



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA.
ENGENHARIA DE PRODUÇÃO - Pesquisa Operacional

UMA AVALIAÇÃO COMPARATIVA DE MÉTODOS DE SOLUÇÃO DE
PROBLEMA DE DECISÃO MULTI-OBJETIVO

Sílvia Martini de Holanda Janesch



0.211.026-2

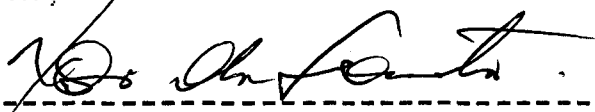
UFSC-BU

Dezembro/ 92

UMA AVALIAÇÃO COMPARATIVA DE MÉTODOS DE SOLUÇÃO DE PROBLEMAS
DE DECISÃO MULTI-OBJETIVO

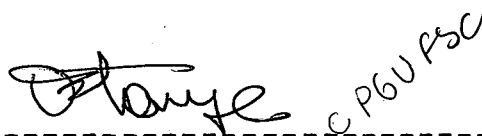
Sílvia Martini de Holanda Janesch

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
MESTRE EM ENGENHARIA
ESPECIALIDADE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO E APROVADA EM SUA FORMA FINAL
PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO



Prof. Neri dos Santos, Dr. Ing.
Coordenador

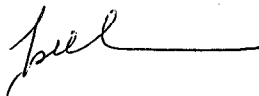
Banca Examinadora:

 C.P.G.U. P.S.C.

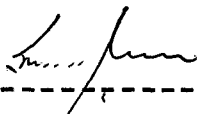
Prof. Plínio Stange, Dr. Ing.
Orientador/Presidente



Prof. Edgar Augusto Lanzer, PhD



Prof.^a Ingerborg Sell, Dr. rer.nat.



Prof. Sérgio F. Mayerle, M. Sc.

Ao meu esposo.

A G R A D E C I M E N T O S

- Ao prof. Plínio Stange, pela sua orientação, dedicação e incentivo durante a elaboração deste trabalho.
- A CAPES, pelo apoio financeiro.

S U M Á R I O

Introdução	1
Capítulo I - Preliminares	4
Capítulo II - Descrição dos Métodos	9
2.1- Método de Zions e Wallenius	9
2.2- Método de Zimmermann	23
2.3- Propostas apresentas por Stange	30
Capítulo III - Exemplos	36
Capítulo IV - Análise Comparativa dos Métodos	106
Capítulo V - Conclusões e Sugestões	112
Apêndice A	115
Apêndice B	116
Bibliografia	121

R E S U M O

O objetivo deste trabalho é fazer uma avaliação comparativa dos métodos de Zionts e Wallenius, de Zimmermann e das propostas de Stange para resolver problemas de programação multi-objetivo, apresentando as vantagens e desvantagens de cada método e de cada proposta. A análise será feita para verificar se as soluções de um problema de programação linear multi-objetivo resolvido por cada um dos métodos e propostas, são significativamente diferentes.

Os objetivos serão alcançados pelo caminho seguinte:

- a) Comparar as soluções de vários problema de programação linear multi-objetivo, obtidas pelos métodos de Zimmermann, de Zionts e Wallenius e pelas propostas A e B de Stange, utilizando software desenvolvido para este fim.
- b) Analisar a estrutura do algoritmo de cada método e de cada proposta, observando critérios específicos.

A análise apresentará a versatilidade de cada algoritmo.

A B S T R A C T

The aim of this work is to analyse the comparison among the methods of Zions-Wallenius and of Zimmermann and from de proposal of Stange to solve multiple objective programming problems giving advantages and disadvantages of each method proposed. This analysis shall be done by verifying, if the solutions of problem a of linear programming multiple objective solved for each of the method proposed are significantly different.

The aims shall be reached by different approaches:

- 1) To compare the solutions of different problem of multiple objective linear programming obtained by the methods of Zimmermann, of Zions-Wallenius and proposed by Stange using computer programmes;
- 2) To analyse the algorithmic structure of each method and each proposal observing special criterion.

The analyse shall present the versality of each algorithm.

I N T R O D U Ç Ã O

Problemas de decisão consistem na seleção de um conjunto de alternativas que possibilite a escolha da melhor em cada situação. O processo raramente é simples e, em muitos casos, escolher a melhor alternativa envolve avaliação de múltiplos objetivos, que podem ser conflitantes. A presença dos conflitos é verificada quando, ao melhorar o desempenho de um aspecto do problema, piora-se outro. Em geral, esses conflitos são intrínsecos ao problema, não sendo possível considerá-los separadamente.

A Programação Multi-Objetivo (PMO), se preocupa com problemas nos quais vários objetivos conflitantes devem ser otimizados simultaneamente em um domínio compacto. As teorias e algoritmos para otimização multi-objetivo, inspecionam principalmente as soluções eficientes (soluções que não podem ser melhoradas em um objetivo sem perda em outros).

Exemplos de aplicação de PMO podem ser vistos em várias áreas, por exemplo: Engenharia Florestal, Engenharia Civil, Organização Industrial, Setor Público, Serviços Industriais, e outras.

Dentro da Engenharia Florestal podem aparecer problemas nos quais deseja-se otimizar simultaneamente objetivos como: aumentar a receita com recursos da extração da madeira; melhorar a qualidade da água potável distribuída à população; proteger a vida selvagem; preservar a beleza natural; aumentar as possibilidades de recreação, etc. Na Engenharia Civil, pode-se desejar otimizar simultaneamente segurança, resistência, estabilidade, custo e eficiência. Na

organização industrial, pode-se estar interessado em atender conjuntamente os departamentos Econômico (minimizando o custo), Controle de Qualidade (minimizando as perdas), Controle de Produção (maximizando a produtividade) e Departamento Pessoal (maximizando o grau de satisfação dos empregados).

Muitos problemas reais envolvem situações conflitantes e a PMO apresenta a vantagem de, muitas vezes, poder representar matematicamente tais situações. Portanto verifica-se a necessidade de uma técnica de solução concisa para problemas de PMO.

Existem muitos métodos para resolver problemas de programação multi-objetivo, vários destes desenvolvidos nas últimas décadas como por exemplo: Belenson e Kapur (1973), Haimes e Hall (1976), Zionts e Wallenius (1976-1983) Raff e Zileny (1980), Hwang (1980), Evan (1984), Zimmermann (1984), Bare e Mendoza (1988) e Stange (1988).

Os três métodos de aproximações mais conhecidos, segundo Zimmermann, são:

1. A aproximação da função utilidade [Keeney, Raiffa 1976];
2. Programação Objetiva (Goal Programming) [Charnes, Cooper 1961];
3. Aproximações interativas [Dyer 1973].

Os dois primeiros métodos supõem que o tomador de decisão possa especificar sua função preferida como combinação das funções objetivo individuais, ou como combinação das funções distância (distância entre as funções objetivo individuais e uma solução ideal). Frequentemente supõe-se que a combinação das funções objetivo seja linear. A terceira aproximação usa somente informações locais, respeitando certa ordem para chegar a uma solução de compromisso aceitável ("solução ótima").

Os métodos de aproximações iterativas são caracterizados basicamente por três passos iterativos:

a) Resolver o problema multi-objetivo baseado em algum conjunto inicial de preferências, para obter uma solução eficiente.

b) Tomador de decisão trabalha com esta solução.

c) Usar a resposta do tomador de decisão para formular um novo conjunto de preferências, resultando em um novo problema a ser resolvido.

O objetivo deste trabalho é fazer uma análise comparativa dos métodos de Zionts e Wallenius (ZW) (1976), Zimmermann (ZM) (1984) e as propostas apresentadas por Stange (1988) no XI CNMAC. O primeiro método utiliza a teoria de aproximações iterativas. O segundo baseia-se em teoria difusa e, as duas últimas se propõem a resolver o problema multi-objetivo transformando-o em um mono-objetivo. A análise será feita para verificar se as soluções de um PPLMO, resolvido por cada um dos métodos e propostas, são significativamente diferentes. Pretende-se também analisar estas diferenças, se existirem, e mostrar as vantagens e desvantagens de cada método e de cada proposta.

No capítulo I são apresentados o problema de programação linear multi-objetivo e algumas definições essenciais. No capítulo II são feitas a descrição dos métodos e a apresentação dos algoritmos correspondentes. No capítulo III são apresentados exemplos. No capítulo IV são mostrados os critérios utilizados para fazer a análise comparativa e, são listados os resultados da análise. No capítulo V encontram-se as conclusões da avaliação comparativa e, algumas sugestões para estudos futuros.

CAPÍTULO I - PRELIMINARES

Neste capítulo inicial, encontram-se os conceitos e resultados que possibilitam a leitura do trabalho.

Programação Linear (Mono-Objetivo)

A tarefa da programação linear mono-objetivo consiste na otimização de uma função linear, denominada função objetivo, respeitando-se um sistema linear de igualdades ou desigualdades, que recebem o nome de restrições do modelo.

Um problema de programação linear (PPL) envolvendo n variáveis de decisão e m restrições, é descrito da seguinte forma:

$$\max \quad f(x) \quad (1)$$

$$\text{s.a} \quad Ax \leq b \quad (2)$$

$$x \geq 0 \quad (3)$$

onde:

f é uma função linear, isto é,

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n, \quad c_i \in \mathbb{R}, \quad i=1, \dots, n;$$

$$A \in M_{m \times n}(\mathbb{R});$$

$$b \in \mathbb{R}^m, \quad b^t = (b_1, b_2, \dots, b_m);$$

$$x \in \mathbb{R}^n, \quad x^t = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

As restrições (2) e (3) do problema, determinam uma região chamada de conjunto de soluções viáveis. Dentre as soluções viáveis,

uma que maximize a função objetivo denomina-se solução ótima. O objetivo da programação linear consiste na determinação de uma solução ótima (x^*). Um PPL pode ter uma infinidade de soluções ótimas.

Definição 1: Um PPL encontra-se na forma padrão quando estiver formulado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \min \quad & -f(x) \\ \text{s.a} \quad & A'x' = b \\ & x' \geq 0. \end{aligned}$$

Programação Linear Multi-Objetivo

Um problema de programação linear multi-objetivo (PPLMO) envolvendo p objetivos ($p \geq 2$), n variáveis de decisão e m restrições, pode ser expresso como:

$$\begin{aligned} \max \quad & f_1(x) = c_1 x = u_1 \\ \max \quad & f_2(x) = c_2 x = u_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & f_p(x) = c_p x = u_p \\ \text{s.a} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \quad \text{ou} \quad x \in X = \{x / Ax \leq b \text{ e } x \geq 0\} \end{aligned}$$

onde:

$$c_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, 2, \dots, p;$$

$$x \in \mathbb{R}^n, x^t = (x_1, x_2, \dots, x_n);$$

$$A \in M_{m \times n}(\mathbb{R});$$

$$b \in \mathbb{R}^m, b^t = (b_1, b_2, \dots, b_m);$$

$$f_i \text{ é função linear, } i=1, \dots, p;$$

$$u_i \in \mathbb{R}, i=1, \dots, p.$$

Na forma matricial equivalente, tem-se

$$\begin{array}{ll} \max & Cx \\ \text{s.a} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

onde:

$$C \in M_{p \times n}(\mathbb{R});$$

$$A \in M_{m \times n}(\mathbb{R});$$

$$x \in \mathbb{R}^n, x^t = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

O problema acima também é conhecido como "vector maximum problem" (VMP).

O propósito da programação linear multi-objetivo é determinar uma solução viável $x^* \in X = \{x / Ax \leq b \text{ e } x \geq 0\}$, que maximize todas as funções objetivo simultaneamente. Em geral isto não é possível, portanto é necessário definir um novo conceito de solução ótima.

Definição 2: Uma solução de um PPLMO é eficiente se não for possível melhorar a aproximação de um objetivo, sem perda em outro. Solução

"ótima" é a melhor solução eficiente, denominada solução de compromisso ótimo ou solução de melhor compromisso. A melhor solução eficiente depende das exigências do tomador de decisão.

Matematicamente $x^* \in X = \{ x / Ax \leq b \text{ e } x \geq 0 \}$ é uma solução eficiente se não existe outra solução viável $\bar{x} \in X$ tal que

$$f_k(\bar{x}) \geq f_k(x^*) \text{ para todo } k=1,2,\dots,p \text{ e}$$

$$f_k(\bar{x}) \neq f_k(x^*) \text{ para algum } k.$$

Solução eficiente também é conhecida como não dominada, não inferior e pareto-ótima.

Teorema 1: Uma solução x^* é eficiente para um problema de programação linear multi-objetivo se, e somente se, existe um vetor

$\lambda^* \in \mathbb{R}^p$ tal que $\sum_{k=1}^p \lambda_k^* = 1$, $\lambda_k > 0$ para todo k e, x^* é uma solução para o problema de programação linear

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{k=1}^p \lambda_k^* c_k x \\ \text{s.a} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \\ & \sum_{k=1}^p \lambda_k^* = 1 \\ & \lambda_k > 0. \end{aligned}$$

O teorema 1 apresentado em [3] pag. 67, diz que uma solução eficiente é encontrada pela escolha de alguns pesos positivos λ_k^* e, pela resolução do problema de programação linear acima. Em geral há

muitas soluções eficientes, porque existem vários conjunto de pesos possíveis. Várias aproximações heurísticas têm sido dadas na literatura para obter a solução de um PPLMO, por exemplo: D. Savir (1966), R. Benayoune J. Terguy (1970), K.C. Kapur (1970), C. Maier-Rothe e M.F. Stankard (1970) .

Definição 3: Função Utilidade é uma função definida pela combinação, linear ou não linear, das funções objetivo do PPLMO.

Definição 4: Sejam $Ax=b$ um sistema de equações, $A \in M_{m \times n}$, $b=(b_1, b_2, \dots, b_m)^t \in \mathbb{R}^m$ e $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$. O sistema $Ax=b$ pode ser escrito na forma $Bx_B + Rx_R = b$ para algum par de matrizes convenientes $B, R \in M_{m \times n}$.

A matriz B é denominada de base, uma vez que os vetores coluna de B constituem uma base para o \mathbb{R}^m . As componentes de x_B e x_R são denominadas respectivamente, variáveis básicas (VB) e variáveis não básicas (VNB).

CAPÍTULO II - DESCRIÇÃO DOS MÉTODOS

2.1) Método de Zionts e Wallenius

O método de Zionts e Wallenius (ZW), é um método iterativo que requer um tomador de decisão. Em uma base interativa homem-máquina, busca-se a solução de melhor compromisso, segundo as exigências do tomador de decisão.

O método destina-se a resolver uma classe de problemas que satisfazem as seguintes exigências: todas as funções objetivo a serem maximizadas são funções côncavas; o conjunto definido pelas restrições é um conjunto convexo; a função utilidade fornecida pelo tomador de decisão é uma função linear. Em [13], os autores desenvolveram um método para resolver PPLMO considerando a função utilidade não-linear.

Brevemente: o método "escolhe" inicialmente um conjunto de pesos positivos e gera uma função objetivo composta usando estes pesos. A função objetivo composta é otimizada, produzindo soluções eficientes, variáveis básicas e variáveis não básicas. As variáveis não básicas que introduzidas na base forneçam soluções eficientes, são denominadas de variáveis eficientes. Para cada uma dessas variáveis eficientes é definido um conjunto de vetores de tradeoffs, no qual alguns objetivos são aumentados e outros reduzidos. Alguns desses vetores de tradeoffs são apresentados ao tomador de decisão, que deve determinar se cada um deles é interessante, não interessante ou indiferente. A partir de sua resposta, um novo

conjunto de pesos é construído e o processo é repetido.

A convergência para uma solução está demonstrada em [12].

O método é semelhante ao método simplex, que parte de uma solução básica viável e gera automaticamente novas soluções básicas cada vez melhores. O método de Zionts e Wallenius parte de uma solução eficiente e gera novas soluções eficientes cada vez melhores. A diferença é que o tomador de decisão escolhe uma variável não básica para entrar na base a cada iteração.

Algoritmo

Seja o PPLMO

$$\begin{aligned} \max \quad & f_i(x) = u_i, \quad i=1,2,\dots,p \\ \text{s.a} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Os passos do algoritmo que resolve este problema pelo método de ZW são:

Passo 1- Construção da Função Utilidade.

O tomador de decisão determina uma função utilidade, que é uma combinação linear das funções objetivo, $U(u_1, u_2, \dots, u_p) = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_p u_p$, e serve para responder às perguntas feitas ao tomador de decisão com respeito aos vetores de tradeoffs apresentados.

Faça NI=1. Onde NI é o contador de iterações.

Passo 2- Seleção dos Pesos Iniciais.

Escolha um conjunto de pesos arbitrários $\lambda_i \geq \varepsilon$ satisfazendo $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$, onde ε é um número real positivo suficientemente pequeno.

O conjunto inicial de pesos pode ser fornecido pelo tomador de decisão. Em [6] Fries sugere que se tomem os pesos iniciais da seguinte forma: $\lambda_i = \frac{1}{p}$ ($i = 1, \dots, p$), onde p é o número de objetivos do PPLMO.

Passo 3- Determinação da Solução Eficiente.

$$\begin{aligned} \text{Resolva} \quad & \max \sum_{i=1}^p \lambda_i f_i(x) \\ & \text{s.a. } Ax \leq b \quad (P_1) \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Caso o problema (P_1) não tenha solução pare, pois o PPLMO também não terá solução.

A solução ótima (x^*) do problema (P_1) é uma solução eficiente para o PPLMO, também conhecida como funcional-eficiente. Esta afirmação é garantida pelo teorema 1 do capítulo I.

Passo 4- Identificação das Variáveis não Básicas e Apresentação dos Tradeoffs.

Após encontrar a solução ótima do problema (P_1) , identifique as variáveis não básicas. Considere o conjunto de todas as variáveis não básicas como conjunto de partida N . Para cada variável x_j pertencente a N , deve ser associado um vetor de tradeoffs $(w_{1j}, w_{2j}, \dots, w_{pj})$, no qual w_{ij} representa o decréscimo da função

objetivo $f_i(x)$, $i=1,2,\dots,p$. Cada vetor de tradeoffs deve apresentar pelo menos um w_{ij} positivo e pelo menos um w_{ij} negativo.

Passo 5- Identificação das Variáveis Eficientes.

Para cada variável $x_k \in N$, resolva

$$\begin{aligned}
 (P_2) \quad & \min \quad \sum_{i=1}^p w_{ik} \lambda_i \\
 & \text{s.a} \quad \sum_{i=1}^p w_{ij} \lambda_i \geq 0, \quad j \in N \text{ e } j \neq k \\
 & \quad \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1 \\
 & \quad \lambda_i \geq 0, \quad i=1,2,\dots,p;
 \end{aligned}$$

Se o valor ótimo para o problema (P_2) for menor que zero, então a variável x_k é denominada variável eficiente e quando introduzida na base, conduz a pontos extremos adjacentes. Caso contrário, a variável x_k é denominada não eficiente.

Fries apresenta em [6] uma forma diferente para classificar uma variável quanto a sua eficiência. O PPL que deve ser resolvido para investigar se a VNB x_k é eficiente ou não eficiente é o seguinte:

$$\begin{aligned}
 (P_3) \quad & \min \quad \sum_{i=1}^p w_{ik} \lambda_i \\
 & \text{s.a} \quad \sum_{i=1}^p w_{ij} \lambda_i \geq 0, \quad j \in N \text{ e } j \neq k \\
 & \quad \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1 \\
 & \quad \lambda_i \geq \epsilon, \quad i=1,2,\dots,p.
 \end{aligned}$$

Se o valor ótimo para o problema (P_3) for menor ou igual a zero, então a variável x_k é denominada variável eficiente. Caso contrário, a variável x_k é denominada não eficiente.

Passo 6- Formação das Restrições e Determinação de Novos Pesos.

As variáveis são não eficientes para todos os $x_j \in N$?

Sim. Pare, pois a solução de melhor compromisso foi encontrada no passo 3 da iteração NI.

Não. Então para cada variável x_j eficiente, pergunta-se ao tomador de decisão se ele deseja, não deseja ou é indiferente ao vetor de tradeoffs associado à variável x_j , isto é, se ele deseja, não deseja ou é indiferente ao decréscimo de w_{ij} para a função objetivo $f_i(x)$, $i=1,2,\dots,p$. Para qualquer destas respostas, é criada uma restrição que servirá para restringir a escolha do novo conjunto de pesos λ_i .

É usada a função utilidade para responder às perguntas feitas ao tomador de decisão com respeito aos vetores de tradeoffs.

Se $\sum_{i=1}^p a_{ij} w_{ij} < 0$, o tomador de decisão deseja o vetor de tradeoffs associado à variável x_j e cria uma restrição do tipo

$$\sum_{i=1}^p w_{ij} \lambda_i \leq -\varepsilon.$$

Se $\sum_{i=1}^p a_{ij} w_{ij} > 0$, o tomador de decisão não deseja o vetor de tradeoffs associado à variável x_j e cria uma restrição do tipo

$$\sum_{i=1}^p w_{ij} \lambda_i \geq \varepsilon.$$

Se $\sum_{i=1}^p a_{ij} w_{ij} = 0$, o tomador de decisão é indiferente ao vetor

de tradeoffs apresentado à variável x_j e cria uma restrição do tipo

$$\sum_{i=1}^p w_{ij} \lambda_i = 0.$$

Se $NI=1$, acrescente ao conjunto de restrições criadas as seguintes restrições:

$$\lambda_i \geq \varepsilon, \quad i=1,2,\dots,p$$
$$\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1.$$

Caso contrário, além das restrições criadas nesta iteração, acrescente ao conjunto de restrições as restrições da iteração anterior ($NI - 1$).

Tome um conjunto de pesos viáveis λ_i , $i=1,2,\dots,p$, no domínio determinado pelas restrições e faça $NI = NI + 1$ e vá ao passo 3.

OBSERVAÇÕES:

1) A função utilidade é fornecida pelo tomador de decisão e serve para verificar se os vetores de tradeoffs apresentados são interessantes ou indiferentes. É claro que um vetor de tradeoffs pode ser interessante para um determinado tomador de decisão e para outro não, dependendo dos coeficientes a_i da função utilidade.

2) O conjunto inicial de pesos pode ser fornecido pelo tomador de decisão, ou pode ser gerado pelo algoritmo. Se for lançado um conjunto de pesos "ideais", o problema multi-objetivo é resolvido em apenas uma iteração, economizando tempo de CPU.

3) Na descrição do método de ZW apresentada pelo autores em [12], não é apresentado de forma explícita como devem ser fornecidos os vetores de tradeoffs, deixando livre a determinação dos mesmos. Neste caso, é conveniente que o próprio tomador de decisão apresente os vetores de tradeoffs, pois ele tem conhecimento do problema em estudo.

