UNIVERSIDADE FEDERAL de SANTA CATARINA

CARACTERIZAÇÃO das PROBABILIDADES como DERIVADAS no SENTIDO de SCHWARTZ de FUNÇÕES de DISTRIBUIÇÃO

por

Ivan Barros Santos

Florianópolis

outubro de 1982

Esta Tese foi julgada adequada para a obtenção de título de

"MESTRE EM CIENCIAS"

Especialidade em Matemática, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina.

Prof. Inder Jeet Taneja, Ph.D.
Coordenador

Prof. Tarcísio Praciano Pereira, Ph.D.
Orientador

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Almir Joaquim de Sousa, Ph.D.

Prof. Inder Jeet Taneja, Ph.D.

Agradecimentos

Sinto-me na obrigação de registrar os meus agradecimentos a todos os colegas, funcionários e professores que direta ou indiretamente, concorreram para a efetivação deste trabalho.

À Tarcísio Praciano Pereira, também cooperador deste êxito como orientador, o meu mais profundo reconhecimento.

À minha esposa:

Olimpia

Ao meu pai:

Josaphat

Abstract

We show in the chapter 2 subjects that adjust an additional preparation to a wide revision of the themes that will be boarded in the following chapters. We begin with some basic concepts of vectorial spaces of functions, through which we try to delineate a logical fundamentation of linear functional (continuous), classifying them as finite mesurement of the dual $C_c(R)$. In the chapter 3, we show a derivative process in the sense of Schwartz that generalize the common derivative. At last, we have in the chapter 4, the conclusion of the results obteined in the previous chapters, by the theorem of measure probabilities, as derivatives of their distributing functions.

Resumo

Focalizamos no capítulo 2, assuntos que incluem uma preparação suplementar, proporcionando uma revisão ampla dos temas a serem tratados nos capítulos seguintes. Começamos com alguns conceitos básicos de espaços vetoriais de funções, pelos quais procuramos delinear uma fundamentação lógica de funcionais lineares (contínuos), conceituando-os como medidas finitas do dual de $C_c(R)$. No capítulo 3, mostramos um processo de derivação no sentido de Schwartz que generaliza a derivada usual do cálculo. Finalmente, deparamo-nos com o capítulo 4, que vem encerrar os resultados obtidos nos capítulos anteriores, através do teorema que trata de medida de probabilidades, como derivadas de funções de distribuição.

Índice

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Os tópicos abordados no presente trabalho iniciam-se com enunciados claros das definições, princípios e proposições a ele pertinentes, acompanhados de material ilustrativo e descritivo. Consequentemente, para a sua melhor assimilação, dividimo-lo em três capítulos que consideramos essenciais.

O capítulo 2, encerra a esquematização básica da teoria que será desenvolvida, motivo pelo qual consideramos sua leitura indispensável, mesmo àqueles experientes em análise e com conceitos topológicos. Sob o título "Dualidade em Espaços de Funções", dividimo-lo em cinco parágrafos, sendo o primeiro deles reservado aos espaços vetoriais, especificamente aqueles que são do nosso real interesse, ou sejam, os espaços vetoriais de funções; nos dois parágrafos subsequentes, conceituamos "Dual Algébrico" e "Dual Topológico". No parágrafo 4, que trata de "Espaço Vetorial Topológico", identifica-se uma certa deficiência, uma vez que não garantimos a continuidade dos nossos funcionais. Contudo, no último parágrafo, tentamos suprir essa lacuna, atrvés da construção da topologia compacto-aberta que é a adequada para integrais como funcionais lineares. Enfim, concentram-se no capítulo em referência, os pre-requisitos básicos para a leitura dos capítulos subsequentes.

Dando continuidade apresentamos o capítulo 3 ("Derivação no Sentido de Schwartz"), onde justificamos nosso trabalho temporário com o espaço $C_c^1(R)$, ao invés de $C_c(R)$ e também enfatizamos a extensão do processo de derivação que generaliza a derivada usual do cálculo, cujo método consiste no processo de derivação no sentido de Schwartz, nascido nos primeiros trabalhos envolvendo o conceito de funções generalizadas que finalmente "Laurent Schwartz" conseguiu englobar em sua teoria das distribuições. Enriquecemos o capítulo com um importante exemplo que levou os físicos a cometerem, na década passada, um grave erro do qual decorreu uma nova teoria matemática, a "Teoria das Distribuições".

Reservamos para o último capítulo, o tema principal que defendemos, qual seja, a "Caracterização das Probabilidades como Derivadas no Sentido de Schwartz de Funções de Distribuição". Esse capítulo vem encerrar o trabalho e ao mesmo tempo justificar a elaboração de toda uma teoria que serviu como suporte para chegarmos a uma conclusão final. Apresentamos, inicialmente, as definições de medida de probabilidade e função de distribuição e em seguida, enunciamos uma proposição a qual nos garante que a cada medida de probabilidade determina uma função de distribuição, destacando sua necessidade como base para a introdução do teorema que trata de medida de probabilidade como derivadas de suas funções de distribuição.

Concluímos o trabalho, ressaltando que toda a teoria esboçada no capítulo final, desenrola-se em torno do referido teorema.

Capítulo 2

DUALIDADE EM ESPAÇOS DE FUNÇÕES

§ 1. Espaços Vetoriais de Funções

Se considerarmos o conjunto de todas as funções reais definidas num intervalo ou mesmo num conjunto, teremos um espaço vetorial, como se verifica de imediato.

Estudaremos aqui o conjunto de todas as funções contínuas em R à suporte compacto o qual denotaremos por $C_c(R)$.

Observe que $C_c(R)$ é um espaço vetorial e isto é devido a dois fatos, ou sejam:

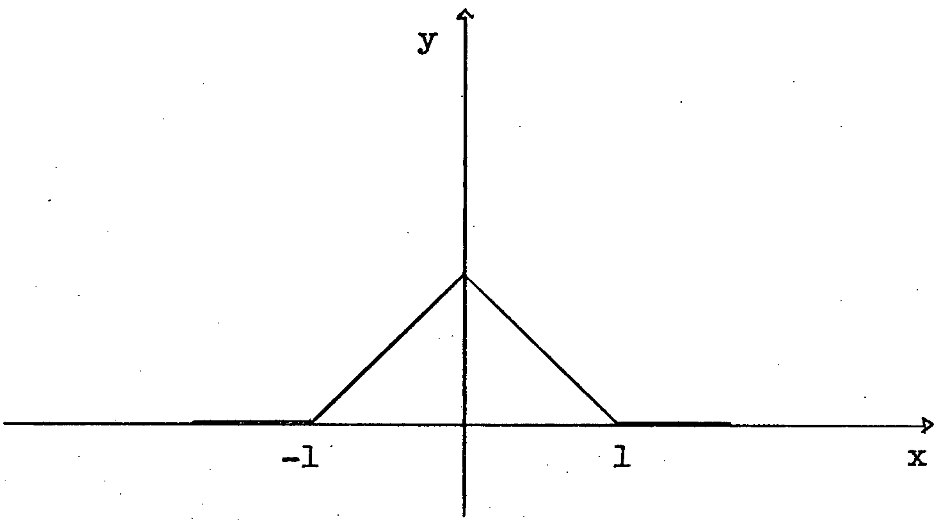
(i) o supp(f+g) está contido na união do supp(f) e do supp(g), e a união finita de conjuntos compactos é compacta;

(ii) a soma de duas funções contínuas ainda é contínua como o é a multiplicação escalar de funções contínuas.

