

Douglas Eduardo Turatti

Um Modelo Heteroscedástico para a  
Previsão da Inflação

**Florianópolis**  
**2013**



Douglas Eduardo Turatti

Um modelo Heteroscedástico para a  
Previsão da Inflação

Dissertação apresentada em cumprimento às exigências do Programa de Pós - Graduação em Economia da Universidade Federal de Santa Catarina, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Economia .

Orientador: Prof. Dr. Guilherme Valle Moura

**Florianópolis**  
**2013**

Turatti, Douglas Eduardo      Um modelo heteroscedástico para a previsão da inflação

49 páginas

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós Graduação-  
Departamento de Economia

1. Previsão da Inflação
2. Modelos de estado-espaco
3. Amostragem por Importância

I. Universidade Federal de santa Catarina. Centro Sócio Econômico.  
Departamento de Economia.

# Comissão Julgadora:

---

Prof. Dr. André Alves Portela Santos  
PPGECO/UFSC

---

Prof. Dr. Roberto Meurer  
PPGECO/UFSC

---

Prof. Dr. João Frois Caldeira  
Membro Externo



# **Agradecimentos**

Agradeço em primeiro lugar a minha família. Agradeço aos amigos do mestrado. Agradeço aos professores do programa de pós-graduação em economia, especialmente ao Prof. Guilherme Valle Moura, pela orientação no desenvolvimento dessa dissertação.





## *Resumo*

Este trabalho estima um modelo de decomposição para a previsão da inflação que tem por característica a robustez a mudanças no processo gerador. O modelo, de estado espaço não linear, não pode ser estimado de forma analítica e deve-se recorrer à integração estocástica pelo método de amostragem por importância eficiente sequencial. Os resultados para mostram que a grande inflação dos anos 70 foi causada por tendência inflacionária, enquanto nos outros períodos os efeitos dos choques são predominantes. Os resultados da previsão fora da amostra confirmaram as expectativas e o modelo prevê melhor a inflação em horizontes curtos que um modelo *benchmark*.

**Palavras-chave:** Previsão da inflação; Modelos de estado-espaço; Amostragem por importância.



## *Abstract*

This thesis estimates a decomposition model to forecast inflation which is characterized by robustness to changes in the data generating process. The nonlinear state space model can not be estimated by analytical methods, therefore we had to apply stochastic integration, especially efficient importance sampling. The results showed that the great inflation of the 70's was caused by inflationary trend, while in others periods the random innovations were the main cause. The pseudo out of sample forecasting acknowledged the expectations and the model forecasts better the inflations in short time periods than some benchmark models.

**Keywords:** Forecast Inflation, State-Space Models, Importance Sampling



# Lista de Figuras

1.1	Estimativa em pequenas amostras da autocorrelação da inflação. . . . .	16
3.1	Volatilidade da Tendência. . . . .	38
3.2	Volatilidade Transitória. . . . .	39
3.3	Autocorrelação da primeira diferença da inflação. . . . .	40
3.4	Inflação e Tendência. . . . .	41
3.5	Corte na log-verossimilhança. . . . .	44



# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Inflação: Previsão e o Modelo</b>	<b>6</b>
1.1 Mudanças na Inflação . . . . .	9
1.2 O Modelo . . . . .	11
1.3 Propriedades do Modelo . . . . .	14
<b>2 Estimação e Filtragem</b>	<b>18</b>
2.1 Amostragem por Importância . . . . .	19
2.2 EIS . . . . .	21
2.3 EIS Sequencial . . . . .	23
2.4 Filtro de Partículas . . . . .	27
2.5 <i>Rao-Blackwellization</i> . . . . .	28

2.6	RB-EIS . . . . .	29
2.7	RB-PF . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Resultados</b>	<b>36</b>
3.1	Perfil da Verossimilhança . . . . .	41
3.2	Previsão . . . . .	44
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>47</b>



## Introdução

A inflação é uma das variáveis macroeconômicas que mais afetam a tomada de decisões dos agentes econômicos, pois sua previsão é fundamental para a alocação econômica eficiente. Com a elevada inflação dos anos de 1970 e 1980 nos países industrializados, seus custos se tornaram mais visíveis e foi percebido que baixa inflação contribui para o crescimento econômico (Mishkin 2007). Desde então vários bancos centrais tem por seu objetivo explícito a estabilidade dos preços. Entretanto, também é necessário reduzir a incerteza sobre a expectativa de inflação, a qual é um dos seus custos mais importantes e pode impedir a decisão ótima de consumidores e investidores induzindo erros de escolha (Golob 1994). Portanto, precisa-se de previsões acuradas e confiáveis sobre a inflação futura.

São utilizadas duas metodologias para medir a expectativa de inflação: modelos econométricos e pesquisa direta com os agentes econômi-

cos. Os modelos econométricos utilizados para previsão são inspirados em modelos da classe ARIMA, modelos baseados na curva de Phillips e modelos que usam as informações contidas nos preços dos ativos (Ang et al. 2006). E a pesquisa com os agentes econômicos prevê a inflação através de uma medida de tendência central da expectativa dos agentes individuais. Não há evidências suficientes sobre qual especificação é superior e, portanto, não há um tipo de modelo superior para previsão (Ang et al. 2006). Diversos autores, como Atkeson & Ohanian (2001), Cecchetti et al. (n.d.) e Stock & Watson (2006), encontraram que a melhor especificação depende especialmente do período amostral escolhido.

Nas últimas duas décadas o processo gerador da inflação parece ter mudado, conforme discutido em Stock & Watson (2006) e com isso os modelos que previam bem a série. Os modelos multivariados baseados na curva de Phillips que tinham boa capacidade de previsão nos anos 70 e 80 perderam essa característica nos períodos mais recentes quando contrastados a modelos univariados ARIMA. Apesar disso verificou-se uma redução dos erros de previsão nos períodos atuais em quase todas as especificações. Tais fatos levaram Stock e Watson (SW) a afirmarem que a inflação ficou por um lado mais fácil e mais difícil de ser prevista, apesar dos erros de previsão serem menores está mais difícil de prever além dos modelos ARIMA.

A dificuldade de prever a inflação pode ser explicada pelo fenômeno que as expectativas de inflação parecem ser ancoradas pela tendência de longo prazo. Este fato justificaria a perda de importância das variáveis macroeconômicas na expectativa de inflação e a perda de previsibilidade dos modelos baseados na curva de Phillips (Hooker 2002). Entretanto a ancoragem não é perfeita e choques não antecipados podem desviar a expectativa da tendência de longo prazo (Gurkaynak et al. 2005).

A “imprevisibilidade” da inflação leva SW a proporem um modelo univariado que decompõe a série em dois componentes não observados: tendência e choque, cujas variâncias seguem processos de volatilidade estocástica. A presença da volatilidade estocástica é parte fundamental, pois torna a especificação extremamente flexível a mudanças no processo gerador, o que a priori pode fazer o modelo ser bom previsor da inflação. Portanto, a decomposição que o modelo propõe seria capaz de captar o fato que as expectativas de inflação parecem ser ancoradas pela tendência de longo prazo, a qual seria estimada pelo modelo. Os autores verificaram que o modelo descreve com acurácia a dinâmica da inflação norte-americana, tanto em períodos atuais quanto mais antigos.

Outros trabalhos também apontaram que a inflação pode ser dividida em componentes de tendência e choque. Broto & Ruiz (2009) encontraram evidências que a inflação pode ser modelada em componentes

de tendência e choque. E ainda a presença de efeitos assimétricos, no sentido que alta inflação tende a causar alta volatilidade em períodos posteriores.

Ciccarelli & Mojo (2010) observaram movimentos conjuntos na inflação nos países da OECD, os quais podem ser interpretados como causados por uma tendência estocástica comum. Cecchetti et al. (2007) usaram o modelo desenvolvido em Stock e Watson para verificar os movimentos da chamada “grande moderação” nos países do G7 e encontraram similaridade tanto no comportamento da tendência quanto da volatilidade, em especial a volatilidade da tendência.

