Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de

"M E S T R E   E M   C I Ê N C I A S"

especialidade em MATEMÁTICA, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina.

Prof. Inder Jeet Taneja, Ph.D.
Coordenador

Banca Examinadora:

Donald Morison Silberger

Prof. Donald Morison Silberger, Ph.D.
Orientador

Prof. Newton Carneiro Affonso da Costa, Ph.D.

Prof. Osvaldo Momm, MSc.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

"UMA CONDIÇÃO SUFICIENTE PARA A PALAVRA Y^nX^m REPRESENTAR RAMOS"

Nereu Estanislau Burlin - Junho / 82

AGRADECIMENTOS

Ao professor Donald Morison Silberger pela sua orientação, dedicação, paciência, despreendimento e amizade;

À Vera, pelas horas que dela me separei para que pudesse realizar esta dissertação;

À Universidade Federal de Santa Catarina que possibilitou a realização deste trabalho;

Aos responsáveis pela minha formação, meus pais, meus professores da primeira série do Primeiro Grau até a última disciplina do Curso de Pós-Graduação;

O meu sincero

Muito Obrigado.

RESUMO:

O resultado principal desta dissertação é que a função $0 \mapsto 1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto \ldots \mapsto k-2 \mapsto k-1$ pode ser expressa na forma $y^n x^m$ para funções x e y com $\{x,y\} \subseteq k \times k$ se o terno (k,n,m) de inteiros positivos for "justo".

ABSTRACT:

The main result of this dissertation is that the function $0 \mapsto 1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto \ldots \mapsto k-2 \mapsto k-1$ can be written in the form $y^n x^m$ for functions x and y with $\{x,y\} \subseteq k_\times k$ if the triple (k,n,m) of positive integers is "fitting".

ÍNDICE

INTRODUÇÃO:

Quando $W = W(L_1, L_2, \ldots, L_j)$ for uma palavra, elemento do monóide livre $\mathcal{M}$ gerado pelos j geradores livres distintos $L_1, L_2, \ldots, L_j$; e S for um semigrupo, então dizemos que W é universal para S se, e somente se, para cada $f \in S$ existe uma substituição $L_i \longmapsto f_i$ de $\{L_1, L_2, \ldots, L_j\}$ em S tal que $W(f_1, f_2, \ldots, f_j) = f$. Dizemos que W é $\mathcal{F}$-universal quando $\mathcal{F}$ é uma família de semigrupos e para cada $T \in \mathcal{F}$ temos que W é universal para T.

O nosso trabalho aplica-se na tentativa de decidir quais palavras W são Myc-universais e quais são Prt-universais, onde Myc denota a classe de todo monóide simétrico ${}^X X = \{g : g \text{ é função com } \mathrm{Rng}(g) \subseteq X = \mathrm{Dom}(g)\}$, e onde Prt denota a classe de todo monóide $\mathrm{Prt}(X) = \{g : g \text{ é função com } \mathrm{Rng}(g) \cup \mathrm{Dom}(g) \subseteq X\}$. Importante nesta área é a estipulação das palavras W tais que a equação $W = r_k$ tem solução em $\mathrm{Prt}(k)$, onde $k = \{0,1,2,3,\ldots,k-1\}$ e r_k é a função "ramo" $0 \longmapsto 1 \longmapsto 2 \longmapsto 3 \longmapsto \ldots\ldots \longmapsto k-2 \longmapsto k-1$.

No teorema 4.1 estabelecemos condições necessárias para $\{a,b\} \subseteq \mathrm{Prt}(k)$ tal que $r_k = b^n a^m$. Utilizamos esse teorema para estender o resultado de Osvaldo Momm [6] que a equação $r_3 = y^6 x^6$ não tem solução, mostrando assim que a equação $r_4 = y^6 x^6$ também não tem solução, mas que $r_k = y^6 x^6$ tem solução para todo k finito com $k \notin \{3,4\}$.

O nosso principal resultado é o teorema 4.6, em que mostramos que a equação $r_k = y^n x^m$ tem solução em Prt(k) se o terno (k,n,m) é "justo". O conceito de "justo" está definido nesta dissertação. O teorema 4.6 parece quase uma equivalência. Acreditamos que esse teorema nos dará um método para demonstrar a nossa conjetura seguinte: Para cada par (n,m) de inteiros positivos, existe inteiro $N(n,m)$ tal que a equação $r_k = y^n x^m$ tem solução $(x,y) \in (Prt(k))^2$ sempre que $k > N(n,m)$.

CAPÍTULO I - GENERALIDADES

No presente capítulo colocamos notações, convenções e definições que usaremos neste trabalho. Além disso, apresentamos algumas proposições e lemas que serão utilizados, posteriormente, nesta dissertação.

1.1. NOTAÇÕES: Utilizaremos ω para denotar o conjunto $\{0,1,2,3,\ldots\}$. O símbolo Z denota $\omega \cup \{-k : k \in \omega\}$. Para todo $k \in \omega$, k representa o conjunto $\{0,1,2,\ldots,k-1\}$.

Para S e T conjuntos, $S \setminus T$ denota $\{x : x \in S$ e $x \notin T\}$. Assim, $\omega \setminus k = \{k,k+1,k+2,k+3,\ldots\}$ para cada $k \in \omega$; e para $\{m,n\} \subseteq \omega$ com $m < n$, é claro que $n \setminus m = \{m,m+1,m+2,m+3,\ldots, n-1\}$.

Para um conjunto arbitrário M, a expressão $|M|$ indica o número cardinal de M. Desta forma, para cada $k \in \omega$ temos que $|k| = k$, e que $|\omega| = \aleph_0$. Também é fácil ver que $|n \setminus m| = n-m$ sempre que $m < n$ e que $\{m,n\} \subseteq \omega$.

Quando $m \in Z \setminus 1$ e $n \in Z$, a expressão $m|n$ significa que $n = km$ para algum $k \in Z$. Neste caso também dizemos que m é um divisor ou um fator de n, e que n é um múltiplo de m. Usaremos $m \nmid n$ para negar a proposição $m|n$.

Seja $k \in \omega \setminus 2$. Seja $\phi \neq M = \{n_i : i \in k\} \subseteq Z \setminus 1$. Então entendemos por máximo divisor comum de M o elemento máximo do conjunto $\{x : x \in \omega \setminus 1$ e $x|n_i$ para cada $i \in k\}$. Para designar o maior fator comum dum conjunto finito e não vazio $M \subseteq Z \setminus 1$ usaremos a expressão $(n_0, n_1, n_2, \ldots\ldots, n_{k-1})$. Da mesma forma, entendemos por mínimo múltiplo comum do mesmo conjunto M o elemento mínimo do conjunto $\{x : x \in \omega \setminus 1$ e $n_i | x$ para cada $i \in k\}$. A expressão $[n_0, n_1, \ldots\ldots, n_{k-1}]$ denota o menor múltiplo comum do conjunto M.

Seja $k \in \omega \setminus 2$. Então $S(k)$ denota o menor fator primo de k, e $M(k)$ denota $[2,3,4,\ldots\ldots\ldots,k]$.

Seja $\{m,n\} \subseteq \omega \setminus 2$. Então o par ordenado (m,n) é dito par de Ehrenfeucht se, e somente se, $M(S(n)) \nmid m$ e $M(S(m)) \nmid n$. É fácil observar que $(2m+1, 2n+1)$ é par de Ehrenfeucht e que $(2m, 2n)$ não o é sempre que $\{m,n\} \subseteq \omega \setminus 1$. Além disso, (m,n) é par de Ehrenfeucht se, e somente se, (n,m) também o é.

Sejam X um conjunto arbitrário e $f \subseteq X_\times X$. Chamamos mundo de f e indicamos por $Wrld(f)$ ao conjunto $Wrld(f) = Dom(f) \cup Rng(f)$, onde $Dom(f) = \{x : (x,y) \in f$ para algum $y \in X\}$ e $Rng(f) = \{y : (x,y) \in f$ para algum $x \in X\}$. Para A um conjunto qualquer, a expressão $f \restriction A$ indica o conjunto $(A_\times X) \cap f$, e a expressão $f[A]$ denota o conjunto $\{y : (x,y) \in f$ para algum $x \in A\}$.

Dizemos que a relação binária f é uma função se, e somente se, $|f[\{x\}]| \leq 1$ para qualquer x. Para f uma função e $x \in Dom(f)$, o único elemento do conjunto $f[\{x\}]$ é dito a imagem de x por f. Denotamos a imagem de x por f com uma das expressões: $f(x)$ ou f_x. Para indicar que $x \notin Dom(f)$ escrevemos $f(x) = \infty$.

Dado um conjunto X, a expressão $id \restriction X$ denota

$\{(x,x) : x \in X\}$. A função $id\restriction X$ chama-se a função identidade ou a permutação identidade de X.

Utilizamos $Prt(X)$ para representar o conjunto $\{ f : f$ é função com $Wrld(f) \subseteq X\}$. Os elementos de $Prt(X)$ são ditos transformações parciais de X. Dizemos que $f \in {}^X X$ se, e somente se, $f \in Prt(X)$ e $Dom(f) = X$. Os elementos de ${}^X X$ são ditos transformações de X. Chamamos f permutação de X se, e somente se, f é uma transformação bijetiva de X. Usaremos $Sym(X)$ para indicar o conjunto de todas as permutações de X.

Dada uma relação binária f e $(x,y) \in f$, dizemos que o dígrafo de (x,y) é a figura $x \to y$. Assim, o dígrafo de f é uma figura obtida da reunião de todos os dígrafos dos elementos de f. Por exemplo, o dígrafo da relação binária $f = \{(0,0),(0,1),(1,2),(2,3),(3,2)\}$ é:

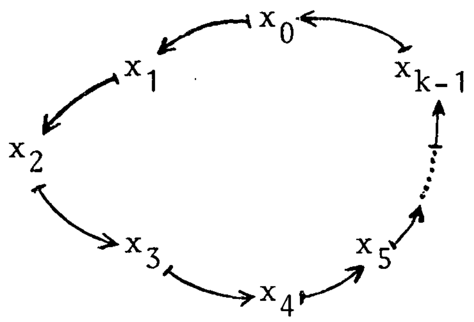
$$\circlearrowleft 0 \longmapsto 1 \longmapsto 2 \longleftrightarrow 3$$

Quando $k \in \omega\setminus 2$, chamamos função "ramo" de comprimento $k-1$ e anotamos por r_k à função $r_k = \{(j,j+1) : j \in (k-1)\}$ cujo dígrafo é:

$$0 \longmapsto 1 \longmapsto 2 \longmapsto 3 \longmapsto \ldots\ldots \longmapsto k-2 \longmapsto k-1$$

Observe que $Dom(r_k) = k-1$ e que $Rng(r_k) = k\setminus 1$. Portanto $r_k \in Prt(k)$.

Seja $k \in \omega\setminus 1$. Chamamos ciclo de comprimento k, ou seja k-ciclo, a qualquer função f cujo dígrafo é da forma



Isto quer dizer que, para $|\{x_i : i \in k\}| = k \in \omega\setminus 1$, a função f da figura acima é $\{(x_i, x_{i+1}) : i \in (k-1)\} \cup \{(x_{k-1}, x_0)\}$.

Se f é o ciclo acima, então é evidente que $f^k = id\restriction X$. Além disso, $f^p = id\restriction X$ sempre que $k|p$. Também podemos escrever $f = (x_{i+1} \ldots x_{k-1}\ x_0\ x_1\ \ldots\ x_i)$ para qualquer $i \in k$. Esta f é uma permutação cíclica de X se $Wrld(f) = \{x_j : j \in k\} = X$. Usamos o símbolo c_k para designar o k-ciclo canônico $(0\ 1\ 2\ 3\ 4\ \ldots\ldots\ k\text{-}2\ k\text{-}1)$.

Sejam f e g duas relações binárias. Usaremos gf para indicar a relação binária $\{(x,z) : (x,y) \in f$ enquanto $(y,z) \in g$ para algum $y\}$. Isto é, gf é a composição usual que alguns autores escrevem $g \circ f$.

1.2.LEMA: Sejam f e g relações binárias. Então

a) $Dom(gf) \subseteq Dom(f)$.

b) $Rng(gf) \subseteq Rng(g)$.

Demonstração: a) Seja $x \in Dom(gf)$. Então existe um elemento y tal que $(x,y) \in gf$. Por definição, existe um elemento z tal que $(x,z) \in f$ enquanto $(z,y) \in g$. Desde que $(x,z) \in f$ segue que

$x \in Dom(f)$. Portanto, $Dom(gf) \subseteq Dom(f)$.

b) Seja $r \in Rng(gf)$. Então existe t tal que $(t,r) \in gf$. Por definição, $(t,s) \in f$ enquanto $(s,r) \in g$ para algum s. Desde que $(s,r) \in g$ segue que $r \in Rng(g)$. Portanto, $Rng(gf) \subseteq Rng(g)$. ▨

1.3. LEMA: Seja X um conjunto finito. Se f é uma transformação ou injetiva ou sobrejetiva, então $f \in Sym(X)$.

Demonstração: Seja f uma transformação injetiva de X finito. Vamos mostrar que $Rng(f) = X$. É evidente que $Rng(f) \subseteq X$. Desde que f é injetiva, temos que $|Dom(f)| = |Rng(f)|$. Mas como $Dom(f) = X$, temos que $|Rng(f)| = |X|$. Portanto, já que X é finito e que $Rng(f) \subseteq X$ segue que $Rng(f) = X$.

Agora suponhamos que f é sobrejetiva. Então $Rng(f) = X$ e assim $|Dom(f)| = |X| = |Rng(f)|$. Mas se existe $\{x,y\} \subseteq X$ tal que $x \neq y$ e tal que $f(x) = f(y)$, então $X = Rng(f\restriction(X\setminus\{y\}))$ enquanto $|Rng(f)| = |Rng(f\restriction(X\setminus\{y\}))| \leq |X\setminus\{y\}| < |X|$, pois X é finito; e isto é uma contradição. Logo concluimos que f é injetiva. ▨

1.4. DEFINIÇÃO: Dizemos que duas relações binárias f e g são isomorfas e anotamos $f \cong g$ se, e somente se, existe bijeção $h : Wrld(g) \longmapsto Wrld(f)$ tal que $f = hgh^{-1}$.

1.5. DEFINIÇÃO: Seja X um conjunto. Seja $F \subseteq Sym(X)$. Dizemos que F é disjunta como permutações e anotamos dcp se, e somente se, para qualquer par de elementos distintos f e g de F temos que para cada $x \in X$ ou $x = f(x)$ ou $x = g(x)$.

1.6. LEMA: Se $(n,k) = 1$, então existe $f \in Sym(k)$ tal que $c_k = f^n$ e f é cíclica.

Demonstração: Seja $(n,k) = 1$. Por [1; Theorem 1] existem inteiros x e y tais que $nx + ky = 1$. Segue que $c_k = c_k^{nx+ky} = c_k^{nx} . c_k^{ky} = (c_k^x)^n . (c_k^k)^y = (c_k^x)^n . (id \restriction k) = (c_k^x)^n$. Seja $f = c_k^x$. Então $c_k = f^n$, e $f \in Sym(k)$. Observe que a permutação f do conjunto k também é cíclica, pois se f não fosse cíclica então f^n também não seria cíclica.▨

1.7. DEFINIÇÃO: Chamamos uma família não vazia $\mathcal{F}$ de equipolente se, e somente se, $|A| = |B|$ sempre que $\{A,B\} \subseteq \mathcal{F}$. Quando $\mathcal{F}$ é equipolente, então $||\mathcal{F}||$ denota $|A|$ para todo $A \in \mathcal{F}$.

1.8. DEFINIÇÃO: Seja $\{k,m,n\} \subseteq \omega \setminus 2$. Dizemos que o terno (k,n,m) é justo se, e somente se, existe partição X do conjunto $k-1$ tal que ou $(|X|+1,n) = 1$ ou $(|X|,n) = 1$ e existe partição Y de X tal que para cada $F \in Y$ temos que

1. F é equipolente.
2. $|F|$ é fator de m.
3. $(m/|F|,||F||) = 1$.

Salientamos que a definição 1.8 indica exatamente a condição que é a hipótese do nosso teorema principal 4.6.

1.9. Estudo das Palavras: Consideremos um alfabeto finito e arbitrário $\Sigma = \{A,B,C,\ldots\}$. Seja Σ^* o monóide livre gerado pelas letras do alfabeto Σ. Os elementos de Σ^* são as palavras finitas que podem ser soletradas com as letras em Σ, e são denotadas por letras gregas minúsculas. O símbolo ϕ significará a palavra vazia. A operação binária em Σ^* é simplesmente a concatenação das palavras. Duas palavras α e β são consideradas iguais se, e somente se, a soletração de α é exatamente a soletração de β; e anotamos $\alpha = \beta$.

Para $\alpha \in \Sigma^*$ e $n \in \omega\setminus 1$ definimos, como usual, $\alpha^n = \alpha^{n-1}\alpha$ e $\alpha^o = \phi$.

Exemplos: 1. A operação concatenação não é comutativa; pois, se $\alpha = AB$ e $\beta = AABA$ então $\alpha\beta = ABAABA$ enquanto $\beta\alpha = AABAAB$.

2. Se $\lambda = ABAB = (AB)^2$ e $\tau = (AB)^3$ então

$\lambda\tau = \tau\lambda$. Por [11; Lema 1.12], temos que duas palavras comutam se, e somente se, são potências de uma mesma palavra.

3. $\alpha\phi = \phi\alpha = \alpha$, para quaquer $\alpha \in \Sigma^*$.

Definimos o comprimento de uma palavra $\alpha \in \Sigma^*$ como sendo $|\alpha|$. Assim, $|\phi| = 0$, $|L| = 1$ para qualquer $L \in \Sigma$ e se $\alpha = L^n$, então $|\alpha| = n$. Além disso, para $\{\alpha,\beta\} \subseteq \Sigma^*$ temos que $|\alpha\beta| = |\alpha| + |\beta|$.

Exemplos: 4. Se $\alpha = ABBAAB = AB^2A^2B$, então $|\alpha| = 6$.

5. Se $\beta = BBAB = B^2AB$, então $|\beta| = 4$.

6. Se $\gamma = BAABBBA = BA^2B^3A$, então $|\gamma| = 7$.

Se α é uma palavra, então denotamos por $\overline{\alpha}$ a palavra α escrita na ordem inversa. Por exemplo, se $\alpha = AB^2AB$ então $\overline{\alpha} = BAB^2A$.

1.10. Complexidade de uma palavra: Seja $\alpha \in \Sigma^*$ tal que $\alpha = L_0^{n(0)} L_1^{n(1)} L_2^{n(2)} L_3^{n(3)} \ldots\ldots\ldots L_{k-2}^{n(k-2)} L_{k-1}^{n(k-1)}$ onde $\{n(i) : i \in k\} \subseteq \omega \setminus 1$ e $L_i \neq L_j$ sempre que $i \in \{j-1, j+1\} \subseteq k$. Então dizemos que α tem complexidade k.

Exemplos: 1. $\alpha = AB^2A^3B$ é de complexidade quatro. Em α temos: $L_0 = L_2 = A$, $L_1 = L_3 = B$, $n(0) = n(3) = 1$, $n(1) = 2$ e $n(2) = 3$.

2. $\beta = B^nA^m$ é de complexidade dois. Neste caso,

$L_0 = B$, $L_1 = A$, $n(0) = n > 0$ e $n(1) = m > 0$.

3. $\gamma = B^n A^m B^j$ é de complexidade três e $L_0 = L_2 = B$, $L_1 = A$, $n(0) = n > 0$, $n(1) = m > 0$ e $n(2) = j > 0$.

Neste trabalho consideramos principalmente palavras de complexidade dois. Um tratamento mais formal da noção de complexidade se encontra em [11; § 1.16].

1.11. Universalidade de uma palavra: Sejam Σ um alfabeto finito, M um monóide e $x \in M$. Dizemos que uma palavra $\alpha \in \Sigma^*$ representa x em M, e anotamos $(\alpha \downarrow x)M$ se, e somente se, existe um homomorfismo $\mathcal{H}: \Sigma^* \longrightarrow M$ tal que $\mathcal{H}(\alpha) = x$.

Agora, se $\alpha \in \Sigma^*$, S for um semigrupo e $x \in S$, dizemos que α é universal para S, e anotamos $\alpha \downarrow\downarrow S$ ou simplesmente universal para S se, e somente se, $(\alpha \downarrow x)S$ para todo $x \in S$.

Quando $\mathcal{E}$ é uma família de semigrupos, dizemos que uma palavra α é $F\mathcal{E}$-universal se, e somente se, $\alpha \downarrow\downarrow S$ para todo elemento finito $S \in \mathcal{E}$. Dizemos que a palavra α é $I\mathcal{E}$- universal se, e somente se, $\alpha \downarrow\downarrow S$ para todo elemento infinito $S \in \mathcal{E}$. Se α for ambos $F\mathcal{E}$-universal e $I\mathcal{E}$-universal dizemos que α é $\mathcal{E}$-universal.

Em nosso trabalho interessam mais as seguintes famílias de monóides:

1. $Prt = \{Prt(X) : X$ é conjunto$\}$.

2. $Myc = \{{}^{X}X : X$ é conjunto$\}$.

3. $Sym = \{Sym(X) : X$ é conjunto$\}$.

CAPÍTULO II - HISTÓRICO

Os primeiros conceitos básicos sobre Termos Universais foram introduzidos por volta de 1964 por Jan Mycielski. Já em 1966, o Boletim da Academia Polonesa de Ciências publicou o artigo de J.R.Isbell [4], que foi o primeiro tratando de Termos Universais. Neste artigo, J.R.Isbell demonstrou os teoremas 2.2 e 2.3, formulou algumas perguntas e respondeu uma delas.

2.1. DEFINIÇÃO: Uma palavra β chama-se um bordo de uma palavra α se, e somente se, $0 < |\beta| < |\alpha|$ e existem palavras λ e ρ tais que $\alpha = \lambda\beta = \beta\rho$.

Dizemos que um bordo β de α é curto se $|\beta| \leqq \frac{1}{2}\alpha$, assim $\beta \neq \phi$ é bordo curto de α se existe τ tal que $\alpha = \beta\tau\beta$.

2.2.TEOREMA: Se α não tem bordos curtos, então α é IMyc-universal.

Dizemos que uma permutação $f \in \mathrm{Sym}(X)$ é uma involução de X se, e somente se, $f^2 = id\restriction X$.

2.3.TEOREMA: Sejam X finito e $f \in {}^X X$. Seja $\{i,n,p\} \subseteq \omega\setminus 1$, onde $n = p^i$ e p é primo. Então, existem $g \in {}^X X$ e uma involução h de X tais que $f = g^n h$.

