PATRÍCIO TORRES COSTA E LUCIANE SOBRAL E SILVA

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA ZEROS DE FUNÇÕES

AÇAILÂNDIA

2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM MATEMÁTICA

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA ZEROS DE FUNÇÕES

Proposta de dissertação submetida à
Universidade Federal de Santa Catarina
como parte dos requisitos para a
obtenção do grau de Especialista em Matemática

PATRÍCIO TORRES COSTA E LUCIANE SOBRAL E SILVA

Açailândia, Junho de 2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
Departamento de Matemática
Curso de Especialização em Matemática-Formação de Professor na modalidade a distância

"Métodos Numéricos para zeros de funções"

Monografia submetida a Comissão de avaliação do Curso de Especialização em Matemática-Formação do professor em cumprimento parcial para a obtenção do título de Especialista em Matemática.

APROVADA PELA COMISSÃO EXAMINADORA em 18/06/2009

Dr. Mário César Zambaldi (CFM/UFSC - Orientador)
Dr. Márcio Rodolfo Fernandes (CFM/UFSC - Examinador)
Dr. Fermin S. V. Bazan (CFM/UFSC – Examinador)

Dra. Neri Terezinha Both Carvalho
Coordenadora do Curso de Especialização em Matemática-Formação de Professor

Florianópolis, Santa Catarina, junho de 2009.

Este trabalho é dedicado à todos que estão sofrendo com as enchentes em nosso estado.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos a todos aqueles que, de alguma forma tornaram possível a realização deste trabalho.

Aos nossos colegas, pela colaboração e participação na recolha dos dados.

À meu orientador, Doutor Mário César Zambaldi, pela disponibilidade, por todo o apoio, sugestões e conselhos úteis.

À nossas famílias e amigos, que nos ajudaram e deram força para chegar ao fim desta caminhada.

A todos,

Muito obrigado.

Resumo da Dissertao apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de especilaista em Matemtica.

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA ZEROS DE FUNÇÕES

Patrício Torres Costa Luciane Sobral e Silva

Junho / 2009

Orientador: Mário César Zambaldi, Dr.
Palavras-chave: Métodos Iterativos, Newton, secante, bisseção, falsa posição.
Número de Páginas: 35

Resumo

Esta dissertação tem como principal objetivo estudar as aproximações para funções não lineares, mostrando os vários métodos iterativos para resolução das mesmas assim como, suas vantagens e desvantagens. No primeiro capítulo, partimos do conceito do polinômio de Taylor, que nada mais é uma forma de aproximação de funções num ponto pré-estabelecido, com o intuito de revisar conhecimentos básicos necessários ao capítulo dois.

No segundo capítulo foram estudados quatro métodos numéricos, suas convergências e seus critérios de paradas, sua aplicabilidade e com o auxílio de um software matemático, encontramos valores aproximados para as raízes das equações.

A análise realizada das informações recolhidas permitiram comparar estes métodos afim de encontrar o melhor para cada situação.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A resolução de equações é uma atividade realizada desde a antiguidade. A história da matemática registra que na Mesopotâmia já se usava técnicas algébricas e aproximações de raízes. As equações lineares e quadráticas foram resolvidas pelos Gregos através de métodos geométricos e por métodos mais aritméticos pelos Hindus e Árabes. No século XVI os Italianos resolveram, analiticamente, as equações cúbicas e quadráticas. A tentativa de obter uma fórmula para resolver a equações de grau cinco, foi encerrada no século XIX, quando Evaristo Galois demonstrou que era impossível a dedução de uma fórmula que envolvesse somente operações elementares para as equações polinomiais de grau maior ou igual a cinco. Entre a resolução das equações cúbicas e o estabelecimento da impossibilidade de resolução geral das equações de grau maior ou igual a cinco, muitos métodos de resolução de equações ou de obtenção de uma raiz aproximada foram desenvolvidos, entre eles tem-se o método da bisseção, o método da falsa posição, o método das secantes e o método Newton.

Nesse trabalho fazemos um estudo e aplicação destes métodos. Mostramos suas principais vantagens e desvantagens, assim quando os comparamos por meio de exemplos.

2 CONCEITOS BÁSICOS

2.1 Teorema de Bolzano

Pretendemos neste capítulo relembrar alguns conceitos básicos, que irão facilitar a compreensão dos metodos numericos apresentados nos proximos capitulos. Vamos começar pelo teorema de Bolzano, pois através deles podemos determinar um intervalo da função onde existe raiz e a partir dos métodos iterativos, encontrar uma aproximação para essa raiz.

O teorema de Bolzano estabelece que, se tivermos uma função f, contínua num intervalo $]a,b[$, e se $f(a).f(b) < 0$, então existe pelo menos uma raíz nesse intervalo.

Demonstração:

Seja $p(x) = 0$, uma equação polinomial com coeficientes reais.

Dados $\alpha \in]a,b[$, então $a < \alpha < b$,

$$(a-\alpha)(b-\alpha) < 0 = \begin{cases} a-\alpha < 0 \\ b-\alpha > 0. \end{cases}$$

Calculando o produto $P(a)P(b)$ encontramos

$P(a)P(b) = [a_n(a-\alpha_1)(a-\alpha_2)\dots(a-\alpha_n)]a_n(b-\alpha_1)(b-\alpha_2)\dots(b-\alpha_n)]$

$P(a)P(b) = a_n^2[(a-\alpha_1)(b-\alpha_1)][(a-\alpha_2)(b-\alpha_2)]\dots[(a-\alpha_n)(b-\alpha_n)]$

Assim:

$a_n^2 > 0$.

Existem n fatores do tipo $(a-\alpha_n)(b-\alpha_n)$ em que α_n é a raíz da equação dada.

Os únicos fatores negativos são os que correspondem as raízes $P(\alpha) = 0$ internas ao intervalo $]a,b[$, o que nos permite concluir que;

Quando $(f(a).f(b) < 0)$, existe um número ímpar de fatores negativos do tipo $(a-\alpha_n)(b-\alpha_n)$ e, portanto exste um número ímpar de raízes reais da equação $P(x) = 0$ que são internas ao intervalo $]a,b[$.

Exemplo

Seja a função $f(x) = xln(x) - 3$. Podemos calcular o valor de f(x) para valores arbitrários de x, como mostrado na tabela abaixo:

x	1	2	3	4
$f(x)$	-3,2	-1,81	0,10	2,36

Tabela 1: Estimativa intervalo das raízes, por Bolzano

Pelo teorema de Bolzano, concluímos que existe pelo menos uma raiz real no intervalo $[2,3]$.

2.2 Polinômio de Taylor

A maioria das funções f não podem ser avaliada de maneiras simples. Por exemplo, $f(x) = cos(x)$, trata-se de uma função trigonométrica relativamente simples, mas sem o auxilio de uma calculadora ou um computador fica de certa forma complicado tratar dessa função. Para avaliar tais expressões usamos outras funções que são semelhantes à original e são mais fáceis de se trabalhar. A classe mais comum de aproximar funções são os polinômios, pois além de serem fáceis de se trabalhar normalmente são um meio eficiente de aproximações das funções originais. Entre os polinômios o mais usado é o polinômio de Taylor, pois ele é comparativamente fácil de construir, e é frequentemente um primeiro passo para obtenção de aproximações mais eficientes, além de ser importante em várias outras áreas da Matemática.

Por definição, f é definida no intervalo J e k vezes derivável no ponto $a \in J$. O Polinômio de Taylor de ordem k da função f no ponto a é o polinômio $p(x) = a_0 + a_1x + a_1x^2 + \ldots + a_kx^k$ (de grau $\leq k$) cujas derivadas de ordem $\leq n$ no ponto $x = 0$ coincidem com as derivadas de mesma ordem de f no ponto a, ou seja, $p_i(0) = f_i(a)$, $i = 0, 1, \ldots, k$. Portanto o polinômio de Taylor de ordem k da função f no ponto a é:

$$p(x) = f(a) + f'(a)x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}x^k$$

Considere por exemplo, $f(x) = e^x$. O Polinômio de Taylor é construído para imitar o comportamento dessa função em algum ponto $x = a$. O resultado será aproximadamente igual a f(x), nos pontos x perto de a.

Vamos construir o polinômio de Taylor, no ponto $x = 0$, este tem de satisfazer as duas condições abaixo

$$p_1(a) = f(a)$$

$$p_1'(a) = f'(a)$$

Substituindo os valores no Polinômio de Taylor, encontramos

$$p_1(x) = 1 + x$$

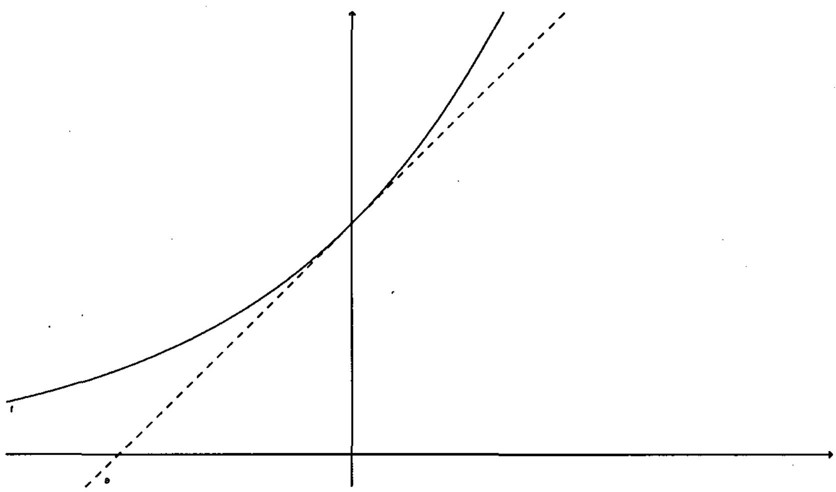


Figura 1: Aproximação linear de Taylor

Analisando o gráfico, fica fácil observar que a função representada pela reta pontilhada é $p_1(x) = 1 + x$, e que ela se comporta igual a função $f(x) = e^x$ no ponto $x = 0$, ou seja, é a aproximação linear para a função $f(x) = e^x$. Para encontrar tal função usamos o polinômio de Taylor apenas até seu valor linear determinado pela fórmula

$$p_1(x) = f(a) + (x-a)f'(a).$$

O gráfico de $p_1(x)$ é tangente ao gráfico de $f(x)$ em $x = a$.

