

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
INSTITUTO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS  
DEPARTAMENTO DE FILOSOFIA

"VALORAÇÕES PARA ALGUNS SISTEMAS DE LÓGICA DO TEMPO"

CEZAR AUGUSTO MORTARI

Dissertação elaborada sob orientação  
do Prof. Dr. Oswaldo Porchat Pereira e  
apresentada como requisito para a obten-  
ção do grau de Mestre em Lógica e Filo-  
sofia da Ciência.

PRIMAVERA DE 1982

Empréstimo Proibido

AGUIÇÃO POR DOAÇÃO  
DOADO POR

1 e ABR. 1998

REGISTRO 4- 972.972.0  
DATA DO REGISTRO 12-04-98

U.F.S.C.  
BIBLIOTECA - ENTRADA  
Reg. N.º 3369  
10/01/98  
AGRADECIMENTOS  
UNICAMP  
0000

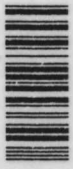
Aos colegas, professores, e todos aque-

les que, de uma ou de outra forma, contribuíram para  
que eu chegasse até aqui; aos amigos da "Turma do Fu-  
nil"; ao meu orientador, Prof. Dr. Osvaldo Pinchat Pe-  
nha, em especial, à Prof.ª Andréa M. Loparić, sem  
cuja paciência e amizade esta dissertação  
jamais teria sido levada a termo.

BU

Para meus pais,  
Dary e Maria Adelina.

C.A.M.



0.279.679-4

UFSC-BU

APRESENTAÇÃO

Capítulo 0: Introdução

1

PARTE I: CÁLCULOS TEMPORAIS

Capítulo I: O Cálculo  $K_t$

8

Capítulo II: O Cálculo  $K_m$

23

Capítulo III: O Cálculo  $K_r$

30

Capítulo IV: O Cálculo  $K_a$

36

Capítulo V: O Cálculo  $K_{c3}$

42

Capítulo VI: O Cálculo  $K_3$

53

AGRADECIMENTOS

PARTE II: CÁLCULOS MODAIS-TEMPORAIS

Capítulo VII: O Cálculo  $T-K_t$

68

Capítulo VIII: O Cálculo  $B-K_t$

75

PARTE III: DECIDIBILIDADE

Capítulo IX: A Decidibilidade de  $T-K_t$

81

PARTE IV: CONSIDERAÇÕES ETÍCAS

Capítulo X: Problemas Abertos

96

APÊNDICE

104

BIBLIOGRAFIA

107

Aos colegas, professores, e a todos aque-

les que, de uma ou de outra forma, contribuíram para

que eu chegasse até aqui; aos amigos da "Turma do Fu-

nil"; ao meu orientador, Prof. Dr. Oswaldo Porchat Pe-

reira; e, em especial, à Prof<sup>a</sup> Andréa M. Loparić, sem

cuja colaboração, paciência e amizade esta dissertação

jamais teria sido levada a termo.

C.A.M.

## APRESENTAÇÃO

APRESENTAÇÃO	v
Capítulo 0: Introdução	1
PARTE I: CÁLCULOS TEMPORAIS	
Capítulo I: O Cálculo $K_t$	8
Capítulo II: O Cálculo $K_m$	23
Capítulo III: O Cálculo $K_r$	30
Capítulo IV: O Cálculo $K_s$	36
Capítulo V: O Cálculo $K_c$	42
Capítulo VI: O Cálculo $K_3$	53
PARTE II: CÁLCULOS MODAIS-TEMPORAIS	
Capítulo VII: O Cálculo $T-K_t$	63
Capítulo VIII: O Cálculo $B-K_t$	75
PARTE III: DECIDIBILIDADE	
Capítulo IX: A Decidibilidade de $T-K_t$	81
PARTE IV: CONSIDERAÇÕES FINAIS	
Capítulo X: Problemas Abertos	98
APÊNDICE	104
BIBLIOGRAFIA	107

<sup>1</sup> Há diversos argumentos, pró e contra cada abordagem. Para uma boa discussão deles, v. Bentzen 1978.

<sup>2</sup> No decorrer deste trabalho, utilizaremos as expressões "sistema axiomático", "sistema" e "cálculo" como sinônimos.



