

James Schipmann Eger

**DETERMINAÇÃO DA POSIÇÃO DE REFERÊNCIAS FIXAS
POR MULTILATERAÇÃO SEQUENCIAL APLICADA A UM
SISTEMA *INDOOR-GPS***

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do Grau de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Gustavo Daniel Donatelli

Florianópolis

2013

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Eger, James Schipmann
Determinação da Posição de Referências Fixas por
Multilateração Sequencial Aplicada a um Sistema Indoor-GPS
/ James Schipmann Eger ; orientador, Gustavo Daniel
Donatelli - Florianópolis, SC, 2013.
90 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Mecânica.

Inclui referências

1. Engenharia Mecânica. 2. Geodésia Industrial. 3.
Metrologia Dimensional. 4. Referências Fixas. 5.
Multilateração. I. , Gustavo Daniel Donatelli. II.
Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-
Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

James Schipmann Eger

**DETERMINAÇÃO DA POSIÇÃO DE REFERÊNCIAS FIXAS
POR MULTILATERAÇÃO SEQUENCIAL APLICADA A UM
SISTEMA *INDOOR-GPS***

Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de “Mestre em Engenharia Mecânica”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica.

Florianópolis, 26 de março de 2013.

Prof. Júlio César Passos, Dr.
Coordenador do Curso

Prof. Gustavo Daniel Donatelli, Dr.
Orientador

Banca Examinadora:

Prof. Armando Albertazzi Gonçalves Jr., Dr.Eng..

Prof. Tiago Loureiro Figaro da Costa Pinto, Dr. Eng.

Mauricio de Campos Porath, Dr.Eng.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Rita e Eriberto, pelo apoio e carinho dedicados ao longo de toda minha vida; e aos meus irmãos, Roger e Rubem, que além de irmãos, são meus maiores amigos.

Às amizades que conquistei durante o mestrado – Aarão Foinquinhos, Anderson Pacheco, Fabrício de Oliveira, Fernando Jeremias, João Paulo de Souza, Luiz Pacheco, Miguel Demay, Rafael Pacheco – pelo apoio nos estudos e pelos momentos de alegria que temos vivido juntos.

Ao meu orientador, prof. Gustavo Donatelli, pelo suporte e pela confiança depositados em mim ao longo de todo o trabalho.

Ao Dr.-Ing. Mauricio de Campos Porath, pelo inestimável apoio no desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica – Armando Armando Albertazzi Gonçalves Júnior, Carlos Alberto Flesch, Marco Antonio Martins Cavaco, Gustavo Daniel Donatelli – pela dedicação e qualidade no ensino das disciplinas do programa.

Às equipes da Fundação CERTI e do Labmetro, pelo excelente ambiente de trabalho. À empresa Petrobras, pelos equipamentos adquiridos através do projeto LAMIA.

“Life is not about how hard you hit. It is about how hard you can get hit and keep moving forward”.

Rocky Balboa

RESUMO

O campo da geodésia industrial pode ser definido como a metrologia de grandes máquinas e estruturas. Tarefas típicas neste âmbito são as de alinhamento e posicionamento de estruturas, assim como a inspeção geométrica de componentes de grande porte. Dentro deste escopo, a medição com baixa incerteza de comprimentos e, em especial, de coordenadas espaciais em escalas de 5 m até 100 m tornou-se um requisito de rotina em indústrias como naval e aeronáutica. Com o objetivo de melhorar o desempenho do produto, reduzir tempos e custos e eliminar retrabalho, tem-se definido requisitos cada vez mais rigorosos para a fabricação e montagem de peças grandes e complexas. A multilateração sequencial com *LaserTracer* é uma técnica potencialmente capaz de realizar a medição de coordenadas espaciais com baixa incerteza e garantia da rastreabilidade direta à definição do metro. O presente trabalho de pesquisa se propõe então a desenvolver uma técnica de medição por multilateração sequencial com *LaserTracer*, onde a configuração da medição é otimizado por meio de simulação computacional, voltada ao sistema *indoor*-GPS. A sequência de ações visando a atingir os resultados consiste de: desenvolvimento dos algoritmos computacionais necessários; realização do experimento e análise dos resultados. Em primeiro lugar, é desenvolvido o algoritmo que calcula, a partir das distâncias medidas com o *LaserTracer*, as coordenadas espaciais dos pontos-alvo. Um segundo algoritmo estima a incerteza de medição das coordenadas espaciais calculadas pelo método da simulação de Monte Carlo. O último algoritmo procura otimizar a distribuição das estações de medição para uma dada configuração dos pontos-alvo. Um experimento foi realizado visando a investigar a viabilidade e a funcionalidade da técnica em questão. Os resultados experimentais confirmam a viabilidade da técnica. As simulações realizadas indicam que é possível atingir incertezas experimentais inferiores àquelas das técnicas tradicionais de geodésia industrial.

Palavras-chave: Geodésia industrial. Referências fixas. Confiabilidade metrológica. Rastreabilidade da medição. Multilateração. *LaserTracer*. Incerteza da medição de coordenadas espaciais.

ABSTRACT

The field of large volume metrology may be defined as the metrology of large machines and structures. Its typical tasks include alignment and positioning of structures, as well as geometrical inspection of large components. In this context, the low-uncertainty measurement of lengths and, particularly, 3D coordinates in ranges from 5 m up to 100 m has become a routine requirement in shipbuilding and aircraft industries.

Intending to enhance product's performance and to reduce time, costs and rework, the industry has been narrowing tolerances for the manufacturing and assembling of large parts. Multilateration using a LaserTracer is a technique potentially capable of performing the measurement of 3D coordinates with low uncertainty and assuring direct traceability to the definition of the meter. Thus, this work intends to develop a sequential multilateration technique using a LaserTracer oriented to an indoor-GPS system, where the measurement setup is optimized through computer simulation. The sequence of actions for achieving the goal is: algorithms development; experimental procedure and results analysis. Firstly, the algorithm that calculates the target-points' coordinates using the measured lengths as input is developed. The second algorithm estimates the measurement uncertainty by means of a Monte Carlo simulation. The third algorithm tries to optimize the measuring stations distribution given the positions of the target-points. An experiment has been carried out in order to investigate the feasibility and performance of the technique. The experimental results confirm its feasibility. Simulations suggest that it is possible to achieve experimental uncertainties lower than those of traditional large volume metrology techniques.

Key-words: Large volume metrology. Stationary references. Metrological reliability. Traceability. Multilateration. *LaserTracer*. Measurement Uncertainty of spatial coordinates.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Laser Radar em aplicação na indústria aeronáutica	19
Figura 2 - Laser Tracker utilizado no alinhamento de uma fonte de raios-x	20
Figura 3 – Representação de um ponto por coordenadas esféricas e coordenadas cartesianas	24
Figura 4 - Princípio de medição da estação total por coordenadas esféricas	24
Figura 5 - Exemplo de aplicação do teodolito na indústria naval	24
Figura 6 - <i>Laser Tracker</i> rastreando alvo	26
Figura 7 - Princípio de funcionamento do <i>Laser Tracker</i>	26
Figura 8 - Refletor SMR	27
Figura 9 - Refletor <i>cat-eye</i>	27
Figura 10 - <i>Laser Radar</i>	28
Figura 11 - Princípio de operação do Laser Radar	28
Figura 12 - <i>LaserTracer</i>	29
Figura 13 - Esquema construtivo do <i>LaserTracer</i>	29
Figura 14 - Equipamento de fotogrametria.....	30
Figura 15 - Aplicação da fotogrametria na indústria aeronáutica	30
Figura 16 - Receptor e transmissor do sistema iGPS	30
Figura 17 - Quatro transmissores determinando a posição espacial de um receptor.	31
Figura 18 - Exemplo de aplicação do iGPS: indústria aeronáutica.....	31
Figura 19 - Experimento inicial com sistema indoor-GPS – medição da trajetória de um robô de solda (<i>Scalebar</i> é a barra de referência do sistema, própria para a realização do <i>setup</i>).....	32
Figura 20 - Transmissores e os respectivos vetores transmissor-receptor ..	33
Figura 21 - <i>Monument</i> (referência fixa do iGPS)	35
Figura 22 - <i>Monument</i> fixado na estrutura anexa ao transmissor do iGPS .	35
Figura 23 - Ilustração do princípio de medição de multilateração.....	37
Figura 24 - Aplicação de multilateração <i>online</i> utilizando quatro <i>LaserTracers</i> para calibração de MMC	38
Figura 25 – Principais funções, entradas e saídas dos algoritmos desenvolvidos.....	45
Figura 26 - Fluxograma do algoritmo para cálculo das coordenadas por multilateração.....	46
Figura 27 - Ilustração exemplificando a definição do sistema coordenado. “SM” representa um sistema de medição de distâncias.	47

Figura 28 - Interface gráfica, em Labview, do algoritmo para o cálculo das coordenadas	48
Figura 29 - Fluxograma simplificado da avaliação de incerteza usando a SMC	50
Figura 30 - Propagação das distribuições de probabilidade das grandezas de entrada através do modelo matemático da medição, resultando numa distribuição de probabilidades que descreve os valores do mensurando	51
Figura 31 - Intervalo de abrangência mínimo (IAM). Tanto o intervalo mínimo quanto o simétrico envolvem uma probabilidade de 95%, porém, o IAM apresenta uma menor variação dos valores de Y.	52
Figura 32 - Fluxograma do algoritmo desenvolvido para avaliação de incerteza por SMC.....	53
Figura 33 – Fluxograma do algoritmo para otimização da configuração das estações de medição	55
Figura 34 - Estações a otimizar. T1 são as possíveis posições da estação 1, e assim por diante até T5.....	56
Figura 35 - Interface gráfica do algoritmo para otimização das estações ...	57
Figura 36 - Interface gráfica do algoritmo para busca da melhor configuração de estações.....	58
Figura 37 – Visão geral da sala de medições, sob duas vistas sobrepostas. As legendas M1 a M6 indicam as posições dos <i>monuments</i> do sistema iGPS.	60
Figura 38 - Ilustração da dispersão da medição de distâncias pelo sistema de medição	62
Figura 39 - Planta baixa da sala de medições. O pontos-alvo estão indicados pelas legendas M1 a M6.....	64
Figura 40 - Estações a otimizar. T1 são as possíveis posições da estação 1, e assim por diante até T5.....	65
Figura 41 - Estações a otimizar após aplicação das restrições. T1r a T5r são as possíveis posições das estações 1 a 5 após a aplicação das restrições.	66
Figura 42 - Desvios-padrão encontrados para cada combinação de 5 estações	67
Figura 43 - Coordenadas da configuração de estações de medição retornada pelo algoritmo de otimização	67
Figura 44 - Planta baixa da sala de medições incluindo <i>monuments</i> e posições das estações de medição resultantes da otimização. ...	68

Figura 45 - Histogramas para cada coordenada do ponto-alvo com maior desvio-padrão associado	70
Figura 46 - Gráficos de frequência acumulada para cada coordenada do ponto-alvo com maior desvio-padrão associado	71
Figura 47 - Amplitudes dos intervalos de abrangência mínimos em X, Y e Z.....	72
Figura 48 - Resultados das estimativas da incerteza de medição por SMC para os casos $u_L = 29 \mu\text{m}$ e $u_L = 5 \mu\text{m}$	73
Figura 49 - <i>Monument</i> fixado no suporte do Transmissor	76
Figura 50 - Refletor <i>cat-eye</i> com adaptador desenvolvido para a tarefa de medição específica	76
Figura 51 - Procedimento para medição de um <i>Monument</i>	77
Figura 52 - Pontos que representam o resultado da medição.....	78
Figura 53 - Gráfico com coordenadas retornadas pelo algoritmo I	79
Figura 54- Desvios das coordenadas na direção X encontrados pelo <i>best-fit</i>	80
Figura 55- Desvios das coordenadas na direção Y encontrados pelo <i>best-fit</i>	80
Figura 56- Desvios das coordenadas na direção Z encontrados pelo <i>best-fit</i>	81
Figura 57 - Amplitudes dos intervalos de abrangência mínimos utilizando adaptador de 1000 mm.....	85

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT = Associação Brasileira de Normas Técnicas

ADM = *Absolute distance meter*

E_{MA} = Erro máximo admissível

GUM = *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*

g_{x_i} = Distribuição de probabilidades da variável x_i

IAM = Intervalo de Abrangência Mínimo

iGPS = *indoor Global Positioning System*

INMETRO = Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e
Tecnologia

JCGM = *Joint Commitee for Guides ind Metrology*

NPL = *National Physical Laboratory*

PDF = *Probability density function*

PSD = *Photo sensitive device*

PTB = *Phyisikalisch-Technischen Bundesanstalt*

SMC = Simulação de Monte Carlo

SMR = *Spherically mounted retroreflector*

SUMÁRIO

1	Introdução	19
2	Geodésia Industrial – Tecnologias e Métodos	23
2.1	Tecnologias de Medição para Geodésia Industrial	23
2.1.1	Teodolitos e Estações Totais	23
2.1.2	<i>Laser Tracker</i>	25
2.1.3	Laser Radar	27
2.1.4	<i>LaserTracer</i>	28
2.1.5	Fotogrametria	29
2.1.6	Indoor Global Positioning System – iGPS	30
2.2	O uso de multiestações	33
2.2.1	Leap-frog.....	34
2.2.2	Referências Fixas	34
2.3	Multilateração.....	36
2.4	Discussão do Capítulo	38
3	Definição do Problema de Pesquisa.....	41
4	Determinação das Coordenadas Espaciais de Pontos por Multilateração Sequencial.....	43
4.1	Teoria Matemática da Multilateração Sequencial.....	43
4.2	Algoritmos Desenvolvidos	45
4.2.1	Algoritmo I – Cálculo das Coordenadas dos Pontos Medidos	46
4.2.2	Algoritmo II – Estimativa da Incerteza de Medição das Coordenadas	48
4.2.3	Algoritmo III – Otimização das Estações.....	54
5	Simulações Realizadas.....	59
5.1	Melhor Posicionamento Relativo entre Estações de Medição e Pontos-Alvo	63
5.2	Estimativa da Incerteza de Medição	69

5.3	Discussão dos resultados das simulações.....	72
6	Aplicação de Multilateração Sequencial para Medição de Referências Fixas do Sistema iGPS (<i>Monuments iGPS</i>).....	75
6.1	Descrição do Problema de medição	75
6.2	Experimento realizado	75
6.2.1	Procedimento de medição.....	75
6.2.2	Resultados.....	78
6.2.3	Discussão dos Resultados Experimentais	79
7	Considerações Finais.....	83
	REFERÊNCIAS	87
	APÊNDICE A – DADOS E RESULTADOS EXPERIMENTAIS..	90

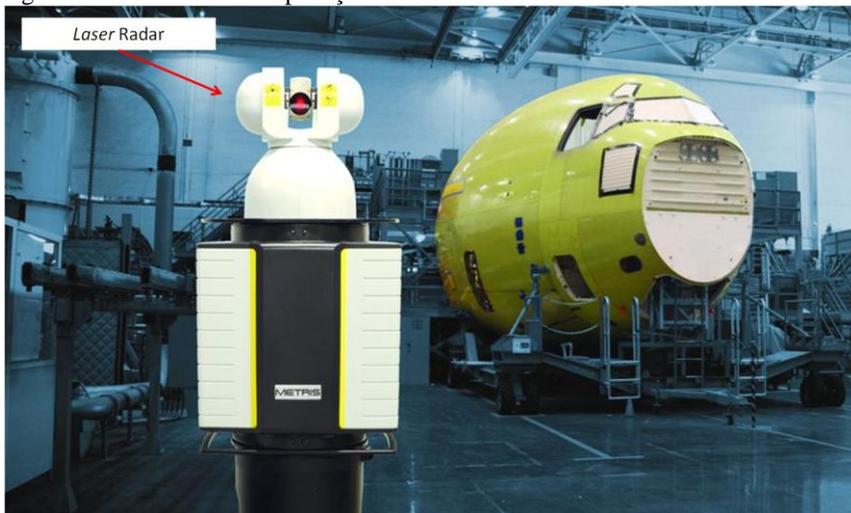
1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho consiste de uma dissertação de mestrado em engenharia mecânica, área de concentração metrologia e instrumentação, com ênfase em geodésia industrial (também denominada de metrologia de grande escala).

A definição mais utilizada de geodésia industrial foi proposta por Puttock (1978): “O campo da geodésia industrial pode ser definido como a metrologia de grandes máquinas e estruturas. Suas fronteiras são medições de laboratório em uma extremidade e agrimensura na outra. Nenhuma das fronteiras está bem definida e o campo será geralmente compreendido como a metrologia de objetos cujas dimensões vão de dezenas até centenas de metros”.

Tarefas típicas em geodésia industrial são as de alinhamento e posicionamento de estruturas, assim como a inspeção geométrica de componentes de grande porte. Exemplos de aplicações são encontrados principalmente nas indústrias naval, aeronáutica e de petróleo; mas também na geração de energia elétrica e instalações de pesquisa científica como aceleradores de partículas e reatores de fusão nuclear (Figura 1 e Figura 2).

Figura 1 - Laser Radar em aplicação na indústria aeronáutica



Fonte: www.usinouvelle.com

Figura 2 - Laser Tracker utilizado no alinhamento de uma fonte de raios-x



Fonte: www.petra3-project.desy.de

Tradicionalmente, a geodésia industrial consiste de medições de comprimentos e ângulos. Por exemplo, no caso das medições de comprimentos, os métodos tradicionais eram baseados em uso de trenas. Um grande avanço foi obtido com a introdução de métodos ópticos, como a interferometria *laser* e sistemas baseados no tempo de voo de um sinal óptico. No caso da medição de ângulos, os métodos mais comumente utilizados foram sempre ópticos (FRANCESCHINI, 2011).

Com o objetivo de melhorar o desempenho do produto, reduzir tempos e custos e eliminar retrabalho, tem-se definido requisitos cada vez mais rigorosos para a fabricação e montagem de peças grandes e complexas. Além de tarefas de alinhamento de grandes peças e estruturas, a medição com baixa incerteza de comprimentos e, em especial, de coordenadas 3D em escalas de 5 m até 100 m tornou-se uma situação de rotina em indústrias como naval e aeronáutica (ZHANG, 2010).

Esses requisitos, somados à disponibilidade da eletrônica de alta velocidade e de recursos computacionais poderosos e de baixo custo, vêm impulsionando o desenvolvimento das técnicas e tecnologias de medição, principalmente daquelas destinadas à metrologia tridimensional com baixa incerteza de medição.

