UFSC – UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
UAB – UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
PÓLO DE FOZ DO IGUAÇU

AUTOVALORES E AUTOVETORES E APLICAÇÕES

GILDERLÉIA BEZERRA COLARES

FOZ DO IGUAÇU – PR
2011

UFSC – UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
UAB – UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
PÓLO DE FOZ DO IGUAÇU

AUTOVALORES E AUTOVETORES E APLICAÇÕES

GILDERLÉIA BEZERRA COLARES

Monografia submetida à Comissão de avaliação do Curso de Especilização em Matemática-Formação de Professores, em cumprimento parcial para a obtenção do título de Especialista em Matemática.

FOZ DO IGUAÇU – PR
2011

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
Departamento de Matemática
Curso de Especialização em Matemática-Formação de Professor na modalidade a distância

"Autovalores e Autovetores e Aplicações"

Monografia submetida à Comissão de avaliação do Curso de Especialização em Matemática-Formação do professor em cumprimento parcial para a obtenção do título de Especialista em Matemática.

APROVADA PELA COMISSÃO EXAMINADORA em 01/03/2011

Drª. Maria Inez Cardoso Gonçalves (CFM/UFSC – Orientadora)__________

Drª. Silvia Martini de Holanda Janesch (CFM/UFSC - Examinadora) __________

Drª. Melissa Weber Mendonça (CFM-UFSC Examinadora)__________

Dra. Neri Terezinha Both Carvalho
Coordenadora do Curso de Especialização em Matemática-Formação de Professor

Florianópolis, Santa Catarina, março de 2011.

À meus pais, Gentil e Olivia, e em especial à minha orientadora, Professora Doutora Maria Inez Gonçalves, pela paciência e persistência.

AGRADECIMENTOS

Considerando esta monografia como resultado de uma caminhada que não começou numa universidade, agradecer pode não ser tarefa fácil, nem justa. Para não correr o risco da injustiça, agradeço de antemão a todos que de alguma forma passaram pela minha vida e contribuíram para a construção de quem sou hoje.

E agradeço, particularmente, a algumas pessoas pela contribuição direta na construção deste trabalho:

- A Deus, o que seria de mim sem a fé que eu tenho nele.
- À professora Maria Inez Gonçalves pela paciência na orientação e incentivo que tornaram possível a conclusão desta monografia.
- Aos meus pais, irmãos, meu esposo Eduardo e a toda minha família que, com muito carinho e apoio, não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa de minha vida.
- Ao tutor do pólo de Foz do Iguaçu, Gilberto Nunes, pelo incentivo e pelo puxões de orelha nos momentos necessários.
- Ao coordenador do pólo de Foz do Iguaçu, Edilson C. Balzzan, pelo apoio quando sempre que requisitado.
- À todos os professores que passaram pela minha vida, e formaram o que sou hoje, em especial aos professores de matemática que me fizeram tomar um gosto especial por esta disciplina.
- Aos colegas de curso, pelo incentivo, união e dedicação nos momentos de angústia e desânimo.

Enfim, agradeço a todos que tiveram participação direta ou indireta na minha jornada.

De que me irei ocupar no céu, durante toda a eternidade, se não me derem uma infinidade de problemas de matemática para resolver?

(Augustin Louis Cauchy)

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Autovalores e autovetores são muito utilizados em álgebra linear e computação científica, pois estão relacionados com propriedades intrínsecas da matriz. Por exemplo, se uma matriz possui um autovalor nulo, implica que ela não é inversível. Assim, autovalores nos fornecem informações sobre a inversibilidade da matriz.

Informalmente falando, dada uma matriz quadrada A, um autovetor de A é um vetor que não muda a sua direção, quando multiplicado por A, e seu autovalor λ é o tamanho da sua expansão ou contração neste processo. As palavras autovalor e autovetor tem origem alemã, e, em alguns livros são chamados de valores próprios ou valores característicos, e os autovetores de vetores próprios ou vetores característicos.

O objetivo deste trabalho é fazer um estudo da utilização de autovalores e autovetores na resolução de problemas, bem como suas principais propriedades e algumas de suas aplicações, complementando o que foi estudado durante o curso de especialização.

O trabalho está organizado da seguinte maneira: no primeiro capítulo, há uma breve revisão de alguns conceitos básicos de Álgebra Linear, que serão utilizados no decorrer do trabalho. No capítulo 2, apresentamos os conceitos de autovalores e autovetores, bem como algumas de suas propriedades e resultados clássicos. Neste capítulo é feita ainda uma breve discussão de um método numérico usado para calcular autovalores, a saber o método das potências. Finalizando este trabalho, apresentamos no capítulo 3 algumas aplicações de autovalores de matrizes: o cálculo do n-ésimo termo da sequência de Fibonacci, crescimento populacional e um breve esclarecimento à respeito da formação das matrizes utilizadas pelo site Google na busca de alguns resultados.

CAPÍTULO I – CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Este capítulo inicial destina-se a fazer uma breve revisão de alguns conceitos de álgebra linear usados no decorrer desta monografia. Inicialmente, será apresentada uma descrição das principais notações que serão utilizadas. Em seguida, serão expostas algumas definições como: espaço vetorial, combinação linear, dependência e independência linear, subespaço gerado, base e dimensão.

1.1. NOTAÇÃO

Inicialmente, é descrita a notação dos conjuntos de numéricos, vetores e matrizes. O conjunto dos números reais é denotado por $\mathbb{R}$, e o conjunto dos números complexos por $\mathbb{C}$.

Para o espaço de todos os vetores coluna, com n componentes reais, é usada a notação $\mathbb{R}^n$, e no caso das n componentes serem complexas, é usado $\mathbb{C}^n$. O conjunto de todas as matrizes $m\,x\,n$, onde todas as componentes são reais, é escrito como $\mathbb{R}^{mxn}$, quando todas as componentes são complexas, é escrito como $\mathbb{C}^{mxn}$.

Em todo o texto, usam-se letras minúsculas do alfabeto romano para simbolizar vetores e maiúsculas para matrizes, além de letras gregas minúsculas para escalares.

O elemento de uma matriz A, que se encontra na linha i e na coluna j, é denotado por a_{ij}.

A matriz nula, o vetor nulo e o escalar zero são denotados por 0. A matriz identidade é escrita como I ou I_n se for necessário especificar a sua ordem.

A transposta da matriz A, é denotada por A^T, sua conjugada transposta por A^H, isto é, $A^H = (\overline{A})^T$. A inversa denotada por A^{-1}, a inversa da transposta por A^{-T}, e a inversa da conjugada transposta por A^{-H}.

O determinante de A será escrito como $det\, A$, e o traço como $tr\, A$.

Seja $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ um conjunto de vetores, o espaço gerado por estes vetores é denotado por $span\{x_1, \ldots, x_n\}$.

