

**GENERALIZAÇÕES DE J-DIVERGÊNCIA**

**E A**

**PROBABILIDADE DE ERRO**

**ORIENTADOR: Prof. Dr. Inder Jeet Taneja**

**Maria da Graça Francisco**

**Setembro - 1983**

## GENERALIZAÇÕES DE J-DIVERGÊNCIA E A PROBABILIDADE DE ERRO

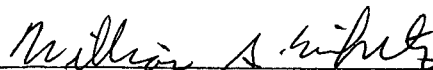
por

Maria da Graça Francisco

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO  
DE

"MESTRE EM CIÊNCIAS"

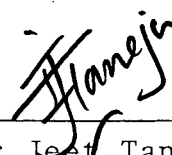
ESPECIALIDADE EM MATEMÁTICA, E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE  
SANTA CATARINA.



---

Prof. William Glenn Whitley, Ph.D  
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:



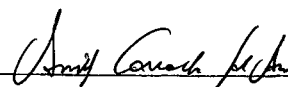
---

Prof. Inder Jeet Taneja, Ph.D  
Orientador



---

Prof. Gur Dial, Ph.D



---

Prof. Annibal Parracho Santanna, Ph.D

Aos meus pais, Alvaro e Coralina

Ao meu esposo, Ademir

Ao meu filho, André

### AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Prof. Dr. Inder Jeet Taneja pela orientação e estímulos, aos professores Anibal Parracho Santana e Gur Dial, que compuseram a banca examinadora, pelas críticas e sugestões, aos amigos pelo apoio recebido e a Universidade Federal de Santa Catarina por fornecer meios para a realização deste trabalho.

## RESUMO

Medidas como J-divergência e o Coeficiente de Bhattacharyya, foram usadas [5],[6],[7],[16] com o objetivo de determinar uma melhor aproximação das regras de decisão. No desenvolver deste trabalho, estudamos cotas inferiores e superiores para regras de decisão, em função de J-divergência e o Coeficiente de Bhattacharyya, obtidas por vários pesquisadores; em seguida determinamos generalizações de J-divergência e obtemos cotas para probabilidade de erro, em função dessas generalizações.

ABSTRACT

Measures like J-divergence and the Bhattacharyya coefficient were used<sup>[5],[6],[7],[16]</sup> with the aim to determine a better approximation to the decision rules. In this thesis we will study lower and upper bounds for decision rules in terms of J-divergence and the Bhattacharyya coefficient which were obtained by various researchers. We will also determine generalizations of J-divergence and obtain bounds for the probability of error in terms of these generalizations.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO .....	1
CAPÍTULO I - J-DIVERGÊNCIA, SUAS GENERALIZAÇÕES E REGRAS DE DECISÃO .....	2
1.1 - Introdução .....	2
1.2 - J-Divergência e Suas Generalizações ...	2
1.3 - Regras de Decisão .....	7
1.4 - J-Divergência e o Coeficiente de Bhatta charyya para Duas Distribuições .....	9
1.5 - Cotas Superiores e Inferiores de Pe e R	12
CAPÍTULO II - J-DIVERGÊNCIA, COEFICIENTE DE BHATTACHARYYA E AS REGRAS DE DECISÃO .....	14
2.1 - Introdução .....	14
2.2 - Uma Desigualdade entre $J(C/X)$ e $\rho(C/X)$ .	14
2.3 - Cotas Inferiores para R e J .....	17
2.4 - Cotas Inferiores para Pe e J .....	18
2.5 - Casos Particulares .....	21
CAPÍTULO III - GENERALIZAÇÕES DE J-DIVERGÊNCIA E A PROBABILIDADE DE ERRO .....	29
3.1 - Introdução .....	29
3.2 - Generalizações de J-Divergência entre Duas Distribuições .....	29
3.3 - Desigualdade entre $J_{\alpha}^{\beta}(C/X)$ e $\rho(C/X)$ ...	34
3.4 - Cota Inferior de Pe em Função de $J_{\alpha}(C;X)$ .	37
3.5 - Cota Inferior de Pe em Função de $J_{\alpha}^{\beta}(C;X)$ .	42
COMENTÁRIOS FINAIS .....	48
BIBLIOGRAFIA .....	49

## INTRODUÇÃO

Vários pesquisadores apresentaram estudos sobre medidas de informação como J-divergência e o Coeficiente de Bhattacharyya.

No capítulo I, apresentamos várias medidas de informação e distância, regras de decisão, cotas superiores e inferiores dessas regras em função de J-divergência e o Coeficiente de Bhattacharyya.

No capítulo II, apresentamos resultados ligados a J-divergência, coeficiente de Bhattacharyya, regras de decisão e distância Bayesiana, estudadas por Toussaint<sup>[16]</sup>.

No capítulo III, apresentamos o nosso trabalho, cujo objetivo é de obter novas cotas da probabilidade de erro em função das generalizações de J-divergência. Inicialmente, mostramos generalizações de J-divergência entre duas distribuições, depois apresentamos uma desigualdade entre  $J_{\alpha}^{\beta}(C/X)$  e  $\rho(C/X)$ , em seguida determinamos cotas de Pe em função de  $J_{\alpha}(C;X)$  e  $J_{\alpha}^{\beta}(C;X)$ .



## CAPÍTULO I

### J-DIVERGÊNCIA, SUAS GENERALIZAÇÕES E REGRAS DE DECISÃO

#### 1.1 - Introdução

Existem várias medidas de informação, tais como J-divergência, coeficiente de Bhattacharyya, etc. Essas medidas foram consideradas e caracterizadas pelos vários pesquisadores [5],[6],[7],[16], com o objetivo de determinar melhor aproximação de regras de decisão. Neste capítulo, são apresentadas novas medidas de J-divergência, estudadas por Taneja<sup>[15]</sup>, regras de decisão, cotas superiores e inferiores dessas regras, em função de J-divergência ou em função do coeficiente de Bhattacharyya.

#### 1.2 - J-divergência e suas generalizações

Consideremos duas distribuições de probabilidade  $P = (p_1, p_2, \dots, p_m) \in \Delta_m$  e  $Q = (q_1, q_2, \dots, q_m) \in \Delta_m$  associada a uma variável aleatória  $X$ , tomando um número finito de valores  $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ , onde:

$$\Delta_m = \{P = (p_1, p_2, \dots, p_m) : p_i \geq 0, \sum_{i=1}^m p_i = 1\} \quad (1.1)$$

A medida de informação, isto é, a informação relativa de Kullback<sup>[8]</sup>, ou discriminação entre estas duas distribuições é dada por:

$$I(P;Q) = \sum_{i=1}^m p_i \log_2 \frac{p_i}{q_i} \quad (1.2)$$

Esta medida é uma generalização da entropia de Shannon dada por:

$$H(P) = - \sum_{i=1}^m p_i \log_2 p_i \quad (1.3)$$

A medida de Kullback dada em (1.2) é aditiva, isto é:

$$I(P*R; Q*S) = I(P;Q) + I(R;S) \quad (1.4)$$

para todo  $P, Q \in \Delta_m$ ;  $R, S \in \Delta_m$ ;  $P*R, Q*S \in \Delta_{mn}$ .

Sharma e Autar<sup>[11]</sup>, através de uma equação funcional, Sharma e Taneja<sup>[13]</sup> e Taneja<sup>[14]</sup>, através de axiomas incluindo propriedades de ramificações generalizadas, tem estudado a seguinte informação, relativa ao tipo  $\beta$ :

$$I^\beta(P;Q) = (2^{\beta-1} - 1)^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^m p_i^\beta q_i^{1-\beta} - 1 \right\},$$

$$\beta \neq 1, \beta > 0 \quad (1.5)$$

para todo  $P, Q \in \Delta_m$ .

A expressão (1.5) satisfaz a seguinte igualdade:

$$I^\beta(P*R; Q*S) = I^\beta(P;Q) + I^\beta(R;S) +$$

$$+ (2^{\beta-1} - 1) I^\beta(P;Q) I^\beta(R;S) \quad (1.6)$$

É claro que quando  $\beta \rightarrow 1$ ,  $I^\beta(P;Q)$  reduz-se à  $I(P;Q)$ . Por outro lado, Rényi<sup>[10]</sup>, considerando a aditividade (1.4) e a propriedade da vizinhança do valor médio, definiu:

$$I_{\phi}(P;Q) = \phi^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^m p_i \phi[I(p_i; q_i)] \right\}, \quad (1.7)$$

onde  $\phi$  é uma função estritamente monótona contínua e  $I(p_i, q_i)$  é a própria informação aditiva do  $i$ -ésimo evento, que caracteriza a medida de ordem  $\alpha$ , dada por:

$$I_{\alpha}(P;Q) = (\alpha-1)^{-1} \log_2 \left( \sum_{i=1}^m p_i^{\alpha} q_i^{1-\alpha} \right),$$

$$\alpha \neq 1, \alpha > 0. \quad (1.8)$$

para todo  $P, Q \in \Delta_m$ .

$I_{\alpha}(P;Q)$  é uma generalização do valor médio aditivo, da medida de Kullback (1.2).

Sharma e Mital<sup>[12]</sup>, estudaram a generalização do valor médio, que não satisfaz a aditividade, das medidas (1.5) e (1.8) sob a igualdade (1.6) e a propriedade do valor médio (1.7) e conseguiram a seguinte medida generalizada:

$$I_{\alpha}^{\beta}(P;Q) = (2^{\beta-1} - 1)^{-1} \left[ \left( \sum_{i=1}^m p_i^{\alpha} q_i^{1-\alpha} \right)^{\frac{\beta-1}{\alpha-1}} - 1 \right] \quad (1.9)$$

para todo  $\alpha \neq 1, \beta \neq 1, \alpha, \beta > 0$ .

Kullback<sup>[8]</sup>, também estudou a seguinte generalização de (1.2), chamada J-divergência:

$$J(P;Q) = \sum_{i=1}^m p_i \log_2 \left( \frac{p_i}{q_i} \right) + \sum_{i=1}^m q_i \log_2 \left( \frac{q_i}{p_i} \right) \quad (1.10)$$

para todo  $P; Q \in \Delta_m$ .

Esta medida tem tido várias aplicações em estatística (Kullback<sup>[8]</sup>) e em padrões de reconhecimento (Toussaint<sup>[16]</sup>).

A medida pode ser escrita por:

$$J(P;Q) = I(P;Q) + I(Q;P) . \quad (1.11)$$

Recentemente, Rathie e Sheng<sup>[9]</sup>, caracterizaram as seguintes generalizações de J-divergência, que são as J-divergências de grau  $\beta$ :

$$J^\beta(P;Q) = (2^{\beta-1} - 1)^{-1} \left[ \left( \sum_{i=1}^m p_i^\beta q_i^{1-\beta} + \sum_{i=1}^m q_i^\beta p_i^{1-\beta} \right) - 2 \right] \quad (1.12)$$

que pode ser escrita também na forma:

$$J^\beta(P;Q) = [I^\beta(P;Q) + I^\beta(Q;P)] \quad (1.13)$$

onde  $I^\beta(P;Q)$  é como foi definido em (1.5).

Para caracterizar esta medida Rathie e Sheng<sup>[9]</sup>, usaram a aditividade na seguinte forma:

$$J^\beta(P+R; Q+S) = J^\beta(P;Q) + J^\beta(R;S) + (2^{\beta-1} - 1)^{-1} [I^\beta(P;Q) I^\beta(R;S) + I^\beta(Q;P) I^\beta(S;R)] \quad (1.14)$$

onde  $I^\beta(P;Q)$  é como foi dada em (1.5).

Existe uma generalização de (1.12) dada por:

$$J_\alpha^\beta(P;Q) = (2^{\beta-1} - 1)^{-1} \left[ \left( \sum_{i=1}^m p_i^\alpha q_i^{1-\alpha} \right)^{\frac{\beta-1}{\alpha-1}} + \left( \sum_{i=1}^m p_i^{1-\alpha} q_i^\alpha \right)^{\frac{\beta-1}{\alpha-1}} - 2 \right] . \quad (1.15)$$

A medida (1.15) também pode ser escrita por:

$$J_{\alpha}^{\beta}(P;Q) = I_{\alpha}^{\beta}(P;Q) + I_{\alpha}^{\beta}(Q;P) \quad (1.16)$$

onde  $I_{\alpha}^{\beta}(P;Q)$  é dado por (1.9).

