

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**

**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO E SISTEMAS**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO**

**PROCEDIMENTOS DE OTIMIZAÇÃO NO**  
**PLANEJAMENTO E CONTROLE DA QUALIDADE DE**  
**PRODUTOS E PROCESSOS**

**TEREZINHA APARECIDA GUEDES**

**Orientador**

**PROF. Dr. PLINIO STANGE**

**Co-orientador**

**PROF. Dr. R. RADHARAMANAN**

**FLORIANÓPOLIS - SC**

**1996**

**TEREZINHA APARECIDA GUEDES**

**PROCEDIMENTOS DE OTIMIZAÇÃO NO PLANEJAMENTO E  
CONTROLE DA QUALIDADE DE PRODUTOS E PROCESSOS**

Tese apresentada ao programa de Pós-Graduação, em Engenharia de  
Produção da Universidade Federal de Santa Catarina, para obtenção do grau  
de Doutor em Engenharia



0.250.124-7

UFSC-BU

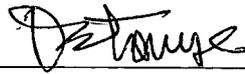
Florianópolis - SC

02/04/1996

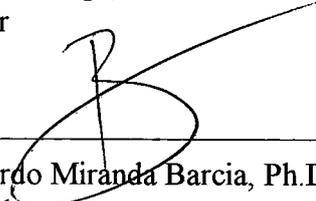
# PROCEDIMENTOS DE OTIMIZAÇÃO NO PLANEJAMENTO E CONTROLE DA QUALIDADE DE PRODUTOS E PROCESSOS

**Terezinha Aparecida Guedes**

Esta tese foi julgada adequada para a obtenção do título de DOUTOR EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO e aprovada em sua forma final pelo orientador e pela banca examinadora do Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção:

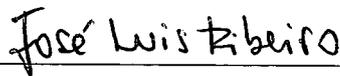


Prof. Plinio Stange, Dr.  
Orientador

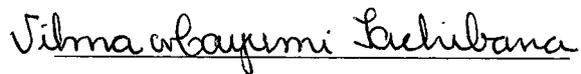


Prof. Ricardo Miranda Barcia, Ph.D.  
Coordenador

## BANCA EXAMINADORA



Prof. José Luiz Duarte Ribeiro, Dr.  
Examinador externo



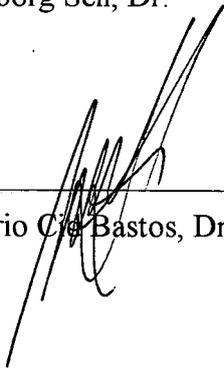
Prof. Vilma Mayumi Tachibana, Dr.  
Examinador externo



Prof. Ingeborg Sell, Dr.



Prof. Robert W. Samohyl, Ph.D.



Prof. Rogério C. Bastos, Dr.  
Moderador

À memória de meu Pai

## AGRADECIMENTOS

Eu gostaria de expressar minha gratidão ao prof. Dr. Plinio Stange, que com grande sabedoria me orientou na realização deste trabalho.

Eu quero agradecer ao prof. Dr. R. Radharamanan por ter viabilizado minha estadia na Marquette University, para a realização da pesquisa bibliográfica.

Eu sou grata, ainda, as instituições: UEM - Universidade Estadual de Maringá, UFSC - Universidade Federal de Santa Catarina, Marquette University - USA pelo apoio e contribuição e ao CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico e a CAPES - Fundação Coordenação de Pessoal de Nível Superior pelo apoio financeiro.

Eu estou também em dívida com meus colegas do DES - Departamento de Estatística da Universidade Estadual de Maringá, pela prestatividade e apoio e a todos, que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

E, em particular, meus agradecimentos a todos os membros de minha família, pela compreensão nas minhas freqüentes ausências nos momentos mais difíceis de nossas vidas, pelo apoio e pelo estímulo.

## SUMÁRIO

<b>SUMÁRIO</b> .....	iii
<b>LISTA DE TABELAS</b> .....	vii
<b>LISTA DE FIGURAS</b> .....	ix
<b>RESUMO</b> .....	x
<b>ABSTRACT</b> .....	xi

### Capítulo 1 - INTRODUÇÃO

1.1 Tema.....	1
1.2 Justificativa e relevância .....	1
1.3 Objetivos.....	3
1.3.1 Objetivo geral.....	3
1.3.2 Objetivos específicos.....	4
1.4 Metodologia.....	5
1.5 Estrutura da pesquisa .....	6

### Capítulo 2 - REVISÃO DA LITERATURA

2.1 Introdução.....	7
2.2 Revisão da metodologia de Taguchi.....	8
2.2.1 Características funcionais de um produto .....	8
2.2.2 Engenharia da qualidade .....	10
2.2.3 Perdas devidas à variação funcional.....	11
2.2.4 Parâmetros ou fatores do experimento.....	15
2.2.5 Modelagem da resposta ou característica funcional.....	16
2.2.6 Planejamento dos fatores ou parâmetros do experimento.....	17
2.2.7 Estatística de desempenho da característica funcional.....	19
2.2.8 Estatística de desempenho recomendadas por Taguchi.....	20
2.2.8.1 Característica do tipo “menor é o melhor”(“the smaller the better”).....	20
2.2.8.2 Característica do tipo “maior é o melhor”(“the larger	

the better”)	21
2.2.8.3 Característica do tipo “nominal é o melhor”(valor objetivo especificado)	22
2.2.9 Variância não ligada à média	22
2.2.10 Variância ligada à média	23
2.2.11 Estratégia de otimização utilizando técnicas de Taguchi	25
2.3. Considerações da literatura sobre as técnicas de Taguchi	26
2.3.1 Considerações sobre as estatísticas de desempenho de Taguchi	27
2.3.2 Considerações sobre o planejamento de Taguchi	31
2.3.3 Planejamentos alternativos	33
2.4 Discussão	35

### Capítulo 3 - PLANEJAMENTOS EXPERIMENTAIS NA INDÚSTRIA

3.1 Introdução	39
3.2 Planejamentos robustos	40
3.3 Definições e terminologia	40
3.4 A importância dos planejamentos experimentais na construção de superfícies de resposta	42
3.5 Comportamento da variância predita	43
3.6 Planejamentos para superfície de resposta	44
3.6.1 Planejamentos para o ajuste de um modelo de primeira ordem	44
3.6.2 Planejamentos para o ajuste de um modelo de segunda ordem	45
3.7 Conclusão	47

### Capítulo 4 - MODELAGEM DA RESPOSTA

4.1 Introdução	48
4.2 Formulação geral do problema	52
4.3 Hipóteses sobre os modelos	53
4.4 Aproximações das funções de resposta	54
4.4.1 Aproximações por polinômios	55
4.4.2 Aproximações por funções “splines”	58
4.5 Procedimento para a modelagem da média e da variância	60

4.5.1	Identificação de $V(\mu)$ .....	61
4.5.2	Modelagem conjunta da média e da variância.....	62
4.5.3	Critérios de avaliação dos modelos.....	62
4.5.3.1	Seleção dos fatores.....	63
4.5.3.2	Função da variância.....	64
4.5.3.3	Exposição visual e análise dos resíduos.....	65
4.5.3.4	Detectando observações influentes e “outliers”.....	66
4.6	Conclusão.....	67

## Capítulo 5 - CRITÉRIOS DE OTIMIZAÇÃO

5.1	Introdução.....	68
5.2	Função perda.....	69
5.3	Formulação matemática do problema.....	71
5.4	Função convexa e função côncava.....	72
5.4.1	Adaptação do algoritmo (sugerido por Stange e desenvolvido por Ivanqui) para os problemas bicritério e multicritério.....	73
5.4.2	Algoritmo de Stange(1993).....	74
5.5	Modelo bicritério.....	76
5.5.1	Considerações e suposições sobre a função utilidade(função perda).....	77
5.5.2	Método de comparação pareada.....	80
5.5.3	Passos gerais para o algoritmo.....	81
5.5.3.1	Característica de qualidade do tipo maior é melhor.....	81
5.5.3.2	Característica de qualidade do tipo menor é melhor.....	82
5.5.3.3	Característica de qualidade do tipo nominal é melhor.....	83
5.6	Modelo multicritério.....	86
5.6.1	Procedimento para resolver o problema multicritério.....	87
5.6.1.1.	Construção da tabela de valores ótimos e cálculo das perdas quadráticas iniciais - fase de cálculos.....	87
5.6.1.2	Início das iterações.....	88
5.6.1.3	Tomada de decisão.....	90
5.6.2	Passos gerais para o algoritmo multicritério.....	90
5.7	Conclusão.....	91

**Capítulo 6 - APLICAÇÕES**

6.1	Otimização de uma máquina de estampar.....	93
6.2	Processo de manufatura de circuitos integrados.....	93
6.2.1	Os planejamentos experimentais utilizados.....	101
6.2.2	Análise do conjunto de dados obtidos pelo planejamento experimental fatorial $3^4$ .....	104
6.2.3	Aplicação do método de Taguchi.....	113
6.2.4	Conclusão.....	114
6.3	Otimização de azulejos cerâmicos .....	116
6.4	Otimização de uma receita química .....	121

**Capítulo 7 - CONCLUSÃO**

7.1	Discussão final.....	127
7.2	Recomendações para pesquisas futuras.....	129

**Apêndices**

A	Comparação de modelos.....	131
B	Transformação na variável dependente.....	132
C	Detecção de observações influentes e “outliers”.....	134

<b>FONTES BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>135</b>
-----------------------------------	------------

## LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 - Valores ótimos individuais e valores de todas as funções nos pontos ótimos.....	88
Tabela 6.1.1 - Valores obtidos através do algoritmo bicritério.....	97
Tabela 6.1.2 - Valores obtidos por Vining e Myers (1990) e as perdas quadráticas associadas.....	98
Tabela 6.2.1 - Níveis dos fatores experimentais.....	99
Tabela 6.2.2 - Matriz do planejamento para o método de Taguchi .....	101
Tabela 6.2.3 - Matriz de ruído para o método de Taguchi .....	101
Tabela 6.2.4 - Matriz produto para o método de Taguchi .....	101
Tabela 6.2.5 - Teste de Kolmogorov-Smirnov e de Shapiro-Wilk.....	105
Tabela 6.2.6 - Análise de variância para as médias. Método de Taguchi .....	113
Tabela 6.2.7 - Análise de variância para as razões sinal-ruído.....	113
Tabela 6.2.8 - Estimativas das médias das razões sinal-ruído.....	114
Tabela 6.2.9 - Ponto ótimo para os fatores do experimento obtido em cada método...	115
Tabela 6.2.10 - Média e variância das corridas de confirmação e perda quadrática....	115
Tabela 6.3.1 - Fatores experimentais e níveis utilizados por Bernardin(1994) nos experimentos 1 e 2.....	116
Tabela 6.3.2 - Valores ótimos individuais e valores de todas as funções para os pontos ótimos.....	118
Tabela 6.3.3 - Comparação dos resultados obtidos pelos três métodos.....	119
Tabela 6.3.4 - Comparação dos valores ótimos obtidos para as variâncias pelos métodos propostos por Caten (1995) e Guedes.....	120
Tabela 6.3.5 - Perdas quadráticas associadas aos pontos ótimos obtidos pelos três métodos .....	120
Tabela 6.4.1 - Valores ótimos obtidos para as funções das médias das características de qualidade - método proposto por Guedes.....	124
Tabela 6.4.2 - Valores ótimos obtidos para as funções das médias das características	

de qualidade - método proposto por Caten (1995).....	125
Tabela 6.4.3 - Perdas quadráticas associadas aos pontos ótimos obtidos pelos dois métodos.....	125
Tabela 6.4.4 - Resultado da análise de sensibilidade.....	126

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Esquema para representar um produto - Taguchi e Phadke (1994).....	15
Figura 2.2 - Um exemplo de um planejamento de fatores do experimento.....	18
Figura 5.1 - Fluxograma para o algoritmo bicritério.....	85
Figura 5.2 - Fluxograma para o algoritmo multicritério.....	92
Figura 6.2.1 - Gráfico de resíduo vs valores ajustados.....	104
Figura 6.2.2 - Distribuição de probabilidade dos resíduos.....	104
Figura 6.2.3 - Gráfico de probabilidade normal.....	105
Figura 6.2.4 - Gráfico de resíduo vs valores ajustados.....	106
Figura 6.2.5 - Distribuição de probabilidade dos resíduos.....	106
Figura 6.2.6 - Gráfico de probabilidade normal.....	106
Figura 6.2.7 - Gráfico Lambda - QMRes vs Lambda.....	106
Figura 6.2.8 - Gráfico de resíduo vs valores ajustados.....	107
Figura 6.2.9 - Distribuição de probabilidade dos resíduos.....	107
Figura 6.2.10 - Gráfico de probabilidade normal.....	107
Figura 6.2.11 - Gráfico de resíduo vs valores ajustados.....	108
Figura 6.2.12 - Distribuição de probabilidade dos resíduos.....	108
Figura 6.2.13 - Gráfico de probabilidade normal.....	108
Figura 6.2.14 - Gráfico de resíduo vs valores ajustados.....	109
Figura 6.2.15 - Distribuição de probabilidade dos resíduos.....	109
Figura 6.2.16 - Gráfico de probabilidade normal.....	109
Figura 6.2.17 - Gráfico Lambda - QMRes vs Lambda.....	110
Figura 6.2.18 - Gráfico de resíduo vs valores ajustados.....	110
Figura 6.2.19 - Distribuição de probabilidade dos resíduos.....	110
Figura 6.2.20 - Gráfico de probabilidade normal.....	110
Figura 6.2.21 - Média das razões sinal-ruído para os níveis dos fatores.....	114

## RESUMO

Esta pesquisa propõe procedimentos simples e eficientes na melhoria da qualidade de produtos e processos para todos os três tipos de características: **o maior é melhor, o menor é melhor e o nominal é melhor**. Os procedimentos compreendem três etapas: o planejamento estatístico dos experimentos, a modelagem das respostas e a otimização dos modelos de respostas. As respostas são a média e a variância (ou desvio-padrão) de cada uma das características estudadas. Os problemas são classificados como bicritério se a qualidade do produto puder ser avaliada por uma única característica ou como multicritério se a qualidade do produto exigir que mais de uma característica seja investigada. A importância na escolha do planejamento experimental também é discutida. Para a modelagem das respostas, é apresentada uma seqüência de passos que leva a modelos representativos. Quando as funções que representam os modelos, não são convexas e nem côncavas, será utilizada otimização global em conjunto com os algoritmos de otimização propostos. Para os problemas classificados como bicritério, é apresentado um procedimento de otimização para cada tipo de característica de qualidade. Nesses algoritmos, busca-se a combinação ótima dos níveis dos fatores e, simultaneamente, acompanha-se a perda que ocorre em cada iteração. Para os problemas classificados como multicritério, é apresentado um procedimento de otimização que contempla todos os tipos de características de qualidade. Esse procedimento envolve uma exploração seqüencial das soluções e permite a análise de sensibilidade das funções que representam os modelos. O pesquisador acompanha a perda que ocorre em cada iteração, enquanto busca o ótimo equilibrado entre as múltiplas funções-objetivo.

## ABSTRACT

The present dissertation proposes simple and efficient procedures in quality assurance of products and processes for all three types of characteristics: the larger the better, the smaller the better, and the nominal is the best. The procedures comprise three stages: statistical planning of the experiments, response modeling, and optimization of response models. The responses are the mean and the variance (or standard deviation) of each of the examined characteristics. The problems are classified as bicriterion, if the quality of the product can be evaluated by one single characteristic, or as multicriterion, if the quality of the products requires that more than one characteristic be examined. The importance of selecting the experimental planning is also discussed. As for response modeling, a sequence of steps leading to representative models is presented. When the functions representing the models are not convex neither concave, a global optimization is used together with the proposed optimization algorithms. As for the problems classified as bicriterion, an optimization procedure is presented for each type of quality characteristics. In these algorithms, an optimal combination of factor levels is tried to be attained and, at the same time, the loss that occurs in each iteration is verified. As for the problems classified as multicriterion, an optimization procedure applicable to all types of quality characteristics is presented. This procedure involves a sequential search for solutions as allows the sensibility analysis of the functions that represent the models. The analyst verifies the loss that occurs in each iteration, while trying to attain the optimal balanced between the multiple objective-functions.

## CAPÍTULO 1.º

# 1 - INTRODUÇÃO

### 1.1 - TEMA

Controle da qualidade de produtos e processos fora da linha de produção.

### 1.2 - JUSTIFICATIVA E RELEVÂNCIA

A intensa competição dentro do mercado internacional tem revelado que a qualidade dos produtos é a chave para o sucesso das indústrias. Assim sendo, a melhoria da qualidade tem sido a grande preocupação dos engenheiros. Na busca por uma solução para este problema, o planejamento da qualidade dos produtos e processos, em todos os estágios, desde o planejamento à fabricação e venda tem sido realizado. Um elemento importante é o uso dos experimentos estatisticamente planejados. Entre muitos pesquisadores; Montgomery (1991), Kackar (1985), Phadke et al. (1985), Taguchi e Wu (1980) e Box et al. (1986, 1988) têm demonstrado a eficiência da aplicação de planejamentos experimentais na melhoria da qualidade de produtos industrializados.

Nos últimos anos, uma coleção de técnicas para a melhoria da qualidade foi desenvolvida pelo Professor Genichi Taguchi visando a uma grande variedade de problemas de engenharia no planejamento, na evolução e na fabricação de produtos. Tais técnicas têm provocado grande interesse em engenheiros e estatísticos, que se precipitam em copiá-las sem um julgamento prévio.

O objetivo destas técnicas é o desenvolvimento de produtos que sejam robustos, isto é, que sejam pouco afetados por variações inevitáveis que venham ocorrer em seus componentes, condições de fabricação ou pelo ambiente em que serão usados.

Como uma referência de grande importância para os métodos de Taguchi, pode-se citar a monografia de Taguchi e Wu (1980). Outras mais recentes podem ser encontradas ( ver, por exemplo, Phadke (1989), Roy (1990) e Schmidt e Launsby (1992)). Muitos autores têm publicado artigos promovendo o uso direto destas técnicas, entre eles Phadke (1982), Taguchi e Phadke(1984), Byrne e Taguchi (1986), Quinlan (1989) e todos os autores que publicaram seus artigos no livro “Taguchi Methods: case studies from the U.S. and Europe”, editado por Wu (1989).

Entretanto, muitas controvérsias sobre o uso destes métodos têm sido assunto de discussões entre vários autores. Estudos minuciosos das estatísticas envolvidas e das técnicas de otimização destas estatísticas têm revelado falhas.

Muitos estatísticos e engenheiros vêm demonstrado que as estatísticas utilizadas como o desempenho a ser medido e as técnicas de otimização recomendadas por Taguchi são freqüentemente difíceis de entender, ineficientes e, algumas vezes, grosseiramente incorretas. Por esta razão, eles têm criticado a aplicação destas estatísticas de desempenho e desenvolvido procedimentos alternativos, estatisticamente mais eficientes com o objetivo de melhorar a qualidade de produtos fabricados. Ver, por exemplo, Nair e Pregibon (1986), Leon, Shoemaker e Kackar (1987), Box (1988), Stephens (1991), Chan, Gan e Mark (1992) e Castillo e Montgomery (1993).

No entanto, as preocupações com a engenharia de produtos, que motivaram os métodos de Taguchi, são de importância fundamental, para se ter uma excelente prática industrial. Assim, é essencial livrar estas preocupações dos engenheiros de métodos que sejam ineficientes e incorretos com os quais eles lidam freqüentemente. As partes incorretas devem ser identificadas e corrigidas. Além disso, métodos que sejam simples e eficientes devem ser pesquisados e propostos.

O que se observa, na literatura, é que muitas pesquisas têm sido direcionadas com o objetivo de melhorar a eficiência do método de Taguchi. Porém, poucos direcionam suas pesquisas para as características de qualidade dos tipos maior é melhor e menor é melhor. Os poucos trabalhos direcionados para estas características são complicados ou ineficientes. Portanto, nota-se uma lacuna nos procedimentos alternativos que já foram propostos na literatura.

Dada a importância que estas características apresentam, pela quantidade de produtos que possuem as características de qualidade dos tipos maior é melhor e menor

é melhor, todo estudo que venha contribuir para o entendimento de um processo destes tipos será de relevância.

Este trabalho apresenta procedimentos simples e eficientes, que abrange o planejamento dos experimentos, a modelagem, a análise e a otimização dos resultados experimentais, para todos os três tipos de características de qualidade para problemas de resposta única e para problemas de multirrespostas. Estes são problemas considerados de mais difícil solução, porque envolvem a otimização de muitas funções objetivo conflitantes.

Os planejamentos experimentais exigem o conhecimento de técnicas estatísticas e matemáticas para a escolha do plano que irá oferecer dados que permitam atingir o objetivo do caso estudado.

Para a modelagem das respostas é necessário ter o conhecimento de técnicas de regressão multivariada e a habilidade de reconhecer o melhor modelo para representar os dados obtidos.

Os procedimentos de otimização serão simples, porém, requerem conceitos de otimização global. Ou seja, em muitos casos será preciso lidar com otimização de funções não convexas e nem côncavas, não lineares e, às vezes, otimização mista.

## **1.3 - OBJETIVOS**

### **1.3.1 - OBJETIVO GERAL**

O objetivo geral desta pesquisa é propor procedimentos alternativos, simples e eficientes, que se utilizem de técnicas de planejamentos experimentais e otimização, na melhoria da qualidade de produtos e/ou serviços e que contemple todos os três tipos de características de qualidade: maior é melhor, menor é melhor e nominal é melhor, em substituição às técnicas de Taguchi.

### 1.3.2 - OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Os procedimentos são desenvolvidos para atingir os seguintes objetivos específicos:

- 1) discutir a importância da escolha do planejamento experimental;
- 2) apresentar um roteiro para a modelagem das respostas;
- 3) criar algoritmos para otimizar problemas bicritério e multicritério, que permitam observar as variações enquanto buscam o ótimo;
- 4) obter um conjunto de valores para os fatores experimentais, com variação mínima, que leve ao nominal. Isto é, obter o conjunto de níveis dos fatores, que influenciam na qualidade do produto, contribuindo para a fabricação de produtos robustos;
- 5) demonstrar que não há necessidade de utilizar a razão sinal-ruído, para a geração da estatística de desempenho;
- 6) substituir a matriz dos fatores de ruído (arranjo externo) pelo uso do arranjo combinado;
- 7) estudar a sensibilidade dos modelos utilizados.

## 1.4 - METODOLOGIA

Para o desenvolvimento desta pesquisa, a literatura que poderia contribuir para alcançar os objetivos aqui propostos, na seqüência abaixo, foi explorada.

Inicialmente, os livros escritos por Taguchi e uma série de livros e artigos de vários autores, a respeito do assunto, foram lidos e minuciosamente analisados. No final deste estudo, um capítulo de revisão bibliográfica, composto de duas partes, foi escrito. Na primeira parte do capítulo, a metodologia de Taguchi foi sumariada e, na segunda, as opiniões de vários autores foram apresentadas.

Após a leitura dos artigos e livros, que apresentam as técnicas alternativas e análise das mesmas, foi iniciada a construção dos procedimentos aqui propostos, nos quais se parte da escolha do planejamento experimental seguindo a modelagem das respostas e, finalmente, a otimização dos modelos de respostas. Para a construção de cada uma destas etapas foi realizado um estudo minucioso.

Para a escolha do planejamento experimental, alguns dos mais recomendados planejamentos, para a obtenção de dados de resposta, foram apresentados e a influência destes na construção de superfícies de resposta foi discutida.

Para a modelagem da resposta, uma seqüência de passos, que deverão ser seguidos, foram recomendados.

E, finalmente, um procedimento de otimização bicritério, para os problemas de resposta única, para cada tipo de característica de qualidade e um procedimento de otimização multicritério, para os problemas de multirrespostas, que engloba todos os tipos de características de qualidade foram apresentados.

Os procedimentos foram ilustrados e comparados, utilizando-se aplicações retiradas da literatura. Para o caso bicritério uma aplicação foi realizada diretamente com dados da literatura e outra com dados simulados, cuja aplicação também foi retirada da literatura. Para o caso multicritério, os modelos utilizados foram os apresentados por Caten (1994) em sua dissertação de mestrado.

## 1. 5- ESTRUTURA DA PESQUISA

Capítulo 1.º - Introdução

Capítulo 2.º - Este capítulo é composto de duas partes. A primeira parte contém uma revisão da metodologia de Taguchi e a segunda apresenta uma visão geral das opiniões de vários autores sobre o assunto.

Capítulo 3.º - Neste capítulo o problema de escolher o planejamento experimental foi abordado. Alguns planejamentos experimentais, recomendados na literatura, foram discutidos.

Capítulo 4.º - Aqui, técnicas de modelagem para as médias e para as variâncias das respostas, observadas na aplicação dos experimentos recomendados no capítulo 3.º, foram apresentadas. Foi sugerida uma seqüência de passos que devem ser considerados para se obter excelentes modelos de respostas.

Capítulo 5.º - Após a obtenção dos modelos, que representam médias e variâncias das respostas, procedimentos de otimização para estes modelos são necessários. Neste capítulo, os problemas são definidos como sendo bicritério ou multicritério. Um problema é dito ser bicritério se apenas uma característica de qualidade está sendo estudada, caso contrário, o problema é denominado multicritério. Para os problemas bicritério um procedimento de otimização, para cada tipo de característica de qualidade, foi desenvolvido e para os problemas multicritério um único procedimento de otimização que engloba todos os tipos de características de qualidade foi desenvolvido.

Capítulo 6.º - Neste capítulo, quatro aplicações são apresentadas. Duas delas exemplificam o procedimento bicritério e as outras duas exemplificam o problema multicritério.

Capítulo 7.º - Este capítulo traz uma discussão final da pesquisa e algumas recomendações para futuras pesquisas.

## CAPÍTULO 2.º

# 2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

## 2.1 - INTRODUÇÃO

A demanda por um produto, em uma economia competitiva, é grandemente afetada por sua qualidade e por seu preço de venda. O preço de venda é determinado pelo custo total de produção, pelo custo de marketing, pela demanda e pela margem de lucro. Duas características importantes de um produto são a qualidade e o custo [Kackar (1989)]. Desde o término da 2.º Guerra Mundial, o Dr. Genichi Taguchi, engenheiro japonês, tem introduzido técnicas com o objetivo de melhorar qualidade e reduzir custos. Naquela época, seu trabalho era conduzir experimentos e testes em um laboratório de pesquisas chamado "Electrical Communication Laboratories". Seus métodos de planejamentos e processos de otimização foram desenvolvidos em um esforço para produzir alta qualidade dos produtos, sob as circunstâncias japonesas daquela década. As circunstâncias eram caracterizadas pela escassez de matéria prima, pobreza dos equipamentos de manufatura e pequeno número de engenheiros bem treinados. Atualmente, seus métodos de otimização são usados rotineiramente, para obter alta eficiência em planejamento, desenvolvimento e produção [Taguchi (1971), (1987), (1993) e Taguchi e Phadke (1984)].

Taguchi define custo como a perda causada à sociedade antes de o produto ser enviado ao consumidor.

Os componentes do custo total social incluem:

- a) matéria prima, energia, trabalho e despesas em produzir unidades perfeitas;
- b) recursos desperdiçados em produzir unidades não aproveitáveis;
- c) efeitos colaterais ou efeitos prejudiciais produzidos durante a fase de manufatura.

O custo total para a sociedade pode ser reduzido pela minimização das perdas e pela minimização da fabricação de produtos, cujos efeitos sejam prejudiciais. Após os

gastos serem minimizados, os maiores componentes do custo são a matéria prima, a energia, o trabalho e as despesas em produzir unidades aproveitáveis do produto.

Do ponto de vista de Taguchi, a qualidade de um produto é avaliada pela perda causada à sociedade, desde que este seja enviado ao consumidor [Kackar (1989), Taguchi e Phadke (1985), Taguchi (1982, 1993)]. Existem muitas maneiras de um produto causar perdas à sociedade, entre outras:

- a) perda devida ao efeito colateral do produto;
- b) perda devida a variações nas características funcionais do produto.

Por exemplo, alguns remédios produzem efeitos colaterais indesejáveis, que depreciam o valor do produto. Similarmente, um automóvel é muito útil, mas o ar poluído e o barulho produzido por seu uso são claras perdas para a sociedade. Portanto, esforços devem ser feitos para reduzir o efeito colateral gerado por um produto.

Todo produto tem numerosas características funcionais. Entretanto, a qualidade pode ser definida em termos das características funcionais individuais de cada um. Desta forma, o valor real de uma característica funcional pode ser diferente para diferentes unidades do produto, e ainda pode mudar no tempo para uma dada unidade, pois cada característica funcional é uma entidade variável. A qualidade pode ser pensada em termos de perda social devida a variações nas características funcionais do produto, durante o seu tempo de vida e entre diferentes unidades do mesmo.

## **2.2.- REVISÃO DA METODOLOGIA DE TAGUCHI**

### **2.2.1 - CARACTERÍSTICAS FUNCIONAIS DE UM PRODUTO**

As características funcionais de um produto são definidas como características finais, que determinam a funcionalidade do produto com respeito à satisfação das necessidades do usuário [Kackar (1985, 1989)]. Os produtos, em geral, têm muitas características de interesse dos seus usuários. Para determinar o grau de satisfação com uma característica funcional, o seu estado ideal, do ponto de vista do consumidor, deve ser conhecido. Este estado ideal é chamado valor nominal. A determinação do valor

nominal não é uma tarefa trivial, porque depende de muitos fatores incluindo a intenção com que se usa o produto. Todas as especificações das características funcionais deverão ser determinadas em termos dos níveis nominais e tolerâncias em torno dos níveis nominais.

O desvio do valor nominal de uma característica funcional, sobre diferentes unidades do produto e para cada unidade durante o seu tempo de vida sob diversas condições de operação, é referido como variação funcional. Quanto menor a variação funcional em torno do valor nominal, melhor é a qualidade do produto.

Os fatores que provocam o desvio da característica funcional do produto de seu valor nominal são chamados fatores de ruído, e podem ser classificados em três categorias [Taguchi (1982), Kackar (1985, 1989), Taguchi e Phadke (1989)]:

- a) fatores externos;
- b) imperfeições na produção;
- c) deterioração do produto.

Os fatores de ruídos externos são variações no ambiente de operação, como temperatura, umidade, vibrações devidas à proximidade de máquinas, erros humanos na utilização do produto etc. As variações nos parâmetros dos produtos de unidade para unidade são inevitáveis em um processo de produção. Os desgastes devidos ao uso são fontes de fatores de ruído causadas pela deterioração do produto.

A qualidade e o custo de produtos manufaturados são afetados por todos os estágios do ciclo de desenvolvimento do produto, mas é o planejamento do projeto do produto e do processo de sua manufatura, que determinam o grau de variação funcional e o custo de manufatura. O ciclo de desenvolvimento de um produto pode ser particionado em três estágios separados, mas sobrepostos: planejamento do produto, planejamento do processo e manufatura [Kackar (1989)].

Para o desenvolvimento do produto, os engenheiros fixam as especificações do material, componentes, configurações e apresentação. O planejamento do processo pode envolver criação de um novo processo ou modificação de um processo existente para produzir o novo produto. O departamento de manufatura usa o processo de manufatura para produzir as unidades do produto [Kackar (1985), (1989)].

### 2.2.2 - ENGENHARIA DA QUALIDADE

O objetivo da Engenharia da qualidade é fabricar produtos que sejam robustos com respeito a todos os fatores de ruído.

Robustez significa que as características funcionais do produto devem ser insensíveis às variações nos fatores de ruído. Para obter robustez, empenhos devem ser iniciados já durante o planejamento do produto e continuar através do planejamento do processo de produção e fabricação.

O empenho em controlar a qualidade durante o planejamento do produto e o planejamento do processo de produção é chamado controle de qualidade fora da linha (off-line), enquanto o empenho durante a produção é chamado controle de qualidade na linha (on-line).

No controle de qualidade fora da linha, Taguchi direciona sua abordagem, através de um procedimento de três passos, descritos abaixo, para determinar e controlar fatores que podem causar desvios das características funcionais do produto de seus valores objetivos:

- a) planejamento do sistema - Consiste na definição do planejamento do modelo básico que apresenta as funções esperadas do produto. Nesta etapa, é realizada a seleção do material, das partes, dos componentes e do sistema de montagem;
- b) planejamento de parâmetros/otimização do planejamento - Determinação de valores para os fatores controláveis que minimizam os efeitos dos fatores de ruído sobre as características funcionais do produto. Isto é, seleção dos valores para as variáveis do planejamento ou fatores, que tornam o produto menos sensível às causas de variações. Os valores selecionados são denominados valores ótimos. A principal técnica estatística utilizada em planejamento dos parâmetros é o planejamento de experimentos, utilizando arranjos ortogonais e análise de variância;
- c) planejamento de tolerâncias - Tolerâncias ou intervalos de variação para os valores dos fatores ou variáveis do planejamento, determinados durante o estágio de planejamento de parâmetro, são obtidas para melhorar a qualidade. Isto é, se o

planejamento de parâmetro falha na escolha dos níveis dos fatores para produção de baixa variação funcional do produto, então as tolerâncias são seletivamente reduzidas com base em seus custos efetivos.

### 2.2.3. - PERDAS DEVIDAS À VARIAÇÃO FUNCIONAL

Na identificação do conjunto de valores ótimos dos fatores, é necessário que haja um critério de otimização. Um tal critério é a função perda. Quando uma característica funcional desvia de seu valor nominal, alguma perda financeira ocorre. Esta perda financeira é, às vezes, chamada perda da qualidade, sendo usada como expressão do nível de qualidade.

Seja  $Y$  o valor de uma característica funcional e seja  $m$  seu valor nominal. O valor de  $Y$  pode ser diferente para diferentes unidades do produto e também pode mudar ao longo do tempo para uma dada unidade. Em termos estatísticos  $Y$  é uma variável aleatória com alguma distribuição de probabilidade, cujos parâmetros são os parâmetros do planejamento do produto. A variabilidade de  $Y$  em torno do valor nominal  $m$  causa perdas financeiras para o consumidor.

Seja  $l(Y)$  a função que representa a perda financeira para o consumidor, durante o ciclo de vida do produto, devido ao desvio de  $Y$  em relação ao seu valor nominal  $m$ . Quanto maior o desvio da característica funcional  $Y$  de seu valor nominal, maior é a perda  $l(Y)$ . Segundo Taguchi (1993), quando  $Y$  encontra o valor nominal  $m$ , a perda  $l(Y)$  é mínima e, geralmente, a perda financeira pode ser assumida zero sob a condição ideal, isto é,

$$l(m) = 0. \quad (2.1)$$

Desta forma, a primeira derivada da função perda com respeito a  $Y$  será zero. Pode-se obter a seguinte equação:

$$l'(m) = 0. \quad (2.2)$$

Expandindo a função perda  $l(Y)$  em torno do seu valor nominal  $m$ , através da expansão da série de Taylor e considerando as equações (2.1) e (2.2), obtém-se a seguinte equação:

$$\begin{aligned}
 l(Y) &= l(m) + l'(m)(Y-m)/1! + l''(m)(Y-m)^2/2! + \dots \\
 &= l''(m)(Y-m)^2/2! + \dots
 \end{aligned}$$

O termo constante e o termo linear tornam-se zero pelas equações (2.1) e (2.2). Se os termos de ordem superior a dois podem ser considerados não importantes, a função perda pode ser expressa como um termo ao quadrado multiplicado por uma constante  $k$ , isto é,

$$l(Y) = k(Y - m)^2. \quad (2.3)$$

Quando o desvio da característica funcional do valor nominal aumenta, a correspondente função perda (perda da qualidade) também aumenta. Quando o desvio excede as especificações de tolerâncias, o produto é considerado defeituoso. Seja  $A$  a perda em produzir um produto defeituoso e o correspondente desvio  $\Delta$ . Substituindo  $A$  e a tolerância  $\Delta$  na equação (2.3) pode-se determinar o valor da constante  $k$ , através da seguinte equação:

$$\begin{aligned}
 k &= (\text{Custo de um produto defeituoso}) / (\text{tolerância})^2 \\
 &= \frac{A}{\Delta^2}.
 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Desde que a característica funcional do produto  $Y$  e, portanto, a perda quadrática  $l(Y)$ , seja uma variável aleatória, o nível de qualidade pode ser definido pelo valor esperado de  $l(Y)$ . Assim, denotando por  $L$  a perda quadrática esperada tem-se:

$$L(Y) = E[l(Y)] = k E[(Y-m)^2]. \quad (2.5)$$

Taguchi sugere que a qualidade do produto com respeito a uma característica  $Y$  deve ser definida pela perda quadrática esperada  $L$ . Nota-se que a perda quadrática esperada é uma função dos parâmetros do planejamento do produto.

Sejam

$$E(Y) = \mu = m \quad (2.6)$$

e

$$\text{Var}(Y) = E[(Y-m)^2] = \sigma^2. \quad (2.7)$$

A variância é uma medida da variabilidade devido à falha de mensuramento, desvio dos itens manufaturados de seus níveis nominais e inadequado armazenamento do produto final.

Dadas as equações (2.6) e (2.7), a perda quadrática sobre todos os itens produzidos, equação (2.5), torna-se:

$$L(Y) = E[I(Y)] = k E[(Y-\mu)^2] = k\sigma^2.$$

Observa-se que a redução da variância traz conseqüências benéficas. Isto leva engenheiros de planejamento e de produto a terem interesse em produzir produtos, cujas características funcionais encontrem um valor nominal e em assegurar que a variabilidade do produto em torno deste valor seja a menor possível.

