

Esta Tese foi julgada adequada para a obtenção do título de

"MESTRE EM CIÊNCIAS"

especialidade em Matemática, e aprovada em sua forma final  
Curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal  
Santa Catarina.



Prof. Dr. Inder Jeet Taneja  
COORDENADOR

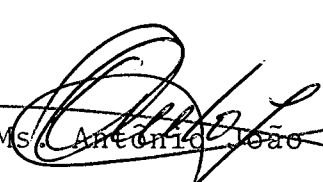
Banca Examinadora:



Prof. Dr. Inder Jeet Taneja  
ORIENTADOR



Prof. Dr. Gur Dial



Prof. Ms. Antonio João da Silva

LIMITES INFERIORES SOBRE OS CUSTOS  
MÍNIMOS E COMPRIMENTOS MÉDIOS  
NÃO - ADITIVOS.

ORIENTADOR: PROF. DR. INDER JEET TANEJA

SAMUEL ANICETO ZACCHI

1983

Ao Criador dos Céus, da Terra  
e de tudo o que neles há.

Aos meus pais,

A Ruth, Fernanda, Fernando, Bárbara,  
Juliana e Ricardo.

## AGRADECIMENTOS

Ao Professor Dr. Inder Jeet Taneja, Orientador desse trabalho, pelo incentivo dado e segurança demonstrada na realização desta pesquisa.

Estendo meus agradecimentos a todos que me apoiaram e a Universidade Federal de Santa Catarina.

## RESUMO

Neste trabalho, estudamos o problema de codificação de custo mínimo juntamente com as médias não-aditivas do comprimento das palavras códigos, e obtivemos o novo limite inferior para o custo médio de codificar as mensagens a serem transmitidas.

Os limites inferiores são os mesmos que valem para as médias aditivas discutidas anteriormente.

Também provamos que os comprimentos médios não podem ser menores que  $2(1-P_M)$  onde  $P_M = \max (p_1, p_2, \dots, p_K)$ .

## ABSTRAT

In this work, we study the codification problem of minimum cost jointly with the non-additive average codeword lengths, and we obtain the new lower limite for the average of coding the transmitted message.

The lower limites are the same as for the additive average lengths studied previously.

Also, we prove that the average lengths cannot be less than  $2(1-P_M)$ , where  $P_M = \text{Max} (p_1, p_2, \dots, p_K)$ .

## ÍNDICE

	pag.
CAPÍTULO I - Introdução .....	x
1.1 - Sistema de Comunicação .....	1
1.2 - Canal sem Ruído .....	2
1.3 - Várias Medidas da Informação .....	4
1.3.1 - Entropia de Shannon .....	4
1.3.2 - Entropia de Ordem $\alpha$ .....	5
1.3.3 - Entropia de Grau $\beta$ .....	5
1.3.4 - Entropia de Ordem $\alpha$ e Grau $\beta$ .....	5
1.4 - Teorema da Codificação sem Ruído com várias Entropias .....	6
CAPÍTULO II - Problema de Codificação com Custo Mínimo dos Comprimentos Médios <u>Aditivos</u> das Palavras Códigos .....	10
2.1 - Determinação de todas as Médias Quasearitméticas Aditivas dos Comprimentos das Palavras Códigos .....	10
2.2 - O Problema de Codificação com Custo Mínimo ...	15
CAPÍTULO III - Problema de Codificação com Custo Mínimo das Médias <u>Não-Aditivas</u> dos Comprimentos das Palavras Códigos .....	19
3.1 - Determinação de todas as Médias Não-Aditivas dos Comprimentos das Palavras Códigos .....	19
3.2 - O Problema de Codificação com Custo Mínimo ...	25
CAPÍTULO IV - Limites Inferiores sobre os Comprimentos Médios Não-Aditivos .....	29



pag.

APÊNDICES .....	38
REFERÊNCIAS .....	53

## INTRODUÇÃO

No Capítulo I, apresentamos o conceito e diagrama de um Sistema de Comunicação, bem como definimos as Entropias de Shannon, Ordem  $\alpha$ , Grau  $\beta$  e Ordem  $\alpha$  e Grau  $\beta$ . Também apresentamos o Teorema da Codificação sem Ruído com várias Entropias.

No Capítulo II, apresentamos o problema de Codificação com Custo Mínimo dos Comprimentos Médios Aditivos das Palavras Códigos e apresentamos também o novo limite inferior para o Custo Médio.

No Capítulo III, discutimos o problema de Codificação de Custo Mínimo juntamente com as Médias Não-Aditivas dos Comprimentos das Palavras Códigos e também chegamos ao limite inferior obtido no Capítulo II.

No Capítulo IV, tratamos dos limites inferiores sobre os comprimentos Não-aditivos.

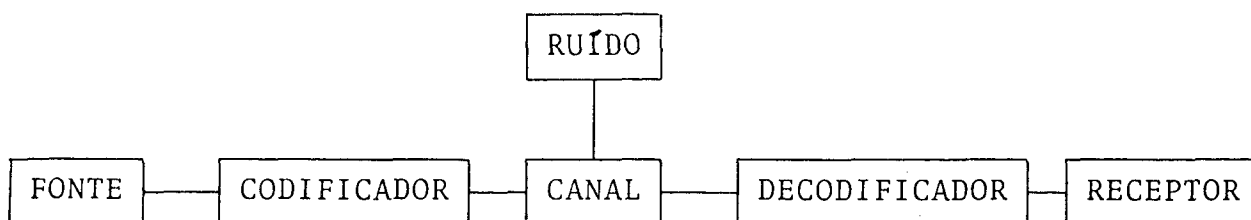
## CAPÍTULO I

### INTRODUÇÃO

#### 1.1 - SISTEMA DE COMUNICAÇÃO

Um sistema de comunicação é um conjunto de mecanismos que possibilita a transmissão de informação de um ponto denominado fonte para um outro ponto denominado receptor.

Para termos uma idéia de tal mecanismo, apresentamos um diagrama que visualiza o comportamento de tal sistema.



C.E. Shannon em 1948, desenvolveu uma teoria matemática, que trata dos aspectos fundamentais dos sistemas de comunicação, denominada "TEORIA DA INFORMAÇÃO". Esta teoria, trabalha com probabilidades e tem como um dos objetivos principais minimizar os custos de transmissão, que para tal, utiliza de forma apropriada os codificadores e decodificadores, procurando de uma forma funcional atingir um desempenho ótimo, quando aplicada em sistemas de comunicação.

O sistema de comunicação é composto dos seguintes elementos:

FONTE DE MENSAGEM: É uma componente do sistema que é capaz de produzir mensagem.

CODIFICADOR: É o responsável pela mudança da forma de mensagem,

isto é; transforma a linguagem da fonte para a linguagem do canal, mantendo inalterado o seu conteúdo.

CANAL: É o meio através do qual a mensagem é propagada com o problema de ruído.

DECODIFICADOR: Recebe a mensagem que foi transmitida pelo canal devendo ser capaz de decifrá-la de modo que a mensagem seja inteligível pelo receptor.

RECEPTOR: É o ponto de destino da mensagem.

## 1.2 - CANAL SEM RUÍDO

O canal é sem ruído se ele permite transmissão perfeita da entrada à saída, isto é, não requer o problema de correção de erro. Isto implica que nós requeremos somente maximizar o número de mensagens que pode ser mandado pelo canal em um tempo dado. (fixo)

Definamos agora, alguns elementos básicos para atender o objetivo do nosso trabalho.

Consideremos  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_K\}$  uma variável aleatória discreta

com distribuição probabilística  $P = (p_1, p_2, \dots, p_K)$ ; onde

$$p_k = p(x_k), \quad k = 1, 2, \dots, K \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^K p_k = 1.$$

Denotamos o conjunto de todas as distribuições probabilísticas por

$$\Delta_K, \text{ isto é; } \Delta_K = \{P = (p_1, p_2, \dots, p_K); \quad p_k \geq 0; \quad \sum_{k=1}^K p_k = 1\}$$

Seja  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_D\}$  o alfabeto código onde  $D$  é a sua dimensão.

PALAVRA CÓDIGO: Cada símbolo  $x_k$  associado com uma sequência fini

ta do alfabeto código é chamado palavra código.

Exemplo:  $x_1 \rightarrow a_1 a_1 a_2 = W_1$

$x_2 \rightarrow a_2 a_3 a_5 a_7 = W_2$

.....  
 $x_k \rightarrow a_3 a_1 a_1 a_2 = W_k$

.....  
 $x_K \rightarrow a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 = W_K$

COMPRIMENTO DA PALAVRA CÓDIGO: O número de elementos do alfabeto código em uma palavra código é o comprimento da palavra código.

COMPRIMENTO MÉDIO:  $L = \sum_{k=1}^K p_k n_k$ , onde  $n_k$  é o comprimento da palavra associada ao evento  $x_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$ .

CÓDIGO: é a coleção de todas as palavras códigos.

Exemplo:  $W = \{W_1, W_2, \dots, W_K\}$

CÓDIGOS DECIFRÁVEIS UNICAMENTE: O código é decifrável unicamente se cada seqüência do código alfabeto corresponde no máximo a uma mensagem.

Exemplo:  $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ,  $A = \{0, 1\}$

$x_1 \rightarrow 0$ ;  $x_2 \rightarrow 010$ ;  $x_3 \rightarrow 01$  e  $x_4 \rightarrow 10$

A seqüência binária 010 corresponde a  $x_2$  ou  $x_3 x_1$  ou  $x_1 x_4$ .

Isto implica que a seqüência não pode ser decifrada exatamente.

Uma possibilidade é que nenhuma palavra código seja o prefixo da outra.

PREFIXO: Dizemos que a palavra A é prefixo da palavra B, se B pode ser escrita como AC para alguma seqüência finita C; ou  $B = AC$ .

CÓDIGO INSTANTÂNEO: Se um código tem a propriedade que nenhuma palavra código é prefixo da outra, então o código é chamado "Código

Instantâneo".

Cada código instantâneo é decifrável unicamente. A recíproca é falsa.

### EXISTÊNCIA DE UM CÓDIGO INSTANTÂNEO

Teorema 1.2: um código instantâneo com comprimentos das palavras códigos  $n_1, n_2, \dots, n_K$  existe, se e somente se, vale a desigualdade de Kraft,

$$\sum_{k=1}^K D^{-n_k} \leq 1 \quad (1.1)$$

onde  $D$  é a dimensão do alfabeto código.

O mesmo teorema também vale para os códigos decifráveis unicamente. (ref. Ash [3]).

## 1.3 - VÁRIAS MEDIDAS DA INFORMAÇÃO

Vamos dar agora algumas medidas as quais são básicas na teoria da informação com aplicação em quase todos os campos tais como engenharia, economia, estatística, etc, ..., e também na teoria da codificação sem ruído.

### 1.3.1 - Entropia de Shannon

A entropia de Shannon é definida por:

$$H(P) = H(p_1, p_2, \dots, p_K) = - \sum_{k=1}^K p_k \log_D p_k \quad (1.2)$$

onde  $(p_1, p_2, \dots, p_K) \in \Delta_K$  e  $D > 1$ .

Observação: A base  $D$  foi escolhida para simplificar.

### 1.3.2 - Entropia de Ordem $\alpha$

Em 1961, Rényi [13] fez uma generalização da entropia de Shannon, apresentando a entropia de ordem  $\alpha$  definida por:

$$H_{\alpha}(P) = \frac{1}{1-\alpha} \log_D \left( \sum_{k=1}^K p_k^{\alpha} \right), \quad \alpha > 0, \quad \alpha \neq 1 \quad (1.3)$$

onde  $\alpha$  é um parâmetro.

Quando  $\alpha \rightarrow 1$  temos:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} H_{\alpha}(P) = H(P) \text{ que é a entropia de Shannon.}$$

### 1.3.3 - Entropia de Grau $\beta$

Em 1970, Daróczy [6] introduziu o conceito de funções da informação de grau  $\beta$ , e por meio dessas funções definiu a entropia de grau  $\beta$  por:

$$H^{\beta}(P) = (D^{1-\beta} - 1)^{-1} \left( \sum_{k=1}^K p_k^{\beta-1} \right), \quad \beta > 0, \quad \beta \neq 1 \quad (1.4)$$

É fácil observar que:

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} H^{\beta}(P) = H(P) \text{ que é a entropia de Shannon.}$$

### 1.3.4 - Entropia de Ordem $\alpha$ e Grau $\beta$

Em 1975, Sharma e Mittal [16] apresentaram as entropias generalizadas dadas por:

$$H_{\alpha}^{\beta}(P) = (D^{1-\beta} - 1)^{-1} \left[ \left( \sum_{k=1}^K p_k^{\alpha} \right)^{\frac{\beta-1}{\alpha-1}} - 1 \right], \quad \alpha, \beta \neq 1, \quad \alpha, \beta > 0 \quad (1.5)$$

e

$$H_1^{\beta}(P) = (D^{1-\beta} - 1)^{-1} \left[ D^{(1-\beta) \sum_{k=1}^K p_k \log_D p_k} - 1 \right], \quad \beta \neq 1 \quad (1.6)$$

chamadas respectivamente como entropia de ordem  $\alpha$  e grau  $\beta$  e entropia de ordem 1 e grau  $\beta$ .

