UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
Departamento de Matemática
Curso de Especialização em Matemática-Formação de Professor na modalidade a distância

"Estudo Sobre Frações Contínuas"

Monografia submetida a Comissão de avaliação do Curso de Especialização em Matemática-Formação do professor em cumprimento parcial para a obtenção do título de Especialista em Matemática.

APROVADA PELA COMISSÃO EXAMINADORA em 17/07/2009

Dr. Licio Hernanes Bezerra (CFM/UFSC - Orientador) __________
Dr. Paulo Rafael Bösing (CFM/UFSC - Examinador) Paulo Rafael Bösing
Dr. Eliezer Batista (CFM/UFSC – Examinador) Eliezer Batista

N. Carvalho
Dra. Neri Terezinha Both Carvalho
Coordenadora do Curso de Especialização em Matemática-Formação de Professor

Florianópolis, Santa Catarina, julho de 2009.

Souza; Soares, Francisca; Rosilene

Estudo sobre Frações Contínuas / Francisca; Rosilene Souza; Soares

- 2009

.p

. I.Título.

CDU

Aos nossos pais e irmãos.

Aos amigos, pelo apoio e companheirismo.

Resumo

Neste trabalho, apresentaremos a teoria das frações contínuas, destacando a expansão de números reais (racionais e irracionais) e a convergência dessas frações. Veremos que os convergentes são obtidos a partir das expansões em frações contínuas e que o n-ésimo convergente é igual à sua própria fração contínua. Utilizando o Teorema de Lagrange e exemplos, apresentaremos frações contínuas periódicas, a partir das quais podemos caracterizar um irracional quadrático. Estudaremos também aplicações das frações contínuas em circuitos elétricos.

Palavras-chaves: Frações contínuas. Números irracionais.

Abstract

In this work will introduce the theory of the continuous fractions, detaching the expansion of real numbers (rational and irrational) and the convergence of these fractions. We will see that the convergents are obtained from the expansions of the continuous fractions and that the nth convergent is alike to its own continuous fraction. By using Lagrange's Theorem and examples, we will obtain the periodic continuous fractions, from which we will get a quadratic irrational. We will also present some applications of the continued fractions to the study of electric circuits.

Agradecimentos

Agradecemos aos nossos pais, pela compreensão, paciência, amor e apoio que sempre nos deram durante toda as nossas vidas.

Aos nossos familiares, pela compreensão e incentvo.

Ao esposo Arnobio e a meus pais Lourival e Bernarda, pelo carinho, paciência e ajuda nos momentos difíceis.

Aos nossos amigos, por dividirem conosco momentos alegres e difíceis das nossas vidas.

Aos nossos amigos do Curso de Especialização, que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho. Em especial, ao professor Miguel, pelo apoio e auxílio que nos concedeu durante a realização do mesmo.

Ao nosso orientador Licio Hernanes Bezerra, pela ajuda prestada na realização deste trabalho.

Aos nossos colegas de trabalho, pelo apoio e compreensão durante todo o curso.

Aos funcionários do CETECMA, pelos auxilios concedidos.

"Se A é o sucesso, então é igual a X mais Y mais Z. O trabalho é X; Y é o lazer; e Z é manter a boca fechada".

Albert Einstein

Sumário

1 Introdução **7**

2 Expansão dos Números em Frações Contínuas **9**

2.1 Conjunto dos Números Racionais 10

2.2 Conjunto dos Números Irracionais 14

2.2.1 Expansão de números irracionais em frações contínuas 18

2.2.2 Outras representações de números irracionais 21

3 Convergência das frações contínuas **24**

3.1 Convergentes de frações contínuas infinitas 24

3.2 Propriedades dos Convergentes 25

4 Frações contínuas periódicas **34**

4.1 Exemplos de frações contínuas periódicas 38

5 O número de ouro **41**

6 Aplicações **45**

6.1 Frações Contínuas em Circuitos Elétricos 45

7 Considerações Finais **49**

Referências Bibliográficas **50**

1 Introdução

As frações contínuas foram estudadas por grandes matemáticos dos séculos XVII e XVIII, tendo aplicações em Análise, Teoria dos Números, Circuitos Elétricos e outras áreas do conhecimento. O objetivo deste trabalho é apresentar uma outra maneira de representar números reais, fornecendo aproximações para números racionais e irracionais.

Definimos frações contínuas simples como expressões da seguinte forma:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}},$$

em que (a_n), $n \geq 1$ é uma seqüência de números naturais e a_0 é um número inteiro. A fração contínua acima é denotada por $a_0 + [a_1, a_2, a_3, \cdots]$. Se a fração for truncada no nível n, $a_0 + [a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n]$, o resultado é uma fração contínua simples, que é chamada de convergente da fração original. Por exemplo,

$$2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}}}$$

é um convergente da fração

$$2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4}}}}.$$

Se o número de termos for finito, dizemos que a fração contínua será finita; caso contrário, dizemos que é infinita. Veremos que qualquer fração racional p/q pode ser expandida em uma fração contínua finita:

$$p/q = a_0 + [a_1, a_2, a_3, a_{n-1}, a_n].$$

Para representar um número irracional em frações contínuas, recorremos à Transformação de Gauss, para mostrar que a sequência de convergentes da fração contínua associada a um número $x \in [0, 1)$ converge para x.

A seguir, estudaremos as frações contínuas periódicas que Lagrange caracterizou em 1770: um número irracional é periódico se, e somente se, este irracional for raiz de um polinômio do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, em que a, b, c são inteiros e $b^2 - 4ac$ é positivo, porém não é um quadrado perfeito. Por exemplo, o número de ouro ($\phi = 1 + \frac{\sqrt{5}}{2}$) é representado por $1 + [1, 1, 1, \cdots]$. Finalmente, mostraremos uma aplicação de frações contínuas em um problema de circuitos elétricos, utilizadas para obter a sequência a_i de uma associação de infinitos resistores.

2 Expansão dos Números em Frações Contínuas

Neste capítulo, apresentaremos uma outra maneira de representar números reais, fornecendo aproximações para eles: a expansão ou (representação) por frações contínuas simples ou regular.

O fato principal é que, dado qualquer número real x, existe uma sequência (a_n), $n \geq 1$, de números naturais, tal que escrevemos o número x da forma

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}} \tag{2.1}$$

em que a_0 é a parte inteira do número. A expressão 2.1 se chama expansão (representação) por frações contínuas simples de x. Além disso, o número x é o limite da sequência

$$\frac{p_n}{q_n} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}.$$

Chamamos os números a_i de quocientes de x e as frações $\frac{p_n}{q_n}$ de convergentes de x.

Definição 2.0.1. Uma fração contínua simples finita tem a forma

$$\frac{p_n}{q_n} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}},$$

e é também denotada por

$$\frac{p_n}{q_n} = a_0 + \frac{1}{a_1+}\,\frac{1}{a_2+}\ldots\frac{1}{a_n},$$

ou, simplesmente, por

$$\frac{p_n}{q_n} = a_0 + [a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n].$$

Veremos a seguir que um número real admite uma única representação em frações contínuas simples. E que, se esse for racional, sua expansão será finita.

2.1 Conjunto dos Números Racionais

Mostraremos, por meio de alguns exemplos, que podemos expressar um número racional em forma de fração contínua. Vejamos:

Exemplo 2.1.1. $\dfrac{79}{47} = 1+\dfrac{32}{47} = 1+\dfrac{1}{\frac{47}{32}} = 1+\dfrac{1}{1+\frac{15}{32}} = 1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{\frac{32}{35}}} = 1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{2}{15}}} =$

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\frac{15}{2}}}} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{7+\frac{1}{2}}}} = 1+[1,2,7,2].$$

Observa-se que o número $\dfrac{79}{47}$ admite uma expansão contínua finita.

Surge então algumas indagações: qualquer número racional possui expansão em frações contínuas? Em caso afirmativo, a expansão é finita?

Vejamos por meio de alguns exemplos, que qualquer racional possui representação em fração contínua:

Exemplo 2.1.2. $\dfrac{79\cdot 4}{47\cdot 4} = \dfrac{316}{188} = 1+\dfrac{128}{188} = 1+\dfrac{1}{\frac{188}{128}} 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\frac{8}{60}}} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\frac{60}{8}}}} =$

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{7+\frac{4}{8}}}} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{7+\frac{1}{2}}}} = 1+[1,2,7,2]$$

Exemplo 2.1.3. $\dfrac{47}{79} = 0+\dfrac{1}{\frac{79}{47}} = 0+\dfrac{1}{1+\frac{32}{47}} = 0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{47}{32}}} = 0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{15}{32}}} =$

$$0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{32}{15}}} = 0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\frac{2}{15}}}} = 0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\frac{15}{2}}}}} = 0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{7+\frac{1}{2}}}}} =$$

$0+[1,1,2,7,2]$

Exemplo 2.1.4. $-\dfrac{79}{47} = -2+\dfrac{15}{47} = -2+\dfrac{1}{\frac{47}{15}} = -2+\dfrac{1}{3+\frac{2}{15}} = -2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\frac{15}{2}}} =$

$$-2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{2}}}=-2+[3,7,2]$$

Responderemos as questões acima através do seguinte teorema

Teorema 2.1.1. *Um número $x \in \mathbb{R}$ é racional se, e somente se, admite uma expansão em frações contínuas finita.*

Demonstração:

Considere um número racional $\frac{p}{q}$ qualquer. Pelo algoritmo de Euclides, escrevemos: $\frac{p}{q} = a_0 + \frac{r_1}{q}$, em que $0 \leq r_1 < q$ e $a_0 = \left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor$. Lembremos que $\lfloor a \rfloor$ denota o maior inteiro menor que a. Vamos definir $r_0 = q$.

Se r_1 for nulo, $\frac{p}{q}$ é um número inteiro e então o processo termina na primeira etapa. Se $r_1 \neq 0$, obtemos

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{\frac{r_0}{r_1}}, \quad 0 < r_1 < r_0.$$

Seguindo agora o mesmo procedimento com $\frac{r_0}{r_1}$, teremos:

$$\frac{r_0}{r_1} = a_1 + \frac{r_2}{r_1}, \quad 0 \leq r_2 < r_1.$$

Se $r_2 = 0$, então o processo termina e, assim,

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1} = a_0 + [a_1].$$

Se $r_2 \neq 0$, repetimos o mesmo procedimento com a fração $\frac{r_1}{r_2}$.