Caso quisessemos encontrar uma aproximação quadrática para a mesma função f, teríamos que substituir os valores de $f(x) = e^x$ no polinômio de Taylor até sua derivada segunda,

$$p_2(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a)$$

obedecendo as condições abaixo

$$p_2(a) = f(a)$$

$$p_2'(a) = f'(a)$$

$$p''_2(a) = f''(a)$$

O que nos levaria à função

$$p_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$

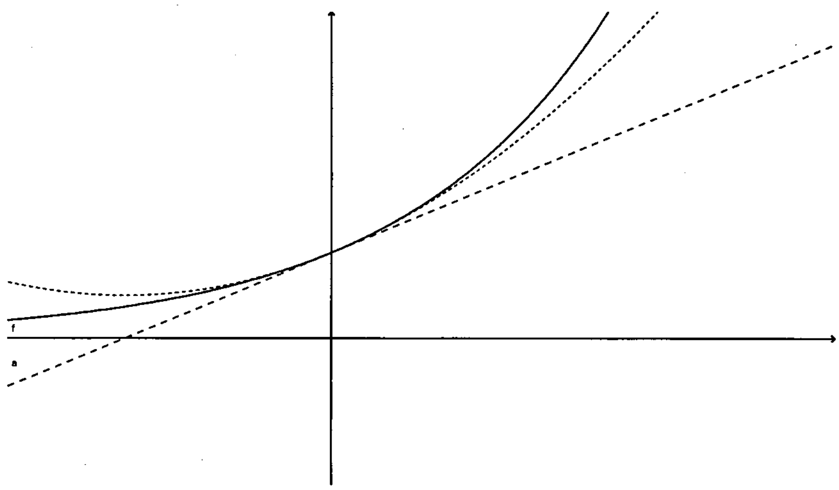


Figura 2: Aproximação quadrática do polinômio de Taylor

A figura acima é uma extensão da figura 1, em que o gráfico do meio representa a aproximação quadrática do polinômio de Taylor para a função $f(x) = e^x$, no ponto $x = 0$.

Exemplo. Considere $f(x) = log(x)$ no ponto $a = 1$. Temos que $f(1) = log(1) = 0$, podemos calcular várias aproximações de Taylor para a função dada. Substituindo no polinômio de Taylor, temos:

$$p(x) = 0 + (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \ldots + (-1)^{k-1}\frac{1}{k}(x-1)^k$$

O gráfico abaixo mostra aproximações da função $y = log(x)$ usando o polinômio de Taylor, Note que todas as funções coincidem no ponto $x = 1$, onde determinamos que seriam nossas aproximações.

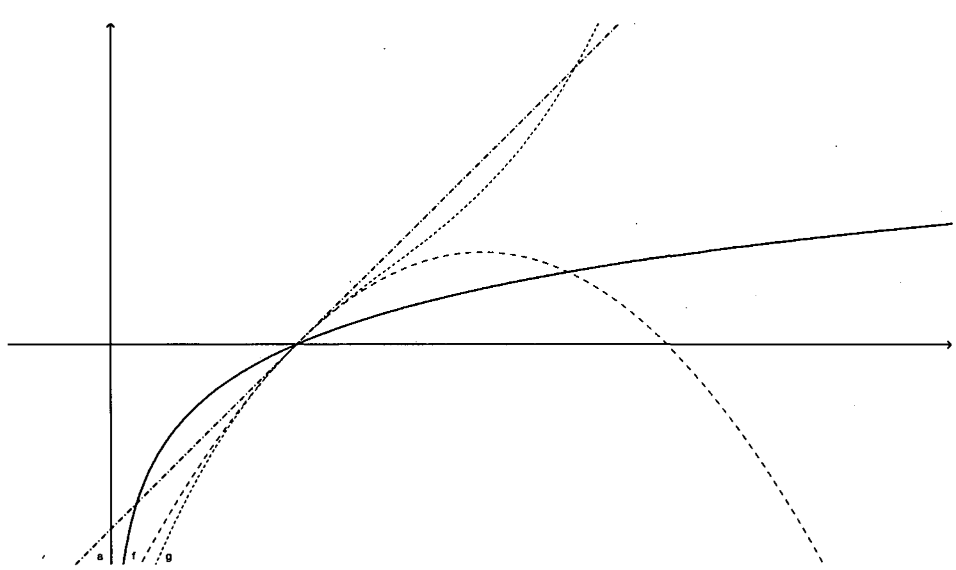


Figura 3: Aproximações da função $y = log(x)$

3 MÉTODOS ITERATIVOS PARA SE OBTER ZEROS REAIS DE FUNÇÕES

Existe um grande número de métodos numéricos que são processos iterativos. Como o próprio nome já diz esses processos se caracterizam pela repetição de uma determinada operação. A ideia nesse tipo de processo é repetir um determinado cálculo várias vezes, obtendo-se a cada repetição ou iteração um resultado mais preciso que aquele obtido na iteração anterior. E, a cada iteração utiliza-se o resultado da iteração anterior como parâmetro de entrada para o cálculo seguinte.

Alguns aspectos comuns a qualquer processo iterativo, são:

1. Estimativa inicial: como um processo iterativo se caracteriza pela utilização do resultado da iteração anterior para o cálculo seguinte, a fim de se iniciar um processo iterativo, é preciso que se tenha uma estimativa inicial do resultado do problema. Essa estimativa pode ser conseguida de diferentes formas, conforme o problema que se deseja resolver;

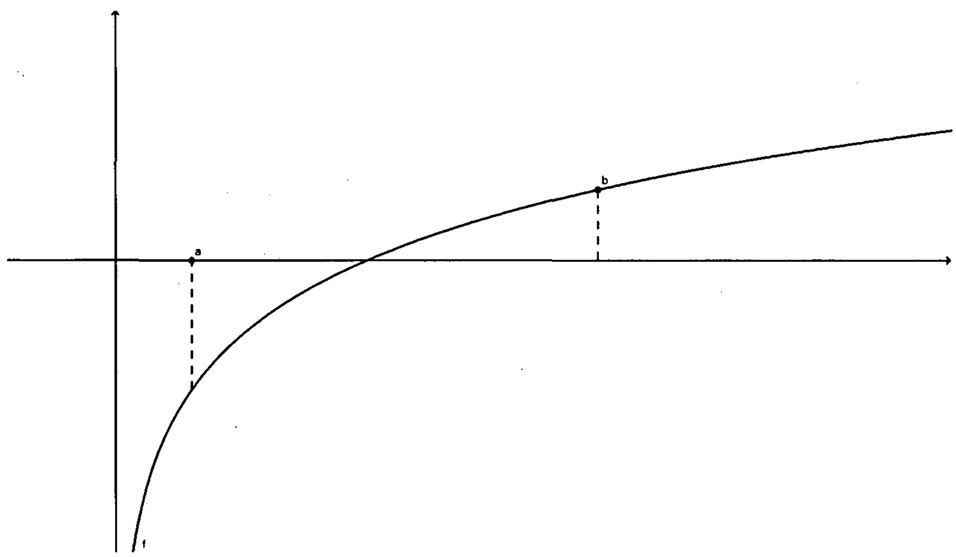
2. Convergência: a fim de se obter um resultado próximo do resultado real, é preciso que a cada passo ou iteração, o resultado esteja mais próximo daquele esperado, isto é, é necessário que o método convirja para o resultado real. Essa convergência nem sempre está garantida em um processo numérico. Portanto, é muito importante se estar atento a isso e realizar a verificação da convergência do método para um determinado problema antes de tentar resolvê-lo;

3. Critério de Parada: obviamente não podemos repetir um processo numérico infinitamente. É preciso pará-lo em um determinado instante. Para isso, devemos utilizar um certo critério, que vai depender do problema a ser resolvido e da precisão que precisamos obter na solução. O critério adotado para parar as iterações de um processo numérico é chamado de critério de parada. Para encontrarmos as raízes ou zeros de uma função iremos utilizar métodos numéricos iterativos. Como já mencionado, o primeiro passo para se resolver um processo iterativo corresponde a obtenção de uma estimativa inicial para o resultado do problema.

3.1 Método da Bisecção

Suponha $f(x)$ continua num intervalo (a,b) e

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$



Como a função muda de sinal no intervalo (a,b), então ela tem pelo menos uma raiz α nesse intervalo. O procedimento numérico mais simples para achar uma raiz é dividir o intervalo (a,b) repetidamente para a metade, mantendo o meio em qual a função muda de sinal. Este procedimento é chamado de método da bisseção.

Supondo um intervalo (a,b), que satisfaça o que foi colocado anteriormente, e uma tolerância de erro $\varepsilon > 0$. As iterações são realizadas da seguinte forma:

1. Defina $c = (a+b)/2$.
2. Se $b - c \leq \varepsilon$, então ja aceitamos c como raíz e paramos com as iterações.
3. Se $f(b) \cdot f(c) \leq 0$, faça $a = c$.

   Caso contrário faça $b = c$, e volte ao passo 1.

O intervalo (a,b) é dividido pela metade cada vez que fizermos o passo 1 ao 3. A condição 2 será satisfeita eventualmente, e com isso a condição $(\alpha - c) \leq \varepsilon$ será satisfeita.

Exemplo: Calcular a raiz da função $f(x) = xlog(x) - 1$ no intervalo $[2,3]$, com $\varepsilon = 0,001$

$$x_0 = \frac{2+3}{2} = 2,5 = \begin{cases} f(2) < 0 \\ f(3) > 0 \\ f(2,5) < 0 \end{cases}$$

logo o intervalo se restringe a $[2,5;3]$, pois $f(3)\cdot f(2,5)\leq 0$, fazendo a nova iteração obtemos

$$x_1 = \frac{2,5+3}{2} = 2,75 = \begin{cases} f(2,5) < 0 \\ f(3) > 0 \\ f(2,75) < 0 \end{cases}$$

Repetindo esse processo, ao final de 10 iterações chegaremos a raiz, da função que é $\alpha = 2,5061816$.

