

**Universidade Federal de Santa Catarina**

**Centro de Ciências Físicas e Matemáticas**

**Departamento de Matemática**

**Curso de Especialização em Matemática-Formação de Professores Modalidade a Distância**

**Miguel da Silva Sá**

**Francisco Cristino Melo**

**Tópicos de Cálculo e Aplicações Computacionais**

**Santa Inês-Ma**

**2009**

**Miguel da Silva Sá**  
**Francisco Cristino Melo**

## **Tópicos de Cálculo e Aplicações Computacionais**

Monografia apresentada ao curso de Matemática da UFSC-UNIVIMA, como requisito para obtenção parcial do grau Especialização em Matemática-Formação de Professores Modalidade a Distância Maranhão.

**Orientador: Inder Jet Taneja**  
Dr em

Santa Inês-MA

2009



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS  
Departamento de Matemática**

**Curso de Especialização em Matemática-Formação de Professor na modalidade a distância**

**"Tópicos e Cálculo e Aplicações Computacionais"**

**Monografia submetida a Comissão de avaliação do Curso de Especialização em Matemática-Formação do professor em cumprimento parcial para a obtenção do título de Especialista em Matemática.**

**APROVADA PELA COMISSÃO EXAMINADORA em 17/08/2009**

Dr. Inder Jeet Taneja (CFM/UFSC - Orientador)

Dr<sup>a</sup>. Sonia Elena Palomino Bean (CFM/UFSC - Examinador)

Dr. Joel Santos Souza (CFM/UFSC – Examinador)

Dra. Neri Terezinha Both Carvalho

Coordenadora do Curso de Especialização em Matemática-Formação de Professor

Florianópolis, Santa Catarina, agosto de 2009.

## **Resumo**

Trata-se do uso do software Maple na Aplicação de Tópicos de Cálculo, com propósito de mostrar o quanto esse aplicativo é capaz de nos fornecer de maneira rápida e agradável, soluções de problemas no cálculo, uma visão interessante de gráficos e animações em duas e três dimensões.

## **Abstract**

It is use of the Software Maple in the Calculations Topics Application, with purpose showing him how much that application is capable of supply us of fast and pleasing manner problems solutions in the Calculation , an interesting vision of graphs and animations in two and three dimensions.

## **Agradecimentos**

A Deus pela Saúde e Misericórdia,

As nossas esposas, aos nossos (as) filhos (as), pela compreensão em entender a nossa ausência dedicada a esta Especialização.

A o nosso orientador, Inder Jet Taneja, pela paciência e contribuição com o seu saber e experiência no que tange ao seu vasto conhecimento em Matemática e o uso do Maple.

As nossas amigas, Francisca Maria Mendes de Sousa e a Rosilene Soares Sousa, pelo apoio na escolha deste tema.

Aos demais membros da banca por compartilharem de sua sabedoria na avaliação deste trabalho monográfico.

A coordenação do curso UFSC através da sua coordenadora, Neri Terezinha Both Carvalho, pela prontidão em ajudar avançar obstáculos encontrados no decorrer desta especialização.

Aos professores doutores, Eliezer Batista, Mércles Thadeu Moretti, Oscar Janesch, Roberto Correa e Silvia Janesch, pelos ensinamentos e paciência nas disciplinas administradas neste curso.

Aos tutores, que foram fundamentais e eficientes em atender-nos nas orientações das disciplinas oferecidas.

Para fazeres o teu ouvido atento à sabedoria; e inclinares o teu coração ao entendimento. Se clamares por conhecimento, e por inteligência alcançares a tua voz. Se como a prata a buscares e como a tesouros escondidos a procurares. Porque o Senhor dá a sabedoria; da sua boca é que vem o conhecimento e o entendimento.

(Bíblia Sagrada - Provérbios 2:2,3,4 e 6)

## Sumário

1.	Introdução.....	9
1.1	Noções Básicas.....	10
1.2	Integral Indefinida.....	12
1.3	Integral Definida.....	14
2.	Gráficos Bidimensionais e Tridimensionais.....	17
2.1	Coordenadas Cartesianas.....	17
2.2	Coordenadas Paramétricas.....	20
2.3	Coordenadas Polares.....	21
2.4	Coordenadas Cilíndricas.....	24
2.5	Coordenadas Esféricas.....	26
3.	Cálculo de Área de Região Plana Limitada.....	28
3.1	Coordenadas Cartesianas.....	28
3.2	Coordenadas Paramétricas.....	32
3.3	Coordenadas Polares.....	36
4.	Superfície e Sólido de Revolução.....	39
4.1	Área de uma Superfície de Revolução.....	39
4.2	Volume de um Sólido de Revolução.....	42
5.	Animações.....	52
5.1	Animação em duas dimensões.....	52
5.2	Animação em três dimensões.....	55
6.	Considerações Finais.....	58
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	59

## 1. Introdução

Com o avanço da tecnologia, o uso do computador tem-se tornado cada vez mais presente na vida profissional e escolar. No que tange à vida escolar, já é realidade, mesmo que em pequena escala, a presença do uso dos computadores no processo de ensino aprendizagem, sempre buscando melhorar a qualidade do ensino na tentativa de aliar a teoria à prática, procurando dar mais significado à aprendizagem.

Este trabalho visa mostrar aplicações do *software* Maple no desenvolvimento de Tópicos de Cálculo; apresentar um ambiente computacional interativo e o quanto esse aplicativo é capaz de nos fornecer, de maneira rápida e agradável, soluções de problemas matemáticos; uma visão interessante dos gráficos; manipulação gráfica assim como numérica nos resultados obtidos e animações em duas e três dimensões.

Maple é um *software* que vem sendo desenvolvido desde 1981 pela Waterloo University, Canadá, e pelo instituto ETH de Zurique, Suíça. Trata-se de um sistema computacional para computação algébrica, numérica e gráfica, desenhado para uso profissional na resolução de problemas que exigem métodos matemáticos. Ele funciona como linguagem de programação, permitindo a criação de rotinas, podendo gerar códigos compatíveis com as linguagens programáticas com outros programas como o Latex, Visual Basic, MatLab, Fortran, C e Java. Atualmente, existem vários *softwares* com maior, menor ou até com a mesma versatilidade como o Cabri, Winplot, Derive, Winmat, Mathematica, cada um com suas características, mas que com a sintaxe correta são capazes de realizar cálculos com extrema maestria.

A escolha deste software não é por insuficiência dos demais aqui citados, mas para mostrar mais um aplicativo eficaz, que oferece uma visualização matemática interativa, editoração de texto e uma linguagem programática compreensível e de fácil utilização, capaz de calcular com extrema precisão, gerar gráficos e animações em duas e três dimensões, dando-nos uma melhor compreensão no comportamento gráfico das funções e a possibilidade de compararmos os resultados obtidos de determinados problemas em pouquíssimo tempo.

Ainda podemos contemplar neste *software* mais de 5000 informações relacionadas à Matemática e a outras ciências exatas. Com todos esses recursos e acessibilidade do usuário

para manuseá-lo, vem firmando-o como uma poderosa ferramenta educativa no auxílio do ensino da Matemática.

No decorrer deste trabalho, mostraremos algumas noções básicas para o uso do Maple e, em seguida, exploraremos algumas questões relativas ao Cálculo, sempre conceituando e comentando os capítulos que forem desenvolvidos, mais especificamente integral indefinida, definida, gráficos em duas e três dimensões, cálculo de área de região plana limitada, superfície e sólido de revolução e finalizaremos com animações em duas e três dimensões.

## 1.1 Noções Básicas

O Maple que será usado aqui é o Maple versão 12, que quando é carregado nos é apresentado o ambiente que faz a interação do usuário com os recursos disponíveis, tais como: uma série de paletas que nos auxilia na construção das mais diversas expressões e uma gama de pacotes mais usados e genéricos. Na necessidade de algum outro pacote como *Student[Calculus1]* usamos o comando *with(Student[Calculus1])* a fim de podermos carregá-lo e *unwith(Student[Calculus1])* para reverter a ação. Também, podemos nos lançar ao sistema de ajuda clicando no *menu ajuda*, ou usamos a combinação *CTRL+F2*. Caso desejemos uma informação específica de um comando ou pacote, por exemplo, ver os subpacotes do pacote *Student*, mais rapidamente, podemos digitar na folha de trabalho o comando na frente do sinal de interrogação (*>? Student*). O Maple possui dois modos de trabalhos *document mode* (modo documento) e *worksheet* (folha de trabalho). Em ambos, temos as opções para trabalhar no modo texto e modo matemático em que esses modos são alternados teclando a tecla F5 ou clicando no sob *menu* texto ou matemática.

A diferença entre estes modos é que o primeiro serve para escrevermos textos e expressões matemáticas e o segundo tem a função de gerar os resultados destas expressões. Toda instrução na folha de trabalho inicia-se após o *prompt* ( *[ >* ) e termina com o sinal ( *; )* ou ( *:* ). E os parênteses ( ) têm a função de agrupar as expressões, porém as chaves { } e os colchetes [ ] não podem ser usados para este fim. Por exemplo, se colocarmos para calcular a integral indefinida  $\int \{x^2\} dx$  ou  $\int [x^2] dx$  aparecerá a mensagem " Error, (in int) wrong number (or type) of arguments" quer dizer erro no comando *int* ou no tipo de argumentos, neste caso, o uso dos colchetes ou das chaves. Caso fosse necessário agrupar a expressão, deveríamos utilizar os parênteses. Em relação às versões anteriores, houve algumas modificações nos

nomes de alguns pacotes e alguns comandos. Por exemplo, o pacote *student* foi modificado para *Student* e o símbolo (“) que faz referência a um procedimento anterior para (%).  
Vejam a seguir alguns exemplos básicos:

### 1.1.1 Calculando a soma de $-8 + 6 + 3 - 1 + 5 - 7$ .

```
> -8 + 6 + 3 - 1 + 5 - 7;
```

Como no final utilizamos o sinal de dois pontos, o resultado ficou armazenado na memória do Maple.

```
> -8 + 6 + 3 - 1 + 5 - 7;
```

-2

O uso do ponto e vírgula no final mostra o resultado da operação.

### 1.1.2 Calculando o valor da expressão $(120 \cdot 134) - 344$

```
> (120·134) - 344
```

15736

### 1.1.3 Calculando o valor da expressão $\frac{142}{18} - \sqrt{625}$

```
>  $\frac{142}{18} - \sqrt{625}$ ;
```

$-\frac{154}{9}$

Usando o comando *evalf(%)* para obtermos o valor em termos decimais. O símbolo (%) faz referência ao item anterior. O Maple já vem pré-configurado com a saída de 10 dígitos, sendo que o usuário pode modificá-la usando o comando *Digits:=n*. Deixaremos a configuração padrão. Exemplo:

```
> evalf(%);
```

-17.11111111

O comando *evalf(%,4)* o 4 indica um número com quatro dígitos, ficando o número arredondado para duas casas. Obviamente que poderíamos ter utilizado o comando *Digits:=4*, mas por questão de informação optamos por usar o comando abaixo.

```
> evalf(%,4);
```

### 1.1.4 Calculando a imagem de -2 da função $f(x) = x^3 - 5x^2 - 4x + 1$

Primeiramente definimos a função usando o operador seta ( $\rightarrow$ , sinal de menos seguido do sinal maior que). Por exemplo, a  $f(x) = x^3 - 5x^2 - 4x + 1$  é definida como segue abaixo:

```
> f := x → x3 - 5x2 - 4x + 1;
```

$$f := x \rightarrow x^3 - 5x^2 - 4x + 1$$

Para encontrar a sua imagem no ponto -2, escrevemos na linha de comando:

```
> f(-2);
```

Nos exemplos acima, podemos perceber a praticidade do Maple em determinar de forma prática as soluções envolvendo problemas tanto aritméticos como algébricos. Sendo assim, podemos perceber que este *software* pode ser um recurso muito importante para auxiliar na aquisição dos conhecimentos da matemática básica, mas é claro, usando-o para auxílio no entendimento destes conceitos, não ficando na dependência do *software*, pois é preciso entender os passos do processo na resolução dos problemas propostos e a interação professor, *software* e aluno podem ser riquíssimos para obtenção do conhecimento da Matemática.