Ocorre que, como $q > r_1 > r_2 \ldots \geq 0$, então para algum índice n, este processo é necessariamente finito, quando $r_{n+1} = 0$:

$$\begin{aligned}
&\frac{r_0}{r_1} = a_1 + \frac{r_2}{r_1} \Longrightarrow r_0 = a_1 r_1 + r_2, \quad 0 \leq r_2 < r_1;\\
&\frac{r_1}{r_2} = a_2 + \frac{r_3}{r_2} \Longrightarrow r_1 = a_2 r_2 + r_3, \quad 0 \leq r_3 < r_2;\\
&\frac{r_2}{r_3} = a_3 + \frac{r_4}{r_3} \Longrightarrow r_2 = a_3 r_3 + r_4, \quad 0 \leq r_4 < r_3;\\
&\vdots\\
&\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = a_{n-1} + \frac{r_n}{r_{n-1}} \Longrightarrow r_{n-2} = a_{n-1} r_{n-1} + r_n, \quad 0 \leq r_n < r_{n-1};\\
&\frac{r_{n-1}}{r_n} = a_n + \frac{r_{n+1}}{r_n} \Longrightarrow r_{n-1} = a_n r_n, \quad r_{n+1} = 0.
\end{aligned}$$

Este é o algoritmo da divisão de Euclides para encontrar o máximo divisor comum entre p e q ou $mdc(p,q) = r_n$:

		a_0	a_1	$\dots$	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
p	q	r_1	r_2	$\dots$	r_{n-1}	r_n	$r_{n+1} = 0$

Como $r_{n-1} > r_n$ e $r_{n+1} = 0$, temos que $a_n \geq 2$. Assim, a representação $a_0 + [a_1, a_2, \dots, a_n]$ para o racional p/q é única através do algoritmo de Euclides.Para termos unicidade na representação de um racional por frações contínuas simples, devemos exigir $a_n \geq 2$. Portanto,

$$\frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1}}}}} = a_0 + [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}]$$

O que prova o resultado. ∎

Como

$$\frac{1}{a_{n-1}} = \frac{1}{(a_{n-1} - 1) + \frac{1}{1}},$$

segue que $a_0 + [a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1} - 1, 1]$ seria também uma expressão de $\frac{p}{q}$.

Exemplo 2.1.5. Podemos escrever $1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \frac{1}{5}}}} = 1 + [2, 2, 3, 5]$

Ou,

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 - 1 + \frac{1}{1}}}}}.$$

Observação 2.1.1. Vamos supor que $x \in [0,1)$ é um número racional ($a_0 = 0$): $x = r_1/r_0$. Definindo

$$T_1 = \frac{r_2}{r_1},\ T_2 = \frac{r_3}{r_2}, \cdots,\ T_{n-1} = \frac{r_n}{r_{n-1}},$$

obtemos:

$$\frac{1}{x} = a_1 + T_1, \quad \frac{1}{T_1} = a_2 + T_2, \cdots, \quad \frac{1}{T_{n-2}} = a_{n-1} + T_{n-1}, \quad \frac{1}{T_{n-1}} = a_n + 0.$$

Essa é uma outra forma de se ver que a representação por fração contínua simples é única, se exigimos que $a_n \geq 2$.Segue que

$$x = \frac{1}{a_1 + T_1} = \frac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + T_2}} = \cdots = \frac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}.$$

Exemplo 2.1.6. Encontre a fração contínua que representa o número $\frac{67}{55}$ usando o algoritmo de Euclides.

Como

$$67 = 1 \cdot 55 + 12$$

$$55 = 4 \cdot 12 + 7$$

$$12 = 1 \cdot 7 + 5$$

$$7 = 1 \cdot 5 + 2$$

$$5 = 2 \cdot 2 + 1$$

$$2 = 2 \cdot 1 + 0$$

Temos,

		1	4	1	1	2	2
67	55	12	7	5	2	1	0

Logo,

$$\frac{67}{55} = 1 + \frac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}} = 1 + [4, 1, 1, 2, 2].$$

Propriedade 2.1.1. *Considere a seguinte representação em fração contínua do racional* p/q, $p > q$: $\frac{p}{q} = a_0 + [a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n]$. *Então a representação de* q/p *é*

$$\frac{q}{p} = 0 + [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n].$$

Demonstração: Por hipótese, $p > q$. Logo,

$$\frac{q}{p} = 0 + \frac{1}{\frac{p}{q}}.$$

Como, $p/q = a_0 + [a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n]$,

$$\frac{q}{p} = 0 + \cfrac{1}{a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}.$$

■

Observemos que a recíproca obviamente é verdadeira.

2.2 Conjunto dos Números Irracionais

Para construir a expansão de um número irracional x em frações contínuas utilizaremos a transformação de Gauss, que será definida a seguir. Veremos, na sequência, que a sequência dos convergentes $a_0 + [a_1, a_2, + \ldots, +a_n]$, converge para x.

Definição 2.2.1. A Transformação de Gauss $T : [0, 1) \Longrightarrow [0, 1)$ é definida por:

$$T(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

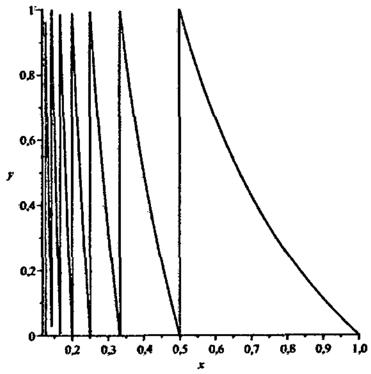


Figura 2.1: Transformação de Gauss

Propriedade 2.2.1. *Se x é irracional, então $T(x)$ é irracional. Portanto, se x é irracional então $T^n(x)$ é irracional para todo n.*

Demonstração:

(1) (a) $x \notin \mathbb{Q} \Longrightarrow \frac{1}{x} \notin \mathbb{Q}$

Suponha, que $x \notin \mathbb{Q}$ e $\frac{1}{x} \in \mathbb{Q}$. Se $\frac{1}{x} \in \mathbb{Q}$, então $\left(\frac{1}{x}\right)^{-1} \in \mathbb{Q}$ (pois $\mathbb{Q}$ é um corpo). Mas, $\left(\frac{1}{x}\right)^{-1} = x$, que é irracional, o que é absurdo!

(1) (b) $x \notin \mathbb{Q} \Longrightarrow (\forall z \in \mathbb{Z})\ x + z \notin \mathbb{Q}$

Se $x + z \in \mathbb{Q}$, então $x + z + (-z) \in \mathbb{Q}$, ou seja, $x \in \mathbb{Q}$. Absurdo!

Observação 2.2.1. (a) e (b) $\Longrightarrow T(x) \notin \mathbb{Q}$ se $x \notin \mathbb{Q}$. E a recíproca é verdadeira: $T(x) \notin \mathbb{Q} \Longrightarrow x \notin \mathbb{Q}$.

$$\frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \notin \mathbb{Q} \Longrightarrow \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \notin \mathbb{Q} \Longrightarrow \frac{1}{x} \notin \mathbb{Q} \Longrightarrow \frac{1}{\frac{1}{x}} \notin \mathbb{Q},$$

ou seja, $x \notin \mathbb{Q}$.

(2) $(\forall n \in \mathbb{Z}^+)$ $T^n(x) \notin \mathbb{Q}$, se $x \notin \mathbb{Q}$.

Demonstração (por indução):

Para $n = 1$ é verdadeira, isto é, $x \notin \mathbb{Q} \Longrightarrow T(x) \notin \mathbb{Q}$. Mostraremos agora para $n \geq 1$ que, se $x \notin \mathbb{Q}$, então $T^n(x) \notin \mathbb{Q}$.

Seja $y = T^n(x)$. Por hipótese de indução, $y \notin \mathbb{Q}$. Logo, $T^{n+1}(x) = (T_0 T^n(x) = T(T^n(x)) = T(y) \notin \mathbb{Q}$, pois $y \notin \mathbb{Q}$. ■

Lema 2.2.1. Se $x \in [0,1)$ é irracional, então $T^j(x) = T_j$ (definido na Observação 2.1.1) para todo $j \geq 1$.

Demonstração (por indução):

Para $j = 1$, $x = \dfrac{r_1}{r_0} = \dfrac{1}{\frac{r_0}{r_1}}$. Como $x \in [0,1)$, $0 < r_1 < r_0$ e, logo, $r_0 = a_1 r_1 + r_2$, com $0 < r_2 < r_1$. Assim,

$$\frac{r_0}{r_1} = a_1 + \frac{r_2}{r_1} \Longrightarrow a_1 = \left\lfloor \frac{r_0}{r_1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor.$$

Pela hipótese de indução, temos:

$$T_1 = \frac{r_2}{r_1} = \frac{r_0}{r_1} - a_1 = \frac{r_0}{r_1} - \left\lfloor \frac{r_0}{r_1} \right\rfloor = \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = T(x) = T^1(x)$$

(b) Suponha que $T^j(x) = T_j$, para $1 \leq j \leq n$. Observe que

$$x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots \cfrac{1}{a_n + \cfrac{r_{n+1}}{r_n}}}}.$$

Então, se

$$r_n = a_{n+1} r_{n+1} + r_{n+2},$$

temos

$$\frac{r_n}{r_{n+1}} = a_{n+1} + \frac{r_{n+2}}{r_{n+1}} \Longrightarrow a_{n+1} = \left\lfloor \frac{r_n}{r_{n+1}} \right\rfloor.$$

Por definição

$$T_{n+1} = \frac{r_{n+2}}{r_{n+1}} = \frac{r_n}{r_{n+1}} - a_{n+1} = \frac{r_n}{r_{n+1}} - \left\lfloor \frac{r_n}{r_{n+1}} \right\rfloor$$

Por hipótese de indução,

$$T^{n+1}(x) = T(T^n(x)) = T\left(\frac{r_{n+1}}{r_n}\right) = \frac{r_n}{r_{n+1}} - \left\lfloor \frac{r_n}{r_{n+1}} \right\rfloor = T_{n+1}.$$

Logo, $T^{n+1}(x) = T_{n+1}(x)$. O que conclui a demonstração do Lema. ■

Do Lema acima, concluimos que

$$x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}}$$

e,

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_1(x) = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \\
a_2 &= a_2(x) = \left\lfloor \frac{r_1}{r_2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{T_1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{T(x)} \right\rfloor \\
&\vdots \\
a_n &= a_n(x) = \left\lfloor \frac{r_{n-1}}{r_n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{T_{n-1}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{T^{n-1}(x)} \right\rfloor, \text{ ou seja, } a_n(x) = \left\lfloor \frac{1}{T^{n-1}(x)} \right\rfloor,
\end{aligned}$$

com $n \geq 1$.

Com as definições de $T(x)$ e $a_1(x)$, temos:

$$x = \frac{1}{a_1(x) + T(x)} \Longrightarrow T(x) = \frac{1}{a_1(T(x)) + T(T(x))} = \frac{1}{a_2(x) + T^2(x)}.$$

Então,

$$\begin{aligned}
x &= \cfrac{1}{a_1(x) + \cfrac{1}{a_2(x) + \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1}(x) + \cfrac{1}{a_n(x) + T^n(x)}}}} = \\
&= [a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x) + T^n(x)].
\end{aligned}$$

Portanto, se $x \in \mathbb{R}$ e $a_0 \in \mathbb{Z}$ é a parte inteira de x, temos que

$$\begin{aligned}
x &= a_0(x) + \cfrac{1}{a_1(x) + \cfrac{1}{a_2(x) + \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1}(x) + \cfrac{1}{a_n(x) + T^n(x)}}}} = \\
&= a_0(x) + [a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x) + T^n(x)]
\end{aligned}$$

Observação 2.2.2. Note que, para todo $n \geq 1$,

$$T^n(x) = \frac{1}{a_1(T^n(x)) + T(T^n(x))} = \frac{1}{a_{n+1}(x) + T^{n+1}(x)}.$$

Exemplo 2.2.1. Obter a expansão de $\sqrt{2}$ usando a transformação de Gauss.

