

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

**RICARDO MARCIUS PEREIRA DE OLIVEIRA
SANDRA ELOI FERREIRA**

TEORIA MATEMÁTICA DO CONTROLE PARA SISTEMAS FINITOS

São Luís

2009

RICARDO MARCIUS PEREIRA DE OLIVEIRA

SANDRA ELOI FERREIRA

TEORIA MATEMÁTICA DO CONTROLE PARA SISTEMAS FINITOS

Trabalho de Conclusão de Curso de Especialização em Matemática do programa de Pós-Graduação do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina projeto em conjunto com a Universidade Virtual do Estado do Maranhão.

São Luís

2009



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS

Departamento de Matemática

Curso de Especialização em Matemática-Formação de Professor na modalidade a distância

"Teoria Matemática do Controle para Sistemas Finitos"

Monografia submetida a Comissão de avaliação do Curso de Especialização em Matemática-Formação do professor em cumprimento parcial para a obtenção do título de Especialista em Matemática.

APROVADA PELA COMISSÃO EXAMINADORA em 18/08/2009

Dr. Felix Pedro Quispe Gomez (CFM/UFSC - Orientador)

Dr. Márcio Rodolfo Fernandes (CFM/UFSC - Examinador)

Dr. Sergio Eduardo Michelin (CFM/UFSC - Examinador)

Dra. Neri Terezinha Both Carvalho

Coordenadora do Curso de Especialização em Matemática-Formação de Professor

Florianópolis, Santa Catarina, agosto de 2009.

DEDICATÓRIA

Aos nossos pais Odilon (in memoriam), Creuza, Pedro e Joselina pelos exemplos de vida e herança do conhecimento adquirido.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por tudo que somos.

A Professora Neri pelo apoio e incentivo.

Ao Professor Félix Gómez pela orientação e direcionamentos preciso.

Aos nossos pais pelo exemplo, educação, amor e princípios de caráter que nos fizeram crescer com retidão e honestidade.

Aos nossos cônjuges e filhos pela compreensão, incentivo e tolerância nos momentos que não nos fizemos presentes.

A todos os nossos professores que auxiliaram em nossa formação.

Aos colegas de curso pela aprendizagem coletiva, cooperativa e colaborativa.

E a todos que de forma direta ou indireta contribuíram para a concretização desta grande realização pessoal e profissional.

“Os números governam o mundo.”

Pitágoras

Sumário

RESUMO	6
1. INTRODUÇÃO	7
2. HISTÓRICO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	9
2.1. Os BERNOULLIS	10
2.2. LEONHARD EULER	12
2.3. JEAN LE ROND D'ALEMBERT	13
2.4. JEAN BAPTISTE JOSEPH FOURIER	14
2.5. RUDOLF EMIL KALMAN.....	14
3. CONCEITOS BÁSICOS DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	16
3.1. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS	18
4. APLICAÇÕES DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	19
4.1. CRESCIMENTO DE TUMORES	19
4.2. MODELO PREDADOR – PRESA DE LOTKA – VOLTERRA.....	20
5. CONDIÇÕES DE FRONTEIRA	21
6. NOÇÕES DE ÁLGEBRA LINEAR	22
7. CONTROLE DE SISTEMAS FINITOS	25
7.1. DEFINIÇÃO DE CONTROLE DE SISTEMAS FINITOS	27
7.2. PROPRIEDADE DA OBSERVABILIDADE.....	30
7.3. CONDIÇÕES DE KALMAN.....	35
7.4. ESTABILIZAÇÃO DE SISTEMAS LINEARES DE DIMENSÃO FINITA.	41
8. APLICAÇÕES DA TEORIA DO CONTROLE E PERSPECTIVAS FUTURAS ...47	
8.1. A BARREIRA DE TÁMESIS	47
8.2. ROBÓTICA.....	47
8.3. SISTEMAS ENERGÉTICOS E REDES DE INFORMÁTICA	48
8.4. HIDROLOGIA	48
8.5. EXTRAÇÃO DE RECURSOS NATURAIS	48
8.6. ECONOMIA.....	48
9. CONSIDERAÇÕES FINAIS	50
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	52

RESUMO

O trabalho que ora se apresenta analisa a os elementos fundamentais que aparecem em um problema de Controle e possui muitas aplicações no campo da tecnologia: o controle de sistemas finitos. Introduzimos o conceito de Controle no contexto de sistemas de dimensão finita descrito em termos e equações diferenciais ordinárias. Concluimos que o controle de sistemas é um tema em expansão e apresenta muitas aplicações futuras.

PALAVRAS CHAVES: Equações diferenciais ordinárias; Controle de sistemas finitos; Matriz de controle; Condições de Kalman; Sistema Adjunto; Funcional Quadrático; Problema de Minimização.

1. INTRODUÇÃO

Ao longo dos anos o homem tem aprofundado seus conhecimentos no campo do cálculo e da tecnologia, buscando a aplicação dessas descobertas teóricas na resolução de problemas da vida cotidiana, passando pela aplicabilidade da robótica na medicina até o controle de barreiras no intento de evitar catástrofes e salvar várias vidas.

No transcorrer do referido trabalho estabelecemos as relações da teoria do controle e sua influência no funcionamento de sistemas dinâmicos, quando uma ou mais variáveis de saída necessitam seguir uma certa referência ao longo do tempo e um controlador manipula as entradas do sistema para obter o efeito desejado nas saídas deste sistema.

No primeiro tópico fazemos uma breve introdução sobre o tema. O segundo tópico convida o leitor a fazer uma viagem no tempo resgatando os grandes nomes dos pioneiros no campo do cálculo matemático. O terceiro tópico estabelece os conceitos básicos das equações diferenciais que podem ser ordinárias ou parciais. No tópico seguinte discorreremos sobre as aplicações das equações diferenciais apresentando-as como objeto de intensa atividade de pesquisa em tempos passados e nos atuais.

Um trem de massa m se encontra no ponto R de seu percurso retilíneo de R a S deslocando-se com velocidade v . A sua força motriz máxima é F e sua força máxima de freios é f . Se deseja colocá-lo em repouso no ponto S num tempo mínimo possível. Qual a estratégia a escolher, isto é, qual deve ser a força u de freios, que temos de aplicar em cada ponto do percurso?

Neste problema típico se pode analisar os elementos básicos que aparecem no problema de controle. O sexto tópico trata da Teoria Matemática do Controle para sistemas finitos bem como suas aplicações que interferem diretamente em situações práticas e cotidianas, em particular como a descrita no parágrafo anterior.

Os estudos sobre a teoria do controle ainda estão em andamento e são objetos de estudo de grandes pesquisadores que buscam contribuir com suas descobertas para tornar melhor a vida em sociedade

2. HISTÓRICO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

As idéias primordiais das equações diferenciais partiram da criação da análise e do cálculo desde os antigos gregos como Arquimedes (287-212 a.C.) passando por René Descartes (1596-1650), Pierre de Fermat (1630-1665), Jonh Wallis (1616-1703) e Isaac Barrow (1630-1677). Entretanto, a formalização do cálculo foi atribuída a Sir Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), tornando-se um dos mais importantes ramos da matemática nos últimos 300 anos. Ainda nos séculos dezessete e dezoito outros matemáticos também contribuíram para a unificação e generalização das ideias do cálculo, alguns deles foram Jakob Bernoulli (1654-1705), Johann Bernoulli (1667-1748), Leonhard Euler (1707-1783) e Joseph L. Lagrange (1736-1813).

Assim que os matemáticos tiveram entendimento suficiente e notação para a derivada surgiram as primeiras equações diferenciais, guiado inicialmente por suas aplicações à mecânica das partículas. No início do século XVIII os pesquisadores de equações diferenciais começaram a aplicar estes tipos de equações em problemas de astronomia e ciências físicas. Jakob Bernoulli, por exemplo, escreveu equações diferenciais para o movimento planetário, usando os princípios de gravidade e momento desenvolvidos por Newton. As equações diferenciais estavam interagindo em todos os ramos da matemática e das ciências físicas, tanto que Halley as usou para analisar a trajetória de um cometa que hoje leva seu nome.

O irmão de Jacques, Jean Bernoulli, foi provavelmente o primeiro matemático a entender o cálculo de Leibniz e nos princípios de mecânica para modelar matematicamente fenômenos físicos usando equações diferenciais e encontrar soluções. Na época, Taylor usou séries para resolver equações diferenciais, outros desenvolveram e usaram estas séries para vários propósitos.

Durante 50 anos os matemáticos trouxeram grandes avanços para as equações diferenciais, contudo não havia uma generalização da teoria até a chegada de Leonhard Euler, que foi o mestre que as equações diferenciais precisavam para sua consolidação e conseqüentemente generalização dos métodos de revolução. Depois de Euler vieram muitos especialistas como Daniel Bernoulli que usou os métodos do amigo para ajudá-lo a estudar oscilações e as equações diferenciais que produzem estes tipos de soluções. D' Alembert, por