O conceito de perda quadrática esperada implica que a medida fundamental da variabilidade é o quadrado médio do erro em torno do valor nominal ( $m$ ) e não a variância. Sendo o quadrado médio do erro a soma da variância e do quadrado do viés (isto é, a diferença entre a média e o valor nominal), tanto variância como viés são importantes componentes da variabilidade. Por exemplo, um produto poderá ser mal planejado ou mal produzido de forma que  $\mu = m + \delta$ , onde  $\delta$  seja um viés fixado afetando todo item produzido. Sob estas circunstâncias a perda quadrática esperada torna-se:

$$\begin{aligned} L(Y) &= E[I(Y)] = E[k(Y-m)^2] \\ &= E[k\{(Y-\mu)+\delta\}^2] = k(\sigma^2 + \delta^2). \end{aligned}$$

Esta versão da função perda é útil, quando um específico valor nominal é melhor e a perda cresce simetricamente com o desvio da característica funcional em torno do valor nominal, mas o conceito pode ser estendido para outras situações, existindo dois casos especiais:

**a) o menor é o melhor**

Uma característica funcional de qualidade definida como quanto menor melhor, é uma característica, cujos valores são não negativos e tem valor nominal igual a zero. São exemplos deste tipo de característica: teor de impureza, desgaste, encolhimento, deterioração, nível de perturbação, perda de corrente em circuito elétrico, poluição em uma planta de energia, balanço no volante de um carro, a cor do fundo de uma cópia, insatisfação do consumidor ou índice de reclamação, efeito colateral de um remédio etc.

A função perda neste caso é dada por:

$$l(Y) = kY^2, \quad \text{pois } m = 0.$$

Considerando  $k$  como definido na equação (2.4) então:

$$l(Y) = \frac{A}{\Delta^2} Y^2,$$

e

$$L(Y) = \frac{A}{\Delta^2} E(Y^2) = \frac{A}{\Delta^2} \sigma^2,$$

### b) o maior é o melhor

Este tipo de característica funcional de qualidade tem valores não negativos e valor nominal infinito. São exemplos: amplificação, energia, resistência de materiais, capacidade, quilômetros por litro de combustível, satisfação do consumidor e outras características, que não têm valor nominal especificado exceto que quanto maior o valor resultante melhor. A função perda decresce quando  $Y$  cresce. Este caso pode ser considerado como uma aplicação particular do caso anterior, quando o recíproco  $1/Y$  é tratado como a característica funcional de qualidade. O valor nominal de  $1/Y$  é zero e a função perda é dada por:

$$l(Y) = l(\infty) + l'(\infty) \frac{1}{Y} + \frac{l''(\infty)}{2!} \frac{1}{Y^2} + \dots$$

para  $Y \approx \infty$ , a perda é zero (e este é o valor mínimo para a perda) então estipulando que:

$$l(\infty) = 0, \quad \text{e} \quad l'(\infty) = 0$$

temos,

$$l(Y) = k \frac{1}{Y^2}$$

e considerando a equação (1.4), como para o caso anterior:

$$l(Y) = \frac{A}{\Delta^2} \frac{1}{Y^2} \quad \text{e} \quad L(Y) = \frac{A}{\Delta^2} E\left[\frac{1}{Y^2}\right] = \frac{A}{\Delta^2} \frac{1}{\sigma^2}.$$

## 2.2.4 - PARÂMETROS OU FATORES DO EXPERIMENTO

A figura 2.1, foi apresentada por Taguchi e Phadke (1984), para representar um produto.

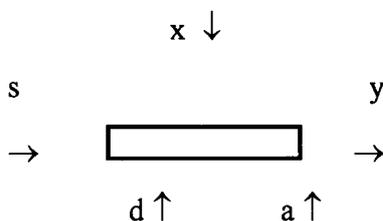


Figura 2.1 - Esquema para representar um produto - Taguchi e Phadke (1984)

onde,

- x - representa os fatores de ruído;
- s - representa os fatores de sinal;
- a - representa os fatores de escala/sinal;
- d - representa fatores de controle;
- y - representa a resposta.

Este esquema pode ser usado para representar um processo de fabricação ou qualquer sistema de trabalho.

Taguchi e Phadke (1984) classificam os fatores em quatro classes e os definem como segue:

- a) fatores de sinal ( $x_{sin}$ ) - São fatores estabelecidos pelo operador para atingir o desempenho objetivo ou expressar a saída desejada. Às vezes, mais que um fator de sinal são usados em combinação;
- b) fatores de controle ( $x_{con}$ ) - São as especificações dos parâmetros do produto, cujos valores são de responsabilidade do planejador. Cada um dos fatores pode tomar mais que um valor, que serão referidos como níveis (O objetivo do planejador é determinar os melhores níveis destes fatores);

c) fatores escala/nivelamento ( $x_{esc}$ ) - Estes são casos especiais dos Fatores de Controle os quais podem ser facilmente ajustados, para alcançar o desejado relacionamento funcional entre o fator de sinal e a resposta Y, e são também chamados fatores de ajustamento;

d) fatores de ruído ( $x_{rui}$ ) - Fatores de ruído são fatores incontroláveis. Estes fatores influenciam a saída Y e seus níveis mudam de uma unidade para outra do produto, de um ambiente para outro e de tempos em tempos. Somente as estatísticas (tais como média e variância) dos fatores de ruído podem ser conhecidas ou especificadas, mas não seus valores reais.

### 2.2.5 - MODELAGEM DA RESPOSTA OU CARACTERÍSTICA FUNCIONAL

Taguchi e Phadke (1984) representaram a resposta medida ou característica funcional por uma função de transferência, que é dependente dos fatores de sinal, de controle, de escala/nivelamento e de ruído, denotada por:

$$Y = f(x_{rui}, x_{sin}, x_{con}, x_{esc}),$$

onde, a função f consiste de duas partes:

- a)  $g(x_{sin}, x_{con}, x_{esc})$  que é a relação funcional previsível e desejável entre Y e  $x_{sin}$ ,
- b)  $\varepsilon(x_{rui}, x_{sin}, x_{con}, x_{esc})$  que é a parte não previsível e indesejável.

Assim,

$$Y = g(x_{sin}, x_{con}, x_{esc}) + \varepsilon(x_{rui}, x_{sin}, x_{con}, x_{esc}).$$

No caso onde o relacionamento entre Y e  $x_{sin}$  é linear, g será uma função linear de  $x_{sin}$ . Todos os termos não lineares e os efeitos de todas as variáveis de ruídos são incluídos em  $\varepsilon$ .

O objetivo do planejamento será maximizar a parte previsível e minimizar a parte não previsível. Isto é feito pela apropriada escolha dos níveis de  $x_{con}$  e  $x_{esc}$ . O planejamento de otimização pode geralmente ser conduzido em dois passos:

a) encontrar o conjunto de valores para os fatores de controle, que maximize a parte previsível enquanto, simultaneamente, minimiza a parte imprevisível. Isto pode ser realizado através do critério de otimização escolhido, denominado por Taguchi de razão sinal-ruído, ("signal-to-noise (S/N) ratio"). Neste passo a variabilidade da característica funcional é minimizada;

b) levar a parte previsível,  $g(x_{sin}, x_{con}, x_{esc})$ , ao nominal ajustando os fatores de controle escala/nivelamento.

## **2.2.6 - PLANEJAMENTO DOS FATORES OU PARÂMETROS DO EXPERIMENTO**

Taguchi tem proposto uma nova abordagem para o uso de experimentos estatisticamente planejados, para o planejamento dos fatores. As variáveis que afetam a característica funcional de um produto ou processo são classificadas em duas categorias: fatores de controle e fatores de ruídos. Os fatores de controle são os fatores do produto ou processo, que podem ser escolhidos pelo experimentador e os fatores de ruído são as variáveis que causam o desvio da característica funcional de seu valor nominal. Para explorar a influência dos fatores  $x = (x_{con}, x_{ruí})$  sobre uma resposta  $f(x) = Y$  com  $E(Y) = m$ , o seguinte arranjo foi proposto por Taguchi (1989): um planejamento dos fatores ou parâmetros do experimento consistindo de duas partes - uma matriz dos fatores de controle e outra dos fatores de ruído, chamadas arranjo interno ("inner array") e arranjo externo ("outer array"), respectivamente [Taguchi (1982) e (1989), Hunter (1985), Kackar (1985), Matar (1989) e Roy (1990)].

As colunas da matriz arranjo interno representam o conjunto dos fatores de controle de teste e suas linhas representam os diferentes níveis dos fatores. Similarmente, as colunas da matriz arranjo externo representam o conjunto de fatores de ruído de teste

e suas linhas representam os diferentes níveis destes fatores. Um planejamento de parâmetro completo consiste de uma combinação das matrizes como mostra a figura 2. Este arranjo foi chamado produto-cruzado por Box (1988).

Teste	Matriz dos Fatores de Controle				Matriz dos Fatores de Ruído			Característica Funcional	Estatística de Performance
	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	C <sub>3</sub>	C <sub>4</sub>	N <sub>1</sub>	N <sub>2</sub>	N <sub>3</sub>		
1	1	1	1	1	→ 1	→ 1	→ 1	→ Y <sub>1</sub>	S/N <sub>1</sub>
					→ 1	→ 2	→ 2	→ Y <sub>2</sub>	
					→ 2	→ 1	→ 2	→ Y <sub>3</sub>	
					→ 2	→ 2	→ 1	→ Y <sub>4</sub>	
2	1	2	2	2	.	.	.	.	
3	1	3	3	3	.	.	.	.	
4	2	1	2	3	.	.	.	.	
5	2	2	3	1	.	.	.	.	
6	2	3	1	2	.	.	.	.	
7	3	1	3	2	.	.	.	.	
8	3	2	1	3	.	.	.	.	
9	3	3	2	1	→ 1	→ 1	→ 1	→ Y <sub>1</sub>	S/N <sub>9</sub>
					→ 1	→ 2	→ 2	→ Y <sub>2</sub>	
					→ 2	→ 1	→ 2	→ Y <sub>3</sub>	
					→ 2	→ 2	→ 1	→ Y <sub>4</sub>	

Figura 2.2 - Um Exemplo de um Planejamento de Fatores do Experimento

Observe que para cada corrida do experimento, a matriz dos fatores de controle ou arranjo interno é cruzada com todas as colunas da matriz de fatores de ruído ou arranjo externo, e o número total de elementos será o produto do número de linhas da matriz arranjo interno pelo número de linhas da matriz arranjo externo.

As matrizes dos fatores são construídas a partir de arranjos ortogonais. Arranjos ortogonais têm sido objeto de estudo de vários pesquisadores, dentre eles: Plackett e Burnan (1943), Rao (1947), Adelman (1962), Kempthorne(1979), Taguchi (1989), Kacker, Lagergren e Filleben(1991) etc. Existe uma grande variedade destes arranjos, mas os mais utilizados são: fatorial  $2^k$ , fatorial fracionário  $2^{k-p}$  e fatorial  $3^k$ . Estes arranjos são construídos a partir de quadrado latino, quadrado greco-latino e quadrado

hipergreco-latino. Combinações destes arranjos são freqüentemente construídas, para permitir que fatores com diferentes números de níveis apareçam no mesmo experimento.

### 2.2.7 - ESTATÍSTICA DE DESEMPENHO DA CARACTERÍSTICA FUNCIONAL

O arranjo apresentado na figura 2.2 foi construído por Taguchi com o objetivo de, através da característica funcional, medir a variação funcional de um produto ou processo. A característica funcional é medida para cada combinação de níveis dos fatores de ruído. Desta forma, uma estatística de desempenho estima o efeito dos fatores de ruído para cada combinação de níveis dos fatores de controle. Os valores calculados para a estatística de desempenho estimam o efeito dos fatores de ruído e são utilizados para obter o melhor conjunto de fatores do planejamento, ou seja, para obter o conjunto ótimo de níveis dos fatores de controle.

Uma estatística de desempenho, definida para estimar o efeito dos fatores de ruído sobre a característica funcional, é uma estatística eficiente que aproveita o conhecimento a priori de engenharia sobre o produto, da função perda e da distribuição da característica funcional.

Suponha que  $x_{con}=(C_1, C_2, \dots, C_k)$  represente os fatores de controle e que  $x_{rui}=(N_1, N_2, \dots, N_p)$  representa os fatores de ruído incluídos no planejamento de parâmetros do experimento. Suponha também que a característica funcional do produto seja uma função de  $x_{con}$  e  $x_{rui}$ , isto é  $Y=f(x_{con}, x_{rui})$ . Os fatores de controle,  $x_{con}$  são os parâmetros da distribuição de  $Y$ , e para um dado  $x_{con}$ , os fatores de ruído geram a distribuição.

Sejam

$$\begin{aligned}\mu(x_{con}) &= E[Y] \\ \sigma^2(x_{con}) &= E[\{Y-\mu(x_{con})\}^2] \\ CV(x_{con}) &= \frac{\sigma(x_{con})}{\mu(x_{con})} \\ MSE(x_{con}) &= E[(Y-m)^2] \\ \delta(x_{con}) &= \mu(x_{con}) - m\end{aligned}$$

representando a média, a variância, o coeficiente de variação (CV), o quadrado médio do erro em torno do valor objetivo  $m$ , e o viés da distribuição de  $Y$  dado  $x_{con}$ , respectivamente. É claro que, com este modelo, as perdas quadráticas esperadas são funções dos fatores de controle.

Uma medida do desempenho é uma função de  $x_{con}$  escolhida, para ser otimizada de forma que minimize a perda esperada. A perda esperada é uma medida da funcionalidade. Entretanto, algumas vezes o problema de reduzir a perda esperada pode ser simplificado pela otimização de alguma outra função de  $x_{con}$ , fazendo-se ajustamentos. Em geral, a medida do desempenho é uma função desconhecida de  $x_{con}$ . Uma estimativa da medida do desempenho é a estatística de desempenho e é utilizada como o critério a ser otimizado.

## **2.2.8 - ESTATÍSTICAS DE DESEMPENHO RECOMENDADAS POR TAGUCHI**

Quando a característica funcional  $Y$  é medida sobre uma escala contínua, a função perda  $l(Y)$  toma uma das três formas, dependendo se “menor é melhor”, “maior é melhor” ou o valor objetivo especificado é melhor isto é “nominal é melhor” como visto no parágrafo 2.2.3.

As estatísticas de desempenho recomendadas por Taguchi são denominadas razão sinal-ruído (S/N) e definidas, para cada tipo de característica funcional, em conexão com a função perda como exposto nos itens 2.2.8.1, 2.2.8.2 e 2.2.8.3.

### **2.2.8.1 - CARACTERÍSTICA DO TIPO “MENOR É O MELHOR” (“THE SMALLER THE BETTER”)**

Neste caso, a característica funcional tem uma distribuição não negativa, o valor nominal é  $m = 0$  e a função perda  $l(y)$  aumenta com  $Y$ . A perda esperada

$$\begin{aligned} L(Y) &= E[l(Y)] = E[k(Y-0)^2] \\ &= kE[(Y)^2] \end{aligned}$$

é proporcional a

$$\text{MSE}(x_{\text{con}}) = E[(Y - 0)^2] = E[Y^2]$$

e Taguchi (1987) recomenda a seguinte medida do desempenho

$$S/N(x_{\text{con}}) = - 10 \log. \text{MSE}(x_{\text{con}}). \quad (2.8)$$

Quanto maior o valor de  $S/N(x_{\text{con}})$ , menor é o quadrado médio do erro. Seja  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  uma amostra aleatória da distribuição de  $Y$  para um dado  $x_{\text{con}}$ . A estatística  $S/N(x_{\text{con}})$  dada pela equação (2.8) pode ser estimada pela estatística de desempenho:

$$S/N(x_{\text{con}}) = - 10 \log. \left( \frac{\sum_{i=1}^n Y_i^2}{n} \right) \quad (2.9)$$

Esta estatística de avaliação é um estimador pelo método dos momentos da correspondente medida do desempenho.

### 2.2.8.2 - CARACTERÍSTICA DO TIPO “MAIOR É O MELHOR” (“THE LARGER THE BETTER”)

A característica de funcionalidade  $Y$  tem uma distribuição positiva, o valor nominal é infinito, e a função perda  $l(Y)$  decresce quando  $Y$  se afasta de zero. Taguchi sugere que este caso se torne uma aplicação particular do menor é melhor, quando a característica de funcionalidade é tratada como a recíproca  $1/Y$ . O valor nominal de  $1/Y$  é zero e a equação (2.8) se reduz a:

$$S/N(x_{\text{con}}) = - 10 \log. \text{MSE}(x_{\text{con}})$$

onde

$$\text{MSE}(x_{\text{con}}) = E \left[ \left( \frac{1}{Y} \right)^2 \right]$$

e a estatística de desempenho, análoga à equação (2.9), torna-se

$$S/N(x_{con}) = -10 \log. \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{n} \right) \left( \frac{1}{Y_i^2} \right) \right]. \quad (2.10)$$

### 2.2.8.3 - CARACTERÍSTICA DO TIPO “VALOR NOMINAL É MELHOR” (VALOR OBJETIVO ESPECIFICADO)

Neste caso, a característica funcional  $Y$  tem um valor nominal especificado,  $m$ , e a função perda  $l(Y)$  cresce simetricamente quando  $Y$  se desvia de  $m$  em ambas as direções. Para esta situação, Taguchi recomenda a seguinte estatística:

$$S/N(x_{con}) = \log.(Y^2 / s^2). \quad (2.11)$$

Kackar (1985 e 1989) observa que, neste caso, a perda esperada dada pela equação (2.5) é proporcional a:

$$MSE(x_{con}) = E[(Y-m)^2]$$

e que

$$\begin{aligned} MSE(x_{con}) &= \sigma^2(x_{con}) + [\delta(x_{con})]^2 = \sigma^2(x_{con}) + [\mu(x_{con}) - m]^2 \\ \sigma(x_{con}) &= CV(x_{con}) \cdot \mu(x_{con}). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Sugere então, que os dois casos abaixo sejam analisados.

### 2.2.9 - VARIÂNCIA NÃO LIGADA À MÉDIA (HOMOCEDESTICIDADE)

Em muitas aplicações na área de engenharia  $\sigma(x_{con})$  e  $\mu(x_{con})$  são funcionalmente independentes, uma da outra, e o viés  $\delta(x_{con})$  pode ser reduzido independentemente da variância  $\sigma^2(x_{con})$ . Este pode ser o caso, por exemplo, se um dos fatores de controle tem um grande efeito sobre o valor médio e, portanto, sobre o viés, mas nem sempre afeta a variância. O fator de controle pode então ser utilizado para reduzir o viés

independentemente da variância. Os fatores de controle, que têm grande efeito sobre a média, mas nem sempre afetam a variância, são chamados fatores de ajustamento. Neste caso,  $\delta(x_{\text{con}})$  é o componente de ajuste do quadrado médio do erro,  $\sigma^2(x_{\text{con}})$  é o componente não ajustável e os fatores de ajustamento são aqueles fatores de controle, que têm um grande efeito sobre  $\mu(x_{\text{con}})$  e, portanto, sobre  $\delta(x_{\text{con}})$ , mas nem sempre afetam  $\sigma^2(x_{\text{con}})$ . Quando tais fatores de ajustamento estão disponíveis,  $\delta(x_{\text{con}})$  pode ser reduzido independentemente de  $\sigma^2(x_{\text{con}})$ . Nesta situação, a proposta primária do planejamento dos fatores é reduzir  $\sigma^2(x_{\text{con}})$ . Assim, uma eficiente medida do desempenho poderá ser uma função monotônica de  $\sigma^2(x_{\text{con}})$ .

Assim,

$$S/N(x_{\text{con}}) = -10 \log \sigma^2(x_{\text{con}})$$

(2.13)

que pode ser utilizado como uma medida da performance. Quanto maior a medida do desempenho (estatística de desempenho), menor é a variância  $\sigma^2(x_{\text{con}})$ . Seja  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  uma amostra aleatória da distribuição de  $Y$  para um dado  $x_{\text{con}}$ .

Então,

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - Y)^2}{(n-1)},$$

onde  $Y = \sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{n}$ ,

é um estimador não viesado de  $\sigma^2(x_{\text{con}})$  e  $S/N = -10 \log s^2$  é uma estatística de desempenho. Segundo Kackar (1898)  $S/N$  é uma razoável estatística de desempenho.

### 2.2.10 - VARIÂNCIA LIGADA À MÉDIA (HETEROCEDASTICIDADE)

Em alguns casos  $\sigma(x_{\text{con}})$  é, aproximadamente, proporcional a  $\mu(x_{\text{con}})$  e, assim, o coeficiente de variação  $CV(x_{\text{con}}) = \sigma(x_{\text{con}})/\mu(x_{\text{con}})$  é uma medida mais significativa da variabilidade que  $\sigma(x_{\text{con}})$ . Nestes casos, o viés  $\delta(x_{\text{con}})$  pode ser reduzido independentemente do coeficiente de variação  $CV(x_{\text{con}})$ , variável não ajustável. Os

fatores de ajustamento são aqueles fatores do planejamento, que têm o maior efeito sobre a média  $\mu(x_{con})$  e, portanto, sobre  $\delta(x_{con})$ , mas nem sempre afetam o  $CV(x_{con})$ . Quando tais fatores de ajustamento estão disponíveis, o viés  $\delta(x_{con})$  pode ser reduzido independente do coeficiente de variação, e a principal proposta do planejamento de fatores é reduzir o  $CV(x_{con})$ . Pode ser visto da equação (2.12) que, quando o coeficiente de variação permanece pequeno, nenhuma mudança subsequente no valor médio  $\mu(x_{con})$  ocasiona grande mudança em  $\sigma(x_{con})$ . Desta forma, uma eficiente medida do desempenho será uma função monótona de  $CV(x_{con})$ . Taguchi (1976, 1977) recomenda como medida do desempenho a seguinte estatística:

$$S/N(x_{con}) = -10 \log. [\mu(x_{con}) / \sigma(x_{con})]^2. \quad (2.14)$$

Quanto maior é a medida do desempenho maior é o coeficiente de variação. A quantidade  $nY^2 - s^2$  é um estimador não viesado de  $n[\mu(x_{con})]^2$ . Entretanto, Taguchi (1976, 1977) recomenda as estatísticas de desempenho:

$$(S/N)_1 = 10 \log.(Y^2/s^2) \quad (2.15)$$

e

$$\begin{aligned} (S/N)_2 &= 10 \log. [(nY^2 - s^2)/ns^2] \\ &= 10 \log.(Y^2/s^2 - 1/n), \end{aligned} \quad (2.16)$$

ambas equivalentes. O quadrado médio do erro e a perda esperada são minimizados, quando as medidas dos desempenhos dadas pelas equação (2.13) e (2.14) são maximizadas e o viés  $\mu(x_{con}) - m$  é minimizado pelo uso de fatores de ajustamento.

### 2.2.11 - ESTRATÉGIA DE OTIMIZAÇÃO UTILIZANDO TÉCNICAS DE TAGUCHI

A otimização pode ser conduzida em hardware ou simulada em software com um modelo matemático do produto. Os passos para identificar os fatores do experimento para a maximização da característica funcional ou de qualidade, ou as razões sinal-ruído (“signal-to-noise ratios”) podem ser considerados como segue (Taguchi e Phadke (1984)):

a) a otimização é iniciada pela escolha da resposta a ser otimizada e dos quatro tipos de fatores (controle, sinal, escala/nivelamento e ruído) que serão estudados. Através de um arranjo ortogonal, um conjunto de  $n$  valores dos fatores de controle  $x_{con}$  é selecionado. Para cada valor selecionado de  $x_{con}$  o experimento é conduzido com o objetivo de anular os efeitos dos fatores de ruído  $x_{ruí}$  e obter a desejada amplitude de  $x_{sin}$ . Os fatores de controle, de sinal e de escala/nivelamento serão denominados simplesmente fatores de controle;

b) o próximo passo é a calibração do desempenho, isto é, analisar o desempenho dos fatores escala/nível na avaliação do S/N,  $S/N(x_{coni})$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ . Na prática, não é necessário determinar o melhor valor do fator escala/nível,  $x_{esc}$ , para cada  $x_{con}$ . É suficiente determinar  $S/N(x_{coni})$ ;

c) após avaliar  $S/N(x_{coni})$  para  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  é realizada a análise de média e variância para determinar o efeito de cada elemento de  $x_{con}$  sobre S/N. Esta informação é, então, utilizada para selecionar níveis ótimos de  $x_{con}$ , que serão denotados por  $x_{con}^*$ ;

d) nesta etapa, é realizada uma confirmação do experimento para  $x_{con}^*$ . Se os resultados são satisfatórios, pode-se terminar a otimização. Se não, reanalisam-se os dados e/ou inicia-se o próximo ciclo de experimentos.

### 2.3 - CONSIDERAÇÕES DA LITERATURA SOBRE AS TÉCNICAS DE TAGUCHI

Kackar (1985) considera o método de Taguchi, para o planejamento dos parâmetros, um excelente ponto de partida para pesquisas em análise estatística para melhorar produtos e processos.

O método de Taguchi pode ser considerado por dois pontos de vista: estratégico e tático.

As estratégias de Taguchi dão uma estrutura para planejar a experimentação de produtos e processos, dirigidas para a determinação dos planejamentos, que são robustos com respeito a fatores incontrolláveis na fabricação e no uso ambiental do produto. Assim, os melhores planejamentos são aqueles que minimizam perdas esperadas, com respeito ao espaço dos fatores de ruído não controláveis, tais como condições ambientais.

As táticas consistem dos métodos específicos e técnicas que podem ser aplicados para suas estratégias. Dentre estas táticas, estão a razão sinal-ruído e o planejamento do processo de experimentação. Box (1985) salientou que é importante para engenheiros absorverem estes conceitos de Taguchi e, então, aplicá-los ao processo de melhoria da qualidade. Entretanto, ele também salientou que as táticas de Taguchi, como representada pelos procedimentos estatísticos propostos, foram, às vezes, desnecessariamente complicadas e ineficientes. Por exemplo, Taguchi limitou sua escolha para o planejamento em fatoriais  $2^k$ ,  $2^{k-p}$ ,  $3^k$  e  $3^{k-p}$ , e um complicado arranjo ortogonal composto por um arranjo para os fatores do experimento e outro para os fatores de ruído. Muitos dos planejamentos experimentais de Taguchi, não são capazes de acomodar interações, e assim podem induzir a interpretações errôneas pela natureza do experimento ou do modelo de interesse.

Pignatiello (1988) observou que muito das controvérsias a respeito da metodologia de Taguchi tem sido direcionado muito mais sobre táticas que sobre estratégias. Então, com o objetivo de melhorar a eficiência e a suficiência estatística do método de Taguchi, mostrou que planejamentos estratégicos e medidas do desempenho alternativas podem ser aplicados dentro do contexto de sua metodologia.

### 2.3.1 - CONSIDERAÇÕES SOBRE AS ESTATÍSTICAS DE DESEMPENHO DE TAGUCHI

Como já mencionado, as estatísticas de desempenho propostas por Taguchi, para determinar a combinação ótima dos fatores do planejamento de produto e processos, são chamadas razão sinal-ruído (S/N). Na metodologia de Taguchi, a conexão entre a razão sinal-ruído e a função perda quadrática conduz a um princípio geral para a seleção das medidas de desempenho. Como foi apresentado por Kackar (1985), quando as características de desempenho são variáveis contínuas, as funções perdas  $l(Y)$  são usualmente apresentadas como uma das três formas: menor é melhor, maior é melhor ou nominal é melhor. Para os dois primeiros casos, foi demonstrado que a conexão em questão leva às seguintes estatísticas de desempenho, respectivamente: razão sinal-ruído

$$S/N = -10 \cdot \log.(y_i^2/n), \text{ e } S/N = -10 \cdot \log.(\sum (1/y_i^2)/n),$$

como visto nas equações (1.9) e (1.10).

Entretanto, para o terceiro caso, foi demonstrado que duas diferentes situações podem levar a duas diferentes estatísticas de desempenho, sendo que uma delas foi recomendada por Taguchi e outra não. Ver parágrafo 2.1.8.3.

Lucas (1985) observou que a ênfase no método de Taguchi foi somente sobre a estatística de desempenho, razão sinal-ruído, e salienta que é mais fácil analisar separadamente e explicar as várias respostas, incluindo respostas de fatores de sinal e de fatores de ruído. Ele sugere que com os recursos computacionais disponíveis e com um pouco mais de esforço do que os requeridos para uma simples resposta, múltiplas respostas podem ser analisadas. Entretanto, ele não desenvolveu qualquer metodologia, para analisar separadamente respostas de fatores de sinal e de fatores de ruído.

Ribeiro e Albin (1993) propuseram a otimização de uma única função de perda a qual combina várias características de qualidade de um produto. Tal função chamada “função de perda de contorno elíptico”, é minimizada.

Ribeiro e Elsayed (1993) propõem um método geral para a otimização de múltiplas características de qualidade. No método proposto por eles, uma única função de perda é definida, a função de perda gradiente e esta é a função objetivo a ser otimizada.

Pignatiello (1993) apresentou uma função de perda quadrática para problemas multirresposta. Ele mostrou que sua função de perda é uma generalização da função de perda quadrática para uma única resposta de Taguchi.

Bagchi e Templenton (1994) apresentaram um método de otimização com restrições para problemas de múltiplas características de qualidade.

Os vários métodos de otimização para múltiplas características de qualidade mencionados acima, contemplam os casos onde um valor nominal finito para cada uma das características de qualidade é estabelecido, ou, os casos onde se tem uma idéia de seu máximo ou mínimo requerido.

Hunter (1985) apresentou um novo procedimento para a determinação da combinação ótima dos níveis dos fatores do planejamento para a característica do tipo nominal é melhor. Como a razão sinal-ruído para esta característica foi definida como  $S/N=10*\log.(\bar{y}^2/s^2)$ , o termo  $\bar{y}^2/s^2$  foi reconhecido como sendo o recíproco do quadrado do coeficiente de variação,  $s/\bar{y}$ . Maximizar a razão sinal-ruído (S/N) é equivalente a minimizar o coeficiente de variação,  $s/\bar{y}$ . Hunter recomenda considerar o logaritmo das observações, para determinar a combinação ótima dos fatores que conduzem à variância mínima.

Leon et al. (1987) também apresentaram um inapropriado uso da razão sinal-ruído para a característica do tipo nominal é melhor, onde havia fatores de controle com efeito sobre a média. Tal como havia recomendado Kackar (1985), uma razão sinal-ruído não deve ser aplicada como uma estatística de desempenho, quando as variâncias da característica de desempenho não são independentes da média. Além disso, eles demonstraram que se certos modelos, para as respostas dos produtos ou processos, forem assumidos, então a maximização da razão sinal-ruído conduz à minimização do quadrado médio do erro. Também, foi apontado que o uso da razão sinal-ruído permite que o procedimento de otimização dos fatores do planejamento seja decomposto em dois passos, refletindo uma divisão dos fatores em dois grupos, um afetando a locação ou média e outro afetando a dispersão (ou ambos locação e dispersão). Com base na suposição de uma perda quadrática e um modelo multiplicativo de função de transferência particular, foi observado que a razão sinal-ruído de Taguchi e o procedimento em dois passos são válidos. Para outros tipos de funções de transferência,

como o modelo aditivo, a validade do uso da razão sinal-ruído para características do tipo nominal é melhor, não foi justificada. Uma nova medida de desempenho independente dos fatores de ajustamento (PerMIA), foi introduzido por Leon et al. (1987), na qual a razão sinal-ruído de Taguchi é considerada como um caso especial.

Box et al. (1988) observaram que é desnecessário e ineficiente o uso da razão sinal-ruído, para características do tipo menor é melhor, quando se deseja uma análise experimental para médias e variâncias. Eles sugerem que os efeitos de locação e de dispersão sejam analisados separadamente, aplicando uma transformação logarítmica sobre os dados. A razão sinal-ruído para o nominal é melhor pode, então, ser escrita como:

$$S/N=10*\log.(\bar{y}^2/s^2)=20*(\log.(\bar{y})-\log.(s)).$$

Nair e Pregibon (1988) concordaram com Box et al. (1988) e consideraram imprudente juntar os efeitos da média e da variância como é feito na razão sinal-ruído. Eles declararam que estimando os efeitos da média e da variância, separadamente, há ganho no estudo do comportamento dos fatores.

Box (1988) e Fung (1986) apresentaram exemplos onde o gráfico chamado "Lambda", é usado para determinação de uma transformação apropriada. O gráfico Lambda (Box e Fung (1983) consiste de uma ferramenta prática para a seleção de uma escala apropriada para a transformação dos dados, com base no seguinte: considere uma classe de transformações  $y^\lambda$  indexada por um parâmetro de escala  $\lambda$ . Para construir um gráfico, os dados são transformados em  $Y=\ln(y)$  para  $\lambda=0$  e  $Y=y^\lambda$ , para  $\lambda$  diferente de zero. Os efeitos principais e interações entre as variáveis são calculados para cada conjunto de dados transformados, usando diferentes valores para  $\lambda$ . Os valores das estatísticas t ou F, para estes efeitos, são calculados e usados como estatísticas adequadas e relevantes para os efeitos da média e da variância. O gráfico destas estatísticas contra valores de  $\lambda$  é utilizado para a seleção de uma transformação apropriada. O modelo ajustado consiste dos efeitos que têm as maiores estatísticas t ou F e, que simultaneamente reflita um número mínimo de efeitos principais e interações.

Box e Fung (1986) demonstraram que o procedimento de Taguchi não necessariamente, produz uma solução ótima e que o uso da razão sinal-ruído seria, portanto, sem valor. Além disso, informações obtidas de dados experimentais, esperadas

e não esperadas, podem ser analisadas por simples métodos analíticos com base em médias e desvios-padrões em lugar das razões sinal-ruído, as quais são não somente complicadas, mas também ineficientes (Box, 1988). Eles também indicaram que as razões sinal-ruído, para características dos tipos “maior é melhor” e “menor é melhor”, são completamente ineficientes para identificação dos efeitos de dispersão. O uso da razão sinal-ruído, para uma variável de resposta do tipo “menor é melhor”, serve para confundir os efeitos da média e da variância, desde que,

$$S/N = -10 \cdot \log \left( \frac{\sum_{i=1}^n y_i^2}{n} \right)$$

e

$$\sum y_i^2/n = \bar{y}^2 + \frac{\left( \sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2 \right)}{n} = \bar{y}^2 + \frac{(n-1)s^2}{n}$$

Box (1988), através de uma aplicação reportada por Quinlan (1985), demonstrou de forma simples uma análise separada para os efeitos da média e da variância, com base em gráficos da distribuição normal. Foi notado que a função  $\sum (1/y_i^2)$ , na expressão da razão sinal-ruído para as características do tipo “maior é melhor”, é excepcionalmente não robusta com respeito aos efeitos de observações muito grandes ou muito pequenas. Entretanto, foi determinado que dados provindos de características do tipo “maior é melhor” podem requerer transformações recíprocas,  $Y^{-1}$ , para obter propriedades como variância constante, normalidade e aditividade. Assim, foi determinado que S/N para este tipo de característica, não é, completamente, uma estatística de desempenho apropriada. Finalmente, foi observado que os S/N, envolvendo  $y^2$  e  $1/y^2$ , são insensíveis a valores extraordinários (outliers) ou a valores próximos de zero. Montgomery (1991) recomenda fortemente o não uso da razão sinal-ruído para estes dois tipos de características de desempenho. Foi notado que estas razões não são invariantes para transformações lineares das respostas originais.

### 2.3.2 - CONSIDERAÇÕES SOBRE O PLANEJAMENTO DE TAGUCHI

As recomendações de Taguchi para o planejamento experimental também têm sido alvo de críticas. De acordo com Kackar (1985), as aplicações físicas dos planejamentos experimentais de Taguchi podem ser impossíveis de serem conduzidos ou, podem contribuir para um número excessivo de partidas experimentais elevando o custo do experimento. Box e Meyer (1986) observaram que, se os efeitos da variância de vários fatores influentes são investigados usando replicações de um planejamento, o número de partidas experimentais, através do método de Taguchi, pode tornar-se excessivo. Eles introduziram o uso de experimentos fatoriais fracionados, para fatores com dois níveis, na identificação dos fatores que afetam a variância, bem como os que afetam a média. Este procedimento experimental tem sido recomendado para acomodar aproximadamente 16 fatores com igual número de partidas experimentais.

Box et al. (1988) traçaram a origem dos planejamentos de Taguchi e indicaram que alguns dos seus planejamentos ortogonais refletem uma estrutura complicada de confundimentos (os efeitos principais e efeitos de interações são misturados, ou seja, não é possível separar estes efeitos). Em particular, o planejamento de Plackett-Burman (1946), um planejamento saturado de resolução III para fatores com dois níveis, e todos os outros planejamentos para fatores com 3 níveis, envolvendo confundimento parcial de interações de dois fatores com os efeitos principais. Sobre resolução e confundimentos ver Montgomery (1991) capítulos 10 e 11. Nos casos onde existem interações entre dois fatores, o experimentador pode não ser hábil o suficiente para obter a resposta correta, com respeito aos objetivos do planejamento.

Shoemaker et al. (1991), Welch et al. (1990), Box e Jones (1990) e Lucas (1990) recomendam um procedimento alternativo que combina os fatores de controle e de ruído, e este procedimento foi chamado de arranjo combinado.

Taguchi e Wu (1985) recomendam que os experimentos sejam planejados considerando somente efeitos principais. As interações são tratadas como erros e são distribuídas uniformemente em todas as colunas da matriz. Por isso, Taguchi parece acreditar que as estimativas dos efeitos principais não são afetadas por efeitos de interações. Os resultados de Hamada e Wu (1986) mostram o contrário.

De acordo com Montgomery (1991), Taguchi tem argüido que considerações explícitas sobre interações entre dois fatores não são necessárias pelo fato de que é possível eliminar estas interações ou pela especificação correta da resposta e fatores do experimento ou, pelo uso de um procedimento apropriado para escolher os níveis dos fatores. Estes dois procedimentos são particularmente difíceis de serem implementados, pois requerem um alto nível de conhecimento do processo, o que é raro em muitas situações experimentais. Esta falta de métodos adequados para acomodar interações entre fatores de controle e fatores de ruído é um dos pontos fracos dos planejamentos de fatores de Taguchi. Uma maneira adequada de resolver o problema é identificar os efeitos principais e os efeitos de interações que podem ser importantes entre os fatores e, então, considerar somente estes. Isto pode levar a poucas corridas experimentais, interpretações simples dos dados e melhor entendimento do processo.