Portanto, esses estudos indicam que há evidências para representar a dinâmica da inflação como tendência e choque e tal especificação poderia ser uma boa previsora da inflação pela característica da ancoragem das expectativas na tendência. A presença de volatilidade variante no tempo pode ser uma medida de incerteza variante no tempo na previsão da inflação. E, como citado, essa incerteza tem efeitos sobre a decisão econômica (Golob 1994).

Stock e Watson não estimaram os parâmetros do modelo, mas sim os fixaram e realizaram o processo de suavização estatística. Este trabalho tem por objetivo estimar o modelo e realizar o processo de filtragem e suavização para obter os componentes da inflação e suas volatilidades para

os Estados Unidos da América. Após a estimação os resultados serão utilizados para testar a capacidade de previsão do modelo frente a modelos *benchmark* de previsão. Um segundo objetivo é verificar os efeitos da grande inflação, grande moderação e crise bancária de 2008 sobre os componentes da inflação. Para a estimação e suavização será proposto o método amostragem por importância eficiente sequencial desenvolvido por [Richard & Zhang \(2007\)](#), que obtém aproximações contínuas da verossimilhança permitindo a maximização por algoritmos baseados em derivadas numéricas.

O trabalho está organizado da seguinte forma. O primeiro capítulo discute alguns aspectos estatísticos da série da inflação. O segundo capítulo aborda o método utilizado e particularidades para o modelo em questão. Em sequência será exposto os resultados comparando-os a modelos tradicionais de previsão.

# Capítulo 1

## Inflação: Previsão e o Modelo

Este capítulo procura mostrar as mudanças no processo da inflação que justificam o uso do modelo de previsão proposto por SW. Os autores afirmam que a inflação ficou por um lado mais fácil e mais difícil de prever. Mais fácil porque a partir da metade dos anos oitenta os erros médios de previsão se reduziram quando comparados à década anterior. Tal fato pode ser explicado pelo fim da chamada “grande inflação”, período de aceleração inflacionária no início dos anos setenta que ocorreu na maioria dos países desenvolvidos.

Entretanto, apesar da redução dos erros de previsão, SW mostraram que modelos tradicionais de previsão baseados na teoria econômica, como a curva de Phillips, tiveram sua capacidade de previsão deterio-

rada após a grande inflação, sendo superados pelos modelos da classe ARIMA. Portanto, está mais difícil de prever além dos modelos univariados. Os autores então afirmaram que o modelo adotado como *benchmark* para a previsão da inflação deve ter seus parâmetros variantes no tempo, para ser robusto a possíveis mudanças estruturais.

Para mostrar como os erros de previsão se comportaram no período será estimado um modelo ARIMA(4,1,0) para prever a inflação nos seguintes intervalos 1970-1983, 1984-2004, 2005-2012 com 1,2 e 4 horizontes. A janela de estimação será de expansão iniciando-se em 1955 e a previsão será avaliada pela raiz do erro quadrático médio (RMSE). A janela de estimação inicial possui 60 observações. Os intervalos pretendem capturar a grande inflação e a moderação. Os dados utilizados são a inflação medida pelo índice de preços ao consumidor (IPC) do segundo trimestre de 1955 ao último de 2012. A série foi obtida na base de dados da OECD.

Os resultados da previsão nas tabelas 1.1, 1.2 e 1.3 mostram que os erros na década da grande inflação foram maiores que nos outros períodos. Por sua vez as décadas posteriores foram marcadas por redução dos erros de previsão, indicando o período de estabilidade conhecido como grande moderação. Este resultado está também em SW.

Tabela 1.1: Previsão 1970-1983

Período	1970-1983		
	$h = 1$	$h = 2$	$h = 4$
RMSE	0,57	0,80	0,90

Tabela 1.2: Previsão 1984-2004

Período	1984-2004		
	$h = 1$	$h = 2$	$h = 4$
RMSE	0,37	0,47	0,50

Tabela 1.3: Previsão 2005-2012

Período	2005-2012		
	$h = 1$	$h = 2$	$h = 4$
RMSE	0,62	0,95	0,81

O período mais recente (2005-2012) foi marcado por aumento nos erros de previsão para horizontes curtos. A explicação seria um aumento na variância, apesar da baixa média da inflação no período. Observa-se também que parece ter havido mudanças no processo da inflação, pois é possível distinguir bem os períodos. Logo, o modelo de previsão da inflação adotado como *benchmark* deve ser robusto a essas mudanças.



## 1.1 Mudanças na Inflação

Esta seção procura verificar as razões para as mudanças no processo da inflação verificada anteriormente, para então mostrarmos como o modelo desenvolvido por SW se adequa bem a essas características.

Tabela 1.4: Estatísticas Descritivas da Inflação

	1970-1983	1984-2004	2005-2012
Média	1,79	0,75	0,59
Desvio-padrão	0,89	0,38	0,91

Inicialmente foram obtidas as estatísticas descritivas (Tabela 1.4) da inflação no período citado. Os valores mostram que a média da inflação foi alta em 1970-1983 e posteriormente houve redução da média e variância. No período recente (2005-2012) apesar de redução na média da inflação o desvio padrão foi maior.

A primeira medida relevante é a autocorrelação da diferença da inflação. Se a primeira autocorrelação for estatisticamente igual à zero, a inflação apresentará comportamento de uma série não estacionária. Caso seu valor seja estatisticamente não nulo e negativo, a série se comporta mais similar a um processo estacionário. Na Tabela 1.5 a primeira autocorrelação da diferença da inflação.

Observa-se que em 60-83 a inflação pareceria um processo integrado,

Tabela 1.5: Primeira Autocorrelação da Diferença da Inflação

Período	Autocorrelação
1960-1983	-0,179
1984-2004	<b>-0,285</b>

Valores em negrito são significativos.

já no período seguinte a inflação se comportaria mais como um processo estacionário. O fato de a autocorrelação ser negativa é importante, pois conforme será visto a inflação quando descrita pelo modelo de previsão de SW requer que a primeira autocorrelação da primeira diferença da série seja negativa ou igual a zero. O resultado da Tabela 1.5 sugere que o modelo a ser desenvolvido é uma aproximação razoável para a inflação.

Para verificar o resultado anterior será realizado o teste de raiz unitária Dickey-Fuller aumentado (ADF) nos períodos 1960-1983 e 1984-2004. Os resultados na Tabela 1.6 indicam que a inflação pareceria um processo de raiz unitária no período da grande inflação e no período da grande moderação a inflação seria um processo estacionário.

Tabela 1.6: Testes da Raiz Unitária

Período	P-valor
1960-1983	0,1048
1984-2004	0,0138

Os valores referem-se ao p-valor.

Portanto, há evidências para a ocorrência de mudanças estruturais no processo da inflação. Os resultados da previsão mostraram que houve mudança no comportamento dos erros entre os períodos. Os testes de raiz unitária mostraram que a inflação se mostrou de forma diferente na grande inflação e na posterior estabilização. O modelo a ser desenvolvido a seguir pretende ser robusto a mudanças e aprimorar a previsão da inflação.

## 1.2 O Modelo

Prever a inflação é importante para reduzir a incerteza e facilitar a decisão dos agentes econômicos. Entretanto como discutido anteriormente o processo gerador da inflação mudou nos períodos mais recentes e a previsibilidade da inflação pelos modelos adotados como *benchmark*. SW então propuseram um modelo que é robusto a mudanças estruturais no processo gerador e, portanto pode aprimorar a previsão.