A seguir, daremos alguns exemplos que mostram que o espaço $C_c(R)$ é não-vazio.

(1.1) EXEMPLO: Seja f uma função definida por

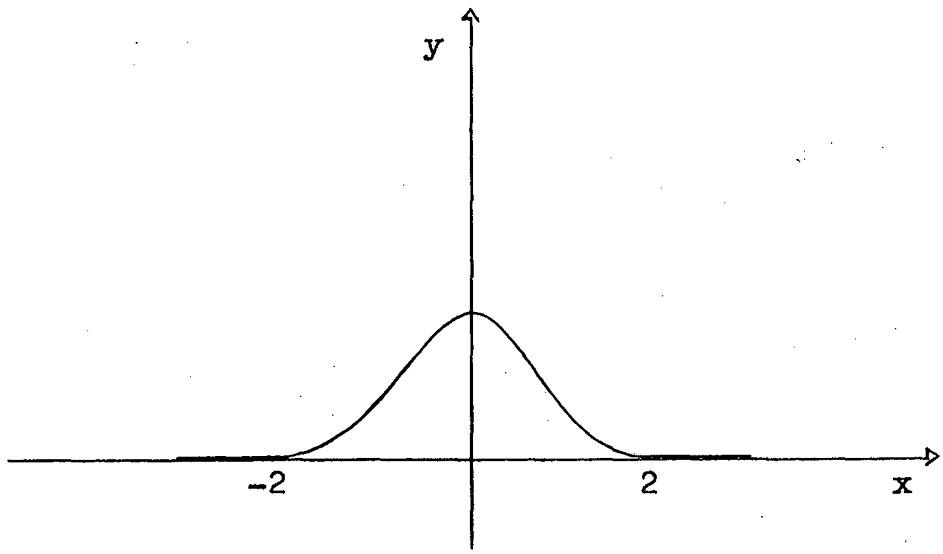
$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & -1 < x < 0 \\ -x + 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 1 \end{cases}$$



onde $\int f(x)\, dx = 1$ (integral à Riemann).

(1.2) EXEMPLO: Seja f uma função definida por

$$f(x) = \begin{cases} (x + 2)^2, & -2 < x < -1 \\ -x^2 + 2, & -1 < x < 1 \\ (x - 2)^2, & 1 < x < 2 \\ 0, & x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant 2 \end{cases}$$



a área sob a curva acima será

$$\int f(x)\,dx = 4 \qquad \text{(integral à Riemann).}$$

Porém, se multiplicarmos a função f pela constante $\frac{1}{4}$, teremos

$g = \frac{1}{4} f$ e assim

$$\int g(x)\,dx = 1 \qquad \text{(integral à Riemann).}$$

Com isto obtemos uma função $g \in C_c(R)$, cujo suporte é $[-2\ ,\ 2]$ e a área é igual a 1. Tais funções recebem o nome de impulso.

Elucidaremos a nossa teoria com mais um exemplo de espaço vetorial de funções.

(1.3) EXEMPLO: Considere o espaço formado por todas as funções contínuas em R denotado por $C(R)$. É fácil ver que $C(R)$ é um espaço vetorial de funções, pois se tomarmos duas funções quaisquer em $C(R)$ e um escalar em R a soma e a multiplicação escalar são fechadas em $C(R)$.

§ 2. Dual Algébrico - Funcionais Lineares

Neste parágrafo, trataremos de funcionais lineares num contexto puramente abstrato para depois atingir o nosso objetivo, ou seja, construir toda uma teoria sobre o espaço dual de $C_c(R)$. A seguir, conceituaremos medidas finitas como elementos do dual de $C_c(R)$.

(2.1) DEFINIÇÃO: Um funcional linear é uma transformação linear de um espaço vetorial sobre o corpo.

(2.2) DEFINIÇÃO: O conjunto de todos os funcionais lineares definidos num espaço vetorial será denominado espaço dual.

A partir de agora iremos chamar os elementos pertencentes a $C_c(R)$ de funções teste, portanto $C_c(R)$ é um espaço de funções teste. O motivo pelo qual necessitamos de $f \in C_c(R)$ é para explicitar o funcional ϕ que deve ser aplicado em alguma função teste.

Usaremos também a notação $<\phi , f>$ em vez de

$$\int f \ \phi \ dx,$$

pois nem sempre um funcional pode ser representado por integral [(1.8) cap. 3 pag.31].

Agora, considere o espaço dual de $C_c(R)$ o qual vamos denotar por $C_c^*(R)$. Observe que os elementos de $C_c^*(R)$ são funcionais lineares. Com efeito, seja

$$C_c(R) \xrightarrow{<\phi\ ,\ \ >} R$$
$$f \longrightarrow <\phi\ ,\ f>$$

a notação acima é um funcional linear sobre o espaço $C_c(R)$.

(2.3) EXEMPLO: Sejam $f \in C_c(R)$ e μ uma medida então a aplicação

$$C_c(R) \xrightarrow{<\mu\ ,\ \ >} R$$
$$f \longrightarrow <\mu\ ,\ f> = \int_R f\ d\mu$$

(integral à Lebesgue)

define um funcional linear em $C_c(R)$.

Similarmente, dada uma função integrável g, vê-se também que

$$C_c(R) \xrightarrow{<g\, d\mu\ ,\ >} R$$
$$f \rightsquigarrow <g\, d\mu\ ,\ f> = \int_R fg\, d\mu$$

(integral à Lebesgue-Stieltjes)

define um funcional linear em $C_c(R)$.

Agora, considere o exemplo (1.3), ou seja;

(i) $C(R)$ é um espaço vetorial, onde definiremos

$$C(R) \xrightarrow{<\phi_{a,b}\ ,\ >} R$$
$$f \rightsquigarrow <\phi_{a,b}\ ,\ f> = \int_a^b f\, dx$$

(integral à Riemann)

é um funcional linear dados "a" e "b" fixos;

(ii) Por outro lado, se $a = -\infty$ e $b = \infty$, então define um funcional linear em $C_c(R)$.

Similarmente, dada uma função integrável g, vê-se também que

$$C_c(R) \xrightarrow{<g\, d\mu\ ,\ >} R$$
$$f \rightsquigarrow <g\, d\mu\ ,\ f> = \int_R fg\, d\mu$$

(integral à Lebesgue-Stieltjes)

define um funcional linear em $C_c(R)$.

Agora, considere o exemplo (1.3), ou seja;

(i) $C(R)$ é um espaço vetorial, onde definiremos

$$C(R) \xrightarrow{<\phi_{a,b}\ ,\ >} R$$
$$f \rightsquigarrow <\phi_{a,b}\ ,\ f> = \int_a^b f\, dx$$

(integral à Riemann)

é um funcional linear dados "a" e "b" fixos;

(ii) Por outro lado, se $a = -\infty$ e $b = \infty$, então

$$C(R) \xrightarrow{<\phi_{-\infty,\ \infty},\ >} R$$

$$f \longrightarrow <\phi_{-\infty,\infty}, f> = \int_{-\infty}^{\infty} f\, dx$$

(integral Cauchy-Riemann)

é ainda um funcional linear, porém existe $f \in C_c(R)$ tal que

$$<\phi_{-\infty,\infty}, f> = \infty.$$

Logo, esse funcional não será contínuo.

