A EQUAÇÃO $x^n y^m = f$ NUM GRUPO ALTERNADO

por

Johnny Hass

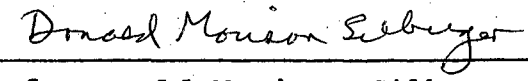
Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de

"M E S T R E E M C I Ê N C I A S"

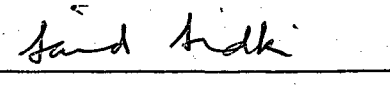
Especialidade em MATEMÁTICA, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

Prof. Inder Jeet Taneja, Ph.D.
Coordenador

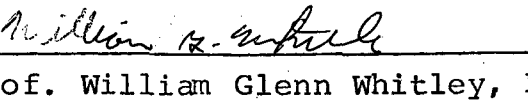
Banca Examinadora:



Prof. Donald Morison Silberger, Ph.D.
Orientador



Prof. Said Najati Sidki, Ph.D.



Prof. William Glenn Whitley, Ph.D.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

A EQUAÇÃO $x^n y^m = 6$ NUM GRUPO ALTERNADO

Johnny Hass - Agosto / 82

In memoriam de minha mãe Antonia Lydia de Camargo Hass

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Donald Morison Silberger pela orientação segura e precisa, por sua disponibilidade e paciência, pelo entusiasmo que sempre procurou transmitir e pela sua amizade.

À Adalci, à Annie Priscilla e à Alessandra pelas horas que delas tirei para poder realizar este trabalho.

Aos responsáveis pela minha formação, especialmente meus pais a quem muito devo.

À Universidade para o Desenvolvimento do Estado de Santa Catarina, em particular à Faculdade de Engenharia de Joinville, e também à Universidade Federal de Santa Catarina que possibilitaram a realização desta dissertação.

RESUMO

Esta dissertação estabelece para cada par m e n de números inteiros ímpares, para todo grupo alternado A_k com $k > 4$, e para toda $f \in A_k$ que a equação $f = x^n y^m$ tem solução $\langle x , y \rangle \in A_k^2$.

ABSTRACT

This dissertation establishes for every pair m and n of integers odd, for all alternative group A_k, with $k > 4$, and for all $f \in A_k$ that the equation $f = x^n y^m$ has a solution $\langle x, y \rangle \in A_k^2$.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O resultado principal deste trabalho é o teorema 3.14 que se encontra no capítulo III , cujo enunciado é o seguinte :

Seja k um inteiro maior do que quatro . Sejam m e n inteiros ímpares . Seja $f \in A_k$. Então a equação $f = x^n y^m$ tem solução $\langle x , y \rangle \in A_k^2$.

Este teorema responde a duas perguntas de Roger C. Lyndon que escreveremos no capítulo II .

CAPÍTULO I - GENERALIDADES

Neste capítulo introduziremos convenções e notações que utilizaremos no presente trabalho. Além disso, apresentaremos definições e propriedades específicas da área objeto do estudo realizado.

Seja X um conjunto arbitrário. Então seu número cardinal é denotado por $|X|$. Se X e Y são conjuntos então $X-Y$ denota o conjunto $\{ x : x \in X \text{ e } x \notin Y \}$.

Neste trabalho ω representa o conjunto $\{ 0 , 1 , 2 , \ldots \}$ e o símbolo $\mathbb{Z}$ denota o conjunto $\{ \ldots , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , \ldots \}$. Para $k \in \omega$, o símbolo k denota o conjunto $\{ x : x \in \omega \text{ e } x < k \}$ e também denota a cardinalidade do conjunto k.

Chamamos f de permutação de um conjunto X se e somente se f é uma bijeção de X em X.

O conjunto de todas as permutações de um conjunto X é conhecido como o grupo simétrico de X e anotaremos S_X; isto é, $S_X = \{ f : f \text{ é permutação do conjunto } X \}$. É bem conhecido que $|S_k| = k!$ para qualquer $k \in \omega$.

A composição da relação binária f com a relação binária g será denotada simplesmente por fg. Então $fg = \{ \langle x , y \rangle : \text{existe } z \text{ com } \langle x , z \rangle \in g \text{ e com } \langle z , y \rangle \in f \}$. Se f e g são funções, então $(fg)(x) = f(g(x))$ quando $x \in Dom(g)$ enquanto $g(x) \in Dom(f)$. Quando há exatamente um y tal que $\langle x , y \rangle \in f$ então o símbolo $f(x)$ está definido e denota y.

1.01 - Definição: Seja $H \subseteq S_X$, onde X é um conjunto qualquer. Diremos que H é disjunto como permutações e anotaremos dcp, se e somente se para cada par f e g de elementos distintos de H temos para todo $x \in X$ que $x = f(x)$ ou que $x = g(x)$.

Pelo [14 ; Lema 1.3] temos que se H é dcp e se δ e g são elementos de H, então $\delta g = g\delta$.

1.02 - Definição: Chamamos δ um ciclo não trivial de um conjunto X se e somente se $\delta \in S_X$ e existe $x \in X$ tal que $\delta(x) \neq x$ enquanto $\delta(y) = y$ para cada $y \in X - \{ \delta^i(x) : i \in \mathbb{Z} \}$.

O comprimento de um ciclo não trivial δ é o número cardinal do conjunto $\{ \delta^i(x) : i \in \mathbb{Z} \}$ quando $\delta(x) \neq x$ e designaremos por $\lVert\delta\rVert$. Quando $|\{ \delta^i(x) : i \in \mathbb{Z} \}| = k$ para $1 < k \in \omega$ e quando $\delta \in S_X$, então δ é dito um k-ciclo em X e δ pode ser escrito na forma $(x \ \delta(x) \ \delta^2(x) \ \ldots \ \delta^{k-1}(x))$ quando $x \neq \delta(x)$ ou mais geralmente por $(\delta^i(x) \ \delta^{i+1}(x) \ \ldots \ \delta^{k-1}(x) \ x \ \delta(x) \ \delta^2(x) \ \ldots \ \delta^{i-1}(x))$ qualquer que seja $i \in k$.

Para qualquer conjunto X, a expressão $id\restriction X$ representa o conjunto $\{<x,x> : x \in X\}$. Chamamos $id\restriction X$ de ciclo trivial em X ou ciclo de comprimento um em X.

A seguinte definição depende de [14 ; Lema 1.5].

Seja X um conjunto arbitrário e seja $\delta \in S_X$. Então existe um único conjunto C dcp de ciclos não triviais em X, tal que para cada $x \in X$ temos que, se $\delta(x) \neq x$ então existe exatamente uma $g \in C$ com $\delta(x) = g(x)$, mas se $\delta(x) = x$ então $g(x) = x$ para cada $g \in C$.

1.03 - Notação: O conjunto C mencionado no parágrafo anterior, denotaremos por $C_X(\delta)$.

Os elementos de $C_X(\delta)$ são chamados componentes cíclicas de δ.

Observação: Se $\{ f, g \} \subseteq S_X$ é evidente que $f = g$ se e somente se $C_X(f) = C_X(g)$.

Se $X \neq Y$, com X e Y conjuntos , então $C_X(f) \cap C_Y(g) = \phi$ qualquer que seja $< f, g > \in S_X \times S_Y$, já que uma das permutações f ou g pode ter pontos fixos que a outra não tem , mesmo que $f(x) = g(x)$ quando $x \neq f(x)$.

1.04 - Definição: Para $f \in S_X$ a expressão $X\$f$ denota o conjunto $\{ x : f(x) \neq x \in X \}$ e $X\$f$ é chamado suporte de f em X .

1.05 - Definição: A permutação f de X é chamada cíclica se e somente se ambos $C_X(f) = \{ f \}$ e $X\$f = X$.

Observações: S_X contêm uma permutação cíclica se e somente se $|X| \leq |\omega|$.

Para $0 < k \in \omega$ o conjunto S_k contêm exatamente $(k - 1)!$ permutações cíclicas .

1.06 - Definição: Para $0 < k \in \omega$ a expressão c_k denota a permutação cíclica $(0\ 1\ 2\ \ldots\ k\text{-}2\ k\text{-}1)$ do conjunto k .

As seguintes idéias encontram-se em [12] .

1.07 - Definição: Sejam f e g relações binárias . Diremos que f é isomórfica bigraficamente com g e representaremos por $f \simeq g$ se e somente se existem um conjunto X e $h \in S_X$ tal que $f = \{ < h(x), h(y) > : < x, y > \in g \}$.

Observações: Temos que $\simeq$ é uma relação de eqüivalência e que $f \simeq f^{-1}$ para qualquer permutação f .

Se δ *e* g *são* j *- ciclos de* k *, então* $\delta \simeq g$ *quando* $0 \leq j < k \in \omega$.

Para $\{ \delta, g \} \subseteq S_X$ *para algum conjunto* X *, temos pelo* [12 ; *Corolário do Teorema 1*] *que* $\delta g \delta^{-1} \simeq g$ *e que* $\delta g \simeq g \delta$.

1.08 - *Definição: Seja* $\delta \in S_X$. *Então* δ *é chamada de involução de* X *se e somente se* $\delta^2 = id \restriction X$.

Observações: Seja $\delta \in S_X$. *Então* δ *é uma involução de* X *se e somente se os elementos do conjunto* $C_X(\delta)$ *são* 2 *- ciclos . Além disso , para todo* $n \in \mathbb{Z}$ *temos que* $\delta^{2n+1} = \delta$ *se* δ *é uma involução .*

1.09 - *Definição: Seja* $\delta \in S_X$. *Então* δ *é dita transposição de* X *se e somente se* $\delta = (x \ y)$ *para algum* $\{ x, y \} \subseteq X$ *com* $x \neq y$.

Para $0 < k \in \omega$ *e para* $\delta \in S_k$, *definimos* $\#(\delta) = k - |\{ x : \delta(x) = x \}| - |C_k(\delta)|$.