Montgomery (1991) observou que existem vários planejamentos experimentais alternativos, os quais podem fornecer resultados superiores àqueles gerados pelo arranjo produto de Taguchi. Ele também declarou que o uso do arranjo produto não é freqüentemente necessário e em qualquer caso, o uso desta técnica pode contribuir substancialmente para o tamanho do experimento. Como por exemplo, o experimento realizado por Byrne e Taguchi, (1987), no qual eles realizaram 72 corridas de teste para investigar somente sete fatores, quatro dos quais eram fatores de controle. Entretanto, estimativas das interações entre dois fatores, dentre os quatro fatores de controle, não puderam ser analisadas. Montgomery propôs um planejamento alternativo requerendo um pequeno número de corridas experimentais e que demonstrou grande eficiência estatística para problemas como o estudado por Byrne e Taguchi. Ele sugere o uso de um planejamento que acomoda todos os sete fatores com dois níveis. Este procedimento provou ser superior para este problema, e foi construído com base em planejamento fatorial fracionado ( $2^{7-2}$ ) de resolução IV. Este procedimento gerou 32 corridas de teste, menos que metade das corridas conduzidas por Byrne e Taguchi (1987). Os confundimentos foram considerados por Montgomery. Ele introduziu também, dois esquemas alternativos para assinalar os fatores de controle e de ruído do processo. Montgomery (1991) concluiu que uma estratégia superior para melhorar os planejamentos básicos de Taguchi, poderá ser baseada em um planejamento que incorpore os dois tipos de fatores: de controle e de ruído. Sugeriu também, que o

planejamento tenha resolução suficiente, pelo menos IV, para permitir que todas as interações de interesse sejam analisadas.

### 2.3.3 - PLANEJAMENTOS ALTERNATIVOS

Hunter (1985) afirmou que a chave do entendimento da preferência de um planejamento experimental sobre outros, está na ligação entre o planejamento e o modelo escolhido para descrever a resposta em estudo.

São duas as componentes chaves de qualquer planejamento: o plano (layout) e o procedimento de aleatorização.

O plano pode ser entendido como o conjunto de combinações dos fatores experimentais incluídos no experimento. O procedimento de aleatorização indica o método usado para determinar a ordem em que as corridas são efetuadas e para determinar a locação das unidades experimentais para as corridas. O procedimento de aleatorização mais comum, chamado planejamentos completamente aleatorizados, consiste em considerar todas as corridas experimentais em um único grupo e escolher aleatoriamente a ordem ou alocar as corridas experimentais sem qualquer restrição. Outra forma de proceder é utilizar o método da aleatorização restrita, aleatorização por partes (split-plot), onde as corridas experimentais são divididas em grupos. Um procedimento em dois estágios é utilizado. Primeiro, a ordem dos grupos é aleatoriamente selecionada. Então, a ordem das corridas dentro dos grupos é selecionada aleatoriamente.

Existem duas formas de gerar planos para serem utilizados em planejamento de fatores experimentais. A primeira consiste em considerar todos os fatores em um simples grupo e selecionar um plano apropriado com base em critérios padrões. Este procedimento é o arranjo combinado, já mencionado na seção anterior, e significa que os fatores de controle, de ruído e de sinal são alocados em um único grupo. A segunda forma de procedimento é o arranjo produto de Taguchi, já mencionado no item 2.2.6.

Taguchi (1987) e Taguchi e Wu (1980) têm sugerido a utilização dos arranjos ortogonais de efeitos principais para gerar os planejamentos experimentais. Estes arranjos são gerados por planos fatoriais e fatoriais fracionados. Os mais comuns são

fatoriais  $2^k$ , fatoriais fracionados  $2^{k-p}$ , fatoriais  $3^k$  e os planos derivados do quadrado Latino, quadrado greco-latino e quadrado hypergreco-latino. Para acomodar fatores com diferentes níveis, combinações destes planos são construídos.

Hunter (1985) apontou que o uso de planejamentos construídos a partir de arranjos ortogonais de efeitos principais, corresponde a ajustar um modelo de efeitos lineares de primeira ordem para a estatística de desempenho. Mas, os modelos de primeira ordem não são adequados na presença de efeitos de segunda ordem, tais como interações e termos de curvaturas. Nestes casos, os modelos de segunda ordem são os apropriados. Entretanto, quando os modelos de segunda ordem são utilizados, as propriedades de ortogonalidade deixam de ser importantes e os principais critérios para uma boa predição são a rotabilidade do planejamento e a minimização do viés dos termos de alta ordem. Desta forma, Hunter recomenda a utilização de planejamentos fatoriais fracionados  $2^{k-p}$ , planejamentos de composição central e planejamentos de Box-Behnken em substituição aos planejamentos ortogonais de efeitos principais.

Box e Wilson (1951) desenvolveram uma coleção de planejamentos experimentais, chamados metodologia de superfície de resposta. Myers (1976), Box e Draper (1987) e Khuri e Cornell (1987) dedicaram seus livros textos a este assunto.

Myers e Carter (1973) e Vining e Myers (1990) desenvolveram uma técnica de análise de resposta dupla como uma implementação da metodologia de Taguchi. A metodologia de superfície de resposta foi aplicada a um problema de resposta dupla e um experimento de segunda ordem apropriado foi conduzido. Neste problema, duas funções quadráticas de resposta foram ajustadas, uma representando a resposta de interesse primário e outra representando a resposta de interesse secundário. O objetivo era otimizar a resposta primária sujeita a algum valor especificado para a resposta secundária e  $X'X = \rho^2$ . Esta restrição foi adicionada para restringir a área de busca a uma região esférica de raio  $\rho$ . Por exemplo, se o experimento é para uma característica do tipo nominal é melhor, ou minimizar a variância enquanto leva a média ao objetivo, a resposta quadrática primária poderá ser uma função da variância e a resposta quadrática secundária uma função da média com respeito ao valor nominal. Os multiplicadores de Lagrange foram aplicados para a otimização e para determinar os níveis ótimos dos fatores que satisfazem o objetivo do experimento.

Castillo e Montgomery (1993) melhoraram a técnica de Vining e Myers (1990) sugerindo a aplicação de algoritmo do gradiente reduzido e sugeriram, também, vários métodos de programação não-linear para resolver o problema.

Myers et al. (1992) procuraram determinar apropriados planejamentos de superfície de resposta através do uso de um gráfico de dispersão da variância para a predição das propriedades dos planejamentos padrões de segunda ordem da variância.

Giovannitti-Jensen e Myers (1989) desenvolveram o gráfico de dispersão da variância para ser usado como instrumento de avaliação da capacidade de predição das propriedades dos planejamentos para dada região de interesse.

## 2.4 - DISCUSSÃO

Taguchi introduziu algumas novas idéias sobre engenharia da qualidade, que trariam um profundo efeito sobre todos os aspectos de manufatura desde o planejamento até a fabricação de produtos passando por testes de aceitação. Devido às vantagens que estas idéias possam trazer, é importante que elas sejam inteiramente entendidas e depois desenvolvidas. A essência destas idéias pode ser sumariada como segue:

1 - formulação de uma medida da variabilidade de um produto ou processo (estatísticas de desempenho). Uso da técnica de análise de variância ANOVA (analysis of variance) aplicada a essa medida da variabilidade, para analisar a natureza da variação do desempenho e para dividi-la em componentes identificáveis. Isto estende a ANOVA convencional, onde somente a resposta média é investigada;

2 - uso de métodos estatísticos para produzir um planejamento de produto e processo de produção, que são escolhidos para minimizar a variação do desempenho (melhorar qualidade). Isto inclui "planejamento dos fatores" (seleção dos valores ótimos para os fatores significantes) e "planejamento de tolerâncias", assegurando que o desempenho seja insensível a mudanças internas, produção ou fatores de ruído(fatores externos);

3 - a importância de "próximo ao nominal" ("closeness to target") como um critério de desempenho, ao invés de "dentro das especificações";

4 - a redução substancial de custos pode resultar da habilidade em construir planejamentos, cujo desempenho seja tolerante a variações nos parâmetros da produção e na operação dos equipamentos no ambiente da fábrica;

5 - mudando a ênfase principal de controle de qualidade durante a produção ("on-line"), para antes da produção ("off-line") com a ajuda de detalhadas mudanças contínuas monitoradas por poucos e bem planejados experimentos preparatórios.

A técnica é um sistema direto e bem integrado para implementação de planejamento de experimentos estatísticos, encoraja experimentação, estimula associação entre estatísticos e engenheiros e o conhecimento de estatística na indústria.

De maneira geral, a filosofia de Taguchi é considerada importante para o processo de melhoria da qualidade em qualquer organização. Porém, algumas objeções quanto às suas táticas devem ser observadas.

Em muitas situações das aplicações publicadas, os seguintes pontos tornam-se aparentes:

1 - uma desnecessária lista de planejamentos de experimentos é oferecida; por exemplo, o "OA<sub>18</sub>(2 x 3<sup>7</sup>)" (arranjo ortogonal) parece ser um dos mais utilizados nas aplicações publicadas; os fatores de interesse são manipulados para se ajustarem a este plano, ao invés de se escolher o plano correto para ajustar os fatores importantes e seus níveis necessários. Entretanto, existe uma grande variedade de planos. Combinações destes planos podem ser contruídas para permitir fatores com diferentes números de níveis. Arranjos não-ortogonais podem também ser utilizados;

2 - o formato do experimento dado pela figura 2.2 pode requerer um grande número de corridas de teste, porque o arranjo dos fatores de ruído é repetido para toda linha no arranjo de fatores de controle. Também, usa um grande número de graus de liberdade

para estimar todas as possíveis interações entre fatores de controle e interações entre fatores de ruído;

3 - interações não são adequadamente analisadas. De fato, interações entre fatores de controle e fatores de ruído não são consideradas. Taguchi não dá importância às interações, mas ele reconhece suas presenças e recomenda métodos para reduzi-las. Por outro lado, importantes fatores podem ser erradamente menosprezados. Não podemos esquecer que um efeito de interação significativo indica que todos os fatores envolvidos (na interação) são significativos, apesar do fato de que seus efeitos principais na ANOVA possam não mostrar significância;

4 - a escolha da medida de desempenho é não convincente. De todas as razões sinal-ruído sugeridas por Taguchi, qual deve ser usada? Em aplicações publicadas as razões sinal-ruído são usadas sem uma justificativa satisfatória. Não há razão para sempre otimizar a razão sinal-ruído no primeiro passo da otimização. A razão sinal-ruído é uma função monótona do coeficiente de variação, que é uma medida particular da variabilidade. Em geral, diferentes medidas da variabilidade deverão ser otimizadas no primeiro passo para diferentes modelos. A razão sinal-ruído para um específico valor objetivo pode produzir um viés na média se o desvio-padrão e a média não são linearmente conectados [Box (1986), Logthetis (1988)]. Também a utilidade das medidas sinal-ruído maior é melhor e menor é melhor são extremamente duvidosas para qualquer tipo de dados [Box e Ramires (1986), Logothetis (1987a), Box (1988)]. Assim, uma medida de desempenho invariante para qualquer tipo de dados será de grande valor;

5 - embora a abordagem através do modelo de resposta tenha sido recomendada como uma excelente alternativa para modelar e analisar planejamentos de experimentos robustos, o desenvolvimento da metodologia não está completamente estudado [Logothetis (1989)];

6 - a importância da transformação de dados não parece ser apreciada ou explorada o suficiente;

7 - fatores de ruído não são completamente investigados a priori para a aplicação dos métodos de Taguchi, embora sejam a base e o aspecto mais importante dessa técnica.

Portanto, dado o aspecto importante da filosofia introduzida por Taguchi, que direciona o controle da qualidade para fora da linha de produção, esforços devem ser direcionados no sentido de melhorar e simplificar suas técnicas.

## **3 - PLANEJAMENTOS EXPERIMENTAIS NA INDÚSTRIA**

### **3.1- INTRODUÇÃO**

Nas pesquisas de engenharia de produtos, a experimentação é bastante usada, principalmente, onde novos produtos estão sendo desenvolvidos ou os já existentes estão sendo melhorados. As características de um produto acabado dependem dos ingredientes ou dos componentes que o compõem, das condições sob as quais é construído e das condições sob as quais é estocado ou usado.

O desenvolvimento de um produto usualmente envolve a comparação de certo número de produtos experimentais, os quais são produzidos variando os ingredientes, ou os componentes e as condições. Qualquer ingrediente, componente ou condição que seja variado no decorrer da experimentação é chamado um fator de tratamento, e suas diferentes formas são chamadas níveis do fator. Muitos experimentos industriais envolvem o estudo simultâneo de dois ou mais fatores. Portanto, toda observação experimental é uma resposta obtida de uma das possíveis combinações dos níveis de seus fatores experimentais. Estas combinações são chamadas combinações de tratamento. O objetivo principal da experimentação é estudar o efeito da variação dos fatores, ou seja, determinar as melhores combinações dos ingredientes ou dos componentes.

Idealmente, toda observação deve ser tomada sob condições idênticas (condições que não fazem parte do experimento). Algumas vezes, esta situação ideal não pode ser alcançada. Por exemplo, um experimento pode ser conduzido ao longo de vários dias com grande variação de temperatura e umidade; observações podem ser coletadas por diferentes técnicos, cujo procedimento experimental pode diferir, ou coletadas em diferentes laboratórios, cujos equipamentos podem não ser idênticos; observações que são coletadas sob condições experimentais similares são ditas serem do mesmo bloco. As condições experimentais podem ser bem diferentes para observações em blocos

diferentes. Estas diferenças são ajustadas durante a fase de análise dos dados experimentais. Se todo bloco contém uma observação de todas as combinações de fatores, o experimento é dito ser arranjado como um planejamento de blocos completos. Frequentemente, os blocos não são grandes o suficiente para acomodar uma observação de cada combinação dos fatores. Nestes casos, deve ser decidido quais combinações de fatores serão observadas e em que bloco. Um planejamento deste tipo de experimento é chamado planejamento de blocos incompletos.

### 3.2 - PLANEJAMENTOS ROBUSTOS

Desde os anos 70, muita atenção tem sido dada, pelos estatísticos, aos métodos de planejamentos robustos. A origem destes métodos está nos testes de hipóteses e estimação dos coeficientes de regressão. Os autores Box e Draper (1975) e Myers, Khuri e Carter (1989) discutiram os planejamentos robustos aplicados à metodologia de superfície de resposta. Um planejamento robusto é aquele, cujo resultado é resistente ao impacto das condições não ideais. Certamente, quando uma análise de superfície de resposta está sendo realizada, muitas situações, provocadas por condições não ideais, podem surgir. Para citar alguns exemplos:

- a) dados perdidos;
- b) pontos influentes;
- c) “outliers”;
- d) erros não normais;
- e) má especificação do modelo.

### 3.3 - DEFINIÇÕES E TERMINOLOGIA

Sejam  $x_1, x_2, \dots, x_k$  os fatores do experimento e  $Y$  a resposta estudada.

Os pesquisadores estão, na maioria das vezes, interessados na região formada pelos fatores em que o modelo, para a resposta estudada, deverá ser ajustado e no relacionamento existente entre os fatores e a resposta  $Y$  (frequentemente multivariada).

É conveniente reescrever os fatores da seguinte forma:

$$X_j = \frac{x_j - \bar{x}_j}{d_j}, \quad j=1, 2, 3, \dots, k.$$

Os  $X_j$  representam uma versão codificada das unidades naturais,  $\bar{x}_j$  é a média dos valores de  $x_j$  e  $d_j$  é um fator de escala. Por exemplo, se cada um dos fatores tem dois níveis somente ( $x_{j1}$  e  $x_{j2}$ ) e o mesmo número de observações serão coletadas para cada um dos níveis, então  $\bar{x}_j = (x_{j1} + x_{j2})/2$  e  $d_j = (x_{j1} - x_{j2})/2$ . Observe que  $X_j = +1$  quando  $x_j = x_{j1}$  e  $X_j = -1$  quando  $x_j = x_{j2}$ .

O uso de fatores codificados, ao invés dos fatores naturais, facilita a construção dos planejamentos experimentais. A codificação remove as unidades de medida dos fatores do experimento e as distâncias ao longo dos eixos. Os fatores codificados no espaço  $k$ -dimensional são padronizados ou definidos na mesma métrica.

A resposta estudada é uma quantidade mensurável, cujo valor é afetado por mudanças nos níveis dos fatores. Os níveis dos fatores são os valores que devem ser otimizados.

O verdadeiro valor da resposta, para qualquer combinação dos níveis dos fatores será denotado por  $E(Y)$ . Devido à presença de erros experimentais, o valor da resposta que realmente é observada, para qualquer combinação dos níveis dos fatores, difere de  $E(Y)$  e será denotada por  $Y$ , isto é  $Y = E(Y) + \varepsilon$ , onde  $\varepsilon$  é o erro experimental.

O valor da verdadeira resposta  $E(Y)$  depende dos níveis dos fatores  $X_1, X_2, \dots, X_k$ . Isto é, existe uma relação matemática entre os fatores e  $E(Y)$  :

$$E(Y) = f(X_1, X_2, \dots, X_k).$$

A superfície representada por  $E(Y) = f(X_1, X_2, \dots, X_k)$  é chamada de superfície de resposta.

Em muitos problemas, a forma de relacionamento entre a resposta e os fatores é desconhecida, então, se torna necessário encontrar uma aproximação adequada para  $f(X_1, X_2, \dots, X_k)$ . Usualmente, é empregado um polinômio de grau baixo, na região dos fatores. As aproximações por polinômios são discutidas no capítulo 4.º.

Os modelos de superfície de resposta que usualmente são ajustados incluem o modelo de primeira ordem

$$E(Y) = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i X_i,$$

o modelo de primeira ordem com interações entre dois fatores

$$E(Y) = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i X_i + \sum_{i=1}^k \sum_{i < j}^k \beta_{ij} X_i X_j$$

e o modelo de segunda ordem

$$E(Y) = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i X_i + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} X_i^2 + \sum_{i=1}^k \sum_{i < j}^k \beta_{ij} X_i X_j.$$

Na maioria das vezes, estes modelos são ajustados pelo método dos mínimos quadrados.

### 3.4 - A IMPORTÂNCIA DOS PLANEJAMENTOS EXPERIMENTAIS NA CONSTRUÇÃO DE SUPERFÍCIE DE RESPOSTA

A escolha do planejamento experimental apropriado pode ter um profundo efeito sobre o sucesso na exploração da superfície de resposta. As propriedades da resposta, em grande parte, podem ser descritas pelo modelo geral

$$Y = f(x) + \varepsilon$$

onde  $Y$  é o vetor de respostas observadas,

$f(x) = X\beta$  é uma função linear ou não-linear,

$X = [x]$  um vetor de fatores experimentais,

$\beta$  é um vetor de coeficientes de regressão e

$\varepsilon$  é um vetor de erros aleatórios que deve seguir, pelo menos, aproximadamente, a distribuição de probabilidade normal com média zero e variância  $\sigma^2 I$ ,  $N(0, \sigma^2 I)$ .  $I$  é uma matriz identidade ( $n \times n$ ) onde  $n$  é o número de corridas experimentais.

O impacto do planejamento experimental é melhor observado, através da matriz de variâncias e covariâncias

$$V(\hat{\beta}) = \sigma^2 (X'X)^{-1}.$$

A matriz  $(X'X)^{-1}$  é influenciada pelo modelo e pelo planejamento. Um critério muito importante que deve ser considerado na escolha do planejamento experimental é que  $|(X'X)^{-1}|$  seja minimizado, ou que  $|X'X|$  seja maximizado.

Neste trabalho, será referido ao valor

$$\hat{Y} = X'\hat{\beta}$$

como valor ajustado para a resposta, onde o vetor  $X'$  é um vetor dependente do modelo e do ponto no espaço do planejamento para o qual a predição está sendo realizada.

A variância do valor predito é, então, dada por

$$\frac{N\text{Var}(\hat{Y})}{s^2} = X'(X'X)^{-1}X \quad (3.1)$$

onde,  $N$  é o número de corridas experimentais realizadas.

### 3.5 - COMPORTAMENTO DA VARIÂNCIA PREDITA

A exploração de uma superfície de resposta é feita através de uma função ajustada,  $\hat{Y}$ , a qual permite a predição da resposta em uma localização dentro ou no perímetro da região do planejamento. Na maioria das vezes, a função da variância na equação (3.1) não é constante na região do planejamento. Por isso, é importante que seja considerada a distribuição de  $\frac{N\text{Var}(\hat{Y})}{s^2}$  na região do planejamento.

A função da variância é muito difícil de ser visualizada e caracterizada e por isso nem sempre é considerada. Claramente, a performance da função de resposta ajustada depende do plano experimental, geometria e resolução do planejamento etc.

Box e Hunter (1957) introduziram a noção de planejamentos rotativos para estudar o comportamento da função  $\frac{N\text{Var}(\hat{Y})}{s^2}$ . Em um planejamento rotativo  $\frac{N\text{Var}(\hat{Y})}{s^2}$  é constante sobre uma esfera (na métrica das unidades do planejamento). Isto permite certa estabilidade nas variâncias e na predição da média.

### 3.6 - PLANEJAMENTOS PARA SUPERFÍCIE DE RESPOSTA

Os conceitos envolvidos na escolha de um planejamento experimental, para análise de uma superfície de resposta, não são simples. Muitas classes diferentes de planejamentos têm sido propostas por estatísticos. Ver Box, Hunter e Hunter (1978), Myers (1990), Dean (1990), Montgomery (1991), Myers et al. (1973, 1992), etc.

O problema de escolher um bom planejamento para o ajuste de um modelo  $Y=X\beta+\varepsilon$ , de qualquer ordem, tem sido interpretado como escolher o planejamento que permita estimar os coeficientes de regressão com variância mínima. Se as variáveis na matriz  $X$  são funcionalmente independentes então a exigência de variância mínima será satisfeita se escolhermos o planejamento que produza a matriz  $X'X$  diagonal. Claramente, os planejamentos ortogonais e em particular os fatoriais e fatoriais fracionados satisfazem esta condição. Assim, a classe de planejamentos que é apropriada para determinação dos coeficientes de regressão, com variância mínima, é a classe dos ortogonais.

#### 3.6.1 - PLANEJAMENTO PARA O AJUSTE DE UM MODELO DE PRIMEIRA ORDEM

Suponha que se deseje ajustar um modelo de primeira ordem para  $k$  fatores experimentais

$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i X_i + \varepsilon.$$

Existe uma única classe de planejamentos que minimiza a variância dos coeficientes de regressão. São os planejamentos de primeira ordem e ortogonais. Um planejamento de primeira ordem é ortogonal, se os elementos fora da diagonal da matriz  $X'X$  são todos zero. Isto implica que a soma do produto cruzado das colunas da matriz  $X$  é zero.

A classe de planejamento de primeira ordem ortogonal inclui o  $2^k$  fatorial e frações desta série. Para estes planejamentos não há confundimento entre os efeitos principais. Na utilização destes planejamentos, os  $k$  fatores devem ser codificados para

os níveis padrões  $\pm 1$ . Por exemplo, suponha que um planejamento fatorial com 3 fatores e com dois níveis para cada fator ( $2^3$  fatorial completo) será utilizado para ajustar um modelo de primeira ordem. Então,

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \varepsilon$$

e a matriz X para ajustar este modelo é:

$$X = \begin{matrix} & \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \begin{matrix} +1 \\ +1 \\ +1 \\ +1 \\ +1 \\ +1 \\ +1 \\ +1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 \\ -1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & +1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

É fácil verificar que os elementos fora da diagonal de  $X'X$  ( $X'$  é a matriz transposta) são iguais a zero para este planejamento.

O planejamento  $2^k$  não proporciona uma estimativa do erro experimental, a não ser que algumas corridas experimentais sejam repetidas. Uma forma comum de incluir repetições no planejamento  $2^k$  é incluir várias observações para o centro (o ponto  $x_i=0$ ,  $i=1, 2, \dots, k$ ). A adição de pontos centrais não influenciará na estimação dos coeficientes de regressão ( $\beta_i$ ) para  $i \geq 1$ , mas a estimativa de  $\beta_0$  torna-se a média geral de todas as observações.

### 3.6.2 - PLANEJAMENTO PARA O AJUSTE DE UM MODELO DE SEGUNDA ORDEM

Um planejamento experimental para ajustar um modelo de segunda ordem deve ter pelo menos 3 níveis para cada fator, para que os parâmetros do modelo possam ser estimados. A classe preferida de planejamentos de superfície de resposta de segunda

ordem é a classe dos planejamentos rotáveis. Um planejamento experimental é dito ser rotável se a variância da resposta estimada, para algum ponto  $x$ , é uma função somente da distância do ponto ao centro e não uma função da direção. Isto implica que o contorno da variância da resposta estimada é formado por círculos concêntricos. Entretanto, um planejamento com esta propriedade deixará a variância da resposta estimada constante, quando o planejamento gira sobre o centro  $(0, 0, 0, \dots, 0)$ ; daí o nome planejamento rotável.

O planejamento mais amplamente usado para ajustar um modelo de segunda ordem é o planejamento de composição central. Estes planejamentos consistem de um  $2^k$  fatorial ou fatorial fracionado (codificados para a notação usual  $\pm 1$ ) mais  $2k$  pontos estrelas  $(\pm \alpha, 0, 0, \dots, 0)$ ,  $(0, \pm \alpha, 0, \dots, 0)$ ,  $(0, 0, \pm \alpha, \dots, 0)$ , ...,  $(0, 0, 0, \dots, \pm \alpha)$  e  $n_0$  pontos centrais  $(0, 0, 0, \dots, 0)$ .

Um planejamento de composição central será rotável pela escolha de  $\alpha$ . O valor de  $\alpha$  para rotabilidade depende do número de pontos na porção fatorial do planejamento. Isto é,  $\alpha = (F)^{1/4}$  produzirá um planejamento de composição central onde  $F$  é o número de pontos na porção fatorial do planejamento. Por exemplo, suponha um experimento com dois fatores, então a porção fatorial deve conter  $F = 2^2 = 4$  corridas. Assim, o valor de  $\alpha$  para rotabilidade é  $\alpha = (4)^{1/4} = 1,414$ . Uma propriedade destes planejamentos é que podem ser construídos a partir de um planejamento de primeira ordem ( $2^k$ ) adicionando os pontos estrelas e talvez vários pontos centrais. Outra propriedade é que pode ser controlado pela escolha do número de pontos centrais,  $n_0$ . Com uma apropriada escolha do número de pontos centrais o planejamento pode ser ortogonal, ou pode ser de precisão uniforme. Em um planejamento de precisão uniforme a variância da resposta estimada na origem é igual para as distâncias unitárias desde a origem. Um planejamento de precisão uniforme proporcionará maior precisão contra o viés nos coeficientes de regressão devido à presença de termos de terceira ordem ou mais altos na verdadeira superfície de um planejamento ortogonal.

Uma classe popular de planejamentos de segunda ordem são os planejamentos de Box-Behnken desenvolvidos nos anos 60. Uma discussão sobre estes planejamentos é dada em Box e Draper (1987).

Os planejamentos de Box-Behnken competem com os planejamentos de composição central. Ambos representam excelentes planos para estimação dos coeficientes.

### **3.7 - CONCLUSÃO**

A metodologia de planejamentos de experimentos é uma ferramenta eficiente na melhoria da qualidade dos produtos e processos.

Neste capítulo, foram discutidos alguns planejamentos experimentais, porém, muitos são os planejamentos experimentais eficientes, na construção de superfícies de respostas, recomendados na literatura. Ver, por exemplo, Khuri e Cornell (1987), Montgomery (1991), Box , Hunter e Hunter (1978).

## CAPÍTULO 4.º

**MODELAGEM DA RESPOSTA****4.1 - INTRODUÇÃO**

O procedimento de modelar a resposta foi discutido por Lucas (1985), Welch et al. (1990), Box e Fung (1986), Shoemaker et al. (1991), Montgomery (1991), Engel (1992), Myers et al. (1992), Freeney e Nair (1992) e outros.

Considerando que muitos produtos requerem várias características de qualidade, por exemplo, os produtos químicos como resina, composições, fibras, plásticos etc., será tratada neste capítulo a modelagem conjunta da média e da variância de  $r$  réplicas de cada uma destas características.

Seguindo a sugestão de Lucas (1985), de que é mais fácil analisar e explicar várias respostas, incluindo respostas de sinal e de ruído, dados são gerados através de experimentos e utilizados para construir modelos para as médias e para as variâncias, de  $r$  réplicas de cada combinação dos fatores, como funções dos fatores experimentais para cada uma das características de qualidade. Será denominado modelo de locação o modelo para a média e, modelo de dispersão o modelo para a variância de cada uma das respostas. Após a construção dos modelos, uma estatística que seja adequada, para medir o desempenho, é escolhida e aplicada aos modelos ajustados, para determinar os níveis ótimos dos fatores.

Por exemplo, suponha um experimento para o qual uma característica de resposta,  $Y$ , para níveis fixos dos fatores de controle, possa ser razoavelmente aproximada como  $N(\mu, \sigma^2)$ , onde  $\mu = E(Y/C)$  e  $\sigma^2 = V(Y/C)$  ( $C$  representa os fatores de controle) podem depender dos níveis dos fatores. Supõe-se que existe um valor objetivo,  $m$ , para a resposta e que uma função perda  $L(Y, m)$  tenha sido identificada. Supõe-se também, que o objetivo do experimento seja minimizar  $E[L(Y, m)]$  dado  $E(Y) = m$ . Se  $E(Y)$  for fixo para  $m$ , então,  $E[L(Y, m)]$  deverá decrescer, quando  $V(Y)$  decresce. Entretanto, o objetivo do experimento poderá ser definido como minimizar  $V(Y)$ , dado

$E(Y) = m$ . Geralmente, isto poderá ser aplicado para qualquer situação onde a distribuição da resposta possa ser adequadamente descrita por um modelo de locação.

Para a modelagem das respostas, não há razão para adotar um arranjo produto para o planejamento dos fatores. Um arranjo simples pode ser usado para acomodar as combinações dos fatores (controle, sinal e ruído), que serão incluídos no experimento.

O aspecto não usual deste procedimento é que se quer modelar as funções  $V(Y)$  e  $E(Y)$ . Procedimentos para experimentos planejados com o objetivo de modelar a esperança da resposta estão bem estabelecidos. Em geral, é mais difícil analisar o efeito dos fatores sobre  $V(Y)$  (ver Gunter 1988 e Carrol e Rupert 1988). Primeiro, é usualmente mais difícil obter uma estimativa relevante da variância que da média. Para um dado conjunto de condições incluídas no experimento, o número de replicações necessárias, para se obter uma estimativa razoável da variância pode ser muito grande e, então, não ser economicamente viável. Segundo, deve-se ter o cuidado de assegurar que a variação observada sob condições experimentais, realmente, reflita o que ocorre sob condições práticas de operação. Isto realmente ocorre, quando um experimento de laboratório está sendo usado para explorar o processo de produção ou o experimento está sendo realizado sobre um intervalo de tempo relativamente curto. Em ambos os aspectos, o uso dos fatores de ruído para representar fatores indicativos e aleatórios é uma ferramenta valiosa. Nair (1992) demonstrou que o uso dos fatores de ruído pode reduzir consideravelmente o número de corridas experimentais necessárias, especialmente, se os fatores de ruído captam uma grande porção de variação do processo. O uso dos fatores de ruído é também útil para incluir fontes de variação que são conhecidas e que afetam um processo em um experimento fora da linha.

Suponha-se um experimento planejado para investigar os efeitos dos fatores sobre  $E(Y)$  e  $V(Y)$ . As combinações dos níveis dos fatores deverão ser alocadas em um arranjo adequado. Usualmente, algum tipo de planejamento fatorial poderá ser adotado. Suponha-se que  $n_j$  observações replicadas sejam tomadas para cada uma das,  $n_i$ , combinações dos níveis dos fatores. Então para a  $i$ -ésima combinação dos fatores,  $E(Y_i)$  e  $V(Y_i)$  poderão ser estimadas usando:

$$\hat{\mu}_i = E(Y_i) = \bar{y}_i \quad \text{e} \quad \hat{\sigma}_i^2 = s_i^2 = V(Y_i) = \frac{\sum_j (Y_{ij} - \bar{y}_i)^2}{(n_j - 1)},$$

onde  $j$  é o índice das replicações. Note-se que o procedimento de aleatorização afetará as fontes de variações (fatores aleatórios e indicativos) representados em  $s_i^2$ . Por exemplo, considere o seguinte procedimento de aleatorização:

- 1) as  $n_i$  combinações dos fatores são aleatorizadas e para cada combinação,  $n_i$  observações consecutivas são tomadas deixando fixos os níveis dos fatores;
- 2) todas  $n_i \times n_j$  corridas do experimento são aleatorizadas e os níveis dos fatores são reestabelecidos para cada nova corrida.

Claramente, espera-se que os valores de  $s_i^2$ , calculados para o primeiro procedimento, sejam menores que os calculados para o segundo procedimento, desde que as observações sejam tomadas sobre um pequeno intervalo de tempo e com os níveis constantes para os fatores. Entretanto, nos valores de  $s_i^2$ , para o segundo procedimento, estão incluídos os efeitos dos fatores aleatórios, que variam significativamente sobre o longo período de tempo requerido para obter as observações, os quais são relativamente constantes sobre o período de tempo necessário para obter as  $n_j$  réplicas para o primeiro procedimento. Também, qualquer variação induzida pelo reestabelecimento dos níveis dos fatores são incluídos usando o segundo procedimento, e não o primeiro. O procedimento preferido dependerá da aplicação individual. Isto ilustra os tipos de dificuldades encontradas no planejamento de experimento para modelar a variância.

Considerações similares ocorrem com respeito à designação das unidades experimentais para a partida. O planejamento experimental deverá ser escolhido cuidadosamente, para assegurar que a variação experimental reflita a variação do processo. Assumindo que um experimento adequado tenha sido planejado e realizado com  $r$  réplicas de cada combinação dos fatores, então,  $\hat{\mu}_i$  e  $s_i^2$  (ou suas funções de transformações quando houver necessidade), deverão ser utilizadas para construir modelos de respostas como funções dos fatores do experimento.

Os fatores, que permanecerão nos modelos ajustados de locação e de dispersão, poderão ser identificados utilizando metodologia padrão tais como o teste  $t$ , os gráficos de probabilidade normal e seminormal e gráficos de resíduos.

Quando os fatores de ruído são incluídos no experimento, Taguchi recomenda que seja adotado o arranjo produto, onde os fatores de controle variam de acordo com o arranjo interno e os fatores de ruído de acordo com o arranjo externo. Neste caso,  $\mu_i$  e  $s_i^2$  para cada combinação dos fatores de controle serão calculados sobre as observações para a correspondente corrida do arranjo interno. Um prejuízo para este procedimento é que todas as informações sobre os fatores de ruído individuais, bem como a variação residual (variação não explicada pelos fatores de ruído) é agrupada em  $s_i^2$ . Isto resulta em perda de um montante substancial de informações detalhadas. Box (1988), Shoemaker et al. (1991) e Wu em Nair et al. (1992) discutiram este procedimento e colocaram muitas objeções quanto a suas aplicações. Em particular, informações individuais sobre os fatores de ruído serão úteis para avaliar a contribuição relativa destes fatores na variação transmitida para a resposta e, assim, indicar as áreas onde mais atenção e cuidados deverão ser concentrados. Também, informações como, quais fatores de controle afetam fatores de ruídos específicos, podem sugerir novos caminhos para minimizar o efeito daqueles fatores de ruído. Também, pode-se notar que agrupar todas as fontes de variação em  $s_i^2$  significa que existe uma implicada importância para estas fontes. Shoemaker et al. (1991) recomendam o uso do arranjo combinado, para acomodar fatores de controle e ruído e, assim, investigar os efeitos individuais dos fatores bem como suas interações. Este procedimento resulta em uma maior flexibilidade na escolha do planejamento dos fatores.

O procedimento de modelar a resposta, como uma função dos fatores do experimento, é um método de análise estatística discutido e proposto por vários autores. Box e Fung (1986), Welch et al. (1990), Shoemaker et al. (1991), Montgomery (1991), Engel (1992) e Myers et al. (1992) discutiram este procedimento. A idéia básica é obter mais informações sobre a influência dos fatores de ruído sobre a resposta, incluindo estes fatores no modelo de locação. Os fatores de ruído, geralmente, são incluídos nos experimentos como efeitos fixos; então, superfícies de respostas para a média e variância podem ser construídas, facilmente, pelo uso dos arranjos cruzados ou dos arranjos combinados.

Para muitos conjuntos de dados, as suposições básicas dos modelos clássicos, normalidade dos erros, variância constante e linearidade dos efeitos sistemáticos, não

são satisfeitas. Nestes casos, transformações nos dados, que permitam que tais condições sejam satisfeitas, são necessárias para que a análise de regressão seja válida. Box e Cox (1964) sugeriram a transformação potência da resposta para satisfazer estas condições básicas e aos critérios separação e parcimônia. Isto significa que uma transformação, além de proporcionar erros normais e variância constante:

- i) poderá eliminar a dependência funcional entre a média e a variância (critério de separação);
- ii) proporcionará, com a resposta transformada, um modelo aditivo simples para a média e para a variância (critério de parcimônia).

Para identificar a potência da transformação, Box sugere um gráfico chamado “Lambda” (ver apêndice B). Para a separação Nair e Pregibom (1988) propõem o gráfico média-variância, Logothetis (1990) sugere o uso de regressão simples do log do desvio padrão sobre a média e Engel (1992) desenvolveu um algoritmo, com base em regressão simples, através de mínimos quadrados, do log. da variância sobre o log. da média.

Nelder e Lee (1991) sugerem o uso de modelos lineares generalizados para obter os modelos conjuntos para a média e para a variância. Eles utilizam o gráfico média-variância e/ou, o método de regressão simples de Logothetis como ferramentas exploratórias. A metodologia apresentada por Nelder e Lee requer a utilização do programa estatístico GLIM (“Generalized Linear Interactive Modelling”).