O teorema 2.2 é uma generalização natural duma construção fácil por meio da qual Isbell observou que B^2A^2 é universal para ${}^{\omega}\omega$.

Com outro argumento fácil, Isbell mostrou também que B^2A^2 não é FMyc-universal, pois B^2A^2 não representa c_2 em ${}^2 2$. Segue-se, sem dificuldade, que existe uma palavra α que é IMyc-universal mas que não é FMyc-universal.

Pelo teorema 2.3, J.R.Isbell concluiu que A^2B^2A é FMyc-universal. Ele observou que A^2B^2A não é IMyc-universal, já que A^2B^2A não representa s_+ em ${}^{\omega}\omega$, onde s_+ denota $\{(i,i+1) : i \in \omega\}$. Assim, vimos que uma palavra FMyc-universal não tem que ser IMyc-universal.

O teorema 2.3 também implica que $A^{2i}B^nA^{2j+1}$ e $A^{2j+1}B^nA^{2i}$ são FMyc-universais para cada $\{i,j\} \subseteq \omega$ com $n = p^k$, com $k \in \omega$ e p primo.

J.R.Isbell também mostrou que BA^2BA e BAB^2A são FMyc-universais, e perguntou se estas palavras são Myc-universais.

Em 1972, na sua tese de doutorado, G.F.McNulty[5] obteve a seguinte generalização do teorema 2.2 de J.R.Isbell.

2.4.TEOREMA: Seja X infinito. Seja $\phi \neq P \subseteq \Sigma^* \setminus \{\phi\}$ tal que para $\{\alpha,\beta\} \subseteq P$ acontece que, nem α é segmento próprio de β, nem existe $\tau \neq \phi$ tal que τ é, simultaneamente, segmento à direita de α e segmento à esquerda de β. Seja $f: P \longmapsto {}^X X$ uma função arbitrária. Então existe um homomorfismo $\mathcal{H}_f : \Sigma^* \longmapsto {}^X X$ tal que $\mathcal{H}_f \restriction P = f$.

Observamos que a hipótese, a respeito do conjunto P no teorema 2.4, implica que nenhum elemento de P tem bordo.

Em 1973, D.M.Silberger[8] faz outra generalização do teorema 2.2 de J.R.Isbell. É o seguinte:

2.5.TEOREMA: Se α é uma palavra que não admite bordos, então α é IPrt-universal.

Em [9], D.M.Silberger demonstrou o teorema abaixo que é de fundamental importância, motivando o estudo da representação de ramos:

2.6.TEOREMA: Seja $\alpha \in \Sigma^*$. Então α é Prt-universal se, e somente se, $(\alpha \downarrow f)\mathrm{Prt}(\mathrm{Wrld}(f))$ para toda função f que é injetiva e conexa no sentido de que f seja grafo direto.

Dentre as conseqüências deste teorema e que se encontram em [9], mencionamos as seguintes:

(i) B^2A^3 e B^3A^2 são Prt-universais.

(ii) B^mA^n é Prt-universal sempre que m e n são inteiros positivos ímpares.

(iii) $BA^{k+1}BA^k$ e $B^kAB^{k+1}A$ são Prt-universais para todo $k \in \omega$.

Observamos que a afirmação (iii) acima implica numa resposta afirmativa à indagação de J.R.Isbell a respeito das palavras BA^2BA e BAB^2A.

Em 1977, A.Ehrenfeucht e D.M.Silberger [2] aperfeiçoaram o teorema 2.3 de J.R.Isbell, com

2.7.TEOREMA: Seja **n** um inteiro positivo contendo um menor fator primo ímpar p. Seja k o maior inteiro tal que 2^k divide n. Então, as afirmações seguintes são equivalentes:

1. $2^{k+1} < p$.

2. Para cada X finito e para cada $f \in {}^X X$, existem $g \in {}^X X$ e uma involução h de X tal que $f = g^n h$.

Para todo $k \in \omega \setminus 2$, a expressão S(k) representa o menor fator primo de k, e M(k) denota o menor múltiplo comum dos elementos do conjunto $\{2,3,4,\ldots,k\}$. O seguinte resultado principal de [3] generaliza completamente o teorema 2.3 de J.R.Isbell.

2.8.TEOREMA: Seja $\{m,n\} \subseteq \omega \setminus 2$. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. $M(S(m)) \nmid n$ e $M(S(n)) \nmid m$.
2. B^nA^m é Myc-universal.
3. B^nA^m é FSym-universal.

Apresentamos, agora, um aperfeiçoamento introduzido por D.M.Silberger [10] do teorema anterior:

2.9.TEOREMA: Seja $\{m,n\} \subseteq \omega \setminus 2$. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. $M(S(m)) \dagger n$ e $M(S(n)) \dagger m$.
2. $B^n A^m$ é Prt-universal.
3. $B^n A^m$ é Myc-universal.
4. $B^n A^m$ é Sym-universal.

O teorema abaixo é um resultado obtido por Margaret Weems Harris [12] em sua tese de mestrado em 1977.

2.10.TEOREMA: Sejam $\{m,n\} \subseteq \omega \setminus 1$ e $A^m B^n$ Prt-universal. Então, $B^n A^m$ é Prt-universal.

Também é interessante mencionar dois teoremas centrais da dissertação de mestrado de Diana dos Santos [7] em 1980. Os mesmos tratam da representação de ramos.

2.11.TEOREMA: Suponha que $(\alpha \downarrow c_k) \mathrm{Sym}(k)$ e que $(\alpha \downarrow r_k) \mathrm{Prt}(k+1)$, para todo $k \in \omega \setminus 1$. Então, α é FPrt-universal.

2.12.TEOREMA: Se $A^n B^m A^j$ é FPrt-universal, então $A^j B^m A^n$ também o é.

Finalmente, apresentamos um resultado obtido por Osvaldo Momm [6], em sua tese de mestrado em 1980. Este resultado dá resposta negativa à seguinte pergunta de D.M.Silberger: Para todos inteiros positivos n,m e k temos que $(B^n A^m \downarrow r_k)\mathrm{Prt}(k)$?

2.13.TEOREMA: $(B^6 A^6 \not\downarrow r_3)\mathrm{Prt}(3)$.

No capítulo IV, mostramos também que $(B^6 A^6 \not\downarrow r_4)\mathrm{Prt}(4)$. Além disso, provamos que, para todo $k \in \omega \setminus 3$, acontece que $(B^{M(k)} A^{M(k)} \not\downarrow r_j)\mathrm{Prt}(j)$ para qualquer j tal que $3 \leq j \leq k$ implicando fortemente a veracidade da conjetura do Osvaldo Momm [6] de que $(B^{k!} A^{k!} \not\downarrow r_k)\mathrm{Prt}(k)$.

CAPÍTULO III - Técnica de representar $r_k = Y^n X^m$ com (k,n,m) justo.

Neste capítulo apresentamos alguns exemplos de funções x e y em Prt(k), tais que a equação $r_k = y^n x^m$ é satisfeita sempre que o terno (k,n,m) é justo, mostrando assim, detalhadamente, a técnica usada para a determinação de x e y.

EXEMPLO 1: $r_{15} = y^{60} x^{30}$, isto é: k = 15, n = 60 e m = 30.

Inicialmente apresentamos a função r_{15}.

$$0 \mapsto 1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 4 \mapsto 5 \mapsto 6 \mapsto 7 \mapsto 8 \mapsto 9 \mapsto 10 \mapsto 11 \mapsto 12 \mapsto 13 \mapsto 14$$

Diagrama 1.I: r_{15}

Consideremos a partição $X = \{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$ do conjunto $k-1 = 14$, com $X_0 = \{0,1,2,3,4,5,6\}$, $X_1 = \{7,8\}$, $X_2 = \{9,10\}$, $X_3 = \{11\}$, $X_4 = \{12\}$ e $X_5 = \{13\}$.

Para cada $i \in 6 = |X|$ consideremos as seguintes permutações $f_i \in \mathrm{Sym}(X_i)$: $f_0 = (0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$, $f_1 = (7\ 8)$, $f_2 = (9\ 10)$, $f_3 = (11)$, $f_4 = (12)$ e $f_5 = (13)$. Observe que o conjunto X_i é simplesmente o domínio de f_i.

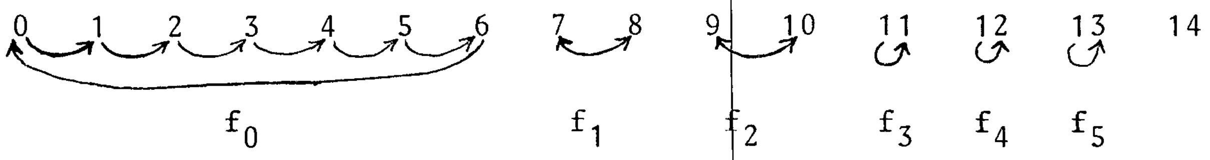


Diagrama 1.II: As funções f_i para cada $i \in 6 = |X|$.

Seja $Y_0 = \{X_0\}$, $Y_1 = \{X_1, X_2\}$ e $Y_2 = \{X_3, X_4, X_5\}$. Observe que $Y = \{Y_0, Y_1, Y_2\}$ é uma partição de X.

Para cada $j \in 3 = |Y|$ consideremos as seguintes permutações $h_j \in \mathrm{Sym}(\cup Y_j)$: $h_0 = (0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$, $h_1 = (7\ 8)(9\ 10)$ e $h_2 = (11)(12)(13)$. Observe que $\mathrm{Dom}(h_j) = \cup Y_j$ para cada $j \in 3 = |Y|$.

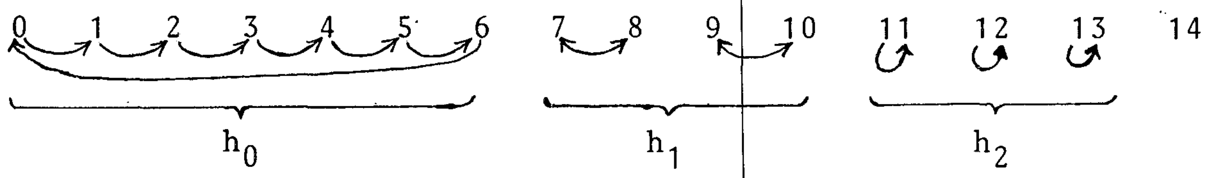


Diagrama 1.III: As funções h_j para cada $j \in 3 = |Y|$.

Como $(^m/|Y_j|, ||Y_j||) = 1$, pelo lema 1.6, temos para cada $j \in 3 = |Y|$ que existe permutação u_j de $\cup Y_j$ tal que $u_j \cong h_j$, tal que $u_j = h_j^{x_j}$ para algum inteiro x_j tal que $u_j^{(m/|Y_j|} = h_j$. Neste exemplo, tais u_j podem ser: $u_0 = (0\ 4\ 1\ 5\ 2\ 6\ 3)$, $u_1 = (7\ 8)(9\ 10)$ e $u_2 = (11)(12)(13)$. Note-se que $u_0 = h_0^{-3}$, isto é; $x_0 = -3$ e que $u_0^{m/|Y_0|} = u_0^{30/1} =$

$u_0^{30} = h_0$. Além disso, é fácil observar, neste exemplo, que $u_1 = h_1^1$ e que $u_1^{m/|Y_1|} = u_1^{30/2} = u_1^{15} = h_1$. Também $u_2 = h_2^{x_2}$ para qualquer inteiro x_2 e $u_2^{m/|Y_2|} = u_2^{30/3} = u_2^{10} = h_2$.

Observe que $\mathrm{Dom}(u_j) = \mathrm{Dom}(h_j) = \cup Y_j$ para cada $j \in 3 = |Y|$.

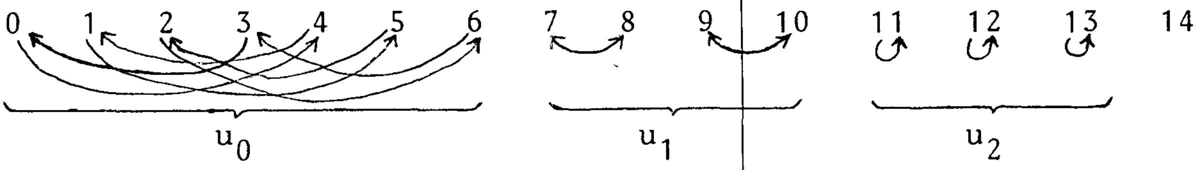


Diagrama 1.IV: As funções u_j para cada $j \in 3 = |Y|$.

Seja H_j uma permutação cíclica obtida de $\cup Y_j$ pela intercalação de todas as componentes cíclicas de u_j. Assim, tais H_j podem ser: $H_0 = (0\ 4\ 1\ 5\ 2\ 6\ 3)$, $H_1 = (7\ 9\ 8\ 10)$ e $H_2 = (11\ 12\ 13)$. Observe que $\mathrm{Dom}(H_j) = \mathrm{Dom}(u_j) = \mathrm{Dom}(h_j) = \cup Y_j$ para cada $j \in 3 = |Y|$.

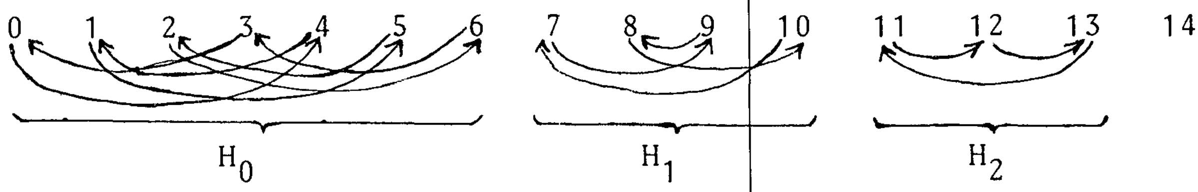


Diagrama 1.V: As funções H_j para cada $j \in 3 = |Y|$.

Agora consideremos $x = \cup\{H_j : j \in 3\}$, isto é:

$x = (0\ 4\ 1\ 5\ 2\ 6\ 3)(7\ 9\ 8\ 10)(11\ 12\ 13)[14]$. De agora em diante o símbolo $[t]$ indicará que t não pertence ao domínio da função em questão. Assim, $x(14) = \infty$. Observe que $x \in \mathrm{Sym}(14) = \mathrm{Sym}(k-1)$.

Construiremos agora a transformação y. Consideremos o conjunto $G = \{0,7,9,11,12,13,14\}$ e $g = (0\ 7\ 9\ 11\ 12\ 13\ 14)$ uma permutação cíclica de G.

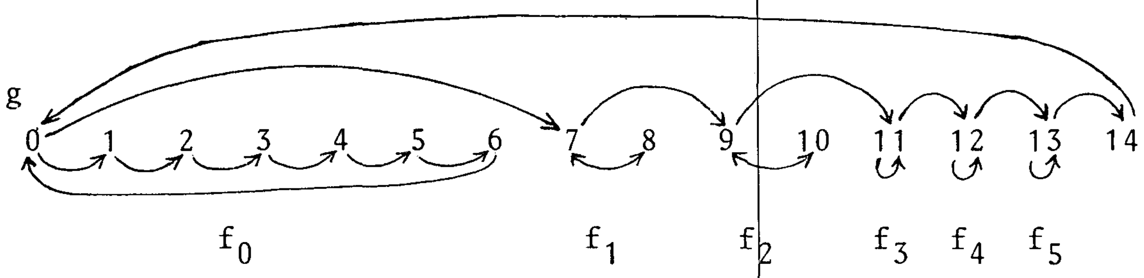


Diagrama 1.VI: Função g e funções f_i para cada $i \in 6 = |X|$.

Já que $(|G|,n) = (7,60) = 1$, pelo lema 1.6, existe $g_0 = (0\ 9\ 12\ 14\ 7\ 11\ 13)$ tal que $g_0^{60} = g$. Note que g_0 também é uma permutação cíclica do conjunto G e que $g_0 = g^2$.

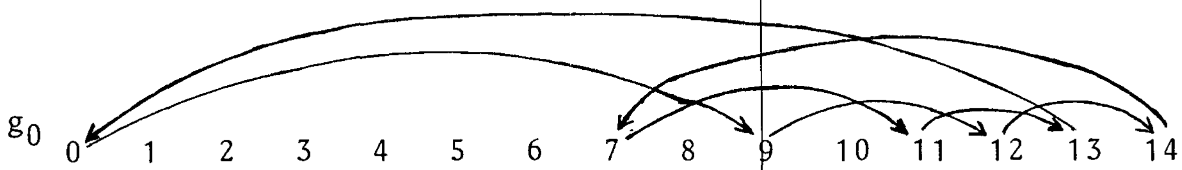


Diagrama 1.VII: A função g_0 obtida de g.

Consideremos $y = g_0 \cup \{(v,v) : v \in (k \setminus G)\} =$

$g_0 \cup id\restriction(15\setminus G)$, isto é: $y = (0\ 9\ 12\ 14\ 7\ 11\ 13)(1)(2)(3)(4)(5)(6)(8)(10)$. Observe que $y \in Sym(k) = Sym(15)$.

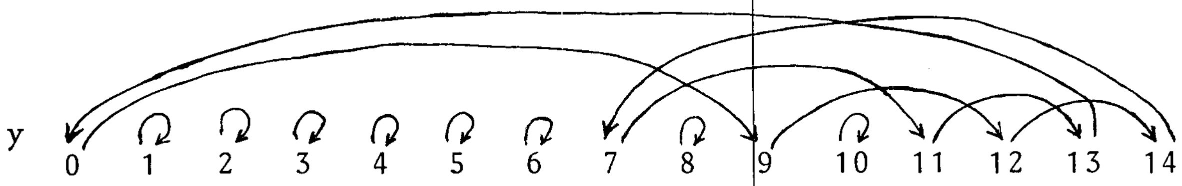


Diagrama 1.VIII: A função y.

Apresentamos, finalmente, as funções x e y desejadas. Observe que é fácil conferir, do diagrama abaixo, que $r_{15} = y^{60}x^{30}$.

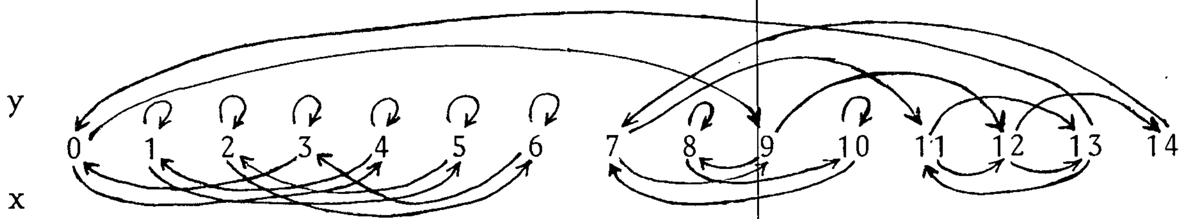


Diagrama 1.IX: As funções x e y.

EXEMPLO 2: $r_{16} = y^{60}x^{30}$, isto é: $k = 16$, $n = 60$ e $m = 30$.

Inicialmente, apresentamos a função r_{16}.

$$0 \mapsto 1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 4 \mapsto 5 \mapsto 6 \mapsto 7 \mapsto 8 \mapsto 9 \mapsto 10 \mapsto 11 \mapsto 12 \mapsto 13 \mapsto 14 \mapsto 15$$

Diagrama 2.I: r_{16}

Consideremos a partição $X = \{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$ do conjunto $k-1 = 15$ com $X_0 = \{0,1,2,3,4,5,6\}$, $X_1 = \{7,8\}$, $X_2 = \{9,10\}$, $X_3 = \{11\}$, $X_4 = \{12\}$, $X_5 = \{13\}$, $X_6 = \{14\}$.

Para cada $i \in 7 = |X|$ consideremos as seguintes permutações $f_i \in \mathrm{Sym}(X_i)$: $f_0 = (0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$, $f_1 = (7\ 8)$, $f_2 = (9\ 10)$, $f_3 = (11)$, $f_4 = (12)$, $f_5 = (13)$ e $f_6 = (14)$. Observe que o conjunto X_i é simplesmente o domínio de f_i e que em relação ao diagrama 1.II apresentamos apenas mais um ponto fixo.

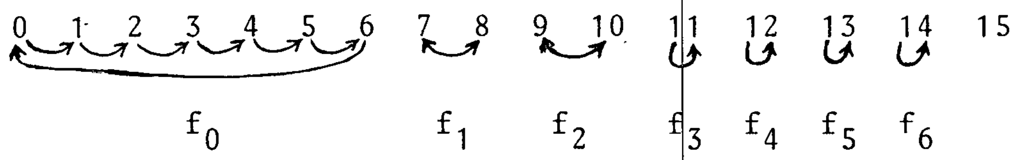


Diagrama2.II: As funções f_i para cada $i \in 7 = |X|$.

Sejam $Y_0 = \{X_0\}$, $Y_1 = \{X_1, X_2\}$, $Y_2 = \{X_3, X_4\}$ e $Y_3 = \{X_5, X_6\}$. Observe que $Y = \{Y_0, Y_1, Y_2, Y_3\}$ é uma partição de X.

Para cada $j \in 4 = |Y|$ consideremos as seguintes permutações $h_j \in \mathrm{Sym}(\cup Y_j)$: $h_0 = (0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$, $h_1 = (7\ 8)(9\ 10)$, $h_2 = (11)(12)$ e $h_3 = (13)(14)$. Observe que $\mathrm{Dom}(h_j) = \cup Y_j$ para cada $j \in 4 = |Y|$.

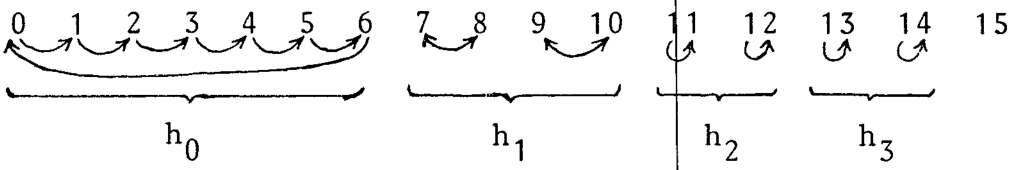


Diagrama2.III: As funções h_j para cada $j \in 4 = |Y|$.