O desenvolvimento e aprimoramento de instrumentos versáteis como *Laser Tracker*, *Laser Radar*, *LaserTracer*, *Indoor-GPS*, sistemas de

fotogrametria, entre outros, tem feito com que problemas de medição de grande escala possam ser solucionados com maior velocidade e menor incerteza de medição.

Ao contrário do que acontece na metrologia industrial convencional, na geodésia industrial geralmente é necessário trazer o sistema de medição até o objeto a ser medido, devido às grandes dimensões deste. O objetivo é definir um volume de medição no qual o objeto a ser medido está inserido, posicionando-se o sistema de medição e demais dispositivos auxiliares ao redor do objeto. Muitos tópicos sobre esse aspecto são temas de discussão na comunidade científica (FRANCESCHINI, 2011). Para a maioria das técnicas utilizadas em geodésia industrial há bastante flexibilidade em relação ao posicionamento relativo sistema de medição-objeto, tendo, no entanto, a escolha desse posicionamento grande influência sobre a incerteza de medição.

Muitas das pesquisas atuais têm foco na melhoria do desempenho metroológico e em métodos para estimativa da incerteza de medição, já que ainda não há um conjunto de normas internacionais para a abordagem padronizada da incerteza de medição em geodésia industrial. Algumas abordagens nessa direção baseiam-se em normas existentes para máquinas de medir por coordenadas e alguns sistemas ópticos (FRANCESCHINI, 2011).

Diante desse contexto, o presente trabalho de pesquisa se propõe a desenvolver uma técnica de medição de coordenadas espaciais em grandes volumes de medição com baixa incerteza de medição e rastreabilidade direta, onde a melhor configuração geométrica da medição é analisada por meio de simulação computacional.

Panorama geral da estrutura do trabalho:

O capítulo 2 apresenta as principais tecnologias e métodos de geodésia industrial.

A definição do problema de pesquisa, bem como os objetivos geral e específicos, são apresentados em detalhes no capítulo 3.

No capítulo 4 são apresentados a matemática da multilateração e os algoritmos desenvolvidos para realização das tarefas.

O capítulo 5 apresenta as simulações realizadas e discussões dos resultados das mesmas.

No capítulo 6 é explicado o procedimento experimental, apresentados os resultados e discussões dos resultados dos mesmos.

O capítulo 7 traz as considerações finais do trabalho.

2 GEODÉSIA INDUSTRIAL – TECNOLOGIAS E MÉTODOS

Este capítulo aborda o estado da arte relacionado ao tema de pesquisa e está dividido em três partes. As duas primeiras partes apresentam as principais tecnologias e métodos de geodésia industrial; a terceira parte introduz a técnica de medição por multilateração.

2.1 TECNOLOGIAS DE MEDIÇÃO PARA GEODÉSIA INDUSTRIAL

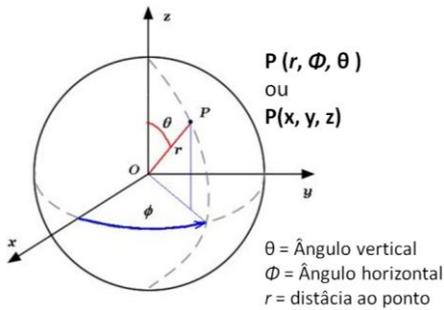
São apresentadas a seguir as principais tecnologias de geodésia industrial e algumas de suas aplicações.

2.1.1 Teodolitos e Estações Totais

Teodolitos são utilizados tradicionalmente na engenharia civil, em tarefas de edificação, construção de estradas e, principalmente, topografia de terrenos. Mais recentemente, com o avanço dos recursos computacionais e do próprio sistema de medição, passaram a ser utilizados também na metrologia industrial.

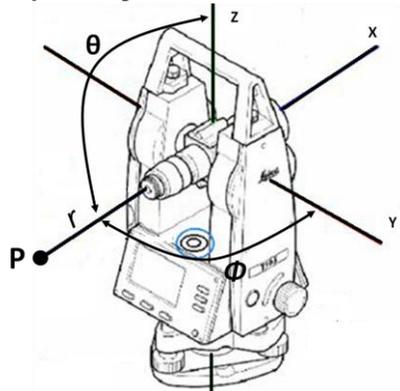
Os teodolitos modernos – chamados de estações totais – realizam a medição de um ponto no espaço em coordenadas esféricas, que consiste em determinar a posição de um ponto no espaço através das medições de dois ângulos (horizontal φ e vertical θ) e da distância ao ponto (r). A Figura 3 ilustra as representações de um mesmo ponto no espaço em coordenadas esféricas e em coordenadas cartesianas. Para realizar a medição, as estações totais são dotadas de dois medidores de ângulos (*encoders*) e um dispositivo de medição eletrônica de distância (EDM). O princípio de medição destes sistemas está ilustrado na Figura 4. Em seguida, as informações são transformadas para coordenadas cartesianas.

Figura 3 – Representação de um ponto por coordenadas esféricas e coordenadas cartesianas



Fonte: <http://commons.wikimedia.org>

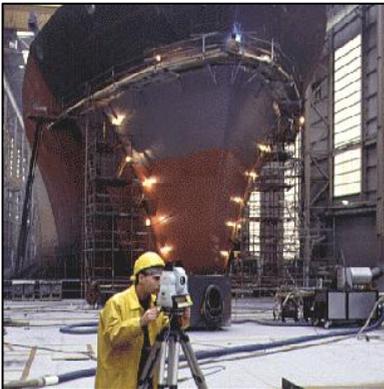
Figura 4 - Princípio de medição da estação total por coordenadas esféricas



Fonte: <http://1.bp.blogspot.com>
(adaptado)

A faixa de medição por sistemas de teodolitos é flexível; o E_{MA} típico é de $1 \text{ mm} + 1 \text{ ppm}$ (LEICA TS30 TECHNICAL DATA, 2009). Exemplos de aplicações deste sistema são tarefas de agrimensura, montagem de embarcações e medições de partes de aeronaves (Figura 5).

Figura 5 - Exemplo de aplicação do teodolito na indústria naval



Fonte: www.metrology.leica-geosystems.com

2.1.2 *Laser Tracker*

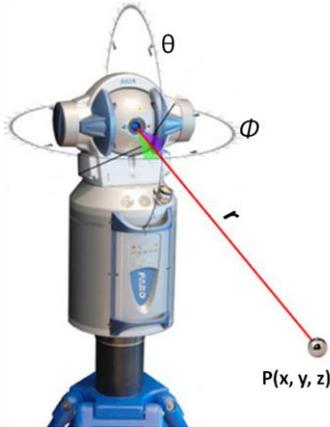
O primeiro *Laser Tracker* – *laser* interferométrico capaz de rastrear um alvo – foi demonstrado no ano de 1986 por Lau, Hocken e Haight, motivado pela necessidade de medições rápidas e com baixa incerteza da posição de robôs industriais (ESTLER, 2002). Desde então houve grandes evoluções dessa tecnologia, a qual encontrou um amplo campo de aplicações, muito além do seu objetivo inicial.

De modo semelhante às Estações Totais, o *Laser Tracker* realiza a medição da posição de um alvo (refletor) em coordenadas esféricas.

A distância ao refletor pode ser medida por um interferômetro ou por um ADM (*absolute distance meter*). O interferômetro mede deslocamentos (e não distâncias absolutas) em termos do comprimento de onda de um sinal luminoso. É uma tecnologia estável, confiável e relativamente simples (HUGHES, 2011), porém a perda do sinal requer que a medição seja reiniciada em uma posição conhecida. Por sua vez, o ADM é capaz de medir distâncias absolutas e não tem problemas com perda do sinal luminoso, mas pode ocorrer deriva do zero (referência interna para medição de comprimentos). No entanto, o ADM é uma tecnologia mais complexa, com menor exatidão em relação ao interferômetro. Os ângulos horizontal e vertical são medidos por *encoders* angulares. Estes são dominantes na composição da incerteza de medição do *Laser Tracker* (HUGHES, 2011).

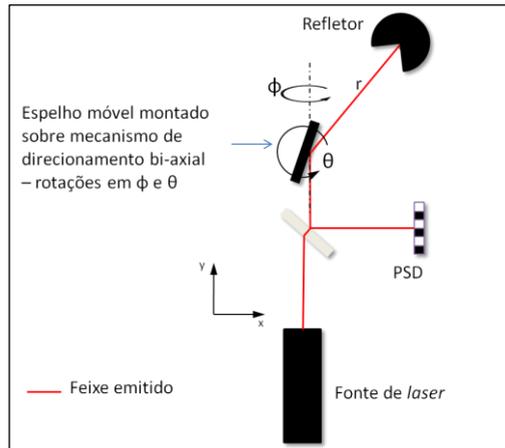
O rastreamento funciona da seguinte forma: a fonte de *laser* (interferômetro ou ADM) emite um sinal luminoso, que passa por um espelho montado sobre um mecanismo de direcionamento biaxial, chegando em seguida até o refletor. Parte do sinal refletido é direcionado por um separador de feixes a um detector de posição fotossensível (PSD). Quando o refletor é deslocado, a trajetória do feixe refletido muda, e essa mudança de posição é quantificada pelo PSD. A seguir, a informação do PSD é utilizada para acionar o mecanismo de direcionamento do feixe *laser*, de maneira a manter o mesmo centrado no refletor enquanto este se move (Figura 7) (ESTLER, 2002).

Figura 6 - *Laser Tracker* rastreamento alvo



Fonte: <http://www.vivtech.ru>

Figura 7 - Princípio de funcionamento do *Laser Tracker*



Fonte: Autor

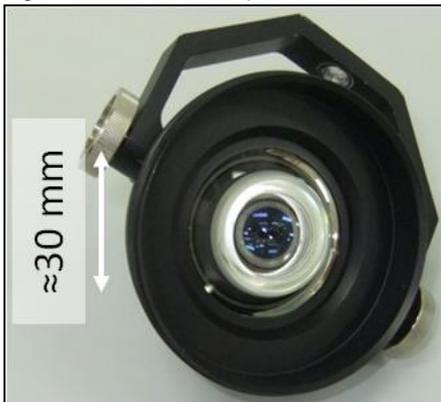
Diversos tipos de refletores podem ser utilizados com o *Laser Tracker*. O mais comum é o retrorefletor montado em esfera – SMR (*spherically mounted retroreflector*) – que é um canto de cubo com o vértice no centro de uma esfera de precisão (Figura 8). O ângulo de aceitação de um SMR típico é de $\pm 40^\circ$. Outro refletor comum é o *cat-eye* (Figura 9), constituído por dois hemisférios de vidro óptico com raios diferentes, de modo que o feixe de laser incide sobre o hemisfério menor e é refletido no fundo do hemisfério maior, onde há um revestimento de alta refletividade. O *cat-eye* possui um maior ângulo de aceitação: $\pm 60^\circ$.

As medições são realizadas por um operador ou algum dispositivo que transporta o refletor até os pontos de interesse. No caso de medição utilizando interferômetro, uma perda de sinal por interrupção do feixe luminoso ou excesso de aceleração do refletor requer que a medição de comprimento seja reiniciada de uma posição conhecida. Ainda, o *Laser Tracker* é um sistema que exige linha de visão ao objeto sendo medido, o que pode tornar necessário que o equipamento seja movido para diferentes posições de modo a “enxergar” todas as características que se deseja medir.

Figura 8 - Refletor SMR



Fonte:www.apisensor.com

Figura 9 - Refletor *cat-eye*

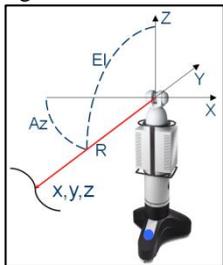
Fonte: Autor

A faixa de medição típica do *Laser Tracker* é de 70 m (distância ao refletor) com um $E_{MA} < 30 \mu\text{m}$ (2σ), para distâncias até 10 m (FARO LASER TRACKER XI SPECIFICATIONS, 2008). As principais aplicações desse equipamento incluem: posicionamento relativo de grandes estruturas – montagem de fuselagens de avião; controle geométrico de grandes peças, como turbinas de avião e propulsores de embarcações; verificação metrológica de grandes máquinas-ferramenta, verificação do movimento de robôs industriais, entre outros (ESTLER, 2002).

2.1.3 Laser Radar

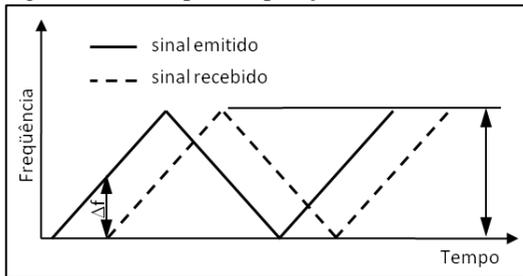
O *Laser Radar* (Figura 10) emite um feixe de *laser* com frequência modulada na direção do objeto a ser medido. Uma pequena parcela do sinal refletido pela superfície do objeto retorna com modulação deslocada em relação ao sinal emitido (Figura 11). A diferença de fase entre esses sinais é proporcional à distância até o objeto. Assim, o *laser radar* não necessita de um refletor para realizar a medição. Os ângulos horizontal e vertical são medidos por *encoders*. Sua faixa de medição típica é $R < 60$ m (distância ao mensurando), $E_{MA} < 100 \mu\text{m}$ (2σ) para $R \leq 10$ m; $E_{MA} < 300 \mu\text{m}$ para $R > 30$ m (MV330-MV350 LASER-RADAR SPECIFICATIONS, 2012).

O *Laser Radar* pode ser aplicado à medição da forma de embarcações ou da fuselagem de aviões e tarefas gerais de inspeção dimensional de grandes peças.

Figura 10 - *Laser Radar*

Fonte: metris.com

Figura 11 - Princípio de operação do Laser Radar



Fonte: Adaptado de (ESTLER, 2002)

2.1.4 *LaserTracer*

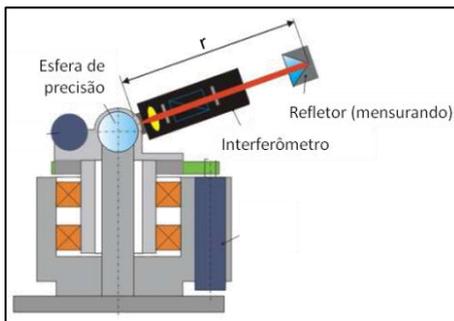
O *LaserTracer* (Figura 12) é um instrumento semelhante ao *Laser Tracker*, porém é otimizado para realizar medição de distâncias. O sistema foi projetado de modo a tornar seu desempenho metrológico independente das imperfeições mecânicas dos mecanismos de giro. É uma tecnologia desenvolvida e patenteada pelos institutos nacionais de metrologia da Alemanha, o PTB (*Physikalisch-Technischen Bundesanstalt*), e da Inglaterra, o NPL (*National Physical Laboratory*).

O *LaserTracer* possui uma esfera de precisão (erro de forma inferior a 30 nm) em seu centro de rotação que atua como refletor fixo do interferômetro (Figura 13). Sem possuir função mecânica, nenhuma força externa pode alterar a posição da esfera. Dessa forma, o centro da mesma é a referência para as medições de distância, que se tornam independentes da precisão mecânica do mecanismo de rotação e a incerteza da medição de comprimentos passa a ser dominada pela incerteza do interferômetro. Isso possibilita realizar medições de distâncias espaciais com incertezas até 10 vezes menores que aquelas que seriam obtidas usando um *Laser Tracker* (SCHNEIDER, 2004). O procedimento de medição com o *LaserTracer* é muito semelhante àquele do *Laser Tracker*, requerendo o uso de um refletor e cuidados para não haver interrupção do sinal luminoso entre refletor e o sistema de medição.

O erro máximo admissível típico do *LaserTracer* é $E_{MA} = (0,2 \mu\text{m} + 0,3 \mu\text{m/m}) (2\sigma)$, com rastreabilidade direta à definição do metro (WENDT, 2011).

Figura 12 - *LaserTracer*

Fonte: Autor

Figura 13 - Esquema construtivo do *LaserTracer*

Fonte: (SCHWENCKE, 2005)

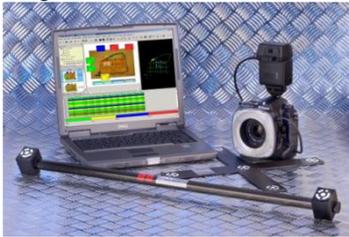
Aplicações do *LaserTracer* vêm sendo estudadas por alguns dos principais institutos de pesquisa do mundo (p.ex. PTB e NPL), com foco principalmente em mapeamento dos erros geométricos e melhoria do desempenho metrológico de grandes máquinas-ferramenta e máquinas de medição por coordenadas (HÄRTIG, 2002; SCHWENCKE, 2005; WENDT, 2011).

2.1.5 Fotogrametria

A fotogrametria é uma técnica de medição na qual as coordenadas tridimensionais de pontos no objeto são calculadas por triangulação óptica a partir de imagens bidimensionais feitas de diferentes posições (ESTLER, 2002). A faixa de medição de sistemas de fotogrametria é flexível, e a incerteza é estimada em $E_{MA} < 20 \mu\text{m/m}$. A Figura 14 apresenta um exemplo de equipamentos de fotogrametria.

Aplicações tradicionais da fotogrametria são a medição de superfícies de telescópios de rádio, antenas parabólicas e medições de partes de embarcações. Mais recentemente, seu uso foi expandido para medições na indústria aeronáutica (inspeção dimensional de estruturas de fixação de ferramentas e de peças padrão), bem como à digitalização de modelos físicos (Figura 15).

Figura 14 - Equipamento de fotogrametria



Fonte: aicon.de

Figura 15 - Aplicação da fotogrametria na indústria aeronáutica

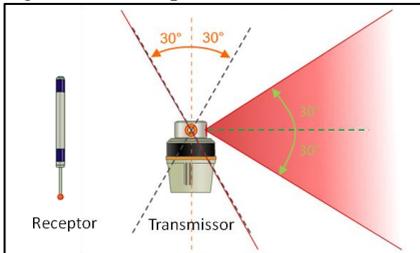


Fonte: www.qz-online.de

2.1.6 Indoor Global Positioning System – iGPS

O iGPS é um sistema de geodésia industrial composto por pelo menos dois transmissores e um receptor. A Figura 16 ilustra os citados dispositivos. A quantidade desses componentes de fato utilizados varia de acordo com a aplicação.