Casos Particulares: a)  $\lim_{\beta \rightarrow 1} H_{\alpha}^{\beta}(P) = H_{\alpha}(P)$  que é a entropia de Rényi

b) quando  $\alpha = \beta \neq 1$ , temos:

$$H^{\beta}(P) = (D^{1-\beta} - 1)^{-1} \left[ \sum_{k=1}^K p_k^{\beta} - 1 \right], \quad \beta > 0, \beta \neq 1$$

que é a entropia de grau  $\beta$ .

c) quando  $\alpha \rightarrow 1$  e  $\beta \rightarrow 1$  temos:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} [\lim_{\beta \rightarrow 1} H_{\alpha}^{\beta}(P)] = H(P) \text{ que é a entropia de}$$

Shannon.

#### 1.4 - TEOREMA DA CODIFICAÇÃO SEM RUÍDO COM VÁRIAS ENTROPIAS:

Teorema 1.4.1: Dada uma variável aleatória  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_K\}$  com a incerteza  $H(P)$ , existe um código instantâneo de dimensão  $D$  cujo comprimento médio  $(L = \sum_{k=1}^K p_k n_k)$  satisfaz

$$H(P) \leq L < H(P) + 1 \quad (1.7)$$

(ref. Ash [3])

Também Ash [3], mostrou que para cada inteiro  $s$  existe um código instantâneo  $x^s$  tal que se  $L_s$  é o comprimento médio das palavras códigos, então:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{L_s}{s} = H(P) \quad (1.8)$$

$$\text{onde } H(P) = - \sum_{k=1}^K p_k \log_D p_k$$



Isto quer dizer que é possível tornar  $L$  tão próximo de  $H(P)$  quanto se queira, mediante seqüências de entrada suficientemente longas.

O teorema 1.4.1, foi generalizado por Campbell usando a entropia de ordem  $\alpha$  da seguinte maneira:

Lema 1.4.1: Seja  $L(P; N; t) = \frac{1}{t} \log_D \left( \sum_{k=1}^K p_k D^{tn_k} \right)$

o comprimento de ordem  $t$  da palavra código onde  $n_1, n_2, \dots, n_K$  satisfaz a desigualdade de Kraft (1.1), então  $L(P; N; t) \geq H_\alpha(P)$

onde  $\alpha = (1 + t)^{-1}$ , com a igualdade se, e somente se

$$n_k = -\alpha \log_D p_k + \log_D \left( \sum_{k=1}^K p_k^\alpha \right)$$

Este lema foi estudado em mais detalhes no capítulo II.

Observação:  $\lim_{t \rightarrow 0} L(P; N, t) = L(P; N; 0) = \sum_{k=1}^K p_k n_k$

Teorema 1.4.2: Por codificação de seqüências de símbolos de entrada suficientemente longas, é possível fazer o comprimento médio de ordem  $t$  das palavras códigos tão restrito a  $H_\alpha(P)$  quanto desejado. Além do mais,  $H_\alpha(P) \leq \frac{L(P; N; t)}{K} < H_\alpha(P) + \frac{1}{K}$  onde  $L(P; N; t)/K$  pode ser chamado comprimento médio de ordem  $t$ .

Para simplicidade denotaremos as medidas (1.5) e (1.6) como  $H(P; \alpha, \beta)$  e  $H(P; 1, \beta)$  respectivamente.

Mittal (veja Gupta [9]) introduziu os seguintes comprimentos não-aditivos:

$$L(P; N; t, \beta) = (D^{1-\beta} - 1)^{-1} \left[ \left( \sum_{k=1}^K p_k D^{tn_k} \right)^{\frac{1-\beta}{t}} - 1 \right], \quad \beta \neq 1, \quad t \neq 0 \quad (1.9)$$

$$L(P; N; 0, \beta) = (D^{1-\beta} - 1)^{-1} [D^{(1-\beta) \sum_{k=1}^K p_k n_k} - 1], \quad \beta \neq 1 \quad (1.10)$$

Observamos que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} L(P; N; t, \beta) = L(P; N; 0, \beta)$$

Vale o seguinte lema (veja Gupta [9])

Lema 1.4.2: Se  $n_1, n_2, \dots, n_K$  denotam os comprimentos de um código instantâneo/decifrável unicamente formado do alfabeto código de dimensão  $D$ , então:

(i)  $L(P; N; 0, \beta) \geq H(P; 1, \beta)$ ,  $\beta \neq 1$  com a igualdade se, e somente se  $n_k = -\log_D p_k$ , para todo  $k = 1, 2, \dots, K$ .

(ii)  $L(P; N; t, \beta) \geq H(P; \alpha, \beta)$ ,  $\beta \neq 1$ ,  $\alpha \neq 1$  com a igualdade se, e somente se  $n_k = -\alpha \log_D p_k + \log_D \left( \sum_{k=1}^K p_k^\alpha \right)$  onde  $\alpha = (1+t)^{-1}$ .

Este lema foi estudado nos capítulos III e IV em mais detalhes.

Agora daremos os teoremas de codificação correspondentes as médias (1.9) e (1.10) (ref. Gupta [9]).

Teorema 1.4.3: Um comprimento não-aditivo de grau  $\beta$  e ordem  $t$  para um código instantâneo mediante símbolos de entrada pode tender arbitrariamente para  $H(P; \alpha, \beta)$  por codificação de seqüências suficientemente longas de símbolos de entrada. Ou seja:

$$H(P; \alpha, \beta) \leq L(P; N; t, \beta) < \epsilon_K + H(P; \alpha, \beta)$$

onde  $\epsilon_K \rightarrow 0$  com  $K \rightarrow \infty$ .

Teorema 1.4.4: Um comprimento não-aditivo de grau  $\beta$  e ordem 1 (um) para um código instantâneo, através de símbolos de entrada, pode ser feito arbitrariamente, tendendo para  $H(P; 1, \beta)$  por codificação de seqüências longas de entrada. Ou seja:

$$H(P; 1, \beta) \leq L(P; N; 0, \beta) < \frac{\varepsilon}{K} + H(P; 1, \beta) \text{ com } \frac{\varepsilon}{K} \rightarrow 0 \text{ quando } K \rightarrow \infty.$$

## CAPÍTULO II

PROBLEMA DE CODIFICAÇÃO COM CUSTO MÍNIMO DOS COMPRIMENTOS  
MÉDIOS ADITIVOS DAS PALAVRAS CÓDIGOS

O problema de codificação de custo mínimo é discutido juntamente com a determinação de todas as médias quasearitméticas aditivas de comprimento das palavras códigos, e o novo limite inferior para o custo médio de codificar as mensagens a serem transmitidas é obtido.

2.1 - DETERMINAÇÃO DE TODAS AS MÉDIAS QUASEARITMÉTICAS ADITIVAS  
DOS COMPRIMENTOS DAS PALAVRAS CÓDIGOS

Campbell [5] introduziu a média quasearitmética dos comprimentos das palavras códigos da seguinte maneira:

Seja  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_K\}$  um conjunto finito de mensagens e seja  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_K\}$  uma distribuição associada de probabilidades,

tal que a probabilidade de  $x_k$  é  $p_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$  e  $\sum_{k=1}^K p_k = 1$

$$p_k > 0 \quad (k = 1, 2, \dots, K) \quad (2.1)$$

Suponhamos que queremos representar as mensagens em  $X$  por palavras códigos, isto é, por seqüências finitas de elementos do conjunto  $\{0, 1, 2, \dots, D-1\}$  onde  $D > 1$ . Existe um código unicamente decifrável que representa  $x_k$  por uma palavra código de comprimento  $n_k$ , ( $k = 1, 2, \dots, K$ ) se, e somente se o conjunto de inteiros posi

vos do comprimento das palavras códigos  $N = \{n_1, n_2, \dots, n_K\}$  satisfaz a desigualdade de Kraft, isto é:

$$\sum_{k=1}^K D^{-n_k} \leq 1 \quad (2.2)$$

Agora seja  $\phi : [1, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua estritamente crescente. Tem uma inversa  $\phi^{-1}$  que também é contínua e estritamente crescente. Isto define uma média quasearitmética do comprimento da palavra código.

$$L(P; N; \phi) = \phi^{-1} \left[ \sum_{k=1}^K p_k \phi(n_k) \right] \quad (2.3)$$

A razão de chamar de  $L$  um comprimento médio é que, para  $N = \{n, \dots, n\}$  isto é, quando todas as palavras códigos são de igual comprimento  $n$ , então  $L(P, N, \phi) = n$ . Entretanto, se

$$\phi(x) = \phi_0(x) = x \text{ com } x \in [1, \infty[, \text{ então } L(P, N, \phi) = \sum_{k=1}^K p_k n_k \quad (2.4)$$

que é a média aritmética do comprimento da palavra código.

Campbell [4], [5] também introduziu a média exponencial do comprimento da palavra código, para as quais

$$\phi(x) = \phi_t(x) = D^{tx}, \quad x \in [1, \infty[, \quad t \neq 0, \quad L(P, N, \phi_t) = \frac{1}{t} \log_D \sum_{k=1}^K p_k D^{tn_k} \quad (2.5)$$

É fácil ver que

$$\lim_{t \rightarrow 0} L(P, N, \phi_t) = L(P, N, \phi_0)$$

Estes dão essencialmente as entropias de Shannon e Rényi como limites inferiores de (2.4) e (2.5) respectivamente, e mostram também que existem códigos unicamente decifráveis para os quais estes comprimentos médios das palavras códigos se aproximam dentro de uma unidade para seus limites inferiores.

Consideremos agora dois conjuntos independentes de mensagens  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_K\}$  e  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_J\}$  com distribuições

probabilísticas associadas  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_K\} \in \Delta_K$  e  $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_J\} \in \Delta_J$ . Visto que  $X$  e  $Y$  são independentes, a probabilidade do par  $(x_k, y_j)$  é  $(p_k q_j)$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$  e  $j = 1, 2, \dots, J$ . Denotamos por  $PQ$  a distribuição probabilística  $\{p_1q_1, \dots, p_1q_J, \dots, p_Kq_1, \dots, p_Kq_J\} \in \Delta_{KJ}$ . Seja  $x_k$  representada por uma palavra código de comprimento  $n_k$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ) e seja  $y_j$  representada por uma palavra código de comprimento  $m_j$  ( $j = 1, 2, \dots, J$ ). Entretanto, supomos que usamos os mesmos símbolos  $\{0, 1, 2, \dots, D-1\}$  em todas estas representações. O par  $(x_k, y_j)$  pode ser representado por uma palavra código de comprimento  $n_k + m_j$   $k = 1, 2, \dots, K$ ;  $j = 1, 2, \dots, J$ . Denotamos estas três distribuições de comprimentos por  $N = \{n_1, n_2, \dots, n_K\}$ ;  $M = \{m_1, m_2, \dots, m_J\}$  e  $N + M = \{n_1+m_1, n_1+m_2, \dots, n_1+m_J, \dots, n_K+m_J\}$  respectivamente.

Se  $N$  e  $M$  satisfazem a desigualdade de Kraft então também satisfaz  $N + M$  pois  $\sum_{k=1}^K D^{-n_k} \leq 1$  e  $\sum_{j=1}^J D^{-m_j} \leq 1$  o que segue

$$\sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^J D^{-(n_k+m_j)} \leq 1 \quad (2.6)$$

Portanto, existe realmente um código unicamente decifrável com  $N + M$  como conjunto de comprimentos das palavras códigos associadas a:

$X \times Y = \{x_1y_1, \dots, x_1y_J, \dots, x_Ky_1, \dots, x_Ky_J\}$ . Se  $L$  é uma medida de comprimentos médios, é natural requerer que:

$$L(P*Q, N+M, \phi) = L(P, N, \phi) + L(Q, M, \phi) \quad (2.7)$$

isto é;

$$\phi^{-1} \left[ \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^J p_k q_j \phi(n_k + m_j) \right] = \phi^{-1} \left[ \sum_{k=1}^K p_k \phi(n_k) \right] + \phi^{-1} \left[ \sum_{j=1}^J q_j \phi(m_j) \right] \quad (2.8)$$

Chamamos (2.7) ou (2.8) a aditividade. As expressões (2.7) ou (2.8) são supostas para todos os inteiros positivos  $n_k$  e  $m_j$  satisfazendo (2.6) e para todo  $p_k, q_j$  ( $k = 1, 2, \dots, K; j = 1, 2, \dots, J$ )

$$\text{tal que } \sum_{k=1}^K p_k = 1, \quad p_k \geq 0 \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^J q_j = 1, \quad q_j \geq 0.$$

O problema de encontrar todas as medidas aditivas (2.7), médias quasearitméticas dos comprimentos das palavras códigos (2.3) não tem sido solucionado anteriormente (ref. Campbell [5]; Aczel [1]). Em vez disso, Campbell [5], generalizou os comprimentos das palavras códigos  $n_k$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ) tal que elas se tornam arbitrariamente números reais satisfazendo a desigualdade de Kraft, e resolveu (2.8) neste caso. Restringindo a solução para  $K = J = 2$ , portanto tomando o resultado mais geral.