A caracterização de (1.15) segue da caracterização de  $I_{\alpha}^{\beta}(P;Q)$ , donde então definimos  $J_{\alpha}^{\beta}(P;Q)$  como dada em (1.16), sendo que  $I_{\alpha}^{\beta}(P;Q)$  foi dado por Sharma e Mittal<sup>[12]</sup>.

Vejamos agora as generalizações de  $J(P;Q)$  e  $J^{\beta}(P;Q)$ :

$$J_{\alpha}(P;Q) = (\alpha-1)^{-1} \log_2 \left[ \sum_{i=1}^m \left( \frac{p_i^{\alpha} q_i^{1-\alpha} + p_i^{1-\alpha} q_i^{\alpha}}{2} \right) \right],$$

$$\alpha \neq 1, \alpha > 0 \quad (1.17)$$

$$J_{\alpha}^{\beta}(P;Q) = (2^{\beta-1} - 1)^{-1} \left\{ \left[ \sum_{i=1}^m \left( \frac{p_i^{\alpha} q_i^{1-\alpha} + p_i^{1-\alpha} q_i^{\alpha}}{2} \right)^{\frac{\beta-1}{\alpha-1}} \right] - 1 \right\},$$

$$(1.18)$$

para  $\alpha \neq 1, \beta \neq 1, \alpha, \beta > 0$ .

Facilmente verifica-se que:

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} J_{\alpha}^{\beta}(P;Q) = J_{\alpha}(P;Q) ;$$

$$\text{Para } \alpha = \beta, J_{\beta}^{\beta}(P;Q) = J^{\beta}(P;Q) \text{ e}$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} J^{\beta}(P;Q) = \lim_{\alpha \rightarrow 1} J_{\alpha}(P;Q) = \frac{1}{2} J(P;Q) .$$

A existência e a caracterização das medidas (1.12), (1.15), (1.17) e (1.18) foram apresentadas por Taneja<sup>[15]</sup>.

### 1.3 - Regras de Decisão

Consideremos o problema, da teoria de decisão, de classificar uma observação  $X$  com vinda das  $m$  possíveis classes  $C = (c_1, c_2, \dots, c_m)$ . Denotemos  $p_i = \Pr \{C = c_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  como "a priori" probabilidade das classes;  $f_1(x), \dots, f_m(x)$  as funções densidades condicional, dada a verdadeira classe ou hipótese, ou seja:  $f_i(x) = \Pr \{X = x / C = c_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Suponhamos que  $f_i(x)$  e  $p_i$  sejam completamente conhecidas. Dada qualquer observação  $X = x$ , podemos calcular então, a probabilidade condicional "a posteriori" de  $C$ , pela regra de Bayes, isto é:

$$P(c_i/x) = \Pr \{C = c_i / X = x\} = \frac{p_i f_i(x)}{\sum_{j=1}^m p_j f_j(x)}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (1.19)$$

(i) É bem conhecida que a regra de decisão que minimiza a probabilidade de erro (Ferguson<sup>[3]</sup>), é a de Bayes, a qual escolhe a hipótese com maior probabilidade posteriori.

Usando este fato, a probabilidade de erro, para um dado  $X = x$  é expressa por:

$$P_e(x) = 1 - \max \{P(c_1/x), \dots, P(c_m/x)\}. \quad (1.20)$$

Antes de observar  $X$  a probabilidade de erro  $P_e$ , associada a  $x$ , é definida como a probabilidade de erro esperada, ou seja:

$$\begin{aligned} P_e &= \int_x P(x) [1 - \max \{P(c_1/x), \dots, P(c_m/x)\}] dx \\ &= 1 - \max \int P(x) [P(c_1/x), \dots, P(c_m/x)] dx \end{aligned}$$

$$= 1 - \max_i \int [P(x) P(c_1/x), \dots, P(x) P(c_m/x)] dx$$

$$= 1 - \max_i \int [P(x/c_1) P(c_1), \dots, P(x/c_m) P(c_m)] dx$$

$$\therefore P_e = 1 - \int \max_i \{P(x/c_i) P(c_i)\} dx, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m \quad (1.21)$$

Considerando as medidas para duas classes, dado um vetor característico  $X$  de algum padrão desconhecido  $P$ ,  $P$  é classificado como pertencente a classe  $c_i$  se:  $P(c_i/x) > P(c_j/x)$ ,  $i = 1, 2$  e  $i \neq j$ . Esta regra dá-nos a probabilidade mínima possível de má-classificação, ou seja:

$$P_e = 1 - \int \max_i \{P(x/c_i) P(c_i)\} dx, \quad i = 1, 2$$

$$P_e = \int \min_i \{P(x/c_i) P(c_i)\} dx, \quad i = 1, 2 \quad (1.22)$$

$$= \int \min \{P(x/c_1) P(c_1), P(x/c_2) P(c_2)\} dx$$

$$= \int \min \{P(x) P(c_1/x), P(x) P(c_2/x)\} dx$$

$$= \int P(x) \min \{P(c_1/x), P(c_2/x)\} dx$$

$$\therefore P_e = \int P(x) P_e(x) dx \quad (1.23)$$

(ii) Outra regra de decisão aqui considerada, também para duas classes, é a regra de decisão aleatória, que pode ser deduzida como segue. Para um dado  $X$ ,  $c_1$  ocorre com probabilidade  $P(c_1/x)$ , conseqüentemente a probabilidade  $1 - P(c_1/x)$  pertence a classe  $c_2$ . Analogamente,  $c_2$  ocorre com probabilidade  $P(c_2/x)$  e  $c_1$  com probabilidade  $1 - P(c_2/x)$ . Portanto, para um dado  $X$  a probabilidade é dada por:

$$\begin{aligned}
 R(x) &= P(c_2/x) [1 - P(c_2/x)] + P(c_1/x) [1 - P(c_1/x)] \\
 &= P(c_2/x) P(c_1/x) + P(c_1/x) P(c_2/x)
 \end{aligned}$$

$$\therefore R(x) = 2 P(c_1/x) P(c_2/x). \quad (1.24)$$

Tomando o valor esperado de (1.24) com respeito a  $P(x)$ , obtemos:

$$R = \int P(x) R(x) dx. \quad (1.25)$$

Temos também a regra de decisão, definida por Cover e Hart<sup>[2]</sup>, que é a da taxa de erro da vizinhança próxima, dada por:

$$R = \int \left[ \frac{2 P(x/c_1) P(c_1) P(x/c_2) P(c_2)}{P(x)} \right] dx \quad (1.26)$$

$$= \int 2 \left[ \frac{P(c_1/x) P(x) P(c_2/x) P(x)}{P(x)} \right] dx$$

$$= \int P(x) [2 P(c_1/x) P(c_2/x)] dx$$

$$\therefore R = \int P(x) R(x) dx, \quad \text{é o mesmo que (1.25).}$$

#### 1.4 - J-divergência e o coeficiente de Bhattacharyya para duas distribuições.

Duas medidas bem conhecidas, na classificação de problemas, encontradas na teoria de informação e padrões de reconhecimento são a divergência e o coeficiente de Bhattacharyya.

Trocando em (1.10),  $p_i$  por  $p(x)$ ,  $q_i$  por  $q(x)$  e considerando, para simplificar, o logaritmo na base  $e$ , obtemos:



$$\begin{aligned}
J(P;Q) &= \int [p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)}] dx + \\
&+ \int [q(x) \log \frac{q(x)}{p(x)}] dx .
\end{aligned} \tag{1.27}$$

Fazendo agora, uma substituição em (1.27), trocando  $p(x)$  por  $P(x/c_1)$  e  $q(x)$  por  $P(x/c_2)$ , temos:

$$\begin{aligned}
J &= \int [P(x/c_1) \log \frac{P(x/c_1)}{P(x/c_2)}] dx + \\
&+ \int [P(x/c_2) \log \frac{P(x/c_2)}{P(x/c_1)}] dx \\
&= \int [P(x/c_1) \log \frac{P(x/c_1)}{P(x/c_2)} - P(x/c_2) \log \frac{P(x/c_1)}{P(x/c_2)}] dx \\
J &= \int [P(x/c_1) - P(x/c_2)] \log \left[ \frac{P(x/c_1)}{P(x/c_2)} \right] dx
\end{aligned} \tag{1.28}$$

que é a J-divergência.

E o coeficiente de Bhattacharyya é definido por:

$$\rho = \int \sqrt{P(x/c_1) P(x/c_2)} dx . \tag{1.29}$$

Se  $P(x/c_1)$  e  $P(x/c_2)$  pertence a  $\Delta_m$ , então  $\rho = \sum_{i=1}^m \sqrt{P(x_i/c_1) P(x_i/c_2)}$  é o cosseno do ângulo entre as direções do  $R^m$ , determinadas pelos vetores  $(\sqrt{P(x_1/c_1)}, \sqrt{P(x_2/c_1)}, \dots, \sqrt{P(x_m/c_1)})$  e  $(\sqrt{P(x_1/c_2)}, \dots, \sqrt{P(x_m/c_2)})$ . Justificativas para a escolha desta função são oferecidas no artigo de Bhattacharyya<sup>[1]</sup>.

Toussaint<sup>[16]</sup> definiu as seguintes medidas gerais:

$$\begin{aligned}
J(C/X) &= \int [P(c_1) P(x/c_1) - P(c_2) P(x/c_2)] \cdot \\
&\cdot \log \left[ \frac{P(c_1) P(x/c_1)}{P(c_2) P(x/c_2)} \right] dx ,
\end{aligned} \tag{1.30}$$

$$\begin{aligned}
&= \int [P(x) P(c_1/x) - P(x) P(c_2/x)] \log \left[ \frac{P(x) P(c_1/x)}{P(x) P(c_2/x)} \right] dx \\
&= \int P(x) [P(c_1/x) - P(c_2/x)] \log \left[ \frac{P(c_1/x)}{P(c_2/x)} \right] dx
\end{aligned}$$

$$\therefore J(C/X) = \int P(x) J(x) dx \quad (1.31)$$

E:

$$\rho(C/X) = \sqrt{P(c_1) P(c_2)} \int \sqrt{P(x/c_1) P(x/c_2)} dx \quad (1.32)$$

$$= \int \sqrt{P(c_1) P(x/c_1) P(c_2) P(x/c_2)} dx$$

$$= \int \sqrt{P(x) P(c_1/x) P(x) P(c_2/x)} dx$$

$$= \int P(x) \sqrt{P(c_1/x) P(c_2/x)} dx$$

$$\therefore \rho(C/X) = \int P(x) \rho(x) dx \quad (1.33)$$

onde  $P(x)$  é dado por:

$$P(x) = P(x/c_1) P(c_1) + P(x/c_2) P(c_2) \quad (1.34)$$

Casos particulares:

Aplicando em (1.30) e (1.32),  $P(c_1) = P(c_2) = \frac{1}{2}$ , obtemos:

$$\begin{aligned}
J(C/X) &= \int \left[ \frac{1}{2} P(x/c_1) - \frac{1}{2} P(x/c_2) \right] \log \left[ \frac{1/2 P(x/c_1)}{1/2 P(x/c_2)} \right] dx \\
&= \frac{1}{2} \int [P(x/c_1) - P(x/c_2)] \log \left[ \frac{P(x/c_1)}{P(x/c_2)} \right] dx
\end{aligned}$$

$$\therefore J(C/X) = \frac{1}{2} J. \quad (1.35)$$

$$\begin{aligned} \text{E: } \rho(C/X) &= \sqrt{1/2 \cdot 1/2} \int \sqrt{P(x/c_1) P(x/c_2)} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \sqrt{P(x/c_1) P(x/c_2)} dx \end{aligned}$$

$$\therefore \rho(C/X) = \frac{1}{2} \rho. \quad (1.36)$$

### 1.5 - Cotas superior e inferior de Pe e R.

Hudimoto<sup>[5]</sup> mostrou que Pe é limitado superiormente, isto é:

$$Pe \leq \max \{P(c_1), P(c_2)\} \rho. \quad (1.37)$$

Este resultado foi melhorado por Hudimoto<sup>[6]</sup>, tendo o mesmo mostrado que Pe é limitado superiormente e inferiormente:

$$\begin{aligned} P(c_1) P(c_2) \rho^2 \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4P(c_1) P(c_2) \rho^2} \leq \\ \leq Pe \leq \sqrt{P(c_1) P(c_2) \rho}. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Este resultado também foi estudado, independentemente, por Kailath<sup>[7]</sup>.