Como $({}^m/|Y_j|, ||Y_j||) = 1$, pelo lema 1.6, temos para cada $j \in 4 = |Y|$ que existe permutação u_j de $\cup Y_j$ tal que $u_j \cong h_j$, tal que $u_j = h_j^{x_j}$ para algum inteiro x_j e tal que $u_j^{m/|Y_j|} = h_j$. Neste caso, tais u_j podem ser: $u_0 = (0\ 4\ 1\ 5\ 2\ 6\ 3)$, $u_1 = (7\ 8)(9\ 10)$, $u_2 = (11)(12)$ e $u_3 = (13)(14)$. Observe que, neste exemplo, $u_0 = h_0^{-3}$, isto é: $x_0 = -3$, e que $u_0^{m/|Y_0|} = u_0^{30/1} = h_0$. Também é fácil observar que $u_1 = h_1^1$ e que $u_1^{m/|Y_1|} = u_1^{30/2} = u_1^{15} = h_1$. Além disso, $u_2 = h_2^{x_2}$ e $u_3 = h_3^{x_3}$ para quaisquer inteiros x_2 e x_3 como também $u_2^{m/|Y_2|} = u_2^{30/2} = u_2^{15} = h_2$ e $u_3^{m/|Y_3|} = u_3^{30/2} = u_3^{15} = h_3$. Observe que $\mathrm{Dom}(u_j) = \mathrm{Dom}(h_j) = \cup Y_j$ para cada $j \in 4 = |Y|$.

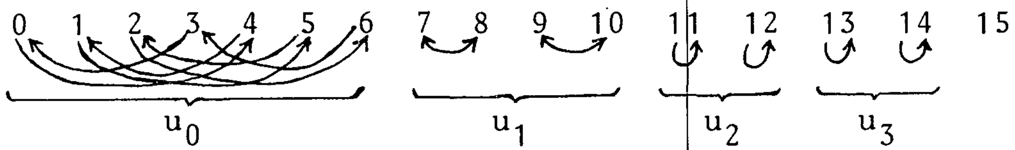


Diagrama2.IV: As funções u_j para cada $j \in 4 = |Y|$.

Para cada $j \in 4 = |Y|$ consideremos H_j uma permutação cíclica de $\cup Y_j$ obtida pela intercalação de todas as componentes cíclicas de u_j. Assim, tais H_j podem ser: $H_0 = (0\ 4\ 1\ 5\ 2\ 6\ 3)$, $H_1 = (7\ 9\ 8\ 10)$, $H_2 = (11\ 12)$ e $H_3 = (13\ 14)$. Observe que $Dom(H_j) = Dom(u_j) = Dom(h_j) = \cup Y_j$ para cada $j \in 4 = |Y|$.

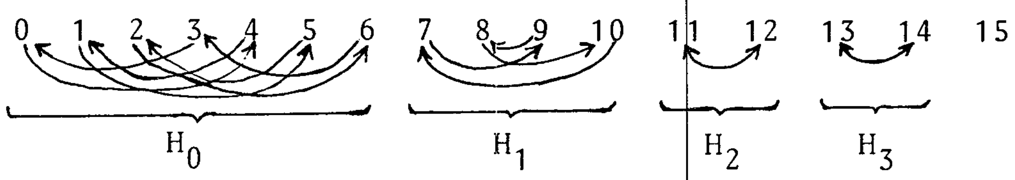


Diagrama2.V: As funções H_j para cada $j \in 4 = |Y|$.

Agora consideremos a função $x = \cup\{H_j : j \in 4\}$, isto é: $x = (0\ 4\ 1\ 5\ 2\ 6\ 3)(7\ 9\ 8\ 10)(11\ 12)(13\ 14)[15]$. Observe que $x \in Sym(15) = Sym(k-1)$.

Construiremos, agora, a transformação y. Consideremos o conjunto $H = \{7,9,11,12,13,14,15\}$ e $g_1 = (7\ 9\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15)$ uma permutação cíclica de H.

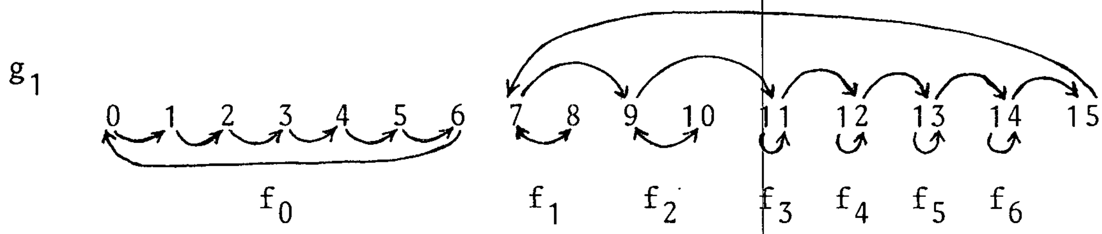


Diagrama2.VI: Função g_1 e as funções f_i para cada $i \in 7$.

Observe que propositadamente excluimos o ponto 0 do conjunto H para conseguirmos $|H| = 7$. Assim, $(|H|,n) = (7,60) = 1$ e, pelo lema 1.6, existe permutação cíclica g_2 de H tal que $g_2^{60} = g_1$. Neste caso, podemos utilizar $g_2 = (7\ 11\ 13\ 15\ 9\ 12\ 14)$, e então observar que $g_2 = g_1^2$.

g_2

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

Diagrama2.VII: Função g_2 obtida de g_1.

Agora estendemos estrategicamente a permutação g_2 para uma função g_3 que não é injetiva. O nosso motivo para tal extensão é de obter uma função g_3 concordando com g_2 no conjunto H, mas introduzindo o ponto 0 dentro do domínio da extensão de g_2. Com isso, queremos tal g_3 de forma que $g_3(0) = g_2(k-1)$; neste caso esta condição é que $g_3(0) = g_2(15)$. Portanto, definimos $g_3 = g_2 \cup \{(0,g_2(15))\} = g_2 \cup \{(0,9)\}$.

g_3

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

Diagrama2.VIII: Função g_3.

Antes de acabar a construção da função y neste exemplo, explicamos mais detalhadamente como servirá esta extensão g_3 de g_2 obtida pela reunião de g_2 com a "barbinha" $(0,g_2(15)) = (0,9)$.

Observe-se que $6 \in \mathrm{Dom}(r_{16})$, mas que $6 \notin \mathrm{Dom}(g_2^{60}x^{30})$, pois $x^{30}(6) = 0 \notin \mathrm{Dom}(g_2)$. Além disso, queremos $y^{60}(0) = y^{60}x^{30}(6) = r_{16}(6) = 7$. Esta y será uma extensão de g_2, com $\mathrm{Dom}(y) = 16$. A função g_3 é, então, uma extensão preliminar de g_2, e g_3 é uma restrição de y. Ainda, desejando que $y^{60}(0) = 7$, observamos que a nossa definição de g_3 dá que $y^{60}(0) = g_3^{60}(0) = g_2^{60}(15)=7$.

Agora definimos $y = g_3 \cup \{(v,v) : v \in (k\setminus 1)\setminus H\}$. Note-se que a transformação y é uma permutação do conjunto $k\setminus 1$ unida com a "barbinha" $(0,g_2(15)) = (0,9)$.

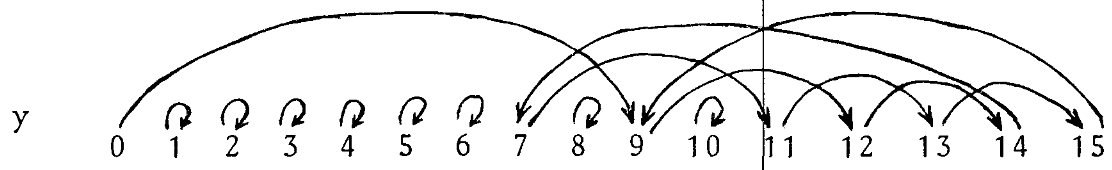


Diagrama2.IX: Função y.

Finalmente, apresentamos as transformações x e y desejadas. Não é difícil averiguar, do diagrama 2.X abaixo, que $r_{16} = y^{60}x^{30}$.

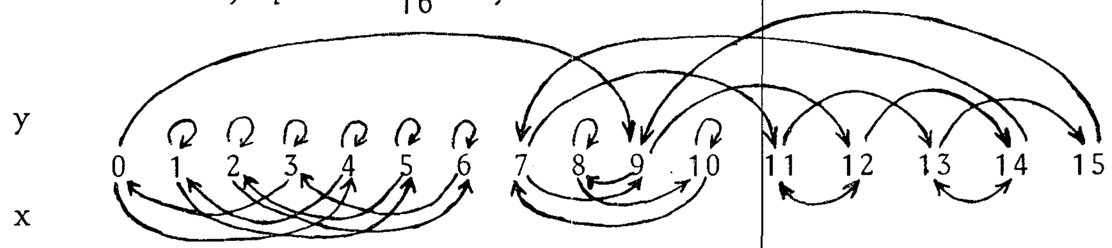


Diagrama2.X: As funções x e y.

EXEMPLO 3: $r_k = y^n x^m$ onde $k = 81$, $n = m = 55440 = 2^4.3^2.5.7.11$

Evitamos aqui o diagrama da função r_{81}.

Consideremos a partição $X = \{X_0, X_1, X_2, \ldots, X_{29}\}$ do conjunto $k-1 = 80$ com $X_0 = \{0,1\}$, $X_1 = \{2,3\}$, $X_2 = \{4,5\}$, $X_3 = \{6,7\}$, $X_4 = \{8,9\}$, $X_5 = \{10,11\}$, $X_6 = \{12,13\}$, $X_7 = \{14,15\}$, $X_8 = \{16,17\}$, $X_9 = \{18,19\}$, $X_{10} = \{20,21\}$, $X_{11} = \{22,23\}$, $X_{12} = \{24,25\}$, $X_{13} = \{26,27\}$, $X_{14} = \{28,29\}$, $X_{15} = \{30,31\}$, $X_{16} = \{32,33,34\}$, $X_{17} = \{35,36,37\}$, $X_{18} = \{38,39,40\}$, $X_{19} = \{41,42,43\}$, $X_{20} = \{44,45,46\}$, $X_{21} = \{47,48,49\}$, $X_{22} = \{50,51,52\}$, $X_{23} = \{53,54,55\}$, $X_{24} = \{56,57,58\}$, $X_{25} = \{59,60,61,62,63,64,65,66,67,68,69,70,71,72,73,74,75\}$, $X_{26} = \{76\}$, $X_{27} = \{77\}$, $X_{28} = \{78\}$ e $X_{29} = \{79\}$.

Para cada $i \in 30 = |X|$ consideremos as seguintes permutações $f_i \in Sym(X_i)$: $f_0 = (0\ 1)$, $f_1 = (2\ 3)$, $f_2 = (4\ 5)$, $f_3 = (6\ 7)$, $f_4 = (8\ 9)$, $f_5 = (10\ 11)$, $f_6 = (12\ 13)$, $f_7 = (14\ 15)$, $f_8 = (16\ 17)$, $f_9 = (18\ 19)$, $f_{10} = (20\ 21)$, $f_{11} = (22\ 23)$, $f_{12} = (24\ 25)$, $f_{13} = (26\ 27)$, $f_{14} = (28\ 29)$, $f_{15} = (30\ 31)$,

$f_{16} = (32\ 33\ 34)$, $f_{17} = (35\ 36\ 37)$, $f_{18} = (38\ 39\ 40)$,

$f_{19} = (41\ 42\ 43)$, $f_{20} = (44\ 45\ 46)$, $f_{21} = (47\ 48\ 49)$,

$f_{22} = (50\ 51\ 52)$, $f_{23} = (53\ 54\ 55)$, $f_{24} = (56\ 57\ 58)$,

$f_{25} = (59\ 60\ 61\ 62\ 63\ 64\ 65\ 66\ 67\ 68\ 69\ 70\ 71\ 72\ 73\ 74\ 75)$,

$f_{26} = (76)$, $f_{27} = (77)$, $f_{28} = (78)$ e $f_{29} = (79)$. Note-se que o conjunto X_i é simplesmente o domínio de f_i.

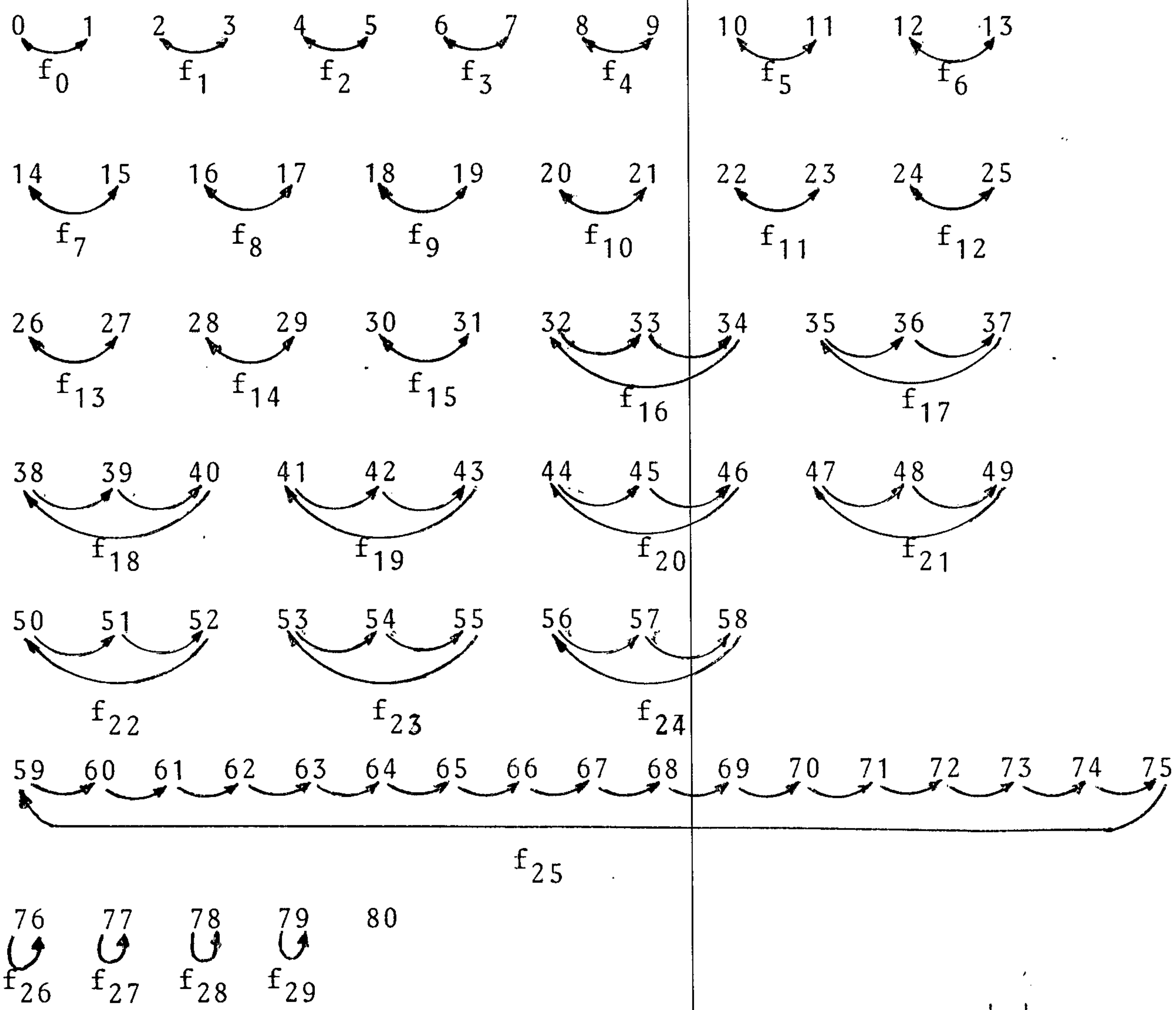
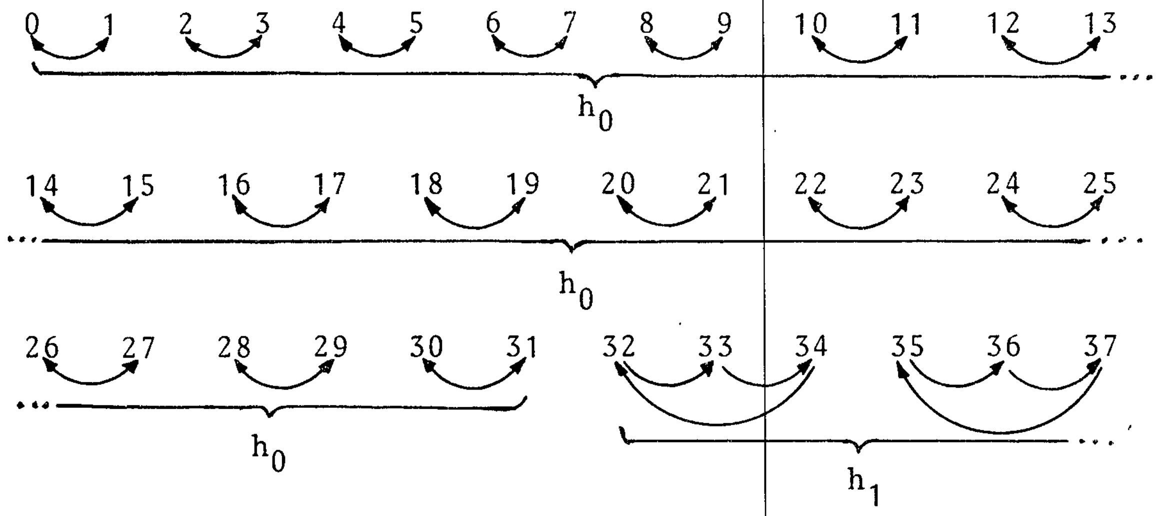


Diagrama 3.I: As funções f_i para cada $i \in 30 = |X|$.

Sejam $Y_0 = \{X_0, X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, X_{15}\}$, $Y_1 = \{X_{16}, X_{17}, \ldots, X_{24}\}$, $Y_2 = \{X_{25}\}$ e $Y_3 = \{X_{26}, X_{27}, X_{28}, X_{29}\}$. Note que $Y = \{Y_0, Y_1, Y_2, Y_3\}$ é uma partição de X.

Para cada $j \in 4 = |Y|$ consideremos as seguintes permutações $h_j \in \mathrm{Sym}(\cup Y_j)$: $h_0 = (0\ 1)(2\ 3)(4\ 5)(6\ 7)(8\ 9)(10\ 11)(12\ 13)(14\ 15)(16\ 17)(18\ 19)(20\ 21)(22\ 23)(24\ 25)(26\ 27)(28\ 29)(30\ 31)$, $h_1 = (32\ 33\ 34)(35\ 36\ 37)(38\ 39\ 40)(41\ 42\ 43)(44\ 45\ 46)(47\ 48\ 49)(50\ 51\ 52)(53\ 54\ 55)(56\ 57\ 58)$, $h_2 = (59\ 60\ 61\ 62\ 63\ 64\ 65\ 66\ 67\ 68\ 69\ 70\ 71\ 72\ 73\ 74\ 75)$ e $h_3 = (76)(77)(78)(79)$. Observe que $\mathrm{Dom}(h_j) = \cup Y_j$ para cada $j \in 4 = |Y|$.



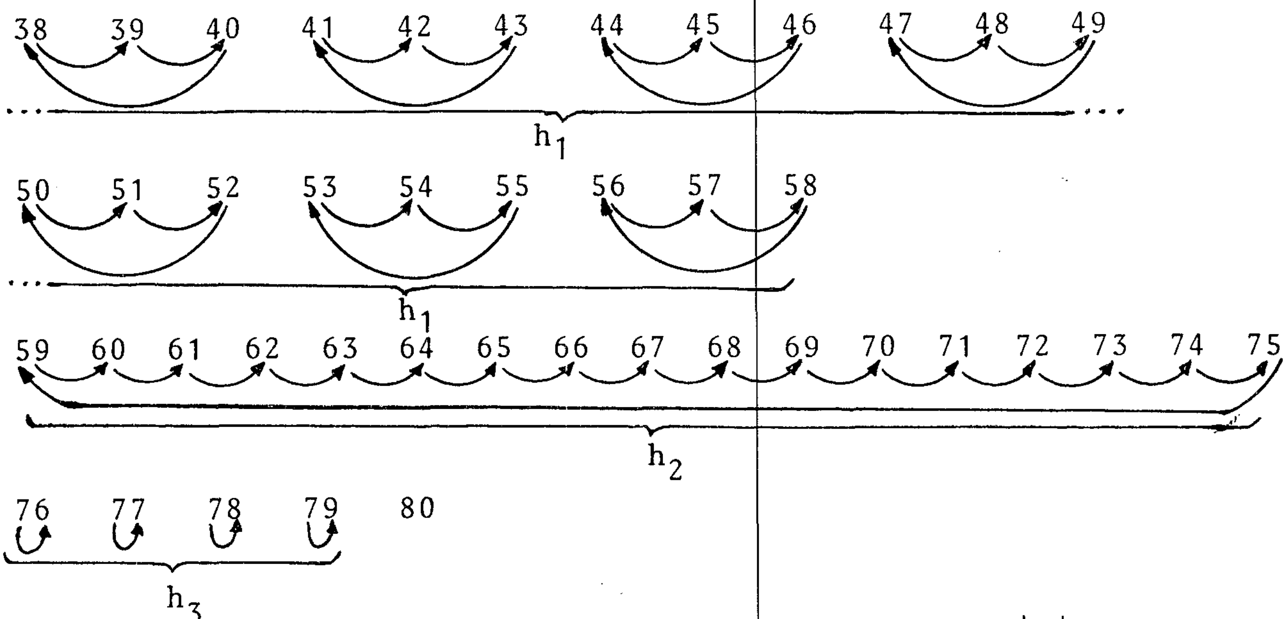


Diagrama 3.II: Funções h_j para cada $j \in 4 = |Y|$.

Já que $({}^{m}/|Y_j|, ||Y_j||) = 1$, pelo lema 1.6, temos para cada $j \in 4 = |Y|$ que existe permutação u_j de $\cup Y_j$ tal que $u_j \cong h_j$, tal que $u_j = h_j^{x_j}$ para algum inteiro x_j e tal que $u_j^{m/|Y_j|} = h_j$. Neste exemplo, tais u_j podem ser: $u_0 = h_0$, $u_1 = h_1$, $u_2 = (59\ 65\ 71\ 60\ 66\ 72\ 61\ 67\ 73\ 62\ 68\ 74\ 63\ 69\ 75\ 64\ 70)$ e $u_3 = h_3$.

Observações: 1) $u_0 = h_0^1$, isto é; $x_0 = 1$ e $u_0^{m/|Y_0|} = u_0^{m/16} = h_0$, já que m/16 é o número ímpar 3465.

