UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA
FORMAÇÃO DE PROFESSOR

O DETERMINANTE DE UMA MATRIZ

João Pereira Bonfim

FOZ DO IGUAÇU - PR
FEVEREIRO DE 2011

O DETERMINANTE DE UMA MATRIZ

Por:

João Pereira Bonfim

Monografia apresentada ao Curso de Especialização em Matemática – Formação de Professores da Universidade Federal de Santa Catarina, como requisito para o obtenção parcial do grau de **Especialista em Matemática**.

Orientador: Prof. Licio Hernanes Bezerra.

FOZ DO IGUAÇU - PR
FEVEREIRO DE 2011

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
Departamento de Matemática
Curso de Especialização em Matemática-Formação de Professor na modalidade a distância

"O Determinante de Uma Matriz"

Monografia submetida à Comissão de avaliação do Curso de Especialização em Matemática-Formação do professor em cumprimento parcial para a obtenção do título de Especialista em Matemática.

APROVADA PELA COMISSÃO EXAMINADORA em 18/03/2011

Dr. Licio Hernanes Bezerra (Orientador) ______________________

Dr. Celso Melchiades Doria (Examinador) ______________________

Drª. Sonia Palomino Bean (Examinadora) ______________________

Dra. Neri Terezinha Both Carvalho
Coordenadora do Curso de Especialização em Matemática-Formação de Professor

Foz do Iguaçu, Paraná, março de 2011.

O DETERMINANTE DE UMA MATRIZ

JOÃO PEREIRA BONFIM

Aprovado em ____/____/_____.

BANCA EXAMINADORA

Prof° Licio Hernanes Bezerra (orientador)

Doutor em Matemática (PUC – Rio)

Profª Sônia Elena Palomino Bean

Doutora em Engenharia de Controle e Automação (UFSC)

Prof° Celso Melchiades Dória

Doutor em Matemática (University of Warwick)

CONCEITO FINAL: ____________________

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador Licio Hernanes Bezerra, que me acompanhou, dando-me orientações preciosas para que esse trabalho pudesse ser concluído.

A Jesus Cristo, amigo sempre presente, sem o qual nada teria feito.

Aos amigos, que sempre incentivaram meus sonhos e estiveram sempre ao meu lado.

Ao meu tutor Gilberto, aos meus colegas de classe e demais formandos pela amizade e companheirismo que recebi.

À minha esposa Leir e minha filha Mônica por abrir mão de momentos preciosos, pois só assim pude chegar até aqui.

RESUMO

Neste trabalho definimos o determinante de uma matriz a partir da expansão de Laplace. Mostramos, então, que o determinante definido dessa forma é uma função multilinear alternada (em relação às linhas da matriz) e assume o valor 1 na matriz identidade. Ou seja, o Teorema de Laplace é equivalente à definição usual de determinante. O determinante aparece em estudo de volumes de sólidos tridimensionais, mudança de coordenadas, inversibilidade de matrizes, resolução de equações lineares etc. Há várias formas equivalentes de se definir determinante, o que fornece formas alternativas de cálculo, adequadas para diferentes formas de matrizes. O nosso objetivo é mostrar que podemos definir determinante como um procedimento indutivo, que é uma forma direta e acessível a um aluno de ensino médio, além de ser um modo matematicamente rigoroso.

Palavras chaves: Determinante, matrizes, expansão de Laplace.

NOTAÇÕES:

MATRIZES:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{i=1:m \\ j=1:n}}$ ou $A = A(1:m, 1:n)$

MATRIZ IDENTIDADE:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

TRANSPOSTA DE UMA MATRIZ:

Seja A uma matriz mxn. A transposta de A é a matriz B, nxm, tal que $B_{ij} = A_{ji}$.

Notação: $B = A^T$.

Então:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

INVERSA DE UMA MATRIZ:

i) Dizemos que A é matriz inversível se existir uma matriz B tal que $A.B = B.A = I$.

ii) Dada uma matriz inversível A, chama-se inversa de A a matriz A^{-1} (que é única) tal que $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$.

SOMA DE MATRIZES:

$A + B = C$

$\rightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

PRODUTO DE UM ESCALAR POR UMA MATRIZ

$k \in \mathbb{C}$ e $kA = B$

$\rightarrow b_{ij} = ka_{ij}$

SUBMATRIZ

Sejam:

$v = (i1, \cdots, ir)$, $1 \le i1 \le \cdots \le ir \le m$

$w = (j1, \cdots, js)$, $1 \le j1 \le \cdots \le js \le n$

$$A(v,w) = \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_r j_1} & \cdots & a_{i_r j_s} \end{pmatrix}$$

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow A((1,3),2)=\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Obs:

i) $A=((1,3),:)=A((1,3),(1,2,\cdots,n))=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

ii) $A(:,w)=A((1,2,\cdots,m),w)=A(1:m,w)$.

iii) $A(:,j)$ é a coluna j de A.

iv) $A(i,:)$ é a linha i de A.

v) $1:m=(1,2,\cdots,m)$ e $1:n=(1,2,\cdots,n)$.

vi) $A((3,2,1),(3,2,1))=\begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O sistema de equações lineares pouco apareceu na matemática Ocidental antiga ao contrário do que ocorreu no extremo Oriente, onde recebeu maior atenção. Os chineses representavam os sistemas lineares por meio de seus coeficientes escritos com barras de bambu sobre os quadrados de um tabuleiro. Assim, acabaram descobrindo o método de resolução por eliminação, que consiste em anular coeficientes por meio de operações elementares.

Contudo, apenas em 1683 a idéia de determinante como um número que se associa a um matriz quadrada de números se concretizou, com um trabalho de Seki Kowa. Considerado o maior matemático japonês do sec. XVII, Kowa chegou a essa conclusão através do estudo de sistemas lineares, sistematizando o velho procedimento chinês (para o caso de duas equações apenas).