1.10 - *Definição: Seja* $\delta \in S_k$ *com* $1 < k \in \omega$. *Chamamos a permutação* δ *de par se e somente se a paridade do inteiro* $\#(\delta)$ *é par ; caso contrário , chamamos* δ *de ímpar .*

Os três resultados seguintes são esclarecimentos de [10 ; *Teorema 4.71*] .

1.11 - *Lema: Seja* $\delta \in S_k$ *com* $0 < k \in \omega$. *Então existem* $\#(\delta)$ *transposições* $t_1 , t_2 , \ldots , t_{\#(\delta)}$ *de* k *tais que* $\delta = t_1 \, t_2 \ldots t_{\#(\delta)}$.

Demonstração: Seja $(x_1 \ x_2 \ \ldots \ x_{j-1} \ x_j)$ *uma componente* j *- ciclo de* δ . *Observamos que* $(x_1 \ x_2 \ \ldots \ x_{j-1} \ x_j) = (x_1 \ x_2)(x_2 \ x_3)$

$\ldots (x_{j-2} \; x_{j-1})(x_{j-1} \; x_j)$. Assim notamos que qualquer j - ciclo g de k com $j > 1$, pode ser escrito $g = T_1 \, T_2 \ldots T_{j-1}$, onde os T_i são transposições de k e onde $k\$g = \cup \{ k\$T_i : 0 < i < j \}$. Este processo produz uma fatorização de δ em $m - |C_k(\delta)|$ transposições , onde m denota o somatório dos comprimentos das componentes cíclicas de δ . Mas é claro que $m = k - |\{ x : \delta(x) = x \}|$. Assim observamos que $m - |C_k(\delta)| = \#(\delta)$ e que $\#(\delta) = k - |\{ x : \delta(x) = x \}| - |C_k(\delta)|$. □

1.12 - Lema: Sejam $1 < k \in \omega$ e $h \in S_k$. Seja $\{x,y\} \subseteq k$ com $x \neq y$. Seja $g = h (x \; y) \in S_k$. Se existe $u \in C_k(h)$ tal que $\{x,y\} \subseteq k\$u$ então $\#(g) = \#(h) - 1$; caso contrário $\#(g) = \#(h) + 1$.

Demonstração: Usando um exemplo paradigma $h = (0 \; 1 \; 2 \; 3)(4 \; 5 \; 6) (7 \; 8)(9)(10) \in S_{11}$, mostraremos que o lema segue .

Caso I : $(x \; y) = (0 \; 1)$. Então $g = h (0 \; 1) = (0 \; 2 \; 3) (1) (4 \; 5 \; 6)(7 \; 8)(9)(10)$. Portanto $\#(g) = 5 = 6 - 1 = \#(h) - 1$. Neste caso $\{x,y\} \subseteq k\$u$.

Caso II : $(x \; y) = (0 \; 2)$. Então $g = h (0 \; 2) = (0 \; 3)(1 \; 2) (4 \; 5 \; 6)(7 \; 8)(9)(10)$. Portanto $\#(g) = 5 = 6 - 1 = \#(h) - 1$. Neste caso também $\{x,y\} \subseteq k\$u$.

Caso III : $(x \; y) = (3 \; 4)$. Então $g = h (3 \; 4) = (0 \; 1 \; 2 \; 3 \; 5 \; 6 \; 4)(7 \; 8)(9)(10)$. Portanto $\#(g) = 7 = 6 + 1 = \#(h) + 1$. Neste caso não existe $u \in C_k(h)$ com $\{x,y\} \subseteq k\$u$.

Caso IV : $(x \; y) = (8 \; 9)$. Então $g = h (8 \; 9) = (0 \; 1 \; 2 \; 3) (4 \; 5 \; 6)(7 \; 8 \; 9)(10)$. Portanto $\#(g) = 7 = 6 + 1 = \#(h) + 1$. Neste caso também não existe $u \in C_k(h)$ com $\{x,y\} \subseteq k\$u$.

Caso V : $(x \; y) = (9 \; 10)$. Então $g = h (9 \; 10) = (0 \; 1 \; 2 \; 3) (4 \; 5 \; 6)(7 \; 8)(9 \; 10)$. Portanto $\#(g) = 7 = 6 + 1 = \#(h) + 1$.

Finalmente, neste caso também não existe $u \in C_k(h)$ com $\{x,y\} \subseteq k\$u$. □

Segundo [10], o seguinte teorema e sua demonstração é devido a Augustin Cauchy.

1.13 - Teorema: Sejam $1 < k \in \omega$ e $\delta \in S_k$. Sejam $T_1, T_2, \ldots, T_m$ transposições de k tais que $\delta = T_1 T_2 \ldots T_m$. Então o inteiro $\#(\delta) + m$ é par.

Demonstração: Seja $n = \#(\delta)$. Pelo lema 1.11 existem transposições $t_1, t_2, \ldots, t_n$ em k tais que $\delta = t_1 t_2 \ldots t_n$. Segue que $id\restriction k = \delta \delta^{-1} = t_1 t_2 \ldots t_n (T_1 T_2 \ldots T_m)^{-1} = t_1 t_2 \ldots t_n T_m^{-1} \ldots T_2^{-1} T_1^{-1}$ $= t_1 t_2 \ldots t_n T_m \ldots T_2 T_1$. Aplicando o lema 1.12 m vezes, segue que $0 = \#(id\restriction k) = \#(t_1 t_2 \ldots t_n T_m \ldots T_2 T_1) = \#(\delta) + (\pm 1 \ldots \pm 1)$ onde a última expressão entre parênteses tem exatamente m termos. Entretanto, já que (-1) e 1 são inteiros ímpares, a paridade do somatório nos referidos parênteses é a mesma que a paridade de m. Já que $n + m = 0$ e que 0 é um inteiro par, inferimos que a paridade de m é a mesma do que a de n. O teorema segue. □

1.14 - Definição: Seja $1 < k \in \omega$. Então A_k denota o conjunto $\{ \delta : \delta \in S_k$ e δ é par$\}$. Este conjunto é conhecido como grupo alternado.

1.15 - Proposição: Seja $1 < k \in \omega$. Então $|A_k| = |S_k|/2 = k!/2$.

Demonstração: Seja $\psi : A_k \to S_k - A_k$ definida por $\psi : \delta \mapsto \delta (x \; y)$, onde $\delta \in A_k$ e onde $\{x,y\} \subseteq k$ com $x \neq y$.

Se $\psi(\delta) = \psi(g)$ então $\delta (x \; y) = g (x \; y)$ e portanto $\delta = \delta (x \; y)(x \; y) = g (x \; y)(x \; y) = g$. Mostramos assim que ψ é injetiva.

É claro que $Dom(\psi) = A_k$ e $Rng(\psi) \subseteq S_k - A_k$. Mas , se $h \in S_k - A_k$, então $g \in A_k$ quando $g = h\ (\ x\ y\ )$ e temos que $\psi(g) = h$. Segue-se que $Rng(\psi) = S_k - A_k$.

Concluimos que $\psi : A_k \to S_k - A_k$ é uma bijeção e portanto que $|A_k| = |S_k - A_k|$. Segue-se que $k! = |S_k| = |A_k| + |S_k - A_k| = 2\,|A_k|$ e portanto que $|A_k| = k!/2$. □

É fácil ver que A_k é subgrupo de S_k . Segue por [5 ; Lema 2.24] que A_k é subgrupo normal de S_k .

Pelo lema 1.11 e pelo teorema 1.13 , temos que , se $\{\beta,\gamma\} \subseteq S_k - A_k$ então $\beta\gamma \in A_k$; também se $\beta \in A_k$ e $\gamma \in S_k - A_k$ então $\{\beta\gamma\ ,\ \gamma\beta\} \subseteq S_k - A_k$.

1.16 - Lema: Sejam $0 < k \in \omega$ e $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ tais que n e k são relativamente primos entre si . Então existe uma permutação cíclica $\beta \in S_k$ tal que $\beta^n = c_k$. Além disso a permutação c_k^n é cíclica .

Demonstração: [14 ; Lema 1.7]

Daqui em diante Σ denota um alfabeto fixo , finito e arbitrário { A , B , C , ... } . Designaremos por $F(\Sigma)$ ao grupo livre das palavras finitas no alfabeto Σ . Os elementos de $F(\Sigma)$, denominados palavras , serão anotados por letras gregas minúsculas .

A letra ϕ denotará o conjunto vazio e também a palavra vazia com a seguinte propriedade $\alpha\,\phi = \alpha = \phi\,\alpha$ para toda palavra α .

Uma palavra α chama-se trivial se e somente se não houver repetição de letras na soletração de α .

Uma palavra $\beta \neq \phi$ é denominada segmento de $\alpha \in F(\Sigma)$ se e somente se $\alpha = \lambda\ \beta\ \delta$ para algum $\{\lambda, \delta\} \subseteq F(\Sigma)$. A palavra β é dita segmento a direita (segmento a esquerda) de α se e somente se $\alpha = \lambda\ \beta$ ($\alpha = \beta\ \lambda$) para algum $\lambda \in F(\Sigma)$.

Para uma palavra α, o comprimento será denotado por $|\alpha|$. Há alguma ambigüidade à respeito da expressão $|\alpha|$, já que as α serão elementos de um grupo livre, em que identificamos duas palavras α e β, escrevendo $\alpha = \beta$, não somente quando α e β tem as mesmas soletrações, mas também quando elas tem uma redução comum que acabam com segmentos da forma $\gamma\ \gamma^{-1}$. Então a expressão $|\alpha|$ denota o comprimento da palavra β reduzida tal que $\alpha = \beta$; isto é, $|\alpha|$ denota n quando $\beta = L_1^{\xi(1)}\ L_2^{\xi(2)} \ldots L_n^{\xi(n)}$, com $\xi(i) \in \{-1, 1\}$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, e quando $L_i \neq L_{i+1}$ sempre que $0 < i < n$.

Seja $\alpha \in F(\Sigma) - \{\phi\}$. Seja S um semigrupo e seja $x \in S$. Diremos que α representa x em S, e anotaremos $(\alpha \dagger x)S$, se existe um homomorfismo $H : F(\Sigma) \to S$ tal que $H(\alpha) = x$. Denominaremos α universal para S se e somente se $(\alpha \dagger x)S$ para todo $x \in S$. Quando α é universal para S escreveremos $(\alpha \dagger\dagger S)$ ou que α é S-universal.

