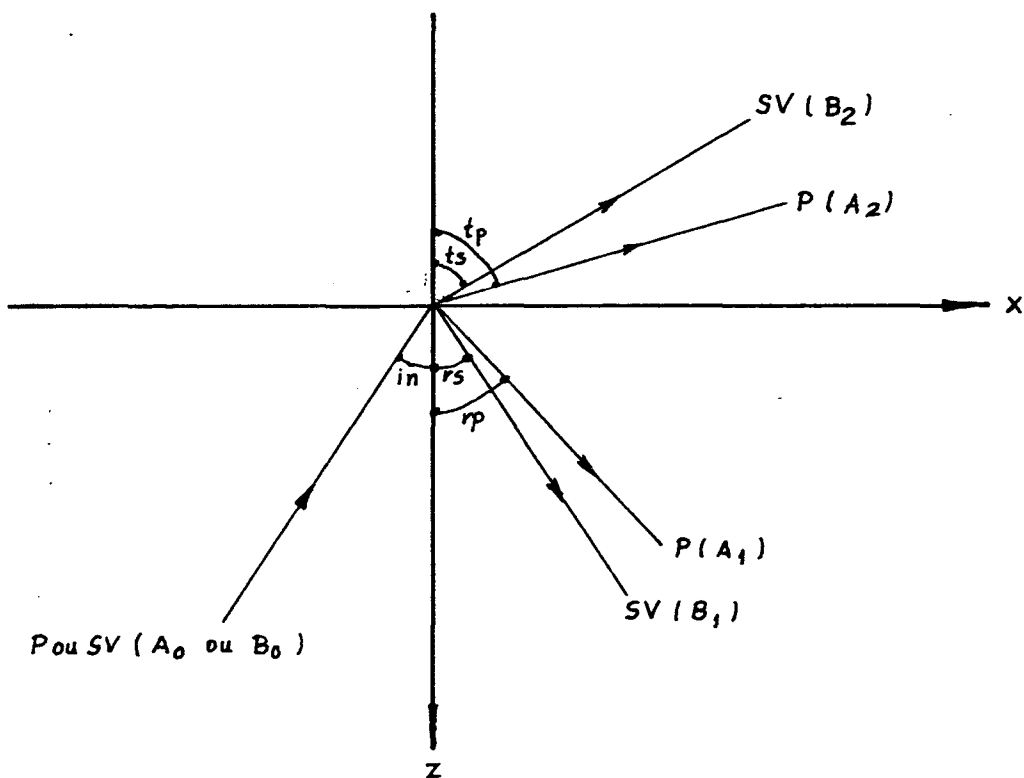


Fig. 3.1 - Onda P ou SV incidindo numa interface plana.

$$\chi = B_0 e^{-m} \text{sen } in (bz-x) e^{ik(bz-x+ct)} + B_1 e^{-m} \text{sen } rs (-bz-x) e^{ik(-bz-x+ct)} \quad (3.2)$$

$$\phi' = A_2 e^{-m'} \text{sen } tp (a'z-x) e^{ik(a'z-x+ct)} \quad (3.3)$$

$$\chi' = B_2 e^{-m'} \text{sen } ts (b'z-x) e^{ik(b'z-x+ct)} \quad (3.4)$$

Para se obter as várias amplitudes a partir da amplitude da onda incidente, é necessário aplicar as condições de contorno que se referem ao modelo de atrito, à continuidade das tensões normais e cisalhantes, e aos deslocamentos normais à interface,

todas válidas em  $z = 0$  e  $x, t$  quaisquer.

Em termos de potenciais, tais condições são:

a) Continuidade de Tensões Normais:

$$\sigma_{zz} = \sigma'_{zz} \quad |_{z=0}$$

$$\begin{aligned} \lambda(\phi_{,xx} + \phi_{,zz}) + 2\mu(\phi_{,zz} + \chi_{,xz}) = \\ \lambda'(\phi'_{,xx} + \phi'_{,zz}) + 2\mu'(\phi'_{,zz} + \chi'_{,xz}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

b) Continuidade de Tensões Cisalhantes:

$$\sigma_{xz} = \sigma'_{xz} \quad |_{z=0}$$

$$\mu(2\phi_{,xz} - \chi_{,zz} + \chi_{,xx}) = \mu'(2\phi'_{,xz} - \chi'_{,zz} + \chi'_{,xx}) \quad (3.6)$$

c) Continuidade de Deslocamentos Normais:

$$w = w' \quad |_{z=0}$$

$$\phi_{,z} + \chi_{,x} = \phi'_{,z} + \chi'_{,x}$$

d) Modelo de Atrito na Interface:

$$\sigma_{xz} = \tau \quad |_{z=0}$$

$$\mu(2\phi_{,xz} - \chi_{,zz} + \chi_{,xx}) = i\mu k \frac{\psi}{1-\psi} \left( \frac{\phi_{,x} - \chi_{,z} - \phi'_{,x} + \chi'_{,z}}{\text{sen } rs} \right) \quad (3.8)$$

Assim, destas condições de contorno, dois sistemas de equações são obtidos. O primeiro corresponde a uma onda incidente do tipo SV. Neste caso  $A_0=0$  e a convenção (1.27) é adotada com  $A_{in}=B_0$ . Quando a onda incidente é do tipo P, tem-se o segundo sistema de equações com  $B_0=0$  e  $A_{in}=A_0$  em (1.27).

Os sistemas podem então ser apresentados como sendo:

$$\sum_{j=1}^4 M_{ij} X_j = V_i \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (3.9)$$

onde  $X_j$  está definido em (1.27) e  $(\alpha=\mu/\mu')$ :

$$\begin{aligned} M_{11} &= \alpha(b^2-1)(m \operatorname{sen} rp - ik)^2 e^m \operatorname{sen} rp x \\ M_{12} &= 2\alpha b(m \operatorname{sen} rs - ik)^2 e^m \operatorname{sen} rs x \\ M_{13} &= -(b'^2-1)(m' \operatorname{sen} tp - ik)^2 e^{m'} \operatorname{sen} tp x \\ M_{14} &= 2b'(m' \operatorname{sen} ts - ik)^2 e^{m'} \operatorname{sen} ts x \\ M_{21} &= 2\alpha a(m \operatorname{sen} rp - ik)^2 e^m \operatorname{sen} rp x \\ M_{22} &= -\alpha(b^2-1)(m \operatorname{sen} rs - ik)^2 e^m \operatorname{sen} rs x \\ M_{23} &= 2a'(m' \operatorname{sen} tp - ik)^2 e^{m'} \operatorname{sen} tp x \\ M_{24} &= (b'^2-1)(m' \operatorname{sen} ts - ik)^2 e^{m'} \operatorname{sen} ts x \\ M_{31} &= a(m \operatorname{sen} rp - ik) e^m \operatorname{sen} rp x \\ M_{32} &= (m \operatorname{sen} rs - ik) e^m \operatorname{sen} rs x \\ M_{33} &= a'(m' \operatorname{sen} tp - ik) e^{m'} \operatorname{sen} tp x \\ M_{34} &= -(m' \operatorname{sen} ts - ik) e^{m'} \operatorname{sen} ts x \\ M_{41} &= \{2a(1-\Psi)(m \operatorname{sen} rp - ik) - ik\Psi/\operatorname{sen} rs\} \\ &\quad (m \operatorname{sen} rp - ik) e^m \operatorname{sen} rp x \end{aligned} \quad (3.10)$$



$$M_{42} = \frac{\{-(b^2-1)(1-\Psi)(m \operatorname{sen} rs - ik) + ik\Psi b/\operatorname{sen} rs\}}{(m \operatorname{sen} rs - ik) e^m \operatorname{sen} rs x}$$

$$M_{43} = \{ik\Psi/\operatorname{sen} rs\}(m' \operatorname{sen} tp - ik) e^{m'} \operatorname{sen} tp x$$

$$M_{44} = \{ik\Psi b'/\operatorname{sen} rs\}(m' \operatorname{sen} ts - ik) e^{m'} \operatorname{sen} ts x$$

No caso de onda incidente do tipo SV, tem-se ainda:

$$V_1 = 2\alpha b(m \operatorname{sen} in - ik)^2 e^m \operatorname{sen} in x$$

$$V_2 = \alpha(b^2-1)(m \operatorname{sen} in - ik)^2 e^m \operatorname{sen} in x$$

$$V_3 = -(m \operatorname{sen} in - ik) e^m \operatorname{sen} in x \quad (3.11)$$

$$V_4 = \frac{\{(b^2-1)(1-\Psi)(m \operatorname{sen} in - ik) + ik\Psi b/\operatorname{sen} rs\}}{(m \operatorname{sen} in - ik) e^m \operatorname{sen} in x}$$

E quando a onda incidente é P vem:

$$V_1 = -\alpha(b^2-1)(m \operatorname{sen} in - ik)^2 e^m \operatorname{sen} in x$$

$$V_2 = 2\alpha a(m \operatorname{sen} in - ik)^2 e^m \operatorname{sen} in x$$

$$V_3 = a(m \operatorname{sen} in - ik) e^m \operatorname{sen} in x \quad (3.12)$$

$$V_4 = \frac{\{2a(1-\Psi)(m \operatorname{sen} in - ik) + ik\Psi/\operatorname{sen} rs\}}{(m \operatorname{sen} in - ik) e^m \operatorname{sen} in x}$$

Quando o amortecimento não é considerado, Murty [44] obteve a solução para o caso de onda P incidente. Sem amortecimento o sistema passa a ser:

$$\begin{aligned}
M_{11} &= \alpha(b^2-1) \\
M_{12} &= 2\alpha b \\
M_{13} &= -(b'^2-1) \\
M_{14} &= 2b' \\
M_{21} &= 2\alpha a \\
M_{22} &= -\alpha(b^2-1) \\
M_{23} &= 2a' \\
M_{24} &= b'^2-1 \\
M_{31} &= a \\
M_{32} &= 1 \\
M_{33} &= a' \\
M_{34} &= -1 \\
M_{41} &= 2a(1-\Psi) + \Psi/\text{sen } rs \\
M_{42} &= -(b^2-1)(1-\Psi) - \Psi b/\text{sen } rs \\
M_{43} &= -\Psi/\text{sen } rs \\
M_{44} &= -\Psi b'/\text{sen } rs
\end{aligned}
\tag{3.13}$$

O vetor  $V$  para onda SV é:

$$\begin{aligned}
V_1 &= 2\alpha b \\
V_2 &= \alpha(b^2-1) \\
V_3 &= -1 \\
V_4 &= (b^2-1)(1-\Psi) - \Psi b/\text{sen } rs
\end{aligned}
\tag{3.14}$$

E para onda P:

$$\begin{aligned}
 V_1 &= -\alpha(b^2-1) \\
 V_2 &= 2\alpha a \\
 V_3 &= a \\
 V_4 &= 2a(1-\Psi) - \Psi/\text{sen } rs
 \end{aligned}
 \tag{3.15}$$

Quando os sólidos estão em contato perfeito ( $\Psi=1$ ) e o amortecimento não é considerado, apenas a última equação é alterada, transformando-se em (veja |20|, |21|):

$$\begin{aligned}
 M_{41} &= 1 \\
 M_{42} &= -b \\
 M_{43} &= -1 \\
 M_{44} &= -b' \quad e
 \end{aligned}
 \tag{3.16}$$

$$V_4 = -1 \quad \text{para onda P} \quad \text{ou} \tag{3.17}$$

$$V_4 = -b \quad \text{para onda SV.} \tag{3.18}$$

Quando a incidência é normal, os potenciais de onda usados anteriormente deixam de ser válidos. Isto porque a velocidade de propagação da onda, na direção  $x$ , tornar-se-á infinita o mesmo acontecendo com  $a$ ,  $b$ ,  $a'$  e  $b'$ . Neste caso deve-se usar os potenciais do Apêndice 2, equações (A2.32) a (A2.35). A partir deles aplicam-se as condições de contorno (3.5) a (3.8), o que

originará um sistema de equações semelhantes a (3.9).

### 3.3 - Deslizamento e Reflexão Total

O deslizamento é calculado a partir das expressões para os deslocamentos  $\vec{u}$  que ocorrem no contorno. Em termos de potenciais tem-se:

$$\begin{aligned}
 d &= \vec{u} - \vec{u}' \quad |_{z=0} \\
 d &= \phi_{,x} - \chi_{,z} - \phi'_{,x} + \chi'_{,z} \\
 d &= \{(m \operatorname{sen} rp - ik) e^{m \operatorname{sen} rp x} \chi_1 - (m \operatorname{sen} rs - ik)b e^{m \operatorname{sen} rs x} \chi_2 \\
 &\quad - (m' \operatorname{sen} tp - ik) e^{m' \operatorname{sen} tp x} \chi_3 - (m' \operatorname{sen} ts - ik)b' e^{m' \operatorname{sen} ts x} \chi_4 \\
 &\quad + (m \operatorname{sen} in - ik) e^{m \operatorname{sen} in x} (1, b)\} e^{ik(ct-x)} (A_0, B_0)
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

onde os pares ordenados significam que, se a onda incidente for P, apenas os primeiros elementos são usados nas multiplicações (no caso: 1 e  $A_0$ ). Se a onda incidente for SV, os segundos elementos devem ser usados (b e  $B_0$ ).

Pode-se ainda, como no Capítulo 2, adimensionalizar o deslizamento de tal modo que:

$$D = \frac{d}{(m-ik_t)(A_0, B_0) e^{ik(ct-x)}} \tag{3.20}$$

onde  $k_t$  é o número de onda da onda incidente.

Da expressão (3.19) é possível perceber a íntima rela -

ção entre o deslizamento e a frequência.

Quanto à reflexão total vale lembrar algumas particularidades. Como a velocidade de propagação da onda P é sempre maior que a da onda S (em um mesmo sólido), é possível verificar que os ângulos de reflexão e transmissão das ondas P serão sempre maiores que os da onda S. Isto poderá originar situações em que a única onda a se propagar, além da incidente, será a onda SV refletida, Figura 3.2.

Deste modo o aumento do ângulo de incidência poderá implicar na reflexão total das ondas P e, por último, da SV transmitida. Aos ângulos críticos estarão então associadas perturbações na continuidade das curvas de razões de energias, que serão apresentadas na próxima seção. Estas descontinuidades são mais ou menos evidentes dependendo da aderência dos pares.

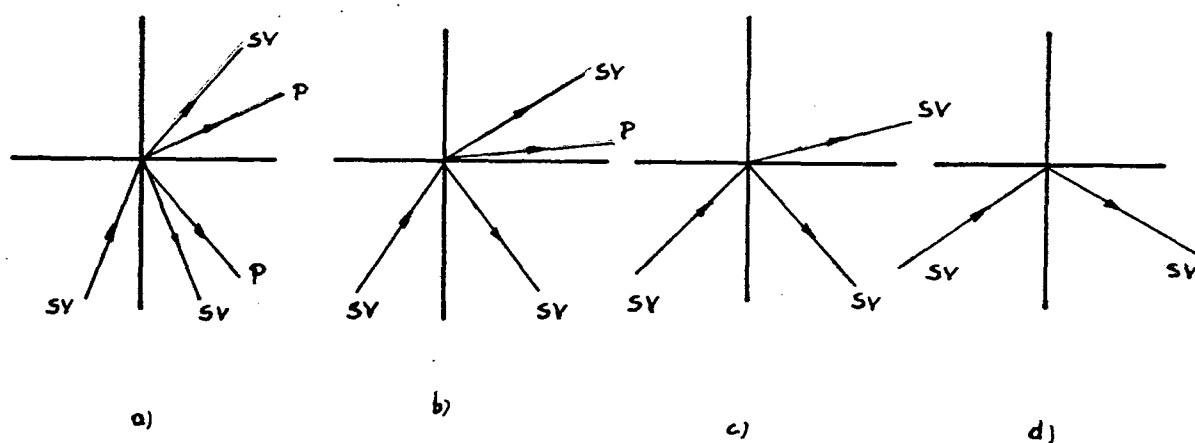


Fig. 3.2 - Dependendo do ângulo de incidência da onda SV e das propriedades elásticas dos sólidos, poderá ocorrer:

- a) Todas as ondas P e SV, refletidas e transmitidas, existem.
- b) Onda P refletida não é mais periódica.
- c) Reflexão total da onda P.
- d) Reflexão total da onda SV.

### 3.4 - Resultados Gráficos

Nesta secção serão apresentados vários gráficos que visam descrever o fenômeno tratado neste capítulo.

A exemplo do Capítulo 2, as várias curvas correspondem às várias constantes de adesão ( $\Psi=0, 0.25, 0.5, 0.75$  e  $1.0$ ). As constantes dos sólidos que não variam de caso a caso são:  $\mu/\mu'=1.0$  e  $v=v'=0.3$ . Os resultados todos são válidos no ponto  $(0,0)$ , seguindo o sistema de referência da Figura 3.1. As expressões de energias foram apresentadas na Secção 1.3 e o aqui chamado deslizamento está adimensionalizado pela expressão (3.20), do mesmo modo que as tensões pela expressão (2.31).  $c_2 = 3000$  m/s.

#### 3.4.1 - Onda SV Incidente - Amortecimento Nulo sem Reflexão Total da Onda SV Transmitida

Os resultados abaixo apresentados consideram amortecimento nulo e  $c_2/c_2' = 1.1$ . Esta razão de velocidades faz com que exista a onda transmitida SV embora as ondas P refletida e transmitida deixem de ocorrer a partir de certos ângulos de incidência. Associados a estes ângulos estão as evidentes descontinuidades nas curvas.

As Figuras 3.3, 3.4, 3.5 e 3.6 apresentam as várias ondas envolvidas no fenômeno. É fácil perceber os pontos onde deixam de existir as ondas P. Um fato muito interessante, já comentado no Capítulo 2, ressurge aqui. Existe um certo ângulo de incidência, diferente de  $0^\circ$ , para o qual toda a onda SV é transmitida ao meio II, *independentemente* do grau de aderência das super

fícies. Isto sugere que, neste ponto, o deslizamento deva ser zero, e é o que realmente ocorre, Figura 3.7.

Além disso, a incidência normal da onda SV não provoca deslizamento máximo quando  $\Psi=0$ . Este vem a ocorrer justamente quando a onda P não mais se transmite devido à SV incidente.

As energias normalizada e absorvida estão apresentadas nas Figuras 3.8 e 3.9 enquanto as tensões normais, cisalhantes e o deslocamento na direção z aparecem nas Figuras 3.10, 3.11 e 3.12, respectivamente.

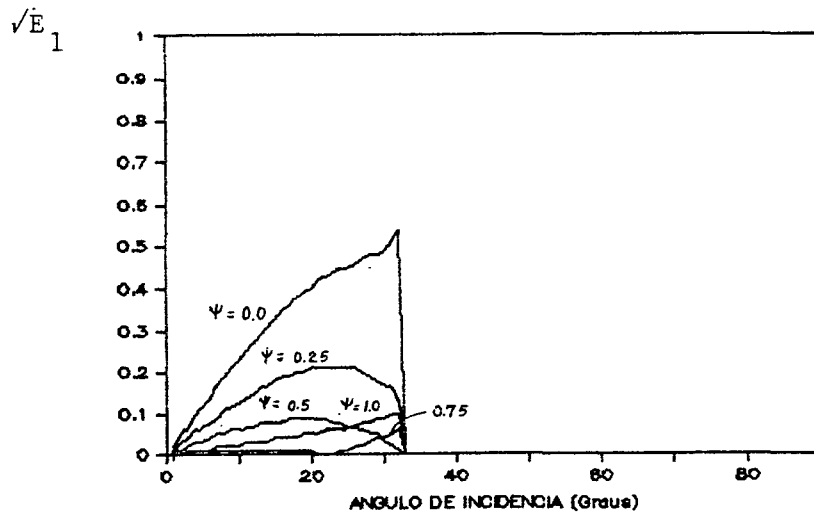


Fig. 3.3 - Onda P refletida quando  $c_2/c_2' = 1.1$ .

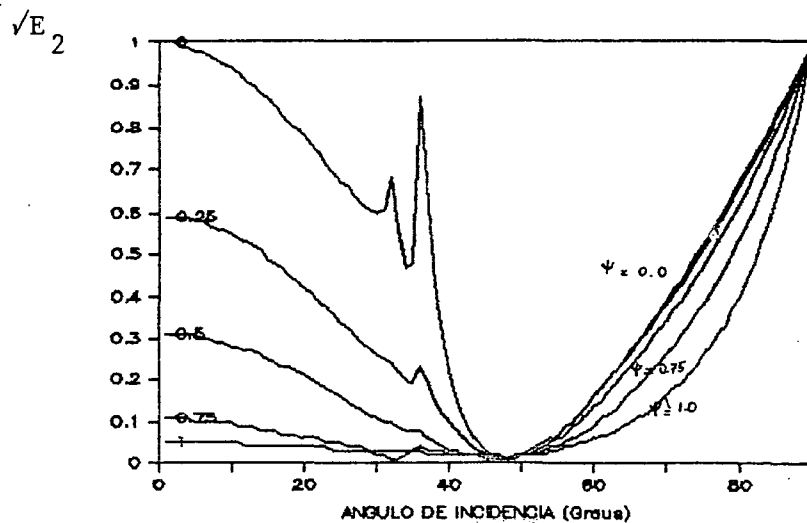


Fig. 3.4 - Onda SV refletida. Observa-se um ponto de mínimo.

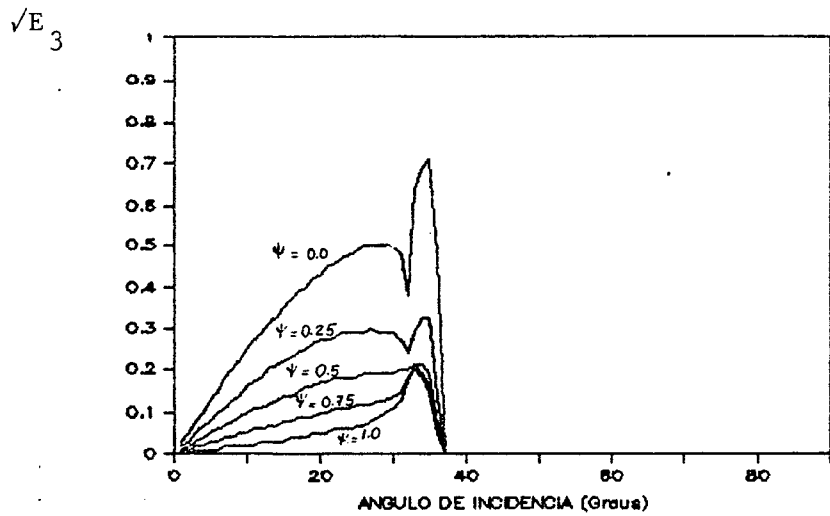


Fig. 3.5 - Onda P transmitida e o fenômeno da reflexão total.

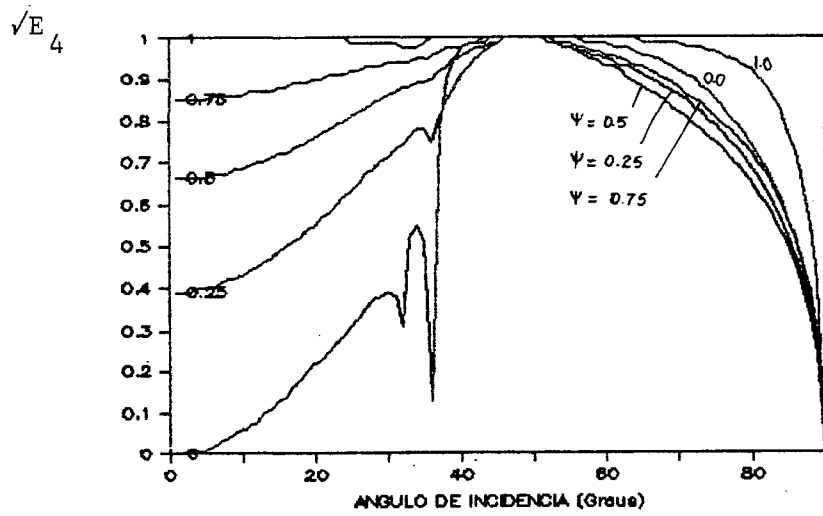


Fig. 3.6 - Onda SV transmitida. Para  $i_n \approx 48^\circ$  toda a onda incidente se transmite independentemente da aderência dos sólidos.

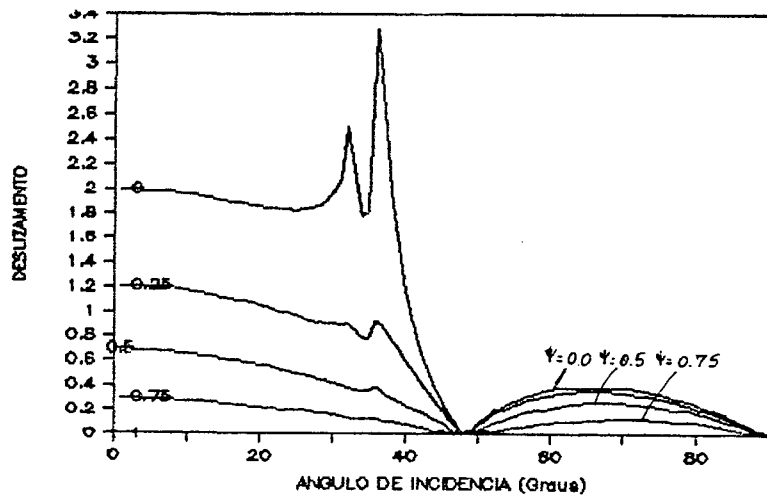


Fig. 3.7 - O deslizamento com um ponto de máximo para incidência não normal.



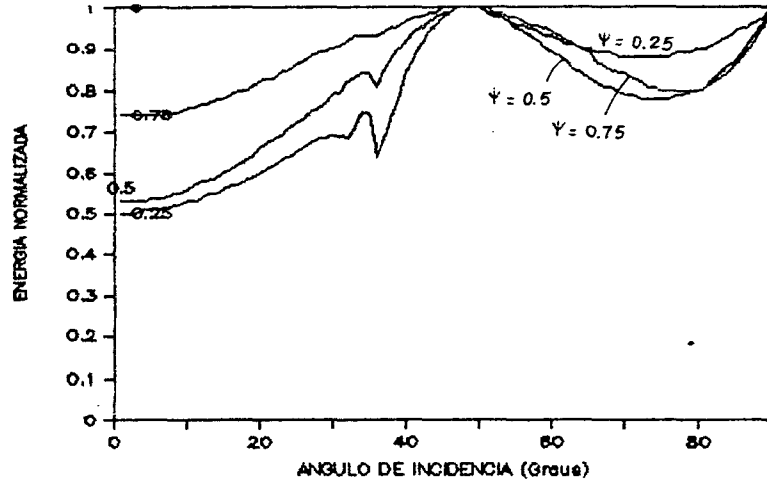


Fig. 3.8 - Energia normalizada em função do ângulo de incidência.

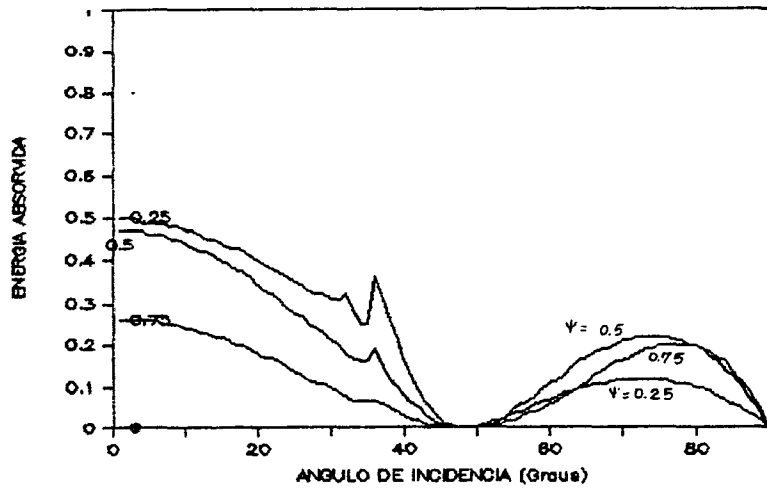


Fig. 3.9 - Energia absorvida pelo atrito dos sólidos.

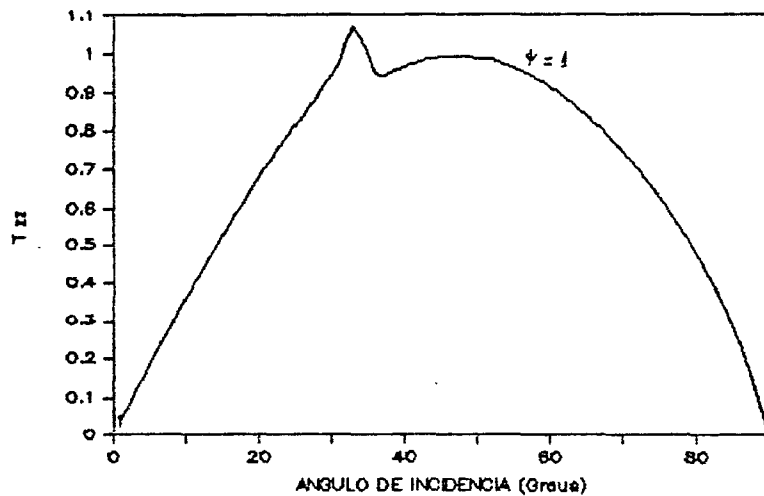


Fig. 3.10 - Tensões normais ao contorno.

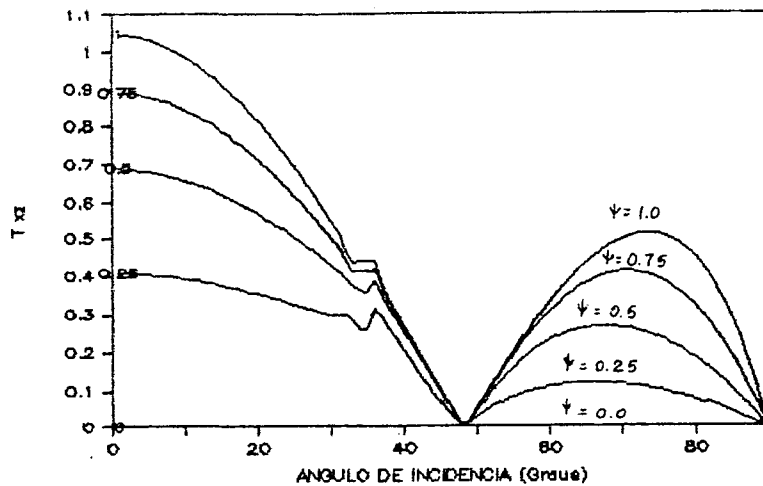


Fig. 3.11 - Tensões cisalhantes. Os pontos de máximo são para a incidência normal.

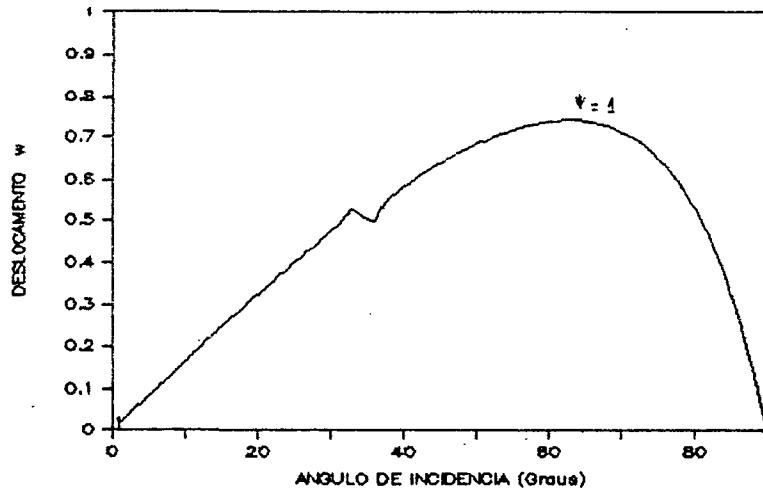


Fig. 3.12 - Deslocamentos normais ao contorno. São nulos para incidência normal e rasante.

### 3.4.2 - Onda SV incidente - Amortecimento Nulo com Reflexão Total da Onda SV Transmitida

Este sub-ítem considera a reflexão total da onda SV e, para tanto, a razão de velocidades de propagação das ondas S, nos sólidos, deve ser menor do que a unidade. Aqui  $c_2/c_2' = 0.9$  e  $m=m'=0$ .

As Figuras 3.13, 3.14, 3.15 e 3.16 apresentam o comportamento ( $\sqrt{E_1}, \dots, \sqrt{E_4}$ ) das várias ondas. Os ângulos de incidência para os quais as ondas P deixam de existir são, agora, diferentes

do caso anterior. Ainda ocorre a transmissibilidade total da onda SV, independentemente do grau de aderência dos sólidos, Figura 3.16, só que agora para  $in \approx 43^\circ$ . Além disso, como ocorre reflexão total da onda SV, a onda SV transmitida deixa de existir a partir de  $in = 64.16^\circ$  o que provoca uma grande perturbação na onda SV refletida (Figura 3.14).

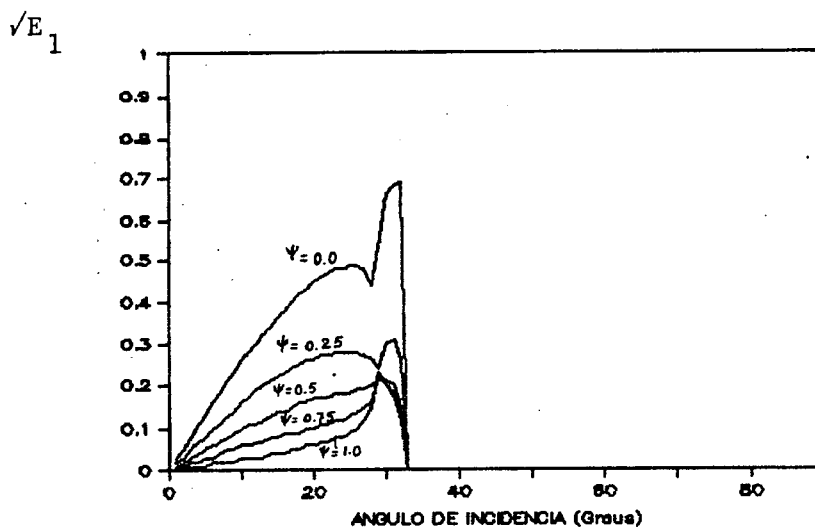


Fig. 3.13 - Onda P refletida para  $c_2/c_2' = 0.9$ .

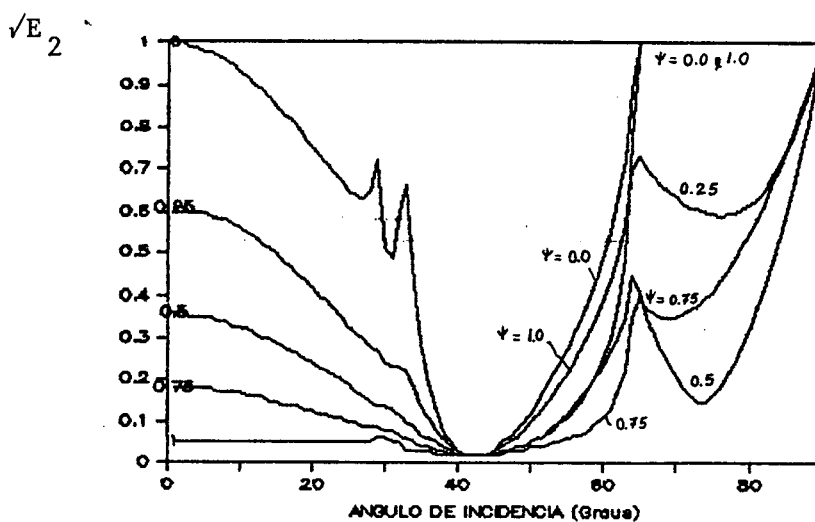


Fig. 3.14 - Ondas SV refletida. Observa-se, a partir de  $64^\circ$ , que as curvas mudam muito para compensar a reflexão total.

As energias normalizada e absorvida estão mostradas nas

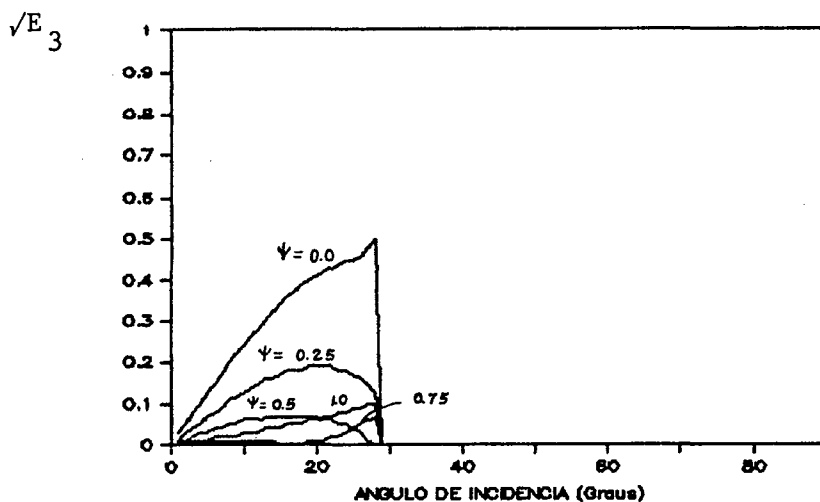


Fig. 3.15 - Onda P transmitida para  $m=m' = 0.0$ ,  $c_2/c_2' = 0.9$ ,  $\mu/\mu' = 1.0$  e  $v=v' = 0.3$ .

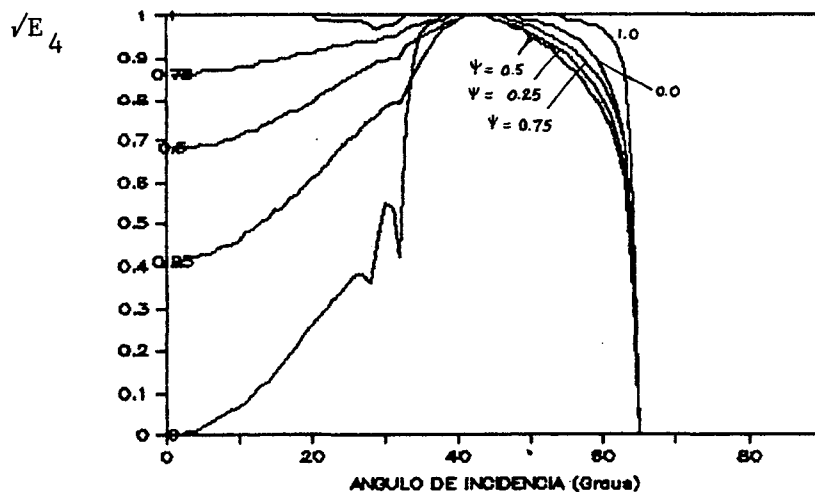


Fig. 3.16 - Reflexão total da onda SV. Observa-se também um ponto máximo independente de  $\psi$ .

Figuras 3.17 e 3.18 enquanto que a Figura 3.19 apresenta o deslizamento. No ponto em que a transmissibilidade da onda SV é máxima a energia absorvida é nula bem como o deslizamento. Observa-se também que a energia absorvida é muito significativa para ângulos de incidência em torno de  $70^\circ$  sem haver, no entanto, um deslizamento exagerado. Isto se deve ao fato de a energia absorvida ser obtida através da normalizada e esta, por sua vez, das energias das várias perturbações periódicas. Assim, para  $in > 64.16^\circ$ , só a energia refletida é periódica, com as outras ondas possuindo uma

energia que decai com  $z$ , aqui não considerada. Desta forma, a energia absorvida possui um ponto de máximo, não associada ao deslizamento.

A Figura 3.20 apresenta as tensões cisalhantes adimensionalizadas, onde pode ser visto picos de tensões para  $\alpha = 64.16^\circ$ . Na Figura 3.21 tem-se a tensão normal à interface de separação dos sólidos, com um detalhe na Figura 3.22.

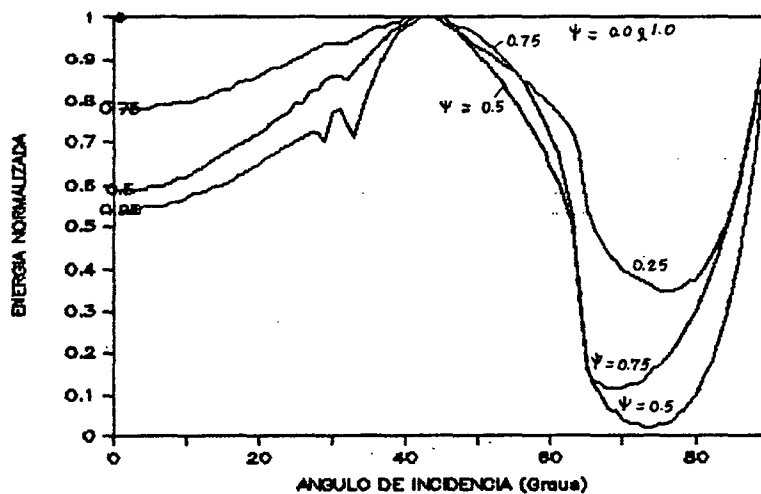


Fig. 3.17 - Energia normalizada das oscilações periódicas.

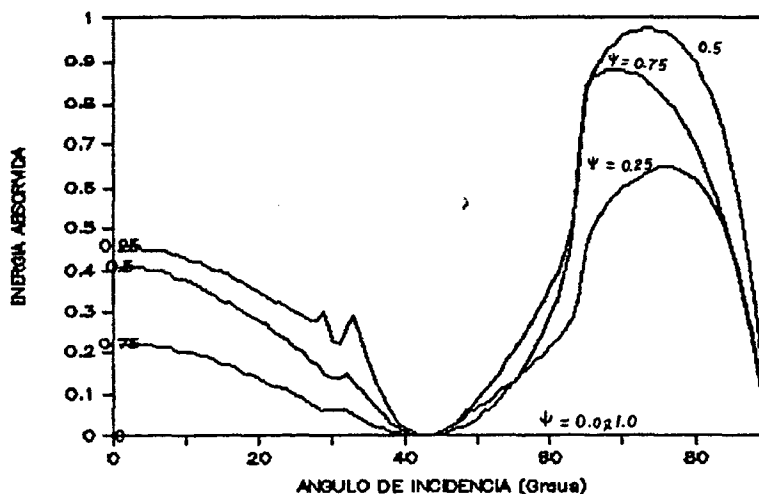


Fig. 3.18 - Energia absorvida. Observa-se pontos de absorção nula e de quase total absorção.

