

ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

"MESTRE EM CIÊNCIAS"

ESPECIALIDADE EM MATEMÁTICA E APROVADA EM SUA FORMA FINAL
PELO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO



prof. INDER JEET TANEJA, Ph.D.

Coordenador

BANCA EXAMINADORA:

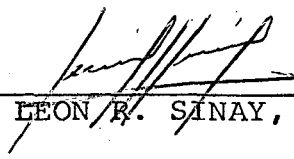


prof. GUR DIAL, Ph.D.

Orientador



prof. INDER JEET TANEJA, Ph.D.



prof. LEON R. SINAY, Ph.D.

SOLUÇÕES MENSURÁVEIS DE EQUAÇÕES FUNCIONAIS
E MEDIDAS DE INFORMAÇÃO

Sebastião da S. Barbosa

Orientador: Professor Doutor Gur Dial

JUNHO - 1982

À meus pais: Armando e Ercília

À minha esposa: Joana

À minha filha : Karina

Sou grato ao Professor Gur Dial, pelo incentivo e dedicação demonstrados como orientador, durante o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço ao Professor Francisco Venâncio, pelas suas valiosas sugestões e a Maciel Antunes da Silva pelo esmerado trabalho datilográfico.

R E S U M O

Neste trabalho, que subdividimos em três capítulos, nos propusemos solucionar algumas equações funcionais em uma variável. Ao mesmo tempo, aplicaremos as soluções mensuráveis destas equações funcionais para a caracterização axiomática de medidas de informação.

No capítulo I apresentamos um relato sobre as equações funcionais. Com a finalidade de situar o nosso objetivo de estudo destacamos a relação existente entre as soluções contínuas e mensuráveis destas equações funcionais e as medidas de informação.

Nos capítulos II e III solucionamos equações funcionais, generalizações da equação funcional de Chaundy e Mcleod (1960). Elas surgem também naturalmente da não-aditividade de algumas medidas de informação. Nestes capítulos fazemos então aplicações à caracterização de várias entropias não-aditivas, tais como: a entropia não-aditiva de grau (α, β) , entropia do seno, entropia $\alpha - \log$ e outras.

A B S T R A C T

In this work, which is divided in three chapters we propose to solve some functional equations in one variable. At the same time, we apply the measurable solutions of these functional equations for the axiomatic characterization of information measures.

In chapter I we give a resume about functional equations. In order to establish the objective of our study, we will point out the existing relation between the measurable and continuous solutions of these equations and the information measures.

In chapters II and III we solve generalizations of the functional equation of Chaundy e McLeod (1960). They appear naturally from the non-additivity of some "information measures". In these chapters we make applications to the axiomatic characterization of some non-additive entropies, such as the non-additive entropy of degree (α, β) , the sine entropy and the α -log entropy among others.

Í N D I C E

CAPÍTULO I

1.	INTRODUÇÃO	1
	1.1 - Definições	1
	1.2 - Equações funcionais	5

CAPÍTULO II

2.	EQUAÇÕES FUNCIONAIS E MEDIDAS DE INFORMAÇÃO	9
	2.1 - Introdução	9
	2.2 - Soluções mensuráveis de (2.1.1)	11
	2.3 - Soluções mensuráveis de (2.1.2)	18
	2.4 - Aplicações	28

CAPÍTULO III

3.	EQUAÇÕES FUNCIONAIS E CARACTERIZAÇÃO DE MEDIDAS DE INFOR MAÇÃO	30
	3.1 - Introdução	30
	3.2 - Soluções mensuráveis de (3.1.1)	31
	3.3 - Soluções mensuráveis de (3.1.2)	38
	3.4 - Aplicações	46

BIBLIOGRAFIA		50
--------------------	--	----

CAPÍTULO I

1. INTRODUÇÃO:

Shannon introduziu, num trabalho pioneiro (1948), uma medida de informação (incerteza ou entropia) de uma variável aleatória. Além dessa medida, alguns resultados fundamentais foram mostrados por ele nesse mesmo artigo, resultados esses que deram origem à teoria da informação. Esta teoria tem aplicações em muitas áreas como: Economia, Problemas Sociais, Ecologia, Linguística, Física Criminologia, etc.

A entropia de Shannon foi generalizada por vários matemáticos. Esta entropia pode ser interpretada como uma medida de informação.

Estudamos neste trabalho, usando equações funcionais, o problema da caracterização de algumas medidas de informação. As soluções mensuráveis dessas equações, sob algumas condições, caracterizam estas medidas.

1.1 - Definições

Sejam $\Delta_n = \{P = (p_1, \dots, p_n); p_i \geq 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1\}$, (1.1.1)

$n = 1, 2, \dots;$

o conjunto das distribuições completas de n-probabilidades.

Nas expressões que seguem neste trabalho os logarítmos serão tomadas na base 2, $0 \log 0 = 0$ e $0^\alpha = 0$ ($\alpha > 0$).

Definição - 1:

A entropia de Shannon [11] de uma distribuição $P = (p_1, \dots, p_n) \in \Delta_n$ é definida por:

$$H_n(P) = - \sum_{i=1}^n p_i \log p_i \quad (1.1.2)$$

Definição - 2:

A entropia aditiva de ordem α [ou entropia de Renyi [10]] de uma distribuição $P = (p_1, \dots, p_n) \in \Delta_n$ é definida por:

$$H_{n,\alpha}(P) = (1 - \alpha)^{-1} \log \left(\sum_{i=1}^n p_i^\alpha \right), \quad (1.1.3)$$

$$\alpha \neq 1, \alpha > 0.$$

Observação:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} H_{n,\alpha}(P) = H_n(P) \text{ \AA entropia de Shannon.}$$

Definição - 3:

A entropia não-aditiva de grau β [Havrda e Charvát [6] e Daróczy [2]] de uma distribuição $P \in \Delta_n$ é definida por:

$$H_n^\beta(P) = (2^{1-\beta} - 1)^{-1} \left[\sum_{i=1}^n p_i^\beta - 1 \right], \quad (1.1.4)$$

$$\beta \neq 1, \beta > 0.$$

Definição - 4:

A entropia aditiva de ordem (α, β) [Aczél [2]] de uma distribuição $P \in \Delta_n$ é definida como:

$$H_{n,\alpha,\beta}(P) = (\beta - \alpha)^{-1} \log \left[\frac{\sum_{i=1}^n p_i^\alpha}{\sum_{i=1}^n p_i^\beta} \right], \quad (1.1.5)$$

$$\alpha \neq \beta, \alpha, \beta > 0; \alpha, \beta \neq 1.$$

Definição - 5:

A entropia não-aditiva de grau (α, β) [Sharma e Taneja [12]] de uma distribuição $P \in \Delta_n$ é definida por:

$$H_n^{(\alpha, \beta)}(P) = (2^{1-\alpha} - 2^{1-\beta})^{-1} \left[\sum_{i=1}^n (p_i^\alpha - p_i^\beta) \right], \quad (1.1.6)$$

$$\alpha \neq \beta, \alpha, \beta > 0; \alpha, \beta \neq 1.$$

Definição - 6:

A entropia α -log [Sharma e Taneja [12]] de uma distribuição $P \in \Delta_n$ é dada por:

$$H_1^\alpha(P) = -2^{\alpha-1} \sum_{i=1}^n p_i^\alpha \log p_i, \quad \alpha > 0 \quad (1.1.7)$$

Definição - 7:

A entropia do seno [Sharma e Taneja [12]] de uma distribuição $P \in \Delta_n$ é dada por:

$$H_S^{(\alpha, \beta)}(P) = - \frac{2^{\alpha-1}}{\text{sen } \beta} \sum_{i=1}^n p_i^\alpha \text{sen } (\beta \log p_i), \quad (1.1.8)$$

$$\beta \neq 0, \alpha > 0.$$

Definição - 8:

A medida R - norma de uma distribuição $P \in \Delta_n$ é dada por:

$$H_R(P) = \frac{R}{R-1} \left[1 - \left(\sum_{i=1}^n p_i^R \right)^{1/R} \right], \quad R > 0, R \neq 1. \quad (1.1.9)$$

Definição - 9:

A medida de informação de ordem α e tipo β (entropia de Mittal) de uma distribuição $P \in \Delta_n$ é definida como:

$$H_B^\alpha(P) = \frac{1}{2^{1-\beta} - 1} \left[\left(\sum_{i=1}^n p_i^\alpha \right)^{\frac{\beta-1}{\alpha-1}} - 1 \right], \quad (1.1.10)$$

$$\alpha, \beta > 0; \alpha \neq \beta \text{ e } \alpha, \beta \neq 1.$$

Existem na literatura da teoria da informação várias medidas de informação para duas ou mais distribuições de probabilidades, mas somente vamos tratar de medidas de informação ligadas a uma distribuição de probabilidade.

Observações:

1) Se $\beta \rightarrow 1$, a entropia em (1.1.4) se reduz a en-

tropia de Shannon em (1.1.2).

2) A seguinte relação existe entre (1.1.3) e (1.1.4).

$$H_n^\beta (P) = \frac{1}{2^{1-\beta} - 1} \cdot \{(1-\beta) H_{n,\beta} (P) - 1\}, \beta \neq 1.$$

$$3) \lim_{\beta \rightarrow 1} H_{n,\alpha,\beta} (P) = H_{n,\alpha} (P)$$

$$4) \lim_{\beta \rightarrow 1} H_n^{(\alpha,\beta)} (P) = H_n^\alpha (P)$$

$$5) \lim_{R \rightarrow 1} H_R (P) = H_n (P)$$

$$6) \lim_{\beta \rightarrow 1} H_\beta^\alpha (P) = H_{n,\alpha} (P)$$

$$7) \lim_{\alpha \rightarrow 1} H_\beta^\alpha (P) = H_n^\beta (P)$$

Diversas propriedades algébricas e analíticas destas entropias são conhecidas e uma discussão detalhada das mesmas pode ser encontrada em Aczél e Daróczy [2], Mathai e Rathie [7] e Taneja [14].