4) Em [6] é apresentada uma forma de como determinar os vetores de tradeoffs. Segue abaixo a descrição do processo

Processo para Determinar os Vetores de Tradeoffs

Seja o PPLMO

$$\begin{aligned} \max \quad & Cx = f_i(x), i=1, \dots, p \\ \text{s.a} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Quando é aplicado o algoritmo de ZW para resolver o problema acima, no passo 3, deve-se encontrar a solução de um PPL, a saber:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^p \lambda_i f_i(x) \\ \text{s.a} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Cuja forma padrão é

$$\begin{aligned} \min \quad & - \sum_{i=1}^p \lambda_i f_i(x) = d'^t x = Q(x) \\ \text{s.a} \quad & A'x' = b \\ & x' \geq 0. \end{aligned}$$

Para o problema na forma padrão o tableau é:

VB	x_1	...	x_s	...	x_n	x_{n+1}	...	x_{n+r}	...	x_{n+m}	
x_{n+1}	a_{11}	...	a_{1s}	...	a_{1n}	1	...	0	...	0	b_1
x_{n+2}	a_{21}	...	a_{2s}	...	a_{2n}	0	...	0	...	0	b_2
.
.
.
x_{n+r}	a_{r1}	...	a_{rs}	...	a_{rn}	0	...	1	...	0	b_r
.
.
.
x_{n+m}	a_{m1}	...	a_{ms}	...	a_{mn}	0	...	0	...	1	b_m
	d'_1	...	d'_s	...	d'_n	0	...	0	...	0	$Q(x)$

(Tableau 1)

O tableau do simplex multi-objetivo (ver [6]), isto é, o tableau que é formado pelas linhas normais do simplex, mais as p linhas que representam as funções objetivo é

VB	x_1	...	x_s	...	x_n	x_{n+1}	...	x_{n+r}	...	x_{n+m}	
x_{n+1}	a_{11}	...	a_{1s}	...	a_{1n}	1	...	0	...	0	b_1
x_{n+2}	a_{21}	...	a_{2s}	...	a_{2n}	0	...	0	...	0	b_2
.
.
.
x_{n+r}	a_{r1}	...	a_{rs}	...	a_{rn}	0	...	1	...	0	b_r
.
.
.
x_{n+m}	a_{m1}	...	a_{ms}	...	a_{mn}	0	...	0	...	1	b_m
	c_{11}	...	c_{1s}	...	c_{1n}	0	...	0	...	0	$f_1(x)$
	c_{21}	...	c_{2s}	...	c_{2n}	0	...	0	...	0	$f_2(x)$

	c_{p1}	...	c_{ps}	...	c_{pn}	0	...	0	...	0	$f_p(x)$
	d'_1	...	d'_2	...	d'_n	0	...	0	0	0	$Q(x)$

(Tableau 2)

Utilizando o tableau 2 para otimizar $Q(x)$ (com o auxílio do algoritmo simplex), são gerados novos quadros cujo último deles é

VB	x_1	...	x_t	...	x_n	x_{n+1}	...	x_{n+v}	...	x_{n+m}	
x_{n+1}	a'_{11}	...	0	...	a'_{1n}	1	...	$a'_{1(n+v)}$...	0	b'_1
x_t	a'_{21}	...	1	...	a'_{2n}	0	...	$a'_{2(n+v)}$...	0	b'_2
.
.
x_{n+m}	a'_{r1}	...	0	...	a'_{rn}	0	...	$a'_{r(n+v)}$...	1	b'_r
.
.
x_v	a'_{m1}	...	0	...	a'_{mn}	0	...	$a'_{m(n+v)}$...	0	b'_m
	Δz_1^1	...	0	...	Δz_n^1	0	...	Δz_{n+v}^1	...	0	$f_1^*(x)$
	Δz_1^2	...	0	...	Δz_n^2	0	...	Δz_{n+v}^2	...	0	$f_2^*(x)$

	Δz_1^p	...	0	...	Δz_n^p	0	...	Δz_{n+v}^p	...	0	$f_p^*(x)$
	d''_1	...	0	...	d''_n	0	...	d''_{n+v}	0	0	$Q^*(x)$

(Tableau 3)

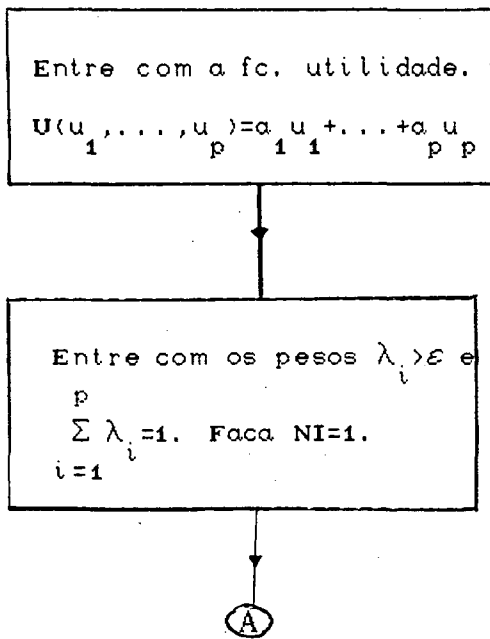
O vetor

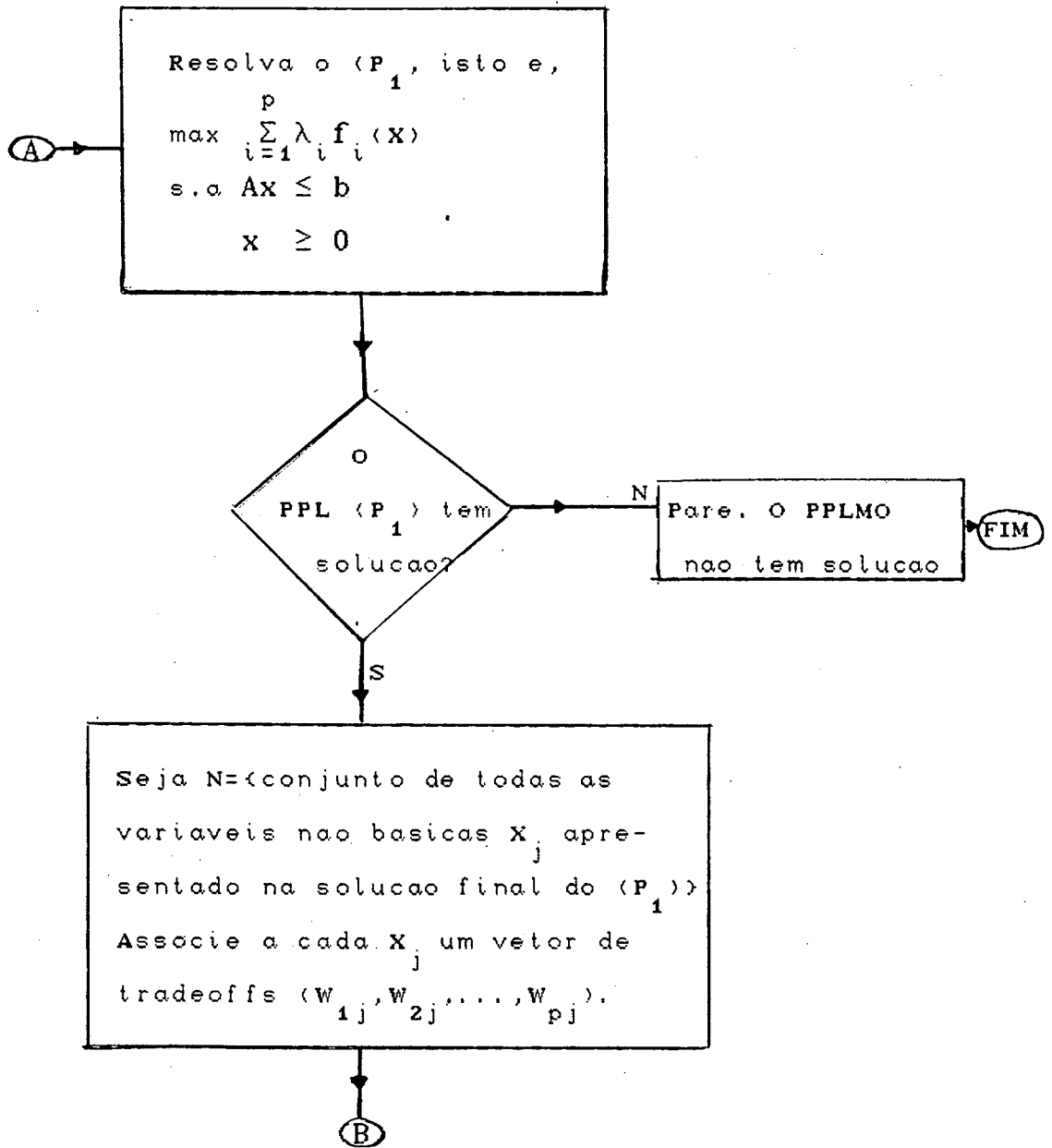
$$\begin{bmatrix} -\Delta z_j^1 \\ -\Delta z_j^2 \\ \vdots \\ -\Delta z_j^p \end{bmatrix}$$

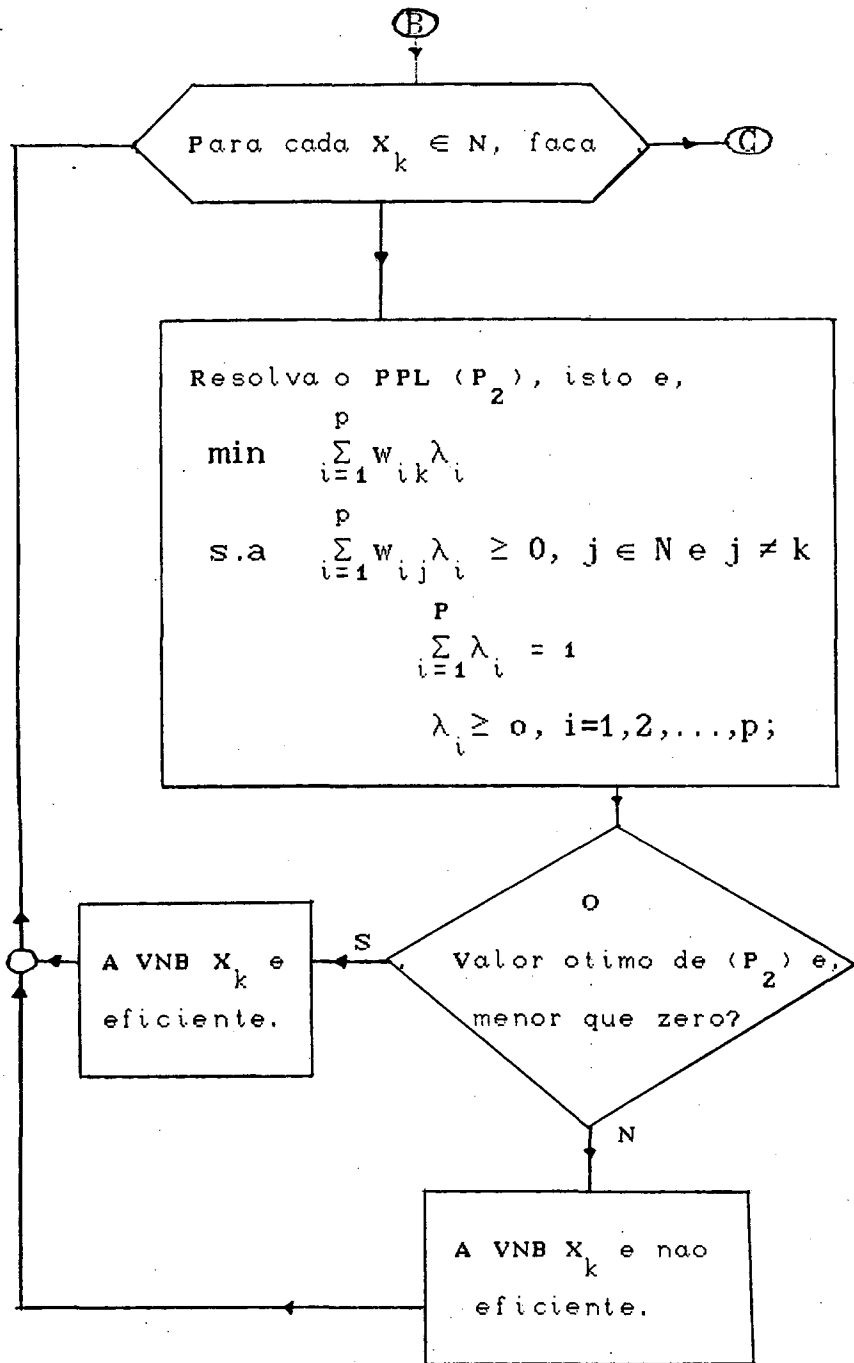
é denominado de vetor de "tradeoffs" da variável não básica x_j .

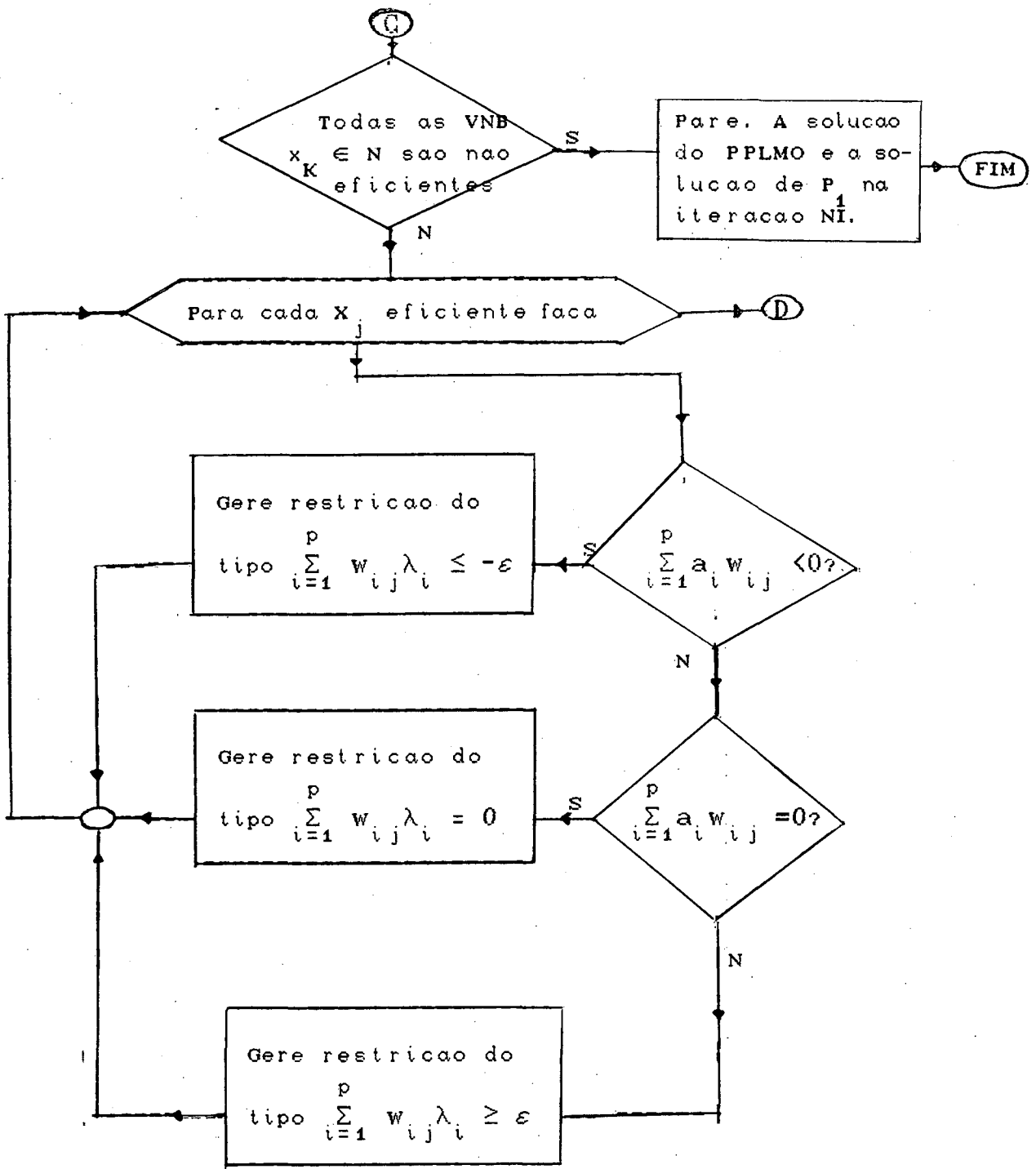
Obs.: Em [7], Whang e Masud apresentam uma outra forma de determinar os vetores de tradeoffs, a qual não é reproduzida aqui por ser equivalente à já apresentada.

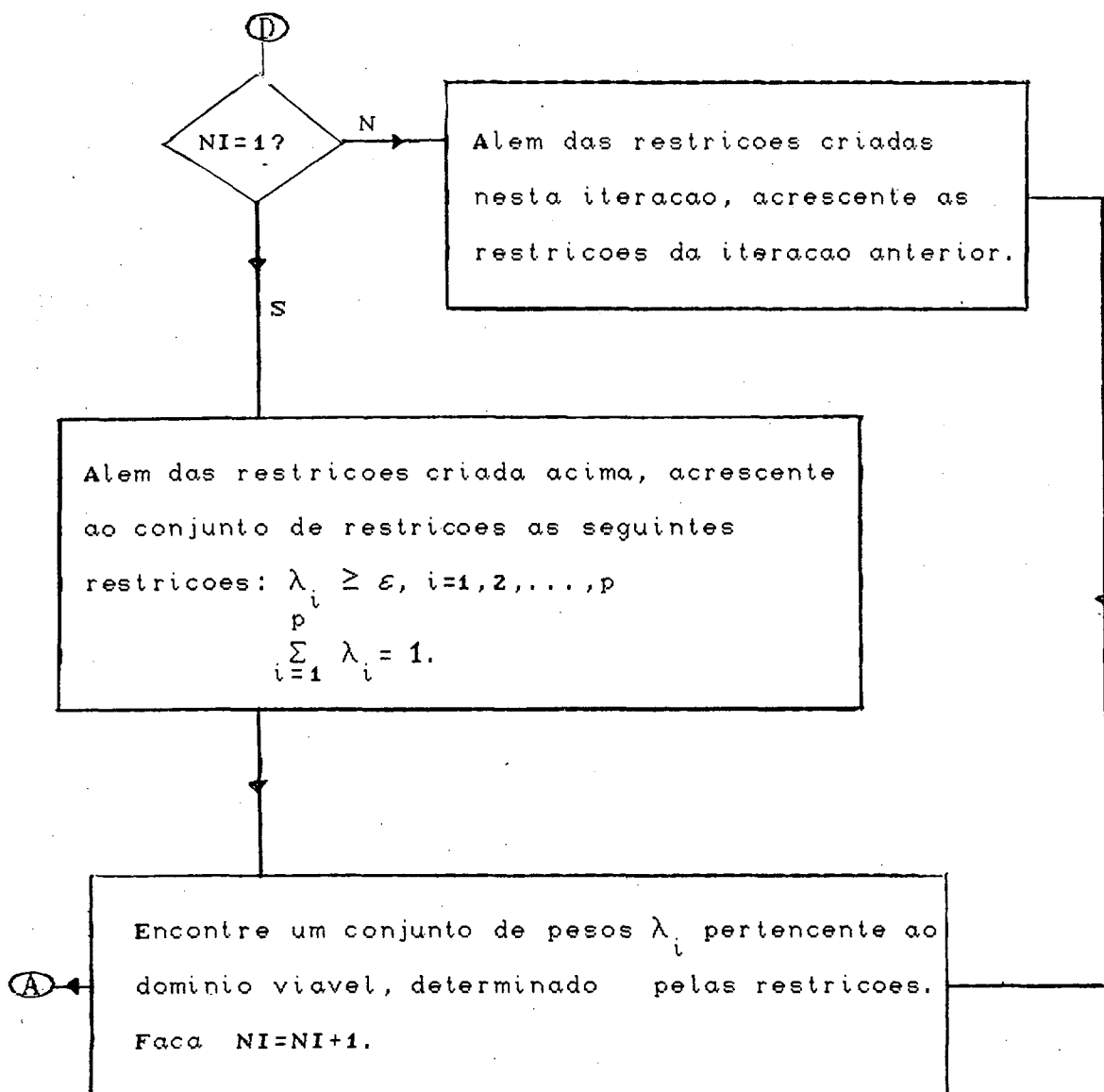
Fluxograma do método de Zionts e Wallenius.











2.2) Método de Zimmermann

O método para resolver um PPLMO apresentado por Zimmermann em [14], é uma aproximação difusa e também busca encontrar uma solução de melhor compromisso para o PPLMO. O processo de solução consiste na transformação do PPLMO em um PPL, envolvendo além das n variáveis

de decisão do PPLMO mais uma variável λ . Usando métodos já conhecidos da programação linear, resolve-se o PPL e, assim, obtém-se a solução para o PPLMO.

Segue uma descrição mais precisa do método.

Considere o PPLMO

$$\begin{aligned} \max \quad & f_1(x) = c_1 x \\ \max \quad & f_2(x) = c_2 x \\ & \vdots \\ \max \quad & f_p(x) = c_p x \\ \text{s.a} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

onde:

$$x \in \mathbb{R}^n, \quad x^t = (x_1, x_2, \dots, x_n);$$

$$A \in M_{m \times n}(\mathbb{R});$$

$$b \in \mathbb{R}^m, \quad b^t = (b_1, b_2, \dots, b_m);$$

f_i é função linear, $i=1,2,\dots,p$.

Escreve-se o problema da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \max \quad & \lambda \\ \text{s.a} \quad & \lambda \leq \mu_i(x), \quad i=1,2,\dots,p \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \\ & \lambda \geq 0; \end{aligned}$$

(P₄)

onde:

$$\lambda \in \mathbb{R};$$

$$x \in \mathbb{R}^n, x^t = (x_1, x_2, \dots, x_n);$$

$$b \in \mathbb{R}^m, b^t = (b_1, b_2, \dots, b_m);$$

$$\mu_i: \mathbb{R}^n \rightarrow [0,1] \subset \mathbb{R}, i=1, \dots, p;$$

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } f_i(x) \leq \min_i \\ \frac{f_i(x) - \min_i}{\max_i - \min_i}, & \text{se } \min_i < f_i(x) < \max_i \\ 1, & \text{se } f_i(x) \geq \max_i \end{cases}$$

onde:

$$\begin{aligned} \max_i &= \max f_i(x) \\ \text{sa } Ax &\leq b & (P_5) \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

$\min_i = \min \{f_i(x_j^*), j=1,2,\dots,p\}$ sendo x_j^* a solução ótima do problema (P_5) .

OBSERVAÇÕES:

1) As funções objetivo originais do PPLMO são consideradas como conjuntos difusos que representam "soluções aceitáveis com respeito à função objetivo $i, i=1,\dots,p$ ". Assim uma função de pertinência deve estar associada a cada conjunto. Estas funções são as μ_i , apresentadas acima.

2) As restrições $\lambda \leq \mu_i(x)$ "forçam" a variável λ a pertencer ao intervalo $[0,1]$. Assim, a solução do problema (P_4) fornece um valor de λ no intervalo $[0,1]$. O valor de λ representa o grau máximo de satisfação na obtenção da solução ótima do problema multi-objetivo.

3) Supondo que todos os problemas (P_5) têm solução, a construção das funções de pertinência μ_i é sempre possível, desde que existam pelo menos dois objetivos conflitantes. Caso tais soluções não existam, tem-se $\max_i = \min_i$ e assim, a construção das funções de pertinência torna-se inviável, pois haveria divisão por zero na construção das μ_i .