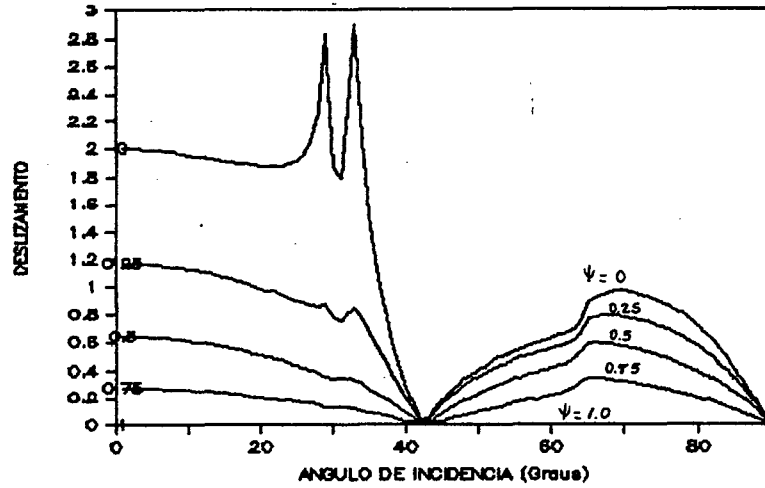


Fig. 3.19 - Amplitude da onda de deslizamento.

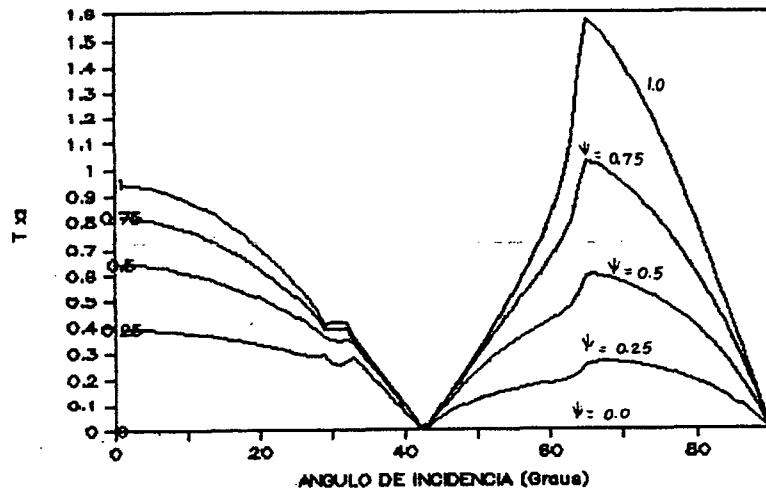


Fig. 3.20 - Tensões cisalhantes na interface de contato.

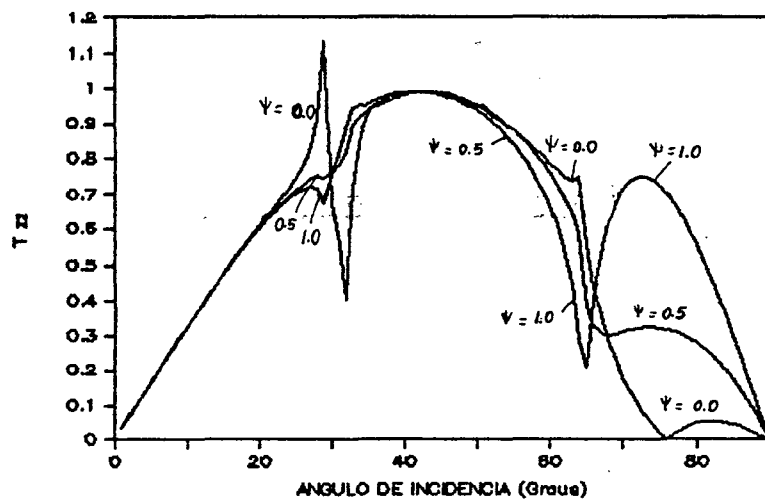


Fig. 3.21 - Tensão normal à interface. Onda SV incidente.

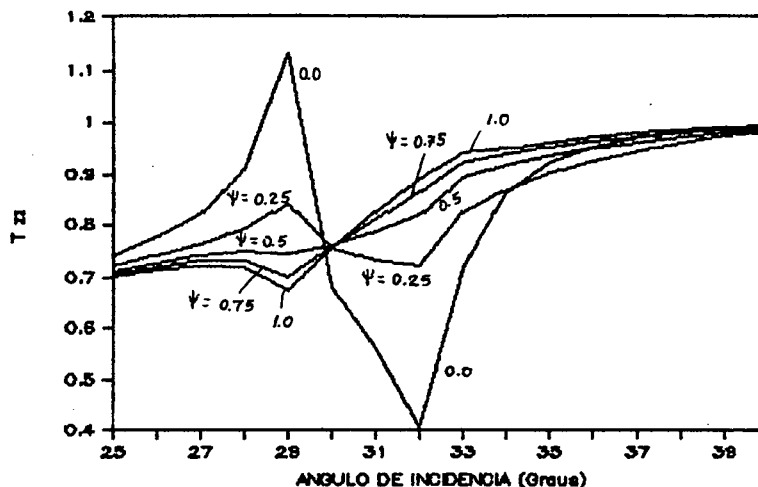


Fig. 3.22 - Detalhe da tensão normal. Ao ponto comum das curvas está associado o ângulo de reflexão total da onda P.

### 3.4.3 - Onda SV Incidente com Amortecimento e sem Reflexão Total

O próximo conjunto de gráficos descreve o fenômeno quando o amortecimento é considerado fazendo  $m=0.01$  Np/m e  $m'=0.1$  Np/m. A razão de velocidades  $c_2/c_2'$  é igual a 1.1, o que garante que a reflexão total da onda SV não ocorra. Porém, devido à velocidade da onda P ser maior que a da SV, a partir de certo ângulo de incidência, deixarão de existir as ondas P refletida e transmitida. Os potenciais de onda adotados não permitem que esta particularidade, qual seja, reflexão total com amortecimento, seja tratada, razão pela qual o ângulo de incidência da onda SV não será maior do que  $30^\circ$ .

As Figuras 3.23, 3.24 e 3.25 mostram a resposta das várias ondas quando a frequência é de 1 KHz. A amplitude da onda P transmitida é pequena e não será mostrada. Verifica-se um leve aumento da transmissibilidade da onda SV com o ângulo de incidência. Por outro lado, o deslizamento, Figura 3.26, diminui com in.

$\sqrt{E_1}$

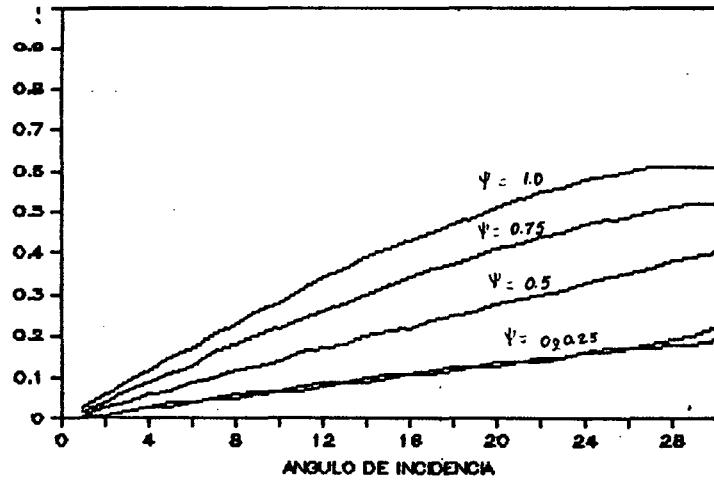


Fig. 3.23 - Onda P refletida para  $\omega = 10^3$  Hz e  $\frac{c}{c'} = 1.1$ .

$\sqrt{E_2}$

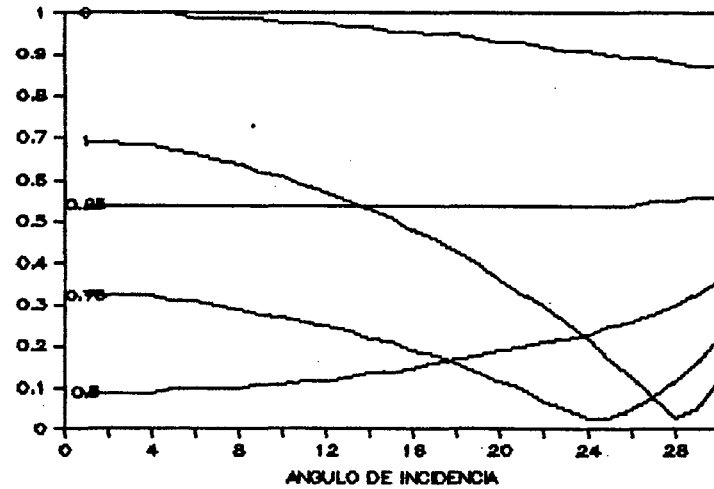


Fig. 3-24 - Onda SV refletida. Caso com amortecimento.

$\sqrt{E_4}$

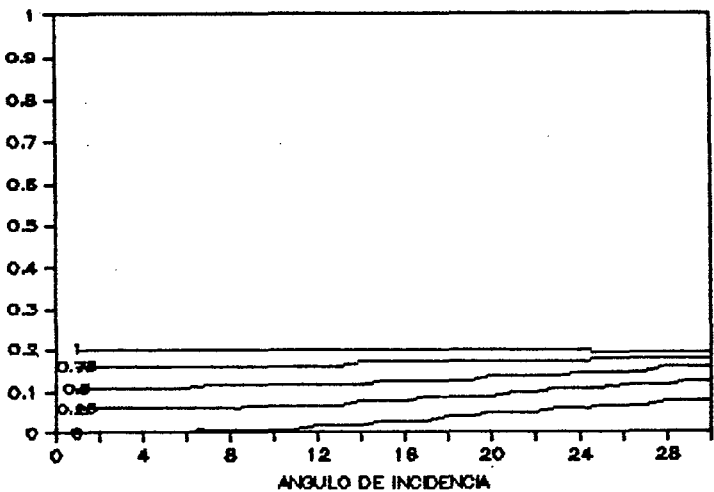


Fig. 3.25 - Onda SV transmitida. Baixa frequência, baixa transmissibilidade.



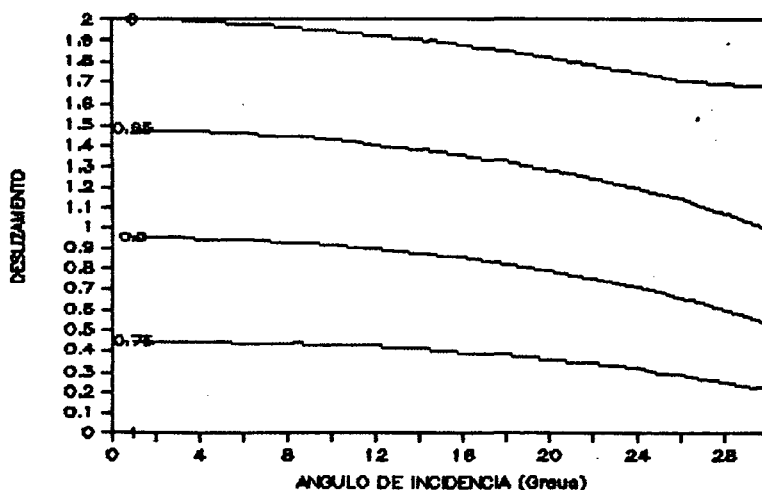


Fig. 3.26 - Deslizamento para  $\omega=10^3$  Hz.

As energias normalizada e absorvida estão mostradas nas Figuras 3.27 e 3.28 e as tensões cisalhantes e normais nas Figuras 3.29 e 3.30. A Figura 3.31 apresenta os deslocamentos normais, que variam com a aderência dos sólidos.

A influência da constante de adesão no deslocamento normal é devido a este ser mais ou menos facilitado de acordo com a aderência dos pares. Isto porque, a um deslocamento normal à interface, está associado um *micro deslizamento* função de  $\Psi$ . Aqui também se faz presente o efeito de Poisson. Este efeito modificará os limites dos sólidos principalmente nas regiões de contato atingidas pela onda, provocando nelas, deslocamentos  $w$ , variáveis com a facilidade com que as superfícies dos sólidos têm de se deslocarem entre si, nestas regiões.

Um aumento da frequência para 1 MHz altera muito o comportamento das várias ondas, Figuras 3.32, 3.33, 3.34 e 3.35. As ondas transmitidas são agora significantes. O deslizamento apresentado na Figura 3.36 diminuiu em relação ao caso anterior (para  $\Psi \neq 0$ ). Isto provoca uma maior energia normalizada, Figura 3.37,

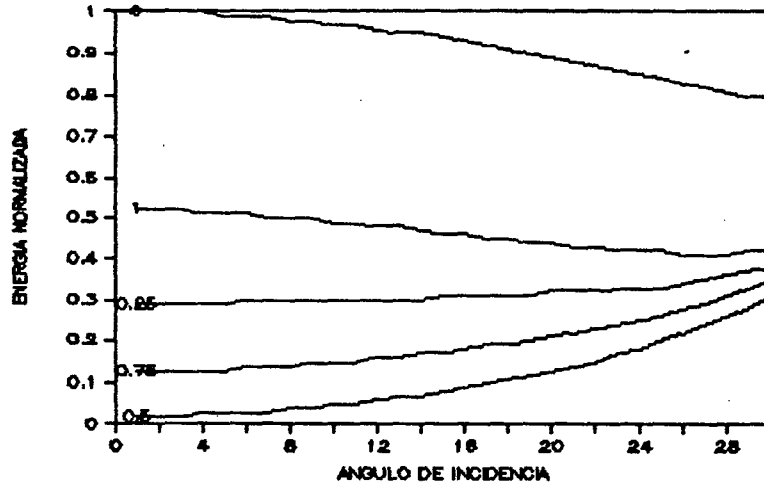


Fig. 3.27 - Energia normalizada para  $\omega=10^3$  Hz.

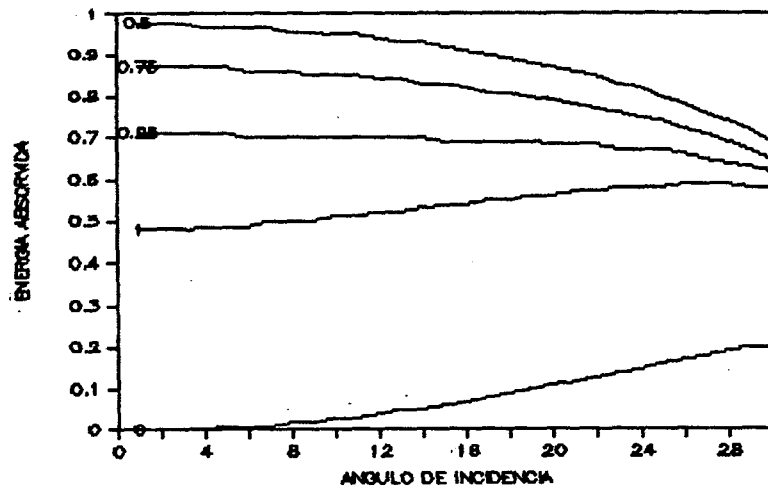


Fig. 3.28 - Energia absorvida para  $\omega=10^3$  Hz.

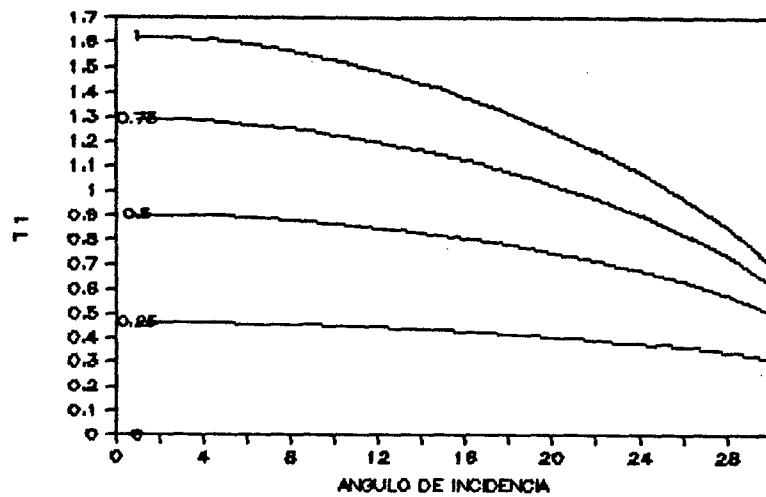


Fig. 3.29 - Tensão cisalhante para  $\omega=10^3$  Hz.

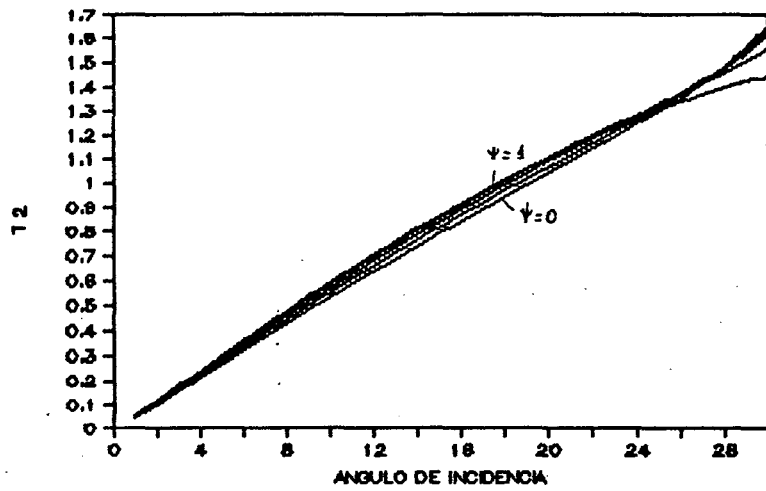


Fig. 3.30 - Tensão normal. A constante de adesão influi levemente.  $\omega=10^3$  Hz.

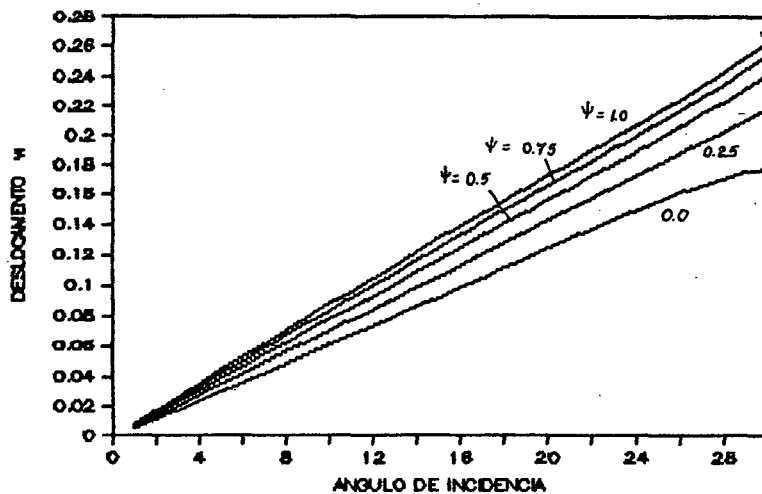


Fig. 3.31 - Deslocamento normal. Torna-se mais evidente a influência de  $\psi$ .  $\omega=10^3$  Hz.

e uma menor absorção na interface, Figura 3.38.

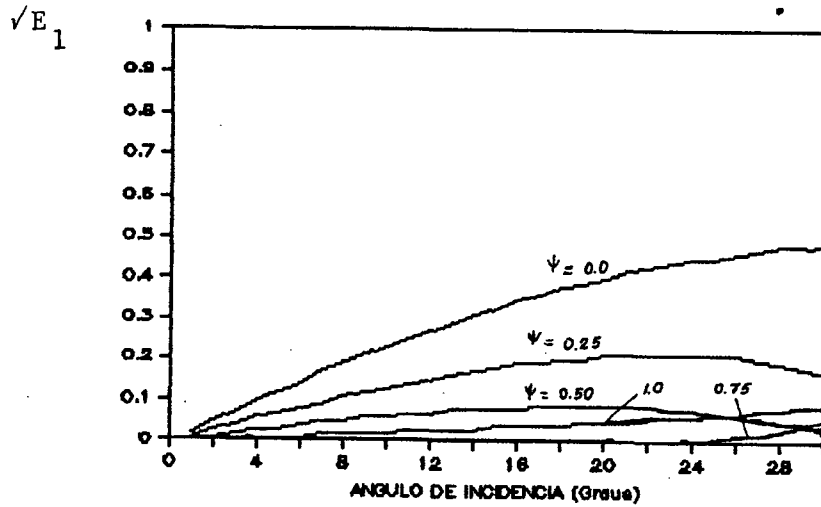


Fig. 3.32 - Onda P refletida.  $\omega = 10^6$  Hz.

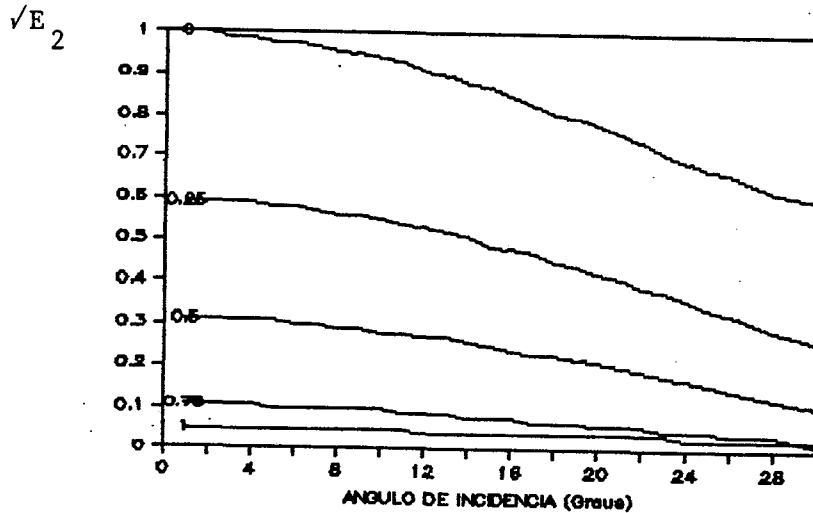


Fig. 3.33 - Onda SV refletida com amortecimento.

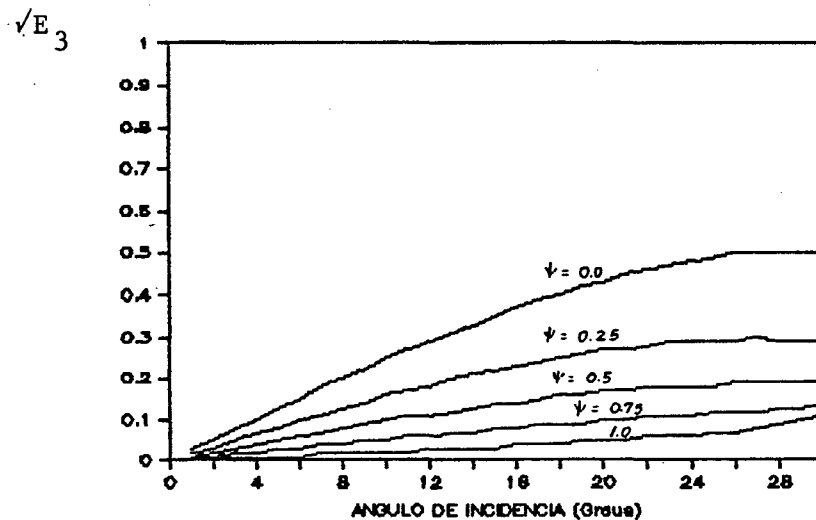


Fig. 3.34 - Onda P transmitida é significativa.

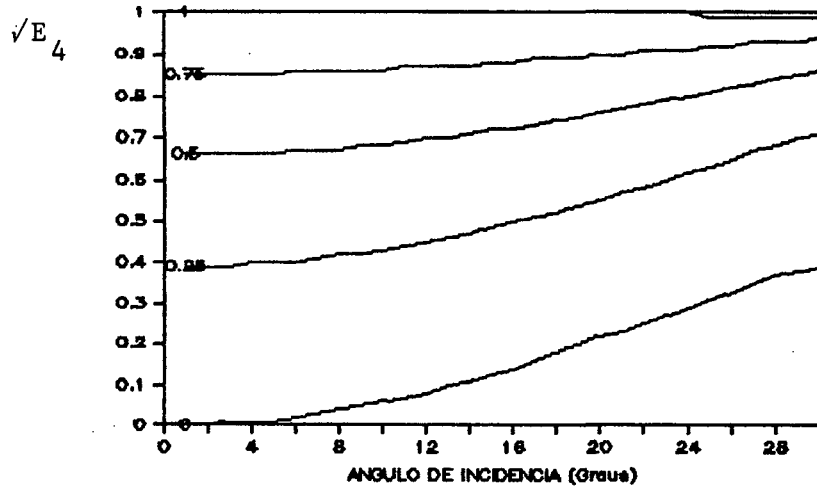


Fig. 3.35 - O aumento da frequência faz aumentar a penetrabilidade da onda SV.

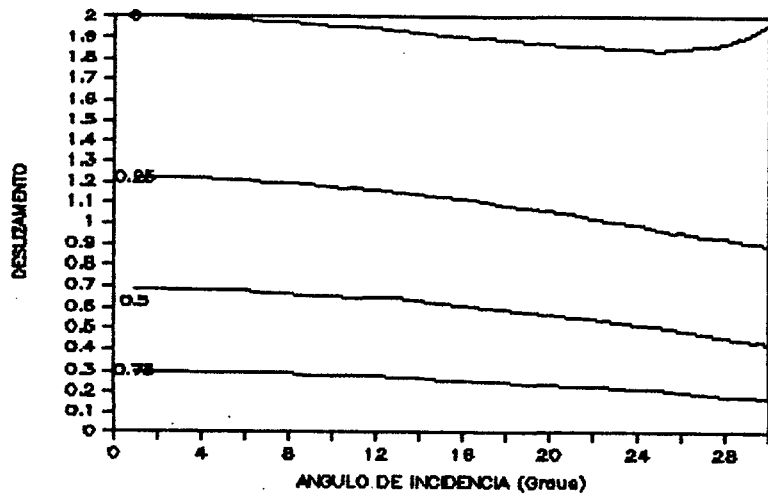


Fig. 3.36 - Deslizamento localizado na interface para  $\omega = 1$  MHz.

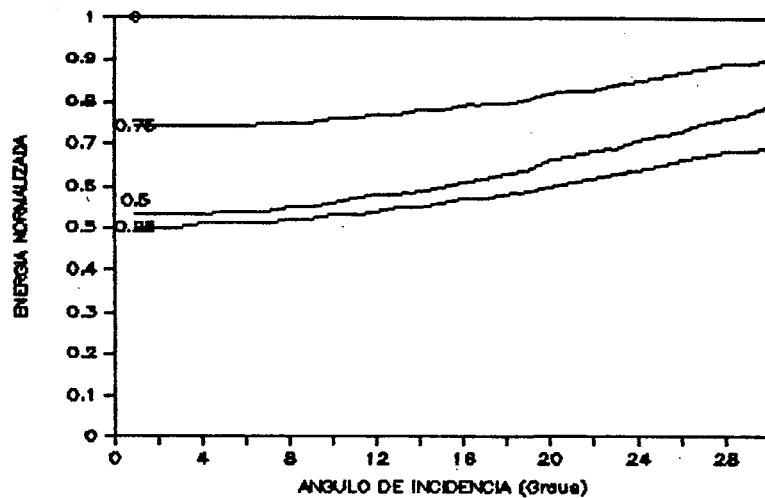


Fig. 3.37 - Energia normalizada para  $\omega = 10^6$  Hz.

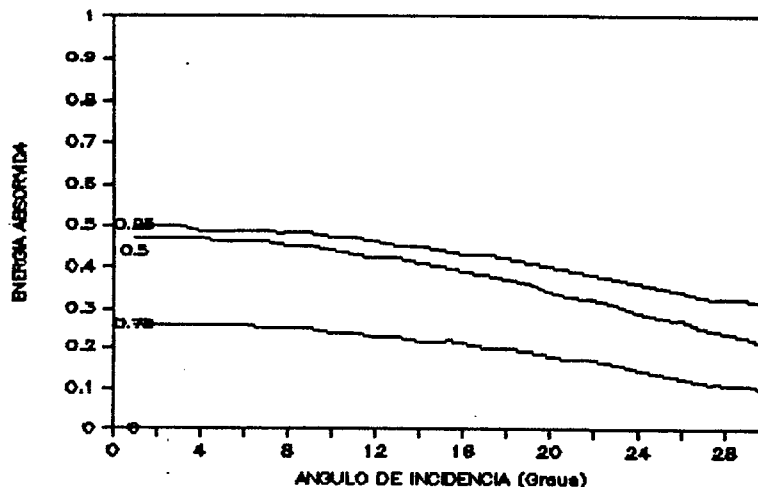


Fig. 3.38 - Energia absorvida pela interface quando  $\omega=10^6$  Hz.

#### 3.4.4 - Onda SV Incidente - A Frequência como uma Variável do Problema

Para avaliar-se de modo mais esclarecedor a influência da frequência no fenômeno em questão foram construídos os gráficos abaixo. As constantes usadas são as mesmas do caso anterior. Foi escolhido um ângulo de incidência da onda SV igual a  $30^\circ$  variando-se a frequência de 1 a 40 KHz. Fica claro que, a partir de 40 KHz, os valores das variáveis do problema não mais se alteram. Naturalmente que esta frequência é determinada pelas propriedades elásticas dos materiais e o seu grau de aderência.

As Figuras 3.39, 3.40, 3.41 e 3.42 mostram as raízes quadradas de  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$ ,  $E_4$  em função de  $\omega$ . Em especial verifica-se um sensível aumento com a frequência do poder de penetração das ondas P e SV transmitidas. Esta transmissibilidade não aumenta indefinidamente com a frequência sendo este fato um aspecto muito importante.

Nas Figuras 3.43 e 3.44 são mostradas as energias nor-

malizada e absorvida. Esta última é diferente de 0 mesmo para deslizamento perfeito. Já a Figura 3.45 mostra o deslizamento, que em geral, diminui com o aumento da frequência. A excessão fica por conta de  $\psi=0$  ( $\text{in}=30^\circ$ ). O deslocamento normal  $w$  aparece na Figura 3.46.

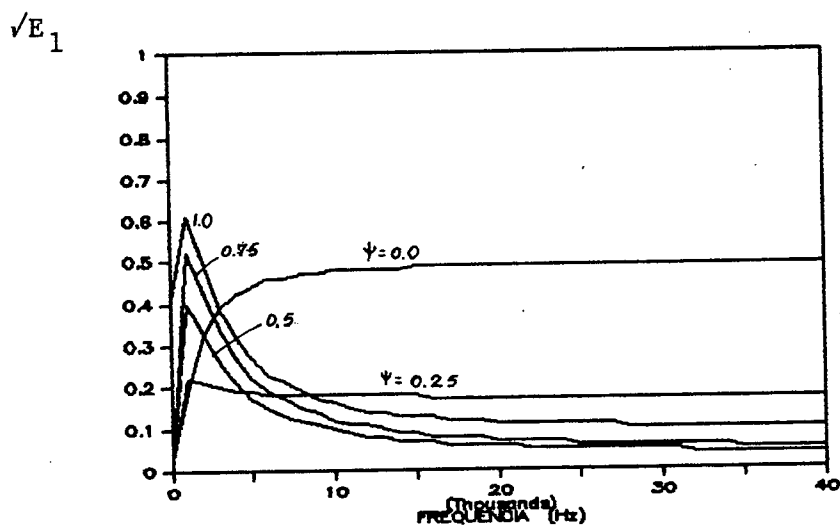


Fig. 3.39 - Onda P refletida.  $\text{in}=30^\circ$  e  $\frac{c_2}{c_2'} = 1.1$ .

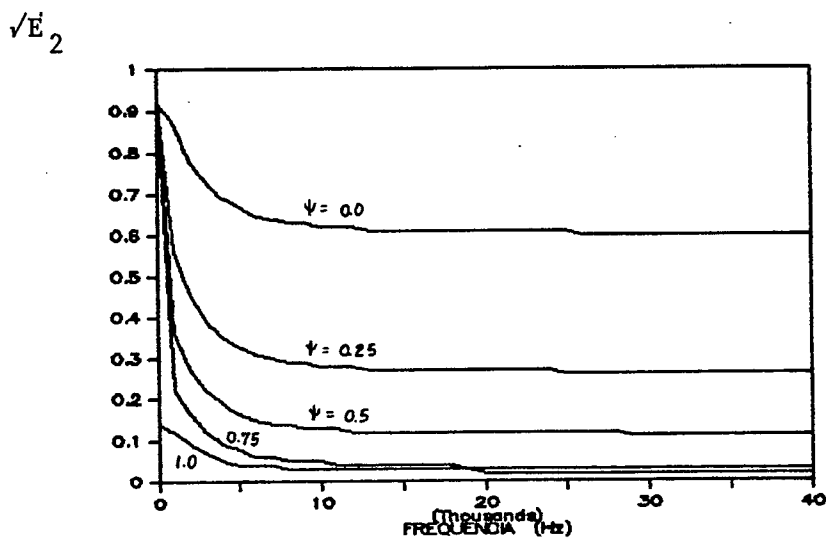


Fig. 3.40 - A onda SV refletida diminui com o aumento de  $\omega$ .

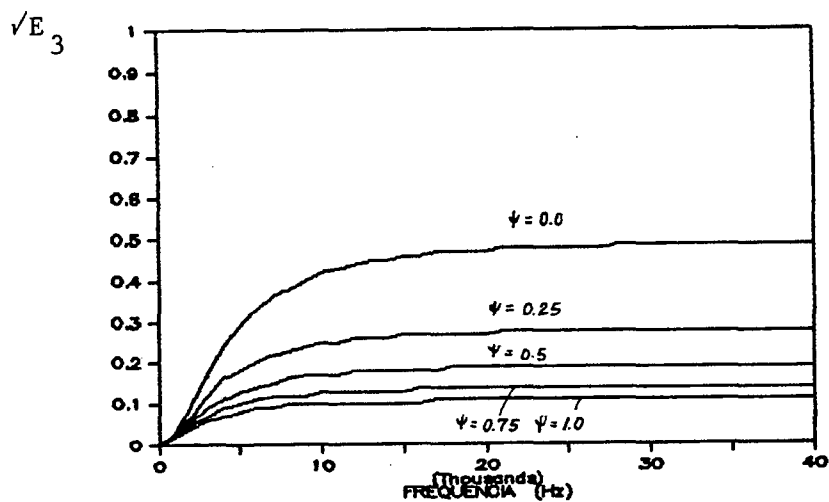


Fig. 3.41 - Onda P transmitida. Para baixas frequências quase nada se transmite.

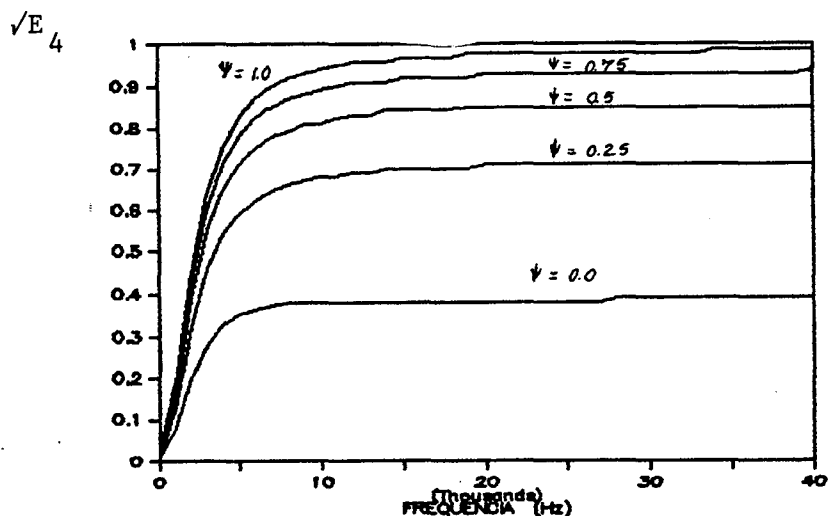


Fig. 3.42 - A penetrabilidade da onda SV aumenta rapidamente com o aumento da frequência.

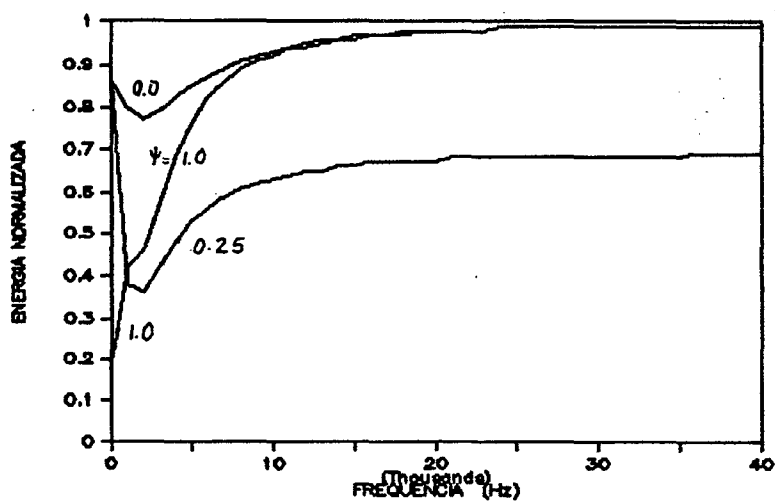


Fig. 3.43 - Energia normalizada para  $i_n = 30^\circ$ .



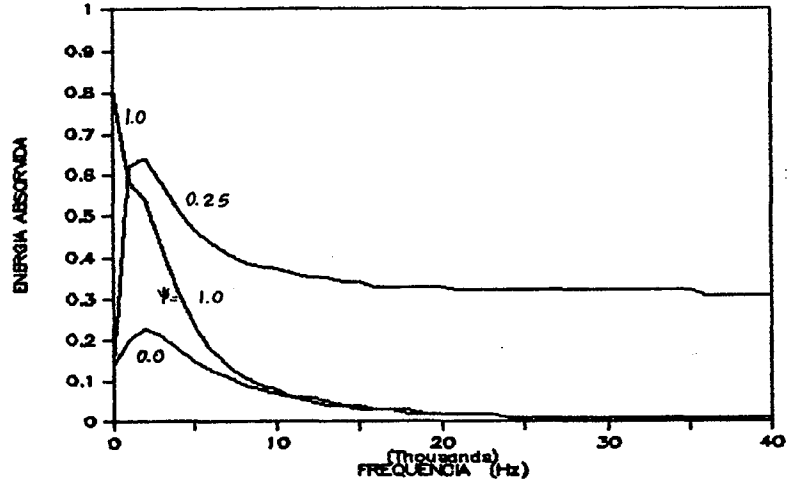


Fig. 3.44 - Energia absorvida diminuindo com a frequência.

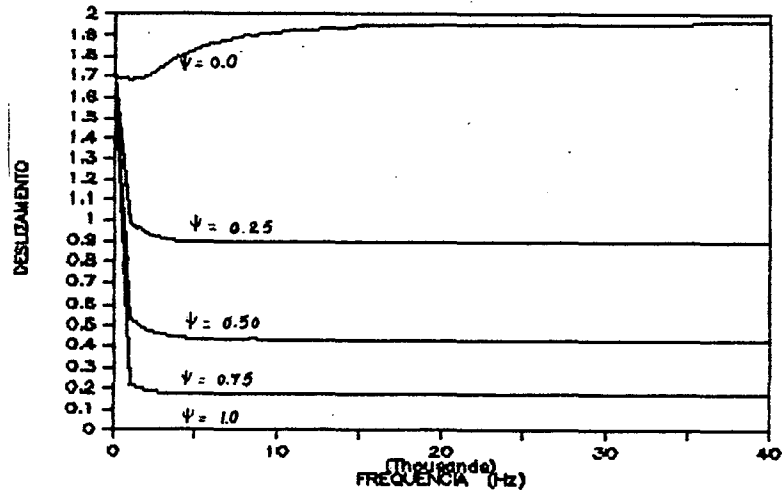


Fig. 3.45 - Em geral o deslizamento diminui com  $\omega$ . O inverso ocorre quando  $\psi=0$ .

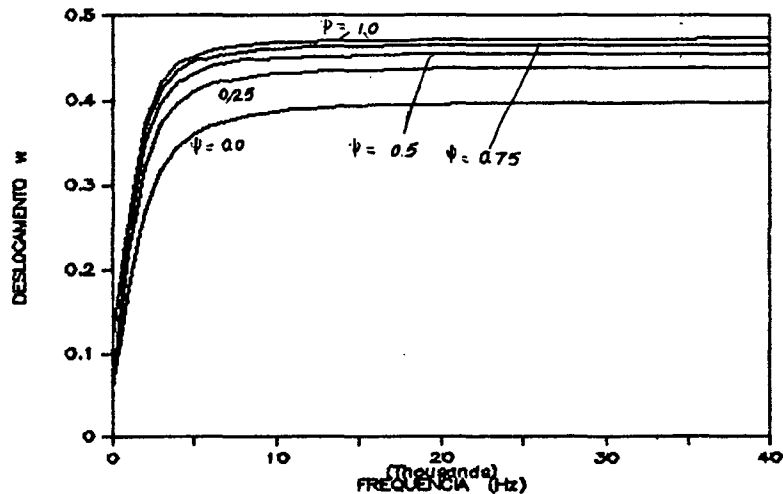


Fig. 3.46 - O deslocamento normal varia com  $\psi$  e  $\omega$ .

### 3.4.5 - Onda P Incidente com Amortecimento e sem Reflexão Total

Os resultados a seguir apresentados referem-se a uma onda P incidindo na interface de sólidos com amortecimento ( $m=0.01$  Np/m e  $m'=0.1$  Np/m). A razão de velocidades escolhidas -  $c_1/c_1' = 1.1$  - não permite a reflexão total.

As Figuras 3.47 e 3.48 mostram as ondas refletidas, em função do ângulo de incidência, quando a frequência é de 1 KHz. Para esta frequência as ondas transmitidas são tão insignificantes que não serão apresentadas. As energias normalizada e absorvida estão mostradas nas Figuras 3.49 e 3.50 enquanto que o deslizamento na interface está na Figura 3.51. As tensões cisalhantes e normais são mostradas nas Figuras 3.52 e 3.53 e o deslocamento normal ao contorno na Figura 3.54.

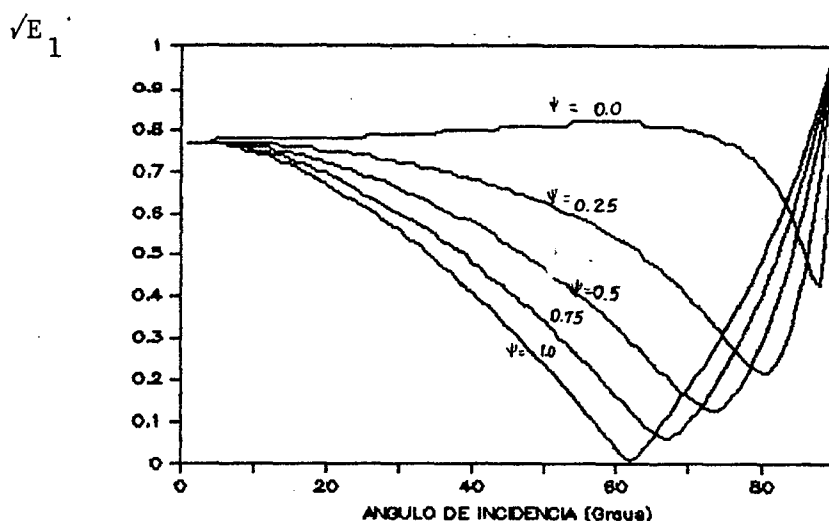


Fig. 3.47 - Onda P refletida para  $\omega=10^3$  Hz.