## 4.2 - FORMULAÇÃO GERAL DO PROBLEMA

CONSIDERE:

- a)  $Y_k = [y_{ij}]_{n \times r}$ , uma matriz de valores observados para o desempenho da k-ésima característica de qualidade,  $k=1, 2, \dots, K$ , onde  $n$  é o número de corridas e  $r$  é o número de repetições de cada combinação de fatores do experimento;

b)  $E(Y_k) = [\bar{y}_{ik}]_n$ , um vetor de médias. Isto é,  $\bar{y}_{ik}$  representa a média da  $i$ -ésima linha da matriz  $Y_k = [y_{ijk}]_{n \times r}$ ;

c)  $\text{Var}(Y_k) = [s_{ik}^2]_n$ , é um vetor de variâncias, onde  $s_{ik}^2$  representa a variância da  $i$ -ésima linha da matriz  $Y_k = [y_{ijk}]_{n \times r}$ ;

d)  $X_{\text{con}} = [X_{\text{con}1}, X_{\text{con}2}, \dots, X_{\text{con}k}]$  um vetor de fatores de controle do experimento, são variáveis aleatórias contínuas ou discretas com distribuições de probabilidades conhecidas ou desconhecidas. Seja  $\text{Cov}(X_{\text{con}}) = V(X_{\text{con}})$  a matriz de variâncias e covariâncias de  $X_{\text{con}}$ ;

e)  $X_{\text{ruí}} = [X_{\text{ruí}1}, X_{\text{ruí}2}, \dots, X_{\text{ruí}p}]$  um vetor de fatores de ruído do experimento e seja  $\text{Cov}(X_{\text{ruí}}) = V(X_{\text{ruí}})$  a matriz de variâncias e covariâncias de  $X_{\text{ruí}}$ .

Considere-se também, que o relacionamento funcional entre os fatores e as respostas,  $Y$ ,  $E(Y)$  e  $\text{Var}(Y)$  pode ser descrito por uma função, que será denominada função de resposta. Para simplicidade de notação será utilizado:

$$Y = f(X_{\text{con}}, X_{\text{ruí}}) + \varepsilon, \quad (4.1)$$

para representar os modelos para  $Y$ ,  $E(Y)$  e  $\text{Var}(Y)$ .

A função  $f(X_{\text{con}}, X_{\text{ruí}})$  será uma função linear ou não-linear dos fatores, dependendo do tipo de planejamento escolhido para acomodar os fatores incluídos no experimento, e  $\varepsilon$  é um vetor  $n \times 1$  de erros aleatórios com média zero e matriz de variâncias-covariâncias  $\text{Cov}(\varepsilon) = s_{\varepsilon}^2 I$ .

### 4.3 - HIPÓTESES SOBRE OS MODELOS

Os modelos que irão representar cada uma das funções de resposta

$$Y = f(X_{\text{con}}, X_{\text{ruí}}) + \varepsilon$$

deverão satisfazer as seguintes suposições:

- homogeneidade das variâncias;

- simplicidade da estrutura para o valor esperado da resposta;
- erros aditivos com distribuições, pelo menos, aproximadamente normais e independentes.

Se não for possível satisfazer estes três requisitos, na escala original de medida da resposta  $Y$ , é possível que exista uma transformação da resposta, que produzirá homogeneidade das variâncias e, pelo menos, aproximadamente, normalidade dos erros.

Em geral, a forma de ligação dos valores esperados da resposta aos níveis dos fatores do experimento pode ser representada pela expressão:

$$\mu = E(Y) = f(X, \beta) \quad (4.2)$$

onde,

$X = (X_{\text{con}}, X_{\text{rui}})$  é o conjunto dos fatores do experimento, e

$\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$  representa um conjunto de parâmetros a serem estimados dos dados observados.

A variância de  $Y$  pode ser escrita da seguinte forma:

$$V(Y) = \phi V(\mu),$$

onde

$\phi$  é um parâmetro de dispersão, e

$$V(\mu) = \partial\mu/\partial\beta,$$

é a função da variância.

A equação (4.2) é dita representar o modelo mecânico. Frequentemente, não se tem o necessário conhecimento físico do produto ou processo ou o conhecimento é incompleto e conseqüentemente, não se tem o modelo mecânico. Nestas circunstâncias, pode-se aproximar, localmente, dentro dos limites dos fatores experimentais,  $f(X, \beta)$  por uma função de interpolação tal como um polinômio.

#### 4.4 - APROXIMAÇÕES DAS FUNÇÕES DE RESPOSTA

As investigações de sistemas são realizadas, frequentemente, com respeito à explicação de algum relacionamento funcional:

$$\mu = E(Y) = f(X)$$

conectando o valor esperado (isto é, o valor médio) de uma resposta  $Y$ , tal como a característica de qualidade de um produto com respeito a  $k$  fatores. Em alguns problemas, um número diferente de respostas pode ser de interesse. Neste trabalho, duas respostas são de interesse: a média e a variância de  $n$  replicações do experimento. Para cada uma destas respostas, existirá um relacionamento funcional separado.

A função,  $f(X)$ , freqüentemente, não é conhecida. Assim sendo, é necessário utilizar-se de um método de aproximação, que resulte em uma função que melhor represente o sistema estudado.

Uma boa aproximação será aquela que

$$\text{dist}_\infty(f, g) = \inf \|f - g\|_\infty \quad (4.3)$$

onde  $g$  é a função de aproximação e  $\|f - g\|_\infty$  é a norma de Tchebycheff.

Por apresentarem uma estrutura simples e boas propriedades de aproximações, os polinômios algébricos são amplamente utilizados, na prática, para aproximações de funções. O grau desta aproximação depende essencialmente do grau do polinômio e do comprimento do intervalo considerado. As operações computacionais de um polinômio de alto grau apresentam algumas dificuldades e, por isso, é aconselhável trabalhar com polinômios de baixo grau, como será visto a seguir. Para os casos onde as funções que devem ser aproximadas não são monótonas, e portanto a distância (4.3) não será mínima, para obter a precisão desejada é necessário restringir a pequenos intervalos. Ou seja, é necessário dividir o intervalo original em pequenos subintervalos e ajustar um polinômio para cada um deles. Este método é conhecido como aproximações por funções “splines”, e será descrito no item 4.4.2.

#### 4.4.1 - APROXIMAÇÕES POR POLINÔMIOS

Uma aproximação polinomial é uma função que é uma agregação linear de potências e produtos dos fatores experimentais. Um termo em um polinômio é dito ser de ordem  $j$ , ou grau  $j$ , se contém o produto de  $j$  fatores. Assim, termos envolvendo, por exemplo,  $x_1^3$ ,  $x_1x_2^2$  e  $x_1x_2x_3$  serão ditos serem de ordem 3, ou grau 3. Um polinômio é dito ser de ordem  $d$ , ou grau  $d$ , se o termo, ou os termos, de mais alta ordem é, ou são,

de ordem  $d$ . Assim, se  $k=2$  e se  $x_1$  e  $x_2$  denotam dois fatores, o polinômio geral pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} f(X, \beta) = & \beta_0 + (\beta_1 X_1 + \beta_2 X_2) + (\beta_{11} X_1^2 + \beta_{22} X_2^2 + \beta_{12} X_1 X_2) \\ & + (\beta_{111} X_1^3 + \beta_{222} X_2^3 + \beta_{112} X_1^2 X_2 + \beta_{122} X_1 X_2^2) \\ & + (\beta_{1111} X_1^4 + \dots) + \dots \end{aligned}$$

Uma expressão polinomial, de grau  $d$ , pode ser pensada como uma expansão da série de Taylor da verdadeira função teórica  $f(X)$ , truncada após o termo de ordem  $d$ . Na maioria das vezes, as funções teóricas de resposta,  $f(X)$ , são funções multivariadas não lineares. Então, estas funções são linearizadas pela expansão da série de Taylor. Como demonstrado nos livros textos de Box e Draper (1987), Khuri e Cornell (1987) e Myers (1976). Resumindo, suponha que  $Y=f(X)$  seja uma função que representa a característica de desempenho e seja  $X = (X_1, X_2, \dots, X_k)$  o conjunto de fatores do experimento, média  $E(X_1) = \mu_1, E(X_2) = \mu_2, \dots, E(X_k) = \mu_k$ . Se a função  $f(X)$  é contínua, suave e com derivadas parciais,  $f$ , de todas as ordens também contínuas, então é possível representá-la, localmente, para qualquer grau de aproximação requerido, por uma expansão da série de Taylor em torno de um ponto arbitrário  $X_0 = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$ , isto é:

$$\begin{aligned} Y = f(X) = & f(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k) + \sum_{i=1}^k (X_i - \mu_i) \phi'(\mu_i) \\ & + 1/2! \sum_{i=1}^k (X_i - \mu_i)^2 \phi''(\mu_i) \\ & + \sum_{i=1}^k \sum_{i < j}^k (X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j) \phi'(\mu_i, \mu_j) + \dots \end{aligned} \quad (4.4)$$

Através desta expressão pode-se obter  $E(Y)$  e  $\text{Var}(Y)$ .

$$\begin{aligned} E(Y) = f(X) = & f(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k) + \sum_{i=1}^k E(X_i - \mu_i) \phi'(\mu_i) \\ & + 1/2! \sum_{i=1}^k E(X_i - \mu_i)^2 \phi''(\mu_i) \\ & + \sum_{i=1}^k \sum_{i < j}^k E[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j) \phi'(\mu_i, \mu_j) + \dots] \end{aligned}$$

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}[f(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k) + \sum_{i=1}^k (X_i - \mu_i) \phi(\mu_i)]$$

$$\begin{aligned}
& + 1/2! \sum_{i=1}^k (X_i - \mu_i)^2 \phi''(\mu_i) \\
& + \sum_{i=1}^k \sum_{i < j}^k (X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j) \phi'(\mu_i, \mu_j) + \dots].
\end{aligned}$$

A equação (4.3) pode ser expressa como um polinômio da seguinte forma:

$$Y = f(X) = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i X_i + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} X_i^2 + \sum_{i=1}^k \sum_{i < j}^k \beta_{ij} X_i X_j + \dots,$$

onde os coeficientes  $\beta_0$ ,  $\beta_i$ ,  $\beta_{ii}$  e  $\beta_{ij}$  são parâmetros que dependem de  $\mu_i$  e das derivadas,  $\phi(X_i)$ , para o ponto  $\mu_i$ .

As estimativas da média e da variância da resposta podem, então, ser derivadas como:

$$\begin{aligned}
E(Y) = E[f(X)] &= E(\beta_0) + \sum_{i=1}^k \beta_i E(X_i) + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} E(X_i^2) \\
&+ \sum_{i=1}^k \sum_{i < j}^k \beta_{ij} E(X_i) E(X_j) + \dots,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Var}(Y) = \text{Var}[f(X)] &= \text{Var}[\beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i X_i + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} X_i^2 \\
&+ \sum_{i=1}^k \sum_{i < j}^k \beta_{ij} X_i X_j + \dots]
\end{aligned}$$

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}(\beta_0) + \text{Var}[\sum_{i=1}^k \beta_i X_i + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} X_i^2 + \sum_{i=1}^k \sum_{i < j}^k \beta_{ij} X_i X_j + \dots]$$

$$\text{Var}(Y) = \sum_{i=1}^k \beta_i^2 \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{i=1}^k \sum_{i < j}^k \beta_{ij}^2 \text{Cov}(X_i, X_j) + \dots$$

Os modelos acima podem ser representados na forma matricial:

$$Y = \beta_0 + \beta'X + X'BX + \varepsilon,$$

$$E(Y) = \beta_0 + \beta'X + X'BX, \text{ e}$$

$$\text{Var}(Y) = [\beta + 2BX]' \Sigma_\varepsilon [\beta + 2BX],$$

onde

$$\beta = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k],$$

$$B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12}/2 & \beta_{13}/2 & \dots & \dots \\ \beta_{12}/2 & \beta_{22} & \beta_{23}/2 & \dots & \dots \\ \beta_{13}/2 & \beta_{23}/2 & \beta_{33} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

e  $\Sigma_\varepsilon$  é a matriz de variâncias e covariâncias para os erros de ajustamento, cujo  $i$ -ésimo elemento é  $\sigma_i^2 > 0$ .

O modelo acima envolve termos de todas as ordens. Geralmente, modelos de primeira e segunda ordem são os mais utilizados. A ordem do modelo e a inclusão dos termos cruzados serão determinados pelo planejamento experimental escolhido e pela checagem do modelo utilizado.

#### 4.4.2 - APROXIMAÇÕES POR FUNÇÕES “SPLINES”

Este método de aproximação, onde o intervalo original é dividido em subintervalos, foi desenvolvido na década de sessenta. Os autores Shumaker (1968), Greville (1968), DeBoor (1973), Munteanu (1973), Bojonov, Hakopian e Sahakian (1993) e Dierckx (1993) apresentam esta metodologia detalhada e justificam suas qualidades.

O intervalo original é dividido em subintervalos, para que seja obtida uma boa precisão do ajuste. Isto é, para que a distância entre a função ajustada e a função que representa o sistema seja mínima. Geralmente, a função que representa o sistema não é conhecida. Então, é avaliada a distância entre os pontos ajustados pela função de aproximação e os dados amostrais. Na linguagem estatística, isto é conhecido como soma dos quadrados dos erros.

O intervalo original, representado por  $[a, b]$ , é dividido em subintervalos suficientemente pequenos  $\{[X_k, X_{k+1}]\}_{k=0}^n$  e, então, um polinômio de grau baixo,  $p_k$ , é

utilizado para aproximação sobre  $[X_k, X_{k+1}]$ ,  $k=0,1, \dots, n$ . Este procedimento produz uma função polinômio fracionado  $s(X)$

$$s(X) \equiv p_k(X)$$

sobre  $[X_k, X_{k+1}]$ ,  $k = 0,1, \dots, n$ .

Em geral, as frações do polinômio  $\{p_k(X)\}$  são construídas independentes uma da outra e não são supostas que sempre formem uma função contínua  $s(X)$  sobre  $[a, b]$ . Isto porém, não pode ser aceitável, quando se trata de aproximações que descrevem processos suaves. Nestes casos, requer-se que as frações do polinômio  $\{p_k(X)\}$  se juntem suavemente para  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Isto é, todas as derivadas de  $p_{k-1}$  e  $p_k$ , coincidam para  $X_k$ . Tem-se então, uma função suave, função polinômio fracionado chamado função “spline”.

As propriedades das funções “splines” e suas relações fechadas com os outros ramos da matemática mostram que o aparecimento das funções “splines” é motivado pela lógica intrínseca ao desenvolvimento de sua matemática. Isto pode ser visto em Shumaker (1981), Bojanov et al. (1993) e Dierckx (1993), principalmente.

**Definição:** A função  $s(X)$  é chamada uma função “spline” ou simplesmente “um spline” de grau  $r$  com nós  $\{X_k\}_{k=1}^n$  se  $-\infty =: X_0 < X_1 < \dots < X_n < X_{n+1} := \infty$  e

i) para cada  $k=0, 1, \dots, n$ ,  $s(X)$  coincide sobre  $(X_k, X_{k+1})$  com um polinômio de grau menor ou igual a  $r$ ,

ii)  $s(X), s'(X), s''(X), \dots, s^{r-1}(X)$  são funções contínuas sobre  $(-\infty, \infty)$ .

No ajuste de curva para dados empíricos, uma função “spline” dará uma curva mais suave que um único polinômio. Todo polinômio algébrico é um “spline” sem nós.

Um exemplo simples de uma função “spline” é a função de potências truncadas:

$$(X-t)_+^r := \int \begin{cases} (X-t)^r & \text{para } X \leq t, \\ 0 & \text{para } X > t. \end{cases}$$

O próximo teorema mostra que todo “spline” pode ser representado em termos de uma função de potências truncadas.

Seja  $S_r(X_1, X_2, \dots, X_n)$  a classe de todas as funções “spline” de grau  $r$  com nós em  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

**Teorema:** A função  $f$  pertence a  $S_k$  se e somente se, pode ser escrita da forma:

$$f(X) = \sum_{j=0}^r a_j X^j + \sum_{k=1}^n c_k (X - X_k)_+^r$$

com alguns coeficientes reais  $\{a_j\}$  e  $\{c_k\}$ .

Além disso,

$$c_k = \frac{f^r(X_k + 0) - f^r(X_k - 0)}{r!}$$

para  $k = 1, 2, \dots, n$ .

A prova deste teorema encontra-se em Shumaker (1981) e Bojanov et al. (1993).

#### 4.5 - PROCEDIMENTO PARA A MODELAGEM DA MÉDIA E DA VARIÂNCIA

Para a modelagem das respostas, muitos são os procedimentos recomendados na literatura. Myers et al. (1992) propuseram a utilização de um modelo, para o processo, ajustado em  $X_{con}$  e  $X_{ruí}$  e a variância de  $X_{ruí}$ , para a estimação da variância do processo, como uma função de  $X_{con}$ . O relacionamento da variância não é estabelecido de um modelo ajustado para o processo de variação, mas através de computações feitas sobre o modelo ajustado, para o processo, de um experimento em que  $X_{con}$  e  $X_{ruí}$  são efeitos fixos. Ele considerou os casos, com e sem interações entre fatores de controle e ruído. Engel (1992) recomendou regressão linear utilizando a transformação log. para média e variância.

Vários autores, como Box e Meyer (1986), Nair e Pregibon (1988) e Vining e Myers (1990) sugerem o uso de modelos padrões de superfícies de resposta para a variância ou para uma transformada da variância. Geralmente, o uso do  $\log(s^2)$  é sugerido, seguindo a indicação de Bartlett e Kendall (1964). Bartlett e Kendall não recomendam a utilização desta transformação quando o número de repetições,  $m$ , é menor que 5 e para  $5 \leq m \leq 9$  recomendam que seja utilizado com cuidado.

O problema é construir modelos de resposta para a média e para a variância de  $r$  repetições das combinações dos fatores experimentais. Os modelos devem ser construídos de forma que a dependência funcional entre a média e a variância, da resposta que está sendo modelada, seja eliminada pela escolha apropriada da função da variância,  $V(\mu)$ . Observe-se que para cada modelo (seja para locação ou dispersão) se tem uma função de variância  $V(\mu)$  e que  $Y$  representará ora a média, ora a variância do processo.

Para o critério de Taguchi, será necessário fazer suposições sobre os dois primeiros momentos,  $E(Y) = \mu$  e  $V(Y) = \phi V(\mu)$ . Para a análise dos dados e construção dos modelos, os passos descritos abaixo, são sugeridos neste trabalho:

- a) identificação de  $V(\mu)$ ;
- b) modelagem conjunta da média e da variância;
- c) avaliação do modelo (análise de sensibilidade);

#### **4.5.1 - IDENTIFICAÇÃO DE $V(\mu)$ - 1.º Passo**

Considerando o critério de separação, o objetivo é eliminar a dependência funcional entre a variância e a média da variável de resposta. Geralmente, a dependência é da forma  $\text{Var}(Y) \propto \mu^\alpha$ . O gráfico de média vs variância de Nair e Pregibon (1988), quando existem replicações, e/ou o método de regressão simples devem ser utilizados.

A análise deverá ser iniciada pelos gráficos de resíduos do modelo de regressão simples. Os gráfico de resíduos vs valores ajustados e o gráfico de resíduos vs  $X_i$  são ferramentas valiosas para revelar a heterogeneidade das variâncias.

#### **4.5.2 - MODELAGEM CONJUNTA DA MÉDIA E DA VARIÂNCIA - 2.º Passo**

Para a modelagem conjunta da média e da variância, o critério de parcimônia deve ser considerado como o mais importante. Isto é, procurar um modelo simples para representar a resposta.

Analisar os gráficos de resíduos dos modelos de regressão simples e considerar a necessidade de usar modelos mais complicados.

Analisar a necessidade de adicionar termos polinomiais nos fatores ou, seguir a sugestão dada pelo crescimento da variância com a resposta e fazer transformações que estabilizem a variância. E então, modelos aditivos simples para a média e variância, com transformações nas respostas e/ou nos fatores se necessárias, devem ser considerados. O objetivo é escolher a transformação adequada que leve à satisfação das suposições de normalidade dos erros, variação contante e linearidade dos efeitos sistemáticos. O gráfico lambda de Box (1987, 1988) é uma das ferramentas que podem ser utilizadas para detectar a potência da transformação da resposta, se uma transformação potência for a escolhida. Ver apêndice B.

Simplicidade da estrutura implica que um modelo de primeira ou de segunda ordem, com poucos termos quadráticos e interações, seja o modelo escolhido.

#### **4.5.3 - CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO DO MODELO (análise de sensibilidade) - 3.º Passo**

São muitos os critérios, para a avaliação dos modelos, recomendados na literatura (Weisberg (1980), Rawlings (1988), McCullagh e Nelder (1989) e outros). Neste trabalho, recomenda-se que a avaliação do modelo seja realizada através dos seguintes itens:

- avaliar a seleção dos fatores; (nos termos do modelo);
- avaliar a função da variância;
- exposição visual e análise dos resíduos;

- detecção de pontos influentes e "outliers".

O modelo deve ser avaliado para detectar a consistência interna. Se um destes quatro itens falhar, reanalisar a identificação da  $V(\mu)$  (voltar ao passo (a) sugerido no item 4.5).

#### 4.5.3.1 - SELEÇÃO DOS FATORES

A seleção de um bom conjunto de fatores, para formar a base de um modelo parcimonioso não é uma tarefa trivial. Existem dois tipos de problemas: um estatístico e outro computacional, quando todas as possíveis combinações dos fatores são testadas para a inclusão no modelo.

O problema estatístico está em definir o equilíbrio entre dois efeitos pela inclusão de um novo termo no modelo. O efeito positivo pode ser uma redução na discrepância entre os dados observados e os valores ajustados através do modelo; o efeito negativo está no modelo menos parcimonioso. Se a adição de um fator reduz o quadrado médio do resíduo (por exemplo, em um terço de seu valor original) não se deve hesitar na inclusão deste fator, particularmente, se o número de graus de liberdade do resíduo for grande. Se a adição não causa redução, a parcimônia prevalece e o fator não deve ser incluído no modelo (ver comparações de modelos, apêndice A). O caso intermediário é a causa da dificuldade. Na presença de muitos fatores, que de fato são todos irrelevantes, acidentes estatísticos podem produzir uns poucos falsos positivos, que parecem influenciar a resposta. Tais considerações dão suporte ao critério de aceitação de um termo com base em níveis de probabilidade, por exemplo, a correspondente estatística F. Outro procedimento é fundamentado na idéia de obter a melhor predição para o valor da resposta sobre um conjunto de fatores.

O problema computacional pode ser especificado como "encontrar os melhores subconjuntos  $s$ , de fatores, de tamanho  $r$ ". Se  $k$ , o número de fatores, é razoavelmente pequeno, por exemplo,  $k \leq 12$ , os melhores subconjuntos de tamanho 1 até  $(k-1)$  podem ser encontrados pela enumeração completa. Alguns dos métodos para geração de um único subconjunto ótimo, encontrados na literatura, são:

i) Seleção progressiva (forward selection). Os fatores são selecionados um por um até que todos tenham sido testados.

ii) Seleção regressiva (backward selection). Inicia-se com o conjunto completo e elimina-se um por um até que os que permanecerem sejam os necessários.

iii) Regressão por passos (stepwise). Aqui, combinam-se os dois procedimentos anteriores.

iv) Seleção com base na minimização do quadrado médio do erro da predição. Os critérios que seguem a minimização do quadrado médio do erro são:  $C_p$  de Mallow;  $S_p$  de Hocking; e PC de Amemiya. Para detalhes e as razões do teste F para cada critério ver Madalla (1992) e Elian (1988).

Estes métodos não levam necessariamente à mesma solução.

Os três primeiros critérios são freqüentemente encontrados nos programas computacionais estatísticos, porém, Madalla (1992) não os recomenda em suas análises econométricas.

Decidir se é ótimo um subconjunto particular é difícil, quando muitos outros também apresentam bons ajustes. A decisão deve ser tomada considerando não somente os critérios estatísticos mas, também, conhecimentos a priori sobre os fatores. Certos fatores poderão ser colocados no modelo se forem estatisticamente significantes ou não. Alguns autores, como Sudasna-na-ayudhya (1992), propõem o modelo completo e, neste caso, fatores estatisticamente não significantes são incluídos no modelo.

#### 4.5.3.2 - FUNÇÃO DA VARIÂNCIA

A dependência funcional entre a variância e a média deve ser detectada. Isto pode ser feito através do gráfico dos resíduos vs valores ajustados. Este gráfico deve ser utilizado para checar se o espalhamento dos resíduos é aproximadamente constante e independente da média. Uma função da variância, que cresce muito rapidamente com a média, causará que o espalhamento dos resíduos cresça com a média, indicando heterogeneidade das variâncias e a necessidade de transformação na variável de resposta.

A suposição de variâncias constantes é muito importante na aplicação do método dos mínimos quadrados. Esta suposição implica que toda observação sobre a variável

dependente contenha o mesmo montante de informações. A propriedade de variância mínima dos estimadores de mínimos quadrados está diretamente ligada a esta suposição.

A análise pode, também, ser conduzida pelo gráfico do módulo do resíduo em lugar do resíduo. Isto faz com que grandes e pequenos resíduos vão para a parte superior do gráfico e, assim, as informações ficam concentradas em um lado do gráfico.

#### **4.5.3.3 - EXPOSIÇÃO VISUAL E ANÁLISE DOS RESÍDUOS**

Os gráficos dos resíduos dão informações valiosas quanto à presença de pontos fora de controle (outliers), adequação do modelo e/ou a validade de suas suposições.

Um gráfico de resíduo, muito importante após o ajuste, é o gráfico dos resíduos vs valores ajustados. Este gráfico é capaz de revelar:

- i) pontos com grandes resíduos;
- ii) uma curvatura, indicando escalas insatisfatórias para os fatores e inadequação do modelo;
- iii) uma tendência nos dados com o crescimento dos valores ajustados, indicando uma função da variância insatisfatória;
- iv) a não normalidade dos erros.

Os gráficos de resíduos vs  $X_i$  podem indicar:

- i) variância não constante;
- ii) necessidade de inclusão de termos quadráticos em  $X_i$  no modelo ou uma transformação na resposta;

Os gráficos são técnicas visuais para se analisar as suposições básicas dos modelos de regressão. Algumas estatísticas têm sido sugeridas como medidas numéricas das discrepâncias mencionadas.

A não normalidade dos erros pode ser detectada, através dos gráficos de resíduos vs escores normais. Existem dois tipos de gráficos de probabilidade normal: o gráfico normal completo e o gráfico normal semicompleto. Estes gráficos comparam o resíduo ordenado vs valores esperados das observações ordenadas de uma distribuição normal padrão (média zero e variância 1). No gráfico normal semicompleto são considerados os valores absolutos dos resíduos. Diferentes formas destes gráficos revelam diferentes tipos de afastamento da normalidade.

#### **4.5.3.4 - DETECTANDO OBSERVAÇÕES INFLUENTES E "OUTLIERS"**

Observações influentes são aquelas observações que, individualmente ou coletivamente, influenciam excessivamente a equação de regressão ajustada, quando comparada com outras observações do conjunto de dados. Uma observação pode não influenciar todos os resultados da regressão. Por exemplo, uma observação pode ter influência sobre as estimativas dos parâmetros  $\beta$ , sobre a variância estimada de  $\beta$ , sobre os valores ajustados e/ou sobre as estatísticas de ajuste. É importante, na análise de dados, ser capaz de identificar as observações influentes e avaliar seus efeitos sobre os vários aspectos da análise.

As observações são "outliers" porque, de alguma forma, são inconsistentes com as outras observações do conjunto de dados. Uma observação pode ser um "outliers" devido à variável resposta ou um ou mais dos fatores terem valores fora dos limites esperados.

As observações podem ser "outlier" ou influentes por erros na condução da pesquisa (má função de máquinas, registros, códigos, erros de entrada de dados, falha em seguir o planejamento experimental) ou porque os dados vêm de diferentes populações.

Um grande número de medidas estatísticas tem sido proposto na literatura para o diagnóstico de observações influentes e "outliers". Ver apêndice C.

#### **4.6 - CONCLUSÃO**

Nesta etapa, finalmente, têm-se os modelos de locação e de dispersão. Observe-se que o problema será bicritério, se o produto requer apenas uma característica de qualidade ou será um problema multicritério, se várias características influenciam na qualidade do produto. O capítulo seguinte trata da definição destes problemas e apresenta algoritmos para resolvê-los.

## 5 - CRITÉRIOS DE OTIMIZAÇÃO

### 5.1 - INTRODUÇÃO

Após os modelos, que representam as médias e as variâncias das características de qualidade,  $Y_k$ ,  $k=1, 2, \dots, K$ , serem ajustados, o próximo passo é determinar os níveis dos fatores do experimento, que levarão às melhores respostas. Nesta fase, se apenas uma característica de qualidade está sendo estudada, um procedimento chamado bicritério será desenvolvido, para cada tipo de característica de qualidade. Para os casos em que várias características de qualidade estão sendo exploradas um único procedimento, chamado multicritério, será apresentado. O objetivo é melhorar a qualidade, através do decrescimento da variação e do ajustamento da média ao valor objetivo. Isto é, otimizar a média e a variância de cada uma das características de resposta,  $Y_k$ ,  $k=1, 2, \dots, K$ . Mais explicitamente, para qualquer tipo de característica de resposta,  $Y_k$ , deseja-se minimizar a variância e levar a média ao seu melhor valor possível (isto é, levar a média ao quanto menor ou, ao quanto maior possível ou ao valor nominal). Porém, sem esquecer que a perda quadrática deve ser a menor possível.

Quando as funções que representam os modelos de locação e de dispersão do processo são funções convexas (ou côncavas), os métodos de otimização são os métodos comuns encontrados na literatura. Entretanto, nem sempre os modelos podem ser representados por funções convexas (ou côncavas). Nestes casos, o problema torna-se de otimização global, sendo assim, necessários métodos que comportem esta situação. Stange (1993) propõe um algoritmo para estes casos.

Tem-se então, inicialmente, que detectar se cada uma das funções é convexa (ou côncava) e, então escolher o método de otimização correto para o caso.

Quando as funções que representam os modelos forem não convexas (e nem côncavas) e não diferenciáveis tem-se que lidar com a otimização global, não-linear, inteira e, algumas vezes, mista.

Observe-se que, se a característica de qualidade estudada é do tipo "menor é melhor", procura-se por um ponto de mínimo dentro do intervalo estudado. Se uma das funções que representam os modelos é não convexa, pode-se ter um ou dois pontos de mínimo, em um dos limites do intervalo. Se for côncava, ou pode-se ter muitos, ou infinitos pontos de mínimo para esta função.

Se a característica estudada é do tipo "maior é melhor", procura-se por um valor máximo para o modelo de locação e um valor mínimo para o modelo de dispersão. Para o modelo de dispersão tem-se uma situação similar ao que foi visto para a característica do tipo "menor é melhor". Se a função que representa o modelo de locação é não côncava, pode-se ter um ou dois pontos de máximo em um dos limites do intervalo. Se for convexa, ou pode-se ter muitos, ou infinitos pontos de máximo.

## 5.2 - FUNÇÃO PERDA

A função perda, definida por Taguchi e Wu (1979), como visto no capítulo 1.º, tem a seguinte forma:

$$l(Y) = \frac{A}{\Delta^2} (Y - m)^2, \quad (5.1)$$

onde

A é a perda para o consumidor quando o valor de Y se encontra fora dos limites de especificações, e

$\Delta$  é a tolerância.

A perda quadrática esperada é dada por:

$$L(Y) = \frac{A}{\Delta^2} E[(Y - m)^2] = k(DMQ), \quad (5.2)$$

onde,

DMQ é o desvio médio quadrático.

Taguchi e Wu (1979) definiram, para cada tipo de característica, o desvio médio quadrático como:

$$DMQ = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i^2}{n}, \quad \text{se a variável é do tipo menor é melhor;}$$

$$DMQ = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - m)^2}{n}, \quad \text{se a variável é do tipo nominal é melhor; e}$$

$$DMQ = \sum_{i=1}^n \frac{1}{nY_i^2}, \quad \text{se a variável é do tipo maior é melhor.}$$

Através de manipulações algébricas, pode-se expressar as fórmulas para o DMQ em função da média e da variância.

Para as características de qualidade nominal é melhor e menor é melhor é fácil ver que:

$$\begin{aligned} DMQ &= \frac{\sum_{i=1}^n (Y - m)^2}{n} \\ DMQ &= \frac{\sum_{i=1}^n [(Y - \bar{y})^2 + (\bar{y} - m)^2]}{n} \\ &= s_n^2 + (\bar{y} - m)^2. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Observe que para as características de qualidade do tipo menor é melhor  $m = 0$ .

Para a característica de qualidade maior é melhor, Taguchi e Wu (1979) apresentaram a seguinte aproximação para o desvio médio quadrático:

$$DMQ = \sum_{i=1}^n \frac{1}{nY_i^2} \cong \frac{1}{\bar{y}^2} \left( 1 + \frac{3s_n^2}{\bar{y}^2} \right). \quad (5.4)$$

Esta expressão foi obtida através da expansão da série de Taylor, ver Maghsoodloo (1990).

Observe que:

$$s_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{y})^2}{n} = \frac{(n-1)s^2}{n}$$

é um estimador viesado da variância.

Após estas manipulações algébricas, têm-se as seguintes expressões para a perda quadrática esperada:

$$L(Y) = \frac{A}{\Delta^2} E[(Y - m)^2] = k(\text{DMQ}), \text{ ou}$$

$$L(Y) = k[s_n^2 + \bar{y}^2], \text{ menor é melhor;}$$

$$L(Y) = k[s_n^2 + (\bar{y} - m)^2], \text{ nominal é melhor;}$$

$$L(Y) = k \left\{ \frac{1}{\bar{y}^2} \left[ 1 + \frac{3s_n^2}{\bar{y}^2} \right] \right\}, \text{ maior é melhor.}$$
(5.5)

Estas funções de perdas quadráticas serão utilizadas na tomada de decisão que ocorrerá no decorrer da aplicação do procedimento de otimização.

### 5.3 - FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA

Considerem-se os modelos ajustados, através dos procedimentos discutidos no capítulo 3.º, para as médias e para as variâncias. Desta forma, tem-se para cada característica de qualidade um par de modelos que serão denotados, respectivamente, por:

$$f_{1k}(X) = \hat{\mu}_k, \quad k=1, 2, \dots, K$$

$$f_{2k}(X) = \hat{\sigma}_k^2 \text{ ou } f_2(X) = \hat{\sigma}_k, \quad k=1, 2, \dots, K$$

onde,  $\hat{\mu}_k$  é a média,  $\hat{\sigma}_k^2$  é a variância da k-ésima característica de qualidade e X representa o conjunto de fatores do experimento.

Quando apenas uma característica de qualidade está sendo estudada, o problema pode ser formulado, matematicamente, para cada tipo de característica de qualidade da seguinte forma:

1-característica de qualidade do tipo menor é melhor:

$$\min f_1(X) \text{ e } f_2(X)$$

$$\text{sujeitas a } X \in S,$$

onde,

X representa o conjunto de fatores do experimento,

S representa o conjunto de níveis dos fatores;

2-característica de qualidade do tipo maior é melhor:

$$\begin{aligned} & \max f_1(X) \text{ e } \min f_2(X) \\ & \text{sujeitas a } X \in S; \end{aligned}$$

3-característica de qualidade do tipo nominal (m) é melhor:

$$\begin{aligned} & \min \{f_1(X)-m\} \text{ e } \min f_2(X) \\ & \text{sujeitas a } X \in S. \end{aligned}$$

Como já foi discutido, as funções  $f_{ik}$ ,  $i=1, 2$ ;  $k=1, 2, \dots, K$ , podem ser convexas, côncavas ou não convexas e nem côncavas, por isso é necessário explorar a convexidade das funções antes de aplicar o algoritmo que irá resolver o problema.

#### 5.4 - FUNÇÃO CONVEXA E FUNÇÃO CÔNCAVA

Definição: Seja  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

a)  $f$  é dita ser convexa se:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2), \quad (5.6)$$

para todo  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$  e  $\lambda \in (0,1)$ .

Se (5.6) é válida estritamente para todo  $x_1 \neq x_2$  e  $\lambda \in (0,1)$ , então  $f$  é dita ser estritamente convexa.

b)  $f$  é dita ser côncava se:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2), \quad (5.7)$$

Se (5.7) é válida estritamente para todo  $x_1 \neq x_2$  e  $\lambda \in (0,1)$ , então  $f$  é dita ser estritamente côncava.

Para verificar se as funções que representam os modelos de locação e dispersão satisfazem a definição acima, será utilizado um algoritmo que foi sugerido por Stange e desenvolvido por Ivanqui (1995).

#### 5.4.1 - ADAPTAÇÃO DO ALGORITMO (SUGERIDO POR STANGE E DESENVOLVIDO POR IVANQUI (1995)) PARA OS PROBLEMAS BICRITÉRIO E MULTICRITÉRIO

Seja  $f_{ik}: S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I=1,2$  e  $k=1, 2, \dots, K$ , uma função representando um dos modelos ajustados, para uma das características de qualidade estudadas, e  $S$  é um subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ .  $S$  é a região viável do problema, ou seja, é o conjunto onde os fatores do experimento estão definidos. Observe, que para  $i=1$  a função é definida como  $f_{1k}(x) = \hat{\mu}_k$  e para  $i=2$ ,  $f_{2k}(x) = \hat{\sigma}_k^2$ , como exposto no item 5.3. Observe ainda que  $f_{1k}(x) = \hat{\mu}_k$  representa o modelo de locação e que  $f_{2k}(x) = \hat{\sigma}_k^2$  representa o modelo de dispersão.

Para verificar se as funções  $f_{1k}(x) = \hat{\mu}_k$  e  $f_{2k}(x) = \hat{\sigma}_k^2$  são convexas, côncavas, semi-convexas e semicôncavas em  $S$ , considere os seguintes problemas:

##### 1 - para verificar se $f$ é convexa

$$P1: \text{Max } f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) - [\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)] \quad (5.8)$$

e seja  $k$  o valor máximo obtido.

Se  $k < 0$ ,  $f$  é convexa e tem mínimo único.

Se  $k > 0$ ,  $f$  não é convexa e tem vários (até infinitos) mínimos diferentes e o problema é de otimização global;

##### 2 - para verificar se $f$ é côncava

$$P2: \text{Basta verificar se } (-f) \text{ é convexa;} \quad (5.9)$$

##### 3 - para verificar se $f$ é semiconvexa

$$P3: \text{Max } f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) - \max\{f(x_1), f(x_2)\} \quad (5.10)$$

Se  $k \leq 0$ ,  $f$  é semiconvexa ( $k$  é um extremo global).

