

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE
AUTOMAÇÃO E SISTEMAS**

Vinícius Gravina da Rocha

**ESTRATÉGIAS DE LINEARIZAÇÃO POR PARTES ADAPTATIVAS
COM APLICAÇÕES À OTIMIZAÇÃO DA PRODUÇÃO DE
PETRÓLEO E GÁS**

Florianópolis

2013

Vinícius Gravina da Rocha

**ESTRATÉGIAS DE LINEARIZAÇÃO POR PARTES ADAPTATIVAS
COM APLICAÇÕES À OTIMIZAÇÃO DA PRODUÇÃO DE
PETRÓLEO E GÁS**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas para a obtenção do Grau de Mestre.

Orientador: Prof. Eduardo Camponogara, Ph.D.

Florianópolis

2013

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Rocha, Vinicius Gravina da

Estratégias de linearização por partes adaptativas com
aplicações à otimização da produção de petróleo e gás /
Vinicius Gravina da Rocha ; orientador, Eduardo
Camponogara - Florianópolis, SC, 2013.

132 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em
Engenharia de Automação e Sistemas.

Inclui referências

1. Engenharia de Automação e Sistemas. 2. linearização
por partes adaptativa. 3. linearização por partes. 4.
otimização. 5. otimização da produção de petróleo e gás. I.
Camponogara, Eduardo. II. Universidade Federal de Santa
Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de
Automação e Sistemas. III. Título.

Vinícius Gravina da Rocha

**ESTRATÉGIAS DE LINEARIZAÇÃO POR PARTES ADAPTATIVAS
COM APLICAÇÕES À OTIMIZAÇÃO DA PRODUÇÃO DE
PETRÓLEO E GÁS**

Esta Dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do Título de “Mestre”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas.

Florianópolis, 07 de março 2013.

Jomi Fred Hübner, Dr.
Coordenador do Curso

Prof. Eduardo Camponogara, Ph.D.
Orientador

Banca Examinadora:

Prof. Eduardo Camponogara, Ph.D.
Presidente

Profa. Katia Campos de Almeida, Ph.D.

Prof. Ubirajara Franco Moreno, Dr.

Prof. Agostinho Plucenio, Dr.

Aos meus pais, Maria Alice e Luiz Fernando,
com carinho.

AGRADECIMENTOS

Ao professor Eduardo Camponogara, fonte de inspiração com seu dinamismo e sua inteligência, pela oportunidade de realizar este trabalho, além de todo aprendizado ao longo do processo.

À Petrobras pelo apoio financeiro durante a realização deste projeto.

Aos meus pais e minha irmã, que sempre estiveram ao meu lado.

Aos amigos, que tornam a caminhada por esta vida mais divertida.

*Build your empire, reach the top,
But don't forget to enjoy the ride,
For we all know the final stop.*

Vinicius Gravina da Rocha

RESUMO

O problema de otimizar a distribuição de gás de injeção a poços de petróleo e direcionar a produção para separadores sujeitos a restrições de vazão é um problema não-linear inteiro-misto de considerável dificuldade. Uma abordagem para resolver tais problemas consiste em transformar as funções não-lineares em lineares por partes. Ainda assim, para se obter bons modelos, as curvas são finamente discretizadas, o que torna o modelo complexo.

Para abordar este problema, é proposta a estratégia de gerar curvas lineares por partes de forma adaptativa. A adaptação é construída com um subconjunto de *breakpoints* da função original de tal forma que a região do ótimo coincida com a curva original. Este procedimento é nomeado Linearização por Partes Adaptativa, que busca iterativamente encontrar o ponto ótimo, adaptando as curvas no seu entorno até que o problema convirja.

Para gerar novas adaptações, com um dado ponto ótimo, três heurísticas são propostas: linear, na qual a região no entorno do ponto ótimo na curva é adaptada; linear com pontos fixos, que é a mesma da linear, mas fixando pontos distantes do ótimo ao gerar uma nova adaptação; e logarítmica, inspirada no algoritmo de busca binária, segundo o qual os intervalos da adaptação próximos ao ponto ótimo são subdivididos.

A Linearização por Partes Adaptativa é então aplicada na otimização da produção de diferentes campos de petróleo e gás com Curvas de Desempenho dos Poços unidimensionais. No geral, o tempo computacional é superior a uma resolução sem a Linearização por Partes Adaptativa, *i.e.* a técnica não trouxe ganhos para funções unidimensionais. Dentre as heurísticas lineares, não houve ganho ao fixar os pontos, pois o maior custo computacional é gasto não no problema de adaptação, mas no de otimização, que é resolvido diversas vezes, uma para cada iteração.

Para os cenários com baixa disponibilidade de gás, a heurística linear convergiu com menos iterações, pois o ponto ótimo foi encontrado no início das curvas, que é uma região bem adaptada já na aproximação inicial. Para maiores disponibilidades, a heurística logarítmica convergiu com um menor número de iterações.

Por último, são estabelecidas as fundações para a Linearização por Partes Adaptativa bidimensional. As heurísticas lineares e logarítmicas são estendidas para este contexto e validadas em problemas simples de otimização.

Palavras-chave: linearização por partes, linearização por partes adaptativa, otimização, otimização da produção de petróleo e gás.

ABSTRACT

The problem of optimizing the allocating lift-gas to oil wells and routing the production to separators subject to flow constraints is a mixed-integer non-linear problem of considerable difficulty. One approach for solving this problem is to transform the non-linear functions into piecewise linear ones. Still, for accurate models, some curves are finely discretized, what adds up to the model complexity.

In order to tackle this problem, a technique is proposed to generate an adapted piecewise-linear curve. The adaptation is constructed with a subset of breakpoints from the original curve, in a way that the region of the optimum coincides with the original curve. This procedure is named Adaptive Piecewise Linearization, which consists of iteratively finding the optimal point and adapting the curves on its neighborhood until convergence is reached.

In order to generate new adaptations for a given optimal point, three heuristics are proposed: linear, which adapts the region close the optimal point on the curve; linear with fixed points, which is the same as the linear, but it fixes the breakpoints that are far from the optimum upon generating a new adaptation; and logarithmic, inspired on the binary search, which divides the intervals of the piecewise-linear adaptation close to the optimum.

The Adaptive Piecewise Linearization is then applied to optimize the production of different oil and gas fields with unidimensional Wells Performance Curves. In general, the computational time is greater than solving without the Adaptive Piecewise Linearization. Among the linear heuristics, gains from fixing the points are rather fruitless, for most computational time is spent, not on the adaptation, but on the optimization problem, which is solved many times, once for each iteration.

For scenarios with low availability of gas, the linear heuristic converged with fewer iterations, because the optimal point is located close the beginning of the curve, a region that is well adapted in the initial approximation. For higher gas availability, the logarithmic heuristic converged with fewer iterations.

Lastly, the foundations for the bi-dimensional Adaptive Piecewise Linearization are laid. The linear and logarithmic heuristic are extended to this context and are validated in some simple optimization problems.

Keywords: piecewise linear functions, adaptive piecewise linearization, optimization, oil and gas production optimization

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Preço histórico do petróleo: em azul, preço nominal e em vermelho, preço ajustado pela inflação.	32
Figura 2	Ilustração do processo de <i>gas-lift</i> aplicado a um poço de petróleo.	33
Figura 3	Esquema ilustrativo de um campo de petróleo com processo de extração por <i>gas-lift</i>	34
Figura 4	Exemplo ilustrativo de uma CDP.	35
Figura 5	Exemplo ilustrativo de uma CDP linearizada por partes.	35
Figura 6	Exemplo ilustrativo da linearização por partes adaptativa: o valor máximo da função linear por partes é encontrado por uma adaptação com menos pontos que a função original.	36
Figura 7	Processo iterativo da linearização por partes adaptativa: encontra-se o ponto ótimo e refina-se a linearização por partes nas proximidades do ponto ótimo.	37
Figura 8	Formulação da linearização por partes dos modelos por Combinação Convexa e Incremental.	40
Figura 9	Formulação da linearização por partes do modelo por Combinação Convexa Desagregada.	42
Figura 10	Exemplo de uma função linear por partes e uma adaptação não otimizada.	46
Figura 11	Exemplo de uma função linear por partes e com a adaptação otimizada pelo modelo implementado em AMPL.	47
Figura 12	Diagrama da iteração do problema de otimização com a adaptação da linearização por partes.	48
Figura 13	Fluxo de dados entre a função original, o refinamento adaptativo e o problema de otimização.	49
Figura 14	Gráfico da função objetivo $f(x) - x$	49
Figura 15	Aproximação inicial \tilde{f} para a função f	51
Figura 16	Aproximação \tilde{f} para a função f na iteração 1 usando a heurística linear.	52
Figura 17	Aproximação \tilde{f} para a função f na iteração 2 usando a heurística linear.	53
Figura 18	Aproximação \tilde{f} para a função f na iteração 3 usando a heurística linear.	54

Figura 19 Aproximação \tilde{f} para a função f na iteração 4 (última) usando a heurística linear.	55
Figura 20 Aproximação inicial \tilde{f} para a função f	57
Figura 21 Aproximação \tilde{f} para função f na iteração 1 usando a heurística linear com pontos fixos.	58
Figura 22 Aproximação \tilde{f} para função f na iteração 2 usando a heurística linear com pontos fixos.	59
Figura 23 Aproximação \tilde{f} para função f na iteração 3 usando a heurística linear com pontos fixos.	60
Figura 24 Aproximação \tilde{f} para função f na iteração 4 (última) usando a heurística linear com pontos fixos.	61
Figura 25 Aproximação inicial \tilde{f} para a função f	64
Figura 26 Aproximação \tilde{f} para função a f na iteração 1 usando a heurística logarítmica.	65
Figura 27 Aproximação \tilde{f} para função a f na iteração 2 usando a heurística logarítmica.	66
Figura 28 Aproximação \tilde{f} para a função f na iteração 3 (última) usando a heurística logarítmica.	67
Figura 29 Esquema ilustrativo de um campo de petróleo com processo de extração por <i>gas-lift</i> para formulação do modelo em programação matemática.	72
Figura 30 Exemplo de discretização do domínio de uma função bidimensional para aplicação do modelo por Combinação Convexa Desagregada - DCC.	100
Figura 31 Exemplo de partição retangular A com os vértices da adaptação em destaque.	103
Figura 32 Heurística linear para gerar novos retângulos no modelo bidimensional.	106
Figura 33 Resultado da aplicação da heurística linear para gerar novos retângulos no modelo bidimensional.	108
Figura 34 Heurística logarítmica para gerar novos retângulos no modelo bidimensional.	110
Figura 35 Resultado da aplicação da heurística logarítmica para gerar novos retângulos no modelo bidimensional.	111
Figura 36 Superfície gerada por pontos aleatórios.	112
Figura 37 Superfície gerada pela sobreposição de 3 Gaussianas.	113
Figura 38 Adaptação inicial da superfície com pontos aleatórios.	115

Figura 39 Adaptação da superfície com pontos aleatórios usando a heurística linear, iteração 1.	115
Figura 40 Adaptação da superfície com pontos aleatórios usando a heurística linear, iteração 2.	116
Figura 41 Adaptação da superfície com pontos aleatórios usando a heurística linear, iteração 18 (última).	116
Figura 42 Adaptação inicial da superfície composta por 3 Gaussianas. ...	117
Figura 43 Adaptação da superfície composta por 3 Gaussianas usando a heurística linear, iteração 1.	117
Figura 44 Adaptação da superfície composta por 3 Gaussianas usando a heurística linear, iteração 2.	118
Figura 45 Adaptação da superfície composta por 3 Gaussianas usando a heurística linear, iteração 45 (última).	118
Figura 46 Adaptação inicial da superfície com pontos aleatórios.	119
Figura 47 Adaptação da superfície com pontos aleatórios usando a heurística logarítmica, iteração 1.	119
Figura 48 Adaptação da superfície com pontos aleatórios usando a heurística logarítmica, iteração 2.	120
Figura 49 Adaptação da superfície com pontos aleatórios usando a heurística logarítmica, iteração 15 (última).	120
Figura 50 Adaptação inicial da superfície composta por 3 Gaussianas. ...	121
Figura 51 Adaptação da superfície composta por 3 Gaussianas usando a heurística logarítmica, iteração 1.	122
Figura 52 Adaptação da superfície composta por 3 Gaussianas usando a heurística logarítmica, iteração 2.	122
Figura 53 Adaptação da superfície composta por 3 Gaussianas usando a heurística logarítmica, iteração 17 (última).	123

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Tempos computacionais e valores ótimos obtidos nas diferentes instâncias dos campos de petróleo. Valores para a resolução sem o uso da LPA.	82
Tabela 2	Otimização da produção de petróleo com modelo por aproximação e heurística linear sem pontos fixos — iterações, curvas adaptadas e pontos ótimos encontrados.	83
Tabela 3	Otimização da produção de petróleo com modelo por aproximação e heurística linear sem pontos fixos — tempos computacionais. . .	84
Tabela 4	Otimização da produção de petróleo com modelo por aproximação e heurística linear com pontos fixos — iterações, curvas adaptadas e pontos ótimos encontrados.	85
Tabela 5	Otimização da produção de petróleo com modelo por aproximação e heurística linear com pontos fixos — tempos computacionais. . .	86
Tabela 6	Otimização da produção de petróleo com modelo por aproximação e heurística logarítmica — iterações, curvas adaptadas e pontos ótimos encontrados.	87
Tabela 7	Otimização da produção de petróleo com modelo por aproximação e heurística logarítmica — tempos computacionais.	88
Tabela 8	Otimização da produção de petróleo com modelo por relaxação e heurística linear sem pontos fixos — iterações, curvas adaptadas e pontos ótimos encontrados.	90
Tabela 9	Otimização da produção de petróleo com modelo por relaxação e heurística linear sem pontos fixos — tempos computacionais.	91
Tabela 10	Otimização da produção de petróleo com modelo por relaxação e heurística linear com pontos fixos — iterações, curvas adaptadas e pontos ótimos encontrados.	92
Tabela 11	Otimização da produção de petróleo com modelo por relaxação e heurística linear com pontos fixos — tempos computacionais.	93
Tabela 12	Otimização da produção de petróleo com modelo por relaxação e heurística logarítmica — iterações, curvas adaptadas e pontos ótimos encontrados.	94
Tabela 13	Otimização da produção de petróleo com modelo por relaxação e heurística logarítmica — tempos computacionais.	95
Tabela 14	Parâmetros das Gaussianas.	114
Tabela 15	Iterações necessárias para se encontrar o máximo nas superfí-	

cie usando as diferentes heurísticas. 123

Tabela 16 Quantidade de partições do domínio na última iteração de adaptação, por heurística e por superfície. Também a quantidade de politopos na função original. 124

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

LPA	Linearização por Partes Adaptativa	31
CDP	Curva de Desempenho do Poço	32
CC	Combinação Convexa	38
DCC	Combinação Convexa Desagregada	38
MI	Modelo Incremental	38

LISTA DE SÍMBOLOS

q_i	Vazão de gás injetado	32
q_o	Vazão de óleo extraído	32
f	Função linear por partes	39
\tilde{f}	Adaptação da função linear por partes	39
λ_k	Variável de ponderação do k -ésimo <i>breakpoint</i>	41
ζ_k	Variável de ativação do k -ésimo intervalo	41
λ_k^e	Variável de ponderação do k -ésimo intervalo à esquerda	43
λ_k^d	Variável de ponderação do k -ésimo intervalo à direita	43
x_i	i -ésimo <i>breakpoints</i> da função linear por partes	45
X	Conjunto de <i>breakpoints</i> da função linear por partes	45
y_i	Valor da função linear por partes no i -ésimo <i>breakpoint</i>	45
Y	Conjunto dos valores da função linear por partes nos seus respectivos <i>breakpoints</i>	45
N	Conjunto de índices de <i>breakpoints</i> da função linear por partes ..	45
\tilde{x}_i	i -ésimo <i>breakpoints</i> da adaptação da função linear por partes ...	45
\tilde{X}	Conjunto de <i>breakpoints</i> da adaptação da função linear por partes	45
\tilde{y}_i	Valor da adaptação da função linear por partes no i -ésimo <i>breakpoint</i>	45
\tilde{Y}	Conjunto dos valores da adaptação da função linear por partes nos seus respectivos <i>breakpoints</i>	45
M	Conjunto de índices de <i>breakpoints</i> da adaptação da função linear por partes	45
\tilde{Y}^{livre}	Conjunto de valores da adaptação da função que permanece livres na otimização da adaptação	45
\tilde{Y}^{fixo}	Conjunto de valores da adaptação da função que permanece fixos na otimização da adaptação	45
\tilde{L}	Conjunto de intervalos da adaptação da função linear por partes .	45
l_i	i -ésimo intervalo da adaptação da função linear por partes	45
N_i	Conjunto de <i>breakpoints</i> da função original que estão contidos no domínio do i -ésimo intervalo de adaptação (l_i)	45

x_k^*	Valor no domínio onde foi encontrado o ótimo da k -ésima iteração	50
\tilde{X}_k	Conjunto de <i>breakpoints</i> que geram a adaptação da função linear por partes na k -ésima iteração	50
B_k	Conjunto de <i>breakpoints</i> adicionados na k -ésima iteração para gerar a próxima adaptação	56
l_{k,i^*}	Intervalo i^* da adaptação onde foi encontrado o ótimo na k -ésima iteração	64
j_start	Índice do <i>breakpoint</i> da função original que é o início do intervalo onde foi encontrado o ótimo, i.e. x_{j_start} é o <i>breakpoint</i> do início do intervalo de l_{k,i^*}	64
j_close_to	Índice do <i>breakpoint</i> da função original próximo ao ponto ótimo x_k^* encontrado, i.e. $x_{j_close_to}$ é o <i>breakpoint</i> próximo à x_k^*	64
j_half	Variável usada pela heurística logarítmica para dividir os intervalos	64
P	Problema	69
N	Número total de poços considerados no problema	70
\mathcal{N}	Conjunto de poços considerados no problema	70
\mathcal{N}_s	Conjunto de poços cuja produção pode ser enviada ao separador s	70
S	Número total separadores considerados no problema	70
\mathcal{S}	Conjunto de separadores considerados no problema	70
\mathcal{S}_n	Conjunto de separadores que podem receber a produção do poço n	70
\mathcal{H}	Conjunto de fases do fluido, água (w), óleo (o) e gás (g)	70
g	Fase gás	70
o	Fase óleo	70
w	Fase água	70
p	Produção, união das fases óleo, água e gás	70
q_i^{\max}	Vazão de gás de injeção disponível	70
$q_p^{s,\max}$	Limite de tratamento da fase produção do separador s	70
$q_g^{s,\max}$	Limite de tratamento da fase gás do separador s	70
$q_o^{s,\max}$	Limite de tratamento da fase óleo do separador s	70

$q_w^{s,\max}$	Limite de tratamento da fase água do separador s	70
l_n	Limite inferior de vazão de injeção de gás no poço n	70
u_n	Limite superior de vazão de injeção de gás no poço n	70
f	Função objetivo	71
q_i^n	Vazão de injeção alocada ao poço n	71
f_n	Função ganho associada ao poço n	71
p_g	Ganho obtido pela venda de um barril padrão de gás	71
p_o	Ganho obtido pela venda de um barril padrão de óleo	71
p_w	Custo de tratamento de um barril padrão de água	71
y_n	Variável binária que indica a ativação do poço n	71
$z_{n,s}$	Variável binária que indica a ativação do alinhamento do poço n ao separador s	71
$q_h^{n,s}$	Vazão de fase h proveniente do poço n direcionada ao separador s	71
q_g^n	Vazão de gás fluindo do poço n	71
q_o^n	Vazão de óleo fluindo do poço n	71
q_w^n	Vazão de água fluindo do poço n	71
\tilde{P}	Problema linearizado por partes	74
$q_{i,k}^n$	k -ésimo ponto de amostragem da Curva de Desempenho do Poço n do gás de injeção	74
$q_{h,k}^n$	k -ésimo ponto de amostragem da Curva de Desempenho do Poço n da vazão da fase $h \in \mathcal{H}$	74
\mathcal{H}	Conjunto de intervalos gerados pela amostragem da Curva de De- sempenho do Poço	74
\tilde{P}_{approx}	Modelo por aproximação com Linearização por Partes Adaptativa	77
\bar{q}_h^n	Superestimação da produção da fase $h \in \mathcal{H}$ no poço n	77
\tilde{q}_h^n	Subestimação da produção da fase $h \in \mathcal{H}$ no poço n	77
\tilde{L}_n	Conjunto de intervalos gerados pela linearização por partes adap- tativa para o poço n	77
$q_{i,l}^n$	l -ésimo <i>breakpoint</i> de injeção de gás usado pela linearização por partes adaptativa para o poço n	77
$\bar{q}_h^{n,s}$	Superestimação da vazão de fase h do poço n para o separador s	77

$\bar{q}_{h,l}^n$	l -ésimo <i>breakpoint</i> da curva adaptada, gerados pela LPA, que superestima a produção da fase h no poço n	77
$\tilde{q}_h^{n,s}$	Subestimação da vazão de fase h do poço n para o separador s	77
$\tilde{q}_{h,l}^n$	l -ésimo <i>breakpoints</i> da curva adaptada, gerados pela LPA, que subestima a produção da fase h no poço n	77
\tilde{P}_{relax}	Modelo por relaxação com Linearização por Partes Adaptativa	78
\mathcal{D}	Domínio da função	100
P	Politopo	100
\mathcal{P}	Conjunto de politopos	100
$V(A)$	Conjunto de vértices do politopo A	100
$\lambda_{P,v}$	Variável de ponderação associada ao vértice v do politopo P	100
A_k	k -ésimo politopo retangular	100
$V(A_k)$	Conjunto de vértices do politopo A_k	100
y_P	Variável de ativação do politopo P	100
$\mathbf{v}_{k,i}$	Vértice i do k -ésimo politopo	100
$\lambda_{k,i}$	Variável de ponderação do k -ésimo politopo para o i -ésimo vértice	100
y_P	Variável binária que indica se um politopo P está ativo	101
$\mathcal{Z}_i(A)$	Conjunto de <i>breakpoints</i> da função original na dimensão i que definem A	102
$x_{i,low}(A)$	Menor <i>breakpoint</i> da i -ésima dimensão da função original pertencente a A	103
$x_{i,high}(A)$	Maior <i>breakpoint</i> da i -ésima dimensão da função original pertencente a A	103
(\mathbf{a}^*, b^*)	Parâmetros do plano ótimo da adaptação	104
(\mathbf{a}, b)	Parâmetros do plano da adaptação	104
$\tilde{f}(A, \mathbf{v})$	Valor da adaptação f no vértice \mathbf{v} do politopo A	104
A^*	Partição retangular onde foi encontrado o ótimo	105
c_i	Índice do <i>breakpoint</i> de corte da i -ésima dimensão	107

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	31
1.1 ORIGEM E MOTIVAÇÃO	31
1.2 INTRODUÇÃO À LINEARIZAÇÃO POR PARTES ADAPTATIVA	36
1.3 OBJETIVOS	37
1.4 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO	38
2 LINEARIZAÇÃO UNIDIMENSIONAL	39
2.1 INTRODUÇÃO À LINEARIZAÇÃO POR PARTES UNIDIMENSIONAL	39
2.1.1 Modelo de Combinação Convexa Agregada - CC	39
2.1.2 Modelo Incremental - MI	41
2.1.3 Modelo de Combinação Convexa Desagregada - DCC	41
2.2 REFINAMENTO ADAPTATIVO	43
2.2.1 Modelagem Matemática da Adaptação	43
2.3 INTEGRAÇÃO ADAPTAÇÃO-PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO	48
2.3.1 Heurística Linear	50
2.3.2 Heurística Linear com Pontos Fixos	56
2.3.3 Heurística Logarítmica	62
2.4 SUMÁRIO	67
3 ANÁLISE COMPUTACIONAL	69
3.1 MODELOS	69
3.1.1 Modelo Não-Linear	69
3.1.2 Modelo Linearizado por Partes	73
3.1.3 Modelo com Linearização por Partes Adaptativa	74
3.1.3.1 Modelo com Linearização por Partes Adaptativa por Aproximação	75
3.1.3.2 Modelo com Linearização por Partes Adaptativa por Relaxação	77
3.2 RESULTADOS	78
3.2.1 Cenários	79
3.2.2 Premissas para Avaliar os Resultados	80
3.2.3 Indicadores	80
3.2.4 Resultados sem uso da LPA	81
3.2.5 Resultados com o Modelo por Aproximação	83
3.2.6 Resultados com o Modelo por Relaxação	90
3.3 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	96
3.4 SUMÁRIO	97
4 LINEARIZAÇÃO POR PARTES BIDIMENSIONAL	99

4.1	INTRODUÇÃO À LINEARIZAÇÃO POR PARTES BIDIMENSIONAL	99
4.1.1	Modelo de Combinação Convexa Desagregada Bidimensional - DCC	100
4.2	REFINAMENTO ADAPTATIVO BIDIMENSIONAL	101
4.2.1	Modelagem Matemática da Adaptação Bidimensional	102
4.3	INTEGRAÇÃO ADAPTAÇÃO BIDIMENSIONAL-PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO	105
4.3.1	Heurística Linear	105
4.3.2	Heurística Logarítmica	109
4.4	APLICAÇÃO DA LINEARIZAÇÃO POR PARTES ADAPTATIVA BIDIMENSIONAL	112
4.4.1	Heurística Linear para Superfície de Pontos Aleatórios	115
4.4.2	Heurística Linear para Superfície com Três Gaussianas	117
4.4.3	Heurística Logarítmica para Superfície de Pontos Aleatórios	119
4.4.4	Heurística Logarítmica para Superfície com Três Gaussianas	121
4.5	RESULTADOS	123
4.6	SUMÁRIO	124
5	CONCLUSÃO	125
5.1	CONTRIBUIÇÕES	127
5.2	TRABALHOS FUTUROS	128
	Referências Bibliográficas	129

1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo é feita uma introdução à estratégia de Linearização por Partes Adaptativa, abreviado por LPA. A ideia desta técnica surgiu no contexto da otimização da produção em campos de petróleo e gás, devido à complexidade das curvas que modelam os poços produtores e as linhas de escoamento.

Na primeira parte da introdução é detalhada a origem e motivação do trabalho. Na segunda, é feita uma introdução ao conceito de LPA, seguido dos objetivos deste trabalho. Por último é apresentada a estrutura da dissertação.

1.1 ORIGEM E MOTIVAÇÃO

Nos dias atuais, as questões energéticas tem sido foco de grande atenção. Nos últimos anos, as reservas de petróleo de fácil acesso tem se esgotado e por consequência tem-se observado um aumento no preço do barril de petróleo, Figura 1 (BP, 2012). Este aumento fez com que reservas em maiores profundidades no oceano, antes inviáveis, possam ser exploradas (TSOS-KOUNOGLOU; AYERIDES; TRITPOULOU, 2008).

Neste contexto, o controle de custos e o gerenciamento da produção se tornam importantes para se obter uma maior rentabilidade na extração do petróleo. Com este objetivo, surge a disciplina de otimização como uma excelente ferramenta para se atingir estes objetivos na produção de petróleo e gás. Uma abordagem consiste em modelar matematicamente o campo de petróleo e por um processo de otimização estabelecer as variáveis de decisão que induzem a produção ótima do campo.

Existem diversos tipos de campos de petróleo, que podem ser tanto em terra firme quanto no oceano. O campo estudado neste trabalho é do tipo *offshore* — no oceano. Este faz uso da amplamente empregada técnica de *gas-lift* (WINKLER; BLANN, 2007) para a recuperação de petróleo dos reservatórios. Esta técnica consiste na injeção de gás na base do poço, conforme ilustrado na Figura 2.

A injeção reduz a densidade do fluido na tubulação, trazendo para a superfície óleo, água e gás. Os poços fazem parte de uma estrutura maior, que é o campo em si. Um desenho esquemático do mesmo é apresentado na Figura 3.

O compressor produz o gás para a injeção, sendo este direcionado aos poços de petróleo. Tanto o direcionamento quanto a vazão do gás injetado em cada poço são variáveis controladas pelo *Manifold*. A produção de água, óleo

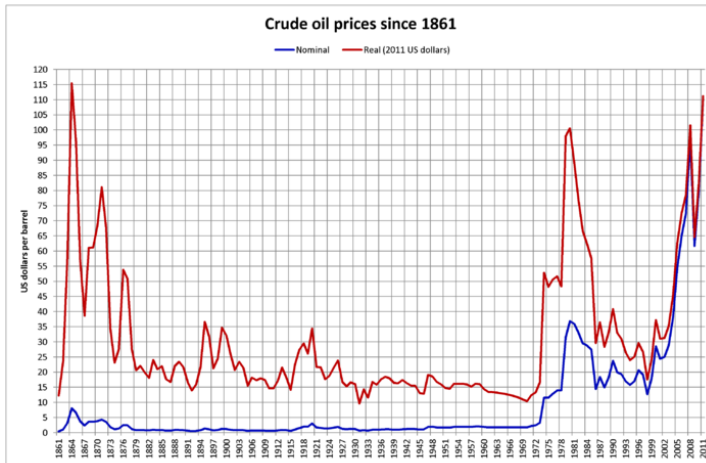


Figura 1 – Preço histórico do petróleo: em azul, preço nominal e em vermelho, preço ajustado pela inflação.

e gás dos poços é então direcionada aos separadores pelas válvulas de alinhamento. Nos separadores, as diferentes fases são separadas, sendo destinadas aos subsequentes tratamentos.

O óleo e o gás resultantes da produção são enviados às refinarias e mercados consumidores, o que resulta em uma receita financeira. Já a água produzida deve ser tratada para ser descartada e o gás de injeção deve ser comprimido, sendo estes custos de produção.

No modelo do campo, o poço é aproximado por uma Curva de Desempenho do Poço – CDP – que é uma função que relaciona o gás injetado, q_i , com a vazão da fase extraída do poço, neste caso a vazão de óleo, q_o , conforme ilustrado na Figura 4.

Esta curva é não-linear, o que traz considerável complexidade na resolução do problema de otimização. Uma conhecida abordagem para esta problemática é a linearização por partes (MISENER; GOUNARIS; FLOU-DAS, 2009; CAMPONOGARA; CONTO, 2009) que consiste em discretizar a curva e aproximá-la por segmentos de retas. Uma versão linearizada por partes da curva da Figura 4 é apresentada na Figura 5.