Pela primeira vez, foi obtido por Kailath<sup>[7]</sup> uma cota superior de Pe, em função de J, isto é:

$$Pe \geq \frac{1}{4} \exp\left(-\frac{J}{2}\right). \quad (1.39)$$

Uma considerável cota próxima, foi obtida por Tous-

Toussaint<sup>[16]</sup>, dado por:

$$Pe \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4 \exp [- 2H(C) - J(C/X)]} , \quad (1.40)$$

onde  $H(C)$  é a função entropia, dada por:

$$H(C) = - P(c_1) \log P(c_1) - P(c_2) \log P(c_2) . \quad (1.41)$$

Caso particular:

Considerando  $P(c_1) = P(c_2) = \frac{1}{2}$  e substituindo em (1.40), obtemos:

$$Pe \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \exp (- \frac{J}{2})} \quad (1.42)$$

$$\text{ou: } J \geq - 2 \log [4 Pe (1 - Pe)] . \quad (1.43)$$

Temos que (1.42) é mais próximo do que (1.39).

Toussaint<sup>[16]</sup>, também mostrou um resultado ainda mais próximo do que os considerados anteriormente, dado por:

$$J \geq 2(2 Pe - 1) \log (Pe/1 - Pe) . \quad (1.44)$$

Mais detalhes do estudo destes resultados, juntamente com outros existentes, estão apresentados no capítulo II. Enquanto que estudo de cotas em função das generalizações de J-divergência, estão apresentados no capítulo III.

## CAPÍTULO II

### J-DIVERGÊNCIA, COEFICIENTE DE BHATTACHARYYA

#### E AS REGRAS DE DECISÃO

##### 2.1 - Introdução

Neste capítulo, apresentamos alguns resultados ligados a J-divergência, coeficiente de Bhattacharyya, regras de decisão e a distância Bayesiana. Alguns desses resultados são somente enunciados e suas demonstrações podem ser encontradas em Toussaint<sup>[16]</sup>. Como o principal objetivo de Toussaint, é mostrar coisas mais próximas das regras de decisão do que as apresentadas até então, achamos conveniente apresentar demonstrações de alguns teoremas. O logaritmo aqui apresentado, é considerado na base e.

##### 2.2 - Uma Desigualdade entre J(C/X) e ρ(C/X)

Teorema 2.1 -  $J(C/X) \geq -2 [H(C) + \log \rho(C/X)]$ , (2.1)

onde  $H(C) = -P(c_1) \log P(c_1) +$   
 $- P(c_2) \log P(c_2)$ , é a função entropia.

Dem.: Por (1.30), temos que:

$$J(C/X) = \int \{P(c_1) P(x/c_1) \log \left[ \frac{P(c_1) P(x/c_1)}{P(c_2) P(x/c_2)} \right] +$$

$$\begin{aligned}
& - P(c_2) P(x/c_2) \log \left[ \frac{P(c_1) P(x/c_1)}{P(c_2) P(x/c_2)} \right] dx \\
& = P(c_1) E_1 [\log P(x/c_1) P(c_1) - \log P(x/c_2) P(c_2)] + \\
& - P(c_2) E_2 [\log P(x/c_1) P(c_1) - \log P(x/c_2) P(c_2)] \\
& = - P(c_1) E_1 [\log P(x/c_2) P(c_2) - \log P(x/c_1) P(c_1)] + \\
& - P(c_2) E_2 [\log P(x/c_1) P(c_1) - \log P(x/c_2) P(c_2)] \\
\therefore J(C/X) & = - P(c_1) E_1 \left[ \log \frac{P(c_2) P(x/c_2)}{P(c_1) P(x/c_1)} \right] + \\
& - P(c_2) E_2 \left[ \log \frac{P(c_1) P(x/c_1)}{P(c_2) P(x/c_2)} \right], \quad (2.2)
\end{aligned}$$

onde  $E_i$  denota o valor esperado com respeito a  $P(x/c_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Como  $\log x$  é uma função côncava, a desigualdade de Jensen aplica da em (2.2), dá-nos:

$$\begin{aligned}
J(C/X) & \geq - P(c_1) \log E_1 \left[ \frac{P(x/c_2) P(c_2)}{P(x/c_1) P(c_1)} \right] + \\
& - P(c_2) \log E_2 \left[ \frac{P(x/c_1) P(c_1)}{P(x/c_2) P(c_2)} \right] = \\
& = - 2 P(c_1) \log E_1 \left[ \frac{P(x/c_2) P(c_2)}{P(x/c_1) P(c_1)} \right]^{1/2} + \\
& - 2 P(c_2) \log E_2 \left[ \frac{P(x/c_1) P(c_1)}{P(x/c_2) P(c_2)} \right]^{1/2} \\
& = - 2 P(c_1) \log \left\{ \int P(x/c_1) \left[ \frac{P(x/c_2) P(c_2)}{P(x/c_1) P(c_1)} \right]^{1/2} dx \right\} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 2 P(c_2) \log \left\{ \int P(x/c_2) \left[ \frac{P(x/c_1) P(c_1)}{P(x/c_2) P(c_2)} \right]^{1/2} dx \right\} \\
= & - 2 P(c_1) \log \left\{ \int \left( \frac{P(c_1)^{1/2}}{P(c_1)^{1/2}} P(x/c_1) P(x/c_1)^{-1/2} \right) \right. \\
& \cdot \left. P(x/c_2)^{1/2} \frac{P(c_2)^{1/2}}{P(c_1)^{1/2}} dx \right\} + \\
& - 2 P(c_2) \cdot \log \left\{ \int \left[ \frac{P(c_2)^{1/2}}{P(c_2)^{1/2}} P(x/c_2) P(x/c_2)^{-1/2} \right] \right. \\
& \cdot \left. P(x/c_1)^{1/2} \frac{P(c_1)^{1/2}}{P(c_2)^{1/2}} dx \right\} \\
= & - 2 P(c_1) \log \left\{ \int \left[ \frac{1}{P(c_1)} \sqrt{P(c_1) P(c_2)} \sqrt{P(x/c_1) P(x/c_2)} \right] dx \right\} + \\
& - 2 P(c_2) \log \left\{ \int \left[ \frac{1}{P(c_2)} \sqrt{P(c_1) P(c_2)} \sqrt{P(x/c_1) P(x/c_2)} \right] dx \right\} \\
= & - 2 P(c_1) \log \left\{ \frac{1}{P(c_1)} \left[ \sqrt{P(c_1) P(c_2)} \int \sqrt{P(x/c_1) P(x/c_2)} dx \right] \right\} + \\
& - 2 P(c_2) \log \left\{ \frac{1}{P(c_2)} \left[ \sqrt{P(c_1) P(c_2)} \int \sqrt{P(x/c_1) P(x/c_2)} dx \right] \right\} ,
\end{aligned}$$

por (1.32):

$$= - 2 P(c_1) \left[ \frac{1}{P(c_1)} \rho(C/X) \right] - 2 P(c_2) \log \left[ \frac{1}{P(c_2)} \rho(C/X) \right]$$

$$\therefore J(C/X) \geq - 2 P(c_1) \log [\rho(C/X)/P(c_1)] +$$

$$- 2 P(c_2) \log [\rho(C/X)/P(c_2)] . \quad (2.3)$$

Expandindo (2.3) e recombinando os termos, obtemos:

$$\begin{aligned}
 J(C/X) &\geq -2 P(c_1) [\log \rho(C/X) - \log P(c_1)] + \\
 &\quad - 2 P(c_2) [\log \rho(C/X) - \log P(c_2)] = \\
 &= -2 [P(c_1) \log \rho(C/X) - P(c_1) \log P(c_1)] + \\
 &\quad - 2 [P(c_2) \log \rho(C/X) - P(c_2) \log P(c_2)] \\
 &= -2 \{ [P(c_1) + P(c_2)] \log \rho(C/X) + \\
 &\quad + [-P(c_1) \log P(c_1) - P(c_2) \log P(c_2)] \}
 \end{aligned}$$

$$\therefore J(C/X) \geq -2 [H(C) + \log \rho(C/X)] ,$$

onde  $H(C) = -P(c_1) \log P(c_1) - P(c_2) \log P(c_2)$ , é a função entropia.

### 2.3 - Cotas inferiores para R e J.

$$\text{Teorema 2.2 - (a) } R \geq \exp [-2 H(C) - J(C/X)]; \quad (2.4)$$

$$(b) R \geq \frac{1}{2} [1 - J(C/X)/2] . \quad (2.5)$$

$$\text{Teorema 2.3 - } J(C/X) \geq \sqrt{1 - 2R} \log \left[ \frac{1 + \sqrt{1 - 2R}}{1 - \sqrt{1 - 2R}} \right] . \quad (2.6)$$



## 2.4 - Cotas inferiores para Pe e J.

Teorema 2.4 - (a)  $Pe \geq \frac{1}{2} \exp [-2 H(C) - J(C/X)]$ ; (2.7)

(b)  $Pe \geq \frac{1}{4} [1 - J(C/X) / 2]$ ; (2.8)

(c)  $Pe \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - 2 \exp [-2 H(C) - J(C/X)]}$ ; (2.9)

(d)  $Pe \geq \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{J(C/X)}{8}}$ . (2.10)

Teorema 2.5 -  $J(C/X) \geq (2 Pe - 1) \log \left( \frac{Pe}{1 - Pe} \right)$ . (2.11)

Dem.: De (1.31) e (1.23) segue, respectivamente que:

$$J(x) = [P(c_1/x) - P(c_2/x)] \log \left[ \frac{P(c_1/x)}{P(c_2/x)} \right]. \quad (2.12)$$

E:  $Pe(x) = \min [P(c_1/x), P(c_2/x)]$ . (2.13)

Como  $J(x)$  é simétrico em relação a  $P(c_1/x)$  e  $P(c_2/x)$ , pode ser escrito em termos de  $Pe(x)$ . Considerando  $Pe(x) = P(c_1/x)$  então  $1 - Pe(x) = P(c_2/x)$ , assim:

$$\begin{aligned} J(x) &= \{Pe(x) - [1 - Pe(x)]\} \log \left[ \frac{Pe(x)}{1 - Pe(x)} \right] \\ &= [Pe(x) - 1 + Pe(x)] \log \left[ \frac{Pe(x)}{1 - Pe(x)} \right] \end{aligned}$$

$$\therefore J(x) = [2 Pe(x) - 1] \log \left[ \frac{Pe(x)}{1 - Pe(x)} \right]. \quad (2.14)$$

Consideremos a função:

$$f(x) = (2x - 1) \log \left( \frac{x}{1-x} \right), \text{ no intervalo } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}.$$

Vejamos se  $f(x)$  é uma função convexa:

$$\begin{aligned} \frac{d f(x)}{dx} &= (2x - 1)' \log \left( \frac{x}{1-x} \right) + (2x - 1) \left[ \log \left( \frac{x}{1-x} \right) \right]' \\ &= 2 \log \left( \frac{x}{1-x} \right) + (2x - 1) \left[ \frac{(x/1 - x)'}{(x/1 - x) \log e} \right] \\ &= 2 \log \left( \frac{x}{1-x} \right) + (2x - 1) \left[ \frac{1(1-x) - x(-1)/(1-x)^2}{(x/1 - x)} \right] \\ &= 2 \log \left( \frac{x}{1-x} \right) + (2x - 1) \left[ \frac{1 - x + x/(1-x)^2}{(x/1 - x)} \right] \\ &= 2 \log \left( \frac{x}{1-x} \right) + (2x - 1) \left[ \frac{1}{(1-x)^2} \cdot \frac{(1-x)}{x} \right] \\ &= 2 \log \left( \frac{x}{1-x} \right) + (2x - 1) \left[ \frac{1}{x(1-x)} \right] \\ &= \frac{2x-1}{x(1-x)} + 2 \log \left( \frac{x}{1-x} \right). \end{aligned}$$

Mas:

$$\begin{aligned} \frac{2x-1}{1-x} + \frac{2x-1}{x} &= \frac{(2x-1)x + (2x-1)(1-x)}{x(1-x)} = \\ &= \frac{2x^2 - x + 2x - 2x^2 - 1 + x}{x(1-x)} = \frac{2x-1}{x(1-x)}. \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{d f(x)}{dx} = \frac{2x-1}{1-x} + \frac{2x-1}{x} + 2 \log \left( \frac{x}{1-x} \right).$$