Desde que  $D \geq 2$ ,  $n_1 \geq 1$ ,  $n_2 \geq 1$ ,  $m_1 \geq 1$ ,  $m_2 \geq 1$ , (2.6) é sempre satisfeita. O que segue o teorema seguinte:

Teorema 2.1.1: A média aritmética e a exponencial dos comprimentos médios das palavras códigos (2.4) e (2.5) são somente a média quasearitmética dos comprimentos das palavras códigos (2.3) as quais são aditivas (2.7) com  $N = M = 2$  (para duas distribuições).

Citamos o seguinte lema que foi provado por Aczel [1]

Lema 2.1.1: Sejam  $\phi$  e  $\psi$  funções contínuas estritamente cres

centes definidas em  $[1, \infty[$ .

A equação

$$\phi^{-1}[(1-p)\phi(n_1) + p\phi(n_2)] = \psi^{-1}[(1-p)\psi(n_1) + p\psi(n_2)] \quad (2.9)$$

mantém para  $n_1=1$ ,  $n_2$  inteiro arbitrário maior que 1,  $p \in [0,1]$  arbitrário, se, e somente se existirem constantes  $\gamma$  e  $\delta$ ,  $\gamma > 0$ , tal que

$$\psi(x) = \gamma\phi(x) + \delta \text{ para todo } x \in [1, \infty[ \quad (2.10)$$

Aczel [1] também mostrou que as soluções para  $\phi(x+m) = \psi_m(x) = \gamma(m)\phi(x) + \delta(m)$   $x \in [1, \infty[$ ;  $m = 1, 2, 3, \dots$

são:

$$\phi(x) = \gamma x + \delta \quad (\gamma > 0) \text{ para todo } x \in [1, \infty[ \quad (2.11)$$

e

$$\phi(x) = \gamma D^{tx} + \delta \quad (\gamma t > 0) \text{ para todo } x \in [1, \infty[ \quad (2.12)$$

As equações (2.8) e (2.9) são equivalentes.

(ref. Aczel [1]).

É bem conhecido [Reza [14]; Campbell [4]; [5]; Aczel [1]] que para todo P e N satisfazendo (2.1) e (2.2) respectivamente,

$$L(P; N; \phi_0) = \sum_{k=1}^K p_k n_k \geq - \sum_{k=1}^K p_k \log_D p_k \quad (2.13)$$

e

$$L(P; N; \phi_t) = \frac{1}{t} \log_D \sum_{k=1}^K p_k D^{tn_k} \geq \frac{t+1}{t} \log_D \left( \sum_{k=1}^K p_k^{\frac{1}{t+1}} \right) \quad (2.14)$$

para  $t > -1$ ,  $t \neq 0$

O lado da mão direita de (2.13) é a entropia de Shannon e o lado



da mão direita de (2.14) é a entropia de Rényi, (ou entropia de ordem  $t$ ).

Quando  $t=-1$ , é fácil mostrar que:

$$\lim_{t \rightarrow -1} \left( \frac{t+1}{t} \log_D \left( \sum_{k=1}^K p_k^{\frac{1}{t+1}} \right) \right) = - \log_D \max (p_1, p_2, \dots, p_K) \quad (2.15)$$

Veja Apêndice A

(portanto, o lado da mão direita de (2.15) é a entropia de Rényi de ordem  $\infty$ ). Assim, indo sobre o limite  $t \rightarrow -1$  em (2.14) obtemos:

$$L(P; N; \phi_{-1}) = - \log_D \sum_{k=1}^K p_k D^{-n_k} \geq - \log_D \max (p_1, p_2, \dots, p_K).$$

Mais geralmente, Campbell (ref. Aczel e Daróczy [2]) provaram que para todo  $t \leq -1$

$$L(P; N; \phi_t) = \frac{1}{t} \log_D \sum_{k=1}^K p_k D^{tn_k} \geq \frac{1}{t} \log_D \max (p_1, \dots, p_K) \quad (2.16)$$

## 2.2 - O PROBLEMA DE CODIFICAÇÃO COM CUSTO MÍNIMO

O mínimo ou limite inferior das propriedades (2.13), (2.14) e (2.16) dá interesse à seguinte interpretação da média quasearitmética dos comprimentos das palavras. (Cf. Campbell [5]).

A função  $\phi$  em (2.3) pode ser entendida como a função custo,  $\phi(n)$  sendo o custo de usar uma palavra código de comprimento  $n$ . É razoável supor que  $\phi$  é estritamente crescente sobre o conjunto de inteiros positivos e então pode sempre ser estendida a uma função estritamente crescente e contínua sobre  $[1, \infty[$ . Isto é conveniente porque  $\phi^{-1}$  pode ser aplicado sobre mais do que um conjunto enumerável.

Agora o custo médio de codificação de mensagens  $X = \{x_1, \dots, x_K\}$

com distribuição probabilística  $P = \{p_1, \dots, p_K\}$  por uma distribuição  $N = \{n_1, n_2, \dots, n_K\}$  de comprimento das palavras códigos

$$\hat{e}: C = \sum_{k=1}^K p_k \phi(n_k). \quad (2.17)$$

Um problema de codificação de algum interesse é minimizar o custo  $C$  por uma escolha apropriada da distribuição  $N$  sujeita a (2.2).

Visto que  $L(P, N, \phi) = \phi^{-1}(C)$  e  $\phi^{-1}$  é contínua e estritamente crescente, um problema equivalente é minimizar o comprimento médio da palavra código  $L(P, N, \phi)$ . Existem constantes multiplicativas e aditivas dadas por (2.11) e (2.12). Elas não influenciam nos comprimentos médios das palavras códigos (2.4) e (2.5). Calculando os custos médios, pode ser oportuno normalizá-los. Uma normalização possível fixaria custo unitário para codificar uma palavra código de comprimento 1 ( $\phi(1)=1$ ) e custo-zero (no idealizado caso) de uma palavra código de comprimento zero ( $\phi(0)=0$ ) onde foi provado por Campbell [5] que os comprimentos não são necessariamente inteiros. Então  $\phi_0$  e  $\phi_t$  são reestabelecidos por:

$$\hat{\phi}_0(x) = x; \quad x \in [1, \infty[, \text{ e } \hat{\phi}_t(x) = \frac{D^{tx} - 1}{D^t - 1} \quad \text{para } t \neq 0, \quad x \in [1, \infty[$$

$$\text{sendo } \hat{C} = \sum_{k=1}^K p_k \hat{\phi}(n_k) \quad (2.18)$$

Uma vantagem é que  $\hat{\phi}_0 = \lim_{t \rightarrow 0} \hat{\phi}_t$  enquanto  $\phi_0 \neq \lim_{t \rightarrow 0} \phi_t$ . As desigualdades (2.13); (2.14) e (2.16) mostram que os custos médios não po

dem ser menores que:

$$\hat{C} = \begin{cases} C_0 = - \sum_{k=1}^K p_k \log_D p_k & \text{para } t=0 \\ C_1(t) = \frac{\left( \sum_{k=1}^K p_k^{\frac{1}{t+1}} \right)^{1+t} - 1}{D^t - 1} & \text{para } t > -1 \\ & t \neq 0 \\ C_2(t) = \frac{1 - P_M}{1 - D^t} & \text{para } t \leq -1 \end{cases} \quad (2.19)$$

onde  $P_M = \max \{p_1, p_2, \dots, p_K\}$

quando as funções custos são dadas por

$$\hat{\phi}_0(x) = x$$

$$\hat{\phi}_t(x) = \frac{D^{tx} - 1}{D^t - 1}, \quad t \neq 0 \text{ e } x \in [1, \infty[$$

Para a demonstração de (2.19) veja Apêndice B

El-Sayed [7], além disso, deu o limite inferior, o qual é independente de  $t$  para os limites inferiores dos custos médios codificados e provou o seguinte teorema:

Teorema 2.2.1: Seja a média quasearitmética das palavras códigos aditiva (2.6) e o custo médio de codificar o conjunto  $X$  de mensagens normalizadas.

Se

(i) as mensagens são equiprováveis e  $D \leq K$ , ou

(ii) um código binário ( $D=2$ ) é usado e  $P_M \geq \frac{1}{2}$  então os custos médios não podem ser menores ou iguais para  $1 - P_M$ , isto é;  $\hat{C} \geq 1 - P_M$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

O teorema acima foi superado por Silva [17]

e Taneja e Silva [19] que segue:

Teorema 2.2.2: Seja a média quasearitmética dos comprimentos das palavras códigos aditivas (2.7) e o custo médio de codificar o conjunto  $X$  de mensagens normalizadas, se:

(i) as mensagens são equiprováveis e  $D \leq K$  então  $C_1(t) \geq 1 - P_M$ ;

ou

(ii) as mensagens são equiprováveis e  $D \leq K$ ,  $P_M > \frac{1}{2}$ , então

$$\frac{1}{2} C_1(t) \geq 1 - P_M \text{ ou}$$

(iii) um código binário é usado ( $D=2$ ) e  $P_M \geq \frac{1}{2}$ , então  $\frac{1}{2} C_1(t) \geq 1 - P_M$ ,

para todo  $t > -1$ , onde  $P_M = \max(p_1, \dots, p_K)$ .

Para o caso  $C_0$  e  $D=2$  veja Hellman e Raviv [11] e Gallager [8] que mostram:

$$\frac{1}{2} C_0 \geq 1 - P_M$$

O caso  $C_2(t)$  não foi considerado, pois, foi citado por Campbell

[5] que não tem importância prática para  $t \leq -1$ .

## CAPÍTULO III

PROBLEMA DE CODIFICAÇÃO COM CUSTO MÍNIMO DAS  
MÉDIAS NÃO-ADITIVAS DOS COMPRIMENTOS DAS PALAVRAS CÓDIGOS

Neste capítulo, o problema de codificação de custo mínimo é discutido juntamente com as médias não-aditivas do comprimento das palavras códigos e o novo limite inferior para o custo médio de codificar as mensagens a serem transmitidas, é obtido. Os limites inferiores são os mesmos que valem para as médias aditivas discutidas no capítulo II.

3.1 - DETERMINAÇÃO DE TODAS AS MÉDIAS NÃO-ADITIVAS DOS COMPRIMENTOS DAS PALAVRAS

Consideremos as duas medidas generalizadas não-aditivas introduzidas por Mittal e Sharma [16]

$$H(P; 1, \beta) = (D^{1-\beta} - 1)^{-1} [D^{(\beta-1)} \sum_{k=1}^K p_k \log_D p_k - 1]; \quad \beta \neq 1 \quad (3.1)$$

e

$$H(P; \alpha, \beta) = (D^{1-\beta} - 1)^{-1} [(\sum_{k=1}^K p_k^\alpha)^{\frac{1-\beta}{1-\alpha}} - 1]; \quad \alpha, \beta \neq 1; \quad \alpha, \beta > 0 \quad (3.2)$$

Para todo  $P = (p_1, p_2, \dots, p_k) \in \Delta_K$ , onde  $D$  é a dimensão do alfa beto código e  $D > 1$ . Estas duas medidas satisfazem a seguinte não-aditividade:

$$H(P * Q) = H(P) + H(Q) + \lambda H(P) H(Q), \quad \lambda \neq 0 \quad (3.3)$$

onde  $\lambda = (D^{1-\beta} - 1)$ ,  $\beta \neq 1$ ,  $\beta > 0$ ;  $P \in \Delta_K$ ,  $Q \in \Delta_J$  e  $P*Q \in \Delta_{KJ}$ .