1.2 - Equações funcionais

As equações funcionais desempenham um papel importante na caracterização de medidas de informação, pois quase todas essas medidas satisfazem às propriedades da soma, da aditividade ou da não-aditividade.

Se existe uma função $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, contínua ou mensurável, tal que a entropia H_n pode ser escrita na forma

$$H_n(P) = \sum_{i=1}^n f(p_i), \quad P = (p_1, \dots, p_n) \in \Delta_n \quad (1.2.1)$$

então se diz que $H_n(P)$ satisfaz a propriedade da soma.

A entropia de Shannon satisfaz a seguinte relação, chamada propriedade aditiva

$$H_{nm}(P \star Q) = H_n(P) + H_m(Q), \quad P \in \Delta_n \quad \text{e} \quad Q \in \Delta_m \quad (1.2.2)$$

onde $P \star Q = (p_1 q_1, \dots, p_1 q_m, \dots, p_n q_1, \dots, p_n q_m)$, $m, n = 1, 2, 3, \dots$

Se $H_n(P)$ satisfaz às propriedades da soma e aditividade então temos de (1.2.1) e (1.2.2) a equação funcional:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(p_i q_j) = \sum_{i=1}^n f(p_i) + \sum_{j=1}^m f(q_j) \quad (1.2.3)$$

A equação funcional (1.2.3) foi estudada primeiramente por Chaundy e McLeod [4]. E sua solução é dada por:

$$f(p) = A p \log p, \quad p \in [0,1] \quad (1.2.4)$$

onde A é uma constante arbitrária.

No capítulo II deste trabalho serão encontradas as soluções mensuráveis e aplicações à teoria da informação das seguintes equações funcionais:

$$i) \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(p_i q_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_i^\alpha f(q_j) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m q_j^\beta f(p_i), \quad (1.2.5)$$

$$\alpha \neq \beta, \quad \alpha, \beta > 0.$$

onde $P = (p_1, \dots, p_n) \in \Delta_n$, $Q = (q_1, \dots, q_m) \in \Delta_m$ e α, β são parâmetros.

Esta equação funcional, solucionada por Sharma e Taneja (1975), tem como solução contínua

$$f(p) = C \left[p^\alpha - p^\beta \right], \quad \alpha, \beta > 0, \quad \alpha \neq \beta \quad (1.2.6)$$

onde C é uma constante e $p \in [0, 1]$.

$$\text{ii) } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(p_i q_j) = \sum_{i=1}^n f(p_i) + \sum_{j=1}^m f(q_j) + C \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(p_i) f(q_j) \quad (1.2.7)$$

para $P = (p_1, \dots, p_n) \in \Delta_n$, $Q = (q_1, \dots, q_m) \in \Delta_m$ e C é uma constante não nula.

Esta equação foi solucionada por Behara e Nath (1973) e tem como solução contínua

$$f(p) = C \left[p - p^\alpha \right], \quad \alpha \geq 0, \quad \alpha \neq 1, \quad (1.2.8)$$

onde $p \in [0, 1]$ e C é uma constante

$$\text{iii) } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(p_i q_j) = \sum_{i=1}^n g(p_i) + \sum_{j=1}^m h(q_j) + \lambda \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m g(p_i) h(q_j) \quad (1.2.9)$$

onde $P = (p_1, \dots, p_n) \in \Delta_n$, $Q = (q_1, \dots, q_m) \in \Delta_m$ e λ é uma constante não nula.

Evidentemente, se $f = g = h$ então da equação funcional (1.2.9) obtemos a (1.2.7). A equação funcional (1.2.9) foi solucionada por Mittal (1976) e tem como solução contínua as seguintes funções:

$$f(p) = p/\lambda (abp^{\beta-1} - 1), g(p) = p/\lambda (ap^{\beta-1} - 1), h(p) = \\ = p/\lambda (bp^{\beta-1} - 1) \quad (1.2.10)$$

onde $ab \neq 0$ ou

$$f(p) = g(p) = -p/\lambda, h(p): \text{arbitr\u00e1ria ou} \quad (1.2.11)$$

$$f(p) = h(p) = -p/\lambda, g(p): \text{arbitr\u00e1ria} \quad (1.2.12)$$

onde β, λ s\u00e3o constantes, λ n\u00e3o nula e β \u00e9 positivo e p pertence ao intervalo $[0,1]$.

As solu\u00e7\u00f5es mensur\u00e1veis das equa\u00e7\u00f5es funcionais (1.2.13) e (1.2.14) dadas a seguir ser\u00e3o encontradas no cap\u00edtulo III.

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m h(p_i q_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m g(p_i) h(q_j) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m g(q_j) h(p_i) \quad (1.2.13)$$

para $P = (p_1, \dots, p_n) \in \Delta_n, Q = (q_1, \dots, q_m) \in \Delta_m$, e $n, m = 1, 2, 3, \dots$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m h(p_i q_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(p_i) g(q_j) + \sum_{i=1}^n k(p_i) \quad (1.2.14)$$

para $P = (p_1, \dots, p_n) \in \Delta_n, Q = (q_1, \dots, q_m) \in \Delta_m$ e $n, m = 1, 2, 3, \dots$

As solu\u00e7\u00f5es cont\u00ednuas de (1.2.14) e de (1.2.13) s\u00e3o encontradas em Tan\u00e7a [12].

Os cap\u00edtulos II e III deste trabalho ser\u00e3o concl\u00f3s com aplica\u00e7\u00f5es das equa\u00e7\u00f5es funcionais \u00e0 teoria da informa\u00e7\u00e3o.

CAPÍTULO II

2 EQUAÇÕES FUNCIONAIS E MEDIDAS DE INFORMAÇÃO

As propriedades da soma, aditividade ou não-aditividade de medidas de informação dão origem a algumas equações funcionais. Neste capítulo, as soluções mensuráveis das equações funcionais (2.1.1) e (2.1.2) em uma variável serão obtidas, sendo também feitas aplicações destas equações para caracterizar algumas medidas de informação.

2.1 - Introdução

Seja $\Delta_n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \geq 0 \text{ para } i = 1 \dots, n,$

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n x_i = 1 \} \end{array} \right\}$$

o conjunto de n-uplas distribuições de probabilidade.

Neste capítulo trabalharemos com as duas equações funcionais em uma variável seguintes, veja referência [9]:

$$i) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i, y_j) = \sum_{i=1}^n x_i^\alpha \sum_{j=1}^m f(y_j) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m y_j^\beta f(x_i) \quad (2.1.1)$$

onde $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é mensurável (ou contínua em um ponto ou limitado num intervalo pequeno),

$$X = (x_1, \dots, x_n) \in \Delta_n, Y = (y_1, \dots, y_m) \in \Delta_m \quad e$$

α, β são parâmetros reais e $n, m = 1, 2, 3, \dots$

Observação:

Quando $\alpha = \beta = 1$ (2.1.1) reduz-se à equação funcional de Chaundy e McLeod (1960) (1.2.3)

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i, y_j) = \sum_{i=1}^n f(x_i) + \sum_{j=1}^m f(y_j).$$

$$\text{ii) } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i, y_j) = \sum_{i=1}^n g(x_i) + \sum_{j=1}^m h(y_j) + \lambda \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m g(x_i) h(y_j) \quad (2.1.2)$$

onde as funções $f, g, h: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ são mensuráveis, $X = (x_1, \dots, x_n) \in \Delta_n$, $Y = (y_1, \dots, y_m) \in \Delta_m$ e λ é uma constante não nula.

Observação:

Quando $f = g = h$ (2.1.2) se transforma na equação funcional (1.2.7)

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i, y_j) = \sum_{i=1}^n f(x_i) + \sum_{j=1}^m f(y_j) + c \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i) f(y_j)$$

Determinaremos as soluções mensuráveis das equações funcionais (2.1.1) e (2.1.2) nas seções (2.2) e (2.3) respectivamente. Na seção (2.4) serão feitas aplicações destas equações para caracterizar medidas de informação.

2.2 - Soluções mensuráveis de (2.1.1)

A seguir determinaremos as soluções mensuráveis da equação funcional (2.1.1).

Teorema (2.2.1). Sejam $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável (ou contínua em um ponto, ou limitada em um intervalo pequeno), $X \in \Delta_n$, $Y \in \Delta_m$, $m, n = 1, 2, 3, \dots$ então a equação (2.1.1) admite a seguinte solução.

$$f(x) = C \left[x^\alpha - x^\beta \right]; \quad \alpha, \beta > 0, \quad \alpha \neq \beta \quad (2.2.1) \quad \text{onde}$$

C é uma constante arbitrária.

Para provar o teorema precisamos dos seguintes lemas:

Lema (2.2.1): $f(0) = f(1) = 0$.

Prova:

Substituindo $(x_1, x_2) = (0, 1)$ e $(y_1, y_2, y_3) = (0, 1, 0)$ em (2.1.1),

então

$$2 f(0) = f(1) \quad (2.2.2)$$

Substituindo

$$(x_1, x_2) = (0, 1), \quad (y_1, y_2, y_3) = (y, 1 - y, 0)$$

para $y \in (0, 1)$ em (2.1.1), temos

$$3 f(0) = \{y^\beta + (1 - y)^\beta\} \{f(1) + f(0)\}, \quad y \in (0, 1). \quad (2.2.3)$$

De (2.2.2) e (2.2.3) temos $f(0) = 0$, portanto de (2.2.2) obtemos

$$f(1) = (f0) = 0 \quad (2.2.4)$$

Lema (2.2.2)

Para $X = (x_1, \dots, x_n) \in \Delta_n$, $n = 2, 3, \dots$

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) = C \sum_{i=1}^n \left[x_i^\alpha - x_i^\beta \right], \quad \alpha, \beta > 0, \quad \alpha \neq \beta \quad (2.2.5)$$

onde C é uma constante arbitrária.