Derivando novamente, teremos:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} &= \frac{(2x-1)'(1-x) - (2x-1)(1-x)'}{(1-x)^2} + \\ &+ \frac{(2x-1)' \cdot x - (2x-1)x'}{x^2} + 2 \left[ \log \left( \frac{x}{1-x} \right) \right]' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2(1-x) - (2x-1)(-1)}{(1-x)^2} + \frac{2x - (2x-1) \cdot 1}{x^2} + 2 \left[ \frac{(x/1-x)'}{(x/1-x) \log e} \right] \\
&= \frac{2 - 2x + 2x - 1}{(1-x)^2} + \frac{2x - 2x + 1}{x^2} + 2 \left[ \frac{x'(1-x) - x(1-x)'}{(1-x)^2} \cdot \frac{(1-x)}{x} \right] \\
&= \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{x^2} + 2 \left( \frac{1-x+x}{x(1-x)} \right) \\
&= \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x(1-x)} .
\end{aligned}$$

Mas:

$$\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x(1-x)} = \frac{1-2x}{x^2} + \frac{4}{x} + \frac{4}{1-x} - \frac{1-2x}{(1-x)^2} , \text{ pois:}$$

$$\frac{1 \cdot x^2 + 1(1-x)^2 + 2x(1-x)}{x^2(1-x)^2} =$$

$$= \frac{(1-2x)(1-x)^2 + 4x(1-x)^2 + 4x^2(1-x) - (1-2x)x^2}{x^2(1-x)^2} ,$$

$$\frac{x^2 + 1 - 2x + x^2 + 2x - 2x^2}{x^2(1-x)^2} =$$

$$= \frac{1 - 2x + x^2 - 2x + 4x^2 - 2x^3 + 4x - 8x^2 + 4x^3 + 4x^2 - 4x^3 - x^2 + 2x^3}{x^2(1-x)^2} ,$$

$$\frac{2x^2 + 1 - 2x + 2x - 2x^2}{x^2(1-x)^2} = \frac{1 - 4x + 9x^2 - 6x^3 + 4x - 9x^2 + 6x^3}{x^2(1-x)^2} ,$$

$$\frac{1}{x^2(1-x)^2} = \frac{1}{x^2(1-x)^2} .$$

$$\therefore \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{1-2x}{x^2} + \frac{4}{x} + \frac{4}{1-x} - \frac{1-2x}{(1-x)^2} .$$

Temos que  $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \geq 0$ , para qualquer  $x$ . Conseqüentem<sub>en</sub>te  $f(x)$  e (2.14) são funções convexas. Para uma função convexa desse tipo, a desigualdade de Jensen é dada por:

$$E \{ f(x) \} \geq f \{ E(x) \} \quad , \quad (2.15)$$

onde  $E$  denota o valor esperado.

Tomando o valor esperado em ambos os lados de (2.14), com respeito a  $P(x)$  e usando (2.15), teremos a cota desejada, isto é:

$$J(C/X) \geq (2Pe - 1) \log \left( \frac{Pe}{1-Pe} \right).$$

### 2.5 - Casos Particulares:

Consideremos  $P(c_1) = P(c_2) = \frac{1}{2}$ ; assim:

$$\begin{aligned} H(C) &= -\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} \\ &= -\log \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore H(C) = \log 2 \quad . \quad (2.16)$$

Aplicando (1.35), (1.36) e (2.16) teremos:

$$\begin{aligned} \text{Em (2.1): } J/2 &\geq -2 [\log \rho/2 + \log 2] = \\ &= -2 [\log \rho - \log 2 + \log 2] \\ &= -2 \log \rho \end{aligned}$$

$$\therefore J \geq -4 \log \rho \quad , \quad (2.17)$$

que é a desigualdade de Hoeffding e Wolfowitz.

$$\begin{aligned}
\text{Em (2.4): } R &\geq \exp [-2 \log 2 - J/2] = \\
&= \exp (\log 2^{-2}) \cdot \exp (-J/2) \\
&= 2^{-2} \cdot \exp (-J/2) \\
\therefore R &\geq \frac{1}{4} \exp (-J/2). \tag{2.18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Em (2.5): } R &\geq \frac{1}{2} [1 - (J/2)/2] = \\
&= \frac{1}{2} [1 - J/4] \\
\therefore R &\geq \frac{1}{2} - \frac{J}{8}. \tag{2.19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Em (2.6): } \frac{J}{2} &\geq \sqrt{1 - 2R} \log \left[ \frac{1 + \sqrt{1 - 2R}}{1 - \sqrt{1 - 2R}} \right] \\
\therefore J &\geq 2 \sqrt{1 - 2R} \log \left[ \frac{1 + \sqrt{1 - 2R}}{1 - \sqrt{1 - 2R}} \right]. \tag{2.20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Em (2.7): } Pe &\geq \frac{1}{2} \exp [-2 \log 2 - J/2] = \\
&= \frac{1}{2} [\exp (\log 2^{-2}) \cdot \exp (-J/2)] \\
&= \frac{1}{2} [2^{-2} \cdot \exp (-J/2)] \\
&= \frac{1}{2} [1/4 \cdot \exp (-J/2)] \\
\therefore Pe &\geq \frac{1}{8} \exp (-J/2). \tag{2.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Em (2.8): } Pe &\geq \frac{1}{4} [1 - (J/2)/2] = \\
&= \frac{1}{4} [1 - \frac{J}{4}] \\
\therefore Pe &\geq \frac{1}{4} - \frac{J}{16}. \tag{2.22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Em (2.9): } Pe &\geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - 2 \exp[-2 \log 2 - J/2]} = \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - 2 [\exp(\log 2^{-2}) \cdot \exp(-J/2)]} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \exp(-J/2)} \\
\therefore Pe &\geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{2} \exp(-J/2)}. \quad (2.23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Em (2.10): } Pe &\geq \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{J/2}{8}} = \\
&= \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{J}{16}} \\
\therefore Pe &\geq \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{J}}{4}. \quad (2.24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Em (2.11): } \frac{J}{2} &\geq (2Pe - 1) \log\left(\frac{Pe}{1-Pe}\right) \\
\therefore J &\geq 2(2Pe - 1) \log\left(\frac{Pe}{1-Pe}\right). \quad (2.25)
\end{aligned}$$

Teorema 2.6 - (a) A cota dada em (2.20) é mais próxima do que a dada em (2.19).  
 (b) A cota dada em (2.20) é mais próxima que a dada em (2.18).

Dem.: (a) A equação (2.19) pode ser escrita na forma:

$$R \geq \frac{4 - J}{8}$$

$$8R \geq 4 - J$$

$$-J \leq -4 + 8R$$

$$\therefore J \geq 4(1 - 2R). \quad (2.26)$$

Para provar que (2.20) é mais próxima do que (2.19), é preciso mostrar que:

$$2\sqrt{1-2R} \log \left[ \frac{1+\sqrt{1-2R}}{1-\sqrt{1-2R}} \right] \geq 4(1-2R).$$

Consideremos:  $x = (1-2R)^{1/2}$ ,  $0 \leq x \leq 1$ .

Devemos então provar que:

$$2x \log \left[ \frac{1+x}{1-x} \right] \geq 4x^2$$

$$\log \left[ \frac{1+x}{1-x} \right] \geq \frac{4x^2}{2x}$$

$$\therefore \log \left[ \frac{1+x}{1-x} \right] \geq 2x. \quad (2.27)$$

Temos que:

$$\log \left[ \frac{1+x}{1-x} \right] = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{(2k-1)} \right] \cdot x^{2k-1}, \text{ para } x^2 < 1. \quad (2.28)$$

Como  $x \geq 0$ , todos os termos em (2.28) são não negativos, isto é:

$$2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{(2k-1)} \right] \cdot x^{2k-1} = 2 \left[ \frac{1}{1} x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 + \dots + \frac{1}{n-1} x^{n-1} + \dots \right],$$

n-par.

Como  $x \geq 0$ , segue que  $x, x^3, \dots, x^{n-1}$ , são números não negativos. Para  $k=1$ , (2.28) reduz-se a (2.27), provando assim o resultado.

(b) A equação (2.18) pode ser escrita por:

$$4R \geq \exp(-J/2)$$

$$\log 4R \geq -J/2$$

$$J \geq -2 \log 4R \quad . \quad (2.28)$$

Para provar que (2.20) está mais próxima do que (2.18), devemos mostrar que:

$$2x \log \left[ \frac{1+x}{1-x} \right] \geq -2 \log 2 (1-x^2) \quad , \quad (2.29)$$

sendo  $x$  o mesmo definido anteriormente.

Consideremos agora em (2.29):  $x = 2y - 1$ ,  $\frac{1}{2} \leq y \leq 1$ . Devemos então mostrar que:

$$2(2y - 1) \log \left[ \frac{y}{1-y} \right] \geq -2 \log [8y(1-y)] \quad . \quad (2.30)$$

Expandindo e recombinação os termos de (2.30), obtemos:

$$(2y - 1) \log \left[ \frac{y}{1-y} \right] \geq - \frac{2}{2} \log [8y(1-y)]$$

$$(2y - 1) [\log y - \log (1-y)] \geq - [\log 8 + \log y + \log (1-y)]$$

$$2y \log y - 2y \log (1-y) - \log y + \log (1-y) \geq$$

$$\geq - \log 8 - \log y - \log (1-y)$$

$$2y \log y - 2y \log (1-y) - \log y + \log (1-y) + \log y +$$

$$+ \log (1-y) \geq - \log 8$$

$$2y \log y - 2y \log (1-y) + 2 \log (1-y) \geq - \log 8$$



$$2[-y \log y - (1-y) \log (1-y)] \leq \log 8$$

$$2H(y, 1-y) \leq \log 8$$

$$H(y, 1-y) \leq \frac{1}{2} \log 8$$

$$H(y, 1-y) \leq \log 8^{1/2}$$

$$H(y, 1-y) \leq \log 2 + \log \sqrt{2}, \quad (2.31)$$

onde  $H(y, 1-y)$  é a função entropia.

O máximo de  $H(y, 1-y)$  ocorre quando  $y = \frac{1}{2}$  e é dado por  $\log 2$ , provando assim o resultado.

Teorema 2.7 - (a) A cota dada em (2.25) está mais próxima do que a dada em (2.23).

(b) A cota dada em (2.25) está mais próxima do que a dada em (2.24).

Dem.: (a) (2.23) pode ser escrita na forma:

$$Pe - \frac{1}{2} \geq -\frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{2} \exp(-\frac{J}{2})}$$

$$-2(Pe - \frac{1}{2}) \leq \sqrt{1 - \frac{1}{2} \exp(-\frac{J}{2})}$$

$$[-2(Pe - \frac{1}{2})]^2 \leq 1 - \frac{1}{2} \exp(-\frac{J}{2})$$

$$4Pe^2 - 4Pe + 1 - 1 \leq -\frac{1}{2} \exp(-\frac{J}{2})$$

$$4Pe(Pe - 1) \leq -\frac{1}{2} \exp(-\frac{J}{2})$$

$$-2.4.Pe(Pe - 1) \geq \exp(-\frac{J}{2})$$

$$8Pe (1 - Pe) \geq \exp \left(-\frac{J}{2}\right)$$

$$-\frac{J}{2} \leq \log [8Pe(1 - Pe)]$$

$$\therefore J \geq -2 \log [8Pe(1 - Pe)]. \quad (2.32)$$

Para mostrar que (2.25) está mais próxima do que (2.23), devemos mostrar que:

$2(2Pe - 1) \log \left(\frac{Pe}{1 - Pe}\right) \geq -2 \log [8Pe(1 - Pe)]$ , que é exatamente a equação (2.30), provando assim o resultado.