Todos os nossos resultados estão relacionados com palavras da forma $B^n A^m$ ou da forma $A^j B^n A^m$ para n, m e j inteiros não nulos.

Seja M uma família de semigrupos. Diremos que α é M-universal se e somente se α é X-universal para todo $X \in M$. Diremos que α é finitamente M-universal, e anotaremos FM-universal se e somente se α é X-universal para todo X finito perten-

cente a M , e α é infinitamente M-universal , e anotaremos IM-universal , se e somente se α é X-universal para todo X infinito , pertencente a M .

Definiremos agora as famílias que são de interesse principal neste trabalho .

Seja X um conjunto . Chamaremos qualquer função $f \subseteq X \times X$ de transformação parcial de X . Se g é uma transformação parcial de X tal que $Dom(g) = X$, então g chama-se uma transformação de X .

A expressão $Prt(X)$ denota o monóide de toda transformação parcial de X . A expressão ${}^{X}X$ denota o monóide de toda transformação de X . É claro que S_X é um subgrupo do monóide ${}^{X}X$ e que ${}^{X}X$ é um submonóide do monóide $Prt(X)$.

Prt denota a família (classe) de todo $Prt(Y)$ para Y um conjunto .

Myc denota a família (classe) de todo ${}^{Y}Y$ para Y um conjunto .

Sym denota a família (classe) de todo S_Y para Y um conjunto .

Alt denota a família $\{ A_k : 0 < k \in \omega \}$. Para $0 < n \in \omega$ a expressão n-Alt denota a família $\{ A_k : n \leq k \in \omega \}$.

Seja $f \in A_k$ e seja $\{ m , n \} \subseteq \mathbb{Z}$. Então a equação $f = x^n y^m$ sempre tem solução $\langle x , y \rangle \in A_k^2$ quando $k \in \{ 1 , 2 \}$, já que $A_1 = \{ id \mapsto 1 \}$ e $A_2 = \{ id \mapsto 2 \}$.

Seja $f = (\ 0\ \ 1\ \ 2\ ) \in A_k$ *e sejam os inteiros* $n \neq 0$ *e* $m \neq 0$ *ambos divisíveis por três . Então a equação* $f = x^n y^m$ *não tem solução em* A_k *quando* $k \in \{\ 3\ ,\ 4\ \}$.

*Portanto , nosso interesse principal no presente trabalho fi*ca com a *família* 5-Alt .

CAPÍTULO II - HISTÓRICO

O assunto é uma parte aparentemente nova de um assunto velho : Dado um grupo G (ou , mais geralmente , monóide G) e uma palavra $\alpha (L_1 , L_2 , \ldots , L_n)$ nas n letras distintas $L_1 , L_2 , \ldots , L_n$, para quais $a \in G$ existe uma substituição $L_i \mapsto x_i$ de $\{ L_1 , L_2 , \ldots , L_n \}$ em G tal que $a = \alpha (x_1 , x_2 , \ldots , x_n)$.

A parte aparentemente nova apareceu depois de 1960 com algumas perguntas do Jan Mycielski :

(1) Quais palavras são Myc-universais ?

(2) Se uma palavra α é FMyc-universal então α é Myc-universal ?

(3) Se uma palavra α é IMyc-universal então α é Myc-universal ?

(4) Existe uma palavra α não trivial tal que α pode ser mostrada que é Myc-universal com um argumento que não depende do Axioma de Escolha ?

(5) Se existe um conjunto infinito X tal que se α é universal para ${}^{X}X$, então α é IMyc-universal ?

Foi o Mycielski que chamou esta parte nova de " problema de termos * universais " : Universais , obviamente , no sentido que , em uma dada classe F de monóides , a equação $a = \alpha$ sempre tem solução em G quando $a \in G \in F$.

(*) Em todo o nosso trabalho nós nos interessamos em " termos de uma única variável " ; isto é , em palavras . Por isso , humildemente falaremos de " palavras universais " , quando não houver violação da terminologia de outros autores .

O primeiro artigo lançado foi [6] de J. R. Isbell , em 1966 . Ele respondeu negativamente aos problemas (2) e (3) mencionados anteriormente .

No referido artigo apenas mencionou os problemas (4) e (5) , e comentou que seus resultados mostram que o problema (1) já é difícil para palavras da forma B^nA^m . Os principais resultados do Isbell são :

2.01 - Teorema: Se $\alpha \neq \phi$ não é da forma $\alpha = \beta\,\gamma\,\beta$ para $\beta \neq \phi$, então α é ${}^{X}X$-universal para todo conjunto X infinito .

2.02 - Teorema: Seja n potência de primo . Seja $k \in \omega - 1$ e seja $f \in {}^{k}k$. Então existem $g \in {}^{k}k$ e uma involução $h \in {}^{k}k$ tais que $f = g^n\, h$.

Isbell também mostrou que as palavras BA^2BA e BAB^2A são FMyc-universais , e perguntou se elas são Myc-universais .

Outros artigos foram publicados sobre o assunto depois de 1970 . Eles incluem trabalhos de A. Ehrenfeucht , D. Pigozzi , D. M. Silberger , G. F. McNulty , J. Malitz , M. Weems , S. Fajtlowicz , e W. Taylor . Alguns destes artigos são tratados em [14] , e vamos resumir aqui , principalmente aqueles que são , aparentemente , do assunto específico em que ficam os nossos resultados originais do capítulo III .

Em [9] e [11] encontram-se melhoramentos em duas direções do teorema 2.01 do Isbell , resumidos em [14] . Em [3] e [4] encontram-se melhoramentos do teorema 2.02 do Isbell .

O seguinte teorema encontra-se em [3] .

2.03 - Teorema: Seja n um inteiro positivo tendo fator primo menor p . Seja m o maior inteiro tal que 2^m é fator de n . Então as seguintes afirmações são eqüivalentes :

i) $2^{m+1} < p$

ii) Para cada $k \in \omega$ e para cada $f \in {}^k k$ existem $g \in {}^k k$ e uma involução h em k tais que $f = g^n h$.

O teorema principal de [11] tem o seguinte enunciado :

2.04 - Teorema: Se para toda função f, injetiva e conexa como grafo direto , a equação $f = \alpha(x_1 , \ldots , x_n)$ tem solução $< x_1 , \ldots , x_n > \in (Prt (Dom(f) \cup Rng(f)))^n$, então a palavra α é Prt-universal .

É fácil ver que se uma palavra α é universal para $Prt(X)$ então α é universal para ${}^X X$. Assim , fortemente Prt-universal implica Myc-universal . Se o recíproco vale é problema aberto desde 1973 . As palavras AB^2A^2 e A^2B^2A são FMyc-universais , mas não são universais nem para ${}^\omega \omega$ e nem para $Prt(3)$.

Quando $n > 1$, então $S(n)$ denota o menor fator primo de n , e $M(n)$ denota o menor múltiplo comum dos inteiros $2 , 3 , \ldots , n$.

O resultado [4 ; Teorema 1.1] é um melhoramento do teorema 2.2 . Ainda , [4 ; Teorema 1.1] fica mais forte em [4 ; Teorema 2.10] , que é o seguinte :

2.05 - Teorema: Sejam m e n inteiros , com $n > 1 < m$. Então as seguintes afirmações são eqüivalentes :

1. Nem $M(S(n))$ é fator de m, nem $M(S(n))$ é fator de n.

2. As palavras B^nA^m e A^mB^n são Prt-universais.

3. As palavras B^nA^m e A^mB^n são Myc-universais.

4. As palavras B^nA^m e A^mB^n são Sym-universais.

Quando a condição 2.05.1 for satisfeita pelos inteiros n e m nós diremos que o par ordenado $< n,m >$ é par de Ehrenfeucht. O teorema 2.05 diz que B^nA^m é FSym-universal se e somente se o par $< n,m >$ é de Ehrenfeucht, já que [4 ; Teorema 4.3] diz que para n e m inteiros não nulos quaisquer a equação $s = x^n y^m$ tem solução $< x,y > \in S^2_{\mathbb{Z}}$ onde s é a permutação cíclica $i \mapsto i + 1$ de $\mathbb{Z}$.

Assim, fica natural perguntar se a condição 2.05.1 é equivalente à afirmação B^nA^m é Alt-universal ? Além disso, em geral, quais são as condições em que B^nA^m é Alt-universal ?

Citaremos a seguir alguns artigos onde aparecem resultados e perguntas abertas sobre o assunto.

Em 1951 [7], N. Ito publicou uma demonstração mostrando que $ABA^{-1}B^{-1}$ é 5-Alt-universal.

Em 1979 [1], encontra-se a seguinte proposição 2(iii) :

" Se α é uma palavra reduzida a qual tem duas letras tal que cada uma delas aparece exatamente uma vez com um expoente não divisível por três, então α é universal para cada A_k com $k = 1, 2, \ldots$, onde A_k é o grupo alternado ".

Na demonstração da proposição acima foi escrito exatamente

o seguinte : " it is enough to show that every even permutation is of the form pq , where $p^3 = q^3 =$ identity which again is easy " .

Nós apresentamos esta demonstração no teorema 3.08 , com auxílio dos lemas 3.05 , 3.06 e 3.07 .

Em 1980 [8] , Roger C. Lyndon disse que é fácil mostrar diretamente que cada elemento do grupo alternado A_n , $n > 4$, é o produto dos quadrados de dois elementos de A_n . Isto é , a equação $x^2y^2 = a$ tem solução para cada $a \in A_n$ com $n > 4$.