## APRESENTAÇÃO

Ao se falar em "lógica do tempo", ou "lógica temporal", deve-se ter em mente que há duas maneiras de se entender a expressão. De acordo com uma corrente, a lógica do tempo - a "teoria lógica do tempo" - constituiria um ramo independente da lógica, tal como a lógica modal (i.e., uma extensão da lógica clássica, introduzindo-se novos operadores, ditos "intensionais"). Mas há outro ponto de vista, para o qual lógica do tempo seria uma aplicação do Cálculo de Predicados (com predicados para entidades temporais, como instantes ou momentos, e quantificação sobre essas entidades). A primeira abordagem pode ser chamada "prioreana" (ou "intensional"), devido à grande influência exercida por A.N. Prior em seu desenvolvimento; enquanto que a segunda seria dita "quineana", devendo-se isto, obviamente, a W. Quine. (Cf. Benthem 1978. V. também Lacey 1972.)<sup>1</sup>

Trabalharemos aqui com cálculos<sup>2</sup> temporais intensionais, limitando-nos ainda às linguagens proposicionais. Existe uma grande variedade destes cálculos: eles procuram codificar as inferências que são válidas caso supnhamos ter o tempo (i.e., a série dos momentos) uma tal ou qual estrutura (e.g., linear, densa, sem começo nem fim, etc.). É nesse sentido que falamos em "lógica do tempo linear" ou em "cálculo para tempo circular", e assim por

---

<sup>1</sup> Há diversos argumentos, pró e contra cada abordagem. Para uma boa discussão deles, v. Benthem 1978.

<sup>2</sup> No decorrer deste trabalho, utilizaremos as expressões "sistema axiomático", "sistema" e "cálculo" como sinônimos.

diante. verdade para operadores intensionais) em contrapartida, um modelo é

Todos esses sistemas podem ser obtidos a partir do cálculo proposicional clássico por adição à linguagem de novos operadores (intensionais) e de. Além disso, as semânticas de valorações geram fácil e imediatamente por acréscimo de postulados (ou seja, esquemas de axiomas e regras de inferências de decisão para os cálculos estudados - não através de quadros semânticos (método dos contra-exemplos), como é habitualmente feito em semânticas de Kripke, mas pela construção de tabelas de verdade generalizadas.

F: será o caso que ...

P: foi o caso que ...

G: será sempre o caso que ...

H: foi sempre o caso que ...<sup>3</sup>

Essa maneira de construir os cálculos temporais faz com que os mesmos tenham uma semelhança estrutural bastante acentuada com as lógicas modais. Não é de admirar, portanto, que disponhamos, para os cálculos temporais, de uma semântica de Kripke. (V. Rescher & Urquhart 1971; Landim 1974, 1980.) Tal é o modo usual de construir uma semântica para esses cálculos - além, é claro, das semânticas algébricas. Recentemente, contudo, foi apresentada uma nova semântica para cálculos modais: a chamada "semântica de valorações". (V. Loparić 1977.) Tomando-se como referência a semântica do cálculo proposicional clássico, verificamos que, nas semânticas de Kripke, é a noção de modelo que sofre uma profunda reformulação; as definições de verdade, mesmo para os operadores intensionais, são dadas da forma usual, i.e., em termos de condições necessárias e suficientes. As semânticas de valorações procedem de forma inversa: a novidade está na maneira de formular as condições.

---

<sup>3</sup> Existem cálculos que possuem operadores para o próximo momento, ou o momento anterior, ou o "sempre", o "às vezes", etc., mas não trataremos deles. O estudo que aqui se fará, contudo, pode ser facilmente aplicado a cálculos cuja linguagem contém tais operadores.

ções de verdade para operadores intensionais; em contrapartida, um modelo é apenas um "mundo", isto é, uma valoração. Não necessitamos aqui da noção de vários universos compostos de mundos ligados por uma relação de acessibilidade. Além disso, as semânticas de valorações geram fácil e imediatamente procedimentos de decisão para os cálculos estudados - não através de quadros semânticos (método dos contra-exemplos), como é habitualmente feito em semânticas de Kripke, mas pela construção de tabelas de verdade generalizadas.