Se  $k > 0$ ,  $f$  não é semiconvexa ( $k$  pode ser um extremo local);

##### 4 - para verificar se $f$ é semicôncava

$$P4: \text{Basta verificar se } (-f) \text{ é semiconvexa.} \quad (5.11)$$

Observe-se que os problemas (5.8), (5.9), (5.10) e (5.11) têm  $2n+1$  incógnitas (as coordenadas de  $x_1$ , as de  $x_2$  e  $\lambda$ ), já é de otimização global e, portanto, deve ser resolvido pelo algoritmo de Stange (1994).

Se as funções forem convexas ou côncavas, aplica-se o algoritmo exposto no item 5.4 utilizando metodologia padrão de otimização. Caso contrário, aplica-se o algoritmo de Stange (1994) juntamente com os procedimentos, que irão solucionar os problemas bicritério e multicritério.

#### 5.4.2 - ALGORITMO DE STANGE (1993)

Dado o problema de programação não linear

$$\min f(x) \tag{5.12}$$

sujeita a

$$g_i(x) \leq 0, \quad i=1, 2, \dots, m$$

$$h_j(x) \leq 0, \quad j=1, 2, \dots, p$$

$$x \in S \subset \mathbb{R}^n$$

Para os casos onde as funções são não diferenciáveis e não convexas, a técnica utilizada é a de se resolver o problema várias vezes, partindo cada vez de um ponto inicial diferente, aceitando assim como ótimo global a solução que apresentar o menor valor para a função objetivo. Stange (1993) propõe, para resolver o problema (5.12), que é de otimização global, o procedimento seguinte:

1) construir um hiperplano  $H$ , paralelo ao domínio da função objetivo, a uma altura  $k$ , isto é,  $H(x)=k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , ou ainda, fazer

$$f(x) \leq k, \quad k \in \mathbb{R};$$

2) verificar se, dentro do domínio viável, o hiperplano  $H$  corta a função objetivo, isto é, se a inequação  $f(x) \leq k$  tem solução viável;

3) se sim, diminuir o valor de  $k$  e repetir a verificação, isto é, repetir o passo 2 para o novo valor de  $k$ ;

4) os sucessivos ajustes no valor de  $k$  devem ser conduzidos de forma que o intervalo de variação de  $k$  seja cada vez menor, até que para  $k=k^*$  o problema proposto não tenha solução e, para  $k=k^*+\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , esse problema tenha solução.

Desta forma, o valor mínimo global viável da função objetivo estará no intervalo

$$L = (k^*, k^* + \varepsilon) \subset \mathbb{R}$$

e o ponto de mínimo global viável do problema será qualquer ponto  $x \in \mathbb{R}^n$  tal que

$$k^* < f(x) \leq k^* + \varepsilon.$$

Stange (1993) faz, ainda, algumas considerações e formulações até chegar ao seguinte problema: ( para detalhes ver Stange (1993))

min  $x_{n+1}$

sujeito a

$$g_i(x) \leq 0, \quad i=1, 2, \dots, m$$

$$h_j(x) \leq 0, \quad j=1, 2, \dots, p$$

$$f(x) \leq x_{n+1}$$

$$x \in S \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Seja  $x^* \in \mathbb{R}^{n+1}$  a solução ótima obtida, que será global ou não.

Seguindo o algoritmo, o valor da constante que corta o hiperplano deve ser diminuída para prosseguir a busca de uma solução ótima global para o problema inicial. Para isto, tenta-se uma redução no valor da função objetivo, acrescentando uma nova restrição, da forma

$$f(x) \leq x_{n+1}^* - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0,$$

que pode ser incorporada à restrição  $f(x) \leq x_{n+1}$ , o que resulta em

$$f(x) \leq (x_{n+1}^* - \varepsilon + x_{n+1})/2, \quad \varepsilon > 0.$$

Ou seja,

min  $x_{n+1}$

sujeita a

$$g_i(x) \leq 0, \quad i=1, 2, \dots, m$$

$$h_j(x) \leq 0, \quad j=1, 2, \dots, p$$

$$f(x) \leq (x_{n+1}^* - \varepsilon + x_{n+1})/2, \quad \varepsilon > 0$$

$$x \in S \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Observe que  $x_{n+1}^*$  é uma constante.

Resolva-se o problema acima, se:

- a) se o problema revelar-se inviável, é porque não é mais possível reduzir o valor de  $f(x)$  abaixo de  $x_{n+1}^*$ , e o último vetor  $x^* \in \mathbb{R}^{n+1}$  obtido é uma solução ótima global;
- b) caso seja ainda possível resolver o problema, repetir o procedimento, para isto construindo um novo problema, agora com o novo valor obtido para  $x_{n+1}^*$ .

## 5.5 - MODELO BICRITÉRIO

Quando apenas uma característica de qualidade está sendo estudada, os problemas tornam-se bicritério. Isto é, têm-se apenas duas funções objetivo uma para a média e outra para a variância da característica de qualidade.

Um procedimento para resolver problemas de modelo bicritério, na tomada de decisão aplicado à economia, foi desenvolvido por Moskowitz, Ravindran, Klein e Eswaran (1982). O procedimento é chamado de *método de comparação pareado* e usa somente interações simples, converge rapidamente para uma solução ótima, aplica-se a variáveis discretas (e contínuas) e acomoda restrições e funções objetivo não lineares.

Este procedimento, com as modificações devidas, será utilizado na otimização dos modelos que representam a média e a variância da característica de qualidade.

Para simplificar a notação, o índice da característica de qualidade não será utilizado. Isto é, será adotada a seguinte notação:

$$f_1(X) = \hat{\mu},$$

$$f_2(X) = \hat{\sigma}^2 \text{ ou } f_2(X) = \hat{\sigma} ,$$

onde,  $\hat{\mu}$  é a média,  $\hat{\sigma}^2$  é a variância da característica de qualidade e X representa o conjunto de fatores do experimento.

O problema, de maneira geral, será definido como:

$$\max \text{ o vetor } [f_1(X), f_2(X)] = \max L[f_1(X), f_2(X)]$$

sujeito a  $X \in S$

onde, L é uma função utilidade representando a perda quadrática esperada.

### 5.5.1 - CONSIDERAÇÕES E SUPOSIÇÕES SOBRE A FUNÇÃO UTILIDADE (FUNÇÃO PERDA)

Quando a região viável, S, é um conjunto compacto convexo, as funções  $f_1$ ,  $f_2$  são côncavas e a função utilidade L é crescente e estritamente quasecôncava então, é garantido que há um máximo global (ou mínimo). A suposição de quaseconcavidade de L assegura que o ótimo local é também um ótimo global.

Os modelos ajustados, para a média ou locação e para a variância, terão as formas apropriadas para cada caso estudado, isto é, podem ser funções lineares ou não lineares, bem como, funções quadráticas, polinomiais, exponenciais etc. Estas funções, nem sempre serão côncavas (ou convexas) e nem diferenciáveis. Portanto, nada poderá ser afirmado quanto a quasecôncavidade de L e nestes casos, será necessário aplicar otimização global (algoritmo de Stange (1993)) juntamente com o procedimento que será proposto.

Considerando o problema de otimização para cada tipo de característica de resposta, Y, pode restringir-se às soluções eficientes, para cada caso, definidas abaixo como candidatas ao ótimo.

**Definição 1.** Uma solução  $x^o \in S$  é dita ser eficiente se  $f_1(x) > f_1(x^o)$  para algum  $x \in S \Rightarrow f_2(x) > f_2(x^o)$ . (Característica do tipo quanto menor melhor).

**Definição 2.** Uma solução  $x^o \in S$  é dita ser eficiente se

$f_1(x) < f_1(x^0)$  para algum  $x \in S \Rightarrow f_2(x) > f_2(x^0)$ . (Característica do tipo quanto maior melhor).

**Definição 3.** Uma solução  $x^0 \in S$  é dita ser eficiente se

$f_1(x^0) = m$  para  $x^0 \in S \Rightarrow f_2(x) > f_2(x^0)$ . (característica do tipo o valor nominal é o melhor).

A teoria apresentada por Moskowitz, Ravindran, Klein e Eswaran (1982) gera eficientes soluções e apresenta um método eficiente de buscar entre as soluções eficientes, aquela de melhor compromisso para a tomada de decisão.

Considere o seguinte conjunto de valores, para a característica de resposta,

$$Y = \{y/ f(X) = y \text{ para } X \in S\}, \quad (5.13)$$

seja

$$A = \{y/ f(X) \geq y \text{ para } X \in S\}. \quad (5.14)$$

Considere também, o seguinte procedimento matemático de objetivo único:

P1 :  $\max f_1(X)$  sujeito a  $X \in S$ .

P2 :  $\max f_2(X)$  sujeito a  $X \in S$ .

Sejam os valores ótimos de P1 e P2  $\mu^* = \max f_1(X)$  e  $\sigma^{2*} = \max f_2(X)$ , respectivamente. Agora considere o seguinte procedimento matemático paramétrico:

$P\sigma^2$ :  $\max f_2(X)$  sujeito a  $X \in S$  e  $f_1(X) \geq \mu$

$P\mu$ ::  $\max f_1(X)$  sujeito a  $X \in S$  e  $f_2(X) \geq \sigma^2$

Seja  $x_2^*$  a solução de  $P\mu$  quando  $\sigma^2 = \sigma^{2*}$ . Então,  $f_1(x_2^*) = \mu_l$  é o valor mínimo entre os valores máximos de  $f_1$  sem violar a restrição com respeito a  $f_2$ , enquanto  $\mu^*$  é o valor máximo de  $f_1$  sem restringir  $f_2$ . Desta forma, o intervalo de valores de  $f_1$  é dado por  $[\mu_l, \mu^*]$ . O melhor valor para  $f_1$  estará dentro deste intervalo.

Os resultados seguintes possibilitam gerar eficientes soluções para o problema de otimização matemática bicritério. (As provas estão em Sadagopan e Ravindran).

**Teorema 1.** Na solução ótima para o procedimento  $P\mu$  onde  $\mu \in [\mu_l, \mu^*]$ , a restrição  $f_1(X) \geq \mu$  será uma restrição de igualdade, isto é, se  $x$  é a solução ótima para  $P\mu$  então,  $f_1(x) = \mu$ .

**Teorema 2.**  $x \in S$  é eficiente se, e somente se  $x$  resolve  $P\mu$  onde  $\mu \in [\mu_l, \mu^*]$ .

O teorema 2 é suficiente para garantir o conjunto completo de soluções, através da parametrização de  $P\mu$ . Pelo teorema 1, as soluções geradas terão níveis específicos para atingir  $f_1$ , a saber  $\mu$ . O próximo teorema dará algumas propriedades de unimodalidade, as quais são suficientes para uma parametrização eficiente.

Considere o problema onde  $L$  é maximizada sobre um conjunto  $Y$ , com  $f_1$  fixa para  $\sigma^2$ , isto é,

$$P3 : \max L(\mu, f_2) \text{ sujeito a } (\mu, f_2) \in Y,$$

onde,  $(\mu, f_2) \in Y$  é um subconjunto de  $Y$  definido por

$$\{(\mu, f_2) / f_2=f_2(X) \text{ para } X \in S \text{ e } f_1(X)=\mu\}.$$

Pelo teorema 1 e o fato de que  $L$  é crescente em  $f_2$ , é fácil ver que uma solução ótima para  $P3$  é também uma solução ótima para o procedimento  $P\mu$  onde  $\mu \in [\mu_l, \mu^*]$ . Pode-se estabelecer a unimodalidade de  $g(\mu)$ , através do teorema abaixo.

**Teorema 3.** Seja  $Y'$  um subconjunto convexo de  $\mathbb{R}^2$  e  $L(f_1, f_2)$  é uma função crescente fortemente quasecôncava de  $f_1$  e  $f_2$  definida sobre  $Y'$ , então  $g(\mu)=\max L(\mu, f_2)$ ,

$$(\mu, f_2) \in Y'$$

é fortemente quasi-côncava, isto é, é unimodal em  $\mu$ .

O teorema acima explora arduamente a convexidade de  $Y'$ . Em muitos casos, a suposição de convexidade para o conjunto de resultados,  $Y$ , pode ser excessivamente restritiva. Para estes casos, o conjunto  $Y$  pode ser estendido ao conjunto  $A$  definido pela equação (5.14) sem afetar os resultados. O lema abaixo garante a convexidade do conjunto  $A$ .

**Lema 1** - Se  $S$  é um conjunto convexo e  $f$  é côncava, então  $A$  será um conjunto convexo. Ver [Moeseke, P. V.].

Sendo  $A$  identificado com  $Y'$ , o teorema 3 estará satisfeito, quando o conjunto  $Y$  é não convexo.

O teorema seguinte estabelece a equivalência dos seguintes procedimentos:

$$P4 : \max L(a, f_2), (a, f_2) \in Y$$

$$P5 : \max L(a, f_2), (a, f_2) \in A$$

**Teorema 4.** As soluções ótimas para  $P4$  e  $P5$  são idênticas, isto é, seja  $Y_m$  o conjunto de soluções ótimas para  $P4$  e  $A_m$  o conjunto de soluções ótimas para  $P5$  então,  $Y_m=A_m$ .

**Teorema 5.** Com as suposições mencionadas anteriormente o relacionamento seguinte é verdadeiro:

$$\begin{aligned} \max_{(\mu, f_2) \in Y} L(\mu, f_2) &= g(\mu) = \max_{X \in S} L(\mu, f_2) \\ &\text{sujeito a} \\ &f_1(X) \geq \mu \end{aligned}$$

### 5.5.2 - MÉTODO DE COMPARAÇÃO PAREADA

Com os resultados da seção anterior, um procedimento pode ser desenvolvido necessitando apenas uma comparação pareada, isto é, dadas quaisquer duas soluções viáveis e seus resultados, digamos;

$$y^1 = [\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2] \quad \text{e} \quad y^2 = [\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2]$$

a decisão do pesquisador (engenheiro, estatístico) deve ser especificada se

$$y^1 \succ y^2 \quad \text{ou} \quad y^2 \succ y^1 \quad \text{ou} \quad \text{ambos,}$$

onde  $\succ$  denota "preferível".

Com base nos teoremas anteriores, o procedimento matemático bicritério tem sido reduzido a determinar o máximo de  $g(\mu)$  onde  $\mu$  pertence ao intervalo  $[\mu_l, \mu^*]$ , onde  $\mu_l = f_1(x_2^*)$ . Entretanto,  $g(\mu)$  não é conhecida explicitamente desde que  $L$  (função utilidade) não seja conhecida. Mas, usando uma técnica de busca que requer somente a comparação funcional e não os valores das funções, pode-se ainda resolver o problema matemático bicritério, usando o conceito de região de eliminação seguinte.

Para uma função unimodal  $g(\mu)$  definida sobre o intervalo finito  $(\mu_l, \mu^*)$ , sejam  $\mu_a$  e  $\mu_b$  dois pontos no intervalo tais que  $\mu_a < \mu_b$ . Então,  $g(\mu_a) < g(\mu_b)$  implica que o máximo de  $g(\mu)$  não está no intervalo  $(\mu_l, \mu_a)$ . Por outro lado,  $g(\mu_a) > g(\mu_b)$  implica que o máximo não está no intervalo  $(\mu_b, \mu^*)$ .

### 5.5.3 - PASSOS GERAIS PARA O ALGORITMO

A otimização das funções  $f_1(X)$  e  $f_2(X)$ , será realizada por métodos padrões de otimização encontrados na literatura se estas forem côncavas ou convexas ou por otimização global (algoritmo de Stange (1993)).

#### 5.5.3.1 - CARACTERÍSTICA DE QUALIDADE DO TIPO MAIOR É MELHOR

Passo 1. Resolver P1 : Max  $f_1(X)$

sujeita a

$$X \in S.$$

Seja  $\mu^* = \max f_1(X)$ .

Resolver P2 : Min  $f_2(X)$

sujeita a

$$X \in S$$

Seja  $\sigma^{2*} = \min f_2(X)$ .

Passo 2. Resolva

$P^*_{\sigma^2}$  : Max  $f_1(X)$

sujeito a

$$X \in S$$

$$f_2(X) \leq \sigma^{2*}.$$

Seja o  $\mu_l = \max f_1(X)$ .

Agora, o valor ótimo de  $f_1$  para o procedimento bicritério está entre  $\mu_l$  e  $\mu^*$ .

Calcule  $L[\mu_l, \sigma^{2*}]$ .

Passo 3. Escolha dois valores ,  $\mu_a$  e  $\mu_b$ , tais que  $\mu_l < \mu_a < \mu_b < \mu^*$ .

Resolver  $P_\mu$  : Min  $f_2(X)$

sujeito a

$$X \in S$$

$$f_1 \geq \mu,$$

para  $\mu = \mu_a$  e  $\mu = \mu_b$ .

Seja  $g(\mu) = \min f_2(X)$ .

Calcule  $L[\mu_a, g(\mu_a)]$  e  $L[\mu_b, g(\mu_b)]$ .

Passo 4. Seja  $y^1 = [\mu_a, g(\mu_a)]$ ,  $y^2 = [\mu_b, g(\mu_b)]$ . Dados  $y^1$  e  $y^2$ , pergunta-se:  $y^1 \succ y^2$ ,  $y^2 \succ y^1$  ou é indiferente.

Dada a resposta, uma porção do conjunto pode ser eliminada.

Se  $y^1 \succ y^2$  então, faça  $\mu^* = \mu_b$  e vá para o passo 5.

Se  $y^2 \succ y^1$  então, faça  $\mu_l = \mu_a$  e vá para o passo 5.

Passo 5. Se  $|\mu_l - \mu^*| < \epsilon$  (um número escolhido) pare; caso contrário, retorne ao passo 3.

Ver fluxograma 5.1

**OBSERVAÇÃO:** A decisão deve ser tomada considerando o crescimento, que ocorre no valor de  $g(\mu)$  e na comparação do valor da função de perda obtida no passo 2, com o valor obtido no passo 3

A geração dos pontos entre  $\mu_l$  e  $\mu^*$  poderá ser feita, através de um critério de busca univariado (seção áurea ou outra).

### 5.5.3.2 - CARACTERÍSTICA DO TIPO MENOR É MELHOR

Passo 1. Resolver P1 :  $\text{Min } f_1(X)$

sujeito a

$$X \in S.$$

Seja  $\mu^* = \min f_1(X)$ .

Resolver P2 :  $\text{Min } f_2(X)$

sujeito a

$$X \in S$$

Seja  $\min \sigma^{2*} = f_2(X)$ .

Passo 2. Resolver P\* <sub>$\sigma^2$</sub>  :  $\text{Min } f_1(X)$

sujeito a

$$X \in S$$

$$f_2(X) \leq \sigma^{2*}.$$

Seja o  $\min \mu_l = f_1(X)$ . Agora o valor ótimo de  $f_1$  para o procedimento bicritério está entre  $\mu^*$  e  $\mu_l$ .

Calcule  $L[\mu_l, \sigma^{2*}]$ .

Passo 3. Escolha dois valores,  $\mu_a$  e  $\mu_b$ , tais que  $\mu^* < \mu_a < \mu_b < \mu_l$ .

Resolver  $P\mu : \min f_2(X)$

sujeito a

$$X \in S$$

$$f_1(X) \leq \mu$$

para  $\mu = \mu_a$  e  $\mu = \mu_b$ .

Seja  $g(\mu) = \min f_2(X)$ .

Calcule  $L[\mu_a, g(\mu_a)]$  e  $L[\mu_b, g(\mu_b)]$ .

Passo 4. Idem para o caso anterior.

Passo 5. Idem para o caso anterior.

### 5.5.3.3.- CARACTERÍSTICA DO TIPO NOMINAL É MELHOR

Passo 1. Resolver  $P1 : \text{Min } \{f_1(X) - m\}$

sujeito a

$$X \in S.$$

Seja  $\mu^* = \min \{f_1(X) - m\}$ .

Resolver  $P2 : \text{Min } f_2(X)$

sujeito a

$$X \in S$$

Seja  $\min \sigma^{2*} = f_2(X)$ .

Passo 2. Resolver  $P^*_{\sigma^2} : \text{Min } \{f_1(X) - m\}$

sujeito a

$$X \in S$$

$$f_2(X) \leq \sigma^{2*}.$$

Seja o  $\min \mu_l = \{f_1(X) - m\}$  e  $X^*$  o ponto ótimo. Agora o valor ótimo de  $f_1$  para o procedimento bicritério está entre  $\mu^*$  e  $\mu_l$ .

Calcule  $L[f_1(X^*), \sigma^{2*}]$ ,

Passo 3. Escolha dois valores,  $\mu_a$  e  $\mu_b$ , tais que  $\mu^* < \mu_a < \mu_b < \mu_l$ .

Resolver  $P_\mu : \min f_2(X)$

sujeito a

$$X \in S$$

$$\{f_1(X) - m\} \leq \mu$$

para  $\mu = \mu_a$  e  $\mu = \mu_b$ .

Seja  $g(\mu) = \min f_2(X)$  e seja  $X^{a*}$  e  $X^{b*}$  os pontos ótimos.

Calcule  $L[f_1(X^{a*}), g(\mu_a)]$  e  $L[f_1(X^{b*}), g(\mu_b)]$ .

Passo 4. Idem para o caso anterior.

Passo 5. Idem para o caso anterior.

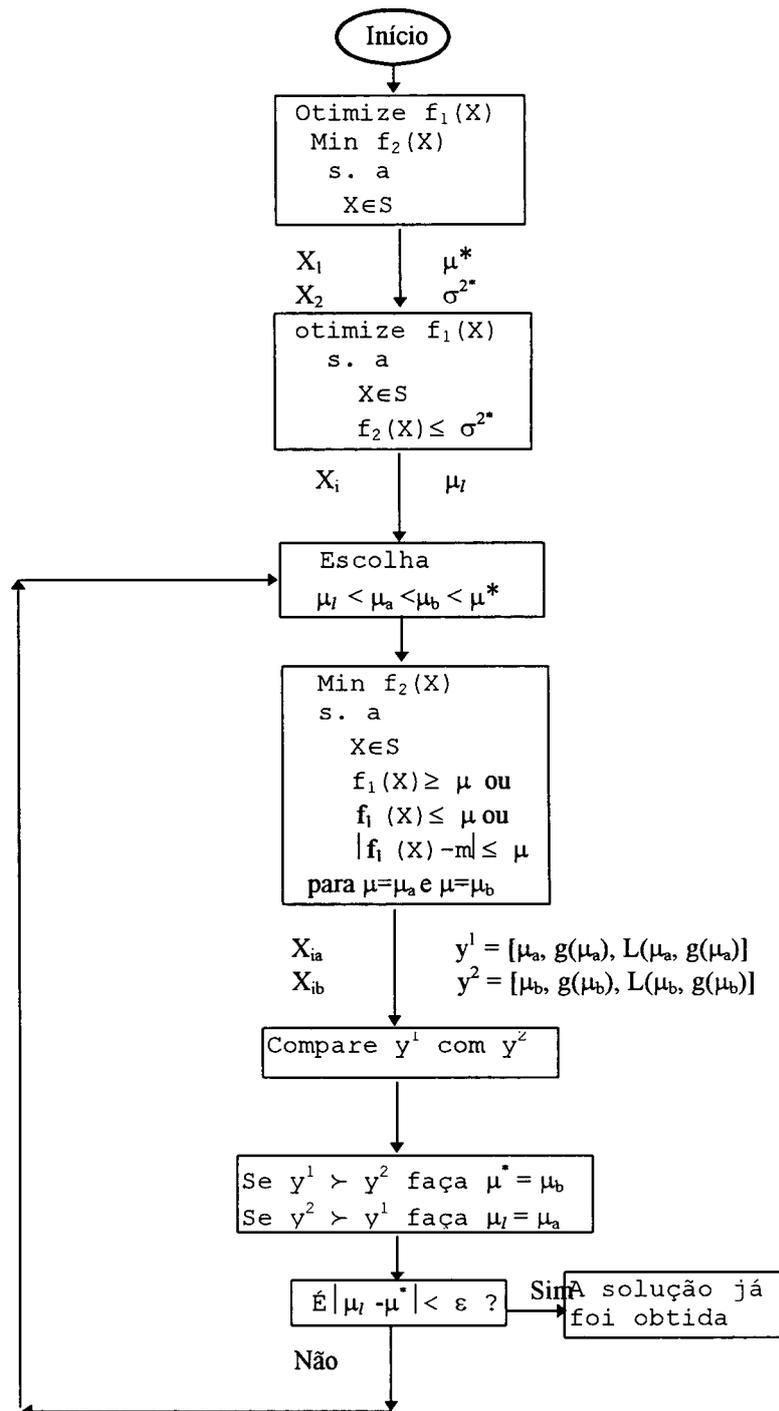


Figura 5.1- Fluxograma para o algoritmo bicritério

## 5.6 - MODELO MULTICRITÉRIO

Como já foi discutido, um modelo é dito ser multicritério, se várias características de qualidade estão sendo estudadas. Nestes casos, tem-se para cada característica de qualidade um par de modelos, ou seja um modelo para a média e outro para a variância. Se as funções que representam os modelos forem côncavas ou convexas, serão otimizadas, através dos métodos padrões de otimização, caso contrário, será utilizado o algoritmo de otimização global de Stange (1993) em conjunto com o procedimento que irá resolver o problema.

Considere novamente a notação definida no item 5.3,

$$f_{1k}(X) = \hat{\mu}_k, \quad k=1, 2, \dots, K$$

$$f_{2k}(X) = \hat{\sigma}_k^2 \text{ ou } f_2(X) = \hat{\sigma}_k, \quad k=1, 2, \dots, K$$

onde,  $\hat{\mu}_k$  é a média,  $\hat{\sigma}_k^2$  é a variância da k-ésima característica de qualidade e X representa o conjunto de fatores do experimento.

O propósito em um problema multicritério é otimizar as funções objetivo,  $f_{ik}(X)$ ,  $i=1,2$  e  $k=1, 2, \dots, K$ , ou seja obter valores ótimos simultaneamente para as várias funções que representam as características de qualidade. O problema será formulado de maneira geral como:

$$\text{Max } f_{ik}(X), \quad i=1, 2 \text{ e } k=1, 2, \dots, K$$

s. a

$$X \in S$$

Quando as funções objetivo representam características do tipo menor é melhor, nominal é melhor ou são as funções que representam as variâncias das características de qualidade, estas devem ser transformadas pela mudança de sinal apropriada.

Em geral, não existe solução viável tal que todas as funções  $f_{ik}$  sejam simultaneamente otimizadas dentro da região viável, S. Seja  $Z_{ik}^*$  o valor ótimo de  $f_{ik}$  em S. Os modelos de programação multiobjetivo são caracterizados por (Benayoun et al. (1971)):

$$\exists \tilde{X} \in S \text{ tal que } f_{ik}(\tilde{X}) = Z_{ik}^*, \quad i=1, 2 \text{ e } k=1, 2, \dots, K. \quad (5.15)$$

O problema torna-se, então, buscar uma solução  $X$  a qual será a melhor solução entre os objetivos conflitantes.

O procedimento, aqui proposto, explora a região viável, passo a passo, através das soluções e finalmente uma solução será escolhida.

### **5.6.1 - PROCEDIMENTO PARA RESOLVER O PROBLEMA MULTICRITÉRIO**

Para resolver este problema um algoritmo, que é um procedimento de exploração, onde a melhor solução é encontrada após certo número de iterações, será proposto. O procedimento é iniciado com a construção de uma tabela que contém todos os valores ótimos de cada uma das funções, calculados separadamente, e uma tabela para os valores das funções das perdas quadráticas iniciais. Cada iteração é composta de uma fase de cálculos e uma fase de tomada de decisões, como é feito para o caso bicritério. Durante a fase de tomada de decisões, o pesquisador examina os resultados da fase anterior e fornece informações sobre seus objetivos, que poderão levar a modificações na região viável para a próxima iteração.

#### **5.6.1.1 - CONSTRUÇÃO DA TABELA DE VALORES ÓTIMOS E CÁLCULO DAS PERDAS QUADRÁTICAS - FASE DE CÁLCULOS**

Antes de iniciar a fase de iterações, uma tabela de valores ótimos individuais e um vetor com os valores da função perda quadrática deverão ser construídos. As funções devem ser otimizadas, utilizando-se os procedimentos padrões, se as funções forem côncavas; caso contrário, utilizando-se otimização global (algoritmo de Stange (1993)). Na Tabela 5.1, além dos valores ótimos serão calculados também os valores de todas as outras funções nos pontos ótimos de cada uma delas.

Tabela. 5.1 Valores ótimos individuais e valores de todas as funções para os pontos ótimos

	$f_{11}$	$f_{21}$	...	$f_{ij}$	...	$f_{2K}$
$f_{11}$	$Z_{11}^*$			$Z_{ij}^{11}$		
$f_{21}$		$Z_{21}^*$		$Z_{ij}^{21}$		
...				...		
$f_{ij}$	$Z_{11}^{ij}$	$Z_{21}^{ij}$	...	$Z_{ij}^*$		$Z_{2K}^{ij}$
...				...		
$f_{2K}$				$Z_{ij}^{2K}$		

A linha  $ij$  corresponde ao vetor  $X_{ij}^*$  maximizando a função objetivo  $f_{ij}$  sujeita a  $X \in S$ . Assim  $Z_{ik}^{ik}$  é o valor de  $f_{ik}$  quando  $f_{ij}$  obtém o seu máximo  $Z_{ij}^*$ .

Será denotado por  $\tilde{X}$  o ponto, que fornece a solução ideal (que não é viável de acordo com a propriedade (5.15)), para o qual as várias funções objetivos,  $f_{ik}$ , obtêm os valores ótimos  $Z_{ij}^*$  exibidos na diagonal principal da Tabela 5.1. Será denotado por  $\tilde{Z}$  o vetor dos valores exibidos na diagonal principal da Tabela 5.1.

Para cada uma das características de qualidade, o valor da função perda quadrática de Taguchi será calculada. Isto é, para cada característica de qualidade considere o par de funções:

$$f_{1k}(X) = Z_{1k}^*$$

$$f_{2k}(X) = Z_{2k}^*, \quad k = 1, 2, \dots, K,$$

e calcule o valor da função perda quadrática (eq. (5.5)),  $L_k$ ,  $k=1, 2, \dots, K$ . Considerando o tipo de característica de qualidade. Desta forma, um vetor de perdas quadráticas pode ser construído:

$$L = [L_1, L_2, \dots, L_K]$$

### 5.6.1.2 - INÍCIO DAS ITERAÇÕES

Nesta fase, iniciam-se as iterações. Em cada uma das iterações, busca-se uma solução viável  $X^j$  que estará próxima da solução ideal  $\tilde{X}$ . Isto é, procura-se pela solução do problema seguinte:

$$\begin{aligned}
P_j: \quad & \min \lambda \\
& \text{s. a} \\
& \lambda \geq \{ Z_{ik}^* - f_{ik}(X) \} \pi_{ik}, \quad i=1, 2 \text{ e } k=1, 2, \dots, K \\
& X \in S \\
& \lambda \geq 0
\end{aligned}$$

Seja  $X^j$  a solução do problema  $P_j$  na iteração  $j$ . Calcule o vetor  $Z^j$  dos valores das  $K$  funções  $f_{ik}$  avaliadas no ponto  $X^j$  e para cada par de funções ( $i = 1, 2$ ) calcule o vetor de valores da função perda  $L^j = [L_1^j, L_2^j, \dots, L_K^j]$ .

Os coeficientes  $\pi_{ik}$  dão a importância relativa das distâncias para o ótimo. Considere a coluna com índice  $ij$  da Tabela 5.1. Seja  $Z_{ij}^*$  o valor máximo da coluna e seja  $z_{ij}$  o valor mínimo.  $\pi_{ij}$  será calculado por:

$$\begin{aligned}
\pi_{ij} &= \frac{\alpha_{ij}}{\sum \alpha_{ij}} \\
\alpha_{ij} &= \frac{Z_{ij}^* - z_{ij}}{Z_{ij}^*} \frac{1}{\sqrt{\sum_j \beta_j^2}},
\end{aligned}$$

onde os  $\beta_j$  são os coeficientes da função objetivo  $f_{ij}$  e o termo  $\frac{Z_{ij}^* - z_{ij}}{Z_{ij}^*}$  torna-se

$$\frac{z_{ij} - Z_{ij}^*}{Z_{ij}} \text{ quando } Z_{ij}^* \leq 0.$$

Se a função  $f_{ij}$  não varia muito do ótimo, quando os valores de  $X$  variam, os pesos  $\pi_{ij}$  serão pequenos. Nos casos em que as variações são grandes os pesos  $\pi_{ik}$  tornam-se grandes. O termo  $\frac{1}{\sqrt{\sum_j \beta_j^2}}$  normaliza os valores tomados pela função

objetivo. Os  $\alpha_{ik}$  são utilizados para definir os pesos  $\pi_{ik}$  de forma que  $\sum \pi_{ik} = 1$ . Isto é feito para que diferentes soluções obtidas por pesos definidos de outras formas possam ser facilmente comparadas.

A definição deste problema  $P_j$  foi feita com base nos resultados de Bernayoun et al. (1971).

### 5.6.1.3 - FASE DE TOMADA DE DECISÃO

O vetor  $Z^j$  é comparado ao vetor  $\tilde{Z}$  e o vetor  $L^j$  ao vetor  $L$ . Se alguns dos componentes de  $f_{ik}$  do vetor  $Z^j$  são satisfatórios e outros não são, certo montante de relaxação de uma das funções objetivo deve ser aceito para permitir uma melhoria nas funções não satisfatórias, na próxima iteração.

Para a próxima iteração, uma nova região viável é definida:

$$S^{j+1} = \begin{cases} S^i \\ f_{ik}^*(X) \geq f_{ik}^*(X^i) - \Delta f_{ik} \\ f_{ik}(X) \geq f_{ik}(X^i), (ik) \neq (ik)^* \end{cases}$$

Os pesos  $\pi_{ik}^*$  tornam-se zero e a nova iteração se inicia. (Ver o fluxograma apresentado na Figura 5.2).

O vetor  $L^j$  deve ser comparado ao vetor  $L$  e no final do procedimento um gráfico para analisar a evolução da perda pode ser construído.

### 5.6.2 - PASSOS GERAIS PARA O ALGORITMO

Passo 1. Resolver os problemas:

$$\text{Max } f_{ik}(X), i = 1, 2 \text{ e } k = 1, 2, \dots, K$$

s. a

$$X \in S$$

Seja  $\tilde{Z} = [Z_{ik}^*, i = 1, 2 \text{ e } k = 1, 2, \dots, K]$  o vetor de soluções, e

seja  $\tilde{X} = [X_{ik}^*, i = 1, 2 \text{ e } k = 1, 2, \dots, K]$  o vetor de pontos ótimos.

Calcule  $f_{ik}(X_{ik}^*)$  para  $(ik) \neq (ik)^*$  e construa a tabela de ótimos ideais.

Calcule o vetor de perdas associadas com os ótimos ideais:  $L = [L_1, L_2, \dots, L_K]$ .

Calcule os  $\pi_{ik}$ ,  $i = 1, 2$  e  $k = 1, 2, \dots, K$ .

Passo 2. Resolva o problema  $P_j$ ,  $j$  é o índice das iterações:

Min  $\lambda$

s. a

$$\lambda \geq \{Z_{ik}^* - f_{ik}(X)\} \pi_{ik}, i = 1, 2 \text{ e } k = 1, 2, \dots, K$$

$$\lambda \geq 0$$

$$X \in S$$

Seja  $X^j$  a solução e seja  $Z^j = [f_{ik}(X^j), i = 1, 2 \text{ e } k = 1, 2, \dots, K]$

Calcule o vetor de perdas  $L^j = [L_1^j, L_2^j, \dots, L_K^j]$

Passo 3: Tomada de decisões

Compare  $Z^j$  com  $\tilde{Z}$  e  $L^j$  com  $L$ . Se todas as funções são satisfatórias o vetor  $X^j$  é a solução, caso contrário:

fixe o montante  $\Delta f_{ik}^*(X)$ ,

faça  $\pi_{ik}^* = 0$ ,

defina a nova região viável  $S^{j+1} = \begin{cases} S^j \\ f_{ik}^*(X) \geq f_{ik}^*(X^j) - \Delta f_{ik}^* \\ f_{ik}(X) \geq f_{ik}(X^j), (ik) \neq (ik)^* \end{cases}$

e retorne ao passo 2.

## 5.7 - CONCLUSÃO

Os procedimentos de otimização apresentados, neste capítulo, permitem que o pesquisador acompanhe, em cada iteração, o crescimento da variabilidade e também, a variação da perda associada com o ajuste.

O procedimento apresentado para os modelos multicritério permite também, que uma análise de sensibilidade seja realizada. Através desta análise, é possível obter o limite superior de crescimento de uma das funções objetivo, quando se decide decrescer outra(s) e assim, controlar as perdas individuais.