Aumentando a frequência para 1 MHz as ondas transmitidas tornam-se significativas, Figuras 3.55, 3.56, 3.57

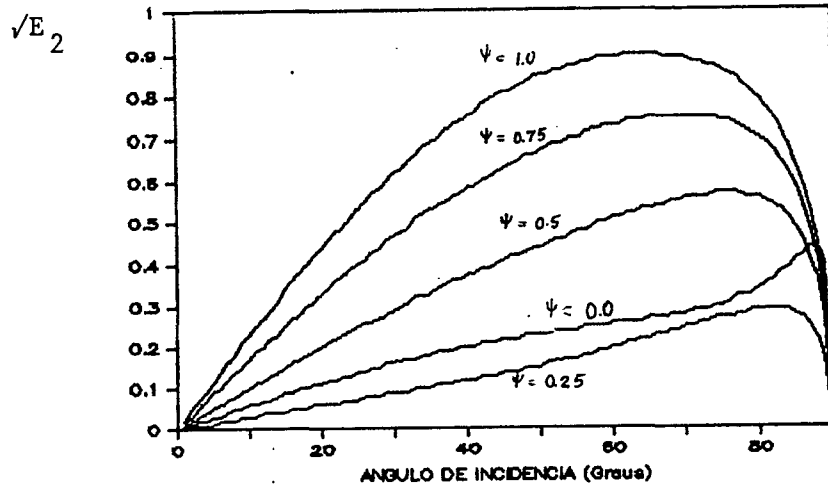


Fig. 3.48 - Onda SV refletida para  $\omega=10^3$  Hz.

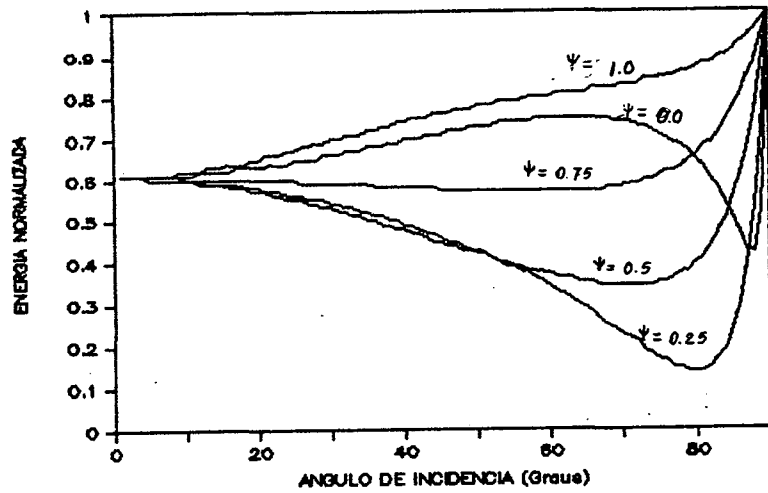


Fig. 3.49 - Energia normalizada. Onda P incidindo com frequência de 1 KHz.

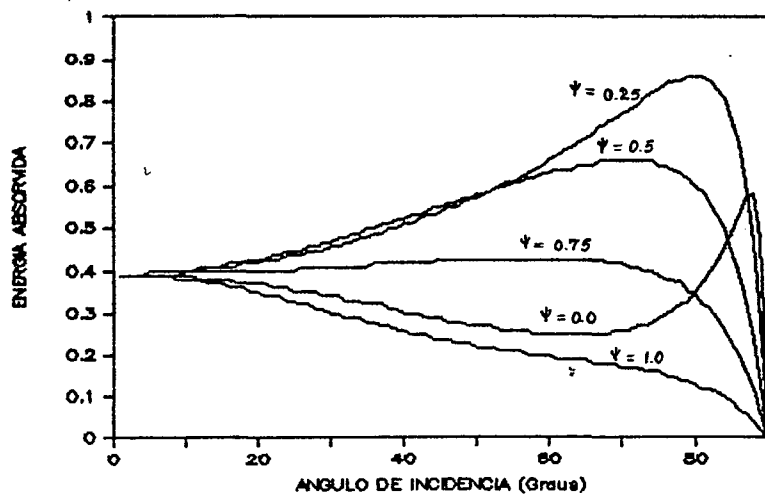


Fig. 3.50 - Energia absorvida por atrito. Caso de ondas com amortecimento.

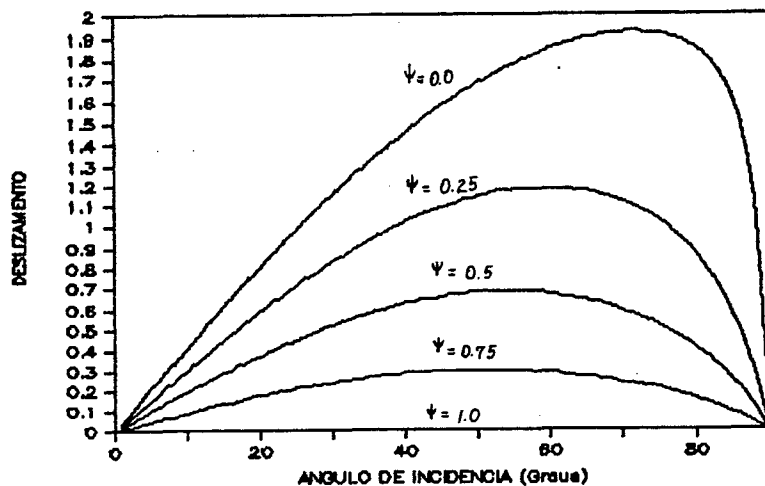


Fig. 3.51 - Amplitude da onda de deslizamento em função do ângulo de incidência.

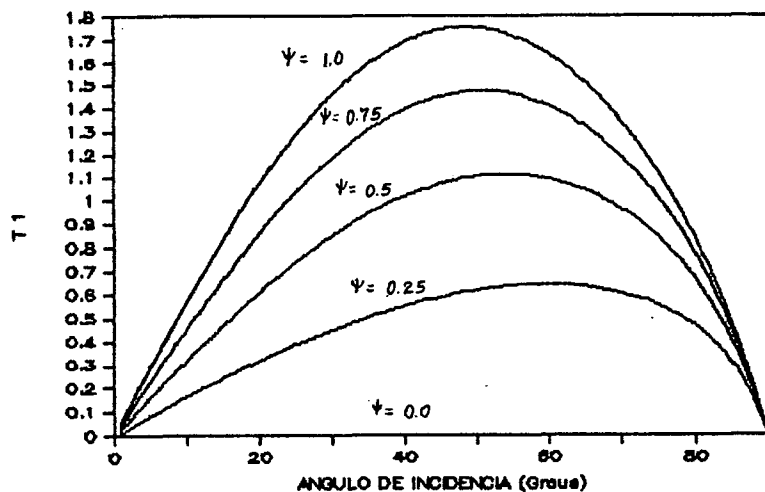


Fig. 3.52 - Tensões cisalhantes no contorno.

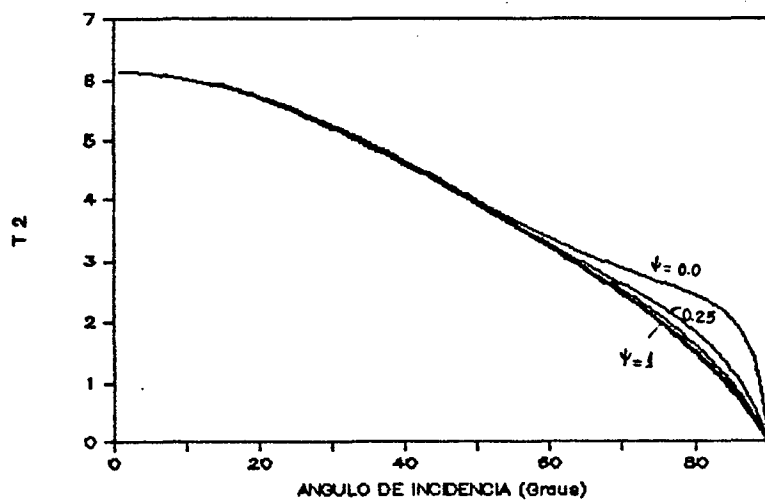


Fig. 3.53 - Tensões normais agindo na interface de contato dos sólidos.

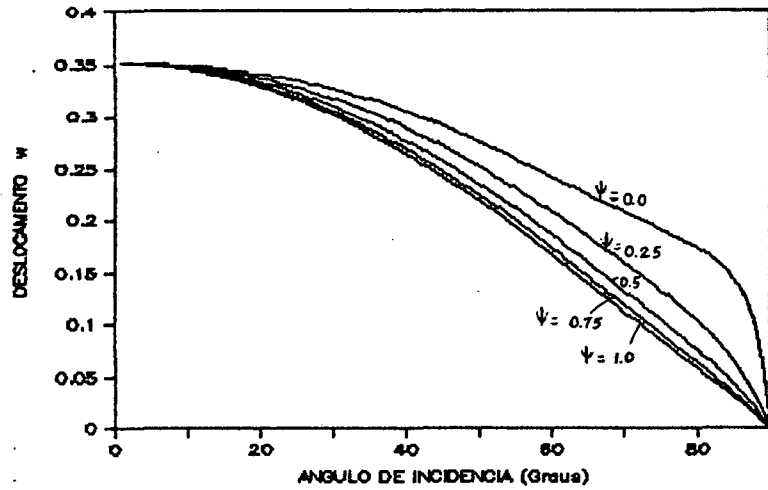


Fig. 3.54 - Deslocamento normal variando com a adesão dos sólidos.  $\omega = 1$  KHz.

e 3.58. O deslizamento diminui com o aumento da frequência, Figura 3.59, bem como a energia absorvida, Figura 3.60. A Figura 3.61 mostra a energia normalizada. As tensões são apresentadas nas Figuras 3.62 e 3.63 enquanto que o deslocamento normal ao contorno, na Figura 3.64. Para esta frequência o grau de aderência dos pares influi muito pouco no deslocamento normal.

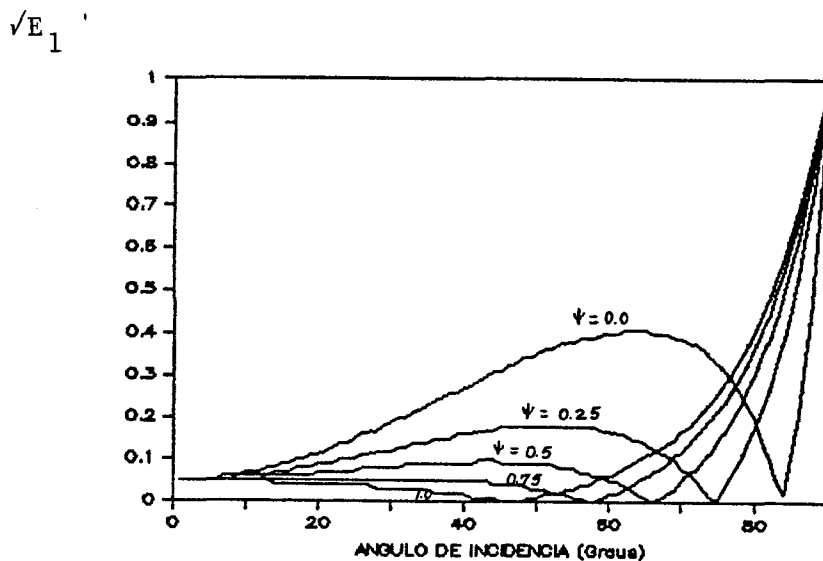


Fig. 3.55 - Onda P refletida para frequência de 1 MHz.

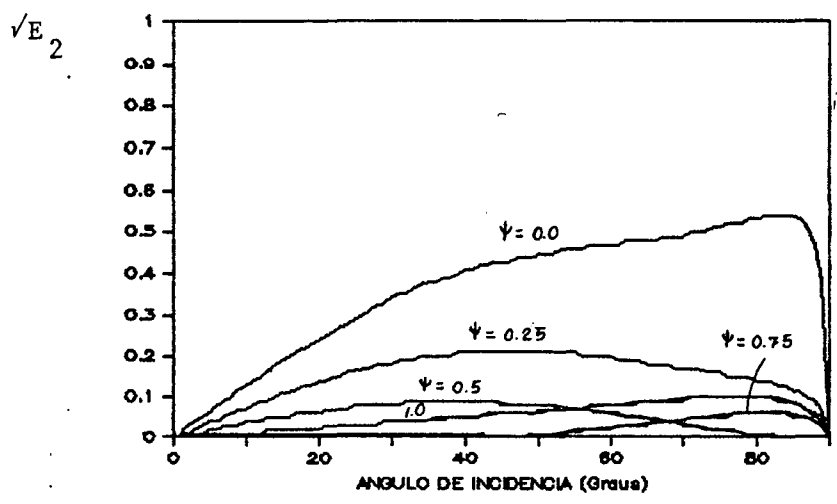


Fig. 3.56 - Onda SV refletida com amortecimento.

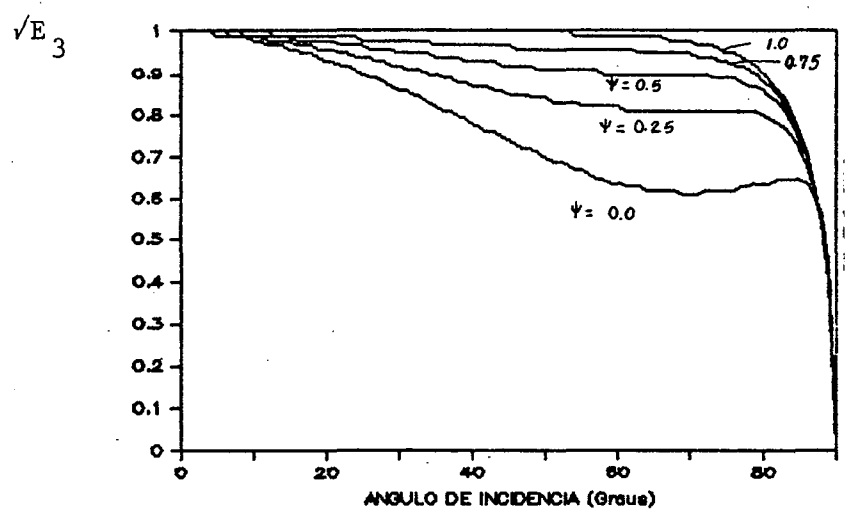


Fig. 3.57 - Onda P transmitida. Esta é máxima para incidência normal.

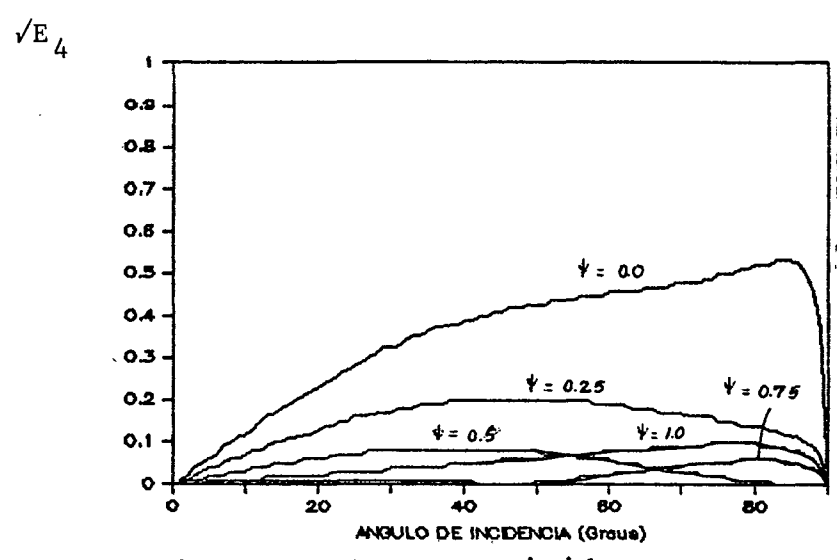


Fig. 3.58 - Onda SV transmitida.

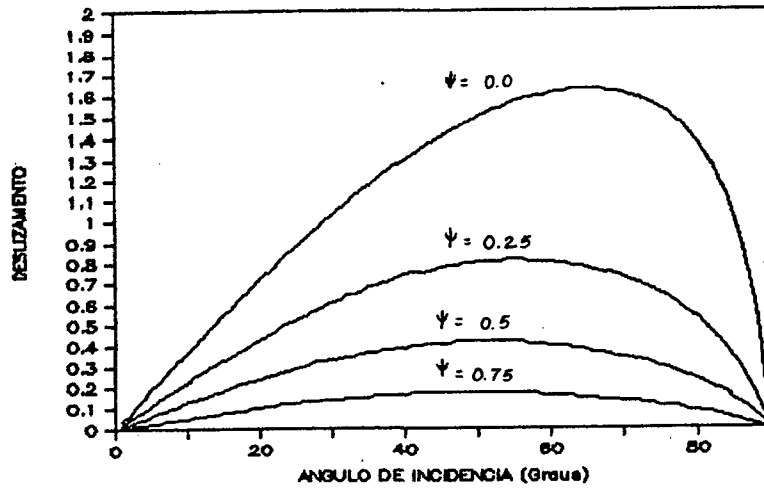


Fig. 3.59. - O deslizamento diminui com o aumento da frequência (Cf. Fig. 3.51).

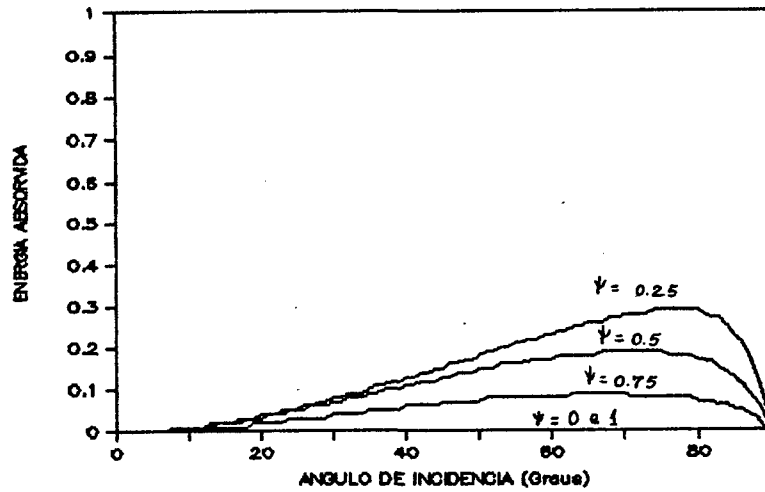


Fig. 3.60 - A energia absorvida é pequena para  $\theta < 20^\circ$ .

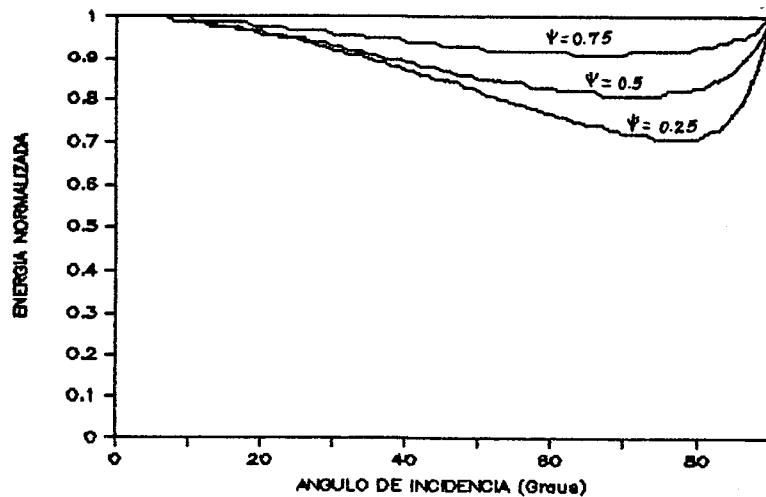


Fig. 3.61 - Energia normalizada para  $\omega = 10^6$  Hz.

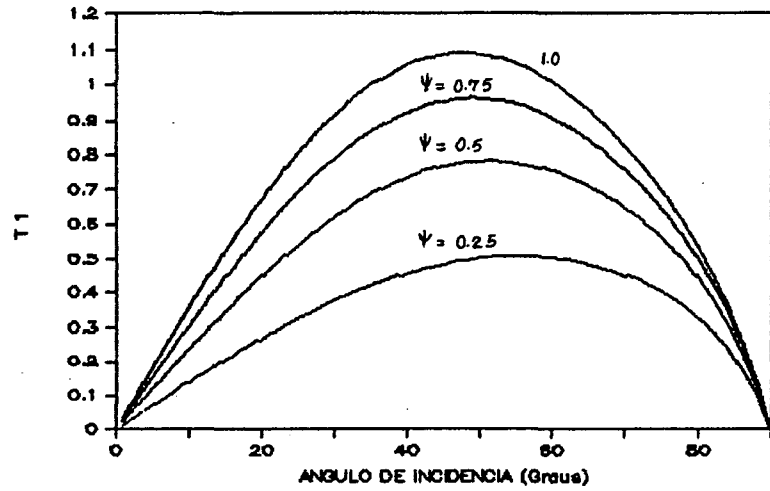


Fig. 3.62 - Tensão cisalhante no contorno.

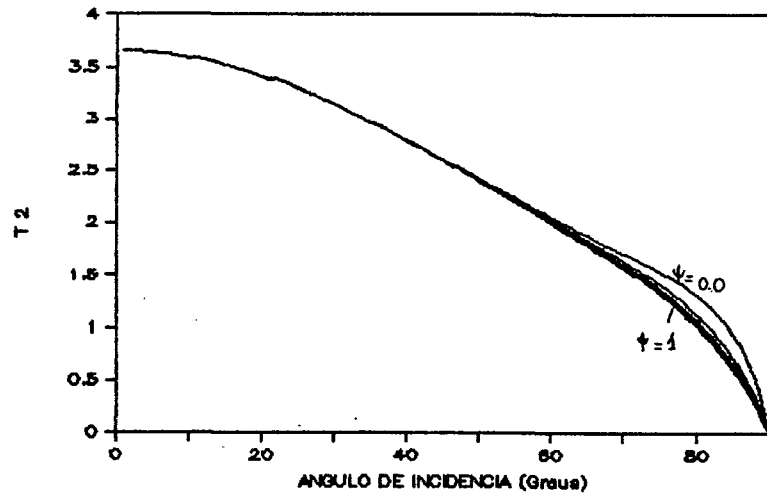


Fig. 3.63 - Tensão normal ao contorno. É máxima para  $\text{in} = 0^\circ$ .

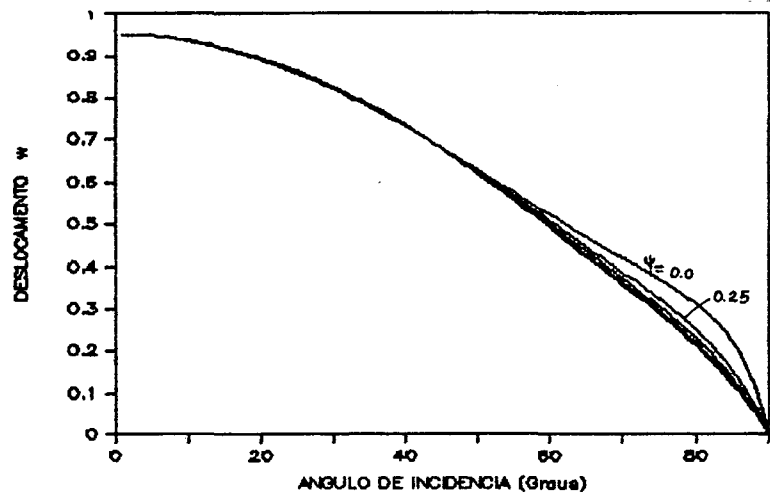


Fig. 3.64 - Deslocamento normal. A aderência influencia pouco em altas frequências.



### 3.4.6 - Onda P Incidente - A Frequência como uma Variável do Problema

Como já foi visto, a consideração do amortecimento torna a frequência uma variável do problema. Os gráficos a seguir mostram a sua influência quando a onda incidente é a do tipo P. O angulo de incidência escolhido foi de  $80^\circ$ .  $c_1/c_1' = 1.1$ .

As respostas das ondas estão apresentadas nas Figuras 3.65, 3.66, 3.67 e 3.68. Em especial verifica-se que a onda P transmitida aumenta muito com a frequência. O inverso ocorre com a energia absorvida, Figura 3.69. Observa-se aí picos de absorção de energia. A Figura 3.70 mostra a energia normalizada e a 3.71 o deslizamento. Nas condições presentes este diminui com a frequência. As tensões no contorno são apresentadas nas Figuras 3.72 e 3.73.

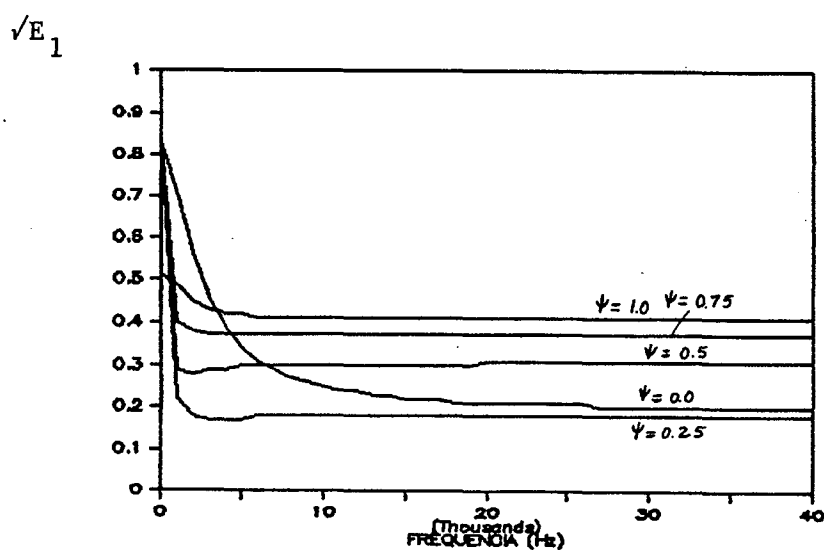


Fig. 3.65 - Onda P refletida em função da frequência.

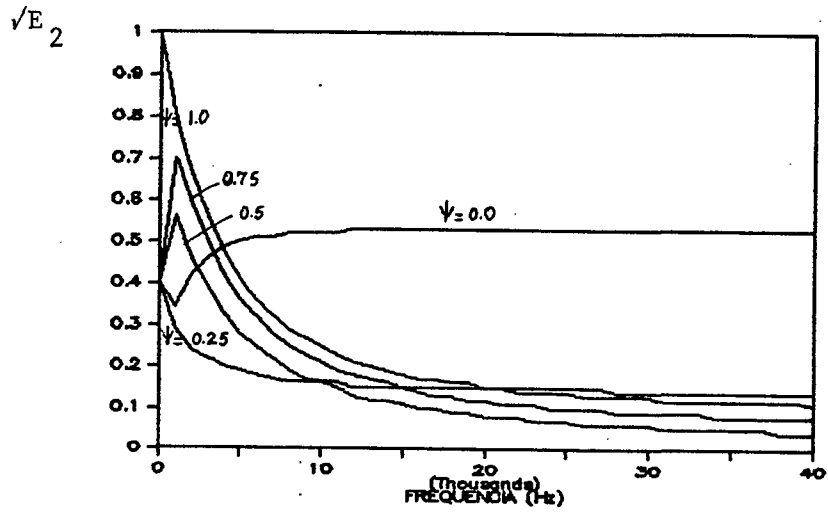


Fig. 3.66 - Onda SV refletida. Onda P incidindo a  $80^\circ$ .

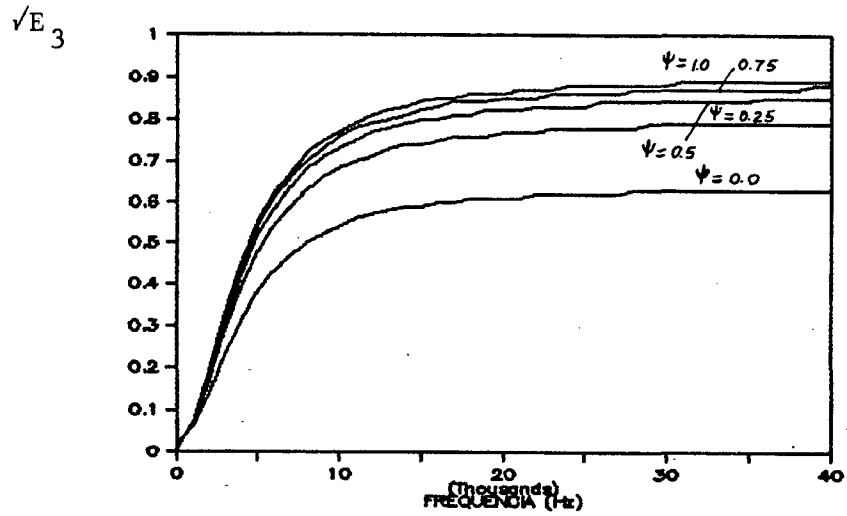


Fig. 3.67 - Onda P transmitida aumentando sensivelmente com a frequência.

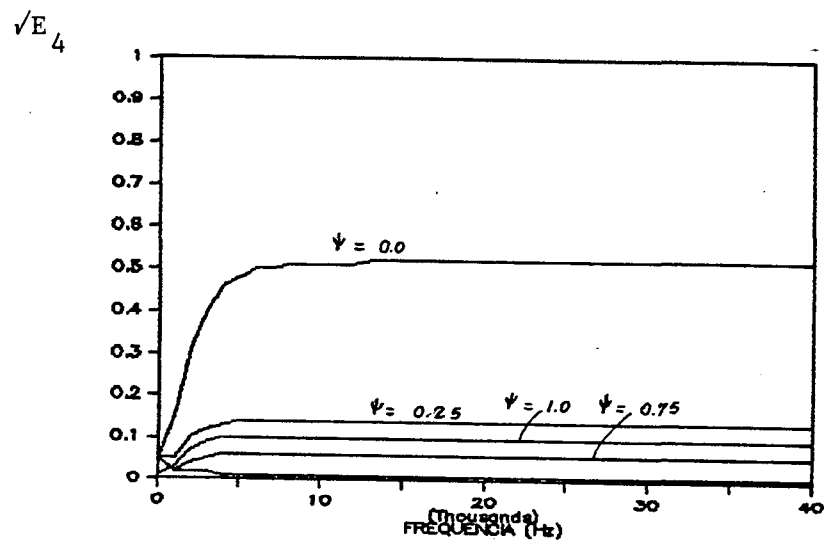


Fig. 3.68 - Onda SV transmitida.  $i_n = 80^\circ$ .

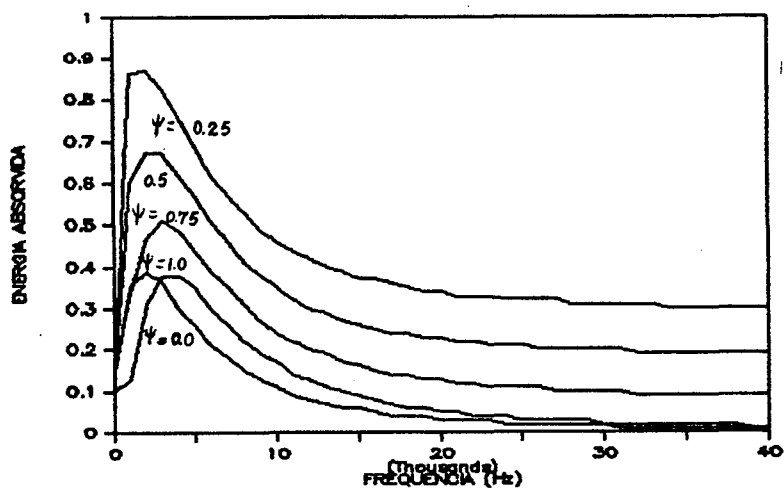


Fig. 3.69 - Observe os picos de absorção de energia nas baixas frequências.

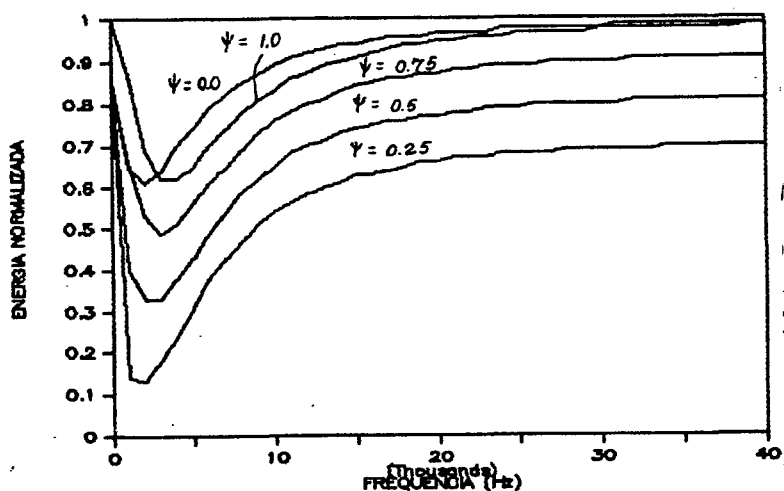


Fig. 3.70 - Energia normalizada.  $m=0.01$  Np/m e  $m'=0.1$  Np/m.

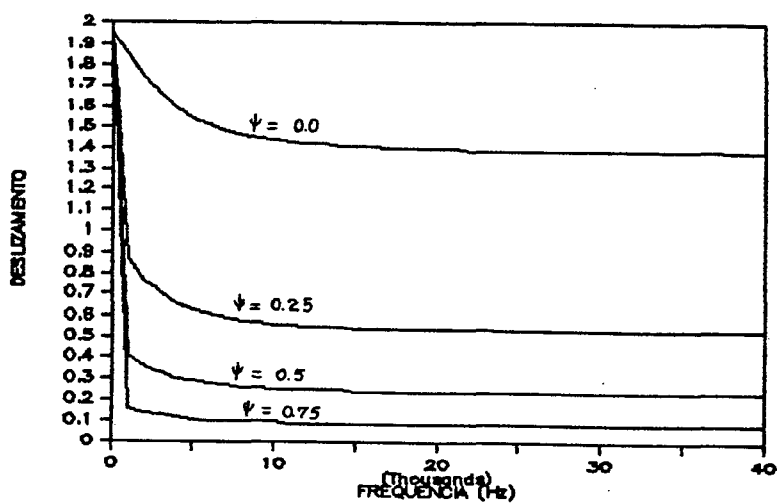


Fig. 3.71 - O deslizamento diminui com o aumento da frequência.

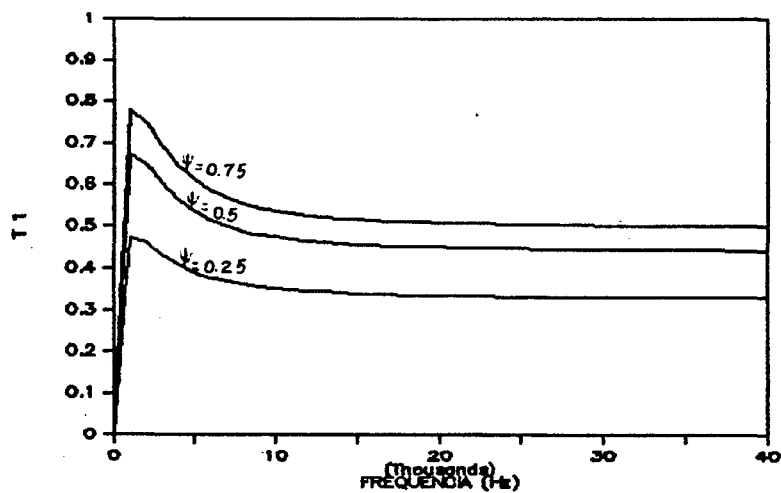


Fig. 3.72 - Tensões cisalhantes atuando no contorno.

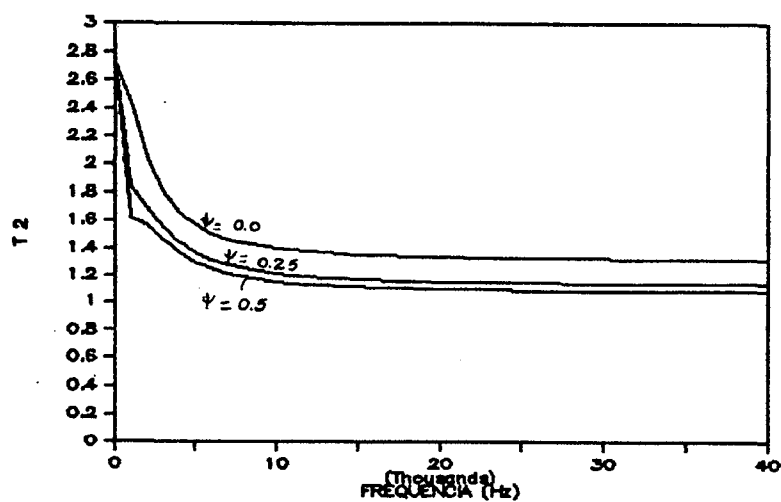


Fig. 3.73 - Tensões normais à interface de separação dos pares.

P A R T E    I I I

MODELOS NÃO-LINEARES DE ATRITO

## CAPÍTULO 4

### O MÉTODO DA LINEARIZAÇÃO EQUIVALENTE - ONDAS SH COM AMORTECIMENTO

#### 4.1 - Introdução

Como já foi visto, as forças de atrito que ocorrem em fenômenos os mais elementares são difíceis de serem corretamente avaliadas e leis matemáticas que as quantifiquem da maneira mais real possível são expressões não-lineares.

Se por um lado a não-linearidade melhor representa estas forças (veja por exemplo [35], [51], [55]), por outro o seu tratamento é penoso e, muitas vezes, analiticamente impossível. Para contornar parte deste obstáculo, foram desenvolvidos vários métodos de aproximação que, geralmente, têm o intuito de linearizar o problema, quando as condições suficientes para a linearização forem satisfeitas. As referências sobre os mais diversos métodos aplicados aos mais variados tipos de fenômenos são muitas, recomendando-se [28], [29], [30], [47], [49].

Um destes métodos de linearização chamado **Método da Linearização Equivalente** - MLE\*, será pormenorizadamente apresentado neste trabalho. O MLE foi aplicado ao estudo de ondas elásti-

---

\*Este método possui íntima analogia com o Método dos Resíduos Ponderados, usado na solução de problemas de valor de contorno na elasticidade. Veja, por exemplo, BATHE, Klaus J. - Finite Element Procedures in Engineering Analysis, 1ª Edição, Prentice-Hall Inc., pp v-735, 1982.

cas ao atingirem contornos planos por Richard K. Miller em 1977 |40|. A partir daí, ele foi desenvolvido e aplicado aos três tipos básicos de onda - SH, SV e P -, do que resultou a Tese de Hoi T. Tran |58|.

Dada a boa concordância deste método quando comparado a resultados analíticos, o presente trabalho amplia-o ao aplicá-lo à análise de ondas elásticas em que o amortecimento é considerado.

#### 4.2 - O Método da Linearização Equivalente - MLE

Basicamente, o MLE aqui usado descreve o modelo de atrito não linear através da soma de duas variáveis lineares, que são o deslizamento e sua variação com o tempo. Às constantes que multiplicam estas variáveis impõem-se que o erro médio quadrático seja mínimo obtendo-se, deste modo, integrais funções do modelo de atrito adotado. Assim, seja a tensão de atrito representada por:

$$\tau = L_1 d + L_2 \dot{d} \quad (4.1)$$

onde  $L_1$  e  $L_2$  são constantes a serem minimizadas,  $d$  o deslizamento e  $\dot{d}$  a derivada em relação ao tempo.

Pode-se assumir que o deslizamento é harmônico, já que a onda incidente também o é. Além disso pode ocorrer uma mudança de fase -  $fd$  - na onda de deslizamento, originada do fato de ser a onda uma perturbação contínua no espaço e no tempo.

Assim:

$$d = D \cos (kx - \omega t + fd) \quad (4.2)$$

Ao se substituir (4.2) em (4.1) obtêm-se uma equação linear tentando representar uma possível não linearidade. Assim  $L_1$  e  $L_2$  devem ser escolhidas de tal forma que o erro seja mínimo. Define-se o erro médio quadrático como:

$$EMQ = \int_0^{2\pi} \{\tau - (L_1 d + L_2 \dot{d})\}^2 d\eta \quad (4.3)$$

onde  $\eta = kx - \omega t + fd$ .

Substituindo-se (4.2) em (4.3), derivando em relação a  $L_1$  e  $L_2$  e igualando a zero (condição de mínimo), vem:

$$L_1 = \frac{L_3}{D} = \frac{1}{\pi D} \int_0^{2\pi} \tau \cos \eta d\eta \quad (4.4)$$

$$L_2 = \frac{-L_4}{\omega D} = \frac{-1}{\pi \omega D} \int_0^{2\pi} \tau \sin \eta d\eta \quad (4.5)$$

com  $L_3 = L_1 D$  e  $L_4 = -\omega L_2 D$ .

Desta forma, alguns modelos de atrito podem ser aproximados pela equação (4.1) linear.

A seguir, este método será aplicado a uma onda SH onde o amortecimento é considerado.

#### 4.3 - Onda SH com Amortecimento

Seja uma onda SH amortecida atingindo uma interface plana sujeita a um modelo de atrito qualquer, Figura 2.1. No presente trabalho, as ondas incidentes serão sempre harmônicas. Devido à possível não-linearidade no contorno, é de se esperar que as ondas refletidas e transmitidas sejam alteradas em sua forma. Isto geralmente ocorre, mas como o presente método lineariza o atrito,



as ondas refletida e transmitida serão consideradas harmônicas e decaindo em amplitude com a distância.

Devido ao atrito, deslizamento e amortecimento, é possível ocorrerem mudanças de fase, tanto na onda refletida (frs) como na transmitida (fts). Considera-se, nas discussões seguintes, que não ocorre separação entre os sólidos.