1.2. ESPAÇOS VETORIAS

Considere um conjunto V não vazio, de vetores, e, um corpo K cujos elementos são escalares. Neste conjunto são definidas duas operações:

1) Adição, simbolizada por $+$: $V \times V \to V$;
2) Multiplicação por escalar, simbolizada por $*$: $K \times V \to V$.

Em geral, o corpo K é o corpo dos números reais ou dos números complexos.

DEFINIÇÃO 1: *Se o conjunto V munido das operações + e *, satisfizer os 8 axiomas à seguir, ele será um espaço vetorial sobre K;*

<u>Adição:</u>

1) Comutatividade: para cada $u, v \in V$, $u + v = v + u$;

2) Associatividade: para cada $u, v, w \in V$, $(u+v)+w = u+(v+w)$;

3) Elemento neutro aditivo: existe um vetor nulo, designado por 0, tal que para cada $u \in V$, $0 + u = u$;

4) Inverso aditivo: para cada $u \in V$, existe $-u \in V$ tal que $u + (-u) = 0$.

<u>Multiplicação por escalar:</u>

1) Distributividade: para cada um dos $\alpha \in K$ e cada $u, v \in V$, $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$;

2) Distributividade: para cada $\alpha, \beta \in K$ e cada $u \in V$, $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$;

3) *Associatividade: para cada $\alpha, \beta \in K$ e cada $u \in V$, $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$.*

4) Elemento neutro multiplicativo: para cada $u \in V$, *existe um elemento neutro multiplicativo, tal que* $1u = u$.

Exemplo 1:

$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) / x, y \in \mathbb{R}\}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com as operações de soma e multiplicação por escalar definidas a seguir:

$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, para todo (x_1, y_1) e $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$

e

$\lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$

De fato: Sejam $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2)$ e $w = (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Temos que:

Adição:

1) Comutatividade:

$$u + v = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1) = v + u$$

2) Associatividade:

$$\begin{aligned}[u+v]+w &= [(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] + (x_3, y_3) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + (x_3, y_3) = \\ &= ([x_1 + x_2] + x_3, [y_1 + y_2] + y_3) = (x_1 + [x_2 + x_3], y_1 + [y_2 + y_3]) = \\ &= (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3) = (x_1, y_1) + [(x_2, y_2) + (x_3, y_3)] = \\ &= u + (v + w)\end{aligned}$$

3) Elemento neutro aditivo:

$$0 + u = (0, 0) + (x_1, y_1) = (0 + x_1, 0 + y_1) = (x_1, y_1) = u$$

4) Inverso aditivo:

$$u + (-u) = (x_1, y_1) + (-x_1, -y_1) = (x_1 - x_1, y_1 - y_1) = (0, 0) = 0$$

Multiplicação por escalar:

1) Distributividade:

$$\alpha[u+v] = \alpha[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] = \alpha(x_1 + x_2, y_1 + y_2) =$$

$$= (\alpha[x_1+x_2],\alpha[y_1+y_2]) = (\alpha x_1+\alpha x_2,\alpha y_1+\alpha y_2) =$$
$$= (\alpha x_1,\alpha y_1)+(\alpha x_2,\alpha y_2) = \alpha(x_1,y_1)+\alpha(x_2,y_2) = \alpha u+\alpha v$$

2) Distributividade:

$$[\alpha+\beta]u = [\alpha+\beta](x_1,y_1) = ([\alpha+\beta]x_1,[\alpha+\beta]y_1) =$$
$$= (\alpha x_1+\beta x_1,\alpha y_1+\beta y_1) = (\alpha x_1,\alpha y_1)+(\beta x_1,\beta y_1) =$$
$$= \alpha(x_1,y_1)+\beta(x_1,y_1) = \alpha u+\beta u$$

3) Associatividade:

$$[\alpha\beta]u = [\alpha\beta](x_1,y_1) = ([\alpha\beta]x_1,[\alpha\beta]y_1) = (\alpha[\beta x_1],\alpha[\beta y_1]) =$$
$$= \alpha(\beta x_1,\beta y_1) = \alpha[\beta(x_1,y_1)] = \alpha[\beta u]$$

4) Elemento neutro multiplicativo:

$$1u = 1(x_1,y_1) = (x_1,y_1) = u$$

Portanto $\mathbb{R}^2$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Exemplo 2:

O conjunto de todas as matrizes reais de ordem n, com as operações usuais de soma de matrizes e multiplicação de matriz por escalar, é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

1.2.1. Subespaço vetorial

Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K. Um subespaço vetorial de V será um subconjunto W de V, não vazio, que também é um espaço vetorial sobre K, com as mesmas operações de V (adição e multiplicação por escalar).

1.2.2. Combinação linear

Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K. Um vetor $u \in V$ é dito combinação linear dos vetores $v_1, \ldots, v_n \in V$ se existirem escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$ tais que $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = u$. Note que, por definição, nem os λ_i nem os v_i, precisam ser, necessariamente, distintos.

1.2.3. Dependência e independência linear

Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vetores de um espaço vetorial V. Dizemos que $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são linearmente dependentes (ou simplesmente LD), se existirem escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$, nem todos nulos, tais que $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$, caso contrário, dizemos que $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são linearmente independentes (LI). Isto é, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são LI quando a única combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_n$ que resulta no vetor nulo é a trivial, ou seja, $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

1.2.4. Subespaço gerado

Seja S um subconjunto de um espaço vetorial V. O conjunto de todas as combinações lineares finitas, de elementos de S, é um subespaço de V, chamado subespaço gerado por S e denotado por $[S]$. Quando S é um conjunto finito, $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$, denotamos este subespaço gerado por $\{v_1, \ldots, v_n\}$ por $span\{v_1, \ldots, v_n\}$.

1.2.5. Base

Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K, uma base de V é um subconjunto $B \subset V$ para o qual as seguintes condições se verificam:

a) $[B] = V$;

b) B *é LI.*

1.2.6. Dimensão

Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K. Se V admite uma base finita então dizemos que a dimensão de V (notação: $\dim V$) é o número de vetores desta base. Caso contrário a dimensão de V é infinita.

Exemplo 4:

a) $\dim \mathbb{R}^2 = 2$

b) $\dim \mathbb{R}^n = n$

c) $\dim A_{nxn} = n.n = n^2$

CAPÍTULO II – AUTOVALORES E AUTOVETORES DE UMA MATRIZ

Os conceitos de autovalor e autovetor de uma matriz A, de ordem n, são muito estudados por possuírem inúmeras aplicações: na Matemática, na Física, nas Engenharias: Civil e Elétrica, entre outras. Iniciaremos este capítulo apresentando os conceitos de autovalor e autovetor e algumas das suas propriedades básicas. A seguir, demonstraremos algumas propriedades e teoremas importantes, para que possamos analisar as definições e os resultados consideráveis a respeito de similaridade, diagonalização de matrizes e método das potências.