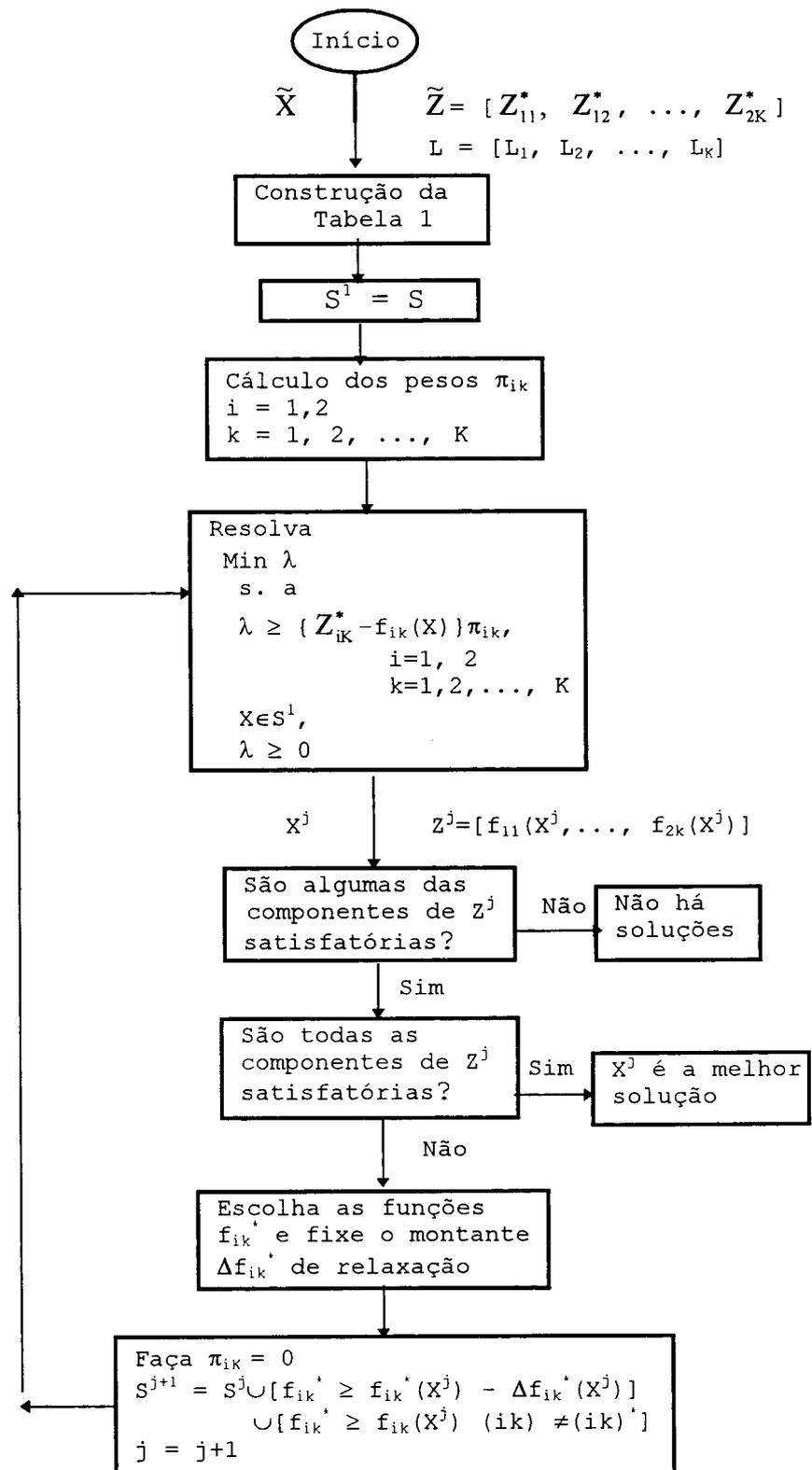


Figura 5.2 - Fluxograma para o algoritmo multicritério

## CAPÍTULO 6.º

### 6 - APLICAÇÕES

#### 6.1 - OTIMIZAÇÃO DE UMA MÁQUINA DE ESTAMPAR

Esta aplicação foi utilizada por Vining e Myers (1990) e por Castillo e Montgomery (1993). Os dados foram retirados do livro de Box e Draper (1987).

O experimento tinha por objetivo analisar o efeito das variáveis: velocidade ( $X_1$ ), pressão ( $X_2$ ) e distância ( $X_3$ ), em medir a capacidade que uma máquina de estampar (imprimir) tem para colorir etiquetas (rótulos) de pacotes.

Vining e Myers concluíram que o modelo de superfície de resposta ajustado para a média da característica de interesse é:

$$\hat{\mu} = 327,6 + 177X_1 + 109,4X_2 + 131,5X_3 + 32X_1^2 - 22,4X_2^2 - 29,1X_3^2 + 66X_1X_2 + 75,5X_1X_3 + 43,6X_2X_3,$$

e o modelo de superfície de resposta ajustado para o desvio-padrão é:

$$\hat{\sigma} = 34,9 + 11,5X_1 + 15,3X_2 + 29,2X_3 + 4,2X_1^2 - 1,3X_2^2 + 16,8X_3^2 + 7,7X_1X_2 + 5,1X_1X_3 + 14,1X_2X_3.$$

Os modelos de superfície de resposta foram ajustados usando os dados obtidos, através de um experimento fatorial completo  $3^3$  com 3 replicações. A região de interesse para o planejamento, foi suposta refletindo ou, experimentação preliminar ou suficiente informação a priori para justificar o uso de um modelo de segunda ordem.

Vining e Myers, escolheram modelar o desvio-padrão ao invés do  $\log \sigma$  pelas seguintes razões:

1) se  $m=3 < 5$  ( $m$ =número de replicações), então Bartlett e Kendall (1946) deram poucos argumentos em favor do  $\log s$ ;

- 2) as partidas de número 10 e 14 têm variância zero, o que introduz alguma complexidade no uso da transformação log; e
- 3) o desvio-padrão é uma importante característica por seus próprios valores.

Os autores acima citados analisaram o experimento considerando-o como um problema de dois objetivos. A média foi escolhida como a função objetivo principal e, o desvio-padrão sendo a função objetivo secundária.

Vining e Myers utilizaram o programa MURSAC e Castillo e Montgomery o programa GINO para fazer a otimização do modelo. Ambos analisaram a característica de resposta supondo-a dos tipos nominal é melhor e maior é melhor. Para realizar a análise supondo que a característica é do tipo maior é melhor, o desvio-padrão foi fixado em vários valores e o problema tornou-se, então, um problema de maximizar a média,  $\hat{\mu}$ , sujeito ao desvio-padrão,  $\hat{\sigma}$ , igual a um valor fixado.

Vining e Myers utilizaram o método do gradiente reduzido para resolver o problema, fixando  $\hat{\sigma}$  em 60, 75 e 90.

Castillo e Montgomery utilizaram o algoritmo do gradiente reduzido generalizado, fixando  $X'X = \rho^2$  em 1,0; 1,5; 2,0 e 3,0.

A análise aqui apresentada difere das anteriores. A característica de interesse será considerada somente, como sendo do tipo maior é melhor e será analisada considerando um problema bicritério, sem fixar o desvio-padrão.

A convexidade das funções foram exploradas, tanto a função da média, quanto a função do desvio-padrão. A função do desvio-padrão é côncava e a função da média não é convexa e nem côncava. Por isso, o algoritmo de Stange (1993) foi utilizado em conjunto com o algoritmo bicritério.

Através do algoritmo para o problema bicritério, desenvolvido no capítulo 5.º, e da utilização dos programas de computação GINO, GAMS e EXCEL, os resultados foram:

Passo 1: Resolvendo P1 e P2 obteve-se  $\mu^*=911,099$  e  $\sigma^*=12,4$ .

Passo 2: Resolvendo P\*<sub>σ</sub> obteve-se  $\mu_1 = 89,1515$ .

### Iteração 1

Passo 3: Utilizando as razões da seção áurea 0,618 e 0,382 os pontos  $\mu_a$  e  $\mu_b$  tal que,  $\mu_l < \mu_a < \mu_b < \mu^*$  são  $\mu_a=403,13$  e  $\mu_b=597,12$ .

$$g(\mu_a)=13,7804 \text{ e } g(\mu_b)=50,7661.$$

Passo 4: Têm-se os seguintes conjuntos de resultados:

$$y^1 = [403,13; 13,7804] \text{ e } y^2 = [597,12; 50,7661].$$

Considerando a função perda quadrática esperada definida por Taguchi e Wu (1979), para a característica de qualidade do tipo maior é melhor, como a função utilidade, tem-se:

Para o conjunto  $y^1$ :

$$L(f_1, f_2)=k[1/\hat{\mu}^2 (1 + 3(n-1)/n) \hat{\sigma}^2 / \hat{\mu}^2] = k(0,000006174).$$

Para o conjunto  $y^2$ :

$$L(f_1, f_2)=k(0,000002865).$$

Assumindo que a decisão deva ser tomada considerando a função perda, então o conjunto  $y^2$  é o preferível e  $\mu_l=403,13$  e  $\mu^*=911,09$ .

Passo 5:  $|\mu_l - \mu^*| = |403,13 - 911,09| = 507,96$ . Representa 55,75% do intervalo inicial.

Dando continuidade à busca, volta-se a passo 3, dando início à iteração 2.

O conjunto  $y^2$  é o preferido, então,  $\mu_l=403,13$  e  $\mu^*=911,099$  e os dois novos pontos (através da seção áurea) são:

$$\mu_a=717,06 \text{ e } \mu_b=791,16.$$

### Iteração 2

Passo 3:  $\mu_a=717,06$   $g(\mu_a)=77,32$   $\mu_b=791,16$   $g(\mu_b)=95,99$ .

Passo 4: Têm-se os seguintes conjuntos de resultados:

$$y^1 = [717,06; 77,32] \text{ e } y^2 = [791,16; 95,99].$$

Para o conjunto  $y^1$ :

$$L(f_1, f_2)=k(0,000002007).$$

Para o conjunto  $y^2$ :

$$L(f_1, f_2)=k(0,00000162).$$

Novamente, o conjunto preferível é o conjunto  $y^2$  e  $\mu_1=717,06$  e  $\mu^*=911,09$ .

Passo 5:  $|\mu_1-\mu^*|=|911,09-717,06|=194,03$ . Representa 21,3% do intervalo inicial.

Continuando a busca, volta-se a passo 3, dando início à iteração 3.

O conjunto  $y^2$  é o preferido então,  $\mu_1=717,06$  e  $\mu^*=911,099$  e os dois novos pontos (através da seção áurea) são:

$$\mu_a=791,17 \text{ e } \mu_b=836,97.$$

### Iteração 3

Passo 3:  $\mu_a=791,17$   $g(\mu_a)=95,99$   $\mu_b=836,97$   $g(\mu_b)=109,80$ .

Passo 4: Têm-se os seguintes conjuntos de resultados:

$$y^1 = [791,17; 95,99] \text{ e } y^2 = [836,97; 109,80].$$

Para o conjunto  $y^1$ :

$$L(f_1, f_2)=k(0,00000167).$$

Para o conjunto  $y^2$ :

$$L(f_1, f_2)=k(0,0000015).$$

Novamente, o conjunto preferível é o conjunto  $y^2$  e  $\mu_1=791,17$  e  $\mu^*=911,09$ .

Passo 5:  $|\mu_1-\mu^*|=|911,09-791,17|=119,92$  Representa 13,16% do intervalo inicial.

Continuando a busca, volta-se a passo 3, dando início à iteração 4.

O conjunto  $y^2$  é o preferido então,  $\mu_1=791,17$  e  $\mu^*=911,099$  e os dois novos pontos (através da seção áurea) são:

$$\mu_a=836,97 \text{ e } \mu_b=865,28.$$

### Iteração 4

Passo 3:  $\mu_a=836,97$   $g(\mu_a)=109,79$   $\mu_b=865,28$   $g(\mu_b)=119,52$ .

Passo 4: Têm-se os seguintes conjuntos de resultados:

$$y^1 = [836,97; 109,79] \text{ e } y^2 = [865,28; 119,52].$$

Para o conjunto  $y^1$ :

$$L(f_1, f_2)=k(0,0000015).$$

Para o conjunto  $y^2$ :

$$L(f_1, f_2)=k(0,00000141).$$

Novamente, o conjunto preferível é o conjunto  $y^2$  e  $\mu_i=836,97$  e  $\mu^*=911,09$ .

Passo 5:  $|\mu_i - \mu^*| = |911,09 - 836,97| = 194,03$ . Representa 8,13% do intervalo inicial.

Como a amplitude do intervalo já é menor que 10% do intervalo inicial, encerra-se a busca.

## COMPARAÇÃO:

Quadro de evolução do desvio-padrão, da média, da perda quadrática e da combinação ótima dos fatores:

Tabela 6.1.1 - Valores obtidos através do algoritmo bicritério

Iteração	$\sigma$	$\mu$	L	Combinação Ótima
1	13,78	403,13	$k(6,174 \times 10^{-6})$	
	50,77	597,12	$k(2,865 \times 10^{-6})$	(1,00; 0,143; 0,172)
2	77,32	717,06	$k(2,007 \times 10^{-6})$	
	95,99	791,16	$k(1,620 \times 10^{-6})$	(1,00; 1,00; 0,426)
3	109,80	836,97	$k(1,500 \times 10^{-6})$	(1,00; 1,00; 0,635)
4	119,52	865,28	$k(1,410 \times 10^{-6})$	(1,00; 1,00; 0,769)

A combinação ótima dos fatores e os valores para a média e desvio-padrão, encontrados por Vining e Myers(1990), foram:

Tabela 6.1.2 - Valores obtidos por Vining e Myers(1990) e as perdas quadráticas associadas

$\sigma$ (fixo)	$\mu$	L	Combinação ótima
60	557,9	$k(3,400 \times 10^{-6})$	(0,722; 0,307; 0,204)
75	687,5	$k(2,200 \times 10^{-6})$	(1,048; 0,442; 0,292)
90	813,9	$k(1,564 \times 10^{-6})$	(1,333; 0,558; 0,368)

Castillo e Montgomery(1993) fixaram  $\sigma=60$ , com base nos resultados de Vining e Myers, obtendo para  $-1 \leq X_i \leq 1$ ,  $I=1,2,3$ , ponto ótimo é (1,0; 1,0; -0,2816) com média 616,7 e a perda quadrática  $L = 2,7 \times 10^{-6}$ .

### CONCLUSÃO:

Os resultados obtidos pelo procedimento bicritério, aqui estudado, oferece ao pesquisador a possibilidade de acompanhar a evolução da variância sem ter que fixá-la, previamente.

Pela tabela 6.1.1, pode-se observar o decréscimo das perdas quadráticas associadas aos valores ótimos obtidos pelo procedimento bicritério. Comparando estas perdas quadráticas com as perdas quadráticas da tabela 6.1.2, pode-se observar que a menor perda obtida por Vining e Myers, cujo ponto ótimo fica fora da região de busca, ainda é superior a dois valores da tabela 6.1.1. A perda quadrática associada aos resultados de Castillo e Montgomery(1993) é inferior a somente às obtidas na primeira iteração do procedimento bicritério. Assim sendo, além de não ser necessário fixar a variância, previamente, este procedimento oferece a possibilidade do pesquisador acompanhar a evolução da perda dentro do intervalo de crescimento da média restrita a uma perda mínima.

Obs: As funções foram otimizadas através do programa GAMS, utilizando programação não linear convexa.

## 6.2 - PROCESSO DE MANUFATURA DE CIRCUITOS INTEGRADOS

Este caso foi estudado por Karen Kafadar (1990) no laboratório R&D da companhia Hewlett-Packard.

Circuitos integrados têm dimensões e tolerâncias extremamente pequenas e isto leva a uma grande dificuldade na especificação dos parâmetros. A fabricação destes circuitos envolve depósito de fotorresistência, máscara do padrão, filme de exposição e o alinhamento de muitos circuitos sobre uma única placa. A placa está sujeita a várias condições do processo (temperaturas, pressão, razão de alimentação), ou fatores de ruído, os quais contribuem para a variação na performance do circuito, além daqueles causados pelos próprios parâmetros do circuito.

A situação física que corresponde a este processo envolve um depósito de camadas de produtos químicos (bório, fósforo etc) tendo as resistências definidas ( $R_s$ ,  $R_d$  etc) sobre uma camada de substrato (por exemplo silício). A interface entre as duas superfícies, as camadas de produtos químicos e substrato têm comprimento  $L$  e largura  $W$ , respectivamente. A capacidade de resistência desta interface afeta a ação dos elétrons das superfícies altas para as superfícies baixas e é governada pelo parâmetro  $b$  (o qual é expresso em termos de outro parâmetro  $R$ ).  $R_s$  e  $R_d$  são as resistências das superfícies altas e baixas, respectivamente, e  $R_c$  é a resistência de saída do circuito. O objetivo é escolher os níveis ótimos para  $R_s$ ,  $R_d$ ,  $L$  e  $R$  ( $W$  é fixo por outras restrições), que levem a um pequeno valor de  $R_c$  com mínima variação.

Os três níveis para cada um dos quatro parâmetros do planejamento estão na tabela abaixo.

Tabela 6.2.1 - Níveis dos fatores experimentais

$R_s$	25	30	35	ohms/quadrado
$R_d$	4	5	6	ohms/quadrado
$R$	100	150	200	ohms
$L$	0,4	0,5	0,6	mícrons
$W$	1,5	1,5	1,5	mícrons

A resistência resultante, ou característica de performance ou variável de resposta, é dada em termos destes parâmetros através da equação:

$$R_c = \frac{2 * R_s * R_d + (R_s^2 + R_d^2) * \cosh(\beta * L)}{\beta * W * (R_s + R_d) * \sinh(\beta * L)}$$

onde

$$\beta = \left[ \frac{R_s + R_d}{R} \right]^{1/2}$$

Esta equação foi calculada para cada valor nominal dos parâmetros mais um erro devido à variação dos componentes ou a outras fontes de ruídos. A combinação ideal dos níveis dos parâmetros será aquela que minimiza  $R_c$  e também sua variação. Resistores são geralmente especificados como uma porcentagem de seus valores nominais, e aqueles que caem dentro de, digamos 10%, são simplesmente vendidos como resistores tendo um valor nominal diferente. Assim, a distribuição dos erros em torno deste valor nominal é aproximadamente constante. Desta forma, as distribuições simuladas para  $R_s$  e  $R_d$  foram uniformes, com limites de  $\pm 10\%$  ( $=\pm 1,732s_{\text{unif}}$ ). Na falta de conhecimento adicional sobre  $R$  e  $L$ , as distribuições simuladas para estes parâmetros foram normais com médias iguais aos valores nominais e desvios padrões iguais a 5% dos valores nominais. A distribuição simulada para  $W$  também foi normal, com desvio padrão igual a 0,5% do valor nominal, porque a tolerância considerada sobre  $W$  é muito pequena.

Os ruídos foram simulados, através das respectivas distribuições dos parâmetros.

O objetivo era minimizar variações enquanto se obtinha o valor ótimo para os níveis dos fatores. As técnicas utilizadas, pelos autores, foram os gráficos das variâncias amostrais versus médias amostrais na escala log.-log., recomendados por Nair e Pregibon (1986) e, também, utilizando a transformação logarítmica da média e da variância, para uma análise de variância, recomendada por Box (1988).

Aqui, este caso foi utilizado para exemplificar a aplicação do procedimento bicritério, sugerido neste trabalho, em comparação com o método de Taguchi.

Para a aplicação do procedimento sugerido neste trabalho, foi utilizado o planejamento experimental fatorial completo  $3^4$ .

### 6.2.1 - OS PLANEJAMENTOS EXPERIMENTAIS UTILIZADOS

Cada combinação dos fatores, do planejamento experimental fatorial completo  $3^4$ , foi repetida 20 vezes. Assim, a amostra obtida contém um total de  $3^4 \times 20 = 1620$  elementos.

O modelo de locação e o modelo de dispersão foram ajustados utilizando, respectivamente, a média e a variância das 20 repetições de cada combinação dos fatores experimentais. Isto é, a média e a variância das 20 repetições do experimento, foram calculadas e consideradas como as respostas a serem modeladas.

Um planejamento de experimento fatorial fracionário  $3^{4-2}$  foi empregado para a matriz de Taguchi ou arranjo interno (tabela 6.2.2). Para a matriz dos ruídos foi utilizado um planejamento fatorial fracionário  $2^{5-2}$  (tabela 6.2.3). Os dados foram obtidos do cruzamento das matrizes do planejamento e de ruído (tabela 6.2.4).

Tabela 6.2.2 -Matriz do planejamento  
para o método de Taguchi

Corrida	A	B	C	D	W
1	25	4	100	0,4	1,5
2	25	5	150	0,5	1,5
3	25	6	200	0,6	1,5
4	30	4	150	0,6	1,5
5	30	5	200	0,4	1,5
6	30	6	100	0,5	1,5
7	35	4	200	0,5	1,5
8	35	5	100	0,6	1,5
9	35	6	150	0,4	1,5

Tabela 6.2.3-Matriz de ruídos  
para o método de Taguchi.

Corrida	A	B	C	D	W
1	$\sigma$	$\sigma$	$\sigma$	$-\sigma$	$-\sigma$
2	$\sigma$	$\sigma$	$-\sigma$	$\sigma$	$\sigma$
3	$\sigma$	$-\sigma$	$-\sigma$	$-\sigma$	$-\sigma$
4	$\sigma$	$-\sigma$	$\sigma$	$\sigma$	$\sigma$
5	$-\sigma$	$\sigma$	$-\sigma$	$\sigma$	$-\sigma$
6	$-\sigma$	$\sigma$	$\sigma$	$-\sigma$	$\sigma$
7	$-\sigma$	$-\sigma$	$\sigma$	$\sigma$	$-\sigma$
8	$-\sigma$	$-\sigma$	$-\sigma$	$-\sigma$	$\sigma$

Tabela 6.2.4 - Matriz produto para o método de Taguchi.

Corrida	A	B	C	D	W
	22,5	3,6	95	0,42	1,507
	27,5	3,6	95	0,38	1,4925
	22,5	4,4	95	0,38	1,507
	27,5	4,4	95	0,42	1,4925
1	22,5	3,6	105	0,42	1,4925
	27,5	3,6	105	0,38	1,507
	22,5	4,4	105	0,38	1,4925
	27,5	4,4	105	0,42	1,507

	27,0	3,6	142,5	0,525	1,507
	33,0	3,6	142,5	0,475	1,4925
	27,0	4,4	142,5	0,475	1,507
2	33,0	4,4	142,5	0,525	1,4925
	27,0	3,6	157,5	0,525	1,4925
	33,0	3,6	157,5	0,475	1,507
	27,0	4,4	157,5	0,475	1,4925
	33,0	4,4	157,5	0,525	1,507
	31,5	3,6	190	0,63	1,507
	38,5	3,6	190	0,57	1,4925
	31,5	4,4	190	0,57	1,507
	38,5	4,4	190	0,63	1,4925
3	31,5	3,6	210	0,63	1,4925
	38,5	3,6	210	0,57	1,507
	31,5	4,4	210	0,57	1,4925
	38,5	4,4	210	0,63	1,507
	22,5	4,5	190	0,525	1,507
	27,5	4,5	190	0,475	1,4925
	22,5	5,5	190	0,475	1,507
	27,5	5,5	190	0,525	1,4925
4	22,5	4,5	210	0,525	1,4925
	27,5	4,5	210	0,475	1,507
	22,5	5,5	210	0,475	1,4925
	27,5	5,5	210	0,525	1,507
	27	4,5	95	0,630	1,507
	33	4,5	95	0,570	1,4925
	27	5,5	95	0,570	1,057
	33	5,5	95	0,630	1,4925
5	27	4,5	105	0,630	1,4925
	33	4,5	105	0,570	1,507
	27	5,5	105	0,570	1,4925
	33	5,5	105	0,630	1,507
	31,5	4,5	142,5	0,420	1,507
	38,5	4,5	142,5	0,380	1,4925
	31,5	5,5	142,5	0,380	1,507
6	38,5	5,5	142,5	0,420	1,4925
	31,5	4,5	157,5	0,420	1,4925
	38,5	4,5	157,5	0,380	1,507
	31,5	5,5	157,5	0,380	1,4925
	38,5	5,5	157,5	0,420	1,507
	22,5	5,4	142,5	0,630	1,507
	27,5	5,4	142,5	0,570	1,4925
	22,5	6,6	142,5	0,570	1,507
7	27,5	6,6	142,5	0,630	1,4925
	22,5	5,4	157,5	0,630	1,4925
	27,5	5,4	157,5	0,570	1,507
	22,5	6,6	157,5	0,570	1,4925
	27,5	6,6	157,5	0,630	1,507

8	27	5,4	190	0,420	1,507
	33	5,4	190	0,380	1,4925
	27	6,6	190	0,380	1,507
	33	6,6	190	0,420	1,4925
	27	5,4	210	0,420	1,4925
	33	5,4	210	0,380	1,507
	27	6,6	210	0,380	1,4925
	33	6,6	210	0,420	1,507

9	31,5	5,4	95	0,525	1,507
	38,5	5,4	95	0,475	1,4925
	31,5	6,6	95	0,475	1,507
	38,5	6,6	95	0,525	1,4925
	31,5	5,4	105	0,525	1,4925
	38,5	5,4	105	0,475	1,507
	31,5	6,6	105	0,475	1,4925
	38,5	6,6	105	0,525	1,507

---

## 6.2.2 - ANÁLISE DO CONJUNTO DE DADOS OBTIDOS PELO PLANEJAMENTO DE EXPERIMENTO FATORIAL $3^4$

A análise foi inicializada, com o ajuste de um modelo de regressão simples para média e outro para a variância das 20 repetições do experimento.

### a) ANÁLISE DO AJUSTE DO MODELO DE LOCAÇÃO

#### i) Ajuste de um modelo de regressão simples

O gráfico de resíduo vs valores ajustados, fig. 6.2.1, obtido pelo ajuste de um modelo de regressão simples, indica que há uma relação não linear entre a resposta e os fatores experimentais. Pode-se observar uma curvatura neste gráfico, indicando a inadequação do modelo. Portanto, um modelo mais complicado ou uma transformação será necessário para obter a independência entre a variância e a média. Através dos gráfico da distribuição de probabilidade dos resíduos (fig.6.2.2) e do gráfico de probabilidade normal (fig. 6.2.3) pode-se observar que os erros não seguem uma distribuição normal.

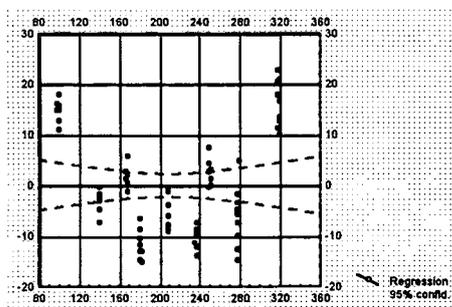


Fig.6.2.1-Gráfico de resíduo  
vs valores ajustados

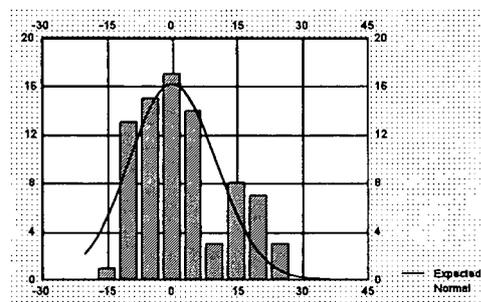


Fig.6.2.2-Gráfico de distribuição de  
probabilidade dos resíduos

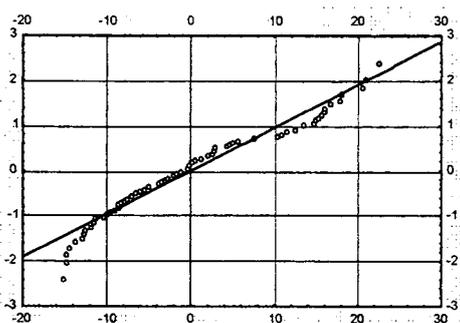


Fig 6.2.3-Gráfico de probabilidade Normal

## ii) Ajuste de um modelo polinomial de segunda ordem (termos quadráticos e interações)

Pode-se observar, através do gráfico dos resíduos vs valores ajustados (fig.6.2.4), que a variância cresce com o crescimento da média indicando a existência de ligação entre a média e a variância, isto é,  $\sigma_y \propto \mu^\alpha$ . Portanto, será necessário utilizar uma transformação que torne a variância constante.

Os gráficos de distribuição dos resíduos (fig.6.2.5) e de probabilidade normal (fig.6.2.6) indicam que os erros seguem uma distribuição aproximadamente normal. O teste de Kolmogorov-Smirnov e o teste W de Shapiro-Wilk (tabela 6.2.5) não rejeitaram a hipótese de normalidade dos erros.

Tabela 6.2.5 - Teste de Kolmogorov-Smirnov e de Shapiro-Wilk

Variável Resíduo		K-S d = 0,0395 p > 0,2				
		S-W W = 0,99211 p < 0,9875				
Categoria	No.	No. acum.	% de válidos	% acum. dos válidos	% de todos os casos	% acum. de todos os casos
-10 ≤ x < -5	4	4	4,94	4,94	4,94	4,94
-5 ≤ x < 0	37	41	45,68	50,62	45,68	50,62
0 ≤ x < 5	36	77	44,44	95,06	44,44	95,06
5 ≤ x < 10	4	81	4,94	100,00	4,94	100,00
Perdidos	0	81	0,00		0,00	100,00

Através do gráfico de probabilidade normal, pode-se suspeitar de alguns pontos que parecem ser diferentes dos restantes. A busca por “outliers” e por observações influentes foi

realizada, através dos resíduos de Student e da estatística de Cook. Nenhuma observação foi considerada como sendo um “outlier” ou uma observação influente.

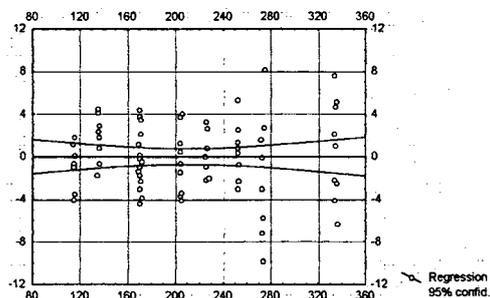


Fig.6.2.4 - Gráfico de resíduo vs valores ajustados

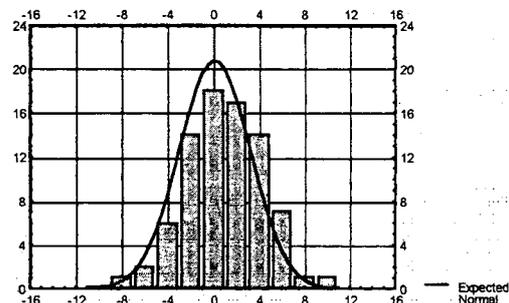


Fig.6.2.5 - Gráfico de distribuição de probabilidade dos Resíduos

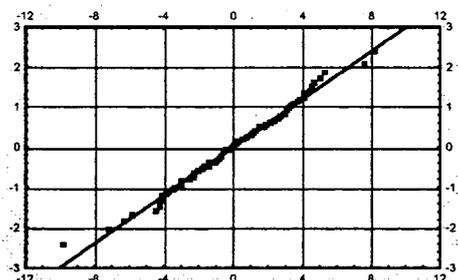


Fig.6.2.6 - Gráfico de probabilidade normal

### iii) Transformação

Para descobrir a transformação ideal para estes dados, o gráfico lambda, de Box, foi utilizado (Fig. 7). A transformação indicada, foi  $Y=Y^\lambda$ , com  $\lambda=0,25$ .

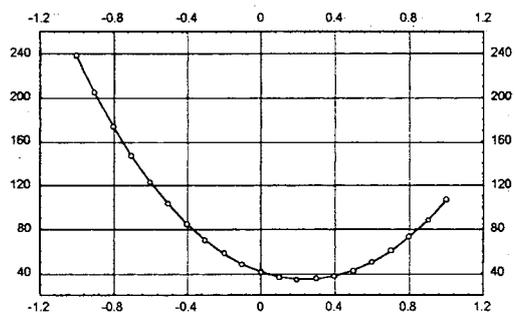


Fig. 6.2.7 - Gráfico Lambda - QMRES vs Lambda

Após esta transformação e o ajuste de uma superfície de resposta aos dados, ou seja, um polinômio completo de segundo grau, o gráfico de resíduos vs valores ajustados, (fig.6.2.8), não indicou qualquer estrutura não usual e o gráfico de probabilidade normal, (fig. 6.2.9), indicam que os erros seguem, aproximadamente, uma distribuição normal. Isto é, as suposições de : homogeneidade das variâncias; simplicidade da estrutura do modelo; e erros aditivos e pelo menos aproximadamente normais; para este modelo, estão satisfeitas.

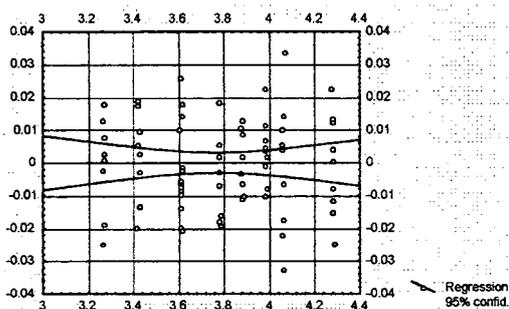


Fig.6.2.8 - Gráfico de resíduos vs valores ajustados

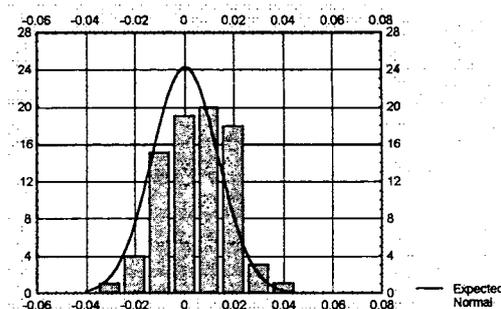


Fig.6.2.9 - Gráfico de distribuição de probabilidade dos resíduos

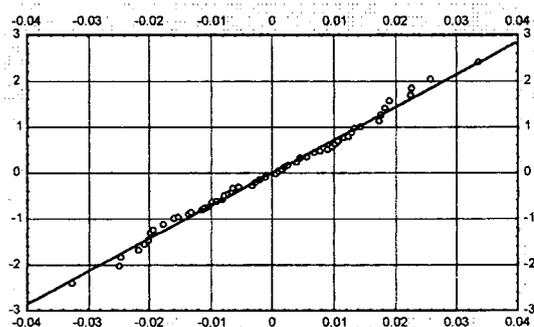


Fig.6.2.10 - Gráfico de probabilidade normal

Pela análise de variância do ajuste do modelo polinomial completo, pode-se verificar que os efeitos de alguns fatores não são significantes. A seleção dos fatores, que permaneceram no modelo, foi realizada através do método de regressão passo a passo (stepwise) e do teste F para a minimização do quadrado médio do erro. O modelo resultante foi:

$$\mu^{0,25} = 3,620 + 0,0126R - 3,224L - 0,00002R^2 + 1,819L^2 - 0,003R \times L$$

com  $R^2 = 99,78\%$  e quadrado médio do residuo ( $s^2$ ) =  $2,1 \times 10^{-4}$ .

## b) ANÁLISE DO AJUSTE DO MODELO DE DISPERSÃO

### i) Ajuste de um modelo de regressão simples: análise exploratória.

O gráfico de resíduos vs valores ajustados, fig.6.2.11, obtidos pela regressão simples, indica a não aditividade do modelo e que as variâncias não são constantes. A não normalidade nos erros pode ser observada através dos gráficos de distribuição (fig.6.2.12) e o de probabilidade normal (fig.6.2.13). Portanto, um modelo mais complexo e/ou transformação nos dados será necessário.

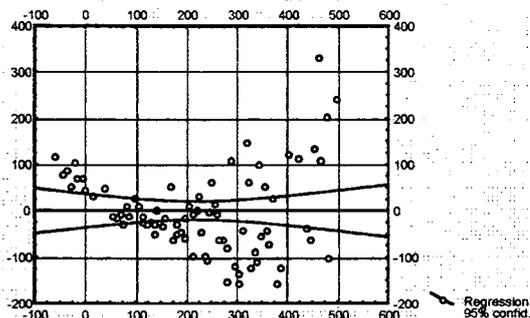


Fig.6.2.11 - Gráfico de resíduos vs valores ajustados.

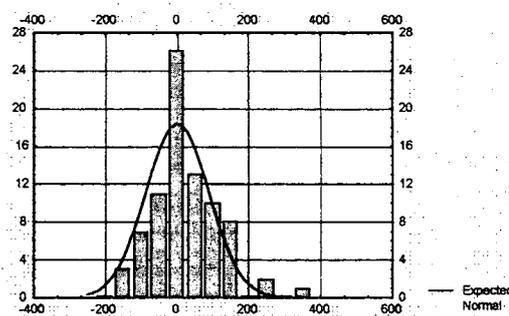


Fig.6.2.12-Gráfico de distribuição de probabilidade dos resíduos

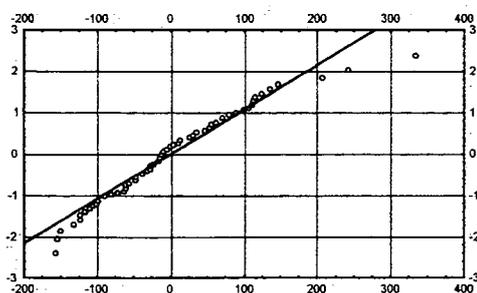


Fig.6.2.13 - Gráfico de probabilidade normal

A busca por observações influentes, também, foi realizada, através dos resíduos de Student e da estatística de Cook. Nenhuma observação foi considerada como influente.

## ii) Ajuste de um modelo de regressão completo

O gráfico dos resíduos vs valores ajustados (fig.6.2.14) sugere que existe um crescimento na variância junto com a média e, também, que as variâncias não são constantes. Uma transformação será necessária.

Os gráficos de probabilidade dos resíduos (fig.6.2.15) e o de probabilidade normal (fig.6.2.16), indicam que os resíduos seguem, aproximadamente, uma distribuição normal.

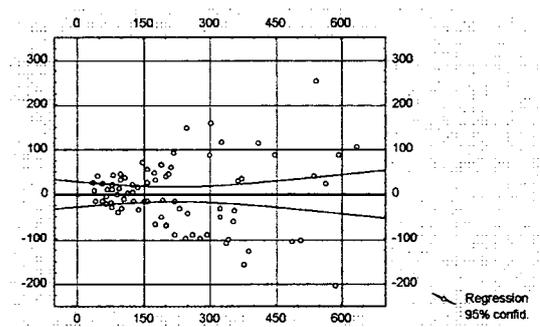


Fig.6.2.14-Gráfico de resíduos vs valores ajustados

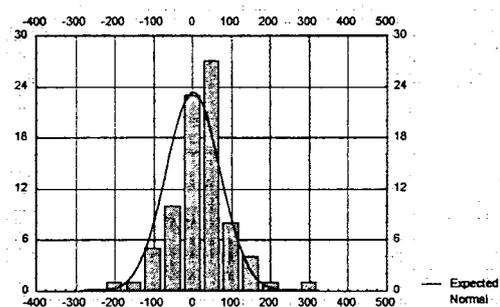


Fig.6.2.15-Gráfico de distribuição de probabilidade dos resíduos

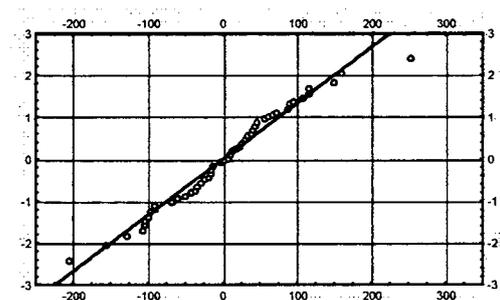


Fig.6.2.16-Gráfico de probabilidade normal

## iii) Transformação

A potência da transformação indicada pelo gráfico lambda, de Box, (fig.6.2.17), foi  $\lambda=0,08$ .