O uso de determinantes no Ocidente começou dez anos depois em um trabalho de Leibniz sobre sistemas lineares. Em resumo, Leibniz estabeleceu a condição de compatibilidade de um sistema de três equações a duas incógnitas em termos do determinante de ordem 3, formado pelos coeficientes e pelos termos independentes (este determinante deve ser nulo)

Autor de textos matemáticos de sucesso em seu tempo, o francês Étienne Bézout (1730 -1783) sistematizou em 1764 o processo de estabelecimento dos sinais dos termos de um determinante. E coube a outro francês, Alexandre Vandermonde (1735 -1796), em 1771, empreender a primeira abordagem da teoria dos determinantes independente do estudo dos sistemas lineares, embora também os usasse na resolução destes sistemas.

O termo *determinante* foi introduzido pelo matemático alemão Carl Friedrich Gauss em 1801, que o utilizou para 'determinar' as propriedades de certos tipos de funções. Mas foi em 1812 que surgiu o termo com o sentido atual num trabalho de Cauchy sobre o assunto. Neste artigo, apresentado à Academia de Ciências, Cauchy resumiu e simplificou o que era conhecido até então sobre determinantes.

Além de Cauchy, quem também contribuiu para consolidar a teoria dos determinantes foi o alemão Carl G. J. Jacobi (1804 -1851). Deve-se a ele a forma simples como essa teoria se apresenta hoje.

O conceito de determinante desempenha um importante papel em muitas aplicações da Álgebra Linear à Geometria e à Análise. Hoje em dia, embora não sejam um instrumento prático para resolução de sistemas via regra de Cramer, os determinantes são utilizados, para caracterizar certas operações algébricas, ou mesmo para sintetizar certas expressões matemáticas complicadas.

1 – DEFINIÇÕES:

1.1 - Matriz

Seja $A=\left(a_{ij}\right)$ **uma matriz quadrada de ordem** n **com elementos em** $\mathbb{C}$**, então:**

$\mathbb{C}^{nxn}$ =**{matrizes complexas** nxn**}.**

Exemplos:

$$\mathbb{C}^{1x1}=\{x|x\in\mathbb{C}\}$$

$$\mathbb{C}^{2x2}=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a,b,c,d\in\mathbb{C}\right\}$$

$\vdots$

$$\mathbb{C}^{nxn}=\left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \middle| a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n}\in\mathbb{C}\right\}$$

1.2 – Determinante

Seja $A\in\mathbb{C}^{nxn}$**, uma matriz complexa de ordem** n**, tal que:**

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Então:

a) Se $A\in\mathbb{C}^{1x1}\to A=(a)\to\det A=a$.

b) Se $A\in\mathbb{C}^{nxn}$, $n>1$

$$\to\det A=(-1)^{1+1}.a_{11}.\det A^{(1,1)}+(-1)^{1+2}.a_{12}.\det A^{(1,2)}+\cdots+(-1)^{1+n}.a_{1n}.\det A^{(1,n)}.$$

$$A^{(i,j)} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Exemplos:

i) $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}.\det(a_{22}) - a_{12}.\det(a_{21}) = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$.

ii) $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}.\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12}.\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13}.\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} =$

$= a_{11}.(a_{22}.a_{33} - a_{23}.a_{32}) - a_{12}.(a_{21}.a_{33} - a_{23}.a_{31}) + a_{13}.(a_{21}.a_{32} - a_{22}.a_{31}) =$

$= a_{11}.a_{22}.a_{33} - a_{11}.a_{23}.a_{32} - a_{12}.a_{21}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} - a_{13}.a_{22}.a_{31}$.

1.3 – Matriz dos Cofatores

B é a submatriz de A, que se obtém retirando-se a linha i e a linha j de A (matriz dos cofatores).

$B = cof(A)$ **é uma matriz, tal que:**

$B_{ij} = (-1)^{i+j}.\det A^{(i,j)}$

Exemplo:

Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Então $cof(A) = B_{ij} = (-1)^{i+j}.\det A^{(i,j)}$

$B_{11} = (-1)^{1+1}.\det\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = 1.17 = 17$

$$B_{12}=(-1)^{1+2}.\det\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}=-1.4=-4$$

$$B_{13}=(-1)^{1+3}.\det\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & -1\end{pmatrix}=1.(-7)=-7$$

$$B_{21}=(-1)^{2+1}.\det\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}=-1.9=-9$$

$$B_{22}=(-1)^{2+2}.\det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}=1.3=3$$

$$B_{23}=(-1)^{2+3}.\det\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}=-1.(-4)=4$$

$$B_{31}=(-1)^{3+1}.\det\begin{pmatrix}3 & 0\\ 5 & 2\end{pmatrix}=1.6=6$$

$$B_{32}=(-1)^{3+2}.\det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 2\end{pmatrix}=-1.2=-2$$

$$B_{33}=(-1)^{3+3}.\det\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}=1.(-1)=-1$$

$$\therefore \quad B=\begin{pmatrix}17 & -4 & -7\\ -9 & 3 & 4\\ 6 & -2 & -1\end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B^T=\begin{pmatrix}17 & -9 & 6\\ -4 & 3 & -2\\ -7 & 4 & -1\end{pmatrix}.$$

Note que:

$$A.B^T=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 2 & 5 & 2\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}17 & -9 & 6\\ -4 & 3 & -2\\ -4 & 4 & -1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1.17+3.(-4)+0.(-7) & 1.(-9)+3.3+0.4 & 1.6+3.(-2)+0.(-1)\\ 2.17+5.(-4)+2.(-7) & 2.(-9)+5.3+2.4 & 2.6+5.(-2)+2.(-1)\\ 1.17+(-1).(-4)+3.(-7) & 1.(-9)+(-1).3+3.4 & 1.6+(-1).(-2)+3.(-1)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}=5.\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Também:

$$\det A=1.\det\begin{pmatrix}5 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}-3.\det\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}+0.\det\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & -1\end{pmatrix}=$$

$= 1.17 - 3.4 + 0.(-7) = 17 - 12 + 0 = 5$

$\therefore \quad \det A = 5$.