Prova:

Dado que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(y_j, x_i)$$

para $n = 2, 3, \dots$

temos, usando (2.1.1),

$$\frac{\sum_{j=1}^n f(y_j)}{\sum_{j=1}^n (y_j^\alpha - y_j^\beta)} = \frac{\sum_{i=1}^n f(x_i)}{\sum_{i=1}^n (x_i^\alpha - x_i^\beta)} = C, \quad \text{para } x_i, y_j \in (0,1).$$

Como $\alpha \neq \beta$, o denominador não se anula. Assim:

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) = C \sum_{i=1}^n \left[x_i^\alpha - x_i^\beta \right], \quad x_i \in (0,1)$$

a qual, junto com o fato que $f(1) = f(0) = 0$, temos (2.2.5) verdadeiro para $x_i \in [0,1]$, com $\sum_{i=1}^n x_i = 1$.

Lema (2.2.3)

Sejam $x, t \in [0,1]$, x fixo e t arbitrário. Se

$$A_x(t) = f(xt) + f[(1-x)t] - [x^\alpha + (1-x)^\alpha] f(t) - t^\beta \{f(x) + f(1-x)\} \quad (2.2.6)$$

então

$$A_x(u+v) = A_x(u) + A_x(v), \text{ onde } u, v, u+v \in [0,1] \quad (2.2.7)$$

Prova:

Seja $(x_1, x_2) = (x, 1-x)$, $(y_1, y_2, y_3) = (u, v, 1-u-v)$ em (2.1.1)

então

$$\begin{aligned} & f(xu) + f[(1-x)u] + f(xv) + f[(1-x)v] + f\{x(1-u-v)\} \\ & + f\{(1-x)(1-u-v)\} = \{x^\alpha + (1-x)^\alpha\} \{f(u) + f(v) + \\ & + f(1-u-v)\} + \{u^\beta + v^\beta + (1-u-v)^\beta\} \{f(x) + f(1-x)\} \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Seja $(x_1, x_2) = (x, 1-x)$, $(y_1, y_2) = (u+v, 1-u-v)$ em (2.1.1)

então

$$\begin{aligned} & f\{x(u+v)\} + f\{(1-x)(1-u-v)\} + f\{x(1-u-v)\} + \\ & f\{(1-x)(u+v)\} = \{x^\alpha + (1-x)^\alpha\} \{f(u+v) + f(1-u-v)\} + \\ & + \{(u+v)^\beta + (1-u-v)^\beta\} \{f(x) + f(1-x)\} \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Subtraindo (2.2.9) de (2.2.8) e usando (2.2.6) temos:

$A_x(u + v) = A_x(u) + A_x(v)$, onde $u, v, u + v \in [0,1]$. Isto é, $A_x(t)$ é aditiva em t .

O seguinte lema foi provado por Daróczy e Losanczi (1967), veja referência [5]

Lema (2.2.4). Qualquer solução da equação funcional de Cauchy $g(x + y) = g(x) + g(y)$ (2.2.10) pode ser estendida de $\{(x, y): x, y, x + y \in [0,1]\}$ para \mathbb{R}^2 .

O lema (2.2.5), a seguir, foi provado por Aczél, veja referência [2].

Lema (2.2.5). Se a equação funcional de Cauchy $h(x + y) = h(x) + h(y)$ é satisfeita por todos os reais x, y e se a função $h(x)$ é mensurável, então $h(x) = Cx$ para todo x , e C constante arbitrária.

Agora recorremos aos cinco lemas acima para provar o teorema (2.2.1).

Prova do teorema:

Desde que $A_x(t)$ definida em (2.2.6) é mensurável e como pelo lema (2.2.3), para x fixo, $x \in [0,1]$, $A_x(t)$ é aditiva em t na região definida no lema (2.2.4), concluímos pelos lemas (2.2.4) e (2.2.5) que $A_x(t) = t A_x(1)$, $t \in [0,1]$ (2.2.11)

Dado que $f(1) = 0$, de (2.2.6) temos

$A_x(1) = f(x) + f(1-x) - \{x^\alpha + (1-x)^\alpha\} f(1) - f(1-x) - f(x) = 0$, donde concluimos que $A_x(t) = 0$, $t \in [0,1]$.

E assim

$$f(xu) + f[(1-x)u] = \{x^\alpha + (1-x)^\alpha\} f(u) + u^\beta \{f(x) + f(1-x)\} \quad (2.2.12)$$

Usando o lema (2.2.2) para $f(x) + f(1-x)$

temos

$$f(xu) + f[(1-x)u] = \{x^\alpha + (1-x)^\alpha\} f(u) + C u^\beta \{x^\alpha - x^\beta + (1-x)^\alpha - (1-x)^\beta\} \quad (2.2.13)$$

Novamente do lema (2.2.2) temos

$$f(1-u) + f(xu) + f[(1-x)u] = C \{(1-u)^\alpha - (1-u)^\beta + (xu)^\alpha - (xu)^\beta + [(1-x)u]^\alpha - [(1-x)u]^\beta\} \quad (2.2.14)$$

Subtraindo (2.2.13) de (2.2.14), temos

$$f(1-u) = C \{(1-u)^\alpha - (1-u)^\beta + (xu)^\alpha - (xu)^\beta + [(1-x)u]^\alpha - [(1-x)u]^\beta\} - \{x^\alpha + (1-x)^\alpha\} f(u) - u^\beta \{f(x) + f(1-x)\} \quad (2.2.15)$$

Substituindo $x = 1/2$ em (2.2.15) temos

$$f(1-u) = C \{(1-u)^\alpha - (1-u)^\beta + 2(u/2)^\alpha - 2(u/2)^\beta\} - 2^{1-\alpha} f(u) - u^\beta \{2^{1-\alpha} - 2^{1-\beta}\} C \quad (2.2.16)$$

porém de (2.2.5) temos

$$f(u) + f(1-u) = C \{u^\alpha - u^\beta + (1-u)^\alpha - (1-u)^\beta\} \quad (2.2.17)$$

Combinando (2.2.16) e (2.2.14) temos $f(u) = C \{u^\alpha - u^\beta\}$, $\alpha \neq 1$,
 $u \in [0,1]$ (2.2.18)

Para $\alpha = 1$, o lema (2.2.2) dá

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) = C \left\{ 1 - \sum_{i=1}^n x_i^\beta \right\} \quad (2.2.19)$$

Usando (2.1.1) e (2.2.19) temos

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m f(x_i y_j) = \sum_{j=1}^m \{f(y_j) + C y_j^\beta\} - C \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m x_i^\beta y_j^\beta \quad (2.2.20)$$

Fazendo

$$h(t) = f(t) + C t^\beta \quad (2.2.21)$$

em (2.2.20) temos

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m h(x_i y_j) = \sum_{j=1}^m h(y_j) \quad (2.2.22)$$

Como $f(0) = f(1) = 0$, temos

$$h(0) = 0, h(1) = C \quad (2.2.23)$$

Dado que

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m h(x_i y_j) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m h(y_j x_i), \text{ temos}$$

$$\sum_{j=1}^m h(y_j) = \sum_{j=1}^m h(x_j) \quad (2.2.24)$$

$X = (x_1, \dots, x_m)$, $Y = (y_1, \dots, y_m)$ em Δ_m e $m = 2, 3 \dots$

De (2.2.24), fica claro que

$$\sum_{i=1}^n h(x_i) = C, \text{ para } n = 2, 3, 4 \dots \quad (2.2.25)$$

e C constante.

Para x fixo, $x \in [0,1]$, se tomarmos

$$A_x(t) = h(xt) + h[(1-x)t] + h(t), \quad t \in [0,1] \quad (2.2.26)$$

e usarmos o método empregado no lema (2.2.3), com a ajuda de (2.2.25), temos que $A_x(u+v) = A_x(u) + A_x(v)$ (2.2.27)

para, $u, v, u+v \in [0,1]$.

Novamente usando o lema (2.2.4) concluímos que:

$$A_x(u) = u A_x(1) \quad (2.2.28)$$

Desde que $A_x(t)$ é definida como em (2.2.26), através de (2.2.25) e (2.2.28) temos:

$$A_x(u) = Cu \quad (2.2.29)$$

Fazendo $x = 1$ e usando (2.2.29) e (2.2.26) obtemos $h(u) = Cu, u \in [0,1]$ (2.2.30)

Usando a definição de $h(t)$ em (2.2.21) temos:

$$f(u) = C \{u - u^\alpha\}, \quad u \in [0,1] \quad (2.2.31)$$

Finalmente, de (2.2.18)

(quando $\alpha \neq 1$) e (2.2.31)

(quando $\alpha = 1$) concluímos a prova do teorema.

2.3 - Soluções mensuráveis de (2.1.2)

O objetivo desta seção é determinar as soluções mensuráveis da equação funcional (2.1.2).

Teorema (2.3.1). Sejam f, g e $h: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ funções mensuráveis (ou contínuas em ponto, ou limitadas em um intervalo pequeno), $X \in \Delta_n$ e $Y \in \Delta_m$, $n, m = 1, 2, 3, \dots$. Então a equação (2.1.2) admite as seguintes soluções:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{\lambda} (a b x^{\beta-1} - 1), \\ g(x) &= \frac{x}{\lambda} (a x^{\beta-1} - 1), \\ h(x) &= \frac{x}{\lambda} (b x^{\beta-1} - 1), \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

para todo $x \in [0,1]$, onde a, b são constantes não nulas e $\beta \geq 0$ é um parâmetro.

Ou

$$f(x) = g(x) = -\frac{x}{\lambda}, \quad h(x): \text{arbitrária} \tag{2.3.2}$$

Ou

$$f(x) = h(x) = -\frac{x}{\lambda}, \quad g(x): \text{arbitrária} \tag{2.3.3}$$

$$\lambda \neq 0$$

Primeiramente provaremos alguns lemas que nos auxiliarão na demonstração do teorema.