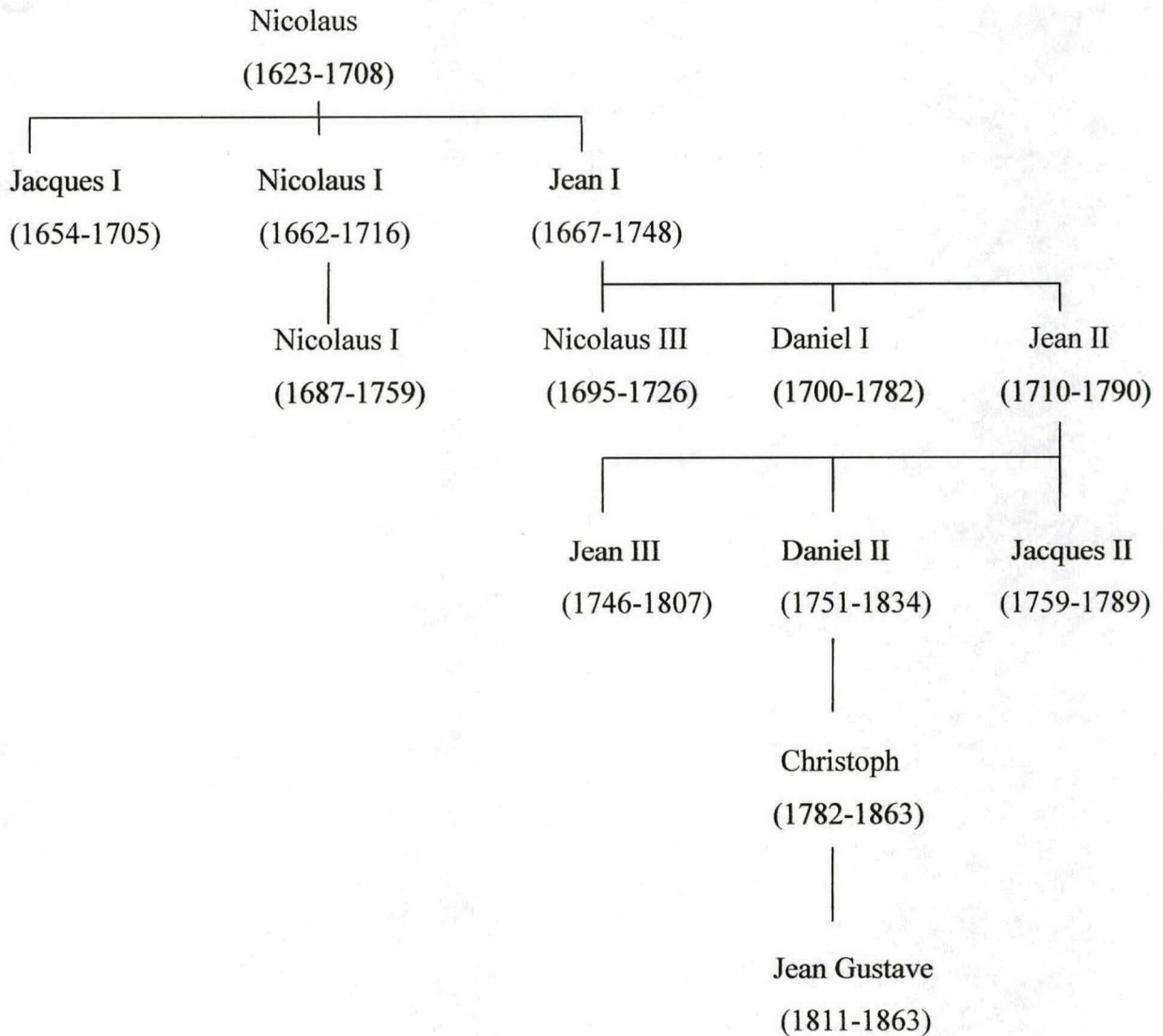
sua vez, envolveu equações diferenciais parciais nas resoluções de problemas elementares de física matemática. Lagrange desenvolveu mais teoria e estendeu resultados em mecânica, particularmente equações de movimento e energia potencial. Entre as contribuições de Lagrange, as mais importantes foram a generalização de métodos e análise de novas famílias de equações diferenciais, o que o levou a ser considerado o primeiro matemático com o conhecimento teórico e ferramentas suficientes para ser um verdadeiro analista dessas equações. Em 1799 Laplace introduziu as ideias de um laplaciano de uma função, reconhecendo claramente as raízes do seu trabalho quando escreveu “Leia Euler, leia Euler, ele é nosso mestre”.

Outros estudiosos também contribuíram para o processo histórico das equações diferenciais, como por exemplo, Legendre que foi motivado pelo movimento de projéteis, pela primeira vez levando em conta novos fatores tais como resistência do ar e velocidades iniciais. Lacroix trabalhou em avanços nas equações diferenciais parciais e sua maior contribuição foi o resumo de muitos dos resultados de Euler, Lagrange, Laplace e Legendre. Fourier também deixou sua marca ao fazer pesquisas matemáticas que contribuíram para estudos e cálculos da difusão do calor e a solução de equações diferenciais. Grande parte desse trabalho aparece em seu livro *The Analytical Theory of Heat* (A teoria Analítica do calor, em 1822), no qual ele faz uso extensivo da série que leva seu nome.

E assim as equações diferenciais foram tomando forma e suas aplicações definidas.

2.1. Os Bernoullis

Nenhuma família, na história da matemática, produziu tantos matemáticos célebres quanto a família Bernoullis, cerca de uma dúzia de membros da família (ver a árvore genealógica) conseguiu renome na matemática e na física, e quatro deles foram eleitos como sócios estrangeiros da Académie des Sciences, destacando-se os irmãos e discípulos de Leibniz, Jacques Bernoulli (1654-1705) e Jean Bernoulli (1667-1748) frequentemente conhecidos também pela forma anglicizada de seus nomes, James e John, ou pelos equivalentes alemães Jakob e Johann.



Os Bernoullis matemáticos: árvore genealógica.

Jacques Bernoulli nasceu e morreu na Basileia, contudo viajou muito para encontrar cientistas de outros países. Foi influenciado profundamente pelas obras de Wallis e Barrow demonstrando grande interesse pelo cálculo infinitesimal, tanto que em 1680 sugeriu a Leibniz o termo “integral”, e logo ele próprio estava contribuindo com artigos sobre o assunto. Entre outras coisas, ele observou que num ponto de máximo ou mínimo a derivada da função não precisa se anular, mas pode tomar um “valor infinito” ou assumir forma indeterminada. Em 1689 apresentou a bem conhecida “desigualdade de Bernoulli,

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \quad x > -1, \quad x \neq 0, \quad 1 < n \in \mathbb{N}$$

No campo das equações diferenciais contribuiu com o estudo da “equação de Bernoulli”.

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

que ele, Leibniz e Jean Bernoulli resolveram - Jean por redução a uma equação mediante a substituição $z = y^{1-n}$.

Jacques Bernoulli tinha fascinação por curvas e pelo cálculo, e uma curva tem seu nome – a “lemniscata de Bernoulli” que é semelhante a um oito ou uma fita com laço, dada pela equação polar $r^2 = a \cos(2\theta)$

Jean Bernoulli conservou um zelo pela matemática tão vivo quanto sua persistência em controvérsias, tendo sido pai de três filhos Nicholas (1695-1726), Daniel (1700-1782) e Jean II (1710-1790), todos os quais em alguma ocasião ocuparam postos de professor de matemática. Percebeu a relação entre as funções trigonométricas inversas e os logaritmos imaginários, descobrindo em 1702, através de equações diferenciais, a relação

$$\operatorname{arctng}(z) = \frac{1}{i} \ln \sqrt{\frac{1+iz}{1-iz}}$$

Jean e Jacques Bernoulli redescobriram as séries para $\sin(n\theta)$ e $\cos(n\theta)$, em termos de $\sin(\theta)$ e $\cos(\theta)$, que Viète conhecia, e estenderam tais séries, sem exame, incluindo valores fracionários de n .

Houve ainda outros Bernoullis que conseguiram eminência em matemática, mas desses nenhum conseguiu fama comparável à dos dois irmãos, Jacques e Jean.

2.2. Leonhard Euler

Matemático suíço nascido na Basiléia (1707-1783). O jovem Euler estudou com Jean Bernoulli e se associou com seus filhos, Nicolas e Daniel.

Euler estudou matemática, teologia, medicina, astronomia, física e línguas orientais chegando até a dar aulas de filosofia natural na Academia de S. Petersburgo (Rússia).

Com a morte de Nicolas Bernoulli e a saída de Daniel Bernoulli da Rússia para ocupar a cadeira de matemática em Basiléia, Euler tornou-se o principal matemático da Academia de S. Petersburgo.

Publicou mais de 500 livros e artigos durante sua vida.

Morreu em 1783, aos setenta e seis anos, subitamente enquanto tomava chá com um de seus netos.

Os quatro volumes de *Institutiones* de Euler contêm de longe o tratamento mais completo do cálculo dado até então. Além dos elementos do assunto e da resolução de equações diferenciais, encontramos coisas como o “teorema de Euler sobre funções homogêneas” – se $f(x,y)$ é homogênea de ordem n , então $xf_x + yf_y = nf$ – um desenvolvimento do cálculo de diferenças finitas, formas padrão para integrais elípticas (campo em que d’Alembert também trabalhava) e a teoria das funções beta e gama (ou fatorial) baseada nas “integras eulerianas”.

Euler também escreveu cartas e artigos sobre vários aspectos da teoria dos números. Num desses artigos, ele derruba a conjectura de Fermat que dizia que números da forma $2^{2^n} + 1$ seriam sempre primos. Em 1732, Euler mostrou que $2^{2^5} + 1 = 4294967297$ é fatorável em 6700417×641 .

2.3. Jean Le Rond d’Alembert

O cognome de d’Alembert (1717-1783) era tirado da igreja de ST. Jean Baptiste Le Ron, perto de Notre Dame (Paris), em cujos degraus ele tinha sido abandonado, mais tarde descobriu-se que sua mãe era a aristocrática e vivaz Madame de Tencin, escritora e irmã de um cardeal, e seu pai era o Chevalier Destouches, general da artilharia. A criança abandonada foi criada pela esposa de um vidreiro; mais tarde quando se tornou célebre como matemático d’Alembert desprezou a aproximação de sua mãe biológica, preferindo ser reconhecido como filho de seus humildes pais adotivos.

D’Alembert tinha instrução ampla, assim como Euler e os Bernoullis, estudou direito, medicina, ciência e matemática, o que lhe foi muito útil, pois entre 1751 e 1772, colaborou com Denes Diderot(1713-1784) na elaboração de uma enciclopédia com vinte e oito volumes.

Pelo fim da estada de Euler em Berlim, Frederico, o Grande, da Prússia convidou d’Alembert a presidir a Academia da Prússia; d’Alembert recusou, arguindo que seria muito impróprio colocar qualquer contemporâneo em posição de superioridade acadêmica sobre o grande Euler.

Num artigo de 1752 sobre a resistência dos fluidos ele chegou às chamadas equações de Cauchy - Riemann que tanta importância têm na análise complexa. Dada a função analítica $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$, então

$$\partial_x u(x,y) = \partial_y v(x,y), \quad \partial_y u(x,y) = -\partial_x v(x,y)$$

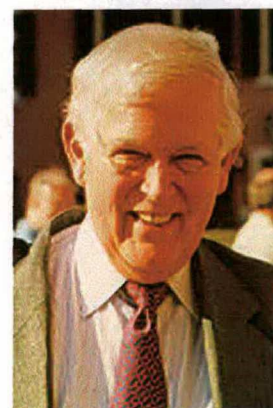
2.4. Jean Baptiste Joseph Fourier

Matemático francês que nasceu em Auxerre, Borgonha, em 21 de março de 1728, e morreu em 16 de maio de 1830. Treinado para o sacerdócio, Fourier não fez os seus votos, pois o seu amor pela matemática o levou em 1789 a abandonar os estudos religiosos para desenvolver pesquisas em matemática. Em 1790; Fourier começou a dar aulas no Colégio Beneditino, e em 1795 continuou seus estudos na Escola Normal em Paris, onde teve professores como Lagrange e Laplace. Em 1798, ele se uniu ao exército de Napoleão em sua invasão do Egito como aconselhador científico, para ajudar a estabelecer instalações educacionais e levar a cabo explorações arqueológicas.

Assim que voltou, Fourier aceitou o pedido de Napoleão de atuar como prefeito de Grenoble. Em Grenoble, Fourier escreveu seu trabalho mais importante. *Memoire sur la chaleur*, contendo suas ideias sobre transferência de calor e um novo método de análise matemática, hoje conhecido como análise de Fourier. A tese básica da teoria de Fourier era que, dado em conjunto completo de funções, qualquer função poderia ser escrita pela combinação linear dos membros desse conjunto. A análise de Fourier é muito importante na matemática moderna, e suas ideias são as bases para descrever funções de ondas em sistemas complexos. É uma matéria importantíssima para comunicação de dados e telecomunicações.