Da continuidade de tensões cisalhantes na interface, segue que:

$$\begin{aligned} \sigma_{yz} &= \sigma'_{yz} \quad |_{z=0} \\ \mu \{ (m \operatorname{sen} in - ik) e^m \operatorname{sen} in x & - (m \operatorname{sen} rs - ik) X_2 e^m \operatorname{sen} rs x \} b B_0 e^{i(kx-\omega t)} = \\ \mu' (m' \operatorname{sen} ts - ik) X_4 e^{m' \operatorname{sen} ts x} b' B_0 e^{i(kx-\omega t)} & \end{aligned} \quad (4.6)$$

Alternativamente a (4.2), o deslizamento pode ser representado por:

$$\begin{aligned} d &= v_t - v_r - v_i \\ d &= D e^{i(kx-\omega t)} = \{ X_4 e^{m' \operatorname{sen} ts x} - X_2 e^m \operatorname{sen} rs x - \\ & e^m \operatorname{sen} in x \} B_0 e^{i(kx-\omega t)} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Por último, a equação para o modelo de atrito no contorno é:

$$\begin{aligned} \sigma_{yz} = \tau \quad |_{z=0} \\ \mu \{ (m \operatorname{sen} in - ik) e^{m \operatorname{sen} in x} - \\ (m \operatorname{sen} rs - ik) X_2 e^{m \operatorname{sen} rs x} \} \mu B_0 e^{i(kx - \omega t)} = \\ (L_1 - i\omega L_2) D e^{i(kx - \omega t)} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Exprimindo  $L_1$  e  $L_2$  em função de  $L_3$  e  $L_4$  (Equações (4.4) e (4.5)), pode-se apresentar o sistema de equações da seguinte forma

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{cc} 1 & \frac{\mu' b'}{\mu b} \frac{(m' \operatorname{sen} ts - ik) e^{m' \operatorname{sen} ts x}}{(m \operatorname{sen} rs - ik) e^{m \operatorname{sen} rs x}} \\ e^{m \operatorname{sen} rs x} & -e^{m' \operatorname{sen} ts x} \\ 1 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} X_2 \\ X_4 \\ X_5 \end{array} \right\} = \\ \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ -e^{m \operatorname{sen} rs x} \\ 1 - \frac{L_3 + iL_4}{\mu b B_0 (m \operatorname{sen} rs - ik) e^{m \operatorname{sen} rs x}} \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (4.9)$$

onde

$$X_2 = Y_2 (\cos frs + i \operatorname{sen} frs) \quad (4.10)$$

$$X_4 = Y_4 (\cos fts + i \operatorname{sen} fts) \quad (4.11)$$

$$X_5 = Y_5 (\cos fd + i \operatorname{sen} fd) \quad (4.12)$$

sendo frs, fts e fd as mudanças de fase ocorridas no contorno (ve

ja Secção 1.3).

A solução do sistema (4.9) é:

$$X_2 = 1 - \frac{L_3 + iL_4}{\mu b B_0} \frac{e^{-m \text{ sen } rs \ x}}{(m \text{ sen } rs - ik)} \quad (4.13)$$

$$X_4 = \frac{L_3 + iL_4}{\mu' b' B_0 (m' \text{ sen } ts - ik)} e^{-m' \text{ sen } ts \ x} \quad (4.14)$$

$$X_5 = -2 e^{m \text{ sen } rs \ x} + \frac{L_3 + iL_4}{B_0} \left\{ \frac{1}{\mu b (m \text{ sen } rs - ik)} + \frac{1}{\mu' b' (m' \text{ sen } ts - ik)} \right\} \quad (4.15)$$

Substituindo as expressões (4.10), (4.11) e (4.12) na solução acima, e comparando-se as partes reais e complexas, obtém-se o módulo e a fase das amplitudes, que a seguir estão apresentadas.

Sendo:

$$re_1 = \frac{L_3 m \text{ sen } rs - L_4 k}{m^2 \text{ sen}^2 rs + k^2} \quad (4.16)$$

$$im_1 = \frac{L_4 m \text{ sen } rs + L_3 k}{m^2 \text{ sen}^2 rs + k^2} \quad (4.17)$$

$$re_2 = \frac{L_3 m' \text{ sen } ts - L_4 k}{m'^2 \text{ sen}^2 ts + k^2} \quad (4.18)$$

$$im_2 = \frac{L_4 m' \text{ sen } ts + L_3 k}{m'^2 \text{ sen}^2 ts + k^2} \quad (4.19)$$

vem:

$$Y_2 = \left\{ \left[ 1 - \frac{e^{-m \operatorname{sen} rs x}}{\mu b B_0} \operatorname{re}_1 \right]^2 + \left[ \frac{e^{-m \operatorname{sen} rs x}}{\mu b B_0} \operatorname{im}_1 \right]^2 \right\}^{1/2} \quad (4.20)$$

$$\operatorname{frs} = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{e^{-m \operatorname{sen} rs x} \operatorname{im}_1}{-e^{-m \operatorname{sen} rs x} \operatorname{re}_1 - \mu b B_0} \right) \quad (4.21)$$

$$Y_4 = \frac{e^{-m' \operatorname{sen} ts x}}{\mu' b' B_0} \{ \operatorname{re}_2^2 + \operatorname{im}_2^2 \}^{1/2} \quad (4.22)$$

$$\operatorname{fts} = \operatorname{tg}^{-1} (\operatorname{im}_2 / \operatorname{re}_2) \quad (4.23)$$

$$Y_5 = \left\{ \left[ -2 e^m \operatorname{sen} rs x + \frac{\operatorname{re}_1}{\mu b B_0} + \frac{\operatorname{re}_2}{\mu' b' B_0} \right]^2 + \left[ \frac{\operatorname{im}_1}{\mu b B_0} + \frac{\operatorname{im}_2}{\mu' b' B_0} \right]^2 \right\}^{1/2} \quad (4.24)$$

$$\operatorname{fd} = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{\frac{\operatorname{im}_1}{\mu b} + \frac{\operatorname{im}_2}{\mu' b'}}{-2 e^m \operatorname{sen} rs x B_0 + \frac{\operatorname{re}_1}{\mu b} + \frac{\operatorname{re}_2}{\mu' b'}} \right) \quad (4.25)$$

A forma como aqui foi desenvolvido o MLE aplicado às ondas elásticas fez com que o sistema de equações fosse explicitamente resolvido. Isto difere do modo de outros autores [40], [58] apresentarem o método pois os mesmos obtêm uma equação transcendental para o deslizamento que é então usado na determinação de  $X_2$  e  $X_4$ . Tal equação pode, dependendo do modelo de atrito adotado, exigir solução numérica, o que não ocorre usando-se o modo aqui desenvolvido.

#### 4.4 - O MLE Aplicado a Atrito de Coulomb

O objetivo desta secção é usar o MLE para resolver o problema de dois sólidos em contato sujeitos, em sua interface, à ação de uma onda SH harmônica com amortecimento. Esta não provoca separação das superfícies em contato, existindo entre elas, atrito do tipo Coulomb.

A onda SH, ao atingir as superfícies, provoca deslocamentos localizados que se propagam pela interface com a mesma velocidade da onda incidente. A estes deslocamentos estão associados tensões cisalhantes  $\sigma_{yz}$  que possuem intensidade variável com a onda que incide, Figura 4.1. O atrito existente na interface atua de modo a impedir o deslizamento mas este vem a ocorrer com o contínuo crescimento de  $\sigma_{yz}$ .

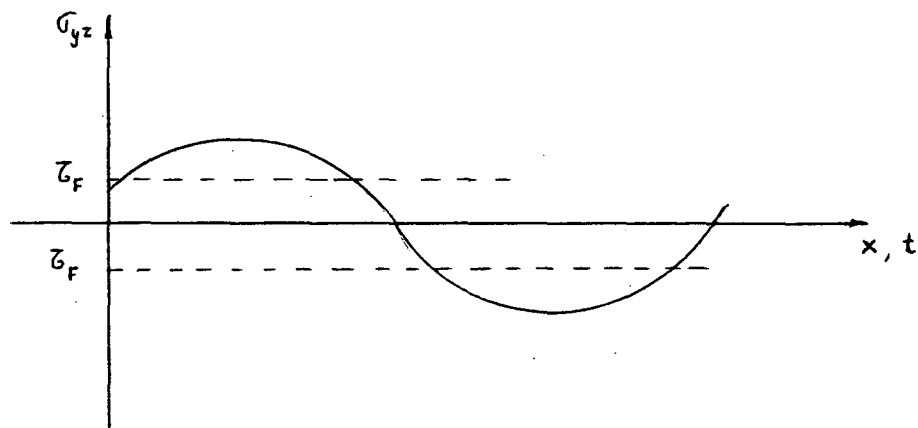


Fig. 4.1 - Onda de Tensão  $\sigma_{yz}$ .

Como a *Onda de Tensão* inverte periodicamente seu sentido de atuação, pode-se exprimir a tensão de fricção por:

$$\tau_F = \tau_d \text{ sinal}(\dot{d}) , \dot{d} \neq 0 \quad (4.26)$$

onde  $\tau_d$  é o módulo da tensão de fricção na interface.

Introduzindo esta expressão nas equações (4.4) e (4.5) obtém-se

as integrais  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  e  $L_4$  do MLE, que são dadas por:

$$L_1 = 0 \quad (4.27)$$

$$L_2 = \frac{4}{\pi} \frac{\tau_d}{\omega D} \quad (4.28)$$

$$L_3 = 0 \quad (4.29)$$

$$L_4 = -\frac{4}{\pi} \tau_d \quad (4.30)$$

Para apresentar as expressões da solução do sistema, considere os sólidos sem amortecimento. Disto resulta:

$$\text{re}_1 = \text{re}_2 = -L_4/k \quad (4.31)$$

$$\text{im}_1 = \text{im}_2 = 0 \quad (4.32)$$

o que torna as mudanças de fase nulas. Além disso:

$$X_2 = Y_2 = 1 - \frac{4}{\pi b k} \frac{\tau_d}{\mu B_0} \quad (4.33)$$

$$X_4 = Y_4 = \frac{4}{\pi b' k} \frac{\tau_d}{\mu' B_0} \quad (4.34)$$

$$X_5 = Y_5 = -2 + \frac{4 \tau_d}{\pi k B_0} \left( \frac{1}{\mu b} + \frac{1}{\mu' b'} \right) \quad (4.35)$$

Como, no MLE, as razões de amplitudes  $X_2$ ,  $X_4$  e  $X_5$  são aproximadas, as razões de energias daí obtidas devem ser tais que satisfaçam o equilíbrio energético.

Assim:

$$E_1 + E_2 \leq 1 \quad (4.36)$$

$$X_1^2 + \frac{\mu'b'}{\mu b} X_2^2 \leq 1 \quad (4.37)$$

$$\left[1 - \frac{4}{\pi b k} \frac{\tau_d}{\mu B_0}\right]^2 + \frac{\mu'b'}{\mu b} \left[\frac{4}{\pi b' k} \frac{\tau_d}{\mu' B_0}\right]^2 \leq 1 \quad (4.38)$$

De tal modo que:

$$\frac{\tau_d}{B_0} \leq \frac{\pi k \mu b \mu' b'}{2(\mu b + \mu' b')} \quad (4.39)$$

Se os sólidos são iguais então:

$$\frac{\tau_d}{\mu B_0} \leq \frac{\pi k b}{4} \quad (4.40)$$

É possível mostrar também que existe uma frequência abaixo da qual nenhum deslizamento ocorre [58] e a transmissão da onda ao meio II é completa.

Esta frequência de corte, para sólidos iguais e sem amortecimento, é dada por:

$$\omega_c = \frac{4}{\pi} \frac{c_2}{\cos r s} \frac{\tau_d}{\mu B_0} \quad (4.41)$$

Cabe ainda mais uma observação ao MLE. Se ele for aplicado ao modelo de atrito viscoso *linear* as integrais (4.4) e (4.5) serão:

$$L_1 = \frac{i\mu k}{\text{sen } i\eta} \frac{\Psi}{1-\Psi} \quad (4.42)$$

$$L_2 = 0 \quad (4.43)$$

Aplicando-as ao sistema (4.9), os resultados obtidos serão idênticos àqueles do Capítulo 2. Isto confirma que o MLE pode ser usado em problemas onde o modelo de atrito é linear, dando origem à solução analítica.

#### 4.5 - Resultados Gráficos para Atrito de Coulomb

A solução para atrito de Coulomb, apresentada na secção precedente, foi particularizada para o caso de amortecimento nulo. Para uma análise mais ampla do fenômeno aquela solução (equações (4.16) a (4.25)) foi processada em computador, gerando os gráficos a seguir. Estes podem ser divididos em dois grandes conjuntos.

O primeiro analisa o comportamento das ondas em função do ângulo de incidência. Isto para várias frequências e vários PAC - Parâmetro de Atrito de Coulomb - que aqui é definido como:

$$\text{PAC} \equiv \frac{\mu B_0}{\tau_d} \quad (4.44)$$

Observa-se que o PAC não pode assumir qualquer valor, para que a conservação da energia seja satisfeita (Equação (4.39)). Valores altos de PAC representam uma pequena tensão de fricção no contorno.

O segundo conjunto de gráficos mostra as ondas em fun-



ção da frequência para um dado ângulo de incidência e vários PAC's.

A velocidade da onda SH incidente é de 3000 m/s,  $\mu/\mu'=1$   $v=v' = 0.3$ . Os resultados são válidos no ponto (0,0).

As várias curvas dos gráficos dizem respeito aos vários Parâmetros de Atrito de Coulomb que, neste trabalho, são: 10, 50, 100, 500 e 1000. Isto representa vários graus de aderência entre as superfícies em contato.

#### 4.5.1 - Amortecimento Nulo sem Reflexão Total

Será visto, na seqüência de gráficos a seguir, como se comporta a solução obtida pelo MLE na ausência de amortecimento. A relação de velocidades adotada é de  $c_2/c_2' = 1.1$  o que garante a não ocorrência da reflexão total. A frequência da onda é de 10 KHz.

As Figuras 4.2 e 4.3 apresentam o comportamento das ondas refletida e transmitida. Percebe-se que, para baixos PAC's e, conseqüentemente, grandes tensões de atrito, a onda se transmite mais facilmente embora de forma pouco intensa. Esta baixa intensidade se deve ao deslizamento das superfícies em contato, Figura 4.4. Quanto maior for ele mais dificuldade tem a onda de se transmitir. Isto explica porque, na incidência normal, a transmissibilidade não é máxima.

As energias absorvida e normalizada, Figuras 4.5 e 4.6, apresentam um comportamento peculiar, no caso de Atrito de Coulomb.

A absorção de energia diminui quando o deslizamento au-

menta e vice-versa. Fisicamente, isto pode ser explicado ao se considerar que a um grande deslizamento está associado um pequeno coeficiente de atrito e, portanto, uma menor dissipação de energia por fricção.

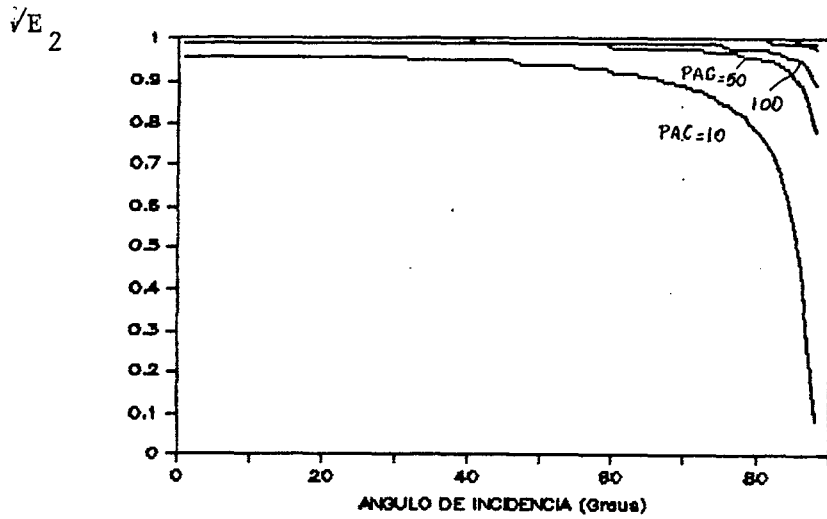


Fig. 4.2 - Energia refletida para o caso de amortecimento nulo e  $\omega = 10$  KHz.

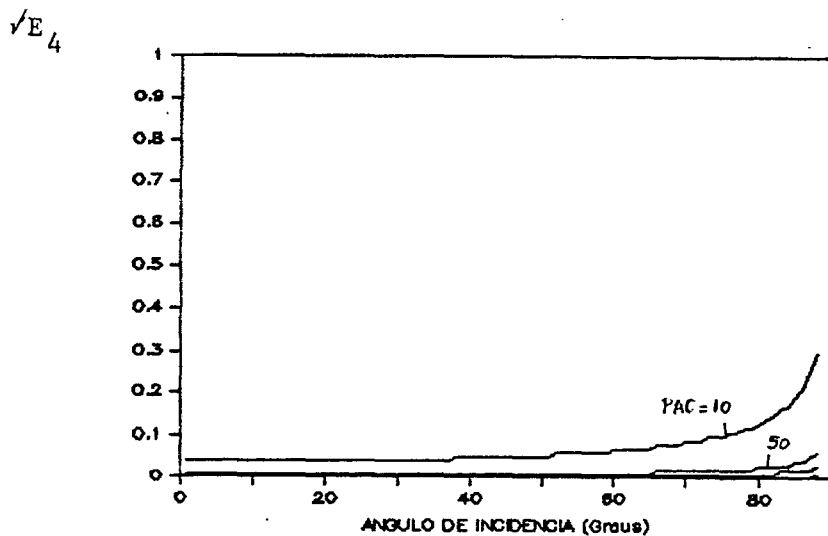


Fig. 4.3 - A energia transmitida aumenta com o ângulo de incidência.

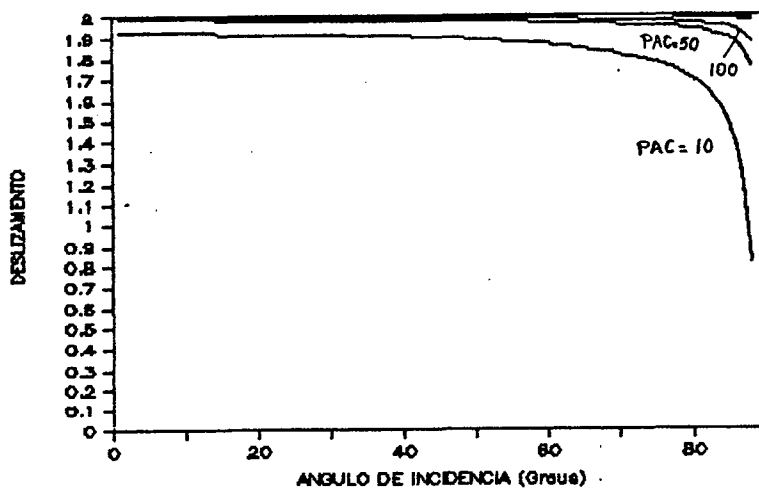


Fig. 4.4 - O deslizamento aumenta com o PAC.

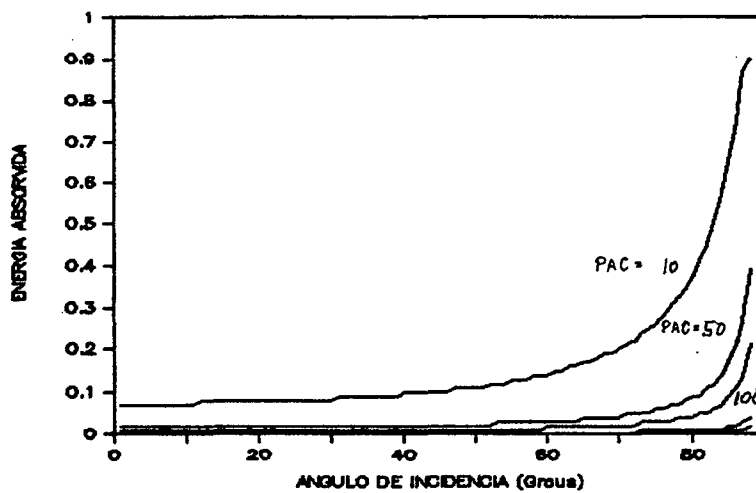


Fig. 4.5 - A energia absorvida comporta-se de modo inverso ao deslizamento.

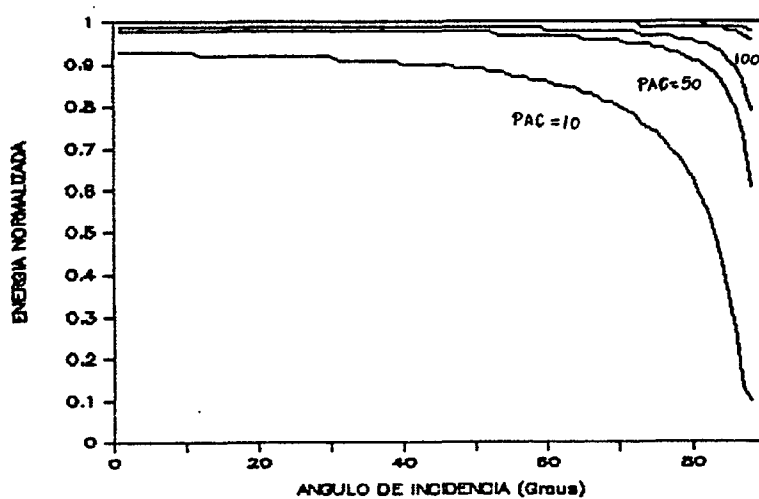


Fig. 4.6 - Energia normalizada.  $\omega=10$  KHz.

#### 4.5.2 Sólidos com Amortecimento e sem Reflexão Total

A consideração do amortecimento, através dos coeficientes  $m=0.01$  Np/m e  $m'=0.1$  Np/m, altera o fenômeno embora o comportamento das curvas se assemelhe ao caso anterior. Os resultados são válidos na origem,  $c_2/c_2' = 1.1$  e para  $\omega = 1$  KHz.

Como se conclui da equação (4.39), o MLE exige que a razão entre a tensão de fricção e a amplitude da onda incidente seja tal que satisfaça o equilíbrio de energia. Assim, para grandes ângulos de incidência e os PAC's aqui usados, (4.39) deixa de ser válida. Por isto algumas curvas não foram plotadas a partir de certos ângulos.

Uma formulação que considere o amortecimento revela-se importante pois este afeta de modo quantitativo as variáveis do problema. Assim é que, em relação ao caso anterior, a reflexão diminui em intensidade (Figura 4.7) enquanto o coeficiente de transmissão aumenta (Figura 4.8). Também a razão entre a amplitude da onda de deslizamento e a da incidente é agora menor, Figura 4.9. As Figuras 4.10 e 4.11 mostram EN e EA.

Na Figura 4.7 nota-se um aumento da onda refletida para baixos PAC's. Este comportamento peculiar não pôde ser justificado, merecendo estudos adicionais futuros.

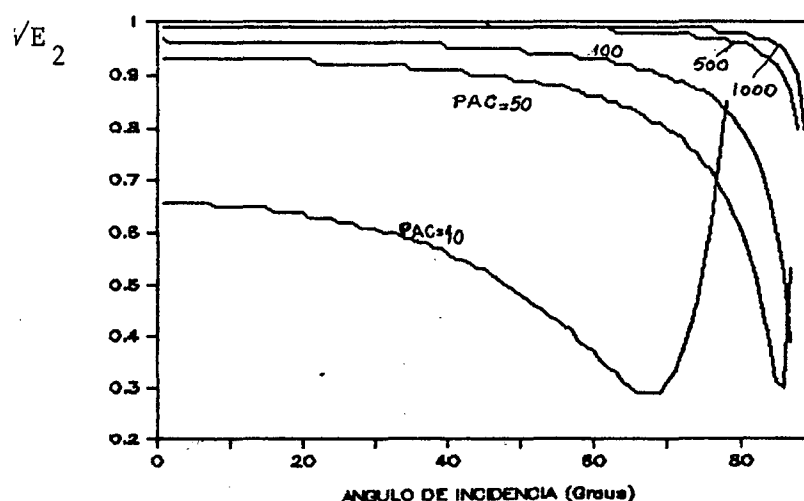


Fig. 4.7 - Onda SH refletida.

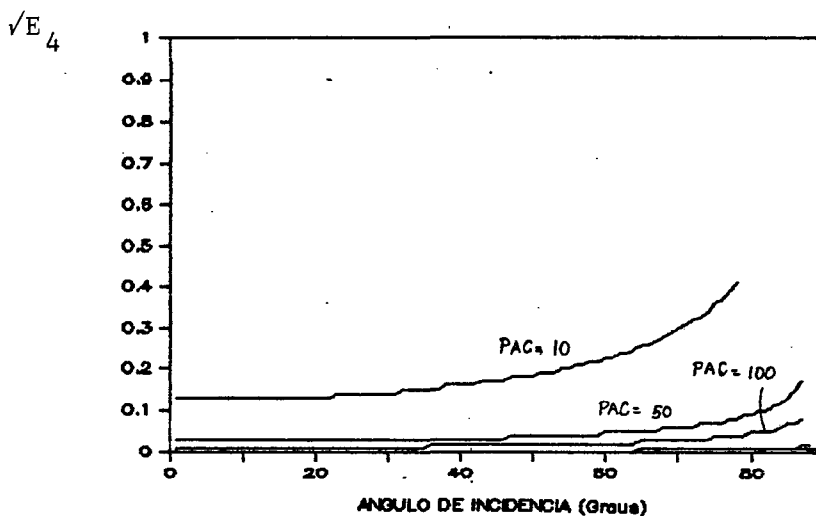


Fig. 4.8 - Onda transmitida quando o amortecimento é considerado.

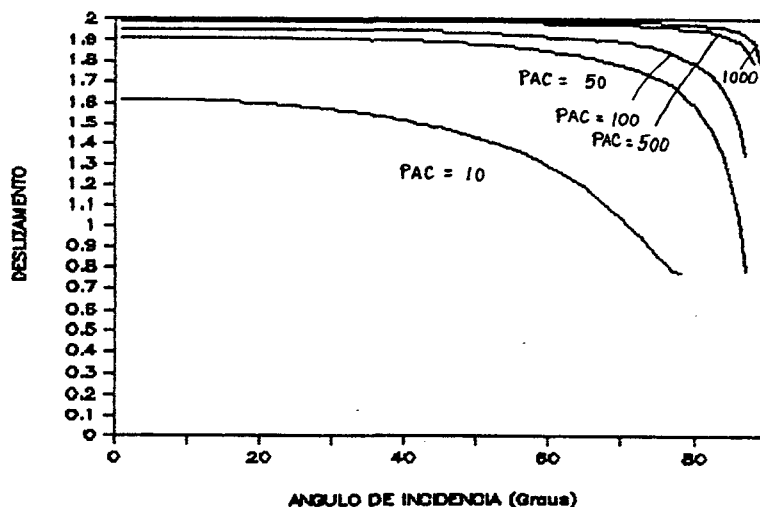


Fig. 4.9 - Deslizamento em interface sujeita a atrito de Coulomb.

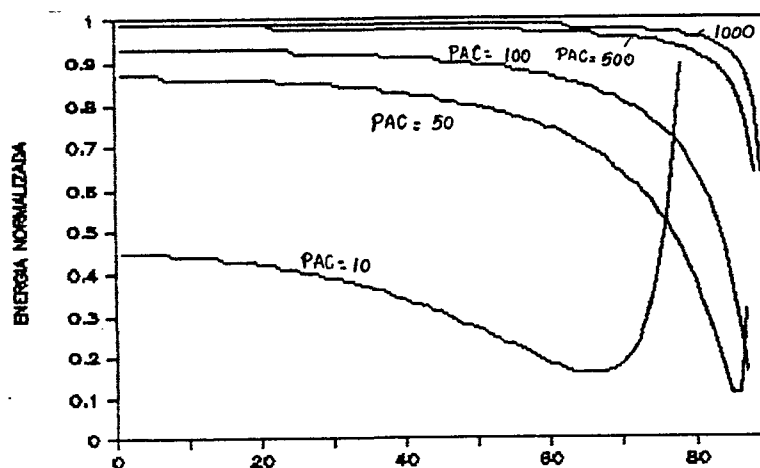


Fig. 4.10 - Energia normalizada é função do ângulo de incidência

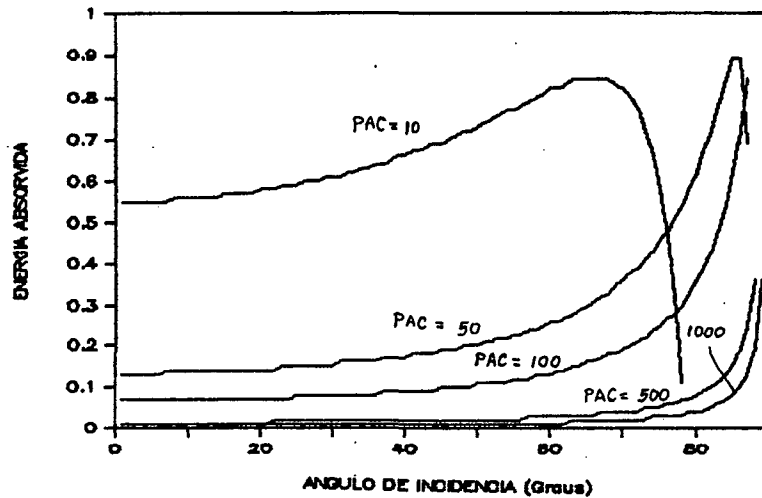


Fig. 4.11 - Energia absorvida pela fricção do contorno.

#### 4.5.3 - Onda SH sem Amortecimento -

##### A Frequência como uma Variável do Problema

No MLE a frequência é uma variável do problema independentemente da consideração ou não do amortecimento. Para verificar sua influência foram construídos gráficos para dois ângulos de incidência:  $15^\circ$  e  $70^\circ$ . A razão de velocidades das ondas nos sólidos permanece  $c_2/c_2' = 1.1$ .

As Figuras 4.12 e 4.13 mostram as ondas refletidas e transmitidas. Percebe-se, no caso de Atrito de Coulomb, uma diminuição no poder de penetração da onda SH quando aumenta a frequência. Isto se deve ao aumento do deslizamento, Figura 4.14. Naturalmente que a reflexão aumenta e a absorção de energia diminui, Figura 4.15. A energia normalizada pode ser analisada pela Figura 4.16 enquanto que as tensões cisalhantes estão na Figura 4.17.

É fácil verificar que, quanto maior o PAC e, portanto, menor aderência dos pares, a transmissibilidade diminui e o des-

lizamento aumenta.

Um aumento do ângulo de incidência para  $70^\circ$  faz diminuir o deslizamento e aumentar a energia transmitida em relação a  $\alpha_{in}=15^\circ$ . É o que mostra, entre outras variáveis, a seqüência de Figuras 4.18 - 4.21.

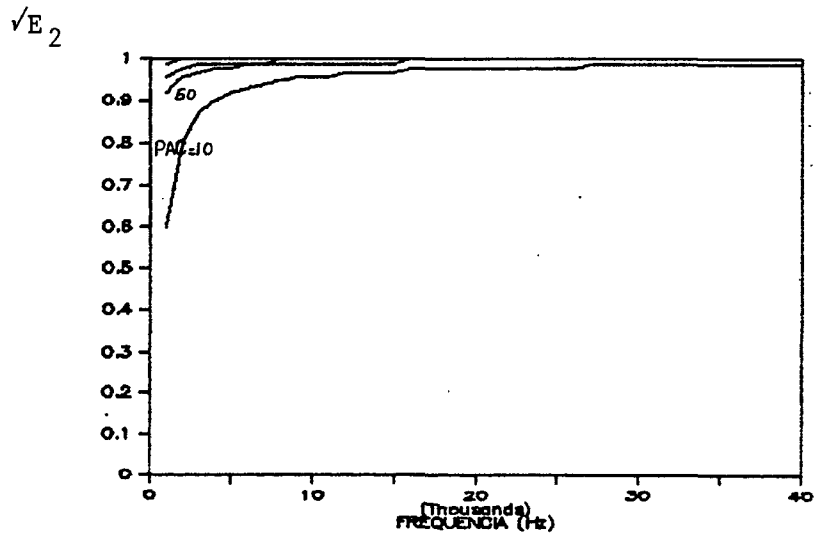


Fig. 4.12 - Onda SH refletida em função da frequência.  $\alpha_{in}=15^\circ$ .

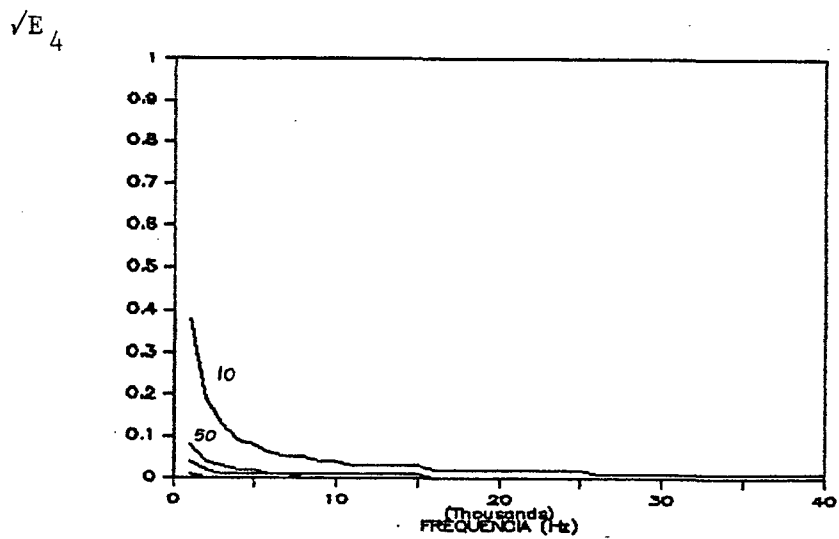


Fig. 4.13 - Onda transmitida diminui com o aumento do PAC.

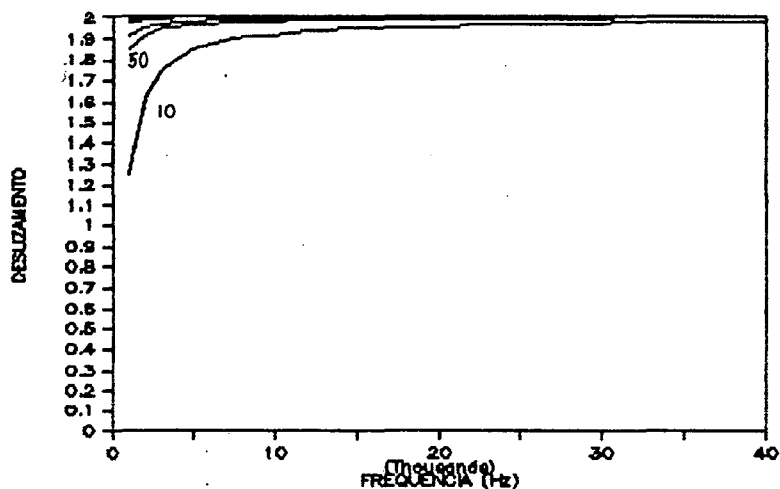


Fig. 4.14 - Deslizamento em função da frequência.  $\text{in}=150$ .

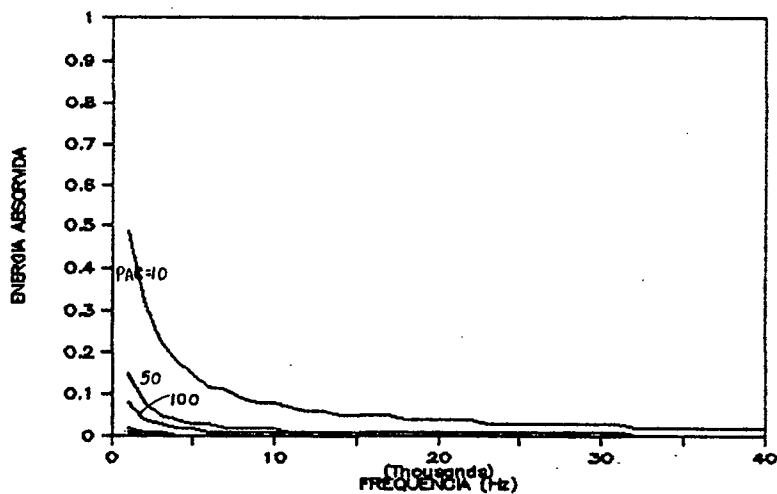


Fig. 4.15 - A absorção de energia diminui com a frequência.

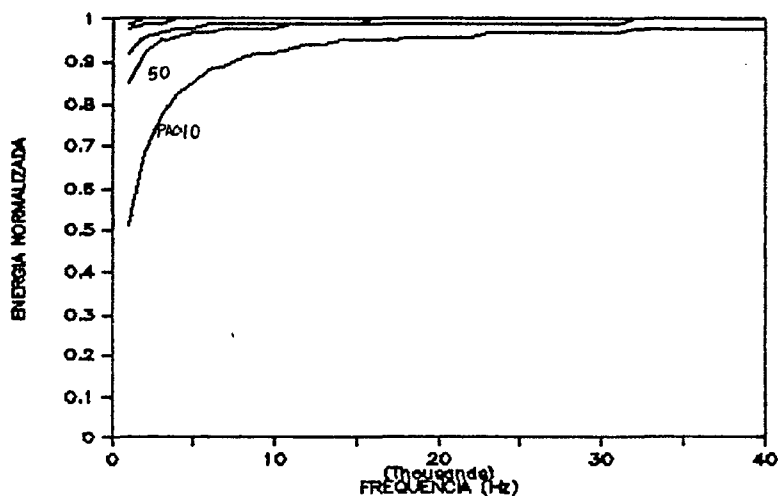


Fig. 4.16 - Energia normalizada para amortecimento nulo.



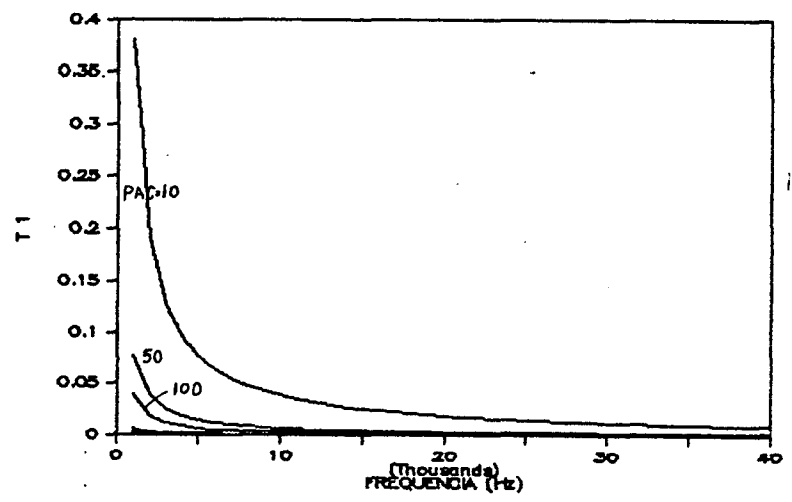


Fig. 4.17 - Tensões cisalhantes normalizadas.  $i_n=150^\circ$ .

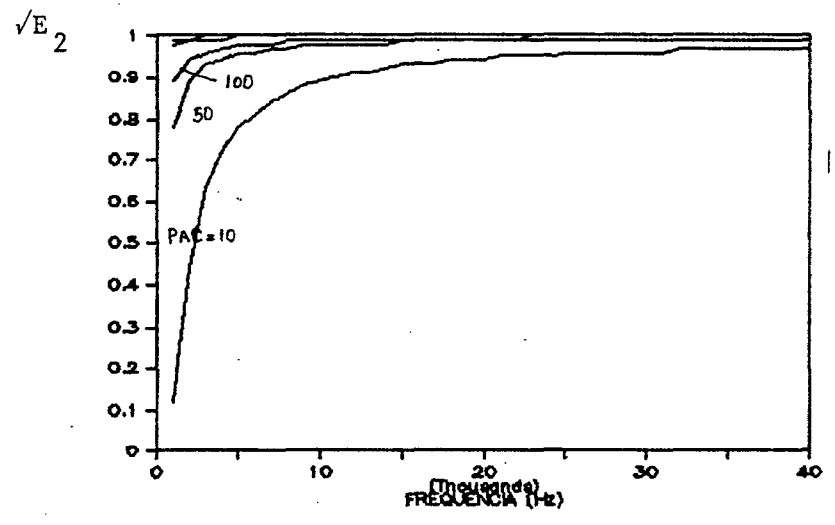


Fig. 4.18 - Onda SH refletida,  $i_n=70^\circ$  e  $m=m' = 0$ .

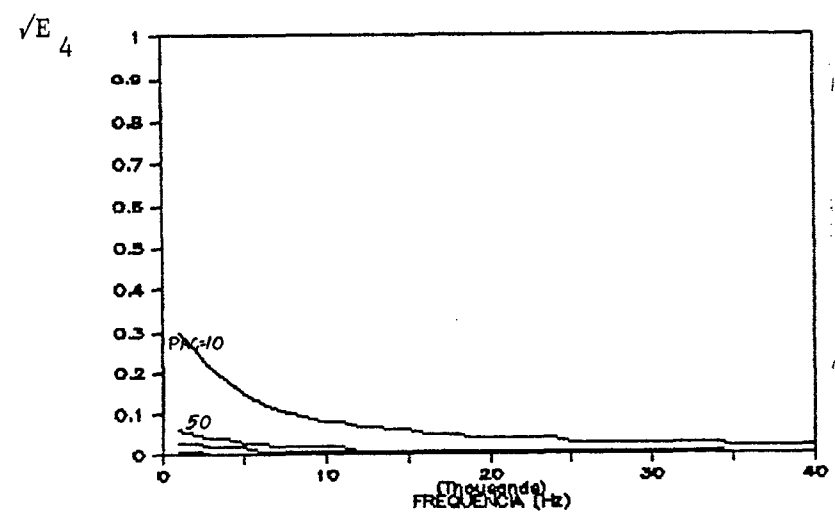


Fig. 4.19 - Onda SH transmitida.  $i_n=70^\circ$ .

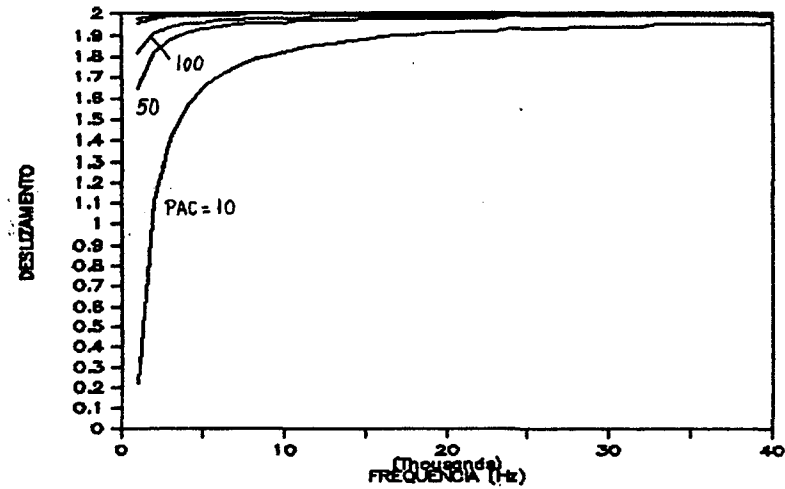


Fig. 4.20 - Deslizamento para  $\alpha_n=70^\circ$ .