2) $u_1 = h_1^1$, isto é; $x_1 = 1$ e $u_1^{m/|Y_1|} =$

$u_1^{m/9} = h_1$, já que $m/9 = 6160$ e $6160 \equiv 1 (\mathrm{mod} 3)$.

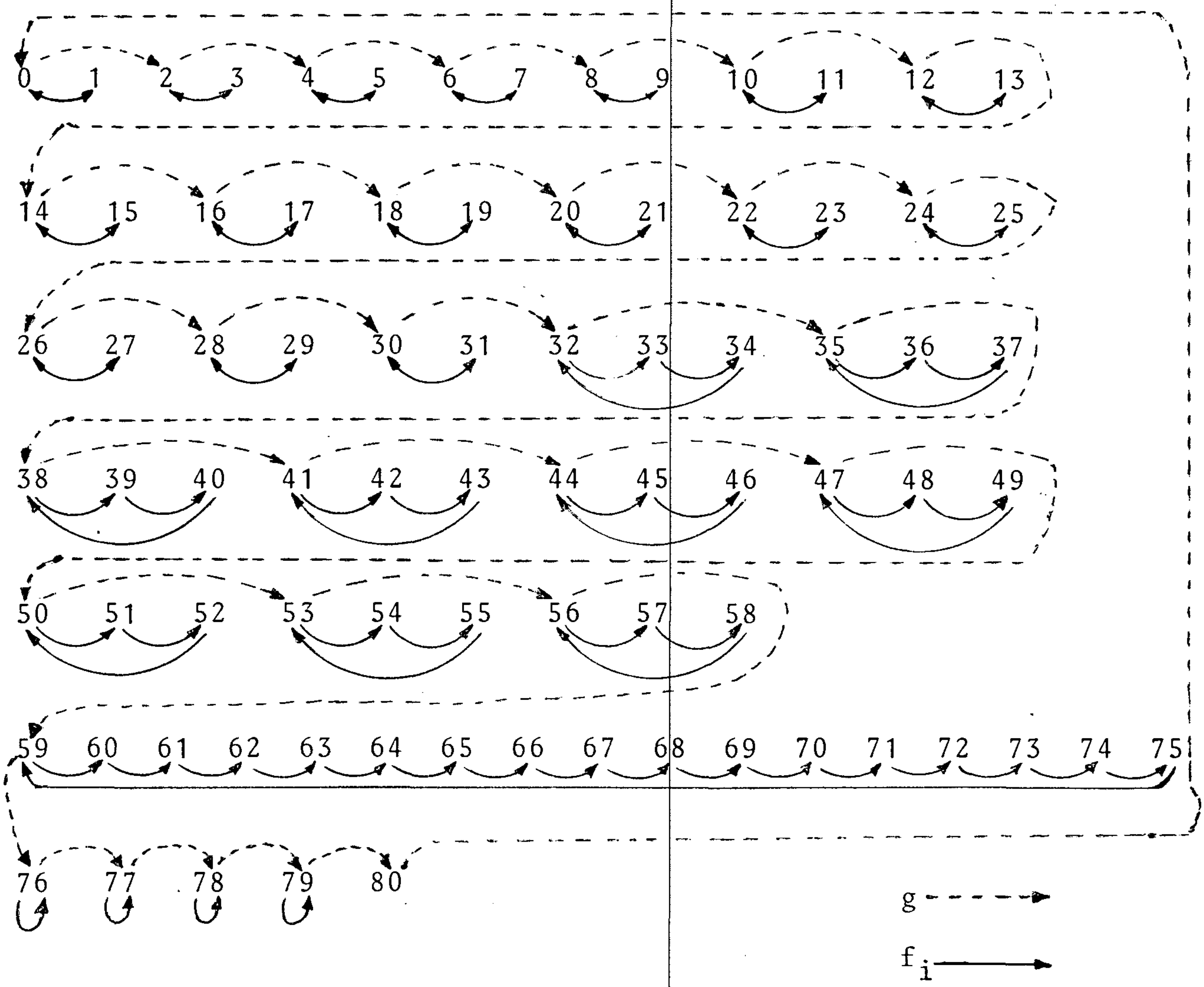
3) $u_2 = h_2^6$, isto é; $x_2 = 6$ e $u_2^{m/|Y_2|} = u_2^{m/1} =$ $u_2^m = u_2^3$, já que $m = 55440 \equiv 3 (\mathrm{mod} 17)$. Então $u_2^{m/|Y_2|} =$ $u_2^3 = (h_2^6)^3 = h_2^{18} = h_2$.

4) $u_3 = h_3^1$, isto é; $x_3 = 1$ e $u_3^{m/|Y_3|} = u_3^{m/4} = h_3$.

Seja H_j uma permutação cíclica obtida de $\cup Y_j$ pela intercalação de todas as componentes cíclicas de u_j. Assim, tais H_j podem ser: $H_0 = (0\ 2\ 4\ 6\ 8\ 10\ 12\ 14\ 16\ 18\ 20\ 22\ 24\ 26\ 28\ 30\ 1\ 3\ 5\ 7\ 9\ 11\ 13\ 15\ 17\ 19\ 21\ 23\ 25\ 27\ 29\ 31)$, $H_1 = (32\ 35\ 38\ 41\ 44\ 47\ 50\ 53\ 56\ 33\ 36\ 39\ 42\ 45\ 48\ 51\ 54\ 57\ 34\ 37\ 40\ 43\ 46\ 49\ 52\ 55\ 58)$, $H_2 = u_2 = (59\ 65\ 71\ 60\ 66\ 72\ 61\ 67\ 73\ 62\ 68\ 74\ 63\ 69\ 75\ 64\ 70)$ e $H_3 = (76\ 77\ 78\ 79)$.

Agora definimos a função $x = \cup\{H_j : j \in 4\}$, isto é: $x = (0\ 2\ 4\ 6\ 8\ 10\ 12\ 14\ 16\ 18\ 20\ 22\ 24\ 26\ 28\ 30\ 1\ 3\ 5\ 7\ 9\ 11\ 13\ 15\ 17\ 19\ 21\ 23\ 25\ 27\ 29\ 31)(32\ 35\ 38\ 41\ 44\ 47\ 50\ 53\ 56\ 33\ 36\ 39\ 42\ 45\ 48\ 51\ 54\ 57\ 34\ 37\ 40\ 43\ 46\ 49\ 52\ 55\ 58)(59\ 65\ 71\ 60\ 66\ 72\ 61\ 67\ 73\ 62\ 68\ 74\ 63\ 69\ 75\ 64\ 70)(76\ 77\ 78\ 79)[80]$. Vê-se que $x \in \mathrm{Sym}(80) = \mathrm{Sym}(k-1)$.

Construiremos, agora, a transformação y. Consideremos o conjunto $G = \{0,2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,26,28,30,32,35,38,41,44,47,50,53,56,59,76,77,78,79,80\}$ e $g = (0\ 2\ 4\ 6\ 8\ 10\ 12\ 14\ 16\ 18\ 20\ 22\ 24\ 26\ 28\ 30\ 32\ 35\ 38\ 41\ 44\ 47\ 50\ 53\ 56\ 59\ 76\ 77\ 78\ 79\ 80)$ uma permutação 31-cíclica de G.



Diagraama 3.III: Função g e as funções f_i para cada $i \in 30$.

Já que $(|G|,n) = (31,55440) = 1$, pelo lema 1.6, existe g_0 = (0 26 76 16 47 6 32 79 22 56 12 41 2 28 77 18 50 8 35 80 24 59 14 44 4 30 78 20 53 10 38) tal que $g_0^n = g$. Observe que g_0 também é uma permutação 31-cíclica do conjunto G e que $g_0 = g^{13}$. Neste caso $g_0^n = g_0^{55440} = g_0^{12}$ já que $55440 \equiv 12(\mathrm{mod}31)$.

Agora definimos $y = g_0 \cup \{(v,v): v \in (k\setminus G)\} = g_0 \cup id\restriction(k\setminus G)$. Tem-se que $y \in Sym(81) = Sym(k)$.

Apresentamos, agora, as funções x e y desejadas e que satisfazem a equação $r_{81} = y^n x^m$ com n=m= 55440.

x = (0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30 1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31)(32 35 38 41 44 47 50 53 56 33 36 39 42 45 48 51 54 57 34 37 40 43 46 49 52 55 58)(59 65 71 60 66 72 61 67 73 62 68 74 63 69 75 64 70)(76 77 78 79)[80].

y = (0 26 76 16 47 6 32 79 22 56 12 41 2 28 77 18 50 8 35 80 24 59 14 44 4 30 78 20 53 10 38)(1)(3)(5)(7)(9)(11)(13)(15) (17)(19)(21)(23)(25)(27)(29)(31)(33)(34)(36)(37)(39)(40)(42) (43)(45)(46)(48)(49)(51)(52)(54)(55)(57)(58)(60)(61)(62)(63) (64)(65)(66)(67)(68)(69)(70)(71)(72)(73)(74)(75).

No exemplo 3, conseguimos uma solução $(x,y) \in (Prt(81))^2$ para a equação $r_{81} = y^n x^m$, onde n = m = 55440, de tal forma que y é uma permutação do conjunto 81.

No próximo, exemplo 4, solucionaremos a equação análoga $r_{82} = y^n x^m$ de novo para $n = m = 55440 = 2^4 3^2 5.7.11$. Mas parece que nossas técnicas nos obrigarão a escolher uma função y de tal forma que y não é uma permutação do conjunto 82. Tal y vai ser, no exemplo 4, uma permutação do conjunto $82\setminus 1$ reunião com uma "barbinha" levando 0 dentro de $82\setminus 1$.

Neste sentido, o exemplo 3 é semelhante ao exemplo 1, mais simples; e o exemplo 4 é semelhante ao exemplo 2.

EXEMPLO 4: $r_k = y^n x^m$ onde $k = 82$ e $n = m = 55440 = 2^4 3^2 5.7.11$.

Seja $X = \{X_0, X_1, X_2, \ldots, X_{30}\}$ uma partição do conjunto $k-1 = 81$ com $X_0 = \{0,1\}$, $X_1 = \{2,3\}$, $X_2 = \{4,5\}$, $X_3 = \{6,7\}$, $X_4 = \{8,9\}$, $X_5 = \{10,11\}$, $X_6 = \{12,13\}$, $X_7 = \{14,15\}$, $X_8 = \{16,17\}$, $X_9 = \{18,19\}$, $X_{10} = \{20,21\}$, $X_{11} = \{22,23\}$, $X_{12} = \{24,25\}$, $X_{13} = \{26,27\}$, $X_{14} = \{28,29\}$, $X_{15} = \{30,31\}$, $X_{16} = \{32,33,34\}$, $X_{17} = \{35,36,37\}$, $X_{18} = \{38,39,40\}$, $X_{19} = \{41,42,43\}$, $X_{20} = \{44,45,46\}$, $X_{21} = \{47,48,49\}$, $X_{22} = \{50,51,52\}$, $X_{23} = \{53,54,55\}$, $X_{24} = \{56,57,58\}$, $X_{25} = \{59,60,61,62,63,64,65,66,67,68,69,70,71,72,73,74,75\}$, $X_{26} = \{76\}$, $X_{27} = \{77\}$, $X_{28} = \{78\}$,

$X_{29} = \{79\}$ e $X_{30} = \{80\}$.

Para cada $i \in 31 = |X|$ consideremos as permutações $f_i \in Sym(X_i)$ como no exemplo 3. Tais f_i estão no diagrama 4.I abaixo.

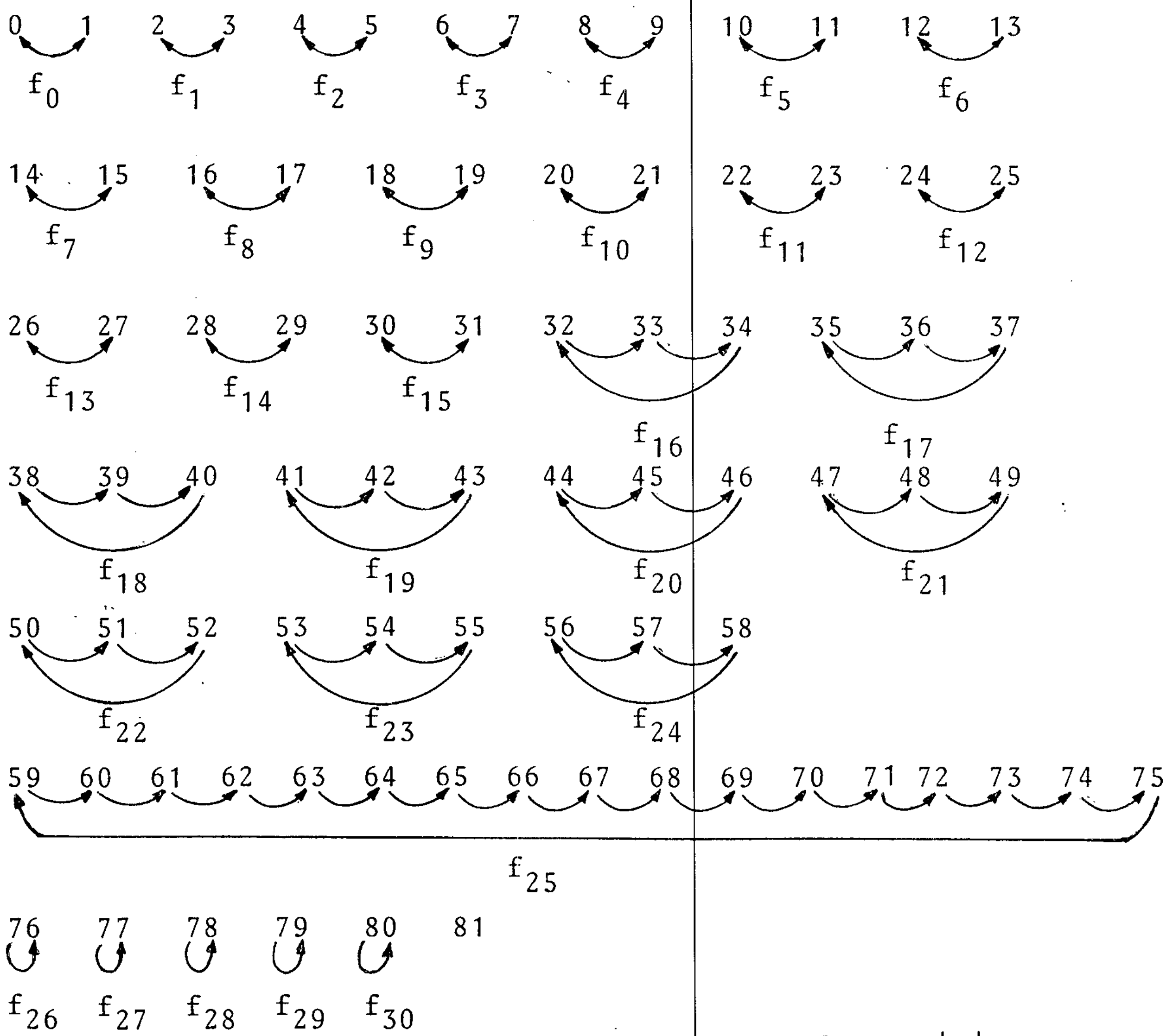


Diagrama 4.I: Funções f_i para cada $i \in 31 = |X|$.

Sejam $Y_0 = \{X_0, X_1, \ldots, X_{15}\}$, $Y_1 = \{X_{16}, \ldots, X_{24}\}$,

$Y_2 = \{X_{25}\}$ e $Y_3 = \{X_{26}, X_{27}, X_{28}, X_{29}, X_{30}\}$. Observe que $Y = \{Y_0, Y_1, Y_2, Y_3\}$ é uma partição de X.

Para cada $j \in 4 = |Y|$, consideremos as permutações $h_j \in \mathrm{Sym}(\cup Y_j)$ como no exemplo 3.

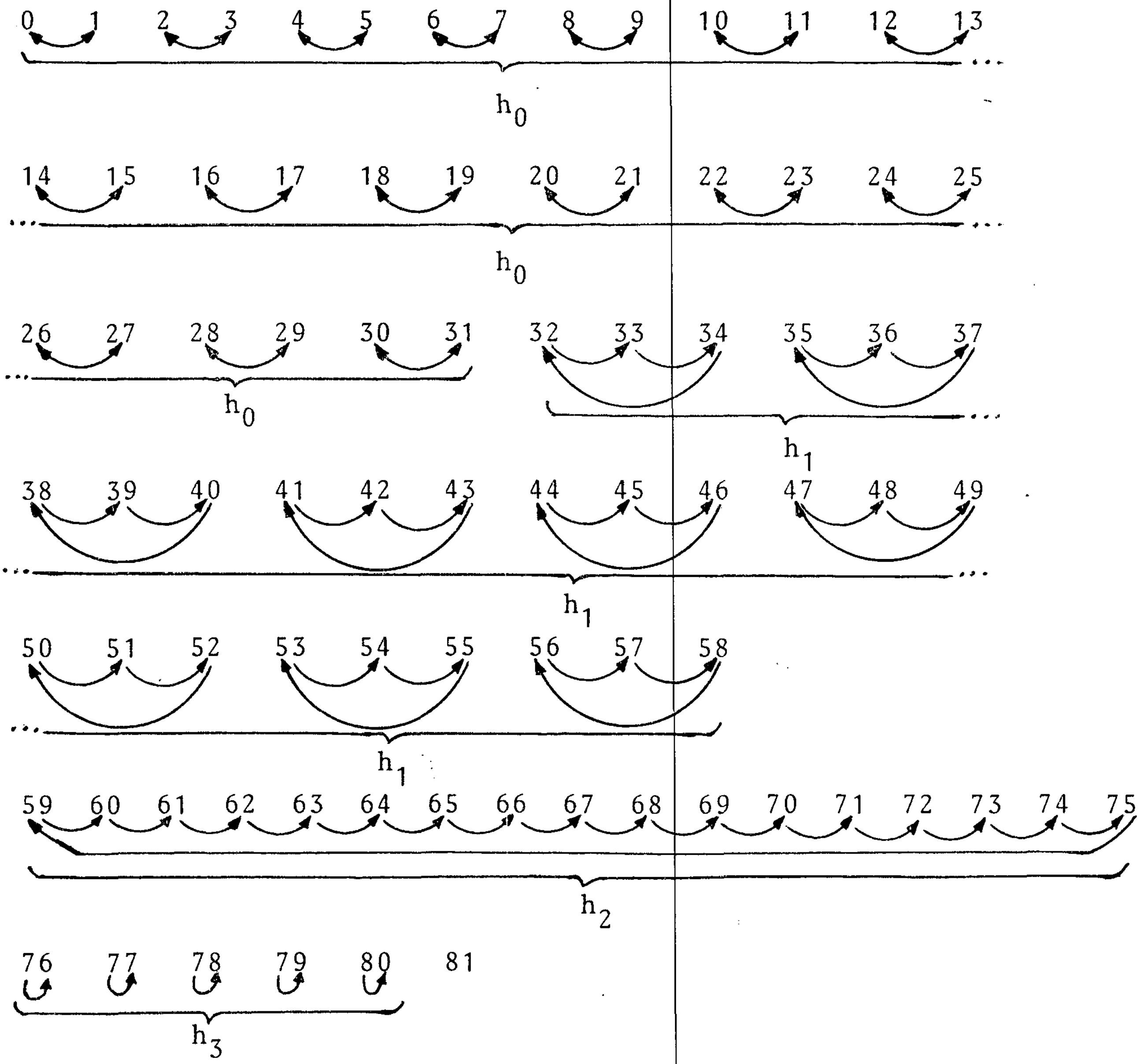


Diagrama 4.II: Funções h_j para cada $j \in 4 = |Y|$.

Já que $({}^{m}/|Y_j|, ||Y_j||) = 1$, pelo lema 1.6, temos para cada $j \in 4 = |Y|$ que existe permutação u_j de $\cup Y_j$ tal que $u_j \cong h_j$, tal que $u_j^{m/|Y_j|} = h_j$. Neste exemplo, tais u_j podem ser: $u_0 = h_0$, $u_1 = h_1$, $u_2 = (59\ 65\ 71\ 60\ 66\ 72\ 61\ 67\ 73\ 62\ 68\ 74\ 63\ 69\ 75\ 64\ 70)$ e $u_3 = h_3$.

Também é fácil observar que:

1) $u_0 = h_0^1$, isto é; $x_0 = 1$ e $u_0^{m/|Y_0|} = u_0^{m/16} = h_0$, já que $m/16$ é o número ímpar 3465.

2) $u_1 = h_1^1$, isto é; $x_1 = 1$ e $u_1^{m/|Y_1|} = u_1^{m/9} = h_1$, já que $m/9 = 6160$ e $6160 \equiv 1 (\mathrm{mod} 3)$.

3) $u_2 = h_2^6$, isto é; $x_2 = 6$ e $u_2^{m/|Y_2|} = u_2^{m/1} = u_2^m = u_2^3$, já que $m = 55440 \equiv 3 (\mathrm{mod} 17)$. Então $u_2^{m/|Y_2|} = u_2^3 = (h_2^6)^3 = h_2^{18} = h_2$.

4) $u_3 = h_3^1$, isto é; $x_3 = 1$ e $u_3^{m/|Y_3|} = u_3^{m/4} = h_3$.

Seja H_j uma permutação cíclica obtida pela intercalação de todas as componentes cíclicas de u_j. Assim, tais H_j podem ser: H_0 = (0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30 1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31),

H_1 = (32 35 38 41 44 47 50 53 56 33 36 39 42 45 48 51 54 57 34 37 40 43 46 49 52 55 58), $H_2 = u_2$ = (59 65 71 60 66 72 61 67 73 62 68 74 63 69 75 64 70) e H_3 = (76 77 78 79 80).

Agora definimos $x = \bigcup\{H_j : j \in 4\}$, isto é:

x = (0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30 1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31)(32 35 38 41 44 47 50 53 56 33 36 39 42 45 48 51 54 57 34 37 40 43 46 49 52 55 58)(59 65 71 60 66 72 61 67 73 62 68 74 63 69 75 64 70)(76 77 78 79 80)[81].

Para construirmos a transformação y usamos a mesma estratégia do exemplo 2. Consideremos o conjunto H = (2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30 32 35 38 41 44 47 50 53 56 59 76 77 78 79 80 81) e g_1 = (2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30 32 35 38 41 44 47 50 53 56 59 76 77 78 79 80 81) uma permutação 31-cíclica de H.