Figura 16 - Receptor e transmissor do sistema iGPS

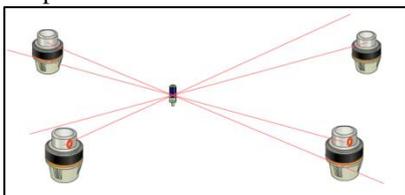


Fonte: nikonmetrology.com

Cada transmissor emite continuamente dois feixes rotativos (frequência de rotação de torno de 50 Hz) de *laser* infravermelho em forma de leque e um sinal estroboscópico de referência. Os receptores são constituídos por elementos fotossensíveis. Baseado na geometria dos feixes de *laser*, no tempo de detecção dos sinais luminosos e na frequência de rotação do transmissor, é possível calcular os ângulos horizontal e vertical entre transmissor e receptor. A triangulação das informações de dois transmissores permite a determinação da posição espacial do receptor (coordenadas x, y e z). Transmissores adicionais (total de 3 ou mais; Figura 17) aumentam a robustez do sistema, principalmente com relação à

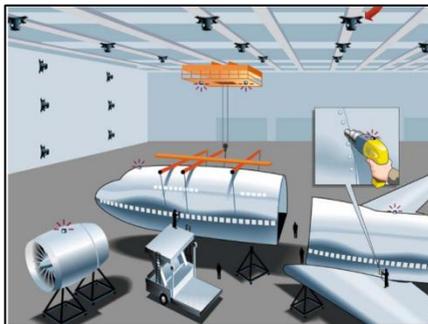
visibilidade dos feixes de *laser* pelos receptores (METRIS CANADA INC., 2009).

Figura 17 - Quatro transmissores determinando a posição espacial de um receptor.



Fonte: www.metriscanada.com

Figura 18 - Exemplo de aplicação do iGPS: indústria aeronáutica



Fonte: www.metriscanada.com

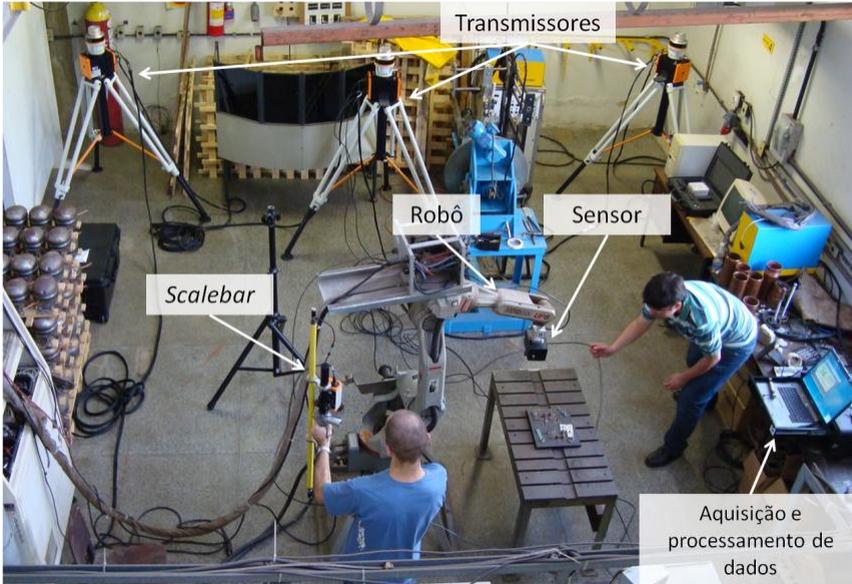
Uma das vantagens deste sistema é a possibilidade de se utilizarem múltiplos receptores numa única montagem. Assim, o iGPS oferece um interessante compromisso entre incerteza de medição, flexibilidade de volume de trabalho e potencial de número de pontos de medição (SCHMITT, 2010). A faixa de medição é flexível, podendo ser expandida pela adição de transmissores. O erro máximo típico é $E_{MA} < 1 \text{ mm}$ (2σ) em condições industriais¹. (MAISANO, 2008), podendo chegar a $E_{MA} \approx 0,2 \text{ mm}$ (2σ) em condições de laboratório² (NIKON METROLOGY, 2011).

O indoor-GPS tem potencial aplicação nas indústrias naval e aeronáutica. O mesmo vem sendo analisado em caráter experimental em tarefas como montagem de aeronaves, montagem de tanques de navios transportadores de gás, monitoramento da posição de robôs industriais, entre outras. A Figura 19 apresenta uma montagem do iGPS em um experimento inicial onde foi medida a trajetória de um robô de solda.

¹ Medições envolveram uma barra de referência de 2 m de comprimento, em diferentes posições dentro do volume de medição.

² Medições envolveram uma rede de pontos de referência; distâncias entre pontos medidas de (5 a 10) m.

Figura 19 - Experimento inicial com sistema indoor-GPS – medição da trajetória de um robô de solda (*Scalebar* é a barra de referência do sistema, própria para a realização do *setup*).

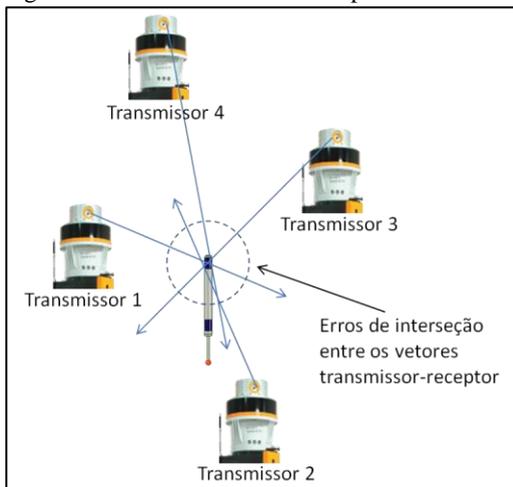


Fonte: Autor

É necessário determinar as posições e orientações dos transmissores do iGPS, de modo a tornar possível a realização das medições. Esse procedimento é o *setup* do sistema, e existem duas principais maneiras de realizá-lo: utilizando a barra de referência (*scalebar*); ou através de referências fixas (*monuments*) (METRIS CANADA INC., 2009).

A *scalebar* é uma barra com dois receptores separados por uma distância fixa conhecida. Para realizar o *setup* por este método, é necessário que sejam medidos vários pontos com a *scalebar*, os quais devem abranger da melhor maneira possível o volume de medição. Após essas medições terem sido realizadas, um algoritmo calcula os vetores transmissor-receptor para todos os transmissores e pontos medidos. Para determinar as posições e orientações dos transmissores, o algoritmo resolve um problema de otimização por mínimos quadrados onde são minimizados os erros de interseção entre os citados vetores (Figura 20). É necessário, adicionalmente, informar ao algoritmo pelo menos uma distância conhecida (escala) entre dois receptores.

Figura 20 - Transmissores e os respectivos vetores transmissor-receptor



Fonte: Autor

Outra forma de realizar o *setup* do sistema *indoor-GPS* é através dos *monuments*, que são receptores estacionários cujas posições devem ser medidas por um sistema de medição de referência³. As posições dos *monuments* são informadas ao *software* do sistema, que então calcula as posições e orientações dos transmissores. A exatidão envolvida no *setup* tem influência direta sobre o desempenho metrológico do sistema (MAISANO, 2008; METRIS CANADA INC., 2009). Os *monuments* do sistema *indoor-GPS* serão abordados em maior profundidade no tópico 2.2.2.

2.2 O USO DE MULTIESTAÇÕES

Medições por multiestações são aquelas em que são necessárias duas ou mais estações de medição, cujos valores medidos devem, ao final, ser transformados para um único sistema de coordenadas. Dois dos métodos mais utilizados são o *leap-frog* e as referências fixas.

³ Idealmente, um sistema de medição de referência deve possuir uma incerteza de medição pelo menos 10 vezes inferior àquela do sistema em avaliação.

2.2.1 Leap-frog

Leap-frog é uma técnica usada em sistemas de medição portáteis (por exemplo, braços mecânicos) para aumentar seu volume de medição. Alguns pontos de referência (geralmente do próprio objeto a medir) são medidos na posição inicial e, em seguida, medidos novamente após o sistema ser reposicionado. Estes pontos sobrepostos são utilizados para a concatenação da nova posição com o sistema coordenado inicial. Em termos matemáticos, *leap-frog* consiste simplesmente em um alinhamento iterativo (*best-fit*) de um conjunto de pontos medidos a partir de diferentes posições (FARO TECHNOLOGIES, INC., 2009). Dessa maneira, para cada reposicionamento do sistema de medição, introduz-se uma quantidade de incerteza de medição. Essa quantidade é difícil de estimar, haja vista que ela resulta de um *best-fit*. Dependendo de quantos pontos são medidos, de sua disposição geométrica, das distâncias entre eles e de quantas vezes o sistema é movido, utilizando diferentes conjuntos de pontos para a concatenação, pode-se ter inúmeras composições de incerteza ao final da medição (FARO TECHNOLOGIES, INC., 2009).

2.2.2 Referências Fixas

Um método alternativo é o de referências fixas. Estas são um conjunto de pontos de referência utilizados para realocização das estações de medição. As posições desses pontos são determinadas por um sistema de medição de referência. Dessa forma, o sistema de medição pode ser posicionado em qualquer local do volume de medição onde haja visibilidade às referências fixas, bastando realizar a medição destas para que aquele se auto-localize. Aqui, o reposicionamento não implica composição de erros, pois os realinhamentos são independentes. A incerteza esperada é composta pelas incertezas de medição do sistema de referência e do sistema de medição em operação. Esse método pode incorrer em altos custos de instalação e manutenção; requer um espaço dedicado e verificação periódica dos pontos de referência. (FARO TECHNOLOGIES, INC., 2009).

2.2.2.1 *Monuments do sistema indoor-GPS*

Uma importante aplicação de referências fixas são os *monuments* do sistema *indoor-GPS*. Estes são dispositivos próprios do sistema, constituídos por dois receptores ópticos numa haste de aço separados por uma distância com valor calibrado (*offset*) pelo fabricante do equipamento (Figura 21). Ainda, possuem estrutura de fixação e unidade eletrônica dedicadas (Figura 22).

Figura 21 - *Monument* (referência fixa do iGPS)



Fonte: Autor

Figura 22 - *Monument* fixado na estrutura anexa ao transmissor do iGPS



Fonte: Autor

O uso dos *monuments* é a opção que oferece maior estabilidade e exatidão ao *setup* do iGPS, aumentando assim a confiabilidade metrológica do sistema (METRIS CANADA INC., 2009).

A localização – posição e orientação – de cada *monument* deve ser medida com um sistema de medição de referência e informada ao software do indoor-GPS. Este realiza então o seu *setup* com base nessas informações, de maneira semelhante àquela utilizando a *scalebar*, conforme descrito no item 2.1.6. A principal diferença é que neste caso as condições de contorno são mais robustas. São conhecidas a priori as posições, orientações e as distâncias dos receptores dos *monuments*.

Dessa forma, fica evidente que a exatidão envolvida na medição das posições dos *monuments* tem influência direta sobre desempenho metrológico do iGPS. Além disso, como se tratam de referências fixas, o sistema pode recorrer ao seu *setup* ao longo do tempo, tornando o mesmo mais estável. As técnicas mais comuns de medição dos *monuments* são aquelas utilizando *Laser Tracker* ou *Laser Radar*.

2.3 MULTILATERAÇÃO

A seguir, introduz-se a técnica de medição denominada multilateração.

Populares técnicas de medição de geodésia industrial tais como fotogrametria, teodolitos ou *Laser Tracker* são baseadas na medição de ângulos. Nesse tipo de medição, a incerteza tende a aumentar consideravelmente com o aumento do tamanho do mensurando. Outro problema inerente a tais sistemas diz respeito à rastreabilidade da medição, pois estes requerem a utilização de um grande artefato-padrão para sua calibração (ZHANG, 2010).

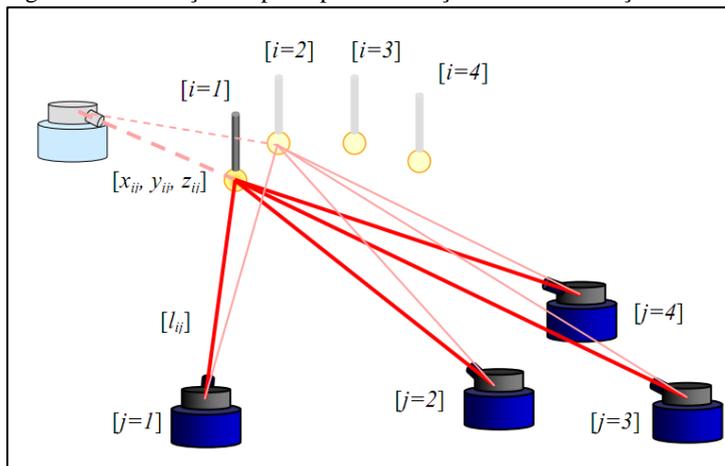
Uma alternativa para a determinação de coordenadas tridimensionais em objetos de medição de grandes dimensões é a multilateração.

Multilateração é uma técnica de medição que consiste em determinar as coordenadas de um ponto no espaço através da medição da distância deste ponto a múltiplas posições fixas (posições das estações fixas de medição). Por envolver somente medições de distâncias, as coordenadas tridimensionais medidas por multilateração independem da medição de ângulos.

Os elementos-chave de um sistema de medição por multilateração de alta qualidade são: estações de medição baseadas em *laser* interferométrico, um refletor com grande ângulo de abertura e um modelo matemático robusto para o cálculo das coordenadas espaciais dos pontos-alvo medidos (ESTLER, 2002).

O princípio de medição consiste em posicionar a estação de medição em diferentes locais e medir a distância desta aos pontos-alvo. A partir das distâncias medidas, é possível calcular as posições (coordenadas cartesianas) dos pontos-alvo (i) e das estações de medição (j), pela solução numérica de um sistema sobredeterminado de equações (Figura 23).

Figura 23 - Ilustração do princípio de medição de multilateração

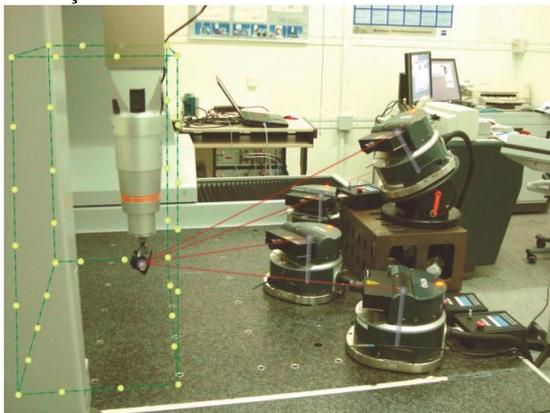


Fonte: (WENDT, 2011)

Pode-se ainda identificar dois tipos de multilateração: simultânea (chamada “*online*” na literatura internacional) e sequencial. Simultânea é aquela na qual se dispõe das múltiplas (4 ou mais) estações de medição simultaneamente. Na multilateração sequencial dispõe-se de apenas um dispositivo, sendo que este é posicionado sequencialmente nos locais definidos para as estações de medição, realizando-se as medições de distância a todos os pontos-alvo a partir de cada posição das estações.

A técnica de multilateração utilizando *LaserTracer* vem sendo utilizada com sucesso na determinação dos erros geométricos de máquinas de medir por coordenadas (Figura 24) e máquinas-ferramenta de grande porte (WENDT, 2011).

Figura 24 - Aplicação de multilateração *online* utilizando quatro *LaserTracers* para calibração de MMC



Fonte: (WENDT, 2011)

Outra potencial aplicação da técnica de multilateração é a medição de uma rede de pontos de referência, a qual serviria de artefato para verificação metrológica de sistemas de medição de geodésia industrial. Um estudo nessa direção foi realizado por (MUELANER, 2009).

2.4 DISCUSSÃO DO CAPÍTULO

O presente contexto evidencia a crescente requisição por incertezas cada vez menores e pelo aumento da confiabilidade metrológica no campo da geodésia industrial. Por conseguinte, nas últimas décadas, tem sido intensa a evolução das tecnologias relacionadas. Evidentemente, a pesquisa se faz necessária, tanto no sentido de desenvolver e aprimorar a tecnologia, quanto no sentido de avaliar seus potenciais e seu desempenho.

O uso de referências fixas é uma ferramenta de geodésia industrial útil à melhoria da confiabilidade metrológica da medição. Logo, a qualidade com que se realiza a medição dessas referências fixas exerce influência direta sobre a qualidade final do resultado da medição. A rastreabilidade do resultado da medição também é um importante fator que compõe a confiabilidade metrológica.

Espera-se de um sistema de medição baseado em multilateração utilizando *LaserTracer* uma menor incerteza de medição, já que não há medições de ângulos; ainda, as medições de distâncias realizadas pelo *LaserTracer* possuem incertezas até 10 vezes menores que as tecnologias tradicionais e rastreabilidade direta à definição do metro (ZHANG, 2010).

Tal técnica não incorre no erro de Abbe⁴ – pois o mensurando é colinear à escala de medição – e dispensa a necessidade de um artefato para calibração do sistema (TAKATSUJI, 1998).

⁴ Possibilidade de ocorrer erro de seno quando a medição de distância e a escala não forem colineares

3 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA DE PESQUISA

Diante do exposto, define-se o problema de pesquisa: desenvolvimento de uma técnica de medição de referências fixas com baixa incerteza de medição e garantia da rastreabilidade.

Objetivo geral do trabalho:

- Desenvolvimento de uma técnica para medição de pontos espaciais por multilateração sequencial, com baixa incerteza e garantia da rastreabilidade.

Objetivos específicos:

- Desenvolvimento de uma técnica de medição de referências fixas por multilateração sequencial utilizando *LaserTracer*, voltada à medição dos *monuments* do sistema iGPS;
- Busca do melhor posicionamento relativo entre sistema de medição e pontos a medir é analisado por simulação computacional;
- Desenvolvimento dos algoritmos necessários; realização do experimento.