Quando estas funções não forem conflitantes, no software aqui desenvolvido, considera-se a função de pertinência igual à própria função objetivo dividida por seu valor máximo.

Agora será apresentada uma análise do que pode acontecer com o conjunto solução para o PPLMO usando o método de Zimmermann.

Antes de resolver o problema (P_4) , são construídas as funções de pertinência. Nesta fase, deve-se resolver p problemas de programação linear. Como já mencionado, um PPL pode ter solução única, ou uma infinidade de soluções, ou não ter solução (problema impossível). Se para pelo menos um i , $i \in \{1,2,\dots,p\}$, o problema (P_5) não apresentar solução, conclui-se que o PPLMO não tem solução. Caso todas as funções de pertinência tenham sido construídas, bastará resolver o problema (P_4) . Logo conclui-se que o PPLMO terá única, ou infinitas, ou não terá solução, dependendo do que acontecer com a solução do problema (P_4) .

Algoritmo.

Passo 1: Crie uma variável de decisão λ e faça a função objetivo do PPL igual a λ .

Passo 2: Para cada objetivo $i=1,2,\dots,p$, resolva

$$\begin{aligned} \max & f_i(x) \\ \text{s.a} & Ax \leq b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Passo 3: Se para pelo menos um $i \in \{1,2,\dots,p\}$, o problema acima não tiver solução, pare, pois o PPLMO também não terá solução. Caso todos os problemas tenham solução, isto é, exista x_i^* para todo $i=1,2,\dots,p$, então faça, para cada $i=1,2,\dots,p$

$$\begin{aligned} \max_i & = f_i(x_i^*) \\ \min_i & = (f_i(x_j^*), j=1,2,\dots,p) \end{aligned}$$

Passo 4: Crie as funções de pertinência

$$\mu_i(x) = \frac{f_i(x) - \min_i}{\max_i - \min_i}, \text{ para } i=1,2,\dots,p.$$

Passo 5: Resolva o PPL

$$\begin{aligned} \max & \lambda \\ \text{s.a} & \lambda \leq \mu_i(x), \quad i=1,2,\dots,p \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \\ & \lambda \geq 0; \end{aligned}$$

Se o PPL não tiver solução, pare e conclua: o PPLMO não tem solução.

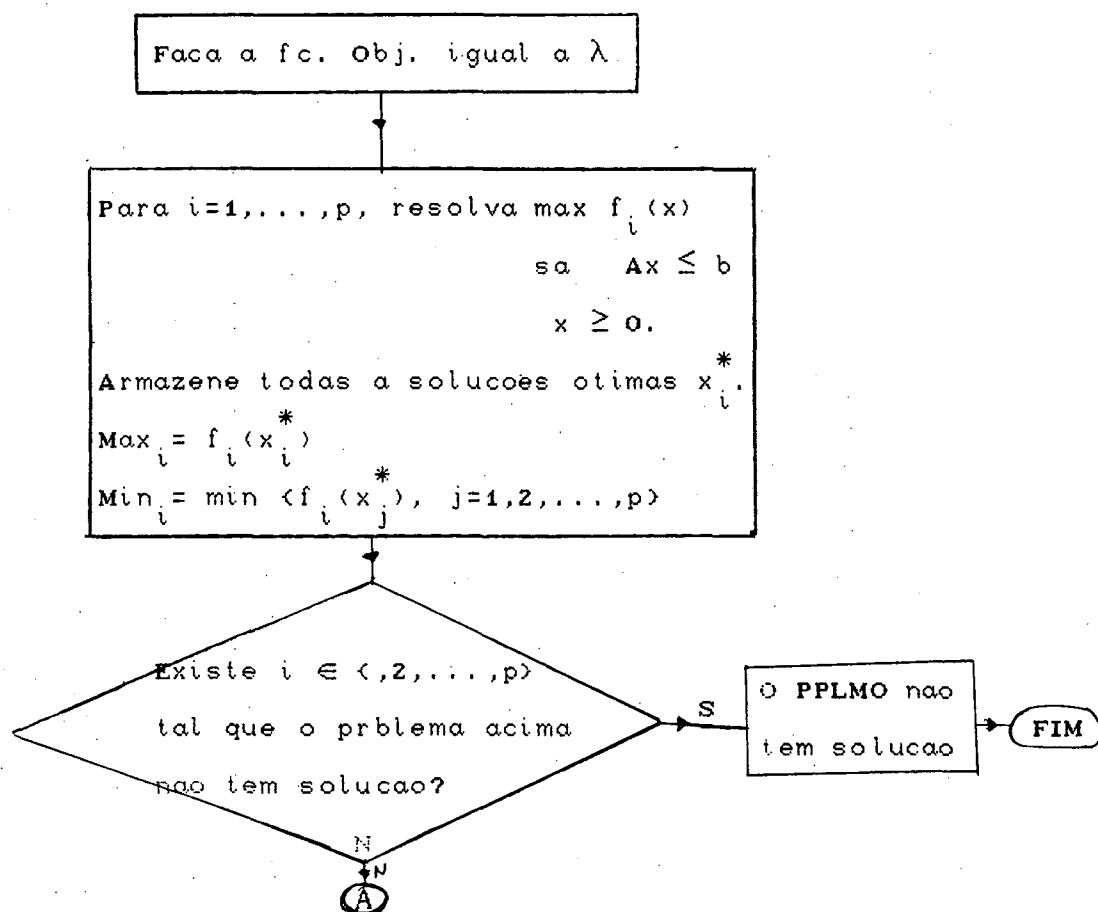
Se o PPL tiver solução única, pare e conclua: o PPLMO tem solução única, que é a solução do PPL.

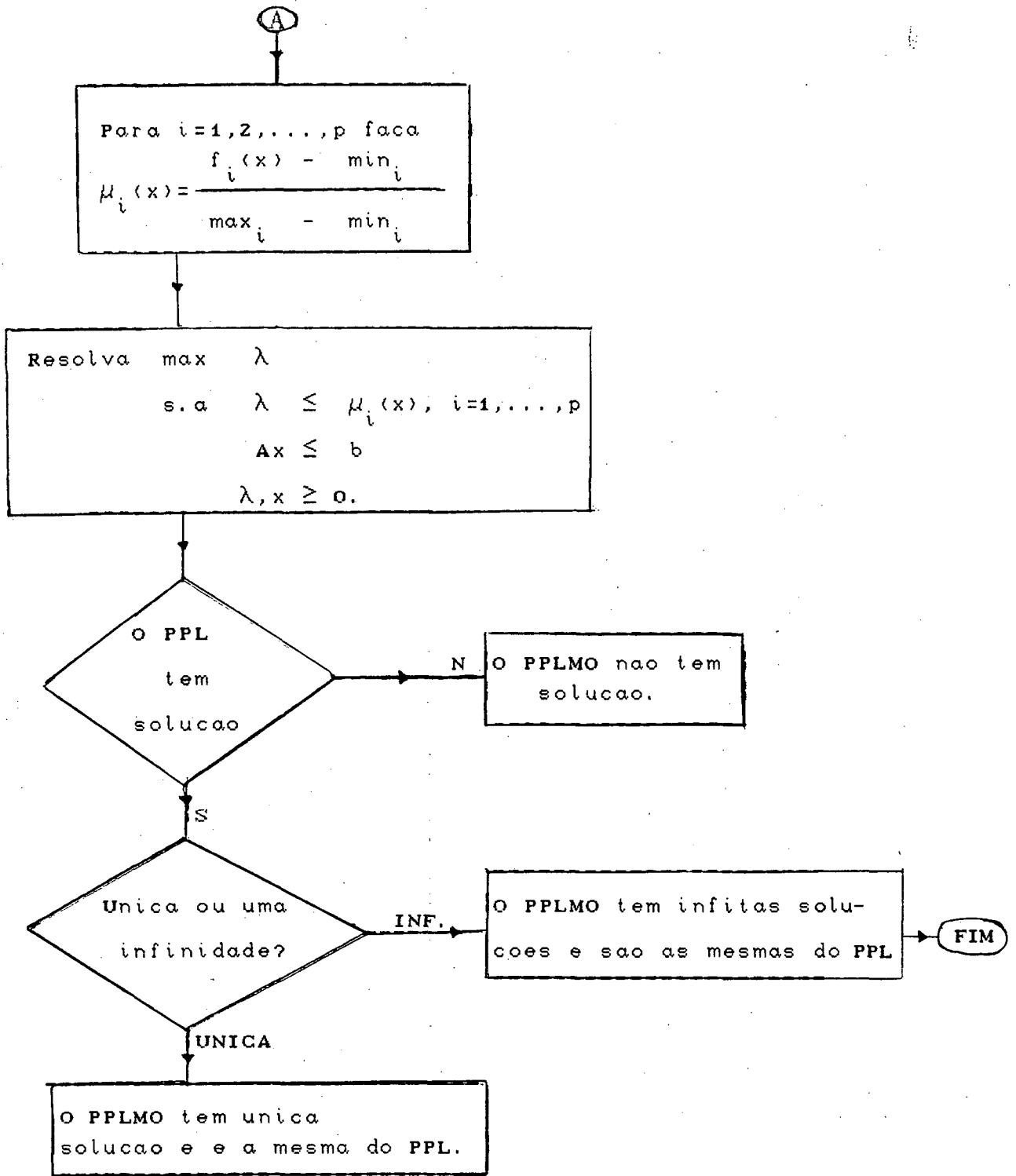
Se o PPL tiver infinitas soluções, pare e conclua: o PPLMO tem infinitas soluções, que são as soluções do PPL.

Observação: Em ambos os casos a variável λ deve ser eliminada.

Como síntese do algoritmo apresentado, segue um fluxograma.

Fluxograma do Método de Zimmermann





2.3) Propostas apresentadas por Stange

As propostas de Stange (1988) buscam encontrar a solução de melhor compromisso para um PPLMO. A técnica é simples: transformar um PPLMO em um PPL mono-objetivo. Assim é possível resolver o problema transformado utilizando o algoritmo simplex ou, qualquer software de programação linear (LINDO, ADBASE, GAMS).

PROPOSTA A

Dado o PPLMO escrito na forma

$$\begin{aligned} \max \quad & f_1(x) = c_1 x \\ \max \quad & f_2(x) = c_2 x \\ & \vdots \\ & \vdots \\ \max \quad & f_p(x) = c_p x \\ \text{s.a} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

onde:

$$x \in \mathbb{R}^n, \quad x^t = (x_1, x_2, \dots, x_n);$$

$$A \in M_{m \times n}(\mathbb{R});$$

$$b \in \mathbb{R}^m, \quad b^t = (b_1, b_2, \dots, b_m);$$

f_i é função linear, $i=1, \dots, p$.

Transforma-se o problema para a forma

$$(P'_0) \quad \begin{array}{ll} \max & \lambda \\ \text{s.a} & \lambda - f_i(x) \leq 0, i=1,\dots,p; \\ & Ax \leq b; \\ & x \geq 0; \\ & \lambda \geq 0; \end{array}$$

onde:

$$\lambda \in \mathbb{R};$$

$$x \in \mathbb{R}^n;$$

$$b \in \mathbb{R}^p,$$

f_i é função linear, $i=1,\dots,p$.

Com esta mudança, passa-se de um PPLMO com p objetivos, n variáveis de decisão e m restrições, para um problema de programação linear mono-objetivo com $n+1$ variáveis de decisão e $m+p$ restrições, sendo as m restrições do PPLMO e p as novas restrições do problema transformado.

A técnica da proposta consiste em "empurrar" o valor das funções objetivo contra as restrições. É claro que pretende-se obter o valor máximo para a variável λ , de forma que as restrições $\lambda - f_i(x) \leq 0$, $i=1,\dots,p$, sejam satisfeitas, isto é, que $(\lambda - f_i(x))$ esteja o mais próximo possível de zero.

Proposta B

Na descrição da proposta A foi criada uma nova variável de decisão λ . Ao invés de criar somente uma variável, pode-se criar p

novas variáveis, isto é, criar λ_i com $i=1,\dots,p$, e transformar o PPLMO em um PPL da seguinte forma:

$$\begin{array}{ll}
 \max & \sum_{i=1}^p \lambda_i \\
 \text{s.a} & \lambda_i - f_i(x) \leq 0, \quad i=1,\dots,p; \\
 & Ax \leq b; \\
 & x \geq 0; \\
 & \lambda_i \geq 0;
 \end{array}
 \tag{P_7}$$

onde:

$$\lambda \in \mathbb{R}^p, \quad \lambda^t = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p);$$

$$x \in \mathbb{R}^n, \quad x^t = (x_1, x_2, \dots, x_n);$$

$$A \in M_{m \times n}(\mathbb{R});$$

$$b \in \mathbb{R}^m, \quad b^t = (b_1, b_2, \dots, b_m);$$

f_i é função linear, $i=1,2,\dots,p$.

Agora tem-se um PPL com $n + p$ variáveis de decisão e $m + p$ restrições, sendo as m restrições do PPLMO e as p novas restrições do problema transformado (P_7) .

A seguir um exame crítico do que pode acontecer com o conjunto de soluções do PPLMO.

Resolver o PPLMO tanto pela proposta A como pela proposta B, se resume em resolver um PPL, portanto basta analisar o que acontece com as soluções do PPL.

Seja M o conjunto de soluções viáveis (região determinada pela intersecção de todas as restrições) de (P_6) . Os casos possíveis para o PPL são:



1. $M = \emptyset$; então o PPL não tem solução viável, logo não possui solução ótima e nem solução eficiente para o PPLMO. Neste caso o problema é dito impossível.

2. Se $M \neq \emptyset$ e limitado; então o PPL possui solução ótima que pode ser única ou não. Assim o PPLMO pode ter uma única solução ou uma infinidade.

3. $M \neq \emptyset$ e não limitado; Dois casos podem ocorrer:

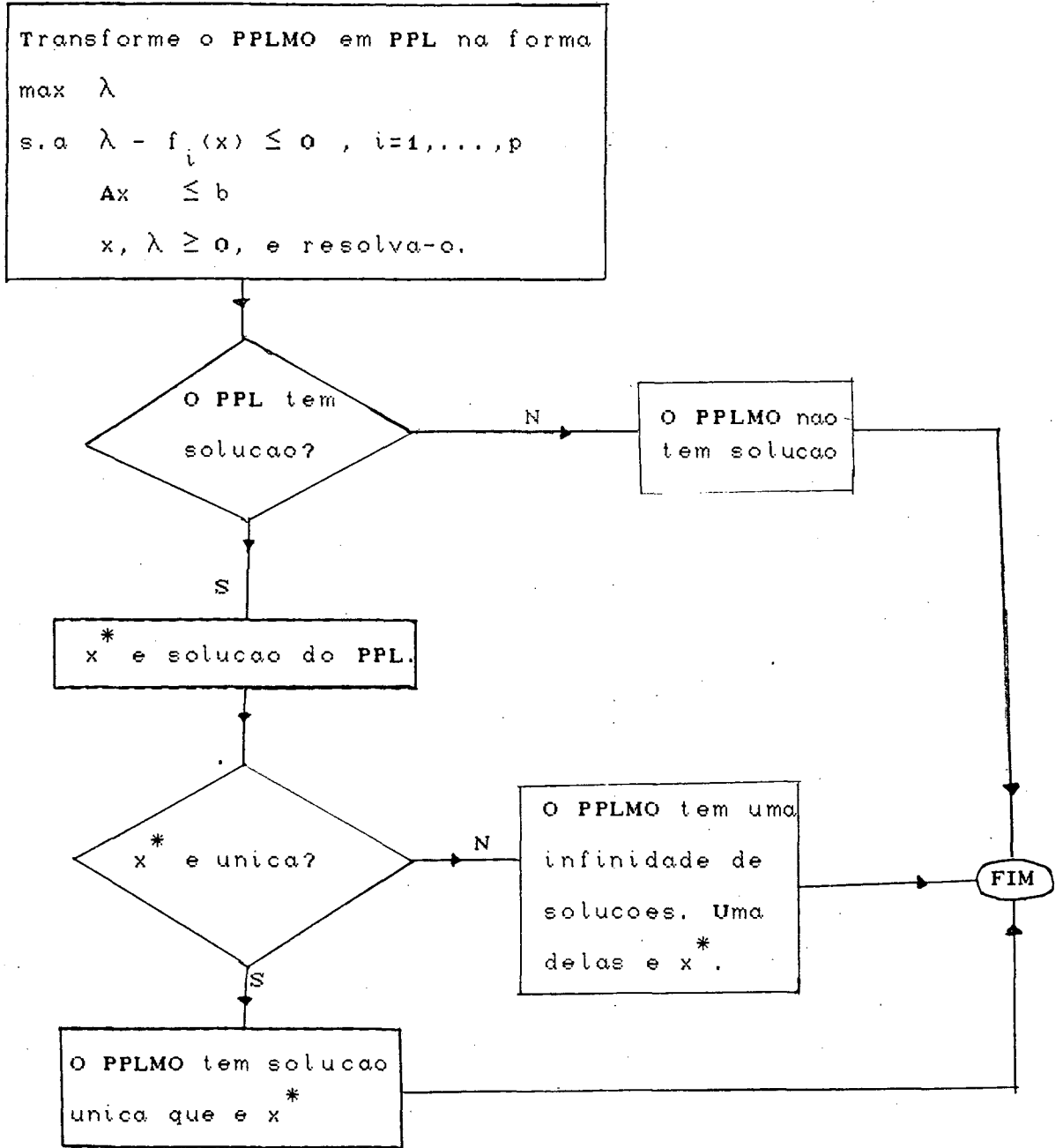
3.1 Se a função objetivo do PPL, a função λ no caso A e a função $\sum_{i=1}^p \lambda_i$ no caso B, possuir solução ótima em M , então o PPL possuirá solução ótima que pode ser única ou não. Conseqüentemente, o PPLMO terá uma única solução ou uma infinidade de soluções de melhor compromisso.

3.2 Se a função objetivo do PPL não possuir solução ótima em M , o que significa que a função objetivo do PPL pode crescer ilimitadamente, então o PPLMO também não possuirá solução de compromisso ótimo, sendo este o caso onde o problema é ilimitado.

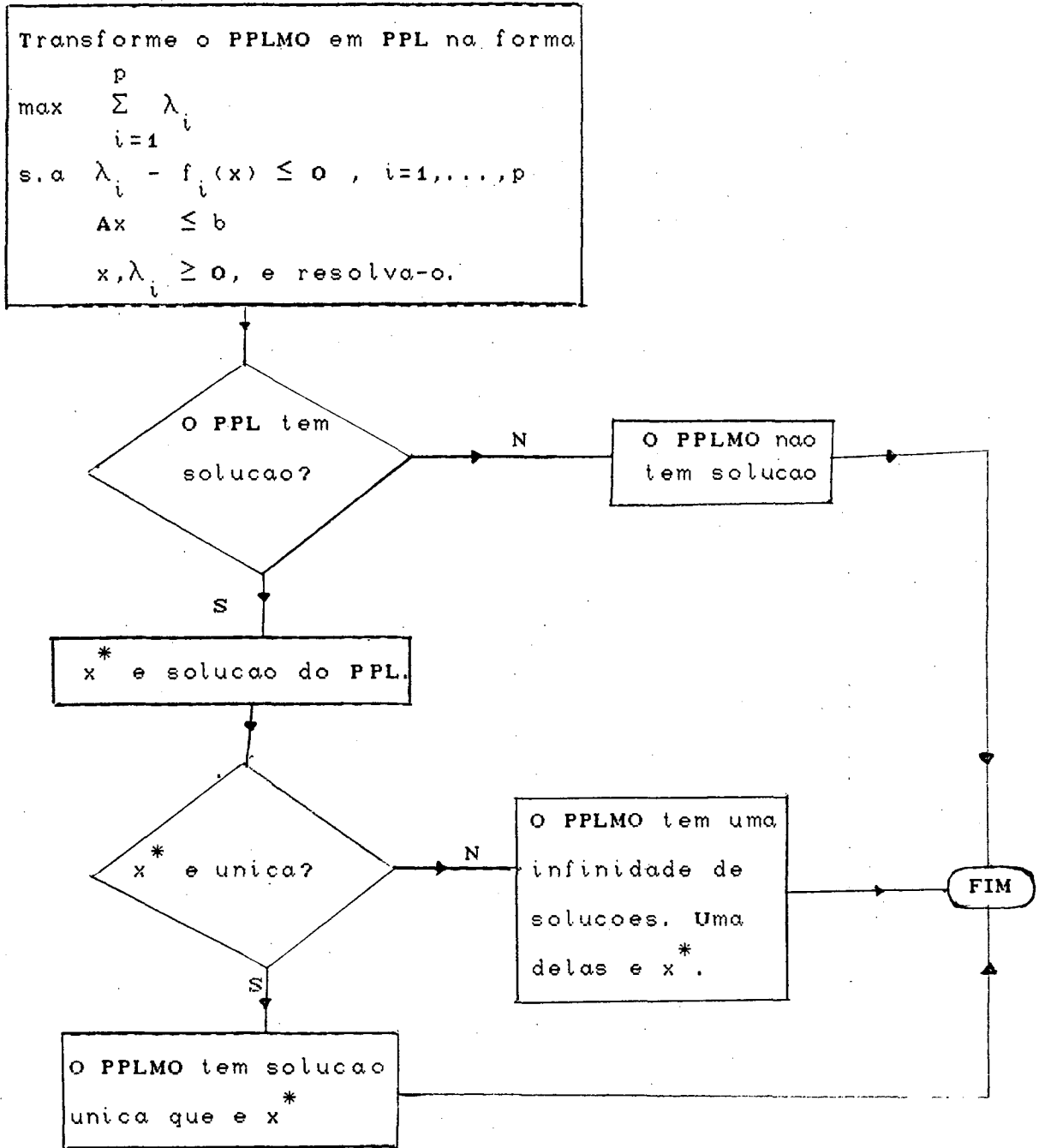
Fluxogramas

A seguir são apresentados dois fluxogramas, que descrevem sinteticamente as propostas A e B.