Como $a_0 = \lfloor\sqrt{2}\rfloor = 1$, segue que $y = x - a_0 \in [0,1)$.

Então,

$$a_1(y) = \left\lfloor \frac{1}{y} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{2}-1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\sqrt{2}+1}{1} \right\rfloor = 2,$$

$$a_2(y) = \left\lfloor \frac{1}{T(y)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{\frac{1}{y} - \lfloor\frac{1}{y}\rfloor} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{2}+1-2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{2}-1} \right\rfloor = \sqrt{2}+1 = 2,$$

$$a_3(y) = \left\lfloor \frac{1}{T^2(y)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{\frac{1}{T(y)} - \lfloor\frac{1}{T(y)}\rfloor} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{2}+1-2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{2}-1} \right\rfloor =$$

$$= \left\lfloor \sqrt{2}+1 \right\rfloor = 2.$$

Concluimos, que $2 = a_1(y) = a_2(y) = a_3(y) = \ldots = a_n(y), n \geq 1$.

Logo, a expansão de $\sqrt{2}$ é dada por

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2+ \ddots}}}$$

2.2.1 Expansão de números irracionais em frações contínuas

Nesta seção construiremos a expansão de um número irracional em frações contínuas utilizando aproximações sucessivas.

Seja x um número irracional e seja $a_0 = \lfloor x \rfloor$, ou seja, a_0 é o maior inteiro menor do que x. Logo,

$$x = a_0 + \frac{1}{x_1}, \ 0 < \frac{1}{x_1} < 1$$

e,

$$x_1 = \frac{1}{x - a_0} \quad e \quad x_1 > 1.$$

Então, podemos escrever

$$x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2},$$

em que $a_1 = \lfloor x_1 \rfloor$, x_2 é irracional e $x_2 > 1$. Assim,

$$x_2 = \frac{1}{x_1 - a_1}.$$

Repetindo, sucessivamente, este processo, obtemos as seguintes equações:

$$x = a_0 + \frac{1}{x_1}, \; x_1 > 1$$

$$x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}, \; x_2 > 1 \; a_1 \geq 1$$

$$x_2 = a_2 + \frac{1}{x_3}, \quad x_3 > 1, \quad a_2 \geq 1$$

$$x_n = a_n + \frac{1}{x_{n+1}}, \quad x_{n+1} > 1, \quad a_n \geq 1,$$

em que $a_0, a_1, \ldots, a_n$, são inteiros e $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ são irracionais.

Observamos que este processo não termina, pois isto só aconteceria se $x_n = a_n$ para algum n, o que é impossível, pois x_n não é racional.

Através de substituições apropriadas, obtemos a fração contínua infinita

$$x = a_0 + \frac{1}{x_1} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{x_2}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{x_3}}} =$$

$$= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_n + \ddots}}}},$$

sendo denotada por:

$$a_0 + [a_1, a_2, \cdots] = \lim_{n \to \infty} a_0 + [a_1, a_2, \ldots, a_n].$$

Exemplo 2.2.2. Encontrar a fração contínua de $\sqrt{3}$.

Sendo $a_0 = \lfloor \sqrt{3} \rfloor = \lfloor 1,7320508\ldots \rfloor = 1$ e $\sqrt{3} = a_0 + \frac{1}{x_1} = 1 + \frac{1}{x_1}$, temos

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{1}{\sqrt{3}-1} . \frac{(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

Consequentemente

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{x_1} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{3}+1}{2}}.$$

Como

$$a_1 = \lfloor \frac{\sqrt{3}+1}{2} \rfloor = 1,$$

então,

$$\frac{\sqrt{3}+1}{2} = 1 + \frac{1}{x_2}$$

e

$$x_2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2} - 1} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}-1}{2}} = \sqrt{3}+1.$$

Logo,

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{x_1} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x_2}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{3}+1}}.$$

Como

$$a_2 = \lfloor \sqrt{3}+1 \rfloor = 2,$$

segue que

$$\sqrt{3}+1 = x_2 = a_2 + \frac{1}{x_3} = 2 + \frac{1}{x_3}.$$

Resolvendo x_3 obtemos,

$$x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}+1-2} = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

Continuando o processo, temos

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\ddots}}}}$$

Exemplo 2.2.3. Expressar $\sqrt{7}$ como uma fração contínua.

Observe que $\sqrt{7} = \lfloor 2,6457513\ldots \rfloor = 2 \Longrightarrow a_0 = 2$. Logo,

$$\sqrt{7} = 2 + \frac{1}{x_1} \Longrightarrow x_1 = \frac{1}{\sqrt{7}-2}.\frac{(\sqrt{7}+2)}{(\sqrt{7}+2)} =$$

$$= \frac{\sqrt{7}+2}{3} \Longrightarrow a_1 = 1.$$

Logo,

$$\frac{\sqrt{7}+2}{3} = 1 + \frac{1}{x_2} \Longrightarrow x_2 = \frac{3}{\sqrt{7}-1} = \frac{3}{\sqrt{7}-1}\cdot\frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{7}+1} = \frac{\sqrt{7}+1}{2} \Longrightarrow a_2 + 1,$$

segue que

$$\frac{\sqrt{7}+1}{2} = 1 + \frac{1}{x_3} \Longrightarrow x_3 = \frac{1}{\frac{\sqrt{7}+1}{2} - 1} = \frac{1}{\frac{\sqrt{7}+1-2}{2}} = \frac{\sqrt{7}+1}{3} \Longrightarrow a_3 = 1.$$

Continuando o processo, temos

$$\frac{\sqrt{7}+1}{3} = 1 + \frac{1}{x_4} \Longrightarrow x_4 = \frac{1}{\frac{\sqrt{7}+1-3}{3}} = \sqrt{7}+2 \Longrightarrow a_4 = 4.$$

Portanto

$$\sqrt{7} = 2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\ddots}}}}$$

Vejamos outras representações de frações contínuas:

$$\sqrt{10} = 3 + [6, 6, 6, \cdots] = 3 + [\overline{6}]$$

$$\sqrt{2} = 1 + [2, 2, \cdots] = 1 + [\overline{2}]$$

$$\sqrt{5} = 2 + [4, 4, \cdots] = 2 + [\overline{4}]$$

$$-\sqrt{2} = -2 + [1, 1, 2, 2, \cdots] = -2 + [1, 1, \overline{2}]$$

$$-\sqrt{3} = -2 + [3, 1, 2, 1, 2, \cdots] = -2 + [3, \overline{1, 2}]$$

2.2.2 Outras representações de números irracionais

Seja $x = \sqrt{n}$, com $n \in \mathbb{N}$, em que n não é um quadrado perfeito. Podemos também representá-lo em forma de frações contínuas, podendo ser simples(todos os numeradores iguais a 1) ou não. Para tanto, obedecemos os seguintes passos:

- Temos a e b $\in \mathbb{N}$ tais que $n = a^2 + b$. Logo,
$$\sqrt{n} - a = (\sqrt{n} - a) \cdot \frac{(\sqrt{n}+a)}{(\sqrt{n}+a)} = \frac{n-a^2}{\sqrt{n}+a} = \frac{b}{2a+\sqrt{n}-a}.$$
- Repetindo o processo indutivamente, encontramos
$$\sqrt{n} - a = \frac{b}{2a+\sqrt{n}-a} = \cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\sqrt{n}-a}}}.$$

Assim,

$$\sqrt{n} = a + \cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\ddots}}}.$$

Exemplo 2.2.4. Expressar $\sqrt{12}$ como uma fração contínua.

Como $12 = 3^2 + 3$, então

$$\sqrt{12} - 3 = (\sqrt{12} - 3) \cdot \frac{(\sqrt{12} + 3)}{(\sqrt{12} + 3)} = \frac{12 - 9}{\sqrt{12} + 3 + 3 - 3} = \frac{3}{6 + \sqrt{12} - 3} =$$

$$= \frac{3}{6 + \sqrt{12} - 3} = \frac{3}{\sqrt{12} + 3} = \frac{3\sqrt{12} - 9}{12 - 9} = \frac{3\sqrt{12} - 9}{3} = \sqrt{12} - 3.$$

Logo,

$$\sqrt{12} - 3 = \frac{3}{6 + \sqrt{12} - 3} = \frac{3}{6 + \cfrac{3}{6 + \sqrt{12} - 3}} = \frac{3}{6 + \cfrac{3}{6 + \cfrac{3}{6 + \sqrt{12} - 3}}} =$$

$$= \sqrt{12} = 3 + \cfrac{3}{6 + \cfrac{3}{6 + \cfrac{3}{6 + \ddots}}} = 3 + \frac{3}{6+}\,\frac{3}{6+}\,\frac{3}{6+\dots}.$$

Neste caso, conseguimos transformar esta fração em fração contínua simples, pois $b = 3$ divide $2a = 6$. Assim, dividiremos o numerador e o denominador de algumas frações por b e, somente, o numerador das frações intermediárias por b. Então

$$\sqrt{12} = 3 + \frac{3}{6+}\,\frac{3}{6+}\,\frac{3}{6+\dots} =$$

$$= 3 + \frac{3/3}{6/3+}\,\frac{3/3}{6+}\,\frac{3/3}{6/3+\dots} =$$

$$= 3 + \frac{1}{2+}\,\frac{1}{6+}\,\frac{1}{2+\dots}.$$

Portanto,

$$\sqrt{12} = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}.$$

Exemplo 2.2.5. Representar $\sqrt{20}$ em fração contínua simples

Como $20 = 4^2 + 4$, temos

$$\sqrt{20} = 4 + \cfrac{4}{8 + \cfrac{4}{8 + \cfrac{4}{8 + \ddots}}} = 4 + \frac{4}{8+}\,\frac{4}{8+}\,\frac{4}{8+\dots}.$$

Transformando em frações contínuas simples, em que $b = 4$ divide $2a = 8$, temos:

$$\sqrt{20} = 4 + \frac{4}{8+}\,\frac{4}{8+}\,\frac{4}{8+\dots} =$$

$$= 4 + \frac{4/4}{8/4+}\,\frac{4/4}{8+}\,\frac{4/4}{8/4+\dots} =$$

$$= 4 + \frac{1}{2+}\,\frac{1}{8+}\,\frac{1}{2+\dots}.$$

Portanto,

$$\sqrt{20} = 4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{2+\ddots}}}.$$

Exemplo 2.2.6. Representar $\sqrt{19}$ como fração contínua.

Temos $19 = 4^2 + 3$. Então

$$\sqrt{19} - 4 = (\sqrt{19} - 4) \cdot \frac{(\sqrt{19} + 4)}{(\sqrt{19} + 4)} = \frac{19 - 16}{\sqrt{19} + 4} = \frac{3}{\sqrt{19} + 4} =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{19} + 4 + 4 - 4} = \frac{3}{8 + \sqrt{19} - 4}.$$

Seguindo a sequência anterior, obtemos

$$\sqrt{19} = 4 + \frac{3}{8+}\,\frac{3}{8+}\,\frac{3}{8+\dots}.$$

Como $b = 3$ não divide $2a = 8$, não podemos transformar esta fração numa fração contínua simples.