A sequência de ações visando a atingir os resultados consiste de:

Desenvolvimento dos algoritmos necessários em linguagem

Matlab: é necessário o desenvolvimento de algoritmos para a realização de tarefas específicas. Em primeiro lugar, é desenvolvido o algoritmo que calcula, a partir das distâncias medidas, as coordenadas espaciais dos pontos-alvo. Um segundo algoritmo estima a incerteza de medição das coordenadas espaciais calculadas pelo método da simulação de Monte Carlo. O último algoritmo procura a melhor distribuição das estações de medição para uma dada configuração dos pontos-alvo. Escolheu-se linguagem Matlab devido à sua adequação ao propósito e à familiaridade do autor com a mesma.

Realização dos experimentos: tendo conhecimento teórico e prático de como realizar o procedimento de medição por multilateração e de posse dos algoritmos necessários ao processamento dos dados medidos, parte-se para a realização dos experimentos, visando a investigar a viabilidade e a funcionalidade da técnica de medição desenvolvida. Esses serão realizados em ambiente de laboratório nas instalações da Fundação CERTI em Florianópolis.

Avaliação dos resultados:

Faz-se a análise dos resultados experimentais. São avaliadas a funcionalidade e a viabilidade da técnica, aspectos a serem melhorados e

outras potenciais aplicações da mesma. Por fim, são apresentadas a discussão e conclusõesdo trabalho como um todo.

4 DETERMINAÇÃO DAS COORDENADAS ESPACIAIS DE PONTOS POR MULTILATERAÇÃO SEQUENCIAL

Neste capítulo é apresentada em maior profundidade a teoria relacionada à técnica de medição de coordenadas espaciais por multilateração sequencial. Primeiramente, é explanada a matemática relacionada. Em seguida são descritos os algoritmos computacionais desenvolvidos para este fim.

4.1 TEORIA MATEMÁTICA DA MULTILATERAÇÃO SEQUENCIAL

Conforme brevemente apresentado no item 2.3, a técnica de medição por multilateração sequencial consiste em se posicionar um sistema de medição de distâncias numa posição fixa e medir a distância desta até cada um dos pontos-alvo. Esse procedimento é então repetido para diferentes posições do sistema de medição. Cada uma das posições utilizadas será denominada estação de medição.

Três ou mais estações são necessárias para realizar a medição. Entretanto, se forem utilizadas pelo menos 4 estações de medição, não há necessidade de se ter conhecimento prévio da posição de nenhum elemento. Três estações definem um plano e as demais devem, necessariamente, estar fora desse plano (TAKATSUJI, 1998). A quantidade e as posições das estações influenciam a incerteza de medição (ZHANG, 2005).

Usando como entradas as distâncias medidas, um sistema sobredeterminado não-linear de equações é resolvido a fim de calcular as coordenadas cartesianas dos pontos-alvo e também das estações de medição.

O resíduo δ é definido como a diferença entre as distâncias estação - ponto-alvo medidas e as distâncias calculadas a partir das coordenadas dos pontos determinados pelo algoritmo de multilateração. O sistema de equações é resolvido pela minimização da soma dos quadrados dos resíduos, como descrito na (Equação 1):

$$\sum \delta^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (|\vec{x}_i - \vec{x}_j| - L_{ij} - L_{0j})^2 \rightarrow \min \quad (\text{Equação 1})$$

Onde:

i	Índice do ponto-alvo
j	Índice da estação de medição
n	Quantidade de pontos-alvo
m	Quantidade de estações
L_{ij}	Distância medida da estação j ao ponto-alvo i
L_{0j}	Comprimento morto ⁵ na estação j
$\vec{x}_i = (x_i, y_i, z_i)^T$	Posição do ponto-alvo i no sistema coordenado definido pelas estações
$\vec{x}_j = (x_j, y_j, z_j)^T$	Posição da estação j no sistema coordenado definido pelas estações
δ	Resíduo

Sendo “ m ” o número de estações utilizadas e “ n ” o número de pontos-alvo, tem-se, no total, um conjunto de $(m \cdot n)$ equações para resolver um conjunto de $(4 \cdot m + 3 \cdot n - g)$ incógnitas, quais sejam: x_i, y_i, z_i dos pontos-alvo; x_{0j}, y_{0j}, z_{0j} e L_{0j} das estações de medição; a subtração de “ g ” incógnitas advém da definição do sistema de coordenadas. Na prática, 5 estações de medição e 10 pontos-alvo são suficientes para gerar um sistema sobredeterminado de equações (WENDT, 2011).

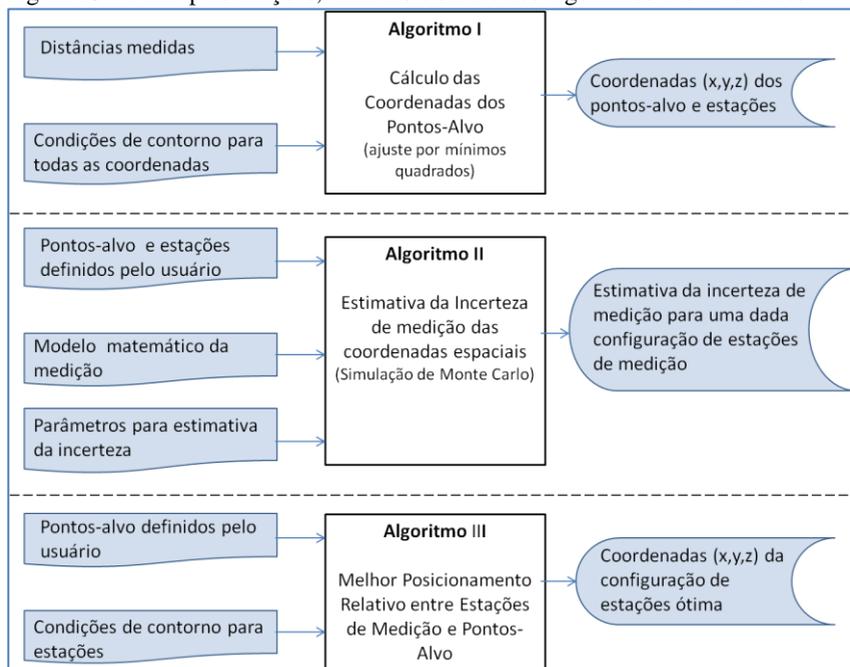
A resolução do sistema de equações é feita computacionalmente por meio de um algoritmo desenvolvido especificamente para esta tarefa (algoritmo I).

⁵ Caso o sistema de medição utilizado meça deslocamentos, e não distâncias absolutas. Neste caso, para cada estação de medição haverá um comprimento morto, que é a distância daquela até um ponto fixo onde o valor da medição de distâncias é zerado.

4.2 ALGORITMOS DESENVOLVIDOS

Foram desenvolvidos três algoritmos, todos em linguagem de programação Matlab®, para a realização das tarefas de: cálculo de coordenadas (I), estimativa da incerteza de medição (II) e otimização da configuração das estações (III). O principal deles é o algoritmo I, que se utiliza da matemática da multilateração sequencial para calcular e retornar as coordenadas espaciais dos pontos de interesse – ou seja, é responsável por completar a tarefa de medição. O algoritmo II faz uso do primeiro e de outras entradas definidas pelo usuário para estimar a incerteza de medição. O algoritmo III procura uma configuração de medição para um dado conjunto de pontos de interesse, e para tanto faz uso de uma adaptação do algoritmo II. A Figura 25 apresenta um resumo esquemático com as principais funções, entradas e saídas dos algoritmos. Os mesmos serão explicados em detalhes nos tópicos a seguir.

Figura 25 – Principais funções, entradas e saídas dos algoritmos desenvolvidos

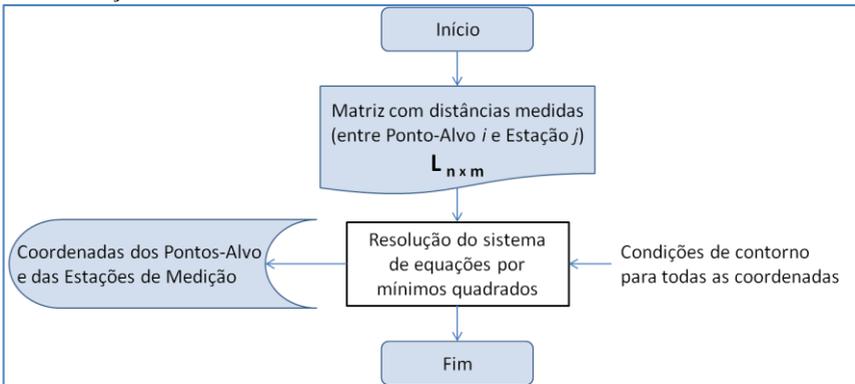


Fonte: Autor

4.2.1 Algoritmo I – Cálculo das Coordenadas dos Pontos Medidos

Este algoritmo realiza o cálculo das coordenadas dos pontos medidos (pontos-alvo) e das estações de medição. O mesmo utiliza como entradas as distâncias medidas entre as estações de medição e os pontos-alvo. A partir delas, e com condições de contorno adequadas, procede-se um ajuste por mínimos quadrados visando a minimizar o resíduo, conforme explicado no item 4.1. O algoritmo de otimização utilizado pelo Matlab para o ajuste é o “*trust-region reflective Newton*”. Como saída, o algoritmo I retorna as coordenadas cartesianas calculadas dos pontos-alvo e das estações (Figura 25).

Figura 26 - Fluxograma do algoritmo para cálculo das coordenadas por multilateração



Fonte: Autor

As dimensões da matriz $L_{n \times m}$ correspondem à quantidade de pontos-alvo e de estações, respectivamente.

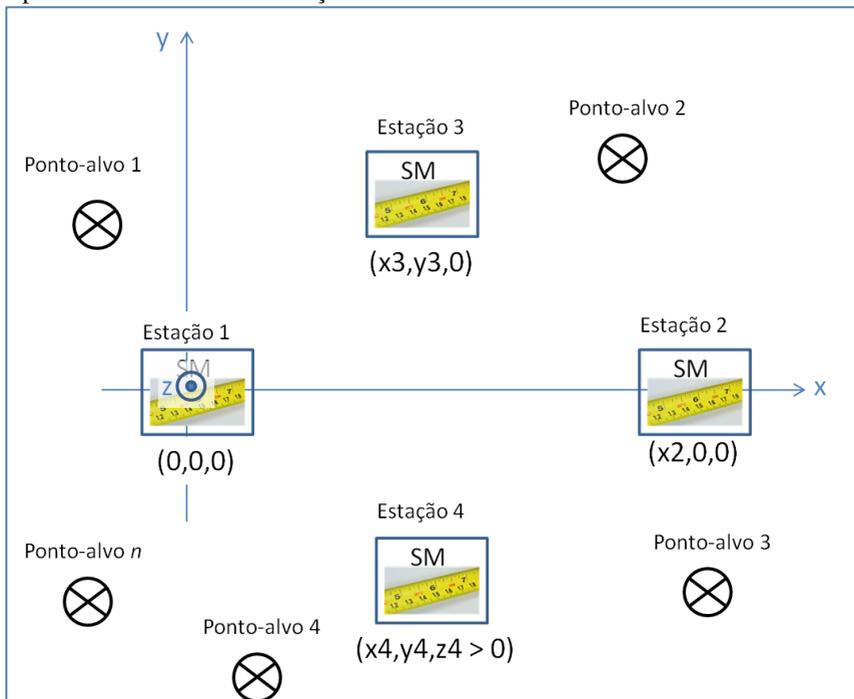
A seleção de um sistema coordenado adequado simplifica a resolução do problema. A estratégia aqui adotada é (Figura 27):

- A estação 1 define a origem do sistema de coordenadas, ou seja, tem coordenadas: $x = y = z = 0$;
- A estação 2 define o sentido positivo do eixo x , ou seja, tem coordenadas: $x = x_2, y = 0, z = 0$;
- A estação 3, juntamente com as duas anteriores, define o plano em que se encontram as três primeiras estações de medição. Tem coordenadas: $x = x_3, y = y_3, z = 0$;

- As demais estações devem estar obrigatoriamente fora do plano definido pelas 3 primeiras.

As definições das três primeiras estações eliminam 6 incógnitas do sistema de equações, tornando o valor de $g = 6$ (item 4.1).

Figura 27 - Ilustração exemplificando a definição do sistema coordenado. “SM” representa um sistema de medição de distâncias.



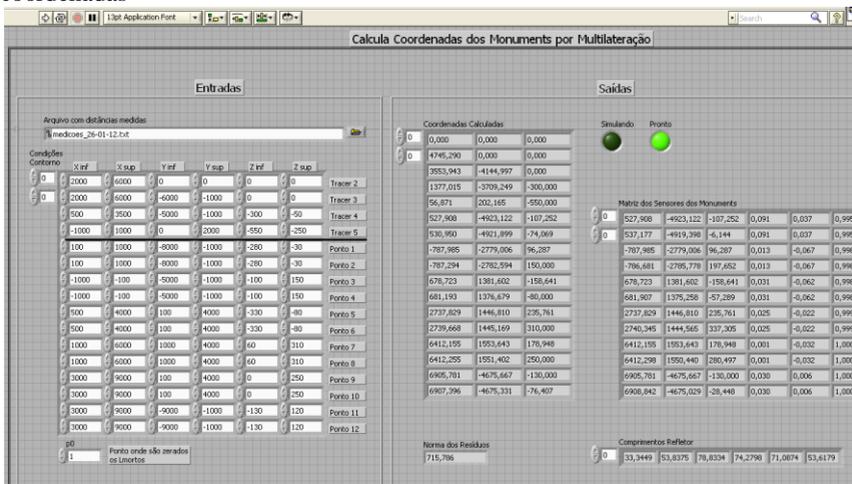
Fonte: Autor

A inserção de condições de contorno adequadas é importante para a convergência do algoritmo. A estratégia aqui adotada é a de estimarem-se “grosseiramente” (tolerância de $\pm 15\%$ da maior distância medida) os limites para as coordenadas das estações e dos pontos-alvo, de acordo com o sistema coordenado definido pelas estações de medição.

Foi também desenvolvida uma interface gráfica para o usuário (GUI – *graphical user interface*) na linguagem Labview® para tornar o algoritmo mais amigável e facilitar sua execução por outros usuários (Figura 28). Nela, o usuário carrega o arquivo com as distâncias medidas, insere as condições de contorno, e executa o algoritmo de otimização. Ao fim da

execução, são apresentadas na tela as coordenadas calculadas, a norma dos resíduos, bem como algumas outras informações referentes à medição.

Figura 28 - Interface gráfica, em Labview, do algoritmo para o cálculo das coordenadas



Fonte: Autor

4.2.2 Algoritmo II – Estimativa da Incerteza de Medição das Coordenadas

Neste item são apresentados primeiramente conceitos relacionados à incerteza de medição e, em seguida, o algoritmo desenvolvido para este fim.

Incerteza de Medição e Método de Monte Carlo:

Os resultados de uma medição se afastam do valor verdadeiro da grandeza medida (valor do mensurando) por uma quantidade denominada **erro de medição** (DONATELLI e KONRATH, 2005). As imperfeições do sistema de medição, as limitações do operador e as influências das condições ambientais são exemplos de fatores que induzem erros de medição (ALBERTAZZI e DE SOUSA, 2008). Portanto, ao se relatar o resultado de uma medição, é necessário fornecer uma indicação quantitativa da qualidade do mesmo, o que é feito por meio da estimativa da **incerteza de medição**. A incerteza de medição é o parâmetro não negativo que caracteriza a dispersão dos valores atribuídos a um mensurando, com base nas informações utilizadas (INMETRO, 2009).

O “Guia para Expressão da Incerteza de Medição (ABNT/INMETRO⁶)” é a versão brasileira do “*Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement – GUM (JCGM⁷)*”. A primeira versão desse guia foi elaborada no ano de 1993 com o objetivo de orientar e tornar possível um consenso mundial sobre a avaliação e a expressão da incerteza de medição. O método de avaliação de incertezas proposto é baseado na propagação das incertezas através do modelo matemático da medição. Apesar de se constituir de uma referência mundial para avaliação e expressão da incerteza de medição, esse método possui algumas limitações, tendo sua aplicação dificultada ou até mesmo impossibilitada, em casos em que, por exemplo:

- O modelo matemático da medição é muito complexo;
- É difícil ou inconveniente realizar a linearização do modelo matemático;
- É difícil ou inconveniente obter as derivadas parciais do modelo (necessário ao método da propagação de incertezas);

Frente a tais limitações, a JCGM elaborou o “Suplemento 1 ao Guia para Expressão da Incerteza de Medição – Propagação de Distribuições utilizando Método de Monte Carlo” (*Supplement 1 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” — Propagation of distributions using a Monte Carlo method*). O Suplemento 1 visa a adicionar valor ao GUM, fornecendo orientações sobre aspectos da avaliação da incerteza que não são explicitamente tratados no mesmo, sendo que essas orientações serão tão consistentes quanto possível com os conceitos básicos do GUM.

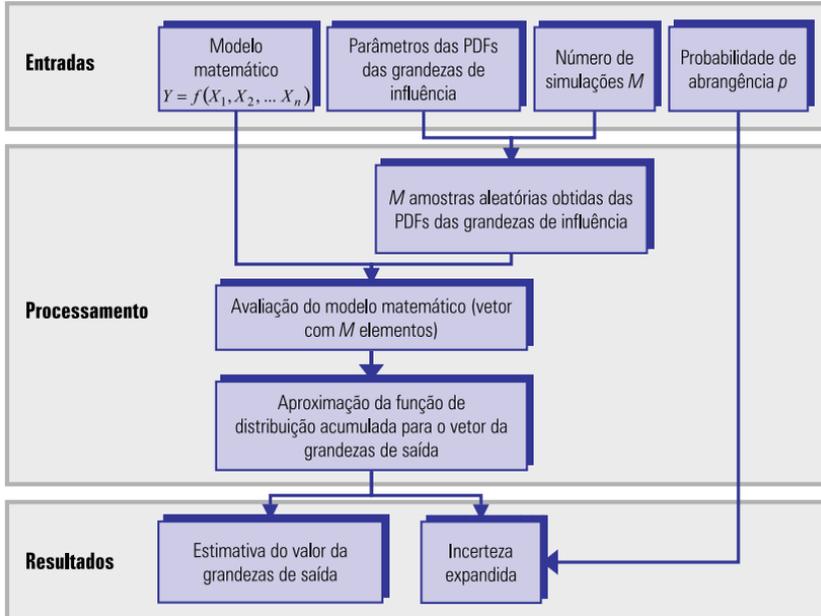
O Suplemento 1 trata da propagação das distribuições de probabilidade através do modelo matemático – em contraste à propagação de incertezas – como base para a avaliação da incerteza de medição e sua implementação pelo método de Monte Carlo (JCGM, 2008).