O modelo principal deste trabalho decompõe a inflação em um componente de tendência estocástica ( $\tau_t$ ), que seria sua média condicional, e um choque temporário ( $\eta_t$ ), com a variância de ambos os componentes seguindo um processo de volatilidade estocástica.

$$\pi = \tau_t + \eta_t, \quad (1.1)$$

$$\eta_t = \sigma_{\eta,t} \zeta_{1,t}, \quad (1.2)$$

$$\tau_t = \tau_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (1.3)$$

$$\varepsilon_t = \sigma_{\varepsilon,t} \zeta_{2,t}; \quad \zeta_t \sim iidN(0, I_2), \quad (1.4)$$

$$\ln \sigma_{\eta,t}^2 = \ln \sigma_{\eta,t-1}^2 + v_{\eta,t} \quad (1.5)$$

$$\ln \sigma_{\varepsilon,t}^2 = \ln \sigma_{\varepsilon,t-1}^2 + v_{\varepsilon,t}; \quad v_t \sim iidN(0, \gamma I_2). \quad (1.6)$$

Devido as suas características o modelo foi denominado componentes não observados com volatilidade estocástica (UCSV). No formato de estado-espaço em (1.1) tem-se a equação de medida e as equações (1.3), (1.5) e (1.6) representam as de transição. O modelo apresenta um único parâmetro,  $\gamma$ , o qual é a variância dos processos de volatilidade estocástica. Este parâmetro pode ser estimado, como este trabalho se propõe a fazer, ou fixado a priori, como em [Stock & Watson \(2006\)](#).

São observadas duas características do modelo UCSV. Primeiramente, como o componente de tendência da inflação segue um passeio aleatório, haverá a presença de uma raiz unitária na série. Embora se discuta a estacionaridade da série na literatura de inflação a raiz unitária implicada

pelo modelo não compromete sua capacidade de previsão. Pois, como será mostrado adiante, a inflação quando descrita pelo modelo UCSV pode parecer estacionária em amostras finitas dependendo da razão entre a volatilidade da tendência e do choque.

Outra característica importante é que a especificação UCSV é equivalente ao modelo média móvel integrado (IMA) de primeira ordem com parâmetro  $\theta_t$  variante no tempo,

$$\Delta\pi_t = (1 - \theta_t L)a_t. \quad (1.7)$$

A presença de volatilidade estocástica no modelo UCSV faz o parâmetro  $\theta$  ser variante no tempo, o que foi sugerido em SW ao mostrarem que tal parâmetro não é estatisticamente constante na amostra por eles utilizada. O modelo IMA ficou consagrado na literatura de previsão da inflação desde o seu uso por [Nelson & Schwert \(1977\)](#), quando obteve boas previsões para os anos 1970. A partir da estimação das variâncias do modelo UCSV pode-se obter o coeficiente do IMA respectivo pela seguinte formula,

$$\theta_t = [(q_t^2 + 4q_t)^4 - 2 - q_t]/2, \quad \text{em que} \quad q_t = \frac{\sigma_{\eta,t}^2}{\sigma_{\varepsilon,t}^2}. \quad (1.8)$$

### 1.3 Propriedades do Modelo

As propriedades estatísticas do modelo a serem discutidas têm importantes implicações na robustez a mudanças estruturais e implicações para a previsibilidade da inflação pelo modelo. A primeira propriedade a ser observada é a relação entre a autocorrelação de primeira ordem da variação da inflação e o grau de persistência da série. A partir do modelo UCSV a primeira diferença da inflação é:

$$\Delta\pi_t = \Delta\tau_t + \Delta\eta_t = \varepsilon_t + \eta_t - \eta_{t-1}, \quad (1.9)$$

este processo é um média móvel de primeira ordem com coeficiente negativo, então sua função de autocorrelação será negativa para a primeira defasagem e zero para as demais. E como o valor da autocorrelação depende da razão das variâncias a presença de volatilidade estocástica a tornar-se variante no tempo, como pode ser verificada obtendo sua expressão:

$$\rho_{\Delta\pi} = \frac{\text{cov}(\Delta\pi_t, \Delta\pi_{t-1})}{\text{var}(\Delta\pi_t^2)} = \frac{-\sigma_{\eta,t}^2}{2\sigma_{\eta,t}^2 + \sigma_{\varepsilon,t}^2}. \quad (1.10)$$

Observa-se que o valor da correlação se encontra entre  $-0,5$  e zero. Portanto, quanto maior a variância da tendência mais próximo de zero encontra-se o coeficiente e a inflação tende a se comportar como um

processo de raiz unitária. E no caso que a variância do choque predomine a inflação tenderá a se comportar como um processo estacionário com autocorrelação em torno de 0,5. Então esta propriedade permite verificar o grau de persistência da série em cada instante de tempo e com isso a importância relativa de cada variância no processo da inflação. A Tabela 1.5 anterior mostrou que a primeira autocorrelação foi negativa sugerindo que o modelo UCSV é uma aproximação plausível para o processo da inflação.

A próxima propriedade do modelo UCSV é uma consequência da discutida anteriormente. Quando a autocorrelação da variação da inflação se aproximar de zero, o coeficiente de um modelo autoregressivo para o nível da série deve se aproximar de um em pequenas amostras, indicando a não estacionaridade do processo. [Cecchetti et al. \(2007\)](#) realizaram um experimento de Monte Carlo em que foi ajustada a seguinte regressão,

$$\pi_t = \alpha + \rho_\pi \pi_{t-1} + \lambda_t \quad (1.11)$$

cujas amostras foram construídas a partir do modelo UCSV com valores fixos para  $\sigma_\varepsilon/\sigma_\eta$ , a razão das volatilidades, e o coeficiente  $\rho_\pi$  foi calculado bem como o intervalo de confiança. O autor deste trabalho também realizou o experimento e segue na Figura 1.1 a distribuição mostrando

média e percentil 10 e 90 da estatística. Foram geradas 5000 replicações com tamanho de amostra 100 para cada razão de desvio padrão. Pode-se observar que quanto maior a volatilidade do choque sobre a inflação e, portanto menor  $\sigma_\epsilon/\sigma_\eta$  mais próxima da estacionaridade a inflação aparenta ser em amostras finitas, apesar de o modelo conter uma raiz unitária. Com essa propriedade o modelo não impõe restrição sobre a presença de tendência estocástica na inflação para a realização de uma previsão em amostras finitas.

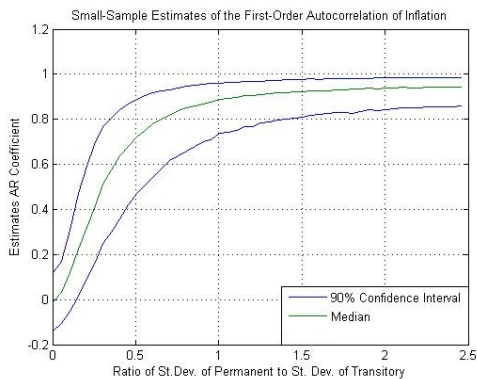


Figura 1.1: Estimativa em pequenas amostras da autocorrelação da inflação.

A última propriedade se refere às características da previsão da inflação pelo modelo. Como o choque temporário ( $\eta_t$ ) tem por hipótese média zero a previsão ótima será igual ao valor corrente do componente



de tendência,

$$E_t \pi_{t+k} = \tau_{t/t} \quad (1.12)$$

Dessa forma, verifica-se como o modelo capta o fenômeno descrito na literatura de ancoragem das expectativas na tendência. Como o componente de tendência segue um passeio aleatório a previsão dependerá somente de  $t$  não do horizonte de previsão  $k$  e será seu valor no período inicial  $t$ .

Entretanto o intervalo de confiança para a previsão dependerá do horizonte específico. Como a tendência segue um passeio aleatório a variância da previsão tenderá ao infinito conforme se aumenta o horizonte,

$$E_t [E_t \pi_{t+k} - \pi_{t+k}]^2 = (p_{t/t} + \sigma_{\eta,t}^2 + k\sigma_{\varepsilon,t}^2) \quad (1.13)$$

em que  $p_{t/t} = E_t(\tau_{t/t} - \tau_t)^2$ . Verifica-se que com o aumento do horizonte de previsão o intervalo de confiança ficará cada vez maior e a variância tenderá ao infinito. Porém, para  $k$  finito, o mesmo pode ser mais estreito ou mais amplo dependendo das volatilidades do período inicial da previsão ( $t$ ).