DEFINIÇÃO 2. *Se A é uma matriz de ordem n, real ou complexa, então um vetor não-nulo v em $\mathbb{C}^n$ é chamado um autovetor de A se Av é um múltiplo escalar de v, ou seja, $Av = \lambda v$ para algum escalar λ. Este escalar será chamado de autovalor de A e v é um autovetor associado a λ.*

É importante notar que, mesmo que a matriz seja composta por números reais, seus autovalores e autovetores podem ser complexos.

O vetor v pode ser qualquer, exceto o vetor nulo, pois a partir da equação acima, teríamos: $A.0 = \lambda.0$ e, assim não poderíamos definir nada a respeito da matriz A e nem do valor λ. Portanto, necessitaremos impor a condição: $v \neq 0$.

Do ponto de vista algébrico, um autovetor de uma matriz A é um vetor cuja multiplicação por A pode ser feita de forma muito simples: basta multiplicar este vetor por um escalar.

Em termos de aplicações, o cálculo dos autovetores e autovalores de uma matriz, frequentemente pode nos conduzir a soluções de equações diferenciais que são de interesse físico, como, por exemplo, frequências naturais de vibração de um instrumento musical, ou de uma simples corda esticada.

2.1 CÁLCULO DE AUTOVETORES E AUTOVALORES

A partir da equação $Av = \lambda v$, obtemos: $Av - \lambda v = 0$, colocando o vetor v em evidência, encontraremos $(A - \lambda I)v = 0$, como v não pode ser um vetor nulo, esta equação implica que $A - \lambda I$ é uma matriz singular, o que ocorre se, e somente se $det(A - \lambda I) = 0$.

A equação $det(A - \lambda I) = 0$ é denominada "Equação característica de A", e suas raízes λ são os autovalores de A, sendo que, para cada autovalor λ_i podemos encontrar mais de um autovetor respectivo v_i, se o sistema de equações lineares $(A - \lambda_i I)v_i = 0$ for possível e indeterminado. A expressão $det(A - \lambda I)$ é chamada de polinômio caracteristico.

Para encontrar os autovalores de uma matriz A geralmente são usadas técnicas que consistem em transformá-la numa outra matriz equivalente com os mesmos autovalores, de forma que esta nova matriz permita cálculos mais fáceis. Computacionalmente falando, não é viável encontrar autovalores através do polinômio característico, por ter um alto custo computacional, a menos que seja um caso trivial, pois se o polinômio característico tiver grau $n \geqslant 4$ sua resolução será difícil, por não existirem fórmulas diretas para cálculo de polinômios desta magnitude.

A seguir, apresentamos alguns exemplos de cálculo de autovalores e autovetores usando o polinômio característico.

Exemplo 5

Dada uma matriz A_{3x3}, calcular os autovalores e autovetores correspondentes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

A matriz resultante desta diferença será: $A-\lambda I=\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 4 \\ -1 & -1 & -2-\lambda \end{pmatrix}$,

igualando o determinante desta matriz a zero:

$$(2-\lambda)(3-\lambda)(-2-\lambda)-4-2-[-(3-\lambda)-4(2-\lambda)+2(-2-\lambda)]=0$$

e desenvolvendo esta equação, encontraremos a igualdade $\lambda^3-3\lambda^2-\lambda+3=0$ cujas soluções são $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=1$ e $\lambda_3=3$. Aplicado a igualdade $Av=\lambda v$, para $\lambda_2=1$ obtemos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

após transformarmos esta equação matricial num sistema de equações lineares através do desenvolvimento do produto acima, simplificando-a obtemos:

$$\begin{aligned} +1v_1+1v_2+1v_3=0 \\ +2v_1+2v_2+4v_3=0 \\ -1v_1-1v_2-3v_3=0 \end{aligned}$$

através da qual podemos chegar ao resultado:

$$v_1+v_2=0$$

que equivale a:

$$v_1=-v_2.$$

Portanto o sistema possui infinitas soluções e todas elas são da seguinte forma:

$$v=v_2(1,-1,0)$$

onde v_2 é um escalar qualquer não nulo.

Assim, o autovetor $(1,-1,0)$ está associado ao autovalor $\lambda_2=1$. E, de maneira análoga podemos encontrar os autovetores associados aos autovalores $\lambda_1=-1$ e $\lambda_3=3$.

DEFINIÇÃO 3. *Sejam A uma matriz quadrada de ordem n e λ um autovalor de A. Então, a coleção de todos os autovetores correspondentes a λ, acrescida do vetor nulo, é chamada de autoespaço de λ e é denotada por E_λ.*

Exemplo 6

Dada a matriz:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}$$

sua equação caracteristica será:

$$(\lambda-1)(\lambda-3)-(4.2)=0$$

cujas raízes serão os autovalores $\lambda_1=-1$ e $\lambda_2=5$.

A partir do autovalor 5 obteremos a equação matricial

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=5.\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}$$

que nos levará ao sistema:

$$\begin{aligned}-4v_1+2v_2&=0\\ 4v_1-2v_2&=0\end{aligned}$$

utilizando o método da substituição neste sistema linear, obteremos a solução $\left(\frac{v_2}{2}, v_2\right)$, ou ainda $\frac{v_2}{2}(1,2)$, portanto o auto espaço associado a $\lambda_2=5$ é

$$E_{\lambda_2}=\left\{t\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}/t\in\mathbb{R}\right\}.$$

O número de vezes que um autovalor ocorre como fator do polinômio característico é chamado multiplicidade (algébrica), assim como, a dimensão do auto espaço relacionado a um determinado autovalor também é denominada multiplicidade (geométrica), como veremos na sequência.

2.2. MULTIPLICIDADES

DEFINIÇÃO 4. *Seja A uma matriz de ordem n e λ_k um autovalor de A, então:*

- *Multiplicidade geométrica de λ_k é a dimensão do autoespaço associado a λ_k, ou seja, E_{λ_k}.*

- *Multiplicidade algébrica de λ_k é a multiplicidade de λ_k como raiz do polinômio característico de A.*

Exemplo 7

O polinômio característico da matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & -2 & -1\end{pmatrix}$ é $det(A-\lambda I)=(1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda)+2(1-\lambda)=-\lambda(\lambda^2-2\lambda+1)$, portanto os autovalores de A são $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$ e $\lambda_3=1$, dizemos então que o autovalor 1 tem multiplicidade algébrica 2.

Exemplo 8

Calcular os autovalores e autovetores de $A=\begin{pmatrix}4 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}$.

A equação caracteristica é $(4-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda)-(3-\lambda)=0$, desenvolvendo obtém-se a equação equivalente $-(3-\lambda)^2(\lambda-5)=0$ que possui as raízes: 3 (de multiplicidade 2) e 5. Os autovetores associados ao autovalor 3 são as soluções

do sistema: $\begin{pmatrix}4-3 & 2 & 1\\ 0 & 3-3 & 0\\ 1 & 2 & 4-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$.