Lema (2.3.1). A função mensurável f satisfazendo a equação de Cauchy $f(x + y) = f(x) f(y)$ (2.3.4)

para todos os números positivos x, y , tem a solução não-trivial $f(x) = e^{cx}$ (2.3.5)

onde c é uma constante arbitrária

Prova:

Veja Aczél [1]

Lema (2.3.2). A função mensurável K satisfazendo a equação de Cauchy $K(xy) = K(x) K(y)$, $x, y \in (0,1]$ (2.3.6)

tem a solução não-trivial $K(x) = x^\alpha$, $x \in (0,1]$ (2.3.7)

onde α é uma constante arbitrária.

Prova:

Seja, $g(u) = K(e^u)$. (2.3.8)

Para $x, y \in (0,1]$, podemos escrever $x = e^u$, $y = e^v$ com $u, v \in (-\infty, 0]$.

Assim (2.3.6) torna-se

$g(u + v) = g(u) g(v)$; $u, v \in (-\infty, 0]$ (2.3.9)

Agora, seja

$h(t) = g(-t)$ (2.3.10)

então (2.3.9) torna-se

$$h(a + b) = h(a) h(b), \quad a, b \in [0, \infty) \quad (2.3.11).$$

Pelo lema (2.3.1) e usando a expressão (2.3.11) encontraremos a solução não-trivial $h(x) = e^{cx}$, $x \in [0, \infty)$.

Das transformações (2.3.8) e (2.3.10) concluímos então que K tem a solução não-trivial como em (2.3.7).

Lema (2.3.3). A solução geral, com K , M , N mensuráveis, da equação de Pexider

$$K(xy) = M(x) N(y), \quad x, y \in (0, 1] \quad (2.3.12)$$

será dada por:

Caso I. Se $M(1) \neq 0$ e $N(1) \neq 0$

$$K(t) = abt^\alpha, \quad M(t) = at^\alpha, \quad N(t) = bt^\alpha \quad (2.3.13)$$

onde α é um parâmetro.

Suplementada com as soluções triviais.

Caso II. Se $M(1) = 0$ ou $N(1) = 0$

$$\begin{array}{ll} K(t) = 0 & K(t) = 0 \\ M(t) = 0 & \text{ou} \quad M(t): \text{arbitr\u00e1ria} \\ N(t): \text{arbitr\u00e1ria} & N(t) = 0 \end{array}$$

Prova:

Se $y = 1$ em (2.3.12) temos

$$K(x) = b M(x), \quad \text{onde } b = N(1). \quad (2.3.15)$$

Seja ainda $x = 1$ em (2.3.12). Ent\u00e3o $K(y) = a N(y)$, onde $a = M(1)$

$$(2.3.16)$$

Caso I. Quando $M(1) \neq 0$ e $N(1) \neq 0$, substituindo (2.3.15) em (2.3.12) temos

$$ab K(xy) = K(x) K(y), \quad x, y \in (0,1]. \quad (2.3.17)$$

Tomando-se a transformação $\phi(t) = \frac{K(t)}{ab}$, $ab \neq 0$, então de (2.3.11) se obtém $\phi(xy) = \phi(x) \phi(y)$, $x, y \in (0,1]$ (2.3.18)

Pelo lema (2.3.2) temos a solução não-trivial de

$$\phi(x) = x^\alpha \quad (2.3.19)$$

onde α é uma constante arbitrária. Correspondente temos a solução não-trivial para K , M e N como em (2.3.13).

Caso II. Quando $M(1) = 0$ ou $N(1) = 0$ usando-se (2.3.15) e (2.3.16), é fácil ver que

$$K(x) = 0, \quad x \in (0,1] \quad (2.3.20)$$

e, correspondente, temos a solução trivial como (2.3.14).

A seguir usaremos os lemas acima para demonstrar o teorema (2.3.1).

Substituindo $Y = (y, u, 1 - y - u) \in \Delta_3$ em (2.1.2) temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \{f(x_i, y) + f(x_i, u) + f[x_i, (1 - y - u)]\} &= \sum_{i=1}^n g(x_i) + \\ + \{h(y) + h(u) + h(1 - y - u)\} + \lambda \left\{ \sum_{i=1}^n g(x_i) \right\} \{h(y) + \\ + h(u) + h(1 - y - u)\} & \quad (2.3.21) \end{aligned}$$

Novamente, substituindo $Y = (y + u, 1 - y - u) \in \Delta_2$ em (2.1.2) temos

$$\sum_{i=1}^n \{f[x_i (y + u)] + f[x_i (1 - y - u)]\} = \left\{ \sum_{i=1}^n g(x_i) \right\} +$$

$$\{h(y + u) + h(1 - y - u)\} + \lambda \left\{ \sum_{i=1}^n g(x_i) \right\} \{h(y + u) +$$

$$h(1 - y - u)\} \quad (2.3.22)$$

Subtraindo (2.3.21) de (2.3.22), então

$$\sum_{i=1}^n f[x_i (y + u)] - h(y + u) - \lambda \left\{ \sum_{i=1}^n g(x_i) \right\} h(y + u) =$$

$$\sum_{i=1}^n f(x_i y) - h(y) - \lambda \left\{ \sum_{i=1}^n g(x_i) \right\} h(y) + \sum_{i=1}^n f(x_i u) - h(u) -$$

$$- \lambda \left\{ \sum_{i=1}^n g(x_i) \right\} h(u) \quad (2.3.23)$$

Para $X = (x_1, \dots, x_n) \in \Delta_n$ definamos

$$A_X(t) = \sum_{i=1}^n f(x_i t) - h(t) - \lambda \left\{ \sum_{i=1}^n g(x_i) \right\} h(t), \quad t \in [0,1]. \quad (2.3.24)$$

então, de (2.3.23), temos

$$A_X(y + u) = A_X(y) + A_X(u), \quad \text{para } u, y, u + y \in [0,1] \quad (2.3.25)$$

Concluimos do lema (2.2.5) que a solução mensurável de (2.3.25)

$$\bar{e} A_X(t) = t A_X(1), \quad t \in [0,1] \quad (2.3.26)$$

Substituindo $Y = (0,1)$ em (2.1.2) temos

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) + n f(0) = \sum_{i=1}^n g(x_i) + h(1) + h(0) +$$

$$+ \lambda \left\{ \sum_{i=1}^n g(x_i) \right\} \{h(1) + h(0)\} \quad (2.3.27)$$

Novamente, substituindo $Y = (1,0,0)$ em (2.1.2),

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(x_i) + 2n f(0) &= \sum_{i=1}^n g(x_i) + h(1) + 2h(0) + \\ &+ \lambda \left\{ \sum_{i=1}^n g(x_i) \right\} \{h(1) + 2h(0)\}. \end{aligned} \quad (2.3.28)$$

Subtraindo (2.3.27) de (2.3.28) temos

$$nf(0) = h(0) + \lambda h(0) \sum_{i=1}^n g(x_i) \quad (2.3.29)$$

Combinando (2.3.29) com (2.3.27) temos

$$A_X(1) = \sum_{i=1}^n g(x_i) \quad (2.3.30)$$

De (2.3.26) e (2.3.30) e de (2.3.24), temos a seguinte relação.

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, t) - h(t) - \lambda h(t) \sum_{i=1}^n g(x_i) = t \sum_{i=1}^n g(x_i)$$

$$\text{para } X = (x_1, \dots, x_n) \in \Delta_n, n = 2, 3, \dots, \text{ e } t \in [0, 1]. \quad (2.3.31)$$

Substituindo respectivamente $X = (x, v, 1 - x - v)$ e $X = (x + v, 1 - x - v)$ em (2.3.31), depois subtraindo convenientemente as respectivas expressões, obtemos:

$$\begin{aligned} f[(x + v), t] - \lambda h(t) g(x + v) - t g(x + v) &= f(xt) - \\ - \lambda h(t) g(x) - t g(x) + f(vt) - \lambda h(t) g(v) - t g(v) \end{aligned} \quad (2.3.32)$$

Para $t \in [0, 1]$, definamos

$$B_t(w) = f(wt) - \lambda h(t) g(w) - tg(w), w \in [0, 1]$$

então (2.3.32) torna-se

$$B_t(x + v) = B_t(x) + B_t(v), \quad (2.3.34)$$

$$x, v, x + v \in [0,1]$$

Aplicando o lema (2.2.4) vemos que $B_t(x) = x B_t(1)$, $x \in [0,1]$
(2.3.35)

Substituindo $X = (1,0)$ em (2.3.31) temos

$$f(t) + f(0) - h(t) - \lambda h(t) \{g(1) + g(0)\} = t\{g(1) + g(0)\} \quad (2.3.36)$$

Fazendo $X = (1,0,0)$ em (2.3.31) obtemos

$$f(t) + 2f(0) - h(t) - \lambda h(t) \{g(1) + 2g(0)\} = t\{g(1) + 2g(0)\} \quad (2.3.37)$$

Subtraindo (2.3.36) de (2.3.37) temos

$$f(0) - \lambda h(t) g(0) = t g(0) \quad (2.3.38)$$

Combinando agora (2.3.38) com (2.3.36) obtemos

$$B_t(1) = f(t) - \lambda h(t) g(1) - t g(1) = h(t), \text{ para } t \in [0,1] \quad (2.3.39)$$

assim, (2.3.35) e (2.3.33) e de (2.3.39), temos a relação

$$f(xt) = \lambda h(t) g(x) + t g(x) + x h(t), \quad x, t \in [0,1] \quad (2.3.40)$$

Para $x, t \in (0,1]$, seja

$$F(x) = \frac{1}{x} f(x)$$

$$G(x) = \frac{1}{x} g(x)$$

$$H(x) = \frac{1}{x} h(x), \quad (2.3.41)$$

então (2.3.40) torna-se

$$xt F(xt) = \lambda xt H(t) G(x) + tx G(x) + tx H(t) \quad (2.3.42)$$

Para $x, t \in (0, 1]$ (2.3.42) torna-se

$$F(xt) = \lambda H(t) G(x) + G(x) + H(t) \quad (2.3.43)$$

Agora seja

$$K(x) = 1 + \lambda F(x)$$

$$M(x) = 1 + \lambda G(x)$$

$$N(x) = 1 + \lambda H(x), \quad (2.3.44)$$

Se multiplicarmos (2.3.43) por λ ($\lambda \neq 0$) e depois adicionarmos 1 em ambos os lados e usarmos a transformação (2.3.44), obtemos $K(xt) = M(x) N(t)$, para $x, t \in (0, 1]$ (2.3.45)

Pelo lema (2.3.3) a equação (2.3.45) tem a seguinte solução.