3.1.1 Algoritmo

1. Dados iniciais:

   X inicial (A) = 1

   X inicial (B) = 2

   Precisão 0,001

2. Função

   $x^6 - x - 1$

3. Calcular

Terminado o processo, teremos um intervalo [1,2] que contém a raíz

tal que $(a-b) < \varepsilon$ e uma aproximação X para a raiz exata.

$f(x) = x^6 - x - 1 = 0,1,2]$ $\varepsilon = 0,001$

k	a	b	c	$erro$	$f(c)$
1	1,0000	2,0000	1,5000	0,5000	8,8906
2	1,0000	1,5000	1,2500	0,2500	1,5647
3	1,0000	1,2500	1,1250	0,1250	-0,0977
4	1,1250	1,2500	1,1875	0,0625	0,6167
5	1,1250	1,1875	1,1562	0,0312	0,2333
6	1,1250	1,1562	1,1406	0,0156	0,0616
7	1,1250	1,1406	1,1328	0,0078	-0,0196
8	1,1328	1,1406	1,1367	0,0039	0,0206
9	1,1328	1,1367	1,1348	0,0020	0,0004
10	1,1328	1,1348	1,1338	0,00098	-0,0096

Tabela 2: Iterações método da bisseção

Repare pela tabela que a raiz encontrada foi $c = 1,1338$, e que o critério de parada $b - c = 0,00098 < \varepsilon$, ou seja menor que a tolerância estabelecida.

3.1.2 Estudo da convergência

Suponhamos $f(x)$ contínua no intervalo [a,b] e que $f(a) \cdot f(b) < 0$, é intuitivo que o método da bisseção vai gerar uma sequência para x_k que converge para a raiz.

No entanto a prova analítica requer algumas considerações, suponhamos que$[a_0, b_0]$ seja o intervalo inicial e que a raíz α seja única no mesmo intervalo. O método da bisecção gera três sequências:

(a_k): não-decrescente e limitada superiormente por b_0; então $\exists$ r $\in$ aos reais tal que:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = r$$

(b_k): não-crescente e limitada inferiormente por a_0; então $\exists$ s $\in$ aos reais tal que:

$$\lim_{k\to\infty} b_k = s$$

(x_k): onde $(x_k = a_k + b_k/2)$, temos $a_k < x_k < b_k$,$\forall$ k.

A amplitude de cada intervalo gerado é a metade do intervalo anterior.

Assim, $\forall$ k:

$$b_k - a_k = \frac{b_0 - a_0}{2^k}$$

Então:

$$\lim_{k\to\infty} b_k - a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{b_0 - a_0}{2^k} = 0$$

$$\lim_{k\to\infty} b_k - \lim_{k\to\infty} a_k = 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} b_0 = \lim_{k\to\infty} a_0,$$

Então $r = s$.

Seja $t = r = s$ o limite das duas sequências, então

$$\lim_{k\to\infty} x_k = t.$$

Resta provar que t é a raíz da função, ou seja, $f(t) = 0$.

Em cada iteração k temos $f(a_k) \cdot f(b_k) < 0$. Então,

$$0 \geq \lim_{k \to \infty} f(a_k) f(b_k) = \lim_{k \to \infty} f(a_k) \lim_{k \to \infty} f(b_k) = f(\lim_{k \to \infty} a_k) f(\lim_{k \to \infty} b_k) =$$

$$f(r)f(s) = f(t)f(t) = [f(t)]^2.$$

Assim, $0 \geq [f(t)]^2 \geq 0$, onde $f(t) = 0$.

Portanto $\lim_{k \to \infty} x_k = t$ e t é zero da função.

Concluímos, que o método da bisseção gera uma sequência convergente sempre que que f for contínua em [a,b] com $f(a) \cdot f(b) < 0$.

3.1.3 Critério de Parada

O processo iterativo é finalizado quando se obtém um intervalo cujo tamanho é menor ou igual à precisão estabelecida e, então, qualquer ponto nele contido pode ser tomado como uma estimativa para a raiz; ou quando for atingido um número máximo de iterações estabelecido.

3.1.4 Estimativa do número de iterações

Dada uma precisão ε e um intervalo inicial $[a, b]$, é possível saber, quantas iterações serão feitas pelo método da bisecção até que se obtenha $b - a < \varepsilon$, usando o algoritmo da bisecção. Vimos que:

$$b_1 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{2}$$

$$b_2 - a_2 = \frac{b_0 - a_0}{4}$$

$$b_3 - a_3 = \frac{b_0 - a_0}{8}$$

$$\vdots$$

$$b_k - a_k = \frac{b_0 - a_0}{2^k}$$

Fazendo $b_k - a_k < \varepsilon$

$$\frac{b_0 - a_0}{2^k} < \varepsilon$$

$$2^k < \frac{b_0 - a_0}{\varepsilon}$$

$$k \cdot log(2) > log(b_0 - a_0) - log(\varepsilon)$$

$$k > \frac{log(b_0 - a_0) - log(\varepsilon)}{log(2)}.$$

Portanto se k satisfaz a relação acima, ao final da iteração k teremos o intervalo$[a,b]$ que contém a raiz ε, tal que $\forall x \in [a,b] \Rightarrow |x-\varepsilon| \leq b-a < \varepsilon$.

Por exemplo, se desejarmos encontrar o α, o zero da função $f(x) = x^2 + x - 6$ que está no intervalo (1,2), com precisão $\varepsilon = 10^{-2}$, devemos efetuar

$$k > \frac{log(2-1) - log(10^{-2})}{log(2)} = \frac{2}{0,3010} = 6,64 \Rightarrow k = 7 iterações.$$

3.1.5 *Observações finais*

Há várias vantagens do método da bisecção. A principal é que o método sempre converge, além disso o erro é diminuído pela metade a cada nova iteração.

Conforme foi demonstrado, o método da bisecção gera uma sequência convergente, ou seja, sempre será possível obter um intervalo que contenha a raiz da equação em estudo, sendo que o comprimento deste intervalo final satisfaz a precisão requerida.

As iterações envolvem cálculos simples.

A principal desvantagem do método da bisecção é que geralmente converge mais lentamente que a maioria dos outros métodos. Se a função f tem derivadas contínuas, outros métodos são normalmente mais rápidos. Esses métodos podem não convergir, porém quando convergem sempre são muito mais rápidos que o da bisecção.

3.2 Método da Falsa Posição

Queremos encontrar a raiz de uma função f, ou seja, encontrar o α na qual $f(\alpha)$ mais se aproxime de zero. Precisamos, primeiro, localizar a raiz, ou seja, definir o intervalo onde ela se encontra:

Suponha a raiz entre a e b.

Uma vez definido o intervalo, traçamos uma reta que passe por a e b. Esta reta irá cortar o eixo X em um ponto, c, que é uma aproximação da raiz:

Para calcular a próxima aproximação, d, iremos utilizar c, e um dos outros pontos: b ou a.

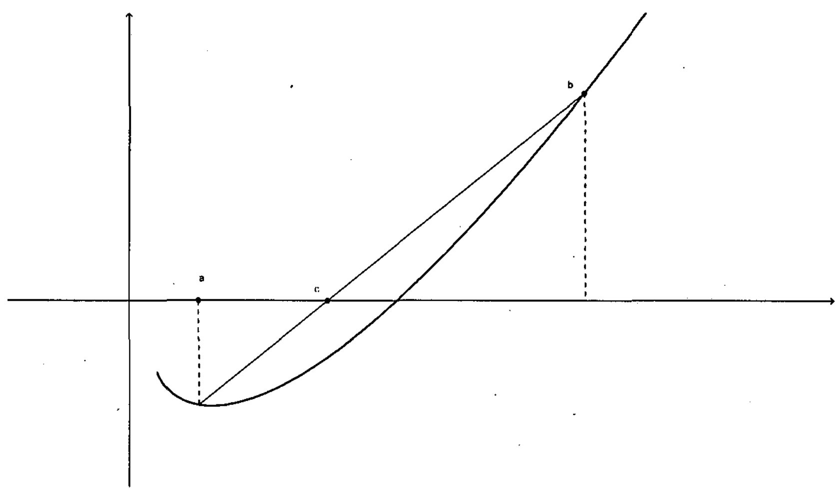


Figura 4: Gráfico Falsa Posição

Devemos escolher o ponto x_k de modo que $f(x_3).f(x_k) < 0$ (ou seja, um está acima do eixo X e o outro, abaixo).

Observando o gráfico, é fácil perceber que a interseção da reta que passa por $f(c)$ e $f(a)$ com o eixo X está bastante próxima da raiz que estamos procurando.

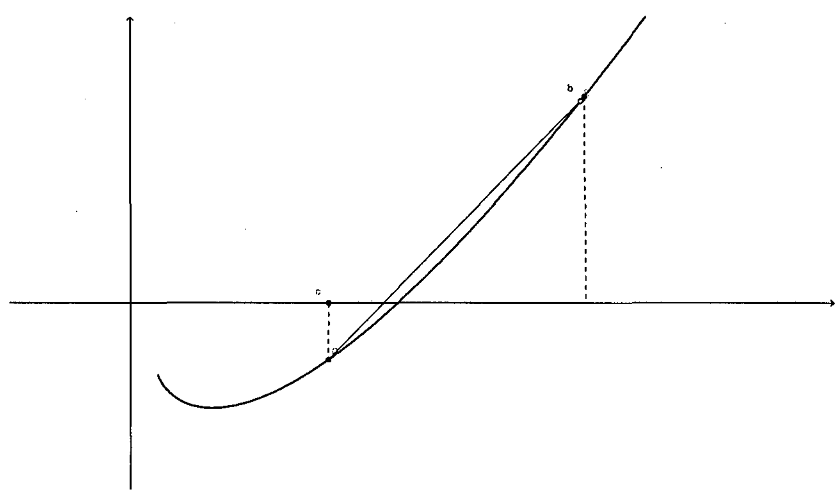


Figura 5: Gráfico Falsa Posição

No caso do método da bisseção, c é a média aritmética entre a e b. Em vez de tomar a média aritmética o método da posição falsa toma a média aritmética ponderada entre dois pontos b e a com pesos $|f(b)|$ e $|f(a)|$, respectivamente:

$$x = \frac{a|f(b)| + b|f(a)|}{|f(b)| + |f(a)|} = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}.$$

Este é o método da posição falsa.