Na resolução deste sistema de equações encontra-se $v_1=-2v_2-v_3$, e, isto indica que a solução é da forma $\{(-2v_2-v_3, v_2, v_3)/v_2, v_3\in\mathbb{R}\}$, portanto autovetores serão $(-2,1,0)$ e $(-1,0\,1)$, sendo assim, este autovalor, que tem multiplicidade algébrica 2, possui multiplicidade geométrica também igual a 2.

A seguir o leitor poderá contemplar algumas propriedades relevantes ao nosso estudo, assim como as suas demonstrações.

2.3. PROPRIEDADES

Nas propriedades abaixo consideraremos A uma matriz nxn, com autovalor λ e autovetor correspondente v.

P1. A *é inversível se, e somente se,* 0 *não é um autovalor de* A.

Demonstração:

A é inversível se, e somente se, $det\, A \neq 0$, ou seja, se, e somente se, $det(A - \lambda I) \neq 0$, ou ainda, A não é inversível se, e somente se, 0 não é um autovalor de A.■

P2. *Se* A *é inversível e* λ *é um autovalor de* A *associado ao autovetor* v*, então* $\frac{1}{\lambda}$ *é um autovalor de* A^{-1} *correspondente ao autovetor* v.

Demonstração:

Seja A uma matriz inversível e λ um autovalor de A associado ao autovetor v. Como A é inversível, $\lambda \neq 0$. Assim, multiplicando ambos os lados da equação $Av = \lambda v$, por A^{-1}, obteremos:

$$A^{-1} A v = A^{-1} \lambda v$$

donde vem que:

$$v = \lambda A^{-1} v,$$

dividindo ambos os lados da equação por λ, obteremos:

$$\frac{v}{\lambda} = A^{-1} v$$

reescrevendo esta equação, encontraremos:

$$A^{-1} v = \left(\frac{1}{\lambda}\right) v$$

o que mostra que $\frac{1}{\lambda}$ é um autovalor de A^{-1} associado ao autovetor v. ■

P3. *A soma dos autovalores da matriz* A *é igual ao traço desta matriz.*

P4. *O determinante de uma matriz* A *é o produto dos seus autovalores.*

A demonstração das propriedades P3 e P4 podem ser encontradas em Meyer.

P5. *Se* $v_1, \ldots, v_n$ *são autovetores da matriz* A *associados a autovalores distintos* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. *Então* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *são vetores linearmente independentes.*

Demonstração:

Se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é linearmente dependente, então, sem perda de generalidade podemos dizer que existe um menor índice p tal que v_{p+1} é uma combinação linear dos vetores LI que o precedem, e, existem escalares $c_1, \ldots, c_p$ tais que:

$$c_1 v_1 + \ldots + c_p v_p = v_{p+1} \qquad (1)$$

multiplicando os dois lados dessa equação por A, e, usando o fato de que $Av_k = \lambda_k v_k$ para cada k, obteremos:

$$c_1 Av_1 + \ldots + c_p Av_p = Av_{p+1}$$

$$c_1 \lambda_1 v_1 + \ldots + c_p \lambda_p v_p = \lambda_{p+1} v_{p+1}$$

multiplicando os dois lados da equação (1) por λ_{p+1} e, subtraindo o resultado da equação acima, teremos:

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{p+1})v_1 + \ldots + c_p(\lambda_p - \lambda_{p+1})v_p = 0 \qquad (2)$$

Como $\{v_1, \ldots, v_p\}$ é linearmente independente, os coeficientes em (2) são todos iguais a zero. Mas, nenhum dos fatores $\lambda_1 - \lambda_{p+1}$ é igual a zero, porque os autovalores são distintos. Portanto, $c_i = 0$ para $i = 1, \ldots, p$. Porém, a equação (1) nos diz que $v_{p+1} = 0$, o que é impossível. Assim, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ não pode ser linearmente dependente, logo, é LI. ■

P6. *Os autovalores de uma matriz triangular A (superior ou inferior) são os elementos da diagonal principal.*

Demonstração:

Dada a matriz tringular inferior $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, usando propriedades de determinantes, as quais podem ser encontradas em Boldrini, temos que $\det A = a_{11}.a_{22}.\dots a_{nn}$. A equação caracteristica será então $(\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})\dots(\lambda-a_{nn})=0$, sendo assim, os autovalores da matriz A serão $\lambda_1=a_{11}$, $\lambda_2=a_{22}$, ..., $\lambda_n=a_{nn}$, que são exatamente os elementos da diagonal principal.■

Um resultado importante, que permite desenvolver técnicas de determinação de autovalores e autovetores para um tipo específico de matriz, será enunciado na sequência.

2.4. TEOREMA DE GERSCHGORIN

Seja A uma matriz de ordem n (real ou complexa), e $c_i=1,2,\dots,n$ *os círculos cujos centros são os elementos* a_{ii} *e cujos raios* r_i *são dados por:*

$$r_i=\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\text{, onde } i=1,2,\dots,n\text{, além de que } i\neq j.$$

Seja D *a união de todos os círculos* c_i. *Então, todos os autovalores de* A *encontram-se contidos em* D.

Demonstração:

Seja λ um autovalor de A e $x=x_1,\dots,x_n$ um autovetor correspondente. Então, de $\lambda x=Ax$, temos que $(\lambda-a_{ii})x_i=\sum_{j=1\, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j$, supondo que x_k é a maior componente de x, temos que:

$$|\lambda - a_{kk}| \leq \sum_{j=1\, j\neq i}^{n} |a_{kj}| \frac{|x_j|}{|x_k|} \leq \sum_{j=1\, j\neq i}^{n} |a_{kj}| = r_k$$

ou seja, o autovalor λ está contido em c_k, como λ é arbitrário, então todos os autovalores de A devem estar contidos na união de todos os círculos D.

2.5. SIMILARIDADE

Iniciamos esta seção apresentando o conceito de similaridade de matrizes. Veremos que similaridade é uma relação de equivalência, e que matrizes similares possuem os mesmos autovalores além de outras propriedades em comum.

DEFINIÇÃO 5. *Se A e B são matrizes nxn, então A é similar a B se existir uma matriz inversível P tal que $P^{-1}AP=B$, de modo equivalente, $A=PBP^{-1}$. Se A é similar a B, escrevemos $A \sim B$.*

Multiplicando P pela esquerda, e P^{-1} pela direita na equação $P^{-1}AP=B$, teremos $A=PBP^{-1}$, portanto, B também é similar a A, e dizemos simplesmente que A e B são similares. A aplicação que leva A em $P^{-1}AP=B$ é chamada transformação de similaridade.

Observações:

1) Se $A \sim B$, podemos escrever também $A=PBP^{-1}$ ou $AP=PB$.
2) A matriz P depende de A e de B. Ela não é única para um par de matrizes semelhantes A e B. Para comprovar isto basta tomar $A=B=I$, pois $I \sim I$ já que $P^{-1}IP=I$ para qualquer matriz inversível P.