Além do mais

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} H(P; \alpha, \beta) = H(P; 1, \beta) \quad e$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} H(P; 1, \beta) = H(P) = - \sum_{k=1}^K p_k \log_D p_k.$$

Também foram apresentadas por Mittal (Veja Gupta [9]), as medidas não-aditivas de grau  $\beta$  com comprimento das palavras códigos de ordem 0 e de ordem  $t$ , dadas respectivamente por:

$$L(P; N; 0, \beta) = (D^{1-\beta} - 1)^{-1} [D^{(1-\beta) \sum_{k=1}^K p_k n_{k-1}}], \quad \beta \neq 1 \quad (3.4)$$

e

$$L(P; N; t, \beta) = (D^{1-\beta} - 1)^{-1} \left[ \left( \sum_{k=1}^K p_k D^{t n_k} \right)^{\frac{1-\beta}{t}} - 1 \right], \quad \beta \neq 1, \quad t \neq 0 \quad (3.5)$$

onde  $D > 1$  é a dimensão do alfabeto código.

Além do mais:

$$\lim_{t \rightarrow 0} L(P; N; t, \beta) = L(P; N; 0, \beta)$$

Vamos agora considerar a não-aditividade da seguinte forma:

$$L(PQ; N+M; \phi) = L(P; N; \phi) + L(Q; M; \phi) + (D^{1-\beta} - 1) L(P; N; \phi) L(Q; M; \phi) \quad (3.6)$$

$$\text{onde } L(P; N; \phi) = \phi^{-1} \left[ \sum_{k=1}^K p_k \phi(\ell(n_k)) \right] \quad (3.7)$$

e  $\ell(n_k)$  é a função de comprimento da palavra  $n_k$  e  $\phi$  é como está definida no capítulo II. Substituindo (3.7) em (3.6) obtemos:

$$\begin{aligned} \phi^{-1} \left[ \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^J p_k q_j \phi(\ell(n_k + m_j)) \right] &= \phi^{-1} \left[ \sum_{k=1}^K p_k \phi(\ell(n_k)) \right] + \phi^{-1} \left[ \sum_{j=1}^J q_j \phi(\ell(m_j)) \right] \\ &+ (D^{1-\beta} - 1) \phi^{-1} \left[ \sum_{k=1}^K p_k \phi(\ell(n_k)) \right] \phi^{-1} \left[ \sum_{j=1}^J q_j \phi(\ell(m_j)) \right] \end{aligned} \quad (3.8)$$

Teorema 3.1: As soluções gerais da equação (3.6) ou (3.8) são somente as dadas em (3.4) e (3.5).

Demonstração: Sejam

$$p_1 = 1; \quad p_k = 0; \quad k = 2, 3, \dots, K$$

$$q_1 = 1; \quad q_j = 0; \quad j = 2, 3, \dots, J$$

$$n_1 = n; \quad n_k = 0; \quad k = 2, 3, \dots, K$$

$$m_1 = m; \quad m_j = 0; \quad j = 2, 3, \dots, J$$

então obtemos de (3.8)

$$\ell(n + m) = \ell(n) + \ell(m) + (D^{1-\beta} - 1) \ell(n) \ell(m) \quad (3.9)$$

$$\text{fazendo } 1 + (D^{1-\beta} - 1) \ell(n) = t(n) \quad (3.10)$$

$$\text{temos: } \ell(n) = \frac{t(n) - 1}{D^{1-\beta} - 1} \quad (3.11)$$

$$\text{substituindo (3.11) em (3.9) obtemos: } t(n + m) = t(n) t(m) \quad (3.12)$$

$$\text{a solução geral de (3.12) é dada por } t(n) = D^{cn} \quad (3.13)$$

onde  $c$  é uma constante diferente de zero.

De (3.13) e (3.11) temos:

$$\ell(n) = \frac{D^{cn} - 1}{D^{1-\beta} - 1} \quad (3.14)$$

para  $\ell(1) = 1$ , temos:

$$1 = \frac{D^c - 1}{D^{1-\beta} - 1}$$

$$D^{1-\beta} - 1 = D^c - 1$$

$$c = 1 - \beta \quad (3.15)$$

portanto (3.14) fica

$$\ell(n) = \frac{D^{(1-\beta)n} - 1}{D^{1-\beta} - 1} \quad (3.16)$$

Agora vamos considerar em (3.8)  $q_1=1$ ;  $q_j=0$ ,  $j=2, 3, \dots, J$

$$m_1=m; \quad m_j=0; \quad j=2, 3, \dots, J$$

$$\begin{aligned} \phi^{-1} \left[ \sum_{k=1}^K p_k \phi(\ell(n_k + m)) \right] &= \phi^{-1} \left[ \sum_{k=1}^K p_k \phi(\ell(n_k)) \right] + \ell(m) + \\ &+ (D^{1-\beta} - 1) \phi^{-1} \left[ \sum_{k=1}^K p_k \phi(\ell(n_k)) \right] \ell(m) = \\ &= \phi^{-1} \left[ \sum_{k=1}^K p_k \phi(\ell(n_k)) \right] [1 + (D^{1-\beta} - 1) \ell(m)] + \ell(m) \end{aligned}$$

portanto:

$$\begin{aligned} \phi^{-1} \left( \sum_{k=1}^K p_k \phi(\ell(n_k + m)) \right) &= [1 + \ell(m)(D^{1-\beta} - 1)] \phi^{-1} \left[ \sum_{k=1}^K p_k \phi(\ell(n_k)) \right] \\ &+ \ell(m) \end{aligned} \quad (3.17)$$

usando (3.16) em (3.17) obtemos:

$$\begin{aligned} \phi^{-1} \left[ \sum_{k=1}^K p_k \phi \left( \frac{D^{(1-\beta)(n_k+m)} - 1}{D^{1-\beta} - 1} \right) \right] &= [1 + \left( \frac{D^{(1-\beta)m} - 1}{D^{1-\beta} - 1} \right) (D^{1-\beta} - 1)] \cdot \\ \cdot \phi^{-1} \left[ \sum_{k=1}^K p_k \phi \left( \frac{D^{(1-\beta)n_k} - 1}{D^{1-\beta} - 1} \right) \right] &+ \frac{D^{(1-\beta)m} - 1}{D^{1-\beta} - 1} = \\ = D^{(1-\beta)m} \phi^{-1} \left( \sum_{k=1}^K p_k \phi \left( \frac{D^{(1-\beta)n_k} - 1}{D^{1-\beta} - 1} \right) \right) &+ \frac{D^{(1-\beta)m} - 1}{D^{1-\beta} - 1}, \end{aligned}$$

isto é:

$$\psi_m^{-1} \left[ \sum_{k=1}^K p_k \psi_m \left( \frac{D^{(1-\beta)n_k} - 1}{D^{1-\beta} - 1} \right) \right] = \phi^{-1} \left[ \sum_{k=1}^K p_k \phi \left( \frac{D^{(1-\beta)n_k} - 1}{D^{1-\beta} - 1} \right) \right] \quad (3.18)$$



$$\text{onde } \psi_m \left( \frac{D^{(1-\beta)n_k-1}}{D^{1-\beta-1}} \right) = \phi \left( \frac{D^{(1-\beta)(n_k+m)-1}}{D^{1-\beta-1}} \right) \quad (3.19)$$

A solução geral de (3.18) (ref. Hardy, Littlewood e Polya [10]) é dada por:

$$\psi_m(x) = A(m) \cdot \phi(x) + B(m), \quad x \in [1, \infty[, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (3.20)$$

onde  $A(m)$  e  $B(m)$  são constantes que dependem de  $m$ .

$$\text{ou, } g(x+m) = A(m) g(x) + B(m) \quad (3.21)$$

$x \in [1, \infty[$  e  $m = 1, 2, 3, \dots$

$$\text{onde } g(x) = \phi \left( \frac{D^{(1-\beta)x-1}}{D^{1-\beta-1}} \right). \quad (3.22)$$

Agora (ref. Cap. II seção (2.11) e (2.12)) temos a solução de (3.21) que é dada por:

$$g(x) = \gamma x + \delta; \quad \gamma > 0 \quad \text{e} \quad x \in [1, \infty[ \quad (3.23)$$

e

$$g(x) = \gamma D^{tx} + \delta, \quad \gamma t > 0 \quad \text{e} \quad x \in [1, \infty[, \quad t \neq 0 \quad (3.24)$$

De (3.22), (3.23 e (3.24) obtemos:

$$\phi \left( \frac{D^{(1-\beta)x-1}}{D^{1-\beta-1}} \right) = \gamma x + \delta, \quad \gamma > 0, \quad x \in [1, \infty[ \quad (3.25)$$

e

$$\phi \left( \frac{D^{(1-\beta)x-1}}{D^{1-\beta-1}} \right) = \gamma D^{tx} + \delta; \quad x \in [1, \infty[ \quad \text{e} \quad \gamma t > 0 \quad (3.26)$$

$$\text{Seja } T = \frac{D^{(1-\beta)x-1}}{D^{1-\beta-1}}, \quad \text{então } x = \frac{\log_D [(D^{1-\beta-1}) T + 1]}{1 - \beta}$$

$$\text{então: } \phi(T) = \frac{\gamma \log_D [(D^{1-\beta-1}) T + 1]}{1 - \beta} + \delta$$

e

$$\phi(T) = \gamma D^t \frac{\log_D [(D^{1-\beta} - 1) T + 1]}{1-\beta} + \delta,$$

ou

$$\phi_\beta(x) = \frac{\gamma}{1-\beta} \log_D [(D^{1-\beta} - 1) x + 1] + \delta, \quad x \in [1, \infty[ \quad (3.27)$$

e

$$\phi_{t,\beta}(x) = \gamma [(D^{1-\beta} - 1) x + 1]^{\frac{t}{1-\beta}} + \delta; \quad t \neq 0 \quad x \in [1, \infty[. \quad (3.28)$$

Considerando  $\gamma=1$ ,  $\delta=0$  em (3.27) e (3.28), e usando a definição de  $L$  como dado em (3.7), temos respectivamente (3.4) e (3.5). Portanto, ficou completada a prova do teorema 3.1.

Por Gupta [9] temos:

$$L(P; N; 0, \beta) = \frac{D^{(1-\beta) \sum_{k=1}^K p_k n_{k-1}}}{D^{1-\beta-1}} \geq \frac{D^{(\beta-1) \sum_{k=1}^K p_k \log_D p_{k-1}}}{D^{1-\beta-1}}, \quad (3.29)$$

 $\beta \neq 1$ 

e

$$L(P; N; t, \beta) = \frac{(\sum_{k=1}^K p_k D^{tn_k})^{\frac{1-\beta}{t}} - 1}{D^{1-\beta-1}} \geq \frac{(\sum_{k=1}^K p_k^\alpha)^{\frac{1-\beta}{1-\alpha}} - 1}{D^{1-\beta-1}} \quad (3.30)$$

 $\alpha, \beta \neq 1; \quad \alpha > 0,$ 

onde os lados da mão direita de (3.29) e (3.30) são, respectivamente,  $H(P; 1; \beta)$  e  $H(P; \alpha; \beta)$ ,  $\alpha = (1+t)^{-1}$ . Podemos observar que quando  $t \rightarrow -1$  em (3.30) obtemos:

$$\lim_{t \rightarrow -1} L(P; N; t, \beta) = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{(\sum_{k=1}^K p_k D^{tn_k})^{\frac{1-\beta}{t}} - 1}{D^{1-\beta-1}} \geq \lim_{t \rightarrow -1} \frac{(\sum_{k=1}^K p_k^\alpha)^{\frac{1-\beta}{1-\alpha}} - 1}{D^{1-\beta-1}}.$$

Portanto:

$$\lim_{t \rightarrow -1} L(P; N; t, \beta) = L(P; N; -1, \beta) = \frac{(\sum_{k=1}^K p_k D^{-n_k})^{\beta-1}}{D^{1-\beta} - 1} \geq \frac{(P_M)^{\beta-1}}{D^{1-\beta} - 1}, \quad \beta \neq 1 \quad (3.31)$$

onde  $P_M = \max(p_1, p_2, \dots, p_K)$ .

Para  $t \leq -1$ , temos:

$$\frac{(\sum_{k=1}^K p_k D^{tn_k})^{\frac{1-\beta}{t}}}{D^{1-\beta} - 1} \geq \frac{(P_M)^{\frac{1-\beta}{t}}}{D^{1-\beta} - 1}$$

i. é.,

$$L(P; N; t, \beta) \geq \frac{(P_M)^{\frac{1-\beta}{t}}}{D^{1-\beta} - 1}, \quad \beta \neq 1. \quad (3.32)$$

Estes dois últimos resultados (3.31) e (3.32) estão demonstrados no Apêndice C

### 3.2 - O PROBLEMA DE CODIFICAÇÃO COM CUSTO MÍNIMO

Seguindo as interpretações de custo mínimo do cap. II, temos:

$$C = \sum_{k=1}^K p_k \phi(n_k). \quad (3.33)$$

Um problema de codificação de algum interesse é minimizar o custo  $C$  por uma escolha apropriada de distribuição  $N = \{n_1, n_2, \dots, n_K\}$

sujeito a desigualdade de Kraft.