Assim concluímos que o produto de uma matriz A pela transposta da matriz dos cofatores de A $(cof\ A)$ é igual ao produto da determinante de A pela matriz identidade de A, ou seja,

$$A.(cof\ A)^T = \det A.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{pmatrix}.$$

Obs: Este teorema está demonstrado no livro de Hoffman (pp. 152-154).

2 – PROPRIEDADES

2.1 Propriedade 1

$B = kA, k \in \mathbb{C} \to \det B = k^n.\det A$

Demonstração:

Por indução na ordem da matriz.

Provemos que a propriedade vale para $n = 1$

Sejam $A = (a_{11})$ e $B = kA = (ka_{11})$

$\to \det B = ka_{11} = k.\det A = k^1.\det A$

Suponha válido para $n \geq 1$

Seja $m = n + 1$

$$B = \begin{pmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1,n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n+1,1} & \cdots & ka_{n+1,n+1} \end{pmatrix}$$

$\to \det B = ka_{11}.\det B^{(1,1)} - ka_{12}.\det B^{(12)} + \cdots + (-1)^{n+1+1}.(ka_{1,n+1}).\det B^{(1,n+1)}$

$(\forall j), B^{(i,j)} = kA^{(i,j)}$

$\to \det B^{(i,j)} = k^n.\det A^{(i,j)}$

Logo,

$\det B = ka_{11}.k^n.\det A^{(1,1)} - ka_{12}.k^n.\det A^{(1,2)} + \cdots + (-1)^{n+2}.(ka_{1,n+1}).k^n.\det A^{(1,n+1)} =$

$= k^{n+1}.a_{11}.\det A^{(1,1)} - k^{n+1}.a_{12}.\det A^{(1,2)} + \cdots + (-1)^{n+2}.k^{n+1}.(a_{1,n+1}).\det A^{(1,n+1)} =$

$= k^{n+1}.(a_{11}.\det A^{(1,1)} - a_{12}.\det A^{(1,2)} + \cdots + (-1)^{n+2}.(a_{1,n+1}).\det A^{(1,n+1)}) =$

$= k^{n+1}.\det A$. •

Exemplo:

Se $k = 3$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ e $kA = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 12 & 15 \end{pmatrix}$, temos:

$\det(kA) = 54 = 3^2.6 = k^n.\det A$

2.2 - Propriedade 2

Seja A uma matriz de ordem $n \geq 2$. Se trocarmos de posição duas linhas paralelas entre sí, obteremos uma nova matriz B e $\det B = -\det A$.

Demonstração:

Por indução na ordem da matriz.

i) Provemos que a propriedade vale para $n = 2$.

Seja $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \rightarrow \det A = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

Trocando de posição as linhas, obtemos:

$B = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \rightarrow \det B = a_{21}.a_{12} - a_{22}.a_{11} = -\det A$.

ii) Vamos supor que a hipótese seja verdadeira para todas as matrizes $m = n-1 \geq 2$.

Seja A uma matriz tal que,

$(\forall i \neq k)$, $(\forall i \neq k+1)$ e $1 \leq k \leq n-1$, então:

$B(i,:) = A(i,:)$, $B(k,:) = A(k+1,:)$ e $B(k+1,:) = A(k,:)$.

Desenvolvendo $\det A$ e $\det B$ pela linha i, teremos:

$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.A^{(i,j)}$ e $\det B = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}.B^{(i,j)}$

Como cada cofator $B^{(i,j)}$ é obtido de $A^{(i,j)}$ trocando de posição duas linhas e, por hipótese de indução, $B_{ij} = -A_{ij}$, $\forall j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, segue que $B^{(i,j)} = -A^{(i,j)}$, $\forall j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ e, portanto, $\det B = -\det A$. •

Exemplo:

Sejam

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \det A = 1.\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - 3.\det\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + 0.\det\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 1.(-4) - 3.11 + 0.9 = -37$$

$$\rightarrow \det B = -1.\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - 2.\det\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2.\det\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = -1.(-9) - 2.(-3) + 2.11 = 37$$

$\therefore\ \det B = 37 = -\det A.$

2.3 - Propriedade 3

Se uma A matriz de ordem $n \geq 2$ tem duas linhas formadas por elementos respectivamente iguais, então $\det A = 0$.

Demonstração:

Suponha que $A(i,:) = A(j,:)$

Seja B a matriz formada pelas linhas de A, permutando-se as linhas i e j.

Logo, $B = A \rightarrow \det B = \det A$

Mas pela propriedade anterior,

$\det B = -\det A$, ou seja, $\det A = -\det A \rightarrow \det A = 0$. •

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \det A = 3.\det\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - 1.\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + 4.\det\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 3.17 - 1.(-1) + 4.(-13) = 51 + 1 - 52 = 0.$$

2.4 - Propriedade 4

Se as linhas de uma matriz A são linearmente dependentes, isto é, se A tem uma linha que é combinação linear das outras, então $\det A = 0$.