Contudo, mesmo com a modelagem linear por partes, os cenários reais tendem a ter um elevado número de curvas, com diversas combinações de ati-

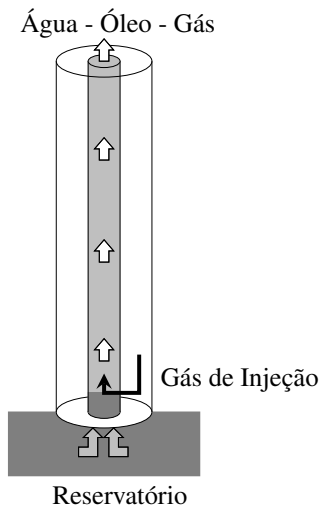


Figura 2 – Ilustração do processo de *gas-lift* aplicado a um poço de petróleo.

vação de poços e direcionamento de separadores. Além disso, ao buscar uma boa aproximação dos poços, as curvas são finamente discretizadas, tornando o modelo bastante complexo.

Em modelos de maiores dimensão, *i.e.* nos quais a CDP relaciona a vazão produzida a mais variáveis além do gás de injeção, esta complexidade se acentua. A convergência para o ótimo, nestes casos, é bastante lenta ou em alguns casos impossível, (SILVA, 2012).

Para abordar este problema, uma solução proposta por (VASUDEVA, 2012) é de discretizar as funções lineares por partes de maneira não uniforme de forma a minimizar o erro da aproximação. Com isso, a linearização por partes é mais refinada nas regiões de maior complexidade da função original, sendo possível reduzir a quantidade de pontos de discretização.

No trabalho de (GEIBLER, 2011) é definido um algoritmo para refinar as aproximações lineares por partes até uma margem de erro arbitrária através de super e subestimadores convexos. Para refinar a aproximação são inseridos *breakpoints* na região de maior erro da linearização por partes, sendo o valor destes calculado a partir da função original. Também é proposto um algoritmo iterativo que refina as funções lineares por partes na região do ótimo.

Estas abordagens envolvem o conhecimento da função original para gerar a linearização por partes, o que nem sempre é possível. Por exemplo, em sistemas grandes e complexos pode não existir um modelo do sistema, embora seja possível medir seus pontos de funcionamento. Por isso, no pre-

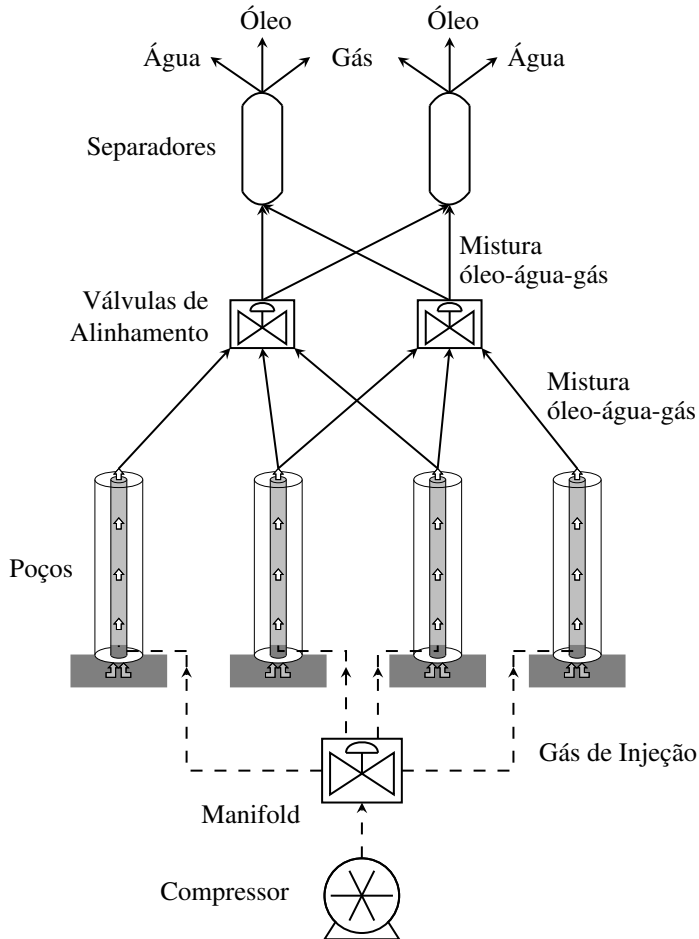


Figura 3 – Esquema ilustrativo de um campo de petróleo com processo de extração por *gas-lift*.

sente trabalho considera-se que existem apenas os valores das funções lineares por partes e que elas modelam adequadamente as curvas. Ou seja, não se tem acesso à função original que gerou tais aproximações.

Assim, a abordagem proposta é de simplificar as CDPs linearizadas pelo uso de um subconjunto reduzido de *breakpoints*. Esta curva simplificada é refinada no entorno do ponto ótimo, através de um processo iterativo com o problema de otimização. Esta iteração entre refinamento e resolução do

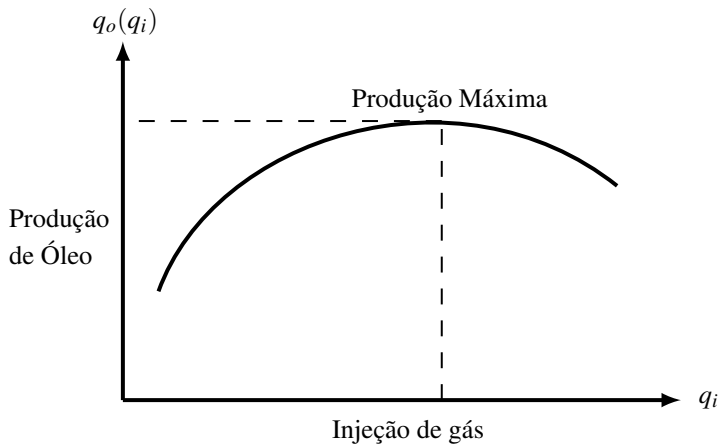


Figura 4 – Exemplo ilustrativo de uma CDP.

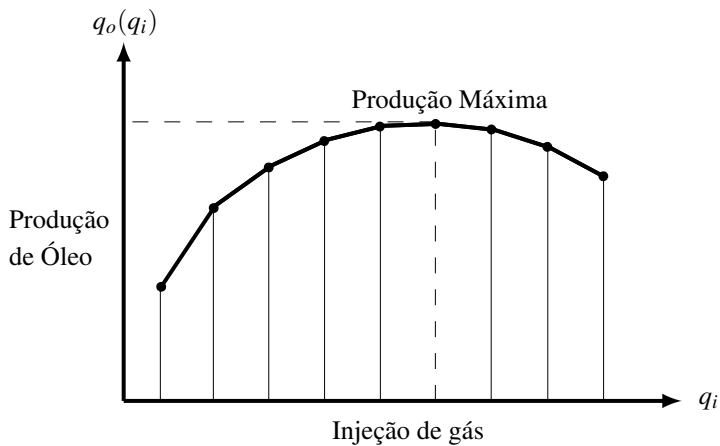


Figura 5 – Exemplo ilustrativo de uma CDP linearizada por partes.

problema de otimização é denominado Linearização por Partes Adaptativa, abreviado por LPA, sendo introduzido o conceito geral na próxima seção.

1.2 INTRODUÇÃO À LINEARIZAÇÃO POR PARTES ADAPTATIVA

A Linearização por Partes Adaptativa busca adaptar uma curva linear por partes somente no entorno do ponto ótimo. Com isso, espera-se reduzir a quantidade de pontos na curva linear por partes, reduzindo a complexidade e tornando o problema factível ou de mais rápida convergência.

A adaptação é realizada num processo iterativo entre o problema de otimização e a adaptação da curva, sendo que a cada iteração as curvas lineares por partes são refinadas no entorno do ponto ótimo. Um exemplo ilustrativo de encontrar o máximo de uma função, realizando a adaptação da curva é apresentado na Figura 6.

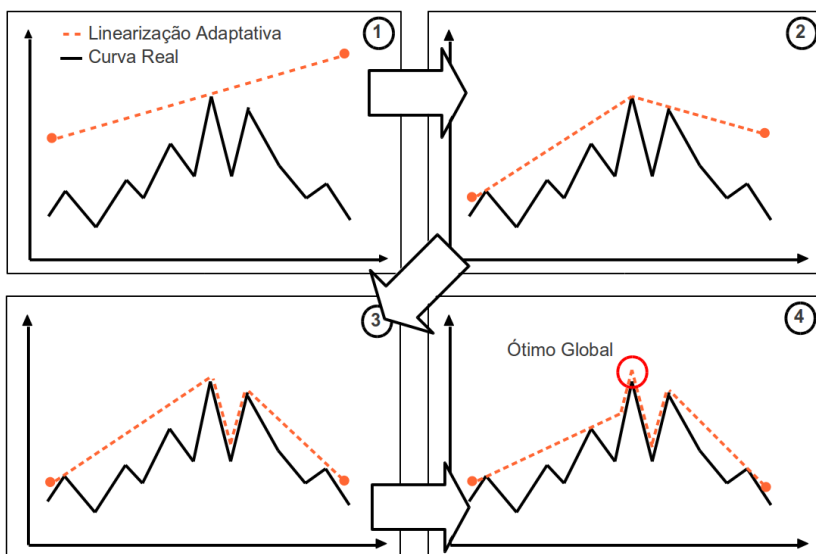


Figura 6 – Exemplo ilustrativo da linearização por partes adaptativa: o valor máximo da função linear por partes é encontrado por uma adaptação com menos pontos que a função original.

Neste exemplo, para encontrar o máximo da função, inicia-se com uma primeira aproximação, que é um segmento de reta. À medida que as iterações de adaptação ocorrem, são inseridos pontos próximos ao ótimo encontrado, adaptando a região do seu entorno até que coincida com a curva real. Assim é obtido o ponto máximo da função com um conjunto reduzido de pontos da função original.

O problema de adaptação pode ser formulado e resolvido indepen-

dente do problema de otimização, utilizando apenas as informações da localização do ótimo encontrado na curva adaptada. Estabelece-se, então, um processo iterativo entre os dois problemas, otimização e adaptação, conforme ilustrado na Figura 7.

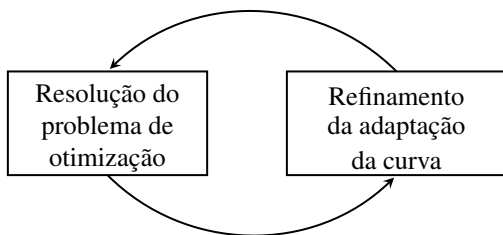


Figura 7 – Processo iterativo da linearização por partes adaptativa: encontra-se o ponto ótimo e refina-se a linearização por partes nas proximidades do ponto ótimo.

O problema de otimização é resolvido, para então realizar uma nova adaptação das curvas. Com a nova adaptação, é resolvido novamente o problema de otimização. Este processo iterativo segue até que se obtenha a convergência para o ótimo.

1.3 OBJETIVOS

O objetivo deste trabalho é de desenvolver uma técnica de linearização por partes adaptativa que permita gerar adaptações das Curvas de Desempenho dos Poços com um conjunto reduzido de *breakpoints* que são refinados próximos ao ponto ótimo. Com a simplificação das curvas, espera-se que o problema de otimização convirja com um menor esforço computacional, atingindo o ótimo com um modelo mais simples que o original.

Os seguintes objetivos intermediários nortearam o desenvolvimento do trabalho :

1. Determinação de um modelo para gerar adaptações de curvas lineares por partes.
2. Integração do modelo de adaptação com um problema de otimização, resultando na LPA.
3. Aplicação da LPA no problema de otimização da extração de petróleo e gás.

Para avaliar a eficácia da LPA são comparados os tempos computacionais da resolução do problema de otimização com LPA em relação a uma resolução do modelo de maneira convencional, sem LPA.

Além dos desenvolvimentos da LPA para funções unidimensionais, um objetivo adicional deste trabalho é desenvolver a base da LPA para funções bidimensionais. Com isso, em trabalhos futuros, a LPA pode ser estendida para funções de maiores dimensões.

1.4 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

No Capítulo 2 é feita uma introdução à linearização por partes unidimensional. São apresentadas algumas técnicas utilizadas para gerar a linearização por partes, como a Combinação Convexa Agregada, Combinação Convexa Desagregada e o Modelo Incremental.

É apresentada a formulação matemática do problema de adaptação de uma curva linear por partes. Esta é então acoplada a um problema de otimização, sendo descritas 3 heurísticas para gerar novas adaptações a partir dos ótimos encontrados, à saber: linear, linear fixando pontos e logarítmica. A escolha do nome se deve ao comportamento observado nos seus funcionamentos.

No Capítulo 3, a LPA unidimensional é aplicada a um problema de otimização da produção de um campo de petróleo e gás. Primeiro é apresentado o modelo não-linear do campo, seguido de sua versão linearizada por partes. A partir deste, com base na LPA, o modelo linearizado é reformulado em dois diferentes modelos: por aproximação e por relaxação. Estes modelos são então otimizados em diversos cenários, onde são apresentados os resultados obtidos e os tempos computacionais, sobre os quais é feita uma discussão.

No Capítulo 4, a LPA é estendida para o contexto bidimensional. Primeiro é apresentado o modelo DCC bidimensional. A partir deste, é formulado o problema de adaptação de uma curva bidimensional, sendo este acoplado a um problema de otimização.

São propostas duas heurísticas para gerar novas adaptações a partir do ponto ótimo, heurística linear e heurística logarítmica, cujos funcionamentos e objetivos são semelhante às suas equivalentes unidimensionais. A LPA bidimensional é então aplicada em dois exemplos de superfícies: uma gerada por pontos aleatórios e outra pela sobreposição de 3 funções Gaussianas.

Por último, no Capítulo 5, é feita a conclusão do trabalho. Os resultados do trabalho são avaliados e concluídos, assim como as lições aprendidas, contribuições e possibilidades de trabalhos futuros.

2 LINEARIZAÇÃO UNIDIMENSIONAL

O objetivo deste capítulo é estabelecer a Linearização por Partes Adaptativa para funções unidimensionais. Para isto, são apresentados os conceitos de funções lineares por partes. Em seguida, é enunciado e formulado o problema de adaptação destas curvas. O problema de adaptação é então acoplado ao problema de otimização, resultando na Linearização por Partes Adaptativa Unidimensional.

2.1 INTRODUÇÃO À LINEARIZAÇÃO POR PARTES UNIDIMENSIONAL

Na linearização por partes unidimensional, funções complexas são discretizadas e aproximadas por segmentos de retas: uma função conhecida $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ é discretizada em um conjunto de K pares $(x, f(x))$, sendo estes combinados para se obter uma aproximação da função original.

Para realizar a combinação dos K pares, existem diversos modelos, por exemplo Combinação Convexa Agregada (CC), Combinação Convexa Desagregada (DCC) e Modelo Incremental (MI), detalhados nas próximas seções. Alguns outros modelos existentes são SOS2, Log e Dlog; (VIELMA; KEHA; NEMHAUSER, 2008), (VIELMA; NEMHAUSER, 2009) e (VIELMA; AHMED; NEMHAUSER, 2010).

2.1.1 Modelo de Combinação Convexa Agregada - CC

No modelo de Combinação Convexa Agregada (WOLSEY, 1998), os pares $(x_k, f(x_k))$ são combinados pelas variáveis de ponderação λ_k , Figura 8.

Para cada um dos $K - 1$ intervalos é definida uma variável que induz o intervalo ativo, $\zeta_k \in \{0, 1\}$. O valor da aproximação linear por partes \tilde{f} passa a ser determinado por ζ_k e λ_k na seguinte formulação:

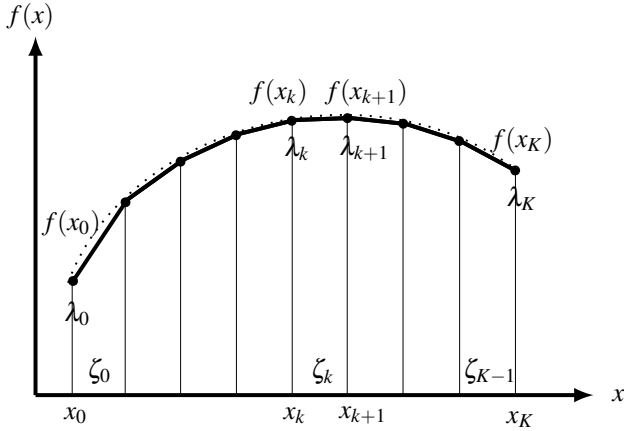


Figura 8 – Formulação da linearização por partes dos modelos por Combinação Convexa e Incremental.

$$(x, \tilde{f}) = \sum_{k=0}^K \lambda_k(x_k, f_k) \quad (2.1a)$$

$$\sum_{k=0}^K \lambda_k = 1 \quad (2.1b)$$

$$\sum_{k=0}^{K-1} \zeta_k = 1 \quad (2.1c)$$

$$\lambda_0 \leq \zeta_0 \quad (2.1d)$$

$$\lambda_k \leq \zeta_k + \zeta_{k-1}, \quad 1 \leq k \leq K-1 \quad (2.1e)$$

$$\lambda_K \leq \zeta_{K-1} \quad (2.1f)$$

$$0 \leq \lambda_k \leq 1, \quad \lambda_k \in \mathcal{D}, \quad k = 0, 1, \dots, K \quad (2.1g)$$

$$\zeta_k \in \{0, 1\}, \quad k = 0, 1, \dots, K-1 \quad (2.1h)$$

onde:

- a equação (2.1a) aproxima a função $f(x)$ por \tilde{f} ;
- a restrição (2.1b) estabelece a combinação convexa;
- a restrição (2.1c) garante que apenas um intervalo é ativo, *i.e.* apenas um $\zeta_k = 1$;

- as restrições (2.1d), (2.1e) e (2.1f) acoplam o intervalo ativo ζ_k ao λ_k associado, realizando a combinação convexa apenas no intervalo ativo;

2.1.2 Modelo Incremental - MI

O modelo incremental (PADBERG, 2000) faz uso das mesmas variáveis, λ_k e ζ_k , que o modelo CC. A diferença se dá na formulação matemática, onde \tilde{f} e x são determinados por incrementos de $(x_k - x_{k-1})$ e $(f(x_k) - f(x_{k-1}))$:

$$x = x_0 + \sum_{k=1}^K (x_k - x_{k-1})\lambda_k \quad (2.2a)$$

$$\tilde{f} = f(x_0) + \sum_{k=1}^K (f(x_k) - f(x_{k-1}))\lambda_k \quad (2.2b)$$

$$\zeta_1 \leq \lambda_1 \leq 1 \quad (2.2c)$$

$$\zeta_k \leq \lambda_k \leq \zeta_{k-1}, \quad 2 \leq k \leq K-1 \quad (2.2d)$$

$$\lambda_K \leq \zeta_{K-1} \quad (2.2e)$$

$$0 \leq \lambda_k, \lambda_k \in \mathcal{R}, k = 0, 1, \dots, K \quad (2.2f)$$

$$\zeta_k \in \{0, 1\}, k = 0, 1, \dots, K-1 \quad (2.2g)$$

onde:

- as equações (2.2a) e (2.2b) estabelecem os valores de x e \tilde{f} ;
- as equações (2.2c), (2.2d) e (2.2e) estabelecem os incrementos adicionados. Acoplado a eles está λ_k que pondera o incremento marginal.

Neste modelo, os incrementos são adicionados sucessivamente a medida que os ζ_k se tornam ativos, sendo o incremento marginal ponderado por λ_k . Isto pode ser verificado por indução em (2.2c), (2.2d) e (2.2e), onde verifica-se que $0 \leq \zeta_{K-1} \leq \zeta_{K-2} \leq \dots \leq \zeta_2 \leq \zeta_1 \leq 1$, sendo $\zeta_k \in \{0, 1\}$.

2.1.3 Modelo de Combinação Convexa Desagregada - DCC

O modelo por Combinação Convexa Desagregada (SHERALI, 2001) é similar ao CC, conforme ilustrado na Figura 9. Porém, cada intervalo possui duas variáveis que realizam a combinação convexa, λ_k^e à esquerda e λ_k^d

à direita. Isto justifica a denominação "desagregado", uma vez que cada intervalo possui variáveis de ponderação independentes. Também são definidos um $\zeta_k \in \{0, 1\}$ para cada intervalo:

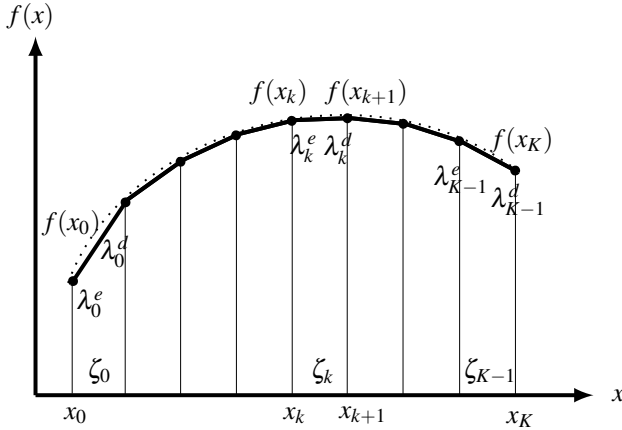


Figura 9 – Formulação da linearização por partes do modelo por Combinação Convexa Desagregada.

$$x = \sum_{k=0}^{K-1} (\lambda_k^e x_k + \lambda_k^d x_{k+1}) \quad (2.3a)$$

$$\tilde{f} = \sum_{k=0}^{K-1} (\lambda_k^e f(x_k) + \lambda_k^d f(x_{k+1})) \quad (2.3b)$$

$$\sum_{k=0}^{K-1} \zeta_k = 1 \quad (2.3c)$$

$$\lambda_k^e + \lambda_k^d = \zeta_k, \quad k = 0, 1, \dots, K-1 \quad (2.3d)$$

$$0 \leq \lambda_k^e, \lambda_k^d \leq 1, \quad k = 0, 1, \dots, K-1 \quad (2.3e)$$

$$\lambda_k^e, \lambda_k^d \in \mathcal{B}, \quad k = 0, 1, \dots, K-1 \quad (2.3f)$$

$$\zeta_k \in \{0, 1\}, \quad k = 0, 1, \dots, K-1 \quad (2.3g)$$

onde;

- as equações (2.3a) e (2.3b) definem os valores de x e \tilde{f} ;
- a restrição (2.3c) garante que apenas um intervalo é ativo;

- a restrição (2.3d) relaciona o intervalo ativo ζ_k às variáveis λ_k^e e λ_k^d . Quando o intervalo ζ_k está ativo, a soma das variáveis deve ser 1, induzindo a combinação convexa.

2.2 REFINAMENTO ADAPTATIVO

Para realizar o refinamento adaptativo de uma função linear por partes, é necessário formular um modelo que aproxime a função original com um conjunto reduzido de *breakpoints*.

Nesta seção é descrita uma adaptação que gera uma superestimação da função original. A partir deste, o modelo para gerar uma subestimação é facilmente deduzível. Com as curvas adaptadas desta maneira, é possível redefinir o problema de otimização original com propriedades interessantes.

Por exemplo, é possível definir uma relaxação do problema original, no qual lucros/ganhos são superestimadas e custos/restrições subestimados. Nesta abordagem, quando é encontrado o ponto ótimo nas curvas adaptadas — dado que estas coincidem localmente com a função original — garante-se que é o ótimo global.

Outro exemplo está na definição de um problema conservador que subestima o lucro e superestima custos e restrições. Nesta abordagem, quando uma solução é implementada na prática, obtém-se uma receita maior e custos menores do que o calculado. Além disso, no processo iterativo de adaptar as curvas e resolver o problema de otimização, qualquer solução numa dada iteração é factível — o que não acontece quando se utiliza a abordagem de relaxação.

Assim, é definido o problema de refinamento adaptativo para uma superestimação: dado uma função linear por partes verdadeira f com n *breakpoints*, como induzir uma aproximação \tilde{f} com o menor erro possível e que superestime $f(x)$.

2.2.1 Modelagem Matemática da Adaptação

Seja $f(x)$ uma função linear por partes a ser aproximada, sendo seu conjunto de *breakpoints* dado por $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, tal que $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, e $Y = \{y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n)\}$.

A curva de aproximação, dada por \tilde{f} , possui o conjunto de *breakpoints* $\tilde{X} = \{\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_m\} \subseteq X$, tal que $\tilde{x}_0 = x_0$, $\tilde{x}_m = x_n$ e $\tilde{x}_0 < \tilde{x}_1 < \dots < \tilde{x}_m$. A estes pontos são mapeados os valores de \tilde{f} , no qual é induzida a aproximação de f , sendo $\tilde{Y} = \{\tilde{y}_0 = \tilde{f}(x_0), \dots, \tilde{y}_m = \tilde{f}(x_m)\}$ os valores da aproximação em \tilde{X} .

Além disso, define-se $N = \{0, 1, \dots, n\}$ e $M = \{0, 1, \dots, m\}$ o conjunto dos índices de *breakpoints* da função original f e da aproximação \tilde{f} , respectivamente. Um exemplo de uma função linear por partes f e uma aproximação \tilde{f} são apresentados na Figura 10.

O conjunto \tilde{Y} é dividido em dois conjuntos disjuntos, $\tilde{Y} = \tilde{Y}^{\text{fixo}} \cup \tilde{Y}^{\text{livre}}$, sendo que os pontos em \tilde{Y}^{fixo} permanecem fixos quando é induzida a aproximação. O objetivo de introduzir este conjunto é de futuramente possibilitar a adaptação somente em pontos próximos ao ponto ótimo na iteração corrente, reduzindo os graus de liberdade do problema e o tempo para resolver a adaptação.

Assim, o problema em questão é de como mapear valores para $\tilde{y} \in \tilde{Y}^{\text{livre}}$, mantendo $\tilde{y} \in \tilde{Y}^{\text{fixo}}$ fixo, de maneira que \tilde{f} minimize o erro de aproximação e seja um limite superior de f . Para isso são definidos alguns elementos matemáticos.

Seja \tilde{l}_i o segmento linear que conecta os pontos $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$ à $(\tilde{x}_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})$. Se \tilde{y}_i é uma variável de decisão, *i.e.* $\tilde{y}_i \in \tilde{Y}^{\text{livre}}$, então os segmentos \tilde{l}_{i-1} (para $i > 0$) e \tilde{l}_i podem ser ajustados para aproximar \tilde{f} de f .

Seja $\tilde{L} = \{0, 1, \dots, m-1\}$ o conjunto dos segmentos lineares que formam a aproximação \tilde{f} . Para cada segmento \tilde{l}_i é definido $N_i = \{j \in N : \tilde{x}_i \leq x_j \leq \tilde{x}_{i+1}\}$, que são os índices de *breakpoints* da função original que estão no domínio do segmento \tilde{l}_i .

O problema de aproximar f por \tilde{f} ajustando os valores de $\tilde{y} \in \tilde{Y}^{\text{livre}}$ pode ser enunciado no seguinte programa linear:

$$\min_{\{a_i, b_i: i \in \tilde{L}\}} \sum_{i \in \tilde{L}} \sum_{j \in N_i} (a_i x_j + b_i - y_j) \quad (2.4a)$$

$$\text{s.a. : } a_i x_j + b_i \geq y_j, \quad i \in \tilde{L}, \quad j \in N_i \quad (2.4b)$$

$$a_i \tilde{x}_i + b_i = \tilde{y}_i, \quad i \in M \quad (2.4c)$$

$$a_{i-1} \tilde{x}_i + b_{i-1} = a_i \tilde{x}_i + b_i, \quad i \in \tilde{L} \setminus \{0\} \quad (2.4d)$$

$$\tilde{Y} = \tilde{Y}^{\text{fixo}} \cup \tilde{Y}^{\text{livre}}, \quad \tilde{Y}^{\text{fixo}} \cap \tilde{Y}^{\text{livre}} = \emptyset \quad (2.4e)$$

$$\tilde{y}_i \in \mathbb{R}, \quad \tilde{y}_i \in \tilde{Y}^{\text{livre}} \quad (2.4f)$$

$$a_i, b_i \in \mathbb{R}, \quad i \in \tilde{L} \quad (2.4g)$$

$$\tilde{L} = \{0, 1, \dots, m-1\} \quad (2.4h)$$

$$N_i = \{j \in N : \tilde{x}_i \leq x_j \leq \tilde{x}_{i+1}\} \quad (2.4i)$$

onde:

- o objetivo, Equação (2.4a), é minimizar a distância entre cada segmento

\tilde{l}_i da aproximação \tilde{f} e a curva real f pela diferença do valor da função real e da aproximação nos pontos X ;

- a Equação (2.4b) garante que todo segmento \tilde{l}_i é superior à curva real, fazendo com que a aproximação seja uma superestimação;
- a Equação (2.4c) define os valores de \tilde{y}_i ;
- a Equação (2.4d) garante a continuidade da aproximação;
- a Equação (2.4g) define a natureza das variáveis a_i e b_i , sendo estas os parâmetros dos segmentos de reta que aproximam a função f nos respectivos intervalos de \tilde{L} ;

Caso $\tilde{y}_i \in \tilde{Y}^{\text{fixo}}$, o valor de \tilde{y}_i é fixado pela equação (2.4c) e a aproximação é forçada a passar por este ponto. Se $\tilde{y}_i \in \tilde{Y}^{\text{livre}}$, o valor de \tilde{y}_i que minimiza a distância será obtido na resolução do problema de adaptação. Observa-se que os pares obtidos $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$ serão usados pelo problema de otimização original. Além disso, conforme mencionado, para gerar um adaptação que subestime a função f , basta inverter os termos da subtração na equação (2.4a) e a desigualdade (2.4b).

Este modelo para aproximar uma curva linear por partes f por \tilde{f} foi implementado em AMPL, sendo verificado seu funcionamento, conforme ilustra na Figura 11.

O AMPL — *Modeling Language for Mathematical Programming* — é uma linguagem para modelagem matemática de problemas de otimização lineares ou não-lineares (FOURER; GAY; KERNINGHAN, 2003). Nele, o problema é descrito matematicamente, semelhante aos modelos descritos neste trabalho. Esta formulação é então convertida no formato de um *solver* escolhido, neste trabalho o CPLEX, que resolve o problema de otimização encontrando o ótimo, quando possível.