A Figura 29 apresenta um fluxograma simplificado da avaliação de incerteza de medição usando a simulação de Monte Carlo.

⁶ ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas; INMETRO – Instituto Nacional de Metrologia, Normalização e Qualidade Industrial.

⁷ JCGM - *Joint Committee for Guides in Metrology*.

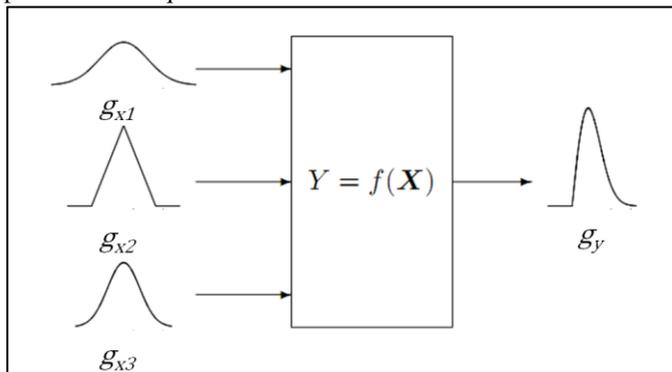
Figura 29 - Fluxograma simplificado da avaliação de incerteza usando a SMC



Fonte: adaptado de (JCGM, 2008)

No método por Simulação de Monte Carlo (SMC), a distribuição de probabilidades da variável de saída é obtida por meio de repetidas avaliações do modelo matemático, a partir de amostras aleatórias das variáveis de entrada. Assim, a SMC produz a propagação das distribuições de probabilidade das grandezas de entrada através do modelo matemático da medição, fornecendo como resultado uma distribuição de probabilidades que descreve os valores do mensurando consistentes com a informação que se possui. A Figura 30 ilustra o princípio desta simulação: g_{x_i} representa a distribuição de probabilidades de cada variável de entrada x_i ; $Y = f(X)$ representa o modelo matemático, onde a variável de saída Y é obtida a partir das variáveis de entrada; g_Y representa a distribuição de probabilidades obtida para a variável de saída.

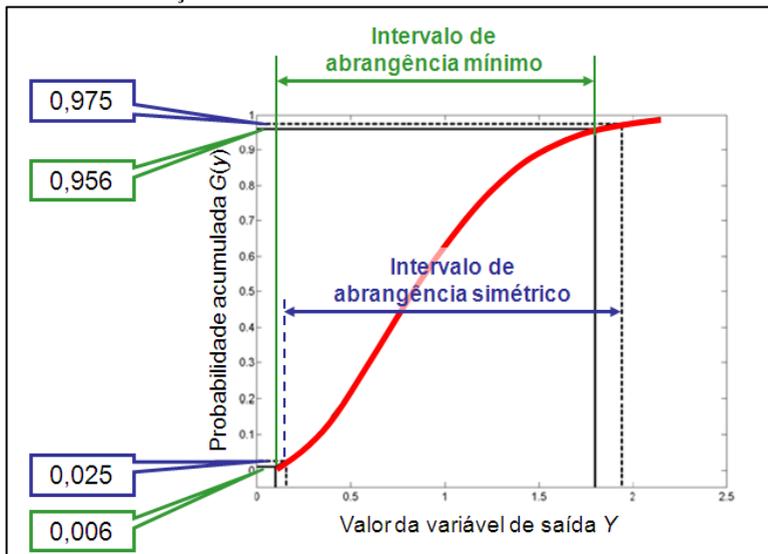
Figura 30 - Propagação das distribuições de probabilidade das grandezas de entrada através do modelo matemático da medição, resultando numa distribuição de probabilidades que descreve os valores do mensurando



Fonte: (JCGM, 2008)

A incerteza expandida corresponde ao intervalo de abrangência mínimo obtido a partir dos valores de frequência acumulada da variável de saída para uma determinada probabilidade de abrangência “p” (tipicamente: $p = 95\%$). Convém destacar que nem sempre o intervalo de abrangência mínimo coincide com o intervalo de abrangência simétrico (Figura 31).

Figura 31 - Intervalo de abrangência mínimo (IAM). Tanto o intervalo mínimo quanto o simétrico envolvem uma probabilidade de 95%, porém, o IAM apresenta uma menor variação dos valores de Y .



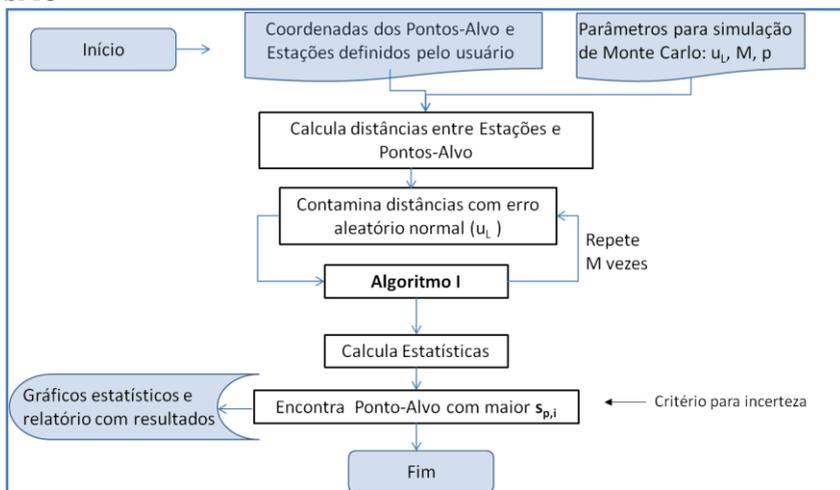
Fonte: adaptado de (JCGM, 2008)

Por ser aplicável a modelos matemáticos não-lineares e devido à complexidade do modelo utilizado para o cálculo das coordenadas dos pontos medidos por multilateração com *LaserTracer*, o método da avaliação da incerteza de medição por simulação de Monte Carlo será utilizado neste trabalho.

Algoritmo para estimativa da incerteza de medição pelo método de Monte Carlo:

Com fundamentação nas orientações de (JCGM, 2008), foi desenvolvido um algoritmo para estimativa da incerteza da medição de coordenadas por multilateração sequencial. A Figura 32 apresenta o fluxograma desse algoritmo.

Figura 32 - Fluxograma do algoritmo desenvolvido para avaliação de incerteza por SMC



Fonte: Autor

As entradas são as posições dos pontos-alvo e das estações, ambos definidos pelo usuário. A partir destas, são calculadas as distâncias exatas entre estações e pontos-alvo. Em seguida, ocorre um laço de repetição onde as distâncias exatas são contaminadas com um erro aleatório de distribuição normal, u_L , o qual corresponde à incerteza de medição de distâncias, ou seja, representa a distribuição de probabilidade das variáveis de entrada. A partir das distâncias contaminadas, calculam-se as coordenadas cartesianas dos pontos-alvo – ou seja, as distâncias contaminadas servem de entrada para o algoritmo I, que por sua vez representa o modelo matemático da medição. Esse procedimento é repetido “M” vezes e, ao final, é possível obter a dispersão das coordenadas dos pontos-alvo, devido à dispersão de medição de comprimentos. Um valor típico é $M = 10^4$. De posse desses dados, é possível realizar a estimativa de incerteza conforme descrito no tópico 4.2.2. O ponto-alvo com maior desvio-padrão será utilizado como critério para incerteza de medição. Esse desvio-padrão é calculado conforme a (Equação 2). Com os valores calculados das coordenadas X, Y e Z deste ponto, são gerados os gráficos histograma e de frequência acumulada e, por fim, são calculados os intervalos de abrangência mínimos (IAM) para cada coordenada.

$$s_{p,i} = \sqrt{s_{x,i}^2 + s_{y,i}^2 + s_{z,i}^2} \quad (\text{Equação 2})$$

Onde:

$s_{p,i}$ = desvio-padrão do ponto-alvo i (tamanho da amostra = M);

i = índice do ponto-alvo;

$s_{x,i}^2$ = variância da coordenada x do ponto-alvo i ;

$s_{y,i}^2$ = variância da coordenada y do ponto-alvo i ;

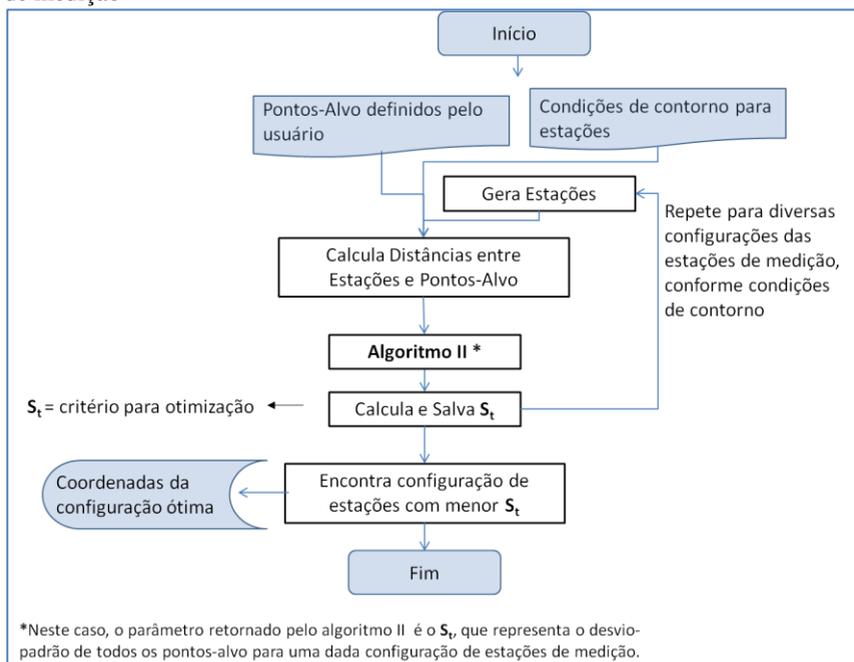
$s_{z,i}^2$ = variância da coordenada z do ponto-alvo i ;

O item 5.2 apresenta um caso virtual exemplificando a estimativa da incerteza de medição das coordenadas dos pontos espaciais por simulação de Monte Carlo.

4.2.3 Algoritmo III – Otimização das Estações

Foi desenvolvido um algoritmo com objetivo de investigar qual a melhor distribuição das estações de medição para um determinado conjunto de pontos-alvo. A Figura 33 apresenta o fluxograma do mesmo.

Figura 33 – Fluxograma do algoritmo para otimização da configuração das estações de medição

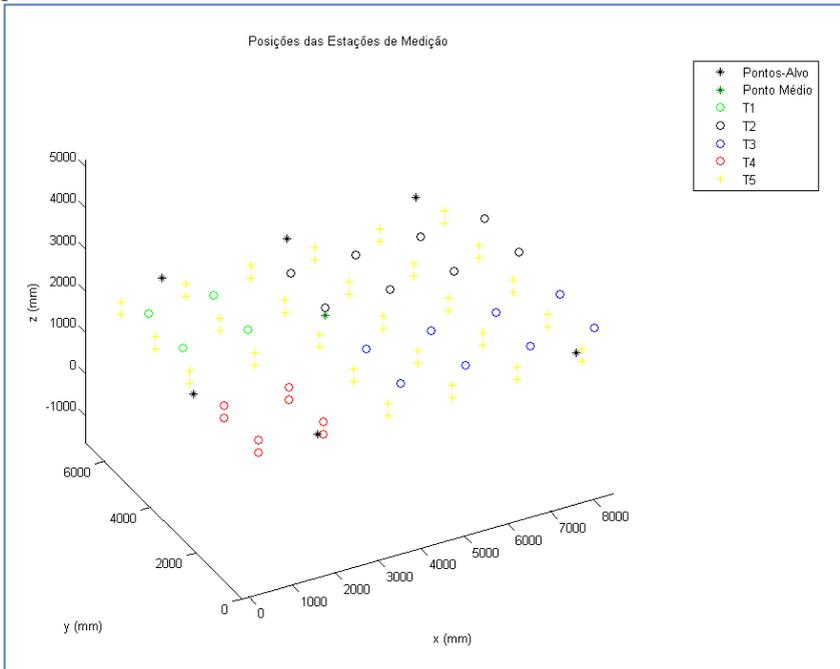


Fonte: Autor

O algoritmo tem como entradas os pontos-alvo e condições de contorno para as estações de medição, ambos definidos pelo usuário. As condições de contorno se referem ao espaço físico da medição, compreendendo os limites do local e também restrições no interior do mesmo.

O usuário informa os limites laterais do volume de medição e as alturas máxima e mínima das estações, o que representa uma região delimitadora na forma de um paralelepípedo. São informados adicionalmente os incrementos nas direções x, y e z. O algoritmo divide o volume de medição em quatro quadrantes, dentro dos quais serão posicionadas as estações. Com base nessas condições, é criada uma matriz tridimensional (paralelepípedo) com as várias configurações possíveis das estações de medição (Figura 34).

Figura 34 - Estações a otimizar. T1 são as possíveis posições da estação 1, e assim por diante até T5



Fonte: Autor

O critério utilizado para a otimização é a raiz quadrada da soma das variâncias de todos os pontos-álvo para cada configuração das estações (**desvio-padrão total**), conforme a (Equação 3):

$$S_t = \sqrt{s_{t,x}^2 + s_{t,y}^2 + s_{t,z}^2} \quad (\text{Equação 3})$$

Onde:

S_t = desvio-padrão total na configuração t ;

t = índice da configuração das estações;

Por sua vez, as grandezas $s_{t,x}$, $s_{t,y}$, e $s_{t,z}$ representam a raiz quadrada da soma das variâncias das coordenadas x , y e z , respectivamente, de cada ponto-álvo, conforme a (Equação 4), (Equação 5) e (Equação 6):

$$s_{t,x} = \sqrt{s_{1,x}^2 + s_{2,x}^2 + \dots + s_{n,x}^2} \quad (\text{Equação 4})$$

$$s_{t,y} = \sqrt{s_{1,y}^2 + s_{2,y}^2 + \dots + s_{n,y}^2} \quad (\text{Equação 5})$$

$$s_{t,z} = \sqrt{s_{1,z}^2 + s_{2,z}^2 + \dots + s_{n,z}^2} \quad (\text{Equação 6})$$

Onde:

$s_{i,x}^2$ = variância da coordenada x do ponto-alvo i;

$s_{i,y}^2$ = variância da coordenada y do ponto-alvo i;

$s_{i,z}^2$ = variância da coordenada z do ponto-alvo i;

n = número de pontos-alvo;

Ao final, o algoritmo retorna a configuração de estações à qual corresponde o menor desvio-padrão total S_t .

Para este algoritmo também foi desenvolvida uma interface gráfica em linguagem Labview®. Nela, o usuário tem possibilidade de entrar com as posições dos pontos-alvo e os parâmetros geométricos do espaço físico da medição. As saídas intermediárias do algoritmo são todas as configurações geradas.

Figura 35 - Interface gráfica do algoritmo para otimização das estações

The interface is titled "Gera Combinações de Estações de Medição para Otimização". It is divided into three main sections:

- Entradas (Inputs):**
 - Pontos-Alvo:** A table with 2 rows and 4 columns. Row 1: 1400, 0, 1800. Row 2: 0, 2400, 1900.
 - N repetições:** A numeric control set to 100.
 - Incerteza Tracer (micrometros):** A numeric control set to 30.
- Geometria do Volume de Medição:**
 - Amplitude ao redor do Ponto Médio dos Pontos-Alvo:**
 - dx sup: 5000, dx inf: 3300
 - dy sup: 2800, dy inf: 3300
 - Incrementos nas posições dos Tracers:**
 - dx: 2000, dy: 2000, dz: 300
- Restrições (Restrictions):**
 - Retângulo que define Restrição 1:**
 - Rxinf1: 2000, Rxsup1: 4600
 - Ryinf1: 2000, Rysup1: 4800
 - Retângulo que define Restrição 2:**
 - Rxinf2: 6500, Rxsup2: 9600
 - Ryinf2: 2400, Rysup2: 6000
 - Distância mínima entre Tracer e Monumento:** Lmin: 800
- Saídas (Outputs):**
 - Número de Combinações:** 504
 - Estações Geradas:** A table with 2 rows and 3 columns. Row 1: 500, 3800, 2100. Row 2: 3800, 5800, 2100.

Fonte: Autor

A melhor configuração é a saída final do algoritmo.

Figura 36 - Interface gráfica do algoritmo para busca da melhor configuração de estações



Fonte: Autor

O capítulo a seguir apresenta a aplicação dos algoritmos desenvolvidos em um caso direcionado a um procedimento de medição das referências fixas por multilateração sequencial.

5 SIMULAÇÕES REALIZADAS

Foi simulado um caso direcionado ao experimento a ser realizado posteriormente. Trata-se da medição das posições espaciais dos *monuments* do sistema iGPS que estão instalados na sala de medições da Fundação CERTI (Figura 37). O sistema de medição de distâncias simulado é o *LaserTracer*.

Figura 37 – Visão geral da sala de medições, sob duas vistas sobrepostas. As legendas M1 a M6 indicam as posições dos *monuments* do sistema iGPS.



Fonte: Autor.

Primeiramente, realizou-se a simulação para encontrar a melhor configuração das estações de medição, dadas as posições dos pontos-alvo (*monuments*) e as limitações de espaço físico da sala de medições. Na sequência, foi feita a estimativa da incerteza de medição relativa à medição dos pontos-alvo a partir desta configuração ótima das estações de medição.