Demonstração:

Suponha que l_1 é combinação linear, então:

$l_1 = k_2.l_2 + k_3.l_3 + \cdots + k_n.l_n$

$(a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}) = k_2.(a_{21} \quad a_{22} \quad \cdots \quad a_{2n}) + k_3.(a_{31} \quad a_{32} \quad \cdots \quad a_{3n}) + \cdots + k_n.(a_{n1} \quad a_{n2} \quad \cdots \quad a_{nn}).$

$\rightarrow \det A = a_{11}.\det A^{(1,1)} - a_{12}.\det A^{(1,2)} + \cdots + (-1)^{1+n}.a_{1n}.\det A^{(1,n)} =$

$= (k_2.a_{21} + \cdots + k_n a_{n1}).\det A^{(1,1)} - (k_2.a_{22} + \cdots + k_n a_{n2}).\det A^{(1,2)} + \cdots + (-1)^{1+n}.(k_2.a_{2n} + \cdots + k_2 a_{nn}).\det A^{(1,n)} =$

$= k_2.(a_{21}.\det A^{(1,1)} - a_{22}.\det A^{(1,2)} + \cdots + (-1)^{1+n}.a_{2n}.\det A^{(1,n)}) + \cdots + k_n.(a_{n1}.\det A^{(1,1)} - a_{n2}.\det A^{(1,2)} + \cdots + (-1)^{1+n}.a_{nn}.\det A^{(1,n)}) =$

$$= k_2.\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \cdots + k_n.\det\begin{pmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$= k_2.0 + \cdots + k_n.0 = 0.$ •

Exemplo:

Seja $A = \begin{pmatrix} 11 & 16 & 21 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, em que $l_1 = 3.l_2 + 2.l_3$ (linha 1 é combinação linear das linhas 2 e 3).

$$\rightarrow \det A = 11.\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} - 16.\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} + 21.\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} =$$

$= 11.(-3) - 16.(-6) + 21.(-3) = -33 + 96 - 63 = 0.$

2.5 - Propriedade 5

Seja $A \in \mathbb{C}^{nxn}$ **,** $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$

Seja B **a matriz tal que** $(\forall i \neq k)$**,**

$B(i,:) = A(i,:)$ e $B(k,:) = x.A(k,:)$, $x \in \mathbb{R}$;

Seja C **a matriz tal que** $(\forall j \neq k)$**,**

$C(:,j) = A(:,j)$ e $C(:,k) = y.A(:,k)$, $y \in \mathbb{R}$;

Então:

i) $\det B = x.\det A$

ii) $\det C = y.\det A$

Demonstração (i):

Para $k=1$, teremos:

$$B=\begin{pmatrix} x.a_{11} & x.a_{12} & \cdots & x.a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det B = x.a_{11}.\det A^{(1,1)} - x.a_{12}.\det A^{(1,2)} + \cdots + (-1)^{1+n}.x.a_{1n}.\det A^{(1,n)} =$$

$$= x.(a_{11}.\det A^{(1,1)} - a_{12}.\det A^{(1,2)} + \cdots + (-1)^{1+n}.a_{1n}.\det A^{(1,n)}) = x.\det A$$

Para $k \geq 2$ (por indução na ordem da matriz):

Se $n=2$, então:

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ x.a_{21} & x.a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det B = a_{11}.x.a_{22} - a_{12}.x.a_{21} = x.(a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}) = x.\det A$$

Vamos supor que a hipótese de indução seja verdadeira para todas as matrizes $m=n-1 \geq 2$.

Seja A uma matriz tal que $(\forall i \neq k)$

$B(i,:) = A(i,:)$ e $B(k,:) = x.A(k,:)$, $x \in \mathbb{R}$;

Assim,

$$\det B = a_{11}.\det B^{(1,1)} - a_{12}.\det B^{(1,2)} + \cdots + (-1)^{1+n}.a_{1n}.\det B^{(1,n)} = \ (*)$$

Seja $1 \leq j \leq n$

Sejam $B_j = B^{(1,j)}$ e $A_j = A^{(1,j)}$

Então $(\forall i \neq k-1)$

$B_j(i,:) = A_j(i,:)$ e $B_j(k-1,:) = x.A_j(k-1,:)$

$(\forall j)$ B_j é de ordem $n-1$ e, pela hipótese de indução

$B^{(1,j)} = x.\det A^{(1,j)}$, substituindo em (*):

$$\det B = a_{11}.(x.\det A^{(1,1)}) - a_{12}.(x.\det A^{(1,2)}) + \cdots + (-1)^{1+n}.a_{1n}.(x.\det A^{(1,n)}) =$$

$$= x.(a_{11}.\det A^{(1,1)} - a_{12}.\det A^{(1,2)} + \cdots + (-1)^{1+n}.a_{1n}.\det A^{(1,n)} = x.\det A. \bullet$$

A demonstração (ii) é análoga à (i).

Exemplo:

Seja $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 3 & 2\\ 3 & 3 & 2\end{pmatrix}$ e $x=2$

$\rightarrow B=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 4 & 3 & 2\\ 3 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $B(1,:)=2.A(1,:)$

Então:

$\det B = x.\det A$

$$\rightarrow 2.\det\begin{pmatrix}3 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}-4.\det\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}+6.\det\begin{pmatrix}4 & 3\\ 3 & 3\end{pmatrix}=2.\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 3 & 2\\ 3 & 3 & 2\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow 2.0-4.2+6.3=2.\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 3 & 2\\ 3 & 3 & 2\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow 10=2.\left[1.\det\begin{pmatrix}3 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}-2.\det\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}+3.\det\begin{pmatrix}4 & 3\\ 3 & 3\end{pmatrix}\right]$$

$\rightarrow 10=2.(1.0-2.2+3.3)=2.5=10$.

2.6 - Corolário 1

Seja B uma matriz cuja k-ésima linha é nula. Então $\det B=0$.