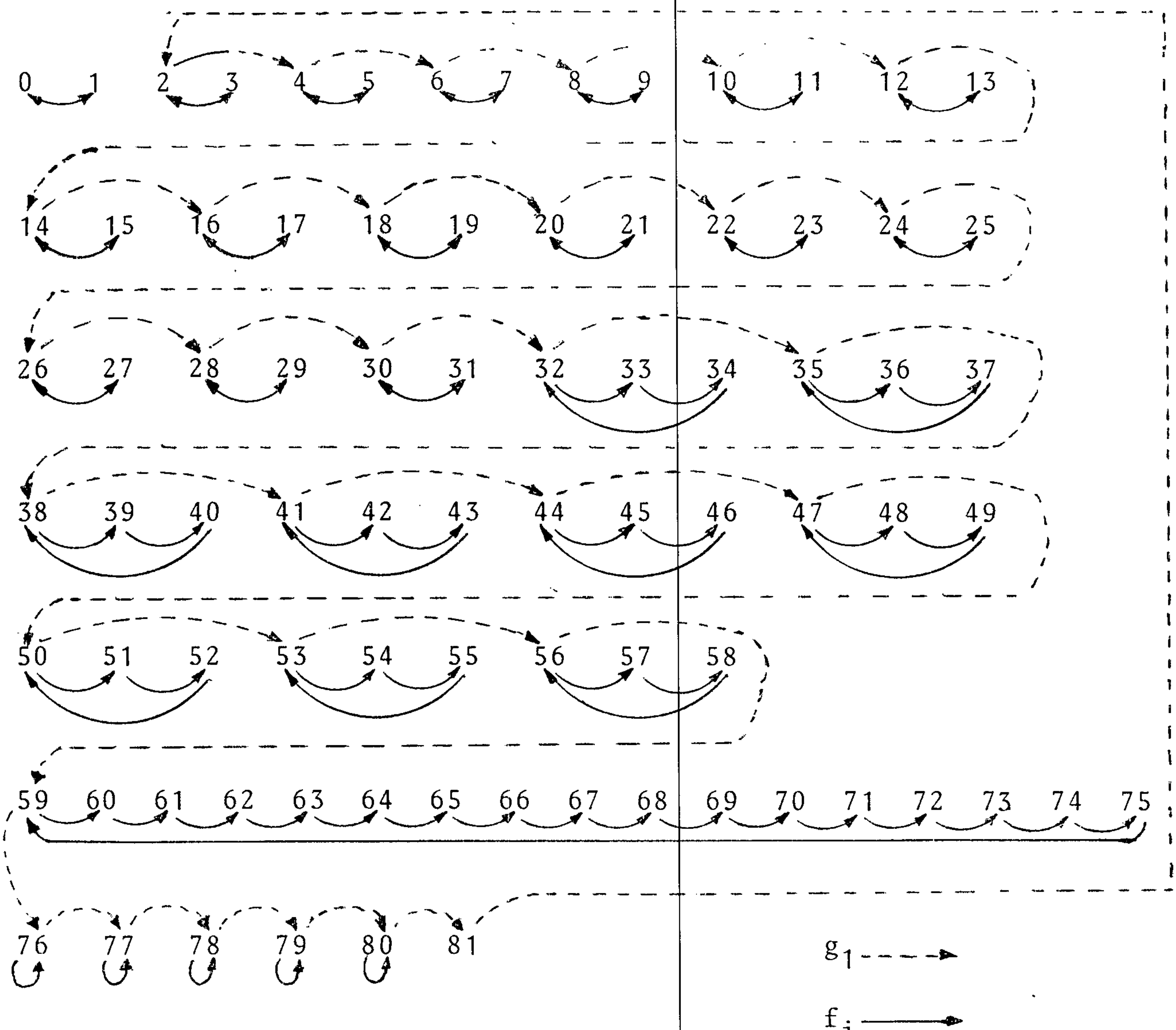


Diagrama 4.III: **Função** g_1 e as função f_i para cada $i \in 31$.

Note que, propositadamente, excluimos o ponto 0 do conjunto H para conseguirmos $|H| = 31$. Assim, $(|H|,n) = (31,55440) = 1$ e, pelo lema 1.6, existe permutação 31-cíclica g_2 de H tal que $g_2^n = g_1$. Neste caso, podemos usar $g_2 = (2\ 28\ 77\ 18\ 50\ 8\ 35\ 80\ 24\ 59\ 14\ 44\ 4\ 30\ 78\ 20\ 53\ 10\ 38\ 81\ 26\ 76\ 16\ 47\ 6\ 32\ 79\ 22\ 56\ 12\ 41)$; observar que $g_2 = g_1^{13}$ e que $g_1^n = g_1^{55440} = g_1^{12}$ já que $55440 \equiv 12 (\mathrm{mod} 31)$.

Agora estendemos estrategicamente a permutação g_2 para uma função não injetiva g_3. Nosso motivo para tal extensão é o de obter uma função g_3 concordando com g_2 no conjunto H, mas inserindo o ponto 0 no domínio de g_3. Com isso, queremos tal g_3 de forma que $g_3(0) = g_2(k-1)$. Neste caso, esta condição é que $g_3(0) = g_2(81) = 26$. Portanto, definimos $g_3 = g_2 \cup \{(0, g_2(81))\} = g_2 \cup \{(0,26)\}$.

Explicamos, agora, como servirá esta extensão g_3 de g_2 obtida pela reunião de g_2 com a "barbinha" $(0, g_2(81)) = (0,26)$.

Observe que $1 \in Dom(r_{82})$, mas que $1 \notin Dom(g_2^n x^m)$, pois $x^m(1) = 0 \notin Dom(g_2)$. Além disso, queremos $y^n(0) = y^n x^m(1) = r_{82}(1) = 2$. Esta y será uma extensão de g_2 com $Dom(y) = 82$. A função g_3 é uma extensão preliminar de g_2, e g_3 é uma restrição de y. Desejando que $y^n(0) = 2$ podemos observar que a nossa definição de g_3 dá que $y^n(0) = g_3^n(0) = g_2^n(81) = 2$.

Agora definimos $y = g_3 \cup \{(v,v) : v \in ((k\setminus 1)\setminus H)\}$. Note-se que a função y é uma permutação do conjunto $k\setminus 1 = 82\setminus 1$ reunida com a "barbinha" $(0, g_2(81)) = (0,26)$.

Quando o terno (k,n,m) for justo, as nossas técnicas, para produzir uma solução $(x,y) \in Prt(k)\times Prt(k)$ para a equação $r_k = y^n x^m$, usualmente podem produzir mais de uma solução. O fato parece ser o de que o conjunto de tais soluções é grande quando k for grande. O próximo exemplo 5 mostra uma solução para a equação $r_{81} = y^n x^m$ com $n = m = 55440 = 2^4.3^2.5.7.11$, que é diferente da solução conseguida no exemplo 3 para a mesma equação.

EXEMPLO 5: $r_k = y^n x^m$ onde $k = 81$ e $n = m = 55440 = 2^4.3^2.5.7.11$.

Para construirmos as transformações x e y consideremos a partição $X = \{X_0, X_1, X_2, \ldots, X_{11}\}$ do conjunto $k-1 = 80$ com $X_0 = \{0,1,2,\ldots,22\}$, $X_1 = \{23,24,25,\ldots,45\}$, $X_2 = \{46,47,48,\ldots,58\}$, $X_3 = \{59,60,61,\ldots,71\}$, $X_4 = \{72\}$, $X_5 = \{73\}$, $X_6 = \{74\}$, $X_7 = \{75\}$, $X_8 = \{76\}$, $X_9 = \{77\}$, $X_{10} = \{78\}$ e $X_{11} = \{79\}$.

Para cada $i \in 12 = |X|$ consideremos as seguintes permutações $f_i \in \mathrm{Sym}(X_i)$: $f_0 = (0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15\ 16\ 17\ 18\ 19\ 20\ 21\ 22)$, $f_1 = (23\ 24\ 25\ 26\ 27\ 28\ 29\ 30\ 31\ 32\ 33\ 34\ 35\ 36\ 37\ 38\ 39\ 40\ 41\ 42\ 43\ 44\ 45)$, $f_2 = (46\ 47\ 48\ 49\ 50\ 51\ 52\ 53\ 54\ 55\ 56\ 57\ 58)$, $f_3 = (59\ 60\ 61\ 62\ 63\ 64\ 65\ 66\ 67\ 68\ 69\ 70\ 71)$, $f_4 = (72)$, $f_5 = (73)$, $f_6 = (74)$, $f_7 = (75)$, $f_8 = (76)$, $f_9 = (77)$, $f_{10} = (78)$ e $f_{11} = (79)$.

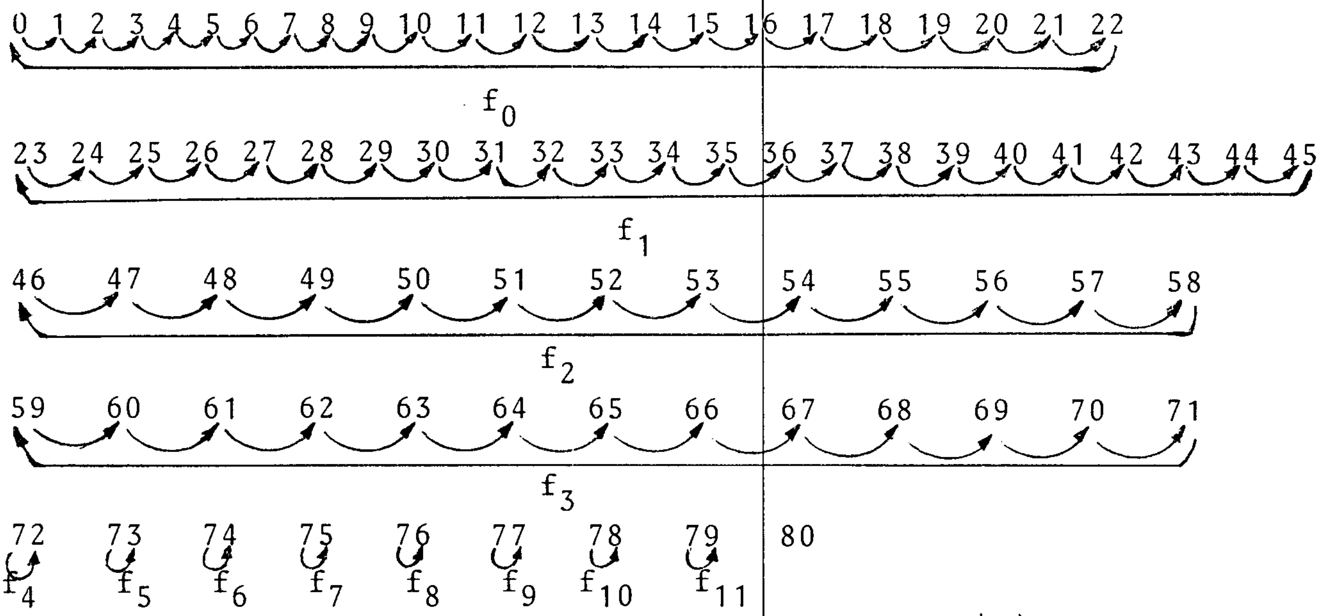


Diagrama 5.I: Funções f_i para cada $i \in 12 = |X|$.

Sejam $Y_0 = \{X_0, X_1\}$, $Y_1 = \{X_2, X_3\}$ e $Y_2 = \{X_4, X_5, \ldots, X_{11}\}$; evidentemente, $Y = \{Y_0, Y_1, Y_2\}$ é uma partição de X.

Para cada $j \in 3 = |Y|$, consideremos as seguintes permutações $h_j \in \mathrm{Sym}(\cup Y_j)$: $h_0 = (0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15\ 16\ 17\ 18\ 19\ 20\ 21\ 22)(23\ 24\ 25\ 26\ 27\ 28\ 29\ 30\ 31\ 32\ 33\ 34\ 35\ 36\ 37\ 38\ 39\ 40\ 41\ 42\ 43\ 44\ 45)$, $h_1 = (46\ 47\ 48\ 49\ 50\ 51\ 52\ 53\ 54\ 55\ 56\ 57\ 58)(59\ 60\ 61\ 62\ 63\ 64\ 65\ 66\ 67\ 68\ 69\ 70\ 71)$ e $h_2 = (72)(73)(74)(75)(76)(77)(78)(79)$.

Já que $({}^{m}/|Y_j|, ||Y_j||) = 1$, pelo lema 1.6, temos para cada $j \in 3 = |Y|$ que existe permutação u_j de $\cup Y_j$ tal que $u_j \cong h_j$, tal que $u_j = h_j^{x_j}$ para algum inteiro x_j e tal que $u_j^{m/|Y_j|} = h_j$. Neste exemplo, tais u_j podem ser:

$u_0 = (0\ 14\ 5\ 19\ 10\ 1\ 15\ 6\ 20\ 11\ 2\ 16\ 7\ 21\ 12\ 3\ 17\ 8\ 22\ 13\ 4\ 18\ 9)$ $(23\ 37\ 28\ 42\ 33\ 24\ 38\ 29\ 43\ 34\ 25\ 39\ 30\ 44\ 35\ 26\ 40\ 31\ 45\ 36\ 27\ 41\ 32)$, $u_1 = (46\ 56\ 53\ 50\ 47\ 57\ 54\ 51\ 48\ 58\ 55\ 52\ 49)(59\ 69\ 66\ 63\ 60\ 70\ 67\ 64\ 61\ 71\ 68\ 65\ 62)$ e $u_2 = (72)(73)(74)(75)(76)(77)(78)(79)$. Observe que:

1. $u_0 = h_0^{-9}$, isto é; $x_0 = -9$ e que $u_0^{m/|Y_0|} = u_0^{m/2} = u_0^5$ já que $m/2 = 27720 \equiv 5 (\mathrm{mod} 23)$. Então $u_0^{m/|Y_0|} = u_0^5 = (h_0^{-9})^5 = h_0$.

2. $u_1 = h_1^{-3}$, isto é; $x_1 = -3$ e que $u_1^{m/|Y_1|} = u_1^{m/2} = u_1^4$, já que $m/2 = 27720 \equiv 4 (\mathrm{mod} 13)$. Então $u_1^{m/|Y_1|} = u_1^4 = (h_1^{-3})^4 = h_1^{-12} = h_1$.

3. $u_2 = h_2^1$, isto é; $x_2 = 1$ e que $u_2^{m/|Y_2|} = u_2^{m/8} = h_2$.

Seja H_j uma permutação cíclica obtida pela intercalação de todas as componentes cíclicas de u_j. Assim tais H_j podem ser: $H_0 = (0\ 23\ 14\ 37\ 5\ 28\ 19\ 42\ 10\ 33\ 1\ 24\ 15\ 38\ 6\ 29\ 20\ 43\ 11\ 34\ 2\ 25\ 16\ 39\ 7\ 30\ 21\ 44\ 12\ 35\ 3\ 26\ 17\ 40\ 8\ 31$

22 45 13 36 4 27 18 41 9 32), H_1 = (46 59 56 69 53 66 50 63 47 60 57 70 54 67 51 64 48 61 58 71 55 68 52 65 49 62) e H_2 = (72 73 74 75 76 77 78 79 80).

Agora definimos $x = \cup\{H_j : j \in 3\}$.

Para construirmos a transformação y usaremos estratégia semelhante a dos exemplos 1 e 3. Seja o conjunto G = {0,23,46,59,72,73,74,75,76,77,78,79,80} e g = (0 23 46 59 72 73 74 75 76 77 78 79 80) uma permutação cíclica de G.

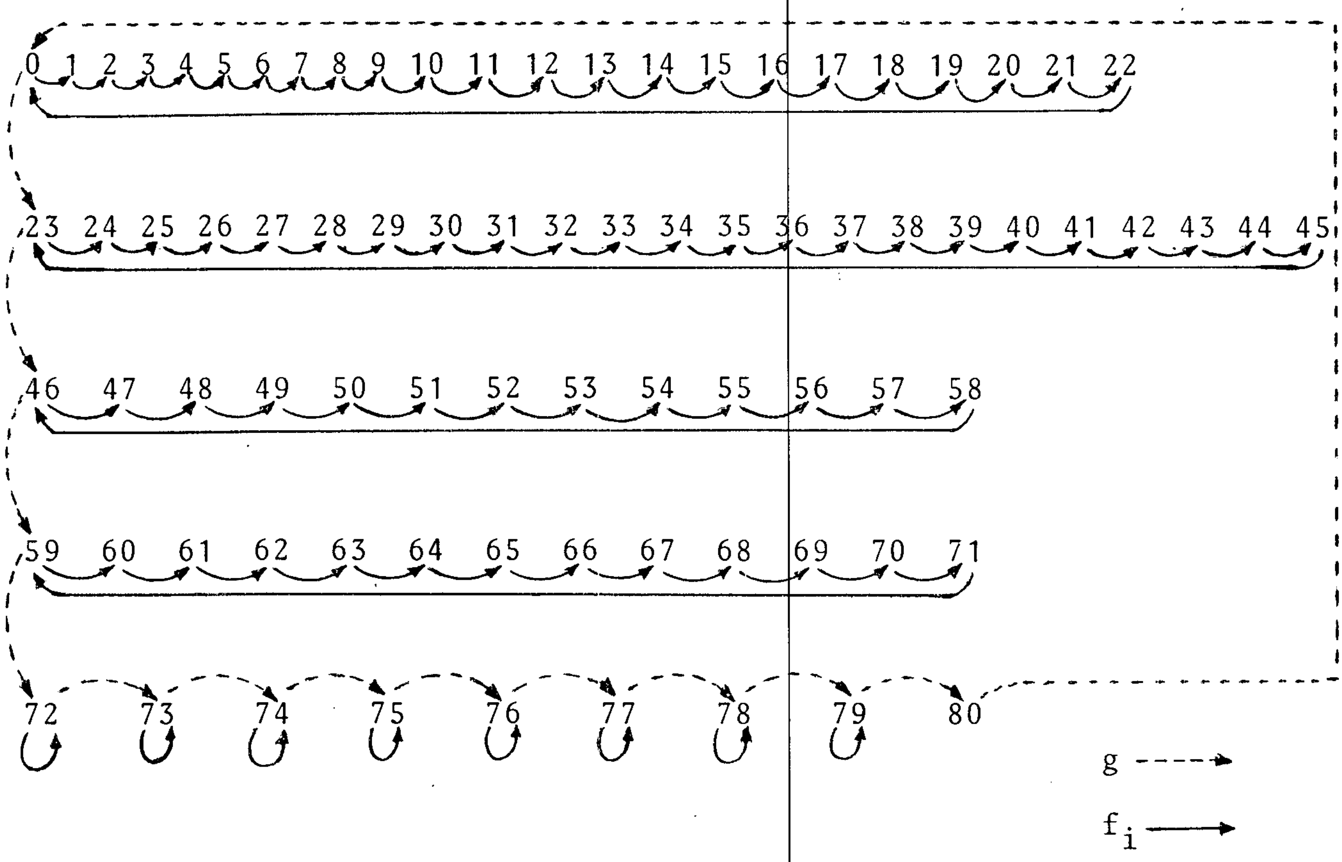


Diagrama 5.II: Função g e funções f_i para cada $i \in 12 = |X|$.

Já que $(|G|,n) = (13,55440) = 1$, pelo lema 1.6, existe $g_0 = (0\ 73\ 78\ 46\ 75\ 80\ 72\ 77\ 23\ 74\ 79\ 59\ 76)$ tal que $g_0^n = g$. Observe que g_0 também é uma permutação cíclica do conjunto G e que $g_0 = g^5$.

Agora definimos $y = g_0 \cup \{(v,v) : v \in k \setminus G\} = g_0 \dot{\cup} id \restriction (k \setminus G)$. Observe que $y \in Sym(k) = Sym(81)$.

Finalmente, não é difícil verificar que as funções x e y satisfazem a equação $r_k = y^n x^m$ com $k = 81$ e $n = m = 55440$.

CAPÍTULO IV - Y^nX^m representa r_k sempre que (k,n,m) for justo.

Neste capítulo expomos os nossos principais resultados.

4.1.TEOREMA: Seja $\{k,n,m\} \subseteq \omega \setminus 2$. Sejam $\{f,g\} \subseteq Prt(k)$ e $r_k = g^n f^m$. Então, as condições seguintes são satisfeitas:

1. $f \in Sym(k)$ ou $f \in Sym(k-1)$.

2. Se $f \in Sym(k)$, então $g \in Sym(k \setminus \{f^m(k-1)\}$ e $f^m(k-1) = 0$.

3. Se $f \in Sym(k-1)$, então ou $g \in Sym(k)$ ou ambos $g\restriction(k\setminus 1) \in Sym(k\setminus 1)$ e $g = g\restriction(k\setminus 1) \cup \{(0,g(k-1)\}$.

Demonstração: 1. $k-1 = Dom(r_k) = Dom(g^n f^m) \subseteq Dom(f^m) \subseteq Dom(f) \subseteq k$. Portanto, $k-1 \subseteq Dom(f) \subseteq k$. Desde que r_k é injetiva e que $k-1 = Dom(r_k)$, temos que $f^m\restriction(k-1)$ é injetiva e portanto $f\restriction(k-1)$ também o é. Se considerássemos $(k-1) \in Dom(f)$ e f não injetiva, então existiria $x \in k-1$ tal que $f(x) = f(k-1)$ e desta forma teríamos que $\infty = r_k(k-1) = g^n f^m(k-1) = g^n f^{m-1} f(k-1) = g^n f^{m-1} f(x) = g^n f^m(x) = r_k(x) = (x+1) \in k$ e chegaríamos a uma contradição. Portanto, se $(k-1) \in Dom(f)$ então f é uma injeção de k em k. Segue que $f \in Sym(k)$, já que k é finito.

Agora suponhamos que $(k-1) \notin Dom(f)$. Logo,

$Dom(f) = k-1$. Mas $Rng(f) = f[k] = f[k-1] \subset k$, pois $|f[k-1]| = |k-1| = k-1 < k = |k|$. Portanto, existe $x \in k$ tal que $Rng(f) = k \setminus \{x\}$. Admitamos que $x \neq k-1$. Então $|k \setminus \{k-1,x\}| = k-2 < k-1 = |Rng(r_k)|$. Mas $Rng(r_k) = r_k[k] = g^n f^m[k] = g^n f^m[k-1] = g^n f^{m-1}[f[k-1]] = g^n f^{m-1}[k \setminus \{x\}]$. Já que $m > 1$, temos que $g^n f^{m-1}[k \setminus \{x\}] = g^n f^{m-2}[f[k \setminus \{x\}]] = g^n f^{m-2}[f[(k-1) \setminus \{x\}]]$, pois $(k-1) \notin Dom(f)$. Mas $f[(k-1) \setminus \{x\}] = f[k \setminus \{x,k-1\}]$, portanto $k-1 = |r_k[k]| = |g^n f^{m-2}[f^2[k]] \leq |f^2[k]| = |f[k \setminus \{x\}]| = |f[k \setminus \{x,k-1\}]| = k-2$ o que é uma contradição. Portanto, $x = k-1$ e $Rng(f) = k-1$. Assim concluimos que $f \in Sym(k-1)$, já que $Dom(f) = k-1$ e que $k-1$ é finito.