A distribuição de probabilidades da variável de entrada (u_L), foi obtida pelo procedimento a seguir, baseado em (ABNT, INMETRO, 2003). Assumiu-se que a incerteza da medição de distâncias é composta por três parcelas:

- Incerteza-padrão de medição própria do sistema de medição (u_{SM});
- Incerteza-padrão de apalpação ($u_{Probing}$);
- Incerteza devido à variação da temperatura (u_T)

A primeira, u_{SM} , é obtida do catálogo técnico do equipamento, por isso dita incerteza do tipo B. A segunda, $u_{Probing}$, é obtida por meios estatísticos, por isso dita do tipo A. Corresponde ao desvio-padrão de n medições repetidas de um comprimento, calculado através da (Equação 7):

$$u_{Probing} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (l_i - \bar{l})^2}{n - 1}} \quad (\text{Equação 7})$$

Onde:

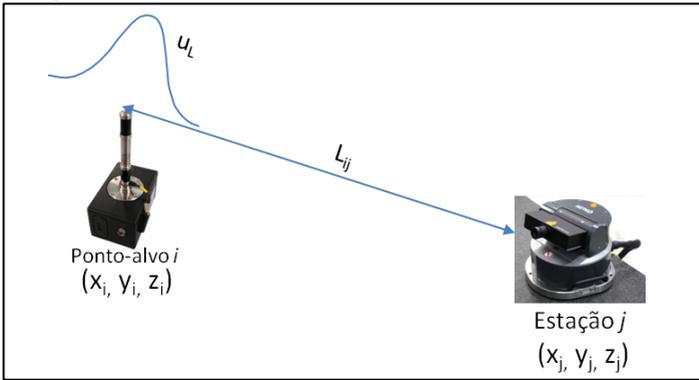
n = número de repetições;

l_i = i -ésimo comprimento medido;

\bar{l} = média das n medições.

A Figura 38 ilustra a dispersão da medição de distâncias.

Figura 38 - Ilustração da dispersão da medição de distâncias pelo sistema de medição



Fonte: Autor.

A incerteza padrão combinada (u_L) é calculada pela (Equação 8):

$$u_L = \sqrt{u_{SM}^2 + u_{Probing}^2 + u_T^2} \quad (\text{Equação 8})$$

Para o cálculo de u_L a ser utilizado no caso virtual foram usados os seguintes dados:

- Do catálogo do *LaserTracer*, a incerteza expandida é $U = 0,2 \mu\text{m} + 0,3 \mu\text{m/m}$ ($k=2$). Para uma distância de 5 m: $U = 1,7 \mu\text{m}$, ou seja, $u = U/k = 1,7 \mu\text{m} / 2 \Rightarrow u_{SM} = 0,85 \mu\text{m}$;
- Foi realizado um procedimento experimental para determinar $u_{Probing}$ de acordo com a (Equação 7), onde uma distância de aproximadamente 5 m foi medida 20 vezes ($n = 20$).
- A influência da temperatura (u_T) foi desprezada, pois os experimentos serão realizados em ambiente com temperatura e umidade do ar controlados. Ainda, o *LaserTracer* possui um sistema de compensação do sinal do *laser* com base na monitoração das condições de temperatura, pressão e umidade do ambiente.

A Tabela 1 explicita os valores envolvidos no cálculo de u_L conforme a (Equação 8).

Tabela 1 - Composição da incerteza de medição de comprimentos

Fontes de Incerteza				
Símbolo	Descrição	Tipo	u	Unidade
u_{SM}	Incerteza-padrão do sistema de medição. Dado do fabricante.	B	0,850	μm
$u_{Probing}$	Incerteza-padrão de apalpação. Referente ao conjunto (adaptador + refletor).	A	29,034	μm
Resultados				
u_L	Incerteza-padrão combinada		29	μm

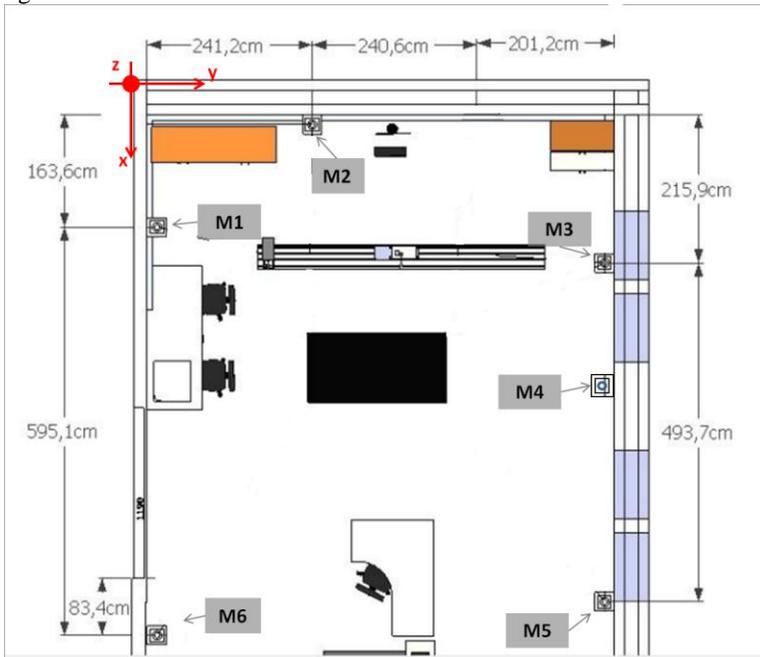
Fonte: Autor

5.1 MELHOR POSICIONAMENTO RELATIVO ENTRE ESTAÇÕES DE MEDIÇÃO E PONTOS-ALVO

A procura pela melhor configuração das estações de medição foi feita por meio do algoritmo III, desenvolvido especificamente para este fim, conforme apresentado no item 4.2.3.

As entradas fornecidas ao algoritmo foram: coordenadas (x,y,z) dos pontos-alvo; dimensões – largura e comprimento – da sala de medições; duas regiões de restrição de espaço físico, correspondentes a objetos existentes na sala; número de repetições para o cálculo do desvio-padrão (tamanho da amostra, $M = 100$); incerteza da medição de distâncias $u_L = 29 \mu\text{m}$. A Figura 39 apresenta um esquema em forma de planta-baixa da sala de medições incluindo os *monuments* (pontos-alvo a serem medidos).

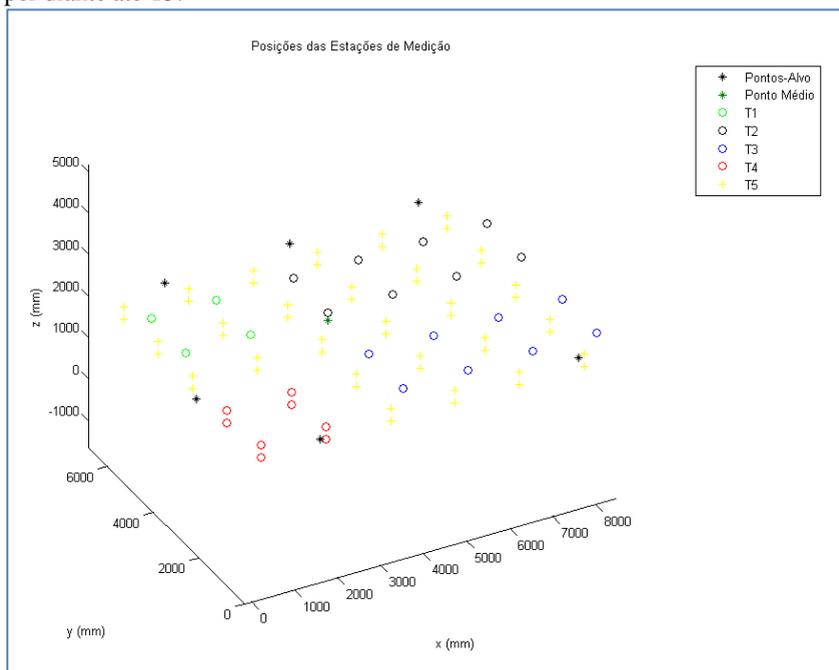
Figura 39 - Planta baixa da sala de medições. O pontos-alvo estão indicados pelas legendas M1 a M6.



Fonte: Autor

A Figura 40 mostra todas as possíveis posições das estações de medição, geradas a partir dos dados de entrada.

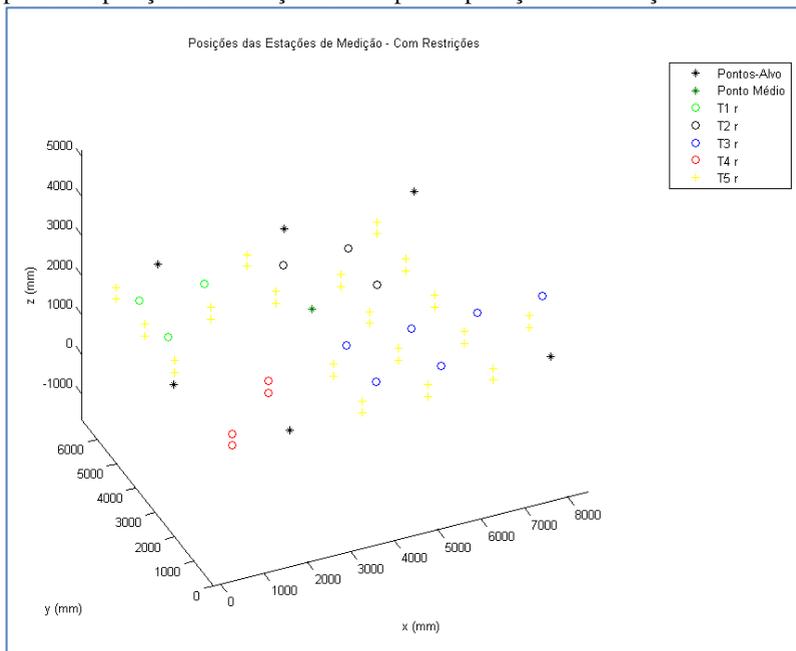
Figura 40 - Estações a otimizar. T1 são as possíveis posições da estação 1, e assim por diante até T5.



Fonte: Autor

A Figura 41 mostra as estações após a aplicação das restrições de espaço físico devido a objetos existentes na sala. Estas são as estações que de fato serão utilizadas no cálculo dos desvios-padrão e de onde será retornada a configuração considerada a melhor. Os parâmetros de entrada geraram um total de 7775 configurações de estações a serem testadas.

Figura 41 - Estações a otimizar após aplicação das restrições. T1r a T5r são as possíveis posições das estações 1 a 5 após a aplicação das restrições.

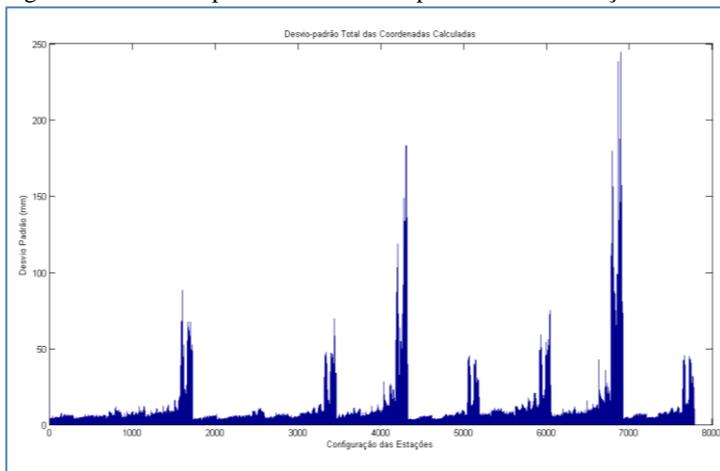


Fonte: Autor

A partir desses dados, são calculados os valores de desvio-padrão total (S_i) para cada configuração de estações.

A Figura 42 apresenta graficamente os valores de S_i encontrados para cada uma das configurações. Nota-se que algumas configurações produzem desvios extremos. Esse é um comportamento esperado, causado por distribuições geométricas muito desfavoráveis das estações, por exemplo, 3 estações alinhadas ou muito próximas umas das outras.

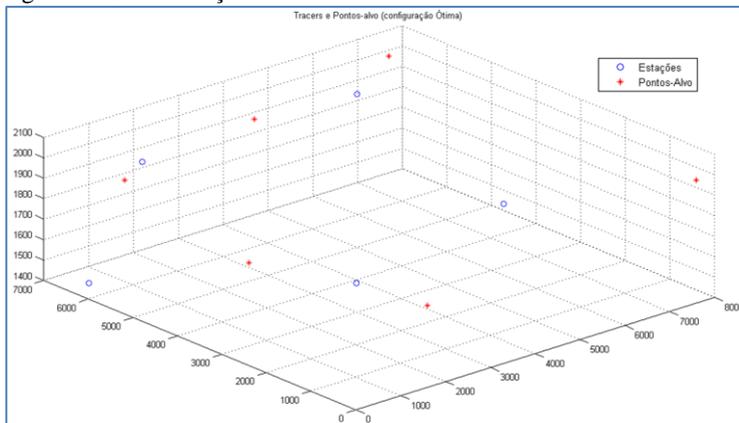
Figura 42 - Desvios-padrão encontrados para cada combinação de 5 estações



Fonte: Autor

Em seguida, o algoritmo retorna o índice, os desvios-padrão e as coordenadas da configuração de estações com menor S_r . Esta configuração ótima está representada na Figura 43.

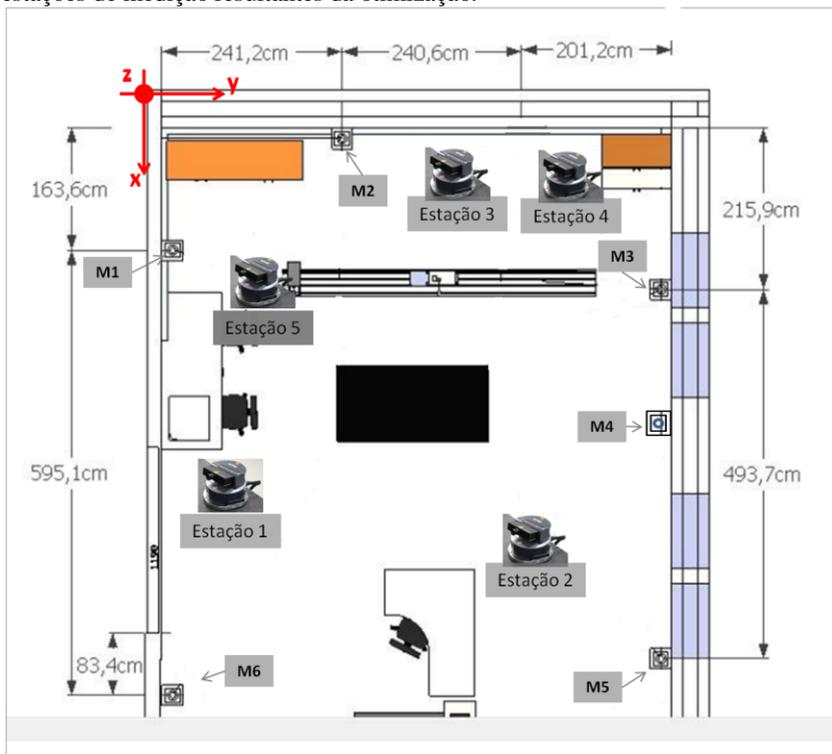
Figura 43 - Coordenadas da configuração de estações de medição retornada pelo algoritmo de otimização



Fonte: Autor

A Figura 44 ilustra a mesma configuração inserida na planta-baixa da sala de medições.

Figura 44 - Planta baixa da sala de medições incluindo *monuments* e posições das estações de medição resultantes da otimização.



Fonte: Autor

Os valores de desvio-padrão encontrados para a configuração ótima foram: $S_p = 2,102$ mm, sendo suas componentes: $s_{t,x} = 0,178$ mm; $s_{t,y} = 0,177$ mm; $s_{t,z} = 2,087$ mm;

O tempo de simulação para este caso foi de 6850 min, equivalente a aproximadamente 114 h ou 4,8 dias (ressalta-se a limitada capacidade do computador pessoal utilizado para a tarefa: Processador Intel Pentium Dual Core 1,46 GHz; Memória RAM 1GB).

Esse resultado será utilizado para orientar o experimento de medição das referências fixas do iGPS.

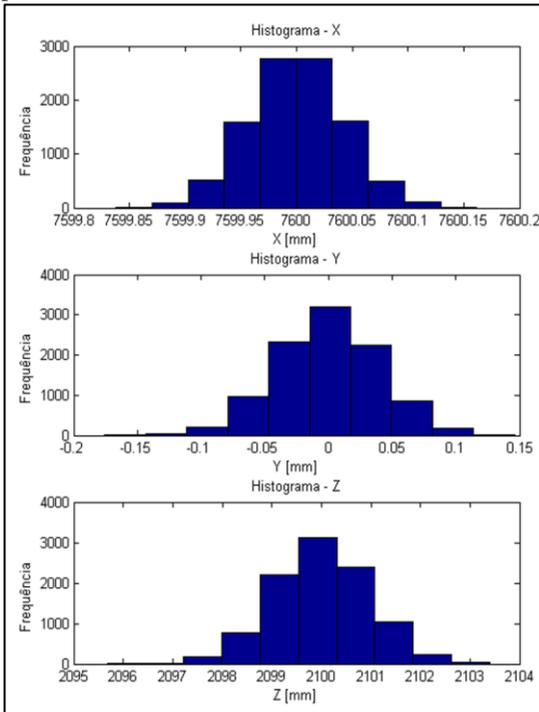
5.2 ESTIMATIVA DA INCERTEZA DE MEDIÇÃO

O passo seguinte é estimar a incerteza de medição relacionada à medição das coordenadas espaciais dos pontos-alvo por multilateração com *LaserTracer* conforme a configuração de estações obtida pelo processo de otimização. Convém destacar o seguinte: no algoritmo de otimização, o critério adotado foi o desvio-padrão total ((Equação 3), item 4.2.3), de maneira a abranger todos os pontos medidos por uma dada configuração das estações. No algoritmo de estimativa de incerteza, o critério são os desvios-padrão das coordenadas x , y e z do ponto-alvo que apresenta maior variação nas simulações de medições (método SMC) para uma dada configuração das estações de medição ((Equação 2), item 4.2.2).

Entradas utilizadas para esta simulação: coordenadas dos pontos-alvo; configuração das estações oriunda da otimização; número de simulações $M = 10^4$; probabilidade de abrangência $p = 95\%$; incerteza-padrão combinada da medição de distâncias $u_L = 29 \mu\text{m}$.