3.2.1 *Algoritimo*

1. Dados iniciais:

   X inicail (A) = 1

   X inicial (B) = 1,5

   Precisão 0,001

2. Função

   $x^6 - x - 1$

3. Calcular

$f(x) = x^6 - x - 1 = 0$, em $[a;b]$=$[1;1,5]$ e $\varepsilon < 0,001$.

k	a	$f(a)$	b	$f(b)$	x	$f(x)$	erro
1	1	-1	1,5	8,890625	1,0505529	-0,70621759	
2	1,0505529	-0,70621759	1,5	8,890625	1,0836271	-0,4645069	0,033074152
3	1,0836271	-0,4645069	1,5	8,890625	1,1043011	-0,29077004	0,020674011
4	1,1043011	-0,29077004	1,5	8,890625	1,1168327	-0,17626564	0,01253158
5	1,1168327	-0,17626564	1,5	8,890625	1,1242817	-0,10474955	0,0074489963
6	1,1242817	-0,10474955	1,5	8,890625	1,1286568	-0,061509186	0,0043751739
7	1,1286568	-0,061509186	1,5	8,890625	1,1312083	-0,035863539	0,0025514604
8	1,1312083	-0,035863539	1,5	8,890625	1,13269	-0,020824074	0,0014816773
9	1,13269	-0,020824074	1,5	8,890625	1,1335483	-0,012062298	0,00085832183

Tabela 3: Iterações método da Posição Falsa

Caso tivéssemos escolhido o intervalo $[1,2]$, como no método da bisseção, teríamos gerado 22 iterações, ou seja, iria convergir muito lentamente.

3.2.2 *Estudo da Convergência*

A idéia usada para provar a convergência do Método da Posição Falsa é a mesma utilizada na no método da bisseção, ou seja, usando sequências (a_k), (x_k) e (b_k). Vamos analisar aqui a convergência geométrica do método da Posição Falsa.

Analisando o gráfico da convergência fica fácil perceber de maneira intuitiva que o método da posição falsa sempre convergirá.

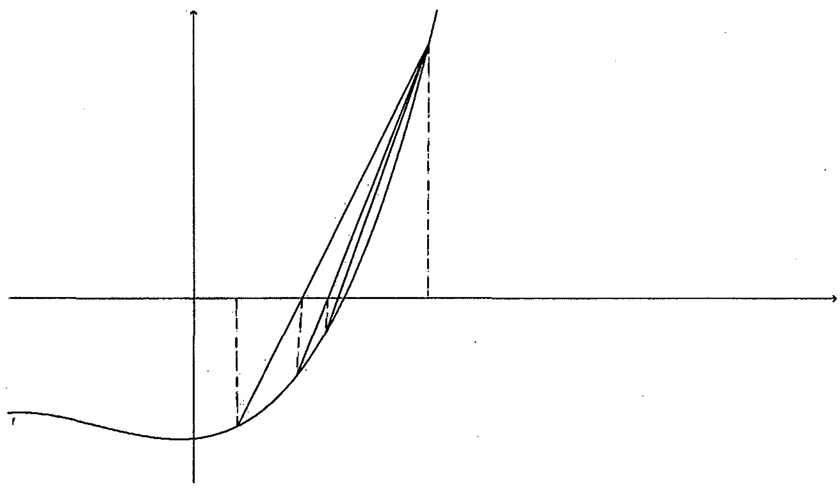


Figura 6: convergencia geométrica falsa posição

3.2.3 Critério de Parada

O processo iterativo é finalizado quando se obtém x_k, $k = 0, 1, 2, ...$; tal que $|f(x_k)|$ seja menor ou igual a uma precisão estabelecida e, então, x_k é tomado como uma estimativa para a raiz; ou quando for atingido um número máximo de iterações estabelecido.

3.2.4 Considerações Finais

O Método da Falsa Posição é um excelente método quando o intervalo escolhido para a raiz é pouco preciso. Em último caso podemos simplesmente escolher dois pontos x que tenham f(x) de sinais opostos e aplicar o método.

Em contra-partida, sua convergência é lenta.

3.3 Método de Newton

Considere o gráfico $y = f(x)$ mostrado abaixo. em que x_0 é uma estimativa da raiz. Para melhorar essa estimativa , traçamos a reta tangente ao gráfico no ponto $(x_0, f(x_0))$. Se x_0 for próximo da raiz, esta reta deveria ser quase coincidente com o gráfico de $y = f(x)$, então a raiz da reta se aproxima da raiz da função $f(x)$.

Considerando o declive da da reta tangente à função $f(x)$, nós sabemos que o cálculo do declive da reta no ponto $(X_0, f(x_0))$ é $f'(x)$. Podemos também calcular o declive através da forma:

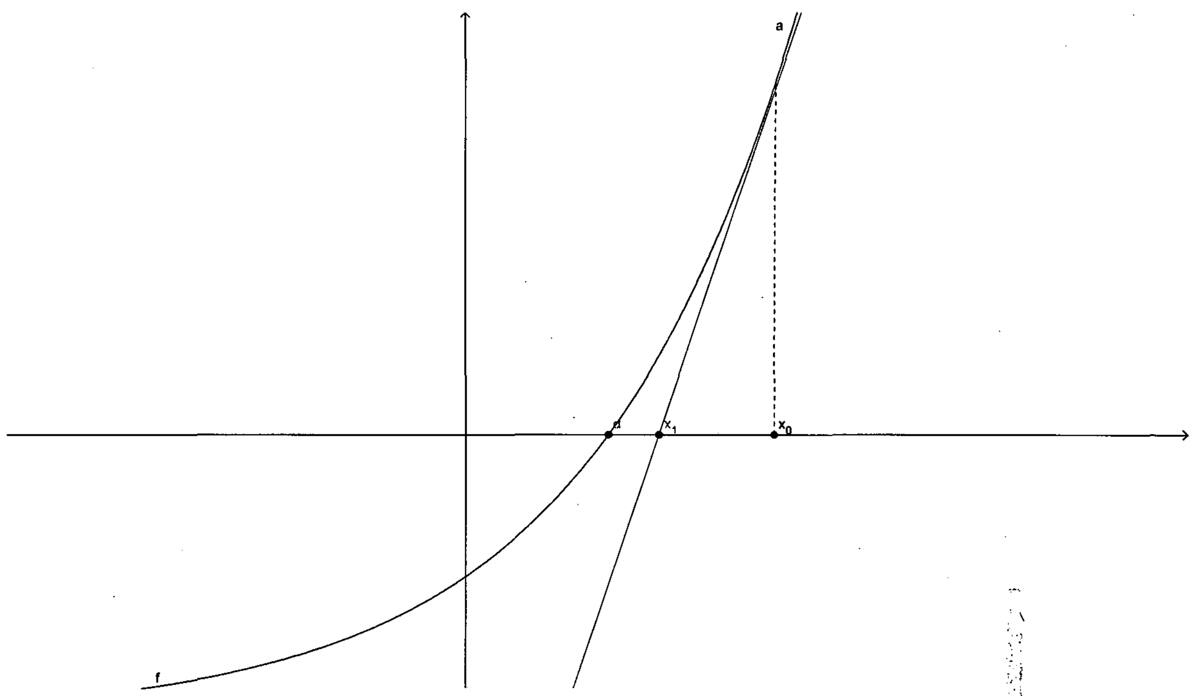


Figura 7: Gráfico método de Newton

$$\frac{f(x_0)-0}{x_0-x_1},$$

que é a diferença nas coordenas do eixo das ordenas pela diferença das coordenadas no eixo das abcissas, que se trata da própria derivada.

$$f'(x_0)=\frac{f(x_0)}{x_0-x_1}.$$

Isolando o x_1 obtemos:

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Nesse caso x_1, é um valor melhorado de x_0 para a raíz da função. Este procedimento pode ser repetido obtendo um novo valor estimado

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Repetindo este processo, chegamos a uma sucessão de número x_1, x_2, x_3,...x_k, que nos permitirão chegar ao zero da função, e eles podem ser definidos pela fórmula geral.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, k = 0, 1, 2, \ldots$$

A idéia do método de Newton é que, se a tangente aproxima a curva, então sua interseção com o eixo x aproxima o ponto de interseção da curva com esse eixo, isto é, o ponto x em que $f(x) = 0$.

Exemplo: Consideremos a equação $x^3 + x - 3$, e $x_0 = 1,5$.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x - \frac{x^3 + x - 3}{3x^2 + 1}$$

Temos,

$$x_1 = 1,5 - \frac{1,875}{7,75} = 1,2580645$$

$$x_2 = 1,2580645 - \frac{0,24923635}{5,748179} = 1,2147053$$

$$x_3 = 1,2147053 - \frac{0,0070140387}{5,4265271} = 1,2134128$$

$$x_4 = 1,2134128 - \frac{6,0859794E-6}{5,4171118} = 1,2134117$$

A raíz encontrada foi $\alpha = 1,2134117$.

3.3.1 Algoritimo

Resolver a equação $f(x) = x^6 - x + 1 = 0$.

Primeiro encontramos a derivada da função que é $f'(x) = 6x^5 - 1$

A fórmula utilizada foi a seguinte:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^6 - x_k - 1}{6x^5 - 1}$$

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$x_k - x_{k-1}$
1	1,5	8,890625	44,5625	
2	1,300490884	2,537264143	21,31967215	0,199509116
3	1,181480416	0,538458584	12,81286882	0,119010467
4	1,13945559	0,049235251	10,52492924	0,042024826
5	1,134777625	0,000550324	10,29028931	0,004677965
6	1,134724145	7,11E-08		5,35E-05

Tabela 4: Tabela de iterações do método de Newton

Usando $x_0 = 1,5$. os resultados são mostrados na tabela acima. A raiz da função é $\alpha = 1,134724138$. O método de Newton pode convergir lentamente no inicio, mas no decorrer das iterações a velocidade de convergência aumenta, como é mostrado na tabela.