Fluxograma da Proposta A



Fluxograma da Proposta B



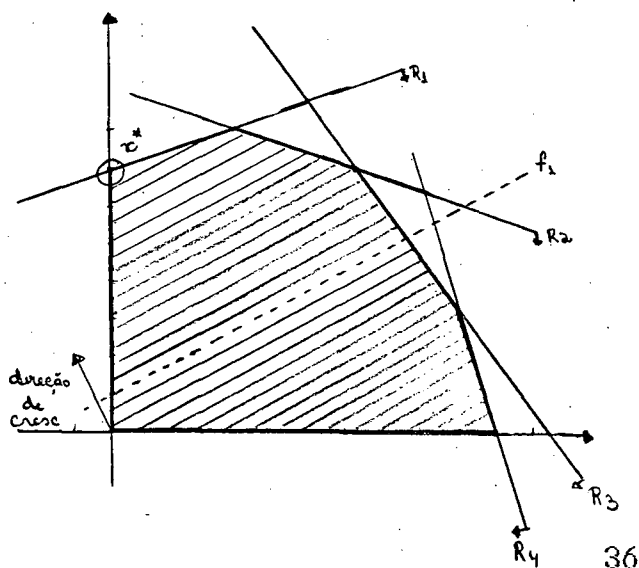
CAPÍTULO III - EXEMPLOS

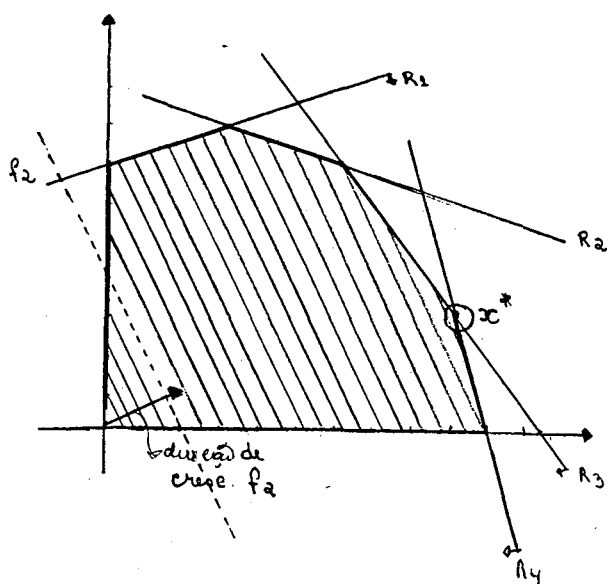
Neste capítulo é resolvido um exemplo de PPLMO, ilustrando os métodos de Zionts e Wallenius, de Zimmermann e as propostas A e B de Stange. Em seguida 14 exemplos de PPLMO são resolvidos pelos dois métodos e pelas duas propostas, sendo para isso desenvolvido pela autora um software específico.

Exemplo 1:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & u_1 = f_1(x) = -1x_1 + 2x_2 \\
 \max \quad & u_2 = f_2(x) = 2x_1 + 1x_2 \\
 \text{s.a} \quad & -1x_1 + 3x_2 \leq 21 \quad R_1 \\
 & 1x_1 + 3x_2 \leq 27 \quad R_2 \\
 & 4x_1 + 3x_2 \leq 45 \quad R_3 \\
 & 3x_1 + 1x_2 \leq 30 \quad R_4 \\
 & x_1, x_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Este problema multi-objetivo, (apresentado em [14]), têm funções objetivo conflitantes. De fato, para o problema mono-objetivo, onde a função objetivo é u_1 e as restrições são as mesmas do problema multi-objetivo, o ponto de ótimo $x^* = (0,7)^t$





(ver gráfico ao lado). Para o problema mono-objetivo onde a função objetivo é u_2 e as restrições também são as mesmas do problema multi-objetivo, o ponto de ótimo é $x^* = (9,3)^t$ (ver gráfico ao lado). Com as soluções destes dois PPLs fica claro que as funções objetivo realmente são conflitantes, pois cada função levou a um ponto de ótimo.

São apresentadas a seguir as soluções para o PPLMO por cada método e por cada proposta.

Zionts e Wallenius - Forma A

Passo 1: Tome a função utilidade $U(u_1, u_2) = 0.64 u_1 + 0.36 u_2$. Faça $NI=1$.

Passo 2: Escolha um conjunto de pesos iniciais, tais que $\lambda_1, \lambda_2 > \varepsilon$ e $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Tome $\varepsilon = 0.001$, $\lambda_1 = 1/3 \approx 0.333$ e $\lambda_2 = 2/3 \approx 0.666$.

Passo 3: Resolva o PPL

$$\begin{aligned} \max \quad & 0.333f_1(x) + 0.666f_2(x) = 0.999x_1 + 1.332x_2 \\ \text{s.a} \quad & -1x_1 + 3x_2 \leq 21 \\ & 1x_1 + 3x_2 \leq 27 \\ & 4x_1 + 3x_2 \leq 45 \\ & 3x_1 + 1x_2 \leq 30 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Cuja forma padrão é

$$\begin{aligned} \min \quad & -0.999x_1 - 1.332x_2 \\ \text{s.a} \quad & -1x_1 + 3x_2 + f_1 = 21 \\ & 1x_1 + 3x_2 + f_2 = 27 \\ & 4x_1 + 3x_2 + f_3 = 45 \\ & 3x_1 + 1x_2 + f_4 = 30 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & f_1, f_2, f_3, f_4 \geq 0. \end{aligned}$$

O ponto $x^* = (6,7)^t$ é solução para o PPL e também é uma solução eficiente para o PPLMO. Usando o simplex, obtém-se as variáveis não básicas, que são f_2 e f_3 .

Passo 4: Seja $N = \{f_2, f_3\}$. Para cada variável pertencente a N associe o vetor de tradeoffs:

$$\begin{aligned} \text{para } f_2 & : (-1 ; 2) \text{ e} \\ \text{para } f_3 & : (0.1; -3) \end{aligned}$$

Passo 5:

$$\begin{aligned} \text{A } f_2 \text{ associe o PPL } \min g_1(\lambda) &= -1\lambda_1 + 2\lambda_2 \\ \text{s.a } 0.1\lambda_1 - 3\lambda_2 &\geq 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= 1 \\ \lambda_1, \lambda_2 &\geq 0 \quad \text{e resolva.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{A } f_3 \text{ associe o PPL } \min g_2(\lambda) &= 0.1\lambda_1 - 3\lambda_2 \\ \text{s.a } -\lambda_1 + 2\lambda_2 &\geq 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= 1 \\ \lambda_1, \lambda_2 &\geq 0 \quad \text{e resolva.} \end{aligned}$$

A solução do PPL associado a f_2 é $\lambda^* = (1,0)^t$ e $g_1(\lambda^*) = -1$ o que significa que a variável f_2 é eficiente, pois o valor ótimo da função objetivo g_1 é negativo. O mesmo ocorre com f_3 pois a solução do PPL associado é $\lambda^* = (1,0)^t$ e $g_2(\lambda^*) = -3$.

Passo 6 : Como as variáveis f_2 e f_3 são eficientes faça:

Para a variável f_2 avalie $\langle \nabla U, (-1, +2) \rangle$ e para f_3 avalie $\langle \nabla U, (0.1, -3) \rangle$.

As soluções são $\langle \nabla U, (-1, 2) \rangle = 0.08$ e $\langle \nabla U, (0.1, -3) \rangle = -1.016$. Como o primeiro valor é positivo, e o segundo é negativo crie as restrições $-1\lambda_1 + 2\lambda_2 \geq \varepsilon$ e $1\lambda_1 + 3\lambda_2 \leq -\varepsilon$.

Sendo $NI=1$, acrescente as restrições $\lambda_1 \geq \varepsilon$, $\lambda_2 \geq \varepsilon$ e $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

Escolha o novo conjunto de pesos, obedecendo as restrições acima.

A escolha foi $\lambda_1 = 0.001$ e $\lambda_2 = 0.999$, obtidos resolvendo o PPL

cuja função objetivo é $h(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_2$.

Faça $NI = NI + 1 = 2$ e volte ao passo 3.

Obs.: A função $h(\lambda_1, \lambda_2)$ pode ser escolhida como qualquer combinação linear de λ_1 e λ_2 .

Passo 3: Com o conjunto de pesos, $\lambda_1 = 0.001$ e $\lambda_2 = 0.999$, resolva o PPL

$$\begin{aligned} \max \quad & 0.001f_1(x) + 0.999f_2(x) = 0.001x_1 + 2.997x_2 \\ \text{s.a} \quad & -1x_1 + 3x_2 \leq 21 \\ & 1x_1 + 3x_2 \leq 27 \\ & 4x_1 + 3x_2 \leq 45 \\ & 3x_1 + 1x_2 \leq 30 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Cuja a forma padrão é

$$\begin{aligned} \min \quad & -0.001x_1 - 2.997x_2 \\ \text{s.a} \quad & -1x_1 + 3x_2 + f_1 = 21 \\ & 1x_1 + 3x_2 + f_2 = 27 \\ & 4x_1 + 3x_2 + f_3 = 45 \\ & 3x_1 + 1x_2 + f_4 = 30 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & f_1, f_2, f_3, f_4 \geq 0. \end{aligned}$$

O ponto de ótimo $x^* = (3, 8)^t$ é uma solução para o PPL e também é uma solução eficiente para o PPLMO. Usando o simplex, obtém-se as variáveis não básicas f_1 e f_2 .

Passo 4: Seja $N = \{f_1, f_2\}$. Para cada variável pertencente a N associe o vetor de tradeoffs

para $f_1 : (-4, 5)$ e

para $f_2 : (2, -1)$

Passo 5:

A f_1 associe o PPL $\min g_1(\lambda) = -4\lambda_1 + 5\lambda_2$
s.a $2\lambda_1 - 1\lambda_2 \geq 0$
 $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$
 $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ e resolva.

A f_2 associe o PPL $\min g_2(\lambda) = 2\lambda_1 - \lambda_2$
s.a $-4\lambda_1 + 5\lambda_2 \geq 0$
 $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$
 $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ e resolva.

A solução do PPL associado a f_1 é $\lambda^* = (1,0)^t$ e $g_1(\lambda^*) = -4$ o que significa que a variável f_1 é eficiente. O mesmo ocorre com f_2 pois a solução do PPL associado é $\lambda^* = (0,1)^t$ e $g_2(\lambda^*) = -1$.

Passo 6: Como as variáveis f_1 e f_2 são eficientes faça:

Para a variável eficiente f_1 avalie $\langle \nabla U, (-4,5) \rangle$ e para f_2 avalie $\langle \nabla U, (2,-1) \rangle$.

As soluções são $\langle \nabla U, (-4,5) \rangle = -0.76$ e $\langle \nabla U, (2,-1) \rangle = 0.92$. Como o primeiro valor é negativo e o segundo positivo, crie as restrições $-4\lambda_1 + 5\lambda_2 \leq \varepsilon$ e $2\lambda_1 - 1\lambda_2 \geq \varepsilon$.

Sendo $NI=2$, acrescentar as restrições da iteração anterior.

Escolha o novo conjunto de pesos, obedecendo as restrições.

A escolha foi $\lambda_1 = 0.5557$ e $\lambda_2 = 0.4443$, obtida resolvendo o PPL cuja função objetivo é $h(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_2$.

Faça $NI = NI + 1 = 3$ e volte ao passo 3.

Passo 3: Como o conjunto de pesos é $\lambda_1=0.5557$ e $\lambda_2=0.4443$, resolva o PPL

$$\begin{aligned} \max \quad & 0.5557f_1(x) + 0.4443f_2(x) = 0.3329x_1 + 1.5557x_2 \\ \text{s.a} \quad & -1x_1 + 3x_2 \leq 21 \\ & 1x_1 + 3x_2 \leq 27 \\ & 4x_1 + 3x_2 \leq 45 \\ & 3x_1 + 1x_2 \leq 30 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Cuja a forma padrão é

$$\begin{aligned} \min \quad & -0.3329x_1 - 1.5557x_2 \\ \text{s.a} \quad & -1x_1 + 3x_2 + f_1 = 21 \\ & 1x_1 + 3x_2 + f_2 = 27 \\ & 4x_1 + 3x_2 + f_3 = 45 \\ & 3x_1 + 1x_2 + f_4 = 30 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & f_1, f_2, f_3, f_4 \geq 0. \end{aligned}$$

O ponto de ótimo $x^* = (3,8)^t$ é solução para o PPL e também é uma solução eficiente para o PPLMO. Usando o simplex, obtém-se as variáveis não básicas são f_1 e f_2 .

Passo 4: Seja $N = \{f_1, f_2\}$. Para cada variável pertencente a N associe o vetor de tradeoffs

$$\begin{aligned} \text{para } f_1 & : (0.1, -0.1) \text{ e} \\ \text{para } f_2 & : (0.2, -0.2). \end{aligned}$$

Passo 5:

A f_1 associe o PPL $\min g_1(\lambda) = 0.1\lambda_1 - 0.1\lambda_2$
s.a $0.2\lambda_1 - 0.2\lambda_2 \geq 0$
 $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$
 $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ e resolva.

A f_2 associe o PPL $\min g_2(\lambda) = 0.2\lambda_1 - 0.2\lambda_2$
s.a $0.1\lambda_1 - 0.1\lambda_2 \geq 0$
 $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$
 $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$.

A solução do PPL associado a f_1 é $\lambda^* = (1,0)^t$ e $g_1(\lambda^*) = 0.1$, o que significa que a variável f_1 é não eficiente. O mesmo ocorre com f_2 pois a solução do PPL associado é $\lambda^* = (1,0)^t$ e $g_2(\lambda^*) = 0.2$.

Passo 6: Como todas as variáveis são não eficientes, pare. A solução de melhor compromisso para o PPLMO foi obtida na iteração NI=3 e é $x^* = (3,8)^t$.

Zionts e Wallenius - Forma B

O mesmo exemplo será resolvido novamente pelo método de ZW, considerando diferentes vetores de tradeoffs, mesma função utilidade e o mesmo conjunto inicial de pesos da Forma A.

Passo 1: Tome a função utilidade $U(u_1, u_2) = 0.64u_1 + 0.36u_2$. Faça NI=1.

Passo 2: Escolha um conjunto de pesos iniciais, tais que $\lambda_1, \lambda_2 \geq \varepsilon$ e $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Tome $\varepsilon = 0.001$, $\lambda_1 = 1/3 \approx 0.333$ e $\lambda_2 = 2/3 \approx 0.666$.

Passo 3: Resolva o PPL

$$\begin{aligned} \max \quad & 0.333f_1(x) + 0.666f_2(x) = 0.999x_1 + 1.332x_2 \\ \text{s.a} \quad & -1x_1 + 3x_2 \leq 21 \\ & 1x_1 + 3x_2 \leq 27 \\ & 4x_1 + 3x_2 \leq 45 \\ & 3x_1 + 1x_2 \leq 30 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

O PPL acima é o mesmo PPL da Forma A (passo 3 e iteração 1). Segue que o ponto de ótimo é $x^* = (6,7)^t$ e as variáveis não básicas associadas são f_2 e f_3 .

Passo 4: Seja $N = \{f_2, f_3\}$. Para cada variável pertencente a N associe o um vetor de tradeoffs:

$$\begin{aligned} \text{para } f_2 & : (-0.7, 0.2) \text{ e} \\ \text{para } f_3 & : (-0.1, 1.2). \end{aligned}$$

Passo 5:

A f_2 associe o PPL

$$\begin{aligned} \min \quad & g_1(\lambda) = -0.7\lambda_1 + 0.2\lambda_2 \\ \text{s.a} \quad & -0.1\lambda_1 + 1.2\lambda_2 \geq 0 \\ & \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ & \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \text{ e resolva.} \end{aligned}$$

O valor ótimo é $g_1(\lambda^*) = -0.6308$. Como este valor é menor que zero, a variável f_2 é eficiente.

A f_3 associe o PPL

$$\begin{aligned} \min \xi_2(\lambda) &= -0.1\lambda_1 + 1.2\lambda_2 \\ \text{s.a } -0.7\lambda_1 + 0.2\lambda_2 &\geq 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= 1 \\ \lambda_1, \lambda_2 &\geq 0 \text{ e resolva.} \end{aligned}$$

O valor ótimo para o PPL é $\xi_2(\lambda^*) = 0.9111$. Como o este valor é maior que zero, a variável f_3 não é eficiente.

Passo 6: Como a variável f_2 é eficiente, avalie $\langle \nabla U, (-0.7, 0.2) \rangle$.

O resultado é $\langle \nabla U, (-0.7, 0.2) \rangle = -0.376$. Como este valor é negativo crie a restrição $-0.7\lambda_1 + 0.2\lambda_2 \leq -\varepsilon$.

Sendo $NI=1$, acrescente as restrições $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ e $\lambda_1, \lambda_2 \geq \varepsilon$.

Escolha o novo conjunto de pesos, obedecendo as restrições acima.

A escolha foi $\lambda_1=0.2233$ e $\lambda_2=0.7767$, obtida resolvendo o PPL cuja a função objetivo é $h(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_2$.

Faça $NI = NI + 1 = 2$ e volte a passo 3.

Passo 3: Com o conjunto de pesos $\lambda_1=0.2233$ e $\lambda_2=0.7767$, resolva o PPL

$$\begin{aligned} \max 0.2233f_1(x) + 0.7767f_2(x) &= 1.3301x_1 + 1.222x_2 \\ \text{s.a } -1x_1 + 3x_2 &\leq 21 \\ 1x_1 + 3x_2 &\leq 27 \\ 4x_1 + 3x_2 &\leq 45 \\ 3x_1 + 1x_2 &\leq 30 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

O ponto $x^* = (6, 7)^t$ é solução para o PPL e também é uma solução

eficiente para o PPLMO. Usando o simplex, obtém-se as variáveis não básicas f_2 e f_3 .

Passo 4: Associe o vetor de tradeoffs a cada VNB:

para f_2 : $(0.7, -0.2)$ e

para f_3 : $(-0.1, 1.2)$.

Passo 5:

A f_2 associe o PPL

$$\begin{aligned} \min \quad & g_1(\lambda) = 0.7\lambda_1 - 0.2\lambda_2 \\ \text{s.a.} \quad & -0.1\lambda_1 + 1.2\lambda_2 \geq 0 \\ & \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ & \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \text{ e resolva.} \end{aligned}$$

A f_3 associe o PPL

$$\begin{aligned} \min \quad & g_2(\lambda) = -0.1\lambda_1 + 1.2\lambda_2 \\ \text{s.a.} \quad & 0.7\lambda_1 - 0.2\lambda_2 \geq 0 \\ & \lambda_1 + \lambda_2 \geq 0 \\ & \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \text{ e resolva.} \end{aligned}$$

A solução do PPL associado a f_2 é $\lambda^* = (0, 1)^t$ e $g_1(\lambda^*) = -0.2$, o que significa que a variável f_2 é eficiente. O mesmo ocorre com f_3 pois a solução do PPL associado é $\lambda^* = (1, 0)^t$ e $g_2(\lambda^*) = -0.1$

Passo 6: Como as variáveis f_2 e f_3 são eficientes faça:

Para a variável f_2 avalie $\langle \nabla U, (0.7, -0.2) \rangle$ e para f_3 avalie $\langle \nabla U, (-0.1, 1.2) \rangle$.

As soluções são $\langle \nabla U, (0.7, -0.2) \rangle = 0.376$ e

$\langle \nabla U, (-0.1, 1.2) \rangle = 0.368$. Como ambos valores são positivos, crie as restrições $0.7\lambda_1 - 0.2\lambda_2 \geq \varepsilon$ e $-0.1\lambda_1 + 1.2\lambda_2 \geq \varepsilon$.

Seu $NI=2$, acrescente as restrições da iteração anterior.

Escolha o novo conjunto de pesos, obedecendo as restrições.

A escolha foi $\lambda_1=0.2233$ e $\lambda_2=0.7767$, obtida resolvendo o PPL cuja função objetivo $h(\lambda_1, \lambda_2)=\lambda_2$.

Faça $NI= NI+1=3$ e volte ao passo 3.

Passo 3: Como os pesos são iguais aos da iteração anterior, o PPL será o mesmo. Logo a solução é $x^* = (6,7)^t$ e as variáveis não básicas são f_2 e f_3 .

Passo 4: Associe o vetor de tradeoffs
para f_2 : $(-0.5, 0.5)$ e
para f_3 : $(-10, 10)$.

Passo 5:

A f_2 associe o PPL

$$\begin{aligned} \min \quad & g_1(\lambda) = -0.5\lambda_1 + 0.5\lambda_2 \\ \text{s.a} \quad & -10\lambda_1 + 10\lambda_2 \geq 0 \\ & \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ & \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \text{ e resolva.} \end{aligned}$$

A f_3 associe o PPL

$$\begin{aligned} \min \quad & g_2(\lambda) = -10\lambda_1 + 10\lambda_2 \\ \text{s.a} \quad & -0.5\lambda_1 + 0.5\lambda_2 \geq 0 \\ & \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ & \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \text{ e resolva.} \end{aligned}$$

A solução do PPL associado a f_2 é $\lambda^* = (0,1)^t$ e $\xi_1(\lambda^*) = 0,5$, o que significa que a variável f_2 é não eficiente. O mesmo ocorre com f_3 pois a solução do PPL associado é $\lambda^* = (0,1)^t$ e $\xi_2(\lambda^*) = 10$.

Passo 6: Como todas as variáveis são não eficientes, pare. A solução de melhor compromisso para o PPLMO foi obtida na iteração NI=3 é $x^* = (6,7)^t$.

Observações:

1) Os vetores de tradeoffs influenciam diretamente na identificação das variáveis quanto sua classificação como variável eficiente ou não eficiente, observe o exemplo Forma A (iteração 1, passo 5), e Forma B (iteração 1, passo 5). Um processo bem estruturado para determinar os vetores de tradeoffs é conveniente, pois evita que erros humanos deturpem o problema em questão.

2) No passo 5 do algoritmo, são identificadas as variáveis eficientes e, no passo 6, utiliza-se a função utilidade para criar as restrições que irão limitar o domínio viável para a escolha do novo conjunto de pesos.

O método de ZW necessita de um conjunto inicial de pesos, de uma função utilidade e, a cada iteração de um conjunto de vetores de tradeoffs. Todos estes dados devem ser fornecidos pelo usuário, para que se possa obter a solução de melhor compromisso para o problema multi-objetivo. Surgem, então, questões como:

a) O que acontece com a solução do PPLMO se fornecermos diferentes

vetores de tradeoffs?

b) Mudando a função utilidade, o que acontece com a solução do PPLMO?

c) Fornecendo diferentes pesos iniciais, o que acontece com a solução do PPLMO?

Das Formas A e B conclui-se que a apresentação de diferentes vetores de tradeoffs pode levar a diferentes soluções de melhor compromisso, respondendo assim a primeira questão.

Para responder as duas últimas perguntas serão resolvidos vários problemas multi-objetivo pelo método de ZW. Serão considerados funções utilidade diferentes, pesos iniciais diferentes e tradeoffs diferentes (processo aleatório). Os problemas também serão resolvidos pelas propostas A e B, pelo método de ZM e pelo método de ZW usando o simplex multi-objetivo. As soluções servirão para fazer a análise comparativa.

Zimmermann

Para resolver o problema utilizando este método, é necessário criar as funções de pertinência. Para isso deve-se resolver os PPLs

$$\begin{array}{l} \text{max} \quad -x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad -1x_1 + 3x_2 \leq 21 \\ \quad \quad 1x_1 + 3x_2 \leq 27 \\ \text{PPL}_1 \quad 4x_1 + 3x_2 \leq 45 \\ \quad \quad 3x_1 + 1x_2 \leq 30 \\ \quad \quad x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

A solução é $x_1^* = (0,7)^t$.

$$\begin{array}{l} \text{max} \quad 2x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad -1x_1 + 3x_2 \leq 21 \\ \quad \quad 1x_1 + 3x_2 \leq 27 \\ \text{PPL}_2 \quad 4x_1 + 3x_2 \leq 45 \\ \quad \quad 3x_1 + 1x_2 \leq 30 \\ \quad \quad x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

A solução é $x_2^* = (9,3)^t$.