3 Convergência das frações contínuas

3.1 Convergentes de frações contínuas infinitas

Observamos que todo número irracional pode ser, formalmente, representado na forma de fração contínua infinita. Lembremos que se o número é racional, isto é,

$$\frac{p}{q} = a_0 + [a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, a_n],$$

com a_0 inteiro e $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, a_n$, inteiros positivos. Prosseguindo, sejam

$$c_1 = a_0 + \frac{1}{a_1},\ c_2 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}},\ c_3 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}}, \cdots,$$

em que c_1, c_2, c_3, ... são, respectivamente, os convergentes de $a_0 + [a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, a_n]$; o n-ésimo convergente, neste caso, é a própria fração contínua, ou seja, o próprio número racional.

Vamos considerar $p_{-1} = 1$, $q_{-1} = 0$. Assim,

$$c_0 = \frac{a_0}{1} = \frac{p_0}{q_0},\ p_0 = a_0,\ q_0 = 1;$$

$$c_1 = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1} = \frac{p_1}{q_1},\ p_1 = a_1 a_0 + 1,\ q_1 = a_1;$$

$$\vdots$$

$$c_n = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}} = \frac{p_n}{q_n}.$$

Exemplo 3.1.1. Seja a fração contínua simples

$$x = 1 + \frac{1}{2+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{2+\ldots}.$$

Então os primeiros convergentes são: $c_0 = 1/1 = 1$, $c_1 = 3/2 = 1,5$, $c_2 = 4/3 = 1,333...$, $c_3 = 11/8 = 1,375$, $c_4 = 15/11 = 1,3636...$ $c_5 = 41/30 = 1,36666$ etc

3.2 Propriedades dos Convergentes

Dado um número real $x \in [0,1)$, existe uma representação $\frac{p_n}{q_n}$ do n-ésimo convergente $[a_1, a_2, \cdots, a_n]$ que verifica as propriedades (I), (II), (III), (IV) e (V) abaixo. Isto implicará que, para todo n, a fração $\frac{p_n}{q_n}$ é irredutível. Temos então que os p_n e os q_n podem ser escolhidos de forma que as propriedades abaixo sejam satisfeitas.

Consideremos $p_{-1} = 1$, $q_{-1} = 0$, $p_0 = 0$ e $q_0 = 1$. Então

(I) Para todo $n \geq 1$

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \;\; e \;\; q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2};$$

(II) Para todo $n \geq 0$,

$$p_{n-1}q_n - p_n q_{n-1} = (-1)^n;$$

(III) Para todo $n \geq 0$,

$$x = \frac{p_n + (T^n(x))p_{n-1}}{q_n + (T^n(x))q_{n-1}};$$

(IV) Para todo $n \geq 0$,

$$p_n(x) = q_{n-1}(T(x));$$

(V) Para todo $n \geq 0$,

$$p_n(x) \geq 2^{(n-2)/2} \text{ e } q_n(x) \geq 2^{(n-1)/2}.$$

Provaremos as propriedades supracitadas usando o método de indução.

Demonstração da Propriedade I

a) Para $n = 1$, temos:

$$\frac{p_0}{q_0} = 0 \text{ e } \frac{p_1}{q_1} = p_0 + [a_1] = p_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{p_0 a_1 + 1}{a_1}.$$

Então,

$$p_1 = a_1 p_0 + p_{-1} \text{ e } q_1 = a_1 q_0 + q_{-1}.$$

b) Suponha agora, por hipótese de indução que a propriedade é verdadeira para algum $n \geq 1$. Provaremos então, que a propriedade também é válida para n + 1. Sabemos que, por hipótese de indução, $\forall n \geq 1$, temos

$$[a_1, a_2, \cdots, a_n] = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}.$$

Substituindo agora a_n por $a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}}$ na expressão do n-ésimo termo convergente, temos:

$$[a_1, \cdots, a_n, a_{n+1}] = \frac{\left(a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}}\right)p_{n-1} + p_{n-2}}{\left(a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}}\right)q_{n-1} + q_{n-1}} =$$

$$= \frac{\left(\dfrac{a_n a_{n+1} + 1}{a_{n+1}}\right)p_{n-1} + p_{n-2}}{\left(\dfrac{a_n a_{n+1} + 1}{a_{n+1}}\right)q_{n-1} + q_{n-2}} =$$

$$= \frac{a_n a_{n+1} p_{n-1} + p_{n-1} + p_{n-2} a_{n+1}}{a_n a_{n+1} q_{n-1} + q_{n-1} + q_{n-2} a_{n+1}} =$$

$$= \frac{a_{n+1}(a_n p_{n-1} + p_{n-2}) + p_{n-1}}{a_{n+1}(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) + q_{n-1}}.$$

Recordando que, por hipótese de indução,

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \text{ e } q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2},$$

temos:

$$[a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}] = \frac{a_{n+1} p_n + p_{n-1}}{a_{n+1} q_n + q_{n-1}}.$$

Então, como

$$[a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}] = p_{n+1}/q_{n+1},$$

podemos escolher

$$p_{n+1} = a_{n+1} p_n + p_{n-1} \quad e \quad q_{n+1} = a_{n+1} q_n + q_{n-1}$$

■

Demonstração da Propriedade II:

Para $n = 0$, temos $p_{-1}q_0 - p_0q_{-1} = (-1^0) = 1$, pois

$$p_{-1} = q_0 = 1;\ q_{-1}\ e\ p_0 = 0.$$

Provaremos agora que a mesma relação também se verifica quando substituímos n por $n+1$. Sabemos, da propriedade (I), que

$$p_{n+1} = a_{n+1}p_n + p_{n-1}\ e\ q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} &= (a_{n+1}p_n + p_{n-1})q_n - p_n(a_{n+1}q_n + q_{n-1}) = \\ &= a_{n+1}p_nq_n + p_{n-1}q_n - a_{n+1}q_np_n - q_{n-1}p_n = \\ &= p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1} = \\ &= (-1)(p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n). \end{aligned}$$

Usando agora a hipótese de indução, obtemos

$$p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)(-1)^n = (-1)^{n+1},$$

o que conclui a demonstração. ■

Observação 3.2.1. Por (I) e (II), vemos que dado $[a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots]$, em que $(\forall k \geq 1)\, a_k > 0$ $(a_k \in \mathbb{Z})$, p_n e q_n ficam definidos de modo único pela interação: $p_{-1} = q_0 = 1$, $q_{-1} = 0$, $p_0 = 0$ e

$$\begin{cases} p_n &= a_np_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n &= a_nq_{n-1} + q_{n-2} \end{cases}.$$

Observação 3.2.2. Veja que a propriedade (II) nos diz que o máximo divisor comum de p_n e q_n deve ser igual a 1.

Demonstração da Propriedade III:

Vemos que, para $n = 0$, a igualdade se verifica pois $T^0(x) = x$.

Vamos supor que a igualdade se verifica para todo $k = 1, ..., n$. Temos que, pela observação 2.2.2,

$$\frac{p_{n+1} + T^{n+1}(x).p_n}{q_{n+1} + T^{n+1}(x).q_n} = \frac{p_{n+1} - (a_{n+1} - 1/T^n(x)).p_n}{q_{n+1} - (a_{n+1} - 1/T^n(x)).q_n} =$$

$$= \frac{(p_{n+1} - a_{n+1}p_n).T^n(x) + p_n}{(q_{n+1} - a_{n+1}q_n).T^n(x) + q_n}.$$

Mas, pela propriedade I, isso é igual a

$$\frac{(a_{n+1}p_n + p_{n-1} - a_{n+1}p_n).T^n(x) + p_n}{(a_{n+1}q_n + q_{n-1} - a_{n+1}q_n).T^n(x) + q_n} =$$

$$= \frac{p_n + T^n(x)p_{n-1}}{q_n + T^n(x)q_{n-1}}.$$

Porém, pela hipótese de indução, isto é igual a x. ∎

Demonstração da Propriedade IV:

Utilizando o processo de indução, provemos que para todo $n \geq 0$, são verdadeiras as seguintes condições:

a) Para todo $n = 0$, temos

$$q_{0-1}(T(x)) = q_{-1}(T(x)) = 0 = p_0(x).$$

b) Para $n = 1$, obtemos

$$q_{1-1}(T(x)) = q_0(T(x)) = 1 = p_1(x)$$

Provemos agora, que é válido para $n \geq 1$.

$$q_{(n+1)-1}(T(x)) = q_n(T(x)).$$

Por indução,

$$q_n(T(x)) = a_{n+1}q_{n-1}(T(x)) + q_{n-2}(T(x)) = a_{n+1}p_n(x) + p_{n-1}(x) = p_{n+1}(x),$$

o que conclui a demonstração. ∎

Demonstração da Propriedade V:

a) Para $n = 1$, temos:

$$p_1 = a_1p_0 + p_{-1} = 0 + 1 \geq 2^{\frac{0-2}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$q_1 = a_1q_0 + q_{-1} = a_1 \geq 1 \geq 2^{\frac{0-1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

a') Para $n = 2$,

$$p_2 = a_2p_1 + p_0 = a_2(0+1) + 0 =$$

$$= a_2 \geq 1 = 2^{\frac{1-1}{2}} = 2^0 = 1.$$

$$q_2 = a_2q_1 + q_0 = a_2a_1 + 1 \ \geq \ 2^{(2-1)/2} = \sqrt{2}$$

b) Para $n \geq 2$, $p_n \geq 2^{\frac{n-2}{2}}$ e $q_n \geq 2^{\frac{n-1}{2}}$. Logo,

$$p_{n+1} = a_{n+1}p_n + p_{n-1} \geq a_{n+1}2^{\frac{n-2}{2}} + 2^{\frac{n-1-2}{2}} \geq$$

$$\geq 2^{\frac{n-2}{2}} + 2^{\frac{n-3}{2}} = 2^{\frac{n-3+1}{2}} + 2^{\frac{n-3}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{n-3}{2}} + 2^{\frac{n-3}{2}} =$$

$$= 2^{\frac{n-3}{2}} \cdot \left(2^{\frac{1}{2}} + 1\right) \geq 2^{\frac{n-3}{2}} \cdot 2 = 2^{\frac{n-3}{2}+\frac{2}{2}} = 2^{\frac{(n+1)-2}{2}}.$$

b')

$$q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1} \geq a_{n+1} \cdot 2^{\frac{n-1}{2}} + 2^{\frac{n-1-1}{2}} =$$

$$= a_{n+1} \cdot 2^{\frac{n-1}{2}} + 2^{\frac{n-2}{2}} \geq 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{n-2}{2}} + 2^{\frac{n-2}{2}} =$$

$$= 2^{\frac{n-2+1}{2}} + 2^{\frac{n-2}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{n-2}{2}} + 2^{\frac{n-2}{2}} =$$

$$= 2^{\frac{n-2}{2}}\left(2^{\frac{1}{2}} + 1\right) \geq 2^{\frac{n-2}{2}} \cdot 2 = 2^{\frac{n-2}{2}+\frac{2}{2}} = 2^{\frac{n}{2}}.$$

Com as propriedades acima, podemos provar que os convergentes de um número x convergem para x.Para isso provaremos o seguinte lema:

Lema 3.2.1. *Dado* $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \frac{p_2}{q_2} < \ldots < \frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \ldots < \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} < \ldots < \frac{p_i}{q_i}$.