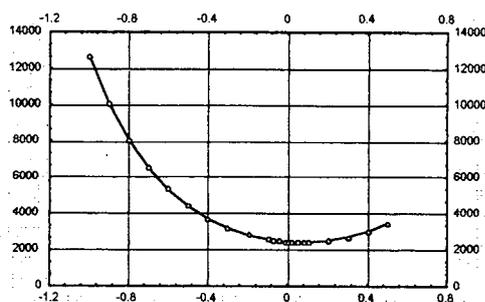


Fig.6.2.17 - Gráfico Lambda - QMRES vs Lamba

Com esta transformação e o ajuste de uma superfície de resposta nos dados, os gráficos de resíduos vs valores ajustados (fig.6.2.18), de distribuição dos resíduos (fig.6.2.19) e o de probabilidade normal (fig.6.2.20), indicam que as suposições sobre o modelo estão satisfeitas.

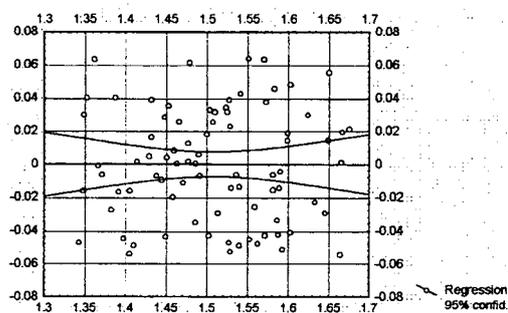


Fig.6.2.18-Gráfico de resíduos vs valores ajustados

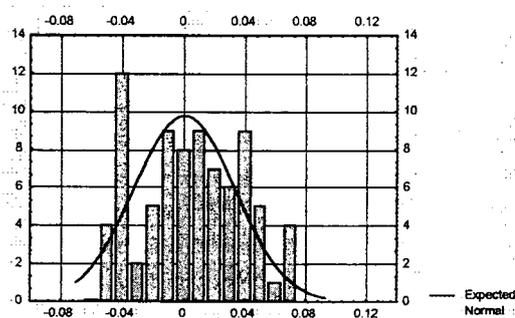


Fig.6.2.19-Gráfico de distribuição de probabilidade dos resíduos

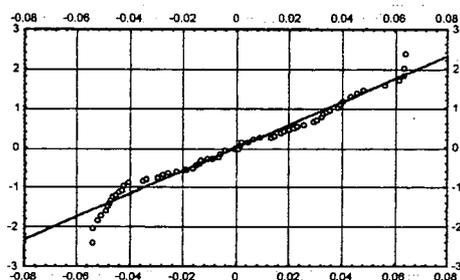


Fig.6.2.20-Gráfico de probabilidade Normal

Pela análise de variância do ajuste do modelo polinomial completo foi verificado que os efeitos de alguns dos fatores não são significantes. Isto é, não necessariamente precisam permanecer no modelo.

A seleção dos fatores, que permaneceram no modelo, foi realizada através do método de regressão passo a passo (stepwise) e do teste de minimização do quadrado médio do erro. O modelo resultante foi:

$$(\sigma^2)^{0,08}=1,197+0,0104R_s-0,0133R_d+0,0029R-0,000004R^2-0,0188R_sL$$

com  $R^2=86,94\%$  e quadrado médio do resíduo  $(s^2)=1,2 \times 10^{-3}$ .

### c) OTIMIZAÇÃO DOS MODELOS

Tem-se, agora, o seguinte problema bicritério:

$$\min \mu^{0,25}=3,620+0,0126R-3,224L-0,0000R^2+1,819L^2-0,003RL$$

$$\min (\sigma^2)^{0,08}=1,197+0,0104R_s-0,0133R_d+0,0029R-0,000004R^2-0,0188R_sL$$

sujeita a

$$100 \leq R \leq 200$$

$$0,4 \leq L \leq 0,6$$

$$25 \leq R_s \leq 35$$

$$4 \leq R_d \leq 6.$$

Observe-se que será necessário verificar se as equações que representam os modelos são côncavas ou convexas para depois aplicar o procedimento bicritério. Caso estas funções não sejam côncavas e nem convexas será necessário aplicar o algoritmo de Stange (otimização global) juntamente com o procedimento bicritério.

Para fazer esta verificação, o algoritmo de Ivanqui e Stange (1995) foi aplicado. Verificou-se que as equações não são côncavas nem convexas, portanto, o algoritmo de Stange (1993) será aplicado juntamente com o algoritmo bicritério.

## APLICAÇÃO DO ALGORITMO BICRITÉRIO

Passo 1: Neste passo, as funções da média e da variância foram minimizadas separadamente:

$$\hat{\mu}^* = 107,5625 \quad \text{ponto ótimo (R=100; L=0,6; Rs=35; Rd=6)}$$

$$\hat{\sigma}^2 = 37,51508 \quad \text{ponto ótimo (R=100; L=0,6; Rs=35; Rd=6)}$$

Coincidentemente, as duas funções atingem o valor ótimo no mesmo ponto. Desta forma, não será necessário fazer os cálculos dos passos seguintes do algoritmo.

Estes resultados levam a uma perda quadrática:

$$L=k(11607,2065)$$

onde  $k=A/\Delta^2$  e  $A$  é a perda que incorre, quando o produto está fora das especificações e  $\Delta$  é a tolerância.

### 6.2.3 - MÉTODO DE TAGUCHI

O conjunto de dados, obtido através da matriz produto, possui 72 (9x8) observações. As razões sinal-ruído foram calculadas para a característica do tipo “menor é melhor”. Para determinar os fatores de ajustamento, análises de variâncias para médias (tabela 6.2.6) e para as razões sinal ruído (tabela 6.2.7) foram realizadas. Na construção destas tabelas, todos os graus de liberdade foram utilizados para os fatores, portanto, não existe o termo erro e os testes F não puderam ser avaliados. Na tabela 6.2.6 pode-se observar o efeito dos fatores do planejamento sobre as médias, em ordem crescente, Rd, Rs, L e R. Pela tabela 6.2.7, pode-se observar que os fatores que afetam a razão sinal-ruído são, respectivamente, em ordem crescente Rd, Rs, L e R. O efeito do fator R sobre a média e sobre a razão sinal-ruído foi, aproximadamente, o dobro do efeito do fator L. O fator Rd apresentou o menor efeito sobre a razão sinal-ruído e também, sobre a média. A tabela 6.2.8 apresenta as estimativas das médias das razões sinal-ruído para cada nível dos fatores e foi utilizada, para determinar os níveis dos fatores do planejamento, que maximizam as razões sinal-ruído. Pela figura 6.2.21, podem-se visualizar os níveis ótimos dos fatores.

Tabela 6.2.6 - Análise de variância para as médias. Método de Taguchi.

Fonte de variação	G.L.	Somas de quadrados	Quadrados médios
Rs	2	435,04	218,02
Rd	2	393,32	196,66
R	2	28277,76	14138,88
L	2	10362,98	5181,49
Erro	0	0,000	
Total	8	39470,34538	

Tabela 6.2.7 - Análise de variância para razões sinal-ruído. Método de Taguchi

Fonte de variação	G.L.	Somas de quadrados	Quadrados médios
Rs	2	0,00646	0,00323
Rd	2	0,00150	0,00075
R	2	53,25113	26,62556
L	2	17,63031	8,81515
Erro	0	0,00000	
Total	8	70,8887	

Tabela 6.2.8- Estimativas das médias das razões sinal-ruído.

Fator	Nível 1	Nível 2	Nível 3
Rs	-45,92 *	-45,96	-45,99
Rd	-45,95	-45,98	-45,94*
R	-42,83*	-46,29	-48,76
L	-47,73	-45,83	-44,31*

\* Representam os níveis dos fatores, que maximizam a razão sinal-ruído.

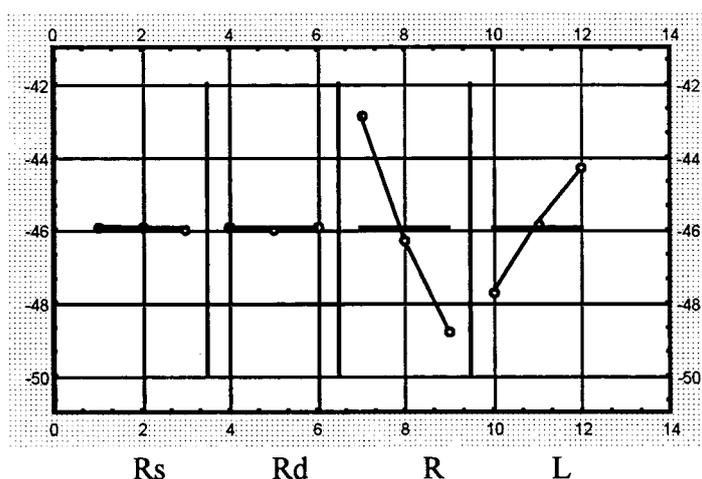


Figura 6.2.21 - Média da razão sinal-ruído para os níveis dos fatores  
Média geral = - 45,959 desvio-padrão = 2,97677

Analisando a tabela 6.2.8 e a figura 6.2.22 pode-se observar que os níveis ótimos para os fatores são:  $R_s=25$ ,  $R_d=6$ ,  $R=100$ ,  $L=0,6$  e  $W=1,5$  ( $W=1,5$  fixo no início da experimentação)

#### 6.2.4 - CONCLUSÃO

A tabela 6.2.9, abaixo, apresenta os pontos ótimos obtidos pelo procedimento, aqui proposto, o ponto ótimo (conjunto de níveis dos fatores experimentais) obtido pela aplicação da metodologia de Taguchi e, também o ponto ótimo fornecido pela análise de Kafadar (1990).

O ponto ótimo foi obtido no primeiro passo da primeira iteração do algoritmo bicritério. Ou seja, o ponto ótimo para a função da média e o ponto ótimo para a função da variância coincidiram no primeiro passo do algoritmo.

Tabela 6.2.9 -Níveis ótimos dos fatores do experimento obtido em cada método

Método	Ponto Ótimo				
	(Rs	Rd	R	L	W)
Guedes	(35;	6;	100;	0,6;	1,5)*
Kafadar	(25;	4;	100;	0,6;	1,5)
Taguchi	(25;	6;	100;	0,6;	1,5)

\*Valor obtido no primeiro passo do algoritmo

Para cada um dos pontos ótimos, dos níveis dos fatores experimentais, 20 corridas de confirmação foram simuladas, considerando as distribuições de probabilidades de cada um dos fatores. A tabela 6.2.10 apresenta a média, a variância dos dados e a perda quadrática associada:

Tabela 6.2.10 - Média e Variância das corridas de confirmação e perda quadrática

Método	Ponto Ótimo	Média	Variância	Perda Quadrática
Guedes	(35; 6; 100; 0,6; 1,5)	111,808	37,3845	$L=k(12538,4133)^*$
Kafadar	(25; 4; 100; 0,6; 1,5)	115,693	94,0788	$L=k(13478,9490)$
Taguchi	(25; 6; 100; 0,6; 1,5)	116,563	117,9920	$L=k(13704,92497)$

\*  $k = A/\Delta^2$ , A é a perda quando o produto está fora dos limites de especificações e  $\Delta$  é a tolerância.

Através da Tabela 6.2.10, pode-se observar que o procedimento de Kafadar (1990) e pela metodologia de Taguchi não levaram a variância mínima. Pode-se observar também, que os três procedimentos apresentaram pequenas diferenças na resistência média, embora o menor valor tenha sido o obtido pelo procedimento aqui proposto. A perda quadrática incorrida é consideravelmente menor para este procedimento. Outro ponto a ressaltar, é a simplicidade do procedimento proposto que considera o planejamento experimental e a modelagem das respostas (neste caso média e variância) o ponto principal para se obter excelentes resultados. Ou seja, não há método que conserte uma amostra que não tenha sido

colhida conforme as regras estatísticas e matemáticas e não se pode ter uma boa representação se os dados não foram bem modelados.

### 6.3 - OTIMIZAÇÃO DE AZULEJOS CERÂMICOS

Esta aplicação foi estudada inicialmente, por Bernardin (1994) e depois por Caten (1995) em suas dissertações de mestrado.

Bernardin (1994) utilizou a metodologia de Taguchi para conduzir a experimentação e analisar os dados obtidos. O experimento tinha por objetivo otimizar a produção de azulejos cerâmicos.

O experimento visava à otimização da formulação de massa cerâmica para azulejos. Para executar o experimento 8 fatores foram escolhidos (ver tabela 6.3.1) e acomodados em um arranjo ortogonal  $L_{18}$  e 5 repetições de cada corrida experimental foram realizadas. As respostas escolhidas para alcançar os objetivos foram:

retração linear (característica do tipo menor é melhor);

resistência mecânica (característica do tipo maior é melhor);

absorção de água (característica do tipo menor é melhor).

Pela análise de Taguchi, Bernardin não conseguiu um ajuste satisfatório para os fatores X2, X4 e X5, então ele decidiu conduzir um novo experimento com apenas estes fatores e 10 repetições de cada corrida experimental foram realizadas.

Tabela 6.3.1 - Fatores experimentais e níveis utilizados por Bernardin (1994) nos experimentos 1 e 2.

Fatores Experimentais	Níveis						
	-2	-1	-0,33	0	1	1,33	2
X1: Temp. de queima		1140 °C			1160°C		
X2: Percentual de filito	40%	43%	45%	46%	49%	50%	
X3: Percentual de argila		22%		25%	28%		
X4: Percentual de talco		9%		12%	15%		18%
X5: Percentual de arenito		8%		11%	14%		
X6: Tipo de argila		A		A/B	B		
X7: Tipo de filito		A		A/B	B		
X8: Tipo de talco		A		A/B	B		

Caten (1995) utilizou os dados obtidos por Bernardin, nos dois experimentos, para aplicar o método que propõe em sua dissertação. Para isso, foram construídos modelos para representar as médias e os desvios-padrões das características de qualidade e foi utilizada a função perda quadrática multivariada, proposta por Ribeiro e Elsayed (1993), como a função objetivo a ser otimizada.

Os modelos ajustados, por Caten (1995), para a médias e para os desvios-padrões das características de qualidade foram:

Retração linear (Y1): característica do tipo menor é melhor.

$$f_{11}(X) = \hat{\mu}_1 = 11,16 - 0,374X_2 - 0,956X_3 - 0,658X_5 - 0,359X_6 - 0,753X_7 \\ - 0,290X_2^2 - 1,08X_3^2 - 0,505X_5^2 + 0,584X_6^2 - 1,25X_7^2 + 2,10X_1X_8 \\ - 0,204X_2X_5$$

$$f_{21}(X) = \hat{\sigma}_1 = 0,838 - 0,115X_2 + 0,531X_7 + 0,111X_8 - 0,158X_2^2 + 0,504X_3^2 \\ + 0,243X_5^2 - 0,273X_6^2 - 0,405X_8^2 - 0,452X_1X_8 + 0,212X_2X_5$$

Resistência mecânica (Y2): característica do tipo maior é melhor.

$$f_{12}(X) = \hat{\mu}_2 = 513 - 46,5X_1 - 23,6X_3 - 34,4X_4 - 16,9X_6 - 24,1X_7 + 24,3X_8 \\ - 9,62X_2^2 - 49,7X_5^2 - 51,2X_6^2 - 34,0X_7^2 + 109,0X_7X_8 + 41,0X_5X_7$$

$$f_{22}(X) = \hat{\sigma}_2 = 85,8 - 11,5X_3 + 17,0X_7 - 22,4X_6^2 - 25,4X_8^2$$

Absorção de água (Y3): característica do tipo menor é melhor.

$$f_{13}(X) = \hat{\mu}_3 = 3,90 + 0,279X_1 + 0,931X_2 + 1,23X_3 + 1,09X_5 - 0,949X_6 \\ + 0,799X_7 + 0,637X_2^2 + 0,731X_7^2 + 2,30X_3X_8$$

$$f_{23}(X) = \hat{\sigma}_3 = 0,419 + 0,211X_4 + 0,307X_5 + 0,212X_3X_8 + 0,213X_2X_5$$

Neste trabalho, os modelos ajustados por Caten (1995) foram utilizados para aplicação do procedimento proposto para problemas multirresposta. Os resultados serão comparados aos resultados obtidos por Bernardin (1994) e por Caten (1995).

A otimização das funções de respostas foi conduzida conforme o algoritmo proposto, como segue abaixo.

Passo 1. A otimização foi iniciada com a solução dos problemas:

$$\text{otimizar } f_{ik}(X) \quad i = 1, 2 \text{ e } j = 1, 2, 3$$

s. a

$$X \in S$$

onde  $S$  é a região formada pelos níveis dos fatores experimentais; e

$$X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8).$$

As funções  $f_{11}$ ,  $f_{21}$ ,  $f_{22}$ ,  $f_{13}$  e  $f_{32}$  foram multiplicadas por  $(-1)$  para que pudessem ser maximizadas pois,  $f_{11}$  e  $f_{13}$  representam características de qualidade do tipo menor é melhor e  $f_{21}$ ,  $f_{22}$  e  $f_{23}$  representam os desvios-padrões das características.

Obtidos os resultados do problema acima, a tabela de ótimos ideais foi construída e o vetor de perdas calculado.

Tabela 6.3.2 . Valores ótimos individuais e valores de todas as funções para os pontos ótimos

	$f_{11}$	$f_{21}$	$f_{12}$	$f_{22}$	$f_{13}$	$f_{23}$
$f_{11}$	-2,52	-1,88	226,10	-63,79	-7,80	-0,73
$f_{21}$	-12,35	1,45	571,16	-21,00	-4,34	0,002
$f_{12}$	-12,90	0,12	702,15	-54,1503	-4,33	-0,29
$f_{22}$	-11,87	0,37	618,87	-9,5	-2,89	0,16
$f_{13}$	-11,61	-0,21	508,05	-17,21	0,05	0,16
$f_{23}$	-10,90	0,66	496,17	-17,21	-2,66	0,59

O vetor de valores ótimos é:

$$\tilde{Z} = [2,52; 0; 702,15; 9,5; 0; 0]$$

O vetor de perdas ideais associadas a este vetor é:

$$L = [k(6,35); k(2 \times 10^{-6}); 0]$$

onde  $k = A/\Delta^2$  e  $A$  é a perda para o consumidor, quando o valor de  $Y$  se encontra fora dos limites de especificações e  $\Delta$  é a tolerância.

O vetor de pesos foi calculado:

$$\pi = [0,0018; 0,035; 0,000034; 0,00024; 0,87; 0,093]$$

Passo 2. Com os resultados do passo anterior o problema abaixo foi resolvido.

min  $\lambda$

s. a

$$\lambda \geq \{ Z_{ik}^* - f_{ik}(X) \} \pi_{ik}, \quad i = 1, 2 \text{ e } j = 1, 2, 3$$

$$X \in S$$

$$\lambda \geq 0$$

Na primeira iteração, as funções  $f_{21}$ ,  $f_{13}$  e  $f_{23}$  foram satisfatórias, então, os valores de  $\pi_{21}$ ,  $\pi_{13}$  e  $\pi_{23}$  foram iguados a zero e um montante de relaxação para cada uma delas foi fixado.

Foram necessárias seis iterações para se chegar ao valor ótimo. Em cada iteração, um montante de relaxação era fixado para as funções, que apresentavam resultados satisfatórios e era estudado o comportamento das outras funções. Um vetor de perdas para cada iteração foi calculado e comparado ao vetor de perdas iniciais.

O resultado final foi:

Ponto ótimo:  $X^7 = (-1; 0,369; -1; -1; 1; 0,359; 1; 1)$

Valores ótimos:  $Z^7 = (5,46; 2,25; 670,00; 86,00; 2,8; 0,38)$

Perdas quadráticas:  $L^7 = [k(34,93); k(2,34 \times 10^{-6}); k(7,98)]$ .

## ANÁLISE COMPARATIVA

A comparação dos resultados aqui proposta, com os resultados de Bernardin (1994) e Caten (1995) está na tabela abaixo.

Tabela 6.3.3 - Comparação dos valores ótimos obtidos para as médias pelos três métodos.

Método	Características			Ponto Ótimo (níveis codificados)
	Y1	Y2	Y3	
Bernadin*	12,850	373,000	4,580	(-1, -2, -1, 2, 0, 1, 0, -1)
Caten	5,810	626,00	2,590	(-1; 0,3; -1; -1; 1; 1; 1; 1)
Guedes	5,464	670,000	2,80	(-1; 0,37; -1; -1; 1; 0,359; 1; 1)
Guedes**	5,54	640,000	2,5	(-1; 0,42; -1; -1; 1; 0,758; 1; 1)

\* Método de Taguchi

\*\* Valores obtidos na análise de sensibilidade

Observe-se que o valor ótimo para a característica de qualidade absorção de água (Y3) é maior que o valor ótimo obtido pelos resultados de Caten. Devido a este fato, foi realizada uma análise de sensibilidade da seguinte forma: o montante de relaxação, para a

característica de qualidade da resistência mecânica (Y2), a cada iteração foi aproximado do valor encontrado por Caten (1995). Foram necessárias duas iterações para se chegar ao resultado satisfatório.

Tabela 6.3.4 - Comparação dos valores ótimos obtidos para as variâncias pelos métodos propostos por Caten (1995) e Guedes.

Método	Características			Ponto Ótimo (níveis codificados)
	Y1	Y2	Y3	
Caten	2,016	66,500	0,367	(-1; 0,3; -1; -1; 1; 1; 1; 1)
Guedes	2,253	86,000	0,381	(-1; 0,37; -1; -1; 1; 0,359; 1; 1)
Guedes**	2,129	76,01	0,393	(-1; 0,42; -1; -1; 1; 0,758; 1; 1)

\* Método de Taguchi

\*\* Valores obtidos na análise de sensibilidade

A perda quadrática (definida por Taguchi (eq. 5.5) associada aos pontos ótimos de cada uma das características de qualidade estão na tabela abaixo.

Tabela 6.3.5 - Perdas quadráticas associadas aos pontos ótimos obtidos pelos três métodos

Perdas	Características		
	Y1	Y2	Y3
Bernadin*	167,77	$7,1 \times 10^{-6}$	20,72
Caten	37,65	$2,7 \times 10^{-6}$	6,84
Guedes	34,93	$2,3 \times 10^{-6}$	7,9856
Guedes**	35,19	$2,5 \times 10^{-6}$	6,4046

\* Método de Taguchi

\*\* Perda quadrática associada à análise de sensibilidade.

Obs: Todos os valores da tabela 6.3.5 são multiplicados pela constante  $k = A/\Delta^2$ .

## CONCLUSÃO

Comparando os valores ótimos, apresentados na tabela 6.3.3 para as equações que representam as médias das características de qualidade, pode-se observar que os valores obtidos pelo método aqui proposto são mais condizentes com os respectivos valores nominais de cada característica que os obtidos pelos outros dois métodos. Isto pode ser

confirmado pela tabela 6.3.5, que apresenta o valor da perda quadrática de Taguchi para cada uma das combinação de fatores.

#### 6.4 - OTIMIZAÇÃO DE UMA RECEITA QUÍMICA

Esta aplicação foi realizada por Caten (1995) e apresentada em sua dissertação de mestrado. O objetivo era obter os níveis ótimos de 5 fatores experimentais para 10 funções representando características de qualidade. Após a obtenção dos dados, Caten modelou as respostas e as variabilidades. A variabilidade foi modelada como função dos resíduos, porque não foram realizadas replicações das corridas experimentais.

O objetivo, neste trabalho, é utilizar os modelos obtidos por Caten para avaliar o algoritmo multicritério.

Caten (1995) não informou o nome dos fatores experimentais e nem das características de qualidade, por isso serão denominados por X1, X2, ..., X5 e Y1, Y2, ..., Y10, respectivamente.

Os níveis dos fatores são:

Fatores	Nível 1	Nível 2	Nível 3
X1	3	4	5
X2	5,5	6,0	6,5
X3	18	20	22
X4	2,0	3,0	4,0
X5	8	10	12

Os modelos abaixo são os modelos de Caten (1995) para cada característica de qualidade e respectiva variabilidade.

Característica de qualidade do tipo nominal é melhor:

$$\hat{Y}_1 = 7,10 + 1,08X_1 + 0,64 \cdot X_1^2 + 1,11X_2 + 0,54X_2^2 + 0,42X_4 + 0,256X_1X_2$$

$$\hat{\sigma}_1 = 0,362 + 0,186X_1 + 0,118X_2$$

$$\hat{Y}_2 = 74,62 - 6,26X_2^2$$

$$\hat{\sigma}_2 = 4,125 - 1,40X_3 + 1,58X_5$$

$$\hat{Y}_4 = 31,57 + 3,60X_1 + 1,43X_1^2 + 1,98X_2 + 1,58X_2^2 + 1,69X_3 + 1,10X_4 + 2,36X_5$$

$$\hat{\sigma}_4 = 0,623 + 0,253X_2$$

$$\hat{Y}_5 = 61,73 + 2,06X_1 + 2,33X_2 + 0,938X_3 + 0,938X_5 + 2,46X_1^2$$

$$\hat{\sigma}_5 = 1,633 + 0,892X_1$$

$$\hat{Y}_6 = 1,132 + 0,00678X_1 + 0,0058X_1^2 + 0,0108X_2 + 0,0063X_2^2 - 0,00281X_4$$

$$\hat{\sigma}_6 = 0,00356 + 0,00202X_1 + 0,00825X_4$$

Características de qualidade do tipo menor é melhor:

$$\hat{Y}_3 = 201,19 - 4,89X_1 - 7,78X_1^2 - 3,89X_2 - 9,88X_5$$

$$\hat{\sigma}_3 = 6,225 + 2,525X_1$$

$$\hat{Y}_7 = 74,11 - 1,17X_1 - 4,88X_4 + 1,47X_5 + 0,92X_1X_2 - 0,689X_3X_4$$

$$\hat{\sigma}_7 = 0$$

Características de qualidade do tipo maior é melhor:

$$\hat{Y}_8 = 1602 + 335,56X_1 + 179,47X_1^2 + 228,67X_2 + 154,47X_2^2 + 167,75X_3 + 125,75X_5$$

$$\hat{\sigma}_8 = 74,92 + 26,095X_2$$

$$\hat{Y}_9 = 3306,4 - 123,44X_4 - 76,24X_1^2 + 41,19X_1X_2$$

$$\hat{\sigma}_9 = 53,03 - 23,56X_1 + 18,52X_2$$

$$\hat{Y}_{10} = 520,7 - 58,06X_1 - 32,57X_1^2 - 34,17X_2 - 22,57X_2^2 - 32,69X_3 - 12,06X_4 - 21,56X_5$$

$$\hat{\sigma}_{10} = 13,329 - 6,566X_2 - 6,673X_3$$

Caten (1995) resolveu o problema de obter a melhor combinação dos fatores, otimizando a função perda quadrática multivariada de Ribeiro e Elsayed (1993).

As funções acima foram otimizadas seguindo o algoritmo multicritério, como segue:

Passo 1 : O seguinte problema foi solucionado:

$$\max f_{ik}(X) \quad i = 1, 2 \quad \text{e} \quad k = 1, 2, \dots, 10$$

s. a

$$X \in S$$

onde S é a região formada pelos níveis dos fatores experimentais e

$$X = [X_1, X_2, X_3, X_4, X_5]$$

Serão utilizados os níveis codificados dos fatores experimentais, isto é  $X_i \in [-1, 1]$ ,  $i=1, 2, \dots, 5$ .

As funções que representam as características de qualidade dos tipos menor é melhor e nominal é melhor e também, as funções que representam a variabilidade foram multiplicadas por (-1) para que o algoritmo pudesse ser aplicado.

O vetor de ótimos ideais e o vetor de perdas ideais encontrados foram, respectivamente:

$$\tilde{Z} = [8,5; 0,176; 74,62; 1,145; 184,53; 3,7; 30; 0,3762; 0,74; 1,13; 0,0; 64,98; 0,0; 2336,33; 48,825; 3435,403; 10,95; 625,82; 0,09]$$

$$\tilde{L} = [0,031; 109,05; 34065,0; 900,14; 0,5476; 0,4096; 1,83 \times 10^{-5}; 8,4 \times 10^{-6}; 2,5 \times 10^{-4}]$$

O vetor de pesos foi calculado e as iterações foram iniciadas.

Passo 2. Com os resultados do passo anterior o problema abaixo foi resolvido.

$$\begin{aligned} & \min \lambda \\ & \text{s. a} \\ & \lambda \geq \{ Z_{ik}^* - f_{ik}(X) \} \pi_{ik}, \quad i = 1, 2 \text{ e } j = 1, 2, \dots, 10 \\ & X \in S \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

Foram realizadas quatro iterações para se obter o resultado ótimo. Em cada iteração, um montante de relaxação era fixado para as funções satisfatórias e era estudado o comportamento das outras funções. Um vetor de perdas para cada iteração foi calculado e comparado ao vetor de perdas iniciais.

O resultado final foi:

$$\text{Ponto ótimo : } X^4 = (-0,564; 0,398; 0,992; 0,967; -0,991)$$

Valores ótimos :  $Z^4 = (7,57; 0,257; 73,63; -1,17; 190,21; -4,8; 31,43; 0,72; 62,28; 1,29; 1,13; 0,01; 67,60; 0; 1627,00; 85,29; 3153,46; 73,69; 503,19; 4,09)$

Perdas quadráticas :  $L^4 = [k(0,931); k(130,642); k(36203,59); k(1,354); k(0,0001); k(4569,769); k(1,9 \times 10^{-6}); k(1,01 \times 10^{-6}); k(3,95 \times 10^{-6})]$

## ANÁLISE COMPARATIVA

A tabela 6.4.1 apresenta os resultados obtidos neste trabalho e a tabela 6.4.2 apresenta os resultados obtidos por Caten (1995).

Tabela 6.4.1 - Valores ótimos obtidos para as funções das médias e variabilidade das características de qualidade - Método proposto por Guedes

Característica de qualidade	Valor ótimo para a média	Valor ótimo para o desvio-padrão
Y1	7,57	0,257
Y2	73,63	1,17
Y3	190,21	4,80
Y4	31,43	0,72
Y5	62,28	1,13
Y6	1,132	0,01
Y7	67,6	0,0
Y8	1627,0	85,29
Y9	3153,46	73,69
Y10	503,19	4,09

Tabela 6.4.2 - Valores ótimos obtidos para as funções das médias e variabilidade das características de qualidade - Método proposto por Caten (1995)

Característica de qualidade	Valor ótimo para a média	Valor ótimo para o desvio-padrão
Y1	7,66	0,242
Y2	72,10	1,208
Y3	209,14	4,60
Y4	31,49	0,74
Y5	62,49	1,057
Y6	1,134	0,01
Y7	67,57	0,0
Y8	1638,152	87,31
Y9	3138,62	77,02
Y10	501,54	3,84

O ponto ótimo encontrado por Caten (1995) foi :  $X = (-0,645; 0,475; 0,955; 1; -1)$ .

As perdas quadráticas associadas aos pontos ótimos de cada uma das características de qualidade estão na tabela 6.4.3:

Tabela 6.4.3 - Perdas quadráticas associadas aos pontos ótimos obtidos pelos dois métodos

Característica de qualidade	Perdas	
	Caten	Guedes
Y1	k(0,764)	k(0,931)
Y2	k(167,87)	k(130,64)
Y3	k(43760,06)	k(36203,59)
Y4	k(2,78)	k(2,577)
Y5	k(1,36)	k(1,353)
Y6	k(0,00012)	k(0,00011)
Y7	k(4565,705)	k(4569,769)
Y8	k(1,96x10 <sup>-6</sup> )	k(1,9x10 <sup>-6</sup> )
Y9	k(1,02x10 <sup>-7</sup> )	k(1,01x10 <sup>-7</sup> )
Y10	k(3,98x10 <sup>-6</sup> )	k(3,95x10 <sup>-6</sup> )

\*  $k = A/\Delta^2$ .

Comparando os valores apresentados nas tabelas 6.4.1, 6.4.2 e 6.4.3, não se pode afirmar que um método seja melhor que o outro, sem o auxílio de um especialista em composição química e custos associados, porém, o procedimento aqui aplicado permite que uma análise de sensibilidade seja realizada. A tabela 6.4.4 apresenta os resultados da análise de sensibilidade realizada para este caso.

Antes de se iniciar a análise de sensibilidade, observou-se que os valores das funções que representam a variabilidade, tendem a se tornar menores, quando as suas respectivas funções da média se aproximam de seus valores nominais. Isto ocorre devido ao fato de serem funções de poucos fatores e também, porque foram modeladas através do resíduo do modelo que representa a média. Por isso, a análise foi realizada otimizando-se somente as funções, que representam as médias e, a cada iteração os valores da variabilidade era observado.

A análise de sensibilidade foi iniciada aproximando-se as funções, que representam características de qualidade do tipo nominal é melhor, aos seus valores nominais. O resultado está na tabela a 6.4.4.

Tabela 6.4.4- Resultado da análise de sensibilidade

Característica	Média	Desvio-padrão	Perda
Y1	7,7	0,34	k(0,759)
Y2	74,0	1,68	k(123,8)
Y3	190,4	6,01	k(36304,7)
Y4	31,5	0,70	k(2,74)
Y5	61,95	1,55	k(2,43)
Y6	1,13	0,009	k(9,53x10 <sup>-5</sup> )
Y7	69,40	0	k(4817,52)
Y8	1640,0	83,13	k(1,78x10 <sup>-6</sup> )
Y9	3219,36	60,84	k(9,66x10 <sup>-8</sup> )
Y10	505,42	7,14	k(3,92x10 <sup>-6</sup> )
Ponto Ótimo	(-0,844; 0,315;	0,617; 0,692;	-1)

As vantagens que o procedimento multicritério apresentou, neste caso, está na possibilidade de acompanhar o crescimento da variabilidade, acompanhar o que ocorre com o valor de uma das funções, quando a outra é acrescida ou decrescida de uma unidade, observar o crescimento da perda individual de cada característica de qualidade e a possibilidade de discutir os resultados na evolução da pesquisa.

Na análise de sensibilidade, melhorar uma das funções pode levar a piorar muito outra(s). Por isso, as perdas individuais devem ser analisadas e a decisão final deverá ser tomada no conjunto.

## CAPÍTULO 7.º

# 7 - CONCLUSÃO

## 7.1 - DISCUSSÃO FINAL

Esta pesquisa apresenta um novo procedimento para obter os níveis dos fatores experimentais no planejamento de produtos e processos industriais. O objetivo principal foi obter um procedimento simples e eficiente com base em planejamentos de experimentos, modelagem das respostas e otimização em substituição às técnicas de Taguchi.

Para a realização dos objetivos propostos, a pesquisa foi dividida em três partes: Planejamentos experimentais, modelagem das respostas e otimização dos modelos de resposta.

O planejamento experimental é uma poderosa metodologia para a melhoria em qualquer indústria, seja ela grande ou pequena. Com o uso da metodologia de planejamentos experimentais, o pesquisador pode obter: as melhores características do produto, decrescer o tempo de desenvolvimento do produto, aumentar a produtividade do processo, minimizar a sensibilidade do produto para as variações diárias; obter o melhor planejamento do processo para assegurar a qualidade do produto, maximizar a razão custo-benefício do esforço experimental e entender e melhorar um processo existente. Assim sendo, os planejamentos de experimentos devem ser escolhidos cuidadosamente e conduzidos de maneira científica para se obter resultados confiáveis.

A metodologia de modelagem das respostas foi o assunto abordado a seguir. Como resposta foi considerada a média e a variância das repetições de cada corrida experimental. A modelagem da média é um assunto bastante discutido na literatura, mas a modelagem da variância é pouco discutida por apresentar algumas dificuldades. Neste trabalho, todos os aspectos da modelagem, para médias e variâncias, foram discutidos e a importância de se estimar corretamente um modelo foi ressaltada

Os procedimentos de otimização apresentados para os modelos ajustados são simples e se mostraram eficientes. Estes procedimentos foram divididos em dois tipos: os que solucionam os modelos bicritério e os que solucionam os modelos multicritério. Modelos bicritério são os modelos ajustados aos problemas em que apenas uma característica de qualidade é observada e, multicritério são os modelos ajustados aos problemas em que são observadas várias características de qualidade.

Os procedimentos de otimização bicritério e multicritério, aqui propostos, têm a vantagem, sobre os de Taguchi, de permitir que o pesquisador obtenha a combinação ótima dos níveis dos fatores, que levam a média ao seu valor nominal com variância mínima, eficientemente. Isto pode ser verificado pelos resultados das aplicações do capítulo 6. Além disso, permitem que a variância do processo e a perda associada em cada iteração seja analisada. Nestes procedimentos, o pesquisador pode analisar o crescimento da perda e da variância, quando as funções de respostas, que representam a média da característica de qualidade, se distanciam do valor nominal, seja ele finito ou não. No procedimento multicritério, o pesquisador pode utilizar o conhecimento dos técnicos e engenheiros da empresa, para determinar o montante de relaxação, fazer a análise de sensibilidade e tomar decisões. A análise de sensibilidade é realizada observando-se o comportamento das diferentes funções objetivo na vizinhança da solução ótima. Esta análise de sensibilidade responde a perguntas como: dadas duas funções objetivo  $f_{ik}$  e  $f_{ik}'$  qual é o limite superior de crescimento de  $f_{ik}$ , quando se decide decrescer  $f_{ik}'$  por uma unidade?

Os procedimentos apresentados envolvem uma exploração seqüencial das soluções. Esta exploração é guiada por uma fase de cálculos e uma fase de tomada de decisões. O processo permite ao pesquisador e equipe de engenheiros da empresa aprender a reconhecer boas soluções e a importância relativa das conflitantes funções objetivo. A otimização seqüencial aqui proposta busca o ótimo equilibrado das múltiplas funções de respostas o que leva a uma perda quadrática total mínima, porque a solução será a mais próxima possível do valor nominal de cada característica de qualidade.