Além disso $f_1(x_1^*)=14$, $f_1(x_2^*) = -3$ e $\min_1 = \{f_1(x_1^*), f_1(x_2^*)\} = -3$
 $f_2(x_1^*)= 7$, $f_2(x_2^*) = 21$ e $\min_2 = \{f_2(x_1^*), f_2(x_2^*)\} = 7$.

Para o conjunto difuso do tipo "soluções aceitáveis com respeito à função objetivo $f_1(x)$ " a função de pertinência associada é:

$$\mu_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } f_1(x) \leq -3 \\ \frac{(-x_1 + 2x_2) + 3}{17}, & \text{se } -3 < f_1(x) < 14 \\ 1, & \text{se } f_1(x) \geq 14. \end{cases}$$

Para o conjunto difuso do tipo "soluções aceitáveis com respeito à função objetivo $f_2(x)$ ", a função de pertinência associada é:

$$\mu_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } f_2(x) \leq 7 \\ \frac{(2x_1 + 1x_2) - 7}{14}, & \text{se } 7 < f_2(x) < 21 \\ 1, & \text{se } f_2(x) \geq 21. \end{cases}$$

Agora basta escrever o problema multi-objetivo na forma P_3 , isto é,

$$\begin{aligned}
& \max \lambda \\
& \text{s.a. } \lambda - (-x_1 + 2x_2) \leq 0 \\
& \quad \lambda - (2x_1 + 1x_2) \leq 0 \\
& \quad -1x_1 + 3x_2 \leq 21 \\
& \quad 1x_1 + 3x_2 \leq 27 \\
& \quad 4x_1 + 3x_2 \leq 45 \\
& \quad 3x_1 + 1x_2 \leq 30 \\
& \quad x_1, x_2 \geq 0 \\
& \quad \lambda \geq 0.
\end{aligned}$$

Aplicando o simplex vem $\lambda^* = 0.74$ e $x^* = (5.03, 7.32)^t$. Assim a solução para o problema multi-objetivo é

$$\begin{aligned}
x^* &= (5.03, 7.32)^t, \\
f_1(x^*) &= 9.61, \\
f_2(x^*) &= 17.38 \text{ e} \\
f_1(x^*) + f_2(x^*) &= 26.99.
\end{aligned}$$

$\lambda^* = 0.74$, o que significa que com 74% de possibilidade a solução $x^* = (5.03, 7.32)^t$ é "ótima" para o problema multi-objetivo.

Proposta A

A proposta A transforma o PPLMO em um problema da forma (P_o)

$$\begin{aligned}
\max \quad & \lambda \\
\text{s.a} \quad & \lambda - (-1x_1 + 2x_2) \leq 0 \\
& \lambda - (2x_1 + 1x_2) \leq 0 \\
& -1x_1 + 3x_2 \leq 21 \\
& 1x_1 + 3x_2 \leq 27 \\
& 4x_1 + 3x_2 \leq 45 \\
& 3x_1 + 1x_2 \leq 30 \\
& x_1, x_2, \lambda \geq 0.
\end{aligned}$$

Utilizando o método simplex para resolver o problema acima, vem $\lambda^* = 13.125$, $x^* = (2.625, 7.875)^t$. A solução para o problema multi-objetivo é $x^* = (2.625, 7.875)^t$,

$$\begin{aligned}
f_1(x^*) &= 13.125, \\
f_2(x^*) &= 13.125, \\
f_1(x^*) + f_2(x^*) &= 26.25.
\end{aligned}$$

Proposta B

Escrevendo o problema multi-objetivo na forma de (P_7) tem-se

$$\begin{aligned}
\max \quad & \lambda_1 + \lambda_2 \\
\text{s.a} \quad & \lambda_1 - (-1x_1 + 2x_2) \leq 0 \\
& \lambda_2 - (2x_1 + 1x_2) \leq 0 \\
& -1x_1 + 3x_2 \leq 21 \\
& 1x_1 + 3x_2 \leq 27 \\
& 4x_1 + 3x_2 \leq 45 \\
& 3x_1 + 1x_2 \leq 30 \\
& x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Usando o método simplex para resolver o problema acima, vem $\lambda_1^* = 13$, $\lambda_2^* = 14$ e $x^* = (3,8)^t$. A solução para o problema multi-objetivo é $x^* = (3,8)^t$,

$$\begin{aligned} f_1(x^*) &= 13, \\ f_2(x^*) &= 14, \\ f_1(x^*) + f_2(x^*) &= 27. \end{aligned}$$

Retomando o exemplo 1

$$\begin{aligned} \max f_1(x) &= -x_1 + 2x_2 \\ \max f_2(x) &= 2x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad -x_1 + 3x_2 &\leq 21 \\ x_1 + 3x_2 &\leq 27 \\ 4x_1 + 3x_2 &\leq 45 \\ 3x_1 + x_2 &\leq 30 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

E usando o software desenvolvido para resolver o problema obtém-se as seguintes soluções:

Proposta A

$$\lambda^* = 13.125$$

$$x^* = (2.6250, 7.8750)^t$$

$$f_1(x^*) = 13.125$$

$$f_2(x^*) = 13.125$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) = 26.25$$

tempo de CPU = 5 centésimos de segundos (cent.)

Proposta B

$$\lambda_1^* = 13$$

$$\lambda_2^* = 14$$

$$x^* = (3,8)^t$$

$$f_1(x^*) = 13$$

$$f_2(x^*) = 14$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) = 27$$

tempo de CPU = 6 cent.

Método de Zimmermann

$$\lambda^* = 0.7419$$

$$x^* = (5.0323, 7.3226)^t$$

$$f_1(x^*) = 9.6129$$

$$f_2(x^*) = 17.3871$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) = 27$$

tempo de GPU = 6 cent.

Método de ZW - usando
simplex multi-objetivo

$$U(u_1, u_2) = 0.58u_1 + 0.42u_2$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5$$

$$V_0 = 13.4994$$

$$x^* = (3, 8)^t$$

$$f_1(x^*) = 13$$

$$f_2(x^*) = 14$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) = 27$$

tempo de GPU = 50 cent.

Método de ZW - usando tradeoffs aleatórios

Seja $T = \{A = \langle(-1, 2), (0.1, -3)\rangle, B = \langle(-4, 5), (2, -1)\rangle\}$

$G = \langle(0.1, -0.1), (0.2, -0.2)\rangle, D = \langle(-3, 5), (4.5, -2.5)\rangle$

$E = \langle(0.7, -0.2), (-0.1, 1.2)\rangle, F = \langle(-1.3, 4.1), (3.2, -1.8)\rangle$

$G = \langle(-0.7, 0.2), (-0.1, 1.2)\rangle, H = \langle(-4.5, 1), (-1, 2)\rangle$

$I = \langle(3.2, -1), (4, -2)\rangle, J = \langle(-0.5, 0.5), (-10, 10)\rangle$

o conjunto de tradeoffs que serão fornecidos para o tomador de decisão. Estes tradeoffs foram escolhidos arbitrariamente.

A solução do problema, considerando diferentes articulações é

Quadro 1

	Fc. Utilidade	$U(u_1, u_2) = 0.64u_1 + 0.36u_2$
Tradeoffs	Pesos iniciais	$\lambda_1 = 0.333$ e $\lambda_2 = 0.666$
	VO= 15.3180	$X^* = (6, 7)^t$
G	$f_1(X^*) = 8$	$f_2(X^*) = 19$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 27$	Tempo de CPU= 6cent.
	VO= 13.4463	$X^* = (3, 8)^t$
A - B - C	$f_1(X^*) = 13$	$f_2(X^*) = 14$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 27$	Tempo de CPU= 33 cent.
	VO= 16.5433	$X^* = (6, 7)^t$
G - E - J	$f_1(X^*) = 8$	$f_2(X^*) = 19$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 27$	Tempo de CPU= 33 cent.
	VO= 13.4443	$X^* = (3, 8)^t$
F-G-B-J	$f_1(X^*) = 13$	$f_2(X^*) = 14$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 27$	Tempo de CPU= 77cent
	VO= 13.3749	$X^* = (3, 8)^t$
E-D-G-H-I-J	$f_1(X^*) = 13$	$f_2(X^*) = 14$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 27$	Tempo de CPU= 1 seg e 43cent.

Quadro 2

	Fc. Utilidade	$U(u_1, u_2) = 0.64u_1 + 0.36u_2$
Tradeoffs	Pesos iniciais	$\lambda_1 = 0.666$ e $\lambda_2 = 0.333$
	VO= 13.3222	$X^* = (3, 8)^t$
C	$f_1(X^*) = 13$	$f_2(X^*) = 14$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 27$	Tempo de CPU= 6cent.
	VO= 13.4443	$X^* = (3, 8)^t$
A - B - C	$f_1(X^*) = 13$	$f_2(X^*) = 14$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 27$	Tempo de CPU= 43 cent.
	VO= 16.5433	$X^* = (6, 7)^t$
G - E - J	$f_1(X^*) = 8$	$f_2(X^*) = 19$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 27$	Tempo de CPU= 49 cent.
	VO= 13.4443	$X^* = (3, 8)^t$
F-G-B-J	$f_1(X^*) = 13$	$f_2(X^*) = 14$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 27$	Tempo de CPU= 77cent
	VO= 13.3749	$X^* = (3, 8)^t$
E-D-G-H-I-J	$f_1(X^*) = 13$	$f_2(X^*) = 14$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 27$	Tempo de CPU= 1 seg e 43cent.

Quadro 3

	Fc. Utilidade	$U(u_1, u_2) = 0.36u_1 + 0.64u_2$
Tradeoffs	Pesos iniciais	$\lambda_1 = 0.333$ e $\lambda_2 = 0.666$
	VO= 15.3180	$X^* = (6, 7)^t$
C	$f_1(X^*) = 8$	$f_2(X^*) = 19$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 27$	Tempo de CPU= 6cent.
	VO= 13.4463	$X^* = (3, 8)^t$
A - B - C	$f_1(X^*) = 13$	$f_2(X^*) = 14$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 27$	Tempo de CPU= 33 cent.
	VO= 16.5433	$X^* = (6, 7)^t$
G - E - J	$f_1(X^*) = 8$	$f_2(X^*) = 19$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 27$	Tempo de CPU= 33 cent.
	VO= 15.0400	$X^* = (6, 7)^t$
F-G-B-J	$f_1(X^*) = 8$	$f_2(X^*) = 19$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 27$	Tempo de CPU= 77cent
	VO= 15.3297	$X^* = (6, 7)^t$
E-D-G-H-I-J	$f_1(X^*) = 8$	$f_2(X^*) = 19$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 27$	Tempo de CPU= 1 seg e 54cent.

Quadro 4

	Fc. Utilidade	$U(u_1, u_2) = 0.36u_1 + 0.64u_2$
Tradeoffs	Pesos iniciais	$\lambda_1 = 0.666$ e $\lambda_2 = 0.333$
	VO= 13.3222	$X^* = (3, 8)^t$
C	$f_1(X^*) = 13$	$f_2(X^*) = 14$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 27$	Tempo de CPU= 6cent.
	VO= 13.4463	$X^* = (3, 8)^t$
A - B - C	$f_1(X^*) = 13$	$f_2(X^*) = 14$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 27$	Tempo de CPU= 33 cent.
	VO= 16.5433	$X^* = (6, 7)^t$
G - E - J	$f_1(X^*) = 8$	$f_2(X^*) = 19$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 27$	Tempo de CPU= 33 cent.
	VO= 15.0444	$X^* = (6, 7)^t$
F-G-B-J	$f_1(X^*) = 8$	$f_2(X^*) = 19$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 27$	Tempo de CPU= 77cent
	VO= 15.0699	$X^* = (6, 7)^t$
E-D-G-H-I-J	$f_1(X^*) = 8$	$f_2(X^*) = 19$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 27$	Tempo de CPU= 1 seg e 43cent.

Obs.: VO é o valor ótimo do PPL que produziu a última solução eficiente (de melhor compromisso).

Exemplo 2:

$$\begin{aligned} \max \quad & u_1 = f_1(x) = 2x_1 + x_2 \\ \max \quad & u_2 = f_2(x) = -x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 40 \\ & x_1 + x_2 \leq 50 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Soluções

Proposta A

$$\lambda^* = 16.4706$$

$$x^* = (4.7059, 7.0588)^t$$

$$f_1(x^*) = 16.4706$$

$$f_2(x^*) = 16.4706$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) = 32.9412$$

tempo de CPU = 6 cent.

Método de Zimmermann

$$\lambda^* = 0.5$$

$$x^* = (6.1818, 5.0909)^t$$

$$f_1(x^*) = 17.4545$$

$$f_2(x^*) = 9.0909$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) = 26.5455$$

tempo de CPU = 6 cent.

Proposta B

$$\lambda_1^* = 14.9091$$

$$\lambda_2^* = 28.1818$$

$$x^* = (2.3636, 10.1818)^t$$

$$f_1(x^*) = 14.9091$$

$$f_2(x^*) = 28.1818$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) = 43.0909$$

tempo de CPU = 6 cent.

Método de ZW - usando

simplex multi-objetivo

$$U(u_1, u_2) = 0.58u_1 + 0.42u_2$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5$$

$$VO = 16.4792$$

$$x^* = (2.3636, 10.1818)^t$$

$$f_1(x^*) = 14.9091$$

$$f_2(x^*) = 28.1818$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) = 43.0909$$

tempo de CPU = 38 cent.

Método de ZW - usando tradeoffs aleatórios

Os conjuntos de tradeoffs oferecidos ao tomador de decisão são os do conjunto T.

Quadro 5

	Fc. Utilidade	$U(u_1, u_2) = 0.64u_1 + 0.36u_2$
Tradeoffs	Pesos iniciais	$\lambda_1 = 0.333$ e $\lambda_2 = 0.666$
	VO= 23.7338	$X^* = (2.3636, 10.1818)^t$
C	$f_1(X^*) = 14.9091$	$f_2(X^*) = 28.1818$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 43.0909$	Tempo de CPU= 6cent.
	VO= 20.8066	$X^* = (2.3636, 10.1818)^t$
A - B - C	$f_1(X^*) = 14.9091$	$f_2(X^*) = 28.1818$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 43.0909$	Tempo de CPU= 44 cent.
	VO= 25.2116	$X^* = (2.3636, 10.1818)^t$
G - E - J	$f_1(X^*) = 14.9091$	$f_2(X^*) = 28.1818$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 43.0909$	Tempo de CPU= 51 cent.
	VO= 20.8066	$X^* = (2.3636, 10.1818)^t$
F-G-B-J	$f_1(X^*) = 14.9091$	$f_2(X^*) = 28.1818$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 43.0909$	Tempo de CPU= 73cent
	VO= 19.8847	$X^* = (2.3636, 10.1818)^t$
E-D-G-H-I-J	$f_1(X^*) = 14.9091$	$f_2(X^*) = 28.1818$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 43.0909$	Tempo de CPU= 1 seg e 29cent.

Quadro 6

	Fc. Utilidade	$U(u_1, u_2) = 0.64u_1 + 0.36u_2$
Tradeoffs	Pesos iniciais	$\lambda_1 = 0.666$ e $\lambda_2 = 0.333$
	VO= 19.3140	$X^* = (2.3636, 10.1818)^t$
C	$f_1(X^*) = 14.9091$	$f_2(X^*) = 28.1818$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 43.0909$	Tempo de CPU= 6cent.
	VO= 20.8066	$X^* = (2.3636, 10.1818)^t$
A - B - C	$f_1(X^*) = 14.9091$	$f_2(X^*) = 28.1818$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 43.0909$	Tempo de CPU= 43 cent.
	VO= 25.2116	$X^* = (2.3636, 10.1818)^t$
G - E - J	$f_1(X^*) = 14.9091$	$f_2(X^*) = 28.1818$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 43.0909$	Tempo de CPU= 49 cent.
	VO= 20.8066	$X^* = (2.3636, 10.1818)^t$
F-G-B-J	$f_1(X^*) = 14.9091$	$f_2(X^*) = 28.1818$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 43.0909$	Tempo de CPU= 65cent
	VO= 19.8847	$X^* = (2.3636, 10.1818)^t$
E-D-G-H-I-J	$f_1(X^*) = 14.9091$	$f_2(X^*) = 28.1818$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 43.0909$	Tempo de CPU= 1 seg e 27cent.

Quadro 7

	Fc. Utilidade	$U(u_1, u_2) = 0.36u_1 + 0.64u_2$
Tradeoffs	Pesos iniciais	$\lambda_1 = 0.333$ e $\lambda_2 = 0.666$
	VO= 23.7308	$X^* = (2.3636, 10.1818)^t$
C	$f_1(X^*) = 14.9091$	$f_2(X^*) = 28.1818$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 43.0909$	Tempo de CPU= 6cent.
	VO= 28.1818	$X^* = (2.3636, 10.1818)^t$
A - B - C	$f_1(X^*) = 14.9091$	$f_2(X^*) = 28.1818$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 43.0909$	Tempo de CPU= 39 cent.
	VO= 25.2176	$X^* = (2.3636, 10.1818)^t$
G - E - J	$f_1(X^*) = 14.9091$	$f_2(X^*) = 28.1818$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 43.0909$	Tempo de CPU= 39 cent.
	VO= 23.4036	$X^* = (2.3636, 10.1818)^t$
F-G-B-J	$f_1(X^*) = 14.9091$	$f_2(X^*) = 28.1818$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 43.0909$	Tempo de CPU= 67cent
	VO= 23.4397	$X^* = (2.3636, 10.1818)^t$
E-D-G-H-I-J	$f_1(X^*) = 14.9091$	$f_2(X^*) = 28.1818$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 43.0909$	Tempo de CPU= 1 seg e 49cent.

Quadro 8

	Fc. Utilidade	$U(u_1, u_2) = 0.36u_1 + 0.64u_2$
Tradeoffs	Pesos iniciais	$\lambda_1 = 0.666$ e $\lambda_2 = 0.333$
	VO= 19.3140	$X^* = (2.3636, 10.1818)^t$
C	$f_1(X^*) = 14.9091$	$f_2(X^*) = 28.1818$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 43.0909$	Tempo de CPU= 6cent.
	VO= 28.1818	$X^* = (2.3636, 10.1818)^t$
A - B - C	$f_1(X^*) = 14.9091$	$f_2(X^*) = 28.1818$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 43.0909$	Tempo de CPU= 44 cent.
	VO= 25.2176	$X^* = (2.3636, 10.1818)^t$
G - E - J	$f_1(X^*) = 14.9091$	$f_2(X^*) = 28.1818$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 43.0909$	Tempo de CPU= 39 cent.
	VO= 23.4036	$X^* = (2.3636, 10.1818)^t$
F-G-B-J	$f_1(X^*) = 14.9091$	$f_2(X^*) = 28.1818$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 43.0909$	Tempo de CPU= 71cent
	VO= 23.4397	$X^* = (2.3636, 10.1818)^t$
E-D-G-H-I-J	$f_1(X^*) = 14.9091$	$f_2(X^*) = 28.1818$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 43.0909$	Tempo de CPU=1 seg e 21cent.

Obs.: Para todos os vetores de tradeoffs, o ponto de melhor compromisso para o PPLMO foi o mesmo. Os VO foram distintos, isto significa que os respectivos conjuntos de pesos, que produziram a cada vez a melhor solução eficiente, foram distintos.

Exemplo 3:

Este exemplo foi extraído de [3].

$$\begin{aligned} \max u_1 = f_1(x) &= 0.1x_1 + 0.2x_2 \\ \max u_2 = f_2(x) &= 10x_1 - 5x_2 \\ \text{s.a. } -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_1 + x_2 &\leq 7 \\ x_1 &\leq 5 \\ x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Proposta A

$$\lambda^* = 1$$

$$x^* = (4, 3)^t$$

$$f_1(x^*) = 1$$

$$f_2(x^*) = 25$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) = 26$$

tempo de CPU = 11cent.

Proposta B

$$\lambda_1^* = 0.5$$

$$\lambda_2^* = 50$$

$$x^* = (5, 0)^t$$

$$f_1(x^*) = 0.5$$

$$f_2(x^*) = 50$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) = 50.5$$

tempo de CPU = 11cent.

Método de Zimmermann

$$\lambda^* = 0.6667$$

$$x^* = (5, 1.667)^t$$

$$f_1(x^*) = 0.8333$$

$$f_2(x^*) = 41.6667$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) = 42.50$$

tempo de CPU = 11 cent.

Método de ZW - usando

simplex multi-objetivo

$$U(u_1, u_2) = 0.58u_1 + 0.42u_2$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5$$

$$V_0 = 2.4134$$

$$x^* = (5, 0)^t$$

$$f_1(x^*) = 0.5 \quad f_2(x^*) = 50$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) = 50.5$$

tempo de CPU = 38 cent.

Método de ZW - usando tradeoffs aleatórios

Os conjuntos de tradeoffs oferecidos ao tomador de decisão são os do conjunto T.

Quadro 9

	Fc. Utilidade	$U(u_1, u_2) = 0.64u_1 + 0.36u_2$
Tradeoffs	Pesos iniciais	$\lambda_1 = 0.333$ e $\lambda_2 = 0.666$
	$VO = 33.4665$	$X^* = (5, 0)^t$
C	$f_1(X^*) = 0.5$	$f_2(X^*) = 50$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 50.5$	Tempo de CPU = 6cent.
	$VO = 22.4945$	$X^* = (5, 0)^t$
A - B - C	$f_1(X^*) = 0.5$	$f_2(X^*) = 50$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 50.5$	Tempo de CPU = 55 cent.
	$VO = 38.9450$	$X^* = (5, 0)^t$
G - E - J	$f_1(X^*) = 0.5$	$f_2(X^*) = 50$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 50.5$	Tempo de CPU = 55 cent.
	$VO = 22.4945$	$X^* = (5, 0)^t$
F-G-B-J	$f_1(X^*) = 0.5$	$f_2(X^*) = 50$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 50.5$	Tempo de CPU = 73cent
	$VO = 19.0563$	$X^* = (5, 0)^t$
E-D-G-H-I-J	$f_1(X^*) = 0.5$	$f_2(X^*) = 50$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 50.5$	Tempo de CPU = 1 seg e 36cent.

Quadro 10

	Fc. Utilidade	$U(u_1, u_2) = 0.64u_1 + 0.36u_2$
Tradeoffs	Pesos iniciais	$\lambda_1 = 0.666$ e $\lambda_2 = 0.333$
	VO= 16.9830	$X^* = (5,0)^t$
C	$f_1(X^*) = 0.5$	$f_2(X^*) = 50$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 50.5$	Tempo de CPU= 6cent.
	VO= 22.4945	$X^* = (5,0)^t$
A - B - C	$f_1(X^*) = 0.5$	$f_2(X^*) = 50$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 50.5$	Tempo de CPU= 48 cent.
	VO= 38.9450	$X^* = (5,0)^t$
G - E - J	$f_1(X^*) = 0.5$	$f_2(X^*) = 50$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 50.5$	Tempo de CPU= 34 cent.
	VO= 32.18	$X^* = (5,0)^t$
F-G-B-J	$f_1(X^*) = 0.5$	$f_2(X^*) = 50$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 50.5$	Tempo de CPU= 66cent
	VO= 32.3144	$X^* = (5,0)^t$
E-D-G-H-I-J	$f_1(X^*) = 0.5$	$f_2(X^*) = 50$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 50.5$	Tempo de CPU= 1 seg e 33cent.