3.3.2 *Estudo da convergência*

Dados $f : I \longrightarrow \Re$, possui derivada segunda contínua $f" : I \longrightarrow \Re$, com $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in int\ I$, então cada ponto $\alpha \in int\ I$, onde $f(\alpha) = 0$ tem uma vizinhança $J = [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$, tal que começando com qualquer valor inicial $x_0 \in J$, a sequência de pontos $x_{n+1} = N(x_k)$ converge para α

$$N(x_k) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

A derivada $N'(x) = f(x)f"(x)/f'(x)^2$ se anula no ponto $x = \alpha$. Tendo que N'(x) é contínua, se fixarmos arbitrariamente $k \in (0,1)$ obteremos $\delta > 0$ tal que $J = [\alpha - \delta, \alpha + \delta] \subset I$ e $N'(x) \leq k < 1$ para todo $x \in J$. Afirmamos que $x \in J \Rightarrow$N(x)$\in J$. De fato $x \in J \Rightarrow |N(x) - N(a)| \leq k|x - a| \leq |x - a| \leq \delta \Rightarrow$N(x)$\in J$. Portanto , $N : J \longrightarrow J$ é uma contração. Logo a sequência $x_1 = N(x_0)$, $x_{n+1} = N(x_n)$ converge para o único ponto fixo $\alpha \in J$ da contração N. Isto demonstra que o método de Newton é convergente, desde que assuma x_0 próximos da raiz.

A função acima não converge porquê o x_0 estipulado, não está próximo da raiz. Outra vantagem do método de Newton é que ele converge quadraticamente, vejamos a demonstração abaixo:

De [2], obtemos que se $f(c) = 0$ e existem $\delta > 0$ e $k > 0$, tais que

$$\left| \frac{f(x)f"(x)}{f'(x)^2} \right| \leq k < 1, \forall x \in [c - \delta, c + \delta],$$

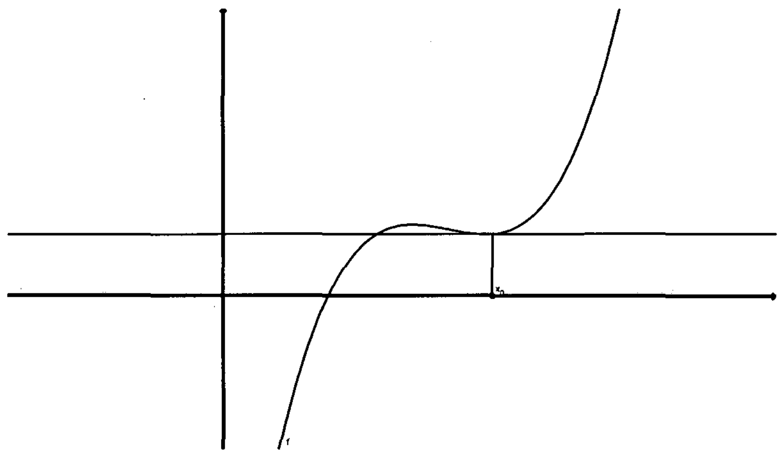


Figura 8: Exemplo de uma função que não converge

então o método de Newton gera uma sequência (x_n), com $\frac{lim}{x \longrightarrow \infty} x_n = c$. Ainda de [2], temos que o método de Newton é muit bom se existem A, B, $\delta > o$, tais que

$$|f''(x)| \leq Ae\left|f'(x)\right| \geq B, \forall x \in [c-\delta, c+\delta]$$

então

$$|x_n - c| \leq \frac{A}{2B}|x_n - c|^2$$

que é chamada de convergência quadrática. Quando $|x_n - c| < 1$ o quadrado $|x_n - c|^2$ é muito menor. o que exibe a rapidez de convergência no método de Newton.

Exemplo: Resolvendo a equação $f(x) = x^2 - 8$, com $x_0 = 2$.

$x_0 = 2$

$x_1 = 3$

$x_2 = 2,833333333333333333$

$x_3 = 2,\underline{8284}31372549 01961$

$x_4 = 2,\underline{82842712474}937982$

$x_5 = 2,\underline{8284271247461901}$

Os dígitos sublinhados são os dígitos decimais corretos de cada valor obtido.

Observamos que esses dígitos corretos começam a surgir após x_3 e a partir deles a quantidade de dígitos corretos praticamente quadruplica. Isto se deve ao fato do Método de Newton ter convergência quadrática.

3.3.3 Critérios de parada

O processo iterativo é finalizado quando é obtido x_k tal que $|x_k - x_{k-1}|$ ou $|f(x_k)|$ é menor ou igual a uma precisão estabelecida e, então, x_k é tomado como uma estimativa para a raiz; ou quando for atingido o número máximo de iterações estabelecido.

3.3.4 Considerações Finais

Uma das vantagens do método de Newton é que ele converge quadraticamente, ou seja, de maneira muito rápida, mas desde que sejam obedecidas certas condições.

A desvantagem é que temos que escolher um ponto x_0, próximo da raiz, se não, a sequência pode não convergir, e também o cálculo do método de Newton pode tornar-se complicado, devido ao fato da necessidade de se conhecer a derivada da função. Uma solução para isso é fazer uma aproximação desse método, excluindo a necessidade de se calcular a derivada da função, essa aproximação nada mais é do que o método da secante que veremos a seguir.

3.4 Método da Secante

O Método de Newton consiste em aproximar o gráfico $y = f(x)$, com uma reta tangente e usar a raiz dessa reta como aproximação para a raiz da função $f(x)$. Desta perspectiva outras retas também conduzirão a uma aproximação direta para a raiz de $f(x)$. Uma dessas maneiras é o método da secante.

Assumindo duas aproximações iniciais para a raiz da função, que denotaremos por x_0 e x_1, eles podem acontecer em lados opostos do gráfico como na figura 9. Os dois pontos $(x_0, f(x_0))$ determinam uma linha reta que chamamos de linha da secante. Esta linha é uma aproximação ao gráfico de $f(x)$. e o valor x_2 é uma aproximação de α.

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{0 - f(x_1)}{(x_2 - x_1)}$$

Isolando o x_2, obtemos

$$x_2 = x_1 - f(x_1) \cdot \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}$$

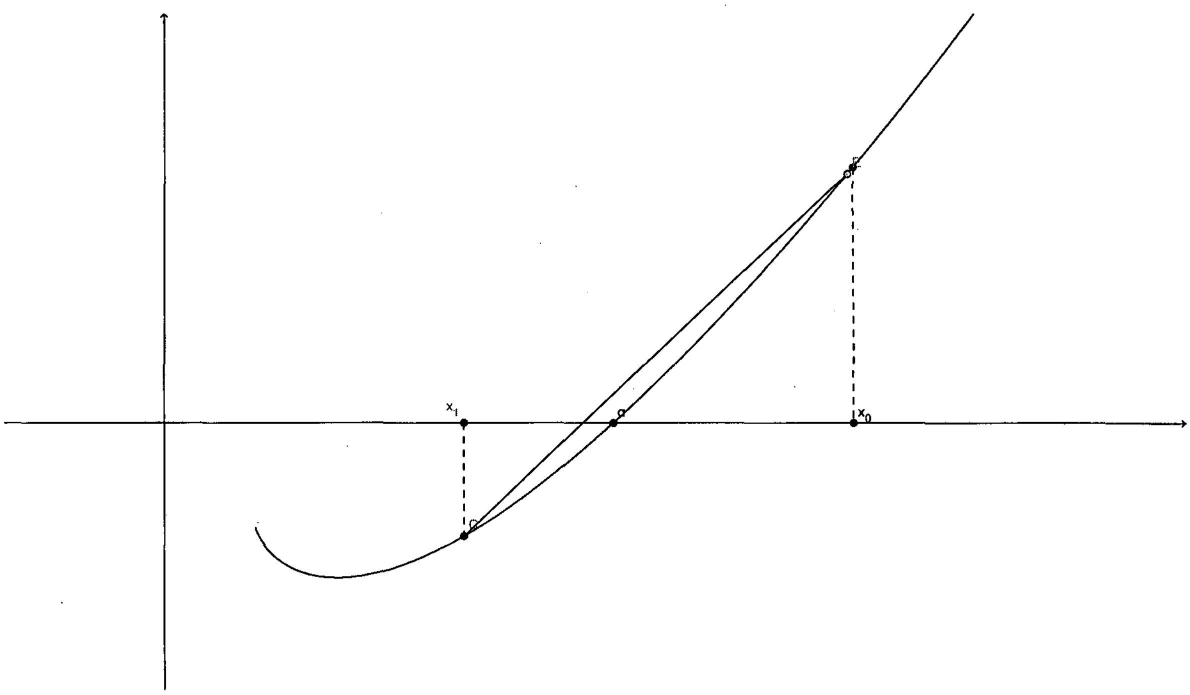


Figura 9: Esquema método Secante, com $x_0 < \alpha < x_1$

Uma vez que encontramos x_2, tornamos x_0 desnecessário e usando x_1 e x_2 como um novo conjunto de valores aproximados para α, podemos encontrar x_3, que é um valor melhorado para a raiz; e este processo pode ser continuado indefinidamente. Assim obtemos a fórmula genérica

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \cdot \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}, k \geq 1$$

Este é o método da secante. Ele é conhecido como método de dois pontos, desde que são necessários dois valores aproximados para obtermos um valor aperfeiçoado. O método da bisseção também é um método de dois pontos, mas o método da secante quase sempre convergirá mais rapidamente que o da bisecção.

Exemplo: Consideremos a expressão $f(x) \equiv x^2 + x - 6 = 0$ no intervalo $x_0 = 1,5$ e $x_1 = 1,7$.

$$x_2 = 1,7 - (-1,41)\left[\frac{1,7-1,5}{(-1,41)-(-2,25)}\right] = 2,03571$$

$$x_3 = 2,03571 - 0,17982\left[\frac{2,03571-1,7}{0,17982-(-1,41)}\right] = 1,99774$$

$$x_4 = 1,99774 - (-0,01131)\left[\frac{1,99774 - 2,03571}{(-0,01131) - (0,17982)}\right] = 1,99999$$

Observamos que o método da secante requer dois valores iniciais, e não há nenhuma necessidade de calcular qualquer derivada tornando o cálculo mais simples que feito pelo método de Newton, necessitando apenas o cálculo de uma nova função a cada iteração.