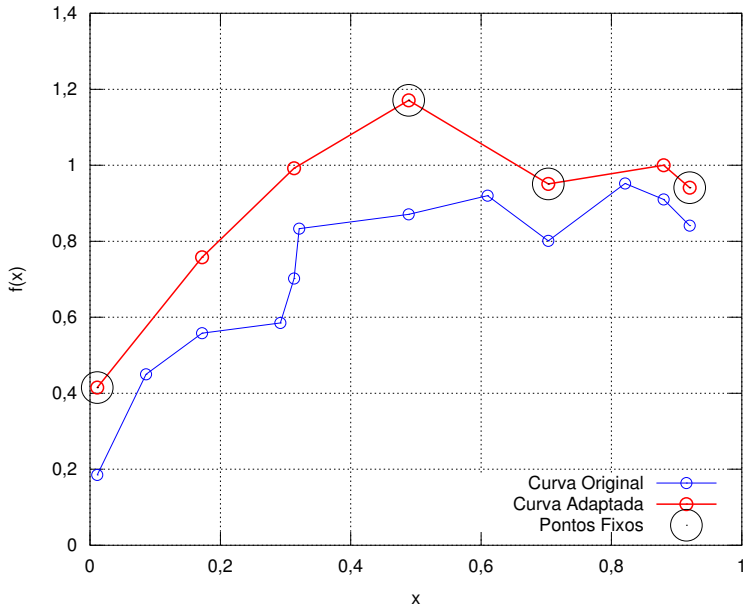


Figura 10 – Exemplo de uma função linear por partes e uma adaptação não otimizada.

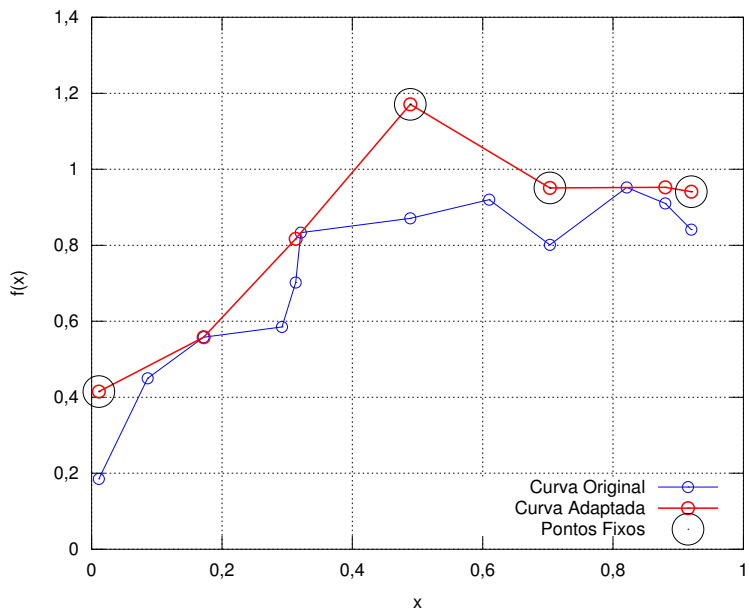


Figura 11 – Exemplo de uma função linear por partes e com a adaptação otimizada pelo modelo implementado em AMPL.

Na Figura 10 é apresentada a curva real e uma aproximação não otimizada, com o conjunto \tilde{Y}^{fixo} em destaque. Na Figura 11 foi resolvido o problema de adaptação, sendo encontrada a melhor aproximação \tilde{f} que superestima f . Com o refinamento adaptativo validado, passou-se para sua integração com problema de otimização.

2.3 INTEGRAÇÃO ADAPTAÇÃO-PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

O processo de adaptação das curvas é integrado ao problema de otimização, criando um ciclo iterativo, ilustrado na Figura 12.

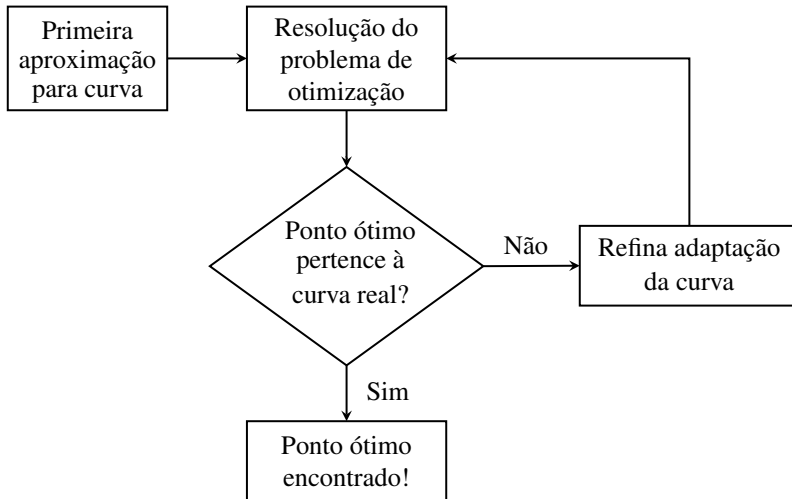


Figura 12 – Diagrama da iteração do problema de otimização com a adaptação da linearização por partes.

Neste processo, a partir da função original definida pelo conjunto de pontos $\{(x_i, y_i), i \in N\}$, é gerada uma adaptação com um conjunto reduzido de *breakpoints* $\{(x_i, \tilde{y}_i), \in M\}$. Estes são usados no problema de otimização, conforme ilustrado na Figura 13.

Por sua vez, o problema de otimização retorna o ponto da curva onde foi encontrado o ótimo, (x^*, y^*) , para que o refinamento adaptativo seja realizado. A verdadeira curva f é abstraída pela adaptação, sendo disponível apenas a curva \tilde{f} para o problema de otimização. Isto permite uma fácil inserção do processo adaptativo em problemas de otimização.

Na adaptação, foram usadas diferentes heurísticas para gerar novas

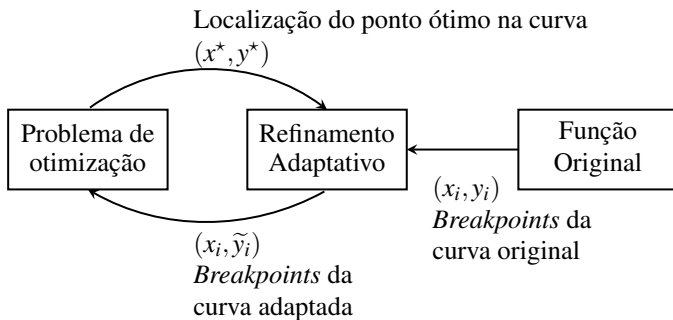


Figura 13 – Fluxo de dados entre a função original, o refinamento adaptativo e o problema de otimização.

aproximações: linear, linear com pontos fixos e heurística logarítmica. Para validá-las, foi buscado o ótimo na curva original da Figura 10 tendo como função objetivo $f(x) - x$. O gráfico desta função objetivo é apresentado na Figura 14. Pode-se verificar que o ponto ótimo encontra-se em $(0,32; 0,51)$.

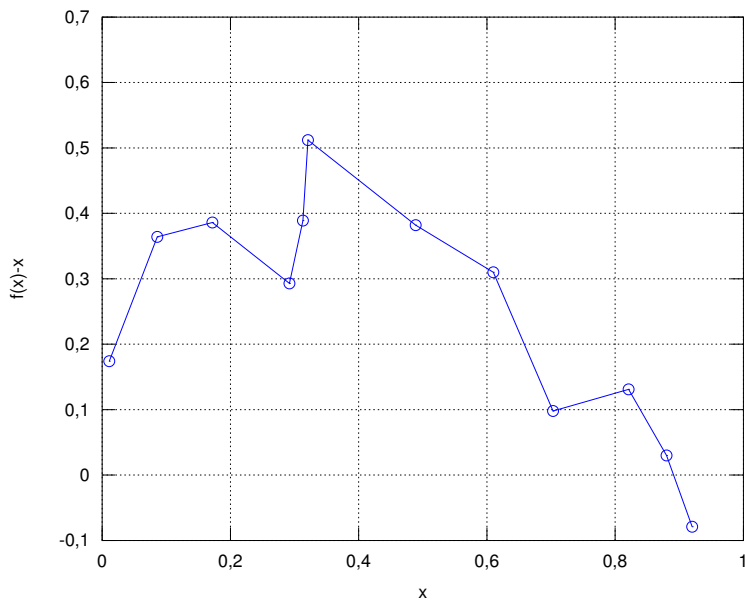


Figura 14 – Gráfico da função objetivo $f(x) - x$.

2.3.1 Heurística Linear

Na heurística linear são adicionados *breakpoints* da curva original à adaptação no entorno do ponto ótimo. Seu objetivo é fazer a região onde foi encontrado o ponto ótimo coincidir com a curva real. Para isso, são incluídos dois *breakpoints* da função original mais próximos à esquerda do ponto ótimo (os maiores *breakpoints* menores que o ótimo) e os dois *breakpoints* próximos à direita do ponto ótimo (os menores *breakpoints* maiores que o ótimo) — caso eles existam, pois pode ocorrer do ponto ótimo estar no início da curva. Também, caso o ponto ótimo coincida com *breakpoints* da função original, este também é incluído:

Algorithm 1: Heurística linear para determinar os novos *breakpoints* da próxima adaptação \tilde{f} , a partir do ponto ótimo encontrado, x_k^*

input: x_k^*, \tilde{X}_k
 $\tilde{X}_{k+1} := \tilde{X}_k \cup \arg \max \{x_i, x_j \in X : x_i < x_j < x_k^*\}$
 $\tilde{X}_{k+1} := \tilde{X}_{k+1} \cup \arg \min \{x_i, x_j \in X : x_k^* < x_i < x_j\}$
if $x_k^* \in X$ **then**
 $\tilde{X}_{k+1} := \tilde{X}_{k+1} \cup \{x_k^*\}$
return \tilde{X}_{k+1}

onde:

- o parâmetro k indica a k -ésima iteração;
- a variável x_k^* é o valor no domínio da curva onde foi encontrado o ponto ótimo;
- \tilde{X}_k são os *breakpoints* da curva de aproximação na iteração k .

Com estes 4 ou 5 novos *breakpoints*, são inseridos suficientes graus de liberdade para que a aproximação linear por partes coincida com a curva real no entorno do ponto ótimo na k -ésima iteração. Assim, se na iteração seguinte for encontrado o ótimo numa região coincidente com a curva real, este também será o ponto ótimo na curva real.

Esta heurística foi implementada em AMPL, tendo como função objetivo $\max : f(x) - x$. O resultado é apresentado nas Figuras 15, 16, 17, 18 e 19.

Na Figura 15 é apresentada a adaptação inicial da curva de apenas um reta. Ao resolver o problema de otimização para a adaptação, é encontrado o

ótimo em $(x_0^*, f(x_0^*)) = (0,01; 0,74)$.

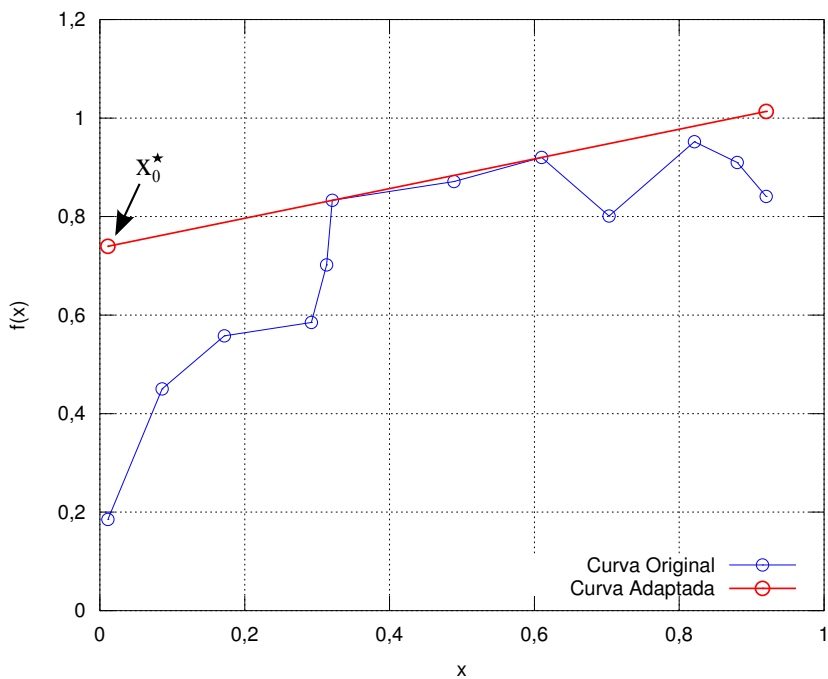


Figura 15 – Aproximação inicial \tilde{f} para a função f .

A partir do ponto ótimo encontrado, são adicionados os *breakpoints* $\{0,09; 0,172\}$ de acordo com a heurística proposta. Com isso, o novo conjunto de *breakpoints* para a próxima adaptação é $\tilde{X}_1 := \{0,01; 0,09; 0,17; 0,92\}$, sendo esta apresentada na Figura 16. Ao resolver o problema de otimização com esta nova curva, é encontrado o ótimo em $(x_1^*; f(x_1^*)) = (0,17; 0,79)$.

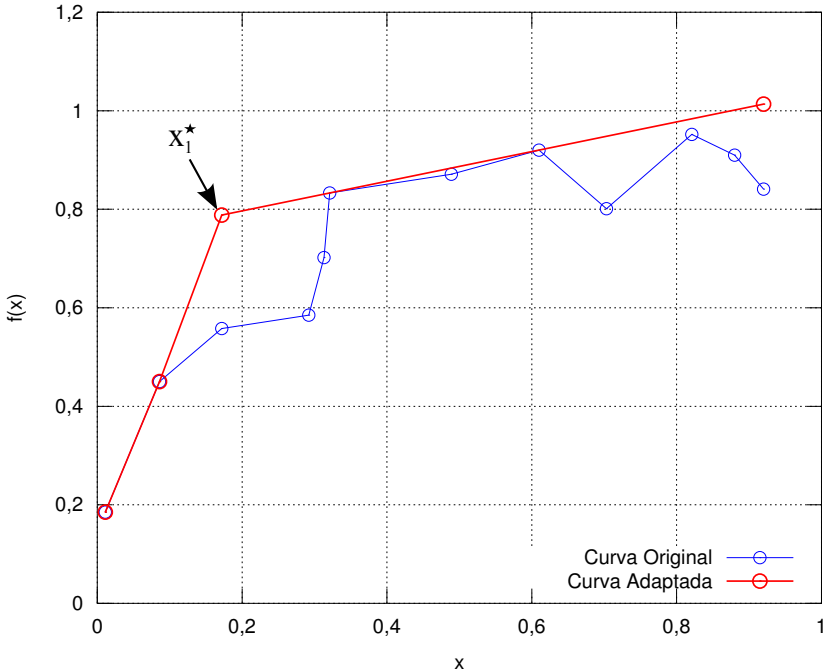


Figura 16 – Aproximação \tilde{f} para a função f na iteração 1 usando a heurística linear.

A partir do ponto ótimo, são inseridos os *breakpoints* $\{0,01; 0,09; 0,17; 0,29; 0,31\}$, sendo que apenas os dois últimos não estavam em \tilde{X}_1 ; assim $\tilde{X}_2 := \{0,01; 0,09; 0,17; 0,29; 0,31; 0,92\}$. A nova adaptação e o ponto ótimo encontrado, $(x_2^*; f(x_2^*)) = (0,31; 0,83)$ são apresentados na Figura 17.

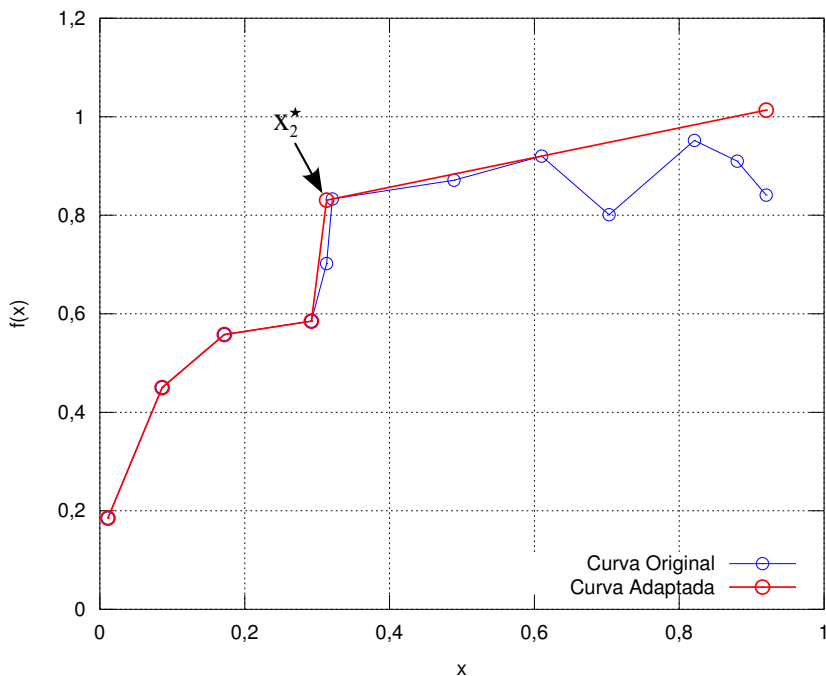


Figura 17 – Aproximação \tilde{f} para a função f na iteração 2 usando a heurística linear.

Na iteração 3 a adaptação é dada pelos *breakpoints* $X_3 := \{0,01; 0,09; 0,17; 0,29; 0,31; 0,32; 0,50; 0,92\}$ e o ponto ótimo encontrado é $(x_3^*; f(x_3^*)) = (0,32; 0,83)$, Figura 18.

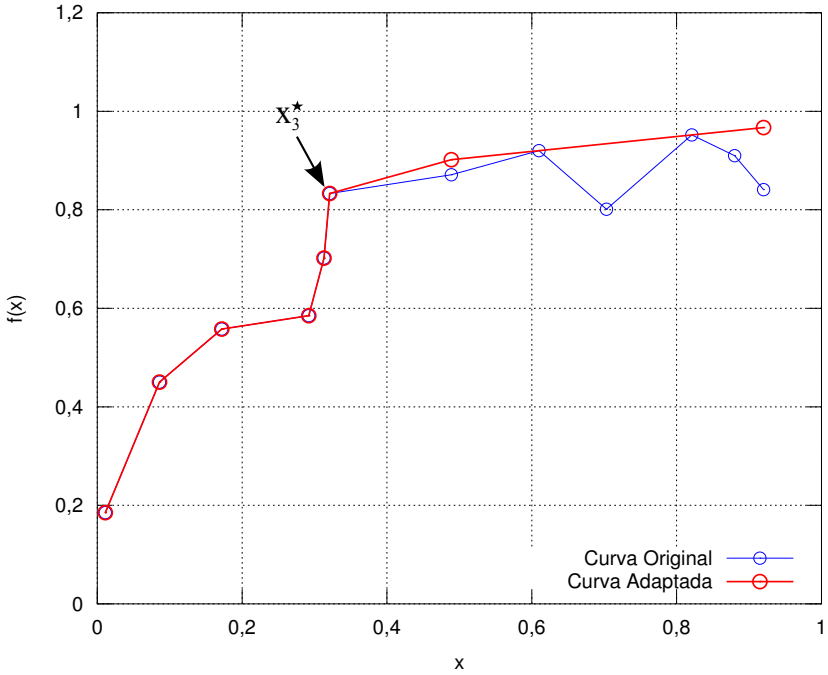


Figura 18 – Aproximação \tilde{f} para a função f na iteração 3 usando a heurística linear.

Na iteração 4, quando a LPA converge, a adaptação é dada pelos *breakpoints* $X_4 := \{0,01; 0,09; 0,17; 0,29; 0,31; 0,32; 0,50; 0,61; 0,92\}$ e o ponto ótimo encontrado é $(x_4^*; f(x_4^*)) = (0,32; 0,83)$, Figura 24.

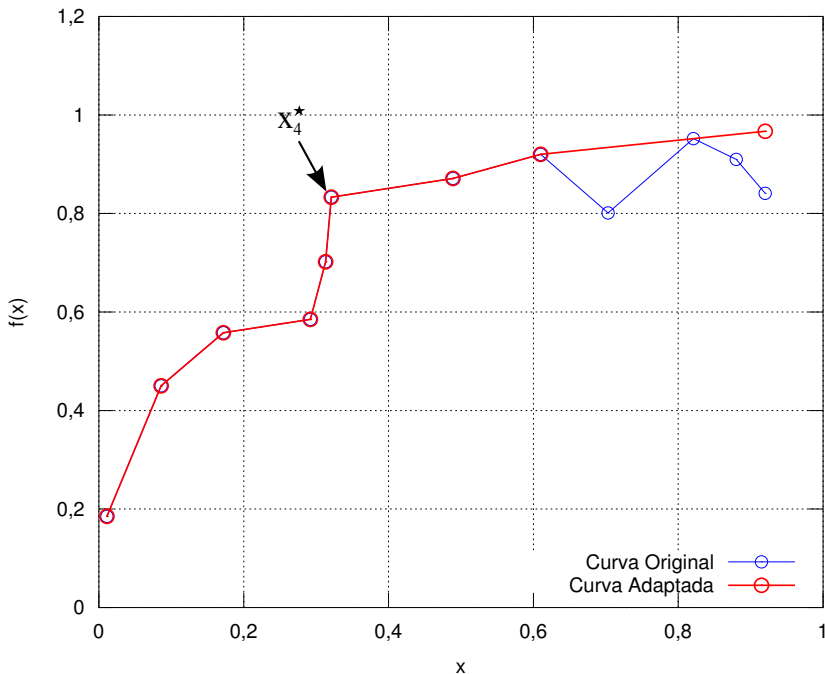


Figura 19 – Aproximação \tilde{f} para a função f na iteração 4 (última) usando a heurística linear.

Com isto, verifica-se que a LPA com heurística linear encontrou o ponto ótimo da função objetivo $\max : f(x) - x$, com um conjunto reduzido de *breakpoints* da função original.

2.3.2 Heurística Linear com Pontos Fixos

A heurística linear com pontos fixos insere os mesmos *breakpoints* que a heurística linear. Além disso, são fixados os *breakpoints* distantes do ótimo encontrado na curva, de forma que estes não sejam alterados na adaptação da curva:

Algorithm 2: Heurística linear com pontos fixos para determinar os *breakpoints* da próxima adaptação \tilde{f} , a partir do ponto ótimo encontrado, x_k^* .

input: x_k^*, \tilde{X}_k
 $B_k := \arg \max \{x_i, x_j \in X : x_i < x_j < x_k^*\}$
 $B_k := B_k \cup \arg \min \{x_i, x_j \in X : x_i^* < x_i < x_j\}$
if $x_k^* \in \tilde{X}_k$ **then**
 $B_k := B_k \cup \{x_k^*\}$
 $\tilde{X}_{k+1} := \tilde{X}_k \cup B_k$
 $\tilde{Y}_{k+1}^{fixo} := \tilde{X}_{k+1} \setminus B_k$
return $\tilde{X}_{k+1}, \tilde{Y}_{k+1}^{fixo}$

onde:

- o parâmetro k indica a k -ésima iteração.
- a variável x_k^* é o valor no domínio da curva onde foi encontrado o ponto ótimo na iteração k .
- o conjunto B_k contém os *breakpoints* adicionados para a próxima adaptação, que podem ou não já estar entre os *breakpoints* da adaptação corrente, \tilde{X}_k .
- \tilde{X}_k são os *breakpoints* da curva adaptada na iteração corrente e \tilde{X}_{k+1} , os usados para gerar a próxima adaptação, sendo $\tilde{X}_{k+1} := \tilde{X}_k \cup B_k$.
- o conjunto \tilde{Y}_{k+1}^{fixo} estabelece os *breakpoints* fixados ao gerar a próxima adaptação.

Assim, a heurística de fixação estabelece que o conjunto de pontos adicionados, B_k , permanece livre e seu complementar, $\tilde{X}_{i+1} \setminus B_k$, é fixado para gerar próxima adaptação. Com estes pontos fixos, espera-se simplificar o problema de adaptação, reduzindo seu tempo de resolução. A heurística foi implementada em AMPL, sendo o resultado apresentado nas Figuras 20, 21, 22, 23 e 24.

A adaptação inicial é a mesma de heurística linear sendo também encontrado o ponto ótimo em $(x_0^*; f(x_0^*)) = (0,01; 0,74)$, Figura 20.

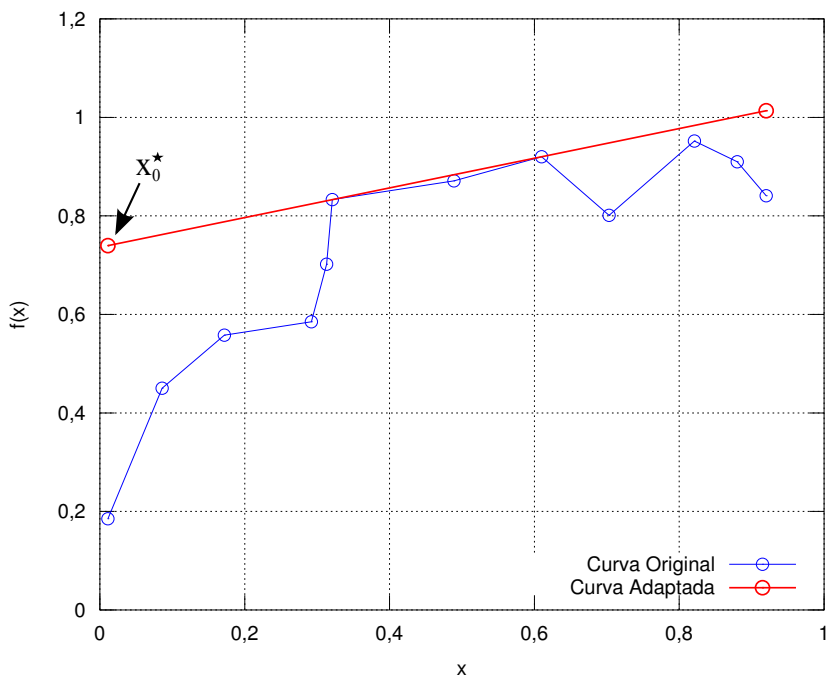


Figura 20 – Aproximação inicial \tilde{f} para a função f .

Á partir do ponto ótimo, são adicionados os *breakpoints* $\{0,09; 0,172\}$ para a gerar a nova adaptação. Este conjunto é os mesmos da heurística linear, porém também é estabelecido o conjunto de pontos fixos para esta adaptação, $Y_1^{fixo} = \{0,92\}$.

A nova adaptação, composta pelo conjunto de *breakpoints* $\tilde{X}_1 := \{0,01; 0,09; 0,17; 0,92\}$ é apresentada na Figura 21. Ao resolver o problema de otimização com esta nova curva, é encontrado o ótimo em $(x_1^*; f(x_1^*)) = (0,17; 0,19)$

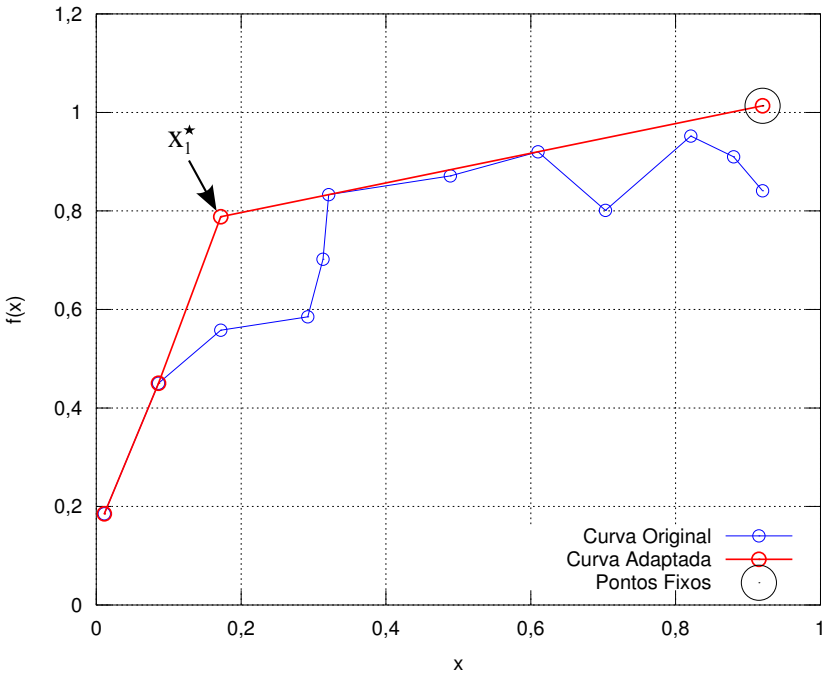


Figura 21 – Aproximação \tilde{f} para função f na iteração 1 usando a heurística linear com pontos fixos.

A partir do ponto ótimo encontrado na primeira iteração, são inseridos os *breakpoints* $\{0,01; 0,09; 0,17; 0,29; 0,31\}$, sendo que apenas $\{0,29; 0,31\}$ não estavam presente na adaptação anterior. Contudo, como os 5 *breakpoints* devem permanecer livre para realizar a adaptação, o conjunto de pontos fixos permanece $Y_2^{fixo} = \{0,92\}$.