Temos então aqui um dos propósitos deste trabalho: construir semânticas de valorações para sistemas de lógica temporal - e apresentar, também, um método de decisão a partir dessas semânticas.

a) uma lista enumerável de variáveis proposicionais (que aqui não é necessário especificar);  
 Poderíamos ainda examinar a relação entre sistemas modais e temporais, dada a semelhança estrutural acima mencionada. Uma das maneiras de entender as modalidades aléticas é pelo recurso ao tempo. Por exemplo, podemos dizer que algo é "possível" se "é ou será verdadeiro". Isto leva a uma prática bastante usual: a de introduzir nos cálculos temporais os operadores "necessário" e "possível" através de definições. Contudo, se dermos atenção a algumas considerações filosófico-metafísicas, que depois serão mencionadas, tal prática é um tanto insatisfatória - e essa insatisfação levou ao surgimento de vários novos cálculos, ditos "modais-temporais", onde tanto os operadores modais quanto os temporais são introduzidos primitivamente, por axiomas. Faremos neste trabalho uma breve apresentação desses sistemas, que por si só merecem um estudo aprofundado. Nosso interesse principal fica sendo o de elaborar uma semântica de valorações e um método de decisão para eles.

Seja  $L$  e  $(L_1, L_2)$ . Uma expressão de  $L$  é uma sequência finita de símbolos de  $L$ . Definamos então as fórmulas de  $L$ .

DEFINIÇÃO. 1) Uma variável proposicional é uma fórmula; 2) se  $A$  e  $B$  são fórmulas, e  $\neg$  é um operador unário,  $(A \wedge B)$  são fórmulas; 3) uma

pressão de  $L$  é uma fórmula *ssa*<sup>4</sup> a for em virtude de 1) ou 2).

0.4. Seja  $L \in \{L1, L2\}$ . 'FOR<sub>L</sub>' denota o conjunto das fórmulas de  $L$ .

Capítulo 0

INTRODUÇÃO

Usaremos as convenções de eliminação de parênteses (v. Shoenfield 1967, p.17). Em seqüências de um mesmo operador, os parênteses serão

eliminados por associação à direita. Parênteses tornados desnecessários pelas convenções poderão ser mantidos para facilitar a leitura. Nos cálculos apresentados neste trabalho, usaremos duas linguagens básicas:  $L1$  e  $L2$ .

Podemos acrescentar a  $L1$  os seguintes símbolos definidos:

0.1. A Linguagem  $L1$

$L1$  é formada pelos seguintes símbolos primitivos:

- a) uma lista enumerável de variáveis proposicionais (que aqui não é necessário especificar);
- b) operadores unários:
  - 1) (Def  $\neg$ )  $\neg A =_{df} \neg A$
  - 2) (Def  $\rightarrow$ )  $A \rightarrow B =_{df} (\neg A) \vee B$
  - 3) (Def  $\leftrightarrow$ )  $A \leftrightarrow B =_{df} (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
  - 4) (Def  $\forall$ )  $\forall x (A \vee B) =_{df} (\neg A \rightarrow B)$
  - 5) (Def  $\exists$ )  $\exists x (A \wedge B) =_{df} \neg \forall x (\neg A \vee \neg B)$
- c) operador binário:  $\rightarrow$
- d) parênteses - como símbolos auxiliares de pontuação: ( )

No restante desta Introdução, adotaremos a seguinte prática: trabalharemos com a linguagem  $L2$ , as definições aplicar-se-ão imediatamente a  $L1$ . Destacando o operador  $\neg$  e todo o que estiver relacionado com o mesmo.

0.2. A Linguagem  $L2$

$L2$  é formada acrescentando-se a  $L1$  o operador unário ' $L$ '.

Seja  $L \in \{L1, L2\}$ . Uma *expressão de  $L$*  é uma seqüência finita de símbolos de  $L$ . Definamos então as *fórmulas de  $L$* .