3.4.1 Algoritimo

1. Dados iniciais:

   X zero (x0) = 1,5

   X um (x1) = 1,7

   Precisão 0,001

2. Função

   $x^6 - x - 1$

3. Calcular

$f(x) = x^6 - x - 1 = 0$, em $[a;b]$=$[1,5;1,7]$ e $\varepsilon < 0,001$

k	x_{k+1}	x_k	x	$f(x_k)$	erro
1	1,7	1,5	1,3582822	3,9214352	ada
2	1,5	1,3582822	1,2464457	1,5036307	0,11183
3	1,3582822	1,2464457	1,1768946	0,48031261	0,0695510
4	1,2464457	1,1768946	1,1442496	0,10027591	0,0326450
5	1,1768946	1,1442496	1,1356359	0,0094005294	0,0086136
6	1,1442496	1,1356359	1,1347449	0,00021321763	0,00089103

Tabela 5: Tabela de iterações do método a Secante

3.4.2 Estudo da Convergência

A convergência no Método da Secante se dá da mesma forma que no método de Newton, pois este é uma aproximação do método de Newton.

A convergência não é de ordem quadrática, mas sim da ordem superlinear, representada pela proporção áurea,

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$$

Esse resultado só vale sob certas condições técnicas; a saber, f deve ser duas vezes continuamente diferenciável e a raiz em questão deve ser simples (isto é, não deve ser uma raiz múltipla).

Se os valores iniciais não estiverem próximos da raiz, não se pode garantir que o método das secantes convirja.

3.4.3 Critérios de parada

O critério de parada para este método é o mesmo de Newton, já que este método é uma aproximação do método de Newton.O processo iterativo é finalizado quando é obtido x_k tal que $|x_k - x_{k-1}|$ ou $|f(x_k)|$ é menor ou igual a uma precisão estabelecida e, então, x_k é tomado como uma estimativa para a raiz; ou quando for atingido o número máximo de iterações estabelecido.

3.4.4 Considerações Finais

A principal vantagem do método da secante é a não necessidade de se calcular a derivada da função, tornando assim o processo iterativo mais simples

Uma desvantagem é que se os valores iniciais escolhidos forem muito próximos, estes podem não convergir, e também sua convergência se dá de maneira mais lenta que a do método de Newton, já que sua convergência é super linear enquanto a de Newton é quadrática.

4 COMPARAÇÃO ENTRE OS MÉTODOS

Finalizando este trabalho realizaremos alguns testes com o objetivo de comparar os vários métodos.

Esta comparação leva em conta vários critérios entre os quais: garantias de convergência, rapidez de convergência, esforço computacional.

Conforme foi constatado no estudo teórico os métodos da Bisecção e da Posição Falsa têm convergência garantida desde que a função seja contínua no intervalo $[a,b]$ e que $f(a)f(b) < 0$. Os métodos de Newton e da Secante tem condições mais restritivas à convergência. Porém uma vez que as condições de convergência sejam satisfeitas, os dois últimos convergem mais rápido que os dois primeiros.

O esforço computacional é medido, pelo número de operações efetuadas a cada iteração, da complexidade destas operações, do número de deduções lógicas e do número de iterações.

Percebemos então que é muito difícil tirar conclusões a respeito da eficiência computacional de um método, pois, por exemplo, o método da bisecção efetua cálculos mais simples que o método de Newton, no entanto, o número de iterações do método da bisecção geralmente é maior que o do método de Newton.

Caso a convergência esteja assegurada, a ordem de convergência fosse alta e os cálculos de iterações fossem simples, o método de Newton é o mais indicado, sempre que ficar claro as condições de convergência e que o cálculo de $f'(x)$ não seja muito trabalhoso. Nos caso em que é muito elaborado obter ou avaliar $f'(x)$, é aconselhável usar o método da secante, uma vez que esse é o método que converge mais rapidamente, entre os outros dois métodos.

Outro detalhe é o critério de parada, pois se o objetivo for reduzir o intervalo que contém a raiz, não se deve utilizar o método da posição falsa, pois este pode não atingir a precisão estipulada, nem secante ou Newton, que trabalha exclusivamente com aproximações para a raiz.

Após estas considerações, concluímos que a escolha do método está diretamente relacionada com o comportamento da função no intervalo que contém a raiz, as dificuldades em calcular $f'(x)$, entre outras.

4.1 Exemplo 1.

$f(x) = x^3 - x - 1$, com $[1,2]$ e $\varepsilon = 10^{-6}$

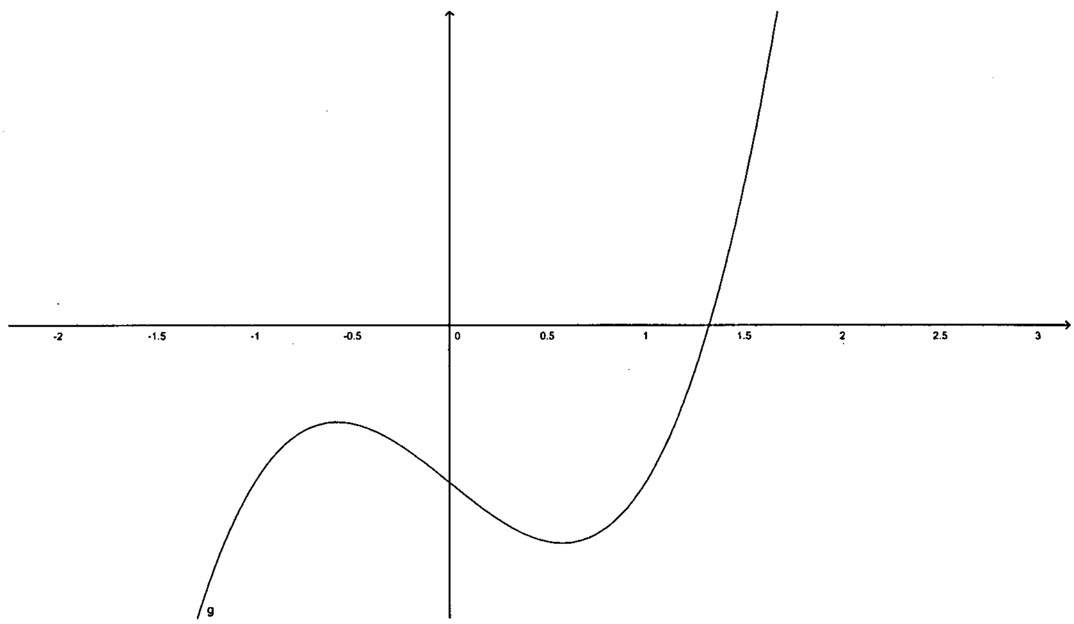


Figura 10: Exemplo 1, Comparação entre métodos

-	Dados iniciais	x	$f(x)$	erro	Nº de iterações
Bisseção	[1,2]	1,324718	2,209495E-6	2,879637E-6	21
Falsa Posição	[1,2]	1,324715	-1,087390E-5	2,614434E-6	17
Newton	$x_0 = 1$	1,324718	1,8233E-7	1,092171E-6	7
Secante	[0, 1/2]	1,324718	1,417347E-9	1,221868E-6	8

Tabela 6: Exemplo 1, Comparação entre métodos

4.2 Exemplo 2.

$f(x) = x^2 - x - 1$, com $[1,3]$ e $\varepsilon = 10^{-6}$

	Dados iniciais	x	$f(x)$	erro	Nº de Iterações
Bisseção	[1;2,5]	2	2,384186000E-06	7,152561000E-07	20
Falsa Posição	[1;2,5]	2	-2,479001000E-06	8,548295000E-08	42
Newton	$x_0 = 1$	2	5,820766000E-09	5,820766000E-10	4
Secante	$x_0 = 1$ e $x_1 = 1,2$	2	-4,230246000E-08	9,798250000E-06	5

Tabela 7: Exemplo 2, Comparação entre métodos

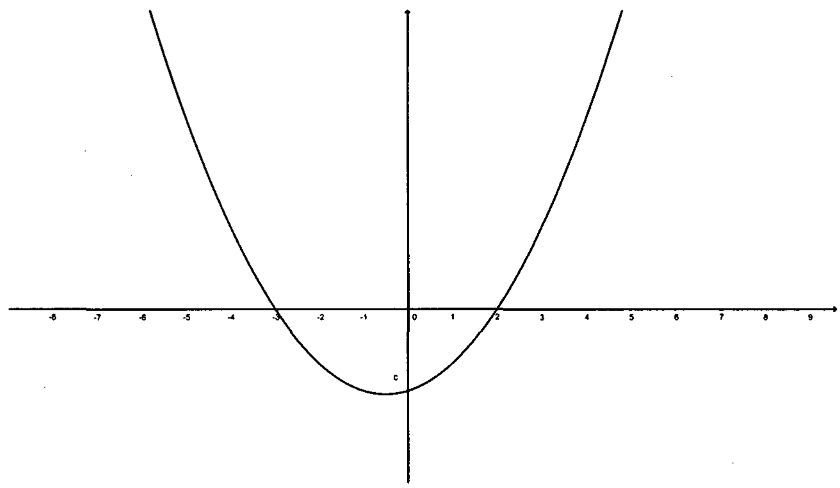


Figura 11: Exemplo 2, Comparação entre métodos

4.3 Exemplo 3.

$f(x) = xlog(x) - 1$, com $[2,3]$ e $\varepsilon = 10^{-7}$

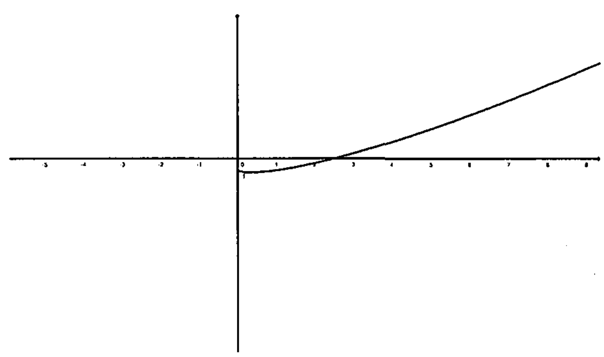


Figura 12: Exemplo 3, comparação entre métodos

	Dados iniciais	x	$f(x)$	erro	N° de Iterações
Bisseção	[2,3]	2,506184413	1,2573E-08	5,9605E-08	24
Falsa Posição	[2,3]	2,50618403	-9,9419E-08	0,49381442	5
Newton	$x_0 = 2,5$	2,50618415	4,6566E-10	3,9879E-6	2
Secante	$x_0 = 2,3$ e $x_1 = 2,7$	2,50618418	2,9337E-08	8,0561E-05	3

Tabela 8: Exemplo 3, Comparação entre métodos

4.4 Exemplo 4.

Como já foi mostrado na parte teórica deste trabalho, o método de Newton pode não convergir se o ponto x_0 escolhido não for próximo da raiz, uma solução para isso é diminuir o intervalo estudado através do método da bisecção, para determinar um melhor valor para x_0.