Demonstração:

Seja A uma matriz tal que $(\forall i\neq k)$

$A(i,:)=B(i,:)$

Logo,

$B(k,:)=0.A(k,:)$

Pela propriedade anterior,

$\det B=0.\det A=0$

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\to \det B = a_{11}.\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} - a_{12}.\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \cdots + (-1)^{1+n}.a_{1n}.\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{pmatrix} =$$

$= a_{11}.0 - a_{12}.0 + \cdots + (-1)^{1+n}.a_{1n}.0 = 0$. •

Exemplo:

Seja $B=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\to \det B = 1.\det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 4.\det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} + 5.\det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = 1.0 - 4.0 + 5.0 = 0$$

2.7 - Propriedade 6

Seja $A \in \mathbb{C}^{nxn}$ **e seja** $1 \le k \le n$

Seja $B \in \mathbb{C}^{nxn}$ **uma matriz tal que** $(\forall i \neq k)$

$B(i,:) = A(i,:)$ **e** $B(k,:) = A(k,:) + t.(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)$

Então:

$$\det B = \det A + t.\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Demonstração:

Para $k=1$, teremos:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11}+t.x_1 & a_{12}+t.x_2 & \cdots & a_{1n}+t.x_n \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\to \det B = (a_{11}+t.x_1).\det B^{(1,1)} - (a_{12}+t.x_2).\det B^{(1,2)} + \cdots + (-1)^{1+n}.(a_{1n}+t.x_n).\det B^{(1,n)}$$

$(\forall j)\ B^{(1,j)} = A^{(1,j)}$, logo

$$\det B = (a_{11}.\det A^{(1,1)} + a_{12}.\det A^{(1,2)} + \cdots + (-1)^{1+n}.a_{1n}.\det A^{(1,n)}) + t.(x_1.\det A^{(1,1)} + x_2.\det A^{(1,2)} + \cdots + (-1)^{1+n}.x_n.\det A^{(1,n)}) =$$

$$= \det A + t.\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Se $k \geq 2$, basta trocar as linhas de ordem de forma que $k = 1$ **(propriedade 2).**

2.8 - Corolário 2

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{k1}.\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} a_{k2}.\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \cdots + a_{kn}.\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemplo:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} + 9.\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 8.\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 9.\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 7.\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 8.\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 9.\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.9 - Proposição 1

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Demonstração:

i) $\det 1 = 1$.

ii) Se I_n é uma matriz identidade nxn, com $n > 1$

Então $\det I_n$, por definição, é igual a

$1.\det I^{(1,1)} - 0.\det I^{(1,2)} + \cdots + (-1)^{1+n}.0.\det I^{(1,n)} =$

$= 1.\det I^{(1,1)} = 1.1 = 1.$

Portanto, o determinante definido a partir da expansão de Laplace é uma função multilinear (em relação às linhas da matriz), alternada e tal que o seu valor na matriz identidade é 1. Como só existe uma única função multilinear alternada que aplicada em $\big((1\ \ 0\ \ 0\ \ \cdots\ \ 0),(0\ \ 1\ \ 0\ \ \cdots\ \ 0),\cdots,(0\ \ 0\ \ 0\ \ \cdots\ \ 1)\big)$ é igual à 1, concluímos que o procedimento indutivo de Laplace define rigorosamente a função determinante. Podemos obter, então, a fórmula de Leibniz para o determinante. Essa fórmula expressa o determinante de uma matriz quadrada como um somatório de n! parcelas, cada uma igual a um produto de n elementos da matriz, que não podem estar em uma mesma linha ou coluna. Essa exigência se traduz em uma permutação de n elementos. O sinal da parcela é dado pela paridade dessa permutação.

3 – OUTRAS PROPRIEDADES

3.1 – Fórmula de Leibniz

$$\det A = \sum_{\sigma \in N_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{i,\sigma i} \; ; 1 \le i \le n \text{ e } 1 \le \sigma \le n.$$

OBSERVAÇÕES:

i) $\prod_{i=1}^{n} A_{i,\sigma i} = a_{1\sigma(1)}.a_{2\sigma(2)}.\cdots.a_{n\sigma(n)}$, em que σ é uma permutação do conjunto N_n.

Nesse produto aparece apenas um elemento de cada linha de A (pois os primeiros índices não se repetem) e apenas um elemento de cada coluna de A (pois os segundos índices também não se repetem).

ii) sgn: é a função sinal de permutações no grupo de permutações que retorna 1 para permutações pares e -1 para permutações ímpares (sugerimos ao leitor que faça uma leitura de teoria de permutações – Callioli, pg. 197).

iii) O número de permutações em um conjunto $N_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ é $n! = n.(n-1).(n-2).\cdots.3.2.1$. Teremos portanto $n!$ parcelas na somatória

$$\sum_{\sigma} sgn(\sigma).a_{1\sigma(1)}.a_{2\sigma(2)}.\cdots.a_{n\sigma(n)}.$$

iv) A demonstração da fórmula de Leibniz pode ser vista, por exemplo, em Hoffman (pg.149-152).

Exemplo:

Seja $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

As permutações do conjunto $\{1, 2, 3\}$ e respectivos sinais são:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} (+1) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} (-1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} (+1) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} (-1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \ (+1) \qquad\qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \ (-1)$$

Logo,

$$\det A = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} - a_{11}.a_{23}.a_{32} - a_{13}.a_{22}.a_{31} - a_{12}.a_{21}.a_{33}.$$

3.2 - Teorema 1

Sejam A e B matrizes de ordem n. Então $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Demonstração:

Sejam $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ e $C = AB = (c_{ij})$. Logo

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad (i, j = 1, \cdots, n).\ c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad (i, j = 1, \cdots, n).$$

Então

$$\det(C) = \det\begin{pmatrix} \sum a_{1k_1} b_{k_1 1} & \sum a_{1k_2} b_{k_2 2} & \cdots & \sum a_{1k_n} b_{k_n n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \sum a_{nk_1} b_{k_1 1} & \sum a_{nk_2} b_{k_2 2} & \cdots & \sum a_{nk_n} b_{k_n n} \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{k_1} \sum_{k_2} \cdots \sum_{k_n} \det\begin{pmatrix} a_{1k_1} b_{k_1 1} & a_{1k_2} b_{k_2 2} & \cdots & a_{1k_n} b_{k_n n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{nk_1} b_{k_1 1} & a_{nk_2} b_{k_2 2} & \cdots & a_{nk_n} b_{k_n n} \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{(k_1, \cdots, k_n)} b_{k_1 1} b_{k_2 2} \cdots b_{k_n n} \det\begin{pmatrix} a_{1k_1} & a_{1k_2} & \cdots & a_{1k_n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{nk_1} & a_{nk_2} & \cdots & a_{nk_n} \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{(k_1, k_2, \cdots, k_n)} b_{k_1 1} b_{k_2 2} \cdots b_{k_n n} \det\begin{pmatrix} a_{1k1} & \cdots & a_{1k_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nk_1} & \cdots & a_{nk_n} \end{pmatrix}, \text{ onde } k_i \neq k_j =$$

$$= \sum_{\sigma} b_{k_1 1} b_{k_2 2} \cdots b_{k_n n} \operatorname{sgn}(\sigma) \det A = \det A \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) b_{k_1 1} b_{k_2 2} \cdots b_{k_n n} =$$

$$= \det A \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) b_{k_1 1}. \cdots .b_{k_n n} = \det(A).\det(B). \bullet$$