OBSERVAÇÃO: Sendo o espaço de funções teste $C_c(R)$, essa anomalia não se poderia observar.

(2.4) TEOREMA de RIESZ: Seja ϕ um funcional linear positivo contínuo em $C_c(R)$, então existe uma única medida positiva finita μ que representa ϕ tal que

$$<\phi, f> = \int_R f\, d\mu, \text{ para todo } f \in C_c(R).$$

DEMONSTRAÇÃO: ([2] pag. 42).

§ 3. Dual Topológico-Funcionais Lineares Contínuos

No parágrafo 2, fizemos um estudo sobre funcionais lineares sem no entanto esclarecer o que aconteceria se esses funcionais lineares fossem contínuos. Na verdade a única coisa a acrescentar, era que teríamos um espaço vetorial topológico.

(3.1) DEFINIÇÃO: Chamaremos de dual topológico ao conjunto dos funcionais lineares contínuos, isto é;

(i) $\langle \phi , cf_1 + f_2 \rangle = c \langle \phi , f_1 \rangle + \langle \phi , f_2 \rangle$

para todo $f_1, f_2 \in C_c(R)$ e $c \in R$;

(ii) ϕ é contínuo na origem;

(iii) ϕ é sequencialmente contínuo na origem, ou seja,

$$f_n \longrightarrow 0 \qquad\qquad \langle \phi , f \rangle \longrightarrow 0$$

como consequência de (ii).

(3.2) OBSERVAÇÃO: O conjunto de todos os funcionais lineares contínuos definidos no espaço vetorial $C_c(R)$ será denotado por $C'_c(R)$.

§ 4. Espaço Vetorial Topológico

(4.1) DEFINIÇÃO: Suponha que τ é uma topologia no espaço vetorial $C_c(R)$ tal que

(i) cada ponto de $C_c(R)$ é um conjunto fechado;

(ii) as operações de espaço vetorial são contínuas com respeito a τ.

Sob estas condições, τ é dita a ser uma topologia vetorial em $C_c(R)$, e $C_c(R)$ é um espaço vetorial topológico.

(4.2) DEFINIÇÃO: $(C_c(R),\tau)$ é um espaço de Hausdorff, e τ é uma topologia de Hausdorff, se pontos distintos de $C_c(R)$ tem vizinhanças disjuntas.

(4.3) <u>TEOREMA</u>: Todo espaço vetorial topológico é um espaço de Hausdorff.

DEMONSTRAÇÃO: ([4] pag. 10).

O espaço vetorial topológico $(C_c(R), \tau)$ é compatível com a estrutura de espaço vetorial definida abaixo

(4.4)
$$\begin{cases} C_c(R) \times C_c(R) \longrightarrow C_c(R) \\ (f, g) \rightsquigarrow f + g \end{cases}$$

(4.5)
$$\begin{cases} C_c(R) \times R \longrightarrow C_c(R) \\ (c\ f) \rightsquigarrow c\ f \end{cases}$$

Note que as aplicações acima são contínuas.

(4.6) <u>DEFINIÇÃO</u>: Um funcional ϕ é dito ser sequencialmente contínuo se

$$f_n \longrightarrow f \ , \quad \text{então} \quad \langle \phi , f_n \rangle \longrightarrow \langle \phi , f \rangle$$

Aqui não estaremos interessado em definir uma topologia em $C_c(R)$ e sim mostrar que alguns funcionais lineares em $C_c(R)$ definidos por

$$f \longrightarrow <\phi , f>$$

de $C_c(R)$ em R são sequencialmente contínuos.

Deixaremos bem claro que a teoria que será esboçada se tornará bastante fraca, pois não estaremos garantindo a continuidade dos funcionais em questão, porque sequencialmente contínuo não implica em continuidade. Todavia, no parágrafo 5 supriremos essa deficiência.

(4.7) PROPOSIÇÃO: Um funcional ϕ é sequencialmente contínuo em um ponto "a" qualquer do espaço se, e somente se, for sequencialmente contínuo na origem.

DEMONSTRAÇÃO:

(4.7.1) LEMA: Se ϕ é contínuo, então ϕ é sequencialmente contínuo.

demonstração: ([4] pag. 370).

(4.7.2) LEMA: Se ϕ é linear, então as duas seguintes propriedades de ϕ são implicações verdadeiras.

(i) ϕ é contínuo se, e somente se, for contínuo na origem;

(ii) ϕ é limitado.

demonstração: ([4] pag. 23).

Com o auxílio dos lemas acima, fica demonstrado a proposição.

Agora, conceituaremos continuidade através de convergência.

Considere uma sucessão de funções $(f_n)_n$ pertecente a $C_c(R)$, diremos que $(f_n)_n$ converge para zero em $C_c(R)$ se satisfizer as seguintes condições:

(4.8) $f_n \longrightarrow 0$ uniformemente;

(4.9) $\forall$ n, $\operatorname{supp}(f_n) \subset K$, onde K é um conjunto compacto que independe de n.

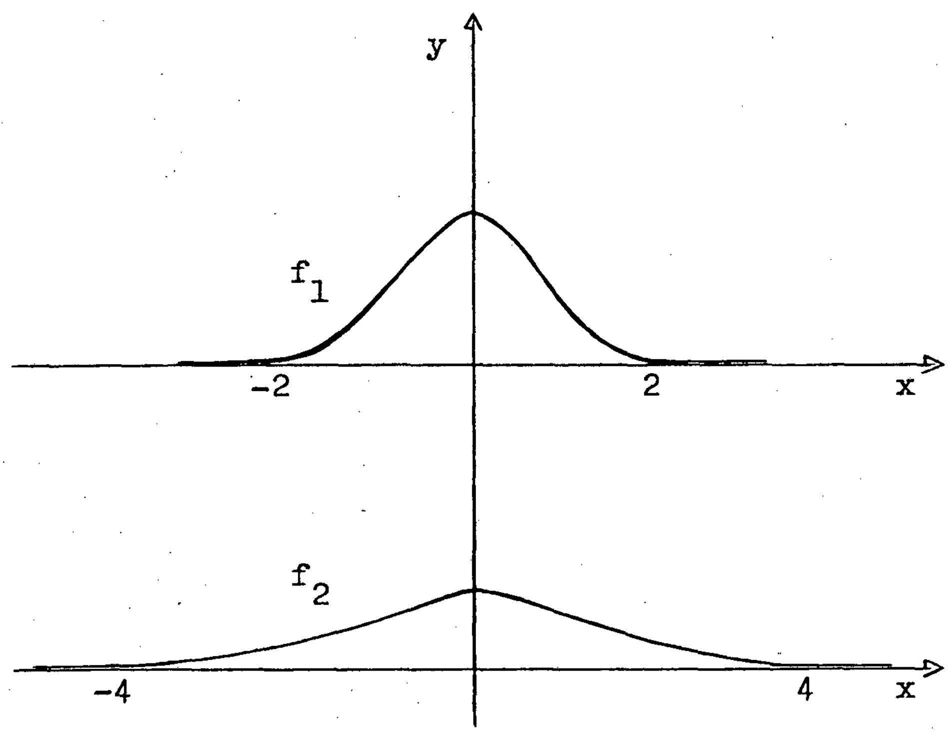
A condição (4.9) sobre o suporte contido em um conjunto compacto é necessária no conceito de convergência em virtude do contra-exemplo:

(4.10) <u>CONTRA-EXEMPLO</u>: Seja f como definida no exemplo (1.2) e considere a sucessão

$f_n(x) = \dfrac{1}{n}\, f_1(x)$, para $-2n \leqslant x \leqslant 2n$ com $n = 1,2,\ldots$

onde $f_1(x) = f(x)$ oomo definida em (1.2).