2. Seja $f \in Sym(k)$. Então, $f^m \in Sym(k)$. Desde que r_k é injetiva, que $Dom(r_k) = k-1$, e que $r_k = g^n f^m$, temos que $g^n \restriction f^m[k-1]$ é injetiva e, portanto, $g \restriction f^m[k-1]$ também o é. Mas se $Rng(g) = k$, então $g \in Sym(k)$ e segue que $r_k = g^n f^m \in Sym(k)$ o que é falso. Portanto $Rng(g) \subset k$. Assim, ou g não é injetiva e $Dom(g) = k$ ou $f^m(k-1) \notin Dom(g)$.

Se acontecesse que $Dom(g) = k$, teríamos que

$\mathrm{Dom}(g^n) = k$, donde se seguiria que $k-1 = \mathrm{Dom}(r_k) = \mathrm{Dom}(g^n f^m) = k$ e chegaríamos a uma contradição. Portanto, $\mathrm{Dom}(g) \neq k$ e concluimos que $f^m(k-1) \notin \mathrm{Dom}(g)$.

Admitamos que $f^m(k-1) \neq 0$. Segue que $f^m(k-1) \in k\setminus 1$. Mas $k\setminus 1 = \mathrm{Rng}(r_k) \subseteq \mathrm{Rng}(g)$, e portanto $\mathrm{Rng}(g) = k\setminus 1$. Desde que $k\setminus 1 = \mathrm{Rng}(r_k) \subseteq \mathrm{Rng}(g^n) \subseteq k\setminus 1$, também temos que $\mathrm{Rng}(g^n) = k\setminus 1$. Já que $f^m(k-1) \in k\setminus 1$, temos que $f^m(k-1) \in \mathrm{Rng}(g)$. Então existe $x \in k\setminus\{f^m(k-1)\} = \mathrm{Dom}(g)$ tal que $g(x) = f^m(k-1)$. Assim $g^n(x) = g^{n-1}f^m(k-1) = g^{n-2}(\infty) = \infty$, já que $f^m(k-1) \notin \mathrm{Dom}(g)$ e que $n > 1$. Portanto, $x \notin \mathrm{Dom}(g^n) = k \setminus \{f^m(k-1)\}$ o que é uma contradição. Assim, concluimos que $f^m(k-1) = 0$ e que $\mathrm{Dom}(g) = k\setminus 1$. Já que $k\setminus 1 = \mathrm{Rng}(g)$ e que $k\setminus 1$ é finito, segue-se que $g \in \mathrm{Sym}(k\setminus 1)$.

3. Seja $f \in \mathrm{Sym}(k-1)$. Então, para todo $i \in Z$ temos que $\mathrm{Dom}(f^i) = k-1 = \mathrm{Rng}(f^i)$.

Admitamos que exista $i \in (k-1)\setminus \mathrm{Dom}(g)$. Então $f^m(j) = i$ para algum $j \in k-1 = \mathrm{Dom}(r_k)$. Portanto, $j+1 = r_k(j) = g^n f^m(j) = g^n(i) = g^{n-1}g(i) = g^{n-1}(\infty) = \infty$, o que é uma contradição. Logo concluimos que $(k-1)\setminus \mathrm{Dom}(g) = \phi$ e assim que $k-1 \subseteq \mathrm{Dom}(g)$.

Seja $x = f^m(k-2)$. Então $g^n(x) = g^n f^m(k-2) = r_k(k-2) = k-1$. Já que $x \in \mathrm{Rng}(f) = k-1$ e que $g^n(x) = k-1 \notin k-1$, existe $t \in n$ tal que $g^t(x) \neq k-1$ enquanto $g^{t+1}(x) = k-1$. Seja $y = g^t(x)$. Então $y \in k\setminus\{k-1\} = k-1$, enquanto $g(y) = k-1$.

Admitamos que $\mathrm{Dom}(g) = k-1$. Então $k-1 \notin \mathrm{Dom}(g)$. Segue-se que $g^n(y) = g^{n-1}(k-1) = g^{n-2}(\infty) = \infty$ já que $n > 1$. Seja $z = \bar{f}^m(y)$. Lembrando que $f \in \mathrm{Sym}(k-1)$, vemos que $z \in k-1 = \mathrm{Dom}(r_k)$. Portanto, $z+1 = r_k(z) = g^n f^m(z) = g^n f^m f^{-m}(y) = g^n(y) = \infty$, o que é uma contradição. Assim temos que $\mathrm{Dom}(g) \neq k-1$. Mas, como $k-1 \subseteq \mathrm{Dom}(g) \subseteq k$, concluimos que $\mathrm{Dom}(g) = k$.

Já que $k\setminus 1 = r_k[k] = g^n f^m[k] = g^n[k-1] \subseteq g[k-1] \subseteq k$ temos que $k\setminus 1 \subseteq \mathrm{Rng}(g) \subseteq k$. Se $\mathrm{Rng}(g) = k$, então $g \in \mathrm{Sym}(k)$. Portanto podemos supor que $\mathrm{Rng}(g) \neq k$. Então, desde que $k\setminus 1 = r_k[k] = g^n f^m[k] = g[g^{n-1}f^m[k]] \subseteq k$ pois $g^{n-1}f^m[k] \subseteq k$, temos que $\mathrm{Rng}(g) = k\setminus 1$. Portanto, $\mathrm{Rng}(g) = k\setminus 1$ e g não é injetiva em k.

AFIRMAÇÃO I: $g\restriction(k-1)$ é injetiva.

Seja $\{i,j\} \subseteq k-1$ tal que $g(i) = g(j)$. Então existe $\{i_1,j_1\} \subseteq k-1$ tal que $f^m(i_1) = i$ e $f^m(j_1) = j$, pois $f \in \mathrm{Sym}(k-1)$. Segue que $r_k(i_1) = g^n f^m(i_1) = g^n(i) = g^n(j) = g^n f^m(j_1) = r_k(j_1)$. Portanto, $i_1 = j_1$ pois r_k é injetiva em $k-1 = \mathrm{Dom}(r_k)$. Logo $i = f^m(i_1) = f^m(j_1) = j$ e assim $g\restriction(k-1)$ é injetiva, como foi afirmado.

AFIRMAÇÃO II: $g\restriction(k\setminus 1)$ é injetiva.

Seja $\{i,j\} \subseteq k\setminus 1$ tal que $g(i) = g(j)$. Desde que $k-1 \subseteq \mathrm{Dom}(g)$, que $g\restriction(k-1)$ é injetiva, e que $\mathrm{Rng}(g) = k\setminus 1$, temos que $g\restriction(k-1)$ é uma bijeção de $k-1$ sobre $k\setminus 1$. Segue que existe $\{i_1,j_1\} \subseteq k-1$ com $g(i_1) = i$ e $g(j_1) = j$. Já que $f^m \in \mathrm{Sym}(k-1)$, existe $\{i_2,j_2\} \subseteq k-1$ tal que $f^m(i_2) = i_1$ e $f^m(j_2) = j_1$. Portanto, $r_k(i_2) = g^n f^m(i_2) = g^n(i_1) = g^{n-1}(i) = g^{n-1}(j) = g^{n-1}g(j_1) = g^n(j_1) = g^n f^m(j_2) = r_k(j_2)$, e assim $i_2 = j_2$ pois $n > 1$, $\{i_2,j_2\} \subseteq k-1 = \mathrm{Dom}(r_k)$ e r_k é injetiva. Então $i_1 = f^m(i_2) = f^m(j_2) = j_1$, pois f é injetiva e portanto $i = g(i_1) = g(j_1) = j$. Assim $g\restriction(k\setminus 1)$ é injetiva, como foi afirmado.

Já que $g\restriction(k-1)$ é uma bijeção de $k-1$ sobre $k\setminus 1$, segue que $g(0) \neq g(x)$ para todo $x \in (k-1)\setminus 1$. Da mesma forma a afirmação II implica que $g\restriction(k\setminus 1) \in \mathrm{Sym}(k\setminus 1)$ e segue que $g(k-1) \neq g(x)$ para todo $x \in (k\setminus 1)\setminus\{k-1\} = (k-1)\setminus 1$. Mas também $g\restriction((k-1)\setminus 1)$ é injetiva e $g\restriction(\{0\} \cup ((k-1)\setminus 1) \cup \{k-1\})$ não é injetiva,pois $\mathrm{Rng}(g) = k\setminus 1$. Segue que $g(0) = g(y)$ para algum $y \in k\setminus 1$. Desta forma $y \in (k\setminus 1)\setminus((k-1)\setminus 1) = \{k-1\}$,isto é, $y = k-1$. Portanto, $g(0) = g(k-1)$ e segue que $g = g\restriction(k\setminus 1) \cup \{(0,g(k-1))\}$. ▨

4.2.PROPOSIÇÃO: $(g^6 f^6 \not\downarrow r_4)\mathrm{Prt}(4)$.

Demonstração: Admitamos que $r_4 = g^6 f^6$ com $\{f,g\} \subseteq \mathrm{Prt}(4)$.

Então, os seguintes casos são exigidos pelo teorema 4.1.

Caso1: $f \in Sym(4)$. Então $g \in Sym(4\setminus 1)$ e $f^6(3) = 0$. Desde que $f \in Sym(4)$ temos que ou $f^6 = id\restriction(4)$ ou f^6 é do tipo $(x\ y)(z\ w)$. Se $f^6 = id\restriction(4)$, então $r_4 = g^6$. Mas $(g\restriction(4\setminus 1))^6 = id\restriction(4\setminus 1) \not\subseteq r_4$. Portanto f^6 tem que ser da forma $(x\ y)(z\ w)$; isto é, ou $f^6 = (0\ 1)(2\ 3)$ ou $f^6 = (0\ 2)(1\ 3)$ ou $f^6 = (0\ 3)(1\ 2)$. Mas $f^6(3) = 0$. Portanto $f^6 = (0\ 3)(1\ 2)$. Desde que $g \in Sym(4\setminus 1)$, segue que $g^6 = id\restriction(4\setminus 1)$. Portanto, $g^6f^6 = id\restriction(4\setminus 1)\circ(0\ 3)(1\ 2)$. Mas $(0,3) \in id\restriction(4\setminus 1)\circ(0\ 3)(1\ 2)$ e $(0,3) \notin r_4$. Segue que $g^6f^6 \ddagger r_4$.

Caso2: $f \in Sym(3)$. Logo, $f^6 = id\restriction(3)$.

Subcaso2.1: $g \in Sym(4)$. Já que, se g não fosse da forma $(0\ 1\ 2\ 3)$, então $g^6 = id\restriction(4)$ e teríamos que $g^6f^6 = id\restriction(4)\circ id\restriction(3) \neq r_4$. Mas, por outro lado, se g fosse uma permutação cíclica do conjunto 4, então g^6 seria uma involução da forma $(x\ y)(z\ w)$. Neste caso, ou $(x\ y)\ g^6\circ id\restriction(3) = g^6f^6$ ou $(z\ w) \subseteq g^6f^6$. Mas r_4 não contém subconjunto que é uma transposição. Portanto, $g^6f^6 \ddagger r_4$.

Subcaso2.2: $g \in Sym(4\setminus 1)$ e $g(0) = g(3)$. Novamente, $f^6 = id\restriction(3)$. Já que $g \in Sym(4\setminus 1)$ temos que $g^6 = id\restriction(4\setminus 1)$. Portanto, $id\restriction(4\setminus 1)\circ id\restriction(3) \subseteq g^6f^6 = r_4$. Assim, desde que $(1,1) \in g^6f^6$ mas que $(1,1) \notin r_4$ concluimos que $g^6f^6 \ddagger r_4$. ▨

4.3. PROPOSIÇÃO: Seja $k \in \omega \setminus 3$. Então $(g^{M(k)} f^{M(k)} \nsubseteq r_j) Prt(j)$ para qualquer j tal que $3 \leq j \leq k$.

Demonstração: Seja $3 \leq j \leq k$. Admitamos que $r_j = g^{M(k)} f^{M(k)}$ com $\{f,g\} \subseteq Prt(j)$. Então os seguintes casos são exigidos pelo teorema 4.1.

<u>Caso1</u>: $f \in Sym(j)$. Então $g \in Sym(j \setminus 1)$ e $f^{M(k)}(j-1) = 0$. Desde que $f \in Sym(j)$, temos que $f^{M(k)} = id \restriction (j)$. Também, já que $g \in Sym(j \setminus 1)$, temos que $g^{M(k)} = id \restriction (j \setminus 1)$, pois $|j \setminus 1| = j-1 \geq 2$. Portanto, $id \restriction (j \setminus 1) \circ id \restriction (j) = g^{M(k)} f^{M(k)} = r_j$. Assim, desde que $(i,i) \in g^{M(k)} f^{M(k)}$ para todo i com $0 < i \leq j$, mas $(1,1) \notin r_j$ concluimos que $r_j \neq g^{M(k)} f^{M(k)}$.

<u>Caso2</u>: $f \in Sym(j-1)$. Então $f^{M(k)} = id \restriction (j-1)$.

<u>Subcaso2.1</u>: $g \in Sym(j)$. Então $g^{M(k)} = id \restriction (j)$. Portanto, $g^{M(k)} f^{M(k)} = id \restriction (j) \circ id \restriction (j-1) = id \restriction (j-1) = r_j$. Assim, $r_j \neq g^{M(k)} f^{M(k)}$.

<u>Subcaso2.2</u>: $g \restriction (j \setminus 1) \in Sym(j \setminus 1)$ e $g(0) = g(j-1)$. De novo, $f^{M(k)} = id \restriction (j-1)$. Já que $g \restriction (j \setminus 1) \in Sym(j \setminus 1)$, temos que $g^{M(k)} = id \restriction (j \setminus 1) \cup \{(0, g^{M(k)}(j-1)\} = id \restriction (j \setminus 1) \cup \{(0, j-1)\}$. Portanto, $id \restriction (j \setminus 1) \circ id \restriction (j-1) \subseteq g^{M(k)} f^{M(k)} = r_j$. Assim, desde que $(i,i) \in g^{M(k)} f^{M(k)}$ para todo i com $0 < i < j$ mas que $(1,1) \notin r_j$ concluimos que $r_j \neq g^{M(k)} f^{M(k)}$. ▨

4.4. COROLÁRIO: Sejam $\{u,v\} \subseteq Z$ e $k \in \omega \setminus 3$. Então

$(g^{u.M(k)}f^{v.M(k)} \nmid r_j)Prt(j)$ para qualquer j tal que $3 \leq j \leq k$.

Demonstração: Decorre imediatamente da proposição 4.3. ▨

Do corolário 4.4 é fácil observar que $(g^{k!}f^{k!} \nmid r_j)Prt(j)$ para qualquer j tal que $3 \leq j \leq k$.

4.5.PROPOSIÇÃO: Seja $\{k,n,m\} \subseteq \omega \setminus 2$. Seja $\{f,g\} \subseteq Prt(k)$. Então $r_k = g^n f^m$ se pelo menos uma das condições seguintes é satisfeita.

1. $(n,k) = 1$.
2. $(m,k) = 1$.
3. $(n,k-1) = 1$.
4. $(m,k-1) = 1$.

Demonstração: 1. Seja $(n,k) = 1$. Então considere $f = id|(k-1)$. Pelo lema 1.6 podemos escolher $g \in Sym(k)$, com g cíclica, tal que $g^n = c_k$. Então $r_k = c_k \circ id\restriction(k-1) = g^n f^m$.

2. Seja $(m,k) = 1$. Então considere $g = id\restriction(k\setminus 1)$. Pelo lema 1.6 podemos escolher $f \in Sym(k)$, com f cíclica, tal que $f^m = c_k$. Então $r_k = id\restriction(k\setminus 1) \circ c_k = g^n f^m$.

3. Seja $(n,k-1) = 1$. Então considere $f = id\restriction(k-1)$. Pelo lema 1.6 podemos escolher $h \in Sym(k\setminus 1)$ tal que $h^n = u$ onde $u \in Sym(k\setminus 1)$ e $u = (1\ 2\ 3\ 4\ \ldots\ldots\ldots\ k-1)$.

Tomando $g = h \cup \{(0,h(k-1))\}$ segue que $r_k = g^n f^m$.

4. Seja $(m,k-1) = 1$. Então considere $g = id \restriction (k \setminus 1) \cup \{(0,g(k-1))\}$. Pelo lema 1.6 podemos escolher $f \in Sym(k-1)$, com f cíclica, tal que $f^m = c_{k-1}$. Então $r_k = (id \restriction (k \setminus 1) \cup \{(0,g(k-1))\}) \circ c_{k-1} = g^n f^m$. ▨

Agora apresentamos nosso principal resultado, que é o seguinte:

4.6.TEOREMA: Se o terno (k,n,m) é justo, então $(B^n A^m \downarrow r_k) Prt(k)$.

Demonstração: Suponhamos que o terno (k,n,m) seja justo. Sejam X partição do conjunto $k-1$ e Y partição da família X satisfazendo a definição de justo. Sejam $X = \{X_0, X_1, X_2, \ldots, X_{s-1}\}$ com $|X| = s$ e $Y = \{Y_0, Y_1, \ldots, Y_{t-1}\}$ com $|Y| = t$.

Já que, até agora, a partição X do conjunto $k-1$ foi descrita somente sob condições satisfeitas pelos números cardinais dos elementos de X, é claro que nós podemos supor que os conjuntos X_i são segmentos consecutivos da sequência $0,1,2,3,\ldots,k-2$. Isto quer dizer que nós estamos supondo, para cada inteiro positivo $i \in s-1$ e para cada $x \in X_i$, que

$$\text{máx.} \cup \{X_v : 0 \leq v < i\} < x < \text{mín.} \cup \{X_v : i < v \leq s-1\}.$$

Para cada $i \in s$ definimos $p_i = |X_i|$, e seja $y_i = \sum_{j=0}^{i-1} p_j$. Então, os elementos de X_i são y_i, y_i+1, y_i+2, $y_i+3, \ldots\ldots, y_i+p_i-1$. Seja f_i a permutação cíclica $(y_i \ \ y_i+1 \ \ y_i+2 \ \ y_i+3 \ \ \ldots \ \ y_i+p_i-1)$ do conjunto X_i.

Desde que somente as condições satisfeitas pelos números cardinais dos elementos da partição Y estão estipuladas nas hipóteses, podemos supor que os Y_j são segmentos consecutivos dos conjuntos X_i.

Para cada $j \in t$ definimos $Q(j) = \sum_{i=0}^{j-1} |Y_i|$. Assim, para cada $j \in t$ temos que

$Y_j = \{X_{Q(j)}, X_{Q(j)+1}, X_{Q(j)+2}, X_{Q(j)+3}, \ldots, X_{Q(j+1)-1}\}$.

Seja $h_j = \cup\{f_i : i \in Q(j+1) \setminus Q(j)\}$ para cada $j \in t$, e observe que h_j é uma permutação de $\cup Y_j$, e que h_j tem exatamente $|Y_j|$ componentes cíclicas cada qual sendo um $||Y_j||$-cíclo de $\cup Y_j$, pois $|X_i| = ||Y_j||$ para todo $i \in Q(j+1) \setminus Q(j)$. Mas, já que, por hipótese temos para cada $j \in t$ que $({}^{m}/|Y_j|, ||Y_j||) = 1$, é fácil ver, pelo lema 1.6, que existe uma permutação u_j de $\cup Y_j$ tal que $u_j \cong h_j$, tal que $u_j = h_j^{x_j}$ para algum inteiro x_j, e tal que $u_j^{m/|Y_j|} = h_j$. Seja H_j uma permutação $|Y_j|.||Y_j||$-cíclica de $\cup Y_j$ obtida pela intercalação de todas as componentes cíclicas de u_j. Pelo lema 1.6, é fácil ver que $H_j^{|Y_j|} = u_j$ e portanto que $H_j^m = (H_j^{|Y_j|})^{m/|Y_j|} = u_j^{m/|Y_j|} = h_j$.

Seja $A = \cup\{H_j : j \in t\}$. Observando que $k-1 = \cup\{\cup Y_j : j \in t$, temos que $A \in Sym(k-1)$. Afirmamos que $A^m = \cup\{h_j : j \in t\} = \cup\{f_i : i \in s\}$.

Seja $x \in k-1$. Então existem $i \in s$ e $j \in t$ tais que $x \in X_i \in Y_j$, e portanto $x \in \cup Y_j$. Já que a família $\{H_v : v \in t\}$ é disjunta como permutações, segue que $A^m(x) = (\cup\{H_v : v \in t\})^m(x) = (\cup\{H_v^m : v \in t\})(x) = H_j^m(x) = u_j^{m/|Y_j|}(x) = h_j(x) = (\cup\{f_v : v \in Q(v+1)\setminus Q(v)\})(x) = (\cup\{f_v : v \in s\})(x)$. Observando que $\{A, \cup\{f_v: v \in s\}\} \subseteq Sym(k-1)$, vemos que a afirmação está demonstrada. Também temos que $A^m(x) = f_i(x)$ para o dado $i \in s$.

Agora construiremos a transformação desejada B do conjunto k. Há dois casos a considerar.

Caso1: $(|X|+1,n) = 1$. Então seja $g = (y_0\ y_1\ y_2\ \ldots\ y_{s-1}\ k-1)$ a permutação $(s+1)$-cíclica do conjunto $G = \{y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{s-1}, k-1\}$. Observe que $(|G|,n) = (s+1,n) = (|X|+1,n) = 1$. Portanto, pelo lema 1.6, existe permutação cíclica g_0 de G tal que $g_0^n = g$. Tomando $B = g_0 \cup \{(v,v) : v \in k \setminus G\}$ e observando que $B \in Sym(k)$ afirmamos que $r_k = B^n A^m$.

Seja $x \in k-1$. Então existem $i \in s$ e $j \in t$ tais que $x \in X_i \in Y_j$, e portanto $x \in \cup Y_j$. Há três subcasos a considerar.

Subcaso1: $x = y_i+p$ para algum $p \in p_i-1$. Então $r_k(x) = x+1 = y_i+p+1 = (id \restriction (k \setminus G))(y_i+p+1) = B^n(y_i+p+1) = B^n f_i(y_i+p) = B^n A^m(y_i+p) = B^n A^m(x)$.