No teorema 3.03 , D. M. Silberger generalizou este resultado ; isto é , sejam m e n inteiros positivos , então a equação $a = x^{2^n} y^{2^m}$ tem solução $\langle x, y \rangle \in A_k^2$ para cada $a \in A_k$ com $k = 1 , 2 , \ldots$

Ainda neste mesmo artigo Lyndon faz cinco perguntas das quais duas são respondidas pelo nosso teorema principal 3.14 . As perguntas assim respondidas são :

(1) " What is the smallest k_0 such that every element of A_n , $n > 4$, is a product of k_0 cubes ? "

(2) " Is every element of A_n , $n > 4$, a product of fifth powers ? A product of a bounded number of fifth powers ? "

As respostas para ambas as perguntas é dois .

CAPÍTULO III - RESULTADOS PRINCIPAIS

3.01 - Preliminares: Neste capítulo, k denota inteiro maior do que dois, e δ denota elemento arbitrário de A_k.

Para algum $r \in \omega$ a permutação δ tem exatamente r componentes cíclicas distintas $g_1, g_2, \ldots, g_r$ cujos comprimentos são ímpares. Também, δ tem exatamente t componentes cíclicas distintas $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_t$ cujos comprimentos são pares, para algum $t \in \omega$. Assim, $|C_k(\delta)| = r + t$, e $\delta = g_1\, g_2 \ldots g_r\, \delta_1\, \delta_2 \ldots \delta_t$. Desde que $id \vdash k$ não incomoda, vamos supor que $r + t > 0$.

Observamos, para qualquer inteiro positivo j, que $(0\ 1\ 2 \ldots j\text{-}2\ j\text{-}1\ j) = (0\ j)(0\ j\text{-}1)(0\ j\text{-}2) \ldots (0\ 2)(0\ 1)$.

Portanto $g_i \in A_k$ sempre que $1 \leqslant i \leqslant r$, e que $\delta_i \in S_k - A_k$ sempre que $1 \leqslant i \leqslant t$. Segue que $g_1\, g_2 \ldots g_r \in A_k$. Entretanto $\delta_1\, \delta_2 \ldots \delta_t = g_r^{-1} \ldots g_2^{-1}\, g_1^{-1}\, \delta \in A_k$. Inferimos que $t = 2s$ para algum $s \in \omega$. Deste modo $\delta_{2i-1}\, \delta_{2i} \in A_k$ sempre que $1 \leqslant i \leqslant s$.

3.02 - Lema: Seja X um conjunto arbitrário. Seja o conjunto $\{u, v\} \subseteq S_X$, onde u e v são ciclos de comprimento n e m respectivamente e onde o conjunto $\{u, v\}$ é dcp. Então existem ciclos u' e v' em X tais que $uv = u'v'$ e tais que u' é um $(n+1)$-ciclo e v' é um $(m+1)$-ciclo.

Demonstração: Sejam $u = (x_0\ x_1 \ldots x_{n-1})$ e $v = (y_0\ y_1 \ldots y_{m-1})$. Se definirmos $u' = (x_0\ y_0\ x_1 \ldots x_{n-1})$ e $v' = (x_0\ y_0\ y_1 \ldots y_{m-1})$, as condições do lema ficam satisfeitas. □

O seguinte resultado é devido ao D. M. Silberger.

3.03 - Teorema: Seja $\{ m, n \} \subseteq \omega$. Então a palavra $B^{2^n} A^{2^m}$ é Alt-universal.

Demonstração: Pelo lema 1.16, para cada i com $1 \leqslant i \leqslant r$, existe um ciclo d_i em k tal que $k\$d_i = k\$g_i$ e tal que $d_i^{2^n} = g_i$. Sejam $b_g = d_1 d_2 \ldots d_r$ e $a_g = id \restriction k$. É claro que $g_1 g_2 \ldots g_r = b_g^{2^n} a_g^{2^m}$, já que o conjunto $\{ d_1, d_2, \ldots, d_r \}$ é dcp. Também $\{ a_g, b_g \} \subseteq A_k$ e $k\$a_g \cup k\$b_g = k\$(g_1 g_2 \ldots g_r)$.

Pelo lema 3.02, para cada inteiro i com $1 \leqslant i \leqslant s$, existem ciclos h_i e $\tilde{h}_i$ em k tais que $\lceil h_i \rceil = \lceil \delta_{2i-1} \rceil + 1$ e $\lceil \tilde{h}_i \rceil = \lceil \delta_{2i} \rceil + 1$, tais que $k\$h_i \cup k\$\tilde{h}_i = k\$\delta_{2i-1} \cup k\$\delta_{2i} = k\$\delta_{2i-1}\delta_{2i}$, e tais que $\delta_{2i-1}\delta_{2i} = h_i \tilde{h}_i$. Segue que $\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_{2s} = h_1 \tilde{h}_1 h_2 \tilde{h}_2 \ldots h_s \tilde{h}_s$. Também, $\{ h_i, \tilde{h}_j \}$ é dcp sempre que $1 \leqslant j < i \leqslant s$. Portanto $\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_{2s} = h_1 h_2 \ldots h_s \tilde{h}_1 \tilde{h}_2 \ldots \tilde{h}_s$. Para cada i com $1 \leqslant i \leqslant s$ os ciclos h_i e $\tilde{h}_i$ são de comprimento ímpar; portanto, pelo lema 1.16 existem para cada i ciclos H_i e $\tilde{H}_i$ em k tais que $k\$H_i = k\$h_i$ e $k\$\tilde{H}_i = k\$\tilde{h}_i$, e tais que $H_i^{2^n} = h_i$ e $\tilde{H}_i^{2^n} = \tilde{h}_i$. Sejam $b_\delta = H_1 H_2 \ldots H_s$ e $a_\delta = \tilde{H}_1 \tilde{H}_2 \ldots \tilde{H}_s$. Observamos que os conjuntos $\{ H_1, H_2, \ldots, H_s \}$ e $\{ \tilde{H}_1, \tilde{H}_2, \ldots, \tilde{H}_s \}$ são dcp. Inferimos que $b_\delta^{2^n} a_\delta^{2^m} = H_1^{2^n} H_2^{2^n} \ldots H_s^{2^n} \tilde{H}_1^{2^m} \tilde{H}_2^{2^m} \ldots \tilde{H}_s^{2^m} = h_1 h_2 \ldots h_s \tilde{h}_1 \tilde{h}_2 \ldots \tilde{h}_s = \delta_1 \delta_2 \ldots \delta_{2s}$. Já que H_i e $\tilde{H}_i$ são ciclos de comprimento ímpar para cada i com $1 \leqslant i \leqslant s$, temos que $\{ a_\delta, b_\delta \} \subseteq A_k$. Finalmente, o conjunto $\{ a_g, b_\delta \}$ é dcp. Sejam $b = b_g b_\delta$ e $a = a_g a_\delta$. Então $\delta = b_g^{2^n} a_g^{2^m} b_\delta^{2^n} a_\delta^{2^m} = b_g^{2^n} b_\delta^{2^n} a_g^{2^m} a_\delta^{2^m}$. Mas os conjuntos $\{ b_g, b_\delta \}$ e $\{ a_g, a_\delta \}$ também são dcp. Portanto $\delta = (b_g b_\delta)^{2^n} (a_g a_\delta)^{2^m} = b^{2^n} a^{2^m}$. Já que $\{ b_g, b_\delta, a_g, a_\delta \} \subseteq A_k$, temos também que $\{ a, b \} \subseteq A_k$. □

3.04 - Teorema: Seja $\{ m, n \} \subseteq \omega$. Então a palavra $B^{2^m} A^{2n+1}$ é Alt-universal.

Demonstração: Pelo lema 1.16, para cada i com $1 \leqslant i \leqslant r$, exis-

te um ciclo d_i em k tal que $k\$d_i = k\$g_i$ e tal que $d_i^{2^m} = g_i$. Sejam $b_g = d_1\, d_2 \ldots d_r$ e $a_g = id \restriction k$. É claro que $g_1\, g_2\, g_3 \ldots g_r = b_g^{2^m}\, a_g^{2n+1}$, já que o conjunto $\{ d_1, d_2, \ldots, d_r \}$ é dcp. Além disso, $\{ a_g, b_g \} \subseteq A_k$ e $k\$b_g \cup k\$a_g = k\$(g_1\, g_2 \ldots g_r)$.

Para cada inteiro j com $1 \leq j \leq 2s$, temos que $\delta_j = (x_1\ x_2 \ldots x_{2n-1}\ x_{2n})$. Então $\delta_j = (x_1\ x_2 \ldots x_{2n-1})(x_{2n-1}\ x_{2n})$. Fazendo $h_j = (x_1\ x_2 \ldots x_{2n-1})$, temos que $\lfloor h_j \rfloor$ é ímpar e conseqüentemente que $h_j \in A_k$; e fazendo $\tilde{h}_j = (x_{2n-1}\ x_{2n})$, temos que $\tilde{h}_j$ é uma transposição e que $\tilde{h}_j \in S_k - A_k$. Observamos que $k\$h_j \cup k\$\tilde{h}_j = k\$\delta_j$ e que $\delta_j = h_j\, \tilde{h}_j$. Segue que $\delta_1\, \delta_2 \ldots \delta_{2s} = h_1\, \tilde{h}_1\, h_2\, \tilde{h}_2 \ldots h_{2s}\, \tilde{h}_{2s}$. Ainda, o conjunto $\{ h_i, \tilde{h}_j \}$ é dcp sempre que $1 \leq j < i \leq 2s$. Portanto $\delta_1\, \delta_2 \ldots \delta_{2s} = h_1\, h_2 \ldots h_{2s}\, \tilde{h}_1\, \tilde{h}_2 \ldots \tilde{h}_{2s}$. Como h_j é um ciclo de comprimento ímpar com $1 \leq j \leq 2s$, temos que existe, pelo lema 1.16, um ciclo H_j em k tal que $H_j^{2^m} = h_j$ e tal que $k\$H_j = k\$h_j$. Sejam $b_\delta = H_1\, H_2 \ldots H_{2s}$ e $a_\delta = \tilde{h}_1\, \tilde{h}_2 \ldots \tilde{h}_{2s}$. Observamos que os conjuntos $\{ H_1, H_2, \ldots, H_{2s} \}$ e $\{ \tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \ldots, \tilde{h}_{2s} \}$ são dcp e concluímos que $b_\delta^{2^m}\, a_\delta^{2n+1} = H_1^{2^m}\, H_2^{2^m} \ldots H_{2s}^{2^m}\, \tilde{h}_1^{2n+1}\, \tilde{h}_2^{2n+1} \ldots \tilde{h}_{2s}^{2n+1} = h_1\, h_2 \ldots h_{2s}\, \tilde{h}_1\, \tilde{h}_2 \ldots \tilde{h}_{2s} = \delta_1\, \delta_2 \ldots \delta_{2s}$. Já que H_j é um ciclo de comprimento ímpar para cada j com $1 \leq j \leq 2s$ e que $\tilde{h}_1\, \tilde{h}_2 \ldots \tilde{h}_{2s}$ é uma involução em k com exatamente $2s$ componentes, temos que $\{ a_\delta, b_\delta \} \subseteq A_k$. Finalmente, o conjunto $\{ a_g, b_\delta \}$ é dcp. Sejam $b = b_g\, b_\delta$ e $a = a_g\, a_\delta$. Então $\delta = b_g^{2^m}\, a_g^{2n+1}\, b_\delta^{2^m}\, a_\delta^{2n+1} = b_g^{2^m}\, b_\delta^{2^m}\, a_g^{2n+1}\, a_\delta^{2n+1}$. Todavia, os conjuntos $\{ b_g, b_\delta \}$ e $\{ a_g, a_\delta \}$ também são dcp. Portanto $\delta = (b_g\, b_\delta)^{2^m}\, (a_g\, a_\delta)^{2n+1} = b^{2^m}\, a^{2n+1}$. Já que $\{ b_g, b_\delta, a_g, a_\delta \} \subseteq A_k$ temos também que $\{ a, b \} \subseteq A_k$. □