Caso I. Se $M(1) \neq 0$ e $N(1) \neq 0$

$$K(x) = abx^{1-\beta}$$

$$M(x) = ax^{1-\beta}$$

$$N(x) = bx^{1-\beta}, \quad (2.3.46)$$

para $x \in (0, 1]$, onde a, b são constantes não nu-

las.

De (2.3.44), a solução (2.3.46) significa

$$\begin{aligned} F(x) &= \lambda^{-1} (abx^{1-\beta} - 1) \\ G(x) &= \lambda^{-1} (ax^{1-\beta} - 1) \\ H(x) &= \lambda^{-1} (bx^{1-\beta} - 1), \end{aligned} \quad (2.3.47)$$

para $x \in (0, 1]$

Pela transformação (2.3.44), (2.3.47) é o mesmo que:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{\lambda} (abx^{\beta-1} - 1) \\ g(x) &= \frac{x}{\lambda} (ax^{\beta-1} - 1) \\ h(x) &= \frac{x}{\lambda} (bx^{\beta-1} - 1), \end{aligned} \quad (2.3.48)$$

para $x \in (0, 1]$

Caso II. Se $M(1) = 0$ ou $N(1) = 0$, ainda pelo lema (2.3.3)

temos $K(x) = M(x) = 0$, $N(x)$: arbitrária

ou

$K(x) = N(x) = 0$, $M(x)$: arbitrária.

Pela transformação (2.3.44) obtemos

$F(x) = G(x) = -1/\lambda$, $H(x)$: arbitrário.

ou

$F(x) = H(x) = -1/\lambda$, $G(x)$: arbitrário

Então da transformação (2.3.41) temos

$$f(x) = g(x) = -x/\lambda, \quad h(x): \text{arbitrária}, \quad x \in (0, 1] \quad (2.3.49)$$

ou

$$f(x) = h(x) = -x/\lambda, g(x): \text{arbitr\u00e1ria}, x \in (0,1] \quad (2.3.50)$$

Assim as solu\u00e7\u00f5es (2.3.48), (2.3.49) e (2.3.50) implicam respectivamente nas solu\u00e7\u00f5es (2.3.1), (2.3.2) e (2.3.3) do teorema para $x \in (0,1]$

Para provar que (2.3.1), (2.3.2) e (2.3.3) tamb\u00e9m valem para $x = 0$ procedemos como segue.

Quando $x = 0$

Seja $x = 0$ em (2.3.40), ent\u00e3o

$$f(0) = g(0) \{ \lambda h(t) + t \}, t \in (0,1] \quad (2.3.51)$$

Analogamente, para $t = 0$ em (2.3.40), temos

$$f(0) = h(0) \{ \lambda g(x) + x \}, x \in (0,1] \quad (2.3.52)$$

Caso I. Quando $M(1) \neq 0$ e $N(1) \neq 0$ a solu\u00e7\u00e3o (2.3.48) implica que $f(0) = g(0) = h(0) = 0$ (2.3.53)

Caso II. Quando $M(1) = 0$ ou $N(1) = 0$ tanto (2.3.49) como (2.3.50) implicam que $f(0) = 0$

Quando (2.3.49) for a solu\u00e7\u00e3o para $x \in (0,1]$, teremos por (2.3.51), que $g(0) = 0$ e portanto $h(0)$ \u00e9 arbitr\u00e1rio. Logo (2.3.49) \u00e9 verdadeiro para todo $x \in [0,1]$.

Similarmente, (2.3.50) \u00e9 verdadeiro para todo $x \in [0,1]$.

Portanto as equa\u00e7\u00f5es (2.3.48), (2.3.49) e (2.3.50) s\u00e3o v\u00e1lidas para $x \in [0,1]$.

Concluamos assim a prova do Teorema.

2.4 - Aplicações

Concluiremos este capítulo fazendo aplicações das equações funcionais (2.1.1), (2.1.2) às medidas de informação.

Considere uma variável aleatória discreta X assumindo valores nos eventos E_1, E_2, \dots, E_n com distribuições de probabilidade.

$$P = (p_1, \dots, p_n), \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1, \quad p_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n$$

E seja $\Delta_n = \{(p_1, \dots, p_n) : p_i \geq 0 \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots, n$

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n p_i = 1 \end{array} \right\} \text{ para } n \geq 1$$

o conjunto de n -uplas distribuições de probabilidades.

Se h é uma função real mensurável e $H_n(P)$, $P \in \Delta_n$ pode ser escrita na forma $H_n(P) = \sum_{i=1}^n h(p_i)$ (2.4.1)

a propriedade (2.4.1) é chamada - propriedade da soma da entropia $H_n(P)$.

As soluções da equação funcional (2.1.1) conduzem a uma caracterização da entropia de grau (α, β) (1.1.6).

Teorema (2.4.1). A entropia da distribuição de probabilidade $P \in \Delta_n$, satisfazendo a propriedade da soma (2.4.1), onde a função h é solução real mensurável de (2.1.1), com a condição $h(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$, é dada por.

$$H_n^{(\alpha, \beta)}(P) = (2^{1-\alpha} - 2^{1-\beta})^{-1} \left[\sum_{i=1}^n (p_i^\alpha - p_i^\beta) \right], \quad (2.4.2)$$

$$\alpha \neq \beta, \alpha, \beta > 0$$

Prova:

A solução mensurável h da equação funcional (2.1.1) é dada por $h(p) = C(p^\alpha - p^\beta)$, $\alpha \neq 1$, $p \in [0,1]$. (2.4.3)

Usando a condição $h(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, obtemos $C = (2^{1-\alpha} - 2^{1-\beta})^{-1}$.

$$(2.4.4)$$

Usando a propriedade da soma (2.4.1) e a função (2.4.3), sob a condição (2.4.4), obtemos (2.4.2). Isto prova o teorema.

As soluções do caso especial, $f = g = h$, da equação funcional (2.1.2), conduzem a uma caracterização da entropia não-aditiva de ordem β (1.1.4)

Teorema (2.4.2). A entropia da distribuição de probabilidade $P \in \Delta_n$, satisfazendo a propriedade (2.4.1) e onde a função h é solução real mensurável de (2.1.2), para $f = g = h$ com a condição $h(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, é dada por:

$$H_n^\beta(P) = (2^{1-\beta} - 1)^{-1} \left[\sum_{i=1}^n p_i^\beta - 1 \right], \quad (2.4.5)$$

$$\beta \neq 1, \beta > 0$$

Prova:

Usamos os mesmos argumentos do teorema (2.4.1) para conseguirmos o resultado do teorema (2.4.2).

CAPÍTULO III

3. EQUAÇÕES FUNCIONAIS E CARACTERIZAÇÃO DE MEDIDAS DE INFORMAÇÃO

Neste capítulo as soluções mensuráveis das equações funcionais (3.1.1) e (3.1.2) serão obtidas. Também faremos aplicações destas equações para caracterizar algumas medidas de informação.

3.1 - Introdução

Considere as equações funcionais em uma variável seguinte:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m h(x_i, y_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m g(x_i) h(y_j) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m g(y_j) h(x_i) \quad (3.1.1)$$

onde $h, g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ são mensuráveis (ou contínuas em um ponto ou limitadas num intervalo pequeno), $X = (x_1, \dots, x_n) \in \Delta_n$, $Y = (y_1, \dots, y_m) \in \Delta_m$ e $n, m = 1, 2, 3, \dots$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m h(x_i, y_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i) g(y_j) + \sum_{i=1}^n k(x_i) \quad (3.1.2)$$

onde f, g, h e $k: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, são funções mensuráveis, $X = (x_1, \dots, x_n) \in \Delta_n$,

$Y = (y_1, \dots, y_m) \in \Delta_m$, para $n, m = 1, 2, 3, \dots$

O objetivo das seções (3.2), (3.3) é encontrar as

soluções mensuráveis das equações funcionais (3.1.1) e (3.1.2). Na seção (3.4) estas equações serão aplicadas para uma caracterização de algumas medidas de informação.

3.2 - Soluções mensuráveis de (3.1.1)

No teorema seguinte obteremos as soluções mensuráveis da equação funcional (3.1.1).

Teorema (3.2.1). Sejam $h, g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ funções mensuráveis (contínuas em um ponto, limitadas num intervalo pequeno) $X \in \Delta_n$ e $Y \in \Delta_m$, $n, m = 1, 2, 3, \dots$. Então a equação (3.1.1) admite as seguintes soluções:

$$h(x) = Ax^\alpha \log x, \quad g(x) = x^\alpha, \quad (3.2.1)$$

$$h(x) = 1/B (x^\alpha - x^\beta), \quad g(x) = 1/2 (x^\alpha + x^\beta), \quad (3.2.2)$$

$$h(x) = (x^\alpha/C) \operatorname{sen} (\beta \log x), \quad g(x) = x^\alpha \operatorname{cos} (\beta \log x), \quad (3.2.3)$$

para $x \in [0,1]$, onde A, B, C são constantes com $B, C \neq 0$, e α e β parâmetros positivos.

Demonstração:

A demonstração será feita mediante uma seqüência de lemas.

Lema (3.2.1):

Para X fixo, $X \in \Delta_n$, se

$$A_X(t) = \sum_{i=1}^n h(x_i, t) - \sum_{i=1}^n g(x_i) h(t) - \sum_{i=1}^n h(x_i) g(t)$$

para $t \in [0, 1]$.