A nova adaptação é dada pelo conjunto de *breakpoints* $\tilde{X}_2 := \{0,01; 0,09; 0,17; 0,29; 0,31; 0,92\}$, sendo apresentada na Figura 22. O ponto ótimo encontrado foi $(x_2^*, f(x_2^*)) = (0,31; 0,83)$

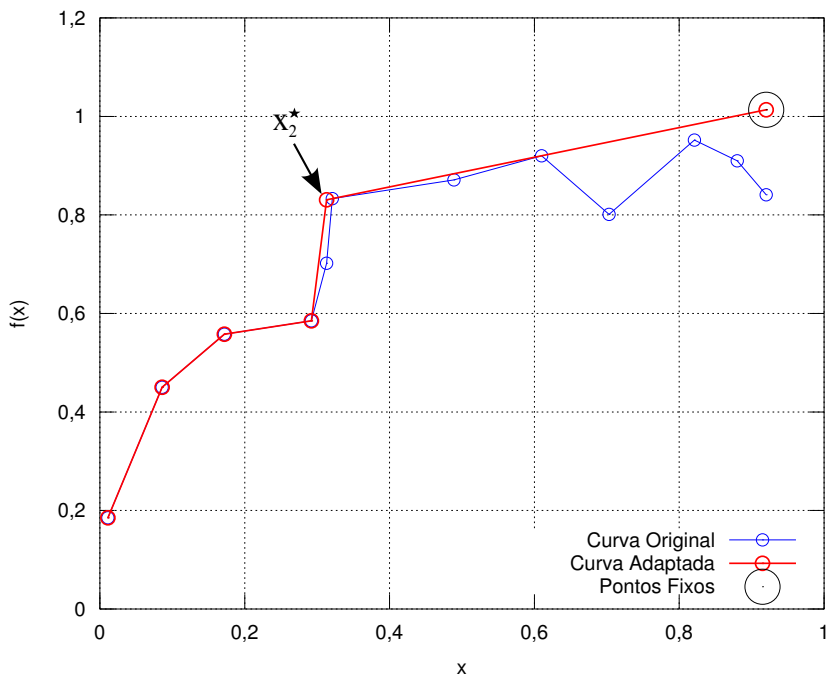


Figura 22 – Aproximação \tilde{f} para função f na iteração 2 usando a heurística linear com pontos fixos.

Na iteração 3, a adaptação é dada pelos *breakpoints* $X_3 := \{0,01; 0,09; 0,17; 0,29; 0,31; 0,32; 0,50; 0,92\}$. Dentre estes, foram inseridos $B_3 := \{0,17; 0,29; 0,31; 0,32; 0,50\}$, resultando no conjunto de ponto fixos $Y_3^{fixo} = \{0,01; 0,09; 0,92\}$. O ponto ótimo encontrado $(x_3^*; f(x_3^*)) = (0,32; 0,83)$ e adaptação são apresentados na Figura 23.

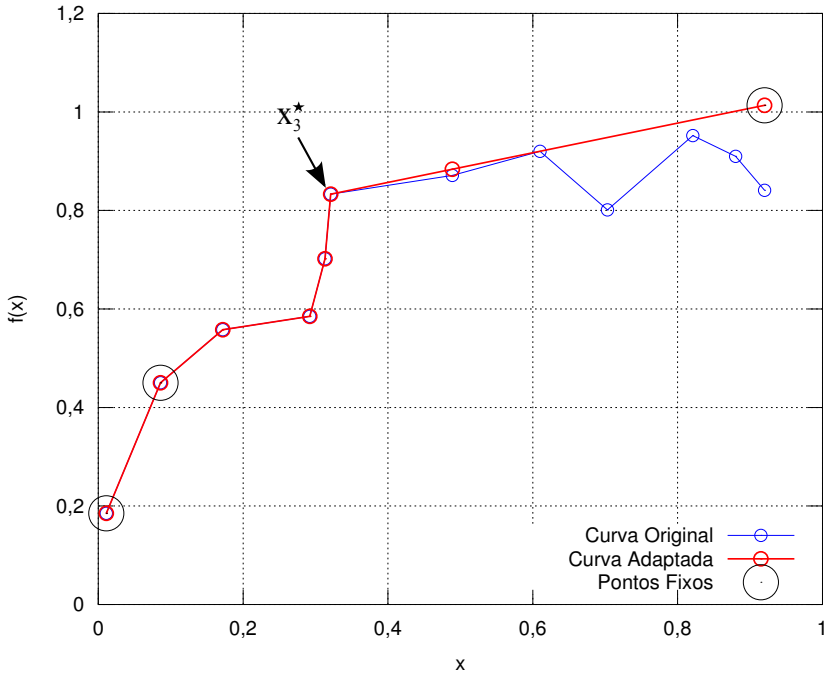


Figura 23 – Aproximação \tilde{f} para função f na iteração 3 usando a heurística linear com pontos fixos.

Na iteração 4, quando a LPA converge, a adaptação é dada pelos *break-points* $X_4 := \{0,01; 0,09; 0,17; 0,29; 0,31; 0,32; 0,50; 0,61; 0,92\}$, sendo $B_4 := \{0,29; 0,31; 0,32; 0,50; 0,61\}$ e $Y_4^{fixo} = \{0,01; 0,17; 0,09; 0,92\}$. O ponto ótimo encontrado $(x_4^*, f(x_4^*)) = (0,32; 0,83)$ e a adaptação são apresentados na Figura 24.

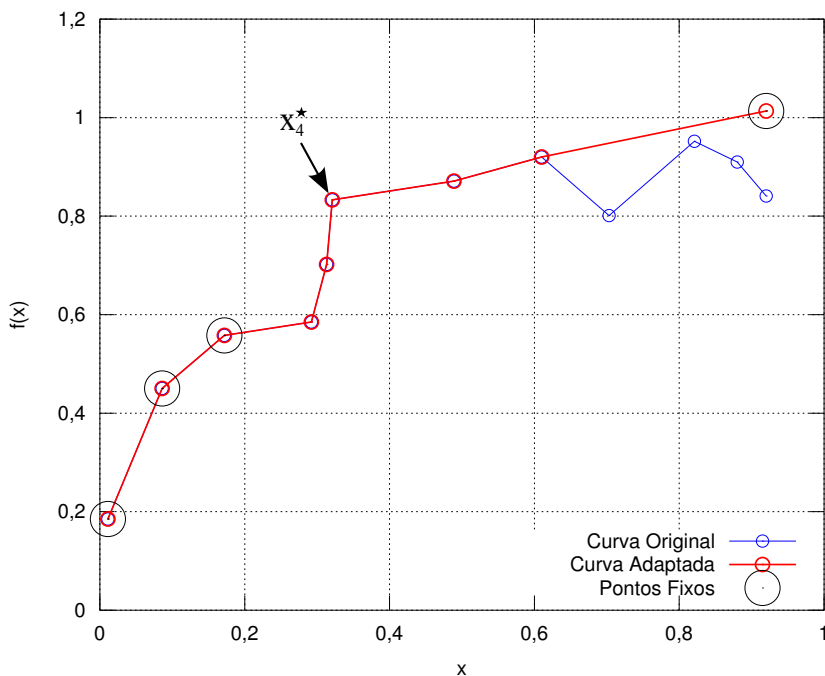


Figura 24 – Aproximação \tilde{f} para função f na iteração 4 (última) usando a heurística linear com pontos fixos.

Verifica-se que a heurística linear com pontos fixos encontrou o ótimo da função objetivo $\max : f(x) - x$. O comportamento da adaptação foi semelhante ao da heurística linear, porém fixando um subconjunto de *breakpoints*.

2.3.3 Heurística Logarítmica

Na heurística logarítmica, os intervalos da adaptação \tilde{L} é que são subdivididos de acordo com a localização do ponto ótimo da iteração corrente. Com isso, visa-se adaptar os intervalos próximos ao ponto ótimo. Seu nome foi inspirado no comportamento observado da heurística em funcionamento: os intervalos próximos ao ótimo são subdivididos até que se atinga o ótimo, semelhante à busca binária.

Seja l_{k,i^*} o intervalo onde foi encontrado o ponto ótimo, na iteração k , ou seja, $x_k^* \in l_{k,i^*}$. Este intervalo é determinado pelos pares de *breakpoints* $(x_{j_start}, \tilde{y}_i)$ e $(x_{j_end}, \tilde{y}_{i+1})$. Observe que os índices j_start e j_end referem-se aos *breakpoints* da função original, mapeados nos valores da adaptação.

Seja também N_{k,i^*} o conjunto de *breakpoints* da função original contidos no domínio de l_{k,i^*} e j_close_to o *breakpoint* da função original próximo ao ponto ótimo.

No caso geral l_{k,i^*} pode ser subdividido em dois intervalos: à esquerda do ponto ótimo, entre x_{j_start} e $x_{j_close_to}$ e à direita, $x_{j_close_to}$ e x_{j_end} . Cada subintervalo é subdividido pela inserção de 3 *breakpoints* próximos à sua metade, resultando num total de 6 *breakpoints* inseridos. Assim como na seção anterior, adiciona-se suficientes graus de liberdade para que a adaptação coincida com a curva real quando for realizada próxima ao ponto ótimo.

Caso j_close_to coincida com o início ou fim do intervalo l_{k,i^*} , i.e. $j_close_to == j_start$ ou $j_close_to == j_end$, são adicionados *breakpoints* na metade do intervalo precedente, l_{k,i^*-1} , ou sucessor l_{k,i^*+1} , caso existam tais intervalos:

Algorithm 3: Heurística logarítmica para determinar os *breakpoints* da próxima adaptação f , a partir do ponto ótimo x_k^* .

input: x_k^* , \tilde{X}_k , l_{k,i^*} , N_{k,i^*}

$B_k := \{\}$

$j_start := \min\{j \in N_{k,i^*}\}$

$j_end := \max\{j \in N_{k,i^*}\}$

$j_close_to := \min\{j \in N_{k,i^*} : x_k^* \leq x_j\}$

if $j_start == j_close_to$ **then**

$\lfloor j_half := \lfloor \text{avg}(\min\{j \in N_{k,j^*-1}\}, \max\{j \in N_{k,j^*-1}\}) \rfloor$

else

$\lfloor j_half := \lfloor \text{avg}(j_start, j_close_to) \rfloor$

$B_k := \{x_{j_half-1}, x_{j_half}, x_{j_half+1}\}$

if $j_close_to == j_end$ **then**

$\lceil j_half := \lceil \text{avg}(\min\{j \in N_{k,i^*+1}\}, \max\{j \in N_{k,i^*+1}\}) \rceil$

else

$\lceil j_half := \lceil \text{avg}(j_close_to, j_end) \rceil$

$B_k := B_k \cup \{x_{j_half-1}, x_{j_half}, x_{j_half+1}\}$

$\tilde{X}_{k+1} := \tilde{X}_k \cup B_k$

return \tilde{X}_{k+1}

onde :

- o índice k indica a k -ésima iteração;
- \tilde{X}_k e \tilde{X}_{k+1} são os *breakpoints* da curva adaptada na última iteração e os *breakpoints* para gerar a adaptação da próxima iteração;
- a variável x_k^* é o ponto onde foi encontrado o ótimo na curva adaptada, contido no intervalo l_{k,i^*} da adaptação;
- a conjunto N_{k,i^*} contém os índices dos *breakpoints* da função original na k -ésima iteração, contidos no domínio de l_{k,i^*} ;
- a conjunto B_k é composto pelos *breakpoints* que serão adicionados para gerar a próxima adaptação;
- os índices de *breakpoints* j_start e j_end curva original determinam o intervalo l_{k,i^*} . I.e. o domínio de l_{k,i^*} é o intervalo entre x_{j_start} e x_{j_end} ;

- o índice j_close_to é o *breakpoint* da função original próximo ao ponto ótimo encontrado na iteração corrente, *i.e.* $x_{j_close_to}$ é próximo à x_k^*
- $[\cdot]$ e $\lfloor \cdot \rfloor$ são as funções chão e teto, respectivamente e avg a média aritmética (*average*);
- a variável temporária j_half ora estabelece aproximadamente a metade do intervalo à esquerda do ponto ótimo x_k^* , ora à direita.

Esta heurística foi implementada em AMPL, sendo o resultado apresentado nas figuras 25, 26, 27, 28.

A aproximação inicial é o segmento de reta, o mesmo das heurísticas anteriores, assim como o ponto ótimo $f(x_0^*) = (0,01;0,74)$. Ambos são apresentados na Figura 25.

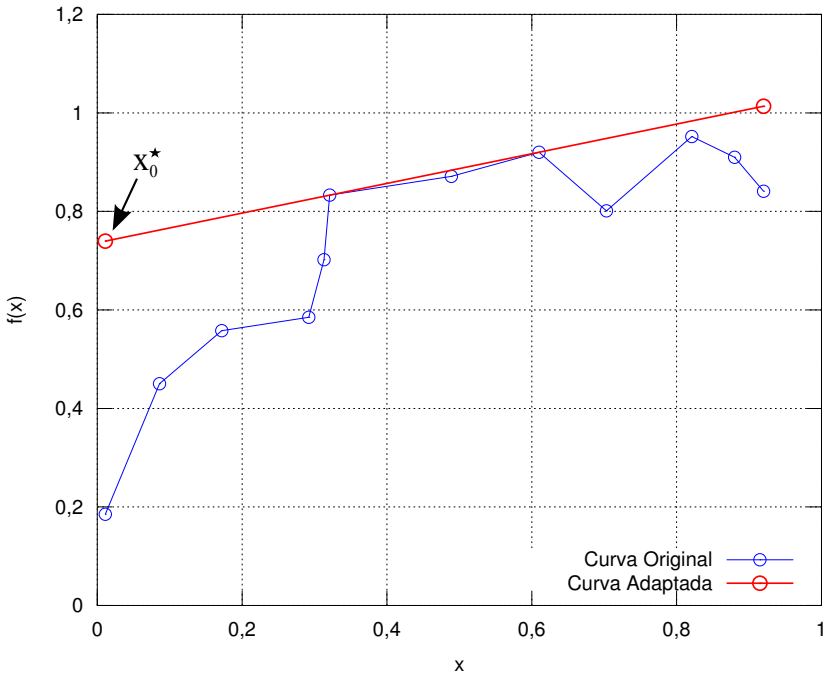


Figura 25 – Aproximação inicial \tilde{f} para a função f .

O ponto ótimo encontrado na aproximação inicial é o início do intervalo da adaptação. Como não há intervalos a esquerda do ponto ótimo, apenas o intervalo à direita é subdividido.

Este intervalo é subdividido próximo ao meio por 3 *breakpoints*: $\{0,32; 0,50; 0,61\}$, resultando no novo conjunto para a adaptação $\tilde{X}_1 := \{0,01; 0,32; 0,50; 0,61; 0,92\}$. Na nova adaptação, apresentado na Figura 26, o ponto ótimo encontrado é $(x_1^*; f(x_1^*)) = (0,32; 0,83)$.

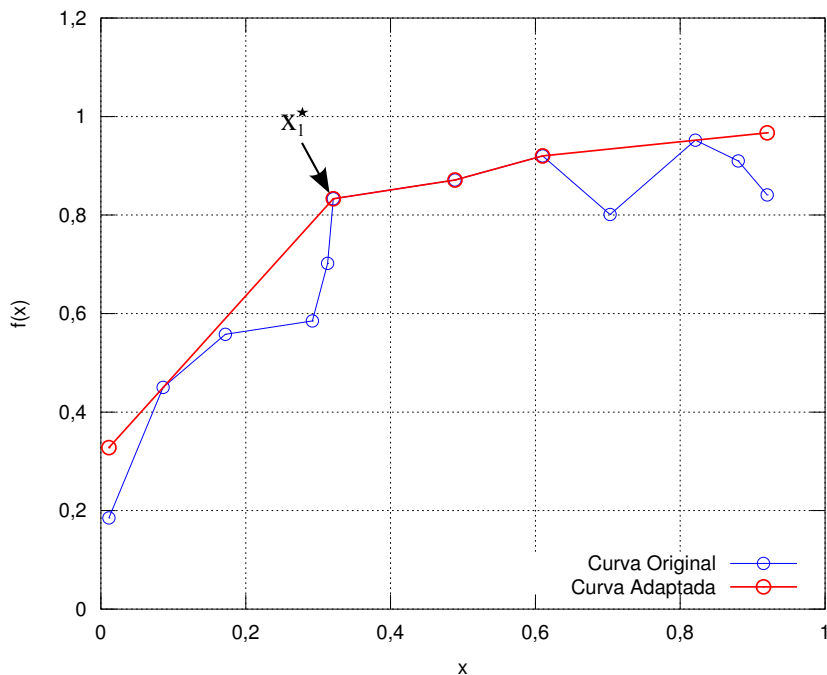


Figura 26 – Aproximação \tilde{f} para função a f na iteração 1 usando a heurística logarítmica.

Na iteração seguinte, os intervalos à esquerda e à direita do ponto ótimo são subdivididos. O intervalo da esquerda é subdividido pelos *breakpoints* $\{0,09; 0,17; 0,29\}$ e à direita pelos mesmos $\{0,32; 0,50; 0,61\}$. Com isso $\tilde{X}_2 := \{0,01; 0,09; 0,17; 0,29; 0,32; 0,50; 0,61; 0,92\}$, sendo a adaptação apresentada na Figura 27, com o ótimo em $(x_2^*; f(x_2^*)) = (0,32; 0,83)$

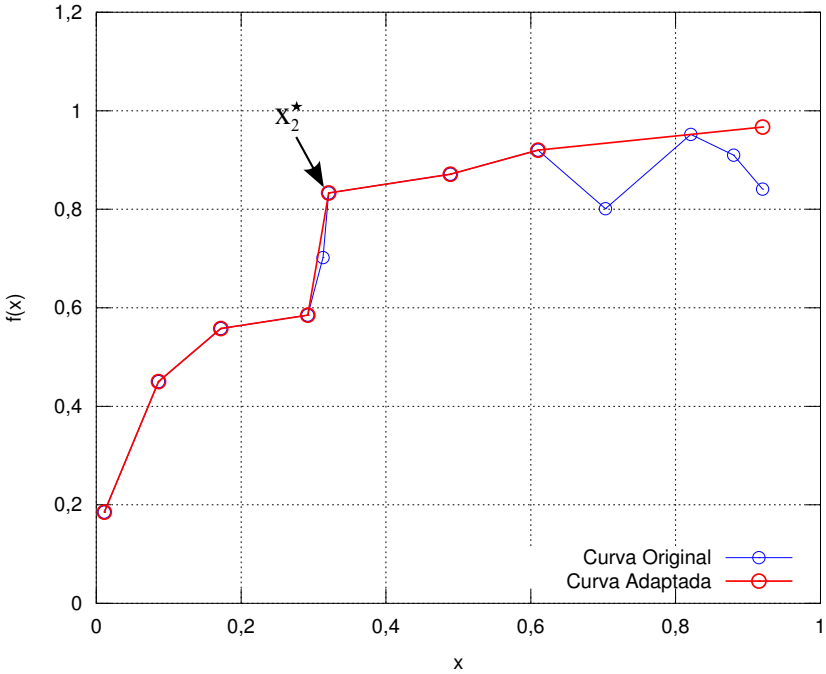


Figura 27 – Aproximação \tilde{f} para função a f na iteração 2 usando a heurística logarítmica.

Na última iteração, o intervalo à esquerda é dividido por $\{0,29; 0,31; 0,32\}$ e à direita por $\{0,32; 0,50; 0,61\}$. O algoritmo converge com a adaptação gerada pelos *breakpoints* $\tilde{X}_3 := \{0,01; 0,09; 0,17; 0,29; 0,31; 0,32; 0,50; 0,61; 0,92\}$, sendo encontrado o ponto ótimo $(x_3^*; f(x_3^*)) = (0,32; 0,83)$ — Figura 28.

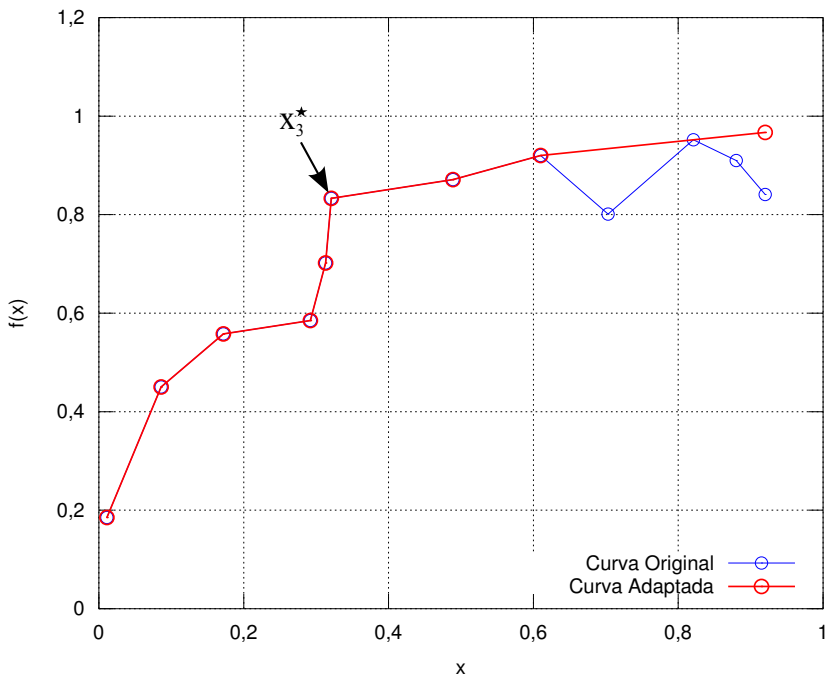


Figura 28 – Aproximação \tilde{f} para a função f na iteração 3 (última) usando a heurística logarítmica.

2.4 SUMÁRIO

Neste capítulo foi apresentada a Linearização por Partes Unidimensional. Na primeira parte é apresentada Linearização por Partes para funções unidimensionais. São revisados os modelos por Combinação Convexa (CC), Modelo Incremental (MI) e modelo por Combinação Convexa Desagregada (DCC).

Em seguida, é formulado o problema de adaptação de uma função linear por partes. A adaptação deve minimizar o erro e superestimar a função

original. Esta formulação é então verificada na adaptação de um curva linear por partes, sendo então integrada a um problema de otimização.

Para realizar a integração da adaptação com o problema de otimização são propostas 3 heurísticas: heurística linear, heurística linear fixando pontos e heurística logarítmica. A partir do ponto ótimo, as heurísticas estabelecem os *breakpoints* para gerar a próxima adaptação.

A heurística linear visa adaptar a região no entorno do ponto ótimo pela adição de *breakpoints* da função original no entorno do mesmo. A heurística linear fixando os pontos é semelhante à linear, porém fixa os pontos distantes do ótimo com o objetivo de reduzir e simplificar o problema de adaptação. Por último é apresentada a heurística logarítmica, cuja abordagem adapta a curva de uma maneira mais ampla e não só na região do ótimo. Isto ocorre, pois com ela os intervalos no entorno do ponto ótimo são subdivididos para gerar a nova adaptação.

As heurísticas foram então aplicadas em exemplos simples sendo verificado seu funcionamento. Assim é estabelecida a Linearização por Partes Adaptativa Unidimensional.

3 ANÁLISE COMPUTACIONAL

Neste capítulo é apresentada a formulação matemática do problema de otimização da produção de campos de petróleo, operados por injeção contínua de gás e sujeitos a restrições operacionais. Estes modelos são então otimizados usando a LPA, sendo o objetivo maximizar o lucro na operação de extração de petróleo e gás. Isto é realizado usando as diferentes heurísticas de adaptação apresentadas nas Seções 2.3.1, 2.3.2 e 2.3.3.

Os resultados destas otimizações são apresentados, seguidos da discussão dos mesmos.

3.1 MODELOS

Nesta seção são apresentados os modelos dos campos de petróleo utilizados na Análise Computacional. Primeiro é apresentado o modelo não-linear e sua formulação linearizada por partes. A partir desta última, para integrar à LPA, são formulados dois modelos: por aproximação e por relaxação.

3.1.1 Modelo Não-Linear

O problema de otimizar a produção de um grupo de poços de petróleo, operando com injeção contínua de gás e com redundância nas linhas de produção e de separadores consiste em distribuir uma vazão limitada de gás de injeção, sob múltiplas restrições e com seleção de unidades de separação. Na modelagem, são feitas as seguintes considerações:

- as pressões nos separadores são iguais;
- as CDPs são diferentes para cada poço, mas permanecem a mesma independente do alinhamento;
- não existe perda de carga nas linhas.

Na Figura 29 é apresentado um diagrama do campo que é formulado em programação matemática da seguinte maneira (CODAS, 2011):

$$P: \quad \max \quad f = \sum_{n \in \mathcal{N}} f_n(q_i^n) \quad (3.1a)$$

$$\text{s.a:} \quad \sum_{n \in \mathcal{N}} q_i^n \leq q_i^{\max} \quad (3.1b)$$

Para todo $n \in \mathcal{N}$:

$$l_n y_n \leq q_i^n \leq u_n y_n \quad (3.1c)$$

$$\sum_{s \in \mathcal{S}_n} z_{n,s} = y_n \quad (3.1d)$$

$$\sum_{s \in \mathcal{S}_n} q_h^{n,s} = q_h^n(q_i^n), h \in \mathcal{H} \quad (3.1e)$$

$$0 \leq q_h^{n,s} \leq q_h^{s,\max} z_{n,s}, s \in \mathcal{S}_n, h \in \mathcal{H} \quad (3.1f)$$

$$\sum_{n \in \mathcal{N}_s} q_h^{n,s} \leq q_h^{s,\max}, s \in \mathcal{S}, h \in \mathcal{H} \quad (3.1g)$$

$$y_n \in \{0, 1\}, n \in \mathcal{N} \quad (3.1h)$$

$$z_{n,s} \in \{0, 1\}, n \in \mathcal{N}, s \in \mathcal{S}_n \quad (3.1i)$$

onde os parâmetros são:

- N é o número total de poços considerados no problema, $\mathcal{N} = \{1, \dots, N\}$, sendo $\mathcal{N}_s \subseteq \mathcal{N}$ o conjunto de poços cuja produção pode ser enviada ao separador s ;
- S é o número total de separadores aos quais a produção é enviada, $\mathcal{S} = \{1, \dots, S\}$ e $\mathcal{S}_n \subseteq \mathcal{S}$ é o conjunto de separadores que podem receber a produção do poço n ;
- $\mathcal{H} = \{o, g, w, p\}$ contém a produção (p) e as vazões multifásicas de óleo (o), gás (g) e água (w);
- q_i^{\max} é a vazão de gás de injeção disponível para distribuição entre os N poços;
- $q_p^{s,\max}$, $q_o^{s,\max}$, $q_g^{s,\max}$ e $q_w^{s,\max}$ são as capacidades de separação e os limites de tratamento de óleo, gás e água, para o separador s , respectivamente;
- l_n (u_n) é o limite inferior (superior) de vazão de injeção de gás do poço n devido a questões técnicas ou estratégicas, como a estabilidade da produção e limites de pressão de fundo.

e as variáveis:

- f é a função objetivo que representa o ganho econômico da produção.
- q_i^n é a vazão de injeção alocada ao poço n .
- $q_h^{n,s}$ é a vazão de fase h proveniente do poço n direcionada ao separador s , a qual depende da curva de desempenho do poço dada por $q_h^n(q_i^n)$.
- $f_n(q_i^n) = p_o q_o^n(q_i^n) + p_g q_g^n(q_i^n) - p_w q_w^n(q_i^n) - p_i q_i^n$ é a função ganho para o poço n . Onde, p_o e p_g representam o lucro obtido pela venda de um barril padrão de óleo e gás, respectivamente, p_w é o custo de tratamento de um barril padrão de água antes do descarte e p_i é o custo de injeção de gás por cada unidade de volume de gás de injeção.
- y_n é a variável binária que assume o valor 1 se o poço n é ativado e 0 caso contrário.
- $z_{n,s}$ assume o valor 1 se a produção do poço n será enviada ao separador s e 0 caso contrário.

Os limites de compressão de gás de injeção, da vazão de injeção nos poços e de capacidade de separação de óleo, gás e água são estabelecidos pelas restrições (3.1b), (3.1c) e (3.1g), respectivamente.

O alinhamento dos poços para os separadores são determinados pelas restrições (3.1d)-(3.1f) que garantem que a produção de um poço é enviada para somente um separador. A produção do poço n enviada ao separador s é nula quando $z_{n,s} = 0$. Caso contrário, ela é limitada pela capacidade máxima e mínima do poço ou do separador.

O problema de distribuição de gás de injeção com alinhamento poço-separador é do tipo não linear inteiro-misto. Devido às características não lineares das Curvas de Desempenho dos Poços (do inglês, *Well Performance Curve*, WPC) q_h^n e às variáveis discretas, é um problema de considerável dificuldade computacional. Em (CAMPONOGARA; NAKASHIMA, 2006) é mostrado que o problema é NP-difícil, pois o problema clássico da mochila é redutível ao problema P em tempo e espaço polinomial.

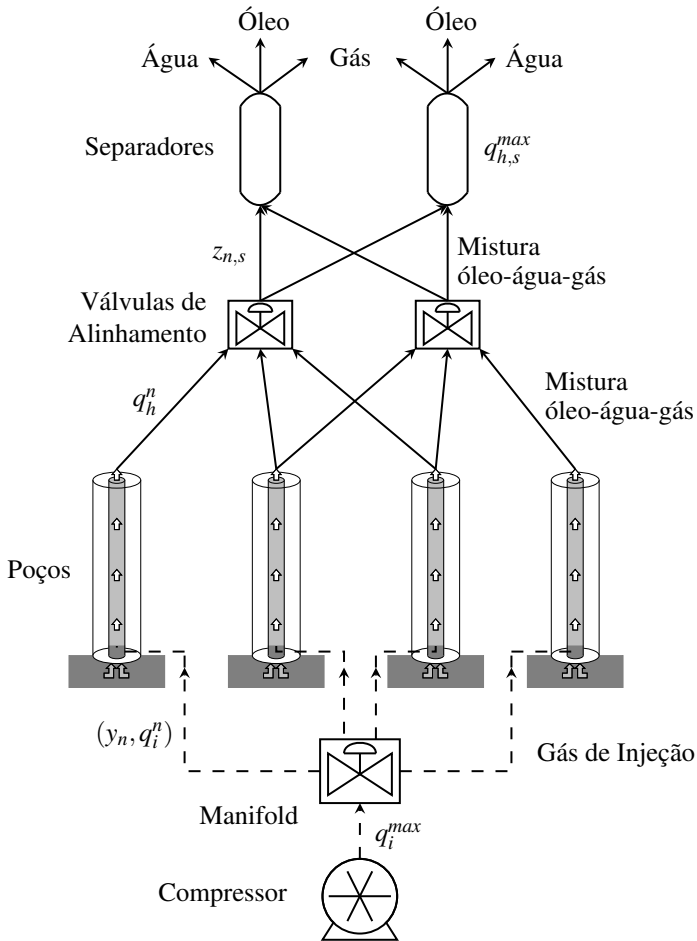


Figura 29 – Esquema ilustrativo de um campo de petróleo com processo de extração por *gas-lift* para formulação do modelo em programação matemática.