# Capítulo 2

## Estimação e Filtragem

Neste capítulo serão discutidos os métodos propostos e suas particularidades para o modelo em questão. A presença das volatilidades estocásticas e a especificação aditiva da equação de medida (1.1) implicam que apesar de Gaussiano o modelo é não linear, logo a solução analítica do filtro de Kalman para o processo filtragem não é aplicável. Portanto, as integrais para o cálculo da verossimilhança e dos valores suavizados não possuem solução analítica e deve-se recorrer à integração numérica ou estocástica. A primeira opção não é factível para o modelo em questão pela alta dimensionalidade do problema, a qual implica em imprecisão da solução e elevado custo computacional. Por sua vez a integração estocástica por métodos de Monte Carlo e amostragem por

importância tem taxas de convergência que não depende da dimensionalidade do problema e permite uma estimativa não viesada das integrais do processo de filtragem.

O método a ser utilizado neste artigo é o desenvolvido por [Richard & Zhang \(2007\)](#) que determinam a densidade por importância minimizando a variância de Monte Carlo do estimador da integral da verossimilhança, por isso este método foi denominado amostragem por importância eficiente (EIS) sequencial. O modelo pode também ser estimado pelo filtro de partículas (PF), entretanto seu estimador não é eficiente. Neste trabalho será comparada a estimação da verossimilhança pelo EIS e pelo PF.

## 2.1 Amostragem por Importância

As integrais da verossimilhança e do processo de filtragem para o modelo UCSV não possuem solução analítica. Portanto, se recorrerá à integração estocástica por métodos de amostragem por importância. Suponha que se deseja resolver a seguinte integral por integração de Monte Carlo:

$$I = E[g(x)] = \int g(x)f(x)dx. \quad (2.1)$$

Para tal, obtém-se uma amostra aleatória da função de densidade  $f(x)$  e se aproxima a integral por

$$\hat{I} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(x_i). \quad (2.2)$$

A aproximação para a integral, equação (2.2) é uma variável aleatória e pela lei dos grandes números, ela convergirá para a verdadeira quantidade estimada quando  $N$  tende ao infinito.

Entretanto a integração por Monte Carlo (MC) usando a densidade original  $f(x)$  pode gerar uma variável aleatória com variância muito grande. Isso ocorre porque a amostragem de  $\{x_i\}_{i=1}^N$  não é relacionada à forma com que os valores de  $g(x_i)$  se concentram. Além disso, em modelos complexos a densidade  $f(x)$  é desconhecida e não se sabe como se amostrar dela (?). Para contornar esses problemas ao invés de se retirar amostras diretamente de  $f(x)$  pode-se utilizar uma distribuição  $m(x)$ , com a restrição que seu suporte contenha o suporte da densidade original e que seja possível amostrar dela. Dessa forma, a integral 2.1 pode ser reescrita como,

$$I = E \left[ \frac{g(x)f(x)}{m(x)} \right] = \int \frac{g(x)f(x)m(x)dx}{m(x)}. \quad (2.3)$$

A densidade  $m(x)$  é denominada densidade por importância. Um esti-

mador de amostragem por importância para a integral 2.1 seria

$$\hat{I} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(x_i)w(x_i), \quad \text{em que} \quad w(x_i) = \frac{f(x_i)}{m(x_i)}. \quad (2.4)$$

Os termos  $w(x_i)$  são chamados pesos de importância e corrigem o fato da amostragem ter sido feita da distribuição por importância (Creal 2009).

## 2.2 EIS

O sucesso dos métodos de amostragem por importância depende em se encontrar uma boa densidade de importância (van Dijk 1999). Richard & Zhang (2007) propuseram determinar a densidade de importância minimizando a variância de MC do estimador da integral, e o método foi denominado amostragem por importância eficiente. Assume-se inicialmente que uma classe paramétrica para o amostrador de importância já foi definida. A escolha da classe paramétrica depende do problema em questão, em geral, uma extensão da densidade natural ou uma distribuição da família exponencial.

Suponha que se queira resolver a seguinte integral,

$$G(\delta) = \int \varphi(x, \delta) dx. \quad (2.5)$$

A partir da escolha da classe paramétrica o algoritmo EIS selecionará um núcleo eficiente dentre o espaço admissível da classe determinada. A relação entre o núcleo e a densidade de importância se dá por:

$$m(x|a) = \frac{K(x;a)}{\chi(a)} \quad \text{em que} \quad \chi(a) = \int K(x;a)dx. \quad (2.6)$$

Em que  $\chi$  é a constante de integração. O método EIS determinará os valores dos parâmetros auxiliares  $a$  que minimizam a variância de MC de  $\varphi(x; \delta)/m(x|a)$ . [Richard & Zhang \(2007\)](#) mostraram que o problema pode ser aproximado por,

$$(\hat{a}, \hat{c}) = \arg \min Q(x;a), \quad (2.7)$$

em que,

$$Q(x;a) = \int d^2(x,a)w(x,a)m(x,a)dx, \quad (2.8)$$

$$d(x,a,c) = \ln \varphi(x) - c - \ln k(x;a), \quad (2.9)$$

sendo  $w(x,a)$  os pesos de importância definidos como a razão da densidade alvo e a densidade de importância. Para encontrar os parâmetros auxiliares  $a$  substitui-se  $Q(x;a)$  por uma aproximação de MC. Entretanto, como o amostrador de importância também depende de  $a$ , [Richard](#)

& Zhang (2007) adotaram um procedimento iterativo até a satisfação de um critério de convergência. O algoritmo calcula uma série de estimativas de mínimos quadrados generalizados através da seguinte recursão de Monte Carlo

$$(\hat{a}_{k+1}, \hat{c}_{k+1}) = \arg \min \bar{Q}(x; a | \hat{a}_k), \quad (2.10)$$

em que um estimador para a variância de MC,  $\bar{Q}(x; a | \hat{a}^k)$  seria,

$$\bar{Q}(x; a | \hat{a}_k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N d^2(x_i^k, a, c | \hat{a}_k, \hat{c}_k) w(x_i^k, \hat{a}_k). \quad (2.11)$$

Então o Estimador de EIS para a integral (2.5) é dado por,

$$\hat{G}(\delta; a) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w(x_i^k, \hat{a}_k). \quad (2.12)$$

## 2.3 EIS Sequencial

O algoritmo EIS apresentado anteriormente se aplica somente a problemas de baixa dimensionalidade. Em problemas de alta dimensionalidade, (2.10) deve ser substituído por uma sequência de otimizações de menor dimensão. O algoritmo a ser desenvolvido explora o fato que modelos em alta dimensão não são geralmente especificados como uma dis-

tribuição conjunta, mas sim como uma sequência de distribuições condicionais (Richard & Zhang 2007).

Como exemplo assume-se um modelo de estado-espço composto pelos estados  $s$  e pelas observações  $y$ . A densidade conjunta das observações e dos estados pode ser escrita como

$$\varphi_t(y_t, s_t; \theta) = g(y_t | s_t, \theta) p(s_t | s_{t-1}, \theta), \quad (2.13)$$

em que  $g$  é a densidade de medida,  $p$  a de transição e  $\theta$  são os parâmetros do modelo. A verossimilhança para o período todo pode ser escrita como a integral da densidade conjunta em relação aos estados

$$L(y_t; \theta) = \int \prod_{t=1}^T \varphi_t(y_t, s_t; \theta) ds_1 \dots ds_T. \quad (2.14)$$

Como anteriormente, o algoritmo EIS sequencial obtêm os parâmetros auxiliares através da construção de um núcleo que é analiticamente integrável em relação à  $s_t$ ,

$$m(s_t | s_{t-1}, a_t) = \frac{K(s_t; a_t)}{\chi(s_{t-1}, a_t)} \quad \text{em que} \quad \chi(s_{t-1}, a_t) = \int K(s_t; a_t) ds_t. \quad (2.15)$$