3.05 - Lema: Sejam $n \in \omega - 1$ e $k = 2n + 1$. Então existem permutações pares a e b em k tal que $c_k = b\, a$ e tal que $b^3 = a^3 = id \restriction k$.

Demonstração: Temos três casos a considerar.

Caso I : n é par e maior do que dois .

Fazendo $b = (\ 0\ \ 1\ \ 2\ )(\ 3\ \ 4\ \ 2n-1\ )(\ 5\ \ 6\ \ 2n-3\ )\ \ldots\ (\ n-5\ \ n-4\ \ n+7\ )(\ n-3\ \ n-2\ \ n+5\ )(\ n-1\ \ n\ \ n+3\ )$ *e* $a = (\ n\ \ n+1\ \ n+2\ )(\ n-2\ \ n+3\ \ n+4\ )(\ n-4\ \ n+5\ \ n+6\ )\ \ldots\ (\ 6\ \ 2n-5\ \ 2n-4\ )(\ 4\ \ 2n-3\ \ 2n-2\ )(\ 2\ \ 2n-1\ \ 2n\ )$, *temos que* $c_k = b\,a$ *e que* $b^3 = a^3 = id \vdash k$. *Além disso , ambas a e b possuem exatamente* $\frac{n}{2}$ *ciclos de comprimento três .*

Caso II : n é ímpar e maior do que um .

Fazendo $b = (\ 0\ \ 1\ \ 2\ )(\ 3\ \ 4\ \ 2n-1\ )(\ 5\ \ 6\ \ 2n-3\ )\ \ldots\ (\ n-4\ \ n-3\ \ n+6\ )(\ n-2\ \ n-1\ \ n+4\ )(\ n\ \ n+1\ \ n+2\ )$ *e* $a = (\ n-1\ \ n+2\ \ n+3\ )(\ n-3\ \ n+4\ \ n+5\ )(\ n-5\ \ n+6\ \ n+7\ )\ \ldots\ (\ 6\ \ 2n-5\ \ 2n-4\ )(\ 4\ \ 2n-3\ \ 2n-2\ )(\ 2\ \ 2n-1\ \ 2n\ )$, *temos que* $c_k = b\,a$ *e que* $b^3 = a^3 = id \vdash k$. *Além disso , b possui exatamente* $\frac{n+1}{2}$ *ciclos de comprimento três , enquanto a possui exatamente* $\frac{n-1}{2}$ *ciclos de comprimento três .*

Casos triviais :

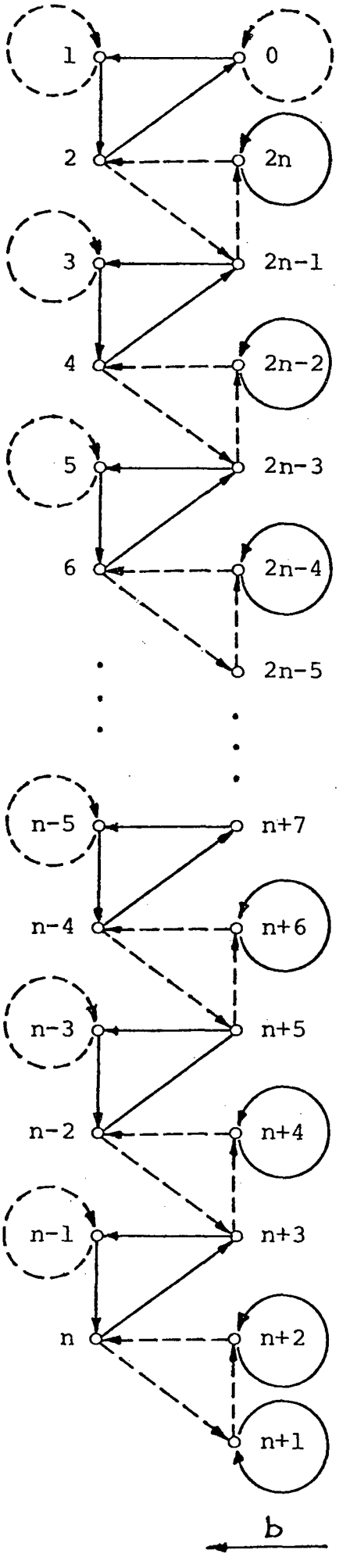
i) $n = 1$. *Portanto* $c_k = (\ 0\ \ 1\ \ 2\ )$. *Então com* $b = (\ 0\ \ 1\ \ 2\ )$ *e* $a = id \vdash k$, *o lema fica satisfeito .*

ii) $n = 2$. *Portanto* $c_k = (\ 0\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ ) = (\ 0\ \ 1\ \ 2\ )(\ 2\ \ 3\ \ 4\ )$. *Então com* $b = (\ 0\ \ 1\ \ 2\ )$ *e* $a = (\ 2\ \ 3\ \ 4\ )$, *o lema fica satisfeito .* □

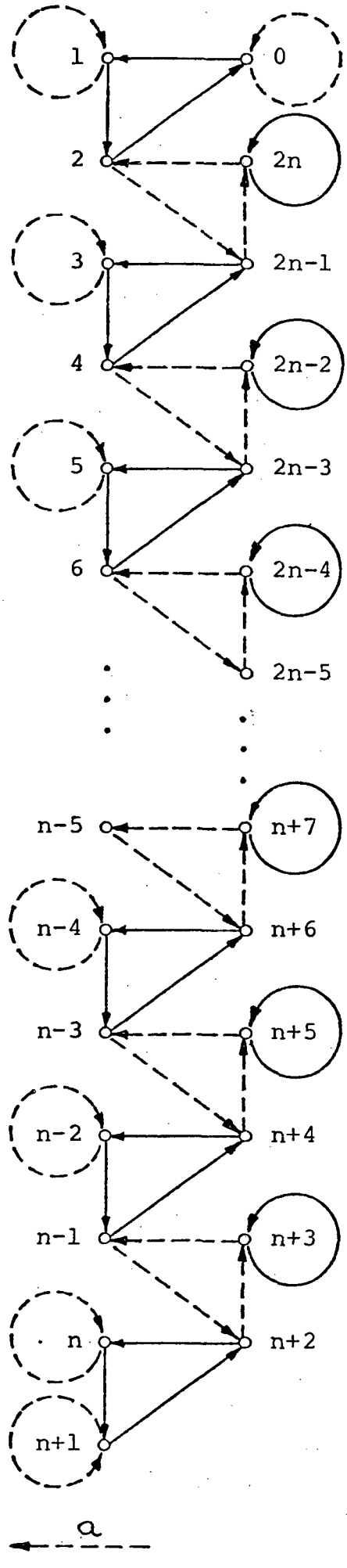
Observação : Queremos salientar que na demonstração anterior as construções das permutações a e b do conjunto $k = 2n+1$ *tais que* $(\ 0\ \ 1\ \ 2\ \ldots\ k-1\ ) = b\,a$, *mostra que* $b\,(\ k-1\ ) = k-1$ *e que* $a\,(0) = 0$, *quando* $n > 2$.

Observe este fato no próximo diagrama , que mostra as referidas construções .

caso I



caso II



3.06 - Lema: Seja β com exatamente duas componentes cíclicas g e h, ambas de comprimento par. Então existem permutações pares a e b em k tais que $\beta = b\,a$ e tais que $b^3 = a^3 = id \upharpoonright k$.

Demonstração: Sejam $g = (0\ 1\ \ldots\ 2n-1)$ e $h = (2n\ 2n+1\ \ldots\ 2m-1)$, onde $\{ n, m \} \subseteq \omega - 1$, onde $n < m$ e onde $2m-1 < k > 3$. Portanto $\beta = (0\ 1\ \ldots\ 2n-1)(2n\ 2n+1\ \ldots\ 2m-1)$. As próximas operações são fáceis de serem entendidas.

$\beta = (0\ 1\ \ldots\ 2n-2)(2n-2\ 2n-1)(2n\ 2n+1)(2n+1\ 2n+2\ \ldots\ 2m-1)$

$\beta = (2n-2\ 0\ 1\ \ldots\ 2n-3)(2n\ 2n+1)(2n-2\ 2n-1)(2n+2\ \ldots\ 2m-1\ 2n+1)$.