Então

$$A_X(y + v) = A_X(y) + A_X(v), \text{ onde } y, v, y + v \in [0, 1].$$

Prova:

Façamos $Y = (y, v, 1 - y - v) \in \Delta_3$ e $Z = (y + v, 1 - y - v) \in \Delta_2$ em (3.1.1). Obtemos, respectivamente,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \{h(x_i, y) + h(x_i, v) + h[x_i, (1 - y - v)]\} &= \sum_{i=1}^n \{g(x_i) [h(y) + \\ &+ h(v) + h(1 - y - v)]\} + \sum_{i=1}^n \{h(x_i) [g(y) + g(v) + g(1 - y - v)]\} \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \{h[x_i, (y + v)] + h[x_i, (1 - y - v)]\} &= \sum_{i=1}^n g(x_i) [h(y + v) + \\ &+ h(1 - y - v)] + \sum_{i=1}^n h(x_i) [g(y + v) + g(1 - y - v)] \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Subtraindo (3.2.5) de (3.2.4) obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \{h(x_i, y) + h(x_i, v) - h[x_i, (y + v)]\} &= \sum_{i=1}^n g(x_i) [h(y) + \\ &+ h(v) - h(y + v)] + \sum_{i=1}^n h(x_i) [g(y) + g(v) - g(y + v)] \end{aligned} \quad \text{para}$$

$X \in \Delta_n, n = 2, 3, \dots$

portanto,

$$A_X(y + v) = A_X(y) + A_X(v) \quad (3.2.6) \text{ onde}$$

$$A_X(t) = \sum_{i=1}^n h(x_i, t) - \sum_{i=1}^n g(x_i) h(t) - \sum_{i=1}^n h(x_i) g(t) \quad (3.2.7)$$

para $t, y, v, y + v \in [0,1]$, $X = (x_1, \dots, x_n) \in \Delta_n$. Isto significa que para X fixo, $X \in \Delta_n$, $A_X(t)$ é aditiva em t .

O seguinte lema foi provado por Daroczy e Losanczi [5].

Lema (3.2.2):

Se $A(t)$ satisfaz $A_X(y + v) = A_X(y) + A_X(v)$, para $y, v, y + v \in [0,1]$, então $A_X(t) = t A_X(1)$ (3.2.8)

Lema (3.2.3)

Para $X = (x_1, \dots, x_n) \in \Delta_n$ e $t \in [0,1]$, $n = 2, 3, \dots$

então

$$\sum_{i=1}^n h(x_i, t) = \sum_{i=1}^n g(x_i) h(t) + \sum_{i=1}^n h(x_i) g(t)$$

Prova:

Substituindo $Y = (1,0)$ e $Y = (1,0,0)$ em (3.1.1) temos, respectivamente,

$$\sum_{i=1}^n h(x_i) + nh(0) = \sum_{i=1}^n g(x_i) [h(1) + h(0)] + \sum_{i=1}^n h(x_i) [g(1) + g(0)] \quad (3.2.9)$$

$$\sum_{i=1}^n h(x_i) + 2nh(0) = \sum_{i=1}^n g(x_i) [h(1) + 2h(0)] + \sum_{i=1}^n h(x_i) [g(1) + 2g(0)] \quad (3.2.10)$$

Subtraindo (3.2.9) de (3.2.10) temos

$$nh(0) = \sum_{i=1}^n g(x_i) h(0) + \sum_{i=1}^n h(x_i) g(0) \quad (3.2.11)$$

Usando (3.2.11) e (3.2.9) obtemos $\sum_{i=1}^n h(x_i) =$

$$= \sum_{i=1}^n g(x_i) h(1) + \sum_{i=1}^n h(x_i) g(1) \quad (3.2.12)$$

Fazendo $t = 1$ em (3.2.7), segue que

$$A_X(1) = \sum_{i=1}^n h(x_i) - \sum_{i=1}^n g(x_i) h(1) - \sum_{i=1}^n h(x_i) g(1) \quad (3.2.13)$$

Usando (3.2.12) e (3.2.13) obtemos $A_X(1) = 0$

segue de (3.2.8) que $A_X(t) = 0, t \in [0,1]$

Logo, de (3.2.7) obtemos

$$\sum_{i=1}^n h(x_i, t) = \sum_{i=1}^n g(x_i) h(t) + \sum_{i=1}^n h(x_i) g(t) \quad (3.2.14)$$

$X = (x_1, \dots, x_n) \in \Delta_n, t \in [0,1], n = 2, 3, \dots$

Lema (3.2.4):

Para t fixo, $t \in [0,1]$, se $B_t(w) = h(wt) - g(w) h(t) - h(w) g(t)$, onde $w \in [0,1]$,

então

$B_t(x+u) = B_t(x) + B_t(u)$, com $x, u, x+u \in [0,1]$.

Prova:

Se $X = (x, u, 1 - x - u)$ em (3.2.14) temos

$$\begin{aligned} h(xt) + h(ut) + h[(1 - x - u)t] &= h(t) [g(x) + g(u) + \\ &+ g(1 - x - u)] + g(t) [h(x) + h(u) + h(1 - x - u)] \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

Agora, fazendo $X = (x + u, 1 - x - u)$ em (3.2.14), ficamos com

$$\begin{aligned} h[(x + u)t] + h[(1 - x - u)t] &= h(t) [g(x + u) + g(1 - x - u)] + \\ &+ g(t) [h(x + u) + h(1 - x - u)] \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

Subtraindo (3.2.16) de (3.2.15) temos

$$\begin{aligned} h(xt) + h(ut) - h[(x + u)t] &= h(t) [g(x) + g(u) - g(x + u)] + \\ &+ g(t) [h(x) + h(u) - h(x + u)] \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

Para t fixo, $t \in [0, 1]$, definamos

$$B_t(w) = h(wt) - g(w)h(t) - h(w)g(t), \quad w \in [0, 1] \quad (3.2.18)$$

$$\text{Ent\~{a}o (3.2.17) torna-se } B_t(x + u) = B_t(x) + B_t(u) \quad (3.2.19)$$

Para $x, u, x + u \in [0, 1]$. Usando novamente o resultado de Daroczy e Losanczi [5] (lema (3.2.2) temos

$$B_t(w) = w B_t(1), \quad w \in [0, 1] \quad (3.2.20)$$

Lema (3.2.5):

Para $t, w \in [0, 1]$

então

$$h(wt) = g(w) h(t) + h(w) g(t)$$

Prova:

Pelo lema (3.2.3) temos

$$\sum_{i=1}^n h(x_i, t) = \sum_{i=1}^n g(x_i) h(t) + \sum_{i=1}^n h(x_i) g(t), \quad t \in [0,1]$$

Substituindo $X = (1,0)$ e $X = (1,0,0)$ em (3.2.14) temos, respectivamente,

$$h(t) + h(0) = [g(1) + g(0)] h(t) + [h(1) + h(0)] g(t) \quad (3.2.21)$$

$$h(t) + 2h(0) = [g(1) + 2g(0)] h(t) + [h(1) + 2h(0)] g(t) \quad (3.2.22)$$

Subtraindo (3.2.21) de (3.2.22) temos

$$h(0) = g(0) h(t) + h(0) g(t) \quad (3.2.23)$$

Usando (3.2.23) e (3.2.21) temos

$$h(t) = [g(1) + g(0)] h(t) + [h(1) + h(0)] g(t) - [g(0) h(t) + h(0) g(t)] \quad (3.2.24)$$

onde

$$h(t) = g(1) h(t) + h(1) g(t)$$

De (3.2.18) temos que

$$B_t(1) = h(t) - g(1) h(t) - h(1) g(t), \quad t \in [0,1] \quad (3.2.25)$$

Concluimos de (3.2.25) e (3.2.24) que $B_t(1) = 0$, $t \in [0,1]$

$$\text{Donde por (3.2.20) } B_t(w) = 0, \quad w \in [0,1] \quad (3.2.26)$$

$$\text{Usando (3.2.26) e (3.2.18) temos } h(wt) = g(w) h(t) + h(w) g(t), \text{ para } w, t \in [0,1] \quad (3.2.27)$$

Continuação da prova do Teorema

Porém a solução complexa de (3.2.27), (veja [1]),
é dada por:

$$h(w) = 0 \quad g(w): \text{ arbitrária} \quad (3.2.28)$$

$$h(w) = e_0(w) a(w), \quad g(w) = e_0(w) \quad (3.2.29)$$

e

$$h(w) = (1/2K) [e_1(w) - e_2(w)], \quad g(w) = (1/2) [e_1(w) + e_2(w)] \quad (3.2.30)$$

onde $K \neq 0$ é uma constante complexa arbitrária e $a(w)$, $e_t(w)$ ($t = 0, 1, 2$) são funções, satisfazendo

$$a(wt) = a(w) + a(t), \quad (3.2.31)$$

e

$$e_\ell(wt) = e_\ell(w) e_\ell(t), \quad \ell = 0, 1, 2 \quad (3.2.32)$$

respectivamente.

De (3.2.28), (3.2.29) e (3.2.30), e de (3.2.31) e (3.2.32) é fácil ver que as soluções mensuráveis reais h e g

de (3.2.27) são dadas por (3.2.1), (3.2.2) e (3.2.3), provando assim o teorema.

3.3 - Soluções mensuráveis de (3.1.2)

Neste parágrafo encontraremos as soluções mensuráveis da equação funcional (3.1.2). Tais soluções serão dadas por intermédio do seguinte Teorema.