A figura abaixo é uma ilustração gráfica da sucessão $(f_n)_n$.



Observamos que quando $n \longrightarrow \infty$ a sucessão $f_n \longrightarrow 0$, mas para todo n

$$\int f_n = 1 \qquad \text{(integral à Riemann)}$$

daí concluímos que

$$\langle \int, f_n \rangle \not\longrightarrow 0 \ , \quad \text{pois} \quad \langle \int, f_n \rangle = 1.$$

O contra-exemplo que acabamos de ilustrar deixa claro o absurdo que chegamos, pois a integral no sentido de Riemann é descontínua. Porém, ao introduzirmos a condição (4.9) eliminamos exemplos do tipo anterior! Com a condição (4.9) já não mais $f_n \longrightarrow 0$.

Com a referida condição e graças a proposição (5.2) teremos necessariamente

$$f_n \longrightarrow 0 \Longrightarrow \int f_n \, d\mu \longrightarrow 0.$$

§ 5. <u>Construção de uma Topologia em</u> $C_c(R)$ <u>Topologia Compacto-Aberta</u>

No parágrafo 4, mostramos que alguns funcionais lineares em $C_c'(R)$ eram sequencialmente contínuos, no entanto a teoria desenvolvida tornou-se fraca, pois não garantimos a continuidade desses funcionais. Entretanto, salientamos que o processo utilizado naquele parágrafo, até certo ponto é válido, porque não sequencialmente contínuo implica em não continuidade. O objetivo desse parágrafo é justamente a construção da topologia compacto-aberta em $C_c(R)$ para cobrirmos a lacuna deixada anteriormente.

Construção da Topologia Compacto-Aberta

(5.1) OBSERVAÇÃO: Designaremos por $C(K)$ o conjunto de todas as funções contínuas no espaço compacto K e definimos

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)| , \quad f \in C(K).$$

(5.2) PROPOSIÇÃO: Se $f \in C(K)$, então

$$\left|\int_K f \, d\mu\right| \leqslant \int_K |f| \, d\mu \leqslant \mu(K) \, . \, \|f\|_\infty$$

$$= \mu(K) \, . \, \sup_{x \in K} |f(x)|$$

DEMONSTRAÇÃO: ([2] pag. 27).

Faremos a construção da nossa topologia tomando como base (4.4) e (4.5), pois é ali que se diz que a topologia está totalmente descrita pelas vizinhanças da origem.

Seja v_o a vizinhança na origem, isto é, a função nula.

Defina

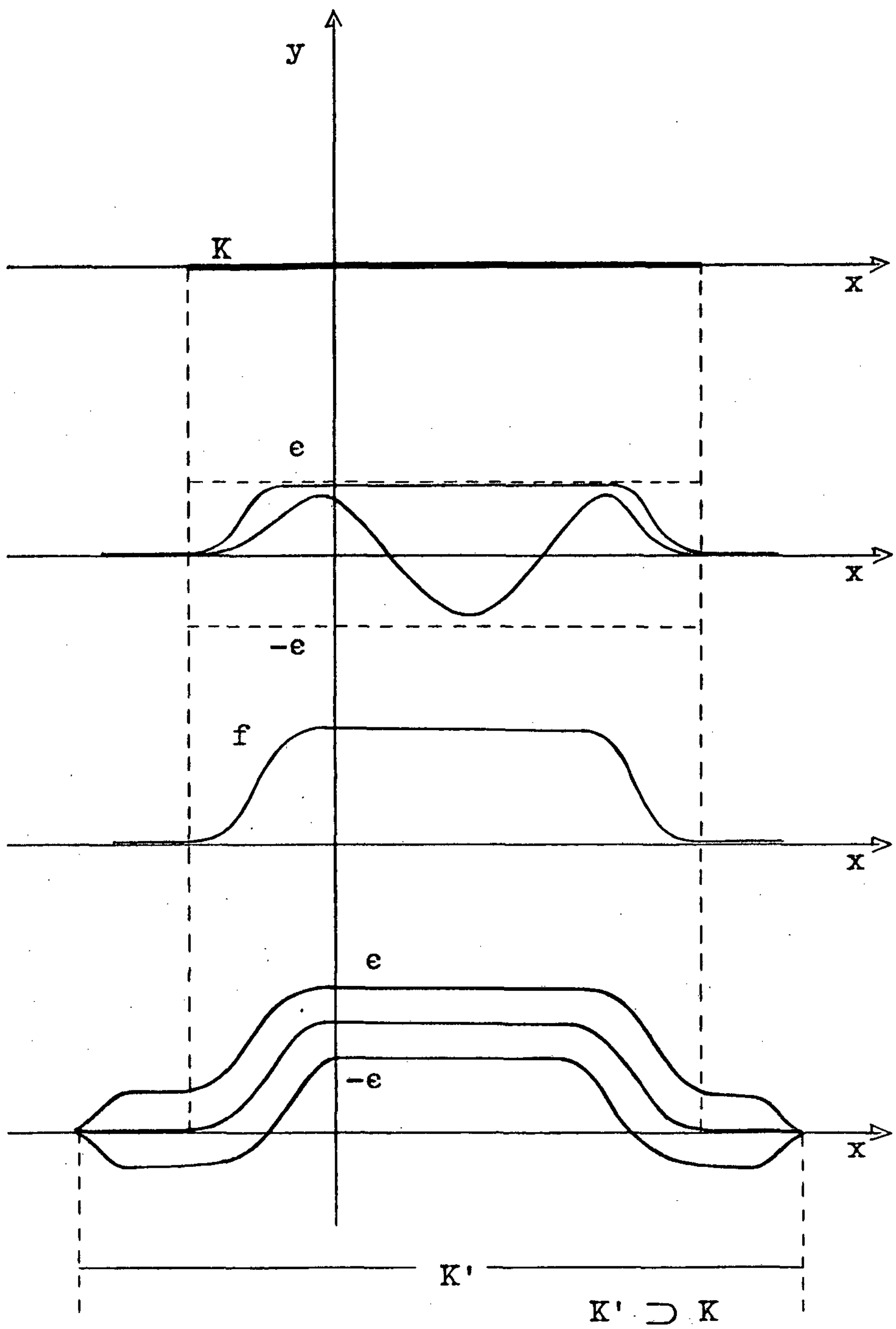
$$v_o(K,e) = \begin{cases} f; \quad supp(f) \subset K, \quad f \in K \\ \\ |f(x)| < e \end{cases}$$

onde K é um conjunto compacto e e é um número inteiro maior que zero.