## 1.2 Integral Indefinida

DEFINIÇÃO: Se  $F(x)$  é uma primitiva de  $f(x)$ , a expressão  $F(x) + c$  é chamada integral indefinida da função  $f(x)$  e é denotada por  $\int f(x) dx = F(x) + c$ . De acordo com esta notação o símbolo  $\int$  é chamado sinal de integração,  $f(x)$  função integrando e  $f(x)dx$  integrando. O processo que permite achar a integral indefinida de uma função é chamado integração. O símbolo  $dx$  que aparece no integrando serve para identificar a variável de integração. Basicamente, para determinarmos a integral indefinida usando o Maple,

precisaremos dos seguintes comandos:  $\text{Int}(f(x),x)$  ,  $\text{int}(f(x),x)$  e  $\text{value}(\%)$  . O comando “ $\text{Int}(f(x))$ ” tem a função de escrever a expressão na forma de integral, mas podemos usar “ $\text{int}(f(x))$ ” para irmos direto ao resultado, sem necessariamente escrevermos a expressão ou abrir a paleta expressão e clicar no símbolo  $\int f dx$  da integral indefinida. No entanto, quando optamos por escrever a expressão na forma de integral, ou seja, usando o comando “ $\text{Int}(f(x))$ ” podemos, em seguida, aplicar o comando “ $\text{int}(f(x))$ ” ou “ $\text{value}(\%)$ ”, a fim de obtermos o valor desejado. Vejamos alguns exemplos:

### 1.2.1 Calculando a integral indefinida de $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$ .

Clicamos no *prompt* (  $[>]$  ) para entrada no modo matemático, em seguida, escrevemos a expressão usando o comando *Int* para escrever a expressão e, na sequência, aplicamos o comando *value(%)* para obtermos o valor da integral.

$> \text{Int}\left(\frac{1}{x} + \sqrt{x}, x\right);$

$$\int \left(\frac{1}{x} + \sqrt{x}\right) dx$$

$> \text{value}(\%);$

$$\ln(x) + \frac{2}{3} x^{3/2}$$

Assim, concluímos que

$$\int \left(\frac{1}{x} + \sqrt{x}\right) dx = \ln(x) + \frac{2}{3} x^{3/2}$$

### 1.2.2 Calculando a integral indefinida de $f(x) = \sin(3x) + \cos(5x)$

Usando os mesmos procedimentos do item anterior, só que em vez de usarmos *value(%)* usaremos o comando *int* para obtermos o valor da integral.

$> \text{Int}(\sin(3x) + \cos(5x), x);$

$$\int (\sin(3x) + \cos(5x)) dx$$

$> \text{int}(\sin(3x) + \cos(5x), x);$

$$-\frac{1}{3} \cos(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x)$$

Assim, concluímos que

$$\int (\sin(3x) + \cos(5x)) dx = -\frac{1}{3} \cos(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x)$$

### 1.2.3 Calculando a integral indefinida da função $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ .

Utilizando-se da paleta de expressões, podemos calcular a  $f$  como também poderíamos ter calculado as dos itens anteriores clicando no símbolo  $\int f dx$  da integral indefinida.

$$> \int \frac{e^x - e^{-x}}{2} dx;$$

$$\frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2} e^{-x}$$

Portanto, temos:

$$\int \left( \frac{1}{2} e^x - \frac{1}{2} e^{-x} \right) dx = \frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2} e^{-x}$$

### 1.2.4 Calculando a integral indefinida de $f(x) = \frac{2}{(3x - 2)^3}$ .

Usando o comando *int* para o cálculo desta integral

$$> \text{int}\left(\frac{2}{(3 \cdot x - 2)^3}, x\right);$$

$$-\frac{1}{3(3x - 2)^2}$$

Assim, concluímos que

$$\int \frac{2}{(3x - 2)^3} dx = -\frac{1}{3(3x - 2)^2}$$

## 1.3 Integral Definida

Seja  $f$  uma função contínua no intervalo fechado de extremos  $a$  e  $b$  e sendo  $S$  uma partição qualquer de  $[a, b]$ . A integral definida de  $a$  até  $b$ , é representada por:  $\int_a^b f(x) dx$  é

dada por  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x$ , se esse limite existir. Na anotação  $\int_a^b f(x) dx$  os números  $a$  e  $b$  são chamados limites de integração.

Quando a função  $f$  é não negativa em  $[a, b]$ , a definição de integral definida coincide com a definição da área. Neste caso, a integral definida  $\int_a^b f(x) dx$  é a área da região sob o gráfico de  $f$  de  $a$  até  $b$ .

A realização de cálculo de integral definida no Maple é praticamente os mesmos procedimentos que são feitos na integral indefinida. A diferença reside no acréscimo dos limites inferior e superior. Os comandos são  $Int(f, x=a..b)$ ,  $int(f, x=a..b)$  ou usando a maneira mais prática, que é clicando no símbolo da integral definida na paleta de expressões  $\int_a^b f dx$ .

Vejamos alguns exemplos:

**1.3.1 Calculando a integral definida da função  $f(x) = \sin(x) \cdot \cos^2(x)$  no intervalo de 0 a  $\frac{\pi}{3}$ .**

Clicando no símbolo da integral definida na paleta de expressões e escrevendo a função em questão.

$$> \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(x) \cdot \cos^2(x) dx;$$

$$\frac{7}{24}$$

Assim, concluímos que  $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(x) \cdot \cos^2(x) dx = \frac{7}{24}$

**1.3.2 Calculando a integral definida da função  $f(x) = x^3 \sqrt{x^2 + 1}$  no intervalo de 0 a  $\sqrt{3}$ .**

Seguindo os mesmos passos do item anterior, temos:

$$> \int_0^{\sqrt{3}} x^3 \sqrt{x^2 + 1} dx;$$

$$\frac{58}{15}$$

Logo a integral definida  $\int_0^{\sqrt{3}} x^3 \sqrt{x^2 + 1} dx = \frac{58}{15}$

### 1.3.3 Calculando a integral definida da função $f(x) = \cos^3(x)$ no intervalo de 0 a $\frac{\pi}{6}$ .

>  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^3(x) dx;$

$$\frac{11}{24}$$

Portanto, a  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^3(x) dx = \frac{11}{24}$

### 1.3.4 Calculando a integral definida de $f(x) = \frac{2x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$ no intervalo de 2 a 8.

Aqui, além de aplicamos a integral definida, usaremos o comando *evalf(%)* para expressar o resultado em termos decimais.

>  $\int_2^8 \frac{2x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} dx;$

$$-\frac{1}{4} \ln(3) + \frac{9}{7} + \frac{1}{4} \ln(7)$$

> *evalf(%)*;

$$1.497538751$$

Logo, percebemos que o valor da integral definida  $\int_2^8 \frac{2x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} dx \approx 1,5$

### 1.3.5 Calculando a integral definida de $f(x) = \frac{x^3 + x + 1}{x^2 - 4x + 3}$ no intervalo de 8 a 16.

>  $\int_8^{16} \frac{x^3 + x + 1}{x^2 - 4x + 3} dx;$

$$128 + \frac{3}{2} \ln(7) - 17 \ln(5) - \frac{3}{2} \ln(3) + \frac{31}{2} \ln(13)$$

> evalf(%);

141.6672173

Portanto, temos que  $\int_8^{16} \frac{x^3 + x + 1}{x^2 - 4x + 3} dx \approx 141,7$

As resoluções das integrais indefinidas como as definidas, são em alguns casos muito complexas e, por isso trazem consigo certa antipatia para seu estudo. E este *software* pode contribuir significativamente para a compreensão desse conhecimento, na medida em que o aluno usa-o como tutor para entender as regras aplicadas, para isso, ele tem a opção *IntTutor* que é um pacote do *Student[Calculus1]* que para ter acesso passar digitar no *prompt* os comandos:

> with(Student[Calculus1]) :

> IntTutor( $x^3$ ) :

Sendo  $x^3$  a função que queremos integra.

## 2. Gráficos Bidimensionais e Tridimensionais

Neste capítulo, iremos construir alguns gráficos em duas e três dimensões. O Maple possui o comando *plot* que é carregado assim que abrimos o programa, mas também, ele tem outros comandos para construção de gráficos que estão contidos no pacote *plots*, podendo ser carregados com o comando *with(plots)* os quais, com a sintaxe correta, são capazes de produzir gráficos de funções nas mais diversas coordenadas. O comando “*?coords;*” nos dá uma visão das coordenadas que o Maple suporta. Aqui, criaremos os gráficos usando as coordenadas mais comuns.

### 2.1 Coordenadas Cartesianas

Para gerar gráfico em duas dimensões em coordenadas cartesianas, usamos o comando *plot*. E sua sintaxe é:

*plot(função, domínio, contradomínio, opções=nome da opção)*

O domínio é especificado como  $x=a..b$  e o contradomínio como  $y=c..d$ , as letras  $a, b, c$  e  $d$  são números reais. Essas variações não são obrigatórias, mas geralmente são usadas para

limitar suas representações nos eixos e as opções referem-se aos casos em que queremos destacar alguns detalhes no gráfico. Vejamos alguns exemplos:

### 2.1.1 Construindo o gráfico da função $y = x^2$ , com as variações $x$ de -10 a 10 e $y$ de 0 a 10.

Atribuindo-lhes algumas especificações:

- > `Plot(x2, x = -10..10, y = -10..10, color=blue, title=Função Quadrática, legend=Gráficos com várias opções, labels=[eixo x, eixo y], caption=Colocando opções no gráfico da função Quadrática);`

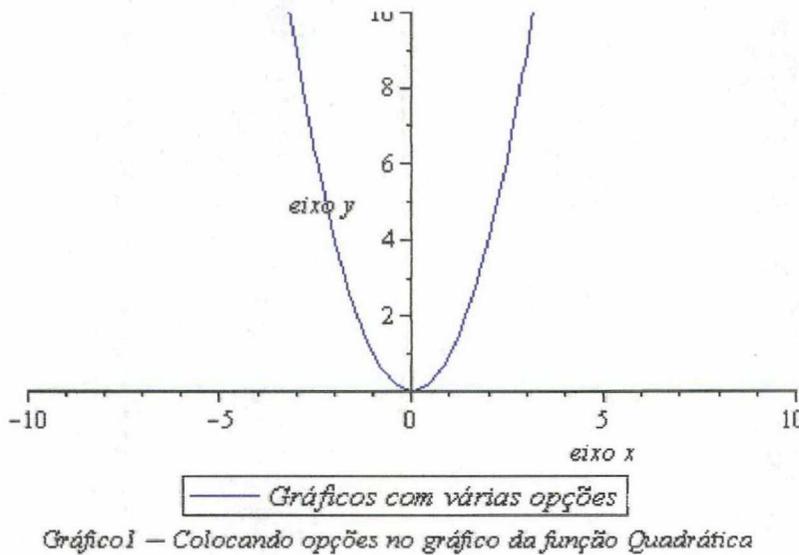


Figura 2.1

### 2.1.2 Considerando a seguinte expressão como uma função de $x$ .

>  $M := \left( \frac{2x - 1}{x + 3} \right);$

$$M := \frac{2x - 1}{x + 3}$$

Construindo o gráfico desta função com variação no eixo  $x$  de -10 a 10 e no eixo  $y$  de -10 a 20 e atribuindo-lhe espessura a linha e capítulo ao gráfico:

- > `plot(M, x = -10..10, y = -20..20, thickness = 2, caption = Gráfico2 );`

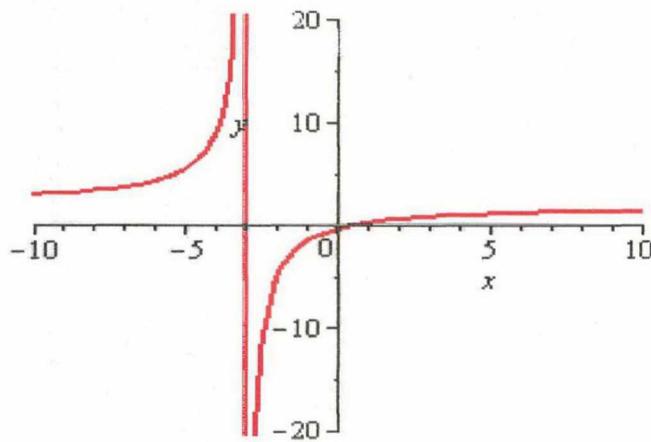


Gráfico 2

Figura 2.2

Geralmente, quando criamos gráficos de mais de uma função em um mesmo plano, podem gerar uma leve dificuldade em identificar esses gráficos. Devido a isso, o Maple fornece cores diferentes automaticamente para cada gráfico, mas também, podemos identificá-los com suas respectivas funções usando o comando `plots[textplot]` e o comando `plots[display]` que tem a função de representar os gráficos simultaneamente na tela.