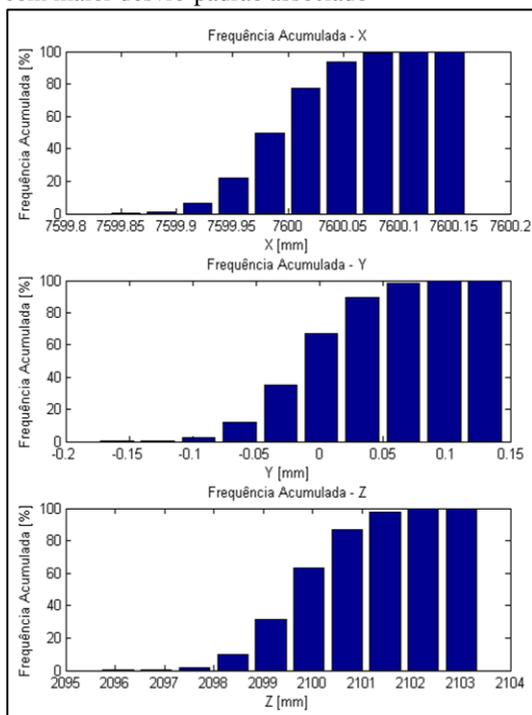
As figuras Figura 45 e Figura 46 apresentam graficamente as principais saídas do algoritmo: histogramas e gráficos de frequência acumulada para cada coordenada do ponto-alvo com maior desvio-padrão associado.

Figura 45 - Histogramas para cada coordenada do ponto-alvo com maior desvio-padrão associado



Fonte: Autor

Figura 46 - Gráficos de frequência acumulada para cada coordenada do ponto-alvo com maior desvio-padrão associado



Fonte: Autor

A partir desses valores, são calculados os intervalos de abrangência mínimos para x, y e z. Assim, o resultado da medição para o ponto-alvo em questão é:

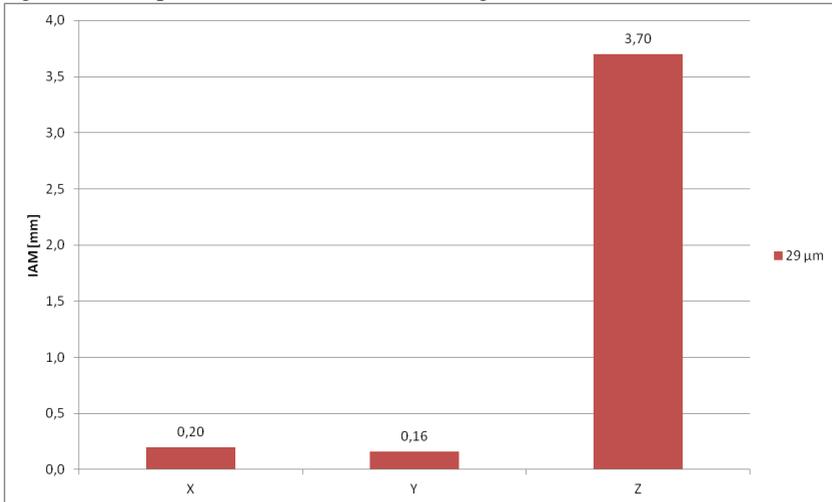
$$X = [7599,90 \sim 7600,10] \text{ mm};$$

$$Y = [-0,078 \sim 0,078] \text{ mm};$$

$$Z = [2098,0 \sim 2101,8] \text{ mm};$$

A Figura 47 ilustra graficamente as amplitudes dos intervalos de abrangência mínimos.

Figura 47 - Amplitudes dos intervalos de abrangência mínimos em X, Y e Z.



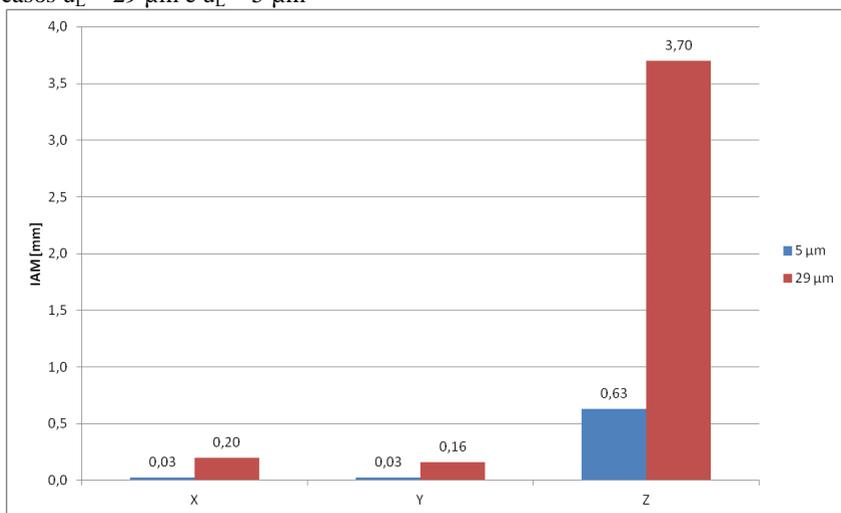
Fonte: Autor.

5.3 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES

As amplitudes dos IAM em x e y estão em torno de 200 μm para distâncias de aproximadamente 5 m (ou uma área de medição de aproximadamente 25 m^2); já na direção z o desempenho é substancialmente pior: $\text{IAM}_z = 3700 \mu\text{m}$.

É evidente a predominância da parcela da incerteza de apalpação (u_{Probing}) na composição da incerteza-padrão combinada das medições de comprimento com o *Laser Tracer* (u_L). Assim, foi feita uma nova simulação para estimativa de incerteza de medição pelo método de Monte Carlo, onde reduziu-se o valor de u_{Probing} para 4,9 μm , resultando em $u_L = 5 \mu\text{m}$. Esta simulação retornou valores de IAM para x e y na ordem de 30 μm . A Figura 48 exibe uma comparação entre os resultados das duas simulações. Este resultado indica que uma melhoria no sistema de apalpação possibilitaria uma melhoria relevante do desempenho do sistema de multilateração, tirando pleno proveito do potencial do *LaserTracer*.

Figura 48 - Resultados das estimativas da incerteza de medição por SMC para os casos $u_L = 29 \mu\text{m}$ e $u_L = 5 \mu\text{m}$



Fonte: Autor

É também evidente que o método tem uma pior sensibilidade na direção z. A comparação exibida na Figura 48 mostra que o IAM_z também foi reduzido com a redução de u_L , porém continua sendo muito superior aos IAM_x e IAM_y – de fato, $IAM_z \approx 20 \cdot IAM_x = 20 \cdot IAM_y$, para o caso de $u_L = 5 \mu\text{m}$. Essa pior sensibilidade em z se deve ao fato de, para o caso estudado, as variações de distância nesta direção serem muito pequenas em relação às variações nas outras direções.

Portanto, os resultados obtidos com as simulações apontam para a viabilidade do método de medição por multilateração, apesar do desempenho ainda inferior deste.

Os resultados das simulações serão utilizados no procedimento experimental. No capítulo seguinte são apresentados o problema de medição, o procedimento experimental e os resultados da medição.

6 APLICAÇÃO DE MULTILATERAÇÃO SEQUENCIAL PARA MEDIÇÃO DE REFERÊNCIAS FIXAS DO SISTEMA iGPS (MONUMENTS iGPS)

6.1 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA DE MEDIÇÃO

Conforme abordado anteriormente, o uso dos *monuments* – referências fixas do iGPS – é a opção que confere maior estabilidade e confiabilidade metrológica ao sistema. A qualidade com que se faz a medição dos *monuments* tem influência direta sobre a realização do setup e, conseqüentemente, sobre o desempenho do sistema.

A multilateração sequencial com *LaserTracer* é uma técnica potencialmente capaz de realizar essa medição com menor incerteza e garantia da rastreabilidade direta à definição do metro, fatores que contribuem de maneira relevante para o aumento da confiabilidade metrológica do iGPS.

Portanto, será realizado o experimento aplicando a técnica multilateração visando a investigar a viabilidade e a funcionalidade da mesma.

O funcionamento do iGPS por meio dos *monuments* requer que cada transmissor tenha linha de visão a no mínimo 4 *monuments*. Após a medição, as posições e orientações dos *monuments* devem ser informadas ao software do sistema iGPS em um formato específico. A partir desses dados, o sistema realiza seu setup, conforme abordado no item 2.2.2.1.

O problema de medição consiste em determinar as posições e orientações dos 6 *monuments* do sistema iGPS instalado na sala de medições utilizando multilateração sequencial com o sistema *LaserTracer*.

Optou-se por utilizar 5 estações de medição, por considerar-se este número uma relação razoável entre robustez e tempo de medição.

6.2 EXPERIMENTO REALIZADO

6.2.1 Procedimento de medição

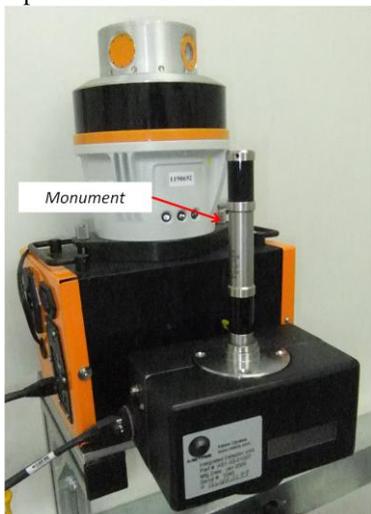
Em resumo, o procedimento de medição consiste em se medirem as distâncias do *LaserTracer* aos pontos-alvo a partir de cada posição (estação) pré-definida daquele, conforme exposto no item 2.3.

Na montagem aqui adotada, os *monuments* são fixados em suportes anexos aos transmissores, dedicados a esta função (Figura 49). As posições do *LaserTracer* são aquelas resultantes da simulação de busca da melhor configuração das estações de medição (item 5.1). Para cada estação, a

medição de distância deve ser zerada num mesmo ponto. Aqui, foi escolhido o primeiro ponto da sequência de medição para esta zeragem.

O *LaserTracer* requer o uso de um refletor para realizar medições. Portanto, foi desenvolvido um adaptador para o refletor *cat-eye*, de modo a tornar possível a medição dos pontos de interesse (Figura 50).

Figura 49 - *Monument* fixado no suporte do Transmissor



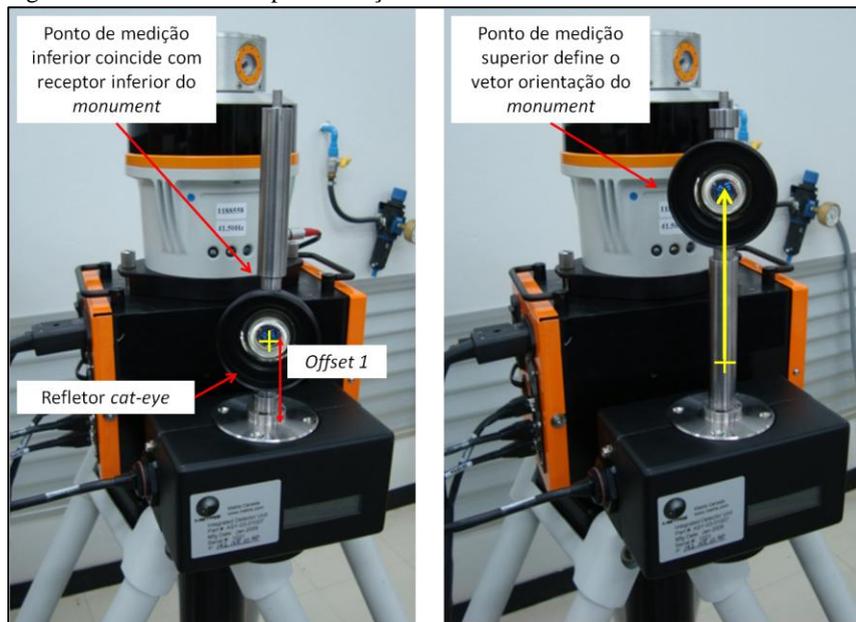
Fonte: Autor

Figura 50 - Refletor *cat-eye* com adaptador desenvolvido para a tarefa de medição específica



Fonte: Autor

Adaptador e refletor *cat-eye* são fixados através de roscas, de maneira que o eixo de fixação passa pelo centro do refletor. O adaptador foi projetado para proporcionar o posicionamento do refletor em duas posições – inferior e superior, sendo que, na inferior, a posição do centro do refletor coincide com a posição que seria ocupada pelo receptor inferior do *monument* (essa posição é determinada a partir do *offset 1*, dado do fabricante). Assim, para cada *monument*, tem-se dois pontos a medir: um ponto inferior, que coincide com a posição do receptor inferior; e um ponto superior, que dá a direção do vetor (Figura 51). Este adaptador é o que determinou o valor de u_{Probing} , conforme abordado no item 5.

Figura 51 - Procedimento para medição de um *Monument*

Fonte: Autor

A posição do receptor superior é calculada somando-se uma constante (*offset 2*) – valor calibrado e fornecido pelo fabricante – a partir do receptor inferior, ao longo da direção do vetor (Figura 52).

Figura 52 - Pontos que representam o resultado da medição



Fonte: Autor

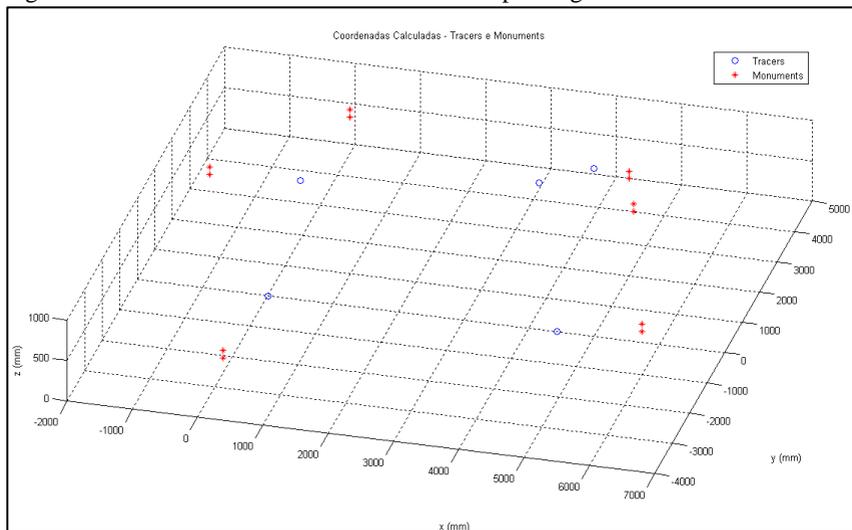
A configuração utilizada faz uso de 6 transmissores e 6 *monuments*, garantindo que cada transmissor tenha linha de visão a 5 *monuments*. Como são medidos dois pontos em cada um destes, tem-se um total de 12 pontos-alvo. São utilizadas 5 posições da estação de medição, totalizando 60 medições de distância. O arquivo com as distâncias medidas, que é a principal entrada do algoritmo para o cálculo de coordenadas, é apresentado na Tabela 2, do Apêndice A.

O procedimento experimental requereu aproximadamente duas horas de dois operadores para ser realizado.

6.2.2 Resultados

O algoritmo I retorna as coordenadas e orientações dos receptores dos *monuments* no sistema coordenado definido pelas estações de medição. Este resultado é apresentado graficamente na Figura 53. Os correspondentes valores encontram-se na Tabela 3 do Apêndice A.

Figura 53 - Gráfico com coordenadas retornadas pelo algoritmo I

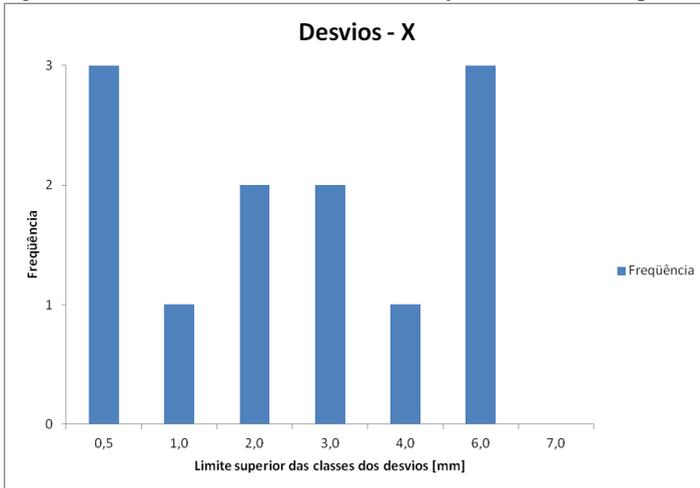


Fonte: Autor

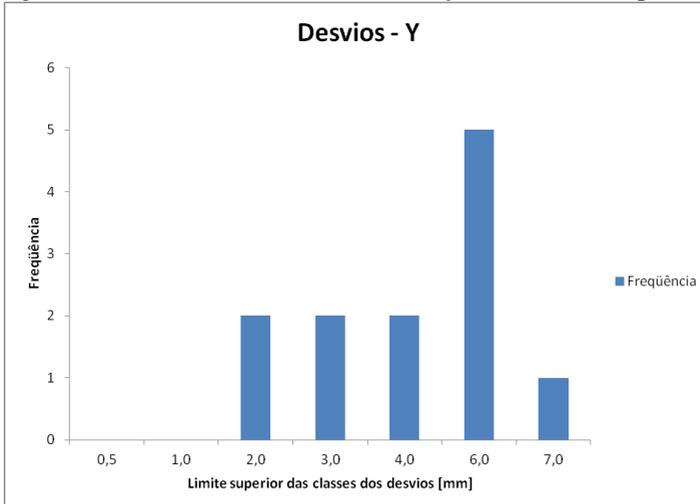
6.2.3 Discussão dos Resultados Experimentais

Para fins de comparação, as posições e orientações dos *monuments* foram também medidas através do próprio sistema iGPS para qual foi realizado o setup com a *scale-bar*. Do ponto de vista metrológico, não é possível utilizar o iGPS como referência, todavia é possível utilizá-lo para obter informações quantitativas acerca do resultado da medição por multilateração, pois a incerteza esperada é $U_{iGPS} < 1$ mm.

A comparação foi realizada no *software* SmartFit® 3D. Este faz um alinhamento (*best-fit*) entre as coordenadas dos pontos medidos pelos dois sistemas de medição. O critério utilizado foi o de mínimos quadrados, no qual o algoritmo minimiza a soma dos quadrados dos desvios entre as coordenadas correspondentes medidas por cada um dos dois sistemas. Em seguida o *software* retorna as coordenadas transformadas e os desvios entre as mesmas para cada ponto. Os desvios máximos encontrados são da ordem de 6 mm. Os desvios mínimos são inferiores a 1 mm. Figura 54, Figura 55 e Figura 56 apresentam histogramas e diagramas de frequência acumulada desses desvios.