2.5. Rudolf Emil Kalman

Rudolf Emil Kalman nasceu em 30 de maio de 1930 na cidade de Budapeste, Hungria, Recebeu seu grau de Bacharel e o título de Mestre em engenharia Elétrica do MIT (Instituto Tecnológico de Massachusetts). Posteriormente recebeu seu doutorado da Universidade de Columbia em 1957.



Ele trabalhou como matemático pesquisador no Instituto de pesquisas para estudos avançados em Baltimore, 1958-1964; como professor na Universidade de Stanford 1964-1971; professor pesquisador no Centro de Sistemas Matemáticos da Universidade de Flórida, Gainesville 1971-1993. Mais ainda, de 1993 ocupou a cátedra do grupo de pesquisa em Teoria de Sistemas Matemáticos no Instituto Federal Tecnológico de Suíça, Zurich, (ETH).

Ganhou muitos prêmios, incluindo a medalha de honra da IEEE (Instituto de Engenheiros Eletricistas e Eletrônicos) (1964), a medalha Centenária da IEEE (1984), o premio Kyoto de Alta Tecnologia da Fundação Japonesa Inamori, Japão (1985), O prêmio Steele da Sociedade Americana de Matemática (1987).

Também é membro da Academia Nacional de Ciências dos Estados Unidos de Academia Nacional de Engenharia dos Estados Unidos e membro externo da Academia Francesa e Academia Húngara.

A contribuição importante de Kalman foi a introdução de um regulador em Controle adaptativo. Entre 1959 e 1964 Kalman escreveu muitos trabalhos originais. Dentro destes, o método novo para o problema dos filtros, conhecido como o filtro de Kalman, também fez contribuições como os conceitos de controlabilidade e observabilidade.

Nos últimos quinze anos Kalman tem dedicado seus esforços para entender o problema de identificar os ruídos nos dados e suas implicações na econometria, estatística e teoria de probabilidades.

3. CONCEITOS BÁSICOS DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Chama-se Equação Diferencial toda equação cujas incógnitas são funções e que contém pelo menos uma derivada ou diferencial dessas funções.

Exemplo. Considere as seguintes equações diferenciais,

$$x dx + y dy = 0 \quad (3.1)$$

$$\partial_t^2 u(x, t) - 4\partial_x^2 u(x, t) = 0 \quad (3.2)$$

Quanto à classificação uma equação diferencial pode ser ordinária, se a função ou variável incógnita depende só de uma variável, caso contrário será chamada de Equação Diferencial Parcial se a função incógnita depende de mais de uma variável. Observamos que a equação (3.1) é uma EDO (Equação Diferencial Ordinária) e a equação (3.2) é uma EDP (Equação Diferencial Parcial).

A ordem de uma equação diferencial é a ordem da mais alta derivada que nela comparece e o grau da equação é o maior dos expoentes que está elevada a derivada de mais alta ordem contida na equação.

A solução de uma Equação Diferencial na função incógnita y e variável independente x , em um intervalo I , é uma função $y(x)$ que verifica a equação para todo $x \in I$.

Exemplo. Considere a seguinte equação diferencial $y' = 3x - 1$. Encontre a solução clássica

Integrando os dois membros da equação, teremos;

$$\int y' dx = \int (3x - 1) dx = \frac{3}{2}x^2 - x + C$$

Por outro lado temos, observando o lado esquerdo da identidade acima temos,

$$y = \frac{3}{2}x^2 - x + C, \quad x \in I = \mathbb{R}.$$

Existem vários tipos de soluções para uma equação diferencial.

Solução Geral - é a solução que contém tantas constantes arbitrárias quanto as unidades da ordem da equação.

Solução Particular - é a solução deduzida da solução geral, atribuindo-se valores particulares às constantes arbitrárias.

Solução Singular - é a solução da equação, que não pode ser deduzida da solução geral

Equações Diferenciais Ordinárias

Equações Diferenciais de 1ª Ordem Homogênea

Definição: Toda função do tipo $f(x,y,z)$ é denominada homogênea se ao substituir-se x por kx ; y por ky e z por kz , tem-se,

$$f(kx, ky, kz) = k^m f(x, y, z)$$

onde m é denominado grau de homogeneidade.

Na equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad f(kx, ky) = kf(x, y)$$

Fazer uso do seguinte método que inicia com a substituição:

$$y = v(x)x \tag{3.3}$$

Derivando (3.3) em relação a variável x , temos que:

$$\frac{dy}{dx} = v(x) + x \frac{dv(x)}{dx} \tag{3.4}$$

Após a substituição das equações (3.3) e (3.4) na equação original e efetuando as simplificações necessárias, temos que a equação resultante se apresenta como uma equação de variáveis separáveis nas incógnitas v e x .

Exemplo. Resolver a equação diferencial ordinária

$$xy' = y + x \exp(y/x)$$

Fazendo manipulações simples algébricas, dividindo pela variável $x \neq 0$, temos

$$y' = \frac{y}{x} + \exp(y/x)$$

Utilizando a substituição $v = y/x$ e derivando com relação a x ,

$$v + xv' = v + \exp(v) \Rightarrow xdv = e^v dx \Rightarrow \frac{dx}{x} = e^{-v} dv$$

Integrando a equação de variáveis separáveis teremos,

$$\int e^{-v} dv - \int \frac{dx}{x} = C \Rightarrow \exp\left(\frac{y}{x}\right) + \ln(x) = C$$

3.1. Equações Diferenciais Parciais

Como vimos anteriormente, as Equações Diferenciais Parciais são equações cuja a função incógnita depende de mais de uma variável independente e essas equações, em sua maioria, são modelos de fenômenos físicos, como por exemplo:

- Equação da Onda (1-D)

$$\partial_t^2 u(x, t) - a^2 \partial_x^2 u(x, t) = 0, \quad \text{em } [0, T] \times]0, \infty[$$

- Equação do Calor (1-D)

$$\partial_t u(x, t) - k \partial_x^2 u(x, t) = 0, \quad \text{em } [0, T] \times]0, \infty[$$

- Equação de Bernoulli

$$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$$

- Equação de Laplace

$$\Delta u(x) = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^n$$

- Equação de Euler

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = 0, \quad a_n \neq 0$$

onde $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ são constantes

Verificando se uma função u satisfaz uma relação em derivadas parciais. Seja $u(x, y) = f(xy)$, onde f é uma função qualquer de xy . Encontre a relação,

$$x \partial_x u(x, y) = y \partial_y u(x, y)$$

Derivando parcialmente em relação a x ,

$$\partial_x u(x, y) = \partial_x f(xy) = \frac{df(z)}{dz} \partial_x z = f'(z) y$$

Derivando parcialmente em relação a y ,

$$\partial_y u(x, y) = \partial_y f(xy) = \frac{df(z)}{dz} \partial_y z = f'(z) x$$

Multiplicando primeira relação por x e segundo por y e comparando ambos os resultados temos a relação desejada.

4. APLICAÇÕES DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

As Equações Diferenciais foram, e continuam sendo, objeto de intensa atividade de pesquisa, pois apresentam aspectos puramente matemáticos e uma multiplicidade de aplicações, além de apresentarem diversas ramificações. Abordaremos neste capítulo especificamente algumas aplicações das equações diferenciais.

4.1. Crescimento de Tumores

Tem sido observado experimentalmente que microorganismos que se reproduzem de forma a ocorrer a “sua duplicação” (“mitose”), como as bactérias, tem sua taxa de crescimento proporcional ao volume de células divididas em um dado momento. Denotando por $V(t)$ o volume de células divididas no tempo t . Então,

$$\frac{dV}{dt} = \lambda V(t), \quad \lambda > 0$$

para alguma constante positiva λ . A solução é $V(t) = V_0 \exp(\lambda[t - t_0])$ onde V_0 é o volume de células divididas no tempo inicial t_0 . Então o volume de células divididas cresce exponencialmente com o tempo, ou seja,

$$V(t) \rightarrow \infty \quad \text{quando} \quad t \rightarrow \infty$$

o que é impossível de ser mantido para sempre, temos, então, um modelo de natureza razoável que tem melhor aplicabilidade em intervalos delimitados de tempo.

Por outro lado, o crescimento de tumores sólidos não é exponencial em relação ao tempo. Através de pesquisas verificou-se que uma boa aproximação de $V(t)$ que melhor se adéqua aos dados obtidos da análise de vários tumores sólidos e dada pela equação

$$V(t) = V_0 \exp\left[\frac{\lambda}{\alpha}(1 - \exp(-\alpha t))\right]$$

onde $\exp(x) = e^x$, as constantes λ e α são positivas. A equação é conhecida como uma relação de Gompertzian. A análise desta equação nos informa que o tumor cresce mais e mais lentamente com o passar do tempo e que o limite do volume de células divididas é aproximadamente: $V_0 \exp\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)$. Para mais modelos pode-se ver o texto de Campbell [2].

4.2. Modelo Predador – Presa De Lotka – Volterra

Ocorre um interação do tipo predador – presa entre duas espécies quando uma espécie (predador) se alimenta de uma segunda espécie (presa).

Há muitos modelos predador – presa que levam a sistemas autônomos planos com ao menos uma solução periódica. Os biomatemáticos A. Lotka (1925) e V. Volterra (1926) foram os pioneiros na construção desses modelos. Se x denota o número de predadores e y denota o número de presas, então o modelo Lotka – Volterra toma a forma.

$$\begin{aligned}x' &= -ax + bxy = x(-a + by) \\y' &= -cxy + dy = y(-cx + d)\end{aligned}$$

onde a , b , c e d são constantes positivas.

Notemos que na ausência de predadores $x = 0$, temos $y' = d y$, logo o número de presas cresce exponencialmente. Na ausência de presas $x' = -ax$, a população de predadores tende a extinguir-se. O termo $-cxy$ representa a taxa de mortalidade devido à predação.

5. CONDIÇÕES DE FRONTEIRA

As equações diferenciais parciais devem usualmente satisfazer certas exigências, como nas equações diferenciais ordinárias. Denominamos essas exigências de condições de fronteira.

Podemos dizer que uma equação diferencial parcial e um conjunto de condições de fronteiras podem representar um fenômeno físico, se esta tiver solução única, pois apresentando um conjunto de dados em um fenômeno físico estes nos levam à um único resultado, e também quando dada uma pequena mudança nas condições de fronteira, resultam em apenas pequenos desvios na solução, pois as condições de fronteira são obtidas através de experiências que ocasionam pequenos erros, e esses erros não devem ocasionar grandes desvios nas soluções.

$$y\partial_y u(x, y) = x\partial_x u(x, y)$$

Procuramos agora uma solução que satisfaça as seguintes condições de fronteira

$$u(x, 0) = 1, \quad u(0, y) = 1, \quad \partial_x u(0, y) = y$$

podemos verificar facilmente que $u(x, y) = \cos(xy)$ satisfaz a equação e as condições de fronteira. Não é fácil de se obter tipos de condições de fronteira que conduzam as equações diferenciais parciais lineares à soluções únicas e estáveis; este estudo é um pouco difícil, mas existem três tipos principais de condições que aparecem frequentemente em estudos de fenômenos físicos:

Condições de Dirichlet, que é utilizada quando o fenômeno físico atua sobre toda a região de um corpo, onde são conhecidos os valores da função u em cada ponto da fronteira da região.