Visto que  $L(P; N; \phi) = \phi^{-1}(C)$  e  $\phi^{-1}$  é contínua e estritamente crescente, um problema equivalente é minimizar o comprimento médio da palavra código  $L(P; N; \phi)$ . Existem constantes multiplicativas e aditivas contidas nas funções custos como dadas por (3.27) e (3.28). (Elas não influenciam nos comprimentos médios das palavras códigos).

Calculando os custos médios, pode ser oportuno normalizá-los. Uma normalização possível fixaria custo unitário para codificar uma palavra código de comprimento 1 e custo zero (no idealizado caso) de uma palavra código de comprimento zero ( $\phi(0) = 0$ ).

Consideremos em (3.27) e (3.28)  $\phi(0) = 0$  e  $\phi(1) = 1$ .

Obtemos:

$$\gamma=1 \quad \text{e} \quad \delta=0 \quad \text{e} \quad \gamma = -\delta = \frac{1}{D^t - 1}$$

respectivamente.

Portanto, substituindo esses valores em (3.27) e (3.28), respectivamente, obtemos:

$$\hat{\phi}_\beta(x) = \frac{\log_D [(D^{1-\beta} - 1)x + 1]}{1 - \beta} \quad (3.34)$$

$$\hat{\phi}_{t,\beta}(x) = \frac{[(D^{1-\beta} - 1)x + 1]^{\frac{t}{1-\beta} - 1}}{D^t - 1}, \quad (3.35)$$

onde  $\lim_{t \rightarrow 0} \hat{\phi}_{t,\beta}(x) = \hat{\phi}_\beta(x)$ .

Agora:

$$\phi(L(P; N; 0, \beta)) = \frac{\log_D [(D^{1-\beta} - 1) L(P; N; 0, \beta) + 1]}{1 - \beta} \gg$$

$$\begin{aligned}
& \geq \frac{\log_D [(D^{1-\beta}-1) \frac{D^{(\beta-1) \sum_{k=1}^K p_k \log_D p_k}}{D^{1-\beta}-1} + 1]}{1-\beta} = \\
& = - \sum_{k=1}^K p_k \log_D p_k \tag{3.36}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi(L(P; N; t, \beta)) &= \frac{1}{D^t-1} \{ [(D^{1-\beta}-1) L(P; N; t, \beta) + 1]^{\frac{t}{1-\beta}} - 1 \} \\
&\geq \frac{\{ (D^{1-\beta}-1) (D^{1-\beta}-1)^{-1} [(\sum_{k=1}^K p_k^{\frac{1}{t+1}})^{(1-\beta) \frac{t+1}{t}} - 1] + 1 \}^{\frac{t}{1-\beta}} - 1}{D^t - 1} \\
&= \frac{(\sum_{k=1}^K p_k^{\frac{1}{t+1}})^{t+1} - 1}{D^t - 1} \tag{3.37}
\end{aligned}$$

e para  $t \leq -1$ , temos:

$$\begin{aligned}
\phi(L; N; t, \beta) &= \frac{1}{D^t-1} \{ [(D^{1-\beta}-1) L(P; N; t, \beta) + 1]^{\frac{t}{1-\beta}} - 1 \} \geq \\
&\geq \frac{1}{D^t-1} \{ [(D^{1-\beta}-1) (D^{1-\beta}-1)^{-1} [(P_M)^{\frac{1-\beta}{t}} - 1] + 1 \}^{\frac{t}{1-\beta}} - 1 \} = \\
&= (D^t-1)^{-1} (P_M-1) = \frac{P_M-1}{D^t-1}. \tag{3.38}
\end{aligned}$$

Resumindo, as desigualdades (3.30), (3.31) e (3.32) mostram que os custos médios não podem ser menores que

$$\hat{C} = \begin{cases} C_0 = - \sum_{k=1}^K p_k \log_D p_k, & \text{para } t=0 \\ C_1(t) = \frac{\left( \sum_{k=1}^K p_k^{\frac{1}{t+1}} \right)^{t+1} - 1}{D^t - 1} & \text{para } t > -1, \quad t \neq 0 \\ C_2(t) = \frac{1 - P_M}{1 - D^t}, & \text{para } t \leq -1, \end{cases}$$

onde  $P_M = \max(p_1, p_2, \dots, p_K)$  e quando as funções custos são da das por:

$$\hat{\phi}_\beta(x) = \frac{\log_D [(D^{1-\beta} - 1)x + 1]}{1 - \beta}$$

$$\text{e } \hat{\phi}_{t,\beta}(x) = \frac{[(D^{1-\beta} - 1)x + 1]^{\frac{t}{1-\beta}} - 1}{D^t - 1}.$$

## CAPÍTULO IV

## LIMITES INFERIORES SOBRE OS COMPRIMENTOS MÉDIOS NÃO-ADITIVOS

Vimos no capítulo II e III que os custos médios aditivos e não-aditivos respectivamente não podem ser menores que:

$$- \sum_{k=1}^K p_k \log_D p_k \quad \text{para } t=0$$

$$\frac{(\sum_{k=1}^K p_k^{\frac{1}{t+1}})^{t+1} - 1}{D^t - 1} \quad \text{para } t \neq 0, t > -1$$

e

$$\frac{1 - P_M}{1 - D^t} \quad \text{para } t < -1$$

Também estes resultados foram superados por Taneja e Silva[9].

Mostraremos neste capítulo que os comprimentos médios  $L(P; N; 0, \beta)$  e  $L(P; N; t, \beta)$  também não podem ser menores que  $2(1 - P_M)$ , onde  $P_M = \max(p_1, p_2, \dots, p_K)$ . Para demonstrar estes resultados precisaremos dos seguintes teoremas.

Teorema 4.1: Para todo  $P \in \Delta_K$ ,  $\beta > 0$

$$\text{temos: } 1 - P_M \leq \frac{1}{2} H(P; 1, \beta) \quad (4.1)$$

onde  $P_M = \max(p_1, p_2, \dots, p_K)$  e

$$H(P; 1, \beta) = (D^{1-\beta} - 1)^{-1} [D^{(1-\beta) \sum_{k=1}^K p_k \log_D p_k} - 1].$$

Para a demonstração do teorema 4.1, mostrare  
mos os seguintes lemas auxiliares:

Lema 4.1.1: Seja  $P_M = \max (p_1, p_2, \dots, p_K)$  e  $P \in \Delta_K$ , então:

$$H(1-P_M, P_M) \leq H(P), \quad (4.2)$$

onde  $H(P) = - \sum_{k=1}^K p_k \log_D p_k$ , que é a entropia de Shannon.

Prova: Sem perda de generalidade podemos supor  $P_M = p_K$ , onde

$$P_M = \max (p_1, p_2, \dots, p_K) \quad (4.3)$$

Temos que:

$$(p_1 + p_2 + \dots + p_{K-1}) \geq (p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_{K-1}) \quad (4.4)$$

Assim,

$$\log_D (p_1 + \dots + p_{K-1}) \geq \log_D p_1 + \dots + \log_D p_{K-1}$$

ou seja:

$$\log_D \frac{1}{p_1 + \dots + p_{K-1}} \leq \log_D \frac{1}{p_1} + \dots + \log_D \frac{1}{p_{K-1}}$$

$$(p_1 + p_2 + \dots + p_{K-1}) \log_D \frac{1}{p_1 + \dots + p_{K-1}} \leq (1-p_K) \log_D \frac{1}{p_1} + \dots$$

$$\dots + (1-p_K) \log_D \frac{1}{p_{K-1}},$$

$$\text{com } p_K = \max (p_1, p_2, \dots, p_K)$$

$$1-p_K = \min (p_1, p_2, \dots, p_K)$$

$$\text{e } 1-p_K \leq p_1, \quad 1-p_K \leq p_2, \dots, \quad 1-p_K \leq p_{K-1}, \quad 1-p_K \leq p_K.$$

Portanto

$$(1-p_K) \log_D \frac{1}{(1-p_K)} \leq p_1 \log_D \frac{1}{p_1} + \dots + p_{K-1} \log_D \frac{1}{p_{K-1}}$$



e ainda

$$(1-p_K) \log_D \frac{1}{(1-p_K)} + p_K \log_D \frac{1}{p_K} \leq p_1 \log_D \frac{1}{p_1} + \dots + p_{K-1} \log_D \frac{1}{p_{K-1}} + p_K \log_D \frac{1}{p_K},$$

onde obtemos

$$-(1-p_M) \log_D (1-p_M) - p_M \log_D p_M \leq - \sum_{k=1}^K p_k \log_D p_k$$

$$H(1-p_M, p_M) \leq H(P),$$

o que prova o lema.

Lema 4.1.2: Para todo  $P \in \Delta_K$ ,  $\beta > 0$

temos que:

$$H(1-p_M, p_M; 1, \beta) \leq H(P; 1, \beta), \quad (4.5)$$

onde  $p_M = \max(p_1, p_2, \dots, p_K)$ .

Prova: Do lema 4.1.1, temos que, para todo  $P \in \Delta_K$ ,

$$p_M = \max(p_1, p_2, \dots, p_K); \quad H(1-p_M, p_M) \leq H(P).$$

Consideremos a função  $h$  definida como

$$h_\beta(x) = (D^{1-\beta}-1)^{-1} (D^{(1-\beta)x}-1) \quad (4.6)$$

É óbvio que  $h$  é uma função monótona crescente de  $x$ . (Veja apêndice D).

$$\text{Seja } x := H(P) \quad (4.7)$$

$$\text{então } h_\beta[H(P)] = H(P; 1, \beta). \quad (4.8)$$

Usando a monotonicidade da função  $h_\beta$  temos:

$$h_\beta[H(1-p_M, p_M)] \leq h_\beta[H(P)] \quad (4.9)$$

de (4.8) e (4.9) obtemos:

$H(1-P_M, P_M; 1, \beta) \leq H(P; 1, \beta)$  para todo  $P \in \Delta_K$  e

$P_M = \max(p_1, p_2, \dots, p_K)$ , o que prova o lema.

Lema 4.1.3: Para  $P \in \Delta_K$ ,  $\beta > 0$   $H(P; 1, \beta)$  é uma função concava com respeito a  $P$ .

A prova deste lema está no apêndice E.

Podemos agora efetuar a prova do teorema 4.1.

Prova: Provaremos para  $K=2$  e  $D=2$  e estenderemos essa prova para  $K > 2$

1 - Para  $K=2$  e  $D=2$ , temos

$$\frac{1}{2} H((0,1); 1, \beta) = \frac{1}{2} H((1,0); 1, \beta) = 0$$

$$\text{e } \frac{1}{2} H\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); 1, \beta\right) = \frac{1}{2}.$$

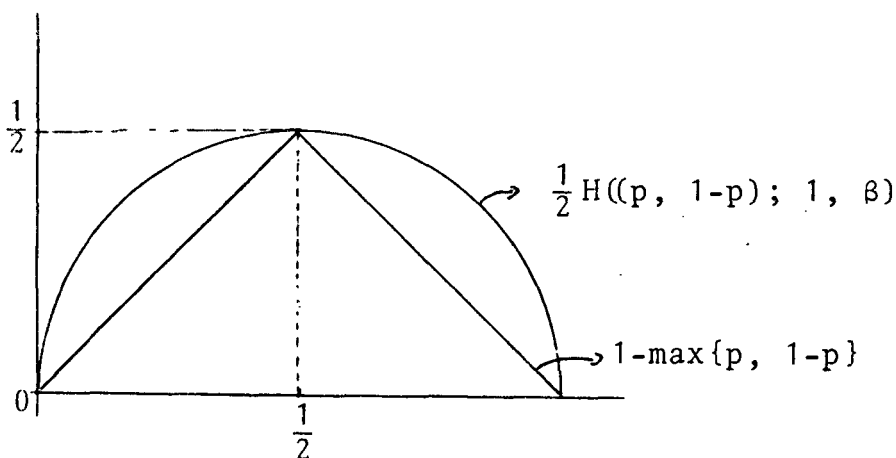


fig. 4.1

Desde que o gráfico de  $1 - \max\{p, 1-p\}$ ,  $0 \leq p \leq 1$  consiste em duas retas entre  $(0,0)$  e  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  e entre  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  e  $(1,0)$  (ver fig. 4.1), obtemos o resultado desejado da concavidade de  $H((p, 1-p); 1, \beta)$ ,  $0 < p < 1$ ,  $\beta > 0$  ou seja:  $1 - P_M \leq \frac{1}{2} H(P; 1, \beta)$ ,  $P \in \Delta_2$

2 - Para  $K > 2$

Seja  $P \in \Delta_K$ , sem perda de generalidade supomos que  $P_M = p_K$

Pelo lema 4.1.2 temos que:

$$H((1-P_M, P_M); 1, \beta) \leq H(P; 1, \beta) \text{ para todo } P \in \Delta_K \quad (4.10)$$

Desde que o teorema é válido para  $K=2$  temos:

$$1-P_M \leq H((1-P_M, P_M); 1, \beta) \text{ para todo } P \in \Delta_K, P_M \in [0,1] \text{ e } \beta > 0 \quad (4.11)$$

De (4.10) e (4.11) deduzimos

$$1-P_M \leq \frac{1}{2} H(P; 1, \beta) \text{ e assim completamos a prova do teorema 4.1.}$$

Teorema 4.2: Para todo  $P \in \Delta_K$ ,  $0 < \alpha \leq \frac{1}{2-\beta}$  temos:

$$1-P_M \leq \frac{1}{2} H(P; \alpha, \beta) \quad (4.12)$$

onde  $P_M = \max(p_1, p_2, \dots, p_K)$ .