0.3. DEFINIÇÃO. 1) Uma variável proposicional é uma fórmula; 2) se  $A$  e  $B$  são fórmulas, e  $\phi$  é um operador unário,  $\phi A$  e  $(A \rightarrow B)$  são fórmulas<sup>4</sup>; 3) uma expressão é uma fórmula se e somente se for derivada de fórmulas por um conjunto finito de aplicações das regras de inferência. Nos cálculos apresentados neste trabalho, usaremos as seguintes convenções de notação: letras gregas maiúsculas denotarão conjuntos de fórmulas.

<sup>4</sup> Usaremos letras maiúsculas como variáveis metalinguísticas para

pressão de  $L$  é uma fórmula sse<sup>5</sup> o for em virtude de 1) ou 2).

tipos de regras de inferência.

0.4. Seja  $L \in \{L1, L2\}$ . 'FOR<sub>L</sub>' denota o conjunto das fórmulas de  $L$ .

0.5. Esquemas de Axiomas:

Usaremos as convenções usuais para eliminação de parênteses (v. Shoenfield 1967, p.17). Em seqüências de um mesmo operador, os parênteses serão eliminados por associação à direita. Parênteses tornados desnecessários pelas convenções poderão ser mantidos para facilitar a leitura.

2) Não-clássicos: a especificar em cada cálculo.

Podemos acrescentar a  $L1$  os seguintes símbolos definidos:

0.6. Regras de Inferência:

e) (Def  $\wedge$ )  $(A \wedge B) =_{df} \neg(A \rightarrow \neg B)$ ;

f) (Def  $\vee$ )  $(A \vee B) =_{df} (\neg A \rightarrow B)$ ;

g) (Def  $\leftrightarrow$ )  $(A \leftrightarrow B) =_{df} ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$ ;

h) (Def F)  $FA =_{df} \neg G \neg A$ ;

i) (Def P)  $PA =_{df} \neg H \neg A$ .

Acrescentamos a  $L2$  os símbolos definidos nos itens e) - i) acima, e mais:

j) (Def M)  $MA =_{df} \neg L \neg A$ .

No restante desta Introdução, adotaremos a seguinte prática: trabalharemos com a linguagem  $L2$ , e as definições aplicar-se-ão imediatamente a  $L1$ , bastando eliminar o operador 'L' e tudo o que estiver relacionado com o mesmo.

Como sabemos, um sistema axiomático  $S$  pode ser dado por um conjunto finito de postulados (esquemas de axiomas e regras de inferência). Nos cálcu

fórmulas. Letras gregas maiúsculas denotarão conjuntos de fórmulas.

<sup>5</sup> Usaremos 'sse' para abreviar 'se e somente se'.

los aqui estudados distinguiremos dois tipos de esquemas de axiomas e dois tipos de regras de inferência.

0.5. Esquemas de Axiomas:

1) Clássicos: A1.  $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

A2.  $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

A3.  $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B)$ .

2) Não-clássicos: a especificar em cada cálculo.

0.6. Regras de Inferência:

1) Regras de Dedução: A única regra de dedução será a de *modus ponens*.

$A, A \rightarrow B / B$  (MP)

2) Regras de Prova:

a)  $A / GA$  (RG)

b)  $A / HA$  (RH)

c)  $A / LA$  (regra de Gödel: N).

Cada cálculo, portanto, terá MP como regra de dedução, e uma ou mais regras de prova, que podem variar em cada caso.

0.7. DEFINIÇÃO. Seja S um sistema axiomático. Então:

a) Uma *prova em S* é uma seqüência  $A_1, \dots, A_n$  de fórmulas tal que, para  $1 \leq i \leq n$ ; i)  $A_i$  é um axioma de S; ou ii) há um  $j < i$  e um  $k < i$  tais que  $A_k = A_j \rightarrow A_i$ ; ou iii) há um  $j < i$  tal que  $A_i = \{A_j$  (onde  $\{ \in \{G, H, L\}$ );

b) Uma fórmula A é um *teorema de S* ( $\vdash_S A$ ) se existe uma prova  $A_1, \dots, A_n$  onde  $A_n = A$ . (Tal prova é chamada *prova de A em S*);

c)  $\not\vdash_S A$  sse não é o caso que  $\vdash_S A$ ;

d)  $\Gamma \vdash_S A$  (A é uma *consequência sintática de  $\Gamma$  em S*) se há uma seqüência