Quadro 11

	Fc. Utilidade	$U(u_1, u_2) = 0.64u_1 + 0.36u_2$
Tradeoffs	Pesos iniciais	$\lambda_1 = 0.666$ e $\lambda_2 = 0.333$
	VO= 16.9830	$X^* = (5, 0)^t$
C	$f_1(X^*) = 0.5$	$f_2(X^*) = 50$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 50.5$	Tempo de CPU= 6cent.
	VO= 22.4945	$X^* = (5, 0)^t$
A - B - C	$f_1(X^*) = 0.5$	$f_2(X^*) = 50$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 50.5$	Tempo de CPU= 48 cent.
	VO= 38.9450	$X^* = (5, 0)^t$
G - E - J	$f_1(X^*) = 0.5$	$f_2(X^*) = 50$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 50.5$	Tempo de CPU= 34 cent.
	VO= 32.18	$X^* = (5, 0)^t$
F-G-B-J	$f_1(X^*) = 0.5$	$f_2(X^*) = 50$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 50.5$	Tempo de CPU= 66cent
	VO= 32.3144	$X^* = (5, 0)^t$
E-D-G-H-I-J	$f_1(X^*) = 0.5$	$f_2(X^*) = 50$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 50.5$	Tempo de CPU= 1 seg e 33cent.

Quadro 12

	Fc. Utilidade	$U(u_1, u_2) = 0.36u_1 + 0.64u_2$
Tradeoffs	Pesos iniciais	$\lambda_1 = 0.333$ e $\lambda_2 = 0.666$
	VO= 33.4665	$X^* = (5,0)^t$
C	$f_1(X^*) = 0.5$	$f_2(X^*) = 50$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 50.5$	Tempo de CPU= 16 cent.
	VO= 50	$X^* = (5,0)^t$
A - B - C	$f_1(X^*) = 0.5$	$f_2(X^*) = 50$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 50.5$	Tempo de CPU= 48 cent.
	VO= 38.9450	$X^* = (5,0)^t$
G - E - J	$f_1(X^*) = 0.5$	$f_2(X^*) = 50$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 50.5$	Tempo de CPU= 38 cent.
	VO= 32.18	$X^* = (5,0)^t$
F-G-B-J	$f_1(X^*) = 0.5$	$f_2(X^*) = 50$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 50.5$	Tempo de CPU= 66cent
	VO= 32.3144	$X^* = (5,0)^t$
E-D-G-H-I-J	$f_1(X^*) = 0.5$	$f_2(X^*) = 50$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 50.5$	Tempo de CPU= 1 seg e 33cent.

Quadro 13

	Fc. Utilidade	$U(u_1, u_2) = 0.36u_1 + 0.64u_2$
Tradeoffs	Pesos iniciais	$\lambda_1 = 0.666$ e $\lambda_2 = 0.333$
	VO= 16.9830	$X^* = (5,0)^t$
C	$f_1(X^*) = 0.5$	$f_2(X^*) = 50$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 50.5$	Tempo de CPU= 6cent.
	VO= 50	$X^* = (5,0)^t$
A - B - C	$f_1(X^*) = 0.5$	$f_2(X^*) = 50$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 50.5$	Tempo de CPU= 38 cent.
	VO= 38.9450	$X^* = (5,0)^t$
G - E - J	$f_1(X^*) = 0.5$	$f_2(X^*) = 50$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 50.5$	Tempo de CPU= 34 cent.
	VO= 32.18	$X^* = (5,0)^t$
F-G-B-J	$f_1(X^*) = 0.5$	$f_2(X^*) = 50$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 50.5$	Tempo de CPU= 66cent
	VO= 32.3144	$X^* = (5,0)^t$
E-D-G-H-I-J	$f_1(X^*) = 0.5$	$f_2(X^*) = 50$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 50.5$	Tempo de CPU= 1 seg e 33cent.

Exemplo 4:

Este exemplo foi extraído de [3].

$$\begin{aligned} \max u_1 = f_1(x) &= -2x_1 + 1x_2 \\ \max u_2 = f_2(x) &= 3x_1 - 1x_2 \\ \text{s.a } -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_1 + x_2 &\leq 7 \\ x_1 &\leq 5 \\ x_2 &\leq 3 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Soluções:

Proposta A

$$\lambda^* = 0.333$$

$$x^* = (0.6667, 1.6667)^t$$

$$f_1(x^*) = 0.3333$$

$$f_2(x^*) = 0.3333$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) = 0.6666$$

tempo de CPU = 11 cent.

Proposta B

$$\lambda_1^* = 0$$

$$\lambda_2^* = 1$$

$$x^* = (1, 2)^t$$

$$f_1(x^*) = 0$$

$$f_2(x^*) = 1$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) = 1$$

tempo de CPU = 11 cent.

Método de Zimmermann

$$\lambda^* = 0.5385$$

$$x^* = (3.5385, 3)^t$$

$$f_1(x^*) = -4.0769$$

$$f_2(x^*) = 7.61547$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) = 3.5385$$

tempo de CPU = 11 cent.

Método de ZW - usando
simplex multi-objetivo

$$U(u_1, u_2) = 0.58u_1 + 0.42u_2$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5$$

$$x^* = (4, 3)^t$$

$$VO = 0.9980$$

$$f_1(x^*) = -5$$

$$f_2(x^*) = 9$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) = 4$$

tempo de CPU = 1s e 15 cent.

Obs.: Nas propostas A e B respectivamente, está incluído que λ e λ_i , $i=1,2,\dots,p$, devem ser sempre não negativas. No caso das funções objetivo resultarem negativas, deve-se estudar a possibilidade das variáveis λ e λ_i , $i=1,\dots,p$, assumirem qualquer valor.

Método de ZW - usando tradeoffs aleatórios

Os conjuntos de tradeoffs oferecidos ao tomador de decisão são os do conjunto T.

Quadro 14

	Fc. Utilidade	$U(u_1, u_2) = 0.64u_1 + 0.36u_2$
Tradeoffs	Pesos iniciais	$\lambda_1 = 0.333$ e $\lambda_2 = 0.666$
	$VO = 6.6600$	$X^* = (5, 0)^t$
C	$f_1(X^*) = -10$	$f_2(X^*) = 15$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 5$	Tempo de CPU = 5cent.
	$VO = 1.3310$	$X^* = (5, 2)^t$
A - B - C	$f_1(X^*) = -8$	$f_2(X^*) = 13$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 5$	Tempo de CPU = 44 cent.
	$VO = 9.41670$	$X^* = (5, 0)^t$
G - E - J	$f_1(X^*) = -10$	$f_2(X^*) = 15$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 5$	Tempo de CPU = 38 cent.
	$VO = 1.3310$	$X^* = (5, 2)^t$
F-G-B-J	$f_1(X^*) = -8$	$f_2(X^*) = 13$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 5$	Tempo de CPU = 60cent
	$VO = 0.4995$	$X^* = (2, 3)^t$
E-D-G-H-I-J	$f_1(X^*) = -1$	$f_2(X^*) = 3$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 2$	Tempo de CPU = 1 seg e 15cent.

Quadro 15

	Fc. Utilidade	$U(u_1, u_2) = 0.64u_1 + 0.36u_2$
Tradeoffs	Pesos iniciais	$\lambda_1 = 0.666$ e $\lambda_2 = 0.333$
	$VO = 0.3330$	$X^* = (0, 1)^t$
C	$f_1(X^*) = 1$	$f_2(X^*) = -1$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 0$	Tempo de CPU = 5cent.
	$VO = 1.3310$	$X^* = (5, 2)^t$
A - B - C	$f_1(X^*) = -8$	$f_2(X^*) = 13$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 5$	Tempo de CPU = 39 cent.
	$VO = 9.4167$	$X^* = (5, 0)^t$
G - E - J	$f_1(X^*) = -10$	$f_2(X^*) = 15$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 5$	Tempo de CPU = 45 cent.
	$VO = 1.3310$	$X^* = (5, 2)^t$
F-G-B-J	$f_1(X^*) = -8$	$f_2(X^*) = 13$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 5$	Tempo de CPU = 67 cent.
	$VO = 0.4995$	$X^* = (2, 3)^t$
E-D-G-H-I-J	$f_1(X^*) = -1$	$f_2(X^*) = 3$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 2$	Tempo de CPU = 1 seg e 21cent.

Quadro 16

	Fc. Utilidade	$U(u_1, u_2) = 0.36u_1 + 0.64u_2$
Tradeoffs	Pesos iniciais	$\lambda_1 = 0.333$ e $\lambda_2 = 0.666$
	$VO = 6.6600$	$X^* = (5, 0)^t$
C	$f_1(X^*) = -10$	$f_2(X^*) = 15$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 5$	Tempo de CPU = 5cent.
	$VO = 15$	$X^* = (5, 0)^t$
A - B - C	$f_1(X^*) = -10$	$f_2(X^*) = 15$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 5$	Tempo de CPU = 44 cent.
	$VO = 9.4167$	$X^* = (5, 0)^t$
G - E - J	$f_1(X^*) = -10$	$f_2(X^*) = 15$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 5$	Tempo de CPU = 38 cent.
	$VO = 6$	$X^* = (5, 0)^t$
F-G-B-J	$f_1(X^*) = 5$	$f_2(X^*) = 0$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 5$	Tempo de CPU = 67 cent.
	$VO = 6.0679$	$X^* = (5, 0)^t$
E-D-G-H-I-J	$f_1(X^*) = -10$	$f_2(X^*) = 15$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 5$	Tempo de CPU = 1 seg e 20cent.

Quadro 17

	Fc. Utilidade	$U(u_1, u_2) = 0.36u_1 + 0.64u_2$
Tradeoffs	Pesos iniciais	$\lambda_1 = 0.666$ e $\lambda_2 = 0.333$
	$VO = 0.3330$	$X^* = (0, 1)^t$
C	$f_1(X^*) = 1$	$f_2(X^*) = -1$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 0$	Tempo de CPU = 5cent.
	$VO = 15$	$X^* = (5, 0)^t$
A - B - C	$f_1(X^*) = -10$	$f_2(X^*) = 15$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 5$	Tempo de CPU = 49 cent.
	$VO = 9.4167$	$X^* = (5, 0)^t$
G - E - J	$f_1(X^*) = -10$	$f_2(X^*) = 15$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 5$	Tempo de CPU = 38 cent.
	$VO = 6$	$X^* = (5, 0)^t$
F-G-B-J	$f_1(X^*) = -10$	$f_2(X^*) = 15$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 5$	Tempo de CPU = 59 cent.
	$VO = 6.0679$	$X^* = (5, 0)^t$
E-D-G-H-I-J	$f_1(X^*) = -10$	$f_2(X^*) = 15$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 5$	Tempo de CPU = 1 seg e 25cent.

Exemplo 5:

Este exemplo foi extraído de [3].

$$\begin{aligned} \max u_1 = f_1(x) &= -10x_1 \\ \max u_2 = f_2(x) &= 0.1x_1 + 0.2x_2 \\ \text{s.a. } -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_1 + x_2 &\leq 7 \\ x_1 &\leq 5 \\ x_2 &\leq 3 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Soluções:

Proposta A

$$\lambda^* = 0$$

$$x^* = (0, 0)^t$$

$$f_1(x^*) = 0$$

$$f_2(x^*) = 0$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) = 0$$

tempo de CPU = 5 centésimos de segundos (cent.)

Proposta B

$$\lambda_1^* = 0$$

$$\lambda_2^* = 0.2$$

$$x^* = (0, 1)^t$$

$$f_1(x^*) = 0$$

$$f_2(x^*) = 0.2$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) = 0.2$$

tempo de CPU = 11cent.

Método de Zimmermann

$$\lambda^* = 0.6364$$

$$x^* = (1.4545, 2.4545)^t$$

$$f_1(x^*) = -14.5455$$

$$f_2(x^*) = 0.6364$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) = -13.9091$$

tempo de CPU = 11 cent.

Método de ZW - usando

simplex multi-objetivo

$$U(u_1, u_2) = 0.58u_1 + 0.42u_2$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5$$

$$V_0 = 0.1942$$

$$x^* = (0.1)^t$$

$$f_1(x^*) = 0$$

$$f_2(x^*) = 0.2$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) = 0.2$$

tempo de CPU = 39 cent.

Método de ZW - usando tradeoffs aleatórios

Os conjuntos de tradeoffs oferecidos ao tomador de decisão são os do conjunto T.

Quadro 18

	Fc. Utilidade	$U(u_1, u_2) = 0.64u_1 + 0.36u_2$
Tradeoffs	Pesos iniciais	$\lambda_1 = 0.333$ e $\lambda_2 = 0.666$
C	$VO = 0.1332$ $f_1(x^*) = 0$ $f_1(x^*) + f_2(x^*) = 0.2$	$x^* = (0, 1)^t$ $f_2(x^*) = 0.2$ Tempo de CPU = 5cent.
A - B - C	$VO = 0.0889$ $f_1(x^*) = 0$ $f_1(x^*) + f_2(x^*) = 0.2$	$x^* = (0, 1)^t$ $f_2(x^*) = 0.2$ Tempo de CPU = 49 cent.
G - E - J	$VO = 0.1553$ $f_1(x^*) = 0$ $f_1(x^*) + f_2(x^*) = 0.2$	$x^* = (0, 1)^t$ $f_2(x^*) = 0.2$ Tempo de CPU = 44 cent.
F-G-B-J	$VO = 0.0899$ $f_1(x^*) = 0$ $f_1(x^*) + f_2(x^*) = 0.2$	$x^* = (0, 1)^t$ $f_2(x^*) = 0.2$ Tempo de CPU = 60 cent.
E-D-G-H-I-J	$VO = 0.0750$ $f_1(x^*) = 0$ $f_1(x^*) + f_2(x^*) = 0.2$	$x^* = (0, 1)^t$ $f_2(x^*) = 0.2$ Tempo de CPU = 1 seg e 27cent.

Quadro 19

	Fc. Utilidade	$U(u_1, u_2) = 0.64u_1 + 0.36u_2$
Tradeoffs	Pesos iniciais	$\lambda_1 = 0.666$ e $\lambda_2 = 0.333$
	$VO = 0.0666$	$X^* = (0, 1)^t$
G	$f_1(X^*) = 0$	$f_2(X^*) = 0.2$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 0.2$	Tempo de CPU = 5cent.
	$VO = 0.0889$	$X^* = (0, 1)^t$
A - B - C	$f_1(X^*) = 0$	$f_2(X^*) = 0.2$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 0.2$	Tempo de CPU = 44 cent.
	$VO = 0.1553$	$X^* = (0, 1)^t$
G - E - J	$f_1(X^*) = 0$	$f_2(X^*) = 0.2$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 0.2$	Tempo de CPU = 44 cent.
	$VO = 0.0899$	$X^* = (0, 1)^t$
F-G-B-J	$f_1(X^*) = 0$	$f_2(X^*) = 0.2$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 0.2$	Tempo de CPU = 60 cent.
	$VO = 0.0750$	$X^* = (0, 1)^t$
E-D-G-H-I-J	$f_1(X^*) = 0$	$f_2(X^*) = 0.2$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 0.2$	Tempo de CPU = 1 seg e 27cent.

Quadro 20

	Fc. utilidade	$U(u_1, u_2) = 0.36u_1 + 0.64u_2$
Tradeoffs	Pesos iniciais	$\lambda_1 = 0.333$ e $\lambda_2 = 0.666$
C	$VO = 0.1932$ $f_1(x^*) = 0$ $f_1(x^*) + f_2(x^*) = 0.2$	$x^* = (0, 1)^t$ $f_2(x^*) = 0.2$ Tempo de CPU = 5cent.
A - B - C	$VO = 1$ $f_1(x^*) = -40$ $f_1(x^*) + f_2(x^*) = -39$	$x^* = (4, 3)^t$ $f_2(x^*) = 1$ Tempo de CPU = 44 cent.
G - E - J	$VO = 0.1553$ $f_1(x^*) = 0$ $f_1(x^*) + f_2(x^*) = 0.2$	$x^* = (0, 1)^t$ $f_2(x^*) = 0.2$ Tempo de CPU = 44 cent.
F-G-B-J	$VO = 0.1280$ $f_1(x^*) = 0$ $f_1(x^*) + f_2(x^*) = 0.2$	$x^* = (0, 1)^t$ $f_2(x^*) = 0.2$ Tempo de CPU = 60 cent.
E-D-G-H-I-J	$VO = 0.1285$ $f_1(x^*) = 0$ $f_1(x^*) + f_2(x^*) = 0.2$	$x^* = (0, 1)^t$ $f_2(x^*) = 0.2$ Tempo de CPU = 1 seg e 27cent.

Quadro 21

	Fc. Utilidade	$U(u_1, u_2) = 0.36u_1 + 0.64u_2$
Tradeoffs	Pesos iniciais	$\lambda_1 = 0.666$ e $\lambda_2 = 0.333$
	$VO = 0.0666$	$X^* = (0, 1)^t$
C	$f_1(X^*) = 0$	$f_2(X^*) = 0.2$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 0.2$	Tempo de CPU = 5cent.
	$VO = 1$	$X^* = (4, 3)^t$
A - B - C	$f_1(X^*) = -40$	$f_2(X^*) = 1$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = -39$	Tempo de CPU = 39 cent.
	$VO = 0.1553$	$X^* = (0, 1)^t$
G - E - J	$f_1(X^*) = 0$	$f_2(X^*) = 0.2$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 0.2$	Tempo de CPU = 44 cent.
	$VO = 0.1280$	$X^* = (0, 1)^t$
F-G-B-J	$f_1(X^*) = 0$	$f_2(X^*) = 0.2$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 0.2$	Tempo de CPU = 61 cent.
	$VO = 0.1285$	$X^* = (0, 1)^t$
E-D-G-H-I-J	$f_1(X^*) = 0$	$f_2(X^*) = 0.2$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 0.2$	Tempo de CPU = 1 seg e 26cent.

Exemplo 6:

Este exemplo foi extraído de [14].

$$\begin{aligned} \max u_1 = f_1(x) &= -1x_1 + 3x_2 \\ \max u_2 = f_2(x) &= 1.5x_1 + 2.5x_2 \\ \text{s.a } -x_1 + 2x_2 &\leq 18 \\ 4x_1 + 3x_2 &\leq 40 \\ 3x_1 + 1x_2 &\leq 25 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Soluções:

Proposta A

$$\lambda^* = 28.1818$$

$$x^* = (2.3636, 10.1818)^t$$

$$f_1(x^*) = 28.1818$$

$$f_2(x^*) = 29$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) = 57.1818$$

tempo de CPU = 5 cent.

Proposta B

$$\lambda_1^* = 28.1818$$

$$\lambda_2^* = 29$$

$$x^* = (2.3636, 10.1818)^t$$

$$f_1(x^*) = 28.1818$$

$$f_2(x^*) = 29$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) = 57.1818$$

tempo de CPU = 11cent.

Método de Zimmermann

$$\lambda^* = 1$$

$$x^* = (2.3636, 10.1818)^t$$

$$f_1(x^*) = 28.1818$$

$$f_2(x^*) = 29$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) = 57.1818$$

tempo de CPU = 11 cent.

Método de ZW - usando

simplex multi-objetivo

$$U(u_1, u_2) = 0.58u_1 + 0.42u_2$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5$$

$$VO = 28.5909$$

$$x^* = (2.3636, 10.1818)^t$$

$$f_1(x^*) = 28.1818$$

$$f_2(x^*) = 29$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) = 57.1818$$

tempo de CPU = 11 cent.

Método de ZW- usando tradeoffs aleatórios

Os conjuntos de tradeoffs oferecidos ao tomador de decisão são os do conjunto T.

Quadro 22

	Fc. Utilidade	$U(u_1, u_2) = 0.64u_1 + 0.36u_2$
Tradeoffs	Pesos iniciais	$\lambda_1 = 0.333$ e $\lambda_2 = 0.666$
C	VO= 28.6985 $f_1^*(X^*) = 28.1818$ $f_1^*(X^*) + f_2^*(X^*) = 57.1818$	$X^* = (2.3636, 10.1818)^t$ $f_2^*(X^*) = 29$ Tempo de CPU= 5cent.
A - B - C	VO= 28.8173 $f_1^*(X^*) = 28.1818$ $f_1^*(X^*) + f_2^*(X^*) = 57.1818$	$X^* = (2.3636, 10.1818)^t$ $f_2^*(X^*) = 29$ Tempo de CPU= 39 cent.
G - E - J	VO= 28.8173 $f_1^*(X^*) = 28.1818$ $f_1^*(X^*) + f_2^*(X^*) = 57.1818$	$X^* = (2.3636, 10.1818)^t$ $f_2^*(X^*) = 29$ Tempo de CPU= 44 cent.
F-G-B-J	VO= 28.9992 $f_1^*(X^*) = 28.1818$ $f_1^*(X^*) + f_2^*(X^*) = 57.1818$	$X^* = (2.3636, 10.1818)^t$ $f_2^*(X^*) = 29$ Tempo de CPU= 61 cent.
E-D-G-H-I-J	VO= 28.4885 $f_1^*(X^*) = 28.1818$ $f_1^*(X^*) + f_2^*(X^*) = 57.1818$	$X^* = (2.3636, 10.1818)^t$ $f_2^*(X^*) = 29$ Tempo de CPU= 1 seg e 26cent.

Exemplo 7:

Este exemplo foi extraído de [13].

$$\begin{aligned} \max u_1 = f_1(x) &= x_1 \\ \max u_2 = f_2(x) &= x_2 \\ \max u_3 = f_3(x) &= x_3 \\ \text{s.a } 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq 18 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 10 \\ 9x_1 + 20x_2 + 7x_3 &\leq 96 \\ 7x_1 + 20x_2 + 9x_3 &\leq 96 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Soluções:

Proposta A

$$\lambda^* = 2.25$$

$$x^* = (2.25, 2.25, 2.25)^t$$

$$f_1(x^*) = 2.25$$

$$f_2(x^*) = 2.25$$

$$f_3(x^*) = 2.25$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) + f_3(x^*) = 6.75$$

tempo de CPU = 43 cent.

Proposta B

$$\lambda_1^* = 4$$

$$\lambda_2^* = 3$$

$$\lambda_3^* = 0$$

$$x^* = (4, 3, 0)^t$$

$$f_1(x^*) = 4$$

$$f_2(x^*) = 3$$

$$f_3(x^*) = 0$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) + f_3(x^*) = 7$$

tempo de CPU = 43 cent.

Método de Zimmermann

$$\lambda^* = 0.395$$

$$x^* = (2.368, 1.895, 2.368)^t$$

$$f_1(x^*) = 2.368$$

$$f_2(x^*) = 1.895$$

$$f_3(x^*) = 2.368$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) + f_3(x^*) = 6.631$$

tempo de CPU = 68 cent.

Método de ZW - usando o simplex multi-objetivo

$$U(u_1, u_2, u_3) = 0.58u_1 + 0.21u_2 + 0.21u_3$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.333$$

$$VO = 2.2545$$

$$x^* = (6, 0, 0)^t$$

$$f_1(x^*) = 6$$

$$f_2(x^*) = 0$$

$$f_3(x^*) = 0$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) + f_3(x^*) = 6$$

Tempo de CPU = 2 seg. e 42 cent.