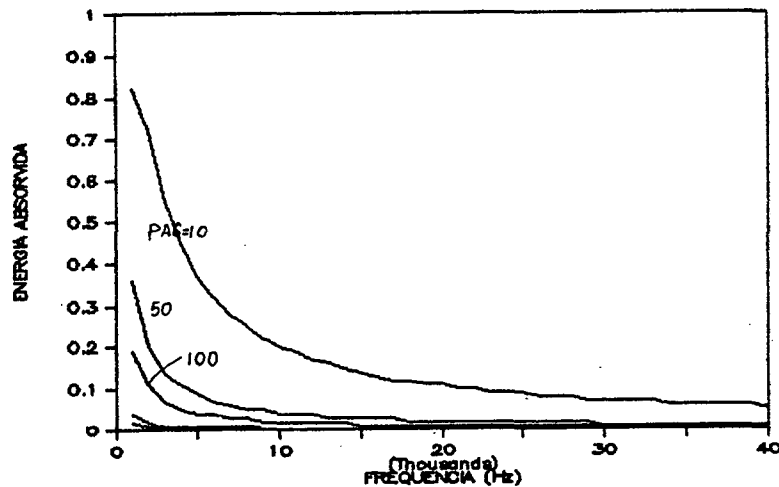


Fig. 4.21 - Energia absorvida no contorno.  $\alpha_n=70^\circ$ .

#### 4.5.4 - Onda SH com Amortecimento -

##### A Frequência como uma variável do Problema

O amortecimento foi considerado pelas mesmas constantes anteriores, sendo introduzido no sistema (4.9). As razões de amplitudes obtidas foram transformadas em razões de energia. A cada ângulo escolhido ( $15^\circ$  e  $70^\circ$ ) a frequência variou de 1 a 40000 Hz, gerando os gráficos a seguir. Estes diferem quantitativamente do sub-ítem anterior. As Figuras 4.22 a 4.26 são para  $\alpha_n=15^\circ$  enquanto que o caso de  $\alpha_n=70^\circ$  está apresentado nas Figuras 4.27 a 4.31.

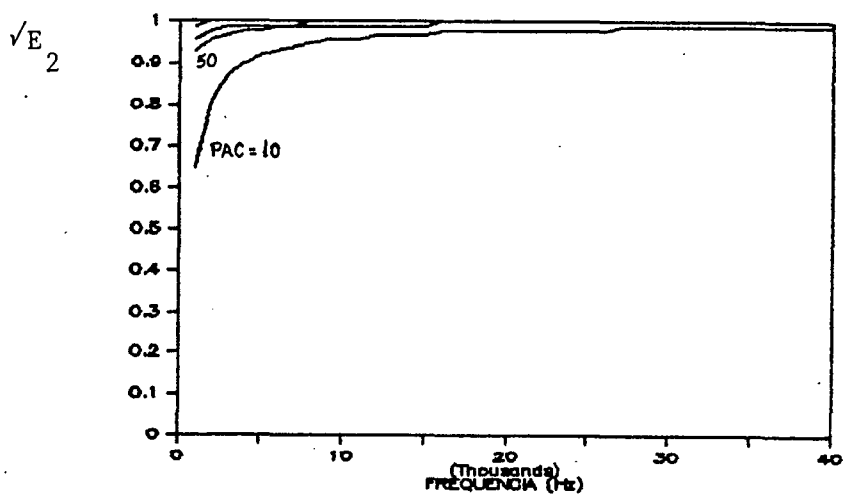


Fig. 4.22 - Onda SH refletida.  $m=0.01$  Np/m,  $m'=0.1$  Np/m e  $i_n=15^\circ$ .

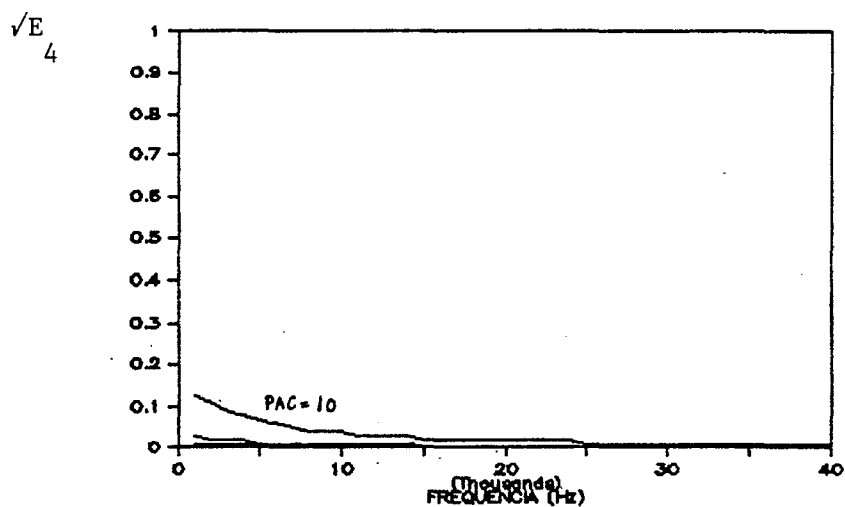


Fig. 4.23 - Onda SH transmitida.  $i_n=15^\circ$ .

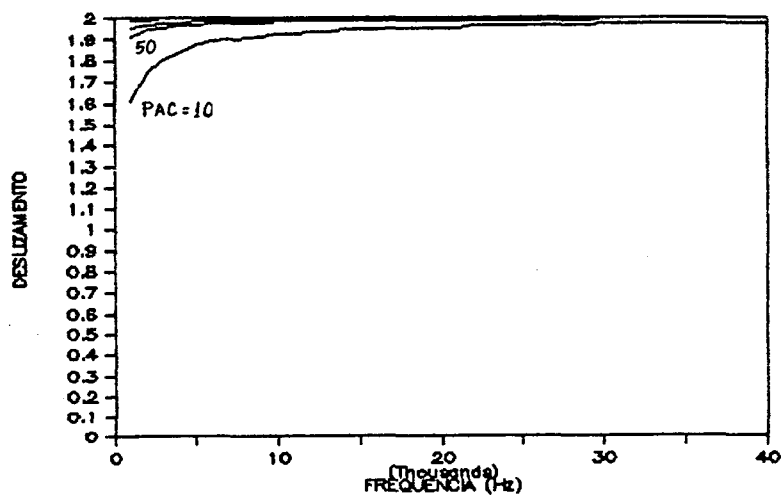


Fig. 4.24 - Deslizamento entre sólidos com amortecimento.

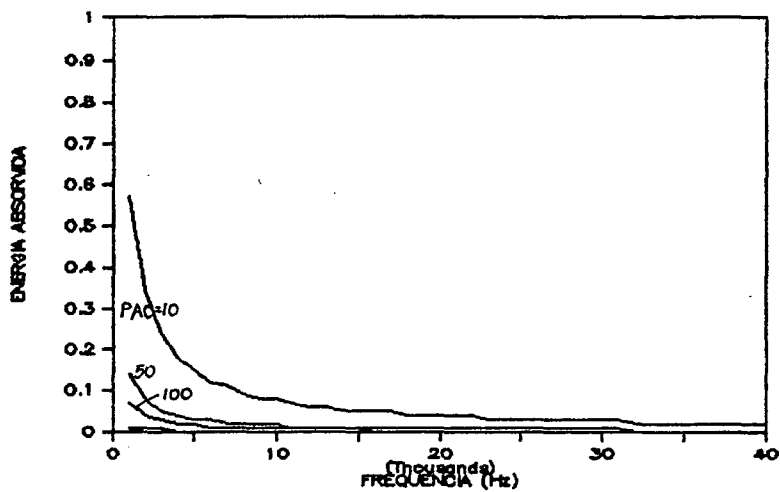


Fig. 4.25 - Energia absorvida em função da frequência.  $in=159$ .

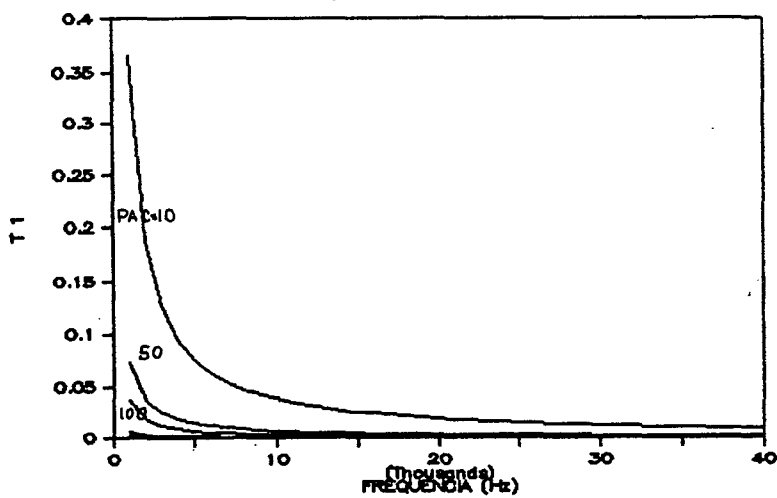


Fig. 4.26 - Tensões cisalhantes no contorno.  $in=159$ .

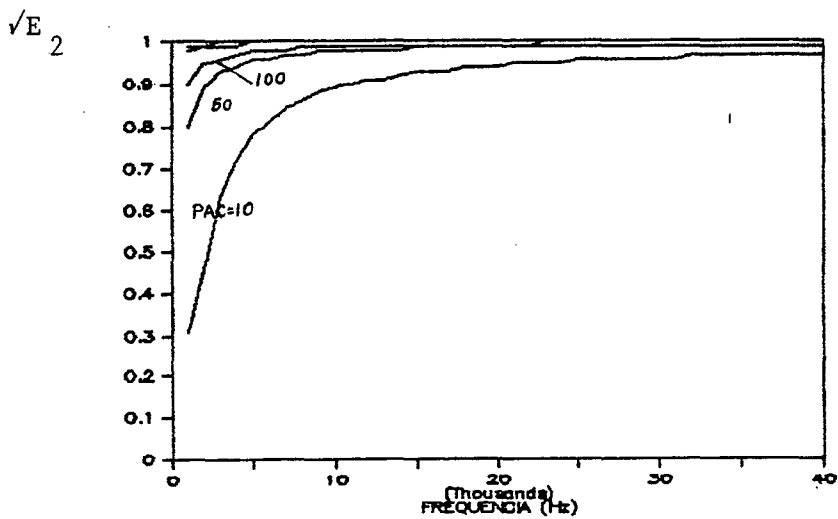


Fig. 4.27 - Onda SH refletida com amortecimento e  $in=709$ .

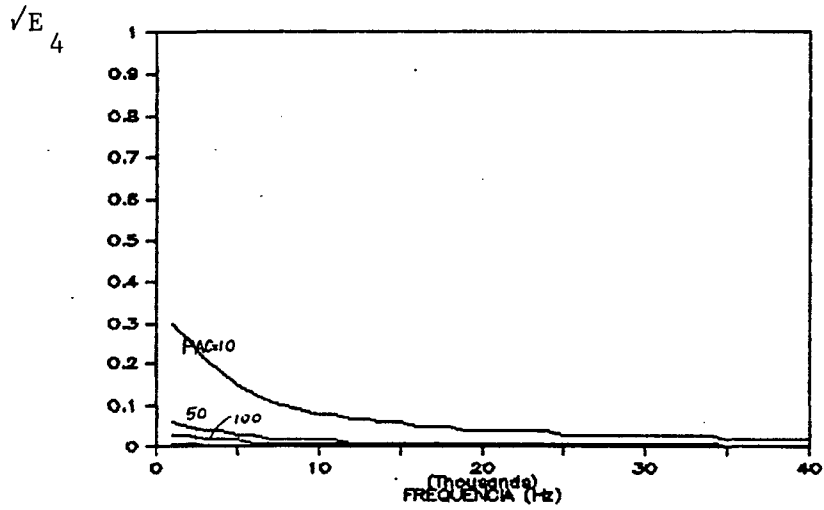


Fig. 4.28 - Coeficiente de transmissão para  $i_n=70^\circ$ .

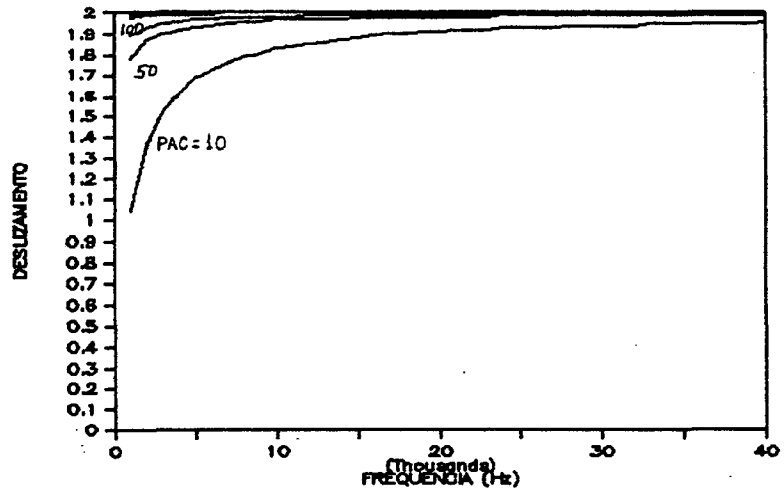


Fig. 4.29 - Deslizamento entre sólidos em função da frequência.  $i_n=70^\circ$ .

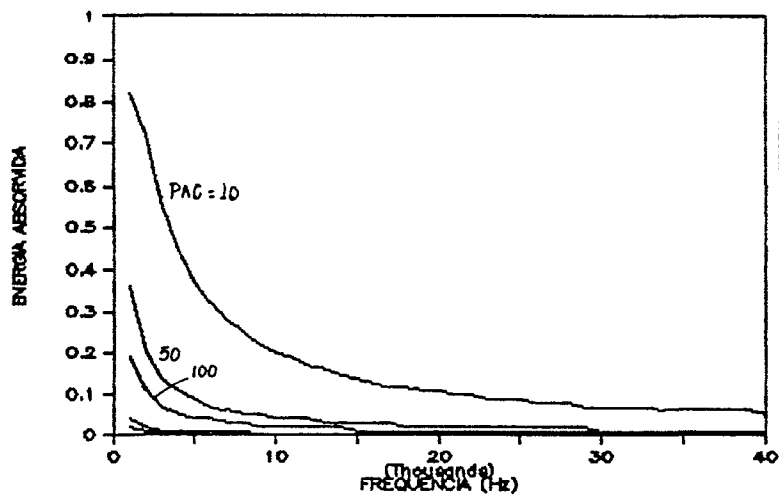


Fig. 4.30 - Energia absorvida para  $i_n=70^\circ$ .

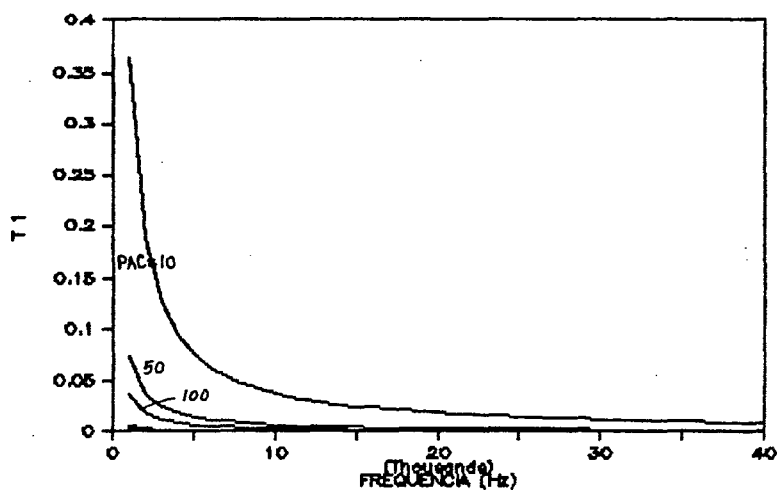


Fig. 4.31 - Tensões cisalhantes em função da frequência para  $\nu=70^\circ$ .

#### 4.6 - Comentários sobre o MLE

No presente capítulo o MLE foi desenvolvido considerando o amortecimento das ondas. A seguir foi aplicado na solução do modelo de atrito de Coulomb sendo então apresentados os resultados obtidos.

A solução analítica para este tipo de atrito foi apresentada por Miller [42] e sua comparação com o método aqui usado revela uma excelente concordância para pequenas e grandes amplitudes da onda incidente. A solução exata para ondas com amortecimento ainda não foi construída.

Outros modelos de atrito foram usados com o MLE [39] revelando a sua aplicabilidade.

A influência do coeficiente de Poisson não foi aqui analisada embora o seu aumento cause uma diminuição da dissipação de energia no contorno [43].

## CAPÍTULO 5

### O MÉTODO DA LINEARIZAÇÃO EQUIVALENTE - ONDAS SV E P COM AMORTECIMENTO

#### 5.1 - Introdução

Como já foi visto, ao incidir uma onda SV ou P em uma interface plana, quatro outras são geradas, o que implica que, para a determinação das amplitudes resultantes, quatro serão as condições de contorno.

Para a aplicação do MLE, uma quinta variável surge, a saber, a amplitude do deslizamento. A par destas incógnitas, também é conveniente tratar as mudanças de fase analítica e não numericamente originando, assim, um problema em que as amplitudes incógnitas e os ângulos de fase são em número de cinco.

Deste modo, a análise de ondas SV ou P é muito complicada, surgindo equações de difícil manuseio mas que, computacionalmente falando, revelam a possibilidade de resolver problemas não-lineares na área deste trabalho.

#### 5.2 - Ondas SV ou P com Amortecimento

Considere uma onda SV ou P harmônica atingindo uma interface, como no Capítulo 3 (veja também a Figura 3.1). Os potenciais de cada onda estão apresentados no Apêndice 2. A exemplo do capítulo anterior, as deduções que serão apresentadas consideram  $a, b, a'$  e  $b'$  apenas como números reais. Já  $L_1$  e  $L_2$  serão

aqui considerados como números complexos, o que é uma importante generalização. Esta consideração é que permite tratar modelos de atrito cujas integrais do MLE são complexas.

Quando se desejar analisar a reflexão total,  $a$ ,  $a'$  e  $b'$  poderão ser números imaginários, tornando as equações abaixo não representativas. A saída para este impasse consiste então em resolver computacionalmente o sistema (5.9) a seguir.

As condições de contorno deste problema são quatro, todas em  $z=0$  e  $x,t$  quaisquer:

$$w = w' \quad (5.1)$$

$$\sigma_{zz} = \sigma'_{zz} \quad (5.2)$$

$$\sigma_{xz} = \sigma'_{xz} \quad (5.3)$$

$$\sigma_{xz} = \tau \quad (5.4)$$

As três primeiras já foram desenvolvidas e apresentadas no Capítulo 3, através das expressões (3.7), (3.5) e (3.6).

O atrito pode ser expresso como em (4.1) (os índices  $r$  e  $c$  referem-se às partes reais e imaginárias de  $L_1$  e  $L_2$ ):

$$\tau = (L_{1r} + iL_{1c})\dot{d} + (L_{2r} + iL_{2c})\dot{d} \quad (5.5)$$

Alternativamente a (4.2), o deslizamento pode ser expresso por:

$$d = D e^{i(\omega t - kx - fd)} \quad (5.6)$$



Desta forma, (5.4) passa a ser

$$\begin{aligned} & \mu(m \operatorname{sen} in - ik)^2 e^{m \operatorname{sen} in x} \{2a(A_2 - A_1) - \\ & (b^2 - 1)(B_1 + B_2)\} e^{ik(ct-x)} = \{(L_{1r} + iL_{1c}) e^{-ifd} + \\ & (L_{2r} + iL_{2c}) i\omega e^{-ifd}\}_D e^{ik(ct-x)} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Como já foi exposto, cinco são as incógnitas e uma quinta equação se faz necessária. Esta é obtida da expressão do deslizamento:

$$\begin{aligned} d &= u' - u \quad |_{z=0} \\ d &= \{(m' \operatorname{sen} tp - ik) e^{m' \operatorname{sen} tp x} A_2 - (m' \operatorname{sen} ts - ik) \cdot \\ & b' e^{m' \operatorname{sen} ts x} B_2 - (m \operatorname{sen} rs - ik) b e^{m \operatorname{sen} rs x} B_1 \\ & + (m \operatorname{sen} rp - ik) e^{m \operatorname{sen} rp x} A_1 - (m \operatorname{sen} in - ik) \cdot \\ & e^{m \operatorname{sen} in x} (a, -b)(A_0, B_0)\} e^{ik(ct-x)} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Assim, com (3.7), (3.5), (3.6), (5.7) e (5.8), pode-se estabelecer um sistema de cinco equações do tipo:

$$\sum_{j=1}^5 M_{ij} X_j = V_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5 \quad (5.9)$$

onde ( $\alpha = \mu/\mu'$ ):

$$\begin{aligned} M_{11} &= a(m \operatorname{sen} rp - ik) e^{m \operatorname{sen} rp x} \\ M_{12} &= (m \operatorname{sen} rs - ik) e^{m \operatorname{sen} rs x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{13} &= a'(m' \text{ sen } tp - ik) e^{m' \text{ sen } tp} x \\
M_{14} &= -(m' \text{ sen } ts - ik) e^{m' \text{ sen } ts} x \\
M_{15} &= 0 \\
M_{21} &= \alpha(b^2 - 1)(m \text{ sen } rp - ik)^2 e^m \text{ sen } rp x \\
M_{22} &= 2\alpha b(m \text{ sen } rs - ik)^2 e^m \text{ sen } rs x \\
M_{23} &= -(b'^2 - 1)(m' \text{ sen } tp - ik)^2 e^{m'} \text{ sen } tp x \\
M_{24} &= 2b'(m' \text{ sen } ts - ik)^2 e^{m'} \text{ sen } ts x \\
M_{25} &= 0 \\
M_{31} &= 2\alpha a(m \text{ sen } rp - ik)^2 e^m \text{ sen } rp x \\
M_{32} &= -\alpha(b^2 - 1)(m \text{ sen } rs - ik)^2 e^m \text{ sen } rs x \\
M_{33} &= 2a'(m' \text{ sen } tp - ik)^2 e^{m'} \text{ sen } tp x \\
M_{34} &= (b'^2 - 1)(m' \text{ sen } ts - ik)^2 e^{m'} \text{ sen } ts x \quad (5.10) \\
M_{35} &= 0 \\
M_{41} &= 2\mu a(m \text{ sen } rp - ik)^2 e^m \text{ sen } rp x \\
M_{42} &= -\mu(b^2 - 1)(m \text{ sen } rs - ik)^2 e^m \text{ sen } rs x \\
M_{43} &= 0 \\
M_{44} &= 0 \\
M_{45} &= -\{(L_{1r} + iL_{1c}) + i\omega(L_{2r} + iL_{2c})\} \\
M_{51} &= (m \text{ sen } rp - ik) e^m \text{ sen } rp x \\
M_{52} &= -b(m \text{ sen } rs - ik) e^m \text{ sen } rs x \\
M_{53} &= -(m' \text{ sen } tp - ik) e^{m'} \text{ sen } tp x \\
M_{54} &= -b'(m' \text{ sen } ts - ik) e^{m'} \text{ sen } ts x \\
M_{55} &= 1
\end{aligned}$$

As incógnitas  $X_j$ ,  $j = 1, \dots, 5$  são definidas como:

$$X_1 = \frac{A_1}{A_{in}} = Y_1 (\cos frp + i \operatorname{sen} frp) \quad (5.11)$$

$$X_2 = \frac{B_1}{A_{in}} = Y_2 (\cos frs + i \operatorname{sen} frs) \quad (5.12)$$

$$X_3 = \frac{A_2}{A_{in}} = Y_3 (\cos ftp + i \operatorname{sen} ftp) \quad (5.13)$$

$$X_4 = \frac{B_2}{A_{in}} = Y_4 (\cos fts + i \operatorname{sen} fts) \quad (5.14)$$

$$X_5 = \frac{D e^{-ifd}}{A_{in}} = Y_5 (\cos fd - i \operatorname{sen} fd) \quad (5.15)$$

$A_{in}$  representa a amplitude da onda incidente, que pode ser  $P(A_{in} = A_0)$  ou  $SV(A_{in} = B_0)$ . O caso em que a onda incidente é simultaneamente P e SV não será tratado aqui.

$frp$ ,  $frs$ ,  $ftp$  e  $fts$  representam as eventuais mudanças de fase ocorridas no contorno, onde o índice  $f$  refere-se à fase,  $p$  à onda P,  $s$  à onda S,  $r$  ou  $t$  se a onda é a refletida ou a transmitida.

O vetor coluna deste sistema ( $V_i$ ,  $i=1, \dots, 5$ ) pode ser melhor apresentado na forma de uma expressão multiplicada por um par ordenado  $(x, y)$ , onde o primeiro elemento deste par é usado nas multiplicações quando a onda incidente for P, e o segundo é usado no caso de onda SV. Além disso, os sobre-índices P, SV que surgirão adiante referem-se também ao tipo de onda incidente (P ou SV). O vetor  $V_i$  é:

$$\begin{aligned}
V_1 &= (m \operatorname{sen} in - ik) e^m \operatorname{sen} in x \quad (a, -1) \\
V_2 &= \alpha(m \operatorname{sen} in - ik)^2 e^m \operatorname{sen} in x \quad (-b^2+1, 2b) \\
V_3 &= \alpha(m \operatorname{sen} in - ik)^2 e^m \operatorname{sen} in x \quad (2a, b^2-1) \quad (5.16) \\
V_4 &= \mu(m \operatorname{sen} in - ik)^2 e^m \operatorname{sen} in x \quad (2a, b^2-1) \\
V_5 &= -(m \operatorname{sen} in - ik) e^m \operatorname{sen} in x \quad (1, b)
\end{aligned}$$

Das três primeiras equações deste sistema é possível escrever  $X_2$ ,  $X_3$ ,  $X_4$  em função de  $X_1$ , do que resulta:

$$X_2 = C_{21} X_1 + C_{22}^{P,SV} \quad (5.17)$$

$$X_3 = C_{31} X_1 + C_{32}^{P,SV} \quad (5.18)$$

$$X_4 = C_{41} X_1 + C_{42}^{P,SV} \quad (5.19)$$

onde

$$\begin{aligned}
C_{41} &= \alpha \frac{e^{m \operatorname{sen} rp x}}{e^{m' \operatorname{sen} ts x}} \frac{m \operatorname{sen} rp - ik}{m' \operatorname{sen} ts - ik} \{a' [\alpha(b^2-1) \cdot \\
&\quad (m \operatorname{sen} rs - ik) + 2(m' \operatorname{sen} tp - ik)] \cdot \\
&\quad [2ab(m \operatorname{sen} rs - ik) - (b^2-1)(m \operatorname{sen} rp - ik)] \\
&\quad + a[-2(m \operatorname{sen} rp - ik) - (b^2-1)(m \operatorname{sen} rs - ik)] \cdot \\
&\quad [2\alpha a'b(m \operatorname{sen} rs - ik) + (b'^2-1)(m' \operatorname{sen} tp - ik)]\} \\
&\quad \div \{[-\alpha(b^2-1)(m \operatorname{sen} rs - ik) + (b'^2-1)(m' \operatorname{sen} ts - ik)] \cdot \\
&\quad [2\alpha a'b(m \operatorname{sen} rs - ik) + (b'^2-1)(m' \operatorname{sen} tp - ik)] \\
&\quad + 2a'[2(m' \operatorname{sen} tp - ik) + \alpha(b^2-1)(m \operatorname{sen} rs - ik)] \cdot \\
&\quad [ab(m \operatorname{sen} rs - ik) + b'(m' \operatorname{sen} ts - ik)]\} \quad (5.20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{42}^P &= \alpha \frac{e^{m \text{ sen in } x}}{e^{m' \text{ sents } x}} \frac{m \text{ sen in } - ik}{m' \text{ sen ts } - ik} \{ a [ 2(m \text{ sen in } - ik) \\
&+ (b^2 - 1)(m \text{ sen rs } - ik) ] [ 2\alpha a' b(m \text{ sen rs } - ik) \\
&+ (b'^2 - 1)(m' \text{ sen tp } - ik) ] + \alpha a' [ \alpha (b^2 - 1) \\
&(m \text{ sen rs } - ik) + 2(m' \text{ sen tp } - ik) ] \\
&[ -(b^2 - 1)(m \text{ sen in } - ik) - 2ab(m \text{ sen rs } - ik) ] \} \\
&\div \{ [ -\alpha (b^2 - 1)(m \text{ sen rs } - ik) + (b'^2 - 1) \\
&(m' \text{ sen ts } - ik) ] [ 2\alpha a' b(m \text{ sen rs } - ik) + (b'^2 - 1) \\
&(m' \text{ sen tp } - ik) ] + 2a' [ \alpha (b^2 - 1)(m \text{ sen rs } - ik) \\
&+ 2(m' \text{ sen tp } - ik) ] [ \alpha b(m \text{ sen rs } - ik) \\
&+ b'(m' \text{ sen ts } - ik) ] \} \quad (5.21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{42}^{SV} &= \alpha \frac{e^{m \text{ sen in } x}}{e^{m' \text{ sents } x}} \frac{m \text{ sen in } - ik}{m' \text{ sen ts } - ik} \{ 4\alpha a' b [ \alpha (b^2 - 1) \\
&(m \text{ sen rs } - ik) + 2(m' \text{ sen tp } - ik) ] [ m \text{ sen in } - ik ] \} \\
&\div \{ [ -\alpha (b^2 - 1)(m \text{ sen rs } - ik) + (b'^2 - 1)(m' \text{ sen ts } - ik) ] \\
&[ 2\alpha a' b(m \text{ sen rs } - ik) + (b'^2 - 1)(m' \text{ sen tp } - ik) ] \\
&+ 2a' [ \alpha (b^2 - 1)(m \text{ sen rs } - ik) + 2(m' \text{ sen tp } - ik) ] \\
&[ \alpha b(m \text{ sen rs } - ik) + b'(m' \text{ sen ts } - ik) ] \} \quad (5.22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{31} &= \{ \alpha (m \text{ sen rp } - ik) e^{m \text{ sen rp } x} [ 2ab(m \text{ sen rs } - ik) \\
&- (b^2 - 1)(m \text{ sen rp } - ik) ] - 2(m' \text{ sents } - ik) e^{m' \text{ sents } x} \\
&[ \alpha b(m \text{ sen rs } - ik) + b'(m' \text{ sen ts } - ik) ] C_{41} \} \\
&\div \{ -(m' \text{ sen tp } - ik) e^{m' \text{ sen tp } x} [ 2\alpha a' b(m \text{ sen rs } - ik) \\
&+ (b'^2 - 1)(m' \text{ sen tp } - ik) ] \} \quad (5.23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{32}^P &= \{ \alpha(m \text{ sen in} - ik) e^{m \text{ sen in } x} [-(m \text{ sen in} - ik) \cdot \\
&\quad (b^2 - 1) - 2ab(m \text{ sen rs} - ik)] \\
&\quad - 2(m' \text{ sent s} - ik) e^{m' \text{ sent s } x} [\alpha b(m \text{ sen rs} - ik) \\
&\quad + b'(m' \text{ sent s} - ik)] C_{42}^P \} \\
&\div \{ -(m' \text{ sen tp} - ik) e^{m' \text{ sen tp } x} [2\alpha a'b(m \text{ sen rs} - ik) \\
&\quad + (b'^2 - 1)(m' \text{ sen tp} - ik)] \} \quad (5.24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{32}^{SV} &= \{ 4\alpha b(m \text{ sen in} - ik) e^{m \text{ sen in } x} (m \text{ sen in} - ik) \\
&\quad - 2(m' \text{ sent s} - ik) e^{m' \text{ sent s } x} [\alpha b(m \text{ sen rs} - ik) \\
&\quad + b'(m' \text{ sent s} - ik)] C_{42}^{SV} \} \\
&\div \{ -(m' \text{ sen tp} - ik) e^{m' \text{ sen tp } x} [2\alpha a'b \cdot \\
&\quad (m \text{ sen rs} - ik) + (b'^2 - 1)(m' \text{ sen tp} - ik)] \} \quad (5.25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{21} &= \{ (m' \text{ sent s} - ik) e^{m' \text{ sent s } x} C_{41} \\
&\quad - a'(m' \text{ sen tp} - ik) e^{m' \text{ sen tp } x} C_{31} \\
&\quad - a(m \text{ sen rp} - ik) e^{m \text{ sen rp } x} \} \\
&\div \{ (m \text{ sen rs} - ik) e^{m \text{ sen rs } x} \} \quad (5.26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{22}^P &= \{ (m \text{ sen in} - ik) e^{m \text{ sen in } x} a + (m' \text{ sent s} - ik) \cdot \\
&\quad e^{m' \text{ sent s } x} C_{42}^P - a'(m' \text{ sen tp} - ik) e^{m' \text{ sen tp } x} \cdot \\
&\quad C_{32}^P \} \div \{ (m \text{ sen rs} - ik) e^{m \text{ sen rs } x} \} \quad (5.27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{22}^{SV} &= \{ -(m \text{ sen in} - ik) e^{m \text{ sen in } x} + (m' \text{ sent s} - ik) \cdot \\
&\quad e^{m' \text{ sent s } x} C_{42}^{SV} - a'(m' \text{ sen tp} - ik) \cdot \\
&\quad e^{m' \text{ sen tp } x} C_{32}^{SV} \} \div \{ (m \text{ sen rs} - ik) e^{m \text{ sen rs } x} \} \quad (5.28)
\end{aligned}$$

Da condição de contorno  $\sigma_{xz} = \tau$  (quarta equação do siste-

ma) e com o uso de (5.17) é possível obter uma equação onde as incógnitas  $X_1$  e  $X_5$  são substituídas por suas expressões complexas (5.11) e (5.15). Com isso compara-se as partes reais e imaginárias do que resulta duas equações dadas por:

$$Y_1 \cos frp = \frac{N_1 N_3 + N_2 N_4}{N_3^2 + N_4^2} \quad (5.29)$$

$$Y_1 \operatorname{sen} frp = \frac{N_2 N_3 - N_1 N_4}{N_3^2 + N_4^2} \quad (5.30)$$

onde:

$$\begin{aligned} N_1 = & m^2 \mu \left[ e^m \operatorname{sen} in \times (2a, b^2 - 1) \operatorname{sen}^2 in + e^m \operatorname{sen} rs \times \right. \\ & \left. (b^2 - 1) C_{22}^{P,SV} \operatorname{sen}^2 rs \right] - \mu k^2 \left[ e^m \operatorname{sen} in \times (2a, b^2 - 1) \right. \\ & \left. + e^m \operatorname{sen} rs \times (b^2 - 1) C_{22}^{P,SV} \right] - [(L_{1r} - \omega L_{2c}) \cos fd \\ & + (L_{1c} + \omega L_{2r}) \operatorname{sen} fd] Y_5 \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} N_2 = & -2\mu km \left[ e^m \operatorname{sen} in \times \operatorname{sen} in (2a, b^2 - 1) + e^m \operatorname{sen} rs \times \right. \\ & \left. (b^2 - 1) \operatorname{sen} rs C_{22}^{P,SV} \right] + [(L_{1c} + \omega L_{2r}) \cos fd \\ & - (L_{1r} - \omega L_{2c}) \operatorname{sen} fd] Y_5 \end{aligned} \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned} N_3 = & \mu m^2 \left[ e^m \operatorname{sen} rp \times 2a \operatorname{sen}^2 rp - e^m \operatorname{sen} rs \times \right. \\ & \left. (b^2 - 1) \operatorname{sen}^2 rs C_{21} \right] - \mu k^2 \left[ 2ae^m \operatorname{sen} rp \times \right. \\ & \left. - (b^2 - 1)e^m \operatorname{sen} rs \times C_{21} \right] \end{aligned} \quad (5.33)$$

$$\begin{aligned} N_4 = & 2\mu mk \left[ -2a \operatorname{sen} rp e^m \operatorname{sen} rp \times + (b^2 - 1) C_{21} \operatorname{sen} rs \cdot \right. \\ & \left. e^m \operatorname{sen} rs \times \right] \end{aligned} \quad (5.34)$$

Da última equação do sistema é possível realizar a mesma operação acima descrita do que resulta:

$$Y_1 \cos frp = \frac{N_5 N_7 + N_6 N_8}{N_7^2 + N_8^2} \quad (5.35)$$

$$Y_1 \sen frp = \frac{N_6 N_7 - N_5 N_8}{N_7^2 + N_8^2} \quad (5.36)$$

onde:

$$\begin{aligned} N_5 = & m [e^m \sen rs \times \cos rs C_{22}^{P,SV} - e^m \sen in \times \sen in (1,b)] \\ & + m' [e^{m'} \sen tp \times \sen tp C_{32}^{P,SV} + e^{m'} \sen ts \times \\ & \cos ts C_{42}^{P,SV}] - Y_5 \cos fd \end{aligned} \quad (5.37)$$

$$\begin{aligned} N_6 = & k [e^m \sen in \times (1,b) - e^m \sen rs \times_b C_{22}^{P,SV} \\ & - e^{m'} \sen tp \times C_{32}^{P,SV} - e^{m'} \sen ts \times_b C_{42}^{P,SV}] \\ & + Y_5 \sen fd \end{aligned} \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned} N_7 = & m [e^m \sen rp \times \sen rp - e^m \sen rs \times C_{21} \cos rs] \\ & - m' [e^{m'} \sen tp \times \sen tp C_{31} + e^{m'} \sen ts \times \cos ts C_{41}] \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$\begin{aligned} N_8 = & k [-e^m \sen rp \times + e^m \sen rs \times_b C_{21} + e^{m'} \sen tp \times \\ & C_{31} + e^{m'} \sen ts \times_b C_{41}] \end{aligned} \quad (5.40)$$

Pode-se agora obter  $Y_1$  e  $frp$  em função de  $Y_5$  e  $fd$ , ele-



vando-se ao quadrado as expressões (5.35) e (5.36) e dividindo-se (5.36) por (5.35) do que resulta

$$Y_1 = \sqrt{\frac{N_5^2 + N_6^2}{N_7^2 + N_8^2}} \quad e \quad (5.41)$$

$$\text{frp} = \text{tg}^{-1} \left( \frac{N_6 N_7 - N_5 N_8}{N_5 N_7 + N_6 N_8} \right) \quad (5.42)$$

Igualando-se (5.29) com (5.35) e (5.30) com (5.36) obtêm-se as equações:

$$N_9 Y_5 \cos fd + N_{10} Y_5 \sin fd = N_{11} + N_{12} \quad e \quad (5.43)$$

$$- N_{10} Y_5 \cos fd + N_9 Y_5 \sin fd = N_{13} + N_{14} \quad (5.44)$$

onde

$$N_9 = \frac{(L_{1r} - \omega L_{2c}) N_3 + (L_{1c} + \omega L_{2r}) N_4}{N_3^2 + N_4^2} - \frac{N_7}{N_7^2 + N_8^2} \quad (5.45)$$

$$N_{10} = \frac{(L_{1c} + \omega L_{2r}) N_3 - (L_{1r} - \omega L_{2c}) N_4}{N_3^2 + N_4^2} + \frac{N_8}{N_7^2 + N_8^2} \quad (5.46)$$

$$\begin{aligned} N_{11} = & \{-\mu e^m \sin in \ x \ (2a, b^2 - 1) [N_3 (m^2 \sin^2 in - k^2) \\ & - N_4 \ 2k \ m \ \sin in] - \mu e^m \sin rs \ x \ (b^2 - 1) C_{22}^{P, SV} \cdot \\ & [N_3 (m^2 \sin^2 rs - k^2) - N_4 \ 2k \ m \ \sin rs] \} \\ & \div \{N_3^2 + N_4^2\} \end{aligned} \quad (5.47)$$

$$\begin{aligned}
N_{12} = & \{ (1, b) e^m \text{ sen in } x \cdot (-N_7 m \text{ sen in } + N_8 k) \\
& + b e^m \text{ sen rs } x \cdot C_{22}^{P,SV} (N_7 m \text{ sen rs } - N_8 k) \\
& + e^{m'} \text{ sen tp } x \cdot C_{32}^{P,SV} (N_7 m' \text{ sen tp } - N_8 k) \\
& + e^{m'} \text{ sen ts } x \cdot b' C_{42}^{P,SV} (N_7 m' \text{ sen ts } - N_8 k) \} \\
& \div \{ N_7^2 + N_8^2 \}
\end{aligned} \tag{5.48}$$

$$\begin{aligned}
N_{13} = & \{ -e^m \text{ sen in } x \cdot (1, b) (N_7 k + N_8 m \text{ sen in}) \\
& + e^m \text{ sen rs } x \cdot b C_{22}^{P,SV} (N_7 k + N_8 m \text{ sen rs}) \\
& + e^{m'} \text{ sen tp } x \cdot C_{32}^{P,SV} (N_7 k + N_8 m' \text{ sen tp}) \\
& + e^{m'} \text{ sen ts } x \cdot b' C_{42}^{P,SV} (N_7 k + N_8 m' \text{ sen ts}) \} \\
& \div \{ N_7^2 + N_8^2 \}
\end{aligned} \tag{5.49}$$

$$\begin{aligned}
N_{14} = & \{ -\mu e^m \text{ sen in } x \cdot (2a, b^2 - 1) [2k m \text{ sen in } N_3 \\
& + (m^2 \text{ sen}^2 \text{ in } - k^2) N_4] + \mu e^m \text{ sen rs } x \cdot (b^2 - 1) \cdot \\
& C_{22}^{P,SV} [-2k m \text{ sen rs } N_3 - (m^2 \text{ sen}^2 \text{ rs } - k^2) N_4] \} \\
& \div \{ N_3^2 + N_4^2 \}
\end{aligned} \tag{5.50}$$

De (5.43) e (5.44) é possível obter as expressões para a amplitude e fase do deslizamento, que resultam:

$$Y_5^2 = \frac{(N_{11} + N_{12})^2 + (N_{13} + N_{14})^2}{N_9^2 + N_{10}^2} \tag{5.51}$$

$$fd = \text{tg}^{-1} \left( \frac{N_9 (N_{13} + N_{14}) + N_{10} (N_{11} + N_{12})}{N_9 (N_{11} + N_{12}) - N_{10} (N_{13} + N_{14})} \right) \tag{5.52}$$

A equação (5.51) é a que governa o deslizamento e não é uma equação do 2º grau pois depende diretamente de  $L_1$  e  $L_2$  que podem ser complicadas expressões, de acordo com o modelo de atrito considerado. Para casos especiais é possível uma solução analítica desta equação [39] embora, muitas vezes, a solução numérica seja a mais indicada.