de fórmulas  $A_1, \dots, A_n$  tal que  $A_n = A$  e, para  $1 \leq i \leq n$ , i)  $A_i \in \Gamma$ ; ou ii)  $A_i$  é um axioma de  $S$ ; ou iii) há um  $j < i$  e um  $k < i$  tais que  $A_k = A_j \rightarrow A_i$ ; ou iv) há um  $j < i$  tal que  $A_i = \{A_j$  (onde  $\{ \in \{G, H, L\}$ ) e alguma subsequência de  $A_1, \dots, A_j$  é uma prova de  $A_j$ ;

e)  $\Gamma \not\vdash_S A$  sse não é o caso que  $\Gamma \vdash_S A$ .<sup>6</sup>

0.8. DEFINIÇÃO.  $B$  é uma *subfórmula* de  $A$  se: a)  $B = A$ ; ou b) para alguma subfórmula  $C$  de  $A$ , i)  $C = \{B$ , onde  $\{$  é um operador unário; ou ii) para algum  $D$ ,  $C = B \rightarrow D$  ou  $C = D \rightarrow B$ .

0.9. DEFINIÇÃO. Seja  $S$  um sistema axiomático.  $A_1, \dots, A_n$  é uma *sequência normal* (de  $S$ ) se, para  $1 \leq i \leq n$ ,

a) se  $B$  é uma subfórmula de  $A_i$  então existe  $j < i$  tal que  $B = A_j$ ;

b) se  $A_i = LA_k$ ,  $1 \leq k < i$ , então existe  $e < i$ ,  $j < i$  tais que  $A_e = GA_k$  e

$$A_j = HA_k;$$

c) para  $1 \leq i \leq j$ , se  $A_i = A_j$  então  $i = j$ .

Como foi mencionado no início deste trabalho, o objetivo principal é apresentar semânticas de valorações para alguns cálculos. Valorações (para um sistema  $S$  numa linguagem  $L$ ) serão funções de  $\text{FOR}_L$  no conjunto dos valores de verdade ( $\{0,1\}$ ) que satisfazem certas condições - condições essas que serão especificadas para cada cálculo.

Nosso procedimento consistirá em três etapas: primeiramente definiremos funções de  $\text{FOR}_L$  em  $\{0,1\}$  que respeitem as propriedades clássicas (extensionais) - chamá-las-emos "semi-valorações".

<sup>6</sup> Quando não houver risco de confusão, usaremos ' $\vdash$ ' ao invés de ' $\vdash_S$ '.

<sup>7</sup> A cláusula b) é obviamente vãua para cálculos cuja linguagem é  $L1$ .

0.10. DEFINIÇÃO. Seja  $S$  um sistema axiomático numa linguagem  $L$ . Uma *semi-valorção*  $s$  é uma função de  $FOR_L$  em  $\{0,1\}$  tal que:

- 1)  $s(-A) = 1$  sse  $s(A) = 0$ ;
- 2)  $s(A \rightarrow B) = 1$  sse  $s(A) = 0$  ou  $s(B) = 1$ .

0.15. LEMMA. Em seguida, para cada cálculo  $S$ , definiremos uma  $A_1, \dots, A_n$ -valorção para  $S$  - onde  $A_1, \dots, A_n$  é uma sequência normal de  $S$ .

Para as provas dos lemas 0.14 e 0.15, v. Loparić 1977.

Finalmente, o conceito de valorção para  $S$  é obtido da seguinte maneira:

Ao longo deste trabalho, usaremos algumas abreviações importantes,

que listamos a seguir.

0.11. DEFINIÇÃO. Seja  $S$  um cálculo.  $v$  é uma *valorção* para  $S$  se, para toda sequência normal  $A_1, \dots, A_n$ ,  $v$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valorção para  $S$ .