A razão de impormos que o suporte de f esteja contido num conjunto compacto, decorre do contra - exemplo (4.10).

A seguir, daremos uma série de ilustrações gráficas para que o leitor possa compreender melhor a construção da nossa topologia.

(5.3)



(5.4)

$v_f(K,e)$ é o tubo de centro f no compacto K e raio e.

Na figura (5.3) temos um tubo de diâmetro e em torno da função f. Por outro lado, analisando (5.4) observamos que existe uma vizinhança de f definida por

$$v_f(K,e) = \begin{cases} g; & \text{supp}(g) \subset \text{supp}(f) \subset K \\ & \\ |f(x) - g(x)| < e & \end{cases}$$

e tal que

$$v_f(K,e) = v_o(K,e) + f.$$

Agora, temos que

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)| \leq e$$

e

$$\int_K |f| \, d\mu \leq \mu(K) \, . \sup_{x \in K} |f(x)|$$

Portanto, pela proposição (5.2) obtemos

$$|<\mu \, , \, f>| = |\int_K f \, d\mu| \leq \mu(K) \, . \, e,$$

isto é, integrais de funções pequenas são também pequenas.

Consequentemente, o funcional definido por uma medida μ

$$C_c(R) \xrightarrow{\mu} R$$

é contínuo. Logo,

$$\forall\, e > 0, \quad \exists\, \delta > 0 \quad \text{tal que}$$

$$f \in v_o \Longrightarrow |\langle \mu \, , \, f \rangle| < e$$

(continuidade na origem).

Vemos assim, que esta é a topologia adequada para lidar com integrais, uma vez que elas se tornam funcionais contínuos. Note que os funcionais lineares sequencialmente contínuos do parágrafo 4 são sequencialmente contínuos com respeito a esta topologia.

Capítulo 3

DERIVAÇÃO NO SENTIDO DE SCHWARTZ

§ 1. Uma Extensão do Processo de Derivação

No capítulo 2, desenvolvemos toda uma teoria sobre o espaço de funções teste $C_c(R)$, porém neste capítulo necessitamos de funções teste melhores, pois iremos trabalhar com uma extensão do processo de derivação e para isto precisaremos de funções teste uma vez deriváveis e com derivadas contínuas. A este espaço de funções teste, denotaremos por $C_c^1(R)$. A seguir, mostraremos um conceito de derivação que generaliza a derivada usual do cálculo, assim estaremos desenvolvendo um trabalho cujo método consiste do processo de derivação no sentido de Schwartz que surgiu nos primeiros trabalhos envolvendo funções generalizadas que depois de algum tempo foi englobada na "Teoria das Distribuições". [3]

(1.1) PROPOSIÇÃO: Como $C_c^1(R) \subset C_c(R)$, então $C_c^{1'}(R) \supset C'_c(R)$.

DEMONSTRAÇÃO: Considere $\phi \in C_c(R)$

$$\epsilon_c(R) \xrightarrow{\mu} R$$

Considere agora a inclusão

$$\begin{tikzcd} C_c^1(R) \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\phi o i"'] & C_c(R) \arrow[d, "\phi"] \\ & R \end{tikzcd}$$

Vemos assim que

$$\phi oi \in C_c^{1'}(R).$$

Pela inclusão $\phi oi = \phi$, então

$$\phi \in C_c^{1'}(R),$$

isto é,

$$\phi \in C'_c(R) \Longrightarrow \phi \in C_c^{1'}(R)$$

$$C'_c(R) \subset C_c^{1'}(R).$$

(1.2) TEOREMA: $C_c^{1'}(R) = C_c'(R)$.

DEMONSTRAÇÃO:

(1.2.1) LEMA: $C_c^1(R)$ é denso em $C_c(R)$ segundo a topologia construída no § 5. do capítulo 2.

demonstração: Seja $f \in C_c(R)$, então $\forall\, v \in v_o$ existe $g \in C_c^1(R)$ tal que

$$|f - g| \in v.$$

É o caso com $g = f * f_n$, onde f_n é uma unidade aproximada, o que mostra além do mais que C_c^∞ é denso em $C_c(R)$.

(1.2.2) LEMA: $\bar{X} = Y$, então $X' = Y'$.

demonstração: Pela demonstração de (1.1) temos

$$X' \supset Y'.$$

Agora, dado $\phi \in X'$, poderemos extende-lo a Y por continuidade. Logo,

$$X' \subset Y'.$$

Portanto, pelos lemas (1.2.1) e (1.2.2) o teorema está demonstrado.

O teorema (1.2) justifica a razão de trabalharmos temporariamente com o espaço $C_c^1(R)$ em vez de $C_c(R)$.

Agora, considere a fórmula abaixo que poderemos obter através de integração por partes

(1.3) $$\int_{-\infty}^{\infty} f\, dg = fg \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} g\, df$$

As funções que aparecem na fórmula acima são diferenciáveis e ambas as integrais são finitas se $f,g \in C_c'(R)$. Porém, precisamos garantir a validade da fórmula (1.3) e para isto procuraremos definir um espaço de funções, onde os elementos de (1.3) pertençam ao referido espaço. O espaço que iremos considerar será $C_c^1(R)$, isto é, o espaço das funções contínuas, uma vez deriváveis e com derivadas contínuas.

(1.4) PROPOSIÇÃO: Sejam $f \in C_c^1(R)$ e g uma função diferenciável, então o termo

$$fg \Big|_{-\infty}^{\infty}$$

em (1.3) será nulo.

DEMONSTRAÇÃO:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\, dg = \lim_{n \to \infty} \int_{-n}^{n} f(x)\, g'(x)\, dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\ dg = \lim_{n \to \infty} f(x)\ g(x)\Big|_{-n}^{n} - I,$$

onde $I = \int_{-n}^{n} g\ df.$

Seja $\phi(x) = f(x)\ g(x)$, como $f \in C_c^1(R)$ então $\exists\ n_o$ tal que $n > n_o$ e $f(x) \equiv 0$.

Portanto, $\phi(x) \equiv 0$.

Logo,

$$\lim_{n \to \infty} f(x)\ g(x)\Big|_{-n}^{n} = 0.$$

Observe que em (1.4) não é necessário a condição de diferenciabilidade para g.

Assim, pela proposição (1.4) a fórmula (1.3) poderá ser escrita como

(1.5) $$\int_{-\infty}^{\infty} f\ dg = - \int_{-\infty}^{\infty} g\ df \quad \text{(integral à Riemann)}$$

Observamos que o segundo membro de (1.5) não exige a condição de diferenciabilidade para g. Basta apenas que g seja integrável e assim estaremos definindo dg para um grande número de funções, ou sejam, as funções localmente integraveis no sentido de Riemann. Por outro lado, o primeiro membro de

(1.5) não poderá ser escrito na forma de integral, pois agora g é apenas integrável, portanto iremos reformular a nossa fórmula da seguinte maneira

$$(1.6) \qquad \langle dg \ , \ f\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} g \ df.$$

Aqui, dg representa um funcional linear definido no espaço das funções teste $C_c^1(R)$, isto é,

$$C_c^1(R) \xrightarrow{\langle dg\ ,\ \rangle} R$$

$$(dg \ , \ f) \longrightarrow \langle dg \ , \ f\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} g \ df$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \ f'(x) \ dx$$

(integral à Riemann-Stieltjes).