(b) A equação (2.24) pode ser escrita na forma:

$$Pe \geq \frac{2 - \sqrt{J}}{4}$$

$$4Pe \geq 2 - \sqrt{J}$$

$$4Pe - 2 \geq -\sqrt{J}$$

$$-4Pe + 2 \leq \sqrt{J}$$

$$(2 - 4Pe)^2 \leq J$$

$$[2(1 - 2Pe)]^2 \leq J$$

$$\therefore J \geq 4(1 - 2Pe)^2. \quad (2.33)$$

Para mostrar que (2.25) está mais próxima do que (2.24), é necessário mostrar que:

$$\log \left(\frac{1-x}{x}\right) \geq 2(1 - 2x), \text{ para } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}. \quad (2.34)$$

Considerando em (2.34):  $x = \frac{1}{z+1}$ ,  $1 \leq z \leq \infty$ , então:

$$\log \left[ \frac{\left(1 - \frac{1}{z+1}\right)}{\left(\frac{1}{z+1}\right)} \right] \geq 2 \left[1 - 2\left(\frac{1}{z+1}\right)\right]$$

$$\log \left( \frac{z+1-1}{z+1} \cdot \frac{z+1}{1} \right) \geq 2 \left( \frac{z+1-2}{z+1} \right)$$

$$\log z \geq 2 \left( \frac{z-1}{z+1} \right) . \quad (2.35)$$

Para  $z > 0$ , temos:

$$\log z = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{2k-1} \right] \left[ \frac{z-1}{z+1} \right]^{2k+1} . \quad (2.36)$$

Para  $z \geq 1$ , todos os termos em (2.36) são não negativos.

Para  $k=1$ , (2.36) reduz-se a (2.35), provando assim o resultado.

## CAPÍTULO III

### GENERALIZAÇÕES DE J-DIVERGÊNCIA E A PROBABILIDADE DE ERRO

#### 3.1 - Introdução

Neste capítulo, obtemos novas cotas inferiores em função das generalizações de J-divergência apresentadas no capítulo I. Apresentamos também, algumas desigualdades envolvendo J-divergência, suas generalizações e o Coeficiente de Bhattacharyya.

#### 3.2 - Generalizações de J-Divergência entre Duas Distribuições

Na seção 1.2 apresentamos diferentes generalizações de J-divergência, de Kullback. De maneira análoga a (1.28), apresentamos nesta seção, as várias generalizações de J-divergência entre duas distribuições.

Definimos a seguinte medida:

$$J^\beta(C/X) = (2^{\beta-1} - 1)^{-1} \{ \int P(x) A_\beta(c/x) dx - 1 \},$$

$$\beta > 0, \beta \neq 1 \quad (3.1)$$

onde:

$$A_\beta(c/x) = P(c_1/x)^\beta P(c_2/x)^{1-\beta} + P(c_1/x)^{1-\beta} P(c_2/x)^\beta$$

$$(3.2)$$

$$e \quad P(x) = P(c_1) P(x/c_1) + P(c_2) P(x/c_2).$$

Analogamente, definimos:

$$J_\alpha(C/X) = (\alpha - 1)^{-1} \log_2 \{ \int P(x) A_\alpha(c/x) dx \}; \quad (3.3)$$

$$e \quad J_\alpha^\beta(C/X) = (2^{\beta-1} - 1)^{-1} \{ [\int P(x) A_\alpha(c/x) dx]^{\frac{\beta-1}{\alpha-1}} - 1 \}. \quad (3.4)$$

Podemos ainda escrever, da seguinte forma:

$$J_\beta^\beta(C/X) = (2^{\beta-1} - 1)^{-1} \{ A_\beta(C/X) - 1 \}; \quad (3.5)$$

$$J_\alpha(C/X) = (\alpha - 1)^{-1} \log_2 \{ A_\alpha(C/X) \}; \quad (3.6)$$

$$J_\alpha^\beta(C/X) = (2^{\beta-1} - 1)^{-1} \{ [A_\alpha(C/X)]^{\frac{\beta-1}{\alpha-1}} - 1 \}, \quad (3.7)$$

onde:

$$\begin{aligned} A_\alpha(C/X) &= \int P(x) A_\alpha(c/x) dx \\ &= E [A_\alpha(c/x)], \end{aligned} \quad (3.8)$$

sendo E o valor esperado com respeito a P(x).

Facilmente mostramos que:

$$(a) \lim_{\beta \rightarrow 1} J_\alpha^\beta(C/X) = J_\alpha(C/X), \quad J_\beta^\beta(C/X) = J^\beta(C/X);$$

$$(b) \lim_{\beta \rightarrow 1} J^\beta(C/X) = \lim_{\alpha \rightarrow 1} J_\alpha(C/X) = J(C/X), \quad \text{onde } J(C/X)$$

é como dado em (1.30).

Baseados em J(x), dado em (2.12), fazemos as seguintes generalizações:

$$J^\beta(c; x) = (2^{\beta-1} - 1)^{-1} [A_\beta(c/x) - 1]; \quad (3.9)$$

$$J_{\alpha}^{\beta}(c; x) = (\alpha - 1)^{-1} \log_2 A_{\alpha}(c/x); \quad (3.10)$$

$$e \quad J_{\alpha}^{\beta}(c; x) = (2^{\beta-1} - 1)^{-1} [A_{\alpha}(c/x)^{\frac{\beta-1}{\alpha-1}} - 1]. \quad (3.11)$$

Facilmente, verificamos que:

$$(a) \lim_{\beta \rightarrow 1} J_{\alpha}^{\beta}(c; x) = J_{\alpha}(c; x), \quad J_{\beta}^{\beta}(c; x) = J^{\beta}(c; x),$$

$$(b) \lim_{\beta \rightarrow 1} J^{\beta}(c; x) = \lim_{\alpha \rightarrow 1} J_{\alpha}(c; x) = J(x).$$

Podemos ainda definir:

$$J^{\beta}(C; X) = \int P(x) J^{\beta}(c; x) dx; \quad (3.12)$$

$$J_{\alpha}(C; X) = \int P(x) J_{\alpha}(c; x) dx, \quad (3.13)$$

$$e \quad J_{\alpha}^{\beta}(C; X) = \int P(x) J_{\alpha}^{\beta}(c; x) dx. \quad (3.14)$$

Neste caso, também é facilmente demonstrado que:

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} J^{\beta}(C; X) = \lim_{\alpha \rightarrow 1} J_{\alpha}(C; X) = J(C/X), \text{ onde } J(C/X) \text{ é como dado em (1.30).}$$

Observação: I - (a)  $J^{\beta}(C/X) = J^{\beta}(C; X)$  ;

(b)  $J_{\alpha}(C/X) \neq J_{\alpha}(C; X)$  ;

(c)  $J_{\alpha}^{\beta}(C/X) \neq J_{\alpha}^{\beta}(C; X)$  .

II - Aplicando limite e considerando  $\alpha = \beta$ ,  
obtemos:

(a)  $J_{\beta}^{\beta}(C/X) = J_{\beta}^{\beta}(C; X)$  ;

$$(b) \lim_{\alpha \rightarrow 1} J_{\alpha}^{\beta}(C/X) = \lim_{\alpha \rightarrow 1} J_{\alpha}^{\beta}(C; X) = J(C/X) \cdot$$

III - De (3.4) e (3.14) podemos obter as seguintes desigualdades:

$$(a) J_{\alpha}^{\beta}(C/X) \geq J_{\alpha}^{\beta}(C; X), \text{ para } \beta \leq \alpha, \\ \beta > 1; \beta \leq \alpha < 1.$$

$$(b) J_{\alpha}^{\beta}(C/X) \leq J_{\alpha}^{\beta}(C; X), \text{ para } \alpha \leq \beta < 1; \\ \beta \geq \alpha, \beta > 1.$$

De fato:

Por [4], temos que:

$$(\sum_i P_i a_i)^{\gamma} \geq \sum_i P_i a_i^{\gamma}; \text{ para } 0 \leq \gamma \leq 1.$$

$$(\sum_i P_i a_i)^{\gamma} \leq \sum_i P_i a_i^{\gamma}, \text{ para } \gamma \geq 1.$$

Portanto:

$$[\int P(x) A_{\alpha}(c/x) dx]^{\frac{\beta-1}{\alpha-1}} \geq \int P(x) [A_{\alpha}(c/x)]^{\frac{\beta-1}{\alpha-1}} dx, \text{ para} \\ 0 \leq \frac{\beta-1}{\alpha-1} < 1.$$

$$[\int P(x) A_{\alpha}(c/x) dx]^{\frac{\beta-1}{\alpha-1}} \geq \int P(x) [A_{\alpha}(c/x)]^{\frac{\beta-1}{\alpha-1}} dx, \text{ para} \\ \beta \leq \alpha, \beta \geq 1.$$

$$[\int P(x) A_{\alpha}(c/x) dx]^{\frac{\beta-1}{\alpha-1}} - 1 \geq \int P(x) [A_{\alpha}(c/x)]^{\frac{\beta-1}{\alpha-1}} dx - 1, \text{ pa-} \\ \text{ra } \beta \leq \alpha, \beta \geq 1.$$

Multiplicando ambos os lados por  $(2^{\beta-1} - 1)^{-1}$ , obtemos:

$$\begin{aligned}
\text{(i)} \quad & (2^{\beta-1} - 1)^{-1} \left[ \int P(x) A_{\alpha}(c/x) dx \right]^{\frac{\beta-1}{\alpha-1}} - 1 \geq \\
& \geq (2^{\beta-1} - 1)^{-1} \int P(x) [A_{\alpha}(c/x)]^{\frac{\beta-1}{\alpha-1}} dx - 1, \text{ para} \\
& \beta \leq \alpha, \beta > 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(ii)} \quad & (2^{\beta-1} - 1)^{-1} \left[ \int P(x) A_{\alpha}(c/x) dx \right]^{\frac{\beta-1}{\alpha-1}} - 1 \leq \\
& \leq (2^{\beta-1} - 1)^{-1} \int P(x) [A_{\alpha}(c/x)]^{\frac{\beta-1}{\alpha-1}} dx - 1, \text{ para} \\
& \alpha \leq \beta < 1.
\end{aligned}$$

Continuando:

$$\begin{aligned}
& \left[ \int P(x) A_{\alpha}(c/x) dx \right]^{\frac{\beta-1}{\alpha-1}} \leq \int P(x) [A_{\alpha}(c/x)]^{\frac{\beta-1}{\alpha-1}} dx, \text{ para} \\
& \frac{\beta-1}{\alpha-1} \geq 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{e:} \quad & \left[ \int P(x) A_{\alpha}(c/x) dx \right]^{\frac{\beta-1}{\alpha-1}} - 1 \leq \int P(x) [A_{\alpha}(c/x)]^{\frac{\beta-1}{\alpha-1}} dx - 1, \\
& \text{para } \beta \geq \alpha.
\end{aligned}$$

Multiplicando ambos los lados por  $(2^{\beta-1} - 1)^{-1}$ , obtenemos:

$$\begin{aligned}
\text{(iii)} \quad & (2^{\beta-1} - 1)^{-1} \left[ \int P(x) A_{\alpha}(c/x) dx \right]^{\frac{\beta-1}{\alpha-1}} - 1 \leq \\
& \leq (2^{\beta-1} - 1)^{-1} \int P(x) [A_{\alpha}(c/x)]^{\frac{\beta-1}{\alpha-1}} dx - 1, \text{ para} \\
& \beta \geq \alpha, \beta > 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(iv)} \quad & (2^{\beta-1} - 1)^{-1} \left[ \int P(x) A_{\alpha}(c/x) dx \right]^{\frac{\beta-1}{\alpha-1}} - 1 \geq \\
& \geq (2^{\beta-1} - 1)^{-1} \int P(x) [A_{\alpha}(c/x)]^{\frac{\beta-1}{\alpha-1}} dx - 1, \text{ para} \\
& \beta \leq \alpha < 1.
\end{aligned}$$



Por (i), (ii), (iii) e (iv), chegamos a seguinte conclusão:

$$\begin{aligned}
 & (2^{\beta-1} - 1)^{-1} \left[ \int P(x) A_{\alpha}(c/x) dx \right]^{\frac{\beta-1}{\alpha-1}} - 1 \geq \\
 & \geq (2^{\beta-1} - 1)^{-1} \int P(x) [A_{\alpha}(c/x)]^{\frac{\beta-1}{\alpha-1}} dx - 1, \text{ para } \beta \leq \alpha, \\
 & \beta > 1; \beta \leq \alpha < 1. \\
 & (2^{\beta-1} - 1)^{-1} \left[ \int P(x) A_{\alpha}(c/x) dx \right]^{\frac{\beta-1}{\alpha-1}} - 1 \leq \\
 & \leq (2^{\beta-1} - 1)^{-1} \int P(x) [A_{\alpha}(c/x)]^{\frac{\beta-1}{\alpha-1}} dx - 1, \text{ para } \alpha \leq \beta < 1; \\
 & \beta \geq \alpha, \beta > 1.
 \end{aligned}$$

$$\therefore J_{\alpha}^{\beta}(C/X) \geq J_{\alpha}^{\beta}(C; X), \text{ para } \beta \leq \alpha, \beta > 1; \beta \leq \alpha < 1.$$

$$\therefore J_{\alpha}^{\beta}(C/X) \leq J_{\alpha}^{\beta}(C; X), \text{ para } \alpha \leq \beta < 1; \beta \geq \alpha, \beta > 1.$$