0.12. DEFINIÇÃO. Seja  $S$  um sistema axiomático para o qual já foram definidas valorções. Então:

- a)  $\models_S F$  sse para toda valorção  $v$  para  $S$ ,  $v(F) = 1$ ;
- b)  $\Gamma \models_S F$  sse para toda valorção  $v$  para  $S$ , se  $v(F') = 1$ , para toda  $F' \in \Gamma$ , então  $v(F) = 1$ .<sup>8</sup>

0.17. DEFINIÇÃO. Seja  $S$  um cálculo numa linguagem  $L$ ,  $A_1, \dots, A_n$  uma sequência normal de  $S$ . Definidas as valorções para um cálculo  $S$ , trataremos de provar teoremas de correção e completude. As provas de completude a serem efetuadas seguirão as vias habituais, usando as propriedades dos conjuntos  $F$ -saturados, cuja definição e propriedades damos a seguir. (Cf. Loparić 1977.)

Seja  $S$  um sistema qualquer.

0.13. DEFINIÇÃO.  $\Delta$  é um *conjunto F-saturado* se  $\Delta \not\vdash F$  e para toda  $F' \in \Delta$ ,  $\Delta \cup \{F'\} \vdash F$ .

<sup>8</sup> Quando não houver risco de confusão, usaremos ' $\models$ ' ao invés de ' $\models_S$ '.



0.14. LEMA. Se  $\Delta$  é um conjunto F-saturado,

- a)  $A \in \Delta$  sse  $\Delta \vdash A$ ;
- b)  $\neg A \in \Delta$  sse  $A \notin \Delta$ ;
- c)  $A \rightarrow B \in \Delta$  sse  $A \notin \Delta$  ou  $B \in \Delta$ .

0.15. LEMA: Se  $\Gamma \not\vdash F$ , há um conjunto F-saturado  $\Delta$  tal que  $\Gamma \subset \Delta$ .

Para as provas dos lemas 0.14 e 0.15, v. Loparić 1977.

### PARTE I

Ao longo deste trabalho, usaremos algumas abreviações importantes, que listamos a seguir.

### CÁLCULOS TEMPORAIS

0.16. DEFINIÇÃO. Seja  $\Gamma$  um conjunto de fórmulas,  $f$  uma função de um conjunto  $\Delta$ , contendo  $\Gamma$ , em  $\{0,1\}$  e  $\mathcal{S} \in \{G,H,L\}$ :

- 1)  $\Gamma^{\mathcal{S}} =_{df} \{F \in \Gamma : \text{para alguma } F', F = \mathcal{S}F'\}$ ;
- 2)  $\varepsilon(\Gamma^{\mathcal{S}}) =_{df} \{F : \mathcal{S}F \in \Gamma\}$ ;
- 3)  $f \models \Gamma =_{df}$  para toda  $F \in \Gamma$ ,  $f(F) = 1$ ;
- 4)  $\Gamma_{f,u} =_{df} \{F \in \Gamma : f(F) = u\}$ .

0.17. DEFINIÇÃO. Seja  $S$  um cálculo numa linguagem  $L$ ,  $A_1, \dots, A_n$  uma sequência normal de  $S$  e  $f, f'$  funções de  $\text{FOR}_L$  em  $\{0,1\}$ . Para  $1 \leq k \leq n$ , dizemos que:

- a)  $f(k)f'$  sse  $f' \models \varepsilon(\{A_1, \dots, A_k\}_{f,1}^G)$  e  $f \models \varepsilon(\{A_1, \dots, A_k\}_{f',1}^H)$ ;
- b)  $f(L,k)f'$  sse  $f' \models \varepsilon(\{A_1, \dots, A_k\}_{f,1}^L)$ .

## Capítulo I

### O CÁLCULO Kt

#### I.1. APRESENTAÇÃO

#### PARTE I

O Cálculo Kt, introduzido por Prior em 1955 (Cf. Prior 1967, p.176) procura enfeixar todas as inferências que são válidas quando não se faz suposição alguma sobre a natureza do tempo. Por esta razão, Kt é também chamado "básico" ou "minimal".<sup>3</sup>

A linguagem de Kt, bem como a de todos os cálculos temporais estudados nesta Parte I, é  $L_1$ .