3.3 – Determinante da Matriz Transposta

Se M é a matriz de ordem n e M^T sua transposta, então $\det M^T = \det M$.

Demonstração:

Vamos usar o princípio da indução finita.

1ª parte

Para $n = 1$, a propriedade é imediata.

2ª parte

Suponhamos a propriedade válida para matrizes de ordem $(n-1)$ e provemos que ela também será válida para determinantes de ordem n. Temos:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad M^T = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

em que $b_{ij} = a_{ij}$ $\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ e $\forall j \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

$\det M = a_{11}.A_{11} + a_{21}.A_{21} + a_{31}.A_{31} + \cdots + a_{n1}.A_{n1}$ (pela 1ª coluna)

$\det M^T = b_{11}.A'_{11} + b_{12}.A'_{12} + b_{13}.A'_{13} + \cdots + b_{1n}.A'_{1n}$ (pela 1ª linha)

Mas, por definição de matriz transposta, temos:

$a_{11} = b_{11}$, $a_{21} = b_{12}$, $a_{31} = b_{13}$, $\cdots$, $a_{n1} = b_{1n}$

e pela hipótese da indução temos: $A_{11} = A'_{11}$, $A_{21} = A'_{12}$, $A_{31} = A'_{13}$, $\cdots$, $A_{n1} = A'_{1n}$.

Logo $\det M^T = \det M$.

Portanto, a propriedade é válida para matrizes de ordem n, $\forall n \geq 1$. •

Exemplo:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 9.$$

Obs: A importância dessa propriedade reside no fato de que toda propriedade válida para as linhas de uma matriz também é válida para as colunas e vice-versa.

4 - DETERMINANTES DE MATRIZES EM BLOCOS

4.1 – Determinante de Matrizes em Blocos 1

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A).\det(D - C.A^{-1}.B) = \det(D).\det(A - B.D^{-1}.C)$$

Demonstração:

i) Seja $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_{nxn}$, tal que $A \in \mathbb{C}^{nxn}$ é inversível.

Logo,

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -C.A^{-1} & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - C.A^{-1}.B \end{pmatrix}$$

Então:

$$\det\begin{pmatrix} I & 0 \\ -C.A^{-1} & I \end{pmatrix}.\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - C.A^{-1}.B \end{pmatrix}$$

Isto é, $1.\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det A.\det(D - C.A^{-1}.B)$.

ii) Seja $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_{nxn}$, tal que $D \in \mathbb{C}^{nxn}$ é inversível.

Logo,

$$\begin{pmatrix} I & -BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

Então:

$$\det\begin{pmatrix} I & -BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}.\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

Isto é, $1.\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det D.\det(A - B.D^{-1}.C)$.

$$\therefore \quad \det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A).\det(D - C.A^{-1}.B) = \det(D).\det(A - B.D^{-1}.C). \quad \bullet$$

Obs: Desse resultado segue que o determinante de uma matriz de bloco triangular é o produto dos determinantes dos blocos diagonais.

Exemplo:

$$\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 3 & 4 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 3 & 5\\ 0 & 0 & 6 & 0\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}.\det\begin{pmatrix}3 & 5\\ 6 & 0\end{pmatrix} = (-2).(-30) = 60.$$

4.2 – Determinante de Matrizes em Blocos 2

$$\det\left(I + A^T.B\right) = \det\left(I + A.B^T\right) = \det\left(I + B^T.A\right) = \det\left(I + B.A^T\right)$$

Demonstração:

i) $\det\left(I + A^T.B\right) = \det\left(\left(I + A^T.B\right)^T\right) = \det\left(I + B^T.A\right)$, pois $\det M^T = \det M$ **(2.11).**

ii) $\det\left(I + A^T.B\right) = \det I.\det\left(I + A^T.I.B\right) = \det\begin{pmatrix} I & -B\\ A^T & I\end{pmatrix} =$

$= \det I.\det\left(I + B.I.A^T\right) = \det\left(I + B.A^T\right)$ **(3.1).**

iii) Assim, $\det\left(I + A^T.B\right) = \det\left(I + B.A^T\right) = \det\left(\left(I + B.A^T\right)^T\right) = \det\left(I + A.B^T\right)$.

$\therefore \quad \det\left(I + A^T.B\right) = \det\left(I + A.B^T\right) = \det\left(I + B^T.A\right) = \det\left(I + B.A^T\right)$ •

5 – APLICAÇÃO DE DETERMINANTES:

Antes de colocarmos algumas aplicações de determinantes, daremos algumas notações com definições e propriedades sobre vetores.

5.1 – Definição de Vetores

Sejam (x_a, y_a, z_a) e (x_b, y_b, z_b) as coordenadas cartesianas de dois pontos do espaço, A e B, respectivamente. O vetor $\overrightarrow{AB}$ é, por definição, a classe de equivalência de todos os segmentos orientados de mesma direção, de mesmo sentido e mesmo tamanho que o segmento orientado que vai de A até B. Definimos as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$ como sendo $(x_b - x_a, y_b - y_a, z_b - z_a)$.