Dado a função $f(x) = x^3 - 3,5x^2 + 4x - 1,5 = (x-1)^2(x-1,5$ com $\varepsilon = 10^{-2}$

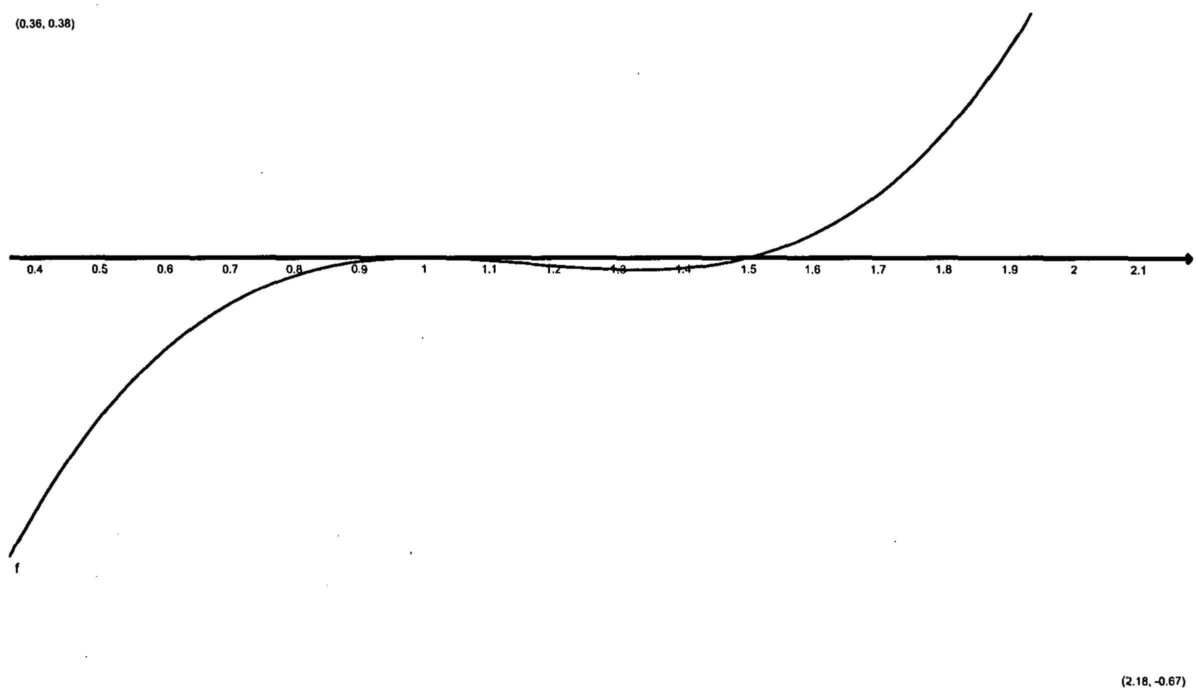


Figura 13: Exemplo 4, Comparação entre os métodos

Ou seja a função tem raiz 1 como raiz dupla e 1,5 como raiz simples.

Aplicando o método da bisseção no intervalo de $[0,5;2]$

iterações	x_0	x_1	x	f(x)	erro
1	0,5	2	1,25	-0,01563	0,015625
2	1,25	2	1,625	0,048828	0,048828
3	1,25	1,625	1,4375	-0,01196	0,011963
4	1,4375	1,625	1,53125	0,00882	0,00882

Tabela 9: Exemplo 4, método da bisseção

Encontramos ao final de 4 iterações a raiz 1,53125, isso porquê o método da bisecção exclui as raízes duplas, mas podemos perceber ainda que não é uma aproximação muito exata da raiz. Se quiséssemos uma aproximação mais próxima, o teríamos que diminuir o erro, e então teríamos um número muito grande de iterações.

Para resolver esse problema precisamos restringir o intervalo da função, o que já foi feito pelo método da bisecção. Vamos restringir esse intervalo ao ponto médio do ultimo intervalo mostrado na tabela acima $[1,4375;1,625]$ que é $x_[0 = 1,5312$.

Aplicando esse valor inicial ao método de Newton encontramos agora

Agora encontramos um valor realmente da raiz $\alpha = 1,50000001$, ao todo foram necessárias

iterações	x_0	$f(x)$	$f'(x)$	erro
1	1,53120000	0,00880381	0,31532032	0,00880381
2	1,50327978	0,00083074	0,25659184	0,00083074
3	1,50004220	0,00001055	0,25008440	0,00001055
4	1,50000001	0,00000000		0,00000000

Tabela 10: Exemplo 4, método de Newton

8 iterações, caso tivéssemos feito pelo método da bisseção seriam necessárias 24 iterações.

5 CONCLUSÕES

Neste trabalho, desenvolvemos um estudo numérico do problema de obter zeros de funções. Estudamos vários métodos iterativos entre eles alguns que não usam derivadas como o métodos da secante e posição falsa. Em problemas com várias variáveis estes métodos podem ser muito úteis, pois embora percam um pouco da velocidade de convergência, suas iterações são mais econômicas. Embora o método da bisecção também não use derivadas, sua convergência é lenta e, em geral, não é muito utilizado. A vantagem deste método é que ele apresenta convergência a partir de qualquer ponto inicial, o que nem sempre acontece com os outros métodos que estudamos. Assim podemos cogitar que uma boa estratégia seria combinar o método da bisecção com os outros métodos quando estes últimos falham a partir de algum ponto inicial desfavorável.

Muito interessante também foi a abordagem dos métodos numéricos e o entendimento da importância da programação e implementação dos métodos cuja elaboração envolveu conceitos além dos vistos nas disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática.

O texto usa uma linguagem simples que pode ser utilizado por alunos do curso assim como por aqueles que gostam das aplicações dos conceitos fundamentais do cálculo e estejam interessados em aprofundar seus conhecimentos em métodos numéricos

Finalmente, e como comentário pessoal, o presente trabalho foi muito importante como complementação da nossa formação, sendo uma experiência valiosa no desenvolvimento de um trabalho autônomo.

REFERÊNCIAS

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. - *Numerical Methods.* PWS Publishing Company- 1993.

ATKINSON K. - *Elementay Numerical Analysis. John Wiley Sons-2nd .ed., New York, 1993*

STRANG G. Introduction to applied Mathematics, Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, Massachusetts 1986.

CHENEY, C. C.Introduction to Approximation Theory. McGraw Hill, NY, 1996.

Gratzer G. Math into Latex Birkhauser Springer 2000..

DENNIS, J. E. jr.; SCHNABEL, R. B. Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations. SIAM Philadelphia, 1996.

LUENBERGER, D. G. Introduction to Linear and Nonlinear Programming. Addison Wesley Publishing Company. Massachusetts, USA, 1973.

SPIVAK M. Calculus. 3rd. Edition. Publish or Perish, Houston 1994.

PÄRT-ENANDER, E.; SJÖBERG, A. The Matlab Handbook 5. Addison Wesley, Harlow UK, 1999.

ANEXO A - VCN-VISUAL CÁLCULO NUMÉRICO

O software usado neste trabalho para o cálculo dos processos iterativos é o Visual Cálculo Numérico, também chamado de VCN, é um programa que oferece mais de 100 opções de cálculo para estudantes e profissionais de engenharia, computação, matemática ou qualquer curso da área de Exatas.

VCN implementa opções de Tabelamento de Funções (Algoritmos de Parser); Erros e Representação Numérica; Operadores Numéricos (Diferenças Finitas Ascendente, Descendente e Central); Interpolação e Extrapolação Numérica; Derivação Numérica; Integração Numérica; Equações Diferenciais; Matrizes e Sistemas Lineares; Cálculo de Raízes e Zero de Funções; Sistemas não Lineares; Ajuste de Curvas; Aproximações de Funções; Otimização (Programação Linear, Inteira e etc.).

Visual Cálculo Numérico é um programa gratuito para os estudantes.

A.1 Interface do programa

As figura abaixo mostram a interface do programa utilizado para calcular a função $f(x) = x^3 - 5x^2 + x + 3$, no intervalo $[-1,0]$ $\varepsilon = 10^{-3}$ com o método da Bisecção, e $x_0 = -2,44$ e $\varepsilon = 10^{-4}$ no método de Newton.

Fica fácil perceber que o software é bastante intuitivo. A raíz encontrada foi $-0,6455078125$ e ao todo foram efetuadas 10 iterações no método da Bisseção com um erro de 0,0009765625 e 6 iterações no método de Newton com erro de $6,68002196430668611E-6$.