Subcaso2: $x = y_i+p_i-1$ e $i \in s-1$. Então $r_k(x) = x+1 = y_i+p_i = y_{i+1} = g(y_i) = B^n(y_i) = B^n f_i(y_i+p_i-1) = B^n A^m(y_i+p_i-1) = B^n A^m(x)$.

Subcaso3: $x = y_{s-1}+p_{s-1}-1$. Então $x = k-2$ e $r_k(x) = k-1 = g(y_{s-1}) = B^n(y_{s-1}) = B^n f_i(y_{s-1}+p_{s-1}-1) = B^nA^m(y_{s-1}+p_{s-1}-1) = B^nA^m(x)$.

Finalmente $r_k(k-1) = \infty = B^n(\infty) = B^nA^m(k-1)$, já que $A \in \mathrm{Sym}(k-1)$. Assim a afirmação fica demonstrada.

Caso2: $(|X|,n) = 1$. Então seja $g_1 = (y_1 \;\; y_2 \;\; y_3 \;\; \ldots\ldots \;\; y_{s-1} \;\; k-1)$ a permutação s-cíclica do conjunto $H = \{y_1,y_2,y_3,\ldots\ldots,y_{s-1},k-1\}$. Observe que $(|H|,n) = (s,n) = (|X|,n) = 1$. Portanto, pelo lema 1.6, existe permutação cíclica g_2 do conjunto H tal que $g_2^n = g_1$. Tomando $B = g_2 \cup \{(0,g_2(k-1))\} \cup \{(v,v): v \in k \wedge v \notin H \cup \{0\}\}$ afirmamos que $r_k = B^nA^m$ onde $g_2 \in \mathrm{Sym}(k\setminus 1)$.

Seja $x \in k-1$. Então existem $i \in s$ e $j \in t$ tais que $x \in X_i \in Y_j$ e portanto $x \in \cup Y_j$. Há quatro subcasos a considerar.

Subcaso1: $x = y_i+p$ para algum $p \in p_i-1$. Então $r_k(x) = x+1 = y_i+p+1 = (id \restriction (k\setminus H))(y_i+p+1) = B^n(y_i+p+1) =$

$B^n f_i(y_i+p) = B^n A^m(y_i+p) = B^n A^m(x)$.

<u>Subcaso2</u>: $x = y_0+p_0-1$. Então $r_k(x) = x+1 = y_0+p_0 = y_1 = g_1(k-1) = g_2^n(k-1) = B^n(k-1) = B^{n-1}B(k-1) = B^{n-1}g_2(k-1) = B^{n-1}B(0) = B^n(0) = B^n(y_0) = B^n f_0(y_0+p_0-1) = B^n A^m(y_0+p_0-1) = B^n A^m(x)$.

<u>Subcaso3</u>: $x = y_i+p_i-1$ para $i \in (s-1)\setminus 1$. Então $r_k(x) = x+1 = y_i+p_i = y_{i+1} = g_1(y_i) = g_2^n(y_i) = B^n(y_i) = B^n f_i(y_i+p_i-1) = B^n A^m(y_i+p_i-1) = B^n A^m(x)$.

<u>Subcaso4</u>: $x = y_{s-1}+p_{s-1}-1$, isto é; $x = k-2$. Então $r_k(x) = x+1 = k-1 = g_1(y_{s-1}) = g_2^n(y_{s-1}) = B^n(y_{s-1}) = B^n f_i(y_{s-1}+p_{s-1}-1) = B^n A^m(y_{s-1}+p_{s-1}-1) = B^n A^m(x)$.

Finalmente, $r_k(k-1) = \infty = B^n(\infty) = B^n A^m(k-1)$, já que $A \in Sym(k-1)$. Portanto, a afirmação fica demonstrada. ▯

CAPÍTULO V - $Y^n X^m$ representa r_k sem que (k,n,m) seja justo.

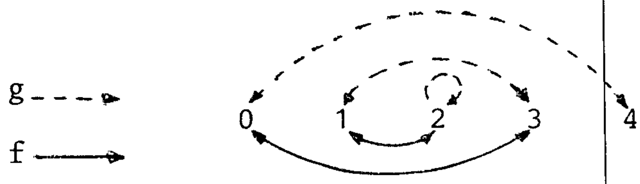
Colocamos neste capítulo, alguns exemplos de transformações x e y em Prt(k) tais que a equação $r_k = y^n x^m$ é satisfeita sem que o terno (k,n,m) seja justo. Além disso, deixamos algumas perguntas abertas relacionadas com o nosso trabalho.

Exemplo A: A equação $r_5 = y^{30}x^{30}$ tem solução em Prt(5), mas o terno (5,30,30) não é justo.

É fácil ver que a única partição X do conjunto k-1 = 4 tal que ou $(|X|,n) = (|X|,30) = 1$ ou $(|X|+1,n) = (|X|+1,30) = 1$ é $X = \{\{0,1,2,3\}\}$. Assim, com esta X temos que $|X| = 1$ e portanto $(1,30) = 1$, mas com quaquer outra partição X de k-1 = 4 temos que $1 < |X| < 5$ e então que $(|X|,30) \neq 1 \neq (|X|+1,30)$. Agora observe que a única partição Y de $X = \{\{0,1,2,3\}\}$ é $Y = \{\{\{0,1,2,3\}\}\}$. Isto é, $Y_0 = \{\{0,1,2,3\}\} \in Y = \{Y_0\}$. Assim, note que $({}^m/|Y_0|, ||Y_0||) = ({}^{30}/1,4) = 2 \neq 1$ o que não satisfaz a definição de justo.

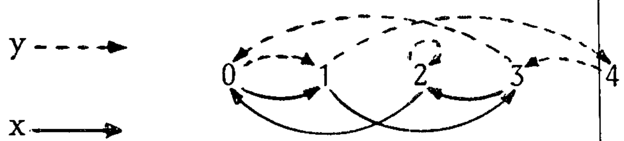
Agora construiremos as transformações x e y que satisfazem a equação $r_5 = y^{30}x^{30}$.

Consideremos as transformações f = (0 3)(1 2)[4] e g = (0 4)(1 3)(2) conforme o diagrama A.I, seguinte.



DiagramaA.I: As funções f e g.

Observe que $r_5 = gf$. Intercalando as transposições que são componentes de f obtemos $f_1 = (0\ 1\ 2\ 3)[4]$. Intercalando as componentes 2-cíclicas de g obtemos $g_1 = (0\ 1\ 4\ 3)(2)$. Sejam $x = f_1$ e $y = g_1$, e note que x e y são as funções desejadas tais que $r_5 = y^{30}x^{30}$.



DiagramaA.II: As funções x e y.

Exemplo B: A equação $r_6 = y^{30}x^{30}$ tem solução em Prt(6), mas o terno (6,30,30) não é justo.

Observe, como no exemplo A, que a única partição X so conjunto $k-1 = 5$ tal que ou $(|X|,n) = (|X|,30) = 1$ ou $(|X|+1,n) = (|X|+1,30) = 1$ é $X = \{\{0,1,2,3,4\}\}$. Agora, observe que a única partição Y de X é $Y = \{\{\{0,1,2,3,4\}\}\}$; isto é, $Y_0 = \{\{0,1,2,3,4\}\} \in Y = \{Y_0\}$. Assim, observamos que $({}^{m}/|Y_0|, ||Y_0||) = ({}^{30}/1, 5) = (30,5) = 5 \neq 1$ o que não satisfaz a definição de justo.

Construiremos, agora, as funções x e y que satisfazem a equação $r_6 = y^{30}x^{30}$.

Seja $f = (0\ 4)(1\ 3)(2)[5]$ uma permutação obtida do conjunto $k-1 = 5$ conforme o diagrama B.I, abaixo:

f

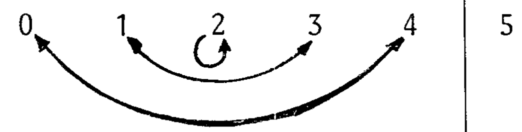


Diagrama B.I: A função f.

Intercalando as transposições de f obtemos $f_1 = (0\ 1\ 4\ 3)(2)[5]$, que é a função x desejada.

f_1

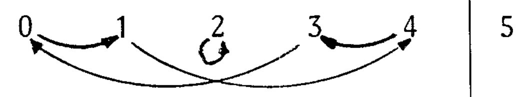


Diagrama B.II: A função $f_1 = x$.

Seja $g = (1\ 4)(2\ 3)(5)$ uma permutação obtida do conjunto $k\setminus 1 = 6\setminus 1$ conforme o diagrama B.III seguinte.

g

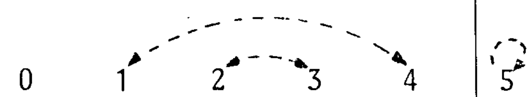


Diagrama B.III: A função g.

Intercalando as componentes 2-cíclicas de g obtemos $g_1 = (1\ 2\ 4\ 3)(5)$.

Diagrama B.IV: A função g_1.

Agora definimos $y = g_1 \cup \{(0,5)\}$.

Finalmente, podemos averiguar do diagrama B.V, abaixo, que as funções $x = f_1$ e y satisfazem a equação $r_6 = y^{30}x^{30}$.

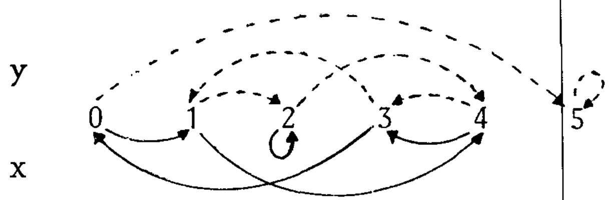


Diagrama B.V: As funções x e y.

Exemplo C: A equação $r_9 = y^{30}x^{60}$ tem solução em $Prt(9)$, mas o terno $(k,n,m) = (9,30,60)$ não é justo.

Para cada sequência $j_0 \geqq j_1 \geqq j_2 \geqq \ldots \geqq j_{v-1} \geqq 1$ de inteiros tais que $\sum_{i=0}^{v-1} j_i = k-1$ existem, possivelmente, muitas partições $X = \{X_i : i \in v\}$ do conjunto $k-1$ tais que $|X_i| = j_i$ para cada $i \in v$. Pelos nossos fins, basta escolher somente uma representante, em cada tal família F de "equivalentes" partições de $k-1$, para examinar. Neste exemplo, não é difícil averiguar que existem apenas quatro tais famílias F que satisfazem para cada $X \in F$ que ou $(|X|,n) = (|X|,30) = 1$ ou $(|X|+1,n) = (|X|+1,30) = 1$.

1. $X = \{X_0\}$ onde $X_0 = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$; para este X temos que $|X| = 1$ e portanto que $(|X|,n) = (1,30)=1$. Agora observe que a única partição equipolente Y de $X = \{X_0\}$ é $Y = \{\{X_0\}\} = \{Y_0\}$; isto é, $Y_0 = \{X_0\} \in Y$. Assim, note que $({}^m/|Y_0|, ||Y_0||) = ({}^{60}/1,8) = (60,8) = 4 \neq 1$ o que não estabelece que o terno $(k,n,m) = (9,30,60)$ seja justo.

2. $X = \{X_0,X_1,X_2,X_3,X_4,X_5,X_6\}$ onde $X_0 = \{0,1\}$, $X_1 = \{2\}$, $X_2 = \{3\}$, $X_3 = \{4\}$, $X_4 = \{5\}$, $X_5 = \{6\}$ e $X_6 = \{7\}$; para este X temos que $|X| = 7$ e portanto que $(|X|,n) = (7,30) = 1$. Agora, note que, se Y for qualquer partição equipolente de X, então existe $Y_0 \in Y$ tal que $({}^m/|Y_0|, ||Y_0||) = ({}^{60}/1,2) = 2 \neq 1$. Portanto, com este X o terno $(k,n,m) = (9,30,60)$ não se mostra justo.

3. $X = \{X_0,X_1,X_2,X_3,X_4,X_5\}$ onde $X_0 = \{0,1\}$, $X_1 = \{2,3\}$, $X_2 = \{4\}$, $X_3 = \{5\}$, $X_4 = \{6\}$, $X_5 = \{7\}$; com este X temos que $|X| = 6$ e portanto que $(|X|+1,n) = (7,30)=1$. Agora observe que qualquer partição equipolente Y de X tem que conter o elemento ou $Y_0 = \{X_0,X_1\}$, ou $Y_0 = \{X_0\}$ ou

$Y_0 = \{X_1\}$. Em qualquer caso, notamos que $({}^{m}/|Y_0|, ||Y_0||) = 2 \neq 1$. Portanto o terno $(k,n,m) = (9,30,60)$ não se mostra justo para esta X.

4. $X = \{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$ onde $X_0 = \{0,1,2\}$, $X_1 = \{3\}$, $X_2 = \{4\}$, $X_3 = \{5\}$, $X_4 = \{6\}$, $X_5 = \{7\}$; com este X temos que $|X| = 6$ e portanto $(|X|+1, n) = (7,30) = 1$. Agora, observe que, se Y for qualquer partição equipolente de X então existe $Y_0 \in Y$ tal que $({}^{m}/|Y_0|, ||Y_0||) = ({}^{60}/1, 3) = (60,3) = 3 \neq 1$. Portanto com esta X o terno $(k,n,m) = (9,30,60)$ não se mostra justo.

Construiremos, agora, as transformações x e y que satisfazem a equação $r_9 = y^{30}x^{60}$.

Seja $f = (0\ 7)(1\ 6)(2\ 5)(3\ 4)[8]$ uma permutação obtida do conjunto $k-1 = 8$, e seja $g = (0\ 8)(1\ 7)(2\ 6)(3\ 5)(4)$ a permutação obtida de $k = 9$, conforme o diagramaC.I,abaixo.

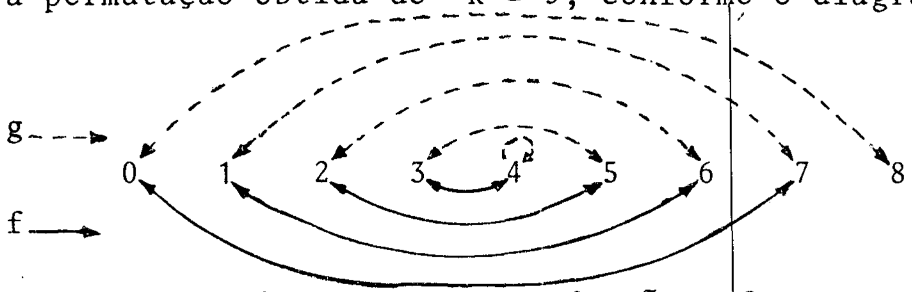


Diagrama C.I: As funções f e g.

Observe que $r_9 = gf$. Intercalando todas as quatro transposições que são componentes de f obtemos $f_1 = (0\ 1\ 2\ 3\ 7\ 6\ 5\ 4)[8]$. Intercalando duas a duas as componentes 2-cíclicas de g obtemos uma $g_1 = (0\ 1\ 8\ 7)(2\ 3\ 6\ 5)(4)$. Sejam $x = f_1$ e $y = g_1$, e note que x e y são as funções desejadas tais que $r_9 = y^{30}x^{60}$.

Uma pergunta de D.M.Silberger é a seguinte: Se a palavra $y^n x^m$ representar r_k em Prt(k), então o terno (k,n,m) é justo?

Os três exemplos, A,B e C, acima, estabelecem que a resposta a esta pergunta é negativa.

Outra pergunta de D.M.Silberger é: Se o terno (k,n,m) é justo, então (k,m,n) também o é?

Os exemplos 1.III e C.V estabelecem que a resposta a esta pergunta também é negativa.

É fácil verificar que (k,n,m) justo não implica que (n,m) seja par de Ehrenfeucht. Daí sai a nossa primeira indagação:

Questão 1: Se (n,m) é par de Ehrenfeucht, então para qualquer $k \in \omega \setminus 2$ temos que (k,n,m) é justo?

Questão 2: Se (k,n,m) é justo e k é par, então existe transformação y sem "barbinha" tal que a equação $r_k = y^n x^m$

é satisfeita em Prt(k)?

Questão 3: Em geral, se a equação $r_k = y^n x^m$ é satisfeita em Prt(k), então para k um número par a transformação y sempre tem "barbinha" e para k um número ímpar a transformação y nunca tem "barbinha"?

Agora formulamos uma questão básica que conjeturamos poder ser respondida afirmativamente com o nosso teorema 4.6. Ela é a seguinte:

Questão 4: Dados n e m inteiros positivos, existe k tal que para qualquer $j > k$ a equação $r_j = y^n x^m$ tem solução para $\{x,y\} \subseteq$ Prt(j)?

Certamente, a questão 4 tem resposta afirmativa se também a tem a seguinte:

Questão 5: Para cada par (n,m) de inteiros positivos, o conjunto $\{k : (k,n,m) \text{ não é justo}\}$ é finito?

Questão 6: Existe um algorítmo aritmético fácil que indique se um terno (k,n,m) de inteiros positivos é justo?

CAPÍTULO VI - A IMPORTÂNCIA DE ^{X}X

Inicialmente, apresentamos uma generalização para semigrupos do teorema clássico de Arthur Cayley para grupos.

6.1.TEOREMA: Seja S um semigrupo. Então existe um monomorfismo $S \longrightarrow {}^{T}T$ onde T é um conjunto tal que $|S| + 1 = |T|$.

Demonstração: Escolha $e \notin S$ e considere $T = S \cup \{e\}$. Assim, com a seguinte extensão $\circledast$ da operação binária $*$ de S, T é claramente um monóide com identidade e. Para $\{x,y\} \subseteq S$ e qualquer $t \in T$, definimos a operação binária $\circledast$ de T por $x \circledast y = x * y$ e $t \circledast e = t = e \circledast t$.

Observe que a função $i:S \longrightarrow T$ definida por $i:x \longmapsto x$ é um monomorfismo.

Seja $\Psi:T \longrightarrow {}^{T}T$ definida por $\Psi \longmapsto \Psi(x)$ para cada $x \in T$, onde a função $\Psi(x)$ define-se por $\Psi(x)(y) = x \circledast y$ para todo $y \in T$. Agora mostramos que $\Psi:T \longrightarrow {}^{T}T$ é monomorfismo.

É claro que $\mathrm{Dom}(\Psi) = T$. Já que $\Psi(x) \in {}^{T}T$ para cada $x \in T$, temos que $\mathrm{Rng}(\Psi) \subseteq {}^{T}T$. Se $\Psi(x) = \Psi(y)$ então $\Psi(x)(e) = \Psi(y)(e)$. Isto implica que $x = x \circledast e = y \circledast e = y$. Portanto, Ψ é injetiva. Agora basta mostrar que Ψ é homomorfismo. Mas, para $\{x,y\} \subseteq T$ temos para cada $t \in T$ que $\Psi(x \otimes y)(t) = (x \otimes y) \otimes t = x \otimes (y \otimes t) =$ $x \otimes \Psi(y)(t) = \Psi(x)(\Psi(y)(t)) = (\Psi(x)o\Psi(y))(t)$, onde "o" indica a composição de elementos em ${}^TT$. Portanto, $\Psi(x \otimes y)=\Psi(x)o\Psi(y)$.

Assim vimos que $\Psi:T \longrightarrow {}^TT$ é um monomorfismo. Portanto, $\Psi o i:S \longrightarrow {}^TT$ é monomorfismo.

Um corolário imediato do teorema 6.1 é que, se uma palavra $W = W(L_1,L_2,L_3,\ldots,L_j)$ é Myc-universal então, qualquer que seja o semigrupo S, existe um conjunto T com $|S| + 1 = T$ tal que para cada $f \in S$ a equação $f = W(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_j)$ tem solução $(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_j) = (t_1,t_2,t_3,\ldots,t_j) \in ({}^TT)^j$.

Na presente dissertação estudamos palavras $W(x,y) = x^my^n$ que representam muitos elementos de cada ${}^XX$ embora W não seja Myc-universal. Por [4;1º Teorema] e [9;Theorem 3.12], W é IMyc-universal.

O seguinte exemplo, de uma palavra x^my^n que é Prt-universal, indica como pode ser representado qualquer elemento f de uma ${}^XX$ na forma dessa palavra.

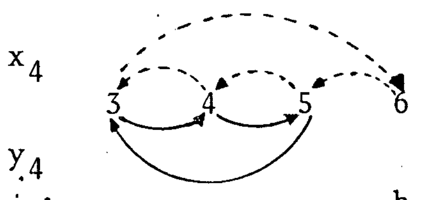
Exemplo 1: Primeiro vamos indicar como uma construção do tipo usada em [9;Theorem 1.1] mostra que a palavra x^3y^3, que é Prt-universal por [9;Corollary 3.18], representa a transformação típica $f \in {}^{7}7$. Esta f está estipulada no diagrama seguinte.

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] &&&& & 1 \arrow[dd] \\ 3 \arrow[r, mapsto] & 4 \arrow[r, mapsto] & 5 \arrow[r, mapsto] & 6 \arrow[r, mapsto] & 0 \arrow[ur] & \\ &&&& & 2 \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

f

A idéia é escrever a função $h_4 = 3 \mapsto 4 \mapsto 5 \mapsto 6$ com $h_4 \in \text{Prt}\{3,4,5,6\}$; na forma $h_4 = x_4^3 y_4^3$ para $\{x_4, y_4\} \subseteq \text{Prt}\{3,4,5,6\}$; a função $h_3 = (0\ 1\ 2)$ com $h_3 \in \text{Prt}(3)$ na forma $h_3 = x_3^3 y_3^3$ para $\{x_3, y_3\} \subseteq \text{Prt}(3)$, e então "costurar" h_4 junto com h_3 para obter a função $f = h_4 \cup h_3 \cup \{(6,0)\}$.