Pela propriedade II, $p_{i-1}q_i - p_iq_{i-1} = (-1)^i$, a qual é válida sendo a fração contínua finita ou não. Dividindo ambos os membros desta igualdade por q_iq_{i-1}, temos

$$\frac{p_{i-1}q_i}{q_iq_{i-1}} - \frac{p_iq_{i-1}}{q_iq_{i-1}} = \frac{(-1)^i}{q_iq_{i-1}} \Longrightarrow \frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} - \frac{p_i}{q_i} = \frac{(-1)^i}{q_iq_{i-1}}, i \geq 1 \tag{3.1}$$

Como, pela Propriedade I, $p_i = a_ip_{i-1} + p_{i-2}$, temos que:

$$\frac{p_{i-2}}{q_{i-2}} - \frac{p_i}{q_i} = \frac{p_{i-2}q_i - p_iq_{i-2}}{q_{i-2}q_i} =$$

$$= \frac{p_{i-2}(a_iq_{i-1} + q_{i-2}) - (a_ip_{i-1} + p_{i-2})q_{i-2}}{q_{i-2}q_i} =$$

$$= \frac{a_ip_{i-2}q_{i-1} + p_{i-2}q_{i-2} - a_ip_{i-1}q_{i-2} - p_{i-2}q_{i-2}}{q_{i-2}q_i} =$$

$$= \frac{a_i(p_{i-2}q_{i-1} - p_{i-1}q_{i-2})}{q_{i-2}q_i} = \frac{a_i(-1)^{i-1}}{q_{i-2}q_i},$$

e, pela propriedade II, segue que

$$\frac{p_{i-2}}{q_{i-2}} - \frac{p_i}{q_i} = \frac{a_i(-1)^{i-1}}{q_{i-2}q_i}, \; com \;\; i \geq 2 \tag{3.2}$$

Tomando $i = 2n$ e $2n+1$ em (3.1) e $2n+1$ em (3.2), obtemos, respectivamente,

$$\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} - \frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \frac{(-1)^{2n}}{q_{2n-1}q_{2n}} = \frac{1}{q_{2n-1}q_{2n}} > 0, \; \frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}};$$

$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}} - \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} = \frac{(-1)^{2n+1}}{q_{2n}q_{2n+1}} = \frac{-1}{q_{2n}q_{2n+1}} < 0, \; \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} > \frac{p_{2n}}{q_{2n}};$$

$$\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} - \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} = \frac{a_{2n+1}(-1)^{2n}}{q_{2n-1}q_{2n+1}} = \frac{a_{2n+1}}{q_{2n-1}q_{2n+1}} > 0, \; \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} < \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}.$$

Logo,

$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} < \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}.$$

Usando, agora, $i = (2n+1)$ e $i = (2n+2)$ em (3.1) e $i = (2n+2)$ em (3.2), repetiremos o processo obtendo as seguintes desigualdades

$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}} - \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} = \frac{(-1)^{2n+1}}{q_{2n}q_{2n+1}} = \frac{-1}{q_{2n}q_{2n+1}} < 0, \; \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} > \frac{p_{2n}}{q_{2n}};$$

$$\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} - \frac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}} = \frac{(-1)^{2n+2}}{q_{2n+1}q_{2n+2}} = \frac{1}{q_{2n+1}q_{2n+2}} > 0, \; \frac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}} < \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}};$$

$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}} - \frac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}} = \frac{a_{2n+2}(-1)^{2n+1}}{q_{2n}q_{2n+2}} = \frac{-a_{2n+2}}{q_{2n}q_{2n+2}} < 0, \frac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}} > \frac{p_{2n}}{q_{2n}}.$$

Portanto,

$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \frac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}} < \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}},$$

o que conclui a demonstração.

De fato, da prova do Lema é possível obter

$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \frac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}} < \cdots < \frac{p_{2n+3}}{q_{2n+3}} < \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}.$$

O que acabamos de mostrar é que a sequência dos convergentes de índice ímpar, $(2n+1)$, forma uma sequência decrescente, que é limitada inferiormente, e que a sequência dos convergentes de índice par, $(2n)$, forma uma sequência crescente, que é limitada superiormente.

Provaremos agora, que o limite L para o qual a sequência dos convergentes converge é, na realidade, o número irracional que deu origem à fração contínua. Mostraremos que o $\lim \frac{p_i}{q_i}$ existe e é x. Pelo lema

$$\frac{p_{2i}}{q_{2i}} < x < \frac{p_{2i-1}}{q_{2i-1}}.$$

Segue que

$$0 < x - \frac{p_{2i}}{q_{2i}} < \frac{p_{2i-1}}{q_{2i-1}} - \frac{p_{2i}}{q_{2i}},$$

e que, pela propriedade (II),

$$0 <| xq_{2i} - p_{2i} |< \left|\frac{p_{2i-1}q_{2i}}{q_{2i-1}} - p_{2i}\right| = \left|\frac{p_{2i-1}q_{2i} - p_{2i}q_{2i-1}}{q_{2i-1}}\right| = \left|\frac{(-1)^{2i}}{q_{2i-1}}\right| = \frac{1}{q_{2i-1}}.$$

Por absurdo, suponhamos que $x \in \mathbb{Q}$ e $x = \frac{b}{a}$. Então, multiplicando a desigualdade anterior por a, temos:

$$0 <| xq_{2i}a - p_{2i}a |=| bq_{2i} - p_{2i}a |< \frac{a}{q_{2i-1}}.$$

Sabemos que a sequência dos $q_i's$ é crescente e $q_i > 1$ para todo $i \geq 2$. Logo, sendo i suficientemente grande, obtemos $a < q_{i-1}$, isto é,

$$0 <| bq_{2i} - p_{2i}a |< \frac{a}{q_{2i-1}}.$$

Porém, isto contradiz o fato de $bq_{2i} - p_{2i}a \in \mathbb{Z}$. Portanto, x é irracional.

Teorema 3.2.1. *Seja x um irracional e c_i a sequência dos convergentes da fração contínua associada a x. Logo,*

$$\left|x - \frac{p_k}{q_k}\right| < \left|x - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right|$$

Demonstração:

Pela propriedade III, temos:

$$x = \frac{p_k + T^k(x)p_{k-1}}{q_k + T^k(x)q_{k-1}}$$

Segue que

$$\left|x - \frac{p_k}{q_k}\right| = \left|\frac{p_k + T^k(x)p_{k-1}}{q_k + T^k(x)q_{k-1}} - \frac{p_k}{q_k}\right| =$$

$$= \frac{\left|q_kp_k + T^k(x)q_kp_{k-1} - p_kq_k - T^k(x)q_{k-1}p_k\right|}{\left|q_k(q_k + T^k(x)q_{k-1})\right|} =$$

$$= \frac{\left|T^k(x)\right|\left|q_kp_{k-1} - q_{k-1}p_k\right|}{\left|q_k\right|\left|q_k + T^k(x)q_{k-1}\right|} = \frac{\left|T^k(x)\right|\left|(-1)^k\right|}{\left|q_k\right|\left|q_k + T^k(x)q_{k-1}\right|} = \frac{\left|T^k(x)\right|}{\left|q_k\right|\left|q_k + T^k(x)q_{k-1}\right|}.$$

e

$$\left|x - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| = \left|\frac{p_k + T^k(x)p_{k-1}}{q_k + T^k(x)q_{k-1}} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| =$$

$$= \frac{\left|q_{k-1}p_k + T^k(x)p_{k-1}q_{k-1} - p_{k-1}q_k - T^k(x)p_{k-1}q_{k-1}\right|}{\left|q_{k-1}(q_k + T^k(x)q_{k-1})\right|} =$$

$$= \frac{\left|p_k q_{k-1} - p_{k-1}q_k\right|}{\left|q_{k-1}\right|\left|q_k + T^k(x)q_{k-1}\right|} = \frac{\left|(-1)^{k-1}\right|}{\left|q_{k-1}\right|\left|q_k + T^k(x)q_{k-1}\right|} =$$

$$= \frac{1}{\left|q_{k-1}\right|\left|q_k + T^k(x)q_{k-1}\right|}.$$

Assim como $q_{k-1} < q_k \Rightarrow \dfrac{1}{q_k} < \dfrac{1}{q_{k-1}}$ *e* $T^k(x) < 1$ temos

$$\left|x - \frac{p_k}{q_k}\right| = \frac{T^k(x)}{q_k(q_k + T^k(x)q_{k-1})} < \frac{1}{q_k(q_k + T^k(x)q_{k-1})} <$$

$$< \frac{1}{q_{k-1}(q_k + T^k(x)q_{k-1})} = \left|x - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right|.$$

Portanto,

$$\left|x - \frac{p_k}{q_k}\right| < \left|x - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right|, \quad com \quad k \geq 1,$$

o que conclui a demonstração.

Teorema 3.2.2. Seja x um irracional e c_i a seqüência dos convergentes da fração contínua associada a x. Temos,

$$\frac{1}{2q_k q_{k+1}} < \left|x - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}} < \frac{1}{q_k^2}, \quad com\ k \geq 1. \tag{3.3}$$

Demonstração:

Sabemos, pela propriedade II, que

$$c_{k+1} - c_k = \frac{(-1)^k}{q_{k+1}q_k}, \quad k \geq 1.$$

Assim,

$$\mid c_{k+1} - c_k \mid = \frac{1}{q_{k+1}q_k}, \quad k \geq 1 \tag{3.4}$$

Então, a partir do teorema anterior, concluímos que

$$| x - c_k | = | x - c_{k+1} + c_{k+1} - c_k | \geq | c_{k+1} - c_k + x - c_{k+1} |>$$

$$>| c_{k+1} - c_k | - | x - c_{k+1} | = \frac{1}{q_{k+1}q_k} - | x - c_{k+1} |\geq \frac{1}{q_{k+1}q_k} - | x - c_k | .$$

Logo,

$$| x - c_k |> \frac{1}{2q_{k+1}q_k}. \tag{3.5}$$

Por outro lado, como x está entre c_k e c_{k+1},

$$| x - c_k | < | c_{k+1} - c_k |= \frac{1}{q_{k+1}q_k},$$

e, portanto, relacionando a última desigualdade com (3.5), obtemos

$$\frac{1}{2q_kq_{k+1}} < \left|x - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_kq_{k+1}} < \frac{1}{q_k^2}, \quad pois \quad q_{k+1} > q_k,$$

o que conclui a demonstração do teorema. ■

4 Frações contínuas periódicas

Chamamos de fração contínua periódica uma representação como a dos exemplos 2.2.1 e 2.2.2, em que a sequência de números se repete periodicamente, podendo ser denotada por

$$a_0 + [a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+n-1}, \ldots],$$

em que $a_{k+n} = a_k$ e os valores $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+n-1}$ formam o período que se repete. E à fração contínua

$$a_0 + [a_1, a_{k-1}, \ldots, a_k, \ldots, a_{k+n-1}]$$

chamamos de fração contínua periódica.