3.1.2 Modelo Linearizado por Partes

As Curvas de Desempenho dos Poços são então linearizadas por partes, seguindo o modelo com variáveis integradas proposto por Codas (CODAS, 2011).

Neste modelo, a Curva de Desempenho do Poço é linearizada utilizando a formulação convexa desagregada DCC. A variável de ativação do intervalo da curva é integrado à variável $z_{n,s}$, se tornando $\zeta_k^{n,s}$:

$$\tilde{P}: \quad \max \quad \tilde{f} = \sum_{n \in \mathcal{N}} \tilde{f}_n(q_i^n) \quad (3.2a)$$

$$\text{s.a:} \quad \sum_{n \in \mathcal{N}} q_i^n \leq q_i^{\max} \quad (3.2b)$$

Para todo $n \in \mathcal{N}$:

$$\tilde{q}_h^{n,s} = \sum_{k \in \mathcal{K}} \left(\lambda_{E,k}^{n,s} q_{h,k}^n + \lambda_{D,k}^{n,s} q_{h,k+1}^n \right), s \in \mathcal{S}_n, h \in \mathcal{H} \quad (3.2c)$$

$$q_i^n = \sum_{s \in \mathcal{S}_n} \sum_{k \in \mathcal{K}} \left(\lambda_{E,k}^{n,s} q_{i,k}^n + \lambda_{D,k}^{n,s} q_{i,k+1}^n \right) \quad (3.2d)$$

$$\sum_{s \in \mathcal{S}_n} \sum_{k \in \mathcal{K}} \zeta_k^{n,s} = y_n \quad (3.2e)$$

$$\lambda_{E,k}^{n,s} + \lambda_{D,k}^{n,s} = \zeta_k^{n,s}, s \in \mathcal{S}_n, k \in \mathcal{K} \quad (3.2f)$$

$$0 \leq \lambda_{E,k}^{n,s}, \lambda_{D,k}^{n,s} \leq 1, s \in \mathcal{S}_n, k \in \mathcal{K} \quad (3.2g)$$

$$\sum_{n \in \mathcal{N}_s} \tilde{q}_h^{n,s} \leq q_h^{s,\max}, s \in \mathcal{S}, h \in \mathcal{H} \quad (3.2h)$$

$$y_n \in \{0, 1\}, n \in \mathcal{N} \quad (3.2i)$$

$$\zeta_k^{n,s} \in \{0, 1\}, n \in \mathcal{N}, s \in \mathcal{S}_n, k \in \mathcal{K} \quad (3.2j)$$

As equações (3.2c) à (3.2h) são resultantes da aplicação da linearização por parte na função objetivo (3.1a) e nas funções q_h^n dos poços, (3.1c) à (3.1f), da formulação não-linear, onde:

- $(q_{i,k}^n, q_{h,k}^n)$ é o $k^{\text{ésimo}}$ ponto de amostragem da Curva de Desempenho do Poço n , onde $q_{i,k}^n$ é a vazão de gás injetada e $q_{h,k}^n$ é a vazão de cada uma das fases $h \in \mathcal{H}$ que saem do poço;
- $\mathcal{K} = \{1, \dots, K-1\}$ é o conjunto de intervalos gerados pela amostragem da Curva de Desempenho do Poço, sendo K o número de pontos de amostragem da CDP, $q_h^n(q_i^n)$;

- $q_p^{s,\max}$, $q_o^{s,\max}$, $q_g^{s,\max}$ e $q_w^{s,\max}$ são as capacidades de separação e os limites de tratamento de óleo, gás e água para o separador s , respectivamente;

e as variáveis

- $\tilde{f}_n(q_i^n)$ é a função ganho para o poço n ;
- \tilde{q}_h^n é a vazão de fluido de fase h do poço n aproximada pela função linear por partes;
- $\tilde{q}_h^{n,s}$ é a vazão de fluido de fase h do poço n ao separador s aproximada pela função linear por partes;
- $\lambda_{E,k}^n$, $\lambda_{D,k}^n$ e ζ_k^n são variáveis auxiliares utilizadas para realizar a linearização por partes das curvas pelo modelo DCC;
- q_i^n é a vazão de injeção alocada ao poço n ;
- $\zeta_k^{n,s}$ assume o valor 1 se a produção do poço n é direcionada ao separador s , sendo a produção aproximada pelo k -ésimo intervalo da aproximação linear por partes.

A equação (3.2b) garante que a quantidade de gás injetado é inferior a vazão máxima produzida pelo compressor. O alinhamento poço-separador é determinado pelas restrições (3.2e) e (3.2i), garantindo que a produção de um poço ativo é enviada para somente um separador.

3.1.3 Modelo com Linearização por Partes Adaptativa

Com base no modelo linearizado, é aplicada a linearização por partes adaptativa descrita no Capítulo 2, onde são geradas super e subestimções para a Curva de Desempenho do Poço, (3.2c) e (3.2d). São estabelecidos dois modelos para o problema de otimização da produção de petróleo e gás, um denominado modelo por aproximação e o outro, por relaxação.

Em ambos modelos, a aproximação inicial de cada CDP foi feito subdividindo o domínio da função em aproximadamente 3 partes iguais, sendo incluído o segundo *breakpoint* da curva original:

$$\tilde{X}_1^n := \{x_1, x_2, x_{m/3}, x_{2m/3}, x_m\}, n \in \mathcal{N} \quad (3.3a)$$

Ao subdividir o domínio em 3 partes, espera-se gerar uma boa aproximação inicial. A inserção do segundo *breakpoint* x_2 da curva original se deve ao seguinte fenômeno observado: algumas adaptações que superestimavam

os valores da produção tinham valores acima dos limites de tratamento dos separadores. Assim, o respectivo poço não era ativado, e por não contribuir para o objetivo ótimo, sua curva não era adaptada. De certa forma, parte do domínio do problema se tornava infactível.

Com base nestes *breakpoints* iniciais foram geradas super e subestimções das curvas de produção, sendo construído dois novos modelos do campo de petróleo.

3.1.3.1 Modelo com Linearização por Partes Adaptativa por Aproximação

O objetivo deste modelo é gerar soluções factíveis em todas etapas do processo de adaptação das curvas. Para isso, é usada uma abordagem conservadora, subestimando receitas, superestimando custos e variáveis sujeitas às restrições. Em qualquer iteração, a solução obtida pode ser implementada na prática, sendo obtido um lucro maior que o estimado e folga nas restrições:

$$\tilde{P}_{approx} : \quad \max \quad \tilde{f} = \sum_{n \in \mathcal{N}} \left(p_o \tilde{q}_o^n + p_g \tilde{q}_g^n - p_w \tilde{q}_w^n - p_i q_i^n \right) \quad (3.4a)$$

$$\text{s.a:} \quad \sum_{n \in \mathcal{N}} q_i^n \leq q_i^{\max} \quad (3.4b)$$

Para todo $n \in \mathcal{N}$:

$$q_i^n = \sum_{s \in \mathcal{S}_n} \sum_{l \in \tilde{L}^n} \left(\lambda_{E,l}^{n,s} \cdot q_{i,l}^n + \lambda_{D,l}^{n,s} \cdot q_{i,l+1}^n \right) \quad (3.4c)$$

$$\overline{q}_h^n = \sum_{l \in \tilde{L}^n} \left(\lambda_{E,l}^{n,s} \cdot \overline{q}_{h,l}^n + \lambda_{D,l}^{n,s} \cdot \overline{q}_{h,l+1}^n \right), s \in \mathcal{S}_n, h \in \mathcal{H} \quad (3.4d)$$

$$\underline{q}_h^n = \sum_{l \in \tilde{L}^n} \left(\lambda_{E,l}^{n,s} \cdot \underline{q}_{h,l}^n + \lambda_{D,l}^{n,s} \cdot \underline{q}_{h,l+1}^n \right), s \in \mathcal{S}_n, h \in \mathcal{H} \quad (3.4e)$$

$$\sum_{s \in \mathcal{S}_n} \sum_{l \in \tilde{L}^n} \zeta_l^{n,s} = y_n \quad (3.4f)$$

$$\lambda_{E,l}^{n,s} + \lambda_{D,l}^{n,s} = \zeta_l^{n,s}, s \in \mathcal{S}_n, l \in \tilde{L}^n \quad (3.4g)$$

$$0 \leq \lambda_{E,l}^{n,s}, \lambda_{D,l}^{n,s} \leq 1, s \in \mathcal{S}_n, l \in \tilde{L}^n \quad (3.4h)$$

$$\sum_{n \in \mathcal{N}_s} \overline{q}_h^{n,s} \leq q_h^{s,\max}, s \in \mathcal{S}, h \in \mathcal{H} \quad (3.4i)$$

$$y_n \in \{0, 1\}, n \in \mathcal{N} \quad (3.4j)$$

$$\zeta_l^{n,s} \in \{0, 1\}, n \in \mathcal{N}, s \in \mathcal{S}_n, l \in \tilde{L}^n \quad (3.4k)$$

onde

- $\underline{q}_h^n = \sum_{s \in \mathcal{S}_n} \underline{q}_h^{n,s}$, $h \in \mathcal{H}$ é a subestimação da produção da fase h no poço n e \overline{q}_h^n é a subestimação da produção de fase h , no poço n , direcionada ao separador s ;
- $\overline{q}_h^n = \sum_{s \in \mathcal{S}_n} \overline{q}_h^{n,s}$, $h \in \mathcal{H}$ é a superestimação da produção de fase h no poço n e $\underline{q}_h^{n,s}$ é a superestimação da produção de fase h , no poço n , direcionada ao separador s ;
- \tilde{L}_n é o conjunto de intervalos gerados pela linearização por partes adaptativa para o poço n ;
- $q_{i,l}^n$ são os *breakpoints* de injeção de gás selecionados pela linearização

por partes adaptativa para gerar a adaptação para o poço n ;

- $\overline{q_{h,l}^n}$ são os *breakpoints* da curva adaptada, gerados pela LPA, que subestimam a produção da fase h no poço n ;
- $\overline{q_{h,l}^n}$ são os *breakpoints* da curva adaptada, gerados pela LPA, que superestimam a produção da fase h no poço n .

3.1.3.2 Modelo com Linearização por Partes Adaptativa por Relaxação

O segundo modelo proposto é uma relaxação do problema original, que em (WOLSEY, 1998) é definido da seguinte forma:

Definição 1. *Seja um problema P definido por $z = \max\{c(x) : x \in X \subseteq \mathcal{R}^n\}$, onde X é o domínio da função deste problema genérico. Uma relaxação de P é dada por $RP : z^R = \max\{f(x) : x \in T \subseteq \mathcal{R}^n\}$, se:*

1. $X \subseteq T$;
2. $f(x) \geq c(x)$ para todo $x \in X$.

Em outras palavras, a relaxação é uma reformulação do problema original, na qual o domínio do problema pode ser aumentado e para o qual é definida uma função que, caso o problema seja de maximização, superestima a função objetivo em todos os pontos do novo domínio. Caso o problema seja de minimização, a função deve subestimar a função objetivo.

A partir da relaxação, às vezes é possível provar otimalidade:

Proposição 1. *Seja x^* é uma solução ótima de RP . Se $x^* \in X$ e $f(x^*) = c(x^*)$, então x^* é uma solução ótima do problema original P .*

Demonstração. Como $x^* \in X$, $z \geq c(x^*) = f(x^*) = z^R$. Como $z \leq z^R$, obtém-se $c(x^*) = z = z^R$. □

Ou seja, se um ponto ótimo é encontrado na relaxação e este coincide com um valor no problema original, então garante-se que foi encontrado um ponto ótimo do problema original.

Conforme mencionado, a linearização por partes adaptativa gera super e subestimações das fases extraídas e como a função objetivo é calculada diretamente a partir destes valores, é possível reformular o problema como uma relaxação. Para isto, os ganhos econômicos definido pela função objetivo, dado pela produção de óleo e água, são superestimadas e o custo de tratamento de água, subestimado. O gás de injeção não possui nem super,

nem subestimação, pois é uma variável controlável. Para aumentar o domínio do problema, a vazão direcionada aos separadores é subestimada.

Isto resulta na seguinte formulação, onde, em relação a formulação anterior, apenas as equações (3.5a) e (3.5i) foram reformuladas:

$$\tilde{P}_{relax} : \quad \max \quad \tilde{f} = \sum_{n \in \mathcal{N}} \left(p_o \bar{q}_o^n + p_g \bar{q}_g^n - p_w \bar{q}_w^n - p_i q_i^n \right) \quad (3.5a)$$

$$\text{s.a : } \sum_{n \in \mathcal{N}} q_i^n \leq q_i^{\max} \quad (3.5b)$$

Para todo $n \in \mathcal{N}$:

$$q_i^n = \sum_{s \in \mathcal{S}_n} \sum_{l \in \tilde{L}^n} \left(\lambda_{E,l}^{n,s} \cdot q_{i,l}^n + \lambda_{D,l}^{n,s} \cdot q_{i,l+1}^n \right) \quad (3.5c)$$

$$\bar{q}_h^{n,s} = \sum_{l \in \tilde{L}^n} \left(\lambda_{E,l}^{n,s} \cdot \bar{q}_{h,l}^n + \lambda_{D,l}^{n,s} \cdot \bar{q}_{h,l+1}^n \right), \quad s \in \mathcal{S}_n, h \in \mathcal{H} \quad (3.5d)$$

$$\underline{q}_h^{n,s} = \sum_{l \in \tilde{L}^n} \left(\lambda_{E,l}^{n,s} \cdot \underline{q}_{h,l}^n + \lambda_{D,l}^{n,s} \cdot \underline{q}_{h,l+1}^n \right), \quad s \in \mathcal{S}_n, h \in \mathcal{H} \quad (3.5e)$$

$$\sum_{s \in \mathcal{S}_n} \sum_{l \in \tilde{L}^n} \zeta_l^{n,s} = y_n \quad (3.5f)$$

$$\lambda_{E,l}^{n,s} + \lambda_{D,l}^{n,s} = \zeta_l^{n,s}, \quad s \in \mathcal{S}_n, l \in \tilde{L}^n \quad (3.5g)$$

$$0 \leq \lambda_{E,l}^{n,s}, \lambda_{D,l}^{n,s} \leq 1, \quad s \in \mathcal{S}_n, l \in \tilde{L}^n \quad (3.5h)$$

$$\sum_{n \in \mathcal{N}_s} \bar{q}_h^{n,s} \leq q_h^{s,\max}, \quad s \in \mathcal{S}, h \in \mathcal{H} \quad (3.5i)$$

$$y_n \in \{0, 1\}, \quad n \in \mathcal{N} \quad (3.5j)$$

$$\zeta_l^{n,s} \in \{0, 1\}, \quad n \in \mathcal{N}, s \in \mathcal{S}_n, l \in \tilde{L}^n \quad (3.5k)$$

Com esta formulação, quando a LPA convergir para o ponto ótimo, as CDPs estão adaptadas no entorno do ponto ótimo e coincidem com a curva original. Com isso, tem-se a garantia de que foi encontrado o ótimo também do problema original.

3.2 RESULTADOS

As duas formulações do problema de otimização do campo de petróleo com linearização por partes adaptativas foram então aplicadas a diversos cenários de campos de petróleo. Foram empregadas as 3 heurísticas, apresen-

tadas nas Seções 2.3.1, 2.3.2 e 2.3.3, à saber: a heurística linear; a linear com pontos fixos e a logarítmica.

Primeiro são apresentados os cenários instanciados. Em seguida são apresentados os valores ótimos obtidos, assim como um comparativo dos tempos computacionais. Por último é feita uma discussão sobre os resultados.

3.2.1 Cenários

Os cenários usados no problema de otimização possuem 3 características:

1. Tipo de curva do poço: côncava (c) ou não-côncava (s).
2. Quantidade de poços no campo: $N = 32, 64$ ou 128 .
3. Disponibilidade de gás: baixa (l), média (m) ou alta (m).

Em todos os cenários existem 3 separadores para o qual é direcionada a produção. Considera-se que a pressão nos separadores é igual. As Curvas de Desempenho dos Poços quando côncavas são funções lineares por partes compostas por 60 pontos e quando não côncavas, são lineares por partes compostas por 19 pontos. Os parâmetros das instâncias podem ser encontrados em (CODAS; CAMPONOVARA, 2011).

Na apresentação dos resultados, o cenário é identificado pela sigla composta pelo tipo de curva, quantidade de poços e disponibilidade de gás. Por exemplo, o cenário com as curvas côncavas, 32 poços e com disponibilidade média é denominado $c32m$.

Os problemas foram resolvidos usando AMPL 20100928 e o solver CPLEX 11.2.1. O equipamento usado foi um Pentium Dual-Core 2.6Ghz, com memória de 3Gb RAM, sistema operacional Ubuntu 12.04 64-bits e Kernel 3.2.0-31-generic.

3.2.2 Premissas para Avaliar os Resultados

Neste trabalho, o processo de adaptação das curvas foi realizado em série, *i.e.* primeiro uma curva era adaptada, depois outra, depois outra, *etc.*. Contudo, este procedimento é paralelizável, uma vez que a adaptação de cada curva é independente das outras. Assim, foi estimado o tempo de adaptação, caso o processo fosse paralelizado.

Esta estimativa é feita pelo tempo médio de adaptação de cada curva. Por exemplo, se num problema, para alcançar o ponto ótimo foram necessárias 4 iterações, sendo adaptadas um total de 20 curvas, num tempo total de 40s, considera-se que o tempo de adaptação em cada iteração foi de $40s/20$ curvas = $2s/curva$. Como foram necessárias 4 iterações, o tempo total de adaptação é estimado em 4 iterações $\times 2s = 8s$. Além disto, foi desconsiderado o tempo da primeira iteração, pois considera-se que este é realizado *offline* e faz parte do modelo do campo de petróleo.

Além disso foi estabelecido um limite de 10.000 segundos para a resolução do problema de otimização em uma dada iteração. Também foi estabelecido um máximo de 20 iterações de adaptação para cada cenário.

3.2.3 Indicadores

Para avaliar a linearização por partes adaptativa foi definido como referência o tempo computacional e o ótimo encontrado ao resolver o problema de otimização sem LPA — o modelo da Seção 3.1.2. A partir destes valores foram estabelecidos os seguintes indicadores, por exemplo a razão entre o valor da função objetivo encontrado usando a LPA e sem usar a LPA:

$$\frac{\text{Objetivo encontrado com LPA}}{\text{Objetivo encontrado sem LPA}} = \frac{\text{Objetivo}}{s/LPA} \quad (3.6a)$$

Com este indicador, espera-se verificar quão próximo do ótimo global foi a solução encontrada pela LPA.

Outro indicador é a razão entre o tempo computacional total usando a LPA e sem a LPA

$$\frac{\text{Tempo Total usando LPA}}{\text{Tempo Total sem LPA}} = \frac{T.T}{s/LPA} \quad (3.7a)$$

Os tempos computacionais ditos totais são a soma do tempo dispendido ao longo de todas as iterações, seja para resolver o problema de otimização, seja para realizar a adaptação das curvas. Este indicador avalia quantas vezes a

LPA foi mais (ou menos) rápida para resolver o problema de otimização do que uma resolução convencional.

O último indicador é a razão entre os tempos computacionais para resolver o último problema de otimização — quando converge — e o tempo de resolução sem LPA:

$$\frac{\text{Tempo Computacional para a Última Otimização}}{\text{Tempo Total sem LPA}} = \frac{\text{Ú.O.}}{s/\text{LPA}} \quad (3.8a)$$

Com esta métrica espera-se verificar se o modelo adaptado final é mais simples do que o modelo original. Ou seja, se o problema de otimização com o último modelo adaptado é resolvido em menos tempo do que o modelo original.

3.2.4 Resultados sem uso da LPA

Na Tabela 1 é apresentado o resultado da resolução do problema de otimização sem usar a LPA.

Observa-se que mesmo com uma menor quantidade de pontos, os cenários de curvas não-côncavas possuem tempo de resolução superior ou próximo ao de curvas côncavas. Isto se deve à complexidade matemática da resolução de problemas não convexos. Além disso, observa-se que os modelos com 128 poços e baixa disponibilidade possuem tempos computacionais bastante elevados em relação aos demais.

Os resultados para cada um dos modelos, por aproximação e por relaxação, são apresentados nas próximas seções. Cada um deles é otimizado utilizando as heurísticas apresentadas no Capítulo 2.

Tabela 1 – Tempos computacionais e valores ótimos obtidos nas diferentes instâncias dos campos de petróleo. Valores para a resolução sem o uso da LPA.

Modelo	Sem LPA	
	Tempo (s)	Objetivo
c32l	5,1	74.087
c64l	2,1	151.261
c128l	10.183,8	314.458
c32m	1,6	262.753
c64m	4,4	643.853
c128m	19,2	1.273.973
c32h	0,4	730.929
c64h	0,5	2.040.814
c128h	0,7	4.065.687
s32l	8,0	75.180
s64l	3,8	156.452
s128l	10.166,1	322.005
s32m	3,0	267.160
s64m	4,3	671.040
s128m	40,8	1.328.832
s32h	0,3	748.616
s64h	0,3	2.090.132
s128h	0,4	4.163.832

3.2.5 Resultados com o Modelo por Aproximação

Nesta seção são apresentados os resultados da otimização do modelo por aproximação. Nas Tabelas 2, 4 e 6 são apresentados os valores da função objetivo nos pontos ótimos encontrados, o número de iterações da LPA e a quantidade de curvas adaptada das heurísticas linear, linear fixando pontos e logarítmica, respectivamente.

Tabela 2 – Otimização da produção de petróleo com modelo por aproximação e heurística linear sem pontos fixos — iterações, curvas adaptadas e pontos ótimos encontrados.

Heurística linear sem pontos fixos				
	Iterações	Curvas Adaptadas	Objetivo	$\frac{\text{Objetivo}}{s/LPA}$
c32l	2	4	74.087	100,0%
c64l	2	6	151.261	100,0%
c128l	2	13	314.458	100,0%
c32m	2	16	262.753	100,0%
c64m	3	32	643.853	100,0%
c128m	2	64	1.273.973	100,0%
c32h	9	161	730.929	100,0%
c64h	8	317	2.040.814	100,0%
c128h	8	628	4.065.687	100,0%
s32l	2	4	75.180	100,0%
s64l	3	6	156.452	100,0%
s128l	*0	*0	—	—
s32m	2	16	267.186	100,0%
s64m	3	33	671.023	100,0%
s128m	2	64	1.328.823	100,0%
s32h	4	60	746.514	99,7%
s64h	4	126	2.090.132	100,0%
s128h	4	253	4.163.832	100,0%

* Resolução do problema de otimização excedeu 10.000s

Tabela 3 – Otimização da produção de petróleo com modelo por aproximação e heurística linear sem pontos fixos — tempos computacionais.

	Heurística linear sem pontos fixos - tempos					
	Tempos Totais (s)			$\frac{T.T.}{s/LPA}$	Última Otim.(s)	$\frac{Ú.O.}{s/LPA}$
	Adap.	Otim.	Tot.			
c32l	1,1	7,1	8,1	160%	3,0	59%
c64l	1,1	3,0	4,0	194%	1,4	65%
c128l	1,1	643,5	644,6	6%	23,6	0%
c32m	1,1	1,2	2,3	145%	0,5	30%
c64m	1,6	3,9	5,6	128%	1,4	32%
c128m	1,1	30,1	31,2	163%	15,3	80%
c32h	4,9	2,7	7,6	2.088%	0,3	81%
c64h	4,4	2,8	7,1	1.425%	0,3	68%
c128h	4,4	3,5	7,9	1.068%	0,5	65%
s32l	1,1	5,4	6,5	81%	2,8	35%
s64l	1,6	4,6	6,2	165%	1,3	35%
s128l	—	*10.116,2	*10.116,2	—	—	—
s32m	1,1	1,7	2,8	92%	0,5	16%
s64m	1,6	14,0	15,6	365%	1,5	34%
s128m	1,1	98,3	99,4	244%	16,0	39%
s32h	2,2	1,3	3,4	1.036%	0,3	86%
s64h	2,2	1,3	3,5	1.028%	0,3	92%
s128h	2,2	1,5	3,7	827%	0,4	81%

* Resolução do problema de otimização excedeu 10.000s

No geral, para o modelo por aproximação, a heurística linear sem pontos fixos levou mais tempo para encontrar ponto ótimo do que a resolução sem LPA, sendo até 21 vezes maior. Apenas nos cenários c128l, s32l e s32m o tempo foi menor. Os tempos computacionais para resolver o último problema de otimização ficaram abaixo do tempo de resolução sem LPA.

No cenário s128l, a resolução do problema de otimização demorou mais que 10.000 segundos, sendo interrompida conforme o limite estabelecido para *timeout*.

Observa-se que nos cenários de curvas côncavas os valores ótimos coincidiram com a resolução sem LPA. Nas curvas não côncavas, alguns cenários apresentaram uma leve diferença, por exemplo na instância s32h o valor do ótimo encontrado foi de 99,7% do ótimo encontrado sem LPA.

Outro ponto constatado é que à medida que a disponibilidade de gás aumenta é necessário um maior número de iterações para adaptar a curva. Por

exemplo, nos cenários côncavos, com baixa disponibilidade, foram necessárias 2 iterações. Já nos cenários com alta disponibilidade foram necessárias 8 e 9 iterações.

Tabela 4 – Otimização da produção de petróleo com modelo por aproximação e heurística linear com pontos fixos — iterações, curvas adaptadas e pontos ótimos encontrados.

Heurística linear com pontos fixos				
	Iterações	Curvas Adaptadas	Objetivo	$\frac{Objetivo}{s/LPA}$
c32i	2	4	74.087	100,0%
c64i	2	6	151.261	100,0%
c128i	2	13	314.458	100,0%
c32m	2	16	262.753	100,0%
c64m	3	32	643.853	100,0%
c128m	2	64	1.273.973	100,0%
c32h	8	154	730.929	100,0%
c64h	8	310	2.040.814	100,0%
c128h	8	617	4.065.687	100,0%
s32i	2	4	75.180	100,0%
s64i	3	6	156.452	100,0%
s128i	*0	*0	—	—
s32m	2	16	267.186	100,0%
s64m	3	33	671.042	100,0%
s128m	2	64	1.328.823	100,0%
s32h	4	60	746.514	99,7%
s64h	4	126	2.090.132	100,0%
s128h	4	253	4.163.832	100,0%

* Resolução do problema de otimização excedeu 10.000s

Tabela 5 – Otimização da produção de petróleo com modelo por aproximação e heurística linear com pontos fixos — tempos computacionais.

Heurística linear com pontos fixos - tempos						
	Tempos Totais (s)			<i>Total s/LPA</i>	Última Otim.(s)	<i>Ú.O. s/LPA</i>
	Adap.	Otim.	Tot.			
c32l	1,1	7,2	8,3	163%	2,9	57%
c64l	1,1	2,8	3,9	188%	1,1	52%
c128l	1,1	672,2	673,3	7%	29,9	0%
c32m	1,1	1,1	2,2	139%	0,5	28%
c64m	1,7	3,4	5,1	116%	1,1	25%
c128m	1,1	19,2	20,3	106%	3,2	17%
c32h	4,4	2,5	6,9	1.896%	0,3	88%
c64h	4,4	2,8	7,2	1.438%	0,4	75%
c128h	4,4	3,4	7,9	1.072%	0,5	63%
s32l	1,1	5,5	6,7	83%	2,9	36%
s64l	1,6	4,5	6,2	164%	1,4	38%
s128l	—	*10.133,5	*10.133,5	—	—	—
s32m	1,1	1,7	2,7	90%	0,5	18%
s64m	1,6	19,2	20,9	488%	1,9	45%
s128m	1,1	135,4	136,5	335%	46,1	113%
s32h	2,2	1,2	3,4	1.016%	0,3	94%
s64h	2,2	1,3	3,5	1.039%	0,3	93%
s128h	2,2	1,6	3,8	871%	0,4	83%

* Resolução do problema de otimização excedeu 10.000s

A heurística linear com pontos fixos realizou quase o mesmo número de iterações para atingir o ponto ótimo do que a sem pontos fixos. Não houve redução significativa no tempo total das adaptações como esperado, uma vez que os tempos mais significativos foram da resolução do problema de otimização. Os tempos de resolução do último problema de otimização ficaram próximos ou abaixo dos tempos de resolução sem LPA.

Tabela 6 – Otimização da produção de petróleo com modelo por aproximação e heurística logarítmica — iterações, curvas adaptadas e pontos ótimos encontrados.

Heurística logarítmica				
	Iterações	Curvas Adaptadas	Objetivo	$\frac{Objetivo}{s/LPA}$
c32l	4	9	74,087	100,0%
c64l	4	13	151,261	100,0%
c128l	4	19	314,458	100,0%
c32m	4	21	262,753	100,0%
c64m	4	34	643,853	100,0%
c128m	4	66	1,273,973	100,0%
c32h	4	91	730,929	100,0%
c64h	4	182	2,040,814	100,0%
c128h	4	366	4,065,687	100,0%
s32l	2	4	75,180	100,0%
s64l	2	6	156,452	100,0%
s128l	*0	*0	—	—
s32m	2	16	267,186	100,0%
s64m	4	35	671,048	100,0%
s128m	2	64	1,328,823	100,0%
s32h	4	69	747,176	99,8%
s64h	3	128	2,090,132	100,0%
s128h	3	256	4,163,832	100,0%

* Resolução do problema de otimização excedeu 10.000s

Tabela 7 – Otimização da produção de petróleo com modelo por aproximação e heurística logarítmica — tempos computacionais.