### 3.3 - Desigualdade entre $J_{\alpha}^{\beta}(C/X)$ e $\rho(C/X)$ .

Teorema 3.1 -  $J_{\alpha}^{\beta}(C/X) \geq (2^{\beta-1} - 1)^{-1} \cdot$

$$\cdot \left\{ [\rho(C/X)]^{2\alpha} \right]^{\frac{\beta-1}{\alpha-1}} [P(c_1)^{1-2\alpha} + P(c_2)^{1-2\alpha}]^{\frac{\beta-1}{\alpha-1}} - 1 \Big\},$$

$$\alpha > 1, \beta > 1; 0 < \alpha < \frac{1}{2}, 0 < \beta < 1. \quad (3.15)$$

Dem.: Aplicando (3.2) em (3.4), obtemos:

$$\begin{aligned}
 J_{\alpha}^{\beta}(C/X) &= (2^{\beta-1} - 1)^{-1} \left\{ \int P(x) (P(c_1/x))^{\alpha} (P(c_2/x))^{1-\alpha} + P(c_1/x)^{1-\alpha} \right. \\
 & \quad \left. \cdot P(c_2/x)^{\alpha} dx \right]^{\frac{\beta-1}{\alpha-1}} - 1 \Big\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (2^{\beta-1} - 1)^{-1} \{ [ \int (P(c_1) P(x/c_1))^\alpha (P(c_2) P(x/c_2))^{1-\alpha} + \\
&\quad + (P(c_1) P(x/c_1))^{1-\alpha} (P(c_2) P(x/c_2))^\alpha dx ]^{\frac{\beta-1}{\alpha-1}} - 1 \} \\
&\hspace{25em} (3.16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (2^{\beta-1} - 1)^{-1} \{ [ \int (P(c_2) P(x/c_2)) \left( \frac{P(c_1) P(x/c_1)}{P(c_2) P(x/c_2)} \right)^\alpha + \\
&\quad + P(c_1) P(x/c_1) \left( \frac{P(c_2) P(x/c_2)}{P(c_1) P(x/c_1)} \right)^\alpha dx ]^{\frac{\beta-1}{\alpha-1}} - 1 \} \\
&= (2^{\beta-1} - 1)^{-1} \{ [P(c_2) E_2 \left( \left( \frac{P(c_1) P(x/c_1)}{P(c_2) P(x/c_2)} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{2\alpha} + \\
&\quad + P(c_1) E_1 \left( \left( \frac{P(c_2) P(x/c_2)}{P(c_1) P(x/c_1)} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{2\alpha} ]^{\frac{\beta-1}{\alpha-1}} - 1 \} . \hspace{2em} (3.17)
\end{aligned}$$

Como  $w(x) = x^\alpha$  é convexa para  $\alpha > 1$  ( $x \geq 0$ ) e côncava para  $0 < \alpha < 1$ , aplicando a desigualdade de Jensen em (3.17), obtemos:

$$\begin{aligned}
J_\alpha^\beta(C/X) \geq & (2^{\beta-1} - 1)^{-1} \{ [P(c_2) \left( E_2 \left( \frac{P(c_1) P(x/c_1)}{P(c_2) P(x/c_2)} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{2\alpha} + \\
& + P(c_1) \left( E_1 \left( \frac{P(c_2) P(x/c_2)}{P(c_1) P(x/c_1)} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{2\alpha} ]^{\frac{\beta-1}{\alpha-1}} - 1 \} ,
\end{aligned}$$

para  $\alpha > 1$ ,  $\beta > 1$ ;  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ ,  $0 < \beta < 1$ .

$$\begin{aligned}
J_\alpha^\beta(C/X) \geq & (2^{\beta-1} - 1)^{-1} \{ [P(c_2) \left( \int \frac{P(x/c_2) P(c_1)^{\frac{1}{2}} P(x/c_1)^{\frac{1}{2}}}{P(c_2)^{1/2} P(x/c_2)^{1/2}} dx \right)^{2\alpha} + \\
& + P(c_1) \left( \int \frac{P(x/c_1) P(c_2)^{\frac{1}{2}} P(x/c_2)^{\frac{1}{2}}}{P(c_1)^{1/2} P(x/c_1)^{1/2}} dx \right)^{2\alpha} ]^{\frac{\beta-1}{\alpha-1}} - 1 \} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (2^{\beta-1} - 1)^{-1} \left\{ [P(c_2)] \left( \int \frac{P(c_2)^{1/2}}{P(c_2)^{1/2}} \cdot \right. \right. \\
&\quad \cdot \left. \frac{P(c_1)^{1/2} P(x/c_1)^{1/2} P(x/c_2) P(x/c_2)^{-1/2}}{P(c_2)^{1/2}} dx \right)^{2\alpha} + \\
&\quad + P(c_1) \left( \int \frac{P(c_1)^{1/2}}{P(c_1)^{1/2}} \cdot \right. \\
&\quad \cdot \left. \frac{P(c_2)^{1/2} P(x/c_1) P(x/c_1)^{-1/2} P(x/c_2)^{1/2}}{P(c_1)^{1/2}} dx \right)^{2\alpha} \left. \right\}^{\frac{\beta-1}{\alpha-1} - 1} \\
&= (2^{\beta-1} - 1)^{-1} \left\{ [P(c_2)] \left( \frac{\sqrt{P(c_1) P(c_2)}}{P(c_2)} \cdot \right. \right. \\
&\quad \cdot \left. \int \sqrt{P(x/c_1) P(x/c_2)} dx \right)^{2\alpha} + \\
&\quad + P(c_1) \left( \frac{\sqrt{P(c_1) P(c_2)}}{P(c_1)} \int \sqrt{P(x/c_1) P(x/c_2)} dx \right)^{2\alpha} \left. \right\}^{\frac{\beta-1}{\alpha-1} - 1} \\
&= (2^{\beta-1} - 1)^{-1} \left\{ [P(c_2)] \left( \frac{\rho(C/X)}{P(c_2)} \right)^{2\alpha} + P(c_1) \left( \frac{\rho(C/X)}{P(c_1)} \right)^{2\alpha} \right\}^{\frac{\beta-1}{\alpha-1} - 1} \\
&= (2^{\beta-1} - 1)^{-1} \left\{ [\rho(C/X)]^{2\alpha} (P(c_1)^{1-2\alpha} + P(c_2)^{1-2\alpha}) \right\}^{\frac{\beta-1}{\alpha-1} - 1} \\
\therefore J_{\alpha}^{\beta}(C/X) &\geq (2^{\beta-1} - 1)^{-1} \left\{ [\rho(C/X)]^{2\alpha} \right\}^{\frac{\beta-1}{\alpha-1}} \cdot \\
&\quad \cdot [P(c_1)^{1-2\alpha} + P(c_2)^{1-2\alpha}]^{\frac{\beta-1}{\alpha-1} - 1},
\end{aligned}$$

para  $\alpha > 1$ ,  $\beta > 1$ ;  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ ,  $0 < \beta < 1$ .

### 3.4 - Cota inferior de $P_e$ em função de $J_\alpha(C;X)$

Teorema 3.2 -  $J_\alpha(C;X) \geq (\alpha-1)^{-1}$  .

$$\cdot \log_2 [P_e^\alpha (1-P_e)^{1-\alpha} + P_e^{1-\alpha} (1-P_e)^\alpha] ,$$

(3.18)

para  $0 < \alpha < 1$ .

Dem.: De (3.2) e (3.10), obtemos:

$$J_\alpha(c;x) = (\alpha-1)^{-1} \log_2 [P(c_1/x)^\alpha P(c_2/x)^{1-\alpha} +$$

$$+ P(c_1/x)^{1-\alpha} P(c_2/x)^\alpha] , \quad (3.19)$$

com  $\alpha > 0$  e  $\alpha \neq 1$ .

Por (2.13), temos que:

$$P_e(x) = \min \{P(c_1/x), P(c_2/x)\}.$$

Como  $J_\alpha(c;x)$  é simétrico em relação a  $P(c_1/x)$  e  $P(c_2/x)$ , considerando  $P(c_1/x) = P_e(x)$ , então  $P(c_2/x) = 1 - P_e(x)$ . Fazendo essa substituição em (3.19), teremos:

$$J_\alpha(c;x) = (\alpha-1)^{-1} \log_2 [P_e(x)^\alpha (1 - P_e(x))^{1-\alpha} +$$

$$+ P_e(x)^{1-\alpha} (1-P_e(x))^\alpha] . \quad (3.20)$$

Consideremos a função:

$$g(x) = (\alpha-1)^{-1} \log_2 [x^\alpha (1-x)^{1-\alpha} + (1-x)^\alpha x^{1-\alpha}] ,$$

para  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ .

Verifiquemos se  $g(x)$  é convexa:

$$\frac{d g(x)}{d x} = (\alpha-1)^{-1} \cdot \frac{[x^{\alpha}(1-x)^{1-\alpha} + (1-x)^{\alpha} x^{\alpha}]'}{[x^{\alpha}(1-x)^{1-\alpha} + (1-x)^{\alpha} x^{1-\alpha}] \log_e 2}$$

mas:

$$\begin{aligned} & \frac{d [x^{\alpha} (1-x)^{1-\alpha} + (1-x)^{\alpha} x^{1-\alpha}]}{d x} = \\ & = [x^{\alpha} (1-x)^{1-\alpha}]' + [(1-x)^{\alpha} x^{1-\alpha}]', \\ & = [\alpha x^{\alpha-1} (1) (1-x)^{1-\alpha} + x^{\alpha} (1-\alpha) (1-x)^{1-\alpha-1} (-1)] + \\ & + [\alpha (1-x)^{\alpha-1} (-1) x^{1-\alpha} + (1-x)^{\alpha} (1-\alpha) x^{1-\alpha-1} (1)] \\ & = [\alpha x^{\alpha-1} (1-x)^{1-\alpha} - (1-\alpha) x^{\alpha} (1-x)^{-\alpha} + \\ & \quad - \alpha (1-x)^{\alpha-1} x^{1-\alpha} + (1-\alpha) x^{-\alpha} (1-x)^{\alpha}] \\ & = [\alpha (x^{\alpha-1} (1-x)^{1-\alpha} - x^{1-\alpha} (1-x)^{\alpha-1}) + \\ & + (1-\alpha) (x^{-\alpha} (1-x)^{\alpha} - x^{\alpha} (1-x)^{-\alpha})] \\ \therefore & \frac{d [x^{\alpha} (1-x)^{1-\alpha} + (1-x)^{\alpha} x^{1-\alpha}]}{d x} = \\ & = \alpha [x^{\alpha-1} (1-x)^{1-\alpha} - x^{1-\alpha} (1-x)^{\alpha-1}] + \\ & + (1-\alpha) [x^{-\alpha} (1-x)^{\alpha} - x^{\alpha} (1-x)^{-\alpha}] . \end{aligned} \tag{3.21}$$

Fazendo a substituição, obtemos:

$$\frac{d g(x)}{dx} = (\alpha-1)^{-1} \left\{ \frac{\alpha [x^{\alpha-1} (1-x)^{1-\alpha} - x^{1-\alpha} (1-x)^{\alpha-1}]}{[x^\alpha (1-x)^{1-\alpha} + (1-x)^\alpha x^{1-\alpha}] \log_e 2} + \right. \\ \left. + \frac{(1-\alpha) [x^{-\alpha} (1-x)^\alpha - x^\alpha (1-x)^{-\alpha}]}{[x^\alpha (1-x)^{1-\alpha} + (1-x)^\alpha x^{1-\alpha}] \log_e 2} \right\}$$

$$\therefore \frac{d g(x)}{dx} = \frac{(\alpha-1)^{-1}}{\log_e 2} \left\{ \frac{\alpha [x^{\alpha-1} (1-x)^{1-\alpha} - x^{1-\alpha} (1-x)^{\alpha-1}]}{x^\alpha (1-x)^{1-\alpha} + (1-x)^\alpha x^{1-\alpha}} + \right. \\ \left. + \frac{(1-\alpha) [x^{-\alpha} (1-x)^\alpha - x^\alpha (1-x)^{-\alpha}]}{x^\alpha (1-x)^{1-\alpha} + (1-x)^\alpha x^{1-\alpha}} \right\}.$$