Teorema (3.3.1). Sejam f, g, h e $k: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ funções mensuráveis (contínuas em um ponto, limitada num intervalo pequeno), $X \in \Delta_n$ e $Y \in \Delta_m$, $n, m = 1, 2, 3, \dots$. Então a equação (3.1.2) admite como solução o seguinte conjunto de funções:

$$h(x) = Bx + Ax \log x, \quad f(x) = Cx$$

$$g(x) = Dx + (A/C) x \log x, \quad k(x) = (B - CD) x + Ax \log x \quad (3.3.1)$$

ou

$$h(x) = Bx + A(x^\beta - x), \quad f(x) = Cx^\beta$$

$$g(x) = Dx + (A/C)(x^\beta - x), \quad k(x) = (B - A)x + (A - CD)x^\beta \quad (3.3.2)$$

onde A, B, C e $D, C \neq 0$, são constantes arbitrárias e $\beta > 0$ ($\neq 1$) é um parâmetro.

O seguinte conjunto de equações é também uma solução trivial.

$$h(x) = Bx, \quad f(x): \text{arbitrário}, \quad g(x) = Dx, \quad e$$

$$k(x) = Bx - Dx f(x). \quad (3.3.3)$$

Demonstração

Através de uma seqüência de lemas demonstraremos o teorema.

Lema (3.3.1)

Para X fixo, $X \in \Delta_n$, se $A_X(t) = \sum_{i=1}^n h(x_i, t) - \sum_{i=1}^n f(x_i) g(t)$, para $t \in [0,1]$, então $A_X(y+u) = A_X(y) + A_X(u)$ para $y, u, y+u \in [0,1]$

Prova:

Substituindo $Y = (y, u, 1 - y - u) \in \Delta_3$ e

$Y = (y+u, 1 - y - u) \in \Delta_2$ em (3.1.2) obtemos, respectivamente,

$$\sum_{i=1}^n \{h(x_i, y) + h(x_i, u) + h[x_i, (1 - y - u)]\} = \sum_{i=1}^n f(x_i) [g(y) + g(u) + g(1 - y - u)] + \sum_{i=1}^n k(x_i) \quad (3.3.4)$$

$$\sum_{i=1}^n \{h[x_i, (y+u)] + h[x_i, (1 - y - u)]\} = \sum_{i=1}^n f(x_i) [g(y+u) + g(1 - y - u)] + \sum_{i=1}^n k(x_i) \quad (3.3.5)$$

Subtraindo (3.3.5) de (3.3.4) obtemos

$$\sum_{i=1}^n \{h(x_i, y) + h(x_i, u) - h[x_i, (y+u)]\} = \sum_{i=1}^n f(x_i) [g(y) + g(u) - g(y+u)] \quad (3.3.6)$$

Definamos para $X \in \Delta_n$, $n = 2, 3, \dots$

$$A_X(t) = \sum_{i=1}^n h(x_i, t) - \sum_{i=1}^n f(x_i) g(t), \quad t \in [0, 1] \quad (3.3.7)$$

Concluimos de (3.3.7) e (3.3.6) que $A_X(\cdot)$ é uma função aditiva, isto é, $A_X(y + u) = A_X(y) + A_X(u)$ (3.3.8)

para $y, u, y + u \in [0, 1]$ e $X \in \Delta_n$

Pelo lema (3.2.2) temos que se $A_X(\cdot)$ é uma função aditiva, veja expressão (3.3.8), então $A_X(t) = t A_X(1)$, $t \in [0, 1]$ (3.3.9)

Lema (3.3.2)

Para $X \in \Delta_n$, $n = 2, 3, \dots$, e $t \in [0, 1]$

então

$$\sum_{i=1}^n h(x_i, t) - \sum_{i=1}^n f(x_i) g(t) = t \sum_{i=1}^n k(x_i)$$

Prova:

Substituindo $Y = (1, 0)$ e $Y = (1, 0, 0)$ em (3.1.2) obtemos, respectivamente,

$$\sum_{i=1}^n h(x_i) + nh(0) = \sum_{i=1}^n f(x_i) [g(1) + g(0)] + \sum_{i=1}^n k(x_i) \quad (3.3.10)$$

$$\sum_{i=1}^n h(x_i) + 2nh(0) = \sum_{i=1}^n f(x_i) [g(1) + 2g(0)] + \sum_{i=1}^n k(x_i) \quad (3.3.11)$$

Subtraindo (3.3.10) de (3.3.11) obtemos $nh(0) = \sum_{i=1}^n f(x_i) g(0)$ (3.3.12)

Usando (3.3.12) e (3.3.10) temos

$$\sum_{i=1}^n h(x_i) = \sum_{i=1}^n f(x_i) g(1) + \sum_{i=1}^n k(x_i) \quad (3.3.13)$$

$$\text{De (3.3.7) obtemos } A_X(1) = \sum_{i=1}^n h(x_i) - \sum_{i=1}^n f(x_i) g(1) \quad (3.3.14)$$

Usando (3.3.13), (3.3.14) e (3.3.9) temos

$$\sum_{i=1}^n h(x_i, t) - \sum_{i=1}^n f(x_i) g(t) = t \sum_{i=1}^n k(x_i) \quad (3.3.15)$$

para $X \in \Delta_n$, $n = 2, 3, \dots$, e $t \in [0, 1]$.

Lema (3.3.3)

Para t fixo, $t \in [0, 1]$

se $B_t(w) = h(wt) - f(w) g(t) - t k(w)$

para $w \in [0, 1]$

então

$B_t(x + v) = B_t(x) + B_t(v)$, para $x, v, x + v \in [0, 1]$

Prova:

Substituindo $X = (x, v, 1 - x - v) \in \Delta_3$ e

$X = (x + v, 1 - x - v) \in \Delta_2$ em (3.3.15) temos, respectivamente,

$$\begin{aligned} h(xt) + h(vt) + h[(1 - x - v)t] - [f(x) + f(v) + f(1 - x - v)]g(t) \\ = t[k(x) + k(v) + k(1 - x - v)] \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

$$\begin{aligned}
 h[(x+v)t] + h[(1-x-v)t] - [f(x+v) + f(1-x-v)]g(t) &= \\
 &= t [k(x+v) + k(1-x-v)] \quad (3.3.17)
 \end{aligned}$$

Subtraindo (3.3.17) de (3.3.16) obtemos

$$\begin{aligned}
 h(xt) + h(vt) - h[(x+v)t] &= [f(x) + f(v) - f(x+v)]g(t) + \\
 &+ t [k(x) + k(v) - k(1-x-v)]. \quad (3.3.18)
 \end{aligned}$$

Definamos, para t fixo, $t \in [0,1]$,

$$B_t(w) = h(wt) - f(w)g(t) - t k(w) \quad (3.3.19)$$

para $w \in [0,1]$

Usando (3.3.19) então (3.3.18) torna-se

$$B_t(x+v) = B_t(x) + B_t(v), \text{ para } x, v, x+v \in [0,1] \quad (3.3.20)$$

Usando novamente o resultado de Daroczy e Lo-
sanczi [5], lema (3.3.2), temos

$$B_t(x) = x B_t(1), \quad x, t \in [0,1] \quad (3.3.21)$$

Lema (3.3.4)

Sejam $h_1(x) = h(x)/x$, $f_1(x) = f(x)/x$

$g_1(t) = g(t)/t$, $k_1(x) = k(x)/x$

para $x, t \in (0,1]$

Então

$$h_1(x,t) = f_2(x) h_1(t) + k_2(x); \quad x, t \in (0,1]$$

onde $f_2(x) = f_1(x)/f_1(1)$, $f_1(1) \neq 0$

e

$$k_2(x) = k_1(x) - f_2(x) k_1(1)$$

Prova:

Pelo lema (3.3.2) temos

$$\sum_{i=1}^n h(x_i, t) - \sum_{i=1}^n f(x_i) g(t) = t \sum_{i=1}^n k(x_i) \quad (3.3.22)$$

$$X = (x_1, \dots, x_n) \in \Delta_n, \quad n = 2, 3, \dots, \quad \text{e } t \in [0,1]$$

$$\text{Substituindo } X = (1,0) \text{ e } X = (1,0,0) \text{ em } \quad (3.3.23)$$

obtemos, respectivamente, as seguintes relações

$$h(t) + h(0) - f(1) g(t) - f(0) g(t) = t[k(1) + k(0)] \quad (3.3.23)$$

$$h(t) + 2h(0) - f(1) g(t) - 2f(0) g(t) = t[k(1) + 2k(0)] \quad (3.3.24)$$

Subtraindo (3.3.23) de (3.3.24) temos

$$h(0) - f(0) g(t) = tk(0) \quad (3.3.25)$$

Substituindo (3.3.25) em (3.3.23) temos

$$h(t) = f(1) g(t) + tk(1) \quad (3.3.26)$$

Segue de (3.3.19) que

$$B_t(1) = h(t) - f(1) g(t) - tk(1), \quad t \in [0,1] \quad (3.3.27)$$

Concluimos de (3.3.27) e (3.3.26) que

$$B_t(1) = 0, t \in [0,1] \quad (3.3.28)$$

De (3.3.28) e (3.3.21) temos que

$$B_t(x) = 0, x, t \in [0,1] \quad (3.3.29)$$

Usando (3.3.29) e (3.3.19) vemos que:

$$h(xt) = f(x)g(t) + tk(x), \text{ para } x, t \in [0,1] \quad (3.3.30)$$

Dividindo (3.3.30) por xt ($xt \neq 0$) e depois fazendo

$$\begin{aligned} h_1(x) &= h(x)/x, f_1(x) = f(x)/x \\ g_1(t) &= g(t)/t, k_1(x) = k(x)/x, \end{aligned} \quad (3.3.31)$$

então temos

$$h_1(xt) = f_1(x)g_1(t) + k_1(x); x, t \in (0,1] \quad (3.3.32)$$

Pondo primeiramente $x = 1$; e depois $x = 1$ e $t = 1$ em (3.3.32) temos

$$\begin{aligned} h_1(t) &= f_1(1)g_1(t) + k_1(1) \\ h_1(1) &= f_1(1)g_1(1) + k_1(1) \end{aligned} \quad (3.3.33)$$

Se $f_1(1) = 0$, então por (3.3.33) temos

$$h_1(t) = h_1(1) \text{ ou } h(t) - th_1(1) = At, \quad (3.3.34)$$

$$\text{onde } A = h_1(1) = h(1)$$

neste caso h é uma função linear e homogênea.