Heurística logarítmica - tempos						
	Tempos Totais (s)			$\frac{Total}{s/LPA}$	Última Otim.(s)	$\frac{Ú.O.}{s/LPA}$
	Adap.	Otim.	Tot.			
c32i	2,2	13,0	15,3	300%	4,0	79%
c64i	2,3	4,4	6,7	321%	1,0	46%
c128i	2,3	9.145,1	9.147,4	90%	729,9	7%
c32m	2,3	2,2	4,5	281%	0,5	30%
c64m	2,3	5,3	7,6	175%	1,6	37%
c128m	2,2	34,4	36,6	191%	1,8	9%
c32h	2,2	1,3	3,5	968%	0,3	84%
c64h	2,2	1,3	3,6	711%	0,4	71%
c128h	2,3	1,7	4,0	541%	0,5	63%
s32i	1,1	5,4	6,5	81%	2,5	31%
s64i	1,1	2,2	3,3	88%	0,7	17%
s128i	—	*10.135,9	*10.135,9	—	—	—
s32m	1,1	1,8	2,9	94%	0,6	18%
s64m	2,2	15,7	18,0	420%	1,7	40%
s128m	1,1	126,1	127,3	312%	30,0	74%
s32h	2,2	1,2	3,5	1.039%	0,3	102%
s64h	1,7	1,0	2,7	789%	0,4	109%
s128h	1,7	1,4	3,0	689%	0,5	114%

* Resolução do problema de otimização excedeu 10.000s

Com a heurística logarítmica, nos cenários de curvas côncavas, a LPA convergiu em 4 iterações. Nos cenários com alta disponibilidade, isto representou um ganho em relação às heurísticas lineares.

Esta diferença se deve a um fenômeno observado nestes problemas: para baixas vazões, o ótimo se encontra nas regiões iniciais das CDPs, onde a curva é bem adaptada na aproximação inicial. Com isso, em poucas iterações a heurística linear converge para o ótimo. Para maiores disponibilidades, o ponto ótimo se desloca nas CDPs, sendo necessário um maior número de iterações para se adaptar a região do ótimo. Já a heurística logarítmica, por adaptar as curvas num espectro mais global, converge mais ou menos com um número constante de iterações.

Nos cenários de curvas não côncavas o número de iterações reduziu um pouco em relação às outras heurísticas. Ainda assim, o tempo computacional foi bastante superior à resolução sem LPA, chegando a levar 10 vezes

mais tempo. Para os cenários de curvas côncavas foi obtido o mesmo valor de ótimo do que na resolução sem LPA, com pequena diferença nos cenários não côncavos.

Em relação ao tempo de resolução do último problema de otimização, os cenários de curvas côncavas e alta disponibilidade ficaram levemente acima da resolução sem LPA. Nos outros cenários, este tempo foi bastante inferior.

No geral, na resolução do modelo por aproximação, os tempos computacionais foram bastante superiores à resolução sem LPA. Nos cenários com curvas côncavas foi encontrado o mesmo ponto ótimo, já nos com função de produção não côncavas, nem todos convergiram para o mesmo valor. A heurística logarítmica, para alta disponibilidades, convergiu com um menor número de iterações do que as lineares. Já para baixas vazões o recíproco ocorreu.

3.2.6 Resultados com o Modelo por Relaxação

Os cenários de poços de petróleo foram também otimizados usando o modelo por relaxação e utilizando as 3 heurísticas: linear, linear fixando pontos e logarítmica. A quantidade de iterações necessárias, os valores da função objetivo no ótimo e a quantidade de curvas adaptadas são apresentados nas Tabelas 8, 10 e 12. Já os tempos computacionais nas Tabelas 9, 11 e 13.

Tabela 8 – Otimização da produção de petróleo com modelo por relaxação e heurística linear sem pontos fixos — iterações, curvas adaptadas e pontos ótimos encontrados.

Heurística linear sem pontos fixos				
	Iterações	Curvas Adaptadas	Objetivo	$\frac{\text{Objetivo}}{s/LPA}$
c32l	7	12	74.087	100,0%
c64l	18	24	151.261	100,0%
c128l	*13	*35	*319.933	*101,7%
c32m	8	20	262.753	100,0%
c64m	14	47	643.853	100,0%
c128m	18	90	1.273.973	100,0%
c32h	8	207	730.929	100,0%
c64h	8	417	2.040.814	100,0%
c128h	8	833	4.065.687	100,0%
s32l	7	9	75.180	100,0%
s64l	3	7	156.452	100,0%
s128l	*0	*0	—	—
s32m	2	16	267.186	100,0%
s64m	4	34	671.059	100,0%
s128m	4	66	1.328.913	100,0%
s32h	4	76	748.616	100,0%
s64h	4	131	2.090.132	100,0%
s128h	4	262	4.163.832	100,0%

* Resolução do problema de otimização excedeu 10.000s

Tabela 9 – Otimização da produção de petróleo com modelo por relaxação e heurística linear sem pontos fixos — tempos computacionais.

Heurística linear sem pontos fixos - tempos						
	Tempos Totais (s)			$\frac{Total}{s/LPA}$	Última Otim.(s)	$\frac{Ú.O.}{s/LPA}$
	Adap.	Otim.	Tot.			
c32l	3,8	19,1	23,0	452%	5,6	110%
c64l	9,7	33,7	43,4	2.085%	2,6	127%
c128l	*7,1	*10.658,5	*10.665,6	*105%	*10.332,7	*101%
c32m	4,4	4,5	8,8	552%	0,6	40%
c64m	7,7	14,3	22,0	504%	1,4	32%
c128m	10,0	192,7	202,6	1.056%	13,5	70%
c32h	4,4	2,6	7,0	1.906%	0,3	88%
c64h	4,4	2,9	7,3	1.466%	0,4	77%
c128h	4,4	3,6	8,1	1.098%	0,6	76%
s32l	3,8	27,4	31,3	389%	4,2	52%
s64l	1,6	6,4	8,0	213%	3,6	97%
s128l	—	*10.198,2	*10.198,2	—	—	—
s32m	1,1	3,5	4,6	151%	2,3	76%
s64m	2,2	19,2	21,4	501%	7,9	185%
s128m	2,2	139,2	141,4	347%	32,6	80%
s32h	2,2	1,2	3,4	1.030%	0,3	93%
s64h	2,2	1,3	3,5	1.015%	0,3	97%
s128h	2,2	1,6	3,8	867%	0,4	98%

* Resolução do problema de otimização excedeu 10.000s

Na heurística linear, os cenários c128l e s128l excederam o limite de 10.000s para resolução do problema de otimização numa dada iteração. Os tempos computacionais foram bastante superiores à resolução sem LPA.

Em relação à mesma heurística no modelo por aproximação, para os cenários com baixa disponibilidade, o número de iterações aumentou consideravelmente. Para estes, o problema de otimização foi resolvido mais vezes, aumentando o tempo computacional. Nos cenários de maior disponibilidade, os tempos foram semelhantes.

Os tempos totais foram superiores à resolução sem LPA e nos cenários que concluíram a execução, foi obtido o mesmo ótimo do que a resolução sem LPA – o que era esperado da relaxação.

O tempo de resolução do último problema de otimização em relação a resolução sem LPA, foi superior para os cenários de curvas côncavas com baixa disponibilidade e para o cenário s64m.

Tabela 10 – Otimização da produção de petróleo com modelo por relaxação e heurística linear com pontos fixos — iterações, curvas adaptadas e pontos ótimos encontrados.

Heurística linear com pontos fixos				
	Iterações	Curvas Adaptadas	Objetivo	$\frac{Objetivo}{s/LPA}$
c32l	7	12	74.087	100,0%
c64l	18	24	151.261	100,0%
c128l	*14	*37	*319.180	*101,5%
c32m	8	20	262.753	100,0%
c64m	14	47	643.853	100,0%
c128m	18	90	1.273.973	100,0%
c32h	10	164	730.929	100,0%
c64h	8	344	2.040.814	100,0%
c128h	10	691	4.065.687	100,0%
s32l	7	9	75.180	100,0%
s64l	3	7	156.452	100,0%
s128l	*0	*0	—	—
s32m	2	16	267.186	100,0%
s64m	4	34	671.026	100,0%
s128m	4	66	1.328.880	100,0%
s32h	4	69	748.616	100,0%
s64h	4	126	2.090.132	100,0%
s128h	4	253	4.163.832	100,0%

* Resolução do problema de otimização excedeu 10.000s

** Máximo de 20 adaptações atingido

Tabela 11 – Otimização da produção de petróleo com modelo por relaxação e heurística linear com pontos fixos — tempos computacionais.

	Heurística linear com pontos fixos - tempos					
	Tempos Totais (s)			Total s/LPA	Última Otim.(s)	Ú.O. s/LPA
Adap.	Otim.	Tot.				
c32l	3,9	21,5	25,4	500%	5,6	110%
c64l	9,9	34,2	44,2	2.123%	2,6	123%
c128l	*7,7	*31.369,6	*31.377,3	*308%	*10.471,9	*103%
c32m	4,4	4,0	8,4	527%	0,6	36%
c64m	7,8	13,7	21,5	494%	1,6	37%
c128m	10,1	140,0	150,1	782%	14,0	73%
c32h	5,6	3,2	8,9	2.425%	0,3	84%
c64h	4,5	3,0	7,4	1.485%	0,4	71%
c128h	5,6	4,7	10,2	1.394%	0,5	75%
s32l	3,9	23,9	27,8	346%	5,2	65%
s64l	1,7	5,9	7,6	201%	3,7	99%
s128l	—	*10.215,8	*10.215,8	—	—	—
s32m	1,1	2,8	3,9	129%	1,6	53%
s64m	2,2	8,5	10,8	252%	1,8	42%
s128m	2,2	70,1	72,4	177%	46,5	114%
s32h	2,3	1,2	3,5	1.051%	0,3	97%
s64h	2,3	1,4	3,6	1.067%	0,4	107%
s128h	2,2	1,6	3,8	865%	0,4	86%

* Resolução do problema de otimização excedeu 10.000s

Na heurística linear fixando os pontos, os modelos c128l e s128l atingiram o limite de 10.000s na resolução do problema de otimização, sendo interrompidos.

No geral, não houve melhoras nos tempos de adaptações e foi mantida a quantidade de iterações. A exceção foi para os modelos c32h e c128h, que passaram de 8 para 10 iterações. Isto aumentou seus tempos computacionais, levando até 25 vezes mais tempo do que a resolução sem LPA.

Assim como na heurística anterior, quando o algoritmo convergiu, foi encontrado o mesmo valor do ponto ótimo do que na resolução sem LPA. Os tempos computacionais da última otimização também foram superiores para os cenários de curvas côncavas com baixa disponibilidade, além dos cenários s128m e s64h.

Tabela 12 – Otimização da produção de petróleo com modelo por relaxação e heurística logarítmica — iterações, curvas adaptadas e pontos ótimos encontrados.

Heurística logarítmica				
	Iterações	Curvas Adaptadas	Objetivo	$\frac{Objetivo}{s/LPA}$
c32i	12	23	74.087	100,0%
c64i	**20	**34	**152.201	**100,6%
c128i	*13	*46	*319.692	*101,7%
c32m	10	33	262.753	100,0%
c64m	**20	**92	**643.853	**100,0%
c128m	**20	**160	**1.274.638	**100,1%
c32h	6	129	730.929	100,0%
c64h	6	265	2.040.814	100,0%
c128h	6	531	4.065.687	100,0%
s32i	8	10	75.180	100,0%
s64i	3	7	156.452	100,0%
s128i	*0	*0	—	—
s32m	3	18	267.186	100,0%
s64m	5	37	671.041	100,0%
s128m	5	70	1.328.887	100,0%
s32h	3	64	748.616	100,0%
s64h	4	131	2.090.132	100,0%
s128h	4	262	4.163.832	100,0%

* Resolução do problema de otimização excedeu 10.000s

** Máximo de 20 adaptações atingido

Tabela 13 – Otimização da produção de petróleo com modelo por relaxação e heurística logarítmica — tempos computacionais.

Heurística logarítmica - tempos						
	Tempos Totais (s)			$\frac{Total}{s/LPA}$	Última Otim.(s)	$\frac{Ú.O.}{s/LPA}$
	Adap.	Otim.	Tot.			
c32l	6,7	25,5	32,2	633%	6,0	118%
c64l	**11,1	**30,1	**41,2	**1.980%	**2,3	**108%
c128l	*7,4	*13.074,6	*13.082,0	*128%	*10.347,7	*102%
c32m	5,7	5,2	10,8	678%	0,6	35%
c64m	**11,3	**20,4	**31,6	**727%	**1,8	**41%
c128m	**11,4	**81,6	**93,0	**485%	**4,6	**24%
c32h	3,3	1,9	5,3	1.451%	0,3	90%
c64h	3,4	2,3	5,7	1.129%	0,5	92%
c128h	3,4	2,8	6,2	840%	0,5	70%
s32l	4,6	24,3	28,9	360%	2,0	25%
s64l	1,7	7,1	8,8	234%	4,0	106%
s128l	—	*10.227,4	*10.227,4	—	—	—
s32m	1,7	3,2	4,9	161%	0,6	19%
s64m	2,8	8,5	11,3	264%	0,8	19%
s128m	2,9	157,9	160,7	394%	24,3	60%
s32h	1,7	1,1	2,7	825%	0,4	114%
s64h	2,3	1,4	3,6	1.066%	0,4	105%
s128h	2,3	1,8	4,0	910%	0,5	108%

* Resolução do problema de otimização excedeu 10.000s

** Máximo de 20 adaptações atingido

Com a heurística logarítmica, os cenários c64l, c64m e c128l excederam o limite de 20 iterações. Os modelos c128l e s128l atingiram o limite de 10.000s na resolução do problema de otimização.

Nos cenários com curvas côncavas e com alta disponibilidade, a heurística logarítmica apresentou um menor número de iterações. Os tempos computacionais foram bastante superiores à referência sem LPA. Em vários cenários foi atingido o limite estabelecido de 10.000s para a resolução do problema de otimização ou de um máximo de 20 iterações.

Os tempos computacionais da resolução do último problema de otimização foi superior, em relação à resolução sem LPA, para os cenários de curvas côncavas com baixas disponibilidade, curvas côncavas com alta disponibilidade e o cenário s64l,

3.3 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

No geral a LPA apresentou um maior tempo computacional do que na otimização sem LPA, embora fosse esperado tempos menores pela redução da quantidade de pontos nas curvas. Dentre as heurísticas avaliadas, para baixas disponibilidades de gás, a linear convergiu com menor tempo computacional e com menos iterações. Já para altas disponibilidades, a heurística logarítmica se mostrou superior.

Isto é explicado porque nas baixas disponibilidades, o ótimo se encontra no início das curvas, sendo adaptado nas primeiras iterações pela heurística linear. Já com maiores disponibilidades, o ponto ótimo se desloca na curva e a heurística logarítmica, por adaptar a curva globalmente, é mais eficiente.

Observou-se que na heurística linear, fixar os pontos não apresentou ganhos computacionais significativos. Também se observou que para estas heurísticas, nos cenários de curvas côncavas, o aumento da disponibilidade de gás aumentou o número de iterações necessárias para atingir o ótimo.

Como um todo, o tempo mais significativo na aplicação da LPA foi o da resolução dos problemas de otimização ao longo das iterações. Com um aumento no número de iterações, os problemas de otimização foram resolvidos mais vezes, aumentando o tempo computacional

O tempo de resolução para o último problema de otimização nem sempre foi inferior ao tempo de resolução sem LPA. Em alguns casos este tempo foi quase o dobro, o que não era esperado, uma vez que o problema com LPA é resolvido com uma menor quantidade de pontos.

No modelo por aproximação, quando concluída a execução, foi encontrado ou o mesmo ponto ótimo ou um próximo ao obtido na resolução sem LPA – embora nenhuma garantida tenha sido dada. Já no modelo por relaxação, em todos os cenários que concluíram a execução foi encontrado o mesmo ponto ótimo do que a resolução sem LPA. Isto era esperado, pois conforme demonstrado, uma relaxação quando converge para um ponto ótimo coincidente com a curva real, é um ponto ótimo do problema original.

Por outro lado, quando quando algum limite computacional estabelecido é atingido, por exemplo o limite de 20 iterações, a solução encontrada é infactível e não pode ser implementada na prática. Já no modelo por aproximação, em qualquer iteração, a solução encontrada é factível e embora não seja um valor ótimo, é uma boa solução.

Foi constatado que para o modelo por aproximação, é necessário ter cuidado para que as adaptações de super ou subestimação não violem certas restrições. Isto pode tornar parte do domínio original infactível, podendo perder-se o ótimo global, conforme observado no uso de superestimação da

produção em relação à capacidade dos separadores.

3.4 SUMÁRIO

Neste capítulo foi apresentada a aplicação da linearização por partes adaptativa na otimização da produção de petróleo e gás. Primeiro foi apresentado o modelo não linear do campo, seguido da sua linearização por partes.

No modelo linearizado, foi aplicada a linearização por partes adaptativa, sendo formulados dois modelos com objetivos e restrições diferentes: modelo por aproximação e modelo por relaxação.

No modelo por aproximação, a função objetivo é conservadora, onde subestima-se os lucros e superestima-se os custos. Os valores sujeitos às restrições são superestimados de maneira que exista uma folga quando implementado na prática e seja induzido um ganho econômico superior ao estimado.

Já o modelo por relaxação é obtido com uma relaxação do problema original. As condições para isto são de superestimar o ganho econômico, subestimar custos e subestimar recursos sujeitos às restrições. Com este modelo, tem-se a garantia que se for encontrado ótimo, com a curva adaptada coincidindo com a curva real, é também um ótimo do problema original. Ressalta-se que o modelo por aproximação não apresenta esta garantia.

Estes modelos foram então instanciados em diversos cenários com diferentes número de poços (32, 64 e 128), diferentes disponibilidades de gás de injeção (baixa, média e alta) e dois diferentes tipos de CDP (côncavo e não côncavo). Primeiro, os cenários foram resolvidos sem usar LPA. Nesta resolução, os tempos computacionais e pontos ótimos encontrados foram usados como referência para avaliar a LPA. Então, os modelos foram resolvidos usando as heurísticas proposta no Capítulo 2, sendo avaliada seus tempos computacionais e pontos ótimos encontrados.

Concluiu-se que no geral a LPA aumentou consideravelmente o tempo computacional para encontrar o mesmo ótimo do que a resolução sem LPA. A heurística linear foi a que apresentou melhores resultados para baixas vazões e a logarítmica para altas vazões.

Com a heurística linear fixando pontos esperava-se reduzir o tempo computacional da adaptação, aportando ganhos no tempo computacional global. Isto não ocorreu, pois o custo computacional mais importante foi o da resolução do problema de otimização ao longo das iterações e os ganhos de uma adaptação mais eficiente foram praticamente insignificantes.

4 LINEARIZAÇÃO POR PARTES BIDIMENSIONAL

Neste capítulo a Linearização por Partes Adaptativa (LPA) é estabelecida para funções bidimensionais. É feita a mesma abordagem que na unidimensional: primeiro é apresentada a linearização por partes para funções bidimensionais, sendo descrito o modelo por Combinação Convexa Desagregada (DCC). Em seguida, é enunciado o problema de adaptação de uma função linear por partes bidimensional.

O problema de adaptação é então integrado a um problema de otimização sendo propostas duas heurísticas para esta integração: linear e logarítmica. As heurísticas seguem as linhas gerais de suas respectivas unidimensionais.

Por último, as LPA bidimensional é aplicada na resolução de problemas de otimização ilustrativos. Para as duas heurísticas, são encontrados os máximos de duas superfícies diferentes.

É importante ressaltar que na LPA bidimensional é desconsiderada a restrição de continuidade presente na LPA unidimensional. Esta restrição tem o objetivo de garantir que os intervalos da adaptação sejam contínuos, porém em funções bidimensionais esta propriedade não traz benefícios. Uma consequência desta escolha é que os modelos de linearização por partes utilizados no problema de otimização devem permitir descontinuidades ao utilizar os pontos da superfície adaptada.

4.1 INTRODUÇÃO À LINEARIZAÇÃO POR PARTES BIDIMENSIONAL

Para funções de maiores dimensões, por exemplo bidimensionais $f(x_1, x_2)$, também é possível aplicar as técnicas de linearização por partes. Neste caso, o domínio da função é discretizado em politopos, existindo diversos modelos para gerar a aproximação, por exemplo Combinação Convexa Agregada (CC), Combinação Convexa Desagregada (DCC), Logarítmico (Log), Logarítmico Desagregado (DLog), Múltipla Escolha (MC), Incremental (INC) e SOS2 (VIELMA; KEHA; NEMHAUSER, 2008), (VIELMA; NEMHAUSER, 2009) e (VIELMA; AHMED; NEMHAUSER, 2010).

Neste trabalho é usado o modelo DCC para aplicar a linearização por partes adaptativa, sendo este detalhado na próxima seção. A escolha deste modelo se dá pela sua simplicidade e por permitir descontinuidades na função aproximada.

4.1.1 Modelo de Combinação Convexa Desagregada Bidimensional - DCC

No modelo bidimensional DCC, o domínio de interesse da função, \mathcal{D} , é subdividido em um conjunto de polítopos, \mathcal{P} . Cada polítopo é definido por seu conjunto de vértices $V(P)$, $\forall P \in \mathcal{P}$, sendo que para cada vértice, $\mathbf{v} \in V(P)$, é definida uma variável contínua $\lambda_{P,\mathbf{v}}$, sob a qual é realizada a combinação convexa para obter a aproximação linear por partes da função.

Um exemplo de domínio particionado em polítopos retangulares é apresentado na Figura 30.

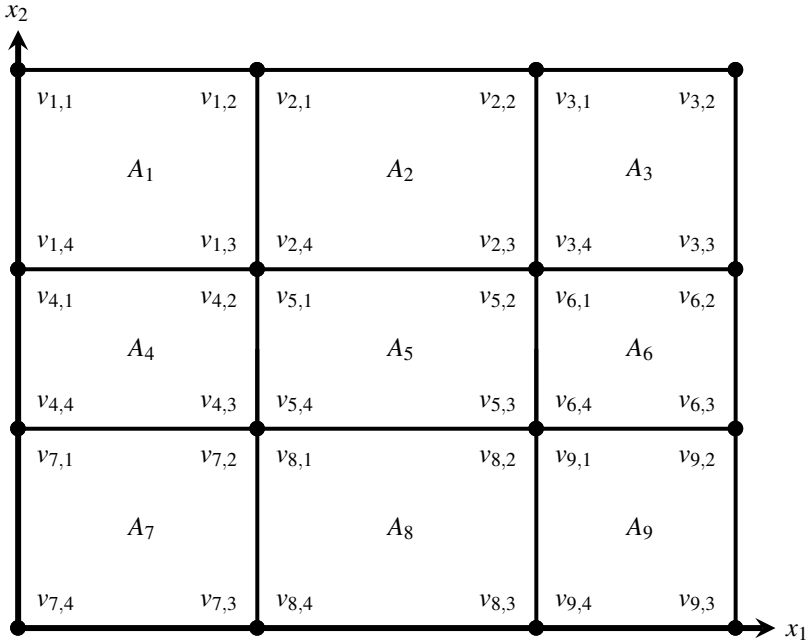


Figura 30 – Exemplo de discretização do domínio de uma função bidimensional para aplicação do modelo por Combinação Convexa Desagregada - DCC.

Na figura, o domínio é discretizado em 9 polítopos retangulares, $\{A_k : k = 1, \dots, 9\}$. Cada polítopo é determinado por seus 4 vértices, $V(A_k) = \{\mathbf{v}_{k,i} : i = 1, \dots, 4\}$. Para cada polítopo é associada uma variável y_P que determina se o polítopo está ativo e para cada vértice, uma variável de ponderação, $\lambda_{k,i}$ — ambas não representadas.

Observe que cada polítopo possui seu próprio conjunto de vértices,

embora eles se sobreponham aos dos polítopos vizinhos. Com isto, a formulação DCC pode apresentar descontinuidades:

$$\sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{\mathbf{v} \in V(P)} \lambda_{P,\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{x} \quad (4.1a)$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{\mathbf{v} \in V(P)} \lambda_{P,\mathbf{v}} \cdot f(\mathbf{v}) = \tilde{f}(\mathbf{x}) \quad (4.1b)$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}} y_P = 1 \quad (4.1c)$$

$$\sum_{\mathbf{v} \in V(P)} \lambda_{P,\mathbf{v}} = y_P, P \in \mathcal{P} \quad (4.1d)$$

$$y_P \in \{0, 1\}, P \in \mathcal{P} \quad (4.1e)$$

$$\lambda_{P,\mathbf{v}} \geq 0, \mathbf{v} \in V(P), P \in \mathcal{P} \quad (4.1f)$$

onde:

- as Equações (4.1a) e (4.1b) estabelecem, por combinação convexa, os valores de \mathbf{x} e da aproximação \tilde{f} ;
- a Equação (4.1c) garante que apenas um polítopo é ativado;
- a Equação (4.1d) estabelece a combinação convexa.

Com o modelo linear por partes bidimensional apresentado, é formulado o problema de refinamento adaptativo bidimensional.

4.2 REFINAMENTO ADAPTATIVO BIDIMENSIONAL

No caso do refinamento adaptativo bidimensional, é buscada uma adaptação para a superfície utilizando um conjunto reduzido de *breakpoints* da função original. No caso unidimensional, a adaptação era feita por segmentos de retas, no bidimensional é feito por planos. Assim como no caso unidimensional, é apresentado nesta seção uma adaptação que superestima a função original, f .

Para gerar a adaptação, os *breakpoints* do domínio da função original são particionados em conjuntos retangulares, $A_i \in \mathcal{A}$, onde $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_{m-1}, A_m\}$. Os valores da adaptação nos vértices de cada retângulo, $\tilde{f}(\mathbf{v}), \mathbf{v} \in V(A_i)$, são calculados de acordo com o plano que minimiza o erro e superestima a função nos *breakpoints* pertencentes à A_i . Com isso, a adaptação induzida, \tilde{f} , é composta por m planos que superestimam a função original em cada uma das A_i partições.

A escolha de particionar o domínio \mathcal{D} em retângulos se justifica no momento de refinar a adaptação. Os $A_i \in \mathcal{A}$ podem ser subdivididos em novos retângulos, preservando a estrutura da adaptação.

4.2.1 Modelagem Matemática da Adaptação Bidimensional

Seja a função bidimensional original $f(\mathbf{x})$, definida no conjunto de breakpoints

$$\mathcal{X} = \{\mathbf{x} : (x_1, x_2) \in \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2\} \quad (4.2a)$$

$$(4.2b)$$

tal que

$$\mathcal{X}_1 = \{x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{1,n_1-1}, x_{1,n_1}\} \quad (4.3a)$$

$$\mathcal{X}_2 = \{x_{2,1}, x_{2,2}, \dots, x_{2,n_2-1}, x_{2,n_2}\} \quad (4.3b)$$

são o conjunto de *breakpoints* da função original na primeira dimensão, \mathcal{X}_1 , e na segunda, \mathcal{X}_2 .

Sobre o domínio, é definido o conjunto de partições retangulares

$$\mathcal{A} = \{A_1, A_2 \dots A_{m-1}, A_m\} \quad (4.4a)$$

tal que

$$A_k \subseteq \mathcal{X}, k = 1, \dots, m \quad (4.5a)$$

A união destas partições é dada por

$$\cup_{i=1}^m A_i = \mathcal{X} \quad (4.6a)$$

e a interseção

$$A_i \cap A_j = \begin{cases} \emptyset \\ \{x_{1,k}\} \times \{x_{2,l}, x_{2,l+1}, \dots, x_{2,\bar{l}}\}, \text{ para algum } k \text{ e } l \leq \bar{l} \\ \{x_{1,l}, x_{1,l+1}, \dots, x_{1,\bar{l}}\} \times \{x_{2,k}\}, \text{ para algum } k \text{ e } l \leq \bar{l} \end{cases} \quad (4.7a)$$

Em outras palavras, a união das partições resulta no domínio original da função. A interseção de duas partições ou é vazia, ou um conjunto de *breakpoints* contido num segmento de reta horizontal ou um conjunto de *breakpoints* contido num segmento de reta vertical.

Os retângulos gerados na adaptação, $A \in \mathcal{A}$, são os polítopos que são usados no problema de otimização. Os vértices fornecidos são dados pelo conjunto dos maiores e menores *breakpoints* em cada dimensão contidos em A :

$$V(A) = \{x_{1,low}(A), x_{1,high}(A)\} \times \{x_{2,low}(A), x_{2,high}(A)\} \quad (4.8a)$$

onde:

$$x_{i,low}(A) = \min\{x_{i,q} \in \mathcal{X}_i(A)\} \quad (4.9a)$$

$$x_{i,high}(A) = \max\{x_{i,q} \in \mathcal{X}_i(A)\} \quad (4.9b)$$

sendo $\mathcal{X}_i(A)$ o conjunto de *breakpoints* de A na i -ésima dimensão.

Para ilustrar essa formulação, seja um retângulo $A \in \mathcal{A}$ da Figura 31.

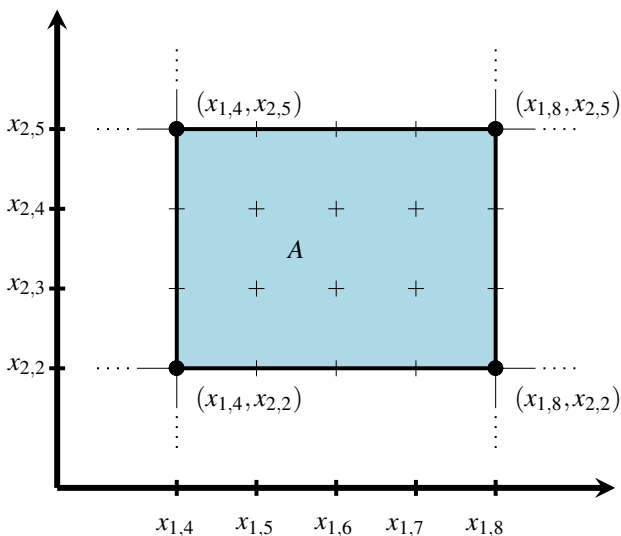


Figura 31 – Exemplo de partição retangular A com os vértices da adaptação em destaque.