Entretanto, o integrando  $\varphi_t(y_t, s_t; \theta)$  é aproximado por um núcleo  $K(s_t; a_t)$  que depende somente das variáveis de estado do período, logo a



constante de integração não seria afetada pelo procedimento EIS, apesar de possíveis informações sobre  $s_{t-1}$  estar contidas em  $\chi(s_{t-1}, a_t)$ . Portanto, pode-se transferir a constante de integração para o período anterior trazendo essa informação para o amostrador eficiente. Dessa forma, a integral da verossimilhança pode ser reescrita como,

$$L(y_t; \theta) = \int \dots \int \prod_{t=1}^T \frac{\varphi(y_t, s_t; \theta)}{m(s_t | s_{t-1})} m(s_t | s_{t-1}) ds_T \dots ds_1. \quad (2.16)$$

Em cada período de tempo os parâmetros auxiliares serão determinados minimizando a variância de MC da razão,

$$\frac{\varphi_t(y_t, s_t; \theta) \chi_{t+1}(s_t; a_{t+1})}{k_t(s_t, s_{t-1}; a_t)}. \quad (2.17)$$

Para encontrar os parâmetros auxiliares ( $a_t$ ) adota-se um procedimento *backward* de minimizações individuais, através da seguinte recursão,

$$(\hat{a}_t^{k+1}, \hat{c}_t^{k+1}) = \arg \min \bar{Q}_t(s_t; a_t | \hat{a}_{t+1}^k). \quad (2.18)$$

Como anteriormente, são necessárias algumas iterações para a convergência dos parâmetros auxiliares. Um estimador para a variância de MC

$\bar{Q}(x; a|\hat{a}^k)$  seria,

$$\bar{Q}(s_t; a_t|\hat{a}_{t+1}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N d^2(s_{i,t}, a_t, c_t; \theta) w(s_{i,t}^k; \theta, \hat{a}_t^k). \quad (2.19)$$

Em que  $d$  é definido como,

$$\ln[g(y_t|s_t, \theta)\chi(s_t; a_{t+1})] - c_t - \ln k(s_t; a_t). \quad (2.20)$$

O estimador de EIS sequencial para a integral (2.14) é

$$\hat{L}(y_T; \theta) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[ \prod_{t=1}^T \frac{\phi_t(y_t, s_t; \theta)}{m(s_t|s_{t-1}, a_t)} \right]. \quad (2.21)$$

Como o método usa informação da amostra inteira, através da transferência da constante de integração, o amostrador de EIS será uma densidade suavizada. [Richard & Zhang \(2007\)](#) argumentam que para a maioria dos problemas o uso de pesos iguais a um em (2.11) e (2.19) é tão eficiente quanto à versão ponderada. Neste caso, a minimização seria um problema de mínimos quadrados. Além disto, quando a classe paramétrica para o núcleo da densidade de importância for gaussiana, o problema de minimização (2.11) e (2.19) será linear nos parâmetros auxiliares e aplicar-se-á o estimador de mínimos quadrados ordinários para encontrar seus valores em cada período de tempo.

## 2.4 Filtro de Partículas

A integral (2.14) também pode ser estimada pelo filtro de partículas. A densidade de importância para este filtro usualmente é a densidade de transição. Um estimador para (2.14) seria:

$$\hat{L}(y_t; \theta) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[ \prod_{t=1}^T g(y_t | s_t, \theta) \right]. \quad (2.22)$$

Entretanto, a variância dos métodos de amostragem por importância pode crescer exponencialmente com o tempo. Para contornar o problema [Gordon et al. \(1993\)](#) acrescentaram reamostragem de partículas conforme seus pesos relativos. Porém, o processo de reamostragem cria descontinuidade da função de verossimilhança em relação a seus parâmetros, dificultando sua otimização por métodos baseados em derivadas. Por sua vez, o EIS sequencial minimiza a variância de MC em cada período e, portanto, não requer reamostragem, sendo a verossimilhança contínua em relação aos seus parâmetros. Também como o método minimiza a variância de MC a verossimilhança estimada terá menor desvio padrão, sendo, portanto eficiente. Por esses motivos o APF não será utilizado nesse trabalho para a estimação da log-verossimilhança e dos valores suavizados. Contudo pretende-se comparar o perfil da estimação da verossimilhança pelo EIS e pelo PF.

## 2.5 *Rao-Blackwellization*

O método EIS sequencial será usado para estimar a verossimilhança do modelo UCSV e seus valores suavizados. Entretanto as características do modelo permitem reduzir ainda mais a variância de MC das estimativas, através da técnica conhecida como *Rao-Blackwellization* sobre o componente de tendência.

O modelo possui uma estrutura dada pelas equações de medida e transição em que é possível haver linearidade condicional às variáveis de estado não lineares, neste caso seria possível resolver o estado linear analiticamente. Precisamente condicional às variâncias, o componente de tendência ( $\tau_t$ ) é linear e, portanto, pode-se estimar seu valor analiticamente pelo filtro de Kalman. Essa técnica de marginalizar variáveis condicionalmente lineares ficou conhecida como *Rao-Blackwellization*, pois suas boas propriedades estatísticas são uma decorrência do teorema de Rao-Blackwell. Por esse teorema a estimativa da tendência dada pelo filtro *Rao-Blackwellized* (RB) teria variância igual ou mais comumente menor quando comparada a estimativa por simulação. As razões para este resultado são: primeiramente reduzir a dimensão do problema e, portanto, as partículas estarão em um espaço de dimensão menor, e mais importante a solução analítica é dada por algoritmos ótimos como o filtro

de Kalman ([Schon et al. 2005](#)).

Para se entender como funciona os filtros RB a densidade filtrada pode ser decomposta da seguinte forma,

$$p(\tau_t, \ln \sigma_{\eta,t}^2, \ln \sigma_{\varepsilon,t-1}^2 | \pi_{1:t}) = p(\tau_t | \ln \sigma_{\eta,t}^2, \ln \sigma_{\varepsilon,t}^2, \pi_{1:t}) p(\ln \sigma_{\eta,t}^2, \ln \sigma_{\varepsilon,t}^2 | \pi_{1:t}). \quad (2.23)$$

A primeira densidade da decomposição pode ser resolvida analiticamente e então só é necessário simular valores para as variâncias a partir da segunda densidade. Para cada uma dessas partículas deverá ser aplicado o filtro de Kalman para obter o valor do componente de tendência para aquelas variâncias específicas. A seguir serão discutidas as implicações da *Rao-Blackwellization* para o EIS e para o PF.

## 2.6 RB-EIS

O método EIS sequencial desenvolvido por [Richard & Zhang \(2007\)](#) constrói a densidade de importância  $m(s_t | S_{t-1}, a_t)$  minimizando a variância amostral do estimador da integral a ser resolvida, em que  $S$  são as variáveis de estado. Os parâmetros auxiliares  $a_t$  determinarão os momentos da distribuição de importância e são obtidos como solução da minimização da variância na regressão EIS. A verossimilhança para o

modelo é escrita como,

$$L(\gamma; \pi_{1:T}) = \int \prod_{t=1}^T f(\pi_t, s_t | s_{t-1}, \gamma) dS. \quad (2.24)$$

Em que  $\gamma$  é o parâmetro a ser estimado do modelo UCSV. O estimador de EIS para a verossimilhança seria:

$$\hat{L}(\gamma; \pi_{1:T}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \prod_{t=1}^T \left[ \frac{f(\pi_t, s_t^{(i)}(a_t) | s_{t-1}^{(i)}(a_{t-1}), \gamma)}{m(s_t^{(i)}(a_t) | s_{t-1}^{(i)}(a_{t-1}), a_t)} \right]. \quad (2.25)$$

A densidade conjunta das observações e dos estados pode ser decomposta como,

$$g_1(\pi_t | s_t; \gamma) p(s_t | s_{t-1}, \gamma). \quad (2.26)$$

Em que  $g_1$  é a densidade de medida e  $p$  a densidade de transição. Como explicado anteriormente o componente de tendência pode ser marginalizado, o que significaria que seu valor em um dado período de tempo dependerá somente das variâncias e será obtido pelo filtro de Kalman. Logo a densidade anterior pode ser reescrita condicional somente às volatilidades,

$$g_2(\pi_t | \ln \sigma_{\eta,t}^2, \ln \sigma_{\varepsilon,t}^2, \gamma) p(\ln \sigma_{\eta,t}^2, \ln \sigma_{\varepsilon,t}^2 | \ln \sigma_{\eta,t-1}^2, \ln \sigma_{\varepsilon,t-1}^2, \gamma). \quad (2.27)$$