Vejamos um exemplo:

**2.1.3 Dadas as funções  $x = y^2$ ,  $y - x = 2$ ,  $y = -2$  e  $y = 3$ .**

Para construir os seus gráficos procederemos:

- ```
> p1 := plot({sqrt(x), -sqrt(x), x + 2, -2, 3}, x = -10..15, y = -10..10) :
> p2 := plots[textplot](([15, 4.6, y = sqrt(x)], [15, -4.3, y = -sqrt(x)], [3, 8, y
= x + 2], [-10, -3, y = -2], [-9, 4, y = 3])) :
> plots[display]({p1, p2});
```

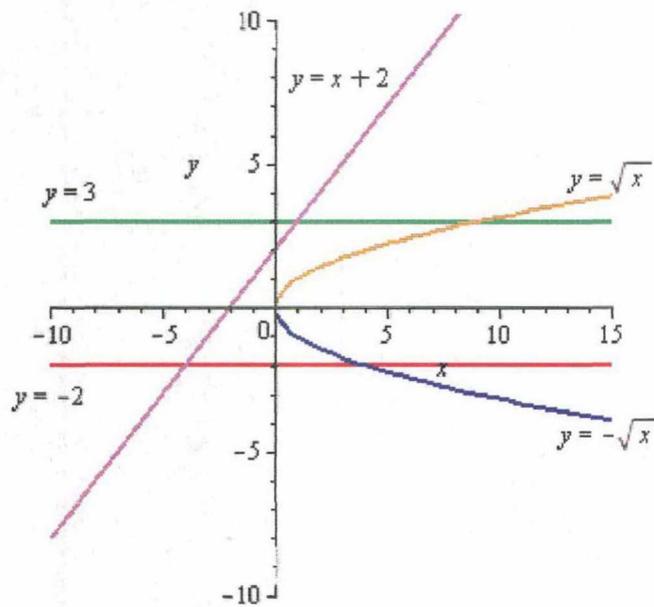


Figura 2.3

## 2.2 Coordenadas Paramétricas

Por uma curva em  $\mathbb{R}^2$ , compreende-se uma função que a cada  $t \in I$ , corresponde a um ponto  $(g(t), h(t))$  em  $\mathbb{R}^2$  onde  $g(t)$  e  $h(t)$  são funções definidas em  $I$  como *equações paramétricas*. E uma *curva de equações paramétrica*, onde  $x = g(t)$  e  $y = h(t)$  como sendo o lugar geométrico descrito pelo ponto  $(g(t), h(t))$ , quando  $t$  percorre o intervalo  $I$ . A sintaxe para construção destas funções é:

`plot([g(t),h(t),t=a..b], limitação horizontal, limitação vertical, opção=nome da opção)`

Veamos alguns exemplos:

### 2.2.1 O gráfico das funções $x = e^t \cdot \cos(t)$ e $y = e^t \cdot \sin(t)$ onde $t$ varia de 0 a $2\pi$ .

E dado por:

`> plot([e^t*cos(t), e^t*sin(t), t = 0 .. 2*pi], -10 .. 4, -4 .. 10);`

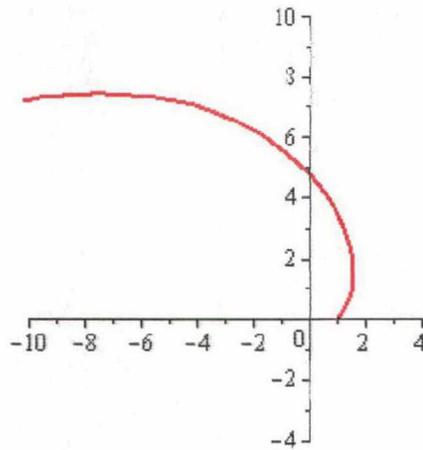


Figura 2.4

**2.2.2 O gráfico das funções  $x = t^2 \sin(t)$  e  $y = 2t \cdot \cos(t)$  onde  $t$  varia de 0 a  $4\pi$ .**

É dado por:

**> plot([ $t^2 \sin(t)$ ,  $2t \cdot \cos(t)$ ,  $t = 0 .. 4\pi$ ], x = -130..70, y = -20..30);**

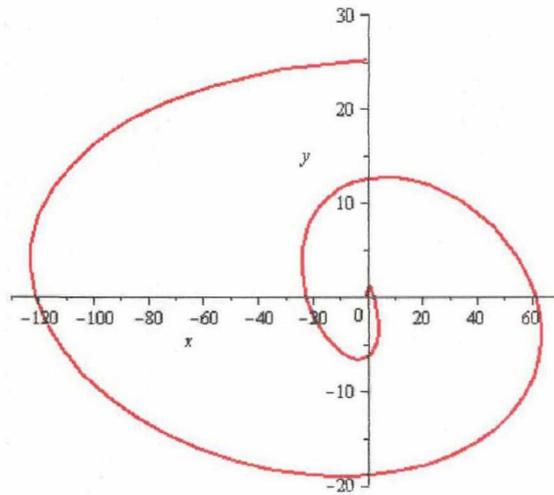


Figura 2.5

### 2.3 Coordenadas Polares

Sendo O um ponto fixo (origem ou pólo) e  $\overline{OP}$  o segmento orientado e P um ponto no plano determinado pelo par  $(\rho, \theta)$  onde  $\theta$  é um ângulo orientado no sentido anti-horário

formado pelo segmento de reta orientado  $\overrightarrow{OP}$  em relação à semi-reta  $\overrightarrow{OA}$  (eixo polar) e  $\rho$  a distância em módulo da origem ao ponto P como descreve a figura:

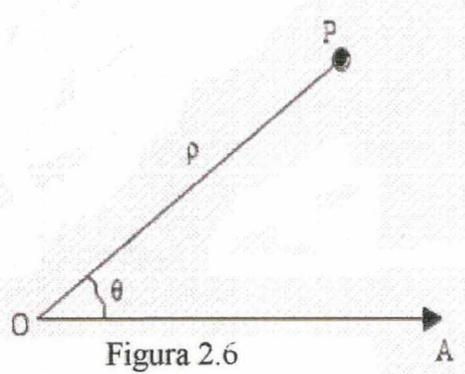


Figura 2.6

Neste sistema no plano em que cada ponto P está associado ao par  $(\rho, \theta)$  é denominado de coordenadas polares. Uma equação polar é uma equação em  $\rho$  e  $\theta$ .

Para construir gráfico nesse sistema, usando o Maple, usamos o comando *polarplot* contido no pacote *plots*. Para carregá-lo, damos o comando *with(plots)* e, em seguida, usamos o comando abaixo, para criamos os gráficos desejados:

*polarplot(função(theta), variação do theta, opções)*

Vejamos alguns exemplos:

### 2.3.1 Construindo o gráfico da equação $\rho=1-\cos(\theta)$ com $\theta$ variando de $0$ a $2\pi$ .

Criando o título, atribuindo-lhe uma cor e sem os eixos. Para isso, usaremos as opções *title=CARDIÓIDE*, *color=gold* e *axes=none*.

> *with(plots)* :

> *polarplot(1 - cos(theta), theta = 0..2 pi, title = CARDIÓIDE, color = gold, axes = none);*

## CARDIÓIDE

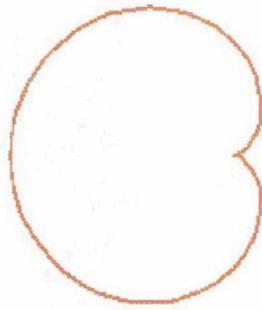


Figura 2.7

### 2.3.2 Construindo o gráfico da equação $\rho = \sqrt{\theta} \cdot \sin(\cos(2\theta\sqrt{\theta}))$ com $\theta$ variando de 0 a $2\pi$ .

Usaremos a opção *axes=None* para que o gráfico seja gerado sem os eixos.

> `polarplot( $\sqrt{\theta} \cdot \sin(\cos(2\theta\sqrt{\theta}))$ ,  $\theta = 0..2\pi$ , axes = None);`

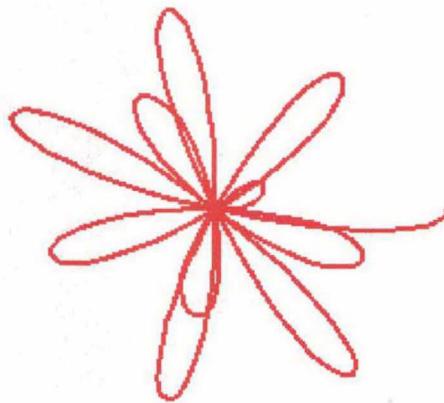


Figura 2.8

## 2.4 Coordenadas Cilíndricas

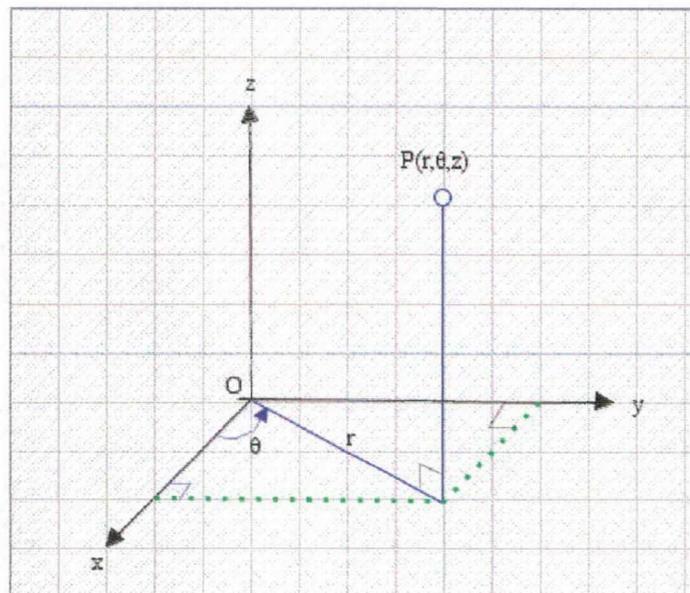


Figura 2.9

É um sistema onde um ponto  $P$  é representado por uma terna  $(r, \theta, z)$  em que o par  $(r, \theta)$  representa um ponto em coordenadas polares e  $z$  é a terceira coordenada usual do sistema cartesiano. Para fazermos a mudanças do sistema de coordenadas cilíndricas para o sistema em coordenadas cartesianas, usamos a seguinte relação:

$$x = r \cdot \cos(\theta), \quad y = r \cdot \sin(\theta) \quad \text{e} \quad z = z.$$

Das coordenadas cartesianas para coordenadas cilíndricas, usamos as relações:

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{e} \quad z = z$$

Na construção de gráficos em coordenadas cilíndricas utilizando Maple, damos o comando *with(plots)*, a fim de carregarmos o comando *cylinderplot* que está contido no pacote *plots* e, em seguida, escrevemos a linha de comando abaixo:

$$\text{cylinderplot}(f(r, \theta), \text{var} = r_1 .. r_2, \text{var} = \theta_1 .. \theta_2, \text{opções}).$$

Vejamos alguns exemplos:

**2.4.1 Construindo o gráfico da função  $f(r, \theta) = -4 - r \cdot \cos(4\theta)$  com  $r$  variando de 0 a 6 e  $\theta$  pertencente ao intervalo 0 a  $2\pi$ .**

Definindo a função,

$$> f := (r, \theta) \rightarrow -4 - r \cdot \cos(4\theta);$$

$$f := (r, \theta) \rightarrow -4 - r \cos(4\theta)$$

> *with(plots)* :

> *cylinderplot* ( $f(r, \theta), r=0..6, \theta=0..2\pi$ );

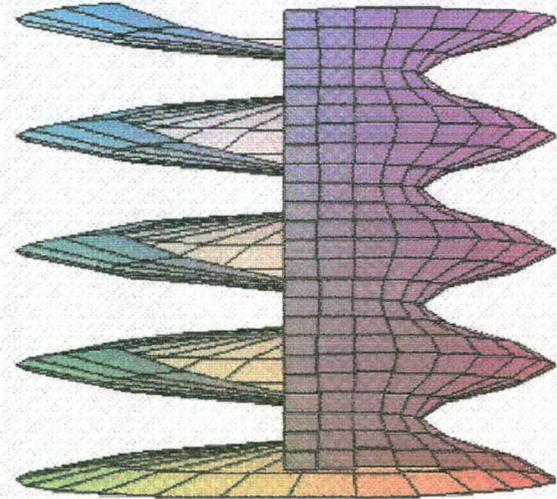


Figura 2.10

**2.4.2 Construindo o gráfico da função  $f(r, \theta) = r^2 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta)$  com  $r$  variando de 0 a 3 e  $\theta$  pertencente ao intervalo  $-\frac{4\pi}{3}$  a  $\frac{4\pi}{3}$**

Definindo a função:

>  $f := (r, \theta) \rightarrow r^2 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta)$ ;

$$f := (r, \theta) \rightarrow r^2 \sin(\theta) \cos(\theta)$$

> *cylinderplot* ( $f(r, \theta), r=0..3, \theta=-\frac{4\pi}{3}.. \frac{4\pi}{3}$ );