Método de ZW - usando tradeoffs aleatórios

Os conjuntos de tradeoffs oferecidos ao tomador de decisão são

$$A = \{(-2, 0.5, 4.5), (-1, 4.5, -0.5), (0.2, 1.8, -0.2)\},$$

$$B = \{(-1, 0.5, 0.2), (0.2, 0.3, -0.1), (-0.1, 0.2, 0.1)\},$$

$$C = \{(0.1, 0.1, -0.1), (0.2, 0.2, -0.2), (0.3, 0.3, -0.3)\}$$

Quadro 23

	Fc Utilidade	$!U(u_1, u_2) = 0.58u_1 + 0.21u_2 + 0.21u_3$
	Pesos iniciais	$! \lambda_1 = 0.333, \lambda_2 = 0.333$ e $\lambda_3 = 0.333$
	Tradeoffs	
	VO= 2.3310	$X^* = (4, 3, 0)$
C	$f_1(X^*) = 4$	$f_2(X^*) = 3$
	$f_3(X^*) = 0$	$f_1(X^*) + f_2(X^*) + f_3(X^*) = 7$
	Tempo de CPU= 43cent.	
	VO= 3.5654	$X^* = (6, 0, 0)$
A - B - C	$f_1(X^*) = 6$	$f_2(X^*) = 0$
	$f_3(X^*) = 0$	$f_1(X^*) + f_2(X^*) + f_3(X^*) = 6$
	Tempo de execucao= 62 cent.	

Exemplo 8:

Este exemplo foi extraído de [12].

$$\begin{aligned}
 \max u_1 = f_1(x) &= 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \\
 \max u_2 = f_2(x) &= x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 \\
 \max u_3 = f_3(x) &= -x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 \\
 \text{s.a } 2x_1 + 1x_2 + 4x_3 + 3x_4 &\leq 60 \\
 3x_1 + 4x_2 + 1x_3 + 2x_4 &\leq 60 \\
 x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0.
 \end{aligned}$$

Soluções

Proposta A

$$\lambda^* = 90$$

$$x^* = (5.455, 5.455, 4.364, 8.727)^t$$

$$f_1(x^*) = 39.275$$

$$f_2(x^*) = 43.636$$

$$f_3(x^*) = 43.638$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) + f_3(x^*) = 126.549$$

tempo de CPU = 43 cent.

Proposta B

$$\lambda_1^* = 24$$

$$\lambda_2^* = 66$$

$$\lambda_3^* = 66$$

$$x^* = (0,6,0,18)^t$$

$$f_1(x^*) = 24$$

$$f_2(x^*) = 66$$

$$f_3(x^*) = 66$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) + f_3(x^*) = 156$$

tempo de CPU = 43cent.

Método de Zimmermann

$$\lambda^* = 0.5603$$

$$x^* = (7.0979, 5.1419, 5.3818, 6.3783)^t$$

$$f_1(x^*) = 43.577$$

$$f_2(x^*) = 38.2329$$

$$f_3(x^*) = 36.7502$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) + f_3(x^*) = 118.5608$$

tempo de CPU = 68 cent.

Método de ZW - usando simplex multi-objetivo

$$U(u_1, u_2, u_3) = 0.58u_1 + 0.21u_2 + 0.21u_3$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.333$$

$$V_0 = 41.0640$$

$$x^* = (12, 0, 0, 12)^t$$

$$f_1(x^*) = 48$$

$$f_2(x^*) = 60$$

$$f_3(x^*) = 12$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) + f_3(x^*) = 120$$

Tempo de CPU = 3 seg. e 51 cent.

Método de ZW - usando tradeoffs aleatórios

Os conjuntos de tradeoffs oferecidos ao tomador de decisão são

- A: $\{(-2, 0.5, 4.5), (-1, 4.5, -0.5), (0.2, 1.8, -0.2), (0.2, -0.7, 1.3)\}$,
- B: $\{(-1, 0.5, 0.2), (0.2, 0.3, -0.1), (-0.1, 0.2, 0.1), (-0.3, -0.3, 0.10)\}$,
- C: $\{(0.1, 0.1, -0.1), (0.3, 0.3, -0.3), (0.4, 0.4, -0.4), (0.5, 0.5, -0.5)\}$,
- D: $\{(-2, 0.5, 2.5), (-1, 0.2, -0.5), (0.2, 1.8, -0.1), (0.2, -0.7, 1)\}$,
- E: $\{(4.5, -2, -1.5), (3, -1, 1), (2, -1, -1), (0.8, 1.2, -1)\}$,
- F: $\{(3, -1, 1), (1.5, -2.5, -2), (0.2, -0.1, 1.3), (33.4, -1, 2.5)\}$,
- G: $\{(3, -2, 1), (1.8, -2.5, 4.5), (3.1, -5, 2), (3.1, -5, 2), (4.5, -2, -1.5)\}$,
- H: $\{(33, -5, -4), (2, 1, -1), (-2, 1, 2.1), (5, -3, 1)\}$.

Quadro 24

	Funç. Utilidade	$U(u_1, u_2) = 0.58u_1 + 0.21u_2 + 0.21u_3$
	Pesos iniciais	$\lambda_1 = 0.333, \lambda_2 = 0.333$ e $\lambda_3 = 0.333$
	Tradeoffs	
	VO= 51.9480	$X^* = (0, 6, 0, 18)^t$
C	$f_1(X^*) = 24$	$f_2(X^*) = 66$
	$f_3(X^*) = 66$	$f_1(X^*) + f_2(X^*) + f_3(X^*) = 156$
	Tempo de CPU= 43cent.	
	VO= 74.85	$X^* = (0, 15, 0, 0)^t$
F - C	$f_1(X^*) = 15$	$f_2(X^*) = -15$
	$f_3(X^*) = 75$	$f_1(X^*) + f_2(X^*) + f_3(X^*) = 75$
	Tempo de execucao= 78 cent	
	VO= 53.5019	$X^* = (0, 12, 12, 0)^t$
G - H - C	$f_1(X^*) = 36$	$f_2(X^*) = 12$
	$f_3(X^*) = 72$	$f_1(X^*) + f_2(X^*) + f_3(X^*) = 120$
	Tempo de CPU= 1 seg e 33cent.	
	VO= 41.0640	$X^* = (12, 0, 0, 12)^t$
A - F - G	$f_1(X^*) = 48$	$f_2(X^*) = 60$
	$f_3(X^*) = 12$	$f_1(X^*) + f_2(X^*) + f_3(X^*) = 120$
	Tempo de execucao= 1 seg e 33 cent.	
	VO= 41.0543	$X^* = (18, 0, 6, 0)^t$
A-B-D-E-C	$f_1(X^*) = 48$	$f_2(X^*) = 60$
	$f_3(X^*) = 12$	$f_1(X^*) + f_2(X^*) + f_3(X^*) = 120$
	Tempo de CPU= 2 seg e 27 cent.	

Para os demais exemplos, o conjunto de tradeoffs oferecidos para o tomador de decisão é

$$W = \{A = (-3, 4), (3.3, -2.8), (2, -1), (3, -0.5)\}$$

$$\{B = (-2, 1.2), (3, -2), (-1, 0.5), (-2, 1)\}$$

$$\{C = (0.1, -0.1), (0.2, -0.2), (0.3, -0.3), (0.4, -0.4)\}$$

Exemplo 9:

$$\max u_1 = f_1(x) = 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4$$

$$\max u_2 = f_2(x) = x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4$$

$$\text{s.a. } 2x_1 + 1x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 60$$

$$3x_1 + 4x_2 + 1x_3 + 2x_4 \leq 60$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

Soluções:

Proposta A

$$\lambda^* = 52.5$$

$$x^* = (13.5, 0, 1.5, 9)^t$$

$$f_1(x^*) = 52.5$$

$$f_2(x^*) = 52.5$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) = 105$$

tempo de CPU = 11 cent.

Proposta B

$$\lambda_1^* = 48$$

$$\lambda_2^* = 60$$

$$x^* = (12, 0, 0, 12)^t$$

$$f_1(x^*) = 48$$

$$f_2(x^*) = 60$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) = 108$$

tempo de CPU = 11 cent.

Método de Zimmermann

$$\lambda^* = 0.6034$$

$$x^* = (11.8966, 0, 0, 12.0690)^t$$

$$f_1(x^*) = 47,7586$$

$$f_2(x^*) = 60.1724$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) = 107.9310$$

tempo de CPU = 11 cent.

Método de ZW - usando simplex multi-objetivo

$$U(u_1, u_2) = 0.58u_1 + 0.42u_2$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5$$

$$V_0 = 52.5015$$

$$x^* = (12, 0, 0, 12)^t$$

$$f_1(x^*) = 48$$

$$f_2(x^*) = 60$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) = 108$$

Tempo de CPU = 1 seg. e 5 cent.

Método de ZW - usando tradeoffs aleatórios

Os conjuntos de tradeoffs oferecidos ao tomador de decisão são os do conjunto W.

Quadro 25

	Fc Utilidade	$U(u_1, u_2) = 0.64u_1 + 0.36u_2$
	Pesos iniciais	$\lambda_1 = 0.333$ e $\lambda_2 = 0.666$
	Tradeoffs	
	VO=59.94	$X^* = (0, 0, 0, 20)^t$
C	$f_1(X^*) = 20$	$f_2(X^*) = 80$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 100$	Tempo de CPU=11 cent
	VO= 53.1411	$X^* = (12, 0, 0, 12)^t$
A - B - C	$f_1(X^*) = 48$	$f_2(X^*) = 60$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 108$	Tempo de CPU= 54cent

Exemplo 10:

$$\begin{aligned}
 \max u_1 = f_1(x) &= x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 \\
 \max u_2 = f_2(x) &= -x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 \\
 \text{s.a } 2x_1 + 1x_2 + 4x_3 + 3x_4 &\leq 60 \\
 3x_1 + 4x_2 + 1x_3 + 2x_4 &\leq 60 \\
 x_1 &\geq 0 \\
 x_2 &\geq 0 \\
 x_3 &\geq 0 \\
 x_4 &\geq 0.
 \end{aligned}$$

Soluções:

Proposta A

$$\lambda^* = 66$$

$$x^* = (0,6,0,18)^t$$

$$f_1(x^*) = 66$$

$$f_2(x^*) = 66$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) = 132$$

tempo de CPU = 11 cent.

Proposta B

$$\lambda_1^* = 66$$

$$\lambda_2^* = 66$$

$$x^* = (0,6,0,18)^t$$

$$f_1(x^*) = 66$$

$$f_2(x^*) = 66$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) = 132$$

tempo de CPU = 11 cent.

Método de Zimmermann

$$\lambda^* = 0.7683$$

$$x^* = (0,6.8902,0,16.2195)^t$$

$$f_1(x^*) = 57.9878$$

$$f_2(x^*) = 66.8902$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) = 124.8780$$

tempo de CPU = 11 cent.

Método de ZW - usando
simplex multi-objetivo

$$U(u_1, u_2) = 0.58u_1 + 0.42u_2$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5$$

$$V_0 = 66$$

$$x^* = (0,6,0,18)^t$$

$$f_1(x^*) = 66$$

$$f_2(x^*) = 66$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) = 132$$

tempo de CPU = 99 cent.

Método de ZW - usando tradeoffs aleatórios

Os conjuntos de tradeoffs oferecidos ao tomador de decisão são os do conjunto W.

Quadro 26

	Fc Utilidade	$U(u_1, u_2) = 0.64u_1 + 0.36u_2$
	Pesos iniciais	$\lambda_1 = 0.333$ e $\lambda_2 = 0.666$
	Tradeoffs	
	VO=65.9340	$X^* = (0, 6, 0, 18)^t$
C	$f_1(X^*) = 66$	$f_2(X^*) = 66$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 132$	Tempo de CPU=11 cent
	VO= 66	$X^* = (0, 6, 0, 18)^t$
A - B - C	$f_1(X^*) = 66$	$f_2(X^*) = 66$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 132$	Tempo de CPU= 6cent

Exemplo 11:

$$\begin{aligned}
 \max u_1 = f_1(x) &= 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 1x_4 \\
 \max u_2 = f_2(x) &= 1x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 \\
 \text{s.a. } 2x_1 + 1x_2 + 4x_3 + 3x_4 &\leq 60 \\
 3x_1 + 4x_2 + 1x_3 + 2x_4 &\leq 60 \\
 x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0.
 \end{aligned}$$

Soluções:

Proposta A

$$\lambda^* = 49.8462$$

$$x^* = (8.3077, 6.4615, 9.2308, 0)^t$$

$$f_1(x^*) = 49.8462$$

$$f_2(x^*) = 49.8462$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) = 99.6923$$

tempo de CPU = 11 cent.

Proposta B

$$\lambda_1^* = 36$$

$$\lambda_2^* = 72$$

$$x^* = (0, 12, 12, 0)^t$$

$$f_1(x^*) = 36$$

$$f_2(x^*) = 72$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) = 108$$

tempo de CPU = 11 cent.

Método de Zimmermann

$$\lambda^* = 0.6154$$

$$x^* = (6.2308, 7.8462, 9.92231, 0)^t$$

$$f_1(x^*) = 46.3846$$

$$f_2(x^*) = 55.3846$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) = 101.7692$$

tempo de CPU = 11 cent.

Método de ZW - usando
simplex multi-objetivo

$$U(u_1, u_2) = 0.58u_1 + 0.42u_2$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5$$

$$V_0 = 49.8545$$

$$x^* = (0, 12, 12, 0)^t$$

$$f_1(x^*) = 36$$

$$f_2(x^*) = 72$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) = 108$$

tempo de CPU = 99 cent.

Método de ZW - usando tradeoffs aleatórios

Os conjuntos de tradeoffs oferecidos ao tomador de decisão são

os do conjunto W.

Quadro 27

	Fc Utilidade	$U(u_1, u_2) = 0.64u_1 + 0.36u_2$
	Pesos iniciais	$\lambda_1 = 0.333$ e $\lambda_2 = 0.666$
	Tradeoffs	
	VO=59.9400	$X^* = (0, 12, 12, 0)^t$
C	$f_1(X^*) = 36$	$f_2(X^*) = 72$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 108$	Tempo de CPU=11 cent
	VO= 51.4234	$X^* = (0, 12, 12, 0)^t$
A - B - C	$f_1(X^*) = 36$	$f_2(X^*) = 72$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 108$	Tempo de CPU= 54cent

Exemplo 12:

$$\begin{aligned}
 \max u_1 = f_1(x) &= 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \\
 \max u_2 = f_2(x) &= -x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 \\
 \text{s.a } 2x_1 + 1x_2 + 4x_3 + 3x_4 &\leq 60 \\
 3x_1 + 4x_2 + 1x_3 + 2x_4 &\leq 60 \\
 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 &\leq 45 \\
 x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0.
 \end{aligned}$$

Soluções:

Proposta A

$$\lambda^* = 36.7431$$

$$x^* = (2.0642, 5.2294, 12.6606, 0)^t$$

$$f_1(x^*) = 36.7431$$

$$f_2(x^*) = 36.7431$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) = 73.4862$$

tempo de CPU = 11 cent.

Proposta B

$$\lambda_1^* = 33.1579$$

$$\lambda_2^* = 45$$

$$x^* = (0, 6.3158, 13.4211, 0)^t$$

$$f_1(x^*) = 33.1579$$

$$f_2(x^*) = 45$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) = 78.1579$$

tempo de CPU = 11 cent.

Método de Zimmermann

$$\lambda^* = 0.6835$$

$$x^* = (3.7986, 4.3165, 12.0216, 0)^t$$

$$f_1(x^*) = 39.7554$$

$$f_2(x^*) = 29.8058$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) = 69.5612$$

tempo de CPU = 17 cent.

Método de ZW - usando
simplex multi-objetivo

$$U(u_1, u_2) = 0.58u_1 + 0.42u_2$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5$$

$$V_0 = 36.7452$$

$$x^* = (0, 6.3158, 13.4211, 0)^t$$

$$f_1(x^*) = 33.1579$$

$$f_2(x^*) = 45$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) = 78.1579$$

tempo de CPU = 93 cent.

Método de ZW - usando tradeoffs aleatórios

Os conjuntos de tradeoffs oferecidos ao tomador de decisão são

os do conjunto W.

Quadro 28

	Fc Utilidade	$U(u_1, u_2) = 0.64u_1 + 0.36u_2$
	Pesos iniciais	$\lambda_1 = 0.333$ e $\lambda_2 = 0.666$
	Tradeoffs	
	VO=41.0116	$X^* = (0, 6.3158, 13.4211, 0)^t$
C	$f_1(X^*) = 33.1579$	$f_2(X^*) = 45$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 78.1579$ Tempo de CPU=11 cent	
	VO= 38.2314	$X^* = (0, 6.3158, 13.4211, 0)^t$
A - B - C	$f_1(X^*) = 33.1579$	$f_2(X^*) = 45$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 78.1579$ Tempo de CPU= 54cent	

Exemplo 13:

$$\begin{aligned}
 \max u_1 = f_1(x) &= 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \\
 \max u_2 = f_2(x) &= -x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 \\
 \text{s.a } 2x_1 + 1x_2 + 4x_3 + 3x_4 &\leq 60 \\
 3x_1 + 4x_2 + 1x_3 + 2x_4 &\leq 60 \\
 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 &\leq 45 \\
 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 &\leq 60 \\
 x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0.
 \end{aligned}$$

Soluções:

Proposta A

$$\lambda^* = 36.7431$$

$$x^* = (2.0642, 5.2294, 12.6606, 0)^t$$

$$f_1(x^*) = 36.7431$$

$$f_2(x^*) = 36.7431$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) = 73.4862$$

tempo de CPU = 11 cent.

Proposta B

$$\lambda_1^* = 33.1579$$

$$\lambda_2^* = 45$$

$$x^* = (0, 6.3158, 13.4211, 0)$$

$$f_1(x^*) = 33.1579$$

$$f_2(x^*) = 45$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) = 78.1579$$

tempo de CPU = 11 cent.

Método de Zimmermann

$$\lambda^* = 0.6835$$

$$x^* = (3.7986, 4.3165, 12.0216, 0)^t$$

$$f_1(x^*) = 39.7554$$

$$f_2(x^*) = 29.8058$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) = 69.5612$$

tempo de CPU = 17 cent.

Método de ZW - usando
simplex multi-objetivo

$$U(u_1, u_2) = 0.58u_1 + 0.42u_2$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5$$

$$V_0 = 36.7452$$

$$f_1(x^*) = 33.1579$$

$$f_2(x^*) = 45$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) = 78.1579$$

tempo de CPU = 93 cent.

Método de ZW - usando tradeoffs aleatórios

Os conjuntos de tradeoffs oferecidos ao tomador de decisão são

os do conjunto W.

Quadro 29

	Fc Utilidade	$U(u_1, u_2) = 0.64u_1 + 0.36u_2$
	Pesos iniciais	$\lambda_1 = 0.333$ e $\lambda_2 = 0.666$
	Tradeoffs	
	VO=41.0116	$X^* = (0, 6.3158, 13.4211, 0)^t$
G	$f_1(X^*) = 33.1579$	$f_2(X^*) = 45$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 78.1579$ Tempo de CPU=11 cent	
	VO= 38.2314	$X^* = (0, 6.3158, 13.4211, 0)^t$
A - B - C	$f_1(X^*) = 33.1579$	$f_2(X^*) = 45$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 78.1579$ Tempo de CPU= 54cent	

Exemplo 14:

$$\begin{aligned}
 \max u_1 = f_1(x) &= 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \\
 \max u_2 = f_2(x) &= x_1 - 1x_2 + 2x_3 + 4x_4 \\
 \text{s.a } 2x_1 + 1x_2 + 4x_3 + 3x_4 &\leq 60 \\
 3x_1 + 4x_2 + 1x_3 + 2x_4 &\leq 60 \\
 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 &\leq 45 \\
 2x_1 - 1x_2 + 4x_3 - 1x_4 &\leq 60 \\
 x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0.
 \end{aligned}$$

Soluções:

Proposta A

$$\lambda^* = 45$$

$$x^* = (9, 0, 6, 6)^t$$

$$f_1(x^*) = 45$$

$$f_2(x^*) = 45$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) = 90$$

tempo de CPU = 48 cent.

Proposta B

$$\lambda_1^* = 27$$

$$\lambda_2^* = 75$$

$$x^* = (3, 0, 0, 18)^t$$

$$f_1(x^*) = 27$$

$$f_2(x^*) = 75$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) = 102$$

tempo de CPU = 11 cent.

Método de Zimmermann

$$\lambda^* = 0.5313$$

$$x^* = (6.6875, 0, 3.6875, 10.6250)^t$$

$$f_1(x^*) = 38.0650$$

$$f_2(x^*) = 56.5625$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) = 94.6250$$

tempo de CPU = 54 cent.

Método de ZW - usando
simplex multi-objetivo

$$U(u_1, u_2) = 0.58u_1 + 0.42u_2$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5$$

$$V_0 = 45.006$$

$$x^* = (3, 0, 0, 18)^t$$

$$f_1(x^*) = 27$$

$$f_2(x^*) = 75$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) = 102$$

Tempo = 1 seg. e 4 cent.

Método de ZW - usando tradeoffs aleatórios

Os conjuntos de tradeoffs oferecidos ao tomador de decisão são

os do conjunto W.

Quadro 30

	Fc Utilidade	$U(u_1, u_2) = 0.64u_1 + 0.36u_2$
	Pesos iniciais	$\lambda_1 = 0.333$ e $\lambda_2 = 0.666$
	Tradeoffs	
	$VO = 59.9400$	$X^* = (0, 0, 0, 20)^t$
C	$f_1(X^*) = 20$	$f_2(X^*) = 80$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 100$	Tempo de CPU = 48 cent
	$VO = 47.5646$	$X^* = (3, 0, 0, 18)^t$
A - B - C	$f_1(X^*) = 27$	$f_2(X^*) = 75$
	$f_1(X^*) + f_2(X^*) = 102$	Tempo de CPU = 1 seg e 32 cent

Exemplo 15:

$$\begin{aligned}
 \max u_1 = f_1(x) &= x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 \\
 \max u_2 = f_2(x) &= -x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 \\
 \text{s.a } 2x_1 + 1x_2 + 4x_3 + 3x_4 &\leq 60 \\
 3x_1 + 4x_2 + 1x_3 + 2x_4 &\leq 60 \\
 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 &\leq 45 \\
 2x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 &\leq 60 \\
 x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0.
 \end{aligned}$$

Soluções:

Proposta A

$$\lambda^* = 45$$

$$x^* = (0, 4.0909, 0, 12.2727)^t$$

$$f_1(x^*) = 45$$

$$f_2(x^*) = 45$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) = 90$$

tempo de CPU = 38 cent.

Proposta B

$$\lambda_1^* = 77.3077$$

$$\lambda_2^* = 45$$

$$x^* = (0, 1.1538, 0, 19.6154)^t$$

$$f_1(x^*) = 77.3077$$

$$f_2(x^*) = 45$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) = 122.3077$$

tempo de CPU = 48 cent.

Método de Zimmermann

$$\lambda^* = 0.9706$$

$$x^* = (0, 1.12, 0, 19.6267)^t$$

$$f_1(x^*) = 77.3867$$

$$f_2(x^*) = 44.8532$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) = 122.2399$$

tempo de CPU = 48 cent.