Em que  $g_2$  é a densidade de medida obtida pelo filtro de Kalman. Como o núcleo da densidade normal é fechado sob multiplicação pode-se parametrizar a densidade por importância da seguinte forma (Richard & Zhang 2007),

$$k(s_t; a_t) = p(\ln \sigma_{\eta,t}^2, \ln \sigma_{\varepsilon,t}^2 | \ln \sigma_{\eta,t-1}^2, \ln \sigma_{\varepsilon,t-1}^2, \gamma) \xi(\alpha_t, a_t) \quad (2.28)$$

em que  $\xi(\alpha_t, a_t)$  é um núcleo Gaussiano. Devido a *Rao-Blackwellization* o vetor de estados ( $\alpha$ ) é composto apenas pelas variâncias. Para o modelo UCSV têm-se  $\xi(\alpha_t, a_t) = \exp(\alpha_t' B_t + \alpha_t' C_t a_t)$ ,  $\alpha_t = [\ln \sigma_{\eta,t}^2, \ln \sigma_{\varepsilon,t}^2]$  e  $a_t = [B_t, C_t]$ . Portanto, a densidade natural  $p(\alpha_t | \alpha_{t-1}, \gamma)$  se cancelaria no estimador de EIS da verossimilhança e a densidade alvo na regressão EIS seria  $g_2(\pi_t | \ln \sigma_{\eta,t}^2, \ln \sigma_{\varepsilon,t}^2, \gamma)$  cujo valor pode ser obtido através do filtro de Kalman dada as variâncias. Essa densidade possui como média e variância a previsão da tendência e a variância do erro de previsão respectivamente,

$$g_2(\pi_t | \ln \sigma_{\eta,t}^2, \ln \sigma_{\varepsilon,t}^2, \gamma) \sim N(\tau_{t|t-1}, P_{t-1|t-1} + \sigma_{\eta,t}^2 + \sigma_{\varepsilon,t}^2). \quad (2.29)$$

Em que  $\tau_{t|t-1}$  é a estimativa da tendência com base somente em informação passada e  $P_{t-1|t-1}$  é a variância filtrada da tendência do período anterior, ambos são obtidos pelo filtro de Kalman para dados valores de

$\ln \sigma_t^2$ .

A relação entre o núcleo e a densidade de importância se dá pela seguinte expressão:

$$m(\alpha_t | \alpha_{t-1}, a_t) = \frac{K(\alpha_t; a_t)}{\chi(\alpha_{t-1}, a_t)}; \quad \chi(\alpha_{t-1}, a_t) = \int K(\alpha_t; a_t) ds_t. \quad (2.30)$$

Como discutido anteriormente a constante de integração pode ser transferida para o período anterior. Logo a regressão EIS para o modelo UCSV seria:

$$a_t = \arg \min \sum_{i=1}^N \ln [g_2(\pi_t | \ln \sigma_{\eta,t}^{2(i)}, \ln \sigma_{\varepsilon,t}^{2(i)} \gamma) \chi(\alpha_t^{(i)}; a_{t+1})] - c_t - \ln k(\alpha_t^{(i)}; a_t)^2. \quad (2.31)$$

A verossimilhança estimada por EIS, equação (2.25), é uma função contínua dos seus parâmetros, logo poderá ser maximizada para encontrar o parâmetro  $\gamma$  desconhecido.

Devido à hipótese de normalidade das densidades do modelo a distribuição de importância será gaussiana, então a regressão EIS será linear nos parâmetros, logo se aplica o estimador de mínimos quadrados ordinários. Para obter eficiência do amostrador por importância requerem-se algumas iterações até que os parâmetros auxiliares convirjam satisfazendo uma regra de convergência. Para haver convergência e suavidade



da função é essencial o uso da técnica de números aleatórios comuns (CRN) em que a amostragem será feita a partir de transformações de um gerador de números aleatórios de uma distribuição canônica que não depende dos parâmetros do modelo (Richard & Zhang 2007). Na primeira iteração utiliza-se um amostrador baseado na expansão de Taylor de segunda ordem, que leva em conta as informações contidas nas observações sobre as variáveis de estado.

O amostrador inicial baseado na expansão de Taylor faz uma aproximação de segunda ordem na densidade de medida,  $g_2(\pi_t|\alpha_t)$ , para obter um amostrador para os estados,

$$\log g_2(\pi_t|\alpha_t) \approx \log g_2(\pi_t|\alpha_t = \bar{\alpha}) + \log g_2'(\pi_t|\alpha_t = \bar{\alpha})(\alpha_t - \bar{\alpha}) + \frac{1}{2}(\alpha_t - \bar{\alpha})' \log g_2''(\pi_t|\alpha_t = \bar{\alpha})(\alpha_t - \bar{\alpha}). \quad (2.32)$$

Obtêm-se o amostrador,  $p(\alpha_t|\pi_t)$ , combinando a expressão acima com o núcleo da densidade de transição,

$$\log p(\alpha_t|\pi_t) \propto \log g_2'(\pi_t|\alpha_t = \bar{\alpha})(\alpha_t - \bar{\alpha}) + \frac{1}{2}(\alpha_t - \bar{\alpha})' \log g_2''(\pi_t|\alpha_t = \bar{\alpha})(\alpha_t - \bar{\alpha}) - \frac{1}{2} \left[ (\alpha_t - \bar{\alpha})' \Sigma (\alpha_t - \bar{\alpha}) \right]. \quad (2.33)$$

Em que  $\Sigma$  é a matriz de covariância dos estados  $\alpha_t$ . Amostra-se usando

os momentos da distribuição aproximada.

Após a estimação do parâmetro procede-se a obtenção dos valores suavizados das variáveis de estado encontrando os pesos de importância e normalizando-os. Os pesos de importância são calculados por,

$$w^{(i)} = \frac{g_2(\boldsymbol{\pi}_t | \boldsymbol{\alpha}_t^{(i)}, \boldsymbol{\gamma}) p(\boldsymbol{\alpha}_t^{(i)} | \boldsymbol{\alpha}_{t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\gamma})}{m(\boldsymbol{\alpha}_t^{(i)} | \boldsymbol{\alpha}_{t-1}^{(i)}, a_t)}; \quad w_n^{(i)} = \frac{w^{(i)}}{\sum_{i=1}^N w^{(i)}}. \quad (2.34)$$

Para o componente de tendência a expectativa dessa variável de estado se estima por,

$$E[\boldsymbol{\tau}_t | \boldsymbol{\pi}_{1:T}] \approx \sum_{i=1}^N w_n^{(i)} \boldsymbol{\tau}_{t/t}^{(i)}. \quad (2.35)$$

Em que  $\boldsymbol{\tau}_{t/t}$  é a estimativa da tendência com base em informação do tempo  $t$  para dadas variâncias. Da mesma forma se aplica às variâncias.

## 2.7 RB-PF

A integral da verossimilhança do modelo UCSV pode também ser estimada pelo filtro de partículas utilizando a densidade de transição como densidade de importância e têm-se o seguinte estimador para a verossimilhança do modelo UCSV,

$$\hat{L}(\boldsymbol{\gamma}; \boldsymbol{\pi}_{1:T}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[ \prod_{t=1}^T g_2(\boldsymbol{\pi}_t | \ln \sigma_{\eta,t}^{2(i)}, \ln \sigma_{\varepsilon,t}^{2(i)}; \boldsymbol{\gamma}) \right] \quad (2.36)$$

em que a densidade  $g$  é dada por (2.29).

Segue o algoritmo para a estimação da verossimilhança pelo RB-PF.