As outras incógnitas do sistema de equações são resolvidas ao serem substituídas as expressões complexas para as incógnitas nas equações (5.17), (5.18) e (5.19). Após alguns algebrismos obtêm-se:

$$Y_2^2 = [C_{21}Y_1 \cos frp + C_{22}^{P,SV}]^2 + [C_{21}Y_1 \operatorname{sen} frp]^2 \quad (5.53)$$

$$frs = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{C_{21}Y_1 \operatorname{sen} frp}{C_{21}Y_1 \cos frp + C_{22}^{P,SV}} \right) \quad (5.54)$$

$$Y_3^2 = [C_{31}Y_1 \cos frp + C_{32}^{P,SV}]^2 + [C_{31}Y_1 \operatorname{sen} frp]^2 \quad (5.55)$$

$$ftp = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{C_{31}Y_1 \operatorname{sen} frp}{C_{31}Y_1 \cos frp + C_{32}^{P,SV}} \right) \quad (5.56)$$

$$Y_4^2 = [C_{41}Y_1 \cos frp + C_{42}^{P,SV}]^2 + [C_{41}Y_1 \operatorname{sen} frp]^2 \quad (5.57)$$

$$fts = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{C_{41}Y_1 \operatorname{sen} frp}{C_{41}Y_1 \cos frp + C_{42}^{P,SV}} \right) \quad (5.58)$$

Pode-se mostrar que todas as equações acima apresenta-

das coincidem com as de Hoi Tran [58] quando o amortecimento é nulo. Além disso quando é nulo o amortecimento e  $Y_5 = fd = 0$  pode-se também mostrar que as incógnitas  $X_i$ ,  $i=1, \dots, 4$  coincidem com a solução analítica exata do problema de uma onda P ou SV incidindo num contorno cujos sólidos estão em contato perfeito. Tal solução pode ser encontrada em [21].

### 5.3 - Resultados Gráficos para Atrito de Coulomb

Dada a dificuldade de manuseio das expressões anteriores, foram desenvolvidos procedimentos numéricos que facilitam a análise da influência de vários fatores, tais como: o tipo de onda incidente, ângulo de incidência, amortecimento e frequência.

A maneira como os resultados serão apresentados difere da de outros autores [43], [58] pois apresenta-os separadamente, em função do ângulo de incidência e da frequência.

Nos resultados obtidos considera-se a reflexão total para amortecimento nulo. Isto só é possível graças à solução numérica do sistema (5.9), quando então é simples considerar  $a$ ,  $a'$  e/ou  $b'$  como números complexos. Esta é a primeira vez em que a reflexão total é tratada pelo MLE representando uma importante generalização. Quando esta não ocorre, a solução (5.41), (5.42) e (5.51) a (5.58) pode ser diretamente usada.

A solução analítica do problema de atrito de Coulomb para onda P ou SV incidente ainda não foi obtida. Os resultados originados da comparação entre o MLE e a solução exata, para onda SH e atrito de Coulomb [42], reforçam a possibilidade deste método oferecer bons resultados para ondas P e/ou SV.

Os gráficos a seguir podem ser divididos em dois grandes grupos relacionados ao tipo de onda incidente SV ou P. A cada um destes conjuntos as variáveis do problema podem ser expressas ou em função do ângulo de incidência ou em função da frequência, isto tudo com ou sem amortecimento e com ou sem reflexão total. As constantes que não se alteram na discussão a seguir são  $v=v' = 0.3$ ,  $c_2 = 3000$  m/s e  $\mu/\mu' = 1.0$ . Os resultados são válidos no ponto (0,0) e os valores dos PAC's, associados às várias curvas, são 10, 50, 100, 500 e 1000.

### 5.3.1 - Onda SV sem Amortecimento e com Reflexão Total

Os gráficos a seguir referem-se a uma onda SV incidente cujos sólidos em contato apresentam uma razão de velocidades  $c_2/c_2' = 0.9$ , o que garante a reflexão total das ondas P e SV. O amortecimento é nulo. O sistema de equações é dependente da frequência, contrariamente ao modelo de Atrito Viscoso Linear função do deslizamento. Nos gráficos a seguir  $\omega = 3$  KHz.

As Figuras 5.1 a 5.4 apresentam o comportamento das várias ondas. Estas deixam de existir a partir de certos ângulos de incidência, relacionados aos ângulos críticos. Como no Capítulo 3, observa-se que, para um certo ângulo de incidência toda a energia incidente se transmite ao meio II *independentemente* do grau de aderência dos pares. Este ângulo é diferente de  $0^\circ$  pois, para a incidência normal, o deslizamento é máximo, dificultando a transmissão.

As energias normalizada e absorvida e o deslizamento, Figuras 5.5, 5.6 e 5.7, apresentam peculiaridades nos pontos onde ocorrem as reflexões totais e a transmissão máxima. Ressalta-se os picos importantes de deslizamento. As tensões no contorno e o des

locamento normal são mostrados nas Figuras 5,8, 5.9 e 5.10. Observa-se que existe um ponto de tensão cisalhante zero associado diretamente ao deslizamento também nulo. Neste ponto as tensões e deslocamentos normais são máximos e é aí que ocorre a transmissibilidade independente do PAC.

Existe uma semelhança qualitativa, já esperada, entre as curvas dos dois modelos de atrito estudados. Isto deve acontecer pelo menos no caso limite em que os sólidos estão em perfeito contato ( $\Psi=1$  e  $PAC=0$ ) já que, neste caso, o MLE recai na solução analítica.

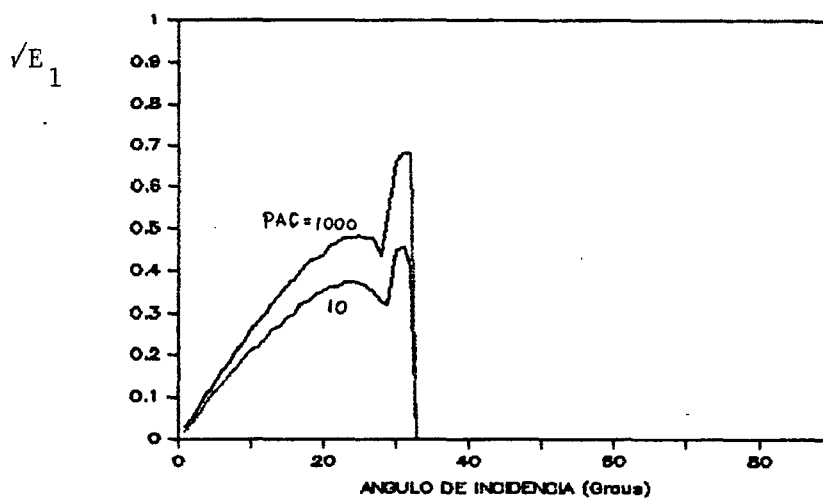


Fig. 5.1 - Onda P refletida sem amortecimento.  $\omega = 3$  KHz.

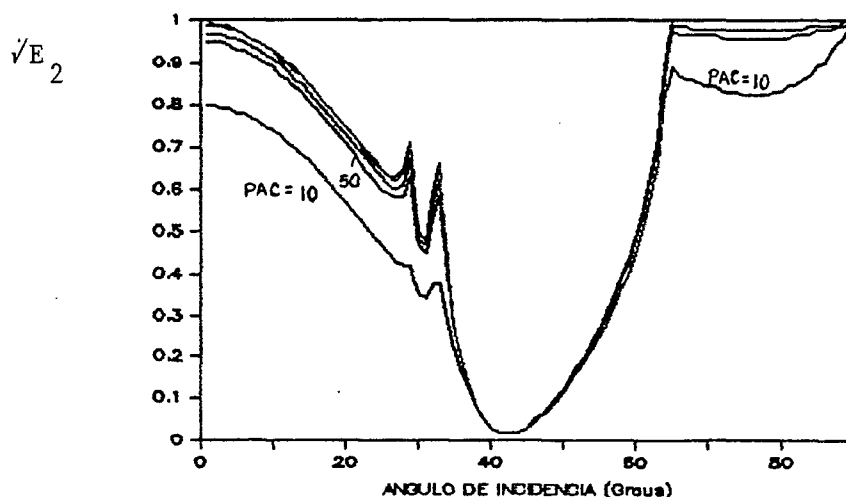


Fig. 5.2 - Onda SV refletida. Para  $\text{in}=64.16^\circ$  toda a onda incidente é refletida.

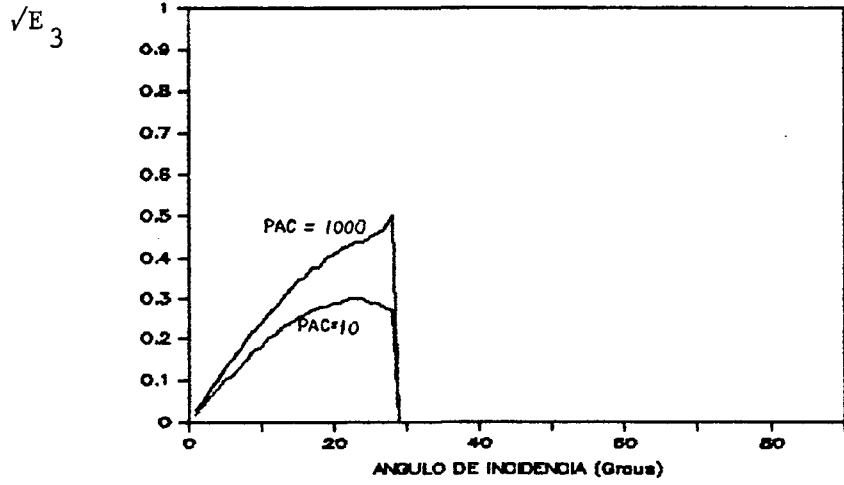


Fig. 5.3 - Onda P transmitida sem amortecimento.

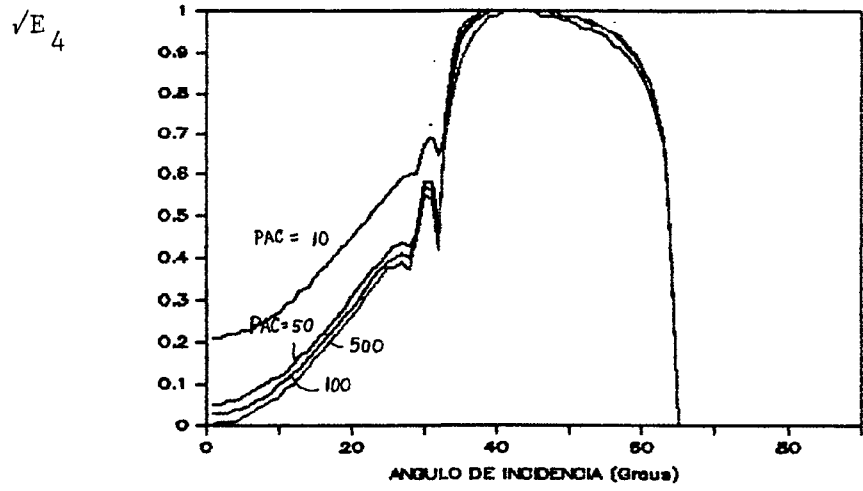


Fig. 5.4 - Onda SV transmitida. Incidência normal não garante a transmissibilidade máxima.

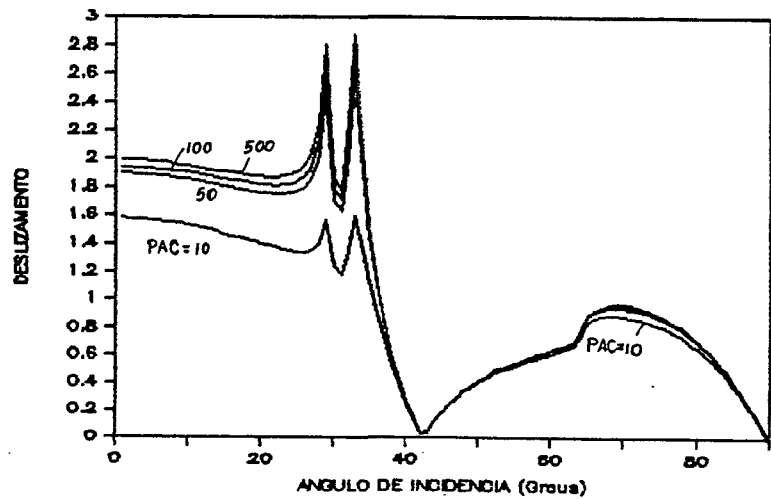


Fig. 5.5 - Deslizamento na interface para vários graus de aderência.

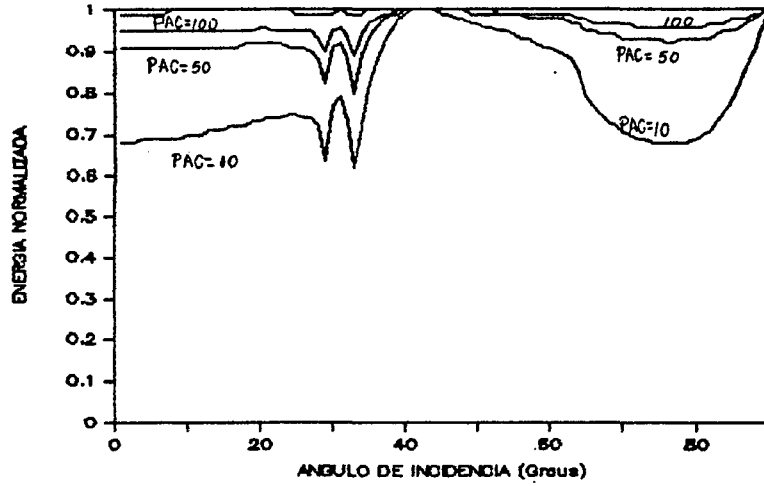


Fig. 5.6 - Energia normalizada.

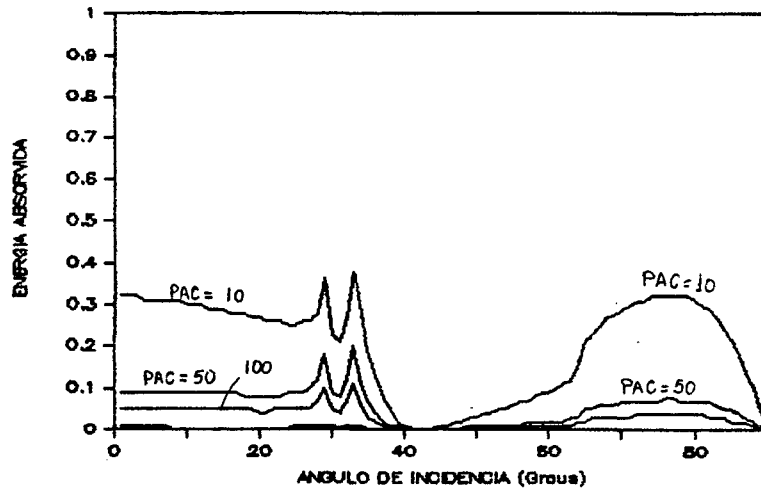


Fig. 5.7 - Energia absorvida.

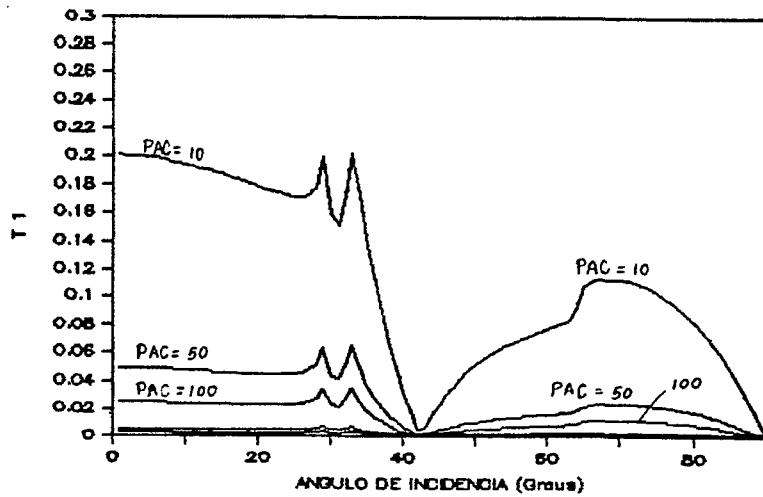


Fig. 5.8 - Tensões cisalhantes no contorno.



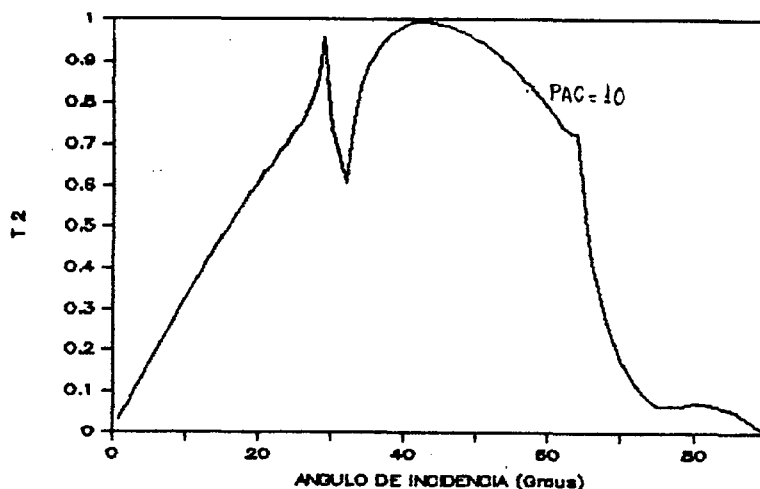


Fig. 5.9 - Tensões normais. Observe o ponto de máximo.

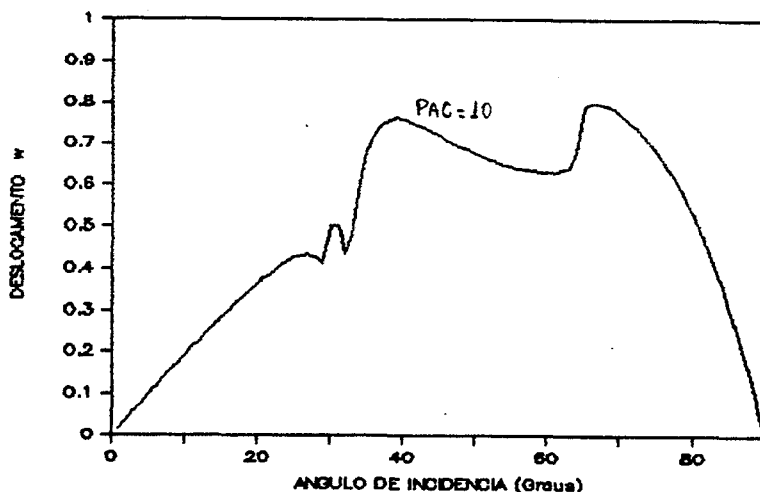


Fig. 5.10 - Deslocamento normal para  $m=m' = 0$  e  $\omega = 3$  KHz.

### 5.3.2 - Onda SV com Amortecimento e sem Reflexão Total

A seguir o amortecimento é considerado ( $m = 0.01$  Np/m e  $m' = 0.1$  Np/m) o que implica que deva ocorrer apenas potenciais de onda periódicas para que a formulação aqui desenvolvida continue válida. Para tanto a razão de velocidade escolhida foi de  $c_2/c_2' = 1.1$  e o ângulo de incidência da onda não deve exceder os  $30^\circ$ . A frequência adotada vale  $\omega = 3$  KHz.

O comportamento do fenômeno está descrito pelas Figuras 5.11 a 5.16.

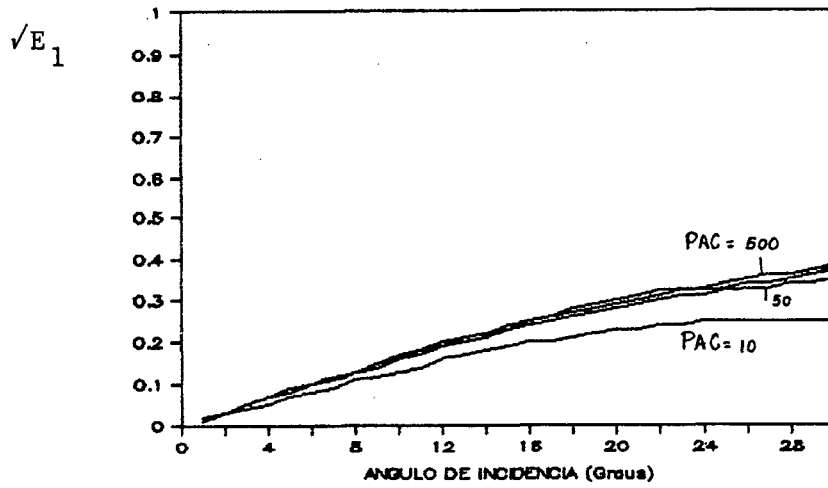


Fig. 5.11 - Onda refletida P com amortecimento.

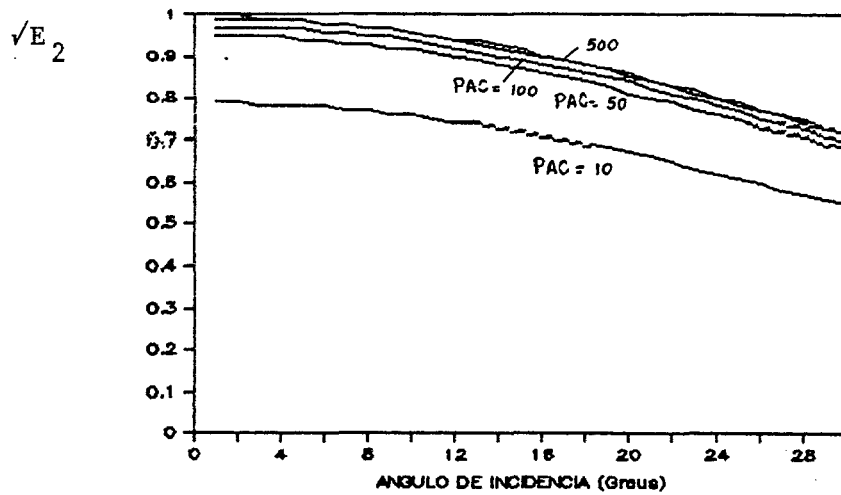


Fig. 5.12 - Onda refletida SV para  $\omega = 3 \text{ Khz}$  e  $\frac{c_2}{c_2'} = 1.1$ .

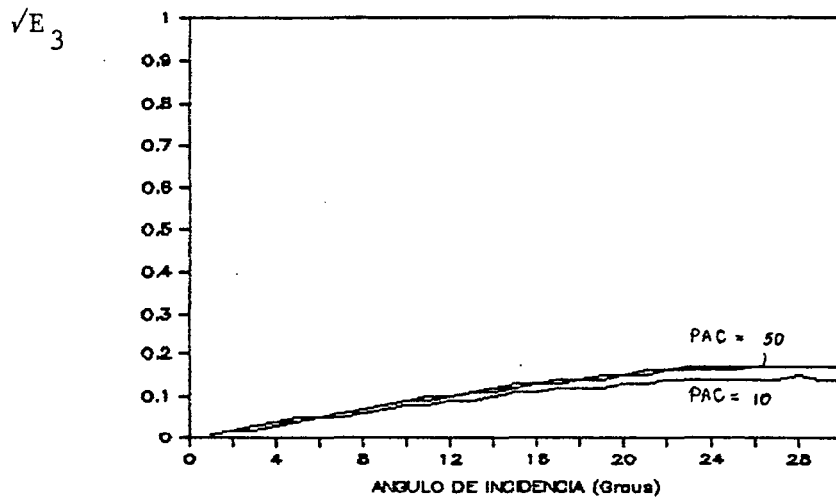


Fig. 5.13 - Onda transmitida P.

$\sqrt{E_4}$

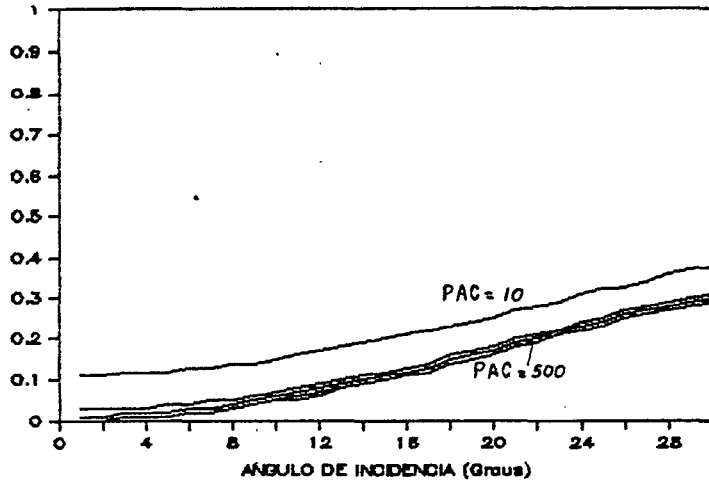


Fig. 5.14 - Onda transmitida SV.

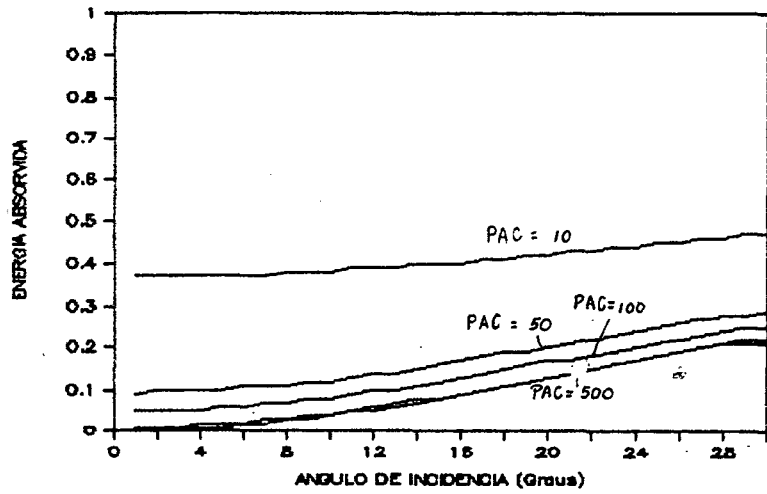


Fig. 5.15 - Energia absorvida pela fricção do contorno.

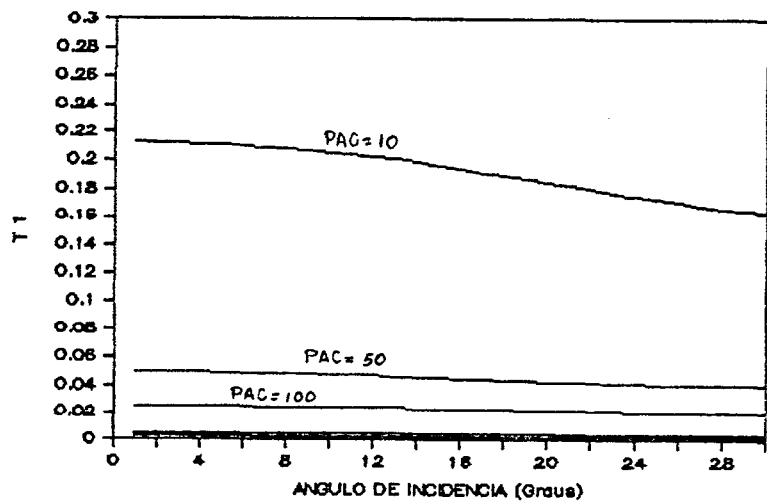


Fig. 5.16 - Tensões cisalhantes para os vários PAC's.

### 5.3.3 - Onda SV com e sem Amortecimento -

#### A Freqüência como uma Variável do Problema

A influência da freqüência será avaliada pelos gráficos a seguir ( $c_2/c_2' = 1.1$ ).

A primeira seqüência de figuras é válida para um ângulo de incidência de  $10^\circ$  e sem amortecimento. As Figuras 5.17 a 5.20 mostram as razões de energias, onde se percebe uma diminuição do poder de penetração das ondas. As tensões cisalhantes, Figura 5.21, decaem com a freqüência permitindo um aumento do deslizamento, Figura 5.22, paralelamente a uma diminuição da absorção de energia pelo contorno, Figura 5.23.

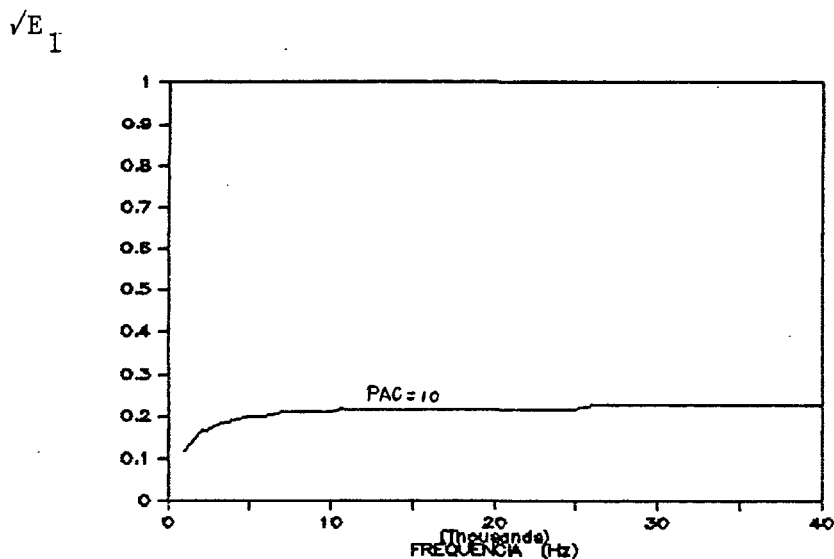


Fig. 5.17 - Onda P refletida sem amortecimento.  $i_n=10^\circ$ .

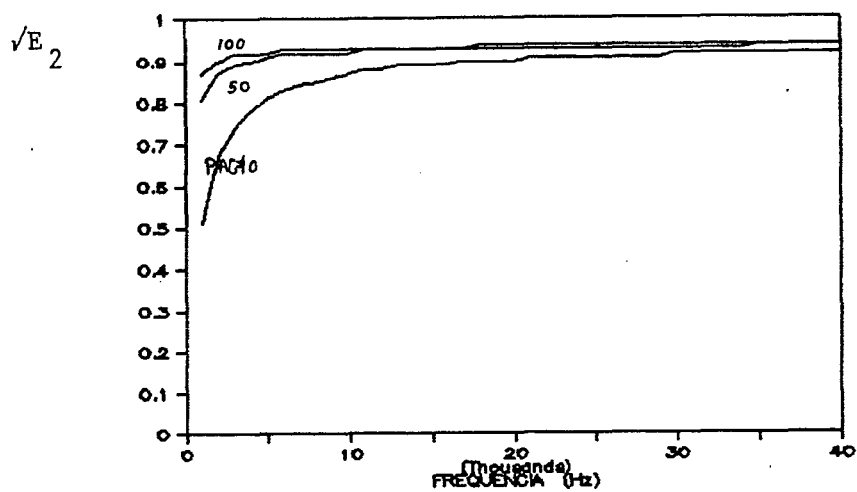


Fig. 5.18 - Onda SV refletida aumentando com a frequência.

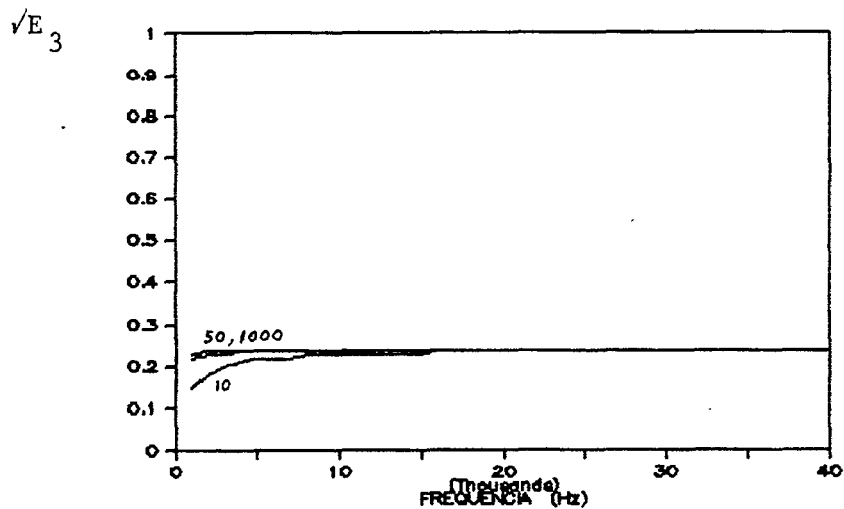


Fig. 5.19 - Onda P transmitida.  $i_n=10^\circ$ .

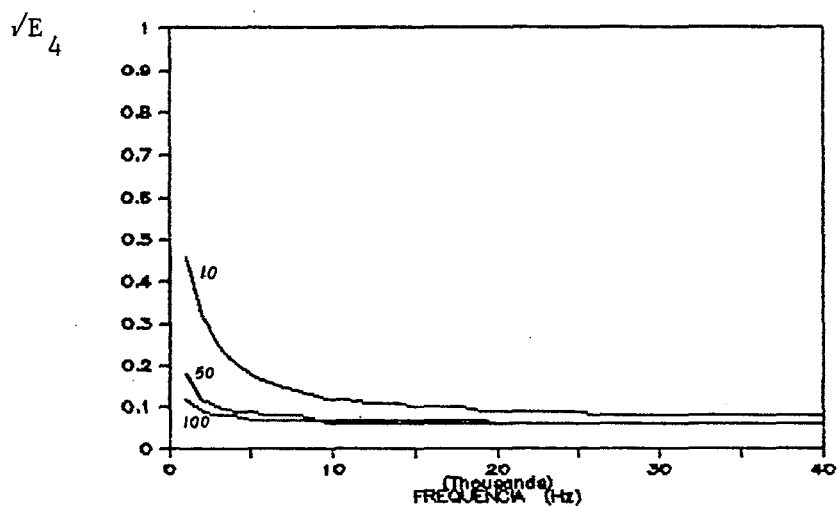


Fig. 5.20 - Onda SV transmitida diminuindo com o aumento do PAC.

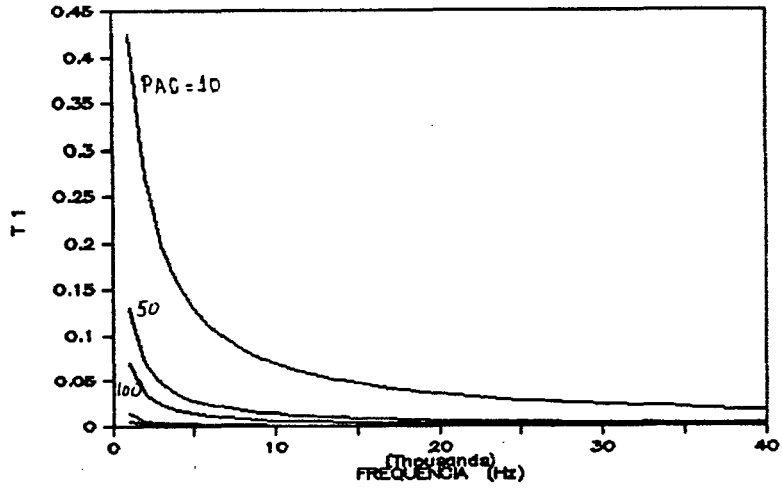


Fig. 5.21 - Tensões cisalhantes decaindo com PAC.

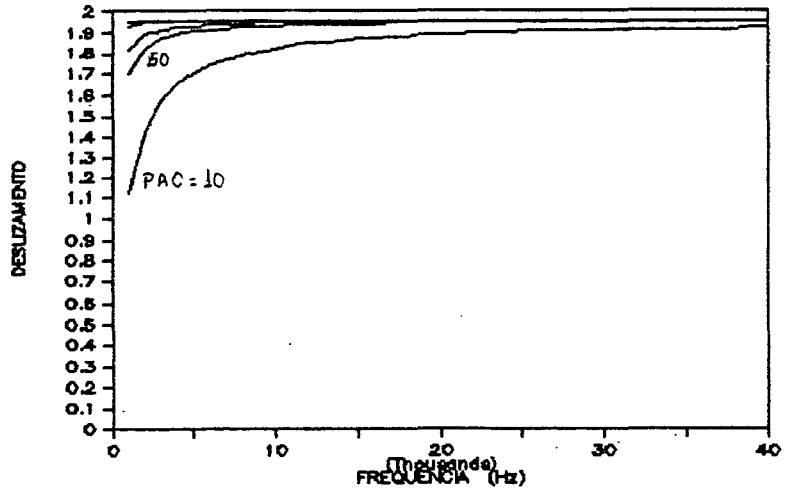


Fig. 5.22 - O deslizamento aumenta com a frequência.

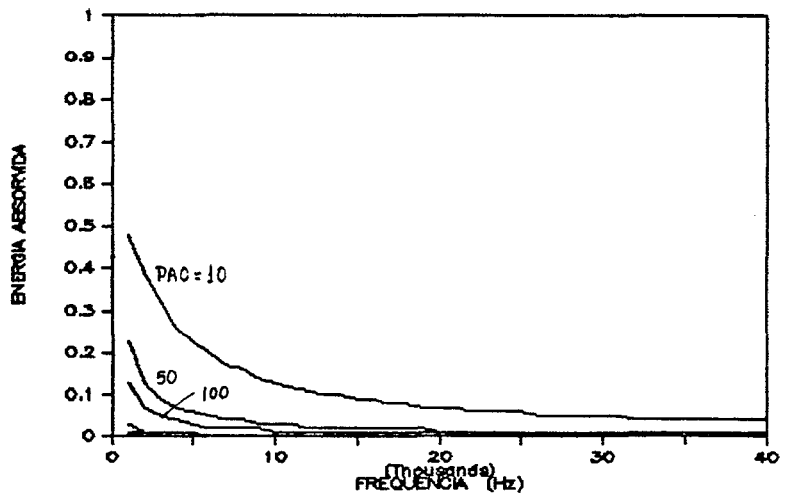


Fig. 5.23 - Energia absorvida para  $m=m' = 0$  e  $i_n=10^\circ$ .

A consideração do amortecimento ( $m=0.01$  Np/m e  $m'=0.1$  Np/m) altera a descrição quantitativa do fenômeno, conforme as Figuras 5.24 a 5.29 apresentam. O ângulo de incidência continua sendo de  $10^\circ$ . É observado um aumento da energia transmitida P.

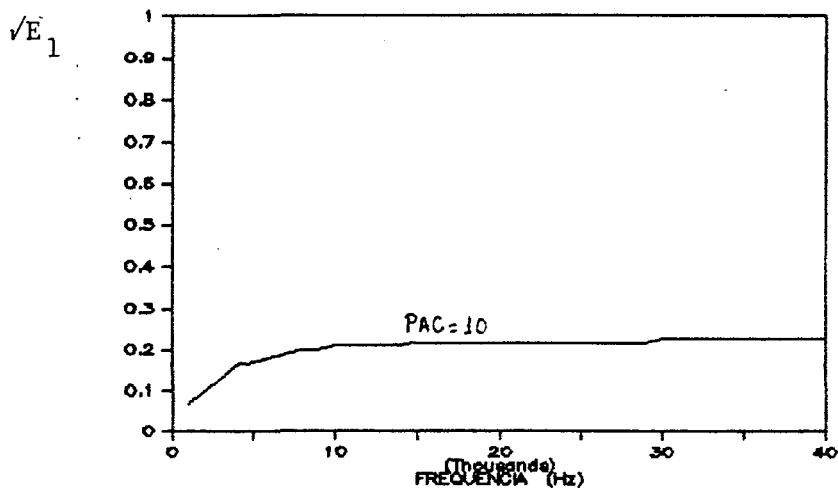


Fig. 5.24 - Onda P refletida com amortecimento.  $i_n=10^\circ$ .

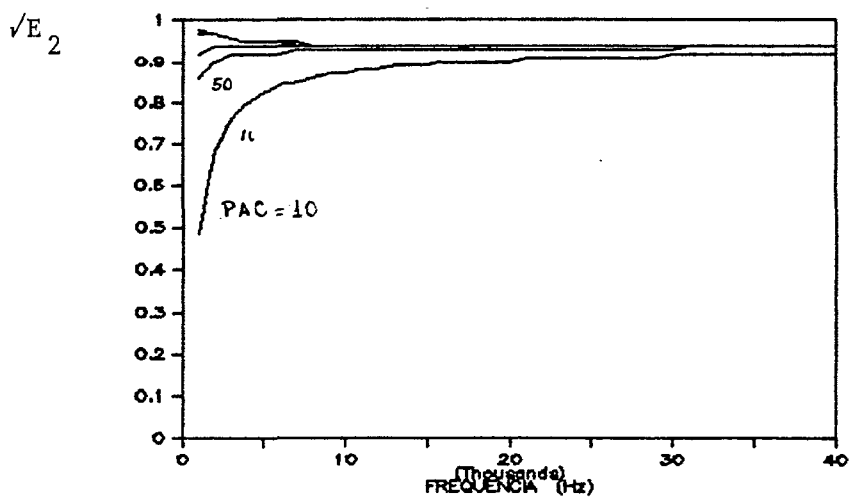


Fig. 5.25 - Onda SV refletida.

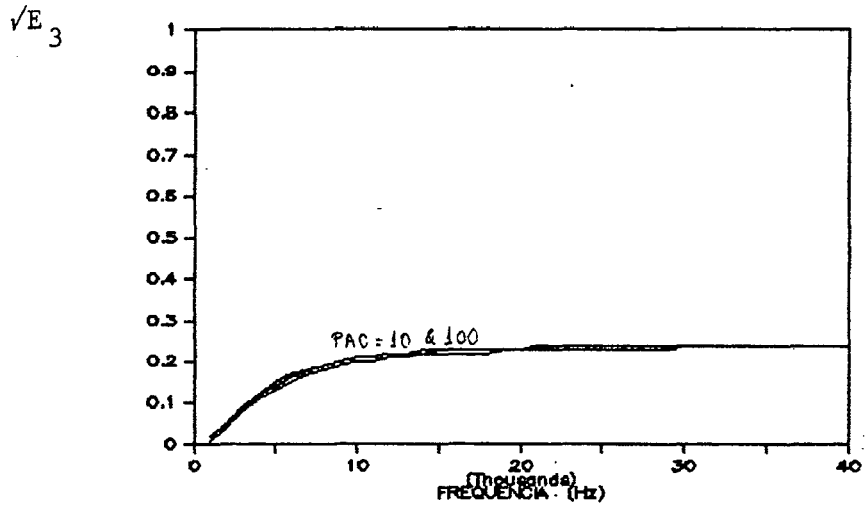


Fig. 5.26 - Onda P transmitida em função da frequência.