Lembramos que toda teoria que foi desenvolvida neste parágrafo com relação a uma extensão do processo de derivação é de fato a derivação no sentido de Schwartz que assim fica definida em (1.6).

Portanto, temos uma extensão do processo de derivação, uma vez que também é válida no sentido usual do cálculo para g diferenciável. Com efeito, se g for diferenciável, então

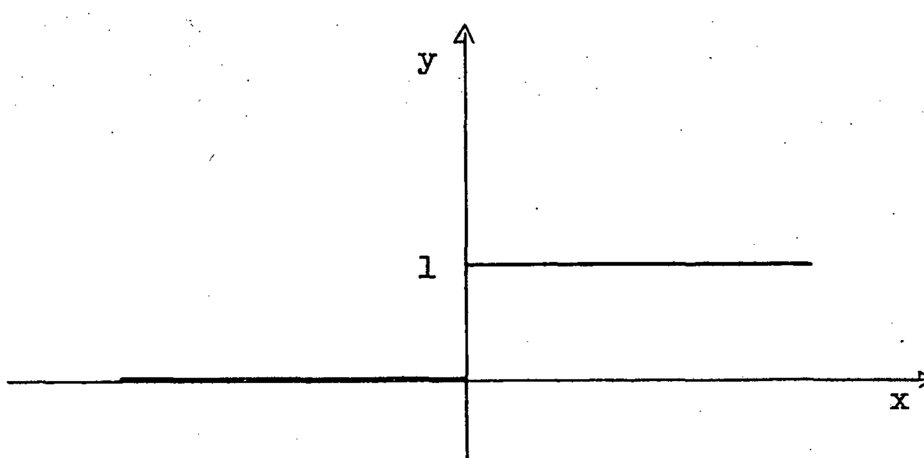
$$\langle dg\ ,\ f\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} g\ df$$

$$= -gf\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} f\ dg$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f\ dg \qquad \text{(integral à Riemann).}$$

(1.7) <u>EXEMPLO</u>: Considere a função de "Heaviside"

$$H_o(x) = \begin{cases} 0, & \text{para} \quad x \leqslant 0 \\ 1, & \text{para} \quad x > 0 \end{cases}$$



Dado $f \in C_c^1(R)$ e por (1.6), obtemos:

$$\langle dH_0 \, , \, f\rangle = -\int_0^{\infty} H_0(x)\, f'(x)\, dx$$

$$= -\int_0^{\infty} f'(x)\, dx$$

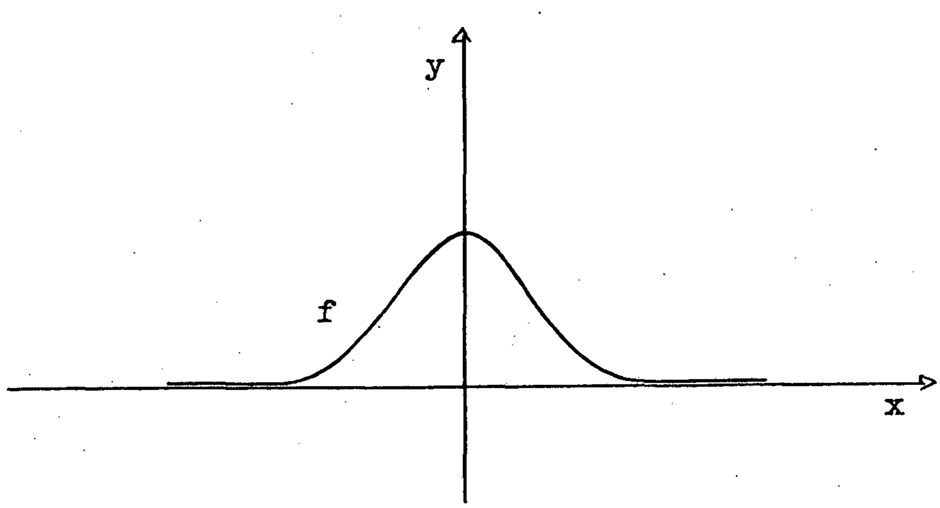
$$= -\,[f(\infty) - f(0)] = f(0)$$

$$= \langle \delta \, , \, f \rangle$$

$$dH_0 = \delta_0$$

O exemplo que acabamos de ilustrar nos levam a descrever uma interessante teoria matemática.

No exemplo [(1.2) cap. 2 pag. 4] definimos uma função que tinha o seguinte aspecto:



A partir deste exemplo poderemos construir uma sucessão de funções $(f_n)_n$ definida por

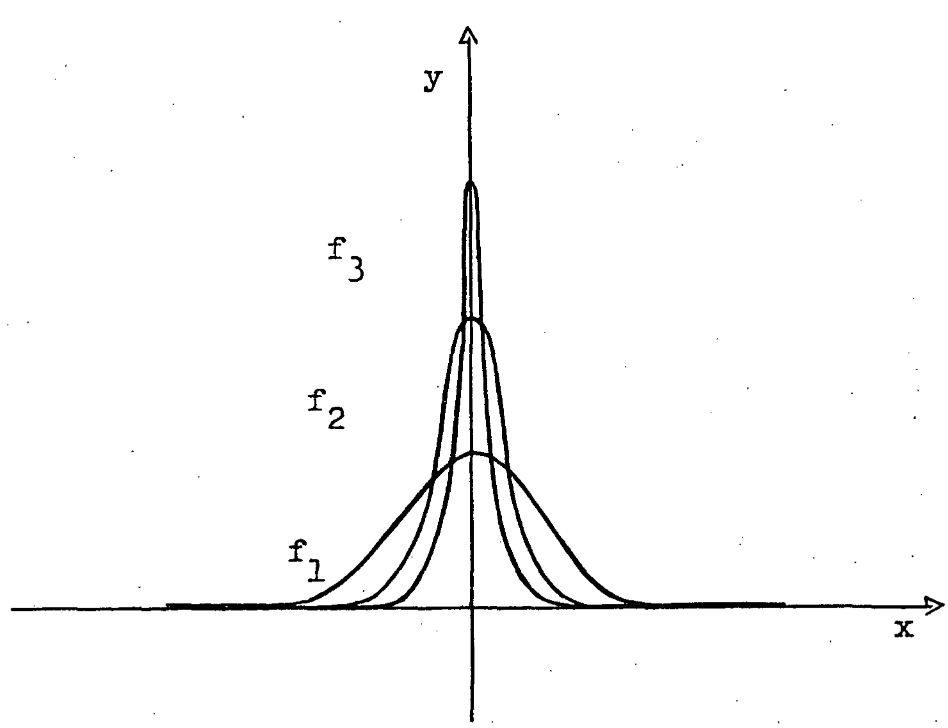
$$f_n(x) = n\, g(\frac{x}{n}), \quad \text{com} \quad n = 1,2,\ldots$$

onde $f_1(x) = g(x)$ como em (1.2) capítulo 2.

Observe que,

$$\int f_n(x)\, dx = \int g(x)\, dx = 1 \qquad \text{(int. à Riemann)}.$$

O gráfico dessa sucessão se comporta da seguinte maneira



Note que a sucessão de funções $(f_n)_n$ tende para uma "função" que seja 0 para todo $x \neq 0$ e que seja ∞ em zero, e cuja área é igual a 1. Evidentemente, isto não é uma função! Erro este que os físicos cometeram, contribuindo assim para a criação de uma importante teoria na matemática, ou seja, a "Teoria das Distribuições".