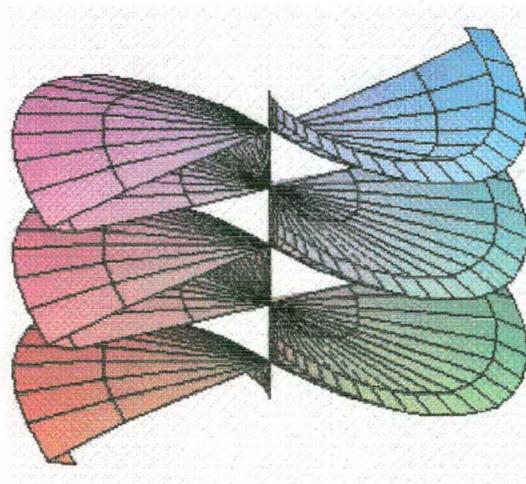


Figura 2.11

## 2.5 Coordenadas Esféricas

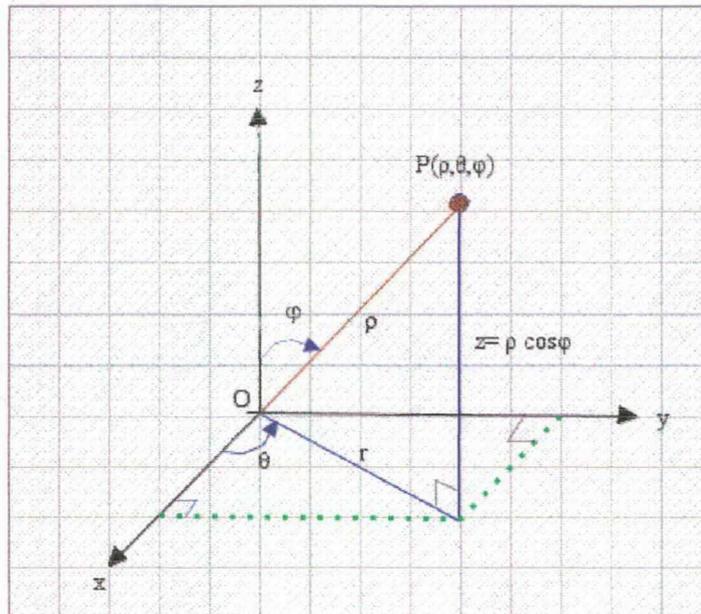


Figura 2.12

Denomina-se coordenadas esféricas um sistema em que um ponto  $P$  é localizado no espaço por uma terna ordenada  $P(\rho, \theta, \varphi)$  em que  $\rho$  é a distância da origem a  $P$ , o ângulo  $\theta$  é projetado sobre o plano  $xy$  e o ângulo  $\varphi$  que raio  $\rho$  faz com o eixo  $Z$ .

Para fazermos a mudança de um ponto em coordenadas esféricas para coordenadas cartesianas usamos as relações:

$$x = \rho \cdot \sin(\varphi) \cos(\theta), \quad y = \rho \cdot \sin(\varphi) \sin(\theta) \quad \text{e} \quad z = \rho \cdot \cos(\varphi) \quad \text{onde} \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi \quad \text{e} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

A construção de gráficos em coordenadas esféricas no Maple é possível. Para isso, devemos dar o comando *with(plots)* para carregar o comando *sphereplot* que está dentro do pacote *plots*. A sintaxe para gerar estes gráficos é dada por:

$$\text{sphereplot}(\text{expr}, \text{variação}, \text{opções})$$

Vejamos alguns exemplos:

### 2.5.1 Construindo o gráfico da expressão $\cos(8\theta) \cdot \sin(7\varphi) - \cos(\theta)$ :

Neste caso, definiremos a expressão como uma função de  $g$  nas variáveis  $\theta$  e  $\varphi$  usando o comando *unapply*:

```
> g := unapply(cos(8θ) · sin(7φ) - cos(θ), (θ, φ));
```

$$g := (\theta, \varphi) \rightarrow \cos(8\theta) \sin(7\varphi) - \cos(\theta)$$

> *with(plots)* :

> *sphereplot* ( $g(\theta, \varphi)$ ,  $\varphi = 0.. \pi$ ,  $\theta = 0..2\pi$ );

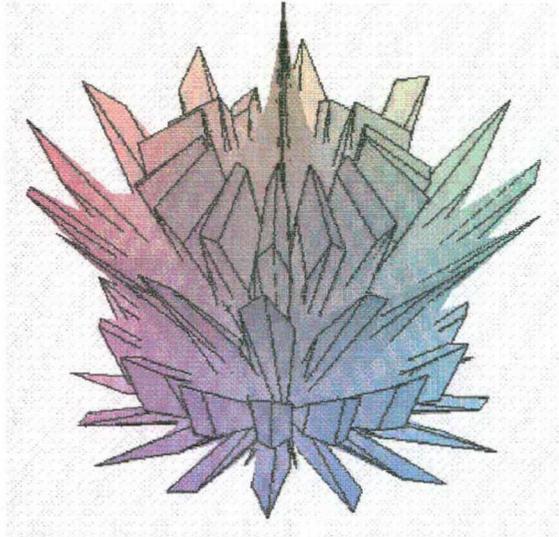


Figura 2.13

**2.5.2 Construindo o gráfico da  $f(\theta, \varphi) = \cos(8\theta) \cdot \sin(\theta) - \cos(\theta)$ ,  $\varphi = 0.. \pi$ ,  $\theta = 0..2\pi$ , com  $\varphi$  variando de 0 a  $\pi$  e  $\theta$  variando de 0 a  $2\pi$ .**

Definindo a  $f$ :

>  $f := (\theta, \varphi) \rightarrow \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) - \cos(\theta)$ ;

$$f := (\theta, \varphi) \rightarrow \cos(\theta) \sin(\theta) - \cos(\theta)$$

> *sphereplot* ( $\cos(8\theta) \cdot \sin(\theta) - \cos(\theta)$ ,  $\varphi = 0.. \pi$ ,  $\theta = 0..2\pi$ );

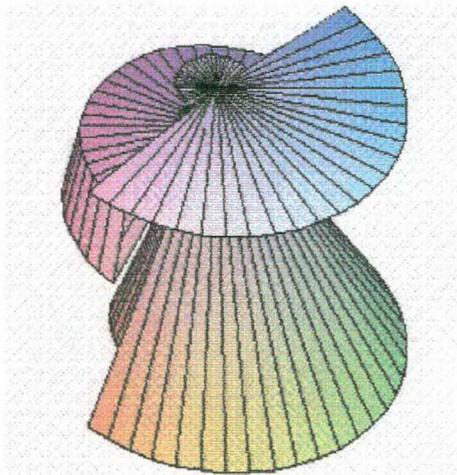


Figura 2.14

Nas representações gráficas, podemos perceber a importância da visualização, assim como contemplar o comportamento dessas funções nas coordenadas aqui registradas. Dos gráficos simples aos mais complexos, é interessante ter a possibilidade de transformar, manipular e modificar a forma algébrica para a forma gráfica das funções que se pretende estudar, tornando assim o aprendizado mais significativo, sendo fundamental que o estudante, ao analisar funções, situações-problema, em geral, familiarize-se com suas representações, não apenas pela utilidade dos conceitos matemáticos que está aprendendo, mas como motivação para poder apreciar o valor desses conceitos, pois *a capacidade de representar, analisar e interpretar gráficos é muito importante, em qualquer domínio científico.* (SILVA).

### 3. Cálculo de Área de Região Plana Limitada

O cálculo de áreas de figuras planas pode ser feito por integração. E, nesse sentido, o Maple pode ser um instrumento facilitador para visualizarmos a região sob essa(s) curva(s) e também podermos calcular a área dessas regiões. A seguir, mostraremos alguns exemplos de cálculo de áreas nas coordenadas cartesianas, paramétricas e polares, usando este *software*.

#### 3.1 Coordenadas Cartesianas

Seja  $f$  uma função contínua no intervalo  $[a, b]$  em que  $f(x) \geq 0$  para qualquer que seja  $x \in [a, b]$  onde a figura plana está limitada por  $f$  e pelas retas  $x = a$  e  $x = b$  e o eixo dos  $x$ .

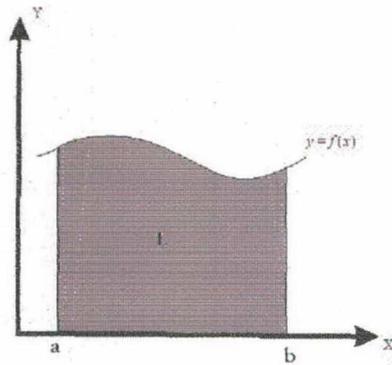


Figura 3.1

A área dessa região (L) é dada por:

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

A área pode ser calculada com o uso do Maple com o comando  $\int_a^b f dx$ . Exemplos:

### 3.1.1 Calculando a área limitada pela curva $y = -x^2 - 10x - 24$ e o eixo dos x.

- Primeiro, usamos o comando *solve* para encontrar o ponto de intersecção com o eixo dos x;
- Segundo, construímos o gráfico das curvas com o comando *plot*;

- E, por fim, aplicamos o comando *int(f(x), x=a..b)* representado pelo símbolo  $\int_a^b f dx$  na paleta de expressões, para obtermos o valor da região.

```
> solve(-x^2 - 10x - 24, {x});
```

```
{x = -6}, {x = -4}
```

```
> plot(-x^2 - 10x - 24, x = -6 .. -4, scaling = unconstrained );
```

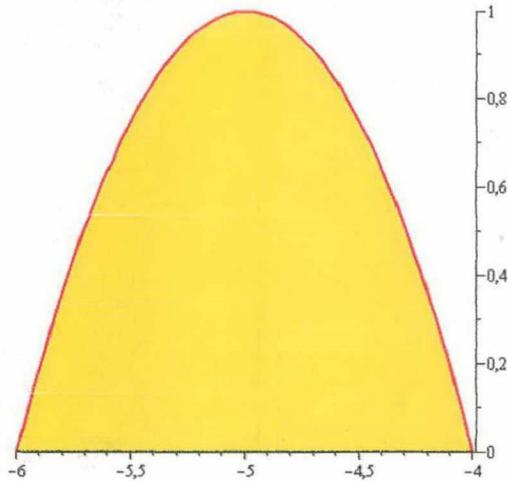


Figura 3.2

$$> \int_{-6}^{-4} (-x^2 - 10x - 24, x = -6 \dots -4) dx;$$

$$\frac{4}{3}$$

Portanto a área é igual a  $\frac{4}{3}$  u.a

### 3.1.2 Calculando a área da curva limitada pela função $y = \sin(3x) + \sin(x)$ e o eixo dos $x$ :

Realizando o mesmo processo do item anterior, teremos:

$$> \text{solve}(\sin(3x) + \sin(x), \{x\});$$

$$\{x = 0\}, \{x = \pi\}, \left\{x = \frac{1}{2}\pi\right\}, \left\{x = -\frac{1}{2}\pi\right\}$$

$$> \text{plot}\left(\sin(3x) + \sin(x), x = \frac{\pi}{2} \dots \pi, \text{scaling} = \text{unconstrained}\right);$$

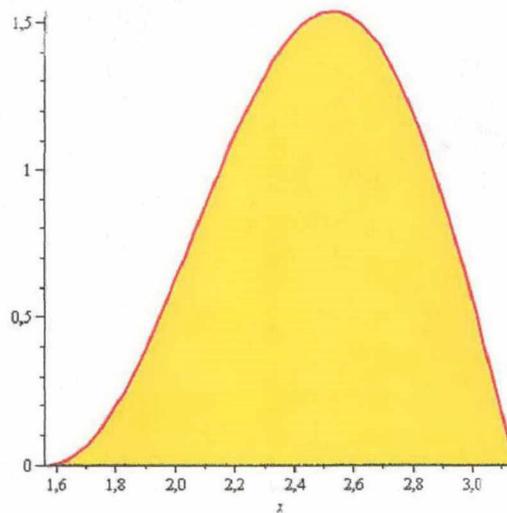


Figura 3.3

Sejam  $f$  e  $g$  funções contínuas no intervalo  $[a, b]$  em que  $f(x) \geq g(x)$  para qualquer que seja  $x \in [a, b]$  onde a figura plana está limitada por  $f$  e  $g$  e, pelas retas  $x = a$  e  $x = b$ .

A área é calculada pela diferença entre a área sob o gráfico de  $f$  e a área sob o gráfico de  $g$ . Transcrevendo a definição teremos:  $A = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$ .