Para a demonstração do teorema 4.2, precisaremos dos seguintes lemas auxiliares:

Lema 4.2.1: Seja  $P_M = \max(p_1, p_2, \dots, p_K)$ ,  $\alpha > 0$   $\alpha \neq 1$  e

$P \in \Delta_K$ .

$$\text{Então } H(1-P_M, P_M; \alpha) \leq H(P; \alpha) \quad (4.13)$$

onde  $H(P; \alpha) = \frac{1}{1-\alpha} \log_D \sum_{k=1}^K p_k^\alpha$ , que é a entropia de Rényi, com

$$\alpha = (1 + t)^{-1}.$$

Prova: Seja  $P \in \Delta_K$ ; sem perda de generalidade podemos supor

$$P_M = p_K, \text{ onde } P_M = \max (p_1, p_2, \dots, p_K).$$

1º Caso: Para  $\alpha < 1$ .

Sabemos que

$$\sum_{k=1}^K p_k^\alpha \geq \left( \sum_{k=1}^K p_k \right)^\alpha, \quad \alpha < 1 \quad (4.14)$$

então:

$$\sum_{k=1}^K p_k^\alpha = \sum_{k=1}^{K-1} p_k^\alpha + p_K^\alpha \geq \left( \sum_{k=1}^{K-1} p_k \right)^\alpha + p_K^\alpha = (1 - P_M)^\alpha + P_M^\alpha. \quad (4.15)$$

Desde que  $\log$  é uma função crescente temos que:

$$\log_D \left[ \sum_{k=1}^K p_k^\alpha \right] \geq \log_D [(1 - P_M)^\alpha + P_M^\alpha]. \quad (4.16)$$

multiplicando (4.16) pelo fator positivo  $\frac{1}{1-\alpha}$ , pois  $\alpha < 1$ , obtemos:

$$\frac{1}{1-\alpha} \log_D \left( \sum_{k=1}^K p_k^\alpha \right) \geq \frac{1}{1-\alpha} \log_D [(1 - P_M)^\alpha + P_M^\alpha], \quad (4.17)$$

ou seja:

$$H(1 - P_M, P_M; \alpha) \leq H(P; \alpha) \quad P \in \Delta_K \text{ e } \alpha < 1. \quad (4.18)$$

2º Caso; Para  $\alpha > 1$ .

Neste caso, as desigualdades (4.14) e (4.15) e (4.16) ficam invertidas. Desde que para  $\alpha > 1$ ,  $\frac{1}{1-\alpha}$  é um fator negativo, obtemos novamente a desigualdade (4.17) e assim completamos a prova do lema.

Lema 4.2.2: Para todo  $P \in \Delta_K$ ,  $\beta > 0$ , onde

$P_M = \max (p_1, p_2, \dots, p_K)$ , temos:

$$H((1-P_M, P_M); \alpha, \beta) \leq H(P; \alpha, \beta). \quad (4.19)$$

Prova: Do lema 4.2.1 temos que

$$H(1-P_M, P_M; \alpha) \leq H(P; \alpha). \quad (4.20)$$

Consideremos a função  $h$  definida como

$$h_\beta(x) = (D^{1-\beta}-1)^{-1}(D^{(1-\beta)x}-1). \quad (4.21)$$

É óbvio que  $h$  é uma função monótona crescente de  $x$ . (veja demonstração no apêndice D).

Seja  $x := H(P; \alpha)$  então podemos escrever

$$h_\beta[H(P; \alpha)] = H(P; \alpha, \beta). \quad (4.22)$$

Usando a monotonicidade da função  $h_\beta$  temos:

$$h_\beta[H(1-P_M, P_M; \alpha)] \leq h_\beta[H(P; \alpha)], \quad (4.23)$$

obtendo por (4.22)

$$H(1-P_M, P_M; \alpha, \beta) \leq H(P; \alpha, \beta) \text{ para todo } P \in \Delta_K \text{ e}$$

$$P_M = \max(p_1, p_2, \dots, p_K), \text{ o que prova o lema.}$$

Lema 4.2.3: Para  $P \in \Delta_K$  e  $0 < \alpha \leq \frac{1}{2-\beta}$

$H(P; \alpha, \beta)$  é côncava com respeito a  $P$ .

Para a demonstração veja Vander Pyl [12] (Apêndice F).

O seguinte corolário é uma consequência imediata do lema 4.2.3.

Corolário 4.1: Para  $P \in \Delta_K$  e  $\beta=2$

(i, é.,  $H(P; \alpha, 2)$ )  $H(P; \alpha, \beta)$  é côncava com respeito a  $P$ .

Podemos agora efetuar a prova do teorema 4.2.

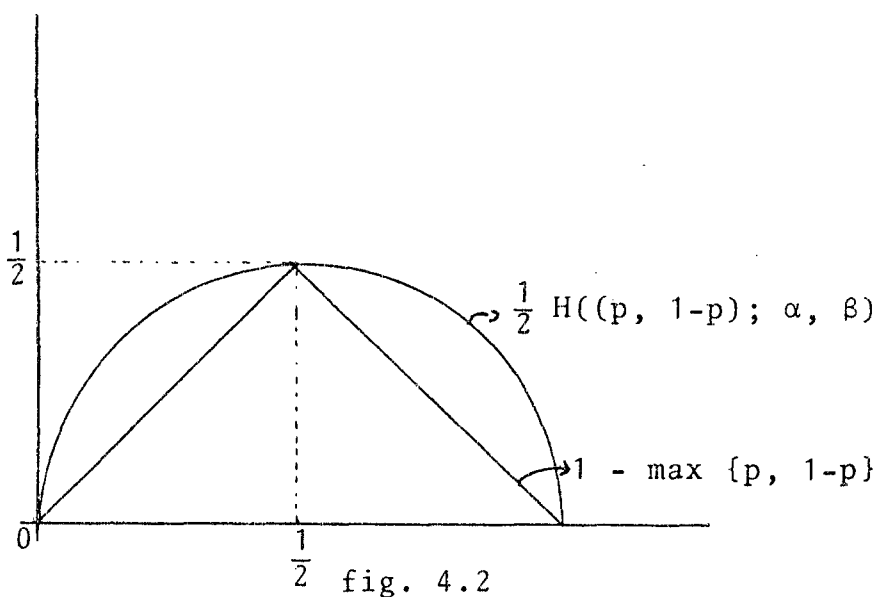
Prova: Provaremos o teorema para  $K=2$  e estenderemos essa prova para  $K>2$ .

1 - Para  $K=2$ , temos

$$\frac{1}{2} H((0,1); \alpha, \beta) = \frac{1}{2} H((1,0); \alpha, \beta) = 0 \quad (4.24)$$

e

$$\frac{1}{2} H\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); \alpha, \beta\right) = \frac{1}{2}, \quad (4.25)$$



onde  $p=p_1$  e  $1-p=p_2$ .

Desde que o gráfico de  $1 - \max \{p, 1-p\}$ ,  $0 \leq p \leq 1$  consiste de duas retas entre  $(0,0)$  e  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  e entre  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  e  $(1,0)$ , (ver fig. 4.2), obtemos o resultado desejado da concavidade de  $H(p, 1-p; \alpha, \beta)$ ,  $0 < \alpha \leq \frac{1}{2-\beta}$  e  $0 \leq p \leq 1$

ou seja:

$$1 - P_M \leq \frac{1}{2} H(P; \alpha, \beta), \quad P \in \Delta_2 \quad \text{onde} \quad p_1=p \quad \text{e} \quad p_2=1-p.$$

2 - Para o caso  $K>2$ :

Seja  $P \in \Delta_K$ . Sem perda de generalidade podemos supor que

$P_M = p_K$ ; pelo lema 4.2.2 temos que:

$$H(1-P_M, P_M; \alpha, \beta) \leq H(P; \alpha, \beta) \quad (4.26)$$

para todo  $P \in \Delta_K$ ,  $\beta > 0$

Desde que o teorema é válido para  $K=2$  temos:

$$1 - P_M \leq H(1-P_M, P_M; \alpha, \beta), \text{ para todo } P \in \Delta_K \quad (4.27)$$

$$P_M \in (0, 1] \text{ e } 0 < \alpha \leq \frac{1}{2-\beta}.$$

De (4.26) e (4.27) deduzimos

$$1 - P_M \leq \frac{1}{2} H(P; \alpha, \beta) \text{ e assim completamos a prova do teorema 4.2.}$$

#### Resultados Principais: D=2

Pelo cap. III, sabemos que:

$$L(P; N; t, \beta) \geq H(P; \alpha, \beta)$$

$$\text{onde } \alpha = (1+t)^{-1} \text{ e } \beta > 0, t > -1$$

Usando o teorema 4.2, temos:

$$\frac{1}{2} L(P; N; t, \beta) \geq 1 - P_M \quad (4.28)$$

$$\text{onde } P_M = \max(p_1, p_2, \dots, p_K)$$

e, similarmente,

$$\frac{1}{2} L(P; N; 0, \beta) \geq 1 - P_M. \quad (4.29)$$

Isto significa que, paralelamente, os comprimentos médios não-aditivos também estão limitados inferiormente por  $2(1-P_M)$ , uma quantidade independente de  $t$ . E para os casos de comprimentos médios aditivos veja Taneja [18].

## APÊNDICE A

Proposição:

Para todo  $\alpha \in (0, \infty)$ ;  $\alpha = (1+t)^{-1}$

temos:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} H(P; \alpha) = \log_D \frac{1}{P_M}$$

$$\text{onde } H(P; \alpha) = \frac{1}{1-\alpha} \log_D \sum_{k=1}^K p_k^\alpha$$

ou seja:

$$\lim_{t \rightarrow 1} H(P; t) = \log_D \frac{1}{P_M}$$

$$\text{onde } H(P; t) = \frac{t+1}{t} \log_D \left( \sum_{k=1}^K p_k^{\frac{1}{t+1}} \right)$$

$$\text{e } P_M = \max(p_1, p_2, \dots, p_K).$$

Prova:

Suponha, primeiro, que  $\alpha > 1$ , então claramente

$$\sum_{k=1}^K p_k^\alpha \leq P_M^{\alpha-1}$$

Decorrente da monotonicidade da função logaritmo, temos:

$$H(P; \alpha) \geq \log_D \frac{1}{P_M}.$$

Para  $0 < \alpha < 1$

$$\sum_{k=1}^K p_k^\alpha \geq P_M^{\alpha-1}$$



e conseqüentemente temos:

$$H(P; \alpha) \geq \log_D \frac{1}{P_M}$$

Finalmente, para  $\alpha=1$ .

$$H(P; \alpha) = H(P) = - \sum_{k=1}^K p_k \log_D p_k \geq \log_D \frac{1}{P_M}.$$

Portanto, para todo  $\alpha > 0$

$$H(P; \alpha) \geq \log_D \frac{1}{P_M} = -\log P_M.$$

Agora consideremos a igualdade:

$$H(P; \alpha) = \frac{1}{1-\alpha} \log_D \left( \sum_{k=1}^K p_k^\alpha \right) = \frac{\alpha}{1-\alpha} \log_D P_M + \frac{1}{1-\alpha} \log_D \left[ 1 + \sum_{k=1}^{K-1} \left( \frac{p_k}{P_M} \right)^\alpha \right],$$

onde  $P_M = \max (p_1, p_2, \dots, p_K)$ .

Portanto,

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{1-\alpha} \log_D \left( \sum_{k=1}^K p_k^\alpha \right) \right] = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{1-\alpha} \log_D P_M +$$

$$+ \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{1-\alpha} \log_D \left( 1 + \sum_{k=1}^{K-1} \left( \frac{p_k}{P_M} \right)^\alpha \right) \right]$$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{1-\alpha} \log_D P_M$$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{\alpha} - 1} \log_D P_M$$

$$= -\log_D P_M,$$

onde  $P_M = \max (p_1, p_2, \dots, p_K)$ .