1. Iniciar o filtro através de uma distribuição difusa.
2. Simular valores para a volatilidade a partir da densidade de transição.
3. Aplicar a predição do filtro de Kalman e obter os pesos de importância  $w^{(i)} \sim N(\boldsymbol{\pi}_t - \boldsymbol{\tau}_t|_{t-1}, P_{t-1|t-1} + \boldsymbol{\sigma}_{\eta,t}^2 + \boldsymbol{\sigma}_{\epsilon,t}^2)$ .
4. Normalizar os pesos de importância  $w_n^{(i)} = w^{(i)} / \sum_{i=1}^N w^{(i)}$  e reamostrar com reposição as partículas a partir desses valores.
5. Aplicar o filtro de Kalman para obter os valores da tendência.
6. Estimar a verossimilhança pela equação (2.36).

# Capítulo 3

## Resultados

Neste trabalho será estimado o modelo UCSV para a inflação dos Estados Unidos. A série utilizada será o índice de preços ao consumidor (IPC) trimestral do segundo trimestre de 1955 ao último trimestre de 2012, totalizando 231 observações. A série foi obtida na base de dados da OECD. O método de estimação e suavização utilizado será o EIS sequencial, conforme detalhado anteriormente.

Para prever a inflação com o modelo devemos estimar as variáveis de estado do modelo, em especial a tendência. A capacidade de previsão será medida através da raiz do erro quadrático médio (RMSE), comparando seu valor a modelos da classe ARIMA. A previsão será feita fora da amostra com janela de expansão iniciando-se no primeiro trimestre

de 1990.

Outra utilização do modelo além da previsão é o estudo da relação das variáveis de estado com o histórico da inflação. O objetivo será verificar como os componentes da inflação se comportavam na chamada grande inflação dos anos 70, na posterior estabilização e na crise de 2008.

Para estimar as variáveis de estado e poder realizar previsões, inicialmente deve-se estimar o único parâmetro do modelo ( $\gamma$ ), que controla a variância dos processos de volatilidade estocástica. Para determinar o valor inicial para a otimização a função de verossimilhança foi avaliada em diferentes valores para o parâmetro e aquele na vizinhança do máximo foi utilizado. Segue o resultado na Tabela 3.1.

Tabela 3.1: Resultado da Estimação

País	Parâmetro
Parâmetro	0,1010
Desvio-Padrão	0,0381
P-Valor	0,0080
Log-Verossimilhança	-162,0727

O tamanho da amostra de Monte Carlo foi de 300. Desvio-padrão assintótico obtido por uma aproximação numérica da hessiana.

Os resultados da estimação, Tabela 3.1, mostraram que o parâmetro foi significativo. Portanto, há estatisticamente volatilidade estocástica nos componentes da inflação, validando a representação UCSV. Observa-

se que o valor estimado foi menor, porém próximo do 0,2 fixado por SW.

Após a estimação do parâmetro o filtro EIS é utilizado novamente para obter estimativas suavizadas das variáveis de estado. Observa-se pela Figura 3.1 que a volatilidade da tendência apresentou uma elevação nos anos 70 e início dos 80, período este conhecido como grande inflação. Posteriormente na estabilização essa volatilidade se reduziu a patamares ainda mais baixos que antes da grande inflação permanecendo nesses níveis desde então. Destaca-se que a crise de 2008 não afetou esse componente da inflação.

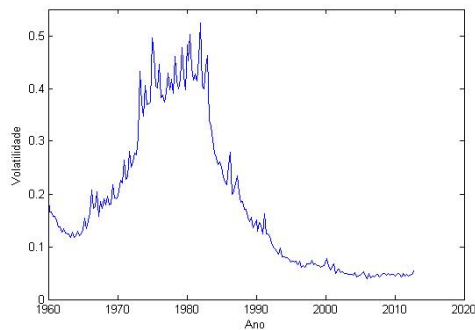


Figura 3.1: Volatilidade da Tendência.

Quanto à volatilidade da inovação transitória, Figura 3.2, observa-se que apresentou uma moderada elevação no início dos anos 80, fim da grande inflação, reduzindo posteriormente na estabilização. As esti-

mativas para os anos 90, a década da grande moderação, mostram uma redução seguida da volatilidade da tendência e do choque, o que é condizente com a estabilidade de preços do período. Mas a partir dos anos 2000 esse componente tem aumentado e destaque se dá a crise financeira recente que afetou fortemente essa volatilidade, representado pelo pico da série neste período.

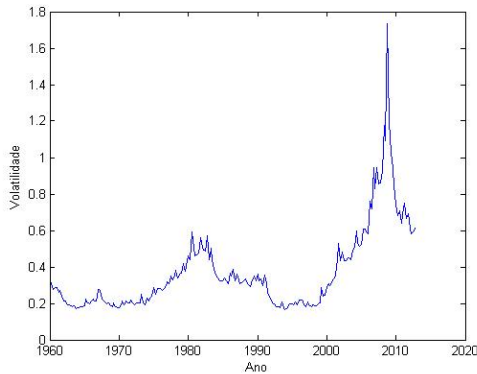


Figura 3.2: Volatilidade Transitória.

O gráfico da primeira autocorrelação da diferença da inflação, Figura 3.3, mostra que na grande inflação dos anos 70 a inflação se aproximou de um processo de raiz unitária, pois a variância da tendência seria predominante, enquanto que em períodos recentes a inflação se comporta como um processo estacionário, causada pela redução da volatilidade da

tendência e aumento da volatilidade dos choques.

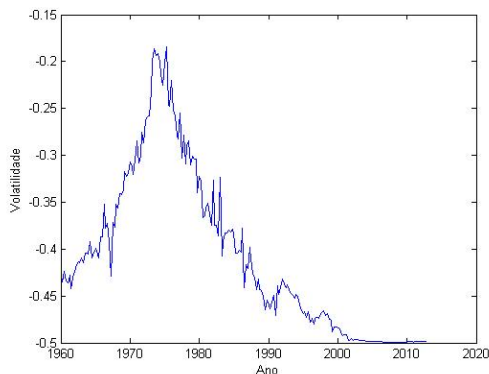


Figura 3.3: Autocorrelação da primeira diferença da inflação.

Por fim, o gráfico da inflação e de sua tendência estimada, Figura 3.4, reforça a conclusão obtida, que a inflação dos anos 70 foi causada predominantemente pelo componente de tendência. Nessa década e no início dos anos 80 a tendência estimada esteve muito próxima da inflação. Fora desse período e especialmente mais recentemente a flutuação dos preços tem sido majoritariamente causada pelo componente choque. Observa-se que a partir da metade dos anos 90 a tendência da inflação tem estado praticamente constante o que permite identificar a inflação de “longo prazo”, nesse caso aproximadamente 3% ao ano.

Portanto conclui-se que a inflação dos anos 70 foi de persistência



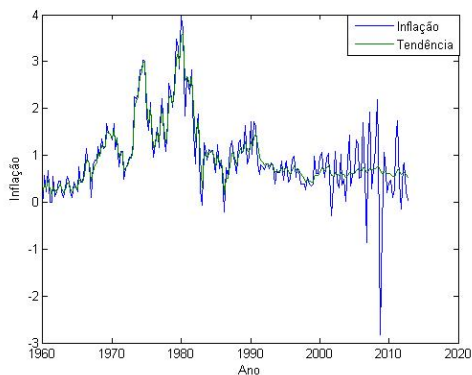


Figura 3.4: Inflação e Tendência.

causada pela elevação da volatilidade da tendência. Então nesse período a série se pareceria mais com um processo de raiz unitária. E as flutuações nos preços nos outros períodos, em especial na crise financeira recente, foram ocasionadas pelas inovações no choque. Logo a inflação se comportaria como um processo estacionário. O modelo captou as diferenças na série discutidas anteriormente.

### 3.1 Perfil da Verossimilhança

O método EIS fornece um estimador eficiente para a verossimilhança. Pois, além de não viesado, o estimador define a densidade de importância

minimizando a variância da razão entre a densidade alvo e a densidade de importância. Portanto, não sofrerá com o problema do crescimento exponencial da variância e não será necessário reamostragem, logo a função de verossimilhança será contínua. O filtro de partículas também fornece um estimador não viesado para verossimilhança, entretanto é não eficiente e descontínuo em relação aos parâmetros. Para mostramos as diferenças entre os métodos serão realizados dois experimentos, o primeiro será um estudo de Monte Carlo para calcular a variância de Monte Carlo do estimador da verossimilhança por EIS e PF. O segundo experimento mostrará como a função de verossimilhança se comporta próximo ao máximo para os dois estimadores.