Exemplos:

### 3.1.3 Calculando a área da figura limitada pela curvas $y = \sqrt{x^2}$ , $y = x^2$ .

Devemos encontrar as intersecções, traçar o gráfico e em seguida usar a fórmula

$$\int_a^b (f(x) - g(x)) dx. \text{ Vejamos:}$$

$$> \text{solve}(\{y = \sqrt{x^2}, y = x^2\}, \{x, y\});$$

$$\{x = -1, y = 1\}, \{x = 0, y = 0\}, \{x = 1, y = 1\}$$

Traçaremos o gráfico identificando-os com suas devidas funções. Para isso usaremos os comandos: `plots[textplot]` e `plots[display]`.

$$> m1 := \text{plot}(\{\sqrt{x^2}, x^2\}, x = -1 .. 1, y = 0 .. 1) :$$

$$> m2 := \text{plots[*textplot*]}(\{[-0.7, 0.9, y = \sqrt{x^2}], [0.9, 0.6, y = x^2]\}) :$$

$$> \text{plots[*display*]}(\{m1, m2\});$$

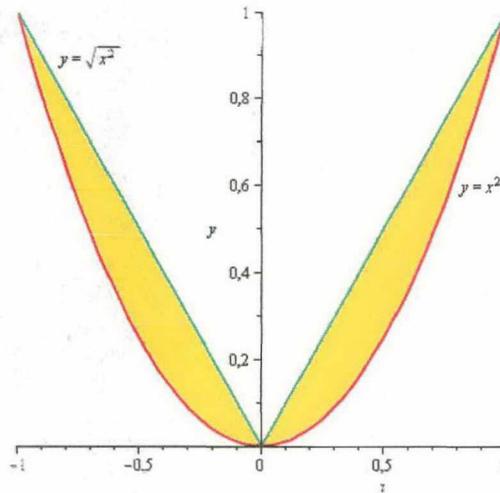


Figura 3.4

Como as curvas interceptam-se nos pontos de abscissas -1, 0 e 1, no intervalo de  $[-1, 0]$ ,  $\sqrt{x^2} \geq x^2$  e no intervalo de  $[0, 1]$ ,  $\sqrt{x^2} \geq x^2$ . A é igual a:

$$A = \int_{-1}^0 (\sqrt{x^2} - x^2) dx + \int_0^1 (\sqrt{x^2} - x^2) dx \text{ ou } A = 2 \int_0^1 (\sqrt{x^2} - x^2) dx$$

peelo fato da área à esquerda do eixo  $y$  ser igual a que se encontra à direita. Temos então:

$$> \int_0^1 (\sqrt{x^2} - x^2) dx;$$

$$\frac{1}{6}$$

$$> 2 \cdot \frac{1}{6};$$

$$\frac{1}{3}$$

A área da região é  $\frac{1}{3}$  u.a.

### 3.2 Coordenadas Paramétricas

Seja  $f$  uma função contínua no intervalo  $[a, b]$  em que  $f(x) \geq 0$  qualquer que seja  $x \in [a, b]$  em que a região  $L$  está limitada por  $f$  e pelas retas  $x = a$  e  $x = b$  e o eixo dos  $x$  onde  $y = f(x)$  é dada por:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [t_1, t_2]$$

com  $x(t_1) = a$  e  $y(t_2) = b$ . A área dessa região é dada por:  $A = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t) dt$

Vejamos alguns exemplos para cálculo de áreas de regiões limitadas por equações paramétricas, usando o Maple:

### 3.2.1 Calculando a área da região limitada pela hipociclóide $\begin{cases} x = 3 \cos^3(t) \\ y = 3 \sin^3(t) \end{cases}$

Para o cálculo de áreas limitadas por equações paramétricas, devemos diferenciar a função  $x(t)$  e, na sequência, aplicar a integral definida. E é claro, podemos usar o Maple para diferenciar, integrar e construir o gráfico para visualizarmos a região.

Traçando o gráfico, temos:

> `plot([3 cos3(t), 3 sin3(t), t = 0 .. pi]);`

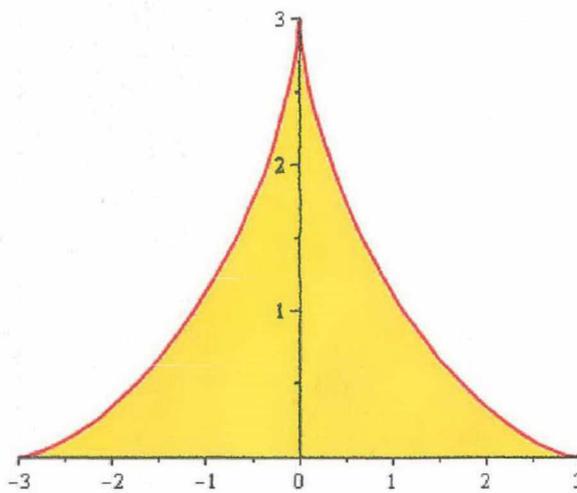


Figura 3.5

No gráfico, observamos que basta calcular a área no IQ., onde  $t_1 = \frac{\pi}{2}$  e  $t_2 = 0$ . O resultado

multiplicar por 2. Neste caso  $A = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 3 \sin^3(t) \cdot \frac{d}{dt} (3 \cos^3(t)) dt = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \sin^3(t) \cdot \frac{d}{dt} (3 \cos^3(t)) dt$

Usando o comando  $\frac{d}{dx} f$  para calcularmos a diferencial de  $x = 3 \cos^3(t)$

$$> \frac{d}{dt} (3 \cos^3(t));$$

$$-9 \cos(t)^2 \sin(t)$$

$$> -\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \sin^4(t) \cdot (-9 \cos^2(t)) dt;$$

$$\frac{27}{32} \pi$$

$$> 2 \cdot \frac{27 \pi}{32};$$

$$\frac{27}{16} \pi$$

Logo o valor da área entre o arco da hipociclóide é  $\frac{27 \pi}{16}$ .

Seja  $f$  e  $g$  funções contínuas no intervalo  $[a, b]$  em que  $f(x) \geq g(x)$  qualquer que seja  $x \in [a, b]$  em que a região  $L$  está limitada por  $f$ ,  $g$  e pelas retas  $x = a$  e  $x = b$ . Sendo  $f$  e  $g$

dadas na forma paramétrica. Então, 
$$A = \int_{t_1}^{t_2} y_1(t) \cdot \frac{d}{dt} x_1(t) - \int_{t_3}^{t_4} y_2(t) \cdot \frac{d}{dt} x_2(t)$$

### 3.2.2 Calculando a área da região limitada pelas curvas, dadas na forma paramétrica.

$\begin{cases} x = 2 \cos^3(t) \\ y = 2 \sin^3(t) \end{cases}$  e  $\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases}$ . Seguindo o procedimento do item anterior:

$$> \text{plot}(\{[2 \cos^3(t), 2 \sin^3(t), t = 0 .. 2 \pi], [2 \cos(t), 2 \sin(t), t = 0 .. 2 \pi]\});$$

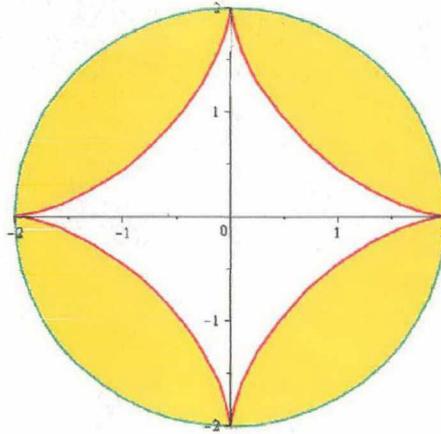


Figura 3.6

No gráfico, observamos que basta calcular a área no IQ, em que  $t_1 = \frac{\pi}{2}$  e  $t_2 = 0$ . O resultado

multiplicar por 4. Neste caso a  $A = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin^3(t) \cdot \frac{d}{dt} 2 \cos^3(t) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin(t) \cdot \frac{d}{dt} 2 \cos(t)$

Usando o comando  $\frac{d}{dx} f$  para calcularmos a diferencial de  $x = 2 \cos^3(t)$

$$> \frac{d}{dt} (2 \cos^3(t));$$

$$-6 \cos(t)^2 \sin(t)$$

$$> \frac{d}{dt} (2 \cos(t));$$

$$-2 \sin(t)$$

Logo;

$$A = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin^3(t) \cdot (-6 \cos^2(t)) dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin(t) \cdot (-2 \sin(t)) dt = 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin^4(t) \cdot (\cos^2(t)) dt - 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin^2(t) dt$$

Segue que:

$$> 12 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(t) \cdot \cos^2(t) dt - 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) dt;$$

$$-\frac{5}{8} \pi$$

$$> 4 \cdot \text{abs}\left(\frac{-5}{8} \pi\right);$$

$$\frac{5}{2} \pi$$

Logo a área da região limitada pelas curvas é igual a  $\frac{5}{2}\pi$  u.a.

### 3.3 Coordenadas Polares

Seja  $\rho$  equação polar de uma curva dada pela função contínua  $\rho = f(\theta)$  para  $\theta$  pertencente ao intervalo  $[\alpha, \beta]$  tal que  $\beta - \alpha \leq 2\pi$  e  $f(\theta) \geq 0$ .

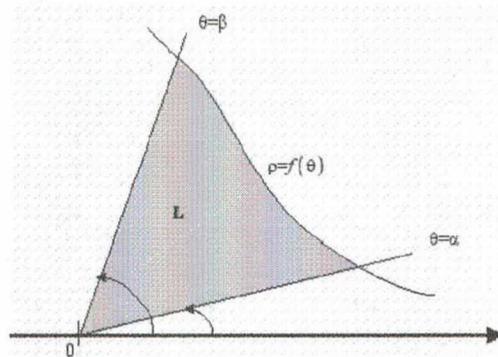


Figura 3.7

A área da região do plano limitada pelas equações polares  $\theta = \alpha$  e  $\theta = \beta$  e a curva

$$\rho = f(\theta) \text{ é igual a: } A = \int_{\alpha}^{\beta} (f(\theta))^2 d\theta.$$

Para o cálculo de área em coordenadas polares podemos utilizar o Maple para traçarmos o gráfico no intuito de visualizarmos a área a ser calculada. Para isso, entramos com o comando *with(plots)* para carregar o comando *polarplot* que está dentro do pacote *plots*. E, em seguida, utilizamos o comando da integral definida. Vejamos:

#### 3.3.1 Calculando a área limitada pela curva da por $\rho = 16 \cdot \cos(2\theta)$ .

> *with(plots)* :

> *polarplot*( $\sqrt{16 \cdot \cos(2\theta)}$ ,  $\theta = 0 .. 2\pi$ );

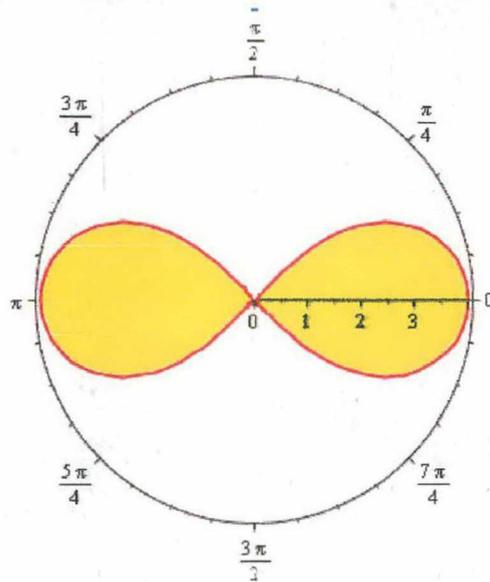


Figura 3.8

Considerando  $\alpha = -\frac{\pi}{4}$  e  $\beta = \frac{\pi}{4}$ , pois essa variação nos dá a área da região plana no IQ e IVQ. O resultado obtido devemos multiplicar por 2. Ou seja:

$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\sqrt{16 \cdot \cos(2\theta)})^2 d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\sqrt{16 \cdot \cos(2\theta)})^2 d\theta. \text{ Logo:}$$

$$> \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\sqrt{16 \cdot \cos(2\theta)})^2 d\theta;$$

16

Portanto a área da região procurada é 16 u.a.

**3.3.2 Calculando área da intersecção das regiões limitadas pelas curvas  $\rho = 2 - \cos(\theta)$  e  $\rho = 1 + \cos(\theta)$ .**

> `polarplot({2 - cos(θ), 1 + cos(θ)}, θ = 0..2 π);`

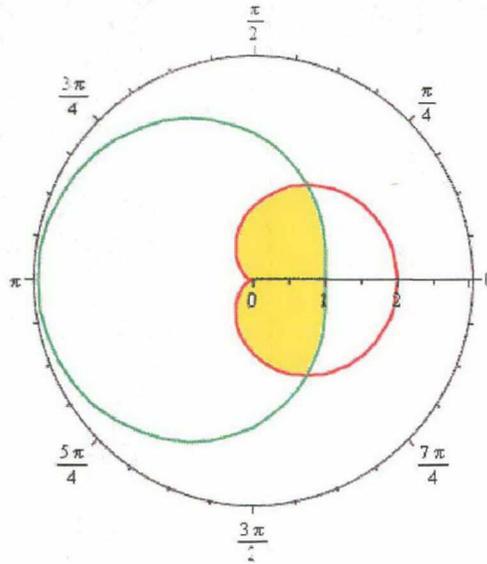


Figura 3.9

Usando comando *solve* para encontrar o ponto de intersecção.