## APÊNDICE B

Proposição:

As desigualdades (2.13), (2.14) e (2.16) mostram que os custos médios não podem ser menores que:

$$-\sum_{k=1}^K p_k \log_D p_k \quad \text{para } t=0$$

$$\frac{\left(\sum_{k=1}^K p_k^{\frac{1}{t+1}}\right)^{1+t} - 1}{D^t - 1} \quad \text{para } t > -1, \quad t \neq 0 \quad (2.19)$$

e

$$\frac{1 - P_M}{1 - D^t} \quad \text{para } t \leq -1$$

onde  $P_M = \max \{p_1, p_2, \dots, p_K\}$

quando as funções custos são dados por:

$$\hat{\phi}_0(x) = x$$

$$\hat{\phi}_t(x) = \frac{D^{tx} - 1}{D^t - 1}, \quad t \neq 0 \quad \text{e } x \in [1, \infty[$$

Demonstração;

Sabemos que:

$$L(P; N; \phi_0) = \sum_{k=1}^K p_k n_k \geq -\sum_{k=1}^K p_k \log_D p_k \quad (2.13)$$

$$L(P; N; \phi_t) = \frac{1}{t} \log_D \sum_{k=1}^K p_k D^{tn_k} \geq \frac{t+1}{t} \log_D \left(\sum_{k=1}^K p_k^{\frac{1}{t+1}}\right)$$

para  $t > -1$ ,  $t \neq 0$  (2.14)

e

$$L(P; N; \phi_t) = \frac{1}{t} \log_D \sum_{k=1}^K p_k D^{tn_k} \geq \frac{1}{t} \log_D P_M \quad (2.16)$$

onde  $t \leq -1$  e  $P_M = \max \{p_1, p_2, \dots, p_K\}$ .

Visto que  $L(P; N; \phi) = \phi^{-1}(C)$  e considerando que as funções custos são dadas por:

$$\hat{\phi}_0(x) = x, \text{ e}$$

$$\hat{\phi}_t(x) = \frac{D^{tx} - 1}{D^t - 1}, \quad t \neq 0 \text{ e } x \in [1, \infty[, \text{ temos:}$$

$$\hat{\phi}(L(P; N; \phi_0)) = L(P; N; \phi_0) = \sum_{k=1}^K p_k n_k \geq - \sum_{k=1}^K p_k \log_D p_k$$

$$\hat{\phi}(L(P; N; \phi_t)) = \frac{D^{tL(P; N; \phi_t)} - 1}{D^t - 1} = \frac{D^{\frac{t \cdot 1}{t} \log_D \sum_{k=1}^K p_k D^{tn_k}} - 1}{D^t - 1} \geq$$

$$\geq \frac{D^{\frac{t \cdot t+1}{t} \log_D \left( \sum_{k=1}^K p_k^{\frac{1}{t+1}} \right)} - 1}{D^t - 1} = \frac{\left( \sum_{k=1}^K p_k^{\frac{1}{t+1}} \right)^{t+1} - 1}{D^t - 1}, \quad \text{para } t > -1, \quad t \neq 0$$

e

$$\hat{\phi}(L(P; N; \phi_t)) = \frac{D^{tL(P; N; \phi_t)} - 1}{D^t - 1} = \frac{D^{\frac{t \cdot 1}{t} \log_D \sum_{k=1}^K p_k D^{tn_k}} - 1}{D^t - 1} \geq$$

$$\geq \frac{D^{\frac{t \cdot 1}{t} \log_D P_M} - 1}{D^t - 1} = \frac{P_M - 1}{D^t - 1} \quad \text{para } t \leq -1,$$

onde  $P_M = \max \{p_1, p_2, \dots, p_K\}$ ; o que prova 2.19.

## APÊNDICE C

Proposição:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -1} L(P; N; t, \beta) &= L(P; N; -1, \beta) = \frac{\left( \sum_{k=1}^K p_k D^{-n_k} \right)^{\beta-1} - 1}{D^{1-\beta} - 1} \geq \\ &\geq \frac{(P_M)^{\beta-1} - 1}{D^{1-\beta} - 1}, \quad \beta \neq 1 \end{aligned} \quad (3.31)$$

onde  $P_M = \max (p_1, p_2, \dots, p_K)$ .

Para  $t \leq -1$ , temos:

$$\frac{\left( \sum_{k=1}^K p_k D^{tn_k} \right)^{\frac{1-\beta}{t}} - 1}{D^{1-\beta} - 1} \geq \frac{(P_M)^{\frac{1-\beta}{t}} - 1}{D^{1-\beta} - 1},$$

isto é:

$$L(P; N; t, \beta) \geq \frac{P_M^{\frac{1-\beta}{t}} - 1}{D^{1-\beta} - 1}, \quad \beta \neq 1. \quad (3.32)$$

Demonstração de (3.31):

Sabemos que:

$$L(P; N; t, \beta) = \frac{\left( \sum_{k=1}^K p_k D^{tn_k} \right)^{\frac{1-\beta}{t}} - 1}{D^{1-\beta} - 1} \geq \frac{\left( \sum_{k=1}^K p_k^\alpha \right)^{\frac{1-\beta}{1-\alpha}} - 1}{D^{1-\beta} - 1},$$

$\alpha, \beta \neq 1 \quad \alpha > 0$

(3.30)

=  $H(P; \alpha, \beta)$  que é a entropia de ordem  $\alpha$  e grau  $\beta$ .

$H(P; \alpha, \beta)$  pode ser escrita da seguinte maneira:

$H(P; \alpha, \beta) = g(H(P; \alpha))$  onde  $P \in \Delta_K$  e

$$H(P; \alpha) = \frac{1}{1-\alpha} \log_D \left( \sum_{k=1}^K p_k^\alpha \right)$$

sendo

$$g(x) = (D^{1-\beta} - 1)^{-1} [D^{(1-\beta)x} - 1].$$

De fato:

$$\begin{aligned} g(H(P; \alpha)) &= \frac{D^{(1-\beta) \frac{1}{1-\alpha} \log_D \left( \sum_{k=1}^K p_k^\alpha \right)} - 1}{D^{1-\beta} - 1} = \frac{D^{\log_D \left( \sum_{k=1}^K p_k^\alpha \right) \frac{1-\beta}{1-\alpha}} - 1}{D^{1-\beta} - 1} \\ &= \frac{\left( \sum_{k=1}^K p_k^\alpha \right)^{\frac{1-\beta}{1-\alpha}} - 1}{D^{1-\beta} - 1} = H(P; \alpha, \beta). \end{aligned}$$

Como  $\lim_{t \rightarrow -1} H(P; \alpha) = H_{-1}(P) = -\log_D P_M$ , onde  $P_M = \max(p_1, p_2, \dots, p_K)$ ,

para todo  $P \in \Delta_K$  e desde que  $g$  é contínua para  $\beta \neq 1$ , temos:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -1} H(P; \alpha, \beta) &= \lim_{t \rightarrow -1} g(H(P; \alpha)) = g(\lim_{t \rightarrow -1} H(P; \alpha)) = g(-\log_D P_M) \\ &= \frac{D^{(1-\beta)(-\log_D P_M)} - 1}{D^{1-\beta} - 1} = \frac{(D^{\log_D P_M})^{\beta-1} - 1}{D^{1-\beta} - 1} = \frac{P_M^{\beta-1} - 1}{D^{1-\beta} - 1}, \end{aligned}$$

onde  $\alpha = (1+t)^{-1}$  e  $P_M = \max(p_1, \dots, p_K)$ , o que prova (3.31).

Demonstração de (3.32):

$$\sum_{k=1}^K p_k D^{tn_k} \leq P_M \sum_{k=1}^K D^{tn_k} \leq P_M \sum_{k=1}^K D^{-n_k} \leq P_M$$

pois  $P_M = \max(p_1, p_2, \dots, p_K)$

$$e \sum_{k=1}^K D^{-n_k} \leq 1.$$

Portanto

$$\left( \sum_{k=1}^K p_k D^{tn_k} \right)^{\frac{1-\beta}{t}} - 1 \leq P_M^{\frac{1-\beta}{t}} - 1, \quad \beta > 1$$

$$\frac{\left( \sum_{k=1}^K p_k D^{tn_k} \right)^{\frac{1-\beta}{t}} - 1}{D^{1-\beta} - 1} \geq \frac{P_M^{\frac{1-\beta}{t}} - 1}{D^{1-\beta} - 1}, \quad D^{1-\beta} - 1 \leq 0$$

agora, para  $0 < \beta < 1$  temos:

$$\left( \sum_{k=1}^K p_k D^{tn_k} \right)^{\frac{1-\beta}{t}} - 1 \geq P_M^{\frac{1-\beta}{t}} - 1.$$

Como  $D^{1-\beta} - 1 \geq 0$  temos

$$\frac{\left( \sum_{k=1}^K p_k D^{tn_k} \right)^{\frac{1-\beta}{t}} - 1}{D^{1-\beta} - 1} \geq \frac{P_M^{\frac{1-\beta}{t}} - 1}{D^{1-\beta} - 1},$$

o que prova (3.32).

## APÊNDICE D

Proposição:

A função  $h_{\beta}(x) = (D^{1-\beta} - 1)^{-1} (D^{(1-\beta)x} - 1)$ ,  $\beta > 0$   
 é uma função monótona crescente de  $x$ .

Demonstração:

1º Caso:  $0 < \beta < 1$ ,  $1 - \beta > 0$

temos: para  $x \geq y$

$$(1-\beta)x \geq (1-\beta)y$$

$$D^{(1-\beta)x} - 1 \geq D^{(1-\beta)y} - 1.$$

Como  $D^{1-\beta} - 1 > 0$ , para  $0 < \beta < 1$ , temos:

$$(D^{1-\beta} - 1)^{-1} (D^{(1-\beta)x} - 1) \geq (D^{1-\beta} - 1)^{-1} (D^{(1-\beta)y} - 1)$$

ou seja

$$h_{\beta}(x) \geq h_{\beta}(y).$$

Portanto:

para  $x \geq y$  temos  $h_{\beta}(x) \geq h_{\beta}(y)$ .

Logo  $h_{\beta}(x)$  é monótona crescente.

2º Caso:  $\beta > 1$ ,  $1 - \beta < 0$

Seja  $x \geq y$

$$(1-\beta)x \leq (1-\beta)y$$

$$D^{(1-\beta)x} - 1 \leq D^{(1-\beta)y} - 1.$$

Como  $D^{1-\beta} - 1 < 0$ , temos:

$$(D^{1-\beta} - 1)^{-1} (D^{(1-\beta)} x - 1) \geq (D^{1-\beta} - 1)^{-1} (D^{(1-\beta)} y - 1)$$

ou seja:  $h_{\beta}(x) \geq h_{\beta}(y)$ .

Portanto,

para  $x \geq y \Rightarrow h_{\beta}(x) \geq h_{\beta}(y)$  e temos concluído a prova para todo  $\beta > 0$ .



## APÊNDICE E

Proposição:

Para  $P \in \Delta_K$  e  $\beta > 0$ ,  $H(P; 1, \beta)$  é uma função côncava com respeito a  $P$ .

Prova:

Para o caso  $\alpha=1$  é um caso particular do Apêndice F.

## APÊNDICE F

Lema 4.2.3: Para  $P \in \Delta_K$  e  $0 < \alpha \leq \frac{1}{2-\beta}$ ,  $H(P; \alpha, \beta)$  é côncava com respeito a  $P$ .

Demonstração:

Lembrando a desigualdade de Minkowski, sejam  $a_k \geq 0$ ,  $b_k \geq 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$  número reais.

Se  $r > 1$ ,

$$\left( \sum_{k=1}^K a_k^r \right)^{\frac{1}{r}} + \left( \sum_{k=1}^K b_k^r \right)^{\frac{1}{r}} \geq \left[ \sum_{k=1}^K (a_k + b_k)^r \right]^{\frac{1}{r}} \quad (\text{F.1})$$

e

$$\left( \sum_{k=1}^K a_k^{\frac{1}{r}} \right)^r + \left( \sum_{k=1}^K b_k^{\frac{1}{r}} \right)^r \leq \left[ \sum_{k=1}^K (a_k + b_k)^{\frac{1}{r}} \right]^r. \quad (\text{F.2})$$

Se  $0 < r < 1$ , as desigualdades (F.1) e (F.2) ficam invertidas.