Os resultados do experimento de Monte Carlo seguem na Tabela 3.2. Foram geradas 30 estimativas diferentes alterando a semente do gerador de números aleatórios. O valor fixado do parâmetro foi o estimado por máxima verossimilhança, Tabela 3.1. O tamanho da amostra de Monte Carlo foi 300 para o EIS e 5000 partículas para o PF.

Tabela 3.2: Experimento de Monte Carlo para a log-verossimilhança

	RB-EIS	RB-PF
Média	-161,9216	-161,5717
Desvio-Padrão	0,2253	0,2309

Os resultados permitem obter as seguintes conclusões. Primeiro,

tanto para o EIS quanto para o PF o desvio-padrão estimado da log-verossimilhança foi bem pequeno quando comparado à média. Pode-se explicar este resultado pela característica *Rao-Blackwellized* do modelo, como mostrado anteriormente parte da verossimilhança é integrada analiticamente e, portanto, reduz a variância de Monte Carlo. A segunda observação é que os desvio-padrões dos estimadores são muito próximos, entretanto a amostra de Monte Carlo do EIS é bem menor. Esse resultado mostra a eficiência do EIS, para o PF ter o mesmo nível de precisão requer-se uma amostra de Monte Carlo bem maior. E por fim, verifica-se que as médias da log-verossimilhança são estatisticamente iguais, o que deve ocorrer, pois ambos os métodos fornecem estimativas não viesadas para a verossimilhança.

O segundo experimento procura verificar como a função de log-verossimilhança estimada por EIS e PF se comporta próximo ao ponto de máximo. Foi determinado um intervalo para o parâmetro que contém o máximo estimado, e fixado os números aleatórios. Novamente o tamanho da amostra de Monte Carlo foi 300 para o EIS e 5000 partículas para o PF. O corte na verossimilhança, Figura 3.5, mostra que a função estimada por EIS é suave em relação ao parâmetro do modelo e convexa. Para o PF verifica-se que a função apresenta descontinuidades, o que dificultaria a otimização baseada em gradientes.

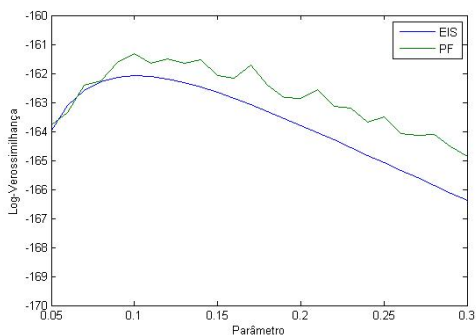


Figura 3.5: Corte na log-verossimilhança.

## 3.2 Previsão

Nesta seção será testada a capacidade de previsão do modelo UCSV comparando modelos tradicionais de previsão. Os modelos competidores serão um autoregressivo de primeira ordem e o passeio aleatório (RW). A previsão será fora da amostra e a janela de estimação tanto para o AR(1) quanto para o UCSV será em expansão iniciando-se no primeiro trimestre de 1990. Serão usadas 1, 2 e 4 horizontes para a previsão. A medida de erro de previsão será a raiz do erro quadrático médio (RMSE). E a capacidade de previsão dos modelos será comparada estatisticamente pelo teste de Diebold-Mariano (1995). Os resultados seguem na Tabela 3.3.

Inicialmente observa-se que os erros de previsão para os modelos fo-

Tabela 3.3: Resultados da Previsão

	$h = 1$	$h = 2$	$h = 4$
UCSV	0,6248	0,6521	0,6169
AR(1)	0,6960	0,8338	0,6438
Teste DM	-2,1802 (0,0292)	-2,2675 (0,0233)	-1,1139 (0,2652)
RW	0,7711	1,0149	0,7358
Teste DM	-2,1936 (0,0282)	-2,2052 (0,0274)	-1,3061 (0,1914)

Para o teste Diebold-Mariano (DM) mostra-se a estatística e o p-valor em parênteses.

ram maiores em horizontes curtos que para o horizonte maior. Isso pode ser explicado pelo predomínio dos choques na inflação na amostra da previsão. Como a inflação seria um processo estacionário no período, as inovações tendem a se dissipar e a inflação converge à média. Portanto, o AR estacionário e o UCSV seriam melhores previsores em um horizonte maior, para o UCSV por que a tendência estimada foi praticamente constante no período.

Os resultados confirmam as expectativas de que o modelo seria um bom predictor da inflação. Verifica-se que o teste DM rejeita a nula de igualdade de previsão para  $h = 1$  e  $h = 2$  tanto para o AR quanto para o RW, logo o modelo UCSV previu estatisticamente melhor a inflação nesses horizontes, mas para  $h = 4$  os modelos previram sem diferença. Portanto, o modelo UCSV em horizontes curtos consegue descrever melhor as transformações no processo da inflação no período da previsão. Como visto anteriormente esse período foi marcado por uma redução de

importância relativa no componente de tendência. Conclui-se que o modelo é robusto a mudanças estruturais, as quais os modelos de *benchmark* podem não conseguir capturar.

# Referências Bibliográficas

Ang, A., Bekaert, G. & Wei, M. (2006), Do macro variables, asset markets, or surveys forecast inflation better? NBER Working Paper 11538.

Atkeson, A. & Ohanian, L. E. (2001), 'Are phillips curves useful for forecasting inflation?', *Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review* (25:1), 2–11.

Broto, C. & Ruiz, E. (2009), 'Testing for conditional heteroskedasticity in the components of inflation', *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics* (13), 1–28.

Cecchetti, S., Chu, R. & Steindel, C. (n.d.), 'The unreliability of inflation indicators', *Current Issues in Economics and Finance, Federal Reserve Bank of New York, issue Apr.* .

- Cecchetti, S., Hooper, P., Kasman, B., Schoenholtz, K. & Watson, M. (2007), 'Understanding the evolving inflation process', *US Monetary Policy Forum* .
- Ciccarelli, M. & Mojo, B. (2010), 'Global inflation', *Review of Economic and Statistics* .
- Creal, D. (2009), 'A survey of sequential monte carlo methods for economics and finance', *Working Paper, University of Chicago* .
- Golob, J. (1994), 'Does inflation uncertainty increase with inflation?', *Economic Review* **3**.
- Gordon, N., Salmond, D. & Smith, A. (1993), 'A novel approach to nonlinear and non-gaussian bayesian state estimation', *IEEE Proceedings. Part F: Radar and Sonar Navigation* **140**(2), 117–113.
- Gurkaynak, R., B., S. & Swanson, E. (2005), 'The sensitivity of long-term interest rates to economic news: Evidence and implications for macroeconomic models', *American Economic Review* (95), 425–436.
- Hooker, M. (2002), 'Are oil shocks inflationary? asymmetric and nonlinear specifications versus changes in regime', *Journal of Money, Credit and Banking* (34), 540–561.



- Mishkin, F. (2007), *Monetary Policy Strategy*, The MIT Press, Cambridge.
- Nelson, C. R. & Schwert, G. W. (1977), 'Short-term interest rates as predictors of inflation: On testing the hypothesis that the real rate of interest is constant', *American Economic Review* **67**.
- Richard, J. & Zhang, W. (2007), 'Efficient high-dimensional importance sampling', *Journal of Econometrics* **141**(2), 1385–1411.
- Schon, T., Gustafsson, F. & P.-J., N. (2005), 'Marginalized particle filters for mixed linear/nonlinear state-space models', *IEEE Transactions on Signal Processing* **53**(7), 2279–2289.
- Stock, J. & Watson, M. (2006), 'Why has u.s. inflation become harder to forecast', *Journal of Money, Credit and Banking* **39**(1).
- van Dijk, H. (1999), 'Some remarks on the simulation revolution in bayesian econometric inference', *Econometric Reviews* **18**(1).