Lagrange, em 1770, caracteriza todos os irracionais que possui representação periódica, quando expressos sob forma de fração contínua. Segundo Lagrange, a fração contínua infinita que representa um número irracional e periódica, se, e somente se, este irracional for raiz de um polinômio do tipo $ax^2 + bx + c = 0$ em que a, b e c são inteiros, $a > 0$ e $b^2 - 4ac > 0$ não representa um quadrado perfeito. Veremos, então, um resultado fundamental sobre frações contínuas periódicas e números irracionais quadráticos: o Teorema de Lagrange.

Teorema 4.0.3 (Lagrange). *A expansão em frações contínuas de um número irracional x é periódica se, e somente se, x é raiz de uma equação quadrática.*

Demonstração:

Como um número irracional quadrático satisfaz uma equação quadrática com coeficientes inteiros, segue que

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{4.1}$$

Se $x = a_0 + [a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k, \cdots]$, fazendo $x_k = a_k + [a_{k+1}, a_{k+2}, \cdots]$, então $x = a_0 + [a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}, x_k]$. Além disso, pela propriedade (I) dos convergentes, sabemos que

$$x = \frac{x_k p_{k-1} + p_{k-2}}{x_k q_{k-1} + q_{k-2}}.$$

Portanto, substituindo o valor acima em (4.1), obtemos

$$ax^2 + bx + c = 0 \Longrightarrow a\left(\frac{x_k p_{k-1} + p_{k-2}}{x_k q_{k-1} + q_{k-2}}\right)^2 + b\left(\frac{x_k p_{k-1} + p_{k-2}}{x_k q_{k-1} + q_{k-2}}\right) + c = 0$$

$$\Longrightarrow A_k x_k^2 + B_k x_k + C_k = 0, \tag{4.2}$$

em que

$$\begin{aligned} A_k &= ap_{k-1}^2 + bp_{k-1}q_{k-1} + cq_{k-1}^2, \\ B_k &= 2ap_{k-1}p_{k-2} + b(p_{k-1}q_{k-2} + p_{k-2}q_{k-1}) + 2cq_{k-1}q_{k-2}, \\ C_k &= ap_{k-2}^2 + bp_{k-2}q_{k-2} + cq_{k-2}^2. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Afirmamos que $A_k \neq 0$ para $k \geq 1$. Pois, suponhamos por absurdo que $A_k = 0$, ou seja, $ap_{k-1}^2 + bp_{k-1} + cq_{k-1}^2 = 0$. Então, resolvendo a equação, obtemos

$$p_{k-1} = \frac{-bq_{k-1} \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)q_{k-1}^2}}{2a}$$

$$p_{k-1} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} q_{k-1}.$$

Logo,

$$\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Assim, a equação (4.1) teria um número $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ racional como raiz, o que é absurdo, pois x é irracional. Portanto, $A_k \neq 0$ e a equação quadrática $A_k y^2 + B_k y + C_k = 0$, tem x_k como uma de suas raízes.

Provemos agora, que o discriminante Δ da equação (4.3) é

$$\Delta = B_k^2 - 4A_kC_k = b^2 - 4ac.$$

Lembrando que B_k, em (4.3) é dado por

$$B_k = 2ap_{k-1}p_{k-2} + b(p_{k-1}q_{k-2} + p_{k-2}q_{k-1}) + 2cq_{k-1}q_{k-2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} B_k^2 &= (2ap_{k-1}p_{k-2} + bp_{k-1}q_{k-2} + bp_{k-2}q_{k-1} + 2cq_{k-1}q_{k-2})^2 = \\ &= 4a^2p_{k-1}^2p_{k-2}^2 + 2abp_{k-1}^2p_{k-2}q_{k-2} + 2abp_{k-1}p_{k-2}^2q_{k-1} + \\ &+ 4acp_{k-1}p_{k-2}q_{k-1}q_{k-2} + 2abp_{k-1}^2p_{k-2}q_{k-2} + b^2p_{k-1}^2q_{k-1}^2 + \\ &+ b^2p_{k-1}p_{k-2}q_{k-1}q_{k-2} + 2bcp_{k-1}q_{k-1}q_{k-2}^2 + 2abp_{k-1}p_{k-2}^2q_{k-1} + \\ &+ b^2p_{k-1}p_{k-2}q_{k-1}q_{k-2} + b^2p_{k-2}^2q_{k-1}^2 + 2bcp_{k-2}q_{k-1}^2q_{k-2} + \\ &+ 4acp_{k-1}p_{k-2}q_{k-1}q_{k-2} + 2bcp_{k-1}q_{k-1}q_{k-2}^2 + 2bcp_{k-2}q_{k-1}^2q_{k-2} + \end{aligned}$$

$$+4c^2q_{k-1}^2q_{k-2}^2.$$

Logo,

$$B_k^2 = 4a^2p_{k-1}^2p_{k-2}^2 + 4abp_{k-1}^2p_{k-2}q_{k-2} + 4abp_{k-1}p_{k-2}^2q_{k-1}+$$

$$+8acp_{k-1}p_{k-2}q_{k-1}q_{k-2} + 2b^2p_{k-1}p_{k-2}q_{k-1}q_{k-2} + b^2p_{k-1}^2q_{k-1}^2+$$

$$+b^2p_{k-2}^2q_{k-1}^2 + 4bcp_{k-1}q_{k-1}q_{k-2}^2 + 4bcp_{k-2}q_{k-1}^2 + 4c^2q_{k-1}^2q_{k-2}^2.$$

Assim,

$$B_k^2 = 4a^2p_{k-1}^2p_{k-2}^2 + 4abp_{k-1}^2p_{k-2}q_{k-2} + 4abp_{k-1}p_{k-2}^2q_{k-1}+$$

$$+(8ac+2b^2)p_{k-1}p_{k-2}q_{k-1}q^{k-2} + b^2p_{k-1}^2q_{k-1}^2 + b^2p_{k-2}^2q_{k-1}^2+$$

$$+4bcp_{k-1}q_{k-1}q_{k-2}^2 + 4bcp_{k-2}q_{k-1}^2q_{k-2} + 4c^2q_{k-1}^2q_{k-2}^2.$$

Como $A_k = ap_{k-1}^2 + bp_{k-1}q_{k-1} + Cq_{k-1}^2$ e $C_k = p_{k-2}^2 + bp_{k-2}q_{k-2} + Cq_{k-2}^2$, obtemos que

$$-4A_kC_k = -4(ap_{k-1}^2 + bp_{k-1}q_{k-1} + Cq_{k-1}^2)(ap_{k-2}^2 + bp_{k-2}q_{k-2} + Cq_{k-2}^2) =$$

$$= -4a^2p_{k-1}^2p_{k-2}^2 - 4abp_{k-1}^2p_{k-2}q_{k-2} - 4acp_{k-1}^2q_{k-1}^2-$$

$$-4abp_{k-1}q_{k-1}p_{k-2}^2 - 4b^2p_{k-1}q_{k-1}p_{k-2}q_{k-2} - 4bcp_{k-1}q_{k-1}q_{k-2}^2-$$

$$-4acp_{k-2}^2q_{k-1}^2 - 4bp_{k-2}q_{k-1}^2q_{k-2} - 4c^2q_{k-1}^2q_{k-2}^2.$$

Segue que

$$B_k^2 - 4A_kC_k = 4a^2p_{k-1}^2p_{k-2}^2 + 4abp_{k-1}^2p_{k-2}q_{k-2} + 4abp_{k-1}p_{k-2}^2q_{k-1}+$$

$$+(8ac+2b^2)p_{k-1}p_{k-2}q_{k-1}q_{k-2} + b^2p_{k-1}^2q_{k-1}^2+$$

$$+b^2p_{k-2}^2q_{k-1}^2 + 4bcp_{k-1}q_{k-1}q_{k-2}^2 + 4bcp_{k-2}q_{k-1}^2q_{k-2}+$$

$$+4c^2q_{k-1}^2q_{k-2}^2 - 4a^2p_{k-1}^2p_{k-2}^2 - 4abp_{k-1}^2p_{k-2}q_{k-2}-$$

$$-4acp_{k-1}^2q_{k-1}^2 - 4abp_{k-1}q_{k-1}p_{k-2}^2 - 4b^2p_{k-1}q_{k-1}p_{k-2}q_{k-2}-$$

$$-4bcp_{k-1}q_{k-1}q_{k-2}^2 - 4acp_{k-2}^2q_{k-1}^2 - 4bcp_{k-2}q_{k-1}^2q_{k-2}-$$

$$-4c^2q_{k-1}^2q_{k-2}^2.$$

Reorganizando a equação acima, temos

$$B_k^2 - 4A_kC_k = 8acp_{k-1}p_{k-2}q_{k-1}q_{k-2} - 2b_{k-1}^2q_{k-1}p_{k-2}q_{k-2}+$$

$$+(b^2-4ac)p_{k-1}^2q_{k-1}^2 + (b^2-4ac)p_{k-2}^2q_{k-1}^2 =$$

$$= (b^2-4ac)(-2p_{k-1}p_{k-2}q_{k-1}q_{k-2}) + (b^2-4ac)p_{k-1}^2q_{k-1}^2+$$

$$+(b^2-4ac)p_{k-2}^2q_{k-1}^2 =$$

$$(b^2-4ac)(-2p_{k-1}p_{k-2}q_{k-1}q_{k-2}+p_{k-1}^2q_{k-1}^2+p_{k-2}^2q_{k-1}^2) =$$

$$= (b^2-4ac)(p_{k-1}^2q_{k-1}^2-2p_{k-1}p_{k-2}q_{k-1}q_{k-2}+p_{k-2}^2q_{k-1}^2) =$$

$$= (b^2-4ac)(p_{k-1}q_{k-1}-p_{k-2}q_{k-1})^2 \tag{4.4}$$

Então, pela propriedade (II), obtemos,

$$B_k^2-4A_kC_k=(b^2-4ac)((-1)^{n+1})^2=b^2-4ac.$$

Concluímos, assim, a primeira parte do teorema.