5.2 – Propriedades de Vetores

i) <u>Soma de Vetores</u>: Se $V = (v_1, v_2, v_3)$, $W = (w_1, w_2, w_3)$, então definimos a soma de $V + W$, por: $V + W = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3)$.

ii) Diferença de Vetores: $V - W = (v_1 - w_1, v_2 - w_2, v_3 - w_3)$.

iii) Módulo de um Vetor: $|V| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

5.3 – Definição de Produto Vetorial

Dado os vetores $V = (v_1, v_2, v_3)$ e $W = (w_1, w_2, w_3)$, definimos o produto vetorial entre V e W por VxW, como o vetor obtido pelo objeto matemático que não é um determinante, mas que pode ser calculado como se fosse um determinante:

$$VxW = \det\begin{pmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}.$$

5.4 – Propriedades de Produto Vetorial

i) $VxW = -WxV$

ii) $Ux(V+W) = UxV + UxW$

5.5 – Definição de Produto Misto

Dado os vetores $U = (u_1, u_2, u_3)$, $V = (v_1, v_2, v_3)$ e $W = (w_1, w_2, w_3)$, definimos o produto misto entre U, V e W, que é denotado por $[U,V,W]$, do seguinte modo:

$[U,V,W] = U.(VxW)$.

Observe que o produto misto é um número real e que pode ser obtido a partir do seguinte determinante:

$$[U,V,W] = U.(VxW) = \det\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}.$$

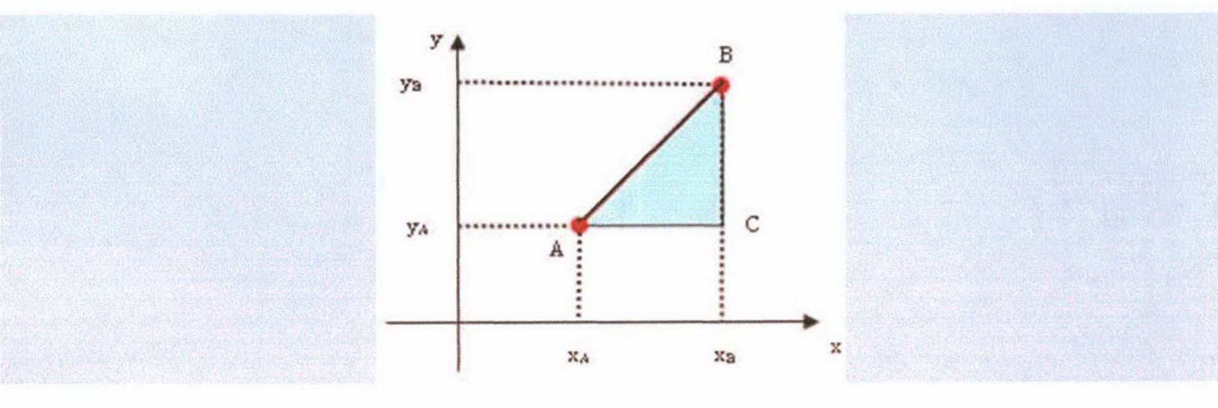
5.6 – Propriedades de Produto Misto

i) $[U,V,W] = -[V,U,W]$.

ii) $[U,V,W] = [V,W,U] = [W,U,V]$.

5.7 – Área de Região Triangular

Uma aplicação na geometria analítica relacionada com determinantes está no cálculo da área de um triângulo ABC conhecidas as coordenadas de seus vértices.



No caso da geometria plana, sejam $(O,\vec{i},\vec{j})$ um sistema ortogonal de coordenadas e $A=(x_A,y_A)$, $B=(x_B,y_B)$ e $C=(x_c,y_c)$ três pontos não colineares.

A área do triângulo ABC será dada por:

$$S=\frac{\left|\overrightarrow{AC}\right|.h}{2}$$

Sendo $\overrightarrow{AC}=(x_C-x_A,y_C-y_A)$ e $h=\left|\overrightarrow{BC}\right|$ distância do ponto B ao ponto C, vem:

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}$$

e

$$h=\left|\overrightarrow{BC}\right|=\frac{\left|\det\begin{pmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}}$$

$\therefore\ S=\frac{1}{2}.\left|\det\begin{pmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{pmatrix}\right|$, que é a expressão analítica da área do triângulo no plano.

Exemplo:

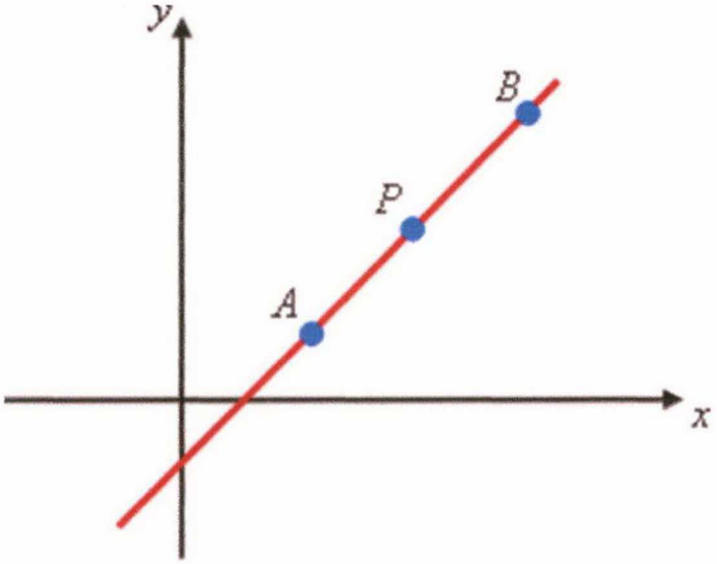
Determine a área do triângulo ABC de vértices: $A(1,4)$, $B(2,3)$ e $C(-1,-2)$.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}=1.\det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}-4.\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}+1.\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}=1.5-4.3+1.(-1)=-8.$$

$\rightarrow A=\frac{1}{2}.|-8|=4.$

5.8 – Equação Geral da Reta

Através do determinante nulo formada pelas coordenadas de dois pontos no plano cartesiano podemos encontrar a equação geral da reta.