Os resultados da aplicação destes procedimentos se apresentaram superiores aos de Taguchi e também a outros procedimentos encontrados na literatura.

Assim, os procedimentos propostos foram desenvolvidos com sucesso e podem ser usados para a melhoria da qualidade de produtos e/ou processos ou dos planejamentos de produção. Procedimentos completos de otimização, para a determinação dos níveis ótimos

dos fatores que minimizam as variações das características de qualidade dos produtos, enquanto busca o valor nominal especificado foram apresentados. Além disso, os planejamentos de experimentos recomendados fornecem a possibilidade de se ajustar excelentes modelos, para representar as características de qualidade, bem como planejamentos de baixo custo, quando comparados com as aplicações da metodologia de Taguchi.

## 7.2 - RECOMENDAÇÕES PARA PESQUISAS FUTURAS

Nos procedimentos para otimização dos modelos ajustados para média e variância, apresentados neste trabalho, a função utilizada para avaliação da perda foi a função perda quadrática de Taguchi. Será de grande valia se outras funções de perda fossem definidas, para serem utilizadas em conjunto com os procedimentos aqui apresentados. Porém, sem ser definida como a função objetivo a ser otimizada. Outros procedimentos utilizando comparação pareada também podem ser explorados para se comparar com os estudados.

Outra área de possíveis investigações é a análise de sensibilidade, para se estudar o comportamento de diferentes funções nas vizinhanças da solução ótima para o problema  $P_j$  do algoritmo multicritério. Por exemplo, ao problema  $P_j$  poderia ser adicionada uma expressão que representaria os objetivos, ou seja transformar o problema de forma que seja possível encontrar o limite inferior de decrescimento e o limite superior de crescimento de uma função, quando outras são decrescidas de uma unidade. Isto possibilitará que o pesquisador controle sua variabilidade e, portanto, a perda que estará associada a ela. Pode-se pensar também em incluir uma função de perda da má qualidade no procedimento o que auxiliaria na tomada de decisões.

Outra sugestão, é a utilização de lógica difusa ou algoritmos genéticos em conjunto com os procedimentos propostos. A idéia de utilizar lógica difusa em conjunto com a busca seqüencial, para evitar a fase de análise de sensibilidade.

A implementação computacional dos procedimentos de otimização aqui desenvolvidos não é difícil e será de grande valia.

## **APÊNDICES**

## 1- APÊNDICE A

### COMPARAÇÃO DE MODELOS

Muitos critérios têm sido sugeridos para a comparação de diferentes modelos. Os mais conhecidos são:

$\sigma^2$  - quadrado médio do resíduo;

$R^2$  - quadrado do coeficiente de correlação múltipla;

$R_a^2$  -  $R^2$  ajustado.

Entre dois modelos com o mesmo número de variáveis, o modelo com o menor valor de  $s^2$  ou, equivalentemente, o mais alto  $R^2$  é o preferido.

Entre dois modelos contendo diferentes números de variáveis, o modelo com o mais alto  $R_a^2$  é o preferido.

A escolha do modelo com base em  $s^2$ ,  $R^2$  e  $R_a^2$  foi recomendada por Chatterjee e Price (1977), Seber(1977), Draper e Smith (1981) e Chatterjee e Hadi (1987).

Chatterjee e Hadi sugeriram, também, o uso do critério  $C_p$  de Mallows. Esta é uma das estatísticas utilizadas nos programas SAS e MINITAB para a comparação de modelos.

## 2- APÊNDICE B

### TRANSFORMAÇÕES NA VARIÁVEL DEPENDENTE

Dado um conjunto de dados, existem muitas indicações se uma transformação poderá ser útil. Uma indicação é se a resposta é não negativa. Por exemplo, tempo até que um evento ocorra e a medida de uma característica de qualidade, são ambos não negativos e não podem seguir uma distribuição normal. Para estes casos é, freqüentemente, recomendado o log. da resposta. Assim, a resposta transformada terá aproximadamente uma distribuição normal e a resposta original terá uma distribuição lognormal. É claro que, se todos os valores da resposta são muito diferentes de zero e a dispersão das observações é relativamente pequena, a transformação terá pequeno efeito. Por outro lado, se a razão entre a maior observação e a menor for uma potência de dez, é muito pouco provável que um modelo aditivo para a variância seja apropriado. Sob tais condições, uma transformação é freqüentemente recomendada.

A combinação de normalidade dos erros e variância constante implica que, após transformações, os dados não deverão conter qualquer ponto fora de controle (outliers). A presença de tais pontos ou de sistemáticas tendências das suposições nos resíduos, algumas vezes, é uma indicação para a necessidade de uma transformação. Se, apenas alguns pontos estão sugerindo a necessidade de uma transformação, pode ser que esta evidência seja sem razão. Isto é, esta evidência seja apenas a influência destes poucos pontos fora de controle. Atkinson (1985) desenvolveu gráficos para diagnosticar a influência de observações individuais sobre a evidência de transformações.

O que se espera de uma transformação bem sucedida é que os três requisitos de homogeneidade das variâncias, aditividade da estrutura e normalidade dos erros sejam todos satisfeitos.

Quando uma transformação, na variável dependente, é realizada, o objetivo é proporcionar ao modelo a capacidade de satisfazer as suposições de homogeneidade das variâncias, aditividade e normalidade dos erros. Um método geral, o qual utiliza inferência estatística padrão, foi introduzido por Box e Cox (1964). Este método considera uma família de transformações potencias. O objetivo é empregar o método de

máxima verossimilhança, para estimar o parâmetro de transformação,  $\lambda$ , no mesmo tempo em que os parâmetros,  $\beta$ , são estimados. Os passos necessários, segundo Box e Cox, são os seguintes:

i) Calcular a média geométrica,  $MG(Y)$ , de todos os dados:

$$\ln MG(Y) = n^{-1} \sum \ln Y.$$

ii) Para uma série de valores apropriados de  $\lambda$ , calcular os valores transformados de  $Y^{(\lambda)}$  através da fórmula:

$$Y^{(\lambda)} = \begin{cases} (Y^\lambda - 1) / (\lambda (MG(Y))^{\lambda-1}), & \text{se } \lambda \neq 0 \\ MG(\lambda) \ln Y, & \text{se } \lambda = 0 \end{cases}$$

iii) Ajustar um modelo parcimonioso, se existem  $k$  fatores experimentais,

$$f(X, \beta) = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i X_i$$

para  $Y^{(\lambda)}$ , pelo método dos mínimos quadrados. Calcular o quadrado médio do resíduo  $S(\lambda)$  para cada valor de  $\lambda$ .

iv) Fazer o gráfico  $\ln S(\lambda)$  vs  $\lambda$ . O valor de  $\lambda$  que produzir o menor  $\ln S(\lambda)$  e, conseqüentemente, o menor  $S(\lambda)$ , é o valor de máxima verossimilhança de  $\lambda$ .

v) Um intervalo apropriado de  $100(1-\alpha)\%$  de confiança para  $\lambda$  é dado pela determinação gráfica dos dois valores de  $\lambda$  para os quais

$$\ln S(\lambda) - \ln S(\hat{\lambda}) = \chi_\alpha^2(1) / v_r,$$

onde  $v_r$  é o número de graus de liberdade do resíduo, e  $\chi_\alpha^2(1)$  é o valor superior de  $\chi_\alpha^2$  para o ponto de significância  $\alpha$  com 1 grau de liberdade.

### 3 -APÊNDICE C

#### DETECÇÃO DAS OBSERVAÇÕES INFLUENTES E "OUTLIERS"

Os métodos para diagnóstico das observações influentes podem ser classificados em dois tipos:

- i) procedimento de omissão;
- ii) procedimento de diferenciação.

O procedimento de omissão examina como as várias quantidades envolvidas na análise de regressão dos dados mudam, quando algumas das observações são omitidas. O procedimento de diferenciação examina os vários resultados da regressão com respeito a certos parâmetros do modelo. Todos estes métodos podem ser encontrados no livro de Chatterjee e Hadi (1988).

Os gráficos de resíduos vs  $X_i$  podem ser utilizados para detectar observações influentes. Outra forma é inspecionar as distâncias Euclidianas entre os fatores e o centro do espaço dos fatores. Quanto maior for esta distância, maior será o potencial para influenciar os resultados da regressão.

As observações "outliers" são detectadas pela análise dos resíduos. Se existem, no conjunto de dados, observações que não se ajustam ao modelo, várias são as possibilidades:

- a) Nada de anormal aconteceu na realização do experimento. Isto é, os valores observados se ajustam ao modelo, mas os resíduos associados são muito grande, e podem ocorrer desvios aleatórios.
  
- b) Após rigorosa investigação das condições em que os dados foram coletados, se o que motivou o problema foi, por exemplo, uma falha elétrica, uma falha no instrumento de medida ou o primeiro dia de um operador, a eliminação destas observações, para a estimação do modelo de regressão, pode ser justificada, desde que o processo para a obtenção destas observações realmente tenha sido diferente do resto das observações.

c) No caso anterior, as razões não foram encontradas, aqui, novamente, as observações "outliers" podem ser eliminadas para a estimação dos parâmetros.

d) Nada de excepcional aconteceu. Entretanto, o modelo para Y de uma dada combinação dos fatores não se ajusta à reta ou ao plano que descreve esta relação. Este caso pode ser o mais importante na pesquisa, pois isso pode representar uma informação nova ou inesperada.

Para uma completa análise e estatísticas para o problema de "outliers" ver Weisberg (1980), Rawlings (1988), Chatterjee e Hadi (1988) e Barnett e Lewis (1978).

## FONTES BIBLIOGRÁFICAS

- ABDUL-NOUR, G. On some factors affecting the just-in-time production system output variability: a simulation study using Taguchi techniques. **Computers and Industrial Engineering**, v. 25, n. 1-4, p. 461-464, 1993.
- ADDELMAN, S. Symmetrical and asymmetrical fractional factorial plans. **Technometrics**, v. 4, n. 1, p. 47-59, 1962.
- \_\_\_\_\_. Orthogonal main-effect plans for asymmetrical factorial experiments. **Technometrics**, v. 4, n. 1, p. 47-59, 1962.
- ADAMCZYK, B. *et al.* Global optimization of stochastic multivariable functions. In: *Proceedings of the American Control Conference, San Francisco, California, 1983.*
- ADAMS, B. M.; WOODALL, W. H. An analysis of Taguchi's on-line process-control procedure under a random-walk model. **Technometrics**, v.31, p. 401-413, 1989.
- ANAND, K. N. Improving paraffin wax yield through process optimization using Taguchi's method of experimentation. **Quality Engineering**, v.6, n.1, p. 39-56, 1993-1994.
- ATKINSON, A. C. *et al.* D-optimum designs for heteroscedastic linear models. **Journal of the American Statistical Association**, v.90, n.429, p. 204-211, 1995.
- ATKINSON, A. C. **Optimum experimental designs**. Oxford : Clarendon Press, 1992.
- \_\_\_\_\_. **Plots, transformations and regression**. Oxford : Clarendon, 1985.
- BARKER, T. B. Quality engineering by design : Taguchi's philosophy. **Quality Progress**, Dec., p. 32-42, 1986.
- BAGCHI, T. P.; KUMAR, M. R. Multiple-criteria robust design using constrained optimization. **Journal of Design and Manufacturing**, v.4, p.21-30, 1994.
- BAGCHI, T. P.; TEMPLETON, J. G. C. Multiple-criteria robust design of electronic devices. **Journal of Electronics Manufacturing**, v. 3, p. 31-38, 1993.
- BARTLETT, M. S. The use of transformations. **Biometrics**, v.3, p.39-52, 1947.
- BENAYOUN, R. *et al.* Linear programming with multiple objective functions: step method (stem). **Mathematical Programming**, v. 1, p. 366-375, 1971.

- BENTON, W. C. Statistical process control and the Taguchi methods: a comparative evaluation. **International Journal of Production Research**, v. 29, n. 9, p. 1761-1770, 1991.
- BERNARDIN, A. M. **Delineamento de experimentos utilizando as técnicas de Taguchi para formulação de massa cerâmica**. Santa Catarina, 1994, 95 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) Curso de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina.
- BOJONOV, B. D. **Spline functions and multivariate interpolations**. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1993.
- BOX, G. Signal-to-noise ratios, performance criteria, and transformations. **Technometrics**, v. 30, p. 1-40, 1988.
- BOX, G. *et al.* On the experimental attainment of optimum conditions. **Journal of the Royal Statistical Society**, Ser. B, v.13, p.1-45, 1951.
- BOX, G. E. P.; TIDWELL, P. W. Transformations of the independent variables. **Technometrics**, v. 4, n. 4, p. 531-549, 1962.
- BOX, G. E. P.; COX, D. R. An analysis of transformations. **Journal of the royal Statistical Society**, Serie B, v. 26, n. 2, p. 244-252, 1964.
- BOX, G. *et al.* Correcting inhomogeneity of variance with power transformation weighting. **Technometrics**, v. 16, n. 3, p. 385-389, 1974.
- BOX, G. *et al.* **Statistical for experiments**. New York : John Wiley, 1978.
- BOX, G.; MEYER, R. D. Dispersion effects from fractional designs, **Technometrics**, v.28, p. 19-27, 1986.
- BOX, G.; FUNG, C. A. Studies in quality improvement : minimizing transmitted variation by parameter design. Madison: University of Wisconsin-Madison. Center for Quality and Productivity improvement, 1986. (Report No. 8).
- BOX, G. *et al.* **Empirical model-building and response surfaces**. New York : John Wiley, 1987.
- BOX, G. *et al.* An explanation and critique of Taguchi's contributions to quality Engineering. **Quality and Reliability International**, v. 4, p.123-131, 1988.
- BOYLES, R. The Taguchi capability index. **Journal of Quality Technology**. v.23, n.1, p.17-26, 1991.
- BUCHANAN, J. T. An experimental evaluation of interactive MCDM methods and the decision making. **Journal of Operational Research Society**, v. 45, n. 9, p. 1050-1059, 1994.

- BYRNE, D. M.; TAGUCHI, S. The Taguchi approach to parameter design. **Quality Progress**, Dec., p. 19-26, 1987.
- CARROL, R. J. *et al.* Discussão em: Signal-to-noise ratios, performance criteria, and transformations. In: BOX, G. **Technometrics**, v. 30, p. 30-31, 1988.
- CASTILLO, E. D.; MONTGOMERY, D. C. A nonlinear programming solution to the dual response problem. **Journal of Quality Technology**, v. 25, n. 3, p. 199-204, 1993.
- CATEN, C. S. **Método de otimização de produtos e processos medidos por múltiplas características de qualidade**. Porto Alegre, 1994. Dissertação de Mestrado ( Mestre em Engenharia de Produção) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, UFRGS.
- CHAN, L. K. *et al.* A new measure of process capability:  $C_{pm}$ . **Journal of Quality Technology**, v. 20, n.3, p.162-175, 1988.
- CHANG, S. I.; SHIVPURI, R. A multiple-objective decision-making approach for assessing simultaneous improvement in die life casting quality in a die casting process. **Quality Engineering**, v. 7, n. 2, p. 371-383, 1994-95.
- CHATTERJEE, S. *et al.* **Sensitivity analysis in linear regression**. New York : John Wiley, 1988.
- COLEMAN, D. E.; MONTGOMERY, D. C. A systematic approach to planning for a designed industrial experiment. **Technometrics**, v. 35, n. 1, p. 1-27, 1993.
- CORNELL, J. A. **How to apply response surface methodology**. Milwaukee : ASQC press, 1984.
- CORNELL, J. A. **How to run mixture experiments for product quality**. Milwaukee : ASQC press, 1983.
- CROCKER, D. C. **How to use regression analysis in quality control**. Milwaukee : ASQC press, 1985.
- DAVIDIAN, M. *et al.* Variance function estimation. **Journal of American Statistical Association**, v.82, n. 400, 1079-1091, 1987.
- DANIEL, C. Use of half-normal plots in interpreting factorial two-level experiments. **Technometrics**, v. 1, p. 311-341, 1959.
- DE BOOR, C. Good approximation by splines with variable knots. In: MEIR, A.; SHARMA, A. (ed). Proceedings os Symposium at the University of Alberta, Edmotnon, 1972.

- BERNARDIN, A. M. **Delineamento de experimentos utilizando as técnicas de Taguchi para formulação de massa cerâmica.** Santa Catarina, 1994. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina.
- DIERCKX, P. **Curve and surface fitting with splines.** Oxford : Oxford Science Publications, 1993.
- DOLBY, J. L. A quick method for choosing a transformation. **Technometrics**, v.5, p.317-325, 1963.
- DONOHUE, J. M. *et al.* Simulation designs and correlation induction for reducing second-order bias in first-order response surfaces. **Operations Research**, v. 41, n. 5, p. 880-902, 1993.
- DOOLEY, K. J. *et al.* Identification of robust scheduling heuristics: application of Taguchi methods in simulation studies. **Computers Industrial Engineering**, v. 22, n. 4, p. 359-368, 1992.
- DRAPER, N. R. *et al.* **Applied regression analysis.** New York : John Wiley, 1966.
- EATON, W. *et al.* Using circuit simulation tools with Taguchi design of experiment techniques to optimize the performance of a digital half-adder integrated circuit. **Quality Engineering**, v. 5, n. 4, p. 589-600, 1993.
- ELIAN, S. N. **Análise de regressão.** São Paulo : USP - Instituto de matemática e estatística, 1988.
- ELSAYED, E. A.; CHEN, A. Optimal levels of process parameters for products with multiple characteristics. **International Journal of Production Research**, v. 31, n. 5, p. 1117-1132, 1993.
- ENGEL, J. Modelling variation in industrial experiments. **Applied Statistical**, v. 41, n. 3, p. 579-593, 1992.
- ENGLISH, J. R. *et al.* Process capability analysis - a robustness study. **International Journal of the Production Research**. v.31, n.7, p. 1621-1635, 1993.
- ESWARAN, P. K. *et al.* Algorithms for nonlinear integer bicriterion problems. **Journal of Optimization Theory and Applications**, v. 63, n. 2, p. 261-279, 1989.
- FATHI, Y. A nonlinear programming approach to the parameter design problem. **European Journal of Operational Research**. v.53, p. 371-381, 1991.
- FEARN, T. Box-Cox transformations and the Taguchi method: an alternative analysis of a Taguchi case study. **Applied Statistical**, v. 41, n. 3, p. 553-559, 1992.

- FISHBURN, P. C.; KEENEY, R. L. Generalized utility independence and some implications. **Operational Research**, v. 23, n. 5, p. 928-939, 1975.
- FISHBURN, P. C. Utility as an additive set function. **Mathematics of Operations Research**, v. 17, n. 4, p. 910-921, 1992.
- FREEMAN, J. M. Estimating quality costs. **Journal of the Operational Research Society**, v. 46, p. 675-686, 1995.
- FRENCH, S. Uncertainty and imprecision: modelling and analysis. **Journal of the Operational Research Society**. v. 46, n. 1, p. 70-79, 1995.
- FREUND, R. J.; LITTEL, R. C. **SAS System for regression**. Cary : SAS Institute, 1991.
- FUNG, C. A.. **Statistical topics in off-line quality control**. Madison, 1986. Tese (Doutor em Filosofia (Estatística)) - University of Wisconsin-Madison.
- GILMORE, P. *et al.* An implicit filtering algorithm for optimization of functions with many local minima. **Siam Journal of Optimization**, v. 5, n. 2, p. 269-285, 1995.
- GREVILLE, T. N. E. **Data fitting by spline functions**. Madison: University of Wisconsin - Madison. Mathematics Research Center, 1968. (Report, n. 893)
- GROVE, D. M.; DAVIS, T. P. Taguchi's idle column method. **Technometrics**, v. 33, n. 3, p. 349-353, 1991.
- GUNTER, B. A perspective on the Taguchi methods. **Quality Progress**, Jun, p. 44-51, 1987.
- GUNTER, R. J. *et al.* Discussão em: Signal-to-noise ratios, performance criteria, and transformations. In: BOX, G. **Technometrics**, v. 30, p. 30-31, 1988.
- HAMADA, M. *et al.* Should accumulation analysis and related methods be used for industrial experiments? In: Nair, V. Testing in industrial experiments with ordered categorical data. **Technometrics**, v.28, p. 302-306, 1986.
- HANSEN, J. L. *et al.* What is the capability of your measurement process?. In: HARE, L. B. Perspectives on the Taguchi controversy. **ASQC quality congress transactions**. San Francisco. p. 381-384, 1990.
- HOOPER, P. M. Iterative weighted least squares estimation in heteroscedastic linear models. **Journal of the American Statistical Association**, v. 88. n. 421, p.179-184, 1993.
- HUNTER, J. S. Statistical design applied to product design. **Journal of Quality Technology**, v. 17, n. 4, p. 210-221, 1985.
- ISRAELI, A. Cutting quality costs. **Quality Progress**, Jan., p. 46-48, 1991.

- IVANQUI, I. L. *et al.* Verificar a convexidade e ou semi-convexidade de uma função real via programação não linear. A ser publicado.
- JAN, R.; CHERN, M. Nonlinear integer bilevel programming. **European Journal of Operational Research**, v. 72, p. 574-587, 1994.
- JOHN, P. W. M. **Statistical methods in engineering and quality assurance**. New York : John Wiley, 1990.
- JOHNSON, T. The relationship of  $C_{pm}$  to squared error loss. **Journal of Quality Technology**. v. 21, n.4, p. 211-215, 1992.
- KACKAR, R. N. Taguchi's quality philosophy: analysis and commentary. **Quality Progress**, Dec., p. 21-29, 1986.
- \_\_\_\_\_. Taguchi Methods. In: Wadsworth, H. M., Jr. (ed.). **Handbook of Statistical Methods of Engineers and Scientists**. 1989.
- \_\_\_\_\_. Off-Line quality control, parameter design, and the Taguchi method. **Journal of Quality technology**, v.17, n. 4, p. 176-188, 1985.
- KACKAR, R. N. *et al.* Taguchi's fixed-element arrays are fractional factorials. **Journal of Quality Technology**. v.23, n. 2, p.107-115, 1991.
- KACKAR, R. N.; SHOEMAKER, A. C. Robust design: a cost-effective method for improving manufacturing processes. **AT&Technical Journal**, v.65, p.39-50, 1986.
- KAFADAR, K. Designing experiments in research and development: four case studies. In: S. GHOSH (ed). **Statistical Design and Analysis of Industrial Experiments**. New York: Marcel Dekker, 1990. p. 35-72.
- KANE, V. E. Process capability indices. **Journal of Quality Technology**, v.18, v.1, p. 41-52, 1986.
- KARAIIVANOVA, J. *et al.* A reference direction approach to multiple objective integer linear programming. **European Journal of Operational Research**, v. 81, p. 176-187, 1995.
- KAVURI, S. N. *et al.* Combining pattern classification and assumption-based techniques for process ault diagnosis. **Computers Chem. Engng.**, v. 16, n. 4, p. 299-312, 1992.
- KLEIN, G. *et al.* Interactive multiobjective optimization under uncertainty. **Management Science**, v. 36, n. 1, p. 58-75, 1990.
- KHURI, A. I. Analysis of multiresponse experiments : a review. In: S. GHOSH (ed). **Statistical Design and Analysis of Industrial Experiments**. New York : Marcel Dekker, 1990. p. 231-246.

- KHURY, A. I.; CORNEL, J. A. **Response surface**. Milwaukee : ASQC Quality Press, 1987.
- KOLLI, R. P.; COOK, H. E. Strategic quality deployment. **Manufacturing Review**, v.7, n. 2, p. 148-163, 1994.
- KUMAR, V. *et al.* Symmetric duality for minimax nonlinear mixed integer programming. **European Journal of Operational Research**, v. 80, p. 425-430, 1995.
- LEE, N. S. *et al.* An expert system for experimental design in off-line quality control. **Experts Systems**, v. 6, n. 4, p. 238-249, 1989.
- LEON, R. V. *et al.* Performance measures independent of adjustment. **Technometrics**, v.29, p.253-285, 1987.
- LIN, D. K. J.; TU, W. Dual response surface optimization. **Journal of Quality Technology**, v. 27, n. 1, p. 34-39, 1995.
- LIN, P. K. H. *et al.* Using Taguchi methods in quality engineering. **Quality Progress**, Sept., p. 55-59, 1990.
- LITTELL, R. C. *et al.* **SAS system for linear models**. Cary : SAS Institute, 1991.
- LOGOTHETIS, N. *et al.* **Quality through design**. Oxford : Clarendon Press , 1989.
- LOGOTHETIS, N. Box-Cox transformations and the Taguchi method. **Applied Statistical**. v. 39, n. 1, p. 31-48, 1990.
- LUCAS, J. M. Comentario em: Off line quality control parameter design, and Taguchi method. In: KACKAR, R. N. **Journal of Quality Technology**, v. 17, p.195-197, 1985.
- LYNCH, R. O. Minimum detectable effects for  $2^{k-p}$  experimental plans. **Journal of Quality Technology**, v. 25, n.1, p. 12-17, 1993.
- MAGHSOODLOO, S. The exact relation of Taguchi's signal-to-noise ratio to his quality loss function. **Journal of Quality Technology**, v. 22, n. 1, 1990.
- McCULLAGH, P; NELDER J. A. **Generalized linear models**. London : Chapman and Hill, 1983.
- MELLOY, B. J. *et al.* Consequences of using the  $C_{pk}$  index to estimate the proportion of non-conforming items. **International Journal of Production Research**, v. 30, n. 10, p. 2253-2263, 1992.
- MESENBRINK, P. *et al.* Characterization and optimization of a wave-soldering process. **Journal of the american Statistical Association**, v. 89, no. 428, p. 1209-1217, 1994.

- MICHELENA, N. F.; AGOGINO, A. M. Formal solution of n-type Taguchi parameter design problems with stochastic noise factors. **Design Theory and Methodology**, v. 31, p. 13-20, 1991.
- MILLER, A. *et al.* Are large Taguchi-style experiments necessary? a reanalysis of gear and pinion data. **Quality Engineering**, v. 6, n. 1, p. 21-37, 1993-94.
- MONTGOMERY, D. C. **Design and analysis of experiments**. New York : John Wiley, 1991.
- MONTGOMERY, D. C. **Statistical quality control**. New York : John Wiley, 1985.
- MOSKOWITZ, H. *et al.* Bicriterion model for acceptance sampling. In: ZANAKIS, S. H.; RUSTAGI, J. S. (ed.). **Optimization in Statistics**. New York, v. 19, p.305-322, 1982.
- MYERS, R. H.; CARTER JR, W. H. Response surface techniques for dual response systems. **Technometrics**, v. 15, n. 2, p. 301-317, 1973.
- MYERS, R. H. **Response surface methodology**. Ann Arbor : Edwards Brothers (distributors), 1976.
- MYERS, R. H. *et al.* Response surface alternatives to the Taguchi robust parameter design approach. **The American Statistician**, v. 46, n. 2, p. 131-139, 1992.
- MYERS, R. H. *et al.* Variance dispersion proprieties of second-order response surface designs. **Journal of Quality Technology**, v. 24, n. 1, p. 1-11, 1992.
- NAIR, V. N. Taguchi's parameter design : a panel discussion. **Technometrics**, v. 34, p. 127-161, 1992.
- \_\_\_\_\_. Testing in industrial experiments with ordered categorical data. **Tehcnometrics**, v. 28, p. 283-311, 1986.
- NAIR, V. N.; PREGIBON, D. A data analysis strategy for quality engineering experiments. **AT&T Technical Journal**, v. 65, p. 73-84, 1986.
- NAIR, V. N.; PREGIBON, D. Analyzing dispersion effects from replicated factorial experiments. **Technometrics**, v. 30, n.3, p. 247-256, 1988.
- NARULA, S. C. An interactive algorithm for solving multiple objective integer linear programming problems. **European Journal of Operational Research**, v. 79, p. 443-450, 1994.
- NELDER, J. A.; LEE, Y. Generalized linear models for the analysis of Taguchi-type experiments. **Applied Stochastic Models and Data Analysis**, v. 7, p. 107-120, 1991.
- OH, H. L. Variation tolerant design. **Quality : Design, Planning, and Control**. ASME, PED, v. 27, p. 137-146, 1987.

- ORAL, M.; KETTANI, O. Reformulation nonlinear combinatorial optimization problems for higher computational efficiency. **European Journal of Operational Research**, v. 58, p. 236-249, 1992.
- OTTO, K. N.; ANTONSSON, E. K. Extensions to the Taguchi method of product design. **Journal of Mechanical Design**, v. 115, p. 5-13, 1993.
- \_\_\_\_\_. Tuning parameters in engineering design. **Journal of Mechanical Design**, v. 115, p. 14-19, 1993.
- PARKINSON, A. *et al.* A general approach for robust optimal design. **Journal of Mechanical Design**, v. 115, p. 74-80, 1993.
- PEARN, W. L. *et al.* Distributional and inferential properties of process Capability Indices. **Journal of Quality Technology**, v. 24, p. 216-230, 1992.
- PHADKE, M. S. **Quality engineering using robust design**. Englewood Cliffs : P T R Prentice Hall, 1989.
- \_\_\_\_\_. Design optimization case studies. **AT&T Technical Journal**, v. 65, p. 51-68, 1986.
- \_\_\_\_\_. Quality engineering using design of experiments. In: Proceedings of the American Statistical Association, Section on Statistical Education, p. 11-20, 1982.
- PHADKE, M.; TAGUCHI, G. Selection of quality characteristics and S/N ratios for robust design. In: Conference record, Globecom 87 Meetings, **IEEE Communications Society**, p. 1002-1007, 1987.
- PIGNATIELLO JR, J. J. An overview of the strategy and tactics of Taguchi. **IEE Transactions**, v. 20, p. 247-254, 1988.
- PIGNATIELLO JR, J. J.; RAMBERG, J. S. Top ten triumphs and tragedies of Genichi Taguchi. **Quality Engineering**, v.4, n. 2, p. 211-225, 1991-92.
- PIGNATIELLO JR, J. J. Strategies for robust multiresponse quality engineering. **IEE Transactions**, v. 25, n. 3, p. 5-14, 1993.
- PLACKETT, R. L.; BURMAN, J. P. The design of optimum multifactorial experiments. **Biometrika**, v. 33, p. 305-325, 1946.
- PRASAD, U. R. *et al* Bicriterion differential games with qualitative outcomes. **Journal of Optimization Theory and Applications**, v. 69, n. 2, p. 325-341, 1991.
- RAWLINGS, J. O. **Applied regression analysis**. Pacific Grove :Wadswdrth & Brooks, 1988.

- RIBEIRO, J. L.; ALBIN, S. An objective function of multiple quality characteristics for parameter optimization experiments. Rutgers University, Department of Industrial Engineering, **IE Working Paper**, p. 93-111, 1993.
- RIBEIRO, J. L.; ELSAYED, E. A. A gradient loss function for process optimization. Rutgers University, USA, Department of Industrial Engineering, **IE Working Paper**, p. 1-23, 1993.
- RINGUEST, J. L.; GULLEDGE, T. R. An interactive multi-objective gradient search. **Operations Research Letters**, v. 12, p. 53-58, 1992.
- ROBINSON, G. K. Improving Taguchi's packaging of fractional factorial designs. **Journal of Quality Technology**, v. 23, n. 1, p. 1-11, 1993.
- ROSLUND, J. L. Evaluating management objectives with the quality loss function. **Quality Progress**, Aug., p. 45-49, 1989.
- ROUSSEEUW, P. J. *et al.* **Robust regression and outlier detection**. New York : John Wiley, 1987.
- SA, P.; EDWARDS, D. Multiple comparisons with a control response surface methodology. **Technometrics**, v. 35, n. 4, p. 436-445, 1993.
- SADAGOPAN, S.; RAVINDRAN, A.. Interactive solution of bi-criteria mathematical programs. **Naval Research Logistics Quarterly**, v. 29, n. 3, p. 443-458, 1982.
- SARTENAER, A. A class of trust region methods for nonlinear network optimization problems. **Siam J. Optimization**, v. 5, n. 2, p. 379-407, 1995.
- SHAPIRO, S. *et al.* **Statistical modeling techniques**. New York : Marcel Dekker, 1981.
- SCHMIDT, S. R. *et al.* **Understanding industrial designed experiments**. 3 ed. Colorado Springs : Air Academic Press, 1992.
- SCHMIDT, S. R. *et al.* A monte Carlo simulation study comparing effectiveness of signal-to-noise ratios and other methods for identifying dispersion effects. In: Rocky Mountain Quality Conference, p. 315-332, 1989.
- SCHRUBEN, L.W. *et al.* Variance reallocation in Taguchi's robust design framework. In: Proceedings of the 1992 Winter Simulation Conference. Ed. J.J.SWAIN, D.GOLDSMAN, R.C. CRAIN e J.R. WILSON.
- SETHI, S. P.; KUBIAK, W. Complexity of a class of nonlinear combinatorial problems related to their linear counterparts. **European Journal of Operational Research**, v. 73, p. 569-576, 1994.

- SHOEMAKER, A. C.; KACKAR, R. N. A methodology for planning experiments in robust product and process design. **Quality and Reliability Engineering International**, v. 4, p. 95-103, 1988.
- SHOEMAKER, A. C. *et al.* Economical experimentation methods for robust design. **Technometrics**, v. 33, n. 4, p. 415-426, 1991.
- SHOEMAKER, A. C. *et al.* A Methodology for planning experiments in robust and process design. **Quality and Reliability International**, v. 4, p. 95-103, 1988.
- SHOEMAKER, A. C.; TSUI, K. Response model analysis for robust design experiments. **Commun. Statist.-Simula.**, v. 22, n. 4, p. 1037-1064, 1993.
- SPRING, F. A. The  $C_{pm}$  index. **Quality Progress**, Feb., p. 57-61, 1991.
- SHUMAKER, L. L. Approximation by splines. In: Proceedings of an advanced seminar conducted by the Mathematics Research Center, United States Army, at the University of Wisconsin, Madison. New York : Academic Press, 1968.
- SNEE, R. D. Can statisticians meet the challenge of total quality? **Quality Progress**, Jan., p. 60-64, 1991.
- STANGE, P. **Algumas considerações sobre técnicas matemáticas de otimização**. Florianópolis, 1993. Monografia para concurso de professor titular. Departamento de Engenharia de Produção e Sistemas, UFSC.
- STEINBERG, D. M. *et al.* Dispersion effects in robust-design experiments with noise factors. **Journal of Quality Technology**, v. 26, n. 1, 1994.
- STEPHENS, M. P. **A comparison of robustness of Taguchi's signal-to-noise ratio with classical ANOVA for the analysis of two level factorial designs: a monte Carlo study**. Carbondale, 1991. Tese ( Ph. D). Department of Educational Psychology in the graduate School, Southern Illinois University.
- STEINBERG, D. M.; BURSZTYN, D. Dispersion effects in robust-design experiments with noise Factors. **Journal of Quality Technology**, v. 26, p. 12-20, 1994.
- STYBLINSKI, M. A. Generalized formulation of yield, variability, minimax and Taguchi circuit optimization problems. **Microelectron Reliability**, v. 34, n. 1, p. 31-37, 1994.
- SUDASNA-NA-AYUDTHYA, P. **Comparasion of response surface model and Taguchi methodology for robust design**. U-M-I Dissertation Services, 1992.
- TAGUCHI, G. **System of experimental design**. White Plains :UNIPUB:KRAUS INTERNATIONAL PUBLICATIONS, 1987.

- \_\_\_\_\_. **Taguchi on robust technology development.** New York : Asme Press, 1993.
- \_\_\_\_\_. **Introduction to quality engineering : designing quality into products and processes.** Tokyo : Asian Productivity Organization, 1986
- \_\_\_\_\_. Quality engineering in japan. **Communication in Statistics.- Theory Methodology**, v. 14, n.11, p. 2785-2801, 1985.
- TAGUCHI, G.; PHADKE, M. S. Quality engineering through design optimization. **IEEE Communications**, Nov., p. 1106-1113, 1984.
- TAGUCHI, G.; WU, Y. **Introduction to off-line quality control.** Central Japan Quality Control Association, 1985.
- TAGUCHI, G. *et al.* **Quality engineering in production systems.** New York : McGraw-Hill, 1989.
- TAI, C. Y. *et al.* An enhanced Taguchi method for optimizing SMT processes. **Journal of Eletronics Manufacturing**, v. 2, p. 91-100, 1992.
- TAYLOR, W. A. **Optimization & variation reduction in quality.** New York : McGraw-Hill, 1991.
- THOMPSON, J. R. *et al.* **Statistical process control for quality improvement.** New York : Chapman & Hall, 1993.
- TRIBUS, M.; SZONYL, G. An alternative view of the Taguchi approach. **Quality Progress**, May, p. 46-52, 1989.
- TSAI, C. Power transformations and reparameterizations in nonlinear regression models. **Technometrics**, v. 30, n. 4, p. 441-448, 1988.
- TUCK, M. G. *et al.* Response surface methodology and Taguchi: a quality improvement study from the milling industry. **Applied Statistics**, v. 42, n.4, p. 671-681, 1993.
- VASSEUR, H. *et al.* Economic analysis of quality innovation. **Manufacturing Review**, v. 6, n.4, p. 343-352, 1993.
- VASSILEV, V.; GENOVA, K. An approximate algorithm for nonlinear integer programming. **European Journal of Operational Research**, v. 74, p. 170-178, 1994.
- VINING, G. G.; MYERS, R. H. Combining Taguchi and response surface philosophies: a dual response approach. **Journal of Quality Technology**, v. 22, n. 1, p. 38-45, 1990.
- YUM, B.; KO, S. On parameter design optimization procedures. **Quality and Reliability Engineering International**, v. 7, p.39-46, 1991.

WALKER, J. An interactive method as an aid in solving bicriterion mathematical programming problems. **Journal of the Operational Research Society**, v. 29, n. 9, p. 915-922, 1978.

WEISBERG, S. **Applied linear regression**. New York : John Wiley, 1980.

WELCH, W. J. *et al.* Computer experiments for quality control by parameter design. **Journal of Quality Technology**, v. 22, n. 1, p.15-22, 1990.

WU, Y.(ed) **Taguchi methods** : case studies from the U.S. and Europe. Dearborn : ASI Press, 1989.