Uma base axiomática para Kt é obtida adicionando-se aos esquemas de axiomas clássicos (A1 - A3) os seguintes esquemas não-clássicos:

$$A4. \quad G(A \rightarrow B) \rightarrow (GA \rightarrow GB)$$

$$A5. \quad H(A \rightarrow B) \rightarrow (HA \rightarrow HB)$$

$$A6. \quad \neg G\neg HA \rightarrow A$$

$$A7. \quad \neg H\neg GA \rightarrow A$$

As regras de prova de Kt são RG e RH. (A regra de dedução de todos os cálculos, como foi dito, é MP.)

Em Kt são esquemas de teoremas:

---

<sup>3</sup> V. Apêndice para uma relação de todos os cálculos considerados nesta dissertação.

- T1.  $PGA \rightarrow A, FHA \rightarrow A$
- T2.  $A \rightarrow GPA, A \rightarrow HFA$
- T3.  $G(A \rightarrow B) \wedge G(B \rightarrow A) \rightarrow (GA \leftrightarrow GB), H(A \rightarrow B) \wedge H(B \rightarrow A) \rightarrow (HA \leftrightarrow HB)$
- T4.  $G(A \wedge B) \leftrightarrow (GA \wedge GB), H(A \wedge B) \leftrightarrow (HA \wedge HB)$
- T5.  $G(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow G(A \rightarrow B) \wedge G(B \rightarrow A) \leftrightarrow H(A \rightarrow B) \wedge H(B \rightarrow A)$

Capítulo I

O CÁLCULO Kt

I.1. APRESENTAÇÃO

- T6.  $GA \rightarrow \neg F\neg A, HA \rightarrow \neg P\neg A$
- T6a.  $G\neg A \rightarrow \neg FA, H\neg A \rightarrow \neg PA$
- T6b.  $\neg GA \rightarrow F\neg A, \neg HA \rightarrow P\neg A$
- T6c.  $GGA \rightarrow \neg FF\neg A, HHA \rightarrow \neg PP\neg A$
- T6d.  $G\neg G\neg A \rightarrow \neg FFA, H\neg H\neg A \rightarrow \neg PPA$
- T6e.  $\neg GGA \rightarrow FF\neg A, \neg HHA \rightarrow PP\neg A$
- T6f.  $GF\neg A \rightarrow \neg FGA, HF\neg A \rightarrow \neg PHA$

O Cálculo Kt, introduzido por E.J. Lemmon em 1965 (Cf. Prior 1967,

p.176) procura enfeixar todas as inferências que são válidas quando não se faz suposição alguma sobre a natureza do tempo. Por esta razão, Kt é também chamado "básico" ou "minimal".<sup>9</sup>

A linguagem de Kt, bem como a de todos os cálculos temporais estudados nesta Parte I, é L1.  $\neg(FB), \neg(P(A \vee B)) \leftrightarrow (\neg PA \wedge \neg PB)$

Uma base axiomática para Kt é obtida adicionando-se aos esquemas de axiomas clássicos (A1 - A3) os seguintes esquemas não-clássicos:

- A4.  $G(A \rightarrow B) \rightarrow (GA \rightarrow GB)$
- A5.  $H(A \rightarrow B) \rightarrow (HA \rightarrow HB)$
- A6.  $\neg G\neg HA \rightarrow A$
- A7.  $\neg H\neg GA \rightarrow A$

As regras de prova de Kt são RG e RH. (A regra de dedução de todos os cálculos, como foi dito, é MP.)

Em Kt são esquemas de teoremas:

- T18.  $GA \rightarrow (PB \rightarrow F(A \rightarrow B)), HA \rightarrow (PB \rightarrow P(A \wedge B))$

<sup>9</sup> V. Apêndice para uma relação de todos os cálculos considerados nesta dissertação.