Mostraremos a seguir que similaridade é uma relação de equivalência.

Teorema 1

Sejam A, B *e* C *matrizes* nxn.

(a) $A \sim A$

(b) Se $A \sim B$, *então* $B \sim A$.

(c) Se $A \sim B$ *e* $B \sim C$, *então* $A \sim C$

Demonstração:

(a) Esta demonstração é evidente, basta considerar que $A = I^{-1} A I$.

(b) Se $A \sim B$, então para alguma matriz inversível P, $B = P^{-1} A P$. Multiplicando nesta equação, a matriz P pela esquerda, e sua inversa, P^{-1}, pela direita, obteremos $P B P^{-1} = A$. Considere uma matriz Q tal que $Q = P^{-1}$, teremos $Q^{-1} B Q = (P^{-1})^{-1} = P B P^{-1} = A$. Portanto, pela definição, $B \sim A$.

(c) Por hipótese $A \sim B$, ou seja, existe uma matriz inversível P, tal que $P^{-1} A P = B$. Como $B \sim C$, existe uma matriz inversível Q, tal que $Q^{-1} B Q = C$. Assim $C = Q^{-1} B Q = Q^{-1} P^{-1} A P Q = (PQ)^{-1} A P Q$. Logo, $A \sim C$. ■

O teorema abaixo mostra que matrizes similares possuem os mesmos autovalores.

Teorema 2

Sejam $A, B \in M_{nxn}$. *Se* B *é semelhante a* A, *então o polinômio característico de* B *é o mesmo de* A.

Demonstração:

Seja $P_B(\lambda)$ o polinômio característico de B; como $B \sim A$, existe uma matriz inversível P tal que $P A P^{-1} = B$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} P_B(\lambda) &= det(B - \lambda I) \\ &= det(P A P^{-1} - \lambda I) \\ &= det(P A P^{-1} - \lambda P P^{-1}) \\ &= det(P(A - \lambda I) P^{-1}) \end{aligned}$$

$$= det(P)det(A-\lambda I)det(P^{-1})$$

$$= det\, P\,.det(A-\lambda I).\frac{1}{det(P)}$$

$$= det(A-\lambda I)=P_A(\lambda)\ .\blacksquare$$

Corolário 1: *Se* A *e* $B \in M_{nxn}$ *são semelhantes então elas possuem os mesmos autovalores, com as mesmas multiplicidades.*

Além dos autovalores, matrizes semelhantes possuem outras propriedades em comum, como veremos no próximo teorema.

Teorema 3

Sejam A e B *matrizes* nxn *com* $A \sim B$. *Então:*

a. $det\, A = det\, B$

b. A e B *tem os mesmos autovalores.*

c. A *é inversível se, e somente se,* B *for inversível.*

Demonstração:

Inicialmente, lembre que: se $A \sim B$, então $P^{-1}AP = B$ para alguma matriz inversível P.

(a) Esta demonstração é imediata, a partir do teorema 1.

(b) Este teorema já foi demonstrado no corolário 1.

(c) Pelo item (b), A e B possuem os mesmos autovalores, portanto $0 \notin \lambda(A)$ se e somente se $0 \notin \lambda(B)$. Ou seja, A é inversível se e somente se B é inversível. ■

2.6. DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES

Um problema muito comum em matemática aplicada é a necessidade de calcular potências de uma matriz A. Se a matriz envolvida no problema for uma matriz diagonal, esta tarefa é trivialmente executada. Se a matriz não for diagonal, mas se for possível fatorá-la da forma $A=PDP^{-1}$, onde D é uma matriz diagonal, então é possível calcular facilmente potências de A. Este tipo de fatoração é chamado de diagonalização e será apresentado a seguir.

DEFINIÇÃO 6. *Uma matriz nxn é diagonalizável se existir uma matriz diagonal D tal que A seja semelhante a D, ou seja, se existe uma matriz P, nxn, inversível tal que $P^{-1}AP=D$.*

Teorema 4

Se A é uma matriz nxn, então são equivalentes as seguintes afirmações.

a) A é diagonalizável.

b) A tem n autovetores LI.

Demonstração:

$(a)\Rightarrow(b)$ Como estamos supondo que A é diagonalizável, existe uma matriz

$P=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$ inversível tal que $P^{-1}AP=D$, onde,

$D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$ segue da fórmula $P^{-1}AP=D$ que $AP=PD$, ou seja,

$AP=$

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{nl} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \cdots & \lambda_n p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 p_{nl} & \lambda_2 p_{n2} & \cdots & \lambda_n p_{nn} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Se denotarmos os vetores-coluna de P por $p_1, p_2, \ldots, p_n$ então, através de (1) obteremos as colunas de AP por $\lambda_1 p_1, \lambda_2 p_2, \ldots, \lambda_n p_n$, ou seja,

$$Ap_1 = \lambda_1 p_1,\ Ap_2 = \lambda_2 p_2,\ \ldots,\ Ap_n = \lambda_n p_n \qquad (2)$$

Como P é inversível, seus vetores-coluna são todos não-nulos: assim, por (2) segue que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ são autovalores de A e que $p_1, p_2, \ldots, p_n$ são autovetores associados. Como P é inversível, segue que $p_1, p_2, \ldots, p_n$ são linearmente independentes. Assim, A tem n autovetores LI.

$(b) \Rightarrow (a)$ Suponha que A tem n autovetores LI $p_1, p_2, \ldots, p_n$ com os autovalores associados $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ e seja $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{nl} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$ a matriz cujos vetores-coluna são $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Os vetores-coluna de AP são $Ap_1, Ap_2, \ldots, Ap_n$. Mas $Ap_1 = \lambda_1 p_1$, $Ap_2 = \lambda_2 p_2$, ..., $Ap_n = \lambda_n p_n$ de modo que

$$AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \cdots & \lambda_n p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 p_{nl} & \lambda_2 p_{n2} & \cdots & \lambda_n p_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{nl} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$= PD \qquad (3)$$

onde D é a matriz diagonal com os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ na diagonal principal. Como os vetores-coluna de P são linearmente independentes, P é inversível; assim, (3) pode ser reescrita como $P^{-1} A P = D$, ou seja, A é diagonalizável.■

Exemplo 8

Encontrar a matriz P que diagonaliza $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 6 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Sua equação caracteristica será $(5-\lambda)(-4-\lambda)(2-\lambda)=0$, cujos autovalores são

5, -4 e 2. Para $\lambda_1=5$ obteremos $p_1=\begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$, para $\lambda_2=-4$ encontramos

$p_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e para $\lambda_3=2$ teremos $p_3=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Três vetores LI formam uma base,

portanto a matriz A é diagonalizável e $P=\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ diagonaliza a matriz A.