Condições de Neumann, que é utilizada quando o fenômeno físico está atuando nas fronteiras de uma região, onde são conhecidos os valores da derivada normal $\partial_n u$ da função na fronteira.

Condições de Cauchy, neste caso uma das variáveis independentes é a variável t (tempo) e são conhecidos os valores de u e de $\partial_t u(x, t)$ para $t = 0$.

Um exemplo de EDP sujeita as condições iniciais seria a seguinte

$$\partial_x^2 u(x, t) = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 u(x, t)$$

$$u(x, 0) = \operatorname{tng}(x), \quad \partial_t u(x, 0) = x$$

onde $u = u(x, t)$ e como podemos notar as condições são do tipo de Cauchy. Para maiores detalhes ver Fritz John [12].

6. NOÇÕES DE ÁLGEBRA LINEAR

Para implementar a condição principal de Kalman precisamos de alguns conceitos da disciplina de álgebra linear. Ver, para maiores detalhes, Leon [8], 1999.

FORMA ESCADA.

Quando se reduz um sistema linear $n \times n$ a uma forma triangular, o método falha se, em qualquer estágio do processo de redução, todas as escolhas possíveis para o elemento pivô numa dada coluna são nulas. Para evitar isto enunciamos a seguinte definição,

DEFINIÇÃO. Uma matriz está na forma escada se são satisfeitas as seguintes condições

- O primeiro elemento de cada linha é o número um
- Se a linha k não consiste apenas em zeros, o número de zeros no início de cada linha $k + 1$ é maior do que o número de zeros no início da linha k ;
- Se existirem linhas com todos os elementos iguais a zero, elas ficam abaixo de todas as linhas não-nulas.

A seguir mostramos algumas matrizes que satisfazem as condições acima expostas. As matrizes a seguir estão na forma escada

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

As seguintes matrizes não satisfazem as condições da forma escada

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A primeira matriz não satisfaz a primeira condição. A segunda matriz não satisfaz a terceira condição e finalmente a terceira não satisfaz a segunda condição.

ESPAÇOS LINHA E COLUNA

Cada linha de uma matriz A de tamanho $n \times n$ é uma n -upla de números reais e pode ser suposta como um vetor de $\mathbb{R}^{1 \times n}$. Referimos-nos aos m vetores correspondentes às linhas de A como os *vetores linhas* de A . De maneira semelhante, cada coluna de A pode ser considerada como um vetor em \mathbb{R}^n e podemos associar à matriz A n vetores colunas.

DEFINIÇÃO. Se A é uma matriz de tamanho $n \times n$, o subespaço de $\mathbb{R}^{1 \times n}$ gerado pelos vetores linha de A é chamado de **espaço linha** de A . O subespaço de \mathbb{R}^n gerado pelos vetores coluna de A é chamado de **espaço coluna** de A .

A seguir ilustramos com um exemplo a definição anterior,

Exemplo. Considere a seguinte matriz com entradas reais,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Mostre o espaço linha e o espaço coluna da matriz dada.

Solução. O espaço linha da matriz A é o conjunto das triplas da forma

$$\delta(1, 0, 0) + \gamma(0, 1, 0) = (\delta, \gamma, 0)$$

O espaço coluna da matriz A é o conjunto dos vetores da forma

$$\delta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Assim sendo, o espaço linha de A é um subespaço bidimensional do espaço $\mathbb{R}^{1 \times 3}$ e o espaço coluna de A é todo o plano \mathbb{R}^2 .

TEOREMA. Duas matrizes equivalentes por linhas possuem o mesmo espaço linha.

Demonstração. Ver o texto de Leon [8] 1999, página 119-121.

DEFINIÇÃO. O posto de uma matriz real A é a dimensão de seu espaço linha.

Para determinar o posto de uma matriz, podemos colocá-la em forma escada. As linhas não nulas da forma escada formam uma base para o espaço linha. Ilustramos isto com o seguinte exemplo.

Exemplo. Considere a seguinte matriz de entradas reais,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & -4 & -7 \end{pmatrix}$$

Determinar o posto da matriz dada.

Solução. Fazendo uma redução a forma escada utilizando as operações elementares de linha obtemos a seguinte matriz

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observamos que os vetores $(1 \ -2 \ 3)$ e $(0 \ 1 \ 5)$ formam uma base para o espaço linha da matriz G . Por outro lado como as matrizes A e G são equivalentes por linhas, utilizando o Teorema anterior, concluímos que elas tem o mesmo espaço linha, logo pela definição de posto, o posto da matriz A é dois.

7. CONTROLE DE SISTEMAS FINITOS

A teoria matemática do controle esta recheada de resultados interessantes e que são importantes no contexto das aplicações. Muitos deles são complexos para serem reproduzidos neste trabalho.

Um dos mais importantes e acessíveis resultados, onde se caracterizam os sistemas lineares de dimensão finita que são controláveis é devido a Rudolf Kalman [11] Consideremos o sistema

$$\begin{aligned}x'(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad t \in [0, T] \\x(0) &= x^0\end{aligned}\tag{3.5}$$

No sistema anterior (3.5) a matriz real A possui medida $n \times n$, esta determina a dinâmica do sistema, a segunda matriz real B possui medida $n \times m$, esta modela a forma como m controles estão atuando sobre o sistema, finalmente x^0 é um vetor de \mathbb{R}^n , um tempo $T > 0$ e $m, n \in \mathbb{N}^*$

A função $x: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ representa o “estado” e a função $u: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ representa o “controle”. Ambas as funções vetoriais de n e m componentes respectivamente dependem exclusivamente da variável tempo t . Na prática, teremos sempre $m \leq n$. Objetivo desejado será controlar o sistema por intermédio de um número mínimo m de controles.

Existência e Unicidade de Soluções. A modo de complementação enunciaremos um resultado que garante existência e unicidade do sistema (3.5). Fornecido o dado $x^0 \in \mathbb{R}^n$ e uma função vetorial $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ então o sistema (3.5) possui uma única solução $x \in H^1(0, T; \mathbb{R}^n)$ caracterizada pela fórmula de variação de constantes

$$x(t) = e^{At}x^0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds, \quad t \in [0, T]\tag{3.6}$$

Os espaços mencionados acima são definidos pelas expressões,

$$\begin{aligned}L^2(0, T; \mathbb{R}^m) &= \left\{ f: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m : \int_0^T |f(t)|^2 dt < \infty \right\} \\H^1(0, T; \mathbb{R}^n) &= \left\{ g: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n : g, g' \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m) \right\}\end{aligned}$$

Exemplo. Resolver o sistema não homogêneo dado por:

$$\begin{aligned}x'(t) &= x(t) + t^2 \\x(0) &= 1\end{aligned}$$

Solução. Utilizaremos o resultado obtido na equação (3.6). Resolvendo a equação homogênea,

$$\begin{aligned}x'(t) &= x(t) \\ x(0) &= 1\end{aligned}$$

temos que a única solução esta dada por

$$x(t) = x^0 \exp(t)$$

Para resolver o sistema não homogêneo, fazemos,

$$x_p(t) = v(t) \exp(t)$$

Derivando x_p e substituindo temos

$$dv(t) = t^2 \exp(-t) dt$$

Integrando a identidade acima, teremos,

$$v(t) = \int_0^t s^2 \exp(-s) ds$$

Finalmente teremos a solução geral do sistema não homogêneo fornecido,

$$x(t) = x + x_p = x^0 \exp(t) + \exp(t) \int_0^t s^2 \exp(-s) ds$$

Ou escrito de maneira equivalente,

$$x(t) = x^0 \exp(t) + \int_0^t s^2 \exp(t-s) ds$$

Devemos sempre levar em conta que m é o número de controles agindo no sistema, enquanto n é o número de componentes do estado a ser controlado. Nas aplicações é preciso fazer que o número de controles m seja o menor possível. Porém isto pode afetar as propriedades de controle do sistema. Alguns sistemas com um número grande de componentes n pode ser controlado por um único controle, isto é, $m = 1$. Para programar isso, o mecanismo de controle, isto é, a matriz real B (vetor coluna quando $m = 1$), precisa ser escolhido de uma maneira estratégica dependendo da matriz A . A condição dada por Kalman sobre o posto de uma matriz, definida nas próximas seções fornecem uma caracterização simples que permitirão fazer uma escolha apropriada da matriz de controle B

Ilustraremos as conclusões vertidas anteriormente no seguinte exemplo,

Exemplo. Considere $n = 2$ e $m = 3$

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix}$$

A “equação do estado” dada na sua forma matricial,

$$X'(t) = AX(t) + BU(t)$$

Reescrevendo temos

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix}$$

Em termos de componentes assume a seguinte forma,

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_1(t) + u_1(t) + u_3(t) \\ x_2'(t) &= x_2(t) + u_1(t) + u_2(t) \end{aligned}$$

e as condições iniciais são dadas por,

$$X(0) = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}$$

7.1. Definição de Controle de Sistemas Finitos

Considere o seguinte sistema,

$$x'(t) + Ax(t) = Bv(t), \quad 0 \leq t \leq T; \quad x(0) = x^0 \quad (6.1)$$

será exatamente controlável no tempo $T > 0$ se dadas as condições inicial e final, $x^0, x^1 \in \mathbb{R}^n$

existe um controle $v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ tal que a solução x de (6.1) satisfaz

$$x(T) = x^1 \quad (6.2)$$

Em outras palavras o sistema é chamado de controlável no tempo T quando o conjunto de estados atingíveis,

$$R(T; x^0) = \left\{ x(T) \in \mathbb{R}^n : x \text{ solução de (6.1) com } v \in [L^2(0, T)]^m \right\}$$

cobre todo o espaço euclidiano \mathbb{R}^n para qualquer dado inicial $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Quando esta propriedade é satisfeita, dizemos que o sistema é *exatamente controlável*. Aqui a afirmação exatamente indica o fato que o alvo (6.2) é alcançado completamente. Esta condição final pode ser relaxada de diferentes maneiras conduzindo-nos para muitos conceitos de controlabilidade. Como estamos em dimensão finita, os conceitos mais fracos de

controlabilidade serão equivalentes ao controle exato. A modo de ilustração, dizemos que um sistema será *aproximadamente controlável* quando o conjunto dos estados controláveis é denso em \mathbb{R}^n . Porém no espaço euclidiano \mathbb{R}^n o único subespaço denso fechado e afim é o próprio ou todo o espaço. Assim sendo, os conceitos de *controlabilidade aproximada* e *controlabilidade exata* são equivalentes.