Sejam  $P = (p_1, p_2, \dots, p_K) \in \Delta_K$ ,

$$Q = (q_1, q_2, \dots, q_K) \in \Delta_K,$$

$\lambda, \mu \in [0, 1]$ , tais que  $\lambda + \mu = 1$

e  $\lambda P + \mu Q = (\lambda p_1 + \mu q_1, \dots, \lambda p_K + \mu q_K) \in \Delta_K$ .

Aplicando as relações (F.1) e (F.2) ao caso:

$$a_k = \lambda p_k \geq 0,$$

$$b_k = \mu q_k \geq 0 \quad \text{e} \quad r = \alpha,$$

distinguiremos três casos:

1º Caso:  $\alpha > 1$ 

Temos a seguinte desigualdade:

$$\lambda \left( \sum_{k=1}^K p_k^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} + \mu \left( \sum_{k=1}^K q_k^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \geq \left[ \sum_{k=1}^K (\lambda p_k + \mu q_k)^\alpha \right]^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Se  $\alpha \frac{\beta-1}{\alpha-1} > 0$ ; isto é,  $\beta > 1$ ,

$$\left[ \lambda \left( \sum_{k=1}^K p_k^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} + \mu \left( \sum_{k=1}^K q_k^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right]^{\alpha \frac{\beta-1}{\alpha-1}} \geq \left[ \sum_{k=1}^K (\lambda p_k + \mu q_k)^\alpha \right]^{\frac{\beta-1}{\alpha-1}}. \quad (\text{F.3})$$

Se além disso,  $\alpha \frac{\beta-1}{\alpha-1} > 1$ , isto é,  $\beta > 2 - \frac{1}{\alpha}$ , a função  $y = x^{\alpha \frac{\beta-1}{\alpha-1}}$  é convexa, de onde:

$$\begin{aligned} & \lambda \left[ \left( \sum_{k=1}^K p_k^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right]^{\alpha \frac{\beta-1}{\alpha-1}} + \mu \left[ \left( \sum_{k=1}^K q_k^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right]^{\alpha \frac{\beta-1}{\alpha-1}} \geq \\ & \geq \left[ \lambda \left( \sum_{k=1}^K p_k^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} + \mu \left( \sum_{k=1}^K q_k^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right]^{\alpha \frac{\beta-1}{\alpha-1}} \end{aligned} \quad (\text{F.4})$$

pois  $f$  é convexa se para  $0 \leq \lambda \leq 1$ , tivermos:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Caso esta desigualdade seja invertida,  $f$  será côncava.

De (F.3) e (F.4) obtemos então:

$$\lambda \left( \sum_{k=1}^K p_k^\alpha \right)^{\frac{\beta-1}{\alpha-1}} + \mu \left( \sum_{k=1}^K q_k^\alpha \right)^{\frac{\beta-1}{\alpha-1}} \geq \left[ \sum_{k=1}^K (\lambda p_k + \mu q_k)^\alpha \right]^{\frac{\beta-1}{\alpha-1}} \quad (\text{F.5})$$

Subtraindo  $1 = \lambda + \mu$  a ambos os membros de (F.5) e dividindo a desigualdade resultante por  $D^{1-\beta-1}$ , obtemos a nova desigualdade:

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda}{D^{1-\beta-1}} \left[ \left( \sum_{k=1}^K p_k^\alpha \right)^{\frac{\beta-1}{\alpha-1}} - 1 \right] + \frac{\mu}{D^{1-\beta-1}} \left[ \left( \sum_{k=1}^K q_k^\alpha \right)^{\frac{\beta-1}{\alpha-1}} - 1 \right] \leq \\ & \leq \frac{1}{D^{1-\beta-1}} \left[ \left( \sum_{k=1}^K (\lambda p_k + \mu q_k)^\alpha \right)^{\frac{\beta-1}{\alpha-1}} - 1 \right], \end{aligned} \quad (\text{F.6})$$

ou seja:

$$\lambda H(P; \alpha, \beta) + \mu H(Q; \alpha, \beta) \leq H(\lambda P + \mu Q; \alpha, \beta) \quad (\text{F.7})$$

para  $\alpha > 1$ ,  $\beta > 2 - \frac{1}{\alpha}$ .

2º Caso:  $0 < \alpha < 1$ :

Temos a seguinte desigualdade:

$$\lambda \left( \sum_{k=1}^K p_k^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} + \mu \left( \sum_{k=1}^K q_k^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq \left[ \sum_{k=1}^K (\lambda p_k + \mu q_k)^\alpha \right]^{\frac{1}{\alpha}},$$

se  $\alpha \frac{\beta-1}{\alpha-1} > 0$ , isto é,  $\beta < 1$ ;

$$\left[ \lambda \left( \sum_{k=1}^K p_k^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} + \mu \left( \sum_{k=1}^K q_k^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right]^{\alpha \frac{\beta-1}{\alpha-1}} \leq \left[ \sum_{k=1}^K (\lambda p_k + \mu q_k)^\alpha \right]^{\frac{\beta-1}{\alpha-1}}. \quad (\text{F.8})$$

Se além disso  $\alpha \frac{\beta-1}{\alpha-1} < 1$ , isto é,  $\beta > 2 - \frac{1}{\alpha}$ , a função  $y = x^{\alpha \frac{\beta-1}{\alpha-1}}$  é côncava, de onde:

$$\begin{aligned} & \lambda \left[ \left( \sum_{k=1}^K p_k^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right]^{\alpha \frac{\beta-1}{\alpha-1}} + \mu \left[ \left( \sum_{k=1}^K q_k^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right]^{\alpha \frac{\beta-1}{\alpha-1}} \leq \\ & \leq \left[ \lambda \left( \sum_{k=1}^K p_k^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} + \mu \left( \sum_{k=1}^K q_k^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right]^{\alpha \frac{\beta-1}{\alpha-1}}, \end{aligned} \quad (\text{F.9})$$

de (F.8) e (F.9) temos:

$$\lambda \left[ \left( \sum_{k=1}^K p_k^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right]^{\frac{\beta-1}{\alpha-1}} + \mu \left[ \left( \sum_{k=1}^K q_k^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right]^{\frac{\beta-1}{\alpha-1}} \leq \left[ \sum_{k=1}^K (\lambda p_k + \mu q_k)^\alpha \right]^{\frac{\beta-1}{\alpha-1}}. \quad (\text{F.10})$$

Subtraindo de (F.10)  $\lambda + \mu = 1$  e dividindo por  $(D^{1-\beta} - 1) > 0$ , obtemos (F.6) e (F.7) para  $0 < \alpha < 1$ , e  $2 - \frac{1}{\alpha} < \beta < 1$ .

Se  $\alpha \frac{\beta-1}{\alpha-1} < 0$ , isto é,  $\beta > 1$ , a desigualdade (F.8) é invertida; o mesmo acontece com (F.9) visto que a função  $y = x^{\alpha \frac{\beta-1}{\alpha-1}}$  é convexa. Consequentemente (F.10) também fica invertida; subtraindo desta

$\lambda + \mu = 1$ , e dividindo por  $(D^{1-\beta} - 1) < 0$ , obtemos novamente (F.6) e (F.7) para  $0 < \alpha < 1$ ,  $\beta > 1$ .

3º Caso:  $\beta = 2 - \frac{1}{\alpha}$

Quando  $\beta = 2 - \frac{1}{\alpha}$ , temos o caso da informação da espécie  $\gamma$  ( $\gamma = \frac{1}{\alpha}$ ) (a menos de uma constante multiplicativa) que é estudada diretamente, utilizando a desigualdade (F.2).

Caso 3.1:  $\gamma > 1$

$$\lambda \left[ \sum_{k=1}^K p_k^\gamma \right]^\gamma + \mu \left[ \sum_{k=1}^K q_k^\gamma \right]^\gamma \leq \left[ \sum_{k=1}^K (\lambda p_k + \mu q_k)^\gamma \right]^\gamma \quad (\text{F.11})$$

Subtraindo  $\lambda + \mu = 1$  a ambos os membros de (F.11) e dividindo a desigualdade assim obtida por  $(D^{\gamma-1} - 1) > 0$ , ( $\gamma > 1$ ), obtemos uma nova desigualdade:

$$\frac{\lambda}{D^{\gamma-1} - 1} \left[ \sum_{k=1}^K p_k^\gamma \right]^\gamma + \frac{\mu}{D^{\gamma-1} - 1} \left[ \sum_{k=1}^K q_k^\gamma \right]^\gamma \leq \frac{1}{D^{\gamma-1} - 1} \left[ \sum_{k=1}^K (\lambda p_k + \mu q_k)^\gamma \right]^\gamma \quad (\text{F.12})$$

isto é:

$$\lambda_\gamma H(P) + \mu_\gamma H(Q) \leq_\gamma H(\lambda P + \mu Q). \quad (\text{F.13})$$

Caso 3.2:  $0 < \gamma < 1$

A desigualdade (F.11) é invertida, mas como  $D^{\gamma-1} - 1 \leq 0$  obtemos novamente (F.12) e conseqüentemente (F.13).

Podemos agora concluir que  $H(P; \alpha, \beta)$  é côncava se:

$$\alpha > 1 \quad \text{e} \quad \beta \geq 2 - \frac{1}{\alpha}$$

$$0 < \alpha < 1 \quad \text{e} \quad 2 - \frac{1}{\alpha} \leq \beta < 1$$

$0 < \alpha < 1$  e  $\beta > 1$ .

Ou resumindo

$H(P; \alpha, \beta)$  é uma função côncava para qualquer  $P \in \Delta_K$ , para todo

$$0 < \alpha \leq \frac{1}{2 - \beta}.$$

## REFERÊNCIAS

- [1] ACZEL, J. (1974). Determination of All Additive Quasiarithmetic Mean Codeword Lengths - Z. Wahr. und Vern. Geb., 29, pág. 351-360.
- [2] ACZEL, J. e DARÓCZY, Z. (1975). On Measures of Information and Their Characterizations- Academic Press, New York.
- [3] ASH, R. B. (1965). Information Theory, Wiley, New York.
- [4] CAMPBELL, L. L. (1965). A Coding Theorem and Rényi's Entropy - Information and Control, 8, pág. 423-429.
- [5] CAMPBELL, L. L. (1966). Definition of Entropy by Means of a Coding Problem - Z. Wahr. Vern. Geb., 6, pág. 113-118.
- [6] DARÓCZY, Z. (1970). Generalized Information Functions - Information and Control, 16, pág. 36-51.
- [7] EL-SAYED, A. B. (1979). On the Problem of Coding with Minimal Costs - Information and Control, 40, pág. 291-300.
- [8] GALLAGER, R. G. (1968). Information Theory and Rebiabile Communication - Wiley, New York.
- [9] GUPTA, H. C. (1975). Noiseless Coding Theorems for Non-Additive Measures of Entropy and Inacuracy - J. Math. Sci, 10, pág. 86-95.

- [10] HARDY, G. H., LITTLEWOOD, J. E. e PÓLYA, G. (1964). Inequalities, Cambridge University Press.
- [11] HELLMAN, M. E. and RAVIV, J. Probability of Error, Equivocation and Chernoff Bound, IEEE Transactions on Information Theory, Vol. IT-16, 1970, pág. 368-372.
- [12] PYL, V. D. T. Information d' Ordre  $\alpha$  and the Type  $\beta$  Axiomatique et Proprietis, Thèse de 3<sup>e</sup> Cycle, Paris (1977).
- [13] RÉNYI, A. (1961). On Measures of Entropy and Information - Proc. 4<sup>th</sup> Berkeley Symp. Math. Statist. Probability, 1960, 1, 547-561. Univ. of California Press, Berkeley, 1961.
- [14] REZA, F. M. (1961). An Introduction to Information Theory - Mc Graw Hill, New York.
- [15] SHANNON, C. E. (1948). A Mathematical Theory of Communication - Bell System Tech. J., Vol. 27, pág. 379-423, 623-656.
- [16] SHARMA, B. D. e MITTAL, D. P. (1975). New Non-Additive Measures of Entropy for a Discrete Probability Distribution - J. Math. Sci, 10, pág. 28-40.
- [17] SILVA, A. J. (1981). Sobre o Problema de Codificação com Custo Mínimo. ( Tese de Mestrado )
- [18] TANEJA, I. J. Lower Bounds on Additive Quasiarithmetic Mean Codeword Lengths - Em Preparação.



- [19] TANEJA, I. J. e SILVA, A. J. Sobre o Problema de Codificação com Custo Mínimo - Apresentado no "4º Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional", UFRJ, Rio de Janeiro 8 a 11 de Setembro de 1981.
- [20] TANEJA, I. J. e ZATELLI, A. Generalized Parametric Entropy and Probability of Error - Resumo em "1982 International Conference on Information Theory", 25-30 Junho de 1982, Les Arcs, França.