Pois

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & 1 & -1 \\ \frac{-6}{9} & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 6 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Para escrever as colunas de P não existe nenhuma ordem preferencial. A i-ésima entrada diagonal de $P^{-1}AP$ é um autovalor para o i-ésimo vetor-coluna de P, mudando a ordem das colunas de P só muda a ordem dos autovalores na diagonal de $P^{-1}AP$.

Antes de demonstrarmos o teorema a seguir valos enunciar um lema cuja demonstração pode ser encontrada em Poole.

Lema 1: *Se A é uma matriz de ordem n, então a multiplicidade geométrica de cada autovalor é menor ou igual do que a sua multiplicidade algébrica.*

2.6.1. Teorema da Diagonalização

Sejam A *uma matriz de ordem* n *com autovalores distintos* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. *Os enunciados a seguir são equivalentes.*

a) A *é digonalizável.*

b) A união β *da bases dos autoespaços de* A *contém* n *vetores.*

c) A multiplicidade algébrica de cada autovalor é igual à sua multiplicidade geométrica.

Demonstração:

$(a)\Rightarrow(b)$ Se a matriz A é diagonalizável, então ela tem n autovetores linearmente independentes. Se n_i desses autovetores correspondem ao autovalor λ_i então β_i (a base do autoespaço E_{λ_i}) contém pelo menos n_i vetores, os quais são linearmente independentes. Assim β contém pelo menos n vetores. Como, β é um subconjunto do $\mathbb{R}^n$ linearmente independente, ele contém exatamente n vetores.

$(b)\Rightarrow(c)$ Seja $d_i = dim E_{(\lambda_i)}$ a multiplicidade geométrica de λ_i e seja m_i sua multiplicidade algébrica. Pelo lema anterior temos que $d_i \leqslant m_i$ para $i=1,\ldots,k$. Assuma que vale a propriedade (b), então $n=d_1+d_2+\ldots+d_k \leqslant m_1+m_2+\ldots+m_k$. Mas $m_1+m_2+\ldots+m_k=n$, pois a soma das multiplicidades algébricas dos autovalores de A é exatamente o grau do polinômio caracteristico de A, a saber, n. A partir disso, obtemos $d_1+d_2+\ldots+d_k=m_1+m_2+\ldots+m_k$ e isso implica que $(m_1-d_1)+(m_2-d_2)+\ldots+(m_k-d_k)=0$. Pelo lema anterior temos que $m_i = d_i \geqslant 0$, para $i=1,\ldots,n$, assim, cada parcela da equação acima deve ser zero.

$(c)\Rightarrow(a)$ Se a multiplicidade algébrica m_i e a multiplicidade geométrica d_i são iguais para cada autovalor λ_i de A, então β tem $d_1+d_2+\ldots+d_k=m_1+m_2+\ldots+m_k=n$ vetores, que são linearmente independentes. Assim, temos n autovetores de A linearmente independentes e, portanto, A é diagonalizável. ∎

Exemplo 9

A matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$ possui dois autovalores distintos, pois, $\lambda_1=\lambda_2=1$ e $\lambda_3=2$.

Dessa forma, os autovalores λ_1 e λ_2 são ambos iguais a 1, por essa razão diz-se que tem multiplicidade algébrica 2, e, como $\lambda_3=2$, sua multiplicidade geométrica é 1, A não é diagonalizável, de acordo com o teorema da diagonalização.

Exemplo 10

A matriz $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ tem dois autovalores distintos, $\lambda_1=\lambda_2=0$ e $\lambda_3=-2$. O autovalor 0 tem multiplicidade algébrica e geométrica iguais a 2, e o autovalor -2 as tem iguais a 1. Assim essa matriz é diagonalizável, de acordo com o Teorema da Diagonalização.

2.7. MÉTODO DAS POTÊNCIAS

Richard Edler von Mises (1883 – 1953), cientista, nascido na Áustria-Hungria (atual Ucrânia), introduziu o método das potências, em 1929, como uma forma de maximizar ou minimizar os autovalores e os autovetores de uma matriz real e simétrica.

Antes do estudo de Mises, o método utilizado para encontrar os autovalores de uma matriz consistia em solucionar a equação característica. Contudo, quando a equação é do quarto grau ou superior, esse método se torna muito trabalhoso, pois o cálculo do determinante de matrizes nessa ordem passa por um processo muito demorado, bem como, não há fórmulas para determinar as soluções de equações polinomiais de grau maior que 4. Por causa disso, para a maioria dos problemas práticos as soluções encontradas eram apenas aproximações.

O método das potências é utilizado em matrizes quadradas, desde que um de seus autovalores possua respectivo valor absoluto maior que todos os outros, este autovalor é denominado autovalor dominante, e será denotado por λ_1. Como exemplo, se os números -4, 1 e 3 são os autovalores de uma matriz, então o autovalor dominante é $\lambda_1 = -4$, pois considera-se o maior valor absoluto entre eles. Por outro lado, uma matriz com autovalores -4, -3, 0 e 4 não tem valor dominante.

Após algumas iterações o método das potências irá produzir uma sequência de escalares que convergirá para λ_1 e uma sequência de vetores que convergirá para o autovetor correspondente v_1, o autovetor dominante.

Daqui para frente, suponha que A é uma matriz diagonalizável.

Teorema 5

Seja A uma matriz $n x n$ diagonalizável, com autovalor dominante λ_1. Então, existe um vetor x_0 não nulo, com uma componente c_1 na direção do autovetor dominante v_1, tal que a sequência de vetores x_k definida por:

$$x_1 = Ax_0,\ x_2 = Ax_1,\ x_3 = Ax_2,\ \ldots,\ x_k = Ax_{(k-1)},\ \ldots$$

tende ao autovetor dominante v_1.

Demonstração:

Como λ_1 é o autovalor dominante, podemos considerar que todos os autovalores são indexados da seguinte maneira $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$. Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_n$ os autovetores correspondentes, como A é diagonalizável $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ são linearmente independentes, e portanto formam uma base de $\mathbb{R}^n$. Consequentemente, x_0 pode ser escrito como uma combinação linear desses autovetores, da forma $x_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n$. Mas, $x_1 = Ax_0$, $x_2 = Ax_1 = A(Ax_0) = A^2 x_0$, $x_3 = Ax_2 = A(A^2 x_0) = A^3 x_0$, e, de forma geral, $x_k = A^k x_0$ para $k \geq 1$. Como

$$A^k x_0 = c_1 \lambda_1^k v_1 + c_2 \lambda_2^k v_2 + \ldots + c_n \lambda_n^k v_n = \lambda_1^k \left(c_1 v_1 + c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k v_2 + \ldots + c_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k v_n \right)$$

onde utilizamos o fato de que $\lambda_1 \neq 0$. O fato de λ_1 ser um valor dominante significa que cada uma das frações $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \frac{\lambda_3}{\lambda_1}, \ldots, \frac{\lambda_n}{\lambda_1}$, em valor absoluto, é menor que 1.