É bom lembrar ainda que os físicos definiram essa "função" como sendo o delta de Dirac, isto é,

$$\delta_o = \begin{cases} \delta_o \geqslant 0 \\ \delta_o = 0 \text{ fora de zero; } \quad \delta_o(0) = \infty \\ \int \delta_o = 1 \end{cases}$$

Concluímos assim, que a equação de Dirac na origem, isto é,

$$< \delta_o \, , \, f >$$

define um funcional linear em $C_c^1(R)$.

(1.8) OBSERVAÇÃO: δ_o é um exemplo de funcional linear tal que $\delta_o(f)$ não pode ser representado por integral no sentido de Lebesgue.

Agora, enunciaremos algumas proposições para complementar a nossa teoria sobre dg.

(1.9) PROPOSIÇÃO: $C_c'(R)$ é um espaço vetorial.

(1.10) PROPOSIÇÃO: O funcional dg definido em (1.6) é uma função linear, então

$$dg \in [C_c^1(R)]' = C_c^{1'}(R).$$

(1.11) PROPOSIÇÃO: $C(R) \subset C_c^{1'}(R)$, isto é, o conjunto de todas as funções contínuas é um subespaço vetorial de $C_c^{1'}(R)$, de tal maneira que se g for uma função contínua, representamos $<g , f>$ por

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g(x)\, dx \quad \text{(integral à Riemann)}.$$

(1.12) PROPOSIÇÃO: As funções contínuas são deriváveis, sendo suas derivadas elementos de $C_c^{1'}(R)$.

DEMONSTRAÇÃO: Dados $g \in C(R)$ e $f \in C_c^1(R)$, então

(1.12.1) $$<dg , f> = -\int g(x)\, f'(x)\, dx.$$

Note que a integral à direita existe (no sentido de Riemann), pois g é contínua assim como f', sendo esta última à suporte compacto, logo (1.12.1) define um funcional linear contínuo em $C_c^1(R)$.

Capítulo 4

CARACTERIZAÇÃO DAS PROBABILIDADES COMO DERIVADAS NO SENTIDO DE SCHWARTZ DE FUNÇÕES DE DISTRIBUIÇÃO

Nesta secção vamos determinar uma relação existente entre "medida de probabilidade" e "função de distribuição". Portanto, o nosso objetivo primordial é o teorema (1.4), antes porém introduziremos algumas definições básicas.

(1.1) DEFINIÇÃO: Seja X um espaço e M uma σ-álgebra de subconjuntos de X. Uma medida de probabilidade μ em M é uma função de conjuntos com valor numérico cujo domínio é M, satisfazendo os seguintes axiomas:

(i) $\forall\, A \in M,\ \mu(A) \geqslant 0$;

(ii) Se A_n for uma coleção contável de conjuntos disjuntos em M, então

$$\mu(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n);$$

(iii) $\mu(X) = 1.$

(1.2) DEFINIÇÃO: Uma função de distribuição é uma função monótona crescente limitada tal que

$$F(-\infty) = 0 \quad \text{e} \quad F(\infty) = 1.$$

(1.3) PROPOSIÇÃO: Cada medida de probabilidade μ em M determina uma função de distribuição F através da correspondência

$$\mu((-\infty, x]) = F(x), \quad \forall\, x \in X.$$

DEMONSTRAÇÃO: ([1] pag. 28 e 29)

(1.4) TEOREMA: Sejam μ uma medida de probabilidade e F_μ a sua função de distribuição, então

$$\mu = dF_\mu,$$

isto é, medida de probabilidades são derivadas no sentido de Schwartz de suas funções de distribuição.

DEMONSTRAÇÃO: Antes de iniciarmos a prova do teorema, enunciaremos alguns lemas que nos serão úteis.

(1.4.1) LEMA: Se μ e v forem medidas de probabilidade tais que

$\forall x, \quad \mu((-\infty, x]) = v((-\infty, x])$, então

$$\mu = v.$$

demonstração: ([5] pág. 21)

(1.4.2) LEMA: O funcional dF_μ é uma medida que coincide com a probabilidade μ sobre os intervalos da forma $(-\infty, x]$.

demonstração: ([5] pág. 26)

(1.4.3) LEMA: (Convergência Monótona de Lebesgue)

Seja $(f_n)_n$ uma sucessão de funções mensuráveis em X, e suponha que

(i) $0 \leqslant f_1 \leqslant f_2 \leqslant \ldots \leqslant \infty$ para cada $x \in X$;

(ii) $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ quando $n \longrightarrow \infty$, $\forall x \in X$

Então, f é mensurável e

$\int_X f_n \, d\mu \longrightarrow \int_X f \, d\mu$ quando $n \longrightarrow \infty$.

demonstração: ([2] pág. 22)

(1.4.4) LEMA: Seja X_A uma função onde $A = (-\infty, x]$, então existe uma sucessão de funções $(f_n)_n$ pertecentes ao espaço $C_c^1(R)$ tais que

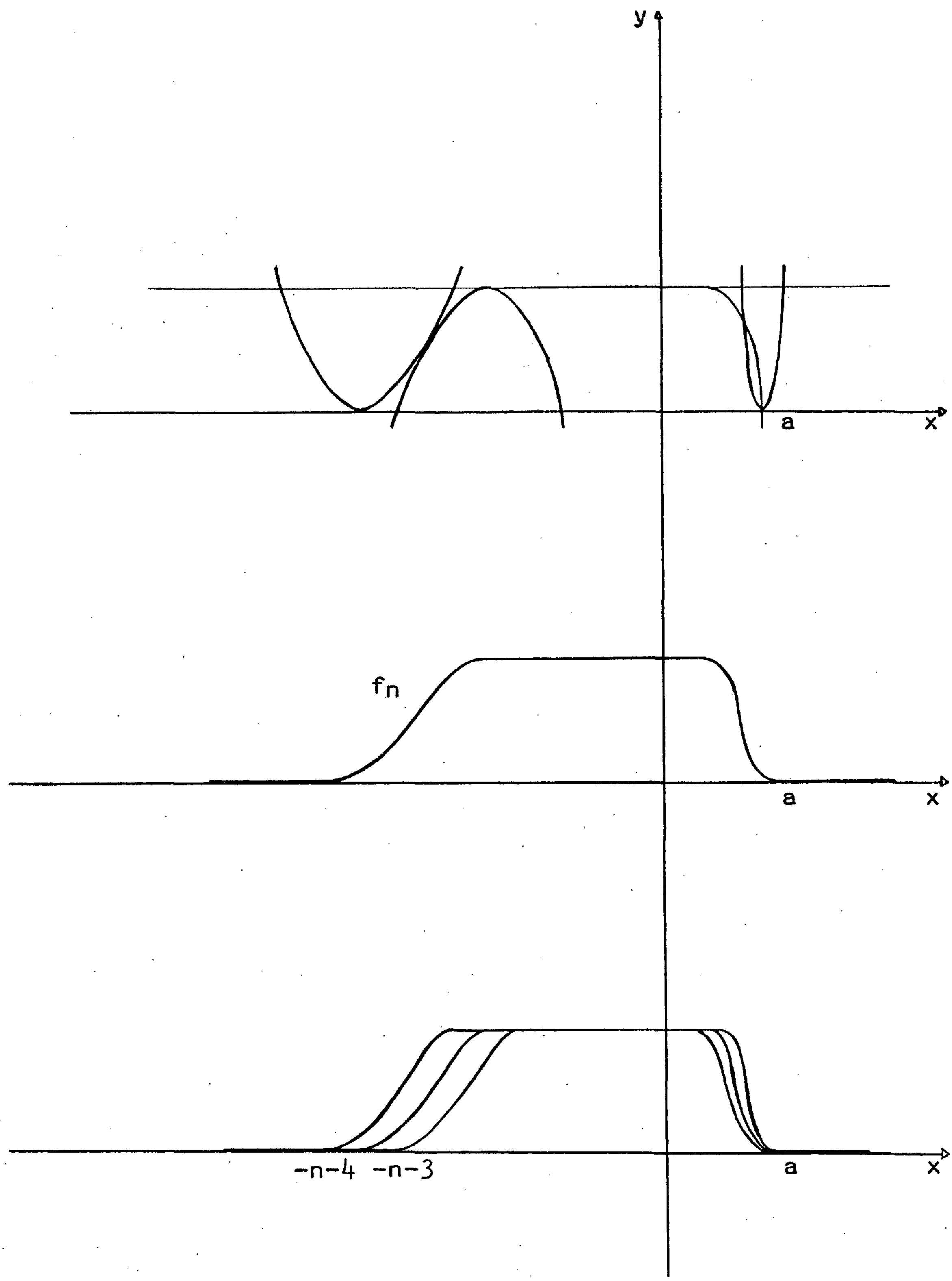
(i) $f_n \longrightarrow X_A$, pontualmente;