O processo de controle consiste em direcionar uma solução x de (6.1) do estado inicial x^0 para o estado final x^1 no tempo $T > 0$ de acordo com a ação que o controle “ v ” efetua sobre o sistema.

O número “ m ” determina os controles introduzidos no sistema. Enquanto “ n ” é o número de componentes do estado a ser controlado.

Para ilustrar o conceito de controle, fornecemos os seguintes exemplos

Exemplo. Considere as seguintes matrizes com $1 \leq m = n$, onde $n = 2$ e $m = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}$$

Logo o sistema em questão será,

$$x' = Ax + Bu,$$

que pode ser escrito em termos de componentes,

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + u \\ x_2' &= x_2 \end{aligned}$$

Ou de forma equivalente,

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + u \\ x_2 &= x_2^0 \exp(t) \end{aligned}$$

Conclusão. O sistema não é controlável, pois o controle “ u ” não atua sobre a segunda componente. Isto é, uma das componentes do sistema é insensível ao controle. O sistema é chamado de *parcialmente controlável*.

Exemplo. Nem todos os sistemas com duas componentes e um controle escalar ($n = 2, m = 1$) são mal comportados. Isto pode ser observado quando analisamos a equação diferencial ordinária do oscilador harmônico controlado,

$$x'' + x = u \tag{6.3}$$

Mostre se o sistema é controlável.

A equação matricial será dada por

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

Assim as matrizes A e B são dadas por,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Logo temos,

$$x' = y, \quad y' = -x + u$$

A diferença do primeiro exemplo, agora o controle atua na segunda equação onde ambas componentes estão presentes. Portanto não podemos concluir que o sistema é ou não é controlável. De fato é controlável. Com efeito, dados alguns dados iniciais e finais arbitrários, (x^0, y^0) e (x^1, y^1) respectivamente, não é difícil construir uma função regular z tal que:

$$\begin{aligned} z(0) &= x^0, & z(T) &= x^1 \\ z'(0) &= y^0, & z'(T) &= y^1 \end{aligned} \tag{6.4}$$

De fato, aqui existem infinitas maneiras de construir tais funções. Uma delas, por exemplo, escolhendo uma função polinomial cúbica z . Podemos então definir $u = z'' + z$ como sendo o controle desde que a solução x da equação (6.3) com esse controle e dados iniciais (x_0, y_0) coincide com z , isto é, $x = z$, e ainda satisfaz as exigências de controle dadas em (6.4)

Esta construção fornece um exemplo de um sistema de duas componentes ($n = 2$) que é controlável por um controle apenas ($m = 1$). Mais do que isto, este exemplo mostra que o controle u não é único. De fato existem infinitos modos de controlar e diferentes trajetórias de controles de acordo com os controles requisitados. Na prática, escolher o controle é uma otimização (em algum senso para ser mais preciso) é uma importante ferramenta que discutiremos mais tarde.

Observação 1.1. Na definição do controle exato qualquer dado inicial x^0 é necessário que seja conduzido para qualquer dado final x^1 . Pelo menos, pela linearidade do sistema, sem perda de generalidade, podemos supor que $x^1 = 0$. De fato, se $x^1 \neq 0$ podemos resolver

$$\begin{cases} y' = Ay, & t \in (0, T) \\ y(T) = x^1 \end{cases} \tag{6.5}$$

voltando no tempo e definindo o novo estado por $z = x - y$ que satisfaz

$$\begin{cases} z' = Az + Bu \\ z(0) = x^0 - y(0) \end{cases} \quad (6.6)$$

Notamos que $x(T) = x^1$ se e somente se $z(T) = 0$. Portanto, levando a solução x de (6.1) do dado x^0 para x^1 é equivalente a conduzir a solução z de (6.6) de o valor inicial $z^0 = x^0 - y(0)$ para zero.

A observação nos dá motivos para a definição:

Definição 1.2. O sistema (6.1) é dito como *controlável nulo* no tempo $T > 0$ se dado qualquer valor inicial $x^0 \in \mathbb{R}^n$ então existe $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ tal que $x(T) = 0$.

A *controlabilidade nula* vale se e somente se $0 \in R(x^0, T)$ para qualquer $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Por outro lado, a observação 1.1. anterior mostra que o controle exato e controle nulo são propriedades equivalentes no caso de sistemas lineares com dimensão finita ou para sistemas em dimensão infinita irreversíveis no tempo. Mas isto não é necessariamente o caso de sistemas não-lineares. A equação do calor é um bom exemplo de um sistema com controlabilidade nula e que não é exatamente controlável.

7.2. Propriedade da Observabilidade

A propriedade do controle exato esta intimamente relacionada a uma desigualdade do correspondente sistema homogêneo adjunto. A desigualdade é chamada de observação ou desigualdade de observabilidade. Nesta seção vamos introduzir esta noção e mostraremos sua relação com a propriedade do controle exato.

Seja A^* a matriz adjunta de A , isto é, a matriz com a propriedade de que $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$. Consideramos o sistema adjunto homogêneo de (6.1)

$$\begin{cases} -\phi' = A^* \phi, & t \in (0, T) \\ \phi(T) = \phi_T \end{cases} \quad (6.7)$$

Lembrando que, para cada $\phi_T \in \mathbb{R}^n$, o sistema (6.7) pode ser resolvido voltando no tempo e tem uma única solução $\phi \in C^\omega([0, T], \mathbb{R}^n)$ (o espaço das funções analíticas definidas em $[0, T]$ e com valores em \mathbb{R}^n).

Antes de tudo, vamos deduzir uma condição equivalente para a propriedade da controlabilidade exata.

Lema 1.1

Uma condição inicial $x^0 \in \mathbb{R}^n$ de (6.1) é dirigido para zero no tempo T pelo uso do controle $u = v \in L^2(0, T)$ se e somente se

$$\int_0^T \langle u, B^* \phi \rangle dt + \langle x^0, \phi(0) \rangle = 0 \quad (6.8)$$

para qualquer $\phi_T \in \mathbb{R}^n$ sendo ϕ a correspondente solução do sistema (6.7).

Prova: Seja ϕ_T arbitrário em \mathbb{R}^n e ϕ a correspondente solução de (6.7). Multiplicando (6.1) por ϕ e (6.7) pela variável x , temos que

$$\langle x', \phi \rangle = \langle Ax, \phi \rangle + \langle Bu, \phi \rangle; \quad -\langle x, \phi' \rangle = \langle A^* \phi, x \rangle.$$

Então

$$\frac{d}{dt} \langle x, \phi \rangle = \langle Bu, \phi \rangle$$

como, após integrando no tempo, temos que

$$\langle x(T), \phi_T \rangle - \langle x_0, \phi(0) \rangle = \int_0^T \langle Bu, \phi \rangle dt = \int_0^T \langle u, B^* \phi \rangle dt \quad (6.9)$$

Nós obtemos então $x(t) = 0$ se e somente se (6.8) é verificado para algum $\phi_T \in \mathbb{R}^n$.

É fácil de ver que (6.8) é de fato uma condição ótima para pontos críticos da função quadrática $J: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$J(\phi_T) = \frac{1}{2} \int_0^T |B^* \phi|^2 dt + \langle x_0, \phi(0) \rangle$$

onde ϕ é a solução do sistema adjunto (6.7) com valor inicial ϕ_T no tempo $t = T$.

Mais precisamente, nós temos o seguinte resultado:

Lema 1.2.

Suponha que J tenha um mínimo $\bar{\phi}_T \in \mathbb{R}^n$ e seja $\bar{\phi}$ a solução do sistema adjunto (6.7) com os dados iniciais $\bar{\phi}_T$. Então

$$u = B^* \bar{\phi} \tag{6.10}$$

é um controle do sistema (6.1) com dados iniciais x^0 .

Prova: Se $\bar{\phi}_T$ é um ponto onde J assume o seu valor mínimo, então

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{J(\bar{\phi}_T + h\phi_T) - J(\bar{\phi}_T)}{h} = 0, \quad \forall \phi_T \in \mathbb{R}^n.$$

Isto é equivalente a

$$\int_0^T \langle B^* \bar{\phi}, B^* \phi \rangle dt + \langle x_0, \varphi(0) \rangle = 0, \quad \forall \phi_T \in \mathbb{R}^n,$$

como vimos no Lema 1.1, implica que $u = B^* \bar{\phi}$ é um controle para (6.1)

Observação 1.2.

O Lema 1.2 nos dá um método variacional para obter um controle como o mínimo do funcional J . Esta não é a única possibilidade funcional para se conseguir o controle. Modificando ele convencionalmente, outros tipos de controle (pelo momento apenas *bang-bang*) podem ser obtidos. Lembrando que os controles que encontramos são da forma $B^* \varphi$, sendo φ uma solução do problema homogêneo adjunto (6.7). No entanto, estas são funções analíticas sobre o tempo.

A noção a seguir será fundamental para a solução de problemas de controle.

Definição 1.3.

O sistema (6.7) é dito como *observável* no tempo $T > 0$ se existir um $c > 0$ tal que

$$\int_0^T |B^* \phi|^2 dt \geq c |\phi(0)|^2, \tag{6.11}$$

para todo $\phi_T \in \mathbb{R}^n$, sendo φ a correspondente solução de (6.7).

No que segue a desigualdade (6.11) será chamada de **observação** ou **desigualdade da observação**. Ele é a garantia de que a solução do problema adjunto para $t = 0$ é unicamente determinado por $B^* \phi(t)$ para $0 < t < T$. Em outras palavras, as informações contidas neste termo caracterizam completamente a solução de (6.7).

Observação 1.3

A observação da desigualdade (6.11) é equivalente ao seguinte: então existe $c > 0$ tal que

$$\int_0^T |B^* \phi|^2 dt \geq c |\phi_T|^2, \quad (6.12)$$

para todo $\phi_T \in \mathbb{R}^n$, sendo ϕ a solução de (6.7).

De fato, as seguintes equivalências para o fato de conseguirmos associar para todo $\phi_T \in \mathbb{R}^n$ o vetor $\phi(0) \in \mathbb{R}^n$, é uma transformação linear em \mathbb{R}^n com alguma inversa. Nós iremos usar as formas (6.11) ou (6.12) da desigualdade da observação dependendo da necessidade que o problema particular precisará.

A seguinte observação é muito importante no contexto de espaços de dimensão finita.

Proposição 1.1.

A desigualdade (6.12) é equivalente ao seguinte princípio da continuação única:

$$B^* \phi(t) = 0, \quad \forall t \in [0, T] \Rightarrow \phi_T = 0 \quad (6.13)$$

Prova: Uma das implicações segue imediatamente de (6.12). Para a outra, vamos definir a semi-norma em \mathbb{R}^n

$$|\phi_T|_* = \left[\int_0^T |B^* \phi|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

Claramente, $|\cdot|_*$ é a norma em \mathbb{R}^n se e somente se (6.13) é válido.

Desde que todas as normas em \mathbb{R}^n são equivalentes, a que temos em (6.13) é equivalente a (6.12). A prova termina usando a Observação 1.3.