Assim, $\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k, \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1} \right)^k, \ldots, \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k$ é uma sequência que tende a zero quando $k \to \infty$.

Daí obteremos $x^k = A^k x_0 \to \lambda_1^k c_1 v_1$ quando $k \to \infty$. Como $\lambda_1 \neq 0$ e $v_1 \neq 0$, x_k se aproxima de um múltiplo não nulo de v_1, se $c_1 \neq 0$. ■

Podemos resumir o método das potências da seguinte forma:

Seja A como matriz de ordem n diagonalizável com um autovalor dominante λ_1. E, seja $x_0 = y_0$ um vetor inicial do $\mathbb{R}^n$ cuja maior componente é 1.

- Repita os seguintes passos para $k = 1, 2, \ldots$:

a) Calcule $x_k = Ax_{(k-1)}$.

b) Seja m_k a componente de x_k com maior valor absoluto.

c) Seja $y_k = \left(\frac{1}{m_k} \right) x_k$.

Para a maioria das escolhas de x_0, m_k converge para o autovalor dominante λ_1, e y_k converge para o autovetor dominante.

Observações:

i) Se a componente do vetor inicial x_0 na direção do autovetor dominante v_1 for nula então o método da potência não irá convergir para um autovetor dominante. No entanto, ao longo das iterações, os cálculos, frequentemente, produzirão um x_k com componente não nula na direção de v_1. A partir daí, o método convergirá para um múltiplo de v_1.

ii) O método da potência funciona mesmo quando se tem autovalor dominante repetido, ou até mesmo se a matriz não for diagonalizável.

iii) O método da potência converge rapidamente para um autovetor dominante, em algumas matrizes específicas; porém, para outras, a convergência pode ser bastante vagarosa. De fato, como $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| \geqslant \left|\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right| \geqslant \ldots \geqslant \left|\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right|$, se $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$ for um valor próximo de zero, então a sequência $\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k, \ldots, \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k$ irá se aproximar de zero rapidamente. E, pelo teorema demonstrado acima, $x_k = A^k x_0$ também irá se aproximar rapidamente de $\lambda_1^k c_1 v_1$.

Maiores detalhes sobre o método das potências e suas variações podem ser encontrados em Strang ou Golub.

CAPÍTULO III – APLICAÇÕES DE AUTOVALORES E AUTOVETORES

Como mencionado anteriormente, autovalores e autovetores são muito utilizados em matemática aplicada, por exemplo em: Acústica, teoria de controle, mecânica dos fluídos, cadeias de Markov, equações diferenciais parciais, ecologia, economia e etc. Neste capítulo faremos uma breve apresentação de algumas aplicações de autovalores, as quais não requerem conhecimento profundo de outras áreas. Iniciamos o capítulo falando da sequência de Fibonacci, em seguida, faremos algumas considerações referentes ao estudo do crescimento populacional através das matrizes de Leslie, por fim, observaremos as influências dos autovalores e dos autovetores no site de busca Google.

3.1. SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

A sequência de números:

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,\ldots$$

é conhecida como sequência de Fibonacci. Os dois primeiros números nesta sequência são iguais a 1, e os demais são obtidos através da soma dos dois números anteriores. Assim, considere $u_0=1$ e $u_1=1$, então, $u_2=1+1=2$, $u_3=2+1=3$, $u_4=2+3=5$, $u_5=3+5=8$, e assim segue a sequência. Para encontrar a fórmula geral para esta sequência observemos que, a partir do terceiro elemento $u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$. Portanto, esta fórmula vale para todos os valores $n\geqslant 2$, desde que $n\in\mathbb{N}$ e, como se pode notar $u_{n-1}=u_{n-1}$, das duas equações, pode-se montar a equação matricial:

$$\begin{bmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Agora definamos:

$$w_k=\begin{bmatrix} u_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix} \text{ e } A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ tal que } 0 \leqslant k \leqslant n-1\ ,$$

de modo que:

$$w_0=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ w_1=\begin{bmatrix} u_2 \\ u_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},\ \ldots,\ w_{n-2}=\begin{bmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{bmatrix} \text{ e } w_{n-1}=\begin{bmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{bmatrix}$$

portanto a equação (1) pode ser escrita como:

$$w_{n-1}=Aw_{n-2}\,.$$

logo:

$$\begin{gathered} w_1=Aw_0 \\ w_2=Aw_1=A(Aw_0)=A^2w_0 \\ w_3=Aw_2=A(A^2w_0)=A^3w_0 \\ \vdots \\ w_{n-1}=A^{n-1}w_0 \end{gathered} \tag{2}$$

sendo assim, para encontrar u_n basta calcular A^{n-1}. O exponencial de uma matriz é um cálculo muito trabalhoso a medida que n aumenta, para evitar essa dificuldade, encontraremos uma matriz diagonal D semelhante a A . A equação característica de A é:

$$\begin{bmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix}=\lambda^2-\lambda-1=0$$

isto significa que os autovalores de A são:

$$\lambda_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ e } \lambda_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

de modo que

$$D=\begin{bmatrix} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}.$$

os autovetores correspondentes são:

$$x_1=\begin{bmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2}\\1\end{bmatrix} \text{ e } x_2=\begin{bmatrix}\frac{1-\sqrt{5}}{2}\\1\end{bmatrix}.$$

Assim,

$$P=\begin{bmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2}\\1 & 1\end{bmatrix},$$

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\end{bmatrix},$$

logo, $A^k=PD^kP^{-1}$, pois D é um matriz diagonal, então para calcular D^k, basta elevar os elementos da diagonal principal à k-ésima potência, sendo assim, de (2) temos:

$$w_{n-1}=A^{n-1}w_0=PD^{n-1}P^{-1}w_0=$$

$$\begin{bmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2}\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} & 0\\0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

esta equação nos fornece a fórmula:

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

que permite o cálculo direto de u_n.

3.2. MATRIZES DE LESLIE E CRESCIMENTO POPULACIONAL

As matrizes de Leslie contém informações sobre as taxas de natalidade e mortalidade das variadas faixas etárias de igual duração, ou seja, são associadas a problemas populacionais, elas são utilizadas nestes problemas por obter uma forma concisa de calcular o crescimento populacional e fazer projeções da população classificada por estágios, onde um indivíduo de uma dada classe pode se reproduzir, crescer, regredir, morrer ou permanecer na classe. Estas matrizes tem a seguinte forma:

$$L = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_{n-1} & b_n \\ s_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

onde os b_i são os parâmetros de nascimento, $b_i \geqslant 0$, $i = 1, \dots, n$. Observe que para que hajam nascimentos e a população não seja extinta, pelo menos um dos b_i 's deve ser não nulo. A probabilidade de sobrevivência será representada pelos s_j, tal que $0 < s_j \leqslant 1$, $j = 1, \dots, n-1$. Considere que todos os s_j's são não nulos, pois desta forma a população não irá se extinguir.