Como, pelo teorema (3.2.3), para $k\geq 1$,

$$xq_{k-1}-p_{k-1} > -\frac{1}{q_k},$$

podemos escrever

$$x=\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}-\frac{\epsilon_{k-1}}{q_{k-1}^2},$$

em que $\mid \epsilon_{k-1}\mid\leq 1$, ou seja,

$$p_{k-1}=xq_{k-1}+\frac{\epsilon_{k-1}}{q_{k-1}}.$$

Então, relacionando a equação acima com (4.3), obtemos

$$A_k=a\left(xq_{k-1}+\frac{\epsilon_{k-1}}{q_{k-1}}\right)^2+bq_{k-1}\left(xq_{k-1}+\frac{\epsilon_{k-1}}{q_{k-1}}\right)+cq_{k-1}^2=$$

$$=ax^2q_{k-1}^2+2ax\epsilon_{k-1}+a\left(\frac{\epsilon_{k-1}}{q_{k-1}}\right)^2+bxq_{k-1}^2+cq_{k-1}^2=$$

$$=q_{k-1}^2(ax^2+bx+c)+2ax\epsilon_{k-1}+a\left(\frac{\epsilon_{k-1}}{q_{k-1}}\right)^2+b\epsilon_{k-1}.$$

Mas,

$$ax^2+bx+c=0.$$

Segue, então, que

$$A_k=2ax\epsilon_{k-1}+\frac{a\epsilon_{k-1}^2}{q_{k-1}^2}+b\epsilon_{k-1}=\epsilon_{k-1}\left(2ax+a\left(\frac{\epsilon_{k-1}}{q^{2_{k-1}}}\right)+b\right)$$

Como

$$q_{k-1}\geq 1 \ e \ \mid \epsilon_{k-1}\mid\leq 1,$$

temos,

$$|A_K| \leq 2|ax| + |a| + |b|.$$

Mas, como

$$A_k = C_{k-1},$$

$$|C_k| = |A_{k+1}| < 2|ax| + |a| + |b|.$$

Observe que x, a e b estão fixos e os valores absolutos de A_k e C_k são limitados, pois são menores do que números que não dependem de K. Então, como A_k e C_k são inteiros, eles podem assumir apenas um número finito de valores diferentes quando K variar. Finalizamos então a prova do Teorema. ■

4.1 Exemplos de frações contínuas periódicas

Nesta seção exemplificaremos frações contínuas periódicas. Vale mencionar que nem todo número irracional possui uma expansão periódica quando representado sob a forma de fração contínua. Vimos, também, que somente irracionais algébricos podem ter representação periódica.

Exemplo 4.1.1. Representе $\sqrt{5}$ como fração contínua.

Como $a_0 = \lfloor\sqrt{5}\rfloor = 2$, temos

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}-2} = \sqrt{5}+2 \Longrightarrow a_1 = \lfloor\sqrt{5}+2\rfloor = 4$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}+2-4} = \frac{1}{\sqrt{5}-2} = \sqrt{5}+2 \Longrightarrow a_2 = \lfloor\sqrt{5}+2\rfloor = 4$$

Como $x_1 = x_2$, vemos $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots$. Logo,

$$\sqrt{5} = 2 + [\,\bar{4}\,]$$

. Dada a fração contínua periódica podemos reverter o processo acima para obtenção do número irracional representado por ela.

Consideremos

$$y = 2 + [\,\bar{4}\,] = 4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \ddots}}}$$

$$= 4 + \frac{1}{y}$$

em que

$$y = 4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \ddots}}}.$$

Da última igualdade, temos

$$y = 4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{y}}$$

da qual obtemos a equação

$$y = 4 + \cfrac{1}{\cfrac{4y+1}{y}} \Longrightarrow y = 4 + \frac{y}{4y+1} = 4y^2 + y = 16y + 4 + y \Longrightarrow 4y^2 - 16y - 4 = 0 \Longrightarrow y^2 - 4y - 1 = 0.$$

Segue que

$$y^2 - 4y - 1 = 0, \text{ obtemos } y = 2 + \sqrt{5}, \text{ com } y > 0\ .$$

Então,

$$2 + [\ 4\ ] = 2 + \frac{1}{y} = 2 + \frac{1}{2+\sqrt{5}} = 2 + \frac{2+\sqrt{5}}{-1} =$$

$$= \frac{-2+2-\sqrt{5}}{-1} = \sqrt{5}.$$

Portanto,

$$2 + [\ \overline{4}\ ] = \sqrt{5}$$

Exemplo 4.1.2. Seja a expansão $2+[\overline{2,4}]$. Determine o número que gerou essa expansão.

Consideremos

$$2 + [\overline{2,4}] = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \ddots}}}}$$

$$= 2 + \frac{1}{y}$$

em que

$$y = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \ddots}}}.$$

Da última equação, temos que

$$y = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{y}} \Longrightarrow y = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{4y+1}{y}} \Longrightarrow$$

$$y = 2 + \frac{y}{4y+1} \Longrightarrow 4y^2 + y = 8y + 2 + y \Longrightarrow$$

$$4y^2 - 8y - 2 = 0 \Longrightarrow 2y^2 - 4y - 1 = 0,$$

da qual obtemos a equação $2y^2 - 4y - 1 = 0$, isto é, $y = \dfrac{2+\sqrt{6}}{2}$, com $y > 0$

$$\begin{aligned} 2 + [\overline{2,4}] &= 2 + \frac{1}{y} = 2 + \cfrac{1}{\left(\cfrac{2+\sqrt{6}}{2}\right)} \\ &= 2 + \frac{2}{2+\sqrt{6}} = 2 + 2\frac{(2-\sqrt{6})}{-2} \\ &= 2 - 2 + \sqrt{6} = \sqrt{6} = \end{aligned}$$

$$= 2 + [\overline{2,4}] = \sqrt{6}.$$

5 O número de ouro

O número de ouro, cujo valor aproximado é 1,618, pode ser obtido através de uma quantidade (segmento) que é dividida em duas partes cuja proporção entre o todo e a maior parte, é a mesma que a proporção entre a maior parte e o restante. Mais precisamente, consideremos um segmento de reta cujas extremidades são A e C. Se um ponto B entre A e C é tal que a razão entre o segmento de reta menor (AB) e o maior (BC) é igual a razão do maior (BC) para o todo (AC), diremos que essa razão é áurea e o seu valor é o número de ouro.

Figura 5.1:

Então, temos

$$(AB)\backslash(BC) = (BC)\backslash(AC)$$

Denotando $AB = y$ e $BC = x$, temos que $AC = x + y$. O número de ouro será a razão entre x e y: $\phi = x/y$. Mas,

$$\frac{x}{y} = \frac{x+y}{x} = 1 + \frac{y}{x}$$

ou seja, $\phi = 1 + 1/\phi$, o que é equivalente a

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0.$$

Resolvendo esta equação quadrática, obtemos o número de ouro, que é a solução positiva

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Podemos notar que

$$\phi = 1 + \frac{1}{\Phi} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+\ddots}}}. \tag{5.1}$$

Observando a propriedade (I) dos convergentes e (5.1), notamos que

$$\begin{cases} p_n = p_{n-1} + p_{n-2}, & n \geq 2 \\ q_n = q_{n-1} + q_{n-2} \end{cases} \tag{5.2}$$

e

$$\begin{cases} p_0 = 1, & p_1 = 2 \\ q_0 = 1, & q_1 = 1 \end{cases} \tag{5.3}$$

A seqüência dos denominadores $(q_n)_{n=0}^{\infty}$ de (5.2) está relacionada com s seqüência de Fibonacci $(F_n)_{n=0}^{\infty}$, que é definida por

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \qquad n \geq 2, \tag{5.4}$$

com $F_0 = 1$ *e* $F_1 = 1$. Os primeiros números da sequência de Fibonacci são, então, $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 \cdots$ (cada número da sequência é obtido somando-se os dois anteriores a partir do 3°). Vejamos agora como representar os valores numéricos dos quocientes parciais na tabela abaixo

Elementos somados	Quocientes parciais	Valor numérico
1	1	1
2	$1+\frac{1}{1}$	2
3	$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}$	$\frac{3}{2} = 1,5$
4	$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}$	$\frac{5}{3} = 1,666\cdots$
5	$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}$	$\frac{8}{5} = 1,6$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
10	[1;1,1,1,1,1,1,1,1,1]	$\frac{89}{55} = 1,61818\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
∞	$[1; 1, 1, 1, 1, 1, \cdots]$	$1,618033987\cdots$

Tabela 5.1: Sequência de Fibonacci

A sequência de Fibonacci surge a partir da modelagem da reprodução de coelhos em um viveiro. Devemos supor que:

- num viveiro coloca-se um casal de coelhos recém nascidos;
- os coelhos podem reproduzir-se com um mês de vida;
- a partir do 2º mês de vida, uma coelha sempre dá a luz a um casal de coelhos

todo mês;

- coelhos nunca morrem.

Então pergunta-se: quantos casais de coelhos haverá no início de cada mês? A tabela abaixo mostra o número de casais de coelhos no início de cada mês.

início do mês	nº de casais	descrição	sequência
1	1	primeiro casal	$F_0 = 1$
2	1	primeiro casal	$F_1 = 1$
3	2	1+1 que nascem	$F_2 = 2$
4	3	2+1 que nascem	$F_3 = 3$
5	5	3+2 que nascem	$F_4 = 5$
6	8	5+3 que nascem	$F_5 = 8$
7	13	8+5 que nascem	$F_6 = 13$
8	21	13+8 que nascem	$F_7 = 21$
9	34	21+13 que nascem	$F_8 = 34$
10	55	34+21 que nascem	$F_9 = 55$
11	89	55+34 que nascem	$F_{10} = 89$
12	144	89+55 que nascem	$F_{11} = 144$
13	233	144+89 que nascem	$F_{12} = 233$

Tabela 5.2: Sequência de Fibonacci e o número de coelhos

Comparando (5.2) e (5.3) com (5.4), temos que

$$p_n = F_{n+1} \;\; e \;\; q_n = F_n, \qquad n \geq 1$$

Como os convergentes da fração contínua convergem para o número áureo, segue que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = \Phi = 1,618033\cdots$$

Além disso

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{1}{\Phi} = \phi = 0,6180339887\cdots$$

Segue que

$$\frac{p_0}{q_0} = \frac{F_1}{F_0} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{F_2}{F_1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{p_2}{q_2} = \frac{F_3}{F_2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\frac{p_5}{q_5} = \frac{F_6}{F_5} = \frac{13}{8} = 1.625$$

$$\frac{p_6}{q_6} = \frac{F_7}{F_6} = \frac{21}{13} = 1.615384615384615$$

$$\frac{p_7}{q_7} = \frac{F_8}{F_7} = \frac{34}{21} = 1.619047619047619$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\frac{p_{10}}{q_{10}} = \frac{F_{11}}{F_{10}} = \frac{144}{89} = 1.61797752808988825$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\frac{p_{34}}{q_{34}} = \frac{F_{35}}{F_{34}} = \frac{14930352}{9227465} = 1.68033988749890$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

Logo, dividindo cada número da sequência pelo seu antecessor, resulta em uma série que converge para um número infinito $1.61803\cdots$, o número áureo.

6 Aplicações

Neste capítulo veremos uma aplicação interessante das frações contínuas, envolvendo circuitos elétricos, que nos permitirá obter a sequência a_i da associação de infinitos resistores.