A é composto pelos *breakpoints* da função original

$$A = \mathcal{X}_1(A) \times \mathcal{X}_2(A) \quad (4.10a)$$

sendo

$$\mathcal{X}_1(A) = \{x_{1,4}, x_{1,5}, x_{1,6}, x_{1,7}, x_{1,8}\} \quad (4.11a)$$

$$\mathcal{X}_2(A) = \{x_{2,2}, x_{2,3}, x_{2,4}, x_{2,5}\} \quad (4.11b)$$

ou seja

$$A = \{(x_{1,4}, x_{2,2}), (x_{1,4}, x_{2,3}), (x_{1,4}, x_{2,4}), (x_{1,4}, x_{2,5}), \\ (x_{1,5}, x_{2,2}), (x_{1,5}, x_{2,3}), (x_{1,5}, x_{2,4}), (x_{1,5}, x_{2,5}), \\ (x_{1,6}, x_{2,2}), (x_{1,6}, x_{2,3}), (x_{1,6}, x_{2,4}), (x_{1,6}, x_{2,5}), \\ (x_{1,7}, x_{2,2}), (x_{1,7}, x_{2,3}), (x_{1,7}, x_{2,4}), (x_{1,7}, x_{2,5}), \\ (x_{1,8}, x_{2,2}), (x_{1,8}, x_{2,3}), (x_{1,8}, x_{2,4}), (x_{1,8}, x_{2,5})\} \quad (4.12a)$$

Os vértices de A são dados por

$$V(A) = \{(x_{1,4}, x_{2,2}), (x_{1,4}, x_{2,5}), (x_{1,8}, x_{2,2}), (x_{1,8}, x_{2,5})\} \quad (4.13a)$$

Para estabelecer o polítopo da adaptação, é necessário determinar $\tilde{f}(\mathbf{v})$, $\mathbf{v} \in A$. Isto é feito pelo plano ótimo, com parâmetros (\mathbf{a}^*, b^*) , que superestimam a função original em todos *breakpoints* $\mathbf{x} \in A$:

$$(\mathbf{a}^*, b^*) = \min_{\mathbf{a}, b} \sum_{\mathbf{x} \in A} [\mathbf{a}^T \mathbf{x} + b - f(\mathbf{x})] \quad (4.14a)$$

$$\text{s.a. : } \mathbf{a}^T \mathbf{x} + b \geq f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in A \quad (4.14b)$$

$$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2, b \in \mathbb{R} \quad (4.14c)$$

onde:

- a Equação (4.14a) é o erro de aproximação que deve ser minimizado;
- a Equação (4.14b) garante que o plano seja uma superestimação.

Com isso, é obtido o plano ótimo passando por b^* , de normal \mathbf{a}^* que superestima a função f no retângulo A . Ressalta-se que este problema deve ser resolvido para cada polítopo $A \in \mathcal{A}$ afim de se gerar a adaptação para todo o domínio da função original f . A partir de cada plano, é estabelecido os valores da adaptação \tilde{f} nos vértices $\mathbf{v} \in V(A)$:

$$\tilde{f}(A, \mathbf{v}) = (\mathbf{a}^*)^T \mathbf{v} + b^*, \mathbf{v} \in V(A) \quad (4.15a)$$

4.3 INTEGRAÇÃO ADAPTAÇÃO BIDIMENSIONAL-PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

O modelo de adaptação de superfícies bidimensionais é então integrado ao problema de otimização. Assim como no caso unidimensional, foram desenvolvidas duas heurísticas para realizar a adaptação a partir do ponto ótimo: linear e logarítmica.

Na linear, espera-se que o ponto ótimo encontrado esteja próximo ao ótimo global e refina-se a região no entorno. Já na logarítmica, a partição onde foi encontrado o ponto ótimo, A^* , é subdividida.

4.3.1 Heurística Linear

Seja $x^* = (x_1^*, x_2^*)$, o ponto no domínio da função objetivo onde foi encontrado o ótimo do problema de otimização e A^* o retângulo que contém x^* , conforme ilustrado na Figura 32.

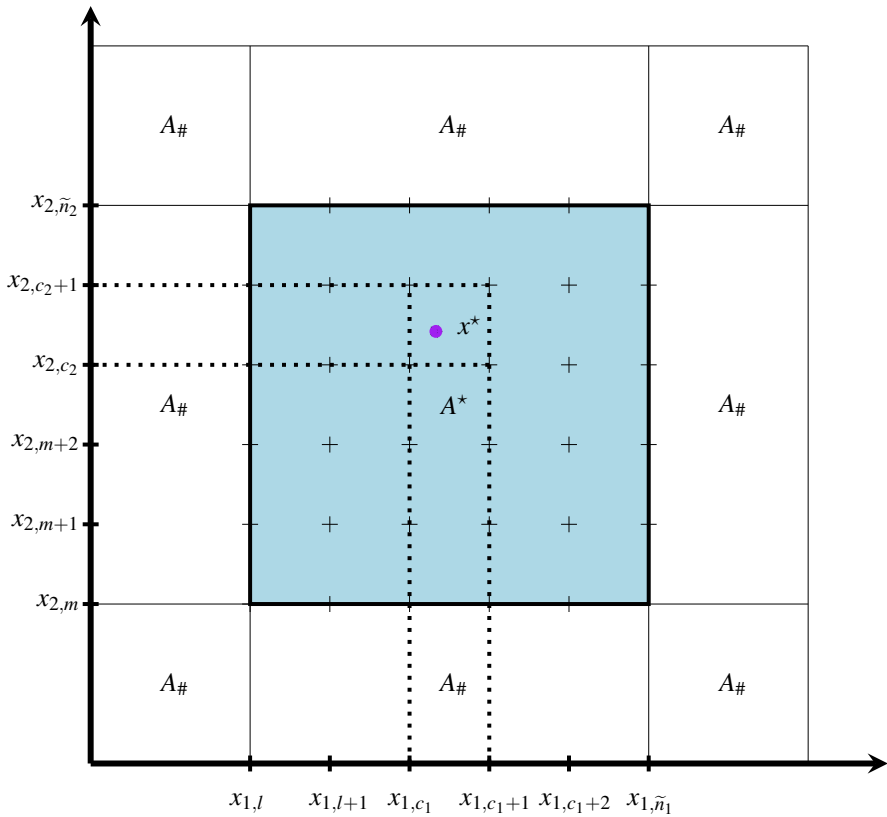


Figura 32 – Heurística linear para gerar novos retângulos no modelo bidimensional.

Seja $\mathcal{X}(A)$ o conjunto de *breakpoints* da função original que compõe o domínio de A , sendo

$$\mathcal{X}(A^*) = \mathcal{X}_1(A^*) \times \mathcal{X}_2(A^*) \quad (4.16a)$$

onde

$$\mathcal{X}_1(A^*) = \{x_{1,l}, x_{1,l+1} \dots x_{1,\tilde{n}_1-1}, x_{1,\tilde{n}_1}\} \quad (4.17a)$$

$$\mathcal{X}_2(A^*) = \{x_{2,m}, x_{2,m+1} \dots x_{2,\tilde{n}_2-1}, x_{2,\tilde{n}_2}\} \quad (4.17b)$$

Sejam também os pontos de corte em cada uma das dimensões, onde $\mathcal{X}_i^-(A^*) = \mathcal{X}_i(A^*) \setminus \{x_{i,\tilde{n}_i}\}$:

$$x_{1,c_1} = \min\{x_{1,j} \in \mathcal{X}_1^-(A^*) : x_{1,j} \leq x_1^* \leq x_{2,j+1}\} \quad (4.18a)$$

$$x_{2,c_2} = \min\{x_{2,j} \in \mathcal{X}_2^-(A^*) : x_{2,j} \leq x_2^* \leq x_{2,j+1}\} \quad (4.18b)$$

No caso geral, a nova aproximação consiste em subdividir A^* em 9 novos retângulos, ilustrados na Figura 33 — as partições $A_{\#}$ de \tilde{f} permanecem iguais ao subdividir A^* .

A subdivisão de A^* é feita a partir dos pontos de corte, x_{1,c_1} e x_{2,c_2} :

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(A_1) &= \{x_{1,l}, x_{1,l+1}, \dots, x_{1,c_1}\} & \times & \{x_{2,m}, x_{2,m+1}, \dots, x_{2,c_2}\} \\ \mathcal{X}(A_2) &= \{x_{1,c_1}, x_{1,c_1+1}\} & \times & \{x_{2,m}, x_{2,m+1}, \dots, x_{2,c_2}\} \\ \mathcal{X}(A_3) &= \{x_{1,c_1+1}, x_{1,c_1+2}, \dots, x_{1,\tilde{n}_1}\} & \times & \{x_{2,m}, x_{2,m+1}, \dots, x_{2,c_2}\} \\ \mathcal{X}(A_4) &= \{x_{1,l}, x_{1,l+1}, \dots, x_{1,c_1}\} & \times & \{x_{2,c_2}, x_{2,c_2+1}\} \\ \mathcal{X}(A_5) &= \{x_{1,c_1}, x_{1,c_1+1}\} & \times & \{x_{2,c_2}, x_{2,c_2+1}\} \\ \mathcal{X}(A_6) &= \{x_{1,c_1+1}, x_{1,c_1+2}, \dots, x_{1,\tilde{n}_1}\} & \times & \{x_{2,c_2}, x_{2,c_2+1}\} \\ \mathcal{X}(A_7) &= \{x_{1,l}, x_{1,l+1}, \dots, x_{1,c_1}\} & \times & \{x_{2,c_2+1}, x_{2,c_2+2}, \dots, x_{2,\tilde{n}_2-1}, x_{2,\tilde{n}_2}\} \\ \mathcal{X}(A_8) &= \{x_{1,c_1}, x_{1,c_1+1}\} & \times & \{x_{2,c_2+1}, x_{2,c_2+2}, \dots, x_{2,\tilde{n}_2-1}, x_{2,\tilde{n}_2}\} \\ \mathcal{X}(A_9) &= \{x_{1,c_1+1}, x_{1,c_1+2}, \dots, x_{1,\tilde{n}_1}\} & \times & \{x_{2,c_2+1}, x_{2,c_2+2}, \dots, x_{2,\tilde{n}_2-1}, x_{2,\tilde{n}_2}\} \end{aligned}$$

No caso geral a divisão resulta em 9 retângulos. Caso o ponto ótimo esteja próximo a um dos lados de A^* , este é subdividido em 6 retângulos e caso esteja próximo a um vértice, em 4 retângulos.

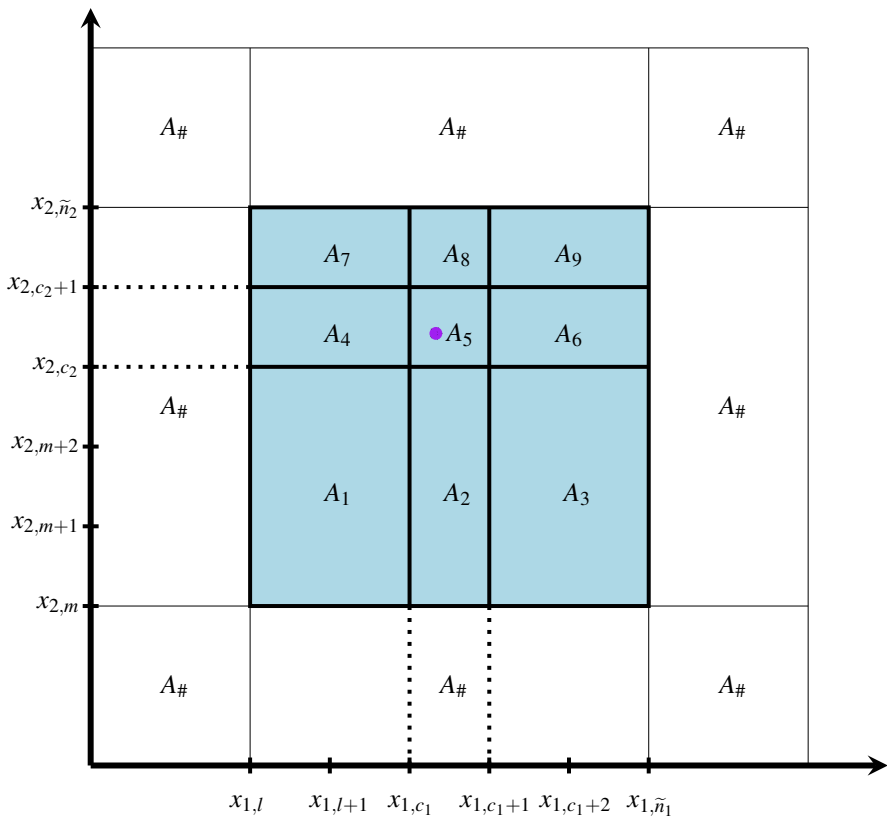


Figura 33 – Resultado da aplicação da heurística linear para gerar novos retângulos no modelo bidimensional.

4.3.2 Heurística Logarítmica

Na heurística logarítmica, o retângulo A^* , no qual foi encontrado o ponto ótimo x^* , é subdividido ao meio em cada dimensão, resultando em 4 novos retângulos. Para isto, é usado o *breakpoint* em cada dimensão mais próximo ao meio, sendo seus índices dados por

$$c_1 = \text{round}(\text{avg}(l + \tilde{n}_1)) \quad (4.19a)$$

$$c_2 = \text{round}(\text{avg}(m + \tilde{n}_2)) \quad (4.19b)$$

conforme apresentado na Figura 34.

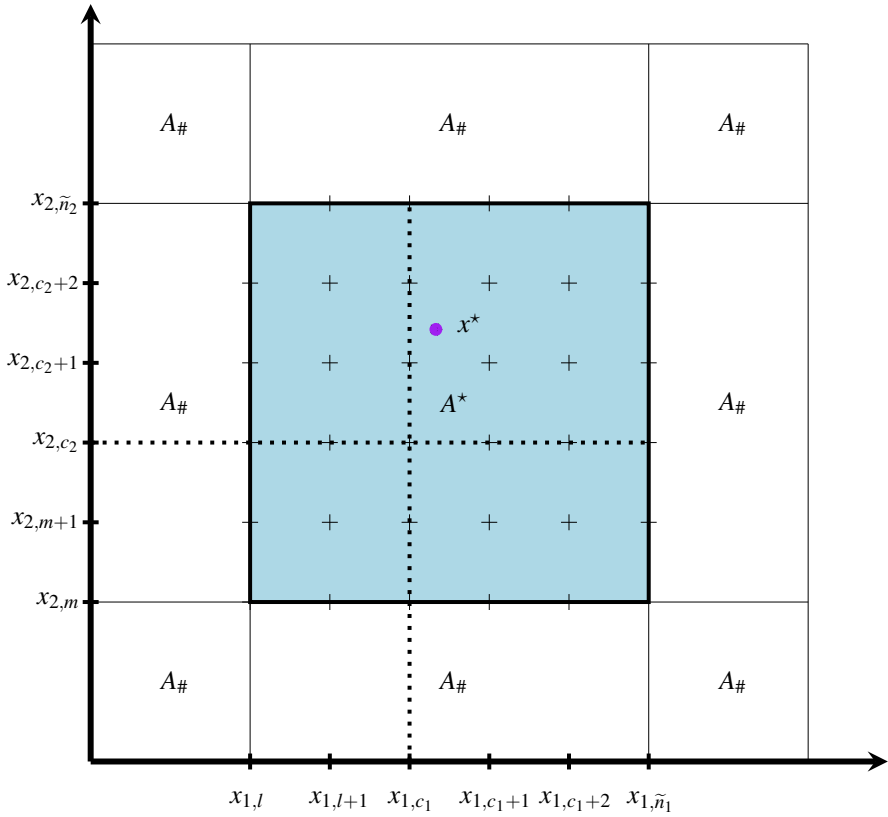


Figura 34 – Heurística logarítmica para gerar novos retângulos no modelo bidimensional.

A nova aproximação subdivide A^* em 4 novos retângulos:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(A_1) &= \{x_{1,l}, x_{1,l+1}, \dots, x_{1,c_1}\} \times \{x_{2,m}, x_{2,m+1}, \dots, x_{2,c_2}\} \\ \mathcal{R}(A_2) &= \{x_{1,c_1}, x_{1,c_1+1}, \dots, x_{1,\tilde{n}_1}\} \times \{x_{2,m}, x_{2,m+1}, \dots, x_{2,c_2}\} \\ \mathcal{R}(A_3) &= \{x_{1,l}, x_{1,l+1}, \dots, x_{1,c_1}\} \times \{x_{2,c_2}, x_{2,c_2+1}, \dots, x_{2,\tilde{n}_2-1}, x_{2,\tilde{n}_2}\} \\ \mathcal{R}(A_4) &= \{x_{1,c_1}, x_{1,c_1+1}, \dots, x_{1,\tilde{n}_1}\} \times \{x_{2,c_2}, x_{2,c_2+1}, \dots, x_{2,\tilde{n}_2-1}, x_{2,\tilde{n}_2}\} \end{aligned}$$

O resultado da nova partição de A^* é apresentado na Figura 35.

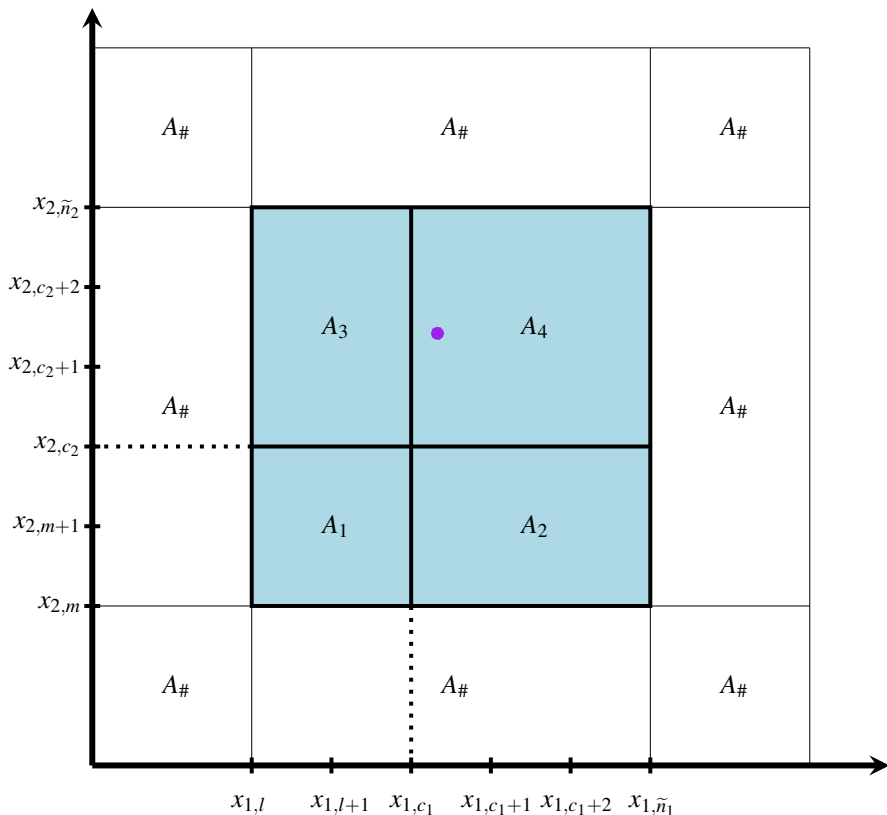


Figura 35 – Resultado da aplicação da heurística logarítmica para gerar novos retângulos no modelo bidimensional.

4.4 APLICAÇÃO DA LINEARIZAÇÃO POR PARTES ADAPTATIVA BI-DIMENSIONAL

As heurísticas apresentadas, linear e logarítmica, foram aplicadas num problema ilustrativo de otimização, sendo implementado o mesmo ciclo iterativo de resolver o problema de otimização e adaptar a superfície do Capítulo 2.

O problema de otimização consiste em achar o valor máximo de uma superfície, sendo ensaiadas duas superfícies diferentes: uma gerada por pontos aleatórios, Figura 36, e outra composta pela sobreposição de 3 Gaussianas, Figura 37. Nas figuras é indicado o local do ponto ótimo (valor máximo da superfície), x^* .

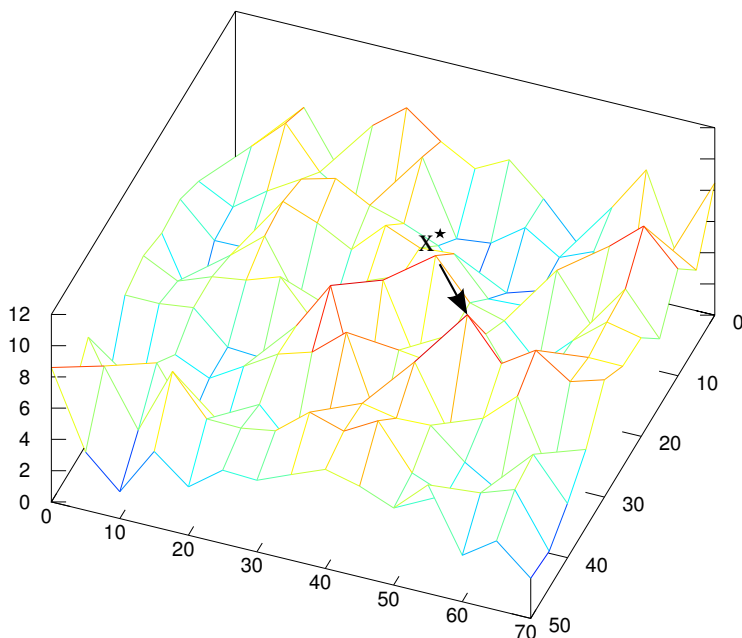


Figura 36 – Superfície gerada por pontos aleatórios.

A superfície aleatória foi gerada por uma distribuição uniforme, com valores entre 0 e 12. Na primeira dimensão, existem 11 *breakpoints*, $X_1 = \{0, 5, 10, \dots, 50\}$ e na segunda dimensão, 15 $X_2 = \{0, 5, 10, \dots, 70\}$. Seu domínio possui um total de 140 retângulos.

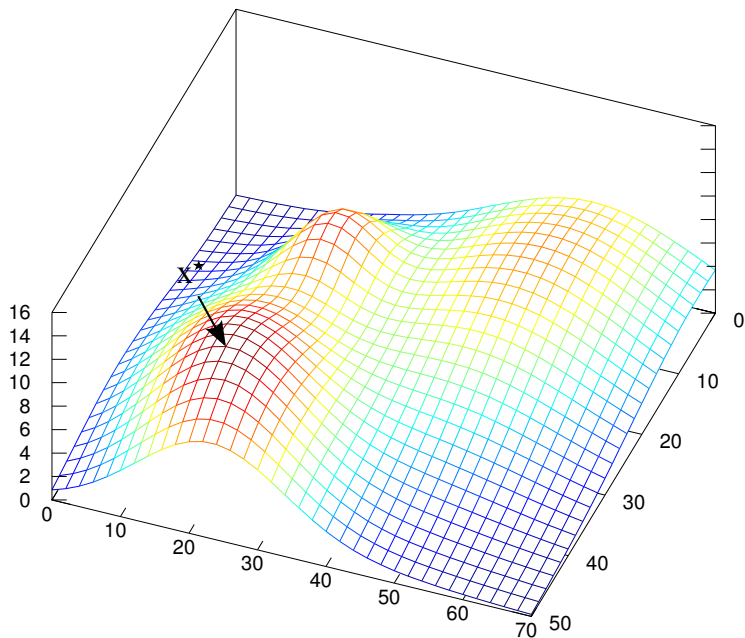


Figura 37 – Superfície gerada pela sobreposição de 3 Gaussianas.

As Gaussianas da superfícies foram geradas cada uma pela equação

$$G(x,y) = C \exp(-(a(x-x_0)^2 + 2b(x-x_0) \cdot (y-y_0) + c(y-y_0)^2)) \quad (4.20a)$$

sendo

$$a = \frac{\cos^2(\theta)}{2\sigma_x^2} + \frac{\sin^2(\theta)}{2\sigma_y^2} \quad (4.21a)$$

$$b = \frac{-\sin(2\theta)}{4\sigma_x^2} + \frac{\sin(2\theta)}{4\sigma_y^2} \quad (4.21b)$$

$$c = \frac{\sin^2(\theta)}{2\sigma_x^2} + \frac{\cos^2(\theta)}{2\sigma_y^2} \quad (4.21c)$$

onde:

- C é a constante de proporcionalidade da Gaussiana, que determina seu máximo;

- (x_0, y_0) é o centro da Gaussiana;
- θ é rotação da Gaussiana no sentido horário;
- σ_x e σ_y são os desvios padrões nos respectivos eixos.

As 3 Gaussianas foram sobrepostas por adição simples sendo seus parâmetros descritos na Tabela 14:

Tabela 14 – Parâmetros das Gaussianas.

	G₁	G₂	G₃
(x₀, y₀)	(40, 20)	(10, 50)	(14, 22)
C	10	8	6
θ	$\pi/3$	$2\pi/3$	0
σ_x	10	15	6
σ_y	15	20	6

A superfícies com as Gaussianas possui 26 *breakpoints* na primeira dimensão, $X_1 = \{0, 2, 4, \dots, 50\}$, e 36 na segunda, $X_2 = \{0, 2, 4, \dots, 70\}$. O domínio da função possui um total de 875 retângulos.

Para encontrar o ótimo nas superfícies, foi usada a linearização por partes adaptativa que superestima a função original, sendo os resultados apresentados na próximas seções.

4.4.1 Heurística Linear para Superfície de Pontos Aleatórios

A heurística linear foi aplicada para encontrar o máximo da superfície da Figura 36, gerada por pontos aleatórios. São apresentadas adaptação inicial e as adaptações das iterações 1, 2 e 18 (última) nas Figuras 38, 39, 40 e 41, respectivamente. Também são apresentadas as partições do domínio da função original.

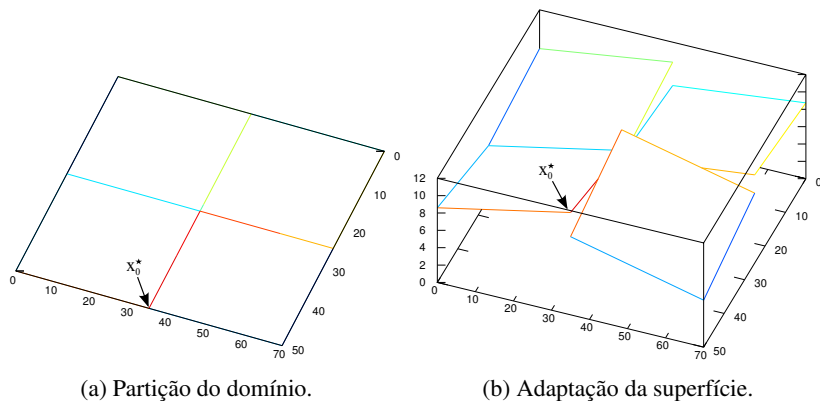


Figura 38 – Adaptação inicial da superfície com pontos aleatórios.

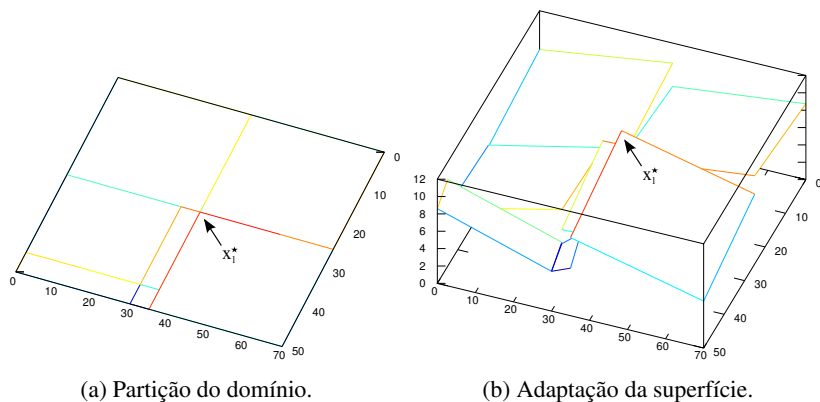


Figura 39 – Adaptação da superfície com pontos aleatórios usando a heurística linear, iteração 1.

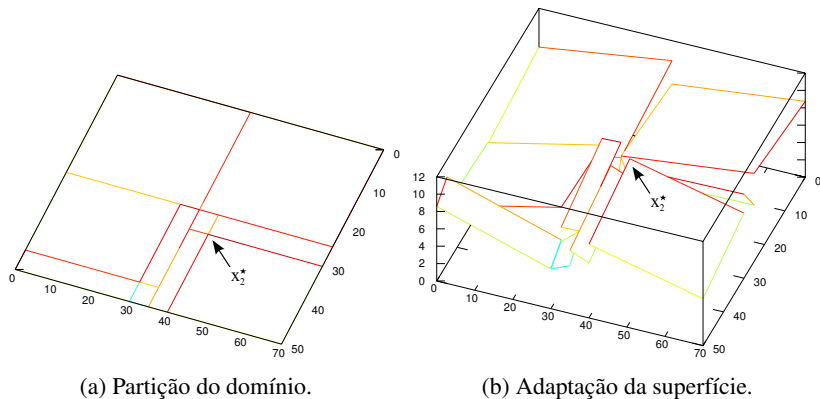


Figura 40 – Adaptação da superfície com pontos aleatórios usando a heurística linear, iteração 2.

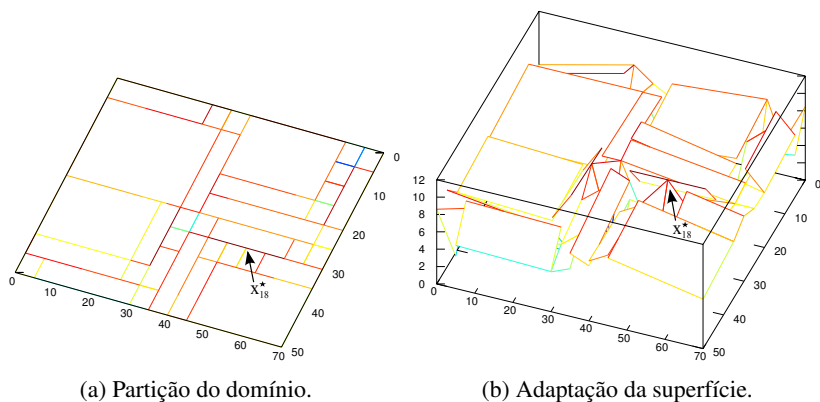


Figura 41 – Adaptação da superfície com pontos aleatórios usando a heurística linear, iteração 18 (última).