Sejam $x_4 = (3\ 6\ 5\ 4)$ e $y_4 = (3\ 4\ 5)[6]$, onde o símbolo $[6]$ na função y_4 diz que $y_4(6) = \infty$. Observe que $h_4 = x_4^3 y_4^3$ está indicada nos diagramas seguintes:

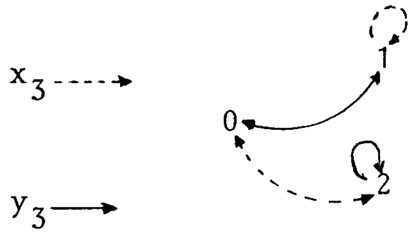


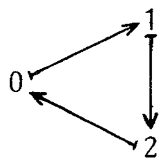
$h_4 = x_4^3 y_4^3$

$$3 \mapsto 4 \mapsto 5 \mapsto 6$$

h_4

Sejam $x_3 = (0\ 2)$ e $y_3 = (0\ 1)$. É fácil ver que $h_3 = (0\ 1\ 2) = (0\ 2)(0\ 1) = (0\ 2)^3(0\ 1)^3 = x_3^3 y_3^3$. Apresentamos estas transformações nos diagramas seguintes:

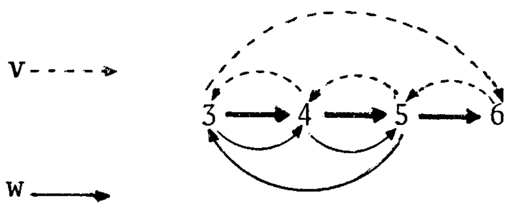




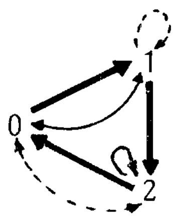
h_3

$h_3 = x_3^3 y_3^3$

Finalmente, indicamos a idéia de "costurar" h_4 com h_3. Juntando os dios conjuntos de diagramas anteriores obtemos uma representação de $u = h_4 \cup h_3$. Quando $v = x_4 \cup x_3$ e $w = y_4 \cup y_3$, temos facilmente que $u = v^3 w^3$. Note que $w(6) = \infty$.



$h_4 = x_4^3 y_4^3$

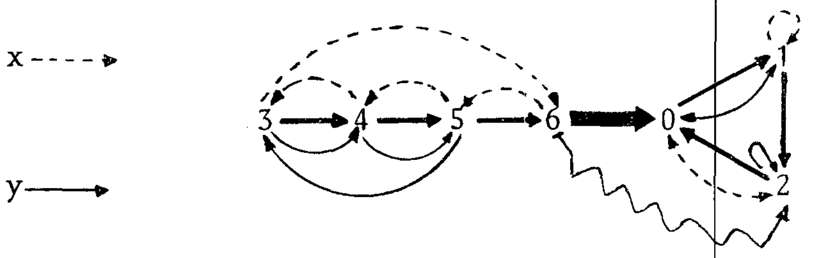


$h_3 = x_3^3 y_3^3$

$u = v^3 w^3$

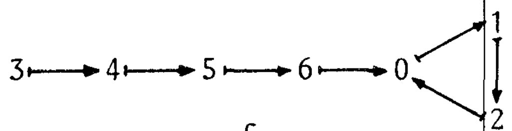
Desde que $w(6) = \infty = u(6)$, temos condições de definir a vontade uma extensão y de w tal que $6 \in Dom(y)$. Queremos fazer esta extensão y de tal jeito que a extensão resultante $v^3 y^3$ de $v^3 w^3$ seja a função f. Mas $f(6) = 0 = f(2)$. Lembrando que $w(2) = y_3(2) = 2$, podemos definir

$y = w \cup \{(6,2)\}$ e $x = v$, e assim obtemos $x^3y^3(6) = x^3y^2(2) = v^3w^2(2) = v^3(2) = 0 = f(6)$. O diagrama seguinte é exatamente o diagrama anterior com mais uma seta, $6 \rightsquigarrow 2$ desenhada para fazer y de $y_4 \cup y_3$ e uma seta grossa nova, $6 \Rightarrow 0$ aumentando $h_4 \cup h_3$ para fazer a função f.



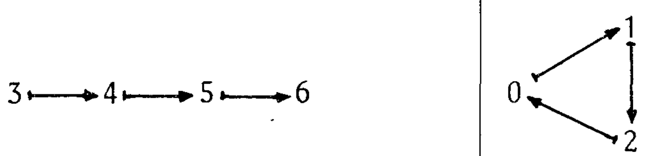
$f = x^3y^3$

Em resumo, querendo representar na forma x^3y^3 a função f



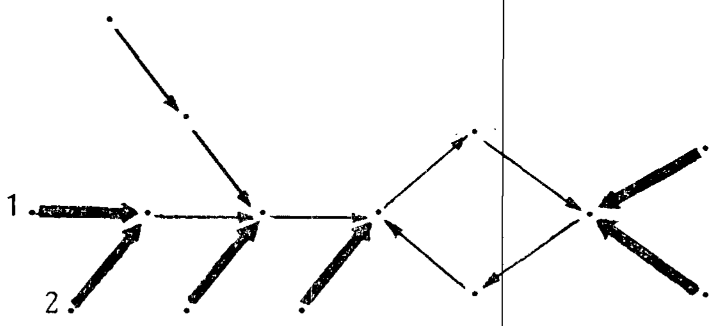
f

representamos separadamente as duas componentes conexas da restrição $u = f\upharpoonright(7\setminus\{6\})$ de f



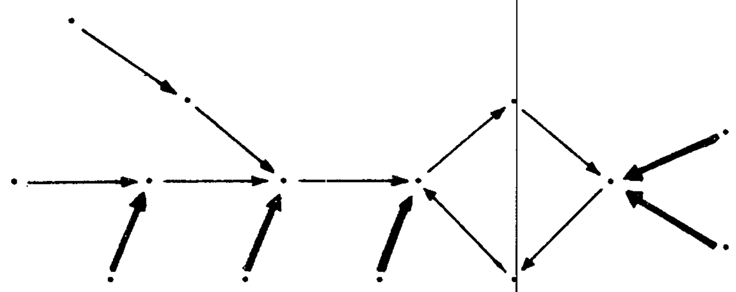
na forma $u = v^3w^3$ desejada, e então estendemos convenientementemente as funções v e w a fim de obter x e y, respectivamente, de tal forma que $f = x^3y^3$.

Agora faremos uma observação a respeito de "barbinhas" de uma função g; isto é, a respeito de setas $p \longrightarrow q$ de g para a qual $p \notin Rng(g)$ enquanto existe $t \neq p$ tal que $t \in Dom(g)$ e tal que $g(t) = q = g(p)$. No diagrama abaixo, de uma função g, as setas grossas são as das "barbinhas" de g.



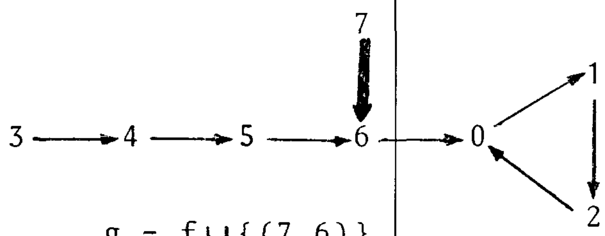
g

Damos nomes 1 e 2 aos vértices que são origens de duas dessas "barbinhas" de g porque, na prática, não nos é permitido tratar ambas essas setas como "barbinhas". Isto quer dizer que escolhemos um desses vértices para ser a origem de uma "barbinha" enquanto que o outro será então considerado a origem de um "ramo". (Um "ramo" é mais comprido que uma "barbinha".) Assim, pelos nossos motivos, g tem realmente só cinco "barbinhas"; g também tem um "ramo" de comprimento três entrando num 4-ciclo, e um "ramo" de comprimento dois entrando no outro "ramo".



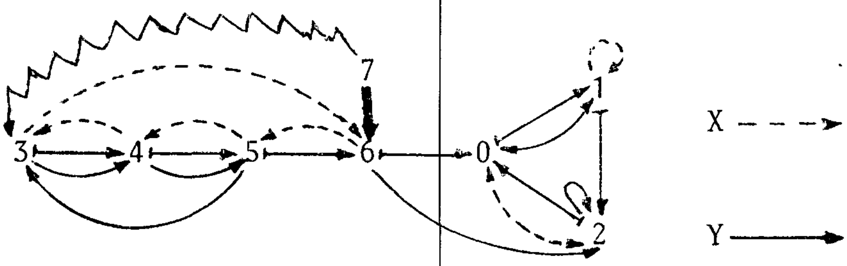
g

A nossa observação a respeito de "barbinhas" quer apenas salientar que "barbinhas" nunca atrapalham a capacidade de uma palavra W representar uma função tendo essas "barbinhas"; além disso, tais "barbinhas" podem ajudar a representação de f por W. Mostraremos isto com apenas um exemplo. Vamos aumentar a nossa antiga função $f \in {}^7 7$ com a "barbinha" $7 \rightarrow 6$ obtendo uma função $g \in {}^8 8$. Veja o diagrama seguinte:



$g = f \cup \{(7,6)\}$

Já tendo encontradas as funções x e y tais que $f = x^3y^3$, é bem fácil encontrar extensões X e Y, de x e y respectivamente, tais que $g = X^3Y^3$. Por isso, já que $g(5) = g(7)$, é útil observar onde y leva o ponto 5. Agora defina $Y(7)$, tal que $Y(7) = y(5)$. Isto é, seja $Y = y \cup \{(7,y(5))\} = y \cup \{(7,3)\}$. No diagrama seguinte apresentamos a função $g = X^3Y^3$ onde $Y(7) = 3 = Y(5)$ e onde $X = x$. Observe que este diagrama é um desenvolvimento direto do diagrama de $f = x^3y^3$, com mais a seta $7 \rightsquigarrow 3$ que é elemento de Y.

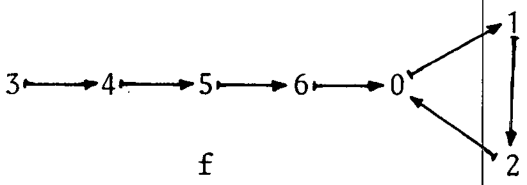


$g = X^3Y^3$

Agora nós apresentamos novamente a função $f \in {}^77$, do exemplo 1. Observamos, porém, que é mais difícil representar f na forma $f = x^{60}y^{60}$; isto é, que a técnica de D.M. Silberger usada no exemplo anterior não é suficiente, pois, como veremos, $(x^{60}y^{60} \updownarrow r_4)Prt(4)$ e também

$(x^{60}y^{60} \updownarrow c_3)\mathrm{Sym}(3)$. Finalmente, apresentamos outra técnica, que generaliza a de D.M.Silberger, e que produz uma representação de $f = x^{60}y^{60}$.

Exemplo 2: Seja $f \in {}^7 7$ como no exemplo 1.

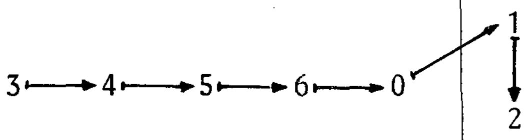


f

Observe-se que a idéia de escrever a função $h_4 = 3 \mapsto 4 \mapsto 5 \mapsto 6$ na forma $h_4 = x_4^{60}y_4^{60}$ para $\{x_4,y_4\} \subseteq \mathrm{Prt}\{3,4,5,6\}$, a função $h_3 = (0\ 1\ 2)$ na forma $h_3 = x_3^{60}y_3^{60}$ para $\{x_3,y_3\} \subseteq \mathrm{Prt}(3)$ e então "costurar" h_4 junto com h_3 para obter a função f não é mais possível. Em primeiro lugar, temos pela proposição 4.2 que $(x^6y^6 \updownarrow r_4)$ $\mathrm{Prt}(4)$. Já que $h_4 \cong r_4$ segue, por [6; Lema 1.14], que $(x^6y^6 \updownarrow h_4)\mathrm{Prt}\{3,4,5,6\}$, e portanto obviamente que $(x^{60}y^{60} \updownarrow h_4)\mathrm{Prt}\{3,4,5,6\}$. Em segundo lugar, se existe $\{a,b\} \subseteq \mathrm{Prt}(3)$ tal que $c_3 = a^{60}b^{60}$, então pelo lema 1.3 segue que $\{a,b\} \subseteq \mathrm{Sym}(3)$. Mas, para $\{a,b\} \subseteq \mathrm{Sym}(3)$ é claro que $a^{60}b^{60} = id\restriction 3 \neq c_3$. Logo, $(x^{60}y^{60} \updownarrow h_3)\mathrm{Prt}(3)$; pois

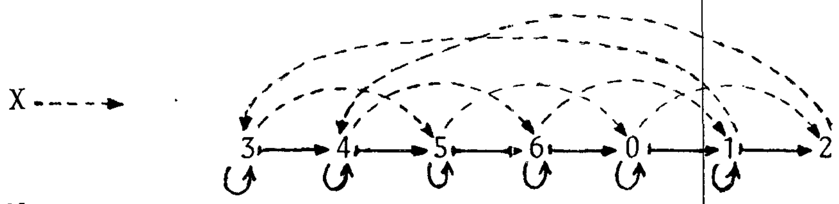
$c_3 = h_3$. Já que não podemos representar nem h_4 nem h_3 na forma $x^{60}y^{60}$, não há mais nada para "costurar".

Mas isto não implica que é impossível representar f na forma $x^{60}y^{60}$. Podemos escrever a função f da forma $f = g \cup \{(2,0)\}$ conforme o seguinte diagrama:



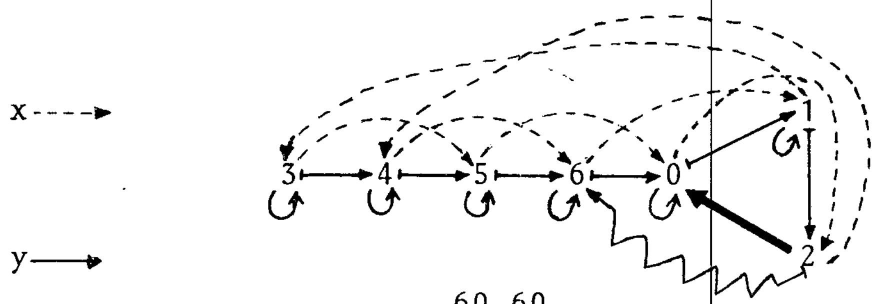
g

Além disso, pelo teorema 4.6, a função $g = 3 \mapsto 4 \mapsto 5 \mapsto 6 \mapsto 0 \mapsto 1 \mapsto 2$ pode ser representada na forma $g = X^{60}Y^{60}$ para $\{X,Y\} \subseteq \mathrm{Prt}(7)$. De fato, sejam $X = (3\ 5\ 0\ 2\ 4\ 6\ 1)$ e $Y = (0)(1)(3)(4)(5)(6)[2]$, onde o símbolo $[2]$ na função Y diz que $Y(2) = \infty$. Note-se que $g = X^{60}Y^{60}$ está indicada no diagrama abaixo.



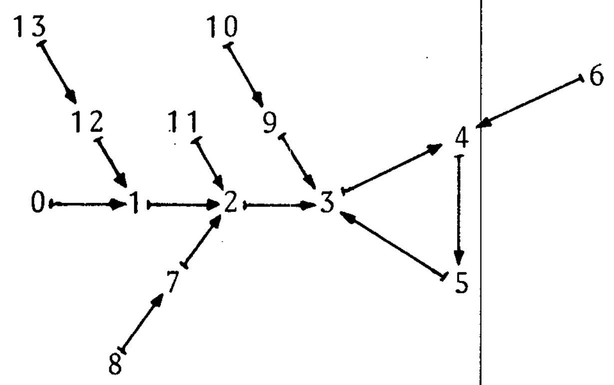
$g = X^{60}Y^{60}$

Já que $Y(2) = \infty = g(2)$, podemos definir a vontade uma extensão y de Y de tal forma que $2 \in \mathrm{Dom}(y)$. Desejamos fazer esta extensão y de tal modo que a extensão resultante $x^{60}y^{60}$ de $X^{60}Y^{60}$ seja a função f, onde $x = X$. Desde que $f(6) = 0 = f(2)$, e lembrando que $Y(6) = 6$ podemos definir $y = Y \cup \{(2,6\}$. Assim obtemos $x^{60}y^{60}(2) = x^{60}y^{59}(6) = x^{60}(6) = X^{60}(6) = 0 = f(2)$. O diagrama seguinte é exatamente o diagrama anterior com mais a seta 2 ⇝ 6 desenhada para construir $y = Y \cup \{(2,6)\}$ e a seta grossa nova 2 ➡ 0 para fazer a função f.



$f = x^{60}y^{60}$

Seja $h \in {}^{14}14$ a função do diagrama seguinte:



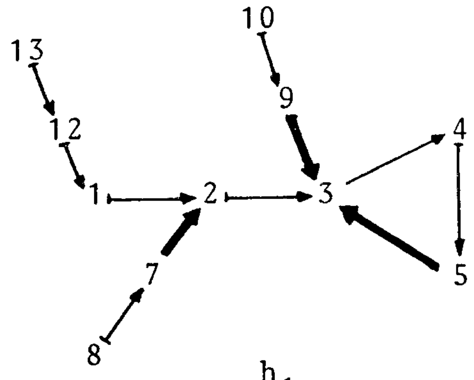
h

Usando a técnica de "costurar" do exemplo 1, juntamente com a do exemplo 2, vamos tentar representar a função

h na forma $h = x^{60}y^{60}$.

Já que $(x^{60}y^{60} \updownarrow r_3)\mathrm{Prt}(3)$, facilmente, vemos que $x^{60}y^{60}$ não representa nem $0 \longmapsto 1 \longmapsto 2$, nem $8 \longmapsto 7 \longmapsto 2$ e nem $13 \longmapsto 12 \longmapsto 1$. Também, desde que $(x^{60}y^{60} \updownarrow r_4)\mathrm{Prt}(4)$, vemos que $x^{60}y^{60}$ não representa $13 \longmapsto 12 \longmapsto 1 \longmapsto 2$ e nem $6 \longmapsto 4 \longmapsto 5 \longmapsto 3$. Outra vez, $(x^{60}y^{60} \updownarrow r_5)\mathrm{Prt}(5)$; portanto, $x^{60}y^{60}$ não representa $11 \longmapsto 2 \longmapsto 3 \longmapsto 4 \longmapsto 5$ e nem $10 \longmapsto 9 \longmapsto 3 \longmapsto 4 \longmapsto 5$. Novamente $(x^{60}y^{60} \updownarrow r_6)\mathrm{Prt}(6)$; donde se vê que $x^{60}y^{60}$ não representa $0 \longmapsto 1 \longmapsto 2 \longmapsto 3 \longmapsto 4 \longmapsto 5$ e nem $8 \longmapsto 7 \longmapsto 2 \longmapsto 3 \longmapsto 4 \longmapsto 5$. Também lembramos que $x^{60}y^{60}$ não representa o 3-ciclo $(3\ 4\ 5)$.

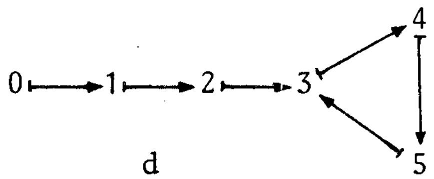
Então será que $x^{60}y^{60}$ não representa h? Representa, sim! Lembrando que $(x^{60}y^{60} \downarrow r_7)\mathrm{Prt}(7)$, vemos que $x^{60}y^{60}$ representa $13 \longmapsto 12 \longmapsto 1 \longmapsto 2 \longmapsto 3 \longmapsto 4 \longmapsto 5$. Também, já que $(x^{60}y^{60} \downarrow r_2)\mathrm{Prt}(2)$, temos que $x^{60}y^{60}$ representa $8 \longmapsto 7$ e $10 \longmapsto 9$. Então podemos "costurar" as representações destas três últimas funções, e assim obter uma representação para $h_1 \in {}^{14}_{14}$ na forma $h_1 = x_1^{60}y_1^{60}$, onde h_1 é a função do diagrama seguinte:



h_1

No diagrama acima de h_1 as setas grossas são as que resultam do processo de "costurar". Agora, lembrando que "barbinhas" não atrapalham, podemos estender x_1 e y_1 nas funções x e y, respectivamente, de tal jeito que h_1 fique aumentada pelas "barbinhas" $0 \rightsquigarrow 1$, $11 \rightsquigarrow 2$ e $6 \rightsquigarrow 4$. Assim, conseguimos a representação desejada $h = x^{60}y^{60}$.

Nenhuma das técnicas usadas anteriormente dará uma representação para a função d, abaixo, na forma $d = x^{60}y^{60}$ com $\{x,y\} \subseteq Prt(6)$.



d

Questão I: Existe uma representação da função d na forma $d = x^{60}y^{60}$ com $\{x,y\} \subseteq Prt(6)$?

Questão II: Se a resposta à questão I for negativa, o que acontece com o aumento de d por uma "barbinha"? Importa onde entra essa tal "barbinha"? Por exemplo, se

$d \cup \{(6,1)\} = x^{60}y^{60}$ tiver solução em Prt(7), então $d \cup \{(6,p)\}$ também tem solução em Prt(7) para cada $p \in \{1,2,3,4,5\}$?

Questão III: Se nenhum $d \cup \{(6,p)\}$ tem solução em Prt(7) para cada $p \in \{1,2,3,4,5\}$, então quantas "barbinhas" são necessárias? Sabemos por [4;Theorem 1], que com um número infinito de "barbinhas" colocadas, a transformação infinita que resulta tem representação. Será que um número finito de tais "barbinhas" é suficiente?

B I B L I O G R A F I A

[1] Dickson,L.E.,"Introdution to the Theory of Numbers", New York, Dover Publication, Inc., 1957.

[2] Ehrenfeucht,A. e Silberger,D.M., Decomposing a transformation with an involution, Algebra Universalis 7(1977),179-190.

[3] Ehrenfeucht,A. e Silberger,D.M., Universal terms of the form B^nA^m, Algebra Universalis 10(1980),96-116.

[4] Isbell,J.R., On the problems of universal terms, Bull. de L'Academie Polonaise des Sciences XIV(1966),593-595.

[5] McNulty,G.F., The decision problem for equational bases of algebras, Annals Math. Logic 11(1976), 1-67.

[6] Momm,O., "Sobre a representação de ramos pelas palavras de complexidade dois", Tese de Mestrado, UFSC,Florianópolis, 1980.

[7] Santos,D., "Soletração inversa de palavras FPrt-universais de complexidade três", Tese de Mestrado,UFSC, Florianópolis, 1980.

[8] Silberger,D.M.,"Point universal terms in a free semigroup", Doctoral Dissertation, University of Washington, Seattle, 1973.

[9] Silberger, D.M., When is a term point universal?, Algebra Universalis 10(1980),135-154.

[10] Silberger, D.M., B^nA^m is universal iff point universal, Algebra Universalis 12(1981),335-342.

[11] Valente, M.L., "Sobre a universalidade de palavras para grupos simétricos", Tese de Mestrado, UFSC, Florianópolis, 1979.

[12] Weems(Harris),M., "Reverse spellings represent spikes for words of complexity two", Master's Thesis, Jackson States University, Jackson, Mississippi, 1977.

[13] Weems, Margaret, On the reverse spelling of a point universal word, Algebra Universalis (a ser publicado).