Observação 1.4.

Lembrando que (6.11) e (6.13) que não serão propriedades equivalentes em espaços de dimensão infinita. Eles nos darão diferentes noções de controle (exato e aproximado, respectivamente).

A importância da desigualdade de observação está no fato de que implica controle exato de (6.1). Por este caminho, a propriedade do controle é reduzida ao estudo de uma desigualdade para o sistema homogêneo (6.7) o qual pelo menos conceitualmente, é um problema mais simples. Vamos analisar agora a relação entre a controlabilidade e a propriedade da observabilidade.

Teorema 1.1.

O sistema (6.1) é controlável exatamente no tempo T se e somente se (6.7) é observável no tempo T .

Prova: Vamos provar primeiro que a observação implica controle. De acordo com o Lema 1.2, a propriedade do controle exato no tempo T é válida se para qualquer $x^0 \in \mathbb{R}^n$, o funcional J tem um mínimo. Lembre que J é contínuo. Consequentemente, a existência de um mínimo é garantido se o funcional J é também coercivo, isto é,

$$\lim_{|\phi_T| \rightarrow \infty} J(\phi_T) = \infty \quad (6.14)$$

A propriedade coerciva (6.14) é uma consequência da propriedade da observação no tempo T . De fato, de (6.11) nós obtemos que

$$J(\phi_T) \geq \frac{c}{2} |\phi_T|^2 - |\langle x^0, \phi(0) \rangle|.$$

O lado direito tende ao infinito quando $|\phi_T| \rightarrow \infty$ e J satisfaz (6.14). Reciprocamente suponhamos que o sistema (6.1) é exatamente controlável no tempo T . Se (6.7) não é observável no tempo T , então existe uma seqüência $\{\phi_T^k\}_{k \geq 1} \subset \mathbb{R}^n$ tal que $|\phi_T^k| = 1$ para todo $k \geq 1$ e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T |B^* \phi^k|^2 dt = 0 \quad (6.15)$$

Isto quer dizer que existe uma subsequência de $(\phi_T^k)_{k \geq 1}$, denotada de mesmo modo, que converge para $\phi_T \in \mathbb{R}^n$ e $|\phi_T| = 1$. Ainda, se ϕ é uma solução de (6.7) com o valor inicial ϕ_T , de (17) segue que

$$\int_0^T |B^* \phi|^2 dt = 0 \quad (6.16)$$

Como (6.1) é controlável, o Lema 1.1 nos dá que, para algum valor inicial $x^0 \in \mathbb{R}^n$, então existe $u \in L^2(0, T)$ tal que

$$\int_0^T \langle u, B^* \phi_k \rangle dt = -\langle x^0, \phi_k(0) \rangle, \quad (6.17)$$

Tomando o limite em (6.17) e tomando o fato de (6.16), nós obtemos que $\langle x^0, \phi(0) \rangle = 0$. Desde que x^0 seja arbitrário em \mathbb{R}^n , temos que $\phi(0) = 0$ e, conseqüentemente, $\phi_T = 0$. Isto é uma contradição com o fato de que $|\phi_T| = 1$.

A prova do teorema está completa.

Observação 1.5.

Uma consequência do Teorema 1.1 consiste no fato de que ele reduz a prova do controle exato para o estudo da desigualdade da observação.

7.3. Condições de Kalman

Para analisar o problema da controlabilidade exata existe uma condição necessária e suficiente que é de natureza algébrica. Ela é chamada de *Condições de Kalman*: O sistema dado em (6.1) é controlável em algum tempo $T > 0$ se e somente se

$$\text{posto}[B, AB, \dots, A^{n-1}B] = n \quad (6.18)$$

Mais ainda, quando isso é válido, o sistema em questão é controlável para qualquer tempo $T > 0$. Quando o posto dessa matriz é k com $1 \leq k \leq n$ o sistema não é controlável e para cada dado inicial $x^0 \in \mathbb{R}^n$ o conjunto de soluções de (6.1) em cada instante $T > 0$ percorre um subespaço afim de \mathbb{R}^n de dimensão k .

Ou em outras palavras, o sistema (6.1) é controlável no tempo $T > 0 \Leftrightarrow$ o posto da matriz, ou seja, número de linhas não nulas da matriz $[B, AB, \dots, A^{n-1}B]$ deve ser igual a número n , elementos do vetor de estado.

Existe uma prova direta deste resultado que utiliza a representação das soluções (6.1) por intermédio da fórmula de variação de constantes.

É pertinente fazer algumas observações,

- O grau de controlabilidade do sistema (6.1) esta totalmente determinado pelo posto da matriz (6.18). Esse mede o número de componentes do sistema que são afetados pelo controle.
- A matriz dada em (6.18) que é de dimensão $(n \times m) \times n$ de maneira que quando se tem uma um só controle ($m = 1$) a matriz possui medida $n \times n$. Neste caso é mais difícil que o posto seja n . Isto está de acordo com a intuição que nos indica que o sistema é mais facilmente controlável quando existem mais controles.
- O sistema é controlável em um tempo $T > 0$ se e somente se o é em todo o intervalo do tempo. Isso indica que no sistema (6.1) a informação se propaga a velocidade infinita, situação que deixa de ser verdade no contexto das EDP's.
- Quando se estuda em modelos de EDP's é mais conveniente utilizar um método alternativo que consiste em *transformar o problema do controle* em um problema de *observabilidade para o sistema adjunto*, pois o problema adjunto pode ser resolvido por uma combinação dos métodos existentes para obter estimativas a priori sobre soluções de EDO e EDP.

Concluindo temos um clássico resultado devido a Rudolf E. Kalman e nos dá uma completa resposta para o problema de controle exato de sistema linear de dimensão finita. Ele mostra, em particular, que o tempo do controle é irrelevante.

Teorema 1.2.

O sistema (6.1) é exatamente controlável em algum tempo T se e somente se

$$\text{posto} = \text{número de linhas não nulas do sistema } [B, AB, \dots, A^{n-1}B] = n \quad (6.19)$$

Consequentemente, se o sistema (6.1) é controlável em algum tempo $T > 0$ então ele é controlável em qualquer tempo.

Observação 1.6.

De agora em diante simplesmente diremos que (A, B) é controlável se (6.19) for válido. A matriz $[B, AB, \dots, A^{n-1}B]$ será chamada de *matriz de controlabilidade*.

Exemplo: Ilustrar a condição de Kalman no seguinte sistema, onde a variável de estado possui duas componentes ($n = 2$) e um só controle ($m = 1$) e as matrizes do sistema são dadas por,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solução: Aplicaremos a condição de Kalman, para isso devemos construir a matriz de controle

$$[B, AB] = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

onde o produto das matrizes AB é dado por

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

O posto da matriz de controle $[B, AB]$ é igual a um, ($1 < n = 2$), pelo Teorema 1.2. segue que o sistema,

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

não é controlável.

Exemplo. Considere $n = 2$ e $m = 1$. Sejam as seguintes matrizes,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solução: Construindo a matriz de controle para aplicar as condições de Kalman

$$[B, AB] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

onde cada componente da matriz acima são dadas por,

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Logo posto da matriz de Kalman, $[B, AB]$, é igual a dois, ($2 = n$). Aplicando novamente o Teorema 1.2., concluímos que o sistema,

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

é controlável.

Prova do Teorema 1.2.

" \Rightarrow " Suponhamos que o número de linhas não nulas de $[B, AB, \dots, A^{n-1}B] < n$. Então as filas da matriz de controle $[B, AB, \dots, A^{n-1}B]$ são linearmente dependentes e existe um vetor $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$ tal que

$$v^* [B, AB, \dots, A^{n-1}B] = 0,$$

onde os coeficientes das combinações lineares são as componentes do vetor v . Desde que

$$v^* [B, AB, \dots, A^{n-1}B] = [v^* B, v^* AB, \dots, v^* A^{n-1}B],$$

$$v^* B = v^* AB = \dots = v^* A^{n-1}B = 0$$

Pelo Teorema de Cayley-Hamilton deduzimos que existem constantes c_1, c_2, \dots, c_n tal que

$A^n = c_1 A^{n-1} + \dots + c_n I$ e então $v^* A^n B = 0$. De fato, segue que $v^* A^k B = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e conseqüentemente $v^* e^{At} B = 0$ para todo t . Mas, pela fórmula da variação das constantes, a solução x de (6.1) satisfaz,

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} B u(s) ds \quad (6.20)$$

Então,

$$\langle v, x(T) \rangle = \langle v, e^{AT} x_0 \rangle + \int_0^T \langle v, e^{A(T-s)} B u(s) \rangle ds = \langle v, e^{AT} x_0 \rangle,$$

onde $\langle \cdot \rangle$ é denota o produto interno canônico em \mathbb{R}^n . Ainda, $\langle v, x(T) \rangle = \langle v, e^{AT} x_0 \rangle$. Isto mostra que a projeção da solução x no tempo T sobre o vetor v é independente do valor do controle u . E mais, o sistema não é controlável.

Observação 1.7

A propriedade da conservação da quantidade $\langle v, x \rangle$, temos provado que para qualquer vetor v para o qual $v[B, AB, \dots, A^{n-1}B] = 0$. Assim, se o número de linhas não nulas da matriz $[B, AB, \dots, A^{n-1}B]$ é $n - k$, o conjunto de estados atingíveis tal que $x(T)$ se encontra é um subespaço afim de \mathbb{R}^n de dimensão igual a $n - k$.

"⇐" Supomos agora que o número de linhas não nulas do sistema é $[B, AB, \dots, A^{n-1}B] = n$. De acordo com o Teorema 1.1 é suficiente mostrar que o sistema (6.7) é observável. Pela proposição 1.1, (6.11) existe se e somente se (6.13) é verificado. Ainda, o teorema é provado se (6.13) é válido. De $B^* \varphi = 0$ e $\varphi(t) = e^{A^*(T-t)} \varphi_T$, segue que $B^* e^{A^*(T-t)} \varphi_T \equiv 0$ para todo $0 \leq t \leq T$. Aplicando a derivada para estas funções em $t = T$ nós obtemos que

$$B^* [A^*]^k \varphi_T = 0, \quad \forall k \geq 0.$$

Mas, tendo que o número de linhas não nulas é $[B^*, B^* A^*, \dots, B^* (A^*)^{n-1}] = n$ então $\varphi_T = 0$. Logo, (6.13) é verificado e a prova do teorema 1.2 agora está completa.

Observação 1.8

O conjunto dos pares controláveis (A, B) é aberta e densa. Portanto,

- Se (A, B) é controlável então existe $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que para qualquer (A^0, B^0) com $|A^0 - A| < \varepsilon$, $|B^0 - B| < \varepsilon$ é também controlável. Isto é consequência do fato de que o determinante da matriz depende continuamente das suas entradas.
- Por outro lado, se (A, B) não é controlável, para algum $\varepsilon > 0$, existe um (A^0, B^0) com $|A - A^0| < \varepsilon$, $|B - B^0| < \varepsilon$ tal que (A^0, B^0) é controlável. Isto é consequência de que o determinante da matriz $n \times n$ depende analiticamente de suas entradas e não pode estar em $\mathbb{R}^{n \times n}$.