Agora suponhamos que $f_1(1) \neq 0$. Então de (3.3.33)

temos

$$g_1(t) = \frac{h_1(t)}{f_1(1)} - \frac{k_1(1)}{f_1(1)} \quad (3.3.35)$$

Usando (3.3.35) e (3.3.32) obtemos

$$h_1(xt) = \frac{f_1(x)}{f_1(1)} h_1(t) + k_1(x) - \frac{f_1(x)}{f_1(1)} k_1(1) \quad (3.3.36)$$

Definamos $f_2(x) = f_1(x)/f_1(1)$,

$$k_2(x) = k_1(x) - f_2(x) k_1(1), \quad x \in (0,1] \quad (3.3.38)$$

Então (3.3.36) torna-se $h_1(xt) = f_2(x) h_1(t) + k_2(x)$, (3.3.37)

$x, t \in (0,1]$.

Continuando com a demonstração do teorema

Sendo f, g, h, k funções mensuráveis temos que h_1, f_2 e k_2 também serão mensuráveis.

A solução mensurável de (3.3.37) com h_1, f_2, k_2 mensuráveis é dada por (veja [1]):

$$h_1(x) = h_0(x) + \alpha; \quad f_2(x) = 1; \quad k_2(x) = h_0(x) \quad (3.3.38)$$

e

$$h_1(x) = \gamma e^{h_0(x)} + \alpha; \quad f_2(x) = e^{h_0(x)}, \quad k_2(x) = \alpha (1 - e^{h_0(x)}) \quad (3.3.39)$$

Além da solução trivial

$$h_1(x) = \alpha, \quad f_2(x): \text{arbitrário}, \quad k_2(x) = \alpha [1 - f_2(x)] \quad (3.3.40)$$

onde $\gamma \neq 0$ e α são constantes arbitrárias e h_0 é uma solução mensurável arbitrária da equação.

$$h_0(xt) = h_0(x) + h_0(t) \quad (3.3.41)$$

Mas a solução mensurável de (3.3.41) é dada por

$$h_0(x) = A \log x, \quad x \in (0,1] \quad (3.3.42)$$

onde A é uma constante arbitrária.

Assim as soluções (3.3.38), (3.3.39) e (3.3.40) juntamente com as equações (3.3.37), (3.3.32) e a função (3.3.42) nos darão o conjunto de soluções pretendido para a equação (3.1.2) quando $x, t \in (0,1]$.

Como $0^\alpha = 0$ ($\alpha > 0$) e $0 \log 0 = 0$ (parágrafo 1.1), para $t = 0$ e/ou $x = 0$, os conjuntos de equações (3.3.1), (3.3.2) e (3.3.3) satisfazem (3.3.30) e conseqüentemente são soluções de (3.1.2). Concluindo assim a demonstração do teorema.

3.4 - Aplicações

Nesta seção caracterizamos as medidas de informação (1.1.6), (1.1.7) (1.1.8), (1.1.2) e (1.1.4) através de uma aplicação das equações funcionais (3.1.1) e (3.1.2) sob condições apropriadas.

Seja X uma variável aleatória discreta assumindo valores finitos nos eventos E_1, E_2, \dots, E_n com distribuições de probabilidade.

$$P = (p_1, \dots, p_n), \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

E seja $\Delta_n = \{(p_1, \dots, p_n) : p_i \geq 0 \text{ para } i = 1, 2, \dots, n$

$$\left. \sum_{i=1}^n p_i = 1 \right\} \text{ para } n \geq 1$$

sendo o conjunto de n-uplas distribuições de probabilidades.

Se $H_n(P)$ pode ser escrito na forma

$$H_n(P) = \sum_{i=1}^n h(p_i), \quad (3.4.1)$$

onde h é uma função real mensurável, $P \in \Delta_n$, dizemos que a entropia $H_n(P)$ possui Propriedade da soma.

No teorema seguinte as soluções da equação funcional (3.1.1) fornecerão uma caracterização elegante de algumas entropias.

Teorema (3.4.1). Se $H(P)$ em Δ_n , $n \geq 1$, satisfaz às seguintes propriedades:

a) Propriedade da soma (3.4.1), onde h é solução real mensurável da equação funcional (3.1.1).

$$b) h\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \quad (3.4.2)$$

Então $H(P)$ é dada por uma das seguintes entropias.

$$H_1^\alpha(P) = -2^{\alpha-1} \sum_{i=1}^n p_i^\alpha \log p_i, \quad \alpha > 0 \quad (3.4.3)$$

$$H^{(\alpha, \beta)}(P) = (2^{1-\alpha} - 2^{1-\beta})^{-1} \left[\sum_{i=1}^n (p_i^\alpha - p_i^\beta) \right], \quad (3.4.4)$$

$$\alpha \neq \beta, \quad \alpha, \beta > 0.$$

$$H_S^{(\alpha, \beta)}(P) = \frac{-2^{\alpha-1}}{\text{sen } \beta} \sum_{i=1}^n p_i^\alpha \text{sen } (\beta \log p_i) \quad (3.4.5)$$

$$\beta \neq 0, \quad \alpha > 0.$$

Prova:

Se nas equações (3.2.1), (3.2.2) e (3.3.3), soluções da equação (3.1.1), impusermos respectivamente a condição $h\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, obteremos respectivamente.

$$A = -2^{\alpha-1} \quad (3.4.6)$$

$$B = (2^{1-\alpha} - 2^{1-\beta}) \quad (3.4.7)$$

$$C = -\frac{\text{sen } \beta}{2^{\alpha-1}} \quad (3.4.8)$$

Usando a propriedade da soma (3.4.1) e as equações (3.2.1), (3.2.2) e (3.2.3) sob as condições (3.4.6), (3.4.7) e (3.4.8).

Temos, respectivamente, as entropias

$H_1^\alpha(P)$, $H_n^{(\alpha, \beta)}(P)$ e $H_S^{(\alpha, \beta)}(P)$. Como queríamos demonstrar no teorema.

No seguinte teorema usaremos a equação funcional (3.1.2) para caracterizar as entropias (1.1.2) e (1.1.4).

Teorema (3.4.2). A entropia da distribuição de probabilidade $P \in \Delta_n$ satisfazendo a propriedade da soma (3.4.1), e onde $h(p)$ é solução real mensurável de (3.1.2) sob as condições

$h(1) = h(0)$ e $h(1/2) = 1/2$, são dadas respectivamente por:

$$H_n(P) = - \sum_{i=1}^n p_i \log p_i, \quad P \in \Delta_n \quad (3.4.9)$$

$$H_n^\beta(P) = (2^{1-\beta} - 1)^{-1} \left[\sum_{i=1}^n p_i^\beta - 1 \right], \quad (3.4.10)$$

$$\beta \neq 1, \quad \beta > 0$$

Prova:

Fazendo $x = 0$ em (3.3.1) e (3.3.2), respectivamente, temos $h(0) = h(1) = 0$. Usando $h(1/2) = 1/2$ em ambas as equações a constante A torna-se respectivamente -1 e $(2^{1-\beta} - 1)^{-1}$.

Agora, utilizando a propriedade da soma (3.4.1) e as equações (3.3.1) e (3.3.2) sob as condições ($A = -1$) e $A = (2^{1-\beta} - 1)^{-1}$, temos as entropias (3.4.9) e (3.4.10). Como queremos demonstrar.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 01 - ACZÉL, J. (1966). Lectures on Functional Equations and their Applications. Academic Press, New York.
- 02 - ACZÉL, J. e Daroczy, Z. (1975). On Measures of Information and their Characterizations. Academic Press, New York.
- 03 - BEHARA, M. e Nath, P. (1973). Additive and Non-Additive Entropies of Finite Measurable Partitions. Lecture Notes in Mathematics, no. 296, Springer - Verlag. 102-138.
- 04 - CHAUNDY, T.W. e McLeod, J.B. (1960). On A Functional Equation. Proc. Edin. Math. Notes, 43, 7-8.
- 05 - DAROCZY, Z. e Losanczi, L. (1967). Über die Erweiterung der auf einer Punktmenge Additive Funktionen. Publ. Math. Debrecen 14, 239-245.
- 06 - HAVRDA, J. e Charvat, F. (1967). Quantification Method of Classification Processes. The Concept of structural entropy, Kybernetika, 3, 30-35.
- 07 - MATHAI, A.M. e Rathie, P.N. (1975). Basic Concepts in Information Theory and Statistics: Axiomatic Foundations and Applications. Wiley, New York.
- 08 - MITTAL, D.P. (1976). On Continuous Solutions of A Functional Equation. Metrika, 22, 31-46.

- 09 - SHENG, Lilian Torng. Equações Funcionais e Fundamento Axiomático das Medidas de Informação - Tese Doutorado - UNICAMP, CAMPINAS, S.P. (1980).
- 10 - RENYI, A. (1960). On Measures of Entropy and Information. Proc. Forsth Berleley Symp. Math Statist. Probability, 1, 547-561.
- 11 - SHANNON, C.E. (1948). A Mathematical Theory of Communication. Bell System Tech. J. 27, 379-423, 623-656.
- 12 - SHARMA, B.D. e TANEJA, I.J. (1977). Three Generalized - Additive Measures of Entropy. EIK 13 7/8, 419-433.
- 13 - TANEJA, I.J. (1975). A Joint Characterization of Shannons' entropy and entropy of type β through a functional equation, Journal of Mathematical Sciences, 10, 69-74.
- 14 - TANEJA, I.J. (1979). Some Contributions to Information Theory - I. (A Survey: On Measures of Information), J. Comb. Inform. System Sci, Vol.4, 253-274.
- 15 - ZATELLI, A. Entropia Paramétrica Generalizada e a probabilidade de Erro - Tese Mestrado - UFSC, Florianópolis-SC.