Método de ZW - usando
simplex multi-objetivo

$$U(u_1, u_2) = 0.58u_1 + 0.42u_2$$

$$\lambda_1^* = \lambda_2^* = 0.5$$

$$x^* = (0, 1.1538, 0, 19.6154)^t$$

$$f_1(x^*) = 77.3077$$

$$f_2(x^*) = 45$$

$$f_1(x^*) + f_2(x^*) = 122.3077$$

tempo de CPU = 99 cent.

$$VO = 65.9790$$

Método de ZW - usando tradeoffs aleatórios

Os conjuntos de tradeoffs oferecidos ao tomador de decisão são os do conjunto W.

Quadro 31

	Fc Utilidade	$U(u_1, u_2) = 0.64u_1 + 0.36u_2$
	Pesos iniciais	$\lambda_1 = 0.333$ e $\lambda_2 = 0.666$
	Tradeoffs	
	$VO = 65.9790$	$X^* = (0, 1.1538, 0, 19.6154)^t$
C	$f_1(X^*) = 77.3077$	$f_2(X^*) = 45$
	$f(X^*) + f(X^*) = 122.3077$	Tempo de CPU = 43cent
	$VO = 65.9790$	$X^* = (0, 1.1538, 0, 19.6154)^t$
A - B - C	$f_1(X^*) = 77.3077$	$f_2(X^*) = 45$
	$f(X^*) + f(X^*) = 122.3077$	Tempo de CPU = 1seg e 38cent

Retomando as questões

b) Mudando a função utilidade, o que acontece com a solução do PPLMO?

c) Fornecendo diferentes pesos iniciais, o que acontece com a solução do PPLMO?

formuladas anteriormente, e com base nos exemplos estudados conclui-se que:

- Se a solução de melhor compromisso for obtida na primeira iteração, a solução do PPLMO não se altera mudando a função utilidade. Caso contrário pode-se chegar a soluções distintas, portanto a função utilidade influencia na determinação da solução de melhor compromisso.

- Se a solução de melhor compromisso for obtida na primeira iteração, a solução do PPLMO pode ser alterada mudando os pesos iniciais. Caso contrário a solução não será alterada.

CAPÍTULO IV - ANÁLISE COMPARATIVA DOS MÉTODOS

Existem muitos métodos para resolver um PPLMO, cada qual com suas especificações e prioridades. Assim, não é possível definir critérios globais que compreendam e avaliem objetivamente todos os métodos, situando-os em uma única escala. Portanto, a avaliação deve ser comparativa, segundo critérios específicos.

Em 1987 Buchanam e Daellenbach (veja [5]), fizeram uma avaliação comparativa entre o método Naive, o método The Surrogate Worth Tradeoffs, o método de Steur e Choo e o método de Zionts e Wallenius. Para isso utilizaram quatro critérios, a saber:

- 1) Compreensão da estrutura do método.
- 2) Facilidade de uso do método.
- 3) Tempo de CPU.
- 4) Confiança do tomador de decisão com respeito à solução final.

Utilizando os resultados dos exemplos do capítulo III, serão analisados os comportamentos dos métodos de Zionts e Walleniús, de Zimmermann e as propostas A e B de Stange. A análise será comparativa e terá como base usuários com algum conhecimento em programação matemática. Os critérios utilizados serão os quatro critérios acima, e também a soma dos valores das funções objetivo. Para a comparação segundo este último critério, é considerado melhor o método que apresentar maior soma, visto que a solução do PPLMO busca maximizar simultaneamente todas as funções objetivo.

1) Compreensão da Estrutura do Método

Proposta A - Transforma um PPLMO em um PPL, que tem as restrições do PPLMO inicial acrescidas das p restrições correspondentes às p funções objetivo do PPLMO .

Proposta B - Transforma um PPLMO em um PPL, que tem as restrições do PPLMO inicial acrescidas das p restrições correspondentes às p funções objetivo do PPLMO

Método de ZM - Transforma um PPLMO em um PPL que tem as restrições do PPLMO, acrescidas das restrições formadas pelas funções de pertinência.

Método de ZW - Associa um conjunto de pesos ao PPLMO e transforma em um PPL, cuja função objetivo é uma combinação linear convexa das funções objetivo iniciais com coeficientes tomados no conjunto de pesos, e as restrições são as do PPLMO. O conjunto de pesos é melhorado iterativamente a partir das VNB eficientes, sujeitas à escolha do tomador de decisão.

2) Facilidade de Uso do Método

Proposta A - Cria uma nova variável e p novas restrições e resolve um PPL.

Proposta B - Cria p novas variáveis e p novas restrições e resolve um PPL.

Método de ZM - Cria p funções de pertinência e resolve $p+1$ PPLs.

Método de ZW - Exige um tomador de decisão que conheça o problema.

3) Tempo de CPU

Proposta A - Pouco tempo.

Proposta B - Requer mais tempo que a proposta A para problemas de grande porte.

Método de ZM - Vários PPLs a serem resolvidos. Exige tempo relativamente maior que as propostas A e B.

Método de ZW - Se a solução de melhor compromisso for obtida na primeira iteração, tempo próximo ao tempo ao tempo no método de ZM, caso contrário requer mais tempo.

4) Confiança do Tomador de Decisão com Relação à Solução Final

Proposta A - Não existe critério que garanta a confiabilidade e não apresenta forma de gerar outras soluções eficientes (caso existam), para deixar a escolha do tomador de decisão. Porém há uma estrutura lógica.

Proposta B - Não existe critério que garanta a confiabilidade e não apresenta forma de gerar outras soluções eficientes (caso existam), para deixar a escolha do tomador de decisão.

Método de ZM - Fornece um parâmetro que permite avaliar a solução.

Método de ZW - Não apresenta critério que garanta a confiabilidade, mas o tomador de decisão, neste processo iterativo, pode fornecer funções utilidade convenientes.

5) Soma dos Valores das Funções Objetivo

Proposta A - Menor soma em relação aos demais.

Proposta B - Maior soma em relação aos demais.

Método de ZM - Menor soma em relação aos demais.

Método de ZW - Maior soma em relação aos demais.

Quadro de Avaliação Comparativa

Metodo Critério	Prop. A	Prop. B	ZM	ZW
1. Compreensão da Estrutura do metodo	***	***	**	*
2. Facilidade de uso do metodo	***	***	**	*
3. Tempo de CPU	***	***	**	*
4. Confiabilidade da solucao.	*	*	**	***
5. Soma dos valores das fcs. objetivo	*	***	*	***

*** : ótimo

** : bom

* : regular.

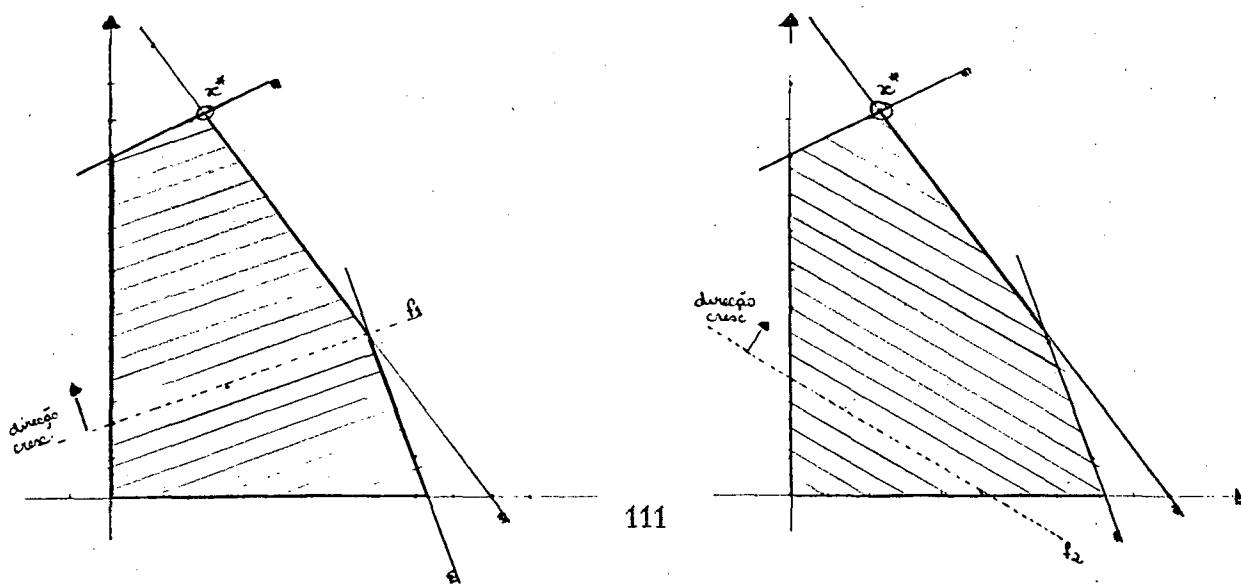
Observações:

1) Alguns dos métodos para solução de um PPLMO aqui apresentados não são de fácil compreensão. Surge então a pergunta: Por que, ao invés de estudar métodos para resolver PPLMO, não se atribui pesos para as funções objetivo do PPLMO, obtendo uma única função como combinação

linear das funções objetivo tendo como coeficientes os respectivos pesos, para então resolver um único PPL? De fato é possível resolver o PPLMO desta forma, porém a determinação deste conjunto de pesos exige do usuário muito conhecimento sobre o problema.

2) No capítulo 3 foram apresentados vários exemplos de problemas de programação linear multi-objetivo. O exemplo 6 chamou atenção por fornecer a mesma solução final em todos os métodos. Na verdade, o que acontece com este problema é que ele não apresenta objetivos conflitantes. Assim, para resolvê-lo bastaria tomar qualquer uma das funções objetivo, e resolver um problema mono-objetivo com o mesmo conjunto de restrições e ter-se-ia a mesma solução. Observe os gráficos abaixo.

A função objetivo representa uma família de retas paralelas. Tomando uma qualquer, verifica a relação existente entre a reta e o valor da função objetivo correspondente. Verifica que ao deslocar a reta, paralelamente a si mesma na direção do gradiente encontra-se o ponto ótimo. Este ponto é um ponto pertencente ao domínio viável que passa pela reta que maximiza a função objetivo. Nos gráficos abaixo os pontos ótimos estão representados por x^* .



CAPÍTULO V - CONCLUSÕES E SUGESTÕES

5.1 Conclusões

Analisando as soluções dos exemplos do capítulo III, encontram-se diferenças significativas entre as respostas fornecidas pelo métodos de ZM, de ZW e a proposta A. A proposta B apresentou respostas que coincidem, em 80% dos exemplos testados, com as respostas do método de ZW.

Tendo em mente o critério confiabilidade da solução final e ressaltando que o método de ZW é ótimo com respeito a este critério, segue que a proposta B é viável, com a vantagem adicional de exigir pouco tempo de CPU. Não ocorre o mesmo com a proposta A, pois não foram obtidos referenciais que validassem tal proposta.

Para problemas de pequeno e médio porte é vantajoso utilizar os métodos de ZM ou de ZW, com maiores créditos para o segundo, quando deseja-se uma aproximação mais precisa e tem-se um tomador de decisão. Por ser um processo iterativo, o método de ZW possibilita, ao tomador de decisão, controle da busca da melhor solução eficiente.

Dependendo de objetivos específicos, os métodos de ZW, de ZM ou a proposta B podem ser usados para problemas de grande porte. Em função de um alto, médio ou baixo grau de confiabilidade das soluções, deve-se usar respectivamente o método de ZW, o método de ZM ou a proposta B. Em função de pouco, médio ou muito tempo de CPU, deve-se usar, respectivamente, a proposta B, o método de ZM ou o método de ZW.

5.2 Sugestões

Neste trabalho, a análise comparativa, entre os métodos de Zions e Wallenius (1983), de Zimmermann (1984) e as propostas de Stange (1988), baseou-se nas soluções obtidas para exemplos didáticos de pequeno porte. Surgem, daí três sugestões:

- 1) Fazer análise comparativa dos métodos e propostas aqui apresentados com métodos mais recentes;
- 2) Examinar a validade das conclusões para problemas de grande porte;
- 3) Analisar o comportamento do método de ZM e das propostas, para problemas multi-objetivo não lineares. (O método de ZW da forma que foi apresentado não se aplica para problemas não-lineares). No apêndice B são apresentados os exemplos de problemas multi-objetivo não-lineares resolvidos pelo método de ZM e pelas propostas.

A proposta B mostrou-se viável, porém a confiabilidade da solução final é satisfatória apenas relativamente ao método de ZW. Uma proposta seria:

- 4) Verificar a possibilidade de introduzir parâmetros que garantissem a confiabilidade e apresentassem a forma de gerar novas soluções.

Trabalhando com problemas envolvendo p objetivos conflitantes, há necessidade de ordenar tais objetivos. Os métodos de programação multi-objetivo utilizam um processo de ordenação dos valores obtidos para cada objetivo para chegar à solução de melhor compromisso. Portanto, em cada método está embutida uma relação de ordem em \mathbb{R}^p . Do estudo sobre as relações de ordem em cada método, conclui-se que, de forma geral, os métodos de PMO transformam problemas multi-objetivo em mono-objetivo e, as relações de ordem estão embutidas nas funções objetivo dos problemas mono-objetivo. Um trabalho não trivial seria:

5) Explicitar a correspondência existente entre programação multi-objetivo e relações de ordem em \mathbb{R}^p .

APÊNDICE A

Informações sobre o software desenvolvido, que resolve um PPLMO pelos métodos de ZM, de ZW, propostas A e B.

Implementação

O programa foi implementado na linguagem Pascal e rodado em Pascal, versão 5.5.

Foram criadas duas unidades (units), Unit PPL e Unit PPLMOS, e um programa principal que usa estas unidades.

A Unit PPL é a implementação do algoritmo simplex, (o primal). Como teste para Unit PPL, foram testados todos os exemplos do livro Paulo F. Bregalda [4], inclusive os exemplos com degeneração, mostrando tableau a tableau.

Quando um PPL apresenta degeneração (tem uma solução básica viável e existe ao menos uma variável básica nula), teoricamente pode ocorrer a não convergência do método simplex, por levar à ciclagem que consiste em voltar à mesma base depois de algumas iterações. Para garantir que não ocorra a ciclagem, a Unit PPL usa o método lexicográfico (ver [4] pg 190), que é, também, uma relação de ordem no \mathbb{R}^n .

A Unit PPLMOS é a implementação dos métodos de ZM, de ZW e das propostas.

O programa principal, TecProg, apresenta os métodos, as propostas e dá, ao usuário, a opção de escolher o método ou a proposta que ele deseja para resolver o PPLMO.

APÊNDICE B

Apresentação de dois exemplos de problemas multi-objetivos não-lineares, resolvidos pelas propostas A e B e pelo método ZM, usando o pacote GAMS-General Algebraic Modelling System.

Exemplo 1:

$$\begin{aligned} \max \quad & -x_1 + 2x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1^2 + x_2^2 \leq 9 \\ & x_1^2 - x_2^2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

a) Proposta A

$$\begin{aligned} \max \quad & \lambda \\ \text{s.a} \quad & \lambda + x_1 - 2x_2 \leq 0 \\ & \lambda - 2x_1 - x_2 \leq 0 \\ & x_1^2 + x_2^2 \leq 9 \\ & x_1^2 - x_2^2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

Solução

$$\begin{aligned} x^* &= (2.121, 2.121)^t \\ \lambda^* &= 2.121 \\ f_1(x^*) &= 2.121 \\ f_2(x^*) &= 6.363 \\ f_1(x^*) + f_2(x^*) &= 8.484 \\ \text{tempo CPU} &= 23 \text{ cent. de seg.} \end{aligned}$$

b) Proposta B

$$\begin{aligned} \max \lambda_1 + \lambda_2 \\ \text{sa } \lambda_1 + x_1 - 2x_2 &\leq 0 \\ \lambda_2 - 2x_1 - x_2 &\leq 0 \\ x_1^2 + x_2^2 &\leq 9 \\ x_1^2 - x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ \lambda_1, \lambda_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Solução

$$\begin{aligned} x^* &= (2.121, 2.121)^t \\ \lambda_1^* &= 2.121 \\ \lambda_2^* &= 2.121 \\ f_1(x^*) &= 2.121 \\ f_2(x^*) &= 6.363 \\ f(x_1^*) + f(x_2^*) &= 8.484 \\ \text{tempo CPU} &= 23 \text{ cent.} \end{aligned}$$

c) Método de Zimmermann

$$\begin{aligned} \max \lambda \\ \text{sa } \lambda - \mu_1(x) &\leq 0 \\ \lambda - \mu_2(x) &\leq 0 \\ x_1^2 + x_2^2 &\leq 9 \\ x_1^2 - x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2, \lambda &\geq 0 \end{aligned}$$

Solução

$$\begin{aligned} \lambda^* &= 0.609 \\ x^* &= (1.177, 2.760)^t \\ f_1(x^*) &= 4.343 \\ f_2(x^*) &= 5.114 \\ f_1(x^*) + f_2(x^*) &= 9.457 \\ \text{Tempo de CPU} &= 69 \text{ cent.} \end{aligned}$$

onde:

$$\mu_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } f_1(x) \leq 1.764 \\ \frac{-x_1 + 2x_2 - 1.764}{4.236}, & \text{se } 1.764 < f_1(x) < 6 \\ 1, & \text{se } f_1(x) \geq 6 \end{cases}$$

$$\mu_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } f_2(x) \leq 3 \\ \frac{2x_1 + 1x_2 - 3}{3.472}, & \text{se } 3 < f_2(x) < 6 \\ 1, & \text{se } f_2(x) \geq 6.472 \end{cases}$$

Exemplo 2:

$$\begin{aligned} \max \quad & \cos 2x_1 + 3x_2 - 4x_3^2 + 2x_4 \\ & x_1 - 2x_2 + 4x_3 + \ln(2x_4 + 1) \\ \text{s.a} \quad & 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 60 \\ & 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 60 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

a) Proposta A

$$\begin{aligned} \max \quad & \lambda \\ \text{s.a} \quad & \lambda - (\cos 2x_1 + 3x_2 - 4x_3^2 + 2x_4) \leq 0 \\ & \lambda - (x_1 - 2x_2 + 4x_3 + \ln(2x_4 + 1)) \leq 0 \\ & 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 60 \\ & 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 60 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

Solução

$$\begin{aligned} x^* &= (9.93, 0, 1.225, 11.747)^t \\ \lambda^* &= 18.027 \\ f_1(x^*) &= 18.432 \\ f_2(x^*) &= 18.028 \\ f_1(x^*) + f_2(x^*) &= 36.46 \\ \text{tempo CPU} &= 45 \text{ cent.} \end{aligned}$$

b) Proposta B

$\max \lambda_1 + \lambda_2$	Solução
$\text{s.a } \lambda_1 - (\cos 2x_1 + 3x_2 - 4x_3^2 + 2x_4) \leq 0$	$x^* = (9.289, 1.422, 0.174, 13.095)^t$
$\lambda_2 - (x_1 - 2x_2 + 4x_3 + \ln(2x_4 + 1)) \leq 0$	$\lambda_1^* = 31.360$
$2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 60$	$\lambda_2^* = 10.402$
$3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 60$	$f_1(x^*) = 31.282$
$x_1, x_2 \geq 0$	$f_2(x^*) = 10.443$
$\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$	$f(x_1^*) + f(x_2^*) = 41.725$
	tempo CPU = 47 cent.

c) Método de Zimmermann

$\max \lambda$	Solução
$\text{s.a } \lambda - \mu_1(x) \leq 0$	$\lambda^* = 0.757$
$\lambda - \mu_2(x) \leq 0$	$x^* = (16.26, 0, 6.673, 0.262)^t$
$2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 60$	$f_1(x^*) = -176.748$
$3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 60$	$f_2(x^*) = 43.373$
$x_1, x_2, \lambda \geq 0$	$f_1(x^*) + f_2(x^*) = -133.375$
	Tempo de CPU = 1seg. e 35cent.

onde:

$$\mu_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } f_1(x) \leq -900 \\ \frac{f_1(x) + 900}{955}, & \text{se } -900 < f_1(x) < 55 \\ 1, & \text{se } f_1(x) \geq 55 \end{cases}$$

$$\mu_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } f_2(x) \leq -8.389 \\ \frac{f_2(x) + 8.389}{68.389}, & \text{se } -8.389 < f_2(x) < 60 \\ 1, & \text{se } f_2(x) \geq 60 \end{cases}$$

Evidentemente, com base nestes dois exemplos, não é possível analisar o comportamento do método e das propostas, mas pode-se ver que funcionam, tendo que: no exemplo 1, as propostas A e B levaram ao mesmo ponto de melhor compromisso para o PPMO e no exemplo 2, as propostas A e B e o método ZM levaram a pontos totalmente distintos entre si.

Referências Bibliográficas

- [1] BARE,B. Bruce, MENDOZA, Guillermo. Multiple objective forest land management planning: an illustration. European Journal of Operational Research, v.34, p.44-55, 1988.
- [2] BAZARAA,Mokhtar S., SHETTY,C.M. Nonlinear programming theory and algorithms. New York: John Wiley e Sons, Inc Publishing, 1979.
- [3] BELENSON, Sheldon M., KAPUR, Kailash C. An algorithm for solving multicriterion linear programming - Programming problems with examples. Operational Research Quarterly, v.24, n.1, p.65-77, 1973.
- [4] BREGALDA,P.F., OLIVEIRA,A.A.F, BORNSTEIN, C.T. - Introdução á Programação Linear. Rio de Janeiro: Ed. Campus, edição, 1988.
- [5] BUCHANAN, J.T., DALLENBACH,H.G.. A comparative evaluation of interactive solution methods for multiple objective decision models. European Journal of Operational Research, v.29, p.353-359, 1987.

- [6] FRIES, Carlos Ernani. Notas de aula. Florianópolis: UFSC/EPS, 1992 (Disciplina Ministrada pelo autor no Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção no período 92/2).
- [7] HWANG, Ching- Lai, MASUD, Abu Syed Md. Multiple objective decision making methods and applications. Berlin: Springer 1979.
- [8] ROTHERMEL, Mary Anne, SCHILLING, David A. Conjoint measurement in multiple objective decision making: a new approach. European Journal of Operational Research, v.23, p.310-319, 1986.
- [9] SANG, M. Lee. Goal programming for decision analysis. London: Aurebach Publishers, first edition, 1972.
- [10] STANGE, Plínio. Programação Multi-Objetivo - Uma proposta. Ouro Preto, XI CNMAC, 1988.
- [11] STEUR,R.E. Multiple objective linear programming with interval criterion weights. Management Science, v. 23, n.3, p. 305-306, november 1976.

- [12] ZIONTS,S., WALLENIOUS,Jyrki. An interactive programming method for solving the multiple criteria problem. Management Science, v. 22, n. 6, p. 652- 663, february 1976.
- [13] ZIONTS,S., WALLENIOUS, Jyrki, "An interactive multiple objective linear programming method for a class of underlying nonlinear utility functions. Management Science, v. 29, n.5, p 519-529, may 1983.
- [14] ZIMMERMANN,H. J. Fuzzy set theory - and its applications. Boston: Kluwer- Nijhoff publishing, 1985.