A seguinte desigualdade mostra que a norma do controle é proporcional a distância entre $e^{AT} x^0$ (o estado onde o sistema fica livre pela ausência do controle, isto é, com $u = 0$) e o objetivo x^1 .

Proposição 1.2

Suponha agora que o par (A, B) é controlável no tempo $T > 0$ e seja u o controle obtido através da minimização da função J . Então existe uma constante $C > 0$, dependendo de T , tal que a seguinte desigualdade é válida

$$\|u\|_{L^2(0,T)} \leq C |e^{AT}x^0 - x^1| \quad (6.21)$$

para qualquer dado inicial x^0 e objetivo final x^1 .

Prova: Vamos primeiro provar (6.21) para o caso particular $x^1 = 0$. Seja u o controle de (6.1) obtido pela minimização da função J . De (6.8) segue que

$$\|u\|_{L^2(0,T)}^2 = \int_0^T |B^* \bar{\phi}|^2 dt = -\langle x_0, \bar{\phi}(0) \rangle.$$

Se w é solução de

$$\begin{cases} w'(t) = Aw(t) \\ w(0) = x^0, \end{cases} \text{ para } t \in (0, T) \quad (6.22)$$

temos que

$$w(t) = e^{At}x^0 \quad \text{e} \quad \frac{d}{dt} \langle w, \phi \rangle = 0$$

para todo $\phi_T \in \mathbb{R}^n$, sendo ϕ a correspondente solução de (6.7).

Em particular, pegando $\phi_T = \bar{\phi}_T$, o mínimo de J , temos que

$$\langle x_0, \bar{\phi}(0) \rangle = \langle w_0, \bar{\phi}(0) \rangle = \langle w(T), \bar{\phi}_T \rangle = \langle e^{AT}x^0, \bar{\phi}_T \rangle$$

Nós obtemos que

$$\|u\|_{L^2(0,T)}^2 = -\langle x_0, \bar{\phi}(0) \rangle = -\langle e^{AT}x^0, \bar{\phi}_T \rangle \leq |e^{AT}x^0| \cdot |\bar{\phi}_T|$$

Por outro lado, temos que

$$\|\bar{\phi}_T\| \leq c \|B^* \bar{\phi}\|_{L^2(0,T)} = c \|u\|_{L^2(0,T)}$$

Portanto, o controle u verifica

$$\|u\|_{L^2(0,T)} \leq c |e^{AT}x^0|. \quad (6.23)$$

Se $x^1 \neq 0$, a observação 1.1 implica que o controle de u conduz a solução de x^0 para x^1 coincide com outro que leva a solução de $x^0 - y(0)$ para zero, onde y verifica (6.5).

Usando (6.23), obtemos que

$$\|u\|_{L^2(0,T)} \leq c |e^{TA}(x^0 - y(0))| = c |e^{TA}x^0 - x^1|$$

e (6.22) é provado.

Observação 1.9

Equações escalares lineares de qualquer ordem provém de exemplos de sistemas de dimensões grandes e arbitrárias que são controláveis com apenas um controle. Então, o sistema de ordem k

$$x^{(k)} + a_1 x^{(k-1)} + \dots + a_{k-1} x = u$$

é controlável. Isto pode ser facilmente obtido pela observação de que dados k valores iniciais e finais podemos sempre encontrar uma trajetória z (de fato um número infinito) juntando eles em qualquer intervalo de tempo. Este argumento foi usado no *Exemplo 2* para o caso quando $k = 2$.

7.4. Estabilização de Sistemas Lineares de Dimensão Finita.

Nesta seção assumiremos que A é uma matriz adjunta simétrica, isto é, $A^* = -A$.

Neste caso, $\langle Ax, x \rangle = 0$

Consideremos o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ x(0) = x^0 \end{cases} \quad (6.24)$$

Observação 1.11

O oscilador harmônico, $mx'' + kx = 0$, fornece um simples exemplo de um sistema com estas propriedades.

Quando $u \equiv 0$ a energia da solução de (32) é conservada (sistema conservativo). Ou seja, pela multiplicação de (32) por x , se $u \equiv 0$, teremos

$$\langle x, \dot{x}' \rangle = \langle x, Ax \rangle + 0$$

$$\frac{d}{dt} |x(t)|^2 = 0 \quad (6.25)$$

Então,

$$|x(t)| = |x^0|, \quad t \geq 0 \quad (6.26)$$

O problema da estabilização pode ser formulado da seguinte maneira. Suponha que o par (A, B) seja controlável. Procuramos uma matriz L tal que a solução do sistema (32) com o controle *feedback*,

$$u(t) = Lx(t) \quad (6.27)$$

tenha um **decaimento uniformemente exponencial**, isto é, existem uma constantes $c > 0$ e $\omega > 0$ tal que

$$|x(t)| \leq ce^{-\omega t} |x^0| \quad (6.28)$$

para qualquer solução.

Notemos que, de acordo com a equação (6.27), o controle u é obtido no tempo real do estado x .

Em outras palavras, estamos procurando a matriz L tal que a solução do sistema

$$\begin{aligned} x' &= Ax + BLx \\ x' &= (A + BL)x = Dx \end{aligned} \quad (6.29)$$

tenha uma taxa de decaimento uniformemente exponencial.

Observe que não podemos esperar mais de (6.28). Ou seja, as soluções de (6.29) podem não satisfazer $x(T) = 0$ no tempo finito T . Ou seja, se este for o caso, pela unicidade das soluções de (6.29) com o estado final $t = 0$ em $t = T$, poderia ser que $x^0 \equiv 0$. Por outro lado, qualquer que seja L , a matriz D tem n autovalores λ_j com correspondentes autovetores $e_j \in \mathbb{R}^n$. A solução $x(t) = e^{\lambda_j t} e_j$ de (6.29) mostra que o decaimento das soluções não pode ser mais rápido que a exponencial.

Teorema 1.3

Se A é uma matriz adjunta simétrica e o par (A, B) é controlável, então $L = -B^*$ estabiliza o sistema, isto é, a solução de

$$\begin{cases} x' = Ax - BB^* x \\ x(0) = x^0 \end{cases} \quad (6.30)$$

tem um decaimento uniformemente exponencial (6.28).

Prova: Pelo fato que $L = -B^*$ e multiplicando (6.30) por $x(t)$, obtemos que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |x(t)|^2 = -\langle BB^* x(t), x(t) \rangle = -|B^* x(t)|^2 \leq 0.$$

Então, a norma da solução decresce no tempo.

Mais ainda,

$$|x(T)|^2 - |x(0)|^2 = -2 \int_0^T |B^* x|^2 dt. \quad (6.31)$$

Para provar o decaimento uniformemente exponencial é suficiente mostrar que existe $T > 0$ e $c > 0$ tais que

$$|x(0)|^2 \leq c \int_0^T |B^* x|^2 dt \quad (6.32)$$

para qualquer solução x de (6.30). Ou seja, de (6.31) e (6.32) obteremos que

$$|x(T)|^2 - |x(0)|^2 \leq -\frac{2}{c} |x(0)|^2 \quad (6.33)$$

e conseqüentemente

$$|x(T)|^2 \leq \gamma |x(0)|^2 \quad (6.34)$$

com

$$\gamma = 1 - \frac{2}{c} < 1. \quad (6.35)$$

Então,

$$|x(kT)| \leq \gamma^k |x_0| = e^{(\ln \gamma)k} |x_0|, \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (6.36)$$

Agora, tomando qualquer $t > 0$, escrevemos na forma $t = kT + \delta$, com $\delta \in [0, T)$ e $k \in \mathbb{N}$, portanto obtemos que

$$\begin{aligned} |x(t)|^2 &\leq |x(kT)|^2 \leq e^{-|\ln(\gamma)|k} |x_0|^2 = \\ &= e^{-|\ln(\gamma)|\left(\frac{t}{T}\right)} e^{|\ln(\gamma)|\frac{\delta}{T}} |x_0|^2 \leq \frac{1}{\gamma} e^{-\frac{|\ln(\gamma)|}{T}t} |x_0|^2. \end{aligned}$$

Logo segue o decaimento pelo resultado (6.28) com

$$c = \frac{1}{\gamma}, \quad \omega = \frac{|\ln(\gamma)|}{T}. \quad (6.37)$$

Para provar (6.32), decompos a solução x de (6.30) como $x = \phi + y$ com ϕ e y soluções dos seguintes sistemas:

$$\begin{cases} \phi' = A\phi \\ \phi(0) = x_0 \end{cases} \quad (6.38)$$

e

$$\begin{cases} y' = Ay - BB^* x \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (6.39)$$

Observamos que, desde que A seja adjunta simétrica, (6.38) é exatamente o sistema adjunto (6.7) exceto pelo fato de que o valor inicial tomado foi $t = 0$.

Como vimos na prova do Teorema 1.2, o par (A, B) está sendo controlável, a seguinte desigualdade da observação é válida para o sistema (6.38):

$$|x_0|^2 \leq C \int_0^T |B^* \phi|^2 dt. \quad (6.40)$$

Tomando $\phi = x - y$ deduzimos que

$$|x_0|^2 \leq 2C \left[\int_0^T |B^* x|^2 dt + \int_0^T |B^* y|^2 dt \right].$$

Por outro lado, mostramos que a solução y de (6.39) satisfaz:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |y|^2 = -\langle B^* x, B^* y \rangle \leq |B^* x| |B^* y| \leq \frac{1}{2} (|y|^2 + |B^*|^2 |B^* x|^2)$$

Pela desigualdade de Gronwall, deduzimos que

$$|y(t)|^2 \leq |B^*|^2 \int_0^t |B^* x|^2 ds \leq |B^*|^2 e^T \int_0^T |B^* x|^2 dt \quad (6.41)$$

e conseqüentemente

$$\int_0^T |B^* y|^2 dt \leq |B^*|^2 \int_0^T |y|^2 dt \leq T |B^*|^4 e^T \int_0^T |B^* x|^2 dt.$$

Finalmente, obtemos que

$$|x_0|^2 \leq 2C \int_0^T |B^* x|^2 dt + C |B^*|^4 e^T T \int_0^T |B^* x|^2 dt \leq C' \int_0^T |B^* x|^2 dt$$

e a prova do Teorema 1.3 está completa.

Exemplo: Consideremos o oscilador harmônico amortecido,

$$m\ddot{x} + R\dot{x} + kx = 0, \quad (6.42)$$

onde m , k e R são constantes positivas.

Note que (6.42) pode ser escrito equivalentemente na forma

$$m\ddot{x} + R\dot{x} = -kx'$$

que exhibe uma força que atua sobre o oscilador, proporcional a velocidade do ponto de massa e de sinal oposto.