(ii) $f_n < f_{n+1}$,

isto é, existe uma sucessão $(f_n)_n$ satisfazendo o lema anterior, cujo limite pontual é X_A.

DEMONSTRAÇÃO: A construção da sucessão $(f_n)_n$ é obtida através de parábolas, retas e raiz n-ésimas assíntota à reta $x = a - c_n$ com contato de ordem maior ou igual a 1. Para garantir a condição de que a sucessão de funções $(f_n)_n$ é crescente, basta fazer a conexão do ponto "a" com o auxílio de funções do tipo $c_n(x - a)^{2n}$, onde c_n atua sobre as curvaturas e $(x - a)^{2n}$ garante que a derivada de primeira ordem é nula.

A ilustração gráfica abaixo, ajudará o leitor a compreender melhor o esboço da demonstração.



y
a
x
fn
a
x
-n-4
-n-3
a
x

Agora, por (1.4.3) e (1.4.4) obtemos:

$$\int f_n \, dF_\mu \longrightarrow \int \chi_A \, dF_\mu = \int_{-\infty}^{a} 1 \, dF_\mu$$

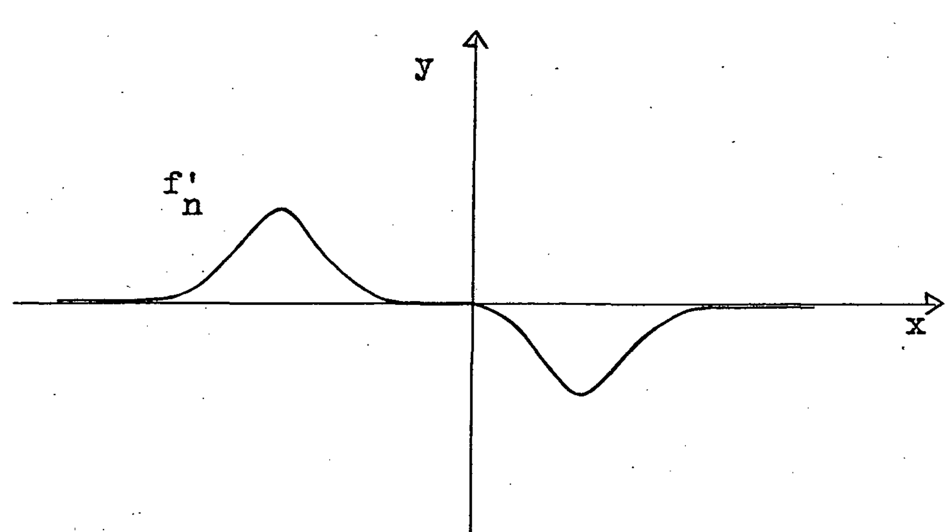
$$= dF_\mu((-\infty, x]).$$

Por outro lado, dF_μ é por definição um funcional linear, portanto temos:

$$\langle dF_\mu , f_n \rangle = -\int_{v(-n)} F_\mu f_n' \, dx - \int_{v(a)} F_\mu f_n' \, dx$$

Observe que as f_n' são identicamente nulas na reta inteira exceto numa vizinhança de $-n$ e numa vizinhança de a que é um ponto fixo da reta.

Se fizermos uma análise do gráfico de f_n' poderemos obter informações úteis, ou seja,



O gráfico acima nos mostra que as áreas das vizinhanças $v(-n)$ e $v(a)$ são respectivamente 1 e -1. Tomando-se as áreas, vemos que as integrais sobre cada uma dessas vizinhanças nos dará o valor médio de F_μ com relação as respectivas vizinhanças. Portanto, temos:

$$< dF_\mu , f_n > = -\underset{\text{em } v(-n)}{\text{Valor Médio}}\ F_\mu + \underset{\text{em } v(a)}{\text{Valor Médio}}\ F_\mu$$

Agora, frente ao valor de dF_μ aplicado em f_n observamos que

(i) o valor médio de F_μ em uma vizinhança de $-n$ quando $n \longrightarrow -\infty$, tende a zero;

(ii) o valor médio de F_μ em uma vizinhança de a tenderá ao valor de $F_\mu(a)$ na medida em que a área sob à curva f'_n se concentre em volta do ponto a, isto é, dada qualquer que seja a vizinhança de a existe n_o tal que f_n é identicamente nula fora da vizinhança de a para $n > n_o$ (Teorema de Lebesgue).

Em vista dos resultados obtidos temos que

$$\begin{cases} \int f_n \, dF_\mu \longrightarrow F_\mu(a) \\ \int f_n \, dF_\mu \longrightarrow dF_\mu((-\infty, a]) \end{cases}$$

Consequentemente,

$$F_\mu(a) = dF_\mu((-\infty, a]).$$

Por (1.3)

$$dF_\mu = \mu$$

A unicidade de dF_μ é garantida pelo lema (1.4.1).

Bibliografia

[1] CHUNG, K. L. - "A Course in Probability Theory"
Academic Press - second edition

[2] RUDIN, W. - "Real and Complex Analysis"
McGraw-Hill - second edition, 1974.

[3] SCHWARTZ, L. - "Théorie des Distributions"
Hermann - nouvelle édition, 1966.

[4] RUDIN, W. - "Functional Analysis"
McGraw-Hill - 1973.

[5] ZORZO, A. - "Medidas Positivas Finitas como Derivadas de Schwartz de k-funções de Distribuição"
Tese de Mestrado - UFSC - 1982.