É claro que as duas componentes cíclicas $(2n-2\ 0\ 1\ \ldots\ 2n-3)$ e $(2n+2\ \ldots\ 2m-1\ 2n+1)$ de β tem comprimento ímpar. Então pelo lema anterior existem permutações p, p', q e q' tais que $(2n-2\ 0\ 1\ \ldots\ 2n-3) = p\,p'$, tais que $(2n+2\ \ldots\ 2m-1\ 2n+1) = q\,q'$, tais que as componentes cíclicas de cada uma destas quatro permutações são ou de comprimento um ou de comprimento três, tais que $k\$p \cup k\$p' \subseteq 2n-1$ e tais que $k\$q \cup k\$q' \subseteq \{ 2n+1, 2n+2, \ldots, 2m-1 \}$. Portanto $\beta = p\,p'\,(2n\ 2n+1)(2n-2\ 2n-1)\,q\,q'$. Pela observação imediatamente antes do diagrama anterior podemos afirmar que as permutações p, p', q e q' foram construídas de tal modo que $p'(2n-2) = 2n-2$ e que $q(2n+1) = 2n+1$. Segue que o conjunto $\{ p', (2n\ 2n+1), (2n-2\ 2n-1), q \}$ é dcp. Assim temos que $\beta = p\,q\,(2n\ 2n+1)(2n-2\ 2n-1)\,p'\,q'$. Ainda $\beta = p\,q\,(2n\ 2n+1)(2n\ 2n-1)(2n\ 2n-1)(2n-2\ 2n-1)\,p'\,q' = p\,q\,(2n-1\ 2n+1\ 2n)(2n-2\ 2n\ 2n-1)\,p'\,q'$. Fazendo $b = p\,q\,(2n-1\ 2n+1\ 2n)$ e $a = (2n-2\ 2n\ 2n-1)\,p'\,q'$, observamos que ambos os conjuntos $\{ p, q, (2n-1\ 2n+1\ 2n) \}$ e $\{ p', q', (2n-2\ 2n\ 2n-1) \}$ são dcp. Portanto temos que $\beta = b\,a$ e que $b^3 = a^3 = id \upharpoonright k$. □

3.07 - Lema: Seja $\beta \in A_k$. Então existe $\{ a, b \} \subseteq A_k$ tal que $\beta = b\,a$ e tal que $b^3 = a^3 = id \upharpoonright k$.

Demonstração: Seja $G = g_1\, g_2 \ldots g_r$. Então $G \in A_k$. Para cada i com $1 \leq i \leq r$ temos pelo lema 3.05 que existe $\{ p_i , \tilde{p}_i \} \subseteq A_k$ tal que $p_i^3 = \tilde{p}_i^3 = id \vdash k$, tal que $k\$p_i \cup k\$\tilde{p}_i = k\$g_i$ e tal que $g_i = p_i\, \tilde{p}_i$. Assim $G = p_1\, \tilde{p}_1\, p_2\, \tilde{p}_2 \ldots p_r\, \tilde{p}_r$. Portanto, já que $\{ p_n , \tilde{p}_m \}$ é dcp sempre que $n \neq m$, temos que $G = p_1\, p_2 \ldots p_r\, \tilde{p}_1\, \tilde{p}_2 \ldots \tilde{p}_r$. Fazendo $g_G = p_1\, p_2 \ldots p_r$ e $h_G = \tilde{p}_1\, \tilde{p}_2 \ldots \tilde{p}_r$ temos que $G = g_G\, h_G$ e que $\{ g_G , h_G \} \subseteq A_k$. Mas, já que $\{ p_1 , p_2 , \ldots , p_r \}$ é dcp, temos também que $g_G^3 = id \vdash k$. Semelhantemente, $h_G^3 = id \vdash k$.

Seja $F = \delta_1\, \delta_2 \ldots \delta_{2s}$. Então $F \in A_k$. Para cada j com $1 \leq j \leq s$, temos pelo lema 3.06 que existe $\{ q_j , \tilde{q}_j \} \subseteq A_k$ tal que $q_j^3 = \tilde{q}_j^3 = id \vdash k$, tal que $k\$q_j \cup k\$\tilde{q}_j = k\$\delta_{2j-1}\, \delta_{2j}$, e tal que $\delta_{2j-1}\, \delta_{2j} = q_j\, \tilde{q}_j$. Assim $F = q_1\, \tilde{q}_1\, q_2\, \tilde{q}_2 \ldots q_s\, \tilde{q}_s$. Já que $\{ q_n , \tilde{q}_m \}$ é dcp sempre que $n \neq m$, temos que $F = q_1\, q_2 \ldots q_s\, \tilde{q}_1\, \tilde{q}_2 \ldots \tilde{q}_s$. Fazendo $g_F = q_1\, q_2 \ldots q_s$ e $h_F = \tilde{q}_1\, \tilde{q}_2 \ldots \tilde{q}_s$ temos que $F = g_F\, h_F$, e que $\{ g_F , h_F \} \subseteq A_k$. Mas, já que $\{ q_1 , q_2 , \ldots , q_s \}$ é dcp, claramente $g_F^3 = id \vdash k$. Semelhantemente, $h_F^3 = id \vdash k$.

Segue que $\delta = G\, F = g_G\, h_G\, g_F\, h_F$, e assim que $\delta = g_G\, g_F\, h_G\, h_F$ já que $\{ h_G , g_F \}$ é dcp. Porém os conjuntos $\{ g_G , g_F \}$ e $\{ h_G , h_F \}$ também são dcp. Fazendo $b = g_G\, g_F$ e $a = h_G\, h_F$, temos que $\delta = b\, a$ e que $b^3 = a^3 = id \vdash k$. □

O seguinte teorema é eqüivalente a [1 ; Proposição 2(iii)]; veja o nosso capítulo II.

3.08 - *Teorema:* Sejam m e n números inteiros tais que mn e 3 sejam relativamente primos entre si. Então a palavra $B^n A^m$ é Alt-universal.

Demonstração: Sai imediatamente do lema 3.07 □

Observação : *Este teorema implica imediatamente no teorema* 3.03 .

3.09 - *Definição*: *Seja* $0 < p \in \omega$ *e seja* $f \in S_k$. *Então* f *chama-se p-negociável se e somente se o comprimento de cada componente cíclica de* f *é uma potência de* p .

Observação : *O nosso lema* 3.07 *implica fortemente que , se* $f \in A_k$ *então existe* $\{ a , b \} \in A_k$ *tais que* $f = b\,a$ *e tais que ambas* a *e* b *são* 3*-negociáveis* .

Agora demonstraremos uma seqüência de afirmações a fim de mostrar que cada elemento em A_k *é produto de dois elementos* 2*-negociáveis em* A_k .

3.10 - *Lema*: *Sejam* $n \in \omega - 2$ *e* $k = 2n+1$. *Então existe* $\{ a , b \} \subseteq A_k$ *tal que* a *e* b *são* 2*-negociáveis e tal que* $c_k = b\,a$. *Além disso , existe* $\{ a' , b' \} \subseteq S_k - A_k$ *tal que* a' *e* b' *são* 2*-negociáveis e tal que* $c_k = b'\,a'$.

Demonstração: *Seja* $h = \prod_{i=1}^{n} (i \;\; k-i)$, *isto é , que* h *é o produto* $(1 \;\; 2n)(2 \;\; 2n-1)(3 \;\; 2n-2) \ldots (n-2 \;\; n+3)(n-1 \;\; n+2)(n \;\; n+1)$ *de exatamente* n *transposições , com o conjunto* $\{ (i \;\; k-i) : 1 \leqslant i \leqslant n \}$ *dcp e assim que* h *é uma involução do conjunto* k . *Segue que* $c_k = c_k\,h\,h$. *Observamos que* $c_k\,h = (0 \;\; 1)(2 \;\; 2n)(3 \;\; 2n-1) \ldots (n-2 \;\; n+4)(n-1 \;\; n+3)(n \;\; n+2)$ *também é uma involução do conjunto* k *com exatamente* n *componentes cíclicas* . *Se* n *for par , então definimos* $b = c_k\,h$ *e* $a = h$, *e observamos que* $\{ a , b \} \subseteq A_k$, *que* a *e* b *são* 2*-negociáveis e que* $c_k = b\,a$. *Se* n *for ímpar , então definimos* $b' = c_k\,h$ *e* $a' = h$, *e notamos que* $\{ a' , b' \} \subseteq S_k - A_k$, *que* a' *e* b' *são* 2*-negociáveis e que* $c_k = b'\,a'$.

Seja $g = \prod_{i=2}^{n} (i \; k\text{-}i)$, isto é, que g é o produto $(2 \; 2n\text{-}1)(3 \; 2n\text{-}2)(4 \; 2n\text{-}3) \ldots (n\text{-}2 \; n\text{+}3)(n\text{-}1 \; n\text{+}2)(n \; n\text{+}1)$ de exatamente $n\text{-}1$ transposições, com o conjunto $\{ (i \; k\text{-}i) : 1 < i \leqslant n \}$ dcp e assim que g é uma involução do conjunto k. Seja $d = (0 \; 1 \; 2 \; 2n)(3 \; 2n\text{-}1)(4 \; 2n\text{-}2) \ldots (n\text{-}2 \; n\text{+}4)(n\text{-}1 \; n\text{+}3)(n \; n\text{+}2)$. Observamos que d possui exatamente $n\text{-}1$ componentes cíclicas e que todas são de comprimento potência de dois. É claro que $c_k = d\, g$. Se n for par, então definimos $a' = g$ e $b' = d$, e notamos que $\{ a', b' \} \subseteq S_k \text{-} A_k$, que as permutações a' e b' são 2-negociáveis e que $c_k = b'\, a'$. Se n for ímpar, definimos $b = d$ e $a = g$ e reparamos que $\{ a, b \} \subseteq A_k$, que a e b são 2-negociáveis e que $c_k = b\, a$. □

3.11 - Lema: Sejam $n \in \omega \text{-} 1$ e $k = 2n$. Então existem $b \in A_k$ e $a \in S_k \text{-} A_k$, ambas 2-negociáveis, tal que $c_k = b\, a$. Além disso, existem $b' \in S_k \text{-} A_k$ e $a' \in A_k$, ambas também 2-negociáveis, tal que $c_k = b'\, a'$.