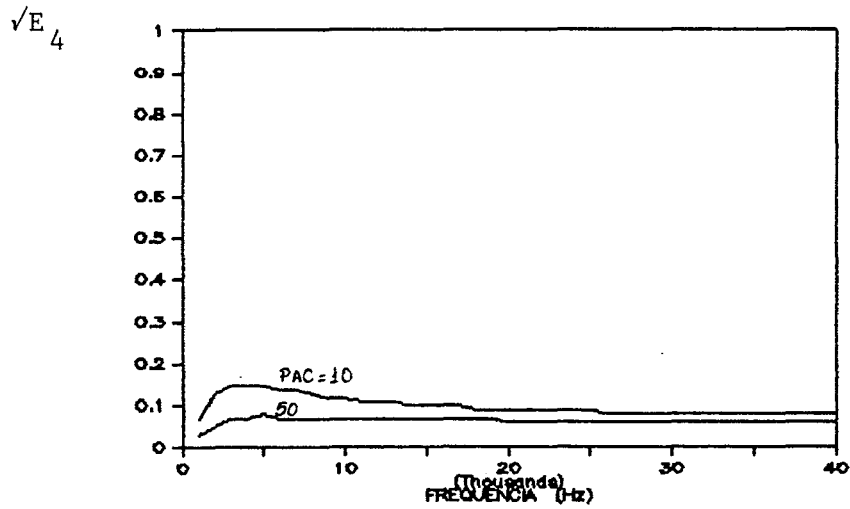


Fig. 5.27 - Onda SV transmitida,  $m=0.01$  Np/m e  $m'=0.1$  Np/m.

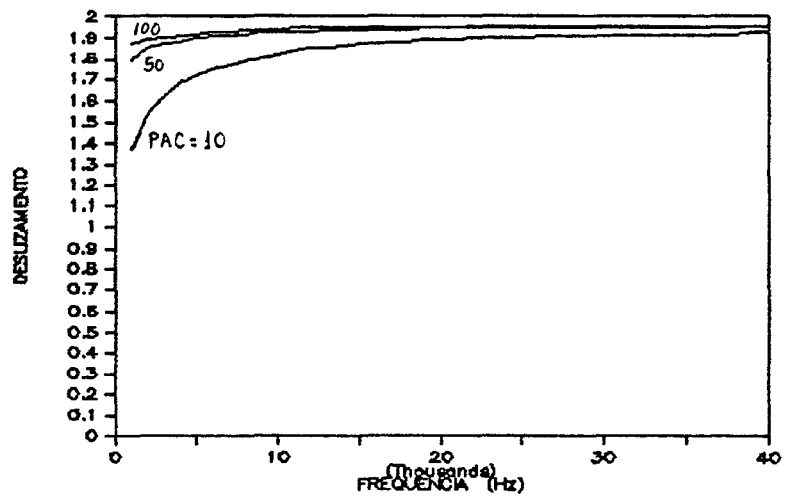


Fig. 5.28 - Deslizamento na interface de contato.  $\ln=10^\circ$ .



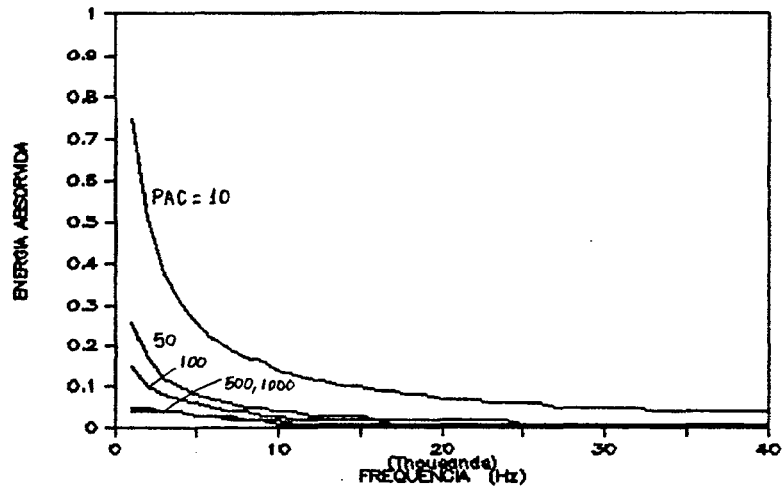


Fig. 5.29 - Energia absorvida no contorno.

#### 5.3.4 - Onda P sem Amortecimento e com Reflexão Total

O caso agora tratado é quando a onda incidente é do tipo P. A reflexão é considerada fazendo  $c_1/c_1' = 0.9$ . Diferentemente da onda SV, aqui a única onda não periódica a partir de certo ângulo de incidência será a P transmitida. A frequência escolhida é de 3 KHz.

As razões de energias, Figuras 5.30 a 5.33, apresentam descontinuidades em torno do ângulo crítico ( $\theta_c = 64.16^\circ$ ). Ocorre aí um aumento da energia refletida P e uma diminuição de energia das ondas S. A partir de  $\theta_c$  nenhuma onda P é transmitida. Em  $\theta_c$  o deslizamento é nulo, Figura 5.34, enquanto ocorre um pico na tensão normal, Figura 5.35.

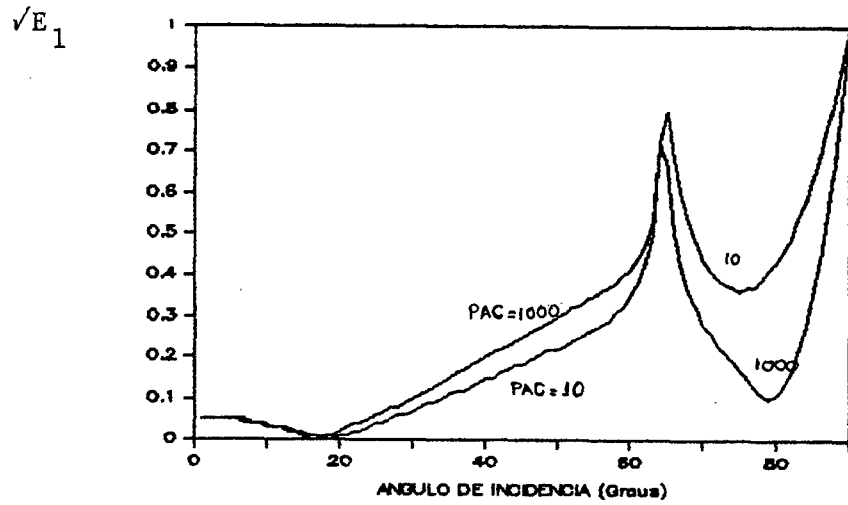


Fig. 5.30 - Onda P refletida sem amortecimento.  $c_1/c_1' = 0.9$ .

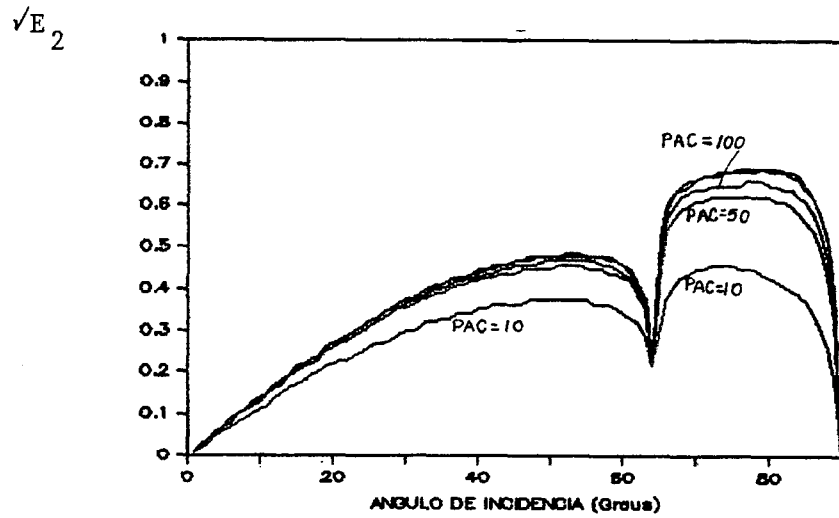


Fig. 5.31 - Onda SV refletida em função do ângulo de incidência.

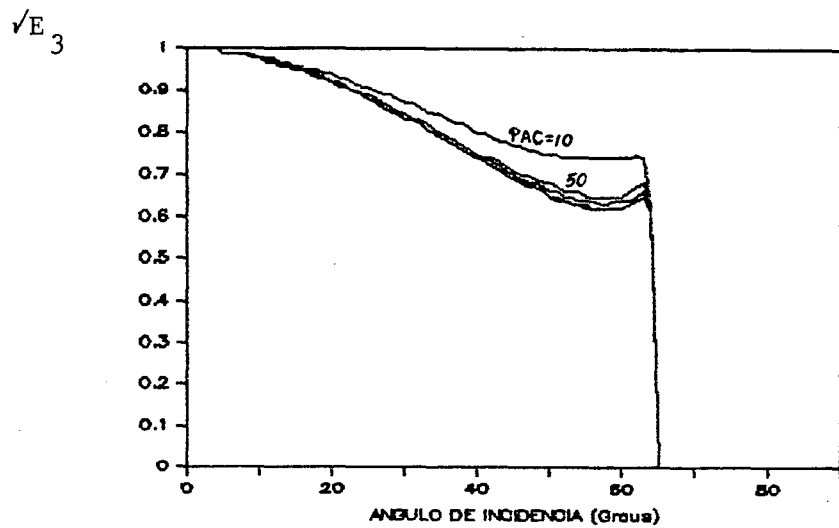


Fig. 5.32 - Onda P transmitida e o fenômeno de reflexão total.

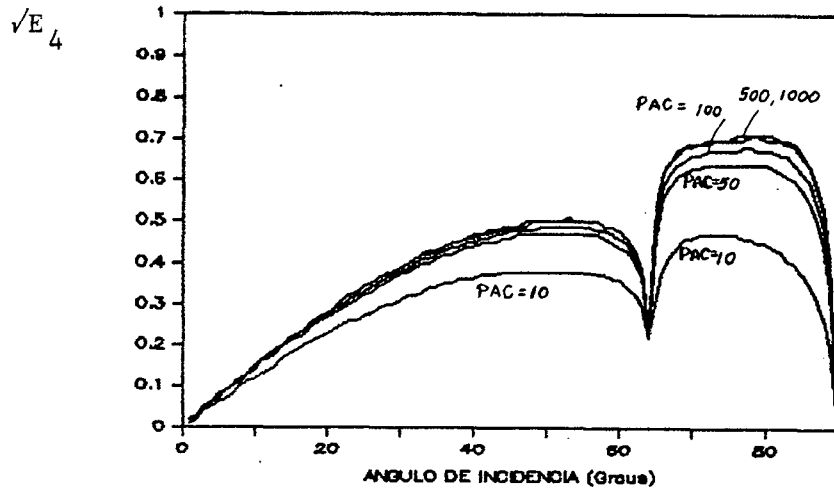


Fig. 5.33 - Onda SV transmitida.

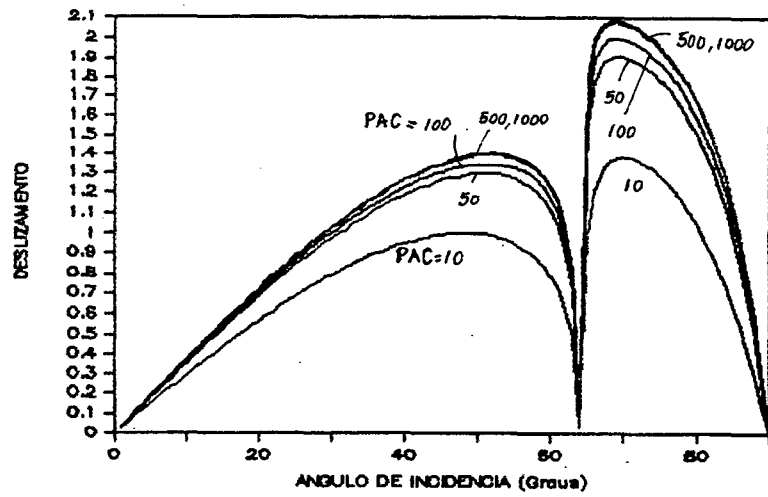


Fig. 5.34 - Deslizamento na interface de contato.

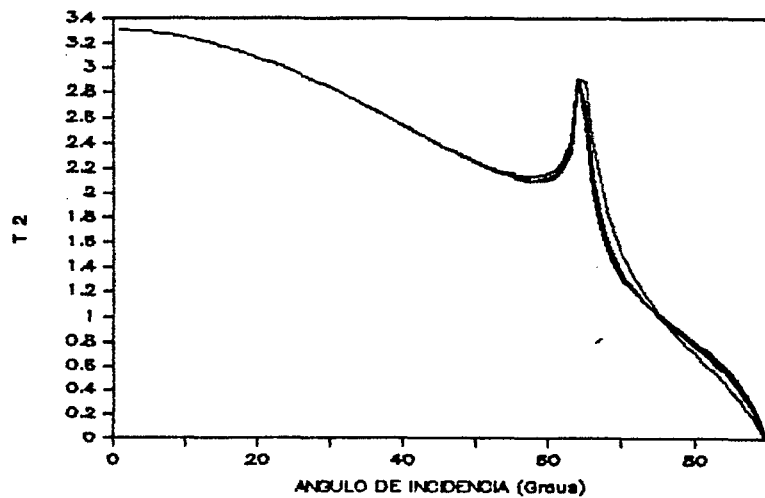


Fig. 5.35 - Tensões normais ao contorno.

### 5.3.5 - Onda P com Amortecimento e sem Reflexão Total

A consideração do amortecimento através dos mesmos coeficientes anteriores implica que a reflexão total deve ser evitada e, para tanto,  $c_1/c_1' = 1.1$ . Além disso,  $\omega = 3$  KHz.

As tensões cisalhantes e deslocamentos normais estão apresentadas nas Figuras 5.36 e 5.37. O comportamento das várias ondas, Figuras 5.38 a 5.41, é interessante em alguns aspectos. Por exemplo, o Parâmetro de Atrito de Coulomb pouco influencia a transmissão da onda P. O deslizamento, Figura 5.42, apresenta-se nulo para incidência normal e rasante. As energias normalizada e absorvida correspondem às Figuras 5.43 e 5.44.

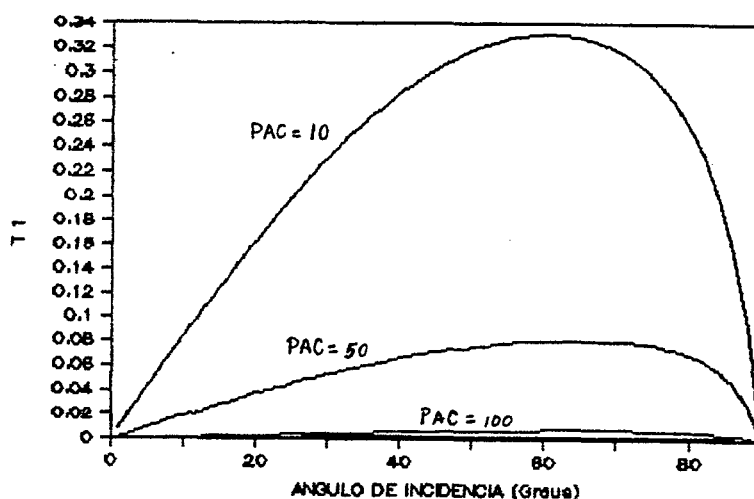


Fig. 5.36 - Tensão cisalhante para  $c_1/c_1' = 1.1$ .

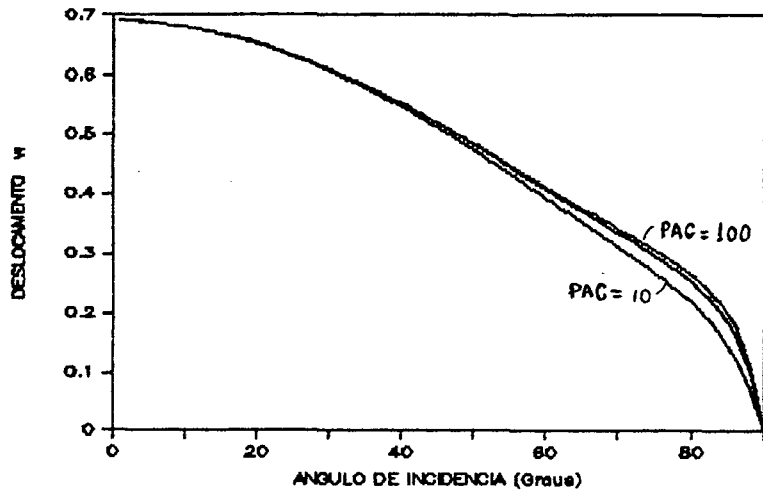


Fig. 5.37 - Deslocamento normal ao contorno.

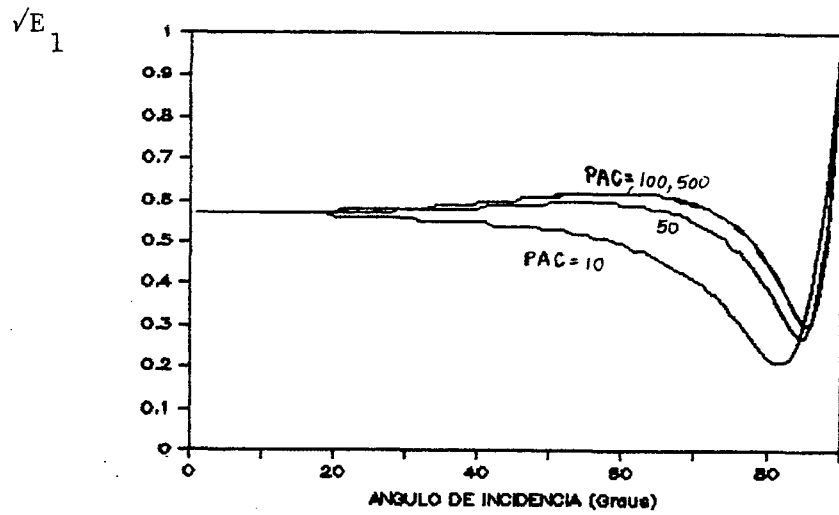


Fig. 5.38 - Onda P refletida.  
 $m=0.01$  Np/m e  $m'=0.1$  Np/m.

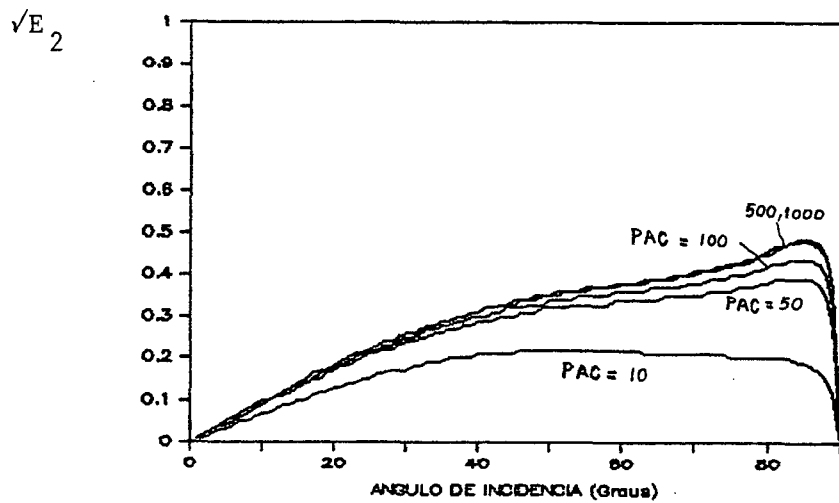


Fig. 5.39 - Onda SV refletida com amortecimento.

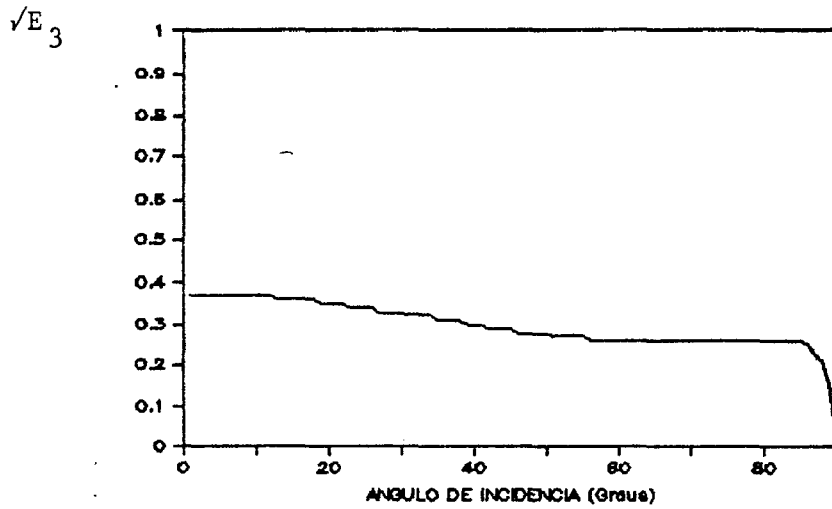


Fig. 5.40 - O PAC influência tão pouco que as várias curvas se sobrepõem.

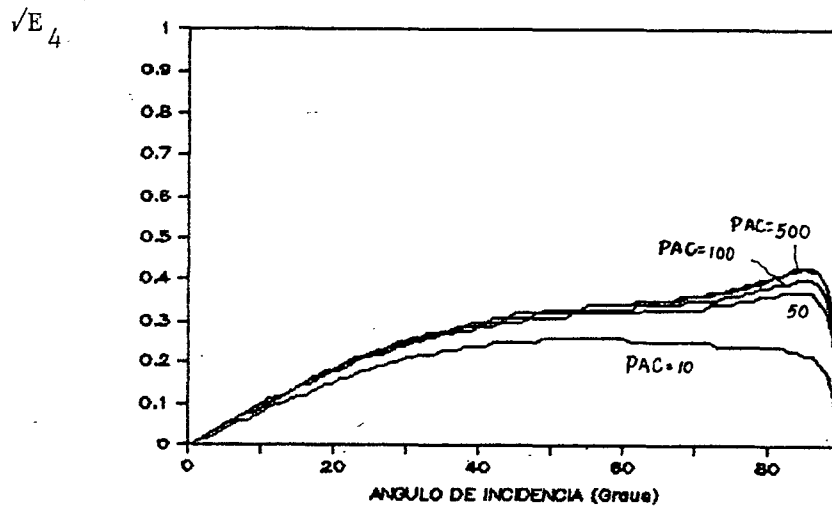


Fig. 5.41 - Onda SV transmitida.  
 $c_1 / c_1' = 1.1.$

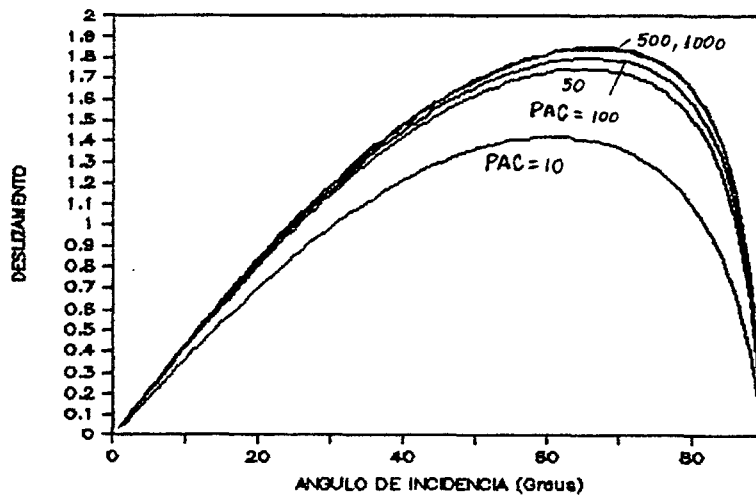


Fig. 5.42 - Deslizamento na interface de contato sujeita a uma onda P incidente.

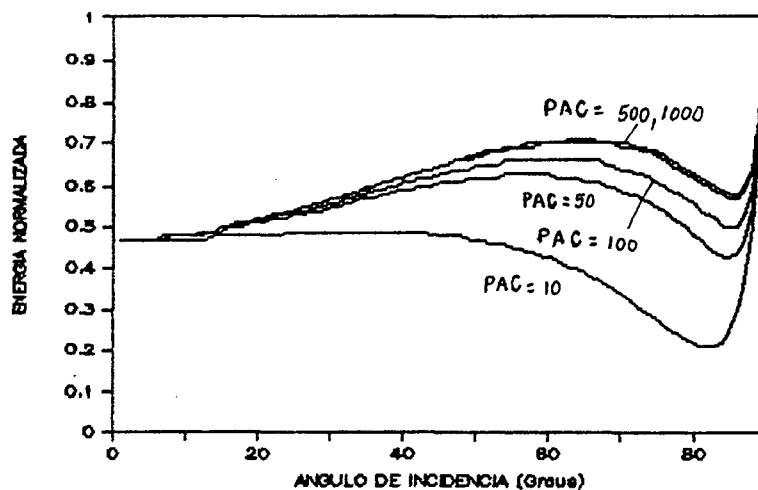


Fig. 5.43 - Energia normalizada.

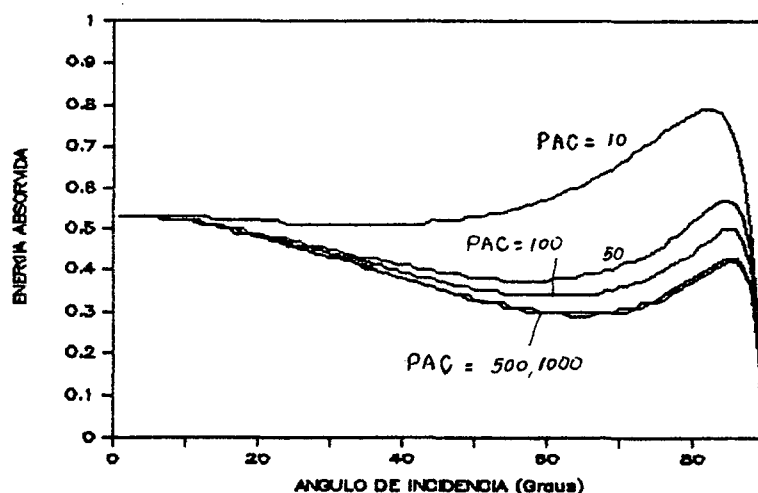


Fig. 5.44 - Energia absorvida diminuindo com o aumento do PAC.

### 5.3.6 - Onda P com e sem Amortecimento -

#### A Frequência como uma Variável do Problema

A frequência da onda incidente influi no fenômeno independentemente da consideração ou não do amortecimento. Isto, como já foi visto, é uma característica do método de linearização aqui empregado.

Inicialmente os sólidos são considerados sem amorteci -

mento e a onda P incidindo a  $30^\circ$  ( $c_1/c_1' = 1.1$ ). A seqüência de Figuras (5.45 a 5.51) a seguir mostra que, na região de baixas frequências, ocorrem os maiores gradientes. Esta constatação tem sido observada durante todo o trabalho. Em algumas variáveis, a influência do PAC é tão pequena que as várias curvas se sobrepõem. Onde este parâmetro influencia é fácil verificar a coerência do comportamento do fenômeno.

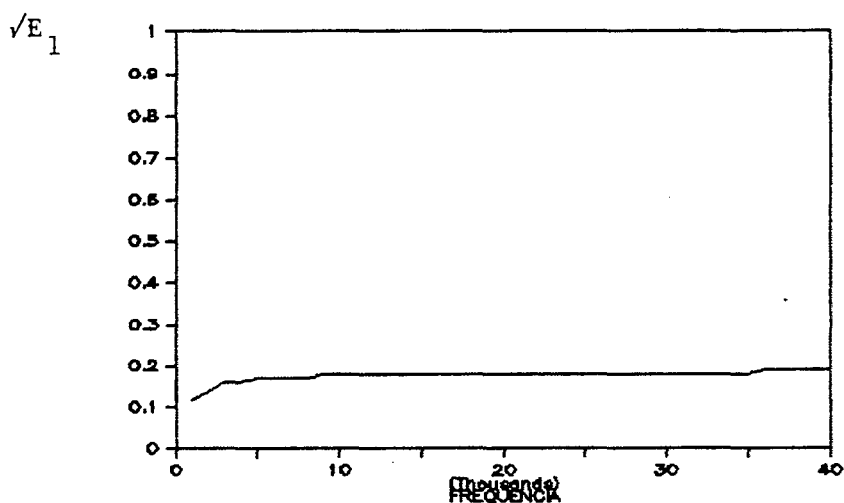


Fig. 5.45 - Onda P refletida sem amortecimento e  $i_n = 30^\circ$ .

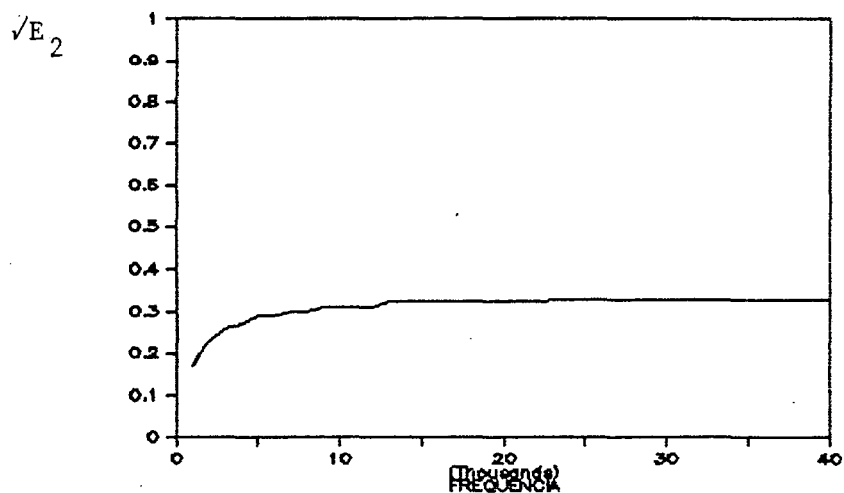


Fig. 5.46 - Onda SV refletida aumentando com o PAC.



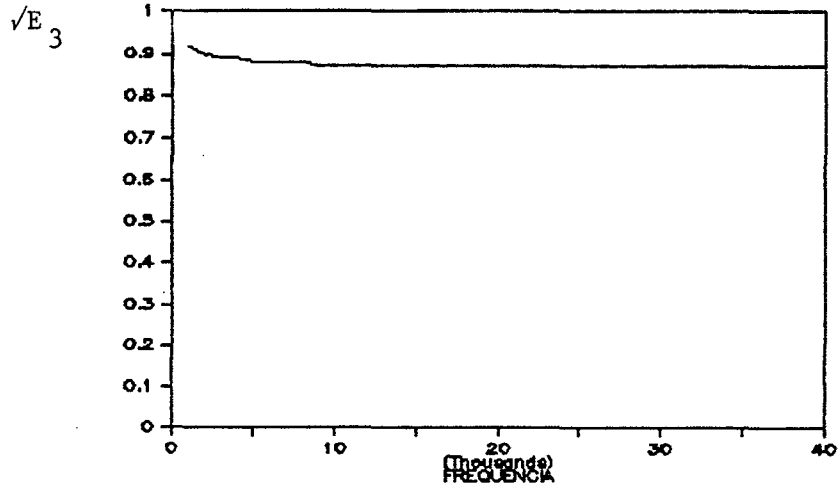


Fig. 5.47 - Onda P transmitida em função da frequência.

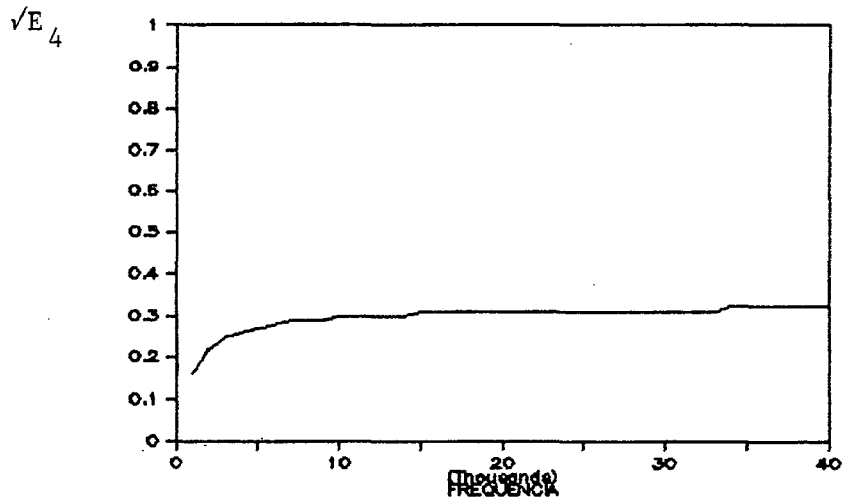


Fig. 5.48 - Onda SV refletida.  
 $c_1/c_1' = 1.1$ .

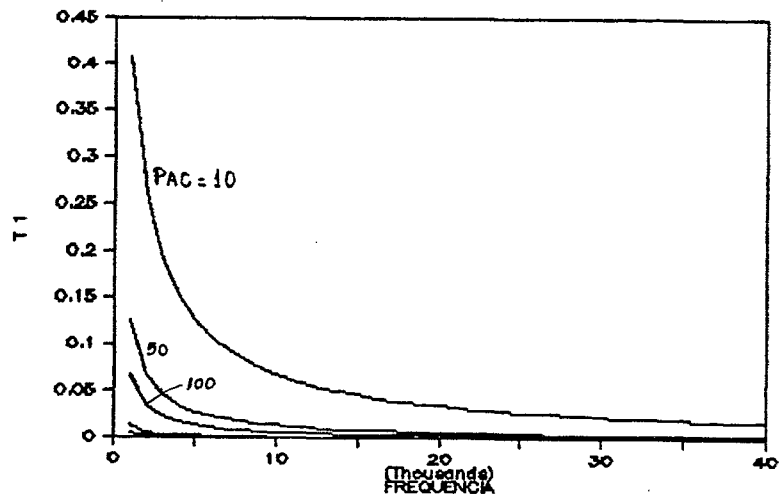


Fig. 5.49 - Tensões cisalhantes no contorno.

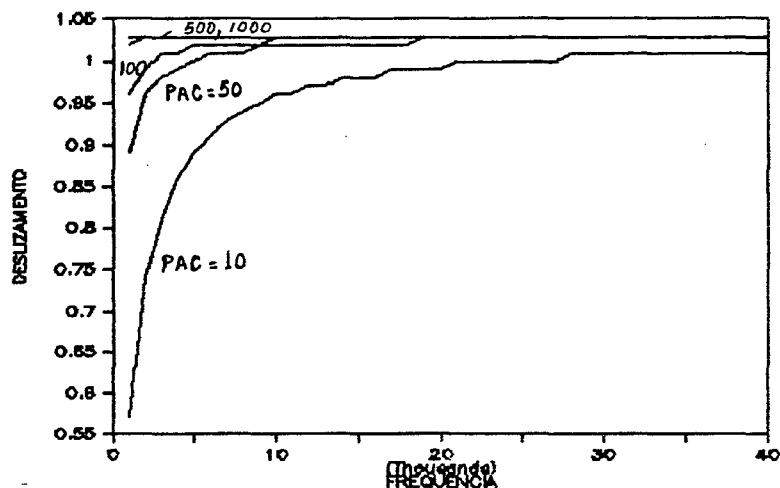


Fig. 5.50 - Amplitude da onda de deslizamento em relação à incidente.

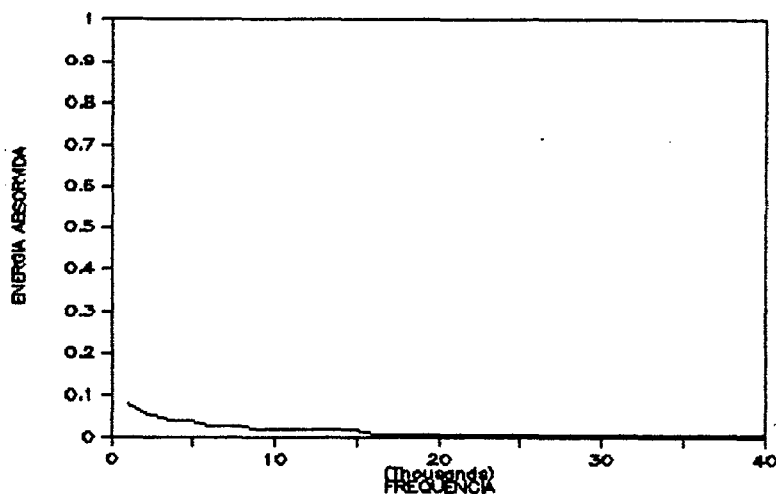


Fig. 5.51 - Energia absorvida por fricção, em função da frequência.  $i_n=30^\circ$ .

Para completar a exposição de resultados, às ondas foi atribuído o amortecimento (mesmos valores anteriores), constatando-se a influência deste no fenômeno, que é a seguir mostrado, ainda em função da frequência. O ângulo de incidência da onda P é de  $30^\circ$  e  $c_1/c_1' = 1.1$ .

As Figuras 5.52 a 5.60 mostram as várias curvas representando as razões de energias, tensões e deslocamentos. Estas figuras servem para comparação com as anteriores.

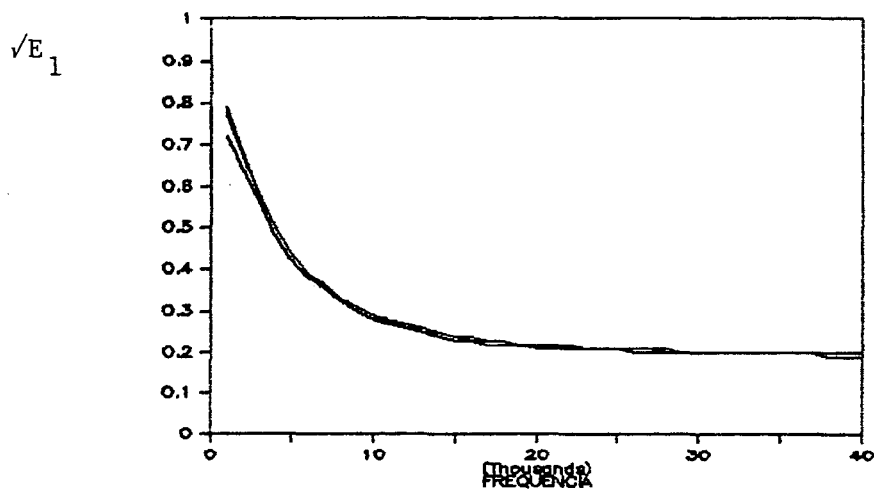


Fig. 5.52 - Onda P refletida com amortecimento.  $\alpha = 30^\circ$ .

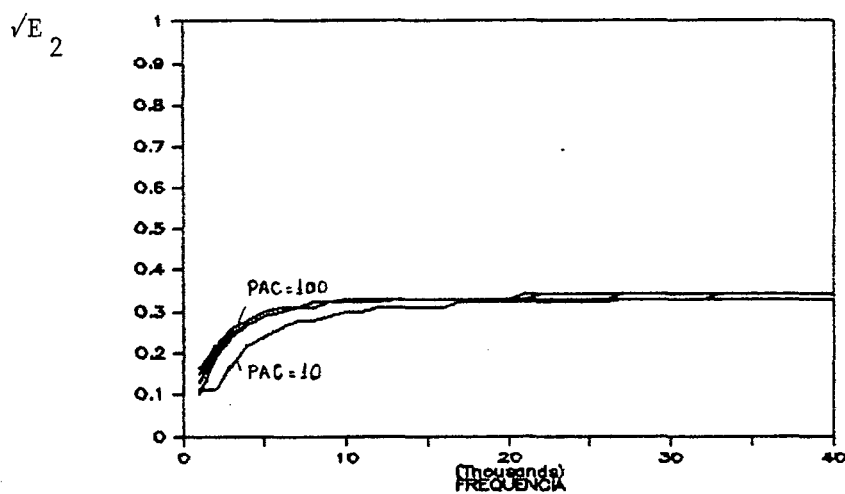


Fig. 5.53 - Onda SV refletida em função da frequência.

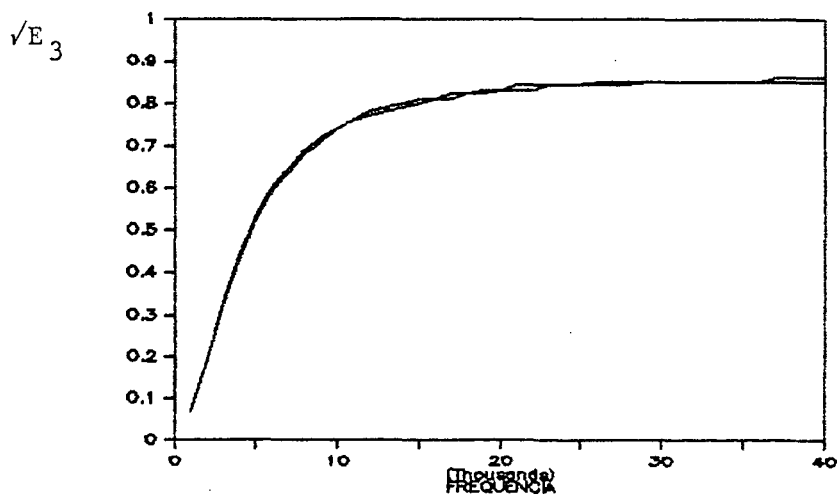


Fig. 5.54 - Onda P transmitida.  $c_1/c_1' = 1.1$ .

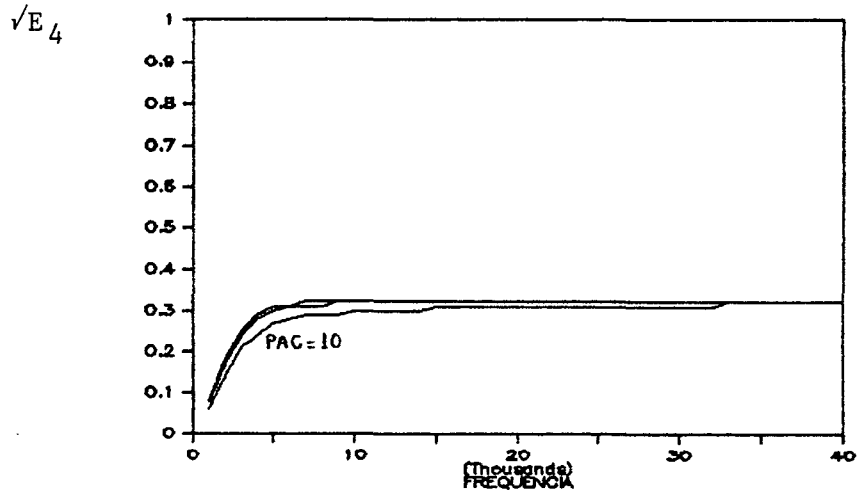


Fig. 5.55 - Onda SV transmitida.