> `solve({2 - cos(theta) = 1 + cos(theta)}, {theta});`

$$\left\{ \theta = \frac{1}{3} \pi \right\}$$

Assim,  $\theta = \frac{\pi}{3}$  e  $\theta = -\frac{\pi}{3}$ . Seja  $A_1$  o conjunto de todos os pontos  $(\theta, \rho)$  com  $0 \leq \theta \leq 2 - \cos(\theta)$  e  $A_2$  o conjunto de todos os pontos  $(\theta, \rho)$  com  $\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq 1 + \cos(\theta)$ . Neste caso:  $A = 2(A_1 + A_2)$

$$> A_1 := \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2 - \cos(\theta))^2 d\theta;$$

$$A_1 := -\frac{15}{16} \sqrt{3} + \frac{3}{4} \pi$$

$$> A_2 := \frac{1}{2} \cdot \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (1 + \cos(\theta))^2 d\theta;$$

$$A_2 := -\frac{9}{16} \sqrt{3} + \frac{1}{2} \pi$$

> `A := 2 * (value(A1 + A2));`

$$A := -3\sqrt{3} + \frac{5}{2} \pi$$

Portanto a área procurada é  $-3\sqrt{3} + \frac{5}{2}\pi u.a$

## 4. Superfície e Sólido de Revolução

### 4.1 Área de uma Superfície de Revolução

A área de superfície de revolução é obtida fazendo-se girar uma curva plana em torno de um eixo no plano.

Considerando L uma curva de equação  $y=f(x)$ , onde  $f$  e  $f'$  são contínuas em  $[a,b]$  e  $f(x) \geq 0$ , qualquer que seja  $x$  pertencentes ao intervalo fechado de extremos  $a$  e  $b$ . A área da superfície de revolução R, gerada pela rotação da curva L ao redor do eixo dos  $x$ , é definida por:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Ao invés do eixo  $x$  consideramos uma curva suave L descrita por  $x=g(y)$  não negativa em  $[c,d]$ , a área da superfície de revolução da curva L em torno do eixo  $x$  é dada por:

$$A = 2\pi \int_c^d g(y) \sqrt{1 + [g'(y)]^2} dy$$

O Maple, além de construir o gráfico da curva no plano, também possui recurso para girar essa curva em torno do eixo. Vejamos alguns exemplos:

#### 4.1.1 Calculando a área da superfície de revolução do arco da parábola $y = \sqrt{8x}$ , $1 \leq x \leq 12$ ao redor do eixo $x$ .

Traçaremos o gráfico para visualizarmos a curva no plano, para isso, usaremos o comando *plot*.

```
> plot({sqrt(8*x)}, x = 1..12);
```

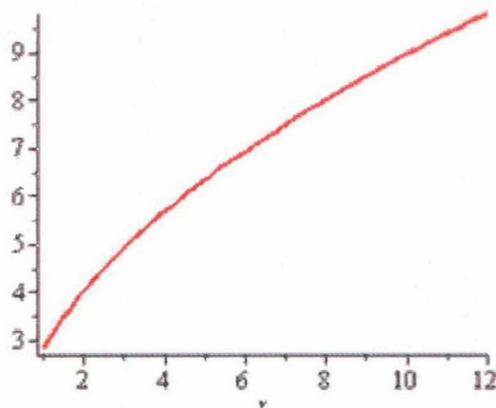


Figura 4.1

Para obtermos a superfície de revolução pela rotação em torno do eixo  $x$  da curva, usamos o comando abaixo:

$$\text{plot3d}([x, f(x) \cdot \cos(\theta), f(x) \cdot \sin(\theta)], x = a..b, \theta = c..d, \text{opções})$$

Vejamos:

$$> \text{plot3d}([x, \sqrt{8x} \cdot \cos(\theta), \sqrt{8x} \cdot \sin(\theta)], x = 1..12, \theta = 0..2\pi);$$

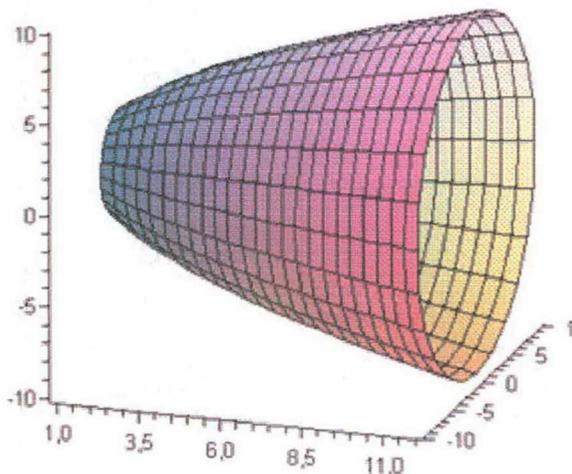


Figura 4.2

Após as devidas substituições o cálculo da área da superfície fica assim expresso:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = 2\pi \int_1^{12} \sqrt{8x} \sqrt{1 + [(\sqrt{8x})']^2} dx$$

Seguindo os passos abaixo:

$$> \frac{d}{dx} \sqrt{8x};$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}$$

$$> 2\pi \int_1^{12} \sqrt{8x} \sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\right)^2} dx;$$

$$2\pi \left( -4\sqrt{2}\sqrt{3} + \frac{112}{3}\sqrt{7} \right)$$

Usando o comando *evalf(%)* para obtermos este valor em termos decimais:

> *evalf(%)*;

559.0574500

Arredondando esse valor para duas casas decimais, para isso, faremos uso do comando abaixo, em que o 5 indica cinco dígitos.

> *evalf(%,5)*;

559.06

Logo a área da superfície de revolução é aproximadamente 559,06 u.a

#### 4.1.2 Calculando a área de superfície do cone gerado pela revolução do segmento de reta de $x = \sqrt{y}$ , $1 \leq y \leq 4$ em torno do eixo $y$ .

Seguindo os passos do item anterior:

> *plot(x^2, x = 1..2, y = 1..4)*;

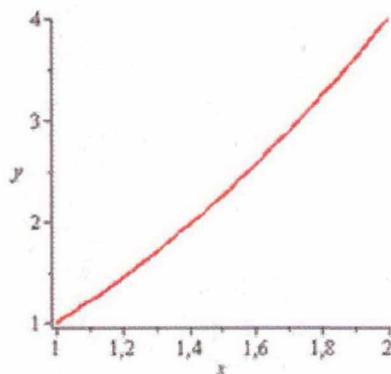


Figura 4.3

Para obtermos a superfície de revolução pela rotação em torno do eixo  $y$  da curva, usamos o comando abaixo:

*plot3d([x\*cos(theta), x\*sin(theta), x^2], x = a..b, theta = c..d, opções)*

Vejamos:

> `plot3d([x*cos(theta), x*sin(theta), x^2], x = 1..2, theta = 0..2*pi);`

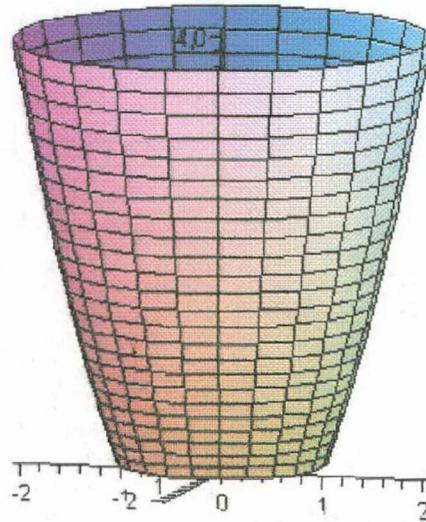


Figura 4.4

A área da superfície de revolução  $R$  é dada por  $A = 2\pi \int_1^4 \sqrt{y} \sqrt{1 + [(\sqrt{y})']^2} dy$

Calculando a derivada usando o comando  $\frac{d}{dx} f$  na paleta de expressões e em seguida o cálculo  $A$ .

>  $\frac{d}{dy} \sqrt{y}$ ;

$$\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

>  $2\pi \int_1^4 \sqrt{y} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)^2} dy$ ;

$$2\pi \left( -\frac{5}{12} \sqrt{5} + \frac{17}{12} \sqrt{17} \right)$$

Simplificando este valor em termos decimais com quatro dígitos:

> `evalf(%, 4);`

30.86

Portanto o valor da área de superfície é 30,86 u.a

## 4.2 Volume de um Sólido de Revolução

Sólido de Revolução é um sólido que obtemos fazendo uma região plana girar em torno de um eixo ou uma reta no plano.

Seja  $y=f(x)$  uma função contínua em  $[a, b]$ . O **Volume V** do sólido de revolução gerado pela rotação da região limitada pelos gráficos de  $y=f(x) \geq 0$ ,  $x=a$ ,  $x=b$  e do eixo dos  $x$  é dado por:

$$V_x = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx \text{ ou } V_x = \int_c^d y \cdot g(y) dy$$

Vejam como determinar volume de um sólido de revolução, usando o Maple. Neste exemplo iremos fazer uso do comando *VolumeOfRevolution* que está contido no pacote *Student[Calculus1]*. Para carregar o *VolumeOfRevolution*, devemos dar o comando *with(Student[Calculus1])*.

#### 4.2.1 Calculando o volume do sólido de revolução gerado pela curva $y=x^2 + 1$ , $x=0$ , $x=2$ e $y=0$ .

Definindo a função e gerando o gráfico com auxílio do pacote *Student[Calculus1]*:

- > *with(Student[Calculus1])* :
- > *f := x -> x^2 + 1* :
- > *plot(f(x), x=0..2)*;

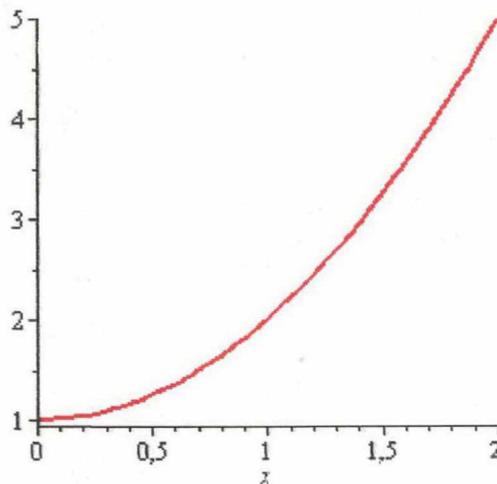


Figura 4.5

Usando o comando *VolumeOfRevolution(f(x), x=a..b, opções)* para girar a curva em torno do eixo  $x$  com as opções *axis=horizontal* que especifica o eixo  $x$  e *output=plot* para extrair o gráfico.

- > *VolumeOfRevolution(f(x), x=0..2, axis = horizontal, output = plot)*;

The Volume of Revolution Around the Horizontal Axis of  
 $f(x) = x^2 + 1$   
 on the Interval  $[0, 2]$

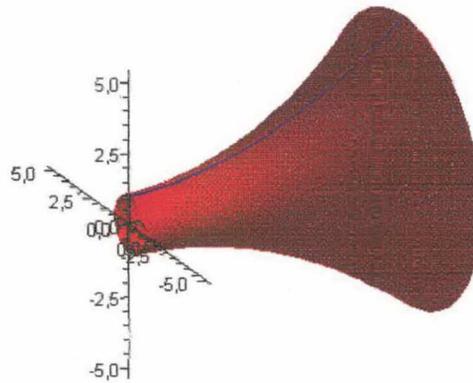


Figura 4.6

Colocaremos a opção *output=integral* para extrair a integral, os comandos *value(%)* e *evalf(%,4)* para obtermos respectivamente o valor da integral e sua aproximação decimal com quatro dígitos.

> *VolumeOfRevolution* ( $f(x)$ , 0 ..2, *axis = horizontal*, *output = integral*);

$$\int_0^2 \pi (x^2 + 1)^2 dx$$

> *value* (%);

$$\frac{206}{15} \pi$$

> *evalf* (%);

43.14453911

Utilizando o comando *evalf(%,4)* para arredondar esse valor para duas casas decimais, no qual o 4 indica quatro dígitos.

> *evalf* (% ,4);

43.14

Portanto o volume do sólido de revolução é aproximadamente 43,14 u.v.

Seja  $x=f(y)$  uma função contínua em  $[c, d]$ . O **Volume V** do sólido de revolução gerado pela rotação da região limitada pelos gráficos de  $x=f(y) \geq 0$ ,  $y=a$ ,  $y=b$  e do eixo dos  $y$  é dado por:  $V_y = \pi \int_c^d (f(y))^2 dy$  ou  $V_y = 2\pi \int_a^b xf(x) dx$ .

#### 4.2.2 Calculando o volume do sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo $y$ delimitada pelos gráficos das equações $y=\ln(x)$ , $x=0$ , $y=-1$ e $y=2$ .

Definindo a função:

>  $f := x \rightarrow \ln(x)$ ;

$f := x \rightarrow \ln(x)$

Construindo o gráfico de  $f$ .