Veremos que as soluções desta equação têm a propriedade do *decaimento exponencial*. Ou seja, é suficiente para lembrarmos que as duas raízes características têm partes reais negativas. Isto é,

$$mr^2 + R + kr = 0 \Leftrightarrow r_{\pm} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - 4mR}}{2m}$$

E então

$$\operatorname{Re}[r_{\pm}] = \begin{cases} -\frac{k}{2m} & \text{se } k^2 \leq 4mR \\ -\frac{k}{2m} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4m} - \frac{R}{2m}} & \text{se } k^2 \geq 4mR \end{cases}$$

Vamos provar o decaimento exponencial da solução de (6.42) usando o Teorema 1.3.

Primeiro, devemos escrever (6.42) na forma de (6.30). Colocando

$$X = \begin{bmatrix} x \\ \sqrt{\frac{m}{R}} x' \end{bmatrix}$$

a equação conservativa $mx'' + kx = 0$ corresponde ao sistema:

$$X' = AX, \quad \text{com } A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{R}{m}} \\ -\sqrt{\frac{R}{m}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Note que A é uma matriz adjunta simétrica. Por outro lado, se escolhermos

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{k} \end{pmatrix}$$

obtemos que

$$BB^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

e o sistema

$$X' = AX - BB^* X \tag{6.43}$$

é equivalente a (6.42).

Agora, é fácil de ver que o par (A, B) é controlável desde que o posto (número de linhas não nulas) da matriz coluna formada por $[B, AB]$ seja 2.

Segue que a solução de (6.42) tem a propriedade do decaimento exponencial.

Se (A, B) é controlável, temos que provar a propriedade da estabilização uniforme do sistema (6.24) com a hipótese de que A é adjunta simétrica. Entretanto, esta propriedade é válida se A é uma matriz arbitrária. Mais precisamente, temos,

Teorema 1.4

Se (A, B) é controlável então ela é estabilizável. Ou seja, é possível prescrever números complexos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ como os autovalores da matriz de laço fechado $A + BL$ por uma escolha apropriada da matriz de *feedback* L tal que a taxa de decaimento pode ser arbitrariamente rápida.

Na formulação do Teorema usamos o termo clássico de sistema de laço fechado (*closed loop*) para referirmos ao sistema cujo controle é dado na forma de *feedback*.

A prova do Teorema 1.4 é obtida reduzindo o sistema (6.24) até a forma canônica de controle. Ver para maiores informações Lee & Markus [3] e Russel D. L. [4].

8. APLICAÇÕES DA TEORIA DO CONTROLE E PERSPECTIVAS FUTURAS

São muitos os campos da ciência e tecnologia onde se apresentam desafios para a Teoria do Controle. Em alguns casos se confia em ser capaz de resolvê-los mediante avanços tecnológicos que permitam a implementação de controles mais eficientes. Nesta seção mencionamos brevemente alguns destes temas e os problemas que se apresentam:

8.1. A Barreira de Tâmesis

Uma das aplicações mais contundentes da Teoria do Controle é o fechamento de barreiras para evitar inundações em cidades situadas em regiões ribeirinhas ou litorâneas. Um exemplo notável é o processo de funcionamento da barreira do Rio Tâmesis em Londres, cujos problemas de destruição e inundações datam desde a idade média, tendo o seu fim no ano de 1984 quando a barreira ficou pronta.

Desde que foi construída, a barreira foi fechada em três ocasiões pois o seu fechamento interfere diretamente na navegação, causando perdas econômicas e transtornos importantes e, uma vez fechada, não pode ser aberta enquanto o nível do mar não se igualar em ambos os lados da barreira, esse tempo dura em média 8 horas. Por outro lado, se necessita de duas horas para fechá-la.

A decisão de fechar as comportas é feita em parceria com o sistema de meteorologia que utiliza-se de modelos matemáticos formados por sistemas de EDP's criados para a região e adaptáveis às condições climáticas e fluviais, podendo prever inundações com 30 horas de antecedência.

8.2. Robótica

A robótica é uma das áreas da Tecnologia que apresentam os desafios mais estimulantes para os próximos anos. Ninguém pode escapar da importância do desenvolvimento de métodos eficientes de visão artificial, por exemplo. Mas a Teoria do Controle está também no centro de gravidade deste campo. O desenvolvimento da robótica depende de maneira fundamental da eficiência e robustez dos algoritmos computacionais para o controle de robôs.

Não é difícil imaginar a complexidade do processo de controle que faz com que um robô caminhe e que o faça de maneira estável e ainda ser capaz de pegar algo com as “mãos”.

8.3. *Sistemas energéticos e redes de informática*

É evidente que o planeta apresenta uma tendência irreversível a globalização. Isto é válido em muitos âmbitos, no tráfego aéreo, nos sistemas de geração e distribuição de energia, ou nas redes de informática. Isto faz com que muitas vezes tenha-se que tomar decisões em âmbitos muito concretos (geograficamente falando, por exemplo), com pouca informação do que ocorre em outros, mas sendo consciente que esses podem influenciar. Vem daí a necessidade de criar métodos e técnicas de controle para grandes sistemas interconectados.

8.4. *Hidrologia*

O problema de gerenciamento dos recursos híbridos é sem dúvida sumamente relevante em nossos dias, umas vezes porque estes são escassos, outras porque se encontram contaminados ou simplesmente pela complexidade da rede de fornecimento e usuários tanto domésticos como agrícolas e industriais. Os problemas de controle que se apresentam são diversos. Podemos mencionar pelo menos dois problemas de identificação de parâmetros quando se trata de determinar a localização dos sensores que proporcionam informações suficientes para uma eficiente extração e fornecimento, por um lado, e, por outro, o desenho de estratégias de gerenciamento eficiente.

8.5. *Extração de recursos naturais*

Estão fazendo importantes esforços na modelagem de índole matemática na área de simulação das reservas subterrâneas, tanto hídricas, como minerais ou petrolíferas. O objetivo é otimizar as estratégias de extração. Novamente se colocam problemas inversos, de análises e, por exemplo, de controle da interfase entre o fluido injetado e o extraído.

8.6. *Economia*

A matemática está jogando hoje em dia um papel ativo no mundo financeiro. Com efeito, a utilização de modelos matemáticos para prever as flutuações dos mercados financeiros é algo comum. Trata-se, frequentemente, de modelos estocásticos em que a Teoria do Controle

existente pode ser de grande utilidade, na hora de desenhar projetos estratégicos melhores de investimento e consumo.

9. CONSIDERAÇÕES FINAIS

De maneira informal a controlabilidade pode ser formulado da seguinte maneira. Considere um sistema de evolução (podendo ser descritos em termos de Equações Diferenciais Parciais ou Ordinárias). Estaremos interessados no momento em que a trajetória do sistema é alterada por algum controle (o lado direito do sistema, problemas de valores iniciais, condições de fronteira, de contorno, etc.). Então, dado um tempo $t \in]0, T[$, e os estados iniciais e finais temos que encontrar um controle tal que a solução iguale os estados inicial em $t = 0$ e final em $t = T$.

Este é um problema clássico em Teoria do Controle, onde há uma vasta literatura sobre o tópico e acreditamos que o texto de Markus e Lee [3] é apropriado para uma introdução no contexto de sistemas de dimensão finita. A pesquisa nesta área é bastante produtiva e seria impossível relatar e discutir todos esses avanços nesta monografia. Por esta razão discutindo este material introdutório de relevância, o leitor interessado no assunto pode encontrar maiores informações na bibliografia no fim deste trabalho.

Quando começamos a trabalhar com problemas de controlabilidade, devemos ter bem clara a distinção entre sistemas de dimensão finita, caracterizadas pelas Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), e sistemas de dimensões infinitas, descritos pelas Equações Diferenciais Parciais (EDP). Esta diferença pode ser importante na prática, em sistemas de dimensão finita e infinita, que por sua vez podem conter diferentes propriedades sobre um ponto de vista da teoria do controle.

Muitos dos problemas das notas são relacionados com EDO. Entretanto, apresentamos alguns dos problemas básicos e ferramentas para a teoria de controle de sistemas de dimensão finita. Observamos, no contexto de dimensão finita que um sistema é controlável se e somente se as condições algébricas de Kalman, com o número de linhas não nulas, são satisfeitas. De acordo com isto, quando um sistema é controlável em alguns pontos ele é também controlável durante todo o intervalo de tempo.

Mas isto não é verdade nos contextos de Equações Diferenciais Parciais. Em particular, na equação da onda (um modelo de propagação com velocidade finita) e as

propriedades de controlabilidade, para que sejam verdadeiras, o tempo de controle necessita ser suficientemente grande, para que os efeitos do controle possam ser atingidos.

Observamos, que se um sistema é controlável, o controle pode ser obtido pela minimização de um funcional quadrático definido sobre uma classe das soluções do sistema adjunto. Variantes apropriadas deste funcional permitem construir diferentes tipos de controle. A principal dificuldade quando minimizamos esses funcionais é mostrar que são coercivos. Disto resulta a equivalência da *propriedade de observabilidade*, da equação adjunta com a propriedade original do controle da equação do estado.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Apostol. T. M., *Análisis Matemática*, Segunda Edición, Reverté, Barcelona, 1982.
2. Campbell, S. L., & Haberman, R. *Introducción a las ecuaciones diferenciales con problemas de valor de Fronteira*, McGrawHill, México, 1998.
3. Lee, E. B. & Markus, L., *Foundations of Optimal Control Theory*, The SIAM Series in Applied Mathematics, John Wiley & Sons, 1967.
4. Russell, D. L., *Controllability and Stabilizability for Linear Partial Differential Equations*, Recent Progress and Open Questions, SIAM Rev., 20, (1978), 639-739.
5. Sontag, E. D., *Mathematical Control Theory. Deterministic Finite-dimensional Systems*, Second editions. Texts in Applied Mathematics, 6. Springer Verlag, New York, 1998.
6. Zuazua, E., *Controlabilidade Exacta y Estabilización la Ecuación de Ondas*, Textos de Métodos Matemáticos 23, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1990.
7. De Guzman, M., *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Teoria de Estabilidade y Control*, Editorial Alhambra, Madrid, 1980.
8. Leon, J. S. *Álgebra Linear com Aplicações*, 4ed LTC- Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., 1999.
9. Lions, J.-L., *Controlabilite Exacte, Stabilisation et Perturbations de Systems Distribues*. Tome 1. Controbilite Exacte, Masson, Paris, RMA 8, 1988.
10. Lions, J.-L., *Exact Controllability, Stabilizability and Perturbations for Distributed Systems*, SIAM Rev., 30 (1988), 1-68.
11. Kalman, R. E., *Optimization, Mathematical Theory of Control Theory*, Encyclopaedia Britannica, Fifteenth Ed. 1974, 636-638.
12. John, F., *Partial Differential Equations*, 4ª edition. Springer Verlag, New York, Berlin, 1998.
13. Boyer, Carl B. *História da Matemática*. Trad. Elza F. Gomide. 2.ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.