

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

C L A S S I F I C A Ç Ã O D E S U P E R F Í C I E S

SÉRGIO ELI CRESPI

ABRIL - 1982

A G R A D E C I M E N T O S

Agradeço aos responsáveis por minha formação, José e Santana, meus pais.

À Janete, pelas horas que dela tirei para poder realizar este trabalho.

Esta tese foi julgada adequada para a obtenção do título de

"MESTRE EM CIÊNCIAS"

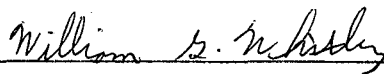
especialidade em Matemática e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação.



Prof. Inder Jeet Taneja, Ph.D.

Coordenador

Banca Examinadora:

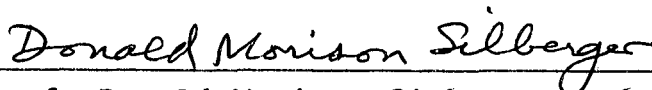


Prof. William Glenn Whitley, Ph.D.

Orientador



Prof. João Bosco P. de Carvalho, Ph.D.



Prof. Donald Morison Silberger, Ph.D.

R E S U M O

O objetivo deste trabalho é estudar e classificar as variedades compactas de dimensão dois (superfície) com fronteira e sem fronteira.

No decorrer desta classificação, apresentaremos alguns invariantes numéricos que completam a classificação de Homeomorfismos destas superfícies.

ABSTRACTS

The objective of this dissertation is to present a study of the classification problem for compact two manifolds with and without boundary.

We present some numerical invariants which completely determine the homeomorphism class of these manifolds

INDICE

INTRODUÇÃO.....	vi
CAPÍTULO I - COMPLEXOS SIMPLICIAIS	1
CAPÍTULO II - VARIEDADE TOPOLÓGICA.....	12
CAPÍTULO III - SUPERFÍCIES.....	20
CAPÍTULO IV - TEOREMA DA CLASSIFICAÇÃO DE SUPERFÍCIE COMPACTA.....	51
CAPÍTULO V - VARIEDADES COM FRONTEIRA:.....	73
BIBLIOGRAFIA	89

INTRODUÇÃO

O conceito topológico de superfície ou variedade de dimensão 2 é uma abstração matemática do conceito familiar de superfície feita de papel. Uma variedade de dimensão 2 é um espaço topológico com as mesmas propriedades do plano cartesiano.

Definiremos e daremos alguns exemplos de variedade n -dimensional mas dedicaremos a maior parte deste trabalho para o caso $n = 2$.

A existência de um teorema de classificação de variedades compactas de dimensão 2, faz com que nossos conhecimentos sobre variedades de dimensão 2 sejam mais completos, que nossos conhecimentos sobre os casos de dimensões superiores.

Este teorema nos mostra como obter todas as variedades compactas de dimensão 2. Definiremos invariantes que nos permitem determinar se duas variedades compactas de dimensão 2 são ou não homeomorfas. Até hoje não se conhece nenhum teorema que classifique variedades compactas de dimensão 3, e os especialistas em lógica provaram que não podemos esperar nenhum resultado completo de variedade n -dimensional $n \geq 4$.

CAPÍTULO I

COMPLEXOS SIMPLICIAIS

Trabalharemos com subespaços especiais de \mathbb{R}^n munido da topologia dada pela distância euclidiana.

1) Definição:

Sejam P e Q pontos de \mathbb{R}^n . Um segmento PQ é o subconjunto da reta gerado por P e Q formado pelos pontos $T = KP + LQ$ com $K + L = 1$, $K \geq 0$ e $L \geq 0$.

A medida que K e L variam o ponto $T = KP + LQ$ descreve o segmento PQ .

2) Exemplo:

Seja $P = (2, 2)$

$Q = (6, 6)$

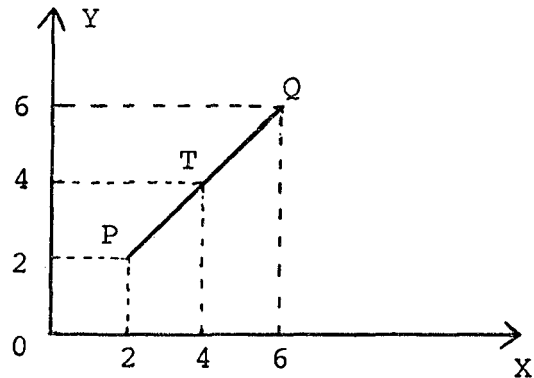
$T = (x, y)$

$T = KP + LQ$

$(x, y) = K(2, 2) + L(6, 6)$ escolha $K = L = \frac{1}{2}$

$(x, y) = \frac{1}{2}(2, 2) + \frac{1}{2}(6, 6)$

$T = (4, 4)$



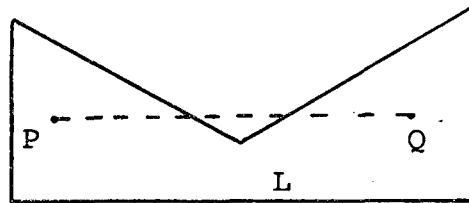
3) Definição:

Um conjunto $L \subset \mathbb{R}^n$ é chamado convexo se para todo par (P, Q) de pontos de L , o segmento PQ está inteiramente contido em L .

Exemplos:

4) O disco D^n é convexo.

5)



L não é convexo

6) Definição:

Um conjunto $\{p_0, p_1, \dots, p_m\}$ de vetores de \mathbb{R}^n é convexo independente ou C - independente, que denotamos por C - I, se o conjunto $\{p_1 - p_0, p_2 - p_0, \dots, p_m - p_0\}$ é linearmente independente. Pela forma que definimos, parece que a ordem dos elementos do conjunto influencia a C - independência do conjunto, o que não ocorre como mostraremos a seguir.

Seja $L = \{p_0, p_1, \dots, p_m\}$ um conjunto C - I, isto é,

$$\{p_j - p_0\}_{j=1}^m \text{ é L - I.}$$

Vamos mostrar que para cada $i \neq 0$ o conjunto

$$L' = \{p_0 - p_i, p_1 - p_i, p_2 - p_i, \dots, p_{i-1} - p_i, p_{i+1} - p_i, \dots, p_m - p_i\} \text{ é L-I, isto é,}$$

se $\sum_{j \neq i} \alpha_j (p_j - p_i) = 0$ teremos $\alpha_j = 0 \forall j \neq i$.

$$\text{Assim } 0 = \sum_{j \neq i} \alpha_j (p_j - p_i) = \sum_{j \neq i} \alpha_j (p_j - p_0 + p_0 - p_i) =$$

$$= \sum_{j \neq i, 0} \alpha_j (p_j - p_0) - \sum_{j \neq i} \alpha_j (p_i - p_0) =$$

$$= \sum_{j \neq i, 0} \alpha_j (p_j - p_0) + (- \sum_{j \neq i} \alpha_j) (p_i - p_0).$$

Portanto sabemos que $\alpha_j = 0$ se $j \neq 0, i$ e $\sum_{j \neq i} \alpha_j = 0$.

Desta forma a soma $0 = \sum_{j \neq i} \alpha_j$ reduz-se a $0 = \alpha_0$.

Concluimos que todos os α_j são nulos. Logo

$$\{p_j - p_i\}_{j \neq i}^m \text{ é } L - I.$$

Exemplos:

7) Seja o conjunto: $S = \{ \underbrace{(1,0,0)}_{p_0}, \underbrace{(0,1,0)}_{p_1}, \underbrace{(0,0,1)}_{p_2} \}$

$$p_1 - p_0 = (-1, 1, 0)$$

$$p_2 - p_0 = (-1, 0, 1)$$

Resolvendo o sistema de equações lineares homogêneas vemos que a única solução é trivial. Logo S é $C - I$.

8) Qualquer subconjunto não vazio de um conjunto $C - I$ é $C - I$. Seja $\{p_0, p_1, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots, p_m\}$ um conjunto $C - I$, isto é, $\{p_j - p_0\}_{j=1}^m$ é $L - I$. Sabemos que qualquer subconjunto de um conjunto $L - I$ é $L - I$, logo o conjunto $\{p_j - p_0\}_{j=1}^n$ é $L - I$, concluimos assim que o subconjunto $\{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ é $C - I$.

9) Seja $S = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ um conjunto $L - I$, então o conjunto $S \cup \{0\}$ é $C - I$, isto é, basta fazer $p_0 = 0$ obtendo assim

$$p_1 - p_0 = p_1$$

$$p_2 - p_0 = p_2$$

$$\vdots$$

$$p_n - p_0 = p_n$$

temos que $\{p_j - p_0\}_{j \neq 0}$ é $L - I$ logo $S \cup \{0\}$ é $C - I$.

10) Qualquer conjunto L - I não vazio é C - I.

11) Definição:

Seja S um subconjunto de R^n .

Definimos a casca convexa de S como sendo o conjunto

$$T = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i p_i \text{ com } n \in N / p_i \in S, a_i \geq 0 \text{ e } \sum a_i = 1 \right\}.$$

12) Lema

Seja S e T como na definição anterior, então T é convexo.

$$\text{Seja } P = \sum_{i=1}^n a_i p_i \text{ e } Q = \sum_{j=1}^m b_j q_j \text{ onde } a_i \geq 0, \sum_{i=1}^n a_i = 1, \\ p_i \in S \text{ e } b_j \geq 0, \sum_{j=1}^m b_j = 1, q_j \in S.$$

$$\text{Então se } 0 \leq t \leq 1, tp + (1-t)q = t \sum_{i=1}^n a_i p_i + (1-t) \sum_{j=1}^m b_j q_j = \\ = \sum_{i=1}^n a_i t p_i + \sum_{j=1}^m b_j (1-t) q_j = \sum_{R=1}^{n+m} C_R W_R \text{ onde:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_R = a_i t \quad \text{para } R = 1, \dots, n, \\ C_{n+j} = (1-t) b_j \quad j = 1, \dots, m, \\ W_n = p_i \quad \text{para } i = 1, \dots, n, \\ W_{n+1} = q_j \quad \text{para } j = 1, \dots, m. \end{array} \right.$$

Para $\sum_{R=1}^{n+m} C_R W_R$ pertencer a T é suficiente que:

$$C_R \geq 0 \quad \text{e} \quad \sum_{R=1}^{n+m} C_R = 1.$$

Mas $C_R \geq 0$ pois $a_i \geq 0$ e $b_j \geq 0$ além disso,

$$\begin{aligned}
\sum_{R=1}^{n+m} C_R &= \sum_{R=1}^n C_R + \sum_{R=n+1}^m C_R = \sum_{R=1}^n a_i t + \sum_{j=1}^m (1-t) b_j = \\
&= t \sum_{i=1}^n a_i + (1-t) \sum_{R=n+1}^m b_j = \\
&= t \cdot 1 + (1-t) \cdot 1 = t + 1 - t = 1
\end{aligned}$$

Logo T é convexo.

13) Definição:

Seja $S = \{v_0, \dots, v_n\}$ um conjunto C-I em \mathbb{R}^n , sua casca convexa $\bar{\sigma}_n$ será chamado o n-simplexo fechado com vértices $\{v_0, \dots, v_n\}$.

14) Lema:

$x \in \bar{\sigma}_n$ se e somente se $x = \sum_{i=0}^n t_i v_i$ com $t_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^n t_i = 1$ isto é, $x \in \bar{\sigma}_n$ se e somente se for uma combinação convexa de elementos de S. Além disso os t_i são unicamente determinados pelos v_i e são chamados, as coordenadas baricêntricas de x relativo aos vértices $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$.

Demonstração:

A primeira parte deste lema decorre da definição de casca convexa. A unicidade dos elementos t_i iremos provar a seguir.

$$\text{Seja } \sum_{i=0}^n t_i v_i = \sum_{i=0}^n s_i v_i$$

mostraremos que $t_i = s_i$. Assim $\sum_{i=0}^n t_i v_i - \sum_{i=0}^n s_i v_i = 0$ ou

$$\sum_{i=0}^n (t_i - s_i) v_i = 0.$$

Suponhamos que algum $t_i - s_i \neq 0$. Por simplicidade iremos demonstrar para o caso $i = 0$, isto é, $t_0 - s_0 \neq 0$.

$$\text{Então resolvemos a equação para } v_0 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i - s_i}{s_0 - t_0} \right) v_i,$$

deste modo

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i - s_i}{s_0 - t_0} \right) (v_i - v_0) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i - s_i}{s_0 - t_0} \right) v_i - \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i - s_i}{s_0 - t_0} \right) v_0 = \\ &= v_0 - \left(\sum_{i=1}^n \frac{t_i - s_i}{s_0 - t_0} \right) v_0 = \left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{t_i - s_i}{s_0 - t_0} \right) v_0. \end{aligned}$$

$$\text{Mas } \sum_{i=0}^n t_i = 1 = \sum_{i=0}^n s_i \Rightarrow \sum_{i=0}^n t_i - \sum_{i=0}^n s_i = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^n t_i - \sum_{i=1}^n s_i + (t_0 - s_0) = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^n (t_i - s_i) = s_0 - t_0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{t_i - s_i}{s_0 - t_0} = 1 \Rightarrow$$

$$1 - \sum_{i=1}^n \frac{t_i - s_i}{s_0 - t_0} = 0.$$

Deste modo concluímos que:

$$\sum_{i=1}^n \frac{t_i - s_i}{s_0 - t_0} (v_i - v_0) = 0,$$

$$\text{e } \frac{t_i - s_i}{s_0 - t_0} = 0 \text{ pois } \{v_0, \dots, v_n\} \text{ é C - I.}$$

Assim $t_i = s_i$ para $i = 1, \dots, n$.

$$\text{Como } \sum_{i=0}^n t_i = 1 \text{ e } \sum_{i=0}^n s_i = 1 \text{ temos}$$

$$t_0 + \sum_{i=1}^n t_i = 1 \Rightarrow t_0 = 1 - \sum_{i=1}^n t_i = 1 - \sum_{i=1}^n s_i = s_0$$

logo $t_0 = s_0$, chegamos a uma contradição pois admitimos que $t_0 - s_0 \neq 0$.

15) Definição:

Seja $\bar{\sigma}_n$ um n -simplexo fechado com vértices $\{v_0, \dots, v_n\}$.

Definimos o n -simplexo aberto σ_n com vértices $\{v_0, \dots, v_n\}$

como sendo o conjunto

$$\sigma_n = \{ \sum t_i v_i / 0 < t_i \leq 1 \text{ e } \sum t_i = 1 \}$$

16) Exemplos:

$\bar{\sigma}_0 = \sigma_0$ é um ponto.

σ_1 é um intervalo aberto (v_0, v_1) e $\bar{\sigma}_1$ é um intervalo fechado $[v_0, v_1]$.

σ_2 é o interior de um triângulo e $\bar{\sigma}_2 = \sigma_2 \cup F_r(\sigma_2)$.

σ_3 é o interior de um tetraédro e $\bar{\sigma}_3 = \sigma_3 \cup F_r(\sigma_3)$.

17) Definição:

Seja σ_n um n -simplexo aberto (ou fechado) com vértices v_0, \dots, v_n e q um inteiro $0 \leq q \leq n$.

Uma q -face fechada (aberta) com vértices v_{i_0}, \dots, v_{i_q} é um subconjunto de $\bar{\sigma}_n$ formado pelos pontos $\sum_{k=0}^q t_k v_{i_k}$ com $0 \leq t_k \leq 1$ ($0 < t_k \leq 1$) e $\sum t_k = 1$.

Isto é, S é uma q -face aberta (fechada) de σ_n se S é um q -simplexo aberto (fechado) com vértices escolhidos entre os de σ_n .

Agora introduziremos o conceito de simplexo orientado através da orientação de seus vértices.

18) Definição:

Um simplexo é chamado um simplexo ordenado se munirmos o conjunto de seus vértices com uma ordem (total). Por exemplo, se σ_n é formado pelos vértices $\{v_0, \dots, v_n\}$ podemos munir os vértices com a ordem $v_0 < v_1 < \dots < v_n$.

Seja o simplexo σ_3 tendo como vértices $\{v_0, v_1, v_2\}$ e τ_3 tendo os mesmos vértices.

Seja a ordem de σ_3 , $v_0 < v_1 < v_2$, e a ordem de τ_3 , $v_1 < v_2 < v_0$.

Estes simplexos não são iguais como simplexos ordenados, mas são iguais como simplexos geométricos.

19) Definição:

Seja σ_n e τ_n dois simplexos ordenados com os mesmos vértices $\{v_0, \dots, v_n\}$ com as seguintes ordens: $v_{i_0} < \dots < v_{i_n}$ e $v_{j_0} < \dots < v_{j_n}$ respectivamente.

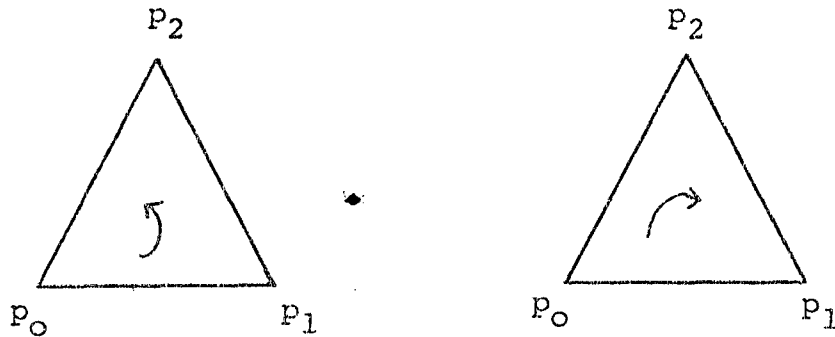
Dizemos que as ordens em σ_n e τ_n determinam a mesma orientação se a permutação de (i_0, \dots, i_n) para (j_0, \dots, j_n) dos inteiros $(0, \dots, n)$ é uma permutação par. Caso contrário as ordens determinam orientações diferentes.

Se as ordens de σ_n e τ_n são equivalentes, isto é, determinam a mesma orientação, dizemos que σ_n e τ_n são iguais como simplexos orientados, caso contrário dizemos que $\sigma_n = -\tau_n$.

Se σ é um simplexo com vértices v_0, v_1, \dots, v_n , o símbolo $\langle v_0, \dots, v_n \rangle$ significará o simplexo σ com qualquer ordem equiva-

lente a $v_0 < v_1 < \dots < v_n$.

Exemplo:



σ_2 é determinado por $\langle p_0, p_1, p_2 \rangle$ e τ_2 é determinado por $\langle p_0, p_2, p_1 \rangle$.

Portanto $\sigma_2 = -\tau_2$.

20) Definição:

Um complexo simplicial K , é um conjunto de simplexos abertos σ_m , de \mathbb{R}^∞ , tais que:

- i - Se $\sigma_m \in K$, todas as faces abertas de σ_m também pertencem a K .
- ii - Dois simplexos distintos de K são disjuntos.
- iii - Dois simplexos distintos de K não tem todas as faces coincidentes, ou equivalentemente simplexos distintos não tem os mesmos vértices.
- iv - Se σ_n é um simplexo de K , $x \in \sigma_n$ e $\{x_n\}_{n-1}$ é uma seqüência de pontos que converge para x e todos estão contidos em simplexos de dimensão n , então eventualmente todos os $\{x_n\}$ são elementos de σ_n .

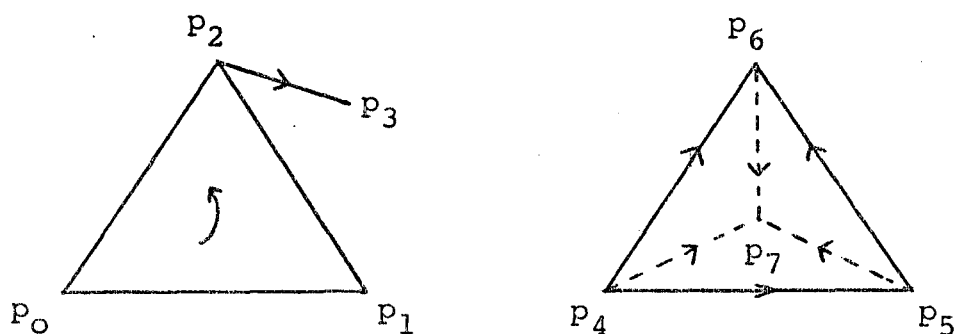
O conjunto dos pontos de \mathbb{R}^∞ que pertencem a algum com-

plexo K é denominado poliédro, e é indicado por $|K|$, e K é chamado uma triangulação de $|K|$.

A dimensão do complexo K é dada pela dimensão do maior simplexo, se existir.

O complexo é dito finito, se possui só um número finito de simplexos.

21) Exemplos:.



Temos os seguintes simplexos:

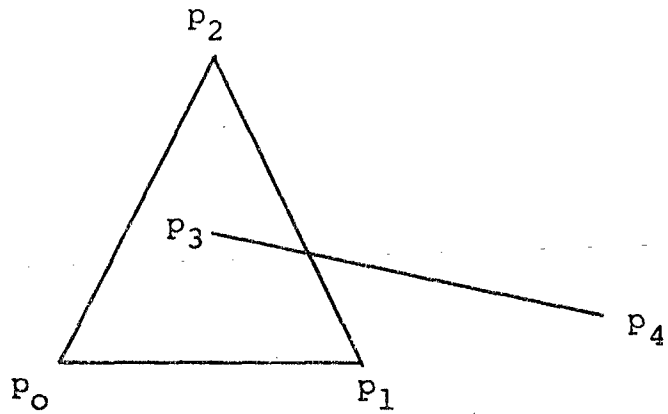
0 - simplexo $p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7$.

1 - simplexo $p_0, p_1, p_0, p_2, p_1, p_2, p_2, p_3, p_4, p_5, p_4, p_6, p_5, p_6,$
 p_6, p_7, p_5, p_7 .

2 - simplexo $p_0, p_1, p_2, p_4, p_5, p_6, p_4, p_6, p_7, p_4, p_5, p_7, p_5, p_6, p_7$

3 - simplexo p_4, p_5, p_6, p_7 .