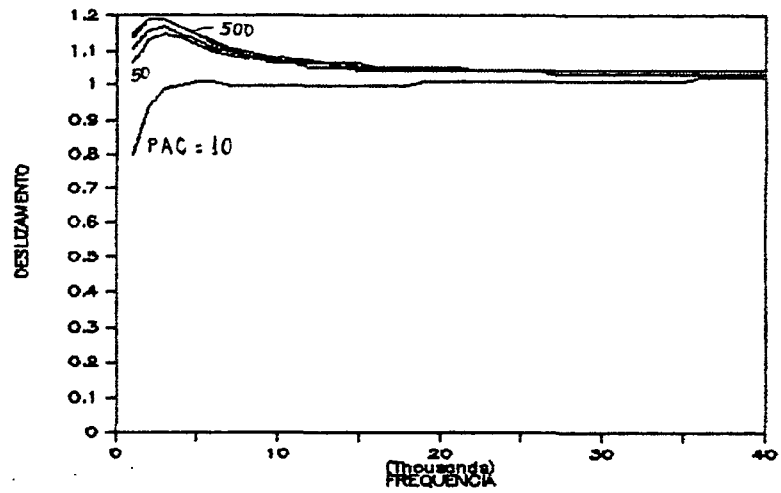
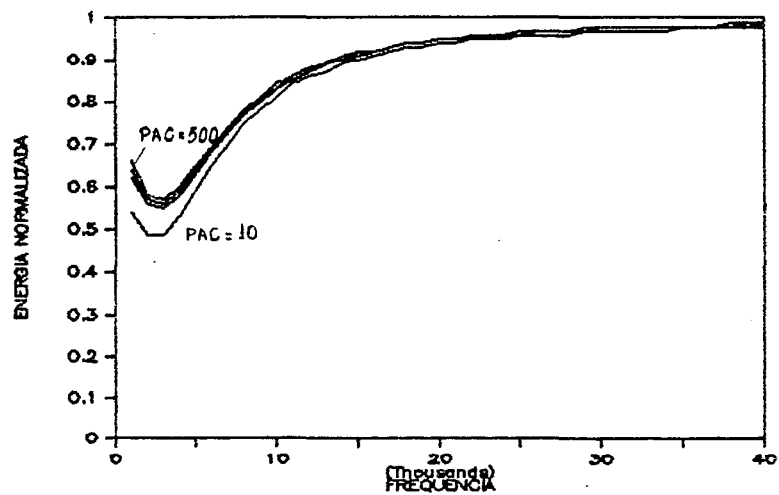


Fig. 5.56 - O deslizamento e a influência do PAC e da frequência.

Fig. 5.57 - Energia normalizada.  $i_n=30^\circ$ .

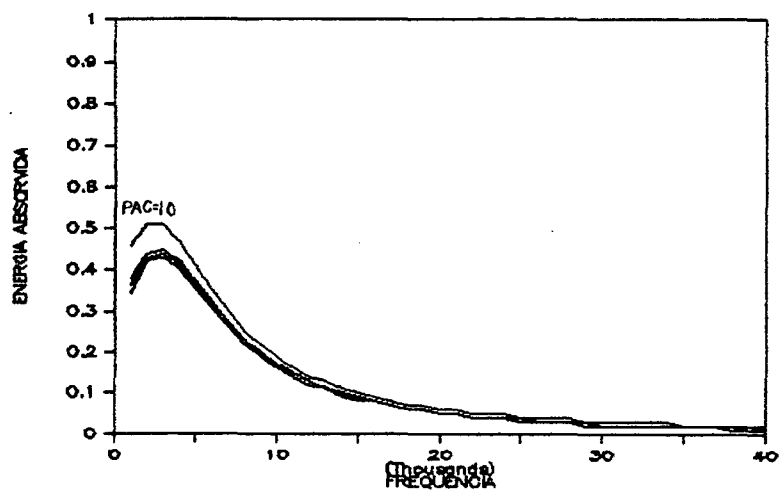


Fig. 5.58 - Energia absorvida por fricção.

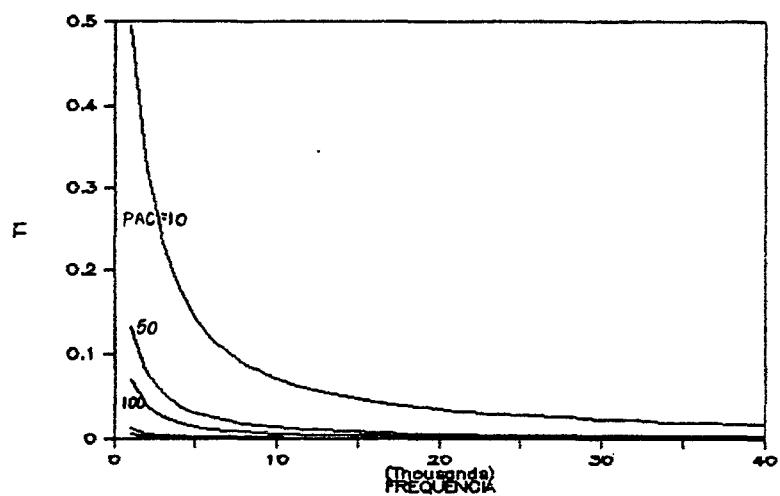


Fig. 5.59 - Tensões cisalhantes para  $i_n=309$ .

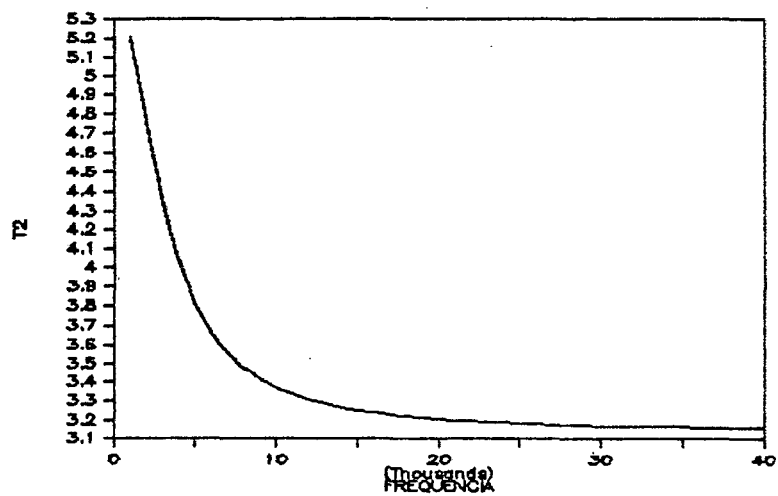


Fig. 5.60 - Tensões normais ao contorno sujeito a uma onda P incidente, com amortecimento.

## CAPÍTULO 6

### COMENTÁRIOS FINAIS

#### 6.1 - Contribuições e Conclusões

Muitos autores têm contribuído para uma maior compreensão das ondas elásticas em geral e, em particular, de sua interação com interfaces.

Mesmo assim, até o presente, o amortecimento inerente aos sólidos foi pouco considerado, talvez pela dificuldade que este introduz na formulação matemática.

Este trabalho, no entanto, resolve o problema da interação entre ondas elásticas *com amortecimento* e interfaces planas com atrito.

Assim, o problema de uma interface sujeita a atrito viscoso linear atingida por uma onda SH, SV ou P, com e/ou sem amortecimento foi resolvido aqui pela primeira vez (Murty resolveu, neste caso, o problema de uma onda P sem amortecimento [44]). Como já comentado, foi só através da consideração do amortecimento que a influência da frequência pôde ser analisada.

Além disso, a solução para ondas do tipo S revelou ângulos de incidência para os quais ocorre uma *transmissão total*. Este significativo resultado até então não tinha sido observado.

Para analisar modelos mais reais de atrito foi usado um método de linearização, o MLE [40], [58], que, até o momento, não considerava o amortecimento.

Como vinha sendo usado o método, fazia-se necessário a solução de uma equação para o deslizamento, muitas vezes não-linear. Neste trabalho as várias incógnitas do problema, inclusive o deslizamento, foram explicitamente apresentadas para o caso de onda SH. Também foi mostrado, contrariamente a outros autores, o comportamento das variáveis em função da frequência e do ângulo de incidência, sendo então possível perceber claramente a influência destes parâmetros.

O uso do MLE para onda P ou SV com amortecimento foi aqui apresentado pela primeira vez. Além disso a reflexão total foi também analisada, com os resultados sendo explicitamente apresentados em função da frequência e do ângulo. Em estudos anteriores a reflexão total não tinha sido tratada pois adicionava dificuldades à formulação matemática.

Fora estas contribuições outras conclusões foram obtidas, como a seguir serão sumarizadas.

#### 6.1.1 - Modelo de Atrito Linear Viscoso

Quando o atrito é do tipo viscoso, os resultados apresentados permitem as seguintes conclusões.

Para o caso de onda SH incidente, observou-se que a transmissão máxima não ocorre quando a incidência é normal. Isto porque, no caso de  $i_n=0^\circ$ , o deslizamento é máximo, impedindo uma melhor condução de energia ao meio II. Este resultado é significativo para ondas SH. Associada à transmissão máxima, está a reflexão mínima. O ângulo de máxima transmissão aumenta na medida em que a aderência das superfícies diminui porque, como visto, is

to faz aumentar o deslizamento. A transmissão é menor para pequenos  $\Psi$ , extinguindo-se para  $\Psi=0$ .

Quando existe a possibilidade da reflexão total, o ângulo crítico ( $\theta_c$ ) determina um ponto de deslizamento e energia absorvida nula. Aí toda a onda é refletida, não ocorrendo mais a transmissão.

A consideração do amortecimento permitiu a análise da influência da frequência no fenômeno. O seu aumento faz aumentar a transmissão e diminuir o deslizamento. Sua influência é grande na região de baixas frequências.

Para o caso de onda incidente do tipo SV, sem amortecimento, torna-se mais pronunciado o decaimento com  $z$  dos potenciais de onda P. Assim, estas deixam de existir periodicamente a partir de certos ângulos. Em particular, existe um ângulo no qual toda a onda SV incidente é transmitida. Esta transmissão ocorre de modo independente do grau de aderência das superfícies. Neste ponto, o deslizamento, as tensões cisalhantes e a energia absorvida valem zero. Observa-se que, mesmo para  $\Psi=0$ , existe transmissão de ondas.

Com o amortecimento, a frequência passa a influir aumentando a transmissão das ondas P e SV, em especial desta última. O deslizamento diminui com a frequência quando  $\Psi \neq 0$ , pouco aumentando para  $\Psi=0$ .

Sendo a onda incidente do tipo P, a transmissão é máxima para a incidência normal. Para ocorrer uma boa transmissão a frequência não pode ser baixa. Por exemplo, para os pares usados e  $\omega=1$  KHz, muito pouca energia é transmitida. Ainda nesta frequência a absorção de energia aumenta com o aumento do ângulo de in-



cidência, isto até certo ângulo, a partir do qual decai. Para incidências normal e rasante o deslizamento é nulo. O deslocamento normal varia com o grau de aderência entre os sólidos.

A influência da frequência faz com que seu aumento diminua o deslizamento. Ocorrem também picos de absorção de energia na região de baixas frequências.

### 6.1.2 - Modelo de Atrito de Coulomb

A solução do problema de ondas incidindo em interfaces sujeitas a atrito de Coulomb foi obtida pelo MLE. Foi definido o PAC - Parâmetro de Atrito de Coulomb - para representar o grau de aderência das superfícies. Altos PAC's representam baixa aderência. A frequência é variável do problema, independentemente do amortecimento.

Para o caso de onda incidente SH e  $\omega = 10$  KHz ocorre uma pequena transmissão, embora baixos PAC's tendem a melhorá-la. A transmissão aumenta com o ângulo de incidência pois, como foi comentado, o deslizamento diminui. A energia absorvida comporta-se de modo inverso ao deslizamento. Quanto maior for este, menor a absorção pois menos aderente é a interface. Este comportamento apresenta-se caracterizando o atrito de Coulomb.

Considerar o amortecimento altera muito o comportamento quantitativo do fenômeno. O coeficiente de transmissão aumenta com  $\theta$  em detrimento da diminuição do deslizamento. A influência do PAC é melhor sentida. A energia absorvida tende a um crescimento com o aumento do ângulo de incidência. O deslizamento é máximo para incidência normal.

Quanto à influência da frequência, o seu aumento faz *diminuir* a penetração pois o deslizamento aumenta. Em acordo com o tipo de atrito, a energia absorvida diminui com a frequência. A reflexão aumenta.

Quando a onda incidente é do tipo SV a frequência escolhida foi a de 3 KHz. A ocorrência da reflexão total da onda SV determina um ângulo crítico para o qual a reflexão da onda SV é máxima. Ocorre também um ponto de transmissão máxima onde o deslizamento e a energia absorvida são nulos. Sobre o deslizamento, este apresenta picos nos ângulos correspondentes ao decaimento com  $z$  das ondas P.

A frequência não influi fortemente no fenômeno embora a transmissão da onda SV diminua um pouco, enquanto a amplitude das outras ondas aumentam. O deslizamento também aumenta com a frequência.

Para onda incidente do tipo P, no caso da reflexão total desta, ocorre um pico na onda P refletida, quando  $i_n = \theta_c$ . A partir deste ângulo as ondas SV aumentam (tanto a refletida quanto a transmitida). Também para  $i_n > \theta_c$  o deslizamento aumenta, embora seja nulo na incidência normal e rasante. O deslocamento normal varia pouco com o PAC.

O aumento da frequência força um aumento no deslizamento embora aquela influa pouco nos demais parâmetros. Isto para  $i_n = 10^\circ$ . Para  $i_n = 30^\circ$  é possível perceber uma influência mais decisiva da frequência. Em qualquer caso o PAC afeta muito pouco o comportamento das ondas refletida e transmitida.

## 6.2 - Sugestões

O tema abordado por este trabalho possui um grande potencial de aplicação, embora muitos aspectos ainda continuem obscuros.

Como sugestão para futuros trabalhos poderia ser analisado o fenômeno da reflexão total com amortecimento. Também é sabido |37| a influência da frequência no coeficiente de amortecimento. Isto pode dar margem a definição de uma função  $m(\omega)$  a ser pesquisada.

Considerar a separação dos sólidos leva, frequentemente, à solução de equações integrais, o que justificaria trabalhos em nível mais avançado.

Quanto a métodos de linearização existem muitos, |28|, |47| que poderiam ser aplicados ao problema aqui estudado. Por exemplo o Método da Média |28|, |29|, |52|, o do Balanço Harmônico |47|, |49| e o de Kryloff-Bogoliuboff |30|.

Resultados experimentais são fundamentais\* para a confirmação dos teóricos, embora isto exija sofisticados equipamentos. Até o momento, as pesquisas experimentais sobre a interação de ondas com interfaces sujeitas a deslizamento relativo têm sido em número muito pequeno |27|, |32|. Assim, faltam resultados experimentais para a confirmação ou não de que o uso de certos métodos matemáticos, como o MLE, levem a uma precisa descrição quanti

---

\*SHUKLA, A. e ROSSMANITH, H.P. - "Dynamic Photoelastic Investigation of Wave Propagation and Energy Transfer Across Contacts". Journal of Strain Analysis, Vol. 21, nº 4, pp. 213-218, 1986.

tativa do fenômeno tratado neste trabalho.

O método de linearização aqui empregado também pode ser usado de modo inverso. Em vez das amplitudes das várias ondas serem calculadas considerando-se um dado modelo de atrito pode-se *medir* estas amplitudes e, a partir disto, obter as integrais do MLE. Com estas integrais pode-se então formular a *lei de atrito* entre os pares em contato.

Por fim, a pesquisa de uma solução analítica para modelos de atrito não-lineares, sem o uso de métodos aproximados, representa um desafio.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- | 1 | - ACHENBACH, J.D. e ABO-ZENA, A.M.-"Analysis of the Dynamics of Strike Slip Faulting". Journal of Geophysical Research, Vol. 78, nº 5, pp. 866-875, fevereiro, 1973.
- | 2 | - AVEYARD, S. e SHARPE, R.S.-"Applications of Ultrasonic Pulse Interference". Proceedings of the Fourth International Conference on Nondestructive Testing, Butterworths, London, 1964, pp. 150-154.
- | 3 | - BACK, Nelson - Deformations in Machine Tool Joints, Ph.D. Thesis, The Victoria University of Manchester, 1972.
- | 4 | - BLITZ, Jack - Fundamentals of Ultrasonics. 2<sup>a</sup> ed., Butterworths, pp. v-220, 1967.
- | 5 | - BREKHOVSKIKH, L.M.-Waves in Layered Media. 2<sup>a</sup> ed., Academic Press, pp. v-503, 1980 (trad. russa de Robert T. Beyer).
- | 6 | - BURRIDGE, R. e HALLIDAY, G.S.-"Dynamic Shear Cracks with Friction as Models for Shallow Focus Earthquakes". Geophys. J. R. astr. Soc., nº 25, pp. 261-283, 1971.
- | 7 | - CHANG, F.K.; COMNINOU, Maria e BARBER, J.R.-"Slip Between a Layer and a Substrate Caused by a Normal Force Moving Steadily over the Surface". Int. J. Mech. Sci., Vol. 25, nº 11, pp. 803-809, 1983.
- | 8 | - CHANG, F.K.; COMNINOU, Maria; SHEPPARD, Sheri e BARBER, J. R.-"The Subsurface Crack under Conditions of Slip and Stick Caused by a Surface Normal Force". Journal of Applied Mechanics, Vol. 51, pp. 311-316, junho, 1984.
- | 9 | - COMNINOU, Maria; BARBER, J.R. e DUNDURS, John - "Interface Slip Caused by a Surface Load Moving at Constant Speed". Int. J. Mech. Sci., Vol. 25, nº 1, pp. 41-46, 1983.

- [10] - COMNINOU, Maria e DUNDURS, John - "Elastic Interface Waves Involving Separation". Journal of Applied Mechanics, pp. 222-226, junho, 1977.
- [11] - COMNINOU, Maria e DUNDURS, John - "Elastic Interface Waves and Sliding Between two Solids". Journal of Applied Mechanics, Vol. 45, pp. 325-330, junho, 1978.
- [12] - COMNINOU, Maria e DUNDURS, John - "Singular Reflection and Refraction of Elastic Waves Due to Separation". Journal of Applied Mechanics, Vol. 45, pp. 548-552, setembro, 1978.
- [13] - COMNINOU, Maria e DUNDURS, John - "Reflexion and Refraction of Elastic Waves in Presence of Separation". Proc. R.Soc. Lond A., 356, pp. 509-528, 1977.
- [14] - DATTA, S.K.; O'LEARY, P.M. e SHAH, A.H. - "Three-Dimensional Dynamic Response of Buried Pipelines to Incident Longitudinal and Shear Waves". Journal of Applied Mechanics, Vol. 52, pp. 919-926, dezembro, 1985.
- [15] - DEY, Sukhendu e CHAKRABORTY, Swapan Kumar - "Reflection and Refraction of Plane Waves at Solid-Liquid Interface under Residual Stresses". Rev. Roum. Sci. Techn.Méc.Appl., Tomo 28, nº 5, pp. 497-512, Bucarest, 1983.
- [16] - DEY, Sukhendu e MUKHERJEE, S.P. - "Propagation, Reflection and Transmission of Waves under Initial Shear Stresses". Int. J. Non-Linear Mechanics, Vol. 18, nº 4, pp. 269-277, 1983.
- [17] - DRUMHELLER, D.S. - "An Effect of Debonding on Stress Wave Propagation in Composite Materials". Journal of Applied Mechanics, (brief notes), pp. 1146-1147, dezembro, 1973.

- |18| - DUNDURS, John e COMNINOU, Maria - "Interface Separation Caused by a Plane Elastic Wave of Arbitrary Form". Wave Motion, 1, pp. 17-23, 1979.
- |19| - DUNDURS, John e COMNINOU, Maria - "Some Consequences of the Inequality Conditions in Contact and Crack Problems". Journal of Elasticity, 9, pp. 71-82, janeiro, 1979.
- |20| - ERINGEN, A. Cemal e SUHUBI, Erdogan S.-Elastodynamics, Vol. I e II, 1<sup>a</sup> ed., Academic Press, pp. vii-1003, 1974.
- |21| - EWING, W. Maurice; JARDETZKY, Wenceslas S. e PRESS, Frank. Elastic Waves in Layered Media, 1<sup>a</sup> ed. Mc Graw-Hill Book Company, INC., pp. vii-380, 1957.
- |22| - FEYNMAN, Richard P.; LEIGHTON, Robert B. e SANDS, Matthew. The Feynman Lectures on Physics, Vol. I, II e III, 1<sup>a</sup> ed., Addison-Wesley Publishing Company, INC., 1963.
- |23| - FREDERICK, Julian R.-Ultrasonic Engineering. 1<sup>a</sup> ed., John Wiley & Sons, INC., pp. vii-379, 1965.
- |24| - FUNG, Y.C.-Foundations of Solid Mechanics, Prentice-Hall, INC., pp. vii-525, 1965.
- |25| - GOLDSMITH, Werner- Impact: The Theory and Physical Behaviour of Colliding Solids. 1<sup>a</sup> ed., London, Edward Arnold (Publishers) Ltd., 1960.
- |26| - GOLDSTINE, Herman H.-A History of the Calculus of Variations From the 17<sup>th</sup> Throught the 19<sup>th</sup> Century. 1<sup>a</sup> ed. , Springer-Verlag, pp. 1-410, 1980.
- |27| - GRAFF, Karl F.-Wave Motion in Elastic Solids. 1<sup>a</sup> ed., Ohio State University Press, pp. vii-649, 1973.

- | 28 | - HAGEDORN, Peter- Oscilações Não-Lineares. 1<sup>a</sup> ed., Edgard Blücher Ltda., pp. 1-320, 1984 (trad. alemã de Nazem Nascimento - Nichtlineare Schwingungen Verlag).
- | 29 | - HALE, Jack K.-Ordinary Differential Equations. 1<sup>a</sup> ed., John Wiley & Sons, Inc., pp. 1-332, 1969.
- | 30 | - HANDY, C.R.-"Combining the Methods of Harmonic Balance and Kryloff-Bogolinboff". Journal of Sound and Vibration, Vol. 102, n° 2, pp. 243-246, 1985.
- | 31 | - ITOU, S.-"Three-Dimensional Wave Propagation in a Cracked Elastic Solid". Journal of Applied Mechanics, Vol. 45, pp. 807-811, dezembro, 1978.
- | 32 | - JOHNSON, W.-Impact Strength of Materials. 1<sup>a</sup> ed., Edward Arnold (Publishers) Ltd., pp. v-361, 1972.
- | 33 | - KOLSKY, H.-Stress Waves in Solids. 1<sup>a</sup> ed., New York, Dover Publications, INC., pp. v-201, 1963.
- | 34 | - LOVE, A.H.-A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. 4<sup>a</sup> ed., Dover Publications, pp. vi-642, 1927.
- | 35 | - MADAKSON, Peter B.-"The Frictional Behaviour of Materials" Wear, 87, pp. 191-206, 1983.
- | 36 | - McCLUNG, R.W. e COOK, K.V.-"Ultrasonic Detection of Non-Bond in Clad Structures". Proceedings Fourth International Conference Nondestructive Testing. Butter Worth, London, pp. 267-271, 1964.
- | 37 | - McMASTER, Robert C. (editor)- Nondestructive Testing Handbook, Vol. I e II. The Ronald Press Company, 1963.
- | 38 | - MICKENS, R.E.-"Comments on the Method of Harmonic Balance". Journal of Sound and Vibration, Vol. 94, n° 3, pp. 456-460, 1984.



- | 39| - MILLER, Richard K.-"The Effects of Boundary Friction on the Propagation of Elastic Waves". Bulletin of the Seismological Society of America. Vol. 68, nº 4, pp.987-998, agosto, 1978.
- | 40| - MILLER, Richard K.-"An Approximate Method of Analysis of the Transmission of Elastic Waves Through a Frictional Boundary". Journal of Applied Mechanics, pp. 652-656, dezembro, 1977.
- | 41| - MILLER, Richard K.-"Stochastic SH Waves Along a Frictional Interface". Journal of the Engineering Mechanics. ASCE, Vol. 108, nº EM6, pp. 1262-1275, dezembro, 1982.
- | 42| - MILLER, Richard K. e TRAN, Hoi T.-"Reflection, Refraction, and Absorption of Elastic Waves at a Frictional Interface: SH Motion". Journal of Applied Mechanics, Vol. 46, pp. 625-630, setembro, 1979.
- | 43| - MILLER, Richard K. e TRAN, Hoi T.-"Reflection, Refraction, and Absorption of Elastic Waves at a Frictional Interface: P and SV Motion". Journal of Applied Mechanics, Vol. 48, pp. 155-159, março, 1981.
- | 44| - MURTY, Gurajada S.-"Reflection, Transmission and Attenuation of Elastic Waves at a Loosely-Bonded Interface of Two Half Spaces". Geophys. J.R. astr. Soc., Vol. 44, pp. 389-404, 1976.
- | 45| - MURTY, Gurajada S.-"A Theoretical Model for the Attenuation and Dispersion of Stoneley Waves at the Loosely-Bonded Interface of Elastic Half Spaces". Physics of the Earth and Planetary Interiors. Vol. II, pp. 65-79, 1975.
- | 46| - MUSKAT, M. e MERES, M.W.-"Reflection and Transmission Coefficients for Plane Waves in Elastic Media". Geophysics, Vol. 5, nº 2, pp. 115-148, abril, 1940.

- |47| - NAYEFH, Ali H. e MOOK, Dean T.-Nonlinear Oscilations, 1<sup>a</sup> ed., John Wiley & Sons, 1979, pp. vii-704.
- |48| - NEPOMUCENO, L.X.-Tecnologia Ultrasônica. 1<sup>a</sup> ed., Editora Edgard Blücher Ltda., pp. 1-317, 1980.
- |49| - PIERRE, C.; FERRI, A.A. e DOWELL, E.H.-"Multi-Harmonic Analysis of Dry Friction Damped Systems Using and Incremental Harmonic Balance Method". Journal of Applied Mechanics, Vol. 52, pp. 958-964, dezembro, 1985.
- |50| - ROSS, J.D. e LEEP, R.W.-"Ultrasonic Transmission Tester for Detection of Unbounded Areas". ASTM Special Technical Publication, n° 223, 1958.
- |51| - RUINA, Andy - "Slip Instability and State Variable Friction Laws". Journal of Geophysical Research, Vol. 88, n° B12, pp. 10359-10370, dezembro, 1983.
- |52| - SETHNA, P.R.-"Method of Averaging for Systems Bounded for Positive Time". Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 41, n° 3, pp. 621-631, março, 1973.
- |53| - SHEPPARD, S.; BARBER, J.R. e COMNINOU, Maria - "Short Sub-surface Cracks Under Conditions of Slip and Stick Caused by a Moving Compressive Load". Journal of Applied Mechanics, Vol. 52, pp. 811-817, dezembro, 1985.
- |54| - SKUDRZYK, Engen - Simple and Complex Vibratory Systems. 1<sup>a</sup> ed., The Pennsylvania State University Press, pp. vii-514, 1968.
- |55| - SOOM, A. e KIM, C.-"Interactions Between Dynamic Normal and Frictional Forces During Unlubricated Sliding". Journal of Lubrication Technology, Vol. 105, pp. 221-229, abril, 1983.

- | 56| - SUNDIN, K.G. e JONSSON, M.-"A Stiff and Compact Impact-Force Transducer Based on Strain Measurement". Experimental Mechanics, pp. 48-53, março, 1985.
- | 57| - TIMOSHENKO, Stephen P.-History of Strength of Materials. 1<sup>a</sup> ed., McGraw-Hill Publishing Company Ltd., pp. v-452, 1953.
- | 58| - TRAN, Hoi Ten -Reflection, Transmission and Absorption of Elastic Waves at a Frictional Boundary. MsC Thesis, Department of Mechanical and Environmental Engineering. University of California, 1978.
- | 59| - YOUNIS, Christos J. e TADJBAKSHI, Iradj G.-"Response of Sliding Rigid Structure to Base Excitation". Journal of Engineering Mechanics, Vol. 110, n° 3, pp. 417-432, março, 1984.
- | 60| - WEINSTOCK, Robert -Calculus of Variations. 2<sup>a</sup> ed., Dover Publications, INC., pp. 1-326, 1979.

P A R T E    I V

APÉNDICES

## APÊNDICE 1

### O PRINCÍPIO DO TEMPO MÍNIMO

Os conceitos e fenômenos de reflexão, transmissão, difração e outros estudados em ótica, também podem ser diretamente empregados às ondas elásticas, com certas particularidades.

Um dos princípios básicos de fenômenos ondulatórios é o chamado "Princípio do Tempo Mínimo" que foi formulado por Fermat em 1650.

Para a apresentação matemática deste princípio, sejam |22| dois meios quaisquer de diferentes propriedades elásticas, Figura A1.1.

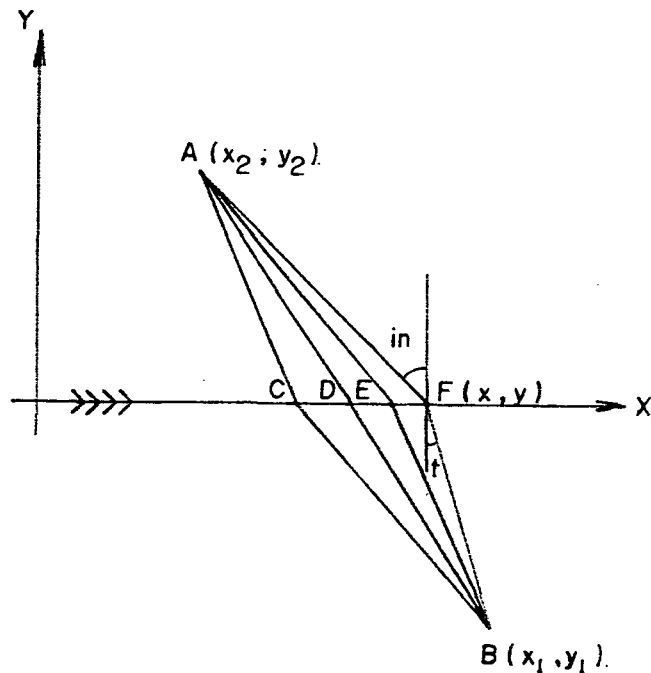


Fig. A1.1 - Trajetórias de vários feixes de onda.

Supondo que a partir de A deseja-se, com um feixe de on

da, atingir B, pode-se pensar que várias são as possibilidades, por exemplo: ACB-ADB-AEB-AFB. Medindo-se o tempo de cada trajetória, e construindo o gráfico da Figura A1.2, este indica um ponto de mínimo M (mais precisamente, uma faixa de mínimo).

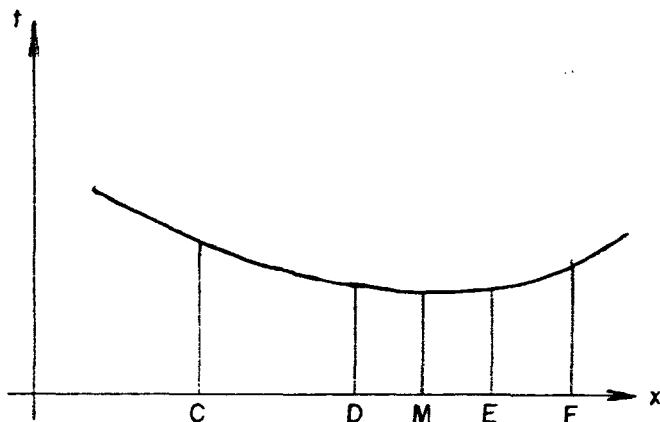


Fig. A1.2 - Um ponto mínimo.

Fermat demonstrou analiticamente [26] - e para tanto desenvolveu os princípios do chamado Cálculo Variacional - que M é um ponto de mínimo e que uma onda sempre se comporta de modo a atingir um ponto no menor tempo possível. Esta idéia é contrária a de Hero de Alexandria que afirmava propagar-se o feixe de onda de modo a percorrer as menores distâncias possíveis (ADB).

Baseado neste princípio pode-se deduzir a lei que relaciona os ângulos de incidência - *i* - e transmissão - *t* - chamada a "Lei de Snell".

De acordo com a Figura A1.1 [60] tem-se que o tempo para um raio percorrer a distância AB vale:

$$t = \frac{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{(x_2-x)^2 + (y_2-y)^2}}{c_2} \quad (\text{A1.1})$$

Pelo princípio de Fermat, vem ( $dt/dx = 0$ ):

$$\frac{\text{sen } i n}{c_1} = \frac{\text{sen } t}{c_2} \quad (\text{A1.2})$$

## APÊNDICE 2

### TEORIA DOS POTENCIAIS APLICADA ÀS ONDAS ELÁSTICAS

O objetivo deste Apêndice é demonstrar como os vários potenciais de ondas usados nos capítulos anteriores são obtidos. Para tanto a Teoria dos Potenciais é usada. Esta, parte do Teorema da Decomposição, de Helmholtz, que afirma ser possível exprimir qualquer vetor através da soma de um gradiente de dilatação e de um rotacional de distorção. A Figura A2.1 apresenta estes potenciais, que são originados na interface de separação de dois sólidos quando da incidência de um potencial que representa uma onda SV ou P.

Do Teorema da Decomposição vem:

$$\vec{q} = (u, v, w) = \nabla\phi + \nabla \times \vec{\chi} \quad (\text{A2.1})$$

de onde:

$$u = \phi_{,x} - \chi_{,z} \quad (\text{A2.2})$$

$$w = \phi_{,z} + \chi_{,x} \quad (\text{A2.3})$$

Neste caso  $v=0$  pois, para ondas SV e P, nenhum potencial atua na direção  $y$ .

Se o vetor  $\vec{q}$  representa uma onda,  $\phi$  e  $\chi$  devem ser tais que a equação de onda (1.3) seja satisfeita. Assim:



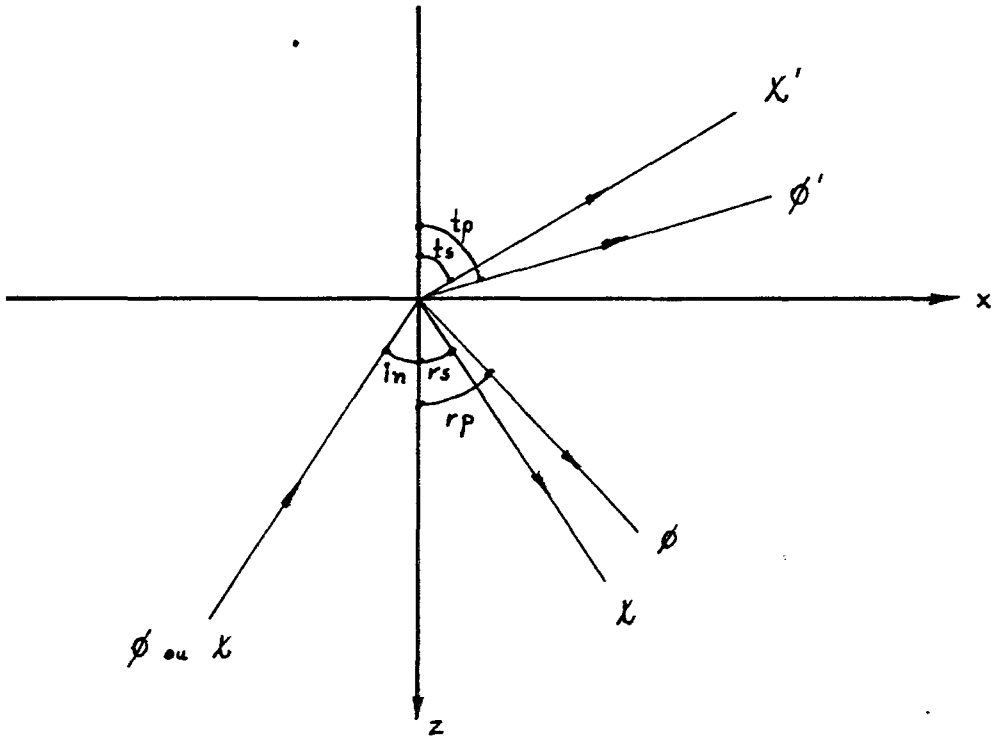


Fig. A2.1 - Potenciais representando Ondas Elásticas.

$$\phi_{,tt} = c^2 \nabla^2 \phi \quad (\text{A2.4})$$

$$\chi_{,tt} = c^2 \nabla^2 \chi \quad (\text{A2.5})$$

Considerando soluções do tipo

$$\phi = f(z) e^{ik(x-ct)} \quad (\text{A2.6})$$

$$\chi = g(z) e^{ik(x-ct)} \quad (\text{A2.7})$$

e substituindo-as em (A2.4) e (A2.5) vem:

$$f_{,zz} + k^2 a^2 f = 0 \quad (\text{A2.8})$$

$$g_{,zz} + k^2 b^2 g = 0 \quad (\text{A2.9})$$

De (A2.6) e (A2.7) conclui-se que  $c$  é a velocidade de propagação da perturbação na direção  $x^*$  e  $k$  o número de onda, também na direção  $x$ , de tal modo que

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{c_1}{\text{sen } r\phi} = \frac{c_2}{\text{sen } r\psi} \quad (\text{A2.10})$$

Além disso

$$a = \sqrt{\left(\frac{c}{c_1}\right)^2 - 1}, \quad c > c_1 \quad (\text{A2.11})$$

$$b = \sqrt{\left(\frac{c}{c_2}\right)^2 - 1}, \quad c > c_2 \quad (\text{A2.12})$$

sendo  $c_1$  e  $c_2$  as velocidades das ondas P e SV, respectivamente.

A partir do sistema de coordenadas usado (Figura A2.1) e das expressões (A2.6) e (A2.7) conclui-se que, até aqui, a incidência normal não foi considerada.

Substituindo as soluções das equações (A2.8) e (A2.9) em (A2.6) e (A2.7) obtêm-se, finalmente, os potenciais de dilatação (onda P) e distorção (onda SV):

$$\phi = A_0 e^{ik(-az+x-ct)} + A_1 e^{ik(az+x-ct)} \quad (\text{A2.13})$$

(\*)-É possível mostrar que  $c$  deve ser a mesma em  $\phi$  e  $\chi$  para que as condições de contorno sejam satisfeitas [20].

$$\chi = B_0 e^{ik(-bz+x-ct)} + B_1 e^{ik(bz+x-ct)} \quad (\text{A2.14})$$

Se  $c_1 > c$  e/ou  $c_2 > c$  então (A2.11) e (A2.12) tornam-se números imaginários e os potenciais  $\phi$  e  $\chi$  passam a ser:

$$\phi = A_0 e^{-kz} e^{ik(x-ct)} + A_1 e^{-kz} e^{ik(x-ct)} \quad (\text{A2.15})$$

$$\chi = B_0 e^{kbz} e^{ik(x-ct)} + B_1 e^{-kbz} e^{ik(x-ct)} \quad (\text{A2.16})$$

Para que  $\phi$  e  $\chi$  não se tornem infinitos impõem-se  $A_0 = B_0 = 0$  verificando-se que estes potenciais decaem exponencialmente com  $z$ . Esta é a representação matemática da reflexão total.

Para considerar o amortecimento espacial das ondas os potenciais podem ser escritos como: (veja Figura A2.1)

$$\phi = A_0 e^{i(\bar{k}_{rp} \vec{n}_{in} - \omega t)} + A_1 e^{i(\bar{k}_{rp} \vec{n}_{rp} - \omega t)} \quad (\text{A2.17})$$

$$\chi = B_0 e^{i(\bar{k}_{rs} \vec{n}_{in} - \omega t)} + B_1 e^{i(\bar{k}_{rs} \vec{n}_{rs} - \omega t)} \quad (\text{A2.18})$$

Considerando  $\bar{k}_{rp}$  e  $\bar{k}_{rs}$  como números complexos do tipo:

$$\bar{k}_{rp} = k_{rp} + im \quad (\text{A2.19})$$

$$\bar{k}_{rs} = k_{rs} + im \quad (\text{A2.20})$$

e substituindo-os em (A2.17) e (A2.18) obtêm-se os potenciais de onda com amortecimento. São eles:

$$\phi = A_0 e^{-m \operatorname{sen} in (-az+x)} e^{ik(-az+x-ct)} + A_1 e^{-m \operatorname{sen} rp (az+x)} e^{ik(az+x-ct)} \quad (\text{A2.21})$$

$$\chi = B_0 e^{-m \operatorname{sen} in (-bz+x)} e^{ik(-bz+x-ct)} + B_1 e^{-m \operatorname{sen} rs (bz+x)} e^{ik(bz+x-ct)} \quad (\text{A2.22})$$

onde  $m$  é o coeficiente de amortecimento do sólido inferior.

O procedimento apresentado até aqui pode ser facilmente aplicado aos potenciais  $\phi'$  e  $\chi'$  do sólido superior resultando em:

$$\phi' = A_2 e^{-m' \operatorname{sen} tp (-a'z+x)} e^{ik(-a'z+x-ct)} \quad (\text{A2.23})$$

$$\chi' = B_2 e^{-m' \operatorname{sen} ts (-b'z+x)} e^{ik(-b'z+x-ct)} \quad (\text{A2.24})$$

onde  $m'$  é o coeficiente de amortecimento do sólido superior e

$$a' = \sqrt{\left(\frac{c}{c_1}\right)^2 - 1} \quad , \quad c > c_1' \quad (\text{A2.25})$$

$$b' = \sqrt{\left(\frac{c}{c_2}\right)^2 - 1} \quad , \quad c > c_2' \quad (\text{A2.26})$$

Quando ocorre incidência normal das ondas, os potenciais são obtidos observando-se que:

$$a = \operatorname{cotg} rp \quad (\text{A2.27})$$

$$b = \operatorname{cotg} rs \quad (\text{A2.28})$$

$$a' = \cotg tp \quad (A2.29)$$

$$b' = \cotg ts \quad (A2.30)$$

$$k = k_{rp} \operatorname{sen} rp = k_{rs} \operatorname{sen} rs = k_{tp} \operatorname{sen} tp = k_{ts} \operatorname{sen} ts \quad (A2.31)$$

onde  $k_{rp}$ ,  $k_{rs}$ ,  $k_{tp}$  e  $k_{ts}$  são os números das ondas P e S refletidas e P e S transmitidas, respectivamente.

Deste modo os potenciais de ondas com amortecimento, incidindo normalmente ao contorno, podem ser apresentados do seguinte modo:

$$\phi = A_0 e^{mz} e^{i(k_{rp} z + \omega t)} + A_1 e^{-mz} e^{i(k_{rp} z - \omega t)} \quad (A2.32)$$

$$\chi = B_0 e^{mz} e^{i(k_{rs} z + \omega t)} + B_1 e^{-mz} e^{i(k_{rs} z - \omega t)} \quad (A2.33)$$

$$\phi' = A_2 e^{m'z} e^{i(k_{tp} z + \omega t)} \quad (A2.34)$$

$$\chi' = B_2 e^{m'z} e^{i(k_{ts} z + \omega t)} \quad (A2.35)$$