6.1 Frações Contínuas em Circuitos Elétricos

A Física e a Matemática possuem uma relação muito forte de interdisciplinaridade em seus conteúdos. Com base nessa relação, mostraremos agora um problema de eletricidade envolvendo uma asssociação mista de resistores idênticos, cada um com uma resistência R, conforme mostra a figura 1. As reticências horizontais indicam que o número de sub-malhas quadradas é muito grande, podendo ser considerado como infinito. O problema consiste em determinar a resistência equivalente entre os terminais do circuito. Lembramos que a associação em série de duas resistências R_1 e R_2 leva a uma resistência

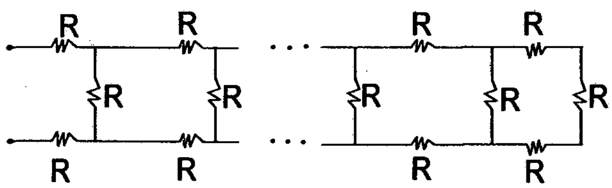
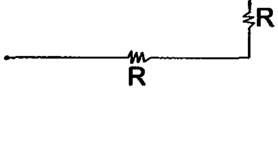


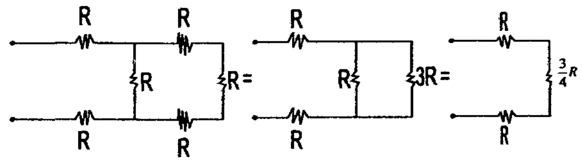
Figura 6.1: Associação mista de resistores

equivalente $R_{eq} = R_1 + R_2$ ao passo que a associação em paralelo leva a uma resistência equivalente R_{eq} dada por $\dfrac{1}{R_{eq}} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$, ou seja, $R_{eq} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}}$.

Inicialmente, calculemos a resistência equivalente para os primeiros quatro passos do processo formados a partir da figura 6.1.

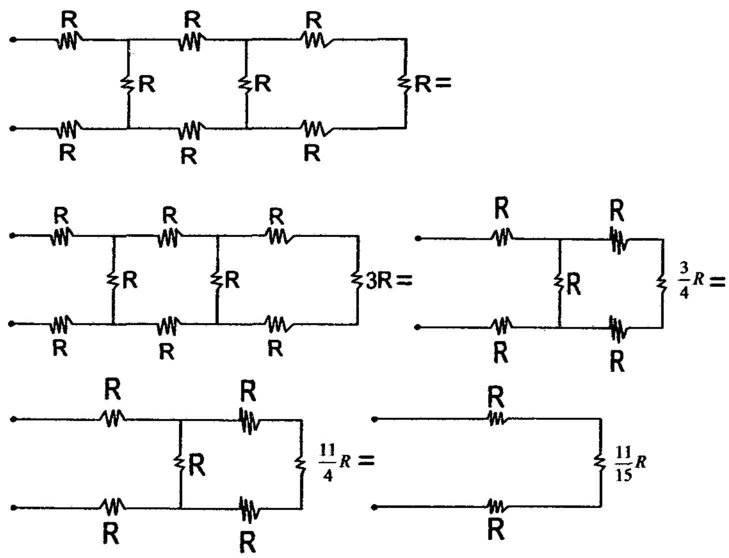


$R_{eq} = R + R + R = 3R$



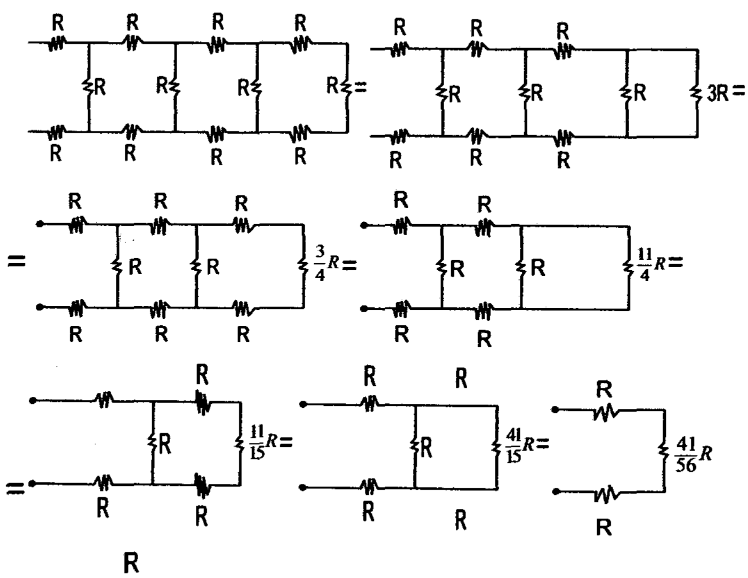
logo,

$$R_{eq} = R + \frac{3}{4}R + R = \frac{11}{4}R = 2.7500R.$$



logo,

$$R_{eq} = R + \frac{11R}{15} + R = \frac{41R}{15}$$

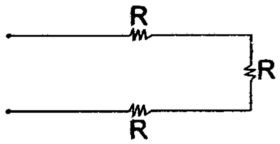


então,

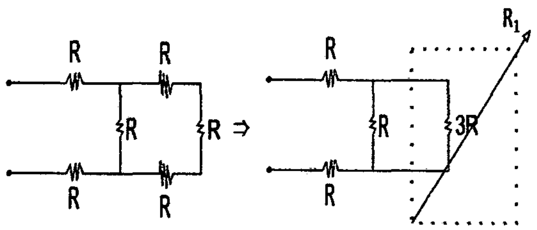
$$R_{eq} = R + \frac{41R}{56} + R = \frac{153R}{56}.$$

Agora, mostraremos o circuito da figura 6.1 gradativamente, onde R_n corresponde a resistência equivalente do circuito mostrado no n-ésimo passo:

1° passo:

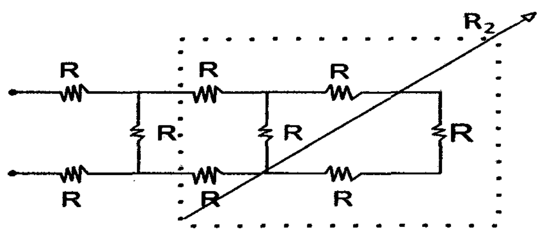


2° passo:



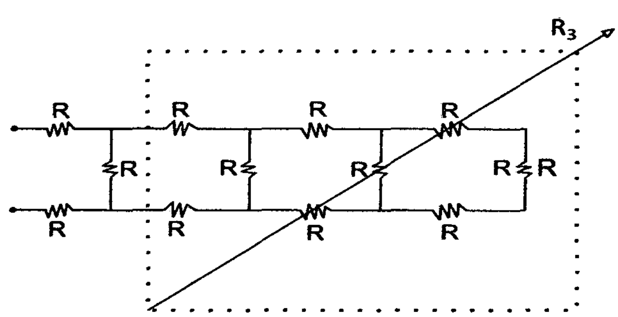
$$\Longrightarrow R_2 = R + R + \left(\frac{1}{1/R + 1/R_1}\right) = 2R + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R} + \cfrac{1}{R_1}}$$

3° passo:



$$R_3 = R + R + \left(\frac{1}{1/R + 1/R_2}\right), \quad ouseja, \quad R_3 = 2R + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R} + \cfrac{1}{2R + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R} + \cfrac{1}{R_1}}}}$$

4°passo



$$R_4 = R + R + \left(\frac{1}{1/R + 1/R_3}\right) = 2R + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R} + \cfrac{1}{R_3}}, \quad \text{ou seja,}$$

$$R_4 = 2R + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R} + \cfrac{1}{2R + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R} + \cfrac{1}{2R + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R} + \cfrac{1}{R_1}}}}}}$$

$\vdots$

n-ésimo passo:

Notando o padrão recursivo dos passos anteriores, temos:

$$R_n = 2R + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R} + \cfrac{1}{R_{n-1}}}.$$

Chamando de x o valor da resistência equivalente do circuito quando n tende ao infinito, ou seja, $x = \lim_{n \to \infty} Rx$, temos que:

$$x = 2R + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R} + \cfrac{1}{2R + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R} + \cfrac{1}{2R + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R} + \ddots}}}}} =$$

$$= 2R + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R} + \cfrac{1}{\boxed{2R + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R} + \cfrac{1}{2R + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R} + \ddots}}}}}}.$$

Como o processo acima é infinito, logo $x = 2R + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R} + \cfrac{1}{x}}$ para $x > 0$. Lembrando do que vimos (5.1), podemos chegar a equação $x^2 - 2Rx - 2R^2 = 0$, e encontramos como resposta $x = R(1 \pm \sqrt{3})$. Obviamente, x não pode ser negativo, então como solução da situação proposta temos $x = R(1 + \sqrt{3})$.

Esta é a resistência equivalente do circuito mostrado. E, como obtivemos para $\sqrt{3}$ um valor de $1 + [1, 2, 1, 2, \cdots]$, o que nos permite escrever:

$$x = R(2 + [1, 2, 1, 2, \cdots]) = (2 + [1, 2, 1, 2, \cdots])R$$

7 Considerações Finais

Nesta monografia, apresentamos um estudo introdutório da teoria das frações contínuas e sua relação com os números reais (racionais e irracionais). Vimos que a expansão dos números racionais em frações contínuas simples é finita e é calculada por sucessivas aplicações do algoritmo de divisão de Euclides. Para estudar a expansão dos números irracionais, introduzimos a Transformação de Gauss. Vimos também que somente irracionais algébricos podem ter representações periódicas, entre eles o número de ouro, que tem conexões com geometria, seqüência de Fibonacci etc. Este trabalho ainda nos permitiu mostrar uma aplicação das frações contínuas em um problema de física (circuitos elétricos).

Esperamos, que este trabalho, entre outras coisas, venha contribuir para estimular o interesse pelo estudo das frações contínuas.

Referências Bibliográficas

[1] SANTOS, J. P. O. Introdução à Teoria dos Números, Coleção Matemática Universitária, 3ª ed., Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[2] JUNIOR, D. P. F.; LIMA, F. M. S. Usando Frações Contínuas para Resolver um Problema de Eletricidade de Forma Criativa. Física na Escola, v.7, n.1, 2006. Disponível em:<http://www.sbfisica.org.br/fine/vol7/num1/>. Acesso em: 25 fevereiro 2009.

[3] LEMES, L. C. Por que Frações Contínuas? Faculdade de Matemática, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia. 27 de novembro de 2006. Disponível em: <http://www.famat.ufu/eventos/semat6/docs/leandro.pdf>. Acesso em: 20 fevereiro 2009.

[4] JORGE, D. R. Frações Contínuas: propostas ergóticas e de aproximações, 2006. 126f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2006.

[5] ANDRADE, E. X. L. ; BRACCIOLI, C. F. Frações Contínuas: algumas propriedades e aplicações, II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 25 a 29 de outubro de 2004.

[6] JÚNIOR, D. P. F. Frações contínuas e circuito elétrico. Revista do Professor de Matemática, n.63, p.43-47, 2º quadrimestre de 2007.

[7] BELUSSI, G. M. et al. Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Londrina. Disponível em: <http://www.mat.uel.br/geometrica/artigos/ST-15-TC.pdf>. Acesso em: 18 de maio de 2009.

[8] O número de ouro. Interdisciplinaridade Ciências - Matemática, Departamento de Educação, Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm17/ouro.htm>. Acesso em 18 de maio de 2009.