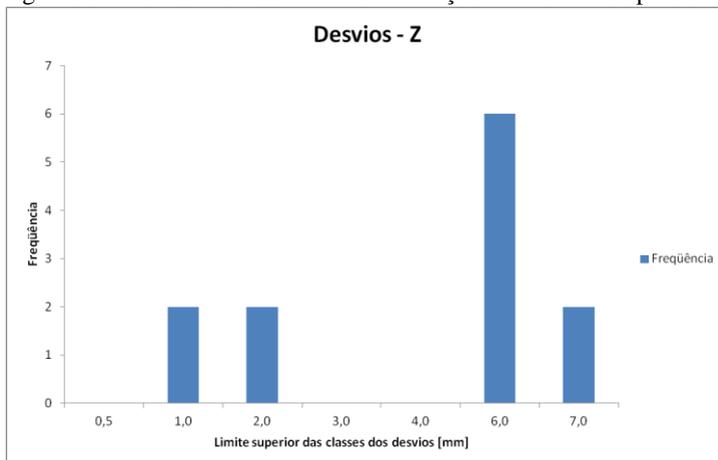
Figura 54- Desvios das coordenadas na direção X encontrados pelo *best-fit*

Fonte: Autor

Figura 55- Desvios das coordenadas na direção Y encontrados pelo *best-fit*

Fonte: Autor

Figura 56- Desvios das coordenadas na direção Z encontrados pelo *best-fit*



Fonte: Autor

O método *best-fit* faz rotação e translação de um dos conjuntos de pontos em todos os seus graus de liberdade, até encontrar a solução que minimiza os desvios. Isso acarreta a “mistura” das incertezas nas direções x , y e z . Por isso, entende-se que foram encontrados desvios nas direções x e y de magnitudes maiores do que o esperado, baseado na estimativa da incerteza de medição.

Combinando-se as incertezas esperadas dos dois sistemas em comparação, chega-se ao valor aproximado de $U \approx 4$ mm. A magnitude desse valor indica a consistência dos dados medidos por multilateração.

Os diagramas de frequência acumulada mostram que, para as coordenadas x e y , pelo menos a metade dos desvios têm valor igual ou inferior a 4 mm. Já a coordenada z apresenta maior quantidade de desvios acima desse valor – o que não surpreende, devido à pior sensibilidade da técnica de medição nesta direção. Alguma imperfeição experimental pode ter levado ao aparecimento dos desvios de maior magnitude (desvios superiores a 4 mm).

A análise dos resultados experimentais confirma a viabilidade da técnica desenvolvida, porém ainda com desempenho insatisfatório. No sentido de aprofundar a análise e aprimorar a técnica, trabalhos futuros devem envolver repetições do experimento, melhoria do sistema de apalpação do *LaserTracer* e a comparação dos resultados utilizando um sistema mais adequado (por exemplo, um *Laser Tracker*).

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os algoritmos apresentados neste trabalho foram desenvolvidos com intuito de viabilizar a obtenção dos resultados desejados, sem preocupação imediata com eficiência de tempo computacional ou maiores refinamentos da estrutura de programação – não obstante, houve cuidados em construí-los com satisfatória robustez, flexibilidade e caráter auto-explicativo, de maneira a suportarem variações dos dados de entrada e serem utilizáveis por outros usuários. Nesse sentido, entende-se que se obteve êxito no desenvolvimento dos algoritmos propostos.

O algoritmo I – responsável pelo cálculo das coordenadas dos pontos medidos – é o fundamental e indispensável à realização da tarefa de medição. Este demandou muito tempo de preparo e desenvolvimento, além de inúmeros testes até chegar à versão definitiva. Testes com dados virtuais que simulam dados medidos confirmaram o correto funcionamento do código. A convergência é atingida em poucos segundos (porém requer a inserção de condições de contorno adequadas, conforme explanado no item 4.2.1).

Com relação ao algoritmo II – para estimativa da incerteza de medição – optou-se por desenvolvê-lo segundo o método de Monte Carlo, devido à complexidade e à não-linearidade do modelo matemático envolvido no cálculo das coordenadas dos pontos-alvo. Este algoritmo tem importância na obtenção de informações quantitativas confiáveis acerca do desempenho metrológico da técnica de medição por multilateração, e também para investigar a influência da incerteza padrão combinada da medição de distâncias (u_l) no resultado da medição. De fato, através de simulação, constatou-se, como era esperado, que uma melhoria no sistema de apalpação (ou seja, uma redução da componente u_{probing}) traz considerável melhoria no desempenho metrológico da técnica de multilateração desenvolvida (ver item 5.3). Ressalta-se ainda a limitação do critério $s_{p,i}$ – para escolha do ponto onde será estimada a incerteza – que faz a soma quadrática das variâncias das coordenadas do ponto. Essa soma implica a mistura das informações de cada coordenada em separado. Tendo-se ciência dessa limitação, esse critério foi escolhido como uma simplificação satisfatória neste estágio do trabalho.

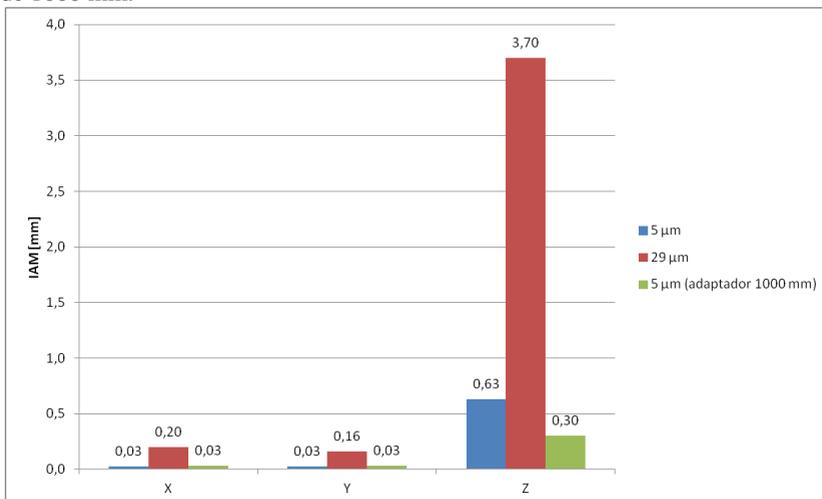
O algoritmo III – para otimização das estações – foi concebido para orientar o experimento quanto ao posicionamento das estações de medição, baseado em informações obtidas da literatura e também de experiências preliminares. Limitações físicas causam naturalmente pequenas divergências entre os dados informados pelo algoritmo e as posições das

estações de fato utilizadas no procedimento experimental. Além disso, o próprio algoritmo possui limitações, como, por exemplo, o refinamento da “malha” de simulação, ou seja, a quantidade e o espaçamento entre as estações testadas. De toda forma, foi possível manter a coerências entre tais valores quando da realização do experimento, onde os resultados da otimização se mostraram coerentes e úteis. Adicionalmente, percebe-se que, apesar de ter sido escolhida a configuração de estações com menor valor de S_t , a simulação retorna inúmeras outras configurações com S_t num patamar próximo. Isso significa que existe uma flexibilidade quanto à distribuição geométrica das estações dentro do volume de medição, sem incorrer necessariamente em perda significativa da qualidade da medição. Outra limitação deste algoritmo é o tempo computacional demandado, o que tornou necessário limitar o número de simulações a $M = 100$ – fato que tem influência negativa sobre os valores de desvio-padrão total (S_t) calculados para cada configuração de estações. Ainda, sobre o critério S_t , cabe uma argumentação análoga àquela feita a respeito do critério $s_{p,i}$ do algoritmo II.

Apesar de ainda insatisfatórios do ponto de vista metrológico, a magnitude e a coerência dos resultados experimentais representam o sucesso parcial do trabalho realizado e apontam os aspectos a serem aprofundados.

O desempenho da técnica de multilateração é substancialmente inferior na direção da coordenada “z”, onde as variações de distância são menores, reduzindo a sensibilidade do método nessa direção. Esse fato está diretamente ligado à distribuição espacial dos pontos-alvo; dependendo da natureza da tarefa de medição, esse pior desempenho metrológico em uma direção pode não se repetir ou ser irrelevante. Para se obterem informações quantitativas deste comportamento, foi realizada uma nova simulação da incerteza de medição, repetindo os parâmetros daquela apresentada no item 5.3 (mesma configuração de estações de medição; mesmas coordenadas “x” e “y” dos pontos-alvo; $u_L = 5 \mu\text{m}$), porém considerando um adaptador com 1000 mm de distância entre os pontos de medição superior e inferior, proporcionando desta forma uma maior variação das coordenadas “z” dos pontos-alvo. O resultado foi que as incertezas em “x” e “y” permaneceram inalteradas, enquanto a incerteza em “z” ficou reduzida a menos de 50% do valor anterior – $IAM_z = 0,30 \text{ mm}$ – o que corrobora a argumentação acima (Figura 57).

Figura 57 - Amplitudes dos intervalos de abrangência mínimos utilizando adaptador de 1000 mm.



Fonte: Autor.

Futuras repetições do experimento devem ser realizadas no intuito de investigar e eliminar possíveis imperfeições experimentais. Seria ainda de grande valor realizar a comparação dos resultados experimentais com dados medidos por um sistema de referência mais adequado, como, por exemplo, o *Laser Tracker*, o qual possibilitaria uma medição de comparação muito mais confiável e robusta (sendo possível inclusive medir os pontos-alvo simultaneamente com ambos os sistemas). Entretanto, até o momento não se dispõe de tal equipamento. Sugere-se adicionalmente, como um possível caminho para melhorar o desempenho do sistema em direções específicas, a adaptação do algoritmo I nesse sentido, por exemplo, por meio do uso de diferentes pesos no cálculo das coordenadas em diferentes posições. Demais aprimoramentos dos algoritmos, em especial sobre as limitações destacadas anteriormente, também são pontos a serem trabalhados futuramente.

Convém listar brevemente algumas das dificuldades encontradas, visto que estas foram de grande relevância no amadurecimento dos conhecimentos sobre a técnica de medição desenvolvida: nas primeiras tentativas de realizar o experimento, utilizou-se um refletor de 12,7 mm (0,5 in de acordo com catálogos dos fabricantes), pois os suportes dos

monuments possuem suportes magnéticos (*drift nests*) próprios para este tamanho de esfera. Entretanto, exaustivas repetições provaram que o manuseio deste pequeno refletor em longas distâncias (mais que 5 m) acaba provocando a perda do sinal luminoso do *LaserTracer*, inviabilizando a medição; posteriormente, algumas tentativas foram frustradas por dados errôneos – e não detectados em tempo – informados pelo *LaserTracer* quando este sofria uma interrupção do sinal, o que fazia o interferômetro perder a referência, mas ainda era capaz de reastrear o refletor.

Por fim, os resultados confirmam a viabilidade da técnica em questão. As simulações realizadas indicam que é possível atingir incertezas experimentais inferiores àquelas das técnicas tradicionais de geodésia industrial. Levando em conta o caráter investigativo deste trabalho, sendo que a literatura disponível não apresenta aplicações de multilateração sequencial com *LaserTracer* em tarefas de geodésia industrial, entende-se que foi completado um importante passo no caminho do entendimento e desenvolvimento plenos de uma técnica de medição de referências fixas com baixa incerteza e garantia da rastreabilidade.

REFERÊNCIAS

- ABNT, INMETRO. **Guia Para a Expressão da Incerteza de Medição**, 2003.
- ALBERTAZZI, A. G. J.; DE SOUZA, A. R. **Fundamentos de Metrologia Científica e Industrial**. 1. ed. Florianópolis: Manole, v. 1, 2008. ISBN 9788520421161.
- ALVARADO, B. H. L. **Validação da Confiabilidade Metrológica do Sistema de Medição IGPS**. Dissertação - (Mestrado em Engenharia), ITA. São José dos Campos. 2010.
- DONATELLI, G. D.; KONRATH, A. C. Simulação de Monte Carlo na Avaliação da Incerteza de Medição. **Revista de Ciência & Tecnologia**, v. 13, p. 5-15, 2005.
- ESTLER WT, EDMUNDSON KL, PEGGS GN, PARKER DH (2002) Large scale metrology—an update. **CIRP Anais — Manuf Technol** 51(2):587–609.
- FACHTAGUNG KOODINATENMESSTECHNIK; GESELLSCHAFT MESS- UND AUTOMATISIERUNGSTECHNIK. **Technologien für eine Wirtschaftliche Produktion**. Braunschweig: VDI-Verlag, 2010.
- FARO TECHNOLOGIES, INC. Leapfrogging vs. Pre-Defined Reference Targets. **Technology White Paper**, 2009.
- FRANCESCHINI, F. et al. **Distributed Large-Scale Dimensional Metrology**. 1. ed. London: Springer, v. 1, 2011. ISBN 978-0-85729-542-2.
- HÄRTIG, F. et al. Accuracy enhancement of a coordinate measurement machine by flexible integration of a precision tracking interferometer. **Physikalisch- Technische Bundesanstalt**, Braunschweig, 2002.
- HUGHES, B. Getting the most from your laser tracker. National Physical Laboratory, Londres, Nov. 2011. 59 diapositivos.
- INMETRO. **VOCABULÁRIO INTERNACIONAL DE METROLOGIA - Conceitos Fundamentais e Gerais e Termos Associados**, 2009.
- JCGM. JCGM 101:2008: **Evaluation of Measurement Data - Supplement 1 to the "Guide to the expression of uncertainty in**

measurement" - Propagation of Distributions using a Monte Carlo Method, 2008.

SOARES, L. **Confiabilidade Metrológica no Contexto da Garantia da Qualidade Industrial: Diagnóstico e Sistematização de Procedimentos**. Dissertação - (Mestrado em Metrologia), UFSC. Florianópolis. 1999.

MAISANO, D.A. et al. Indoor GPS: system functionality and initial performance evaluation. **Int. J. Manufacturing Research** , Bath, v. 3, 2008.

METRIS CANADA INC. **Portable Metrology Systems User Manual and Startup Guide**, 2009.

MÖSER ET AL. **Handbuch Ingenieurgeodäsie**. 1. ed. Heidelberg: Herbert Wichmann Verlag, 2002.

MUELANER, J.E. et al. Verification of the Indoor GPS System by comparison with points calibrated using a network of Laser Tracker Measurements. **Proceedings of DET2009**, Hong Kong, 2009.

NIKON METROLOGY. **Indoor GPS Accuracy Specification and Performance**, 2011.

PORATH, M. D. C.; PIEKAR., D. H. **Avaliação de Incerteza de Medição: Módulo Avançado**. Florianópolis: [s.n.], 2009. 94 diapositivos.

SCHMITT, R. et al. Performance Evaluation of iGPS for Industrial Applications. **IPIN 2010**, Zurique, 2010.

SCHNEIDER, C. T. LaserTracer - A New Type of Self Tracking Laser Interferometer. **IWAA**, Geneva, out. 2004.

SCHWENCKE, H. et al. Error mapping of CMMs and machine tools by a single tracking interferometer, Braunschweig, 2005.

SILVA, C. C. **Viabilidade da Medição Usando Tecnologia GPS Indoor na Montagem de Aeronaves**. Dissertação - (Mestrado em Engenharia), ITA. São José dos Campos. 2006.

TAKATSUJI, T. et al. Restrictions on the arrangement of laser trackers in laser trilateration. **Measurement Science and Technology**, UK, v. 9, abr. 1998.

WENDT, K. et al. Measuring large 3D structures using four portable tracking laser interferometers, Braunschweig, 2011. doi: 10.1016/j.measurement.2011.09.020.

ZHANG, D. et al. Modelling and optimization of novel laser multilateration schemes for high precision applications. **Measurement Science and Technology**, UK, v. 16, out. 2005.

ZHANG, G. et al. The Optimal Arrangement of Four Laser Tracking Interferometers in 3D Coordinate Measuring System Based on Multilateration, **VECIMS 2003**. Lugano, Suíça, jul. 2003.

ZHANG, G.X. et al. A Study on the Optimal Design of Laser-based Multilateration Systems Tianjin. **CIRP. Anais**. VOL 52; PART 1, p. 427-430 . Suíça. 2010.

APÊNDICE A – DADOS E RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Tabela 2 - Distâncias medidas com o *LaserTracer* [mm]

	T1	T2	T3	T4	T5
M1 inf	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
M1 sup	15,0370	7,4802	8,6803	4,2482	-6,8818
M2 inf	1393,8355	-352,5091	-2043,7935	-2046,5600	596,8679
M2 sup	1407,2922	-341,5985	-2021,8553	-2033,7684	599,8249
M3 inf	3056,1742	-2423,7513	-3352,7807	-4821,9990	3409,2480
M3 sup	3063,6695	-2413,5554	-3328,7219	-4801,3937	3407,8328
M4 inf	2531,7277	-4168,6332	-1708,3776	-2874,9968	3643,0645
M4 sup	2544,8421	-4138,3419	-1685,2207	-2855,2401	3647,4762
M5 inf	3291,7307	-4271,9304	1741,8590	719,5086	5677,5594
M5 sup	3302,7525	-4243,1196	1752,3228	727,6647	5680,3385
M6 inf	469,7146	-1075,6070	3449,5647	3065,8817	4181,4133
M6 sup	486,4812	-1064,4867	3457,1846	3071,1891	4183,5178

Fonte: Autor

Tabela 3 - Coordenadas e orientações dos *Monuments*. *Mi*, *Mj* e *Mk* são as componentes dos vetores unitários dos *Monuments* nas direções x, y e z, respectivamente.

	X	Y	Z	<i>Mi</i>	<i>Mj</i>	<i>Mk</i>
M1 inf	-1568,607	2511,829	403,371	-0,007	0,009	1,000
M1 sup	-1569,308	2512,722	504,965	-0,007	0,009	1,000
M2 inf	94,768	4341,261	593,022	-0,022	0,001	1,000
M2 sup	92,499	4341,405	694,597	-0,022	0,001	1,000
M3 inf	4446,797	4077,903	369,917	0,012	0,010	1,000
M3 sup	4448,040	4078,892	471,505	0,012	0,010	1,000
M4 inf	5031,008	2146,253	746,515	0,004	-0,010	1,000
M4 sup	5031,364	2145,292	848,109	0,004	-0,010	1,000
M5 inf	6096,397	-1348,070	679,493	0,008	-0,011	1,000
M5 sup	6097,221	-1349,163	781,084	0,008	-0,011	1,000
M6 inf	224,004	-3409,973	531,861	-0,003	-0,019	1,000
M6 sup	223,702	-3411,934	633,441	-0,003	-0,019	1,000

Fonte: Autor