Derivando novamente, teremos:

$$\frac{d^2 g(x)}{dx^2} = \frac{(\alpha-1)^{-1}}{\log_e 2}.$$

$$\cdot \left\{ \frac{[\alpha (x^{\alpha-1} (1-x)^{1-\alpha} - x^{1-\alpha} (1-x)^{\alpha-1}) + (1-\alpha) (x^{-\alpha} (1-x)^\alpha - x^\alpha (1-x)^{-\alpha})]}{[x^\alpha (1-x)^{1-\alpha} + (1-x)^\alpha x^{1-\alpha}]^2} \right. \\ \cdot [x^\alpha (1-x)^{1-\alpha} + (1-x)^\alpha x^{1-\alpha}] - [x^\alpha (1-x)^{1-\alpha} + (1-x)^\alpha x^{1-\alpha}] \cdot \\ \left. \cdot \frac{[\alpha (x^{\alpha-1} (1-x)^{1-\alpha} - x^{1-\alpha} (1-x)^{\alpha-1}) + (1-\alpha) (x^{-\alpha} (1-x)^\alpha - x^\alpha (1-x)^{-\alpha})]}{[x^\alpha (1-x)^{1-\alpha} + (1-x)^\alpha x^{1-\alpha}]^2} \right\},$$

mas:

$$\frac{d[\alpha (x^{\alpha-1} (1-x)^{1-\alpha} - x^{1-\alpha} (1-x)^{\alpha-1}) + (1-\alpha) (x^{-\alpha} (1-x)^\alpha - x^\alpha (1-x)^{-\alpha})]}{dx} = \\ = \alpha (\alpha-1) x^{\alpha-2} (1-x)^{1-\alpha} - \alpha (1-x) x^{\alpha-1} (1-x)^{-\alpha} + \\ - \alpha (1-\alpha) x^{-\alpha} (1-x)^{\alpha-1} + \alpha (\alpha-1) x^{1-\alpha} (1-x)^{\alpha-2} +$$

$$\begin{aligned}
& - \alpha(1-\alpha)x^{-\alpha-1} (1-x)^\alpha - \alpha(1-\alpha)x^{-\alpha} (1-x)^{\alpha-1} + \\
& - \alpha(1-\alpha)x^{\alpha-1} (1-x)^{-\alpha} - \alpha(1-\alpha)x^\alpha (1-x)^{-\alpha-1} \\
& = -\alpha(1-\alpha)x^{\alpha-2} (1-x)^{1-\alpha} - \alpha(1-\alpha)x^{1-\alpha} (1-x)^{\alpha-2} + \\
& - \alpha(1-\alpha)x^{\alpha-1} (1-x)^{-\alpha} - \alpha(1-\alpha)x^{-\alpha} (1-x)^{\alpha-1} + \\
& - \alpha(1-\alpha)x^{-\alpha-1} (1-x)^\alpha - \alpha(1-\alpha)x^\alpha (1-x)^{-\alpha-1} + \\
& - \alpha(1-\alpha)x^{-\alpha} (1-x)^{\alpha-1} - \alpha(1-\alpha)x^{\alpha-1} (1-x)^{-\alpha} \\
& = \alpha(1-\alpha) [-x^{\alpha-2} (1-x)^{1-\alpha} - x^{1-\alpha} (1-x)^{\alpha-2} + \\
& - x^{\alpha-1} (1-x)^{-\alpha} - x^{-\alpha} (1-x)^{\alpha-1} - x^{-\alpha-1} (1-x)^\alpha + \\
& - x^\alpha (1-x)^{-\alpha-1} - x^{-\alpha} (1-x)^{\alpha-1} - x^{\alpha-1} (1-x)^{-\alpha}]. \quad (3.22)
\end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 g(x)}{dx} &= \frac{1}{\log_e^2} (\alpha-1)^{-1} \left\{ \frac{\alpha(1-\alpha)[-x^{\alpha-2}(1-x)^{1-\alpha} - x^{1-\alpha}(1-x)^{\alpha-2}]}{[x^\alpha(1-x)^{1-\alpha} + (1-x)^\alpha x^{1-\alpha}]} + \right. \\
&+ \frac{-x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha} - x^{-\alpha}(1-x)^{\alpha-1} - x^{-\alpha-1}(1-x)^\alpha - x^\alpha(1-x)^{-\alpha-1}}{[x^\alpha(1-x)^{1-\alpha} + (1-x)^\alpha x^{1-\alpha}]} + \\
&+ \frac{-x^{-\alpha}(1-x)^{\alpha-1} - x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha}}{[x(1-x)^{1-\alpha} + (1-x)^\alpha x^{1-\alpha}]} + \\
&- \frac{[\alpha(x^{\alpha-1}(1-x)^{1-\alpha} - x^{1-\alpha}(1-x)^{\alpha-1}) + (1-\alpha)(x^{-\alpha}(1-x)^\alpha - x^\alpha(1-x)^{-\alpha})]^2}{[x^\alpha(1-x)^{1-\alpha} + (1-x)^\alpha x^{1-\alpha}]^2}
\end{aligned}$$

Considerando:

$$\begin{aligned}
& [-x^{\alpha-2} (1-x)^{1-\alpha} - x^{1-\alpha} (1-x)^{\alpha-2} - x^{\alpha-1} (1-x)^{-\alpha} + \\
& - x^{-\alpha} (1-x)^{\alpha-1} - x^{-\alpha-1} (1-x)^{\alpha} - x^{\alpha} (1-x)^{-\alpha-1} + \\
& - x^{-\alpha} (1-x)^{\alpha-1} - x^{\alpha-1} (1-x)^{-\alpha}] = A, \\
& [x^{\alpha} (1-x)^{1-\alpha} + (1-x)^{\alpha} x^{1-\alpha}] = B, \\
& \frac{[\alpha(x^{\alpha-1} (1-x)^{1-\alpha} - x^{1-\alpha} (1-x)^{\alpha-1}) + (1-\alpha)(x^{-\alpha} (1-x)^{\alpha} - x^{\alpha} (1-x)^{-\alpha})]^2}{[x^{\alpha} (1-x)^{1-\alpha} + (1-x)^{\alpha} x^{1-\alpha}]^2} = C.
\end{aligned}$$

Obtemos:

$$\frac{d^2 g(x)}{dx^2} = \log_2 e \cdot (\alpha-1)^{-1} \left\{ \alpha(1-\alpha) \frac{A}{B} - C \right\}$$

Temos que B , C são positivos e A negativo.

Assim  $\frac{A}{B}$  é negativo.

Para que  $\frac{A}{B}$  continue negativo, precisamos ter  $\alpha(1-\alpha) \geq 0$ .

Assim:

$$\alpha(1-\alpha) \geq 0 \rightarrow 1-\alpha \geq 0 \rightarrow -\alpha \geq -1 \rightarrow \alpha \leq 1$$

Como  $\alpha > 0$  e  $\alpha \neq 1$ , então:  $0 < \alpha < 1$ .

Portanto, para  $0 < \alpha < 1$ , temos que  $\frac{d^2 g(x)}{dx^2} \geq 0$ .

Conseqüentemente, g(x) e (3.21) são funções convexas.

Para esse tipo de função, a desigualdade de Jensen é dada por:

$$E \{f(x)\} \geq f \{E(x)\}, \quad (3.23)$$

onde E denota o valor esperado.

Tomando o valor esperado em ambos os lados de (3.20)

com respeito a P(x) e aplicando (3.23), obtemos:



$$J_{\alpha}^{\beta}(C;X) \geq (\alpha-1)^{-1} \log_2 [Pe^{\alpha} (1-Pe)^{1-\alpha} + Pe^{1-\alpha} (1-Pe^{\alpha})],$$

$$0 < \alpha < 1.$$

### 3.5 - Cota inferior de Pe em função de $J_{\alpha}^{\beta}(C;X)$

Teorema 3.3 -  $J_{\alpha}^{\beta}(C;X) \geq (2^{\beta-1} - 1)^{-1} \{ [Pe^{\alpha} (1-Pe)^{1-\alpha} +$

$$+ Pe^{1-\alpha} (1-Pe)^{\alpha}]^{\frac{\beta-1}{\alpha-1}} - 1 \} , \quad (3.24)$$

com  $\alpha \leq \beta < 1$  ou  $\beta \geq \alpha > 1$ .

Dem.: De (3.2) e (3.11), obtemos:

$$J_{\alpha}^{\beta}(c;x) = (2^{\beta-1} - 1)^{-1} \{ [P(c_1/x)^{\alpha} P(c_2/x)^{1-\alpha} +$$

$$+ P(c_1/x)^{1-\alpha} P(c_2/x)^{\alpha}]^{\frac{\beta-1}{\alpha-1}} - 1 \} , \quad (3.25)$$

com  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\alpha \neq 1$ ,  $\beta \neq 1$ .

Sabemos que  $J_{\alpha}^{\beta}(c;x)$  é simétrico em relação a  $P(c_1/x)$  e  $P(c_2/x)$ , portanto considerando  $P(c_1/x) = Pe(x)$ , temos que  $1-Pe(x) = P(c_2/x)$ . Fazendo a substituição em (3.25), obtemos:

$$J_{\alpha}^{\beta}(c;x) = (2^{\beta-1} - 1)^{-1} \{ [Pe^{\alpha}(x) (1-Pe(x))^{1-\alpha} +$$

$$+ Pe(x)^{1-\alpha} (1-Pe(x))^{\alpha}]^{\frac{\beta-1}{\alpha-1}} - 1 \} . \quad (3.26)$$

Seja  $h(x)$ , a função dada por:

$$h(x) = (2^{\beta-1} - 1)^{-1} \left\{ \left[ x^\alpha (1-x)^{1-\alpha} + (1-x)^\alpha x^{1-\alpha} \right]^{\frac{\beta-1}{\alpha-1} - 1} \right\},$$

para  $0 \leq x \leq 1/2$ .

Verifiquemos agora se,  $h(x)$  é convexa.

Calculemos a primeira derivada de  $h$ :

$$\begin{aligned} \frac{dh(x)}{dx} &= (2^{\beta-1} - 1)^{-1} \left\{ \left( \frac{\beta-1}{\alpha-1} \right) \left[ x^\alpha (1-x)^{1-\alpha} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (1-x)^\alpha x^{1-\alpha} \right]^{\frac{\beta-1}{\alpha-1} - 1} \right. \\ &\quad \left. \cdot \left[ x^\alpha (1-x)^{1-\alpha} + (1-x)^\alpha x^{1-\alpha} \right]' \right\}. \end{aligned}$$

Aplicando (3.21), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{dh(x)}{dx} &= (2^{\beta-1} - 1)^{-1} \left\{ \left( \frac{\beta-1}{\alpha-1} \right) \left[ x^\alpha (1-x)^{1-\alpha} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (1-x)^\alpha x^{1-\alpha} \right]^{\frac{\beta-1}{\alpha-1} - 1} \right. \\ &\quad \cdot \left[ \alpha (x^{\alpha-1} (1-x)^{1-\alpha} - x^{1-\alpha} (1-x)^{\alpha-1}) + \right. \\ &\quad \left. + (1-\alpha) (x^{-\alpha} (1-x)^\alpha - x^\alpha (1-x)^{-\alpha}) \right] \left. \right\}. \end{aligned}$$

Calculemos agora a derivada segunda de  $h$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2h(x)}{dx^2} &= (2^{\beta-1} - 1)^{-1} \left( \frac{\beta-1}{\alpha-1} \right) \left\{ \left( \frac{\beta-1}{\alpha-1} - 1 \right) \right. \\ &\quad \cdot \left[ x^\alpha (1-x)^{1-\alpha} + (1-x)^\alpha x^{1-\alpha} \right]^{\frac{\beta-1}{\alpha-1} - 2} \\ &\quad \left. \cdot \left[ x^\alpha (1-x)^{1-\alpha} + (1-x)^\alpha x^{1-\alpha} \right]' \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot [\alpha(x^{\alpha-1}(1-x)^{1-\alpha} - x^{1-\alpha}(1-x)^{\alpha-1}) + (1-\alpha)(x^{-\alpha}(1-x)^{\alpha} - x^{\alpha}(1-x)^{-\alpha})] + \\ & + [x^{\alpha}(1-x)^{1-\alpha} + (1-x)^{\alpha}x^{1-\alpha}]^{\frac{\beta-1}{\alpha-1} - 1} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot [\alpha(x^{\alpha-1}(1-x)^{1-\alpha} - x^{1-\alpha}(1-x)^{\alpha-1}) + \\ & + (1-\alpha)(x^{-\alpha}(1-x)^{\alpha} - x^{\alpha}(1-x)^{-\alpha})] \cdot \end{aligned}$$