$$T1. \quad PGA \rightarrow A, \quad FHA \rightarrow A$$

$$T2. \quad A \rightarrow GPA, \quad A \rightarrow HFA$$

$$T3. \quad G(A \rightarrow B) \wedge G(B \rightarrow A) \rightarrow (GA \leftrightarrow GB), \quad H(A \rightarrow B) \wedge H(B \rightarrow A) \rightarrow (HA \leftrightarrow HB)$$

$$T4. \quad G(A \wedge B) \leftrightarrow (GA \wedge GB), \quad H(A \wedge B) \leftrightarrow (HA \wedge HB)$$

$$T5. \quad G(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow G(A \rightarrow B) \wedge G(B \rightarrow A), \quad H(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow H(A \rightarrow B) \wedge H(B \rightarrow A)$$

$$T6. \quad GA \rightarrow \neg F\neg A, \quad HA \rightarrow \neg P\neg A$$

$$T6a. \quad G\neg A \rightarrow \neg FA, \quad H\neg A \rightarrow \neg PA$$

$$T6b. \quad \neg GA \rightarrow F\neg A, \quad \neg HA \rightarrow P\neg A$$

$$T6c. \quad GGA \rightarrow \neg FF\neg A, \quad HHA \rightarrow \neg PP\neg A$$

$$T6d. \quad GG\neg A \rightarrow \neg FFA, \quad HH\neg A \rightarrow \neg PPA$$

$$T6e. \quad \neg GGA \rightarrow FF\neg A, \quad \neg HHA \rightarrow PP\neg A$$

$$T6f. \quad GF\neg A \rightarrow \neg FGA, \quad HP\neg A \rightarrow \neg PHA$$

$$T6g. \quad FG\neg A \rightarrow \neg GFA, \quad PH\neg A \rightarrow \neg HPA$$

$$T7. \quad \neg F(A \vee B) \leftrightarrow (\neg FA \wedge \neg FB), \quad \neg P(A \vee B) \leftrightarrow (\neg PA \wedge \neg PB)$$

$$T8. \quad F(A \vee B) \leftrightarrow (FA \vee FB), \quad P(A \vee B) \leftrightarrow (PA \vee PB)$$

$$T9. \quad G(A \rightarrow B) \rightarrow (FA \rightarrow FB), \quad H(A \rightarrow B) \rightarrow (PA \rightarrow PB)$$

$$T10. \quad (GA \vee GB) \rightarrow G(A \vee B), \quad (HA \vee HB) \rightarrow H(A \vee B)$$

$$T11. \quad F(A \wedge B) \rightarrow (FA \wedge FB), \quad P(A \wedge B) \rightarrow (PA \wedge PB)^{10}$$

$$T12. \quad G(\neg A \rightarrow A) \leftrightarrow GA, \quad H(\neg A \rightarrow A) \leftrightarrow HA$$

$$T13. \quad G(A \rightarrow \neg A) \leftrightarrow G\neg A, \quad H(A \rightarrow \neg A) \leftrightarrow H\neg A$$

$$T14. \quad G(B \rightarrow A) \wedge G(\neg B \rightarrow A) \leftrightarrow GA, \quad H(B \rightarrow A) \wedge H(\neg B \rightarrow A) \leftrightarrow HA$$

$$T15. \quad G(A \rightarrow B) \wedge G(A \rightarrow \neg B) \leftrightarrow G\neg A, \quad H(A \rightarrow B) \wedge H(A \rightarrow \neg B) \leftrightarrow H\neg A$$

$$T16. \quad GA \rightarrow G(B \rightarrow A), \quad HA \rightarrow H(B \rightarrow A)$$

$$T17. \quad G\neg A \rightarrow G(A \rightarrow B), \quad H\neg A \rightarrow H(A \rightarrow B)$$

$$T18. \quad GA \rightarrow (FB \rightarrow F(A \wedge B)), \quad HA \rightarrow (PB \rightarrow P(A \wedge B))$$

<sup>10</sup> As conversas de T10 e T11 não são teoremas de Kt.

$\forall B \rightarrow \forall A$ . Por MP,  $\forall \Gamma \vdash \forall A$ .

Algumas regras derivadas de Kt:

R1.  $A \leftrightarrow B / GA \leftrightarrow GB$

R2.  $A \leftrightarrow B / HA \leftrightarrow HB$

R3.  $A \rightarrow B / FA \rightarrow FB$

R4.  $A \rightarrow B / PA \rightarrow PB$

R5.  $A / FB \rightarrow F(A \wedge B)$

R6.  $A / PB \rightarrow P(A \wedge B)$

1.2.1. DEFINIÇÃO.  $v$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração (para Kt) se  $A$  é uma sequência normal de Kt e:

entre os operadores G e