Para encontrar o máximo na superfície de pontos aleatórios, usando a LPA bidimensional com heurística linear, foram necessárias 18 iterações. Na adaptação final, quando o ótimo da adaptação x_{18}^* pertence à curva real, o domínio da função foi particionado em 36 retângulos.

4.4.2 Heurística Linear para Superfície com Três Gaussianas

A heurística linear foi aplicada para encontrar o máximo da superfície da Figura 37, gerada pela sobreposição de 3 Gaussianas. O algoritmo convergiu para o ótimo na iteração 45.

São apresentadas a adaptação inicial e as adaptações das iterações 1, 2 e 45 nas Figuras 42, 43, 44 e 45, respectivamente. Também são apresentadas as partições do domínio da função original.

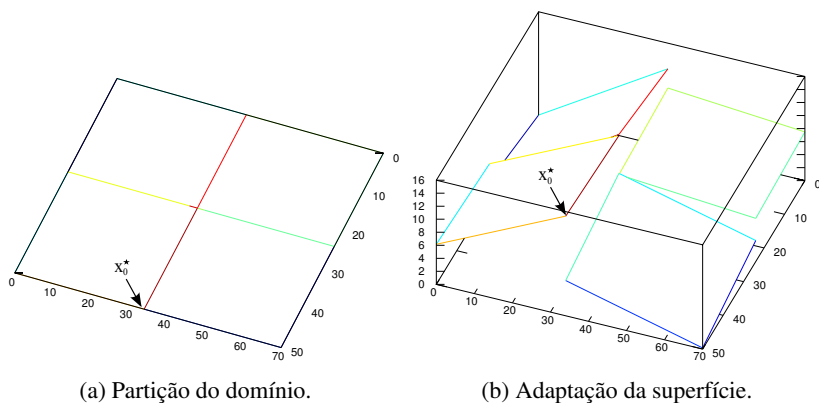


Figura 42 – Adaptação inicial da superfície composta por 3 Gaussianas.

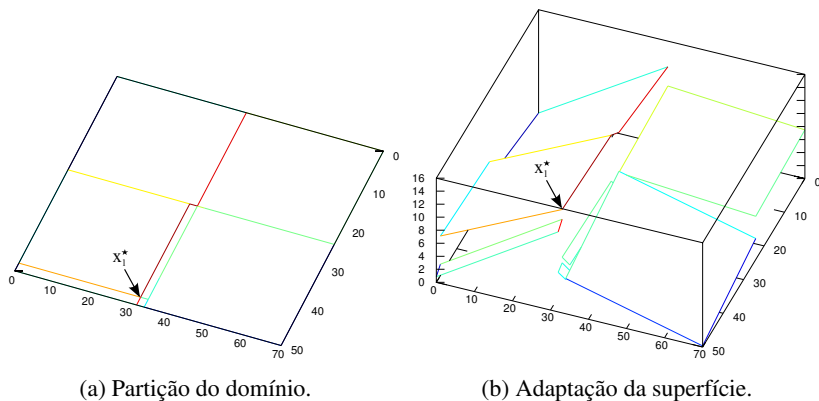


Figura 43 – Adaptação da superfície composta por 3 Gaussianas usando a heurística linear, iteração 1.

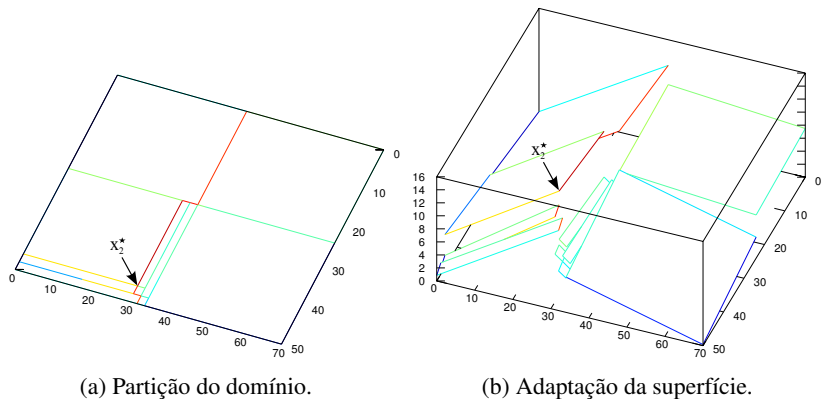


Figura 44 – Adaptação da superfície composta por 3 Gaussianas usando a heurística linear, iteração 2.

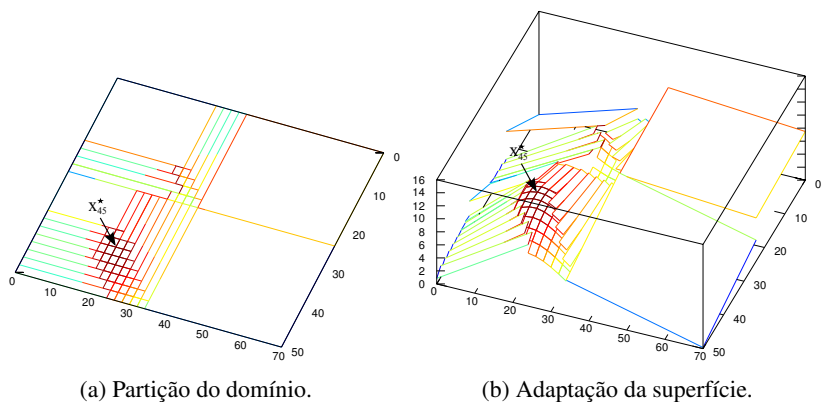


Figura 45 – Adaptação da superfície composta por 3 Gaussianas usando a heurística linear, iteração 45 (última).

Para encontrar o máximo na superfície composta por 3 Gaussianas, usando a heurística linear, foram necessárias 45 iterações. Na adaptação final, quando x_{45}^* pertence à curva real, o domínio da função foi particionado em 36 retângulos.

4.4.3 Heurística Logarítmica para Superfície de Pontos Aleatórios

A heurística logarítmica foi aplicada para encontrar o máximo da superfície gerada por pontos aleatórios, Figura 36. O algoritmo convergiu para o ótimo na iteração 15, um menor número de iterações que a heurística linear.

São apresentadas a adaptação inicial e as adaptações das iterações 1, 2 e 15 nas Figuras 46, 47, 48 e 49, respectivamente. Também são apresentadas as partições do domínio da função original.

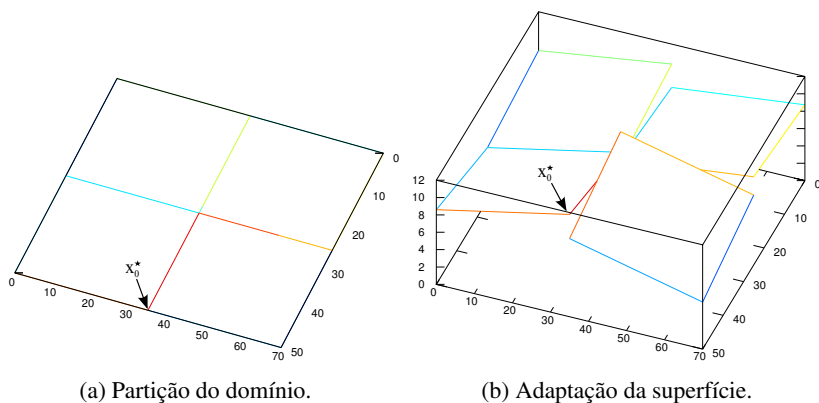


Figura 46 – Adaptação inicial da superfície com pontos aleatórios.

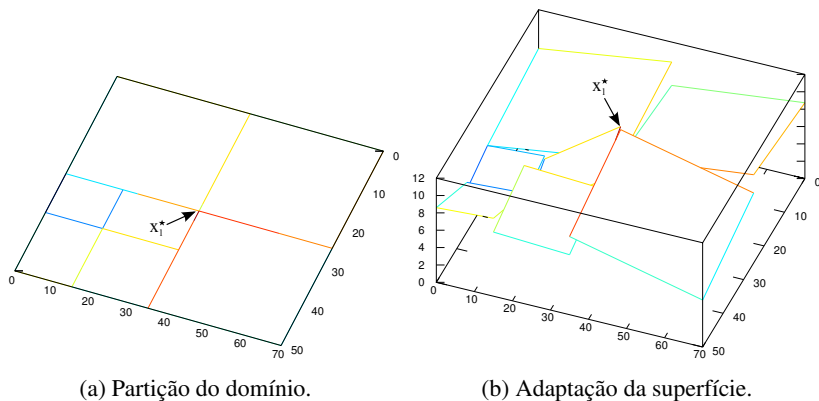


Figura 47 – Adaptação da superfície com pontos aleatórios usando a heurística logarítmica, iteração 1.

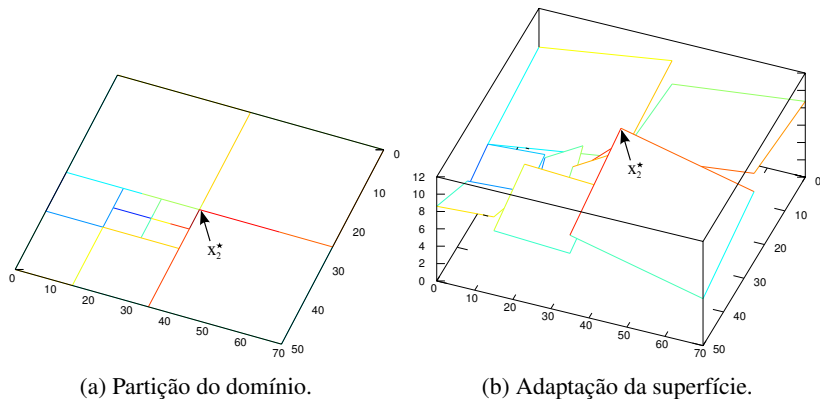


Figura 48 – Adaptação da superfície com pontos aleatórios usando a heurística logarítmica, iteração 2.

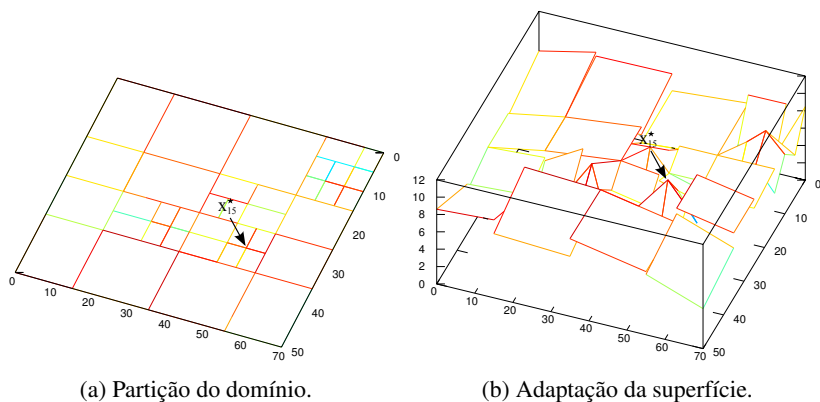


Figura 49 – Adaptação da superfície com pontos aleatórios usando a heurística logarítmica, iteração 15 (última).

Para encontrar o máximo na superfície de pontos aleatórios, usando a heurística logarítmica, foram necessárias 15 iterações. Na adaptação final, quando x_{15}^* pertence à curva real, o domínio da função foi particionado em 53 retângulos.

4.4.4 Heurística Logarítmica para Superfície com Três Gaussianas

A heurística logarítmica foi aplicada para encontrar o máximo da superfície gerada pela sobreposição de 3 Gaussianas, Figura 37. O algoritmo convergiu para o ótimo na iteração 17, um número menor de iterações do que a heurística linear.

São apresentadas a primeira adaptação e as adaptações das iterações 1, 2 e 17 nas Figuras 50, 51, 52 e 53, respectivamente. Também são apresentadas as partições do domínio da função original.

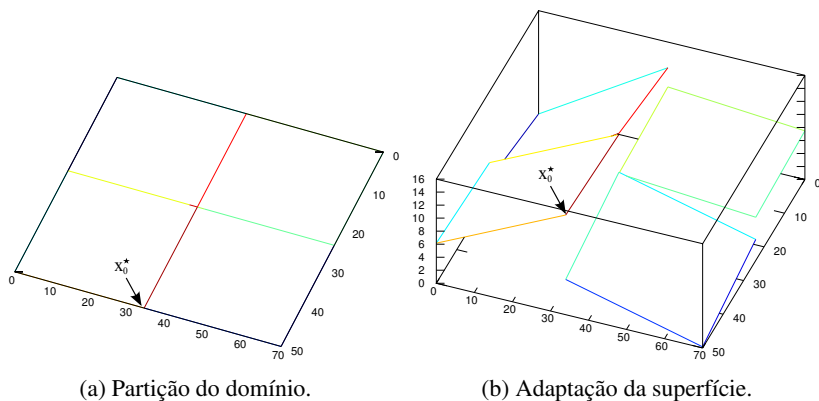


Figura 50 – Adaptação inicial da superfície composta por 3 Gaussianas.

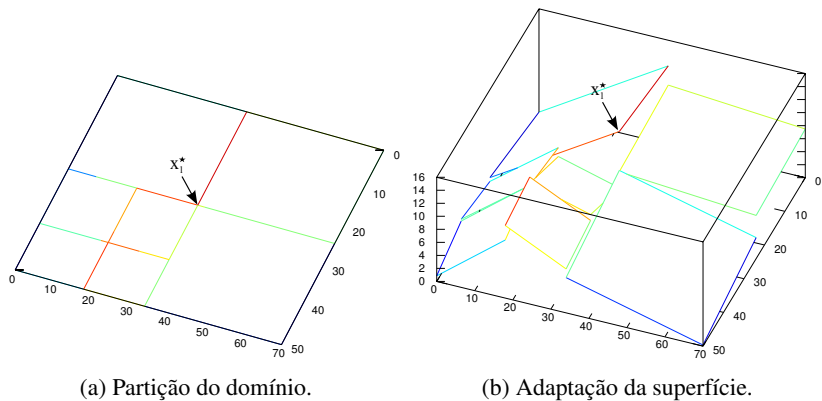


Figura 51 – Adaptação da superfície composta por 3 Gaussianas usando a heurística logarítmica, iteração 1.

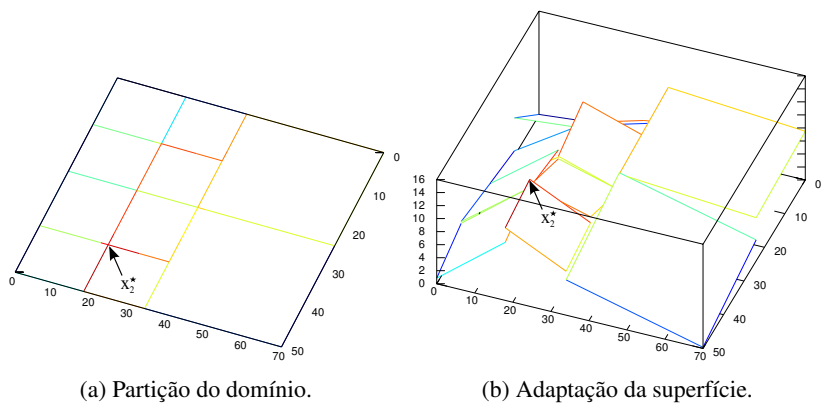


Figura 52 – Adaptação da superfície composta por 3 Gaussianas usando a heurística logarítmica, iteração 2.

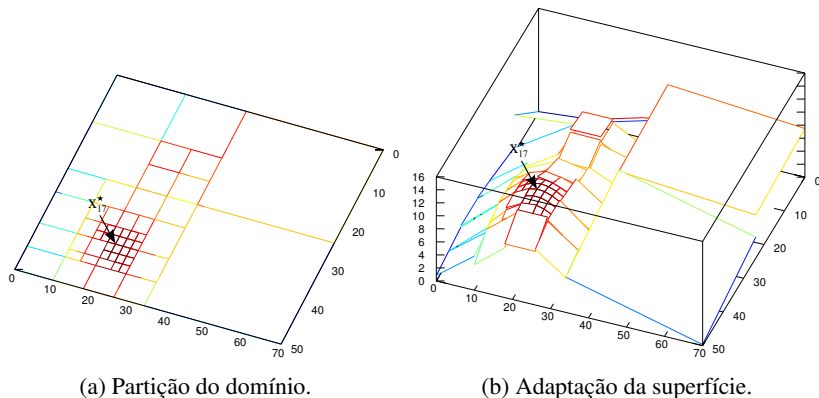


Figura 53 – Adaptação da superfície composta por 3 Gaussianas usando a heurística logarítmica, iteração 17 (última).

Para encontrar o máximo na superfície composta por 3 gaussianas, usando a heurística logarítmica, foram necessárias 17 iterações. Na adaptação final, quando x_{17}^* pertence à curva real, o domínio da função é particionado em 53 retângulos.

4.5 RESULTADOS

Em todos os cenários foi encontrado o máximo da superfície, sendo que a heurística logarítmica convergiu com um menor número de iterações, conforme sintetizado na Tabela 15.

Tabela 15 – Iterações necessárias para se encontrar o máximo nas superfície usando as diferentes heurísticas.

		Superfície	
		Pontos Aleatórios	Sobreposição de 3 Gaussianas
Heurística	Linear	18	45
	Logarítmica	15	17

Na Tabela 16, é apresentado a quantidade de partições gerada por cada heurística na ultima iteração — a que convergiu:

Pode-se observar que LPA bidimensional encontrou o máximo nas superfícies com uma quantidade reduzida de politopos. Para a superfície de

Tabela 16 – Quantidade de partições do domínio na última iteração de adaptação, por heurística e por superfície. Também a quantidade de politopos na função original.

		Superfície	
		Pontos Aleatórios	Sobreposição de 3 Gaussianas
Heurística	Linear	36	73
	Logarítmica	37	53
Função Original		140	875

pontos aleatórios, a heurística linear particionou o domínio em 36 retângulos, já a logarítmica em 37. Na superfície composta por 3 Gaussianas, a linear particionou em 73 e a logarítmica em 53. Conclui-se que o funcionamento da linearização por partes adaptativa bidimensional foi validado.

4.6 SUMÁRIO

Nesta seção foi apresentada a linearização por partes bidimensional e a formulação matemática do modelo DCC para funções bidimensionais. Com base no modelo DCC, foi apresentada uma formulação matemática para gerar uma adaptação da superfícies com menos *breakpoints* que a função original. Esta adaptação subdivide o domínio da função original em retângulos e gera planos que superestimam a função original em cada partição.

Para integrar o modelo de adaptação com o problema de otimização, foram definidas duas heurísticas que geram novas adaptações a partir do ponto ótimo encontrado: linear e logarítmica. Para ilustrar seus funcionamentos, foram resolvidos problemas de encontrar o ponto máximo em uma superfície, sendo utilizadas 2 superfícies: uma gerada por pontos aleatórios e outra gerada pela sobreposição de 3 gaussianas.

Por último foram apresentados os resultados da aplicação da LPA bidimensional. A heurística logarítmica convergiu com menos iterações. A quantidade de politopos geradas na última adaptação ou foi próxima, ou menor para a heurística logarítmica.

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho é apresentada a Linearização por Partes Adaptativa que consiste num processo no qual são geradas adaptações de curvas lineares por partes utilizando subconjunto reduzido dos seus *breakpoints*. Estas adaptações são refinadas através de um processo iterativo com o problema de otimização, sendo almejado facilitar a convergência do problema.

No Capítulo 2 é apresentada a Linearização por Partes Unidimensional. A partir de uma função linear por partes é enunciada a formulação matemática para o problema de adaptação de uma curva unidimensional, sendo este validado com um exemplo simples de adaptação. A formulação da adaptação é então integrada a um problema de otimização, resultando na Linearização por Partes Adaptativa – LPA. Para realizar esta integração são propostas 3 heurísticas, que geram novas adaptações a partir do último ponto ótimo encontrado, são elas: linear, linear fixando pontos e logarítmica.

A heurística linear visa inserir pontos no entorno do ponto ótimo encontrado. A linear fixando os pontos tem como objetivo o mesmo da linear, porém fixando os pontos distantes do ótimo a fim de se reduzir o tempo para gerar a adaptação. Já a heurística logarítmica busca refinar os intervalos, e não a região, próximos ao ponto ótimo. Esta abordagem refina a curva de forma mais global. As três heurísticas foram aplicadas em exemplos simples com sucesso.

No Capítulo 3, a LPA unidimensional é aplicada a um problema real de otimizar a produção num campo de petróleo e gás. A partir de modelos de adaptação que superestimam e subestimam as CDPs, foram definidos dois modelos de campos de petróleo: por aproximação e por relaxação.

O modelo por aproximação é conservador, superestima os custos e subestima as receitas. Desta forma, uma solução quando implementada na prática induz um lucro maior e uma folga adicional nas restrições do que previamente estimado. Outra vantagem é que a qualquer momento da adaptação, a solução encontrada é factível. Conforme observado, a solução encontrada pode não ser um ótimo global, mas é uma boa solução. Porém, este modelo requer certas precauções: a superestimação dos custos pode violar algumas restrições, tornando parte do domínio original do problema infactível.

O outro modelo é uma relaxação do problema original, sendo a abordagem inversa do modelo por aproximação: receitas são superestimadas e custos subestimados. Com este modelo tem-se a garantia de que quando a LPA convergir, com o ótimo coincidindo com a curva real, será encontrado o ótimo global. Uma desvantagem deste modelo é que soluções intermediárias são infactíveis.

Os modelos são então instanciados em diferentes cenários, com variadas quantidades de poços, diferentes tipos de CDPs e diferentes disponibilidades de gás de injeção. Nestes cenários, são avaliados os pontos ótimos encontrados, assim como os tempos computacionais.

No geral, a LPA unidimensional não trouxe ganhos computacionais em relação a uma resolução convencional sem LPA, levando em alguns casos até 25 vezes mais tempo. Os maiores custos computacionais foram na resolução do problema de otimização por serem resolvidos diversas vezes ao longo das iterações. Por este motivo, os ganhos de tempo na adaptação com a heurística linear fixando pontos foram praticamente insignificantes.

Nos cenários com baixa disponibilidade de gás de injeção, no geral, a heurística linear convergiu com menos iterações do que a logarítmica. Isto se deve a um fato observado neste problema para estas disponibilidades: geralmente o ponto ótimo se encontra no início da curva, com baixas vazões de gás de injeção. sendo a região do ótimo adaptada com poucas iterações. Para maiores disponibilidades de gás de injeção, o ponto ótimo se deslocou para a direita, com maiores valores de vazão de gás. Nestes casos, a heurística logarítmica convergiu com menos iterações.

Dentre os modelos avaliados, no geral os por relaxação precisaram de um maior número de iterações para convergir do que o modelo por aproximação. Como esperado, foi verificado que o modelo por aproximação nem sempre convergiu para o ótimo, porém sempre encontrando boas e factíveis soluções. Já o modelo por relaxação, quando convergiu sempre encontrou o ótimo global.

Pode-se concluir que no geral a Linearização por Partes Adaptativa funciona. Porém nos exemplos unidimensionais onde foi aplicada, sua performance ficou abaixo do esperado, levando no geral mais tempo para convergir do que se o problema fosse resolvido sem LPA.

Pode-se concluir que a LPA é uma técnica indicada para problemas em que funções lineares por partes representam uma importante parcela da complexidade. Ela também pode ser usada em problemas no qual se deseja obter um modelo do problema no entorno do ponto ótimo de funcionamento. Desta forma, o modelo é estabelecido *offline* e quando implementado na prática pouca, ou nenhuma, adaptação é necessária.

Outro exemplo candidato à aplicação são problemas muito grandes, nos quais não há memória suficiente para instância-los. A LPA pode ser usada para gerar modelos menores, que são refinados somente nas regiões necessárias.

Para funções de maiores dimensão, especula-se que a importância da LPA no tempo computacional seja significativa. Tendo isto em vista, foram enunciadas no Capítulo 4 as bases para a LPA bidimensional. Para isto, pri-

meiro é formulado o problema de adaptação bidimensional. Este é então integrado a um problema de otimização, sendo propostas duas heurísticas para gerar as novas adaptações: linear e logarítmica. Ambas heurísticas tem o mesmo objetivo e conceito das suas respectivas unidimensionais.

O funcionamento da LPA bidimensional é então verificado na busca pelo máximo em duas superfícies diferentes: uma gerada por pontos aleatórios e outra gerada pela sobreposição de três funções Gaussianas.

Uma escolha feita no modelo bidimensional é de desconsiderar a restrição de continuidade, pois ela mais acrescenta complexidade do que traz benefícios. Com isso, os modelos lineares por partes utilizados no problema de otimização — os que usam os pontos da superfície adaptada — devem permitir descontinuidades, tais como o modelos DCC e DLog.

5.1 CONTRIBUIÇÕES

Algumas contribuições resultantes deste trabalho são:

- Formulação matemática para gerar adaptações de curvas lineares por partes unidimensionais, que superestimam ou subestimam a curva, com um subconjunto reduzido de *breakpoints* da função original.
- Integração e acoplamento do problema de adaptação com o problema de otimização, resultando na Linearização por Partes Adaptativa Unidimensional.
- Proposta de três heurísticas para a LPA unidimensional para gerar adaptações a partir do ponto ótimo encontrado: linear, linear fixando pontos e logarítmica.
- Proposta de dois modelos de campos de petróleo a partir das formulações da LPA: modelo por aproximação e modelo por relaxação.
- Validação do funcionamento da LPA na aplicação de otimização da produção de petróleo e gás, sendo avaliados os resultados e tempos computacionais obtidos.
- Formulação matemática da LPA bidimensional, sendo propostas duas heurísticas para gerar adaptações a partir do ponto ótimo: linear e logarítmica.
- Validação do modelo de LPA bidimensional e suas heurísticas em exemplos ilustrativos.

5.2 TRABALHOS FUTUROS

Embora este trabalho tenha abordado diversos pontos e trazido diversas contribuições, bastante resta a ser desenvolvido.

Um exemplo seria avaliar a performance da LPA Unidimensional com “partida a quente”. No contexto da LPA, a partida a quente consistiria em, ao gerar uma nova adaptação, definir como ponto de partida para o solver o último ponto ótimo encontrado projetado na curva adaptada. Nas aplicações deste trabalho, nenhum cuidado foi levado em relação a este aspecto. Especula-se que a partida a quente poderia acelerar consideravelmente a resolução dos problemas de otimização subsequentes.

Outra sugestão de trabalho futuro seria de usar a LPA bidimensional numa aplicação real, por exemplo em problema de otimização de petróleo e gás cujas CDPs sejam mais realistas, sendo funções não apenas do gás de injeção. Para estes exemplos, poderiam ser feitas as mesmas avaliações de tempos computacionais e resultados obtidos neste trabalho.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BP, B. P. *BP Workbook of Historical Data*. March 2012.
 <<http://www.bp.com/extendedsectiongenericarticle.do?categoryId=9041229&contentId=7075080>>.
- CAMPONOVARA, E.; CONTO, A. de. Lift-gas allocation under precedence constraints: MILP formulation and computational analysis. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, v. 6, n. 3, p. 544–551, July 2009.
- CAMPONOVARA, E.; NAKASHIMA, P. H. Solving a gas-lift optimization problem by dynamic programming. *European Journal of Operational Research*, v. 174, n. 2, p. 1220–1246, 2006.
- CODAS, A. *Otimização da Produção de Poços de Petróleo com Injeção Contínua de Gás e Alinhamento Poço-Separador: Modelos Lineares por Partes e Algoritmos*. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas, UFSC, 2011.
- CODAS, A.; CAMPONOVARA, E. *Test instances of the lift-gas allocation problem with well-separator routing in AMPL format*. 2011.
 <<http://www.das.ufsc.br/~camponog/EJOR-glcsep-paper>>.
- FOURER, R.; GAY, D. M.; KERNINGHAN, B. W. *AMPL - A Modeling Language for Mathematical Programming*. New York, NY: Thomson Brooks/Cole, 2003.
- GEIBLER, B. *Towards Globally Optimal Solutions for MINLPs by Discretization Techniques with Applications in Gas Network Optimization*. Tese (Doutorado) — Naturwissenschaftlichen fakultät der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, 2011.
- MISENER, R.; GOUNARIS, C. E.; FLOUDAS, C. A. Global optimization of gas lifting operations: A comparative study of piecewise linear formulations. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, v. 48, n. 13, p. 6098–6104, 2009.
- PADBERG, M. Approximating separable nonlinear functions via mixed zero-one programs. *Operations Research Letters*, v. 27, n. 1, p. 1–5, 2000.
- SHERALI, H. D. On mixed-integer zero-one representations for separable lower-semicontinuous piecewise-linear functions. *Operations Research Letters*, v. 28, p. 155–160, 2001.

SILVA, T. L. *Formulações Inteiras Mistas para Modelos Lineares por Partes Multidimensionais: Aplicações na Otimização da Produção de Petróleo sob Restrições de Pressão*. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas, UFSC, 2012.

TSOSKOUNOGLOU, M.; AYERIDES, G.; TRITPOULOU, E. The end of cheap oil: Current status and prospects. *Energy Policy*, v. 36, n. 10, p. 3797 – 3806, 2008. ISSN 0301-4215. <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0301421508002322>>.

VASUDEVA, V. Optimization problems using piecewise linear approximation. *Phoenix 2012 Informs*. 2012.

VIELMA, J.; KEHA, A.; NEMHAUSER, G. Nonconvex, lower semicontinuous piecewise linear optimization. *Discrete Optimization*, v. 5, n. 2, p. 467–488, 2008.

VIELMA, J.; NEMHAUSER, G. Modeling disjunctive constraints with a logarithmic number of binary variables and constraints. *Mathematical Programming*, v. 128, n. 1-2, p. 49–72, 2009.

VIELMA, J. P.; AHMED, S.; NEMHAUSER, G. Mixed-integer models for nonseparable piecewise-linear optimization: Unifying framework and extensions. *Operations Research*, v. 58, n. 2, p. 303–315, 2010.

WINKLER, H. W.; BLANN, J. R. In: ARNOLD, K. E.; LAKE, L. W. (Ed.). *Petroleum Engineering Handbook*. Austin, Texas: Society of Petroleum Engineers, 2007. v. 4, cap. Gas Lift.

WOLSEY, L. A. *Integer Programming*. New York, NY: John Wiley & Sons, 1998.