>  $plot(\{f(x), -1, 2\}, x = e^{-1} .. e^2)$ ;

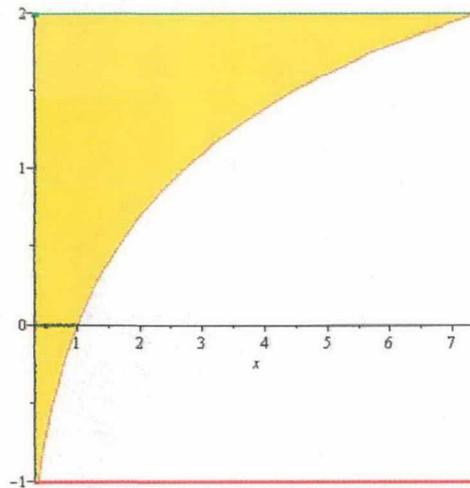


Figura 4.7

Para obtermos o volume do sólido de revolução pela rotação em torno do eixo  $y$  da região, usamos o comando abaixo:

$plot3d([x \cdot \cos(\theta), x \cdot \sin(\theta), f(x)], x = a..b, \theta = c..d, opções)$

>  $plot3d([x \cdot \cos(\theta), x \cdot \sin(\theta), \ln(x)], x = e^{-1} .. e^2, \theta = 0 .. 2\pi, style = surface)$ ;

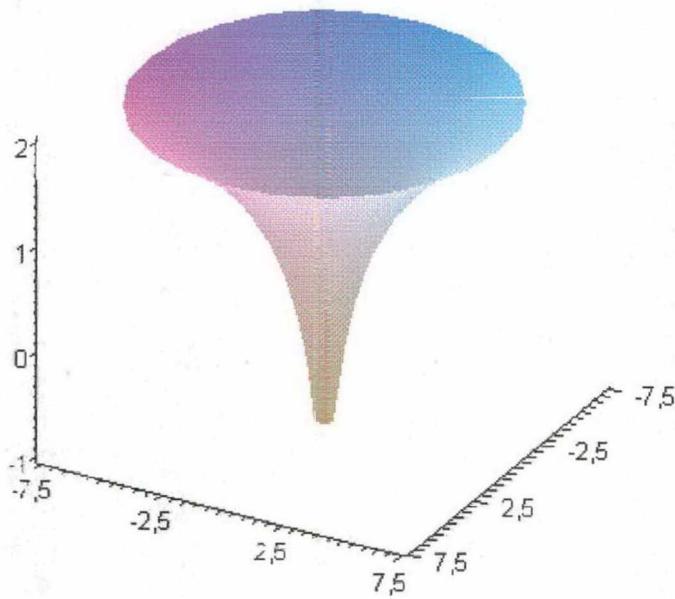


Figura 4.8

Calculando o seu volume:

$$> \pi \int_{-1}^2 (e^y)^2 dy;$$

$$\pi \left( -\frac{1}{2} e^{-2} + \frac{1}{2} e^4 \right)$$

> *simplify(%)*;

$$\frac{1}{2} \pi (-1 + e^6) e^{-2}$$

> *evalf(%)*;

85.54998930

Portanto o seu volume é aproximadamente 85,55 u.v

#### 4.2.3 Calculando o volume do sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo $y$ delimitada pelos gráficos das inequações $y \leq \sin(x)$ , $y \geq 0$ e $0 \leq x \leq \pi$ .

Definindo a função:

>  $f := x \rightarrow \sin(x)$ ;

$$f := x \rightarrow \sin(x)$$

Construindo o gráfico de  $f$ :

```
> plot(sin(x), x = 0 .. pi);
```

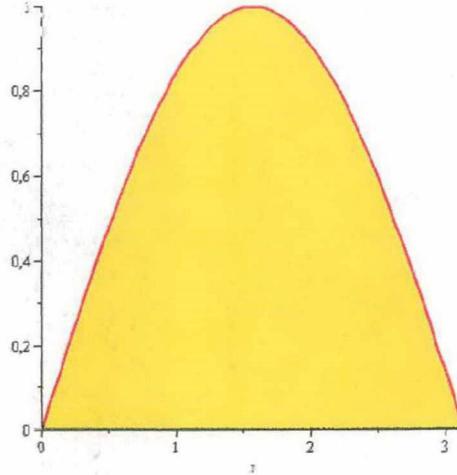


Figura 4.9

Girando a região em torno do eixo  $y$ :

```
> plot3d([x*cos(theta), x*sin(theta), sin(x)], x = 0 .. pi, theta = 0 .. 2*pi, style = surfacecontour);
```

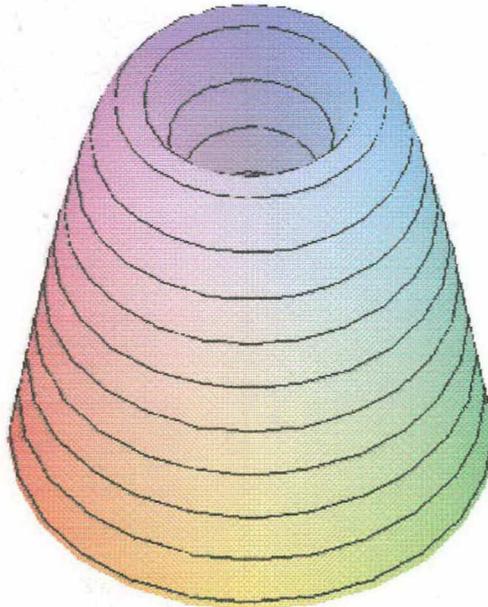


Figura 4.10

Calculando o seu volume, usando  $V_y = 2\pi \int_a^b xf(x) dx$ .

$$> 2\pi \int_0^{\pi} x \cdot \sin(x) \, dx;$$

$$2\pi^2$$

Portanto o volume do sólido de revolução é  $2\pi^2$  u.v.

Seja  $y=f(x)$  e  $y=g(x)$  funções contínuas em  $[a, b]$ , com  $f(x) \geq g(x) \geq 0$ . O **Volume V** do sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo dos  $x$  e da região limitada pelos gráficos de  $y=f(x)$ ,  $y=g(x)$ ,  $x=a$ , e  $x=b$  é dado por:

$$V = \pi \int_a^b ((f(x))^2 - (g(x))^2) \, dx$$

**4.2.4 Calculando o volume do sólido de revolução gerado pelas curvas  $y=x+3$ ,  $y=x^2+1$ , onde  $-1 \leq x \leq 2$  e  $y=0$ .**

Usando novamente o pacote *Student[Calculus1]*:

Definindo as funções:

> *with(Student[Calculus1])* :

> *with(plots)* :

>  $f := x \rightarrow x + 3$  :

>  $g := x \rightarrow x^2 + 1$  :

> *plot({f(x), g(x)}, x = -1 .. 2)*;

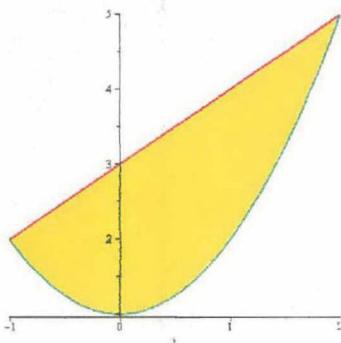


Figura 4.11

Obtendo o sólido de revolução entre  $f$  e  $g$  pela rotação ao redor do eixo  $x$ :

> *VolumeOfRevolution (f(x), g(x), -1 ..2, axis = horizontal, output = plot, distancefromaxis = 10);*

The Volume of Revolution Around the Line  $y = 10$  Between  
 $f(x) = x+3$   
 and  
 $g(x) = x^2+1$   
 on the Interval  $[-1, 2]$

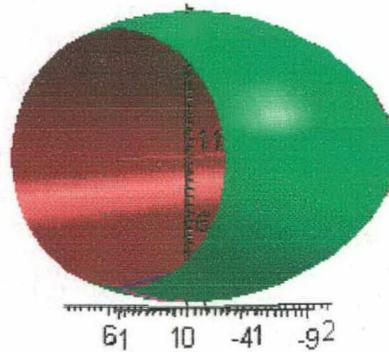


Figura 4.12

Aplicando o comando abaixo para saída da integral:

> *VolumeOfRevolution (f(x), g(x), -1 ..2, axis = horizontal, output = integral);*

$$\int_{-1}^2 \pi |x^2 - 6x - 8 + x^4| dx$$

> *value(%)*;

$$\frac{117}{5} \pi$$

> *evalf(%)*;

73.52

Portanto o valor do volume do sólido de revolução entre as curvas é aproximadamente 73,52 u.v.

Seja  $x=f(y)$  e  $x=g(y)$  funções contínuas em  $[c, d]$ , com  $f(y) \geq g(y) \geq 0$ . O **Volume V** do sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo dos  $x$  e da região limitada pelos gráficos de  $x=f(y), x=g(y), y=a$ , e  $y=b$  é dado por:

$$V = \pi \int_c^d ((f(y))^2 - (g(y))^2) dy$$

**4.2.5 Calculando o volume do sólido de revolução gerado pelas curvas  $x = \sqrt[3]{y}$ ,  $x = \sqrt{y}$ , onde  $0 \leq y \leq 1$  e  $x = 0$ .**

Definindo as funções:

- > `with(Student[Calculus1]) :`
- > `with(plots) :`
- > `f := y -> \sqrt[3]{y} :`
- > `g := y -> \sqrt{y} :`
- > `plot({f(y), g(y)}, y = 0 .. 1);`

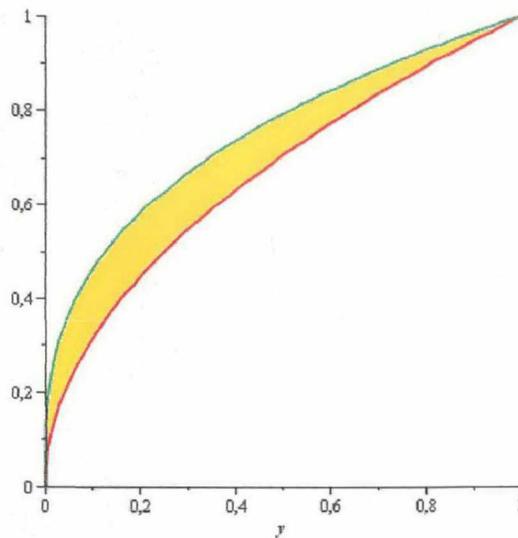


Figura 4.13

O comando abaixo nos dá o sólido de revolução entre  $f$  e  $g$ :

- > `VolumeOfRevolution (f(y), g(y), 0 .. 1, axis = vertical, output = plot, distancefromaxis = 3);`

The Volume of Revolution Around the Line  $y = 3$  Between  
 $f(y) = y^{1/3}$   
 and  
 $g(y) = y^{1/2}$   
 on the Interval  $[0, 1]$

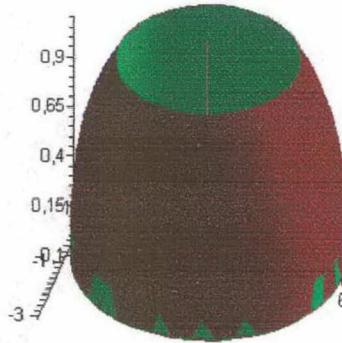


Figura 4.14

Gerando a integral do volume do sólido de revolução:

> `VolumeOfRevolution (f(y), g(y), 0..1, output = integral);`

$$\int_0^1 \pi (y^{2/3} - y) dy$$

> `value(%);`

$$\frac{1}{10} \pi$$

> `evalf(%);`

0.3141592654

Portanto o valor do volume do sólido de revolução é aproximadamente 0,31 u.v

Nos capítulos 4, 5 e 6, onde foi feita uma pequena demonstração de aplicação das integrais, podemos perceber a importância de um *software*, em particular o Maple, em que podemos usá-lo para visualizar a região sob a curva e entre as curvas, a área de uma superfície de revolução, como também o volume de um sólido de revolução a ser calculado. Essa apresentação gráfica dá mais sentido aos problemas propostos e torna-os mais significativos, uma vez *ele pode servir como um instrumento de balizamento da aprendizagem do Cálculo, desde que seja utilizado de forma adequada, como uma ferramenta de complementação, aperfeiçoamento e possível mudança na qualidade de ensino.* (CIANI & PAPANI, p. 1)

## 5 Animações

Além de possuir todos os recursos de construção de gráficos, como vimos nas seções anteriores, o Maple também dispõe de recursos capazes de criar animação gráfica em duas e três dimensões. Essa animação, Segundo Lenimar *Consiste simplesmente, de uma sequência de gráficos, mostrados consecutivamente. Isso gera uma ilusão de movimento.* Este software possui três comandos para construção de animações, a saber: *animate*, *animate3d* e *animatecurve*. Aqui, faremos uso apenas dos comandos *animate* e *animate3d*.