Demonstração: Seja $h = \prod_{i=1}^{n} (i \; k\text{-}i)$, isto é, que h é o produto $(1 \; 2n\text{-}1)(2 \; 2n\text{-}2)(3 \; 2n\text{-}3) \ldots (n\text{-}3 \; n\text{+}3)(n\text{-}2 \; n\text{+}2)(n\text{-}1 \; n\text{+}1)$ de exatamente $n\text{-}1$ componentes cíclicas, com o conjunto $\{ (i \; k\text{-}i) : 0 < i < n \}$ dcp e assim que h é uma involução do conjunto k. Temos que $c_k = c_k\, h\, h$ e que $c_k = h\, h\, c_k$. Observamos que $c_k\, h = (0 \; 1)(2 \; 2n\text{-}1)(3 \; 2n\text{-}2) \ldots (n\text{-}2 \; n\text{+}3)(n\text{-}1 \; n\text{+}2)(n \; n\text{+}1)$ e que $h\, c_k = (0 \; 2n\text{-}1)(1 \; 2n\text{-}2)(2 \; 2n\text{-}3) \ldots (n\text{-}3 \; n\text{+}2)(n\text{-}2 \; n\text{+}1)(n\text{-}1 \; n)$. Assim, $c_k\, h$ e $h\, c_k$ são involuções de k, e cada uma dessas permutações tem exatamente n componentes 2-ciclos. É claro que h, $c_k\, h$ e $h\, c_k$ são 2-negociáveis. Se n for par, então definimos $b = c_k\, h$ e $a = h$, e reparamos que $b \in A_k$, que $a \in S_k \text{-} A_k$ e que $c_k = b\, a$; também se n for par, definimos $b' = h$ e $a' = h\, c_k$, e notamos que $b' \in S_k \text{-} A_k$, que $a' \in A_k$ e que $c_k = b'a'$. Se n for ímpar, então definimos $b = h$ e $a = h\, c_k$, e observa-

mos que $b \in A_k$, que $a \in S_k - A_k$ e que $c_k = b\,a$; também se n for ímpar, definimos $b' = c_k\,h$ e $a' = h$, e notamos que $b' \in S_k - A_k$, que $a' \in A_k$ e que $c_k = b'\,a'$. □

3.12 - Corolário: Seja β com exatamente duas componentes cíclicas g e h, ambas de comprimento par. Então existem permutações a, b, a' e b', todas 2-negociáveis tais que $\beta = b\,a = b'\,a'$ enquanto $\{ a, b \} \subseteq A_k$ e $\{ a', b' \} \subseteq S_k - A_k$.

Demonstração: Pelo lema 3.11, existe $\{ b_g, b_h, a'_h \} \subseteq A_k$ e existe $\{ a_g, a_h, b'_h \} \subseteq S_k - A_k$, tais que b_g, b_h, b'_h, a_g, a_h e a'_h são 2-negociáveis, tais que $g = b_g\,a_g$, tais que $h = b_h a_h = b'_h a'_h$, tais que $k\$b_g \cup k\$a_g = k\$g$ e tais que $k\$b_h \cup k\$a_h = k\$b'_h \cup k\$a'_h = k\$h$. Portanto $\beta = g\,h = b_g\,a_g\,b_h\,a_h$ e semelhantemente $\beta = b_g\,a_g\,b'_h\,a'_h$. Entretanto, ambos os conjuntos $\{ a_g, b_h \}$ e $\{ a_g, b'_h \}$ são dcp; segue que $\beta = b_g\,b_h\,a_g\,a_h$, e também que $\beta = b_g\,b'_h\,a_g\,a'_h$. Fazendo $b = b_g\,b_h$, $a = a_g\,a_h$, $b' = b_g\,b'_h$ e $a' = a_g\,a'_h$, temos que $\{ a, b \} \subseteq A_k$, e que $\{ a', b' \} \subseteq S_k - A_k$ e que $\beta = b\,a = b'\,a'$. Todavia a, a', b e b' são 2-negociáveis, já que todos os conjuntos $\{ b_g, b_h \}$, $\{ a_g, a_h \}$, $\{ b_g, b'_h \}$ e $\{ a_g, a'_h \}$ são dcp. □

3.13 - Lema: Seja $k > 4$. Então existe $\{ g, h \} \subseteq A_k$ tal que g e h são 2-negociáveis e tal que $\beta = g\,h$.

Demonstração: Temos dois casos a considerar.

Caso 1: $\lfloor g_i \rfloor > 3$ sempre que $1 \leq i \leq r$.

Seja $G = g_1\,g_2 \ldots g_r$. Então $G \in A_k$. Para cada i com $1 \leq i \leq r$ temos pelo lema 3.10 que existe $\{ b_i, b'_i \} \subseteq A_k$ tal que b_i e b'_i são 2-negociáveis, tal que $k\$b_i \cup k\$b'_i \subseteq k\$g_i$, e tal que $g_i = b_i\,b'_i$. Assim $G = b_1\,b'_1\,b_2\,b'_2 \ldots b_r\,b'_r$. Portanto, já que $\{ b_n, b'_m \}$ é dcp sempre que $m \neq n$, temos que $G = b_1\,b_2 \ldots b_r\,b'_1\,b'_2\,b'_3 \ldots b'_r$. Fazendo $g_G = b_1\,b_2 \ldots b_r$ e $h_G = b'_1\,b'_2 \ldots b'_r$ temos

que $G = g_G\, h_G$ e que $\{ g_G, h_G \} \subseteq A_k$. Mas, já que o conjunto das permutações 2-negociáveis $\{ b_1, b_2, \ldots, b_r \}$ é dcp, temos também que g_G é 2-negociável. Semelhantemente h_G também é 2-negociável.

Seja $F = \delta_1\, \delta_2 \ldots \delta_{2s}$. Então $F \in A_k$. Para cada j com $1 \leq j \leq s$, temos pelo corolário 3.12 que existe $\{ a_j, a'_j \} \subseteq A_k$ tal que a_j e a'_j são 2-negociáveis, tal que $k\$a_j \cup k\$a'_j = k\$\delta_{2j-1}\, \delta_{2j}$, e tal que $\delta_{2j-1}\, \delta_{2j} = a_j\, a'_j$. Assim $F = a_1\, a'_1\, a_2\, a'_2 \ldots a_s\, a'_s$. Portanto, já que $\{ a_n, a'_m \}$ é dcp sempre que $m \neq n$, temos que $F = a_1\, a_2 \ldots a_s\, a'_1\, a'_2 \ldots a'_s$. Fazendo $g_F = a_1\, a_2 \ldots a_s$ e $h_F = a'_1\, a'_2 \ldots a'_s$ temos que $F = g_F\, h_F$, e que $\{ g_F, h_F \} \subseteq A_k$. Mas, já que $\{ a_1, a_2, \ldots, a_s \}$ é um conjunto dcp das permutações 2-negociáveis, temos também que g_F é 2-negociável. Semelhantemente h_F também é 2-negociável.

Resumindo, temos que $\delta = G\, F = g_G\, h_G\, g_F\, h_F$, e assim que $\delta = g_G\, g_F\, h_G\, h_F$ já que $\{ h_G, g_F \}$ é dcp. Porém os conjuntos $\{ g_G, g_F \}$ e $\{ h_G, h_F \}$ também são dcp, e portanto as permutações $g_G\, g_F$ e $h_G\, h_F$ são 2-negociáveis. Definimos $g = g_G\, g_F$ e $h = h_G\, h_F$, e observamos que $\{ g, h \} \subseteq A_k$, e também que $\delta = g\, h$.

Caso II : Existe i tal que $|g_i| = 3$.

Temos neste caso seis situações a considerar.

Situação 1 : $\delta = (\ 0\ 1\ 2\ )(\ 3\ )(\ 4\ ) \in A_k$. Então $\delta = (\ 0\ 1\ )(\ 1\ 2\ )(\ 3\ 4\ )(\ 3\ 4\ )$, e portanto $\delta = (\ 0\ 1\ )(\ 3\ 4\ )(\ 1\ 2\ )(\ 3\ 4\ )$, e o lema fica satisfeito quando $g = (\ 0\ 1\ )(\ 3\ 4\ )$ e $h = (\ 1\ 2\ )(\ 3\ 4\ )$.

Situação 2 : $\delta = (\ 0\ 1\ 2\ )(\ 3\ 4\ 5\ ) \in A_k$. Então $\delta = (\ 0\ 1\ )(\ 1\ 2\ )(\ 3\ 4\ )(\ 4\ 5\ ) = (\ 0\ 1\ )(\ 3\ 4\ )(\ 1\ 2\ )(\ 4\ 5\ )$, e o lema fica satisfeito quando $g = (\ 0\ 1\ )(\ 3\ 4\ )$ e $h = (\ 1\ 2\ )(\ 4\ 5\ )$.

Situação 3 : $\delta = (\ 0\ 1\ 2\ )(\ 3\ 4\ 5\ )(\ 6\ 7\ 8\ ) \in A_k$. Então $\delta = (\ 0\ 1\ )(\ 1\ 2\ )(\ 3\ 4\ )(\ 4\ 5\ )(\ 6\ 7\ )(\ 7\ 8\ ) = (\ 0\ 1\ )(\ 3\ 4\ )(\ 6\ 7\ )(\ 1\ 2\ )(\ 4\ 5\ )(\ 7\ 8\ ) = (\ 0\ 1\ )(\ 3\ 4\ )(\ 6\ 7\ )(\ 2\ 5\ )(\ 2\ 5\ )(\ 1\ 2\ )$

$(4 \ 5)(7 \ 8) = (0 \ 1)(3 \ 4)(6 \ 7)(2 \ 5)(1 \ 5 \ 4 \ 2)(7 \ 8)$, e o lema fica satisfeito quando $g = (0 \ 1)(3 \ 4)(6 \ 7)(2 \ 5)$ e $h = (1 \ 5 \ 4 \ 2)(7 \ 8)$.