Considere uma reta originada pelos pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$. Podemos destacar um ponto $P(x, y)$ nessa mesma reta e assim obtermos as seguintes equações:

$$x = x_1 + (x_2 - x_1) \mapsto x - x_1 = x_2 - x_1$$

$$y = y_1 + (y_2 - y_1) \mapsto y - y_1 = y_2 - y_1$$

Assim:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \mapsto (x - x_1).(y_2 - y_1) = (y - y_1).(x_2 - x_1)$$

$$\mapsto [(x - x_1).(y_2 - y_1)] - [(y - y_1).(x_2 - x_1)] = 0$$

$$\mapsto \det\begin{pmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{pmatrix} = 0$$

Esta última equação pode ser transformada na seguinte:

$$\det\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x - x_1 & y - y_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Ao calcularmos o determinante nulo dessa matriz de ordem 3 formada pelas coordenadas dos três pontos acrescentada por uma coluna formada por numero 1 encontraremos a equação **ax + by + c = 0,** que é denominada equação geral da reta, onde **a** e **b** são números não nulos e **x** e **y** são pontos de coordenadas da retas.

$$\det\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix}=0 \rightarrow x.\det\begin{pmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{pmatrix}-y.\det\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{pmatrix}+1.\det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}=0$$

$$\rightarrow x.(y_1-y_2)-y.(x_1-x_2)+1.(x_1.y_2-y_1.x_2)=0$$

$$\rightarrow \underbrace{(y_1-y_2)}_{a}.x-\underbrace{(x_1-x_2)}_{b}.y+\underbrace{(x_1.y_2-y_1.x_2)}_{c}=0.$$

Exemplo:

Obtenha uma equação da reta que passa pelos pontos: $A(1,3)$ e $B(-2,8)$.

$$\det\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & 8 & 1 \end{pmatrix}=0$$

$$\rightarrow x.\det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}-y.\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}+1.\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}=0.$$

$$\rightarrow x.(-5)-y.3+1.14=0 \rightarrow -5x-3y+14=0$$

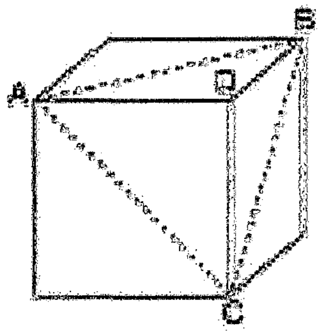
$\therefore$ A equação geral da reta é $-5x-3y+14=0$

5.9 – Volume do Tetraedro

Em 1773, Lagrange, em um trabalho sobre Mecânica, mostrou que o volume de um tetraedro ABCD de vértices $A(x_0,y_0,z_0)$, $B(x_1,y_1,z_1)$, $C(x_2,y_2,z_2)$, e $D(x_3,y_3,z_3)$ pode ser dado por $V=\frac{1}{6}.|D|$, em que $|D|$ é o módulo do determinante $\det\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{pmatrix}$.

Seja $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ um sistema ortogonal de coordenadas.

$A=(x_0,y_0,z_0)$, $B=(x_1,y_1,z_1)$, $C=(x_2,y_2,z_2)$ e $D=(x_3,y_3,z_3)$ quatro pontos do espaço três a três não colineares e os quatro não situados no mesmo plano, conforme figura abaixo.



O volume do tetraedro ABCD será igual à sexta parte do volume do paralelepípedo que é dado por:

$$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]$$

Nestas condições o volume do tetraedro ABCD será:

$$V=\frac{1}{6}.\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]$$

Como

$$\overrightarrow{AB}=(x_1-x_0)\vec{i}+(y_1-y_0)\vec{j}+(z_1-z_0)\vec{k}$$
$$\overrightarrow{AC}=(x_2-x_0)\vec{i}+(y_2-y_0)\vec{j}+(z_2-z_0)\vec{k}$$
$$\overrightarrow{AD}=(x_3-x_0)\vec{i}+(y_3-y_0)\vec{j}+(z_3-z_0)\vec{k}$$

e

$$V=\frac{1}{6}.\left|\det\begin{pmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \\ x_3-x_0 & y_3-y_0 & z_3-z_0 \end{pmatrix}\right|$$

ou:

$$V=\frac{1}{6}.\left|\det\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{pmatrix}\right|$$

que é a fórmula analítica do volume de um tetraedro no espaço.

Exemplo:

Determine o volume do tetraedro ABCD de vértices $A(1,0,0)$, $B(2,3,1)$, $C(-1,-2,3)$ e $D(5,-1,-2)$.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 1.23 - 1.64 = -41$$

$$\rightarrow V = \frac{1}{6}.\left|-41\right| = \frac{41}{6}.$$

REFERÊNCIAS

BOLDRINI, José Luís. **Álgebra Linear.** 3ª ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.

CALLIOLI, Carlos A. **Álgebra Linear e Aplicações.** 6ª ed. São Paulo: Atual Editora, 1990.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática:** volume único. 1ª ed. São Paulo: Editora Ática, 2005.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática.** Traduzido por Hygino H. Domingues. Editorial. UNICAMP, 2004.

HOFFMAN, Kenneth e KUNZE, Ray. **Álgebra Linear.** Traduzido por Adalberto P. Bergamasco. São Paulo: Editora Univ. de S. Paulo e Polígono, 1970.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar – Volume 4:** sequências, matrizes, determinantes, sistemas. 7ª ed. São Paulo: Atual Editora, 2004.

KOLMAN, Bernard; HILL, David R. **Introdução à Álgebra Linear:** com aplicações. Rio de Janeiro, 2006.