### 5.1 Animação em duas dimensões

A animação de gráficos no Maple 12 é introduzida com o comando *animate* que é um comando do pacote *plots*, para carregá-lo devemos usar o comando *with(plots)*. A sintaxe do comando *animate* é dada por:

*animate(plot, [M\*y-expr(x), x=variação], M=variação, opção=nome da opção).*

O parâmetro M especifica variação de um frame até o próximo. Vejamos alguns exemplos:

#### 5.1.1 Criando animação no gráfico da função $\cos(x)$ com os seguintes parâmetros.

Carregamos o pacote *plots* com o comando *with(plots)* em seguida escrevemos as especificações na linha de comando *animate* como segue abaixo:

> *with(plots)* :

> *animate(plot, [M\*cos(x), x = 0 .. pi], M = 0 .. 10);*

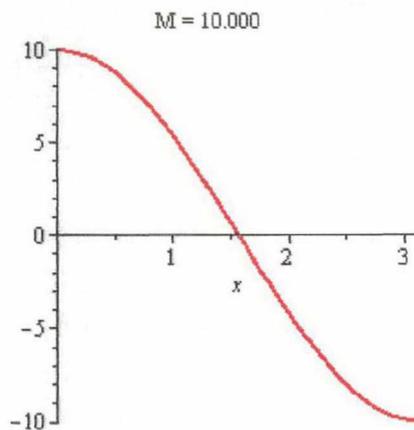


Figura 5.1

Para vermos a animação, devemos clicar no gráfico. Irá aparecer na parte superior sob o menu *está* a mini ferramenta:

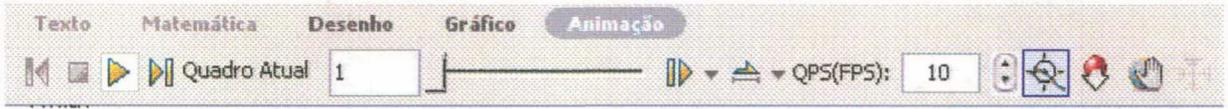


Figura 5.2

em seguida clicar no botão  para iniciar a animação. Por padrão o Maple cria 25 frames, sequências de figuras, que são mostradas rapidamente. Mas essas quantidades podem ser estabelecidas pelo usuário.

### 5.1.2 Criando animação no gráfico da função $y = x^2 - 2$ .

> `with(plots) :`

> `animate(plot, [M · (x2 - 2), x = -3..3], M = -3..3, trace=7, frames=60);`

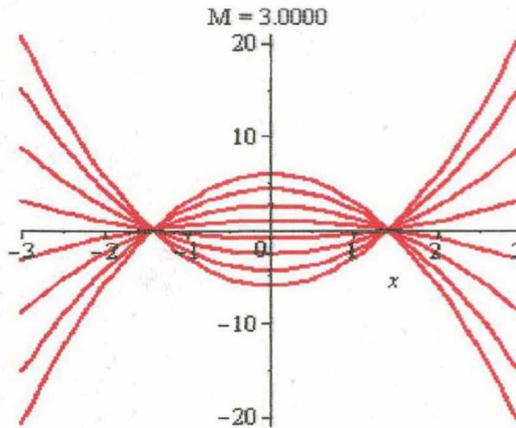


Figura 5.3

Aqui em relação ao item anterior colocamos a opção *trace* afim de que as sequências da animação sejam fixadas.

### 5.1.3 Criando animação no gráfico da função paramétrica $f(t) = t^2 \sin(t), 2t \cdot \cos(t), t = 0..4\pi$

> `animate(plot, [[t2 sin(t), 2t · cos(t), t = 0..A]], A = 0..4π, frames = 60);`

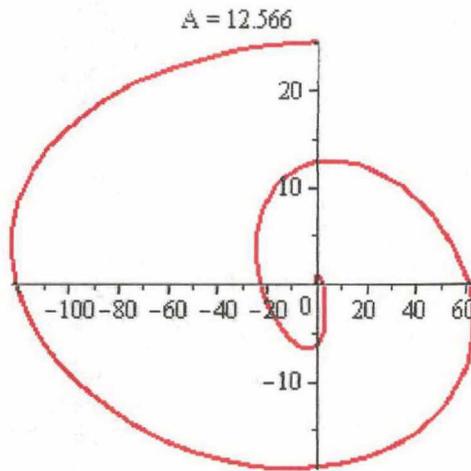


Figura 5.4

Aqui percebemos o gráfico se formando no decorrer de 0 a  $4\pi$ .

#### 5.1.4 Criando um procedimento para um símbolo percorrer pela trajetória formada pelo gráfico da função $y = 2 \cos(x + 3)$ .

Para criar um procedimento no Maple usamos a seguinte sintaxe:

*Nome* := **proc**(argumentos) instruções contendo os argumentos **end**

Lembrando que aqui é um procedimento simples, onde faremos o *symbol=diamond* percorrer sobre a curva da função cosseno. Ao procedimento daremos o nome de *diamond*. Vejamos:

> **with**(plots) :

> **diamond** := **proc** (x, y) plots[pointplot]([[x, y]], color = green,  
symbol = diamond, symbolsize = 80) **end proc**:

> **animate**(diamond, [0, 2 cos(t + 3)], t = 0..4 π, scaling  
= constrained, frames = 100) :

> **cosinewave** := **plot**(2 cos(x + 3), x = 0..4 π, thickness = 2) :

> **animate**(diamond, [t, 2 cos(t + 3)], t = 0..4 π, frames = 50,  
background = cosinewave, scaling = constrained) ;

t = 3.5904

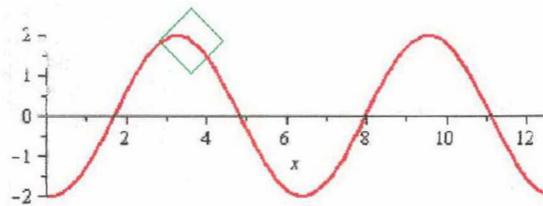


Figura 5.5

## 5.2 Animação em três dimensões

Para a animação em três dimensões faremos uso do comando *animate3d* para termos acesso carregaremos com o comando *with(plots)* visto que ele é um comando do pacote *plots*. A sintaxe para animação em três dimensões é dada por:

*animate(plot3d,[M\*y-expr(x),x=variação],M= parâmetro da variação dos frames, opções)*

ou

*animate3d(F(x), x=a..b, y=c..d, M=m1..m2).*

Vejamos alguns exemplos:

**5.2.1 Criando animação das funções  $f(x,y) = x^2 + y^2$  e  $g(x,y) = x^2 - y^2$ . No mesmo plano.**

> *animate(plot3d, [[M<sup>2</sup> (x<sup>2</sup> + y<sup>2</sup>), (M<sup>2</sup> + 1)(x<sup>2</sup> - y<sup>2</sup>)], x = -3 .. 3, y = -3 .. 3], M = -2 .. 4, style = surface );*

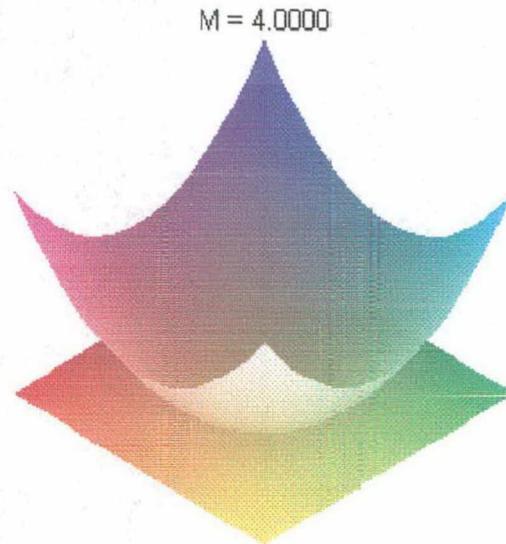


Figura 5.6

### 5.2.2 Criando animação da função $f(x) = x^2 \cos(\theta)$ especificando a coordenada com o parâmetro $t$ .

- > *with(plots)* :
- > *animate3d(x^2 cos(t\*theta), x = 1..3, t = 1..4, theta = 2..4, coords = spherical)*;

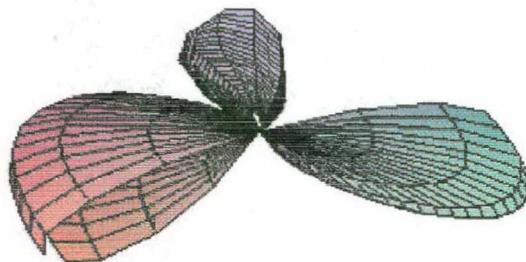


Figura 5.7

### 5.2.3 Criando animação com superfície implícita.

Os comandos utilizados são: *display* com o parâmetro *insequence* igual a *true*, o comando *implicitplot3d* e **for i from a to b do**. O comando *display* como vimos serve para apresentar os gráficos simultaneamente, a opção *insequence=true* para mostrar em seqüência,

o comando **for i from a to b do** que tem a função de repetir por várias vezes a mesma instrução e o comando *implicitplot3d* para criação de gráficos com superfície implícita. Vejamos:

```
> c1 := -1 : c2 := 1 :  
> ligação[0] := implicitplot3d(c1·x^2 + y^2 - z^2 = 1, x = -2..2, y =  
-2..2, z = -2..2) :  
> for i from 1 to 10 do c := c1 + i*(c2 - c1)/10 : ligação[i]  
:= implicitplot3d(c·x^2 + y^2 - z^2 = 1, x = -2..2, y = -2..2, z  
= -2..2) do:  
> display([seq(ligação[i], i = 0..10)], insequence = true, scaling  
= constrained);
```

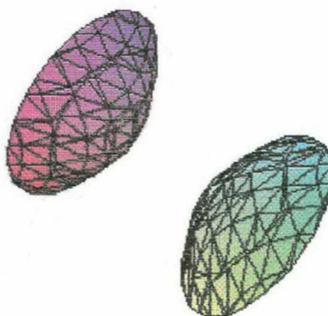


Figura 5.8

## 6 Considerações Finais

O Software Maple, pelo que vimos no decorrer deste trabalho monográfico, em que usamos pouquíssimos pacotes e comandos de muitos outros existentes na sua biblioteca, contemplamos o quanto este aplicativo pode auxiliar no aprendizado da Matemática e de outras ciências que necessitem realizar cálculos e representações de gráficos de duas e três dimensões, sem contar com o pacote *IntTutor* que faz as operações passo a passo, dizendo-nos a regra a ser aplicada na resolução de problemas relacionados ao Cálculo, que apenas foi frisado, mas não explanado neste trabalho e muitos outros recursos para animação que por limitação dos orientandos não foi realizada com mais profundidade.

Para um conhecimento mais aguçado deste *software* recomenda-se a leitura do seu tutorial o qual foi a maior fonte deste trabalho, a fim de conhecer as suas potencialidades, limitações e expandir a sua utilização no ensino do Cálculo. Pois “no que se refere ao processo ensino aprendizagem, esses pacotes computacionais exercem grande influência no desenvolvimento intelectual dos alunos” (TANEJA).

Mesmo diante das nossas limitações, esperamos ter alcançado o tema discorrido, desde os conceitos básicos às animações realizadas com este *software*, que apresenta recursos essenciais para o auxílio nas aulas do ensino primário ao superior, tornando as aulas mais agradáveis e atrativas.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDRADE, L. N. Animações Gráficas com o Maple. João Pessoa, 2006.

CIANI, A. B.; PAPANI, F. M. As idéias principais do cálculo diferencial e integral. Disponível em: <[http://www.sbem.com.br/files/ix\\_enem/.../MC13958014879T.doc](http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/.../MC13958014879T.doc)>. Acesso em: maio de 2009.

COSTA, I. M da; et al. Hipertexto de Matemática Universitária com Maple V. São Paulo. Disponível em: <<http://www.dm.ufscar.br/disciplinas/grad/maplehtml/>>. Acesso em: maio de 2009.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. *Cálculo A* (6ª ed.). São paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

GUIDORIZZI, H. L. Um Curso de Cálculo ,(5ª ed., Vols. 1-2). LTC.

MAPLESOFT, Application Center. Disponível em: <<http://www.maplesoft.com/applications/applications/?p=maple12>>. Acesso em: maio de 2009

SILVA, M. V. Dificuldade na representação gráfica quando apresentado num contexto real. Jundiaí, São Paulo.

STEWART, J. Cálculo, Volume I (5ª ed.). São Paulo: Editora Cengage Learning, 2008.

TANEJA, I. J. Construção de gráficos bi e tridimensional utilizando os software Mathematica e Maple. Florianópolis: IV Semana de Pesquisa, UFSC, 1995.

TANEJA, I. J. Maple V uma abordagem computacional no ensino de Cálculo. Florianópolis: Da UFSC, 1997.