Situação 4 : $r > 3$ e $\beta = g_1 g_2 \ldots g_r \in A_k$, onde cada componente cíclica g_i é de comprimento três .

Suponhamos primeiro que r seja par ; isto é, $r = 2p$ para algum inteiro $p > 1$. Então empregando o estratagema da situação 2 , temos para cada j com $1 \leq j \leq p$ que existe $\{ h_j , h'_j \} \subseteq A_k$, com h_j e h'_j 2-negociáveis , e com $k\$h_j \cup k\$h'_j = k\$g_{2j-1} \cup k\$g_{2j} = k\$g_{2j-1}\ g_{2j}$, tal que $g_{2j-1}\ g_{2j} = h_j\ h'_j$. Então , já que $\{ h_n , h'_m \}$ é dcp sempre que $m \neq n$, temos agora que $\beta = g_1 g_2 \ldots g_{2p} = h_1 h'_1 h_2 h'_2 \ldots h_p h'_p = h_1 h_2 \ldots h_p h'_1 h'_2 \ldots h'_p$. Como ambos os conjuntos $\{ h_j : 1 \leq j \leq p \}$ e $\{ h'_j : 1 \leq j \leq p \}$ são dcp , temos que $h_1 h_2 \ldots h_p$ e $h'_1 h'_2 \ldots h'_p$ são 2-negociáveis . Sejam $g = h_1 h_2 \ldots h_p$ e $h = h'_1 h'_2 \ldots h'_p$. Observamos que $\{ g , h \} \subseteq A_k$ e que $\beta = g\ h$. Isto é , g e h satisfazem o lema quando r for par .

Suponhamos segundo que r seja ímpar ; isto é , $r = 2p+1$ para algum inteiro $p > 1$. Sejam $G = g_1 g_2 \ldots g_{2p-2}$ e $H = g_{2p-1}\ g_{2p}\ g_{2p+1}$. Raciocinando como no parágrafo anterior, conseguimos permutações u_1 e u_2 2-negociáveis tais que $\{ u_1 , u_2 \} \subseteq A_k$, tais que $k\$u_1 \cup k\$u_2 \subseteq k\$G$ e tais que $G = u_1\ u_2$. Empregando o estratagema da situação 3 , conseguimos permutações v_1 e v_2 2-negociáveis , tais que $\{ v_1 , v_2 \} \subseteq A_k$, tais que $k\$v_1 \cup k\$v_2 \subseteq k\$H$ e tais que $H = v_1\ v_2$. Observando que o conjunto $\{ u_2 , v_1 \}$ é dcp , temos agora que $\beta = G\ H = u_1\ u_2\ v_1\ v_2 = u_1\ v_1\ u_2\ v_2$. Sejam $g = u_1\ v_1$ e $h = u_2\ v_2$. Já que os conjuntos $\{ u_1 , v_1 \}$ e $\{ u_2 , v_2 \}$ são dcp , segue-se que g e h são 2-negociáveis . É óbvio também que $\{ g , h \} \subseteq A_k$. Assim notamos que as funções g e h também satisfazem o lema quando r for ímpar .

Situação 5 : $r = 2$ e $g_1 = (\ 0\ 1\ 2\ )$ e g_2 tem comprimento $2p+1 > 3$. Pelo lema 3.10 existe $\{ u, v \} \subseteq S_k - A_k$ tal que u e v são 2-negociáveis, tal que $k\$u \cup k\$v = k\$g_2$ e tal que $g_2 = u\ v$. Segue que $\delta = g_1\ g_2 = (\ 0\ 1\ 2\ )\ u\ v = (\ 0\ 1\ )(\ 1\ 2\ )\ u\ v = (\ 0\ 1\ )\ u\ (\ 1\ 2\ )\ v$. Sejam $g = (\ 0\ 1\ )\ u$ e $h = (\ 1\ 2\ )\ v$. Notamos que g e h satisfazem o lema.

Situação 6 : $\delta = g_1\ \delta_1\ \delta_2$, onde $g_1 = (\ 0\ 1\ 2\ )$. Pelo corolário 3.12, existe $\{ u, v \} \subseteq S_k - A_k$ tal que u e v são 2-negociáveis, tal que $k\$u \cup k\$v \subseteq k\$\delta_1 \cup k\$\delta_2 = k\$\delta_1\ \delta_2$ e tal que $\delta_1\ \delta_2 = u\ v$. Segue que $\delta = (\ 0\ 1\ 2\ )\ u\ v = (\ 0\ 1\ )(\ 1\ 2\ )\ u\ v = (\ 0\ 1\ )\ u\ (\ 1\ 2\ )\ v$. Observamos que o lema fica satisfeito quando $g = (\ 0\ 1\ )\ u$ e $h = (\ 1\ 2\ )\ v$. □

3.14 - *Teorema:* Seja $4 < k \in \omega$. Sejam m e n números inteiros ímpares. Seja $\delta \in A_k$. Então a equação $\delta = x^n\ y^m$ tem solução $\langle x, y \rangle \in A_k^2$.

Demonstração: Pelo lema 3.13 existe $\{ g, h \} \in A_k$ tal que $\delta = g\ h$ e tal que g e h são 2-negociáveis. Portanto existem x e y tais que $k\$x = k\$g$ e $k\$y = k\$h$, tais que $x \simeq g$ e $y \simeq h$ e tais que $x^n = g$ e $y^m = h$. É claro que $\{ x, y \} \subseteq A_k$ e que $\delta = x^n\ y^m$. □

CAPÍTULO IV - PERGUNTAS ABERTAS

Em função dos teoremas 3.08 e 3.14 há motivo para acreditar que o problema de caracterizar todos os ternos $< m , n , k >$ para os quais a palavra $B^n A^m$ é universal para A_k pode logo ficar resolvido .

Pergunta chave : Para $k \in \omega - 3$, para p e q números inteiros maiores do que um , com $p < k > q$, e para $f \in A_k$, será que existe $\{ x , y \} \subseteq A_k$ tal que x é p-negociável e y q-negociável e tal que $f = x\ y$?

Observamos que para responder a pergunta chave basta mostrar que a resposta é sim para p e q números primos .

Nos lemas 3.07 e 3.13 mostramos que a pergunta chave tem uma resposta afirmativa para $< p , q > = < 3 , 3 >$ e para $< p , q > = < 2 , 2 >$ respectivamente . Acreditamos numa resposta afirmativa para $< p , q > = < 5 , 5 >$ também .

Observamos que , se a pergunta chave tem resposta afirmativa , então a seguinte afirmação é imediata : A palavra $B^n A^m$ é universal para A_k se existem primos $p \leqslant k$ e $q \leqslant k$ tais que n e p sejam relativamente primos entre si e tais que m e q também o sejam .

Isto não é claramente " se e somente se " talvez , mas muito próximo , por causa da seguinte proposição .

4.01 - Proposição: Seja $\{ m , n , k \} \subseteq \omega - 2$ tal que o menor múltiplo comum dos inteiros $2 , 3 , \ldots , k$ é fator de (m , n) , isto é , máximo divisor comum dos números m e n . Então para cada f S_k a equação $f = x^n y^m$ tem solução $< x , y > \in S_k^2$ se e somente

se $f = id \vdash k$.

Demonstração: Certamente $id \vdash k = (id \vdash k)^n (id \vdash k)^m$. Para demonstrar o recíproco , observamos que se $g \in S_k$, então cada componente cíclica de g tem comprimento que é fator de m e n simultâneamente . Portanto $\{ x , y \} \subseteq S_k$ implica que $x^n y^m = id \vdash k$. □

Vimos que a proposição 4.01 nega fortemente a universalidade da palavra $B^n A^m$ para A_k .

Será que existe uma condição mais fraca que a anterior para negar a universalidade da palavra $B^n A^m$ para A_k ?

Será que a palavra $B^n A^m$ é universal para A_k somente se existirem primos $p \leq k$ e $q \leq k$ tais que $(m , p) = (n , q) = 1$?

REFERÊNCIAS

1 - EHRENFEUCHT, A.; FAJTOLOWICZ, S.; MALITZ, J.; MYCIELSKI, J. Some problems on the universality of words in groups. Algebra Universalis, 11:261-3, 1980.

2 - EHRENFEUCHT, A. & SILBERGER, D. M. Universal and point universal terms. Bull. de l'Academie Polonaise des Sciences, 24(6):399-402, 1976.

3 - EHRENFEUCHT, A. & SILBERGER, D. M. Decomposing a transformation with an involution. Algebra Universalis, 7:179-90, 1977.

4 - EHRENFEUCHT, A. & SILBERGER, D. M. Universal terms of the form $B^n A^m$. Algebra Universalis, 10:96-116, 1980.

5 - HERNSTEIN, I. N. Tópicos de Álgebra [Topics in Algebra]. São Paulo, Ed. Universidade e Polígono, 1970.

6 - ISBELL, J. R. On the problem of universal terms. Bull. de l'Academie Polonaise des Sciences, 14:593-5, 1966.

7 - ITO, N. A theorem on the alternating group A_n $(n \geq 5)$. Math. Japon., 2: 59-60, 1951.

8 - LYNDON, R. C. Equations in groups. Bol. Soc. Bras. Mat., 11:79 - 102, 1980.

9 - McNULTY, G. F. The decision for equational bases of algebras. Annals Math. Logic, 11:1-67, 1976.

10 - MOORE, J. T. Elements of abstract algebra. New York, MacMillan Company, 1967.

11 - SILBERGER, D. M. When is a term point universal? Algebra Universalis, 10:135-54, 1980.

12 - SILBERGER, D. M. When is the directed graph gf isomorphic to fg ? Pure and Applied Math. Sciences, (a ser publicado).

13 - SILBERGER, D. M. B^nA^m is universal iff point universal. Algebra Universalis, 12:335-42, 1981.

14 - VALENTE, M. L. Sobre a universalidade de palavras para grupos simétricos. Tese de mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, 1979.