Chamando de $x^{(0)}$ o vetor de distribuição inicial da população e de $x^{(k)}$ o vetor de distribuição da população no tempo k, em Anton e Rorres é mostrado que o modelo de crescimento populacional de Leslie é dado pela equação:

$$x^{(k)} = L^k x^{(0)}.$$

Se L for uma matriz diagonalizável, então $L = PDP^{-1}$, onde D é uma matriz diagonal, cujas entradas são os autovalores de L, as colunas de P são os autovetores correspondentes. Neste caso, a equação para o modelo de Leslie pode ser escrita como:

$$x^{(k)} = (PDP^{-1})^k x^{(0)}$$

$$x^{(k)} = \underbrace{(PDP^{-1}) \dots (PDP^{-1})}_{k\, vezes} x^{(0)}$$

$$x^{(k)} = (P D^k P^{-1}) x^{(0)}$$

$$x^{(k)} = c_1 \lambda_1^k v_1 + c_2 \lambda_2^k v_2 + \dots + c_n \lambda_n^k v_n \tag{3}$$

onde λ_i é o autovalor associado ao autovetor v_i de L, $i=1,\ldots,n$ e

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = P^{-1} x^{(0)}.$$

Se λ_1 for um autovalor estritamente dominante de L, então dividindo a equação (3) por $\lambda_1^{(k)}$ obtemos:

$$\frac{1}{\lambda_1^k} x^{(k)} = c_1 v_1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k c_2 v_2 + \ldots + \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k c_n v_n,$$

se $|\lambda_1| > |\lambda_i|$, onde $i=2,\ldots,n$ então $lim_{k\to\infty} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k = 0$, ou seja, para valores de k suficientemente grandes, podemos aproximar $x^{(k)}$ por:

$$x^{(k)} \approx c_1 \lambda_1^k v_1,$$

ou seja, para k suficientemente grande o vetor de distribuição da população é um múltiplo do autovetor associado ao autovalor dominante.

Os teoremas 6 e 7 a seguir, cujas demonstrações podem ser encontradas em Anton e Rorres, garantem que toda matriz de Leslie possui um autovalor dominate.

Teorema 6

Toda matriz de Leslie L possui um único autovalor positivo, com um único autovetor correspondente cujas entradas são positivas.

Teorema 7

Se λ_1 é o único autovalor positivo de uma matriz de Leslie L e λ_j é qualquer outro autovalor de L, então $|\lambda_j| \leqslant \lambda_1$, $j=2,\ldots,n$.

Vimos que para podermos aproximar $x^{(k)}$ por um múltiplo do autovetor associado ao autovalor dominante, devemos ter $|\lambda_1|>|\lambda_j|$, $j=2,\ldots,n$. Porém, é possível garantir a existência de um autovalor estritamente dominante sob certa condição, como veremos a seguir:

Teorema 8

Se duas entradas sucessivas b_i e b_{i+1} da primeira linha de uma matriz de Leslie são não nulas, então o autovalor positivo de L é estritamente dominante.

3.3. GOOGLE

O site Google, de forma geral, é utilizado para encontrar páginas da web que contenham uma determinada palavra digitada, ele as lista numa ordem de preferência, ou seja, da mais interessante para a menos interessante.

Quando o Google foi lançado, já havia um certo número de sites de busca. Seu diferencial foi a inovação na forma de fazer a listagem dos sites encontrados, ou seja, ele melhorou a forma de classificar as páginas da web. Este método de classificação é chamado de algoritmo Page Rank, ele classifica as páginas baseando-se unicamente na forma como as páginas são vinculadas. As páginas da web mudam constantemente, por isso, o site realiza mensalmente mudanças na classificação das páginas.

A classificação das páginas é encontrada através do cálculo do autovetor associado ao maior autovalor da chamada matriz do Google. Devido a estrutura desta matriz é possível garantir a existência de um autovalor dominante e de um autovetor associado, cujas entradas são todas positivas.

Maiores detalhes a respeito desta classificação pode ser encontrados em Bryan e Leise.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O cálculo de autovalores e autovetores de uma matriz é uma ferramenta muito valiosa na análise de matrizes, e neste sentido este trabalho proporcionou, através de seu desenvolvimento, um conhecimento mais profundo da teoria de autovalores-autovetores, pois pudemos observar parte do vasto campo de estudo que pode ser explanado através deste conhecimento. Foram revistos conceitos, estudados durante a graduação e especialização, bem como, pudemos contemplar alguns conceitos referentes às aplicações.

Como mencionado diversas vezes ao longo deste trabalho, encontrar autovalores e autovetores de uma matriz é um problema muito estudado em diversas áreas, o que deixa muitas portas abertas para possíveis estudos futuros. É importante ter um bom entendimento de algoritmos de cálculo, pois ele nos apresenta técnicas para melhorar certos resultados, já que, de nada adianta programar uma máquina sem buscar o melhor desempenho antes, por exemplo.

A modelagem matemática que pode ser denvolvida através do método funciona como uma ponte no ramo da arquitetura, da engenharia, da programação, e em qualquer outra que envolva avaliações de desempenho.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOLDRINI, J. L. **Álgebra Linear.** 3 ed. São Paulo: Harbra, 1986.

BRYAN, Kurt and LEISE, Tanya, **The $25,000,000,000 eingenvector the linear algebra behind Google**. Acedido em 05/01/2011, em: http://www.rose-hulman.edu/~bryan/googleFinalVersionFixed.pdf.

GOLUB, G. H. E VanLoan, C. F. **Matrix computations.** 3 ed. The Johns University Press, 1996.

HORN, R. A. e JOHNSON, C. R. **Matrix Analisys.** Cambridge: University Press, 1985.

KOLMAN, B. **Introdução à Álgebra Linear com Aplicações.** Trad. 8 ed.Rio de Janeiro: LTC, 2006.

LAY, D. C. **Álgebra Linear e suas Aplicações.** Trad. 2 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2007.

LAY, D. C. **Linear Algebra and Its Applications.** 3 ed. Boston: Addison Wesley, 2005.

LEON, S. J. **Álgebra Linear com Aplicações.** Trad. 4 ed. Rio de Janeiro: LTC, 1999.

MEYER, Carl D. **Matrix Analysis and Applied Linear Algebra.** Society for Industrial & Applied Mathematics, U.S., 2000.

POOLE, D. **Álgebra Linear.** Trad. 1 ed. São Paulo: Thomson, 2004.

STEWART, J. **Cálculo, Vol. II.** Trad. 4 ed. São Paulo: Pioneira Thompson Learning, 2005.

STRANG, G. **Álgebra Linear e suas Aplicações.** Trad. 4 ed. São Paulo: Cengage Learning, 2009.

WHITE, Brian, **How Google ranks web pages.** Acedido em: 05/01/2011, em: http://math.stanford.edu/~brumfiel/math_51-06/PageRank.pdf .