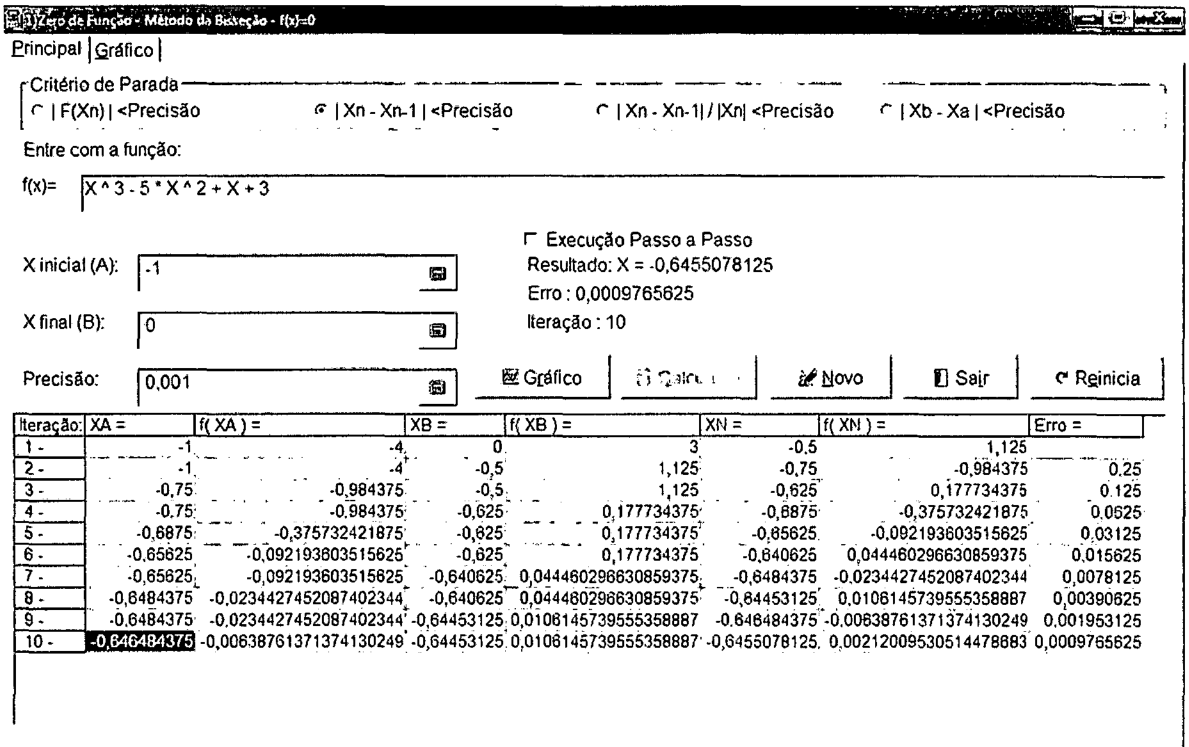


Figura 14: Interface VCN, Método da Bisseção

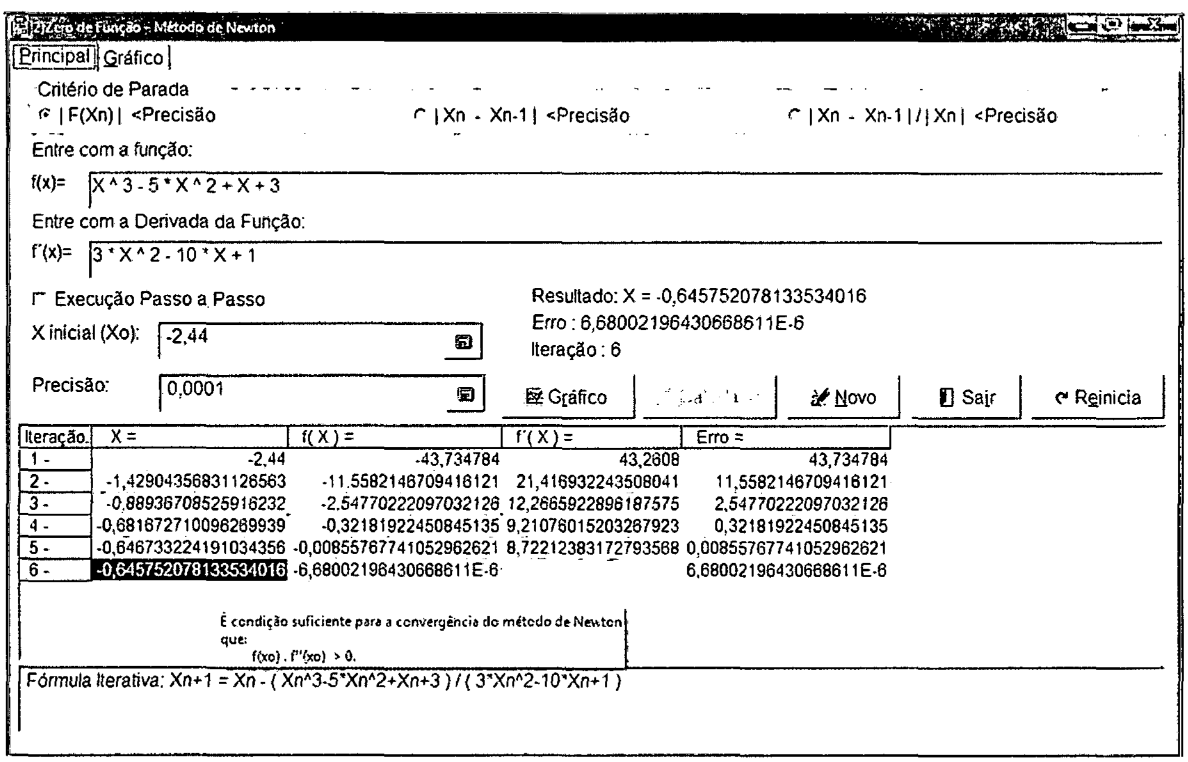


Figura 15: Interface VCN, Método de Newton

ANEXO B – MÉTODO DE NEWTON PARA SISTEMAS DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES

Vamos considerar problemas de mais variáveis discutindo o método de Newton para sistemas de equações não-lineares. Vamos começar derivando o método de Newton para sistemas de equações não-lineares, discutindo suas principais características

O problema mais simples estudado aqui é a solução de um sistema de equações não-lineares:

$$dada \quad F: R^n \rightarrow R^n, \quad encontrar \quad x_* \in R^n \quad tal \quad que \quad F(x_*) = 0 \tag{B.1}$$

onde F é contínua e diferenciável.

Agora vamos derivar o método de Newton para o problema (B.1).

O método de Newton para o problema (B.1) novamente é derivado encontrando a raiz de uma aproximação linear de F na estimativa corrente x_k. Esta aproximação á criada usando as mesmas técnicas do problema de uma variável. Como

$$F(x_k + p) = F(x_k) + \int_{x_k}^{x_k+p} J(z)dz. \tag{B.2}$$

aproximamos a integral em (B.2) pelo termo linear $J(x_k)p$ temos

$$M_k(x_k + p) = F(x_k) + J(x_k)p.$$

Agora basta resolver para o passo p^N que faz $M_k(x_k + p^N) = 0$, resultando na iteração de Newton para (B.1).

$$J(x_k)p^N = -F(x_k),$$
$$x_{k+1} = x_k + p^N. \tag{B.3}$$

Como não esperamos que x_{k+1} se iguale a x_*, mas que seja uma estimativa melhor do que x_k, fazemos da iteração de Newton (B.3) um algoritmo, aplicando-a iterativamente a partir de uma estimativa inicial x_0.

Método de Newton para Sistemas de Equações Não-Lineares

Dada $F : R^n \longrightarrow R^n$ contínua diferenciável e dado $x_0 \in R^n$: em cada iteração k, resolver

$$J(x_k)p_k = -F(x_k),$$

$$x_{k+1} = x_k + p_k.$$

Com exemplo vamos considerar uma iteração para:

$$F(x) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 - 3 \\ x_1^2 + x_2^2 - 9 \end{bmatrix}$$

que tem raízes $(3,0)^T$ e $(0,3)^T$, e seja $x_0 = (1,5)^T$. Então as duas primeiras iterações do Método de Newton são:

$$J(x_0)p_0 = -F(x_0): \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} p_0 = -\begin{bmatrix} 3 \\ 17 \end{bmatrix}, \qquad p_0 = \begin{bmatrix} -\frac{13}{8} \\ -\frac{11}{8} \end{bmatrix},$$

$$x_1 = x_0 + p_0 = (-0.625, 3.625)^T,$$

$$J(x_1)p_1 = -F(x_1): \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{5}{4} & \frac{29}{4} \end{bmatrix} p_1 = -\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{145}{32} \end{bmatrix}, \qquad p_1 = \begin{bmatrix} \frac{145}{272} \\ \frac{-145}{272} \end{bmatrix},$$

$$x_2 = x_1 + p_1 \simeq (-0.092, 3.092)^T.$$

O método de Newton parece estar operando bem neste exemplo, x_2 já está bem próximo da raiz $(0,3)^T$. Esta é a maior vantagem do método de Newton: se x_0 é suficientemente próximo de uma solução. É interessante notar também que se qualquer função componente de F é linear, cada iteração do método de Newton será uma solução dessas equações, já que os modelos lineares que o método irá usar será sempre exato para essas funções. Por exemplo, f_1 é linear no exemplo dado acima, e

$$f_1(x_1) = f_1(x_2) = f_1(x_3) = \dots = 0.$$

Por outro lado, o método de Newton não irá convergir bem começando com estimativas iniciais ruins, como já acontecia nos problemas de uma variável. Por exemplo,

$$F(x) = \begin{bmatrix} e^{x_1} - 1 \\ e^{x_2} - 1 \end{bmatrix}$$

onde $x_* = (0,0)^T$ e $x_0 = (-10,-10)^T$, temos

$$\begin{aligned} x_1 &= (-11 + e^{10}, -11 + e^{10})^T \\ &\simeq (2.2 \times 10^4, 2.2 \times 10^4)^T, \end{aligned}$$

que não é um passo muito bom! Portanto as características da convergência do método de Newton indicam como usá-lo no caso de mais dimensões: sempre vamos querer usá-lo pelo menos nas iterações finais de qualquer algoritmo não-linear para tomar vantagem da sua rápida convergência local.

Porém, devemos ter em mente dois problemas fundamentais na implementação do Algoritmo 1. Primeiro, o Jacobiano de F pode não ser analiticamente disponível. Isto ocorre geralmente em aplicações reais - por exemplo, quando F não é dada de forma analítica. Daí, aproximar $J(x_k)$. Isso é feito generalizando o método da secante, visto anteriormente. Segundo, $J(x_k)$ pode ser singular ou mal-condicionada, e então o sistema linear $J(x_k)p_k = -F(x_k)$ não pode ser resolvido seguramente para o passo x_k.