Aplicando (3.21) e (3.22), obtemos:

$$\frac{d^2 h(x)}{dx^2} = (2^{\beta-1} - 1)^{-1} \left(\frac{\beta-1}{\alpha-1}\right) \left\{ \left(\frac{\beta-1}{\alpha-1} - 1\right) \cdot \right.$$

$$\cdot [x^{\alpha}(1-x)^{1-\alpha} + (1-x)^{\alpha}x^{1-\alpha}]^{\frac{\beta-1}{\alpha-1} - 2} .$$

$$\cdot [\alpha(x^{\alpha-1}(1-x)^{1-\alpha} - x^{1-\alpha}(1-x)^{\alpha-1}) + (1-\alpha)(x^{-\alpha}(1-x)^{\alpha} - x^{\alpha}(1-x)^{-\alpha})] .$$

$$\cdot [\alpha(x^{\alpha-1}(1-x)^{1-\alpha} - x^{1-\alpha}(1-x)^{\alpha-1}) + (1-\alpha)(x^{-\alpha}(1-x)^{\alpha} - x^{\alpha}(1-x)^{-\alpha})] +$$

$$+ [x^{\alpha}(1-x)^{1-\alpha} + (1-x)^{\alpha}x^{1-\alpha}]^{\frac{\beta-1}{\alpha-1} - 1} .$$

$$\cdot [\alpha(1-\alpha)(-x^{\alpha-2}(1-x)^{1-\alpha} - x^{1-\alpha}(1-x)^{\alpha-2} - x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha} +$$

$$- x^{-\alpha}(1-x)^{\alpha-1} - x^{-\alpha-1}(1-x)^{\alpha} - x^{\alpha}(1-x)^{-\alpha-1} - x^{-\alpha}(1-x)^{\alpha-1} - x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha})] \cdot \}$$

$$= (2^{\beta-1} - 1)^{-1} \left(\frac{\beta-1}{\alpha-1}\right) \left\{ \left(\frac{\beta-1}{\alpha-1} - 1\right) [x^{\alpha}(1-x)^{1-\alpha} +$$

$$+ (1-x)^{\alpha}x^{1-\alpha}]^{\frac{\beta-1}{\alpha-1} - 2} \cdot \right.$$

$$\cdot [\alpha(x^{\alpha-1}(1-x)^{1-\alpha} - x^{1-\alpha}(1-x)^{\alpha-1}) +$$

$$\begin{aligned}
& + (1-\alpha)(x^{-\alpha}(1-x)^\alpha - x^\alpha(1-x)^{-\alpha})^2 + \\
& + [x^\alpha(1-x)^{1-\alpha} + (1-x)^\alpha x^{1-\alpha}]^{\frac{\beta-1}{\alpha-1} - 1} \cdot \\
& \cdot [\alpha(1-\alpha)(-x^{\alpha-2}(1-x)^{1-\alpha} - x^{1-\alpha}(1-x)^{\alpha-2} - x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha} + \\
& - x^{-\alpha}(1-x)^{\alpha-1} - x^{-\alpha-1}(1-x)^\alpha - x^\alpha(1-x)^{-\alpha-1} - x^{-\alpha}(1-x)^{\alpha-1} + \\
& - x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha}] \cdot
\end{aligned}$$

Consideremos:

$$[x^\alpha(1-x)^{1-\alpha} + (1-x)^\alpha x^{1-\alpha}]^{\frac{\beta-1}{\alpha-1} - 2} = D$$

$$[\alpha(x^{\alpha-1}(1-x)^{1-\alpha} - x^{1-\alpha}(1-x)^{\alpha-1}) +$$

$$+ (1-\alpha)(x^{-\alpha}(1-x)^\alpha - x^\alpha(1-x)^{-\alpha})^2 = F$$

$$[x^\alpha(1-x)^{1-\alpha} + (1-x)^\alpha x^{1-\alpha}]^{\frac{\beta-1}{\alpha-1} - 1} = G$$

$$(-x^{\alpha-2}(1-x)^{1-\alpha} - x^{1-\alpha}(1-x)^{\alpha-2} - x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha} +$$

$$- x^{-\alpha}(1-x)^{\alpha-1} - x^{-\alpha-1}(1-x)^\alpha - x^\alpha(1-x)^{-\alpha-1} +$$

$$- x^{-\alpha}(1-x)^{\alpha-1} - x^{\alpha-1} - (1-x)^{-\alpha}) = H.$$

Claramente vemos que:

D, F e G são positivos enquanto que H é negativo.

Assim:

$$\frac{d^2 h(x)}{dx^2} = (2^{\beta-1} - 1)^{-1} \left(\frac{\beta-1}{\alpha-1}\right) \left\{ \left(\frac{\beta-1}{\alpha-1} - 1\right) D F + \alpha(1-\alpha)GH \right\} \quad (3.27)$$

Analisemos agora (3.27):

Sabemos que  $\alpha > 0$  e  $\alpha \neq 1$ .

Para que  $\alpha(1-\alpha)GH \leq 0 \rightarrow \alpha(1-\alpha) \geq 0 \rightarrow 1-\alpha \geq 0 \rightarrow \alpha \leq 1$ .

Portanto:  $\alpha < 1$ .

Para que  $(\frac{\beta-1}{\alpha-1}-1)DF \leq 0 \rightarrow \frac{\beta-1}{\alpha-1} \leq 1$ , mas  $\alpha-1 < 0 \rightarrow \beta \geq \alpha$ .

Continuando, para  $\alpha \leq \beta < 1$ , temos que:

$$2^{\beta-1} \leq 2^{1-1} \rightarrow 2^{\beta-1} \leq 2^0 \rightarrow 2^{\beta-1} \leq 1 \rightarrow 2^{\beta-1} - 1 \leq 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow (2^{\beta-1} - 1)^{-1} \leq 0.$$

$$\text{e } \frac{\beta-1}{\alpha-1} \geq 0.$$

Analogamente:

Para que  $\alpha(1-\alpha)GH \geq 0 \rightarrow \alpha(1-\alpha) \leq 0 \rightarrow -\alpha \leq -1 \rightarrow \alpha \geq 1$ ;

mas  $\alpha > 0$ ,  $\alpha \neq 1 \rightarrow \alpha > 1$ .

Para que  $(\frac{\beta-1}{\alpha-1} - 1)DF \geq 0 \rightarrow \frac{\beta-1}{\alpha-1} - 1 \geq 0 \rightarrow \frac{\beta-1}{\alpha-1} \geq 1$ , mas  $\alpha > 1$ , portanto:  $\beta \geq \alpha$ .

Continuando, para  $\beta \geq \alpha > 1$ , temos que:

$$2^{\beta-1} - 1 \geq 0 \rightarrow (2^{\beta-1} - 1)^{-1} \geq 0 \quad \text{e} \quad \frac{\beta-1}{\alpha-1} \geq 0.$$

Conseqüentemente para  $\alpha \leq \beta < 1$  e  $\beta \geq \alpha > 1$ , temos que  $\frac{d^2h(x)}{dx^2} \geq 0$ , donde concluimos que  $h(x)$  é convexa.

Portanto,  $h(x)$  e (3.26) são funções convexas; podemos então aplicar a desigualdade de Jensen dada por:

$$E \{f(x)\} \geq f \{E(x)\},$$

onde  $E$  denota o valor esperado. Tomando o valor esperado em am-

bos os lados de (3.26), obtemos:

$$J_{\alpha}^{\beta}(C;X) \geq (2^{\beta-1} - 1)^{-1} \{ [Pe^{\alpha}(1-Pe)^{1-\alpha} +$$

$$+ (1-Pe)^{\alpha} Pe^{1-\alpha}]^{\frac{\beta-1}{\alpha-1}} - 1 \} ,$$

$$\alpha \leq \beta < 1 \quad ; \quad \beta \geq \alpha > 1 .$$

### COMENTÁRIOS FINAIS

J-divergência e o Coeficiente de Bhattacharyya, são medidas muito importantes na teoria da decisão, teoria da informação, análise de decomposição, reconhecimento de modelos, etc.

No início deste trabalho apresentamos novas generalizações de J-divergência, com o objetivo de obter uma melhor aproximação, tanto inferior como superiormente, da probabilidade de erro. Incentivados por este objetivo apresentamos algumas cotas para a probabilidade de erro. Entretanto, ficamos ainda, com os seguintes problemas em aberto:

- (i) Determinar cotas superiores para a probabilidade de erro, em função das generalizações de J-divergência ( $J_{\alpha}(C;X)$  e  $J_{\alpha}^{\beta}(C;X)$ );
- (ii) Verificar a melhor aproximação;
- (iii) Estender os resultados obtidos para  $J_{\alpha}(C/X)$  e  $J_{\alpha}^{\beta}(C/X)$ ;
- (iv) Determinar cotas inferiores e superiores para  $R$  em função das generalizações de J-divergência.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BHATTACHARYYA, A. On a measure of Divergence Between Two Statistical Populations Defined by Their Probability Distributions - Bull. Cal. Math. Soc., Vol. 35 (1943), 99-109.
- [2] COVER, T.M. & HART, P.E. Nearest Neighbour Pattern Classification - IEEE Trans. Inform. Theory., Vol. 1T-13, Jan. 1967, pp. 21-27.
- [3] FERGUSON, T.S. Mathematical Statistics. Academic Press, New York, 1967.
- [4] HARDY, G.H.; LITTLEWOOD, J.E. & POLYA, G. Inequalities. Cambridge Univ. Press, 1934.
- [5] HUDIMOTO, H. On the Distribution-Free Classification of an Individual into one of Two Groups - Am. Inst. Stat. Math., Vol. 8, 1956, pp. 105-112.
- [6] HUDIMOTO, H. A note on the Probability of correct Classification When the Distributions are not Specified - Am. Inst. Stat. Math., Vol. 9, 1957, pp. 31-36.
- [7] KAILATH, T. The Divergence and Bhattacharyya Distance Measures in Signal Selection - IEEE Trans. Commun. Technol. Vol. COM-15, Feb. 1967, pp. 52-60.
- [8] KULLBACK, S. Information Theory and Statistics. J. Wiley, New York, 1959.
- [9] RATHIE, P.N. & LILLIAN, T.S. The J-divergence of order  $\alpha$ -J. Comb. Inform. and Syst. Sci., Vol. 6, 1981, pp. 197-205.
- [10] RÉNYI, A. On Measures of Entropy and Information - Proc. 4th Berkeley Symp. Math. Statist. and Probl., 1960, Univ. Californ. Press, Vol. 1, 1961, pp. 547-561.
- [11] SHARMA, R.D. & AUTAR, R. Relative Information Functions and their Type  $(\alpha, \beta)$  Generalization - MERIKA, Vol. 21, 1974, pp. 41-50.
- [12] SHARMA, B.D. & MITTAL, D.P. New Non-Additive Measures of Relative Information - J. Comb. Inform. and Syst. Sci., Vol. 2, 1977, pp. 122-132.



- [13] SHARMA, B.D. & TANEJA, I.J. Entropy of Type  $(\alpha, \beta)$  and other Generalized Measures in Information Theory - METRIKA, Vol. 22, 1975, pp. 205-215.
- [14] TANEJA, I.J. On Measures of Information and Inaccuracy - J. Statist. Physics., Vol. 14, 1976, pp. 263-270.
- [15] TANEJA, I.J. On Characterizations of J-Divergence and Its Generalizations - J. Comb. Inform. and Syst. Sci., Vol. 8(3) (1983), 206-212.
- [16] TOUSSAINT, G.T. On the Divergence Between Two Distributions and the Probability of Mis classification of Several Decision Rules - Proc. 2nd Intern. Joint. Cont. on Pattern. Recog., Copenhagen, Denmark, August, 1974, pp. 1-8.