22)

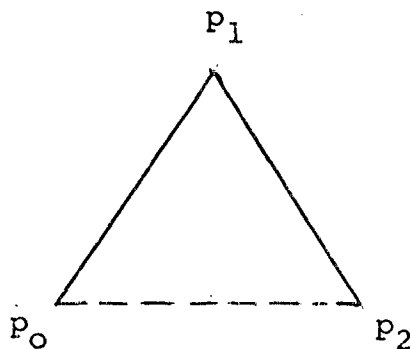


Seja o conjunto $\{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_0 p_1, p_0 p_2, p_1 p_2, p_3 p_4\}$

Este conjunto não define um complexo, pois os simplexos $p_1 p_2, p_3 p_4$ não são disjuntos.

No 1º exemplo o conjunto $\{p_0, p_1, p_2, p_0 p_1, p_1 p_2\}$ não define um complexo simplicial, pois o simplexo $p_0 p_1 p_2$ não tem as faces $p_0 p_1, p_0 p_2, p_1 p_2$ pertencentes a K .

23) Seja o conjunto $\{p_0, p_1, p_2, p_0 p_1, p_1 p_2, p_0 p_1 p_2\}$



não é complexo pois $p_0 p_1 p_2$ não possui todas as faces no conjunto.

CAPÍTULO II

VARIEDADE TOPOLÓGICA

Definiremos e daremos alguns exemplos de variedades n -dimensional, mas dedicaremos a maior parte deste trabalho para o caso $n = 2$.

1) Definição:

Seja n um inteiro não negativo. Uma variedade topológica ou C^0 , n -dimensional é um espaço de Hausdorff, tal que cada ponto P tem uma vizinhança aberta homeomorfa a bola aberta n -dimensional $U^n = \{x \in \mathbb{R}^n / |x| < 1\}$.

2) Observação:

É fácil ver que se U é aberto em \mathbb{R}^n e $x \in U$, então existe uma bola aberta com centro em x que está contida em U . Portanto podemos enfraquecer a condição na definição a ser:

"Cada ponto possui uma vizinhança homeomorfa a um aberto em \mathbb{R}^n ."

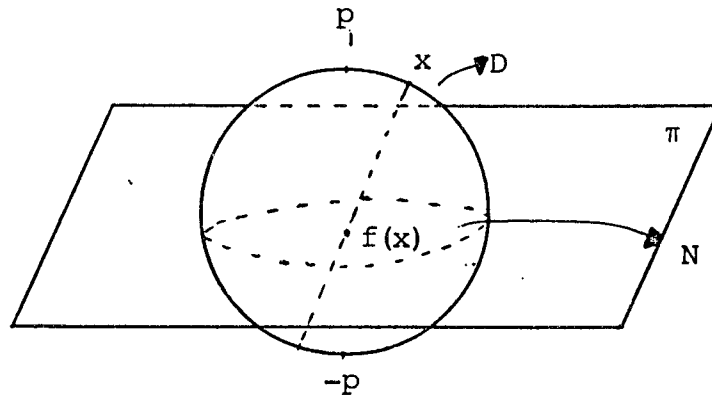
Exemplos:

3) O espaço euclidiano \mathbb{R}^n é uma variedade n -dimensional. Basta verificar que a função identidade é um homeomorfismo de \mathbb{R}^n sobre um aberto de \mathbb{R}^n , ele mesmo.

4) A esfera S^n de dimensão n é uma variedade n -dimensional.

Seja $P = (0, 0, \dots, 1) \in S^n$. Construiremos um aberto D em

S^n que contém o ponto P , e uma função $f: D \rightarrow N$, sendo N um aberto de \mathbb{R}^n e provaremos que f é um homeomorfismo.



Definimos:

$$S^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) / x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 = 1\} .$$

$$N = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, 0) \in \mathbb{R}^{n+1} / \sum x_i^2 < 1\} \subseteq \mathbb{R}^n .$$

e
$$D = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in S^n / x_{n+1} > 0\}$$

Escolha $x \in D$.

Seja r_x o segmento de reta que passa por x e $-p$, então:

$$r_x = \{tx + (1-t) \cdot (-p) / 0 \leq t \leq 1\} . \text{ Como } x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$$

então:
$$r_x = \{t(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) + (1-t) \cdot (0, 0, \dots, -1) / 0 \leq t \leq 1\} =$$

$$\{(tx_1, tx_2, \dots, tx_{n+1}) + (0, 0, \dots, t-1) / 0 \leq t \leq 1\} =$$

$$\{(tx_1, tx_2, \dots, tx_n, tx_{n+1} + t - 1) / 0 \leq t \leq 1\} .$$

Definimos $f(x)$ a ser o ponto onde r_x atravessa o plano

x_{n+1} , isto é, quando $tx_{n+1} + t - 1 = 0$.

$$\text{Portanto } f(x) = \left(\frac{x_1}{1 + x_{n+1}}, \frac{x_2}{1 + x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 + x_{n+1}} \right).$$

A verificação que f é contínua é imediata pois cada função coordenada é contínua.

Temos que

$$|f(x)| = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i)^2}{(1 + x_{n+1})^2} = \frac{1}{(1 + x_{n+1})^2} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i)^2.$$

Desde que $\sum_{i=1}^n (x_i)^2 + (x_{n+1})^2 = 1$ sabemos que $\sum_{i=1}^n (x_i)^2 = 1 - (x_{n+1})^2$.

Substituindo na primeira equação temos:

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \frac{1}{(1 + x_{n+1})^2} \cdot 1 - (x_{n+1})^2 = \\ &= \frac{(1 - x_{n+1})}{(1 + x_{n+1})^2} \cdot (1 + x_{n+1}) = \frac{1 - x_{n+1}}{1 + x_{n+1}} < 1 \end{aligned}$$

o que mostra que $f(x) \in N$.

Portanto f é uma função contínua de D em N .

Seja $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in N$.

Provaremos que o sistema de equações

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = \frac{x_1}{1 + x_{n+1}} \\ a_2 = \frac{x_2}{1 + x_{n+1}} \\ \vdots \\ a_n = \frac{x_n}{1 + x_{n+1}} \end{array} \right.$$

tem solução com $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in D$.

$$\text{Se tiver solução } \begin{cases} x_1 = a_1 \cdot (1 + x_{n+1}), \\ x_2 = a_2 \cdot (1 + x_{n+1}), \\ \vdots \\ x_n = a_n \cdot (1 + x_{n+1}). \end{cases}$$

Precisamos determinar x_{n+1} e provar que a solução é elemento de D .

Sabemos que se $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in D$ é solução, então:

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\sum_{i=1}^n (x_i)^2 \right) + (x_{n+1})^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 (1 + x_{n+1}) + (x_{n+1})^2 \right) = \\ &= (1 + x_{n+1})^2 \cdot \sum_{i=1}^n a_i^2 + (x_{n+1})^2. \end{aligned}$$

$$\text{Seja } a = \sum_{i=1}^n a_i^2 \text{ e } x = x_{n+1}.$$

Substituindo na equação acima temos:

$$1 = (1+x)^2 \cdot a + x^2 \quad \text{ou} \quad (a+1)x^2 + 2ax + (a-1) = 0.$$

Resolvendo a equação do segundo grau obtemos as seguintes raízes:

$$x = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 - 4(a+1) \cdot (a-1)}}{2(a+1)} = \frac{-2a \pm 2}{2(a+1)}$$

$$x' = \frac{-a+1}{a+1} \quad x'' = \frac{-a-1}{a+1}$$

Como x_{n+1} tem que ser positivo, escolhamos a seguinte raiz da equação:

$$x_{n+1} = \frac{1-a}{1+a} > 0 \quad \text{desde que } 0 \leq a < 1.$$

Verificaremos que $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in D$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n (x_i)^2 + (x_{n+1})^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i)^2 + \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^2 = \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{2a_i}{1+a} + \frac{(1-a)^2}{(1+a)^2} = \frac{4}{(1+a)^2} \sum_{i=1}^n a_i^2 + \frac{(1-a)^2}{(1+a)^2} = \\
&= \frac{4a+1-2a+a^2}{(1+a)^2} = \frac{1+2a+a^2}{(1+a)^2} = 1,
\end{aligned}$$

assim mostramos que $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in D$.

Logo podemos definir uma função

$g: N \rightarrow D$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \rightarrow \left(\frac{2a_1}{1 + \sum_{i=1}^n a_i^2}, \frac{2a_2}{1 + \sum_{i=1}^n a_i^2}, \dots, \frac{2a_n}{1 + \sum_{i=1}^n a_i^2}, \frac{1 - \sum_{i=1}^n a_i^2}{1 + \sum_{i=1}^n a_i^2} \right)$$

É imediato que g é contínua, desde que cada função coordenada é contínua.

Agora calcularemos a composição de f com g .

a) $g \circ f$

$$\begin{aligned}
g \circ f(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) &= g(f(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})) = \\
&= g\left(\frac{x_1}{1+x_{n+1}}, \frac{x_2}{1+x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1+x_{n+1}}\right) \\
&= \left(\frac{2 \cdot x_1 / 1 + x_{n+1}}{1 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{1+x_{n+1}}\right)^2}, \dots, \frac{2 \cdot x_n / 1 + x_{n+1}}{1 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{1+x_{n+1}}\right)^2}, \frac{1 - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{1+x_{n+1}}\right)^2}{1 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{1+x_{n+1}}\right)^2}\right)
\end{aligned}$$

fazendo $x = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i)^2}{(1+x_{n+1})^2}$ temos que $\sum_{i=1}^n (x_i)^2 = 1 - (x_{n+1})^2$

ou

$$x = \frac{1 - (x_{n+1})^2}{(1 + (x_{n+1}))^2} = \frac{1 - x_{n+1}}{1 + x_{n+1}}$$

$$1 + x = 1 + \frac{1 - x_{n+1}}{1 + x_{n+1}} = \frac{2}{1 + x_{n+1}}$$

$$\frac{1}{1 + x} = \frac{1 + x_{n+1}}{2}$$

$$\frac{1 - x}{1 + x} = \frac{\frac{2x_{n+1}}{1 + x_{n+1}}}{\frac{2}{1 + x_{n+1}}} = \frac{2x_{n+1}}{1 + x_{n+1}} \cdot \frac{1 + x_{n+1}}{2}$$

Portanto $g \circ f(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) =$

$$= \left(\frac{2x_1}{1+x_{n+1}} \cdot \frac{1+x_{n+1}}{2}, \dots, \frac{2x_n}{1+x_{n+1}} \cdot \frac{1+x_{n+1}}{2}, x_{n+1} \right)$$

$$= (x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$$

Calculamos agora $f \circ g$.

b) $f \circ g$

$$f \circ g(a_1, a_2, \dots, a_n) = f(g(a_1, a_2, \dots, a_n)) =$$

$$= f\left(\frac{2a_1}{1 + \sum_{i=1}^n a_i^2}, \dots, \frac{1 - \sum_{i=1}^n a_i^2}{1 + \sum_{i=1}^n a_i^2}\right)$$

$$= \left(\frac{2a_1 / 1 + \sum_{i=1}^n a_i^2}{1 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{1+x_{n+1}}\right)^2}, \dots, \frac{1 - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{1+x_{n+1}}\right)^2}{1 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{1+x_{n+1}}\right)^2}\right)$$

Sabemos que $x = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i)^2}{(1+x_{n+1})^2}$, $\frac{1-x}{1+x} = \frac{1 + \frac{2a_n}{1 + \sum_{i=1}^n a_i^2}}{2}$

$$\frac{1-x}{1+x} = \frac{2a_n}{1 + \sum_{i=1}^n a_i^2} \cdot \frac{1 + \sum_{i=1}^n a_i^2}{2} = a_n.$$

Portanto $1+x = 1 + \frac{1 - \sum_{i=1}^n a_i^2}{1 + \sum_{i=1}^n a_i^2} = \frac{2}{1 + \sum_{i=1}^n a_i^2}$

$$f \circ g(a_1, a_2, \dots, a_n) = \left(\frac{2a_1}{1 + \sum_{i=1}^n a_i^2}, \frac{1 + \sum_{i=1}^n a_i^2}{2}, \dots, a_n \right) =$$

$$= (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Provamos assim que g é a função inversa de f . Como ambas são contínuas concluímos que f é um homeomorfismo, provando assim que a esfera de dimensão n é uma variedade n -dimensional.

Algumas propriedades sobre variedades topológicas

5) Seja M uma variedade m -dimensional e N uma variedade n -dimensional, o espaço produto $M \times N$ é uma variedade $(m+n)$ dimensional.

Mostraremos que dado um ponto $Z \in M \times N$ existe um aberto $U_p \times U_q \in M \times N$ homeomorfo a um aberto em \mathbb{R}^{m+n} .

Seja $Z = (p,q) \in M \times N$, como M é uma variedade m -dimensional existe um homeomorfismo $\psi: U_p \rightarrow \mathbb{R}^m$ sendo U_p uma vizinhança aberta de P em M , analogamente para N existe $\Psi: U_q \rightarrow \mathbb{R}^n$.

O conjunto $U_p \times U_q$ é uma vizinhança aberta de $Z = (p,q)$ em $M \times N$, e a função $f: U_p \times U_q \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$ definida por $f(a,b) = (\psi(a), \Psi(b))$ é um homeomorfismo de $U_p \times U_q$ sobre \mathbb{R}^{m+n} .

6) Como exemplo desta propriedade temos:

$S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1 = T_n$ é uma n -variedade desde que S^1 é 1-variedade.

7) Se M^n é uma variedade n -dimensional, qualquer aberto V de M^n é também uma variedade n -dimensional. Escolha $P \in V \subseteq M^n$, existe U_p vizinhança aberta de P em M tal que $f: U_p \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo.

Então $f|_{U_p \cap V}: U_p \cap V \rightarrow f(U_p \cap V)$ é um homeomorfismo de uma vizinhança aberta de P em V sobre um aberto em \mathbb{R}^n . Logo V é uma variedade n -dimensional.

CAPÍTULO III

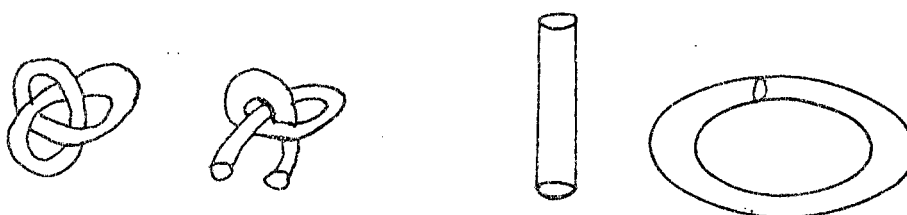
SUPERFÍCIE

1) Definição:

Superfície é uma variedade topológica conexa de dimensão dois, isto é, um espaço topológico de Hausdorff, tal que, cada ponto tem uma vizinhança aberta homeomorfa a um aberto de \mathbb{R}^2 .

Uma técnica para determinar quando duas superfícies são homeomorfas, que explicitaremos mais a frente, pode ser visualizada assim:

Dada uma superfície S_1 podemos abri-la através de um corte, deformá-la e obter uma nova superfície S_2 , através da identificação dos pontos onde houve o corte.

Espaço quociente

2) Definição:

Seja \sim uma relação de equivalência em um espaço topológico A . Chamamos o conjunto quociente de A pela relação de equivalência \sim , denotamos por A/\sim , ao conjunto de todas as classes de equivalência de \sim , isto é:

$$A/\sim = \{\bar{x} / x \in A\} \text{ onde } \bar{x} \text{ é a classe de equivalência do}$$

elemento x em relação a \sim ou, $\bar{x} = \{a \in A / a \sim x\}$.

3) Observamos que a função $n: A \rightarrow A/\sim$, $n(x) = \bar{x}$ é sobrejetiva. Assim dizemos que $U \subseteq A/\sim$ é aberto se e somente se $n^{-1}(U)$ é aberto em A . A/\sim munido com esta topologia é chamado o espaço quociente de A por \sim . O espaço quociente responde a nossa idéia intuitiva de formar um novo espaço topológico identificando certos pontos de um espaço topológico dado. Corresponde a noção de colar juntos dois ou mais espaços topológicos. É um método importante para formar novos espaços topológicos a partir de uma coleção de espaços dados. Por exemplo, começamos com os espaços X_1 e X_2 e passamos a sua união disjunta $X = X_1 \cup X_2$. Depois definimos de maneira conveniente uma relação de equivalência \sim que identifica alguns pontos de X_1 com outros de X_2 em X , a colagem será X/\sim . Usaremos este método para definir algumas superfícies que aparecerão no decorrer deste trabalho.

Exemplos de superfícies:

4) Esfera S^2

$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ para demonstrar que S^2 é uma superfície, basta analisar o exercício nº 4 pag. 12 para $n = 2$.

5) O toro T é uma superfície

Seja $X = [0,1] \times [0,1]$. Definimos a seguinte relação de equivalência \sim em X :

$$\sim = \{(x,y), (x,y) / (x,y) \in X\} \cup \{(x,0), (x,1) / x \in [0,1]\} \cup \{(0,y), (1,y) / y \in [0,1]\}.$$

O toro T é o espaço quociente X/\sim .

Devemos mostrar que o toro T é uma 2-variedade, isto é, se Z pertence a T existe uma vizinhança de Z em T que é homeomorfa a um aberto de \mathbb{R}^2 . Isto é óbvio se Z é representado por um ponto (x,y) no interior de X . Falta verificar os pontos representados por elementos da fronteira. Para verificar isso, usaremos a seguinte proposição.

Seja $A = (a,b] \times (c,d)$ e $B = [e,f) \times (c,d)$ com $(a,b] \cap [e,f) = \emptyset$.

Defina \sim a ser a menor relação de equivalência em $A \cup B$ que identifica (b,y) com (e,y) para $y \in (c,d)$. Então $A \cup B / \sim$ é homeomorfo a um retângulo aberto de \mathbb{R}^2 .

Demonstração:

Se $(x,y) \in A \cup B$, $[(x,y)]$ representará a classe de equivalência de (x,y) em $A \cup B / \sim$.

Seja $P: A \cup B \rightarrow A \cup B / \sim$ a projeção natural que leva o ponto Z na sua classe de equivalência $[Z]$.

Seja $D = (a, b + f - e) \times (c, d)$. Definimos duas funções $\psi_1: A \rightarrow D$ e $\psi_2: B \rightarrow D$ por

$$\psi_1(x,y) = (x,y) \quad \text{e} \quad \psi_2(x,y) = (x - e + b, y).$$

As funções ψ_1 e ψ_2 determinam assim a função

$\psi_1 \cup \psi_2: A \cup B \rightarrow D$ definida por:

$$\psi_1 \cup \psi_2 (Z) = \begin{cases} \psi_1 (Z) & \text{se } Z \in A \\ \psi_2 (Z) & \text{se } Z \in B \end{cases}$$

Claramente as funções ψ_1 , ψ_2 e $\psi_1 \cup \psi_2$ são contínuas.

Mostraremos agora que $\Psi = (\psi_1 \cup \psi_2) \circ P^{-1}$ é uma função de $A \cup B / \sim$

em D e portanto uma função contínua. Isto é, mostraremos que para cada ponto $Z \in A \cup B/\sim$ $(\psi_1 \cup \psi_2) \circ p^{-1}(Z)$ consta de um único ponto de D .

Tome $Z \in A \cup B/\sim$

Caso 1:

$Z = [(x,y)]$ com $(x,y) \in (a,b) \times (c,d)$

neste caso $p^{-1}(Z) = \{(x,y)\}$ e $\Psi(Z)$ consta unicamente do ponto $\psi_1(x,y) = (x,y)$.

Caso 2:

$Z = [(x,y)]$ com $(x,y) \in (e,f) \times (c,d)$

Do mesmo modo como no caso 1, $\Psi(Z)$ consta de um único ponto $\psi_2(x,y) = (x - e + b, y)$.

Caso 3:

$Z = [(b,y)]$

Neste caso $p^{-1}(Z) = \{(b,y), (e,y)\}$. Portanto

$$\Psi(Z) = \{\psi_1(b,y), \psi_2(e,y)\} = \{(b,y), (e - e + b, y)\} = \{(b,y)\}$$

logo $\Psi(Z)$ consta unicamente de um ponto.

Caso 4:

$Z = \{(e,y)\}$

Este caso está incluído no caso 3.

Assim Ψ é uma função contínua de $A \cup B/\sim$ em D .

Agora mostraremos que Ψ é injetora.

Seja Z_1 e $Z_2 \in D$ tal que $Z_1 \neq Z_2$ e $\Psi(Z_1) = \Psi(Z_2)$

Seja $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A \cup B$ tal que

$$Z_1 = [(x_1, y_1)]$$

$$Z_2 = [(x_2, y_2)]$$

Desde que:

$$\begin{aligned} \Psi(Z_1) &= (\psi_1 \cup \psi_2) \circ p^{-1} (x_1, y_1) = \left\{ \begin{array}{l} (x_1, y_1) \text{ se } x_1 \in (a, b] \\ (x_1 + b - e, y_1) \text{ se } x_1 \in [e, f) \end{array} \right\} = \\ &= \Psi(Z_2) = (\psi_1 \cup \psi_2) \circ p^{-1} (x_2, y_2) = \left\{ \begin{array}{l} (x_2, y_2) \text{ se } x_2 \in (a, b] \\ (x_2 + b - e, y_2) \text{ se } x_2 \in [e, f) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

tem-se que $y_1 = y_2$

Se x_1 e x_2 estão em $(a, b]$ ou ambos em $[e, f)$ segue que as primeiras coordenadas de $\Psi(Z_1)$ e $\Psi(Z_2)$ são iguais, isto é, $x_1 = x_2$ ou $x_1 + b - e = x_2 + b - e$.

De qualquer modo $x_1 = x_2$, com isto ocorre uma contradição. Portanto podemos supor que $x_1 \in (a, b]$ e $x_2 \in [e, f)$.

Assim lembrando que $y_1 = y_2$, temos que

$$(x_1, y_1) = \psi_1(x_1, y_1) = \Psi(Z_1) = \Psi(Z_2) = \psi_2(x_2, y_1) = (x_2 + b - e, y_1)$$

Desde que $a < x_1 \leq b$ tem-se que $a < x_2 + b - e \leq b$ ou $(a - b) + e < x_2 \leq e$

mas $e \leq x_2 < f$ com isto segue que $x_2 = e$ substituindo em $x_1 = x_2 + b - e \Rightarrow x_1 = e + b - e, x_1 = b$. Portanto

$$Z_1 = [(b, y_1)] = [(e, y_1)] = Z_2.$$

O que é uma contradição, logo Ψ é injetora.

Vamos mostrar que Ψ é sobrejetora.

Como p^{-1} , $\psi_1 \cup \psi_2$, são funções sobrejetoras
 $\Psi = (\psi_1 \cup \psi_2) \circ p^{-1}$ é sobrejetora.

Desde que $A \cup B/\sim$ é localmente compacto, D é Hausdorff e Ψ é contínua e bijetora, Ψ é um homeomorfismo e a proposição está demonstrada.

Voltamos ao problema de construir vizinhanças planas no toro, se $Z \in T$ e é representado pelo ponto $(0, y)$ em X , podemos escolher $c, d \in (0, 1)$ tal que $c < y < d$.

Seja $A = (\frac{2}{3}, 1] \times (c, d)$ $B = [0, \frac{1}{3}) \times (c, d)$.

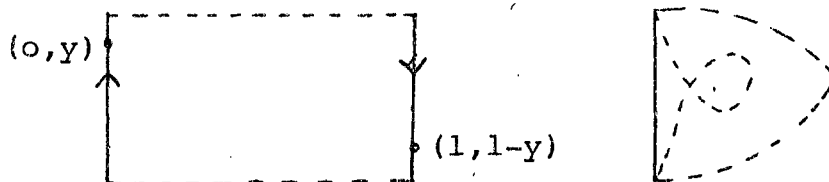
A proposição mostra que $A \cup B/\sim$ é uma vizinhança aberta de Z no toro que é homeomorfa a um retângulo aberto do plano. Os outros casos de pontos representados na fronteira são resolvidos de maneira semelhante. Do mesmo modo mostramos que as seguintes 2-variedades são superfícies.

6) Faixa de Moébius.

Em $Q = [0, 1] \times (0, 1)$ definimos a seguinte relação de equivalência.

a) se $x \neq 0$ e $x' \neq 1$ então $(x, y) \sim (x', y')$ se e somente se $x = x'$ e $y = y'$.

b) $(0, y) \sim (1, 1 - y)$. O modelo de Q/\sim em \mathbb{R}^3 é a faixa de Moébius.



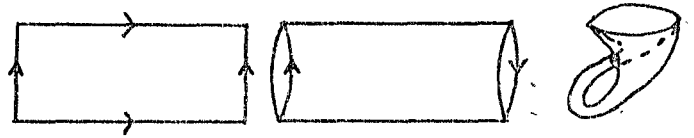
7) Garrafa de Klein K

$Q = [0,1] \times [0,1]$, defina a relação de equivalência:

a) Se $x, x' \neq 0,1$ e $y, y' \neq 0,1$ então $(x,y) \sim (x',y')$ se $x = x'$ e $y = y'$.

b) $(x,0) \sim (x',1)$ se $x = x'$

c) $(0,y) \sim (1,y')$ se $y + y' = 1$ $y' = 1 - y$

8) Plano projetivo P_2 

a) Definimos o plano projetivo P_2 como sendo o espaço quociente da esfera S^2 obtido pela identificação de cada par de pontos diametralmente opostos.

Outra definição de plano projetivo.

b) Seja $T = \{(x,y,z) \in S^2 / z \geq 0\}$ o hemisfério superior fechado de S^2 .

É evidente que, de cada par de pontos de S^2 , diametralmente opostos, ao menos um se encontra em T .

Se os dois pontos se encontram em T , então estarão sobre o equador que é a fronteira de T . Assim podemos definir também o plano projetivo P_2 como o espaço quociente de T obtido pela identificação de pontos diametralmente opostos da fronteira de T .

O teorema abaixo mostra que T/\sim e S^2/\sim são homeomorfos.

9) Teorema:

Seja X um espaço topológico compacto, \sim uma relação de equivalência em X e A um subconjunto fechado de X . Seja $\tilde{\sim}$ a relação de equivalência em

A induzida por \sim tal que $a_1 \sim a_2 \Leftrightarrow a_1, a_2 \in A_2$ e $a_1 \sim a_2$ como elemento de X . Se cada classe de equivalência de \sim intercepta A , então X/\sim e A/\sim são homeomorfos.

Demonstração:

Sejam $i: A \rightarrow X$ a função inclusão, $P: X \rightarrow X/\sim$ e $\hat{P}: A/\sim \rightarrow X/\sim$ a projeção natural. Mostraremos que $P \circ i$ induz um homeomorfismo Ψ de A/\sim em X/\sim .

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{i} & X \\
 \hat{P} \downarrow & \text{p o i} & \downarrow P \\
 A/\sim & \xrightarrow{\Psi} & X/\sim
 \end{array}$$

a) Vamos mostrar que $(P \circ i) \circ \hat{P}^{-1}$ é uma função contínua. tín

Sejam $a_1, a_2 \in A$ com $\hat{P}(a_1) = \hat{P}(a_2)$ e $(a_1 \sim a_2)$

$(P \circ i)a_1 = P(a_1) = P(a_2) = (P \circ i)a_2$ e segue que $\Psi = (P \circ i) \circ \hat{P}^{-1}$ é uma função contínua de A/\sim em X/\sim .

b) Ψ é injetora.

Escolha $Z_1, Z_2 \in A/\sim$ tal que $(Z_1) = (Z_2)$.

Escolha $a_1, a_2 \in A$ tal que $\hat{P}(a_1) = Z_1$ e $\hat{P}(a_2) = Z_2$.

Assim:

$$P(a_1) = (P \circ i)(a_1) = \Psi(Z_1) = \Psi(Z_2) = (P \circ i)(a_2) = P(a_2).$$

a_1 e a_2 são elementos de A que são \sim equivalentes, portanto \hat{P} equivalentes, logo $Z_1 = Z_2$.

c) Ψ é sobrejetora.

Escolha $Z \in X/\sim$. Existe $a \in A$ tal que $P(a) = Z$.

Segue imediatamente que $\Psi(\hat{p}(a)) = Z$.

d) Ψ é um homeomorfismo.

Desde que A é fechado em X e X é compacto, ambos X/\sim e A/\sim são compactos, logo Ψ é um homeomorfismo.

10) Corolário:

As duas construções de plano projetivo definidas anteriormente determinam espaços homeomorfos.

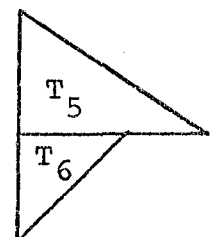
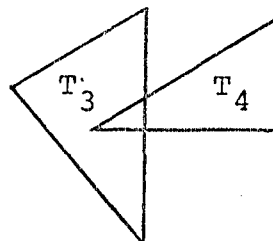
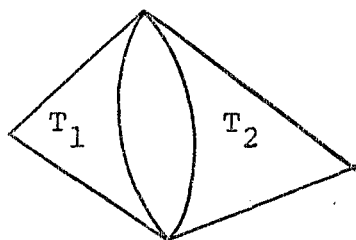
Triangulação de superfícies compactas

11) Definição:

Uma triangulação de uma superfície compacta S consiste em complexo simplicial K e um homeomorfismo $f = /K/ \rightarrow S$.

Os subconjuntos de $T \subseteq S$ que são imagem por f de 0-simplexos fechados, 1-simplexos fechados e 2-simplexos fechados, chamam-se vértices, arestas e triângulos. Dois triângulos, ou são distintos ou tem um só vértice em comum, ou tem toda uma aresta em comum.

Algumas situações que não são permitidas em uma triangulação:



Surge a pergunta:

Toda superfície pode ser triangulada?

T. Radó em 1925 foi o primeiro a demonstrar que isto é possível. Para demonstrar este teorema necessita-se do uso de uma forma forte do teorema da curva de jordan.

Esta demonstração é dada no primeiro capítulo do texto de Ahlfors y Sario, ver referência [2].

A triangulabilidade das 3-variedades, provaremos na parte final deste trabalho e não se sabe ainda se as variedades de dimensão superior podem ou não ser trianguladas.

Podemos imaginar uma superfície S triangulada, como sendo construída colando de uma certa forma os triângulos distintos. Visto que os triângulos distintos não podem ter os mesmos vértices, podemos determinar completamente uma triangulação enumerando os vértices e especificando que terna de vértices são vértices de um triângulo.

Com esta lista de triângulos, determinamos completamente a superfície S junto com a triangulação dada. Usaremos a triangulação para provar um dos teoremas mais importante deste trabalho, que é o teorema da classificação de superfícies compactas, para o cálculo de um importante invariante topológico, a característica de Euler e também para definir a orientabilidade de uma superfície compacta.

Exemplos:

Exemplos:

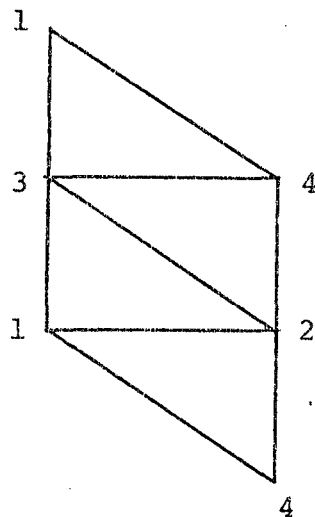
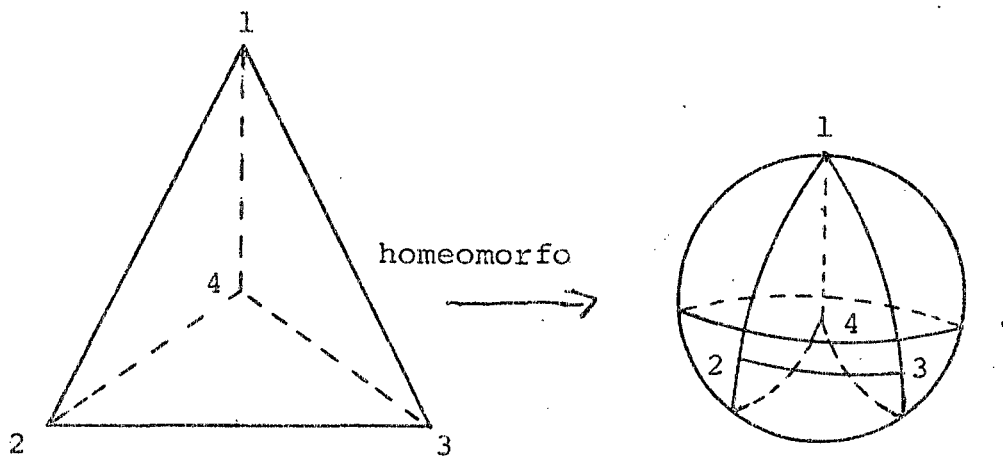
1 2 3

2 3 4

3 4 1

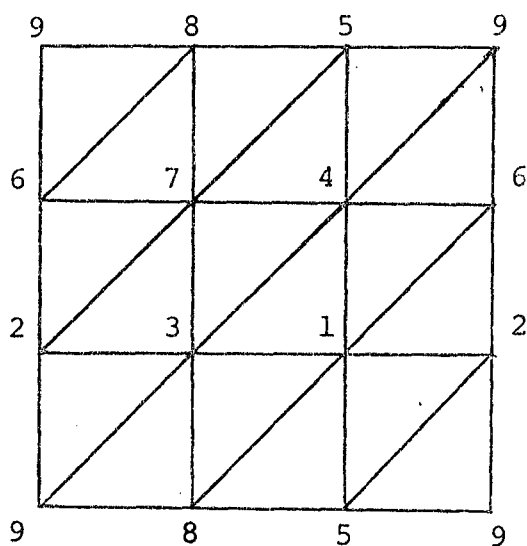
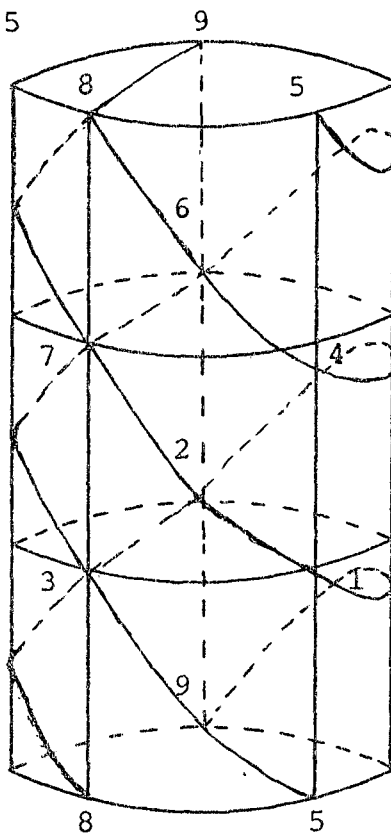
4 1 2

12) Seja a esfera S^2 , consideramos a seguinte triangulação para S^2 dada ao lado.



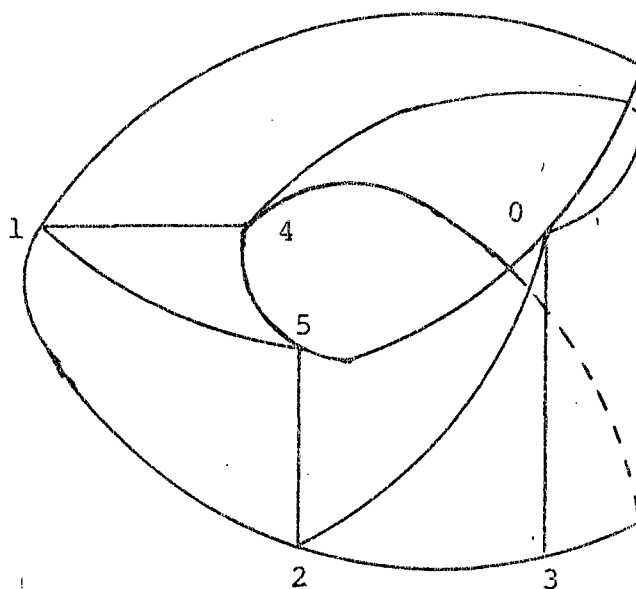
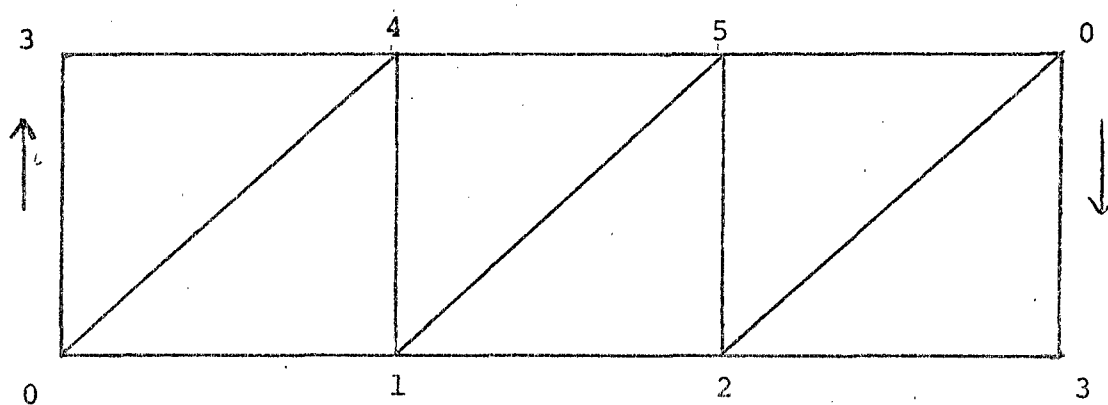
13) Uma triangulação para o toro é:

3 8 9	8 5 1	5 9 2
2 3 9	8 1 3	5 2 1
2 3 7	3 1 4	1 2 6
2 7 6	3 4 7	1 6 4
6 7 8	4 7 5	4 6 9
6 8 9	7 5 8	4 9 5



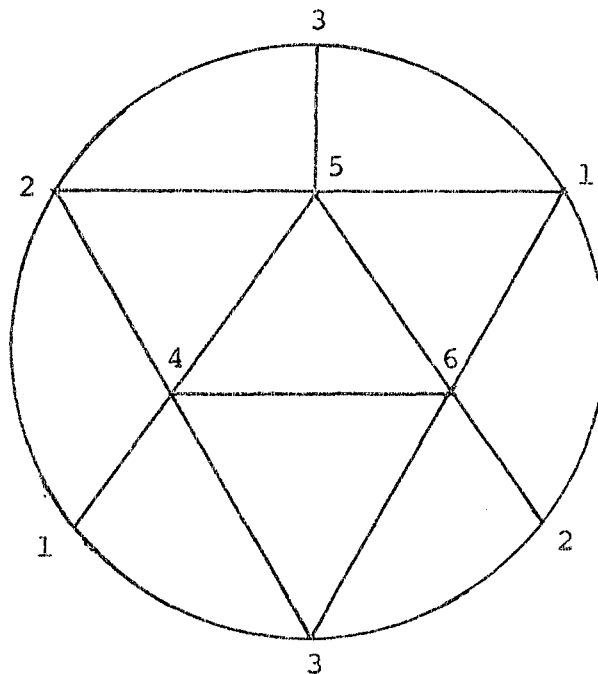
14) Em uma faixa de Moébius podemos ter a seguinte tria
angulação:

0 1 4	1 2 5	2 3 0
0 3 4	1 4 5	2 5 0



15) Seja a seguinte triangulação do plano projetivo:

1 2 4	2 3 5	1 3 4
2 4 5	1 5 6	2 3 6
1 2 6	3 4 6	1 3 5
4 5 6		



Podemos concluir que:

a) Cada aresta é exatamente comum a dois triângulos. Isto segue da nossa demonstração que T é 2-variedade onde demonstramos que a colagem de duas quadras semi-fechadas ao longo de seu lado fechado, dá um aberto em \mathbb{R}^2 .

Logo será impossível colar um terceiro e montar um aberto em \mathbb{R}^2 .

b) Escolha um vértice v de uma triangulação.

Podemos ordenar o conjunto de todos os triângulos que tem o vértice v ciclicamente, $T_0, T_1, \dots, T_n = T_0$, de maneira que

para $0 \leq i \leq n$ T_i e T_{i+1} tenham uma aresta em comum.

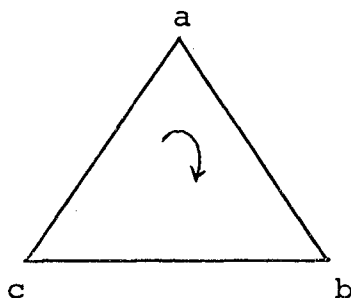
Superfícies orientáveis e não orientáveis

16) Definição:

Seja K uma triangulação para uma superfície S .

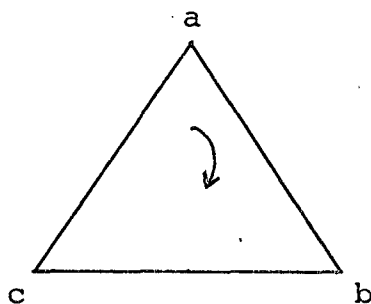
S é orientável se é possível escolher orientações para os triângulos que venham a induzir na aresta comum aos triângulos, dois a dois adjacentes, orientações opostas. Caso contrário dizemos que a superfície S é não orientável.

Seja $\langle a, b, c \rangle$ um triângulo orientado, isto será representado graficamente pelo desenho.



onde a seta interior segue a direção a para b para c , ou (b para c para a).

Também se tivermos um triângulo abc com uma seta

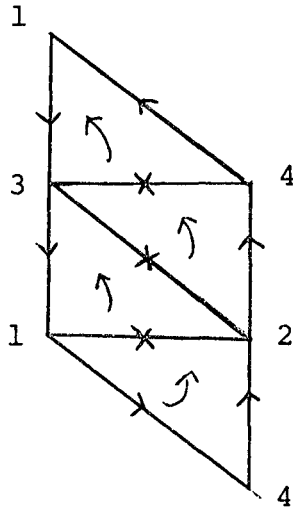


A mesma determina uma orientação $\langle b, c, a \rangle = \langle c, a, b \rangle = \langle a, b, c \rangle$ orientando os vértices no sentido da seta.

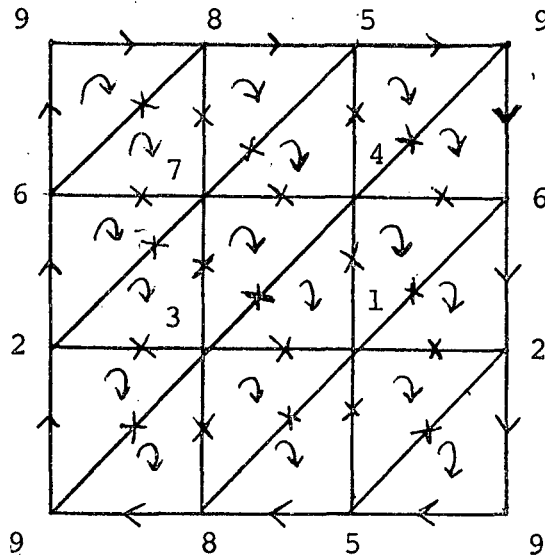
Exemplos:

17) Seja a triangulação da esfera S^2 dada no exercício não 12 pag. 30.

Tomando como orientação do triângulo 1.2.4 a seta no sentido anti-horário, o mesmo ocorrendo com os demais triângulos, ela induz na aresta comum aos triângulos, dois a dois adjacentes, orientaoes opostas, portanto S^2 é orientável.

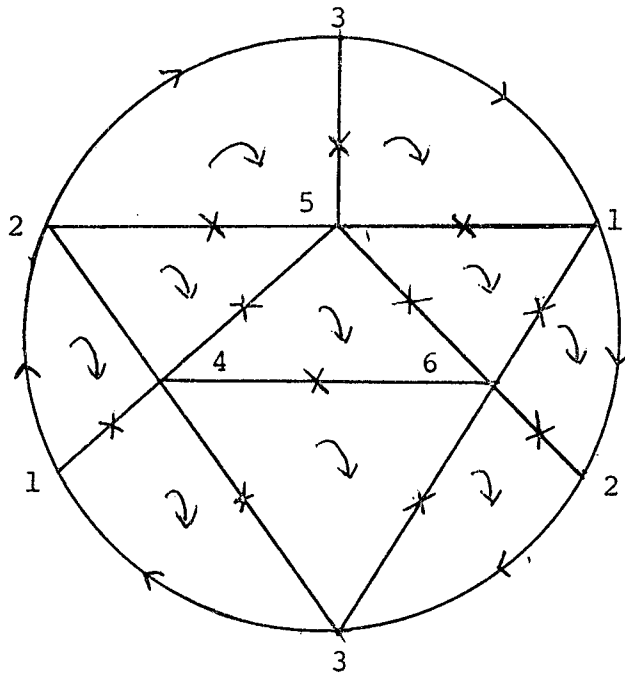


18) Seja a triangulação do toro.



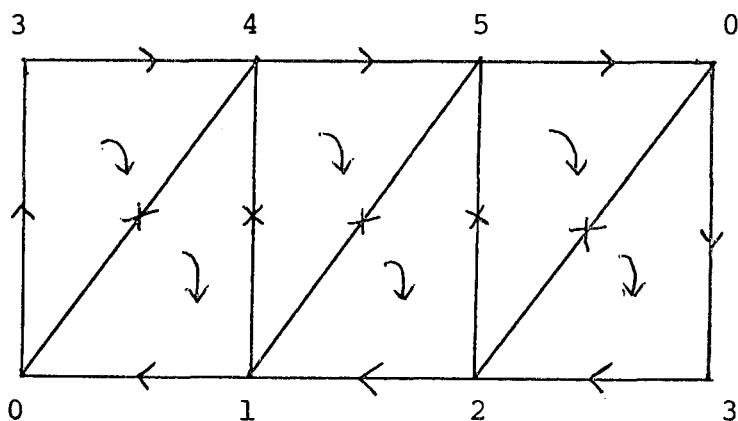
Escolhida a orientação horário para os triângulos, notamos que os triângulos dois a dois adjacentes induzem na aresta comum orientações opostas, logo o toro é orientável.

19) Usando a triangulação do plano projetivo do exercício número 15 pág. 33, temos:

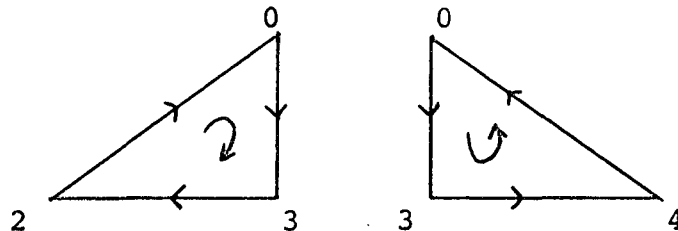


Escolhida a orientação para o triângulo 1 2 6 como sendo a seta no sentido horário, o mesmo tem que acontecer com os triângulos restantes, mesmo assim nos triângulos 1 2 6 e 1 2 4 as orientações na aresta comum, 1 2, são iguais, portanto o plano projetivo não é orientável. Se mudarmos a orientação inicial, novamente teremos orientações iguais sobre a aresta comum a dois triângulos.

20) Usando a triangulação da faixa de Moébius, temos:

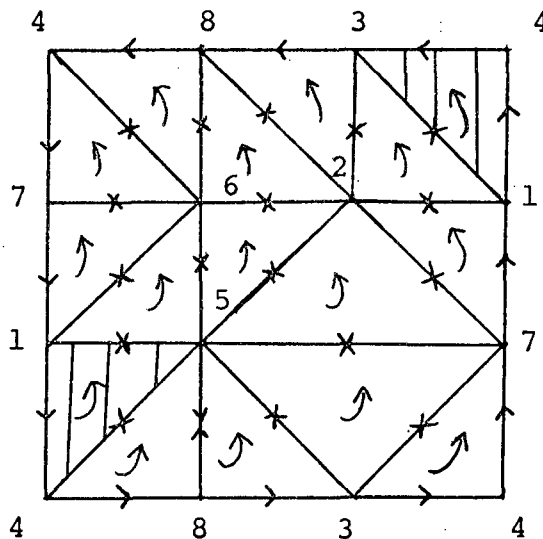


Escolhida a orientação para o triângulo 0 3 4 como sendo a seta no sentido horário o mesmo ocorrendo com os demais triângulos. Mas nos triângulos 0 3 4 e 0 3 2 as orientações na aresta comum 0 3 são iguais; portanto a faixa de Moébius é não orientável.



Se mudarmos a orientação inicial, novamente teremos orientações iguais sobre a aresta comum a dois triângulos.

21) Seja a triangulação da garrafa de Klein, com a seguinte orientação sobre os triângulos.



Escolhida a orientação para o triângulo 3 4 7 como sendo a seta no sentido anti-horário o mesmo ocorrendo com os demais triângulos. Nos triângulos 1 4 3 e 1 4 5 temos na aresta comum 1 4 a mesma orientação, portanto a garrafa de Klein é não orientável. Se mudarmos a orientação inicial, novamente teremos orientações iguais sobre a aresta comum a dois triângulos.

Soma conexa de superfícies

22) Definição:

Dadas duas superfícies S_1, S_2 disjuntas, definimos a soma conexa representada por $S_1 \# S_2$, da seguinte maneira: fazemos um pequeno buraco circular em cada superfície e em seguida colamos (identificamos) as superfícies ao longo da fronteira destes buracos.

Uma definição mais precisa:

Sejam os conjuntos $D_1 \subset S_1$ e $D_2 \subset S_2$, sendo D_1 e D_2 discos fechados (isto é, homeomorfos a $E^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$).

Seja S'_i o complemento do interior de D_i em S_i $i = 1, 2$.

Escolhemos um homeomorfismo h da fronteira de D_1 sobre a fronteira de D_2 .

Então $S_1 \# S_2$ é o espaço quociente de $S'_1 \cup S'_2$ obtido identificando os pontos x e $h(x)$, para todo x pertencente a fronteira de D_1 , com $S_1 \# S_2$ resultando uma nova superfície. Daremos alguns exemplos que servem como preparação para a demonstração do teorema da classificação de superfícies compactas.

Exemplos:

Soma conexa de toros

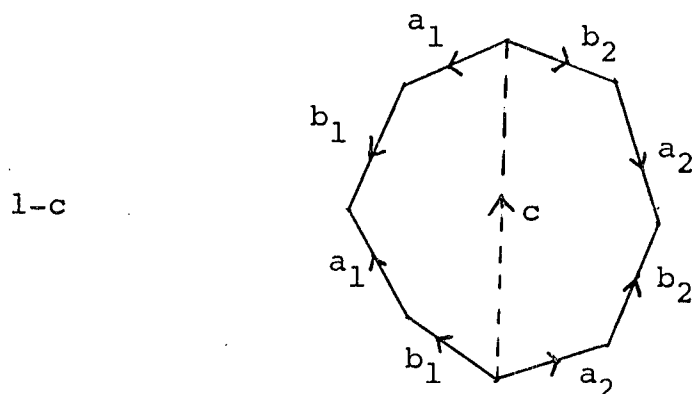
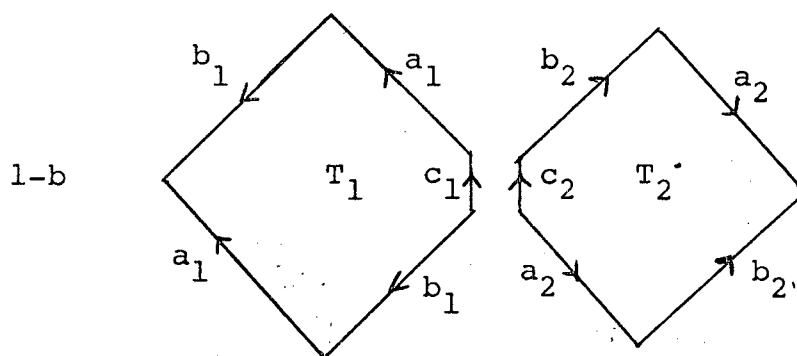
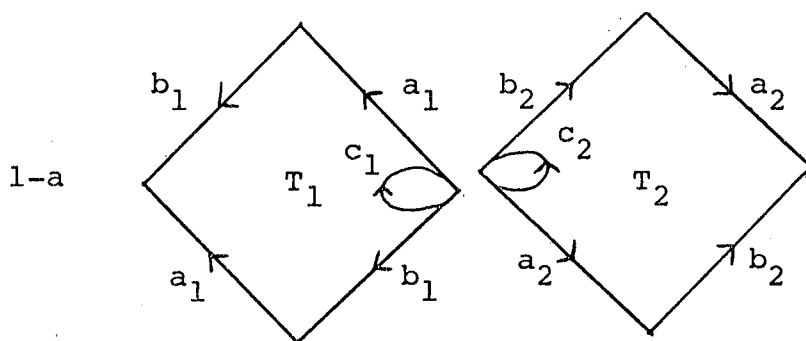
23) Seja T_1 e T_2 toros, representados cada um, por um retângulo com os lados opostos identificados segundo as setas, sendo os quatro vértices de cada quadrado identificados em um só ponto no toro correspondente.

Primeiramente faremos um buraco circular, em cada toro, designando por C_1 e C_2 as fronteiras destes buracos, que estão

identificados segundo as setas na figura 1-a.

Podemos representar as fronteiras dos buracos em ambos os toros pelos pentágonos da figura 1-b.

Identificamos, os segmentos c_1 e c_2 , obtendo o octágono da figura 1-c, no qual os lados estão identificados aos pares, segundo as orientações dadas as arestas.



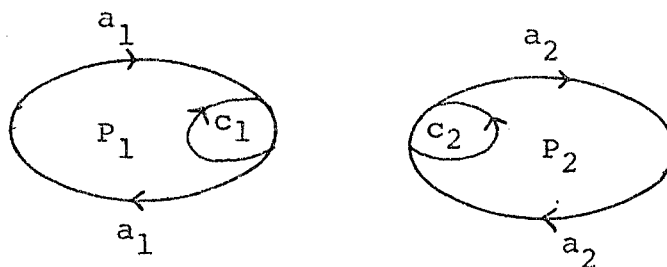
Usando este mesmo processo, verificamos que a soma conexa de três toros é o espaço quociente do dodecágono, onde as arestas estão identificadas aos pares, segundo as orientações dadas.

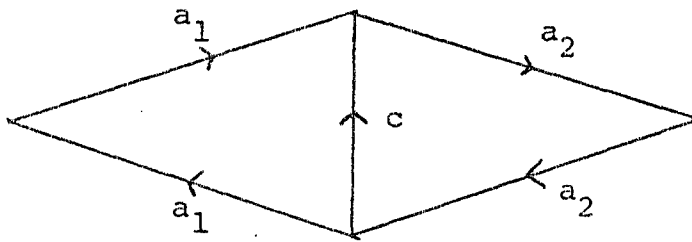
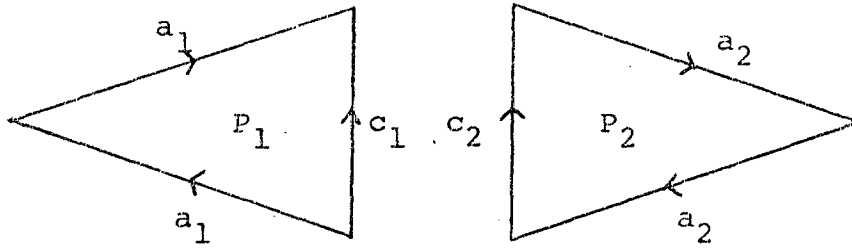
Procedendo deste modo, por indução podemos concluir que a soma conexa de n -toros é homeomorfa, ao espaço quociente de um polígono de $4n$ lados, cujas arestas estão identificadas aos pares obedecendo a orientação das arestas nos polígonos.

24) Soma conexa de planos projetivos

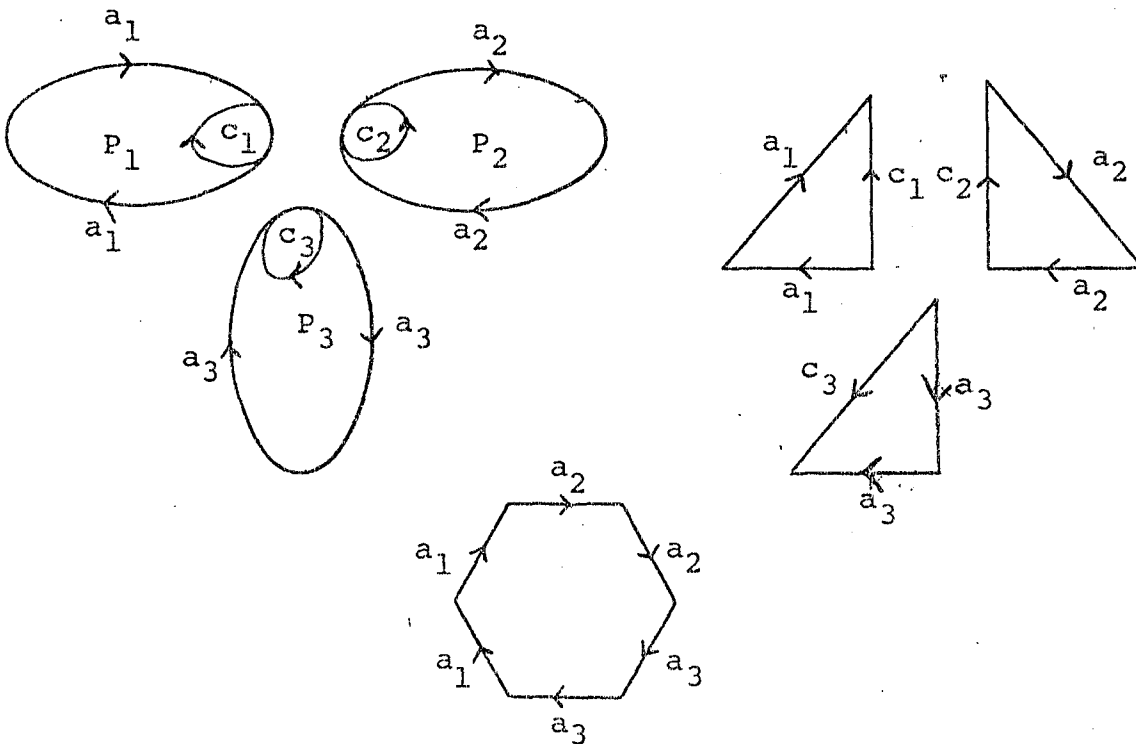
Lembramos que o plano projetivo é definido, como sendo o espaço quociente de um disco circular, identificando os pontos diametralmente opostos da fronteira. Escolhendo um par de pontos da fronteira diametralmente opostos como vértices, o círculo do disco fica dividido em dois segmentos.

Assim podemos considerar o plano projetivo como obtido a partir de um polígono de dois lados ao identificá-los. O método para obter a soma conexa de dois planos projetivos P_1 e P_2 basicamente é o mesmo usado no problema anterior.

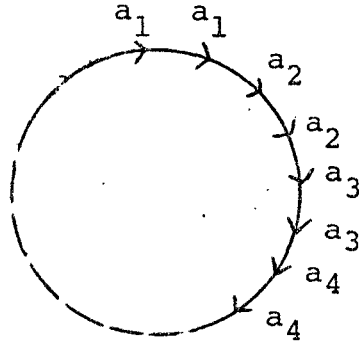




De modo análogo, a soma conexa de três planos projetivos é o espaço quociente de um hexágono com os lados identificados aos pares, como mostra a figura abaixo.

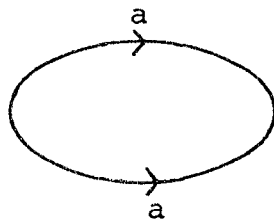


Novamente usando indução, podemos concluir que a soma conexa de n -planos projetivos é o espaço quociente de um polígono de $2n$ lados, com os lados identificados aos pares, obedecida a orientação das arestas de polígono.



25) Soma conexa de esferas

A soma conexa de duas esferas nos dá uma esfera. Representamos a esfera como o espaço quociente de um polígono com dois lados identificados aos pares como nesta figura:



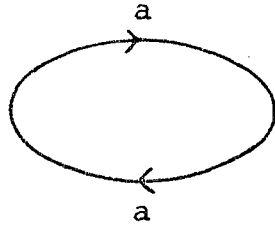
Podemos imaginar uma esfera, como uma bolsa que tenha a abertura com um feiche chair, se o feiche estiver aberto a bolsa pode tornar-se plana.

26) Lema:

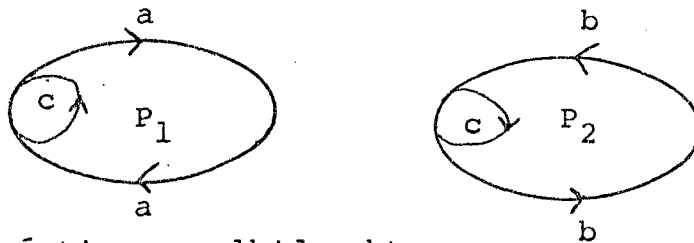
A soma conexa de dois planos projetivos, é homeomorfa a uma garrafa de Klein.

Demonstração:

Como vimos na página 41, podemos representar o plano projetivo pelo seguinte polígono:



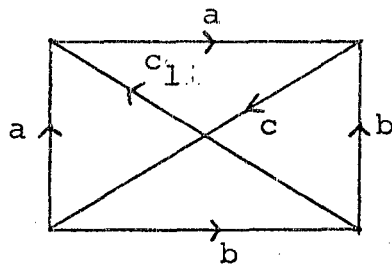
Fazendo um pequeno buraco no plano projetivo, através de um dos vértices, vem:



Abrindo no vértice escolhido obtemos



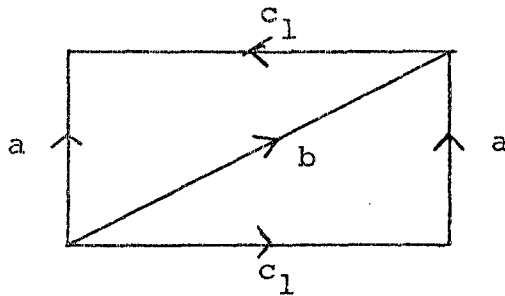
Colando ao longo das fronteiras dos planos projetivos representados por c , temos o seguinte polígono:



Seccionando o polígono através da linha c_1 temos:



Colando ao longo da aresta b resulta o seguinte polígono:

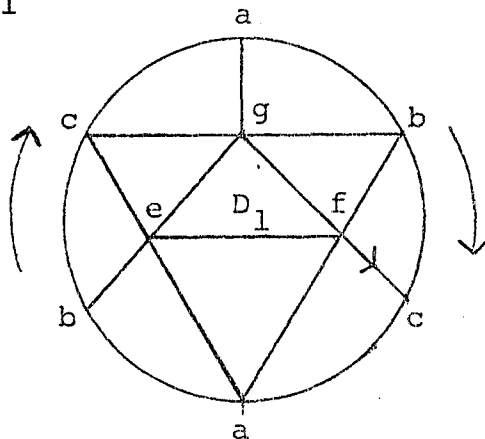


Identificando as arestas iguais, obtemos a representação usual da garrafa de Klein. Podemos obter a garrafa de Klein de outro modo.

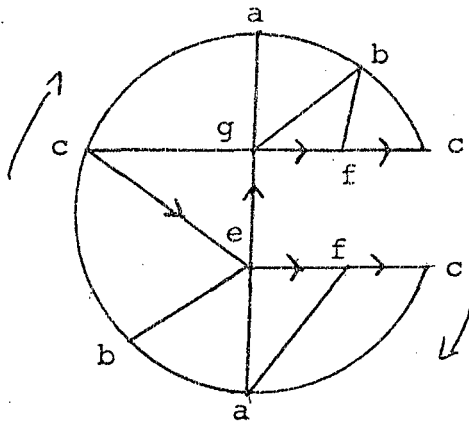
Usaremos a técnica de cortar e colar (identificar) para a demonstração deste lema.

27) Lema: Plano projetivo, menos um disco D é homeomorfo a faixa de Moébius e a fronteira do disco é homeomorfo a fronteira da faixa de Moébius.

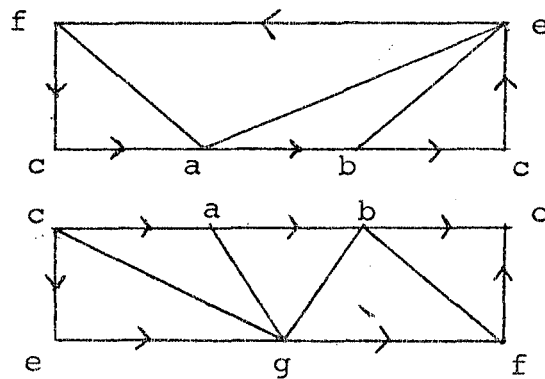
Seja S_i um plano projetivo e $D_i \subset S_i$ um disco fechado com $i = 1, 2$, retirando o interior de D_i obtemos S_i' que é homeomorfo a faixa de Moébius, para mostrar isto vamos tomar uma triangulação do plano projetivo S_1 .



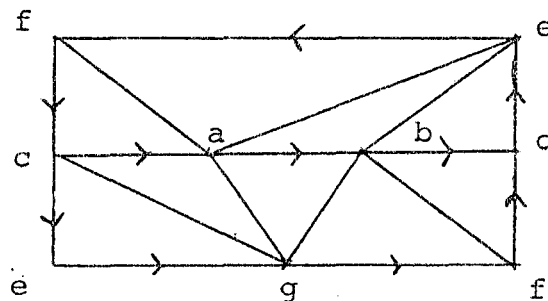
Cortando ao longo da aresta $c f$, e retirando D_1 , obtemos a seguinte figura



Cortando ao longo da aresta $e c$, resulta a seguinte figura:



Identificando as arestas $c a b c$ obtemos o seguinte polígono:



Identificando as arestas $e c f$ obtemos a faixa de Moëbius.

28) Corolário:

A garrafa de Klein é duas faixas de Moébius coladas ao longo de suas fronteiras. Com estes exemplos de soma conexa observamos que:

a) Não existe distinção entre $S_1 \# S_2$ e $S_2 \# S_1$, isto é, $S_1 \# S_2 \cong S_2 \# S_1$.

Demonstração:

Sejam D_1 e D_2 discos fechados de S_1 e S_2 respectivamente. Sejam as funções:

$h: \partial D_1 \rightarrow \partial D_2$ homeomorfismo

$h^{-1}: \partial D_2 \rightarrow \partial D_1$ homeomorfismo sendo ∂D_i com $i = 1, 2$ a fronteira de D_i .

Pela definição de soma conexa temos:

$$S_1 \# S_2 = (S_2 - \dot{D}_2) \cup_h (S_1 - \dot{D}_1)$$

$S_2 \# S_1 = (S_1 - \dot{D}_1) \cup_{h^{-1}} (S_2 - \dot{D}_2)$ sendo \dot{D}_i interior de D_i .

Definimos em $(S_2 - \dot{D}_2) \cup (S_1 - \dot{D}_1)$ a seguinte relação de equivalência

$$C = \{(x, x) / x \in (S_2 - \dot{D}_2) \cup (S_1 - \dot{D}_1)\} \cup \{(x, h(x)) / x \in \partial D_1\} \cup$$

$\{(h(x), x) / x \in \partial D_1\}$ assim $S_1 \# S_2$ é o espaço quociente de $(S_2 - \dot{D}_2) \cup (S_1 - \dot{D}_1)$ pela relação de equivalência C .

De modo análogo definimos outra relação de equivalência.

$$E = \{(y, y)/y \in (S_1 - \dot{D}_1) \cup (S_2 - \dot{D}_2)\} \cup \{(h^{-1}(y), y)/y \in \partial D_2\} \cup \\ \cup \{(y, h^{-1}(y))/y \in \partial D_2\}$$

$S_2 \# S_1$ é o espaço quociente de $(S_1 - \dot{D}_1) \cup (S_2 - \dot{D}_1)$ pela relação de equivalência E . Desde que h e h^{-1} são homeomorfismos entre $\partial(D_1)$ e $\partial(D_2)$ vemos que as duas relações de equivalência em $(S_1 \cup \dot{D}_1) \cup (S_2 - \dot{D}_2)$ são iguais. Portanto os espaços quocientes $S_1 \# S_2$ e $S_2 \# S_1$ são iguais.

$$b) S_1 \# (S_2 \# S_3) \cong (S_1 \# S_2) \# S_3.$$

A demonstração deste fato é um corolário de uma propriedade de associatividade de adjunções, ver referência [6], página 61-62.

Lema:

Sejam X_1 , X_2 e Y espaços topológicos, H um homeomorfismo de X_1 em X_2 .

Seja A um subconjunto de X_2 , $f: A \rightarrow Y$ uma função, seja $B = H^{-1}(A) \subseteq X_1$ e $g = f \circ H/B: B \rightarrow Y$.

Então $Y \cup_f X_2 \cong Y \cup_g X_1$.

Demonstração:

Consideremos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccc} Y \cup X_2 & \xrightarrow{\psi} & Y \cup X_1 & \xrightarrow{p_g} & Y \cup_g X_1 \\ \downarrow p_f & & & & \\ Y \cup_f X_2 & & & & \end{array}$$

onde
$$\psi(Z) = \begin{cases} Z, & Z \in Y \\ H^{-1}(Z), & Z \in X_2 \end{cases}$$
 P_f, P_g projeções.

Vimos que $P_g \circ \psi \circ P_f^{-1}$ é uma função e portanto uma função contínua que denotamos por ϕ . Do mesmo modo se definirmos

$\hat{\psi} = Y \cup X_1 \rightarrow Y \cup X_2$, por
$$\hat{\psi}(Z) = \begin{cases} Z, & Z \in Y \\ H(Z), & Z \in X_1 \end{cases}$$

teremos uma função contínua $\hat{\phi} = P_f \circ \hat{\psi} \circ P_g^{-1}$.

Segue que $\hat{\phi} \circ \phi = P_g \circ \hat{\psi} \circ P_f^{-1} \circ P_f \circ \psi \circ P_g^{-1} = \text{id}$ e

$$\phi \circ \hat{\phi} = P_f \circ \psi \circ P_g^{-1} \circ P_g \circ \hat{\psi} \circ P_f^{-1} = \text{id}$$

Logo ϕ e $\hat{\phi}$ são homeomorfismo, um inverso do outro.

29) Corolário:

Seja S uma superfície qualquer e S^2 a esfera, $S \# S^2 \cong S$.

Seja D_1 e D_2 discos fechados de S e S^2 respectivamente.

Seja $Y = (S - \dot{D}_1)$

$$X_1 = D_1$$

$$X_2 = (S^2 - \dot{D}_2)$$

$h: \partial D_2 \rightarrow \partial D_1$ homeomorfismo. Existe uma extensão de h a um homeomorfismo $H: (S_2 - \dot{D}_2) \rightarrow D_1$.

Assim aplicando o lema anterior temos:

$$S \# S^2 = Y \cup_{\text{id}} D_1 \cong Y \cup_H (S_2 - \dot{D}_2) = S \# S^2$$

$$S \# S^2 = (S - \dot{D}_1) \cup_h (S^2 - \dot{D}_2) = Y \cup_h X_2 \cong Y \cup_g X_1 = S$$

onde $g = h \circ H^{-1} / \partial D_1 = \text{id}$.

Veremos agora uma maneira bem simples de indicar os pares de arestas identificadas em um polígono.

Seja um polígono no qual esteja indicado como se identificam as arestas, partindo de um determinado vértice, percorremos a fronteira deste polígono, anotando em seqüência uma a uma, as letras que aparecem no polígono.

Se a flecha de uma aresta indica a mesma direção em que percorremos a fronteira, então escrevemos a letra correspondente a esta aresta sem expoente, se a flecha indicar direção contrária a letra correspondente a esta aresta será representada com expoente menos um.

Observando os exemplos anteriores podemos escrever:

a) Esfera $a a^{-1}$

b) Soma conexa n toros $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$

c) Soma conexa de n planos projetivos

$a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_n a_n$

Obtemos assim novas superfícies com o auxílio de somas conexas.

O teorema principal deste nosso trabalho, nos garante que, com estes exemplos esgotam todas as possibilidades de construir novas superfícies, nos dando a classificação completa das superfícies compactas.

CAPÍTULO IV

1. TEOREMA DA CLASSIFICAÇÃO DE SUPERFÍCIE COMPACTA

Toda superfície compacta é homeomorfa a uma esfera, a uma soma conexa de toros, ou a uma soma conexa de planos projetivos.

Demonstração:

Demonstraremos o teorema em partes, provando que a superfície S é homeomorfa a um polígono com as arestas identificadas aos pares, segundo alguns dos símbolos da lista dada na página 50.

Primeira Parte

Seja K uma triangulação de uma superfície S . Enumeramos os triângulos $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ de modo que o triângulo T_i tenha uma aresta e_i comum com ao menos um dos triângulos T_1, T_2, \dots, T_{i-1} $2 \leq i \leq n$.

Para demonstrar isto, escolhemos um triângulo qualquer do conjunto acima a ser T_1 , escolhemos como T_2 qualquer triângulo que tenha alguma aresta comum com T_1 , T_3 qualquer triângulo que tenha uma aresta comum com T_1 ou T_2 . Suponhamos que, em algum ponto não fosse possível continuar este processo. Logo teríamos dois conjuntos de triângulos $\{T_1, T_2, \dots, T_k\}$ e $\{T_{k+1}, \dots, T_n\}$ tal que nenhum triângulo do primeiro conjunto teria uma aresta ou vértice comum com nenhum triângulo do segundo conjunto, com isto teríamos uma partição de S em dois conjuntos fechados disjuntos e não va-

zios, o que vem contra a hipótese de que S é conexa.

Utilizaremos a ordenação dos triângulos T_1, \dots, T_n junto com a escolha das arestas e_2, e_3, \dots, e_n , para construir um modelo da superfície S no plano cartesiano, este modelo será um polígono cujos lados estão identificados aos pares.

Sabemos que, para cada triângulo T_i , existe um triângulo ordinário T'_i em \mathbb{R}^2 e um homeomorfismo ψ_i de T'_i sobre T_i .

Suponhamos que os triângulos T'_1, T'_2, \dots, T'_n são disjuntos dois a dois, se não forem, podemos transladar alguns deles para outras partes do plano \mathbb{R}^2 . Seja $T' = \bigcup_{i=1}^n T'_i$, T' é um subconjunto compacto de \mathbb{R}^2 .

Definimos a aplicação $\psi: T' \rightarrow S$ como sendo $\psi|_{T'_i} = \psi_i$.

A aplicação ψ é contínua e sobrejetiva.

Como T' é compacto e S é um espaço de Hausdorff, ψ é uma aplicação fechada. Portanto, S tem a topologia quociente determinada por ψ . Com isto temos a idéia intuitiva de que conseguiremos uma triangulação de S colando os triângulos ao longo de suas arestas apropriadas.

O polígono desejado será construído como um espaço quociente de T' . Para cada i , $2 \leq i \leq n$, escolha uma aresta e_i de T_i , que é também aresta de algum T_j , $1 \leq j \leq i$.

Então $\psi^{-1}(e_i)$ consta de duas arestas, uma de T'_i e outra de T'_j .

Identificamos estas duas arestas dos triângulos T'_i e T'_j do seguinte modo: Identificando aqueles pontos que se aplicam por ψ em um mesmo ponto de e_i (intuitivamente, colamos os triângulos T'_i e T'_j). Fazendo estas duas identificações para cada uma das arestas e_2, e_3, \dots, e_n , obtemos o espaço quociente de T' que representaremos por D . Como D é o espaço quociente de T' , $\psi: T' \rightarrow S$ induz uma aplicação α de D em S . Como D é compacto e S é de Haus-

dorff, α é fechado. Concluimos que S tem a topologia quociente induzida por α .

D é topologicamente equivalente a um disco fechado. A demonstração desta afirmação depende de duas considerações:

a) Tomamos dois espaços disjuntos E_1 e E_2 , topologicamente equivalentes a um disco fechado

$$E^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x^2 + y^2 \leq 1)\}.$$

Sejam A_1 e A_2 , subconjuntos da fronteira de E_1 e E_2 , homeomorfos ao intervalo $[0,1]$ e $h: A_1 \rightarrow A_2$ um homeomorfismo.

Identificando os pontos de E_1 e E_2 , através de h obtemos o espaço quociente de $E_1 \cup E_2$. Então o espaço quociente também é topologicamente equivalente a um disco. Isto significa que se colarmos dois discos ao longo de um segmento comum, a suas fronteiras, obtemos um novo disco.

b) Ao formar o espaço quociente D de T' , podemos fazer as identificações de uma vez, ou primeiro a identificação correspondente a e_2 , em seguida a e_3 , etc.

Após estas considerações provaremos que D é um disco da seguinte maneira:

T'_1 e T'_2 são topologicamente equivalentes a um disco fechado, portanto o espaço quociente $T'_1 \cup T'_2$ obtido ao identificar pontos de $\psi^{-1}(e_2)$ é novamente um disco segundo (a).

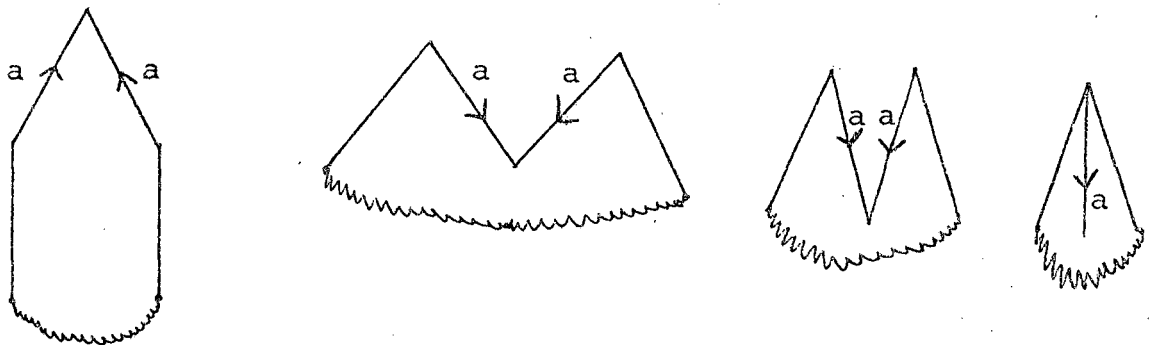
Formamos um espaço quociente da união deste disco com T'_3 fazendo as identificações correspondentes a aresta e_3 , e assim por diante, naturalmente S é obtido de D identificando certos pares de arestas da fronteira de D .

Segunda Parte

Eliminação das arestas adjacentes de primeira espécie. Faremos a identificação das arestas de um polígono D , que dá origem a uma superfície, por meio de letras.

Se a letra que indica um par de arestas aparece no símbolo com os dois expoentes $+1 -1$ dizemos que este par de arestas é de primeira espécie, caso contrário de segunda espécie.

O diagrama abaixo explica como eliminar um par de arestas adjacentes de primeira espécie, supondo que o polígono tenha pelo menos quatro arestas.



Continuamos este processo até que sejam eliminados todos os pares deste tipo, ou até obtermos um polígono com dois lados, cujo símbolo é $a a^{-1}$ ou $a a$, sendo a esfera ou o plano projetivo.

Terceira Parte

Transformação em um polígono tal que todos os vértices estão identificados a um só.

Mesmo as arestas de nosso polígono estando identifica-

dos aos pares, os vértices podem estar identificados em conjunto de um, dois, três,.....

Diremos que dois vértices de um polígono são equivalentes se estão identificados. Algumas classes de equivalência contém um só vértice, enquanto outras contêm dois ou mais vértices.

Suponhamos que realizamos a segunda parte quantas vezes foram possíveis, obtendo um polígono S' . Mostraremos que podemos transformá-lo em outro, com todos os vértices pertencentes a uma só classe de equivalência. Admitimos que exista pelo menos duas classes de equivalência distintas, logo existe um par de vértices p e q adjacentes que não são equivalentes.

A figura seguinte mostra como devemos proceder.

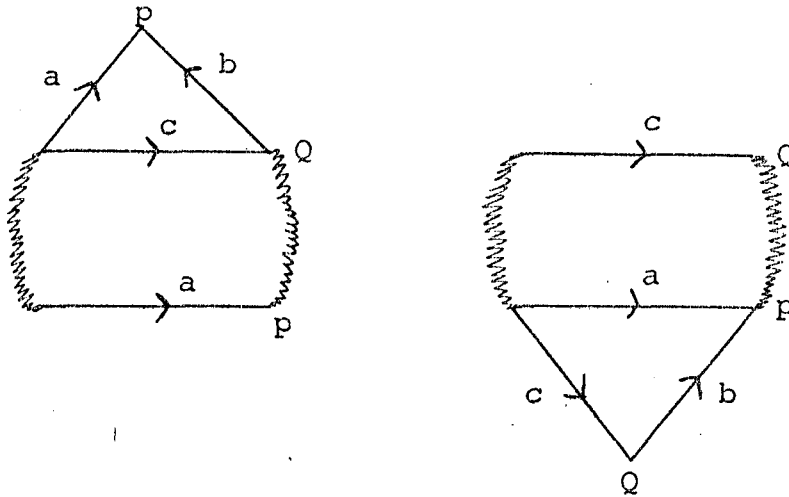
Como por hipótese realizamos a segunda parte e os vértices p e q não são equivalentes, então as arestas a e b não podem ser identificadas.

Façamos um corte ao longo da linha C desde o vértice q até o outro vértice da aresta a (isto é até outro vértice de a , distinto de p).

Colamos em seguida as arestas designadas por a , resultando um polígono com um vértice a menos na classe de equivalência de P e uma a mais na classe de equivalência de q .

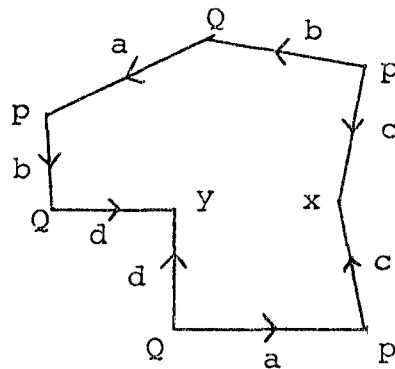
Se for possível realizamos novamente a segunda parte. Então realizamos a terceira parte, para diminuir o número de vértices da classe de equivalência de P .

Desta maneira alternando 2ª e 3ª parte a classe de equivalência de P será eliminada.

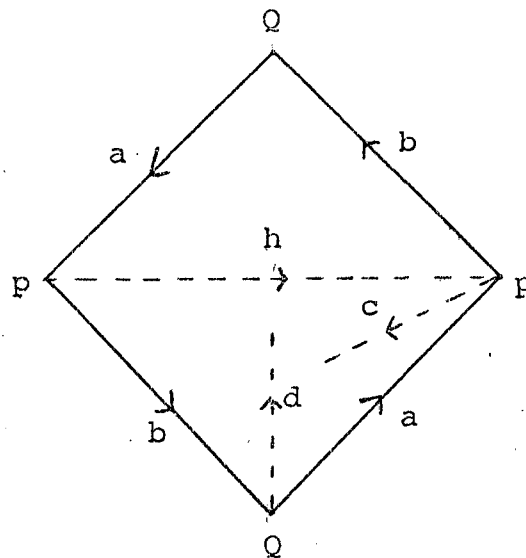


2) Exemplo:

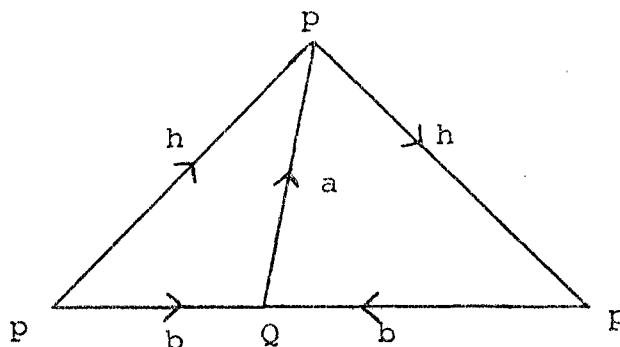
Dado o polígono, qual a superfície que ele representa?



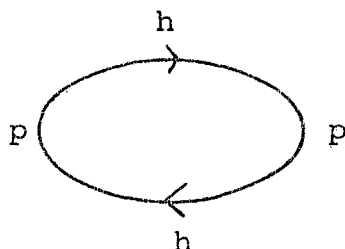
eliminamos os pares de arestas de primeira espécie



Temos duas classes de equivalência, realizando a terceira parte vem:



Eliminando o par de aresta de primeira espécie, obtemos o polígono que é o plano projetivo.

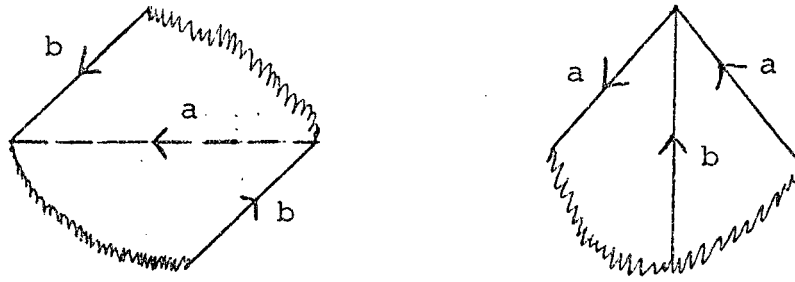


hh, que é o plano projetivo.

Quarta Parte

Como fazer adjacentes, todo par de arestas de segunda espécie. Podemos transformar nossa superfície de maneira que todo par de aresta segunda espécie sejam adjacentes.

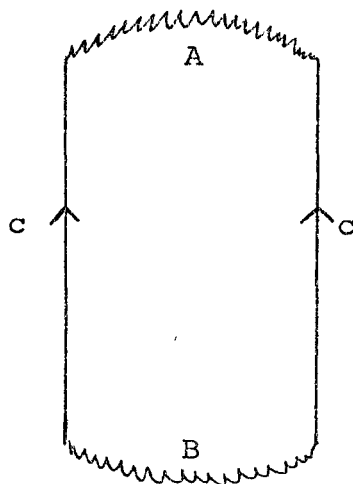
Seja o par de arestas de segunda espécie não adjacentes no polígono abaixo, cortamos ao longo da linha pontilhada a, identificamos as arestas b, obtemos duas arestas adjacentes.



Quando todos os pares de segunda espécie estiverem adjacentes, e se não existirem pares de primeira espécie, o polígono resultante terá como símbolo $a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_n a_n$ e portanto a superfície é a soma conexa de planos projetivos.

Vamos supor que exista pelo menos um par de arestas de primeira espécie, representado por \underline{c} . Afirmamos que existe pelo menos outro par de arestas de primeira espécie, tal que estes dois pares separam-se um do outro, isto é, ao percorrer a fronteira do polígono as arestas destes dois pares, aparecem alternadamente, o símbolo que representa o polígono será da forma $c \dots d \dots c^{-1} \dots d^{-1} \dots$

Para provar esta afirmação, suponhamos que as arestas \underline{c} não estão separadas por nenhum outro par de arestas de primeira espécie, isto é, A, B representam conjunto de arestas.



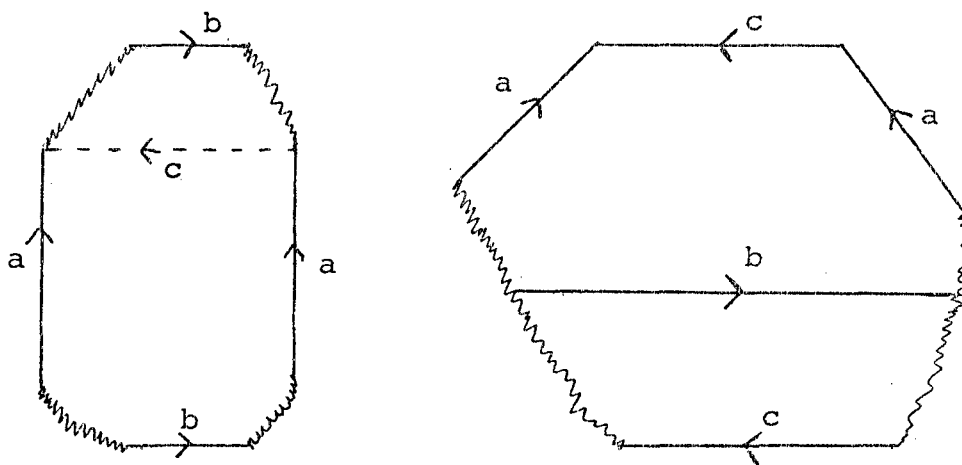
Observamos que nenhuma aresta de A está identificada com uma aresta de B. Isto contradiz o fato de que os vértices inicial e final de cada uma das arestas c devem estar identificadas, devido a terceira parte.

Quinta Parte

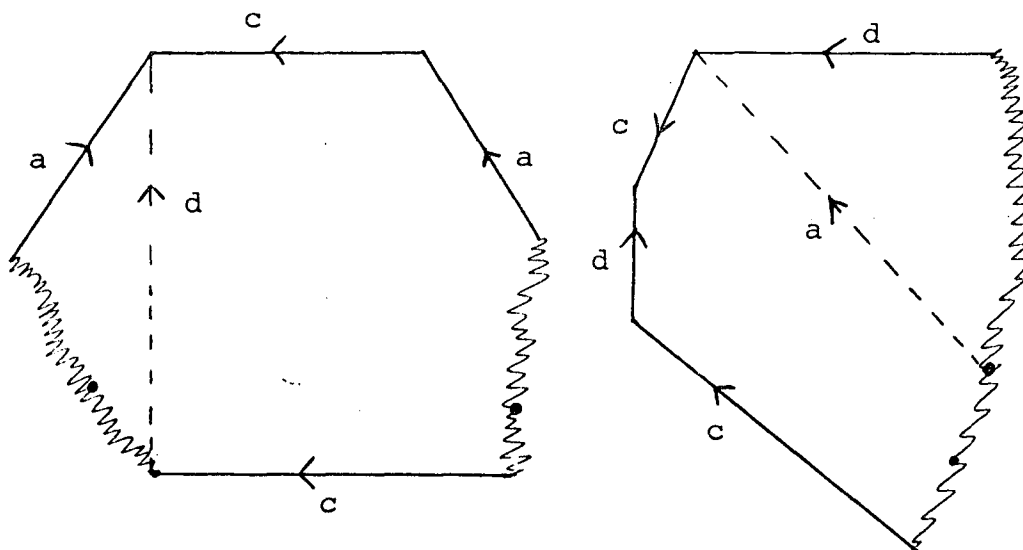
Pares de primeira espécie.

Suponhamos que em nosso polígono existe dois pares de primeira espécie que se separam um do outro. Podemos transformar o polígono de maneira que os quatro lados em questão sejam consecutivos ao longo da fronteira do polígono.

Ao longo da linha c , façamos um corte colamos ao longo de b obtendo a figura.



Feito isto ao longo de \underline{d} e colamos ao longo de \underline{a} , obtendo o polígono desejado.



Continuamos este processo até que todos os pares de primeira espécie estiverem em grupos adjacentes de quatro arestas, tal como $c d c^{-1} d^{-1} \dots$, que representa o toro. Se não há pares de segunda espécie, teremos o resultado procurado, o símbolo será: $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$ e a superfície é a soma conexa de n toros.

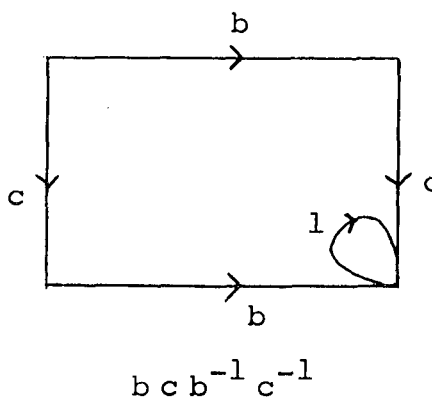
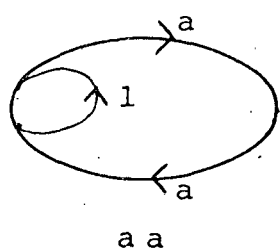
Resta considerar o caso em que, depois de realizadas as cinco partes, tenhamos pares de arestas de primeira e de segunda espécie simultaneamente. O Lema seguinte resolve a situação.

4) Lema:

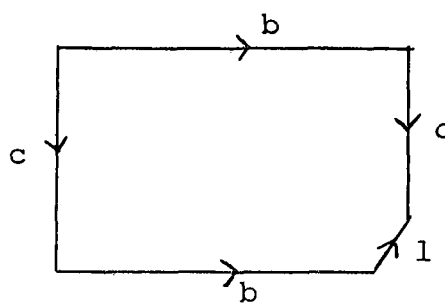
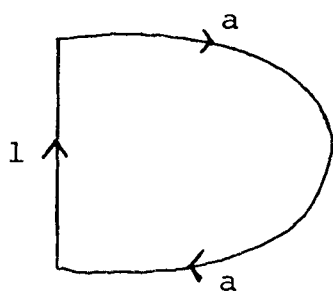
A soma conexa de um toro e um plano projetivo é homeomorfa a soma conexa de três planos projetivos.

Demonstração:

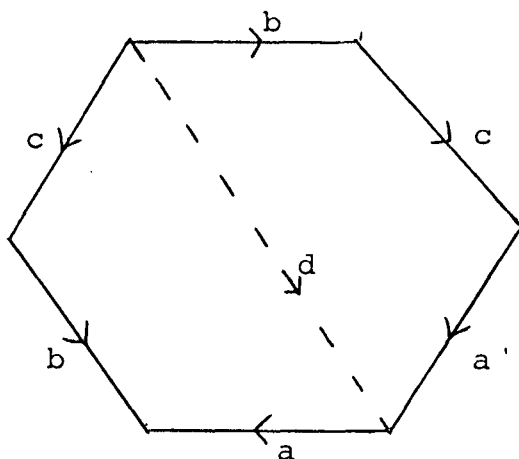
Seja o plano projetivo e o toro dado pelos símbolos:



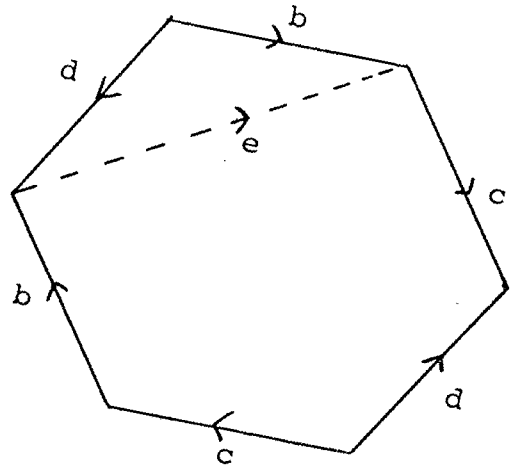
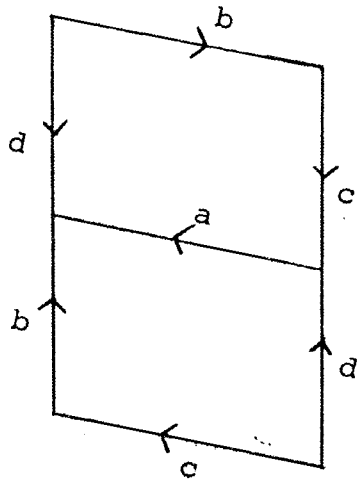
Para fazer a soma conexa retiramos um disco aberto D_i em cada superfície.



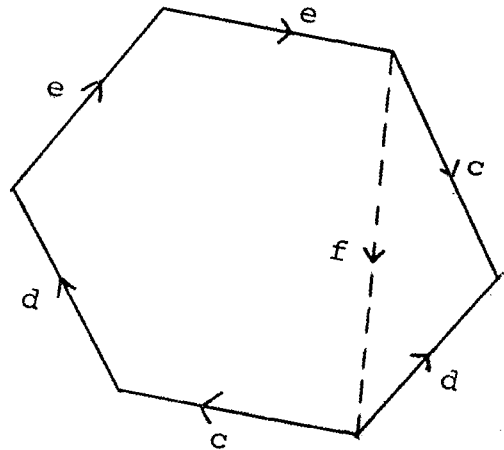
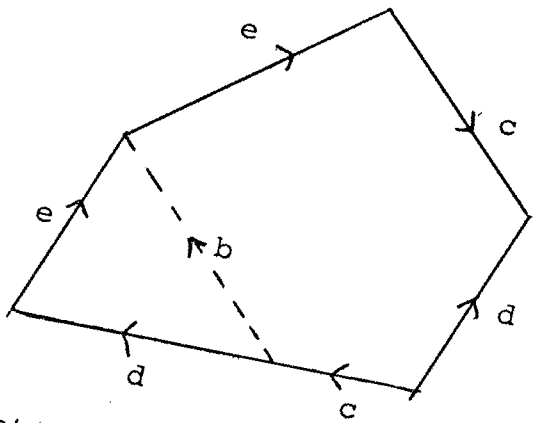
Identificando as arestas $-l$ resulta o polígono.



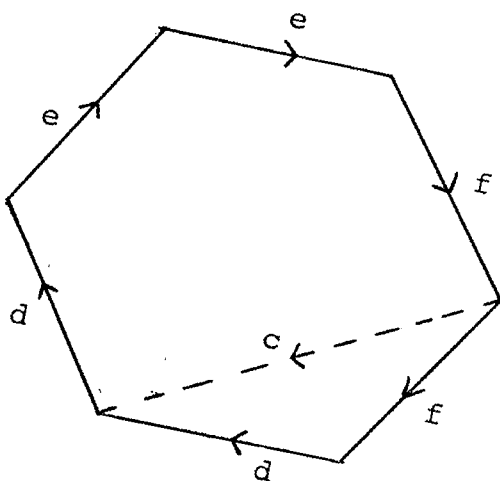
Identificando as arestas a



Identificando as arestas b



Identificando as arestas c



Obtemos finalmente o polígono $e \cdot f f d d$ que representa a soma conexa de 3 planos projetivos. Voltamos a demonstrar a demonstração do teorema.

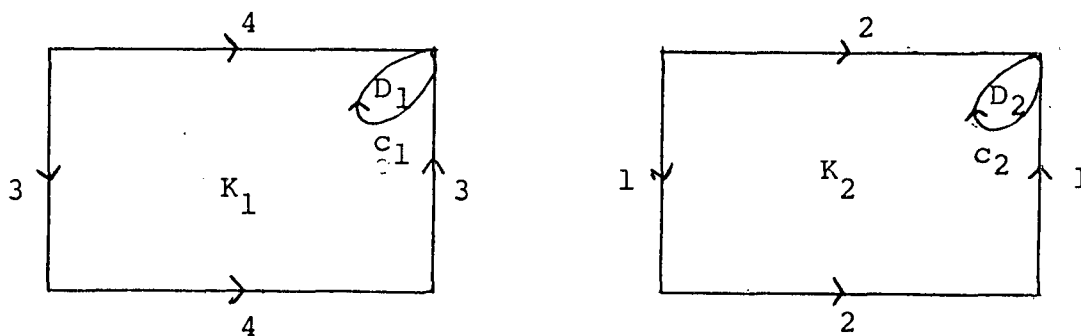
Suponhamos que depois de haver realizado a quinta parte, o polígono tenha m pares ($m > 0$) de segunda espécie, tais que duas arestas de cada par são adjacentes, em quaternas ($n > 0$) de arestas, cada uma delas formada por dois pares de primeira espécie que separam-se um do outro.

Então, a superfície resultante é a soma conexa de m planos projetivos e n toros, que pelo lema anterior, é homeomorfa a soma conexa de $m + 2n$ planos projetivos. Assim completamos a demonstração do teorema.

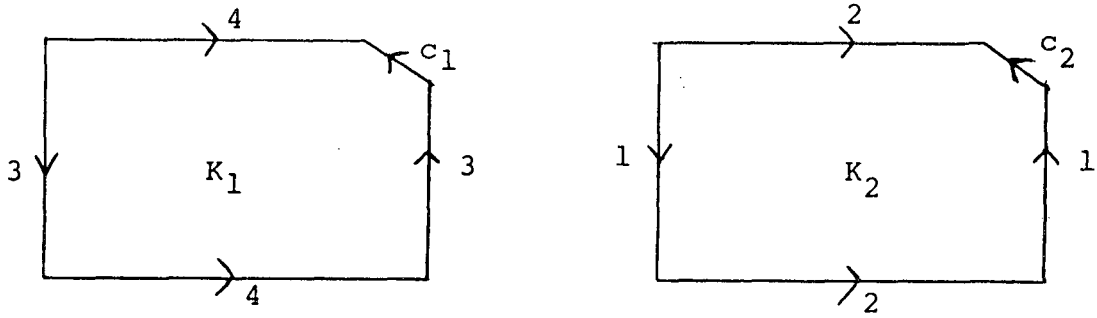
Exemplo de classificação de superfícies.

5) A soma conexa de duas garrafas de Klein é homeomorfa a soma conexa de toro e uma garrafa de Klein, mas a garrafa de Klein é obtida da soma conexa de dois planos projetivos, logo $T \# K \cong K \# K \cong P \# P \# P \# P$, demonstração:

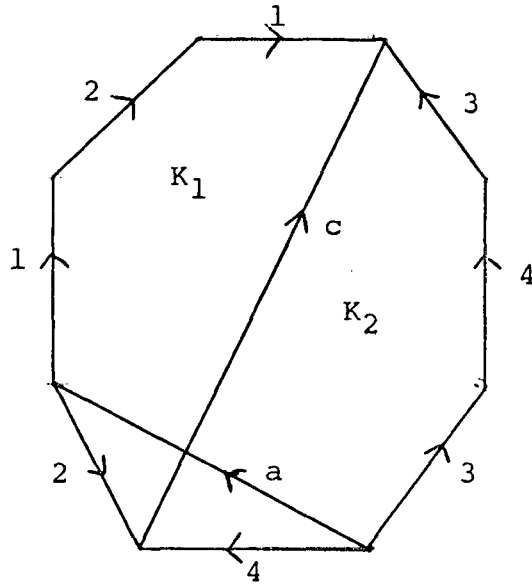
Seja K_1 e K_2 representado pelos retângulos e D_1 , D_2 discos fechados de K_1 e K_2 respectivamente.



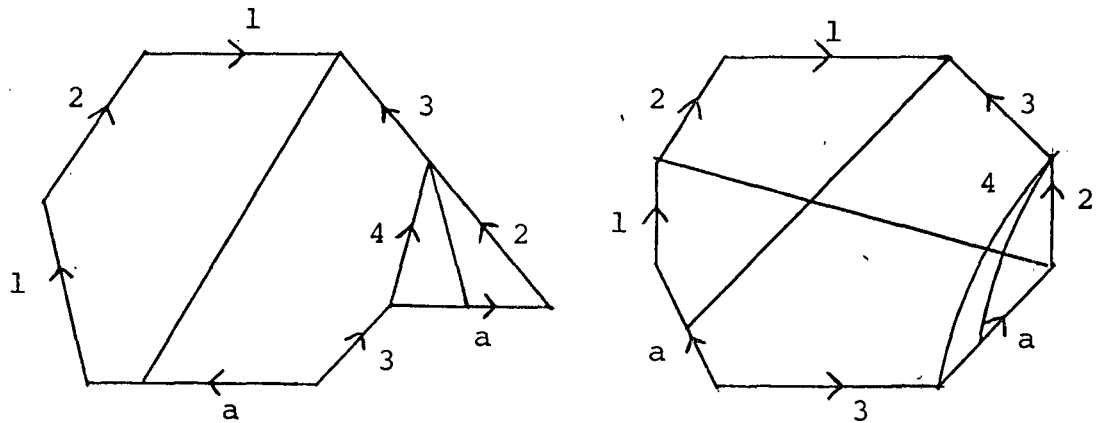
Retiramos o interior dos discos D_1 e D_2 obtemos:



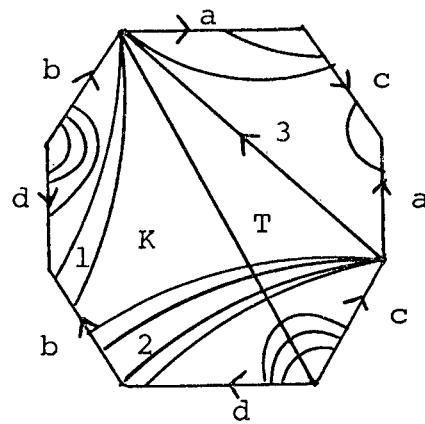
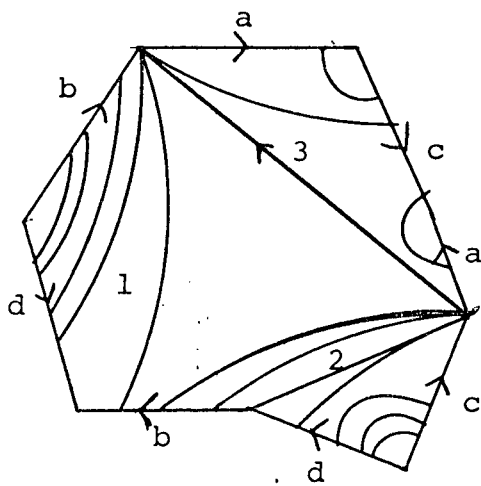
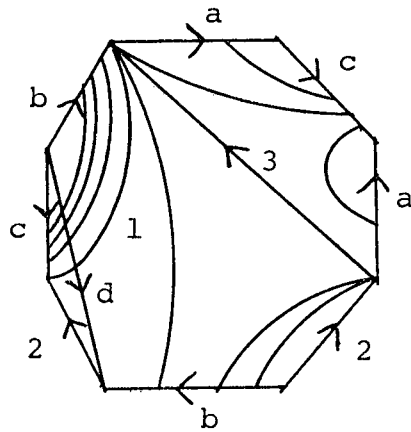
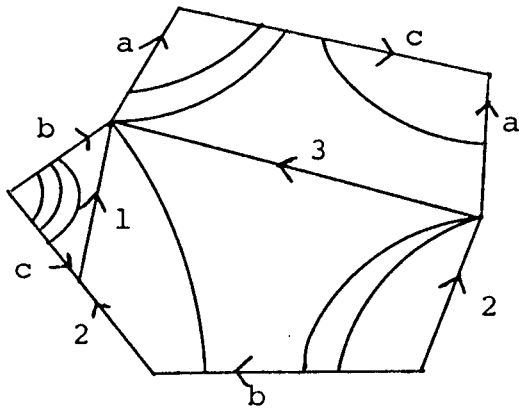
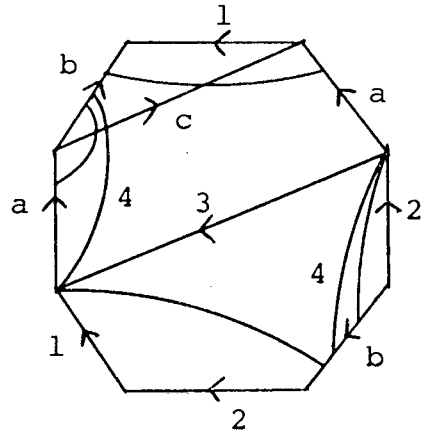
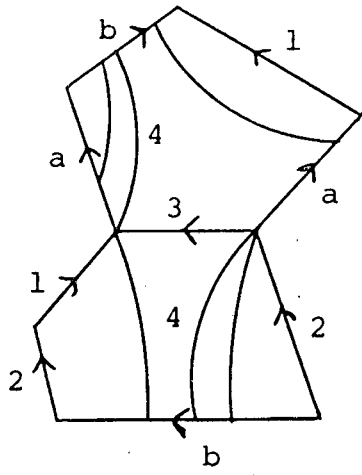
Identificando as fronteiras c_1 e c_2 obtemos a seguinte figura:

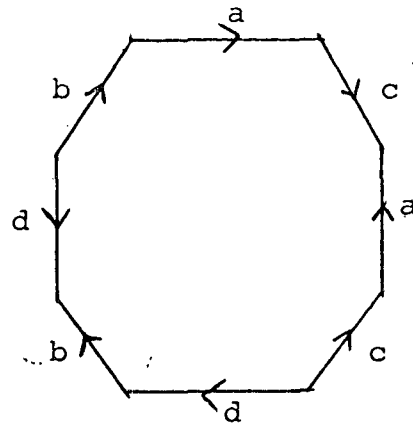


Cortando ao longo da aresta a e lembrando que as arestas quatro são identificadas obtemos a seguinte representação de $K_1 \# K_2$:



De maneira análoga iremos fazendo cortes e recolagens de modo a modificar a representação de $K_1 \# K_2$.





Este polígono representa, identificando os pares de arestas, a soma conexa de um toro e uma garrafa de Klein:

$$\underbrace{a \ c \ a^{-1} \ c^{-1}}_T \quad \underbrace{d \ b \ d^{-1} \ b}_K$$

Portanto $K_1 \# K_2 \simeq T \# K$, mas $K \simeq P \# P$

$K_1 \# K_2 \simeq T \# P \# P$, pelo lema 4 pág. 69 temos $T \# P \simeq P \# P \# P$
finalmente $K_1 \# K_2 \simeq P \# P \# P \# P$

6) Algumas outras aplicações do teorema da classificação:

$$\begin{aligned} \text{a) } K \# T \# T &\simeq K \# K \# T \simeq P \# P \# P \# P \# T \simeq \\ &\simeq P \# P \# P \# P \# P \# P \# P. \end{aligned}$$

$$\text{b) } P \# K \# T \simeq P \# K \# K \simeq P \# P \# P \# P \# P.$$

Podemos enunciar o teorema da classificação de outro modo.

7) Teorema:

Toda superfície compacta orientável é homeomorfa a uma esfera ou a soma conexa de n toros. Toda superfície compacta não orientável é homeomorfa a soma conexa de uma superfície compacta

orientável com um plano projetivo, ou com uma garrafa de Klein.

Característica de Euler de uma superfície

O objetivo de estudar este invariante topológico é mostrar que os tipos de superfícies citados no teorema da classificação não são topologicamente equivalentes.

8) Definição:

Seja S_1 uma superfície com uma triangulação

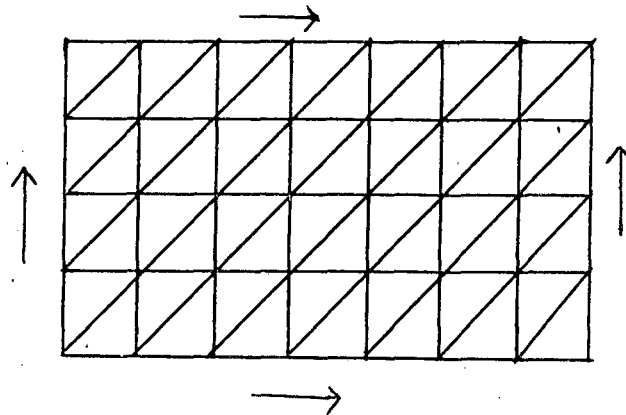
$\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$. Sejam V = número de vértices de S
 a = número de arestas de S
 T = número de triângulos.

A característica de Euler é definida por:

$$\chi(S) = V - a + T$$

Exemplos:

9) Seja o toro com a seguinte triangulação

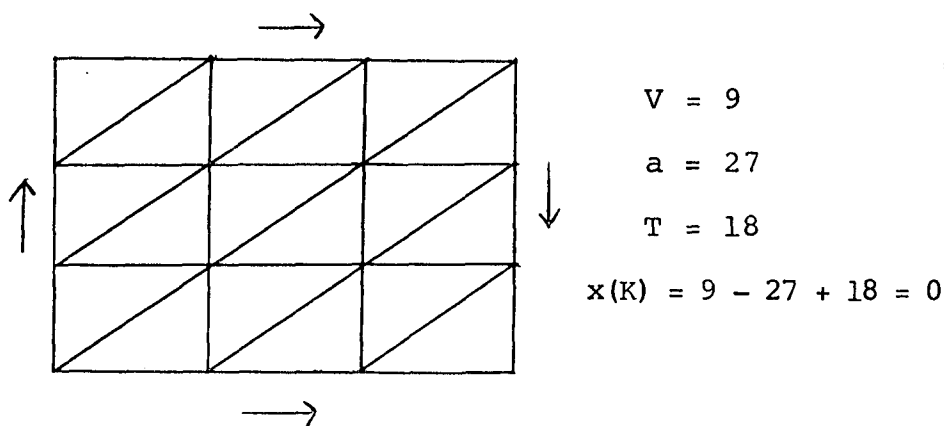


$$\begin{aligned} V &= 28 \\ a &= 84 \\ T &= 56 \\ \chi(S) &= 28 - 84 + 56 = 0 \end{aligned}$$

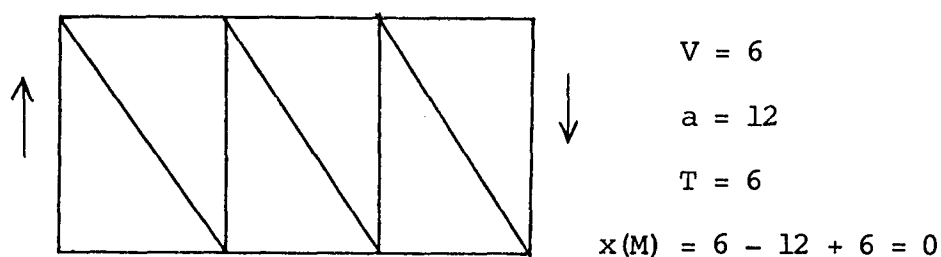
10) A esfera S^2 com a triangulação dada na pág. 30 tem como $\chi(S^2)$: $4 - 6 + 4 = 2$.

11) O plano projetivo tem como característica $x(P) = 6 - 15 + 10 = 1$. Estes exemplos indicam que a característica de Euler independente da triangulação escolhida, dependendo somente da superfície. A demonstração deste fato encontra-se em Modern Algebraic Topology D.G. Bourgin referência nº [8].

12) Seja a seguinte triangulação da garrafa de Klein



13) Para a faixa de Moëbius temos:



14) Proposição:

Sejam S_1, S_2 superfícies compactas. As características de Euler de S_1 e S_2 e de sua soma conexa estão relacionadas pela fórmula

$$x(S_1 \# S_2) = x(S_1) + x(S_2) - 2.$$

Demonstração:

Retirando o interior de um triângulo da cada superfície e identificando as arestas e vértices das fronteiras obtemos $S_1 \# S_2$.

Seja o número de arestas, vértices e triângulos de uma triangulação de S_1 dado por:

$$\{a_1, V_1, T_1\}$$

Analogamente para S_2 :

$$\{a_2, V_2, T_2\}$$

A característica de Euler de S_1 e S_2 é dada por:

$$x(S_1) = V_1 - a_1 + T_1 \quad x(S_2) = V_2 - a_2 + T_2$$

Após feita a soma conexa $S_1 \# S_2$ o número de vértices, arestas e triângulos na triangulação da superfície resultante é dada por:

$V = V_1 + V_2 - 3$ → houve identificação dos vértices de um triângulo de S_1 com um de S_2 o mesmo acontecendo com suas arestas.

$$a = a_1 + a_2 - 3$$

$T = T_1 + T_2 - 2$ → foram retirados o interior de dois triângulos para ser feita a soma conexa.

Logo a característica de Euler de $S_1 \# S_2$ é dada por:

$$x(S_1 \# S_2) = V - a + T = V_1 + V_2 - 3 - (a_1 + a_2 - 3) + T_1 + T_2 - 2$$

$$x(S_1 \# S_2) = V_1 - a_1 + T_1 + V_2 - a_2 + T_2 - 3 + 3 - 2$$

$$x(S_1 \# S_2) = x(S_1) + x(S_2) - 2. \text{ c q d.}$$

Vamos fazer um estudo sobre a característica de Euler de algumas superfícies compactas.

15) A soma conexa de n -esferas nos dá uma esfera, logo $x(S^2) = 2$.

16) Soma conexa de toros.

$$x \underbrace{(T \# \dots \# T)}_{n \text{ - vezes}} = 2 - 2n$$

Para provar isto usaremos o princípio da indução. Para $n = 1$ temos $x(T) = 0$.

Suponhamos que para $(n-1)$ toros a expressão $x \underbrace{(T \# T \# \dots \# T)}_{(n-1) \text{ vezes}} = 2 - 2(n-1)$ seja verdadeira.

Vamos provar que vale para n - toros.

$$x \underbrace{((T \# \dots \# T) \# T)}_{n \text{ - vezes}} = x \underbrace{(T \# \dots \# T)}_{(n-1) \text{ vezes}} + x(T) - 2$$

$$x \underbrace{((T \# \dots \# T) \# T)}_{n \text{ - vezes}} = 2 - 2(n-1) + 0 - 2$$

$$x \underbrace{((T \# \dots \# T) \# T)}_{n \text{ - vezes}} = 2 - 2n$$

17) Soma conexa de um plano projetivo e toros.

Sabemos que $x(P) = 1$

$$x(P \# T) = x(P) + x(T) - 2 = -1$$

$$x(P \# (T \# T)) = x(P) + x(T \# T) - 2 = 1 + (-2) - 2 = -3$$

$$x(\underbrace{P \# (T \# \dots \# T)}_{n \text{ - vezes}}) = x(P) + x(T \# \dots \# T) - 2 =$$

$$1 + 2 - 2n - 2 = 1 - 2n.$$

18) Soma conexa de planos projetivos

$$x(P \# \dots \# P) = 2 - n$$

Vamos demonstrar isto por indução.

- Para $n = 1$ $x(P) = 1$.

- Suponhamos que para $n - 1$ planos projetivos a característica seja $2 - (n - 1)$.

Vamos provar que vale para n -planos projetivos a expressão acima.

$$x(\underbrace{P \# \dots \# P \# P}_{n - 1 \text{ vezes}}) = x(P \# \dots \# P) + x(P) - 2 =$$

$$2 - (n - 1) + 1 - 2 = 2 - n.$$

19) Soma conexa de uma garrafa de Klein com toros.

$$x(T) = 0$$

$$x(K) = x(P \# P) = 0$$

$$x(K \# T) = 0 + 0 - 2 = -2$$

$$x(K \# T \# T) = x(K) + x(T \# T) - 2 = 0 - 2 - 2 = -4$$

$$x(K \# T \# \dots \# T) = x(K) + x(T \# \dots \# T) - 2 =$$

$$0 + 2 - 2n - 2 = -2n.$$

Concluimos que a característica de Euler de uma superfície orientável é sempre par, enquanto que a característica de uma superfície não orientável pode ser par ou ímpar.

Os únicos tipos topologicamente distintos de superfícies compactas orientáveis são: a esfera, o toro, ou a soma conexa de n -toros.

Para as superfícies compactas não orientáveis: o plano projetivo, ou a soma conexa de n -planos projetivos.

Citaremos um teorema que reduz o problema da classificação de superfícies compactas ao determinar a orientabilidade e a característica de Euler.

20) Teorema 20.

Sejam S_1 e S_2 superfícies compactas. Então S_1 e S_2 são homeomorfos se e somente se suas características de Euler coincidem e as duas superfícies são ambas orientáveis ou não orientáveis. Como exemplo temos $S_1 = \text{Klein}$ $S_2 = P \# P$, ambas são não orientáveis e com a mesma característica, portanto S_1 e S_2 são homeomorfos.

CAPÍTULO V

VARIETADES COM FRONTEIRA

1) Definição:

Uma variedade n -dimensional com fronteira é um espaço de Hausdorff, tal que todo ponto tem uma vizinhança aberta homeomorfa ao disco aberto U^n ou ao meio plano $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1 \geq 0\}$. O conjunto de todos os pontos que tem uma vizinhança aberta homeomorfa a U^n , recebe o nome de interior da variedade e o conjunto de pontos P que tem uma vizinhança aberta V tal que existe um homeomorfismo h de V sobre $\{x \in U^n / x_1 \geq 0\}$ com $h(P) = (0, \dots, 0)$ chama-se fronteira da variedade.

Se $n = 2$ dizemos que é uma superfície com fronteira, ao invés de 2-variedade com fronteira.

Exemplo:

2) $E^n = \{x \in \mathbb{R}^n / |x| \leq 1\}$ é uma variedade n -dimensional com fronteira. Veremos que S^{n-1} é a fronteira de E^n e seu interior é o disco aberto que chamamos de U^n . Vamos fazer uma análise para $n = 2$, em duas etapas:

a) Interior da variedade.

$$E^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 / |x| \leq 1\}$$

Seja $P \in E^2$ com $|P| < 1$, seja $r > 0$ tal que $|P| + r < 1$, obviamente $D_r(P) \subseteq E^2$ é uma vizinhança de P homeomorfa (igual) a um aberto de \mathbb{R}^2 .

b) Fronteira da variedade.

Seja $P \in S^1$ seja $\theta_p: E^2 \rightarrow E^2$ uma rotação de E^2 tal que $\theta_p(P) = (1,0)$. Obviamente θ_p é um homeomorfismo de E^2 sobre E^2 .

Portanto para achar uma vizinhança V ou P e um homeomorfismo h de V em um aberto de meio plano com $h(P) = (0,0)$, basta resolver o problema só para o ponto $(1,0)$.

Seja U o lado direito do disco, isto é os pontos (a,b) de E^2 com $a > 0$.

Em coordenadas polares, $U = \{(r,\theta) / -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, 1 \geq r > 0\}$.

Definiremos a função:

$$\psi: U \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ por } \psi(r,\theta) = ((1-r) \cos\theta, \text{sen}\theta).$$

$$\text{Seja } M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 1, x \geq 0\}.$$

a) M é aberto no meio plano.

Seja o meio plano direito $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0\}$ e o disco aberto $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 1\}$, M é aberto pois é a intersecção de A com B , isto é, $M = A \cap B$.

b) $\psi(U) \subseteq M$.

Devemos mostrar que $\psi(r,\theta)$ é um elemento de M . Se (r,θ) é um elemento de U , $\psi(r,\theta) = ((1-r) \cos\theta, \text{sen}\theta)$.

Para $\psi(r,\theta)$ ser elemento de M , devemos mostrar:

$$\begin{aligned} 1^\circ) ((1-r)\cos\theta)^2 + (\text{sen}\theta)^2 &= (1-r)^2 \cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = \\ &= (1-2r+r^2)\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = \cos^2\theta - 2r\cos^2\theta + \\ &+ r^2\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = -2r\cos^2\theta + r^2\cos^2\theta + 1 = \end{aligned}$$

$$= \cos^2 \theta (-2r + r^2) + 1.$$

Como $0 < r \leq 1$ e $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ temos que:

$$r(-2 + r) < 1 \quad \text{logo} \quad \cos^2 \theta (-2r + r^2) + 1 < 1.$$

2º) $(1 - r)^2 \cos^2 \theta \geq 0$ pois $0 < r \leq 1$. Portanto $\psi(r, \theta)$ é um elemento de M .

c) ψ é contínua, desde que cada função coordenada é contínua.

$$d) \psi(1, 0) = (0, 0)$$

$$\psi(1, 0) = ((1 - 1) \cos \theta, \sin \theta) = (0, 0).$$

Agora vamos definir a função:

$$\Psi: M \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\Psi(p, q) = \left(1 - \frac{p \sqrt{1 - q^2}}{1 - q^2}, \text{arc sen } q \right).$$

Onde $\Psi(p, q)$ é expresso em termos de suas coordenadas polares.

e) $\Psi(M) \subseteq U$ seja $(p, q) \in M$.

$$\Psi(p, q) = \left(1 - \frac{p \sqrt{1 - q^2}}{1 - q^2}, \text{arc sen } q \right).$$

1º) Sabemos que $p^2 + q^2 < 1$ logo $p^2 < 1 - q^2$ e $p < \sqrt{1 - q^2}$

$$0 \leq \frac{p \sqrt{1 - q^2}}{1 - q^2} = \frac{p}{\sqrt{1 - q^2}} < \frac{p}{p} = 1, \quad \text{logo} \quad 0 < 1 - \frac{p \sqrt{1 - q^2}}{1 - q^2} \leq 1.$$

2º) $\theta = \text{arc sen } q \Rightarrow q = \text{sen } \theta$, pela definição de M, θ pertence ao primeiro ou quarto quadrante, logo $-\frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

f) Ψ é contínua desde que cada função coordenada é contínua.

g) Calcularemos a composição:

1º) $(\Psi \circ \psi)$

$$(\Psi \circ \psi)(r, \theta) = \Psi(\psi(r, \theta)) = \Psi((1-r)\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) =$$

$$= \left(1 - \frac{(1-r)\cos\theta\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}}{1-\operatorname{sen}^2\theta}, \operatorname{arc\,sen}\,q\right) =$$

$$= \left(1 - \frac{(1-r)\cos\theta\cos\theta}{1-\operatorname{sen}^2\theta}, \theta\right) = \left(1 - \frac{(1-r)\cos^2\theta}{\cos^2\theta}, \theta\right) =$$

$$= (1-1+r, \theta) = (r, \theta)$$

2º) $(\psi \circ \Psi)$

$$(\psi \circ \Psi)(p, q) = \psi(\Psi(p, q)) = \psi\left(1 - \frac{p\sqrt{1-q^2}}{1-q^2}, \operatorname{arc\,sen}\,q\right)$$

$$= \left(1 - \left(1 - \frac{p\sqrt{1-q^2}}{1-q^2}\right)\cos(\operatorname{arc\,sen}\,q), \operatorname{sen}(\operatorname{arc\,sen}\,q)\right) =$$

$$= \left(\frac{p\sqrt{1-q^2}}{1-q^2}\cos\theta, \operatorname{sen}\theta\right) = \left(\frac{p\sqrt{1-q^2}}{1-q^2} - \sqrt{1-q^2}, q\right) = (p, q)$$

Provamos assim que Ψ é a função inversa de ψ . Como ambos são contínuas, concluímos que ψ é homeomorfismo. Portanto E^2 , é uma variedade com fronteira.

Triangulação de uma superfície com fronteira

3) Definição:

Uma triangulação de uma superfície S com fronteira con-

siste em um complexo simplicial K e um homeomorfismo $f: /K/ \rightarrow S$. No caso de superfície compacta sem fronteira, toda a aresta é exatamente aresta de dois triângulos.

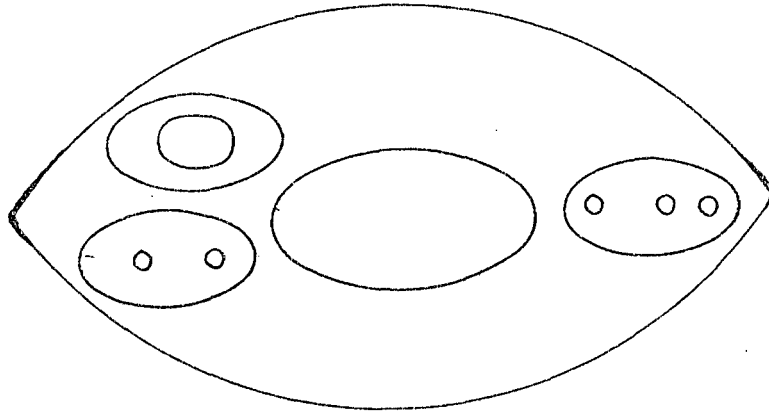
Na triangulação de uma superfície compacta com fronteira, algumas arestas serão de apenas um triângulo. Essas arestas estão contidas na fronteira. Existe um teorema que afirma: Toda superfície compacta com fronteira é triangulável (demonstração feita no fim deste trabalho).

Orientabilidade de superfície com fronteira

4) Definição:

Seja K uma triangulação para uma superfície S com fronteira. S é orientável se é possível escolher uma orientação para os triângulos, de modo que a mesma venha a induzir na aresta comum aos triângulos, dois a dois adjacentes, orientações opostas. Caso contrário dizemos que a superfície S é não orientável.

A orientabilidade de uma variedade com fronteira depende essencialmente da orientabilidade de seu interior considerado como uma variedade não compacta. Observa-se que cada componente do bordo de uma n -variedade é uma $(n-1)$ variedade que pode ou não ser orientável, pode acontecer os dois casos. Por exemplo a fronteira de $K \times [0,1]$ é uma 3-variedade cuja fronteira é duas cópias disjuntas de K , ($K \times \{0\}$ e $K \times \{1\}$), o mesmo acontecendo com $T \times [0,1]$. Entretanto nem toda variedade com fronteira é da forma $M \times [0,1]$ como por exemplo: dentro de um toro colocamos várias outras superfícies, como mostra a figura, e consideramos a superfície entre os toros oca.



Desta forma temos uma 3-variedade cuja fronteira é composta de um toro, um bi-toro, um tri-toro. O estudo de problemas do tipo: qual o tipo de variedade que pode ser componente da fronteira da mesma variedade, chama-se cobordismo e tem implicação profunda em topologia e geometria moderna, no entanto foge do nosso interesse.

Classificação de superfícies conexas, compactas com fronteira.

Como foi feito para as superfícies, vamos classificar as superfícies com fronteira construindo modelos através dos quais, podemos comparar superfícies com fronteira. Sabemos que se em uma superfície compacta, selecionamos um número finito de discos fechados disjuntos e retiramos seus interiores, obtemos uma superfície com fronteira, sendo o número de componentes da fronteira, igual ao número de discos escolhidos. Reciprocamente, suponhamos que M é uma superfície com fronteira compacta, cuja fronteira tenha K componentes, $K \geq 1$. Cada componente é uma 1-variedade conexa compacta, isto é, uma circunferência. Tomando K discos fechados e colando a fronteira do i -ésimo disco a i -ésima componente da fronteira de M , obtemos uma superfície compacta M^* .

O aspecto topológico da superfície resultante M^* depende somente do tipo topológico de M .

A recíproca não é tão óbvia. O tipo topológico da superfície com fronteira M , depende somente do número de componentes da sua fronteira e do tipo topológico da superfície M^* obtida ao colar um disco sobre cada componente da fronteira. Estabelecemos este resultado através do teorema.

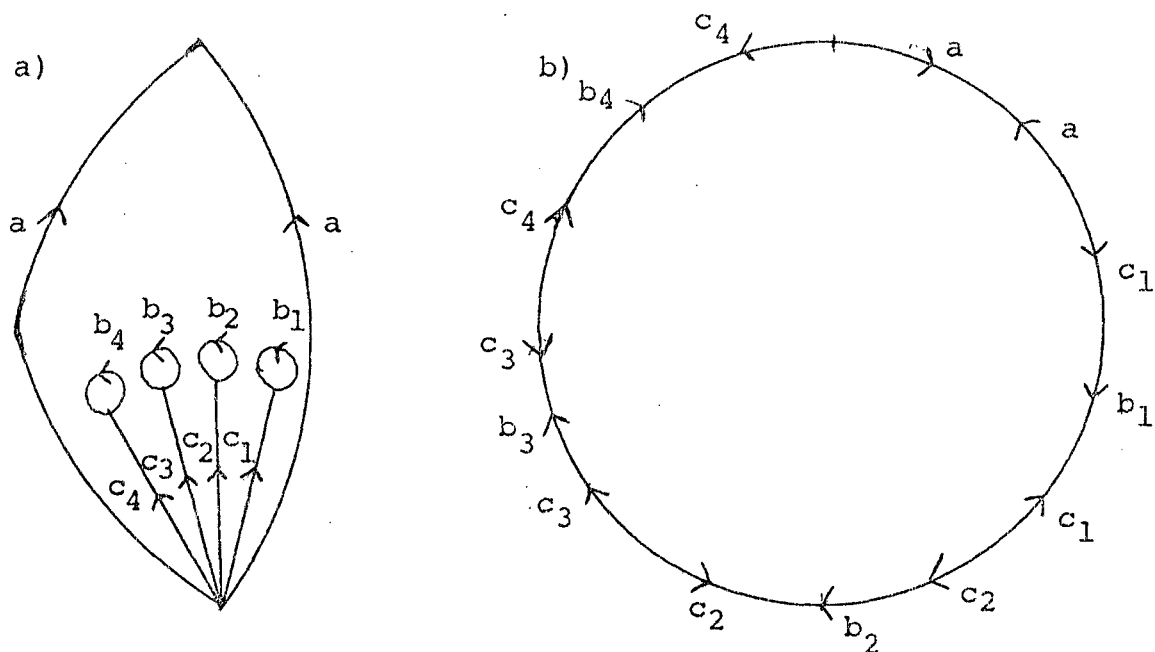
5) Teorema:

Sejam M_1 e M_2 superfícies conexas e compactas com fronteira, suponhamos que suas fronteiras tem o mesmo número de componentes. Então M_1 e M_2 são homeomorfas se e somente se são as superfícies M_1^* e M_2^* .

Procederemos demonstrando que M_1 e M_2 são homeomorfas a um polígono com certos pares de arestas identificados, chamada "forma normal". Primeiramente explicaremos em detalhes as formas normais.

a) Forma normal de uma esfera com K buracos.

Como sabemos uma esfera é representada por um polígono de 2 lados cujas arestas estão identificadas segundo o símbolo $a a^{-1}$. Façamos K buracos neste polígono (figura abaixo a).



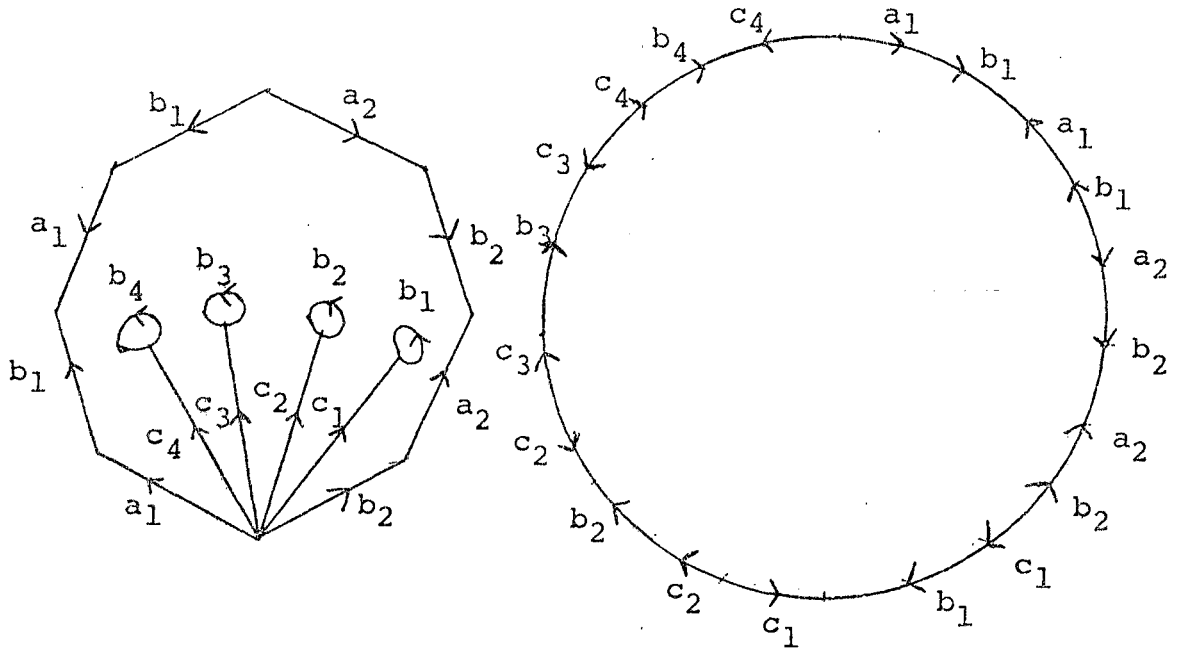
Então, a partir de um vértice da fronteira, fazemos os cortes $c_1, c_2, c_3, \dots, c_k$ até a componente correspondente $b_1, b_2, b_3, \dots, b_k$. Abrimos cada corte até obter o polígono da figura acima, b. Generalizando obtemos um polígono, cujas arestas estão identificadas segundo o símbolo:

$$(a a^{-1}) (c_1 b_1 c_1^{-1}) (c_2 b_2 c_2^{-1}) (c_3 b_3 c_3^{-1}) \dots (c_k b_k c_k^{-1}).$$

b) Forma normal de uma soma conexa de n -toros com k buracos. Na figura abaixo temos o procedimento desta forma normal, sendo $n=2$ (número de toros) $k=4$ (buracos). Geralmente o resultado, é um polígono de $4n + 3k$ lados identificados segundo o símbolo.

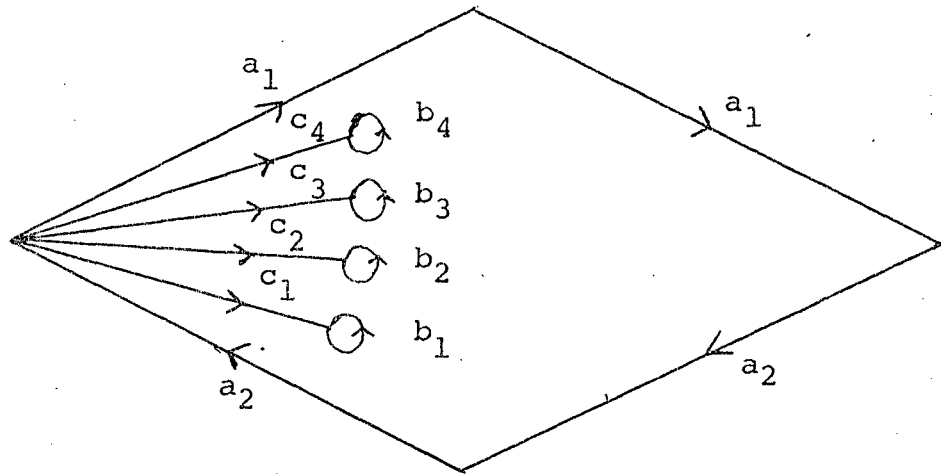
$$(a_1 b_1 a_1^{-1}) \dots (a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}) \dots$$

$$(c_1 b_1 c_1^{-1}) \dots (c_2 b_2 c_2^{-1}) \dots (c_k b_k c_k^{-1})$$



c) Forma normal de uma soma conexa de n -planos projetivos com k buracos.

Demonstraremos através da ilustração abaixo com $n = 2$ e $k = 4$.



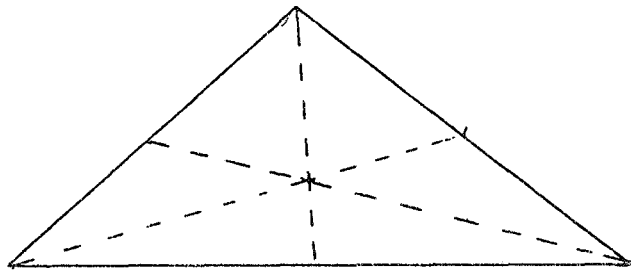
Generalizando obtemos um polígono de $2n + 3k$ lados, identificados segundo o símbolo:

$$(a_1 a_1) (a_2 a_2) \dots (a_n a_n) (c_1 b_1 c_1^{-1}) \dots (c_k b_k c_k^{-1}).$$

Seja M uma superfície compacta com fronteira com uma triangulação dada. Podemos supor sem perda de generalidade que são válidas as seguintes propriedades: Se uma aresta tem os dois vértices na fronteira, então toda aresta está contida na fronteira e nenhum triângulo tem mais de uma aresta contida na fronteira.

Se esta condição não for possível, podemos conseguí-la subdividindo cada aresta em duas arestas e cada triângulo em 6 triângulos, este [processo] recebe o nome de subdivisão baricêntrica.

Exemplo:



Podemos subdividir baricentricamente novamente, caso for necessário, observamos que a nossa triangulação verifica a seguinte situação:

Sejam T_i e T_j triângulos que tenham cada um uma aresta contida na fronteira.

Então T_i e T_j são disjuntos, ou tem um vértice em comum, que é um vértice da fronteira.

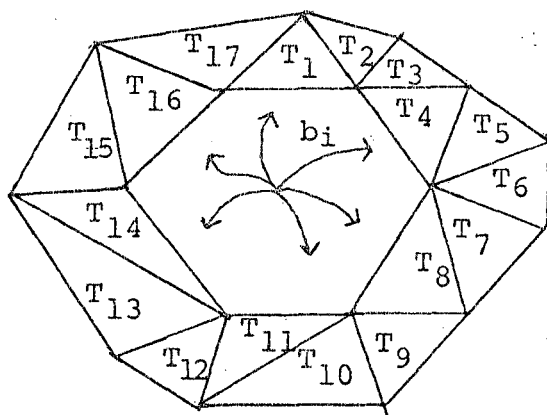
Designemos por b_1, b_2, \dots, b_k as componentes da fronteira. Se T é um triângulo que tem parte comum com uma das componentes b_i , então existe duas arestas em T que tem um vértice em b_i , mas não estão contidas em b_i .

Analogamente se \underline{e} é uma aresta que tem um vértice em b_i , sem estar contido em b_i , então \underline{e} é aresta de dois triângulos que cortam ambos a b_i .

Segue que as arestas e triângulos que tem parte comum com b_i , mas não estão contidas em b_i , podem ordenar-se em um ou mais ciclos de arestas e triângulos alternadamente.

$T_1, e_1, T_2, e_2, \dots, T_n, e_n, T_{n+1} = T_1$ tal que cada e_j é aresta de T_j e T_{j+1} e cada T_j tem a e_{j-1} e e_j como aresta.

Das condições impostas a triangulação de M , é óbvio que a união dos triângulos T_1, \dots, T_n que tem uma parte comum com b_i é homeomorfa a uma região poligonal do plano, com um buraco. Vejamos um exemplo para $n = 17$.

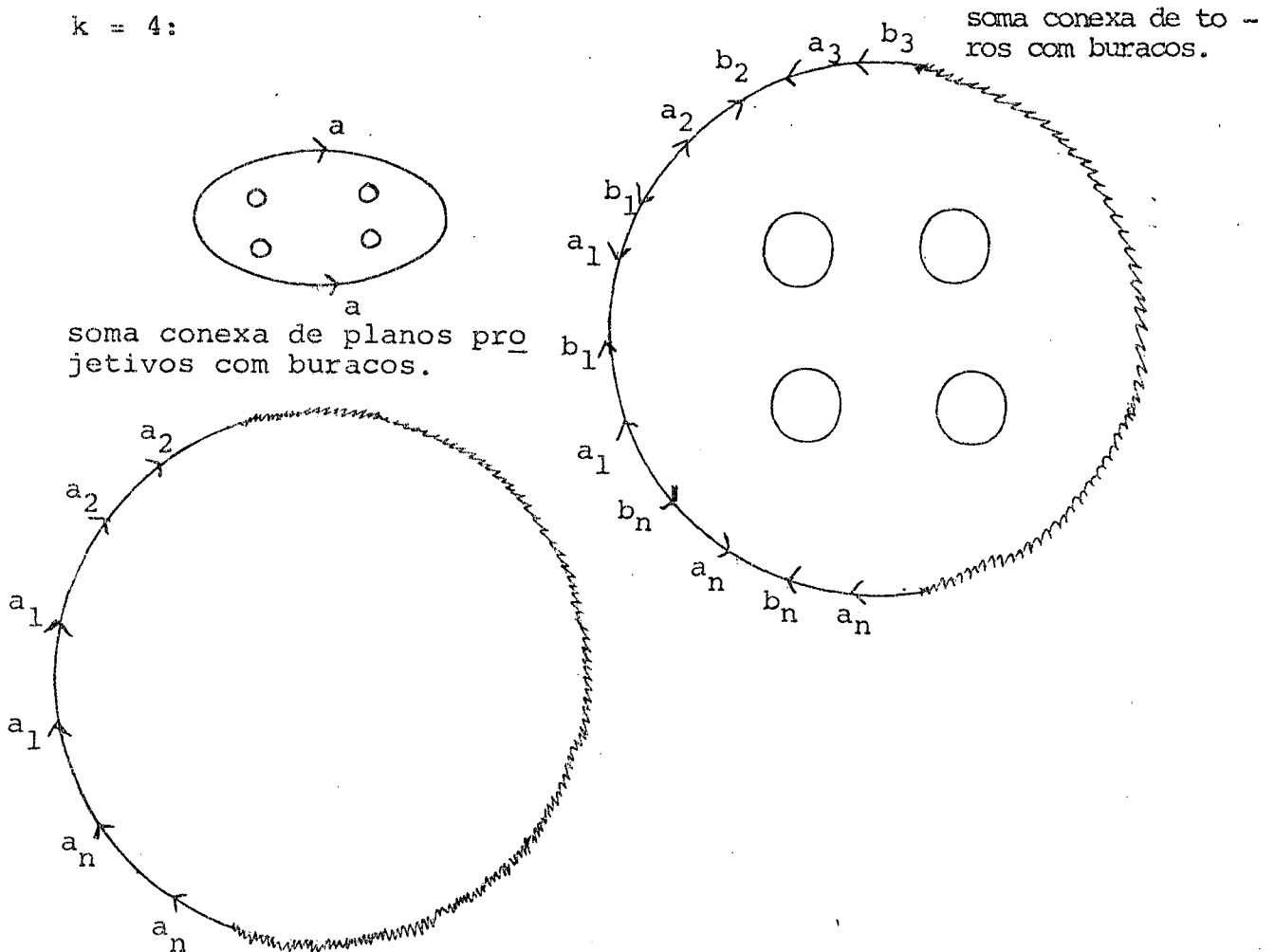


Teremos uma região poligonal destas, para cada componente b_i da fronteira, $1 \leq i \leq k$.

Designamos por T_1, \dots, T_e os triângulos restantes da triangulação de M , não contidos em nenhum dos polígonos P_i , $1 \leq i \leq k$. Com estes k polígonos e e triângulos, podemos realizar o processo seguido na primeira parte da demonstração do teorema 1 pág. 51.

Resulta um único polígono no plano, que tem k buracos em seu interior e as arestas que estão na fronteira do polígono estão identificados aos pares.

Podemos, se necessário, aplicar as outras partes da demonstração do teorema 1 pág. 51, a este polígono com buraco. No final do processo obtemos um dos três tipos de polígono, no caso $k = 4$:



Em cada caso, todos os vértices estão identificados a um só. Para completar a demonstração devemos fazer cortes c_1, c_2, \dots, c_k desde o vértice inicial do polígono até a fronteira de cada buraco e abrir cada um destes cortes, obtendo uma das três formas normais possíveis, com a qual completamos a demonstração.

6) Característica de Euler de uma superfície com fronteira.

A característica de Euler de uma superfície com fronteira, é definida do mesmo modo que a característica de uma superfície sem fronteira. Isto é a soma alternada de vértices, arestas e faces de uma triangulação. Com a característica de Euler, podemos dar um conjunto completo de invariantes para a classificação de superfícies com fronteira compactas.

7) Teorema

Duas superfícies M_1 e M_2 compactas com fronteira são homeomorfas se e somente se tem o mesmo número de componentes da fronteira, são ambas orientáveis ou não orientáveis, e tem a mesma característica de Euler.

Demonstração:

Usando o teorema nº 5 pág. 88 e nº 20 pág. 81 e tendo como hipótese $M_1 \approx M_2$ é óbvio que: M_1 e M_2 tem o mesmo nº de componentes da fronteira, são ambas orientáveis ou não, e tem a mesma característica de Euler.

Seja M_i^* com $i = 1, 2$, a superfície compacta obtida colando ao longo da fronteira de M_i , $i = 1, 2$ a fronteira de n -discos fechados. A característica de M_1^* é dada por:

$\chi(M_1^*) = \chi(M_1) + n\chi(D) - 2n$, como $\chi(D) = 1$ temos $\chi(M_1^*) = \chi(M_1) - n$, analogamente $\chi(M_2^*) = \chi(M_2) - n$. Como por hipótese $\chi(M_1) = \chi(M_2)$, temos: $\chi(M_1^*) + n = \chi(M_2^*) + n$, pelo teorema nº 20, pág. 81.

$M_1^* \approx M_2^*$ e pelo teorema nº 5 pág. 88, $M_1 \approx M_2$, c q d. Sobre modelos de superfícies compactas com fronteira, ver referência [1],

pág. 43. Outro invariante topológico é o grupo fundamental. Usando o conceito de grupo fundamental, podemos demonstrar que duas superfícies são homeomorfas, se seus grupos fundamentais são isomorfos, tendo o mesmo número de componentes e ambas orientáveis, ou não orientáveis. Podemos usar este invariante para distinguir entre as classes de superfícies compactas. Sobre o grupo fundamental de uma superfície compacta ver referência [1] pág. 129.

Uma 3-variedade triangulada (com fronteira) é um complexo k que é também uma 3-variedade (com fronteira). k então tem uma estrutura a fim fixada e funções linear por partes podem ser definidas.

Teorema 8:

Toda 3-variedade é triangulável.

Seja M uma 3-variedade, como as componentes c_{α_i} de M são localmente compacta (porque são compactas); elas são abertas e fechadas.

Vamos provar que cada componente é triangulável, podemos sem perda de generalidades assumir que M é conexo pois $M = \bigcup c_{\alpha_i}$. De acordo com o corolário da pág. 225, da proposição 7 pág. 226, proposição 23 pág. 207 da referência [5], concluimos que sendo localmente compacto e métrico, M é então a união de um contável número de conjuntos c_{α_i} compactos. Cada ponto de M tem uma vizinhança E_p homeomorfa a E^3 .

Para cada ponto $P \in M$, seja σ_p e σ'_p vizinhanças fechadas de p , sendo σ_p e σ'_p simplexos relativos a um fixo sistema de coordenadas cartesianas em E_p , tal que $\sigma'_p \subset \text{Int}(\sigma_p)$.

Existe então uma subcoleção contável e localmente finita $\sigma'_1, \sigma'_2, \dots, \sigma'_s$, os quais cobrem M . Para cada i temos os conjun -

tos σ_i e E_i , sejam os conjuntos σ_p e E_p correspondendo a $\sigma'_i = \sigma'_p$. Seja k_1 um 3-simplexo relativo a E_1 , estando em $I(\sigma_1)$ e contendo σ'_1 em seu interior. Suponhamos que seja dado um conjunto k_i que é uma 3-variedade triangulável com fronteira, tal que $\bigcup_{j=1}^i \sigma'_j \subset I(k_i)$. Sejam os simplexos σ_{i+1} e σ'_{i+1} na seguinte situação: Os conjuntos $K_i \cap \beta'(\sigma_{i+1})$ e $K_i \cap \beta'(\sigma'_{i+1})$, onde β é a fronteira, são fechados e disjuntos.

Mostraremos que existe uma 2-variedade L com fronteira, tal que L é um poliedro em K_i , e L separa $K_i \cap \beta'(\sigma_{i+1})$ de $K_i \cap \beta'(\sigma'_{i+1})$ em K_i , com $\beta'(L) \subset \beta'(K_i)$. Existe uma vizinhança poliédrica fechada V de $K_i \cap \beta'(\sigma'_{i+1})$ em K_i , tal que $U \cap K_i \cap \beta'(\sigma_{i+1}) = \phi$.

Juntando a V vizinhanças poliédricas, suficientemente pequenas (em K_i) primeiro os vértices, em seguida as arestas e então as faces 2-dimensionais, obtemos uma vizinhança poliédrica V' de V em K_i , tal que $1 - V' \cap K_i \cap \beta'(\sigma_{i+1}) = \phi$ e a fronteira L' e V' em K_i é uma 2-variedade com fronteira, tal que $\beta'(L') \subset \beta'(K_i)$.

O conjunto procurado L é então $L' - \sigma'_{i+1}$ ($= L' - I(\sigma'_{i+1})$) e assumiremos sem perda de generalidade, que L é irredutível com respeito as propriedades dadas. Seja K'_i o fecho da união de todas as componentes de $K_i - L$ que intersepta σ'_{i+1} . Então $K'_i \subset I(\sigma'_{i+1})$. Seja k''_i o fecho de $K_i - K'_i$. L então tem uma vizinhança fechada N em K'_i tal que N é uma 3-variedade com fronteira e um poliedro relativo para K_i , tal que $N \cap \sigma'_{i+1} = \phi$. $U = I(N)$, então tem uma decomposição simplicial no qual todo 3-simplexo é um 3-simplexo relativo para K_i .

Seja ϕ como no teorema 2 referência [7] pág. 29 tal que

$\phi(p)$ é contínua sobre N , tal que $\phi(p) = 0$ para cada ponto de $\beta'(N)$, tal que para cada ponto p de U , $\phi(p)$ é menor do que a distância de p para K_1'' . A hipótese do teorema 2 é então satisfeita, K do teorema 2 sendo uma 3-variedade triangulada que contém K_1 como um subcomplexo, K' do teorema 2 sendo $E_i + 1$, e o f do teorema 2 sendo a identidade em U .

Seja f' conforme a conclusão do teorema 2.

Seja W uma vizinhança fechada de $L \cap \bigcup_{j=1}^i \sigma_j^i$ em K_1' , tal que $W \subset I(N) \cup I(L)$, tal que W é uma 3-variedade com fronteira e um poliédro relativo para K_1 . Seja W igual a $f'(W)$. Então $W' \cap K_1'' \subset I(L)$. Seja X uma vizinhança fechada de $\bigcup_{j=1}^i \sigma_j^i \cap \text{Cl}(K_1' - W') \cup \sigma_{i+1}^i$ em $E_i + 1$, Cl é o fecho, tal que X é um poliédro relativo para $E_i + 1$, imposição geral relativa a W' e $X \cap K_1'' = \emptyset$. $K_{i+1} = K_1'' \cup W' \cup X$ é então uma 3-variedade com fronteira, homeomorfa a um complexo finito e $I(K_{i+1})$ contém $\bigcup_{j=1}^i \sigma_j^i$.

A referência K_1, K_2, \dots , de 3-variedades trianguladas com fronteira, definida por meio do processo anterior não é necessariamente monotonicamente crescente.

De qualquer maneira K_i torna-se finalmente fixo na vizinhança de qualquer ponto dado, no sentido que cada estágio $K_{i+1} - K_i \subset \sigma_{i+1}^i$ tem uma decomposição simplicial que usa todos os simplexos da decomposição de K_i exceto a possibilidade para aqueles que interseptom σ_{i+1}^i . Portanto M é triangulável.

BIBLIOGRAFIA

- [1] WILLIAM, S. Massey. Introducción a la topología algebraica. Impreso en España, Editorial Reverté S.A., 1972.
- [2] AHLFORS, L.V. Y SARIO. Riemann surfaces Princeton. N.J. Princeton University Press, 1966, capítulo I.
- [3] MARVIN, J. Greenberg. Lectures on algebraic topology, Advanced Book Program Reading Massachusetts, W.A. Benjamin Inc, 1967.
- [4] G.E. ZEEMAN. Uma Introdução Informal à Topologia das Superfícies. IMPA R.J.
- [5] LIMA, Lages Elon. Elementos de Topologia Geral. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1976.
- [6] ALBERT, T. Lundell and STEPHEN, Weingram. The Topology of CW Complexes. New York Van Nostrand Reinhold Company.
- [7] EDWIN, E. Moise. Affine Structures in 3-Manifolds. V. The Triangulation Theorem and Hauptvermutung, Annals of Math. Vol. 56, 1952, pp. 96-114.
- [8] D.G. Bourgin. Modern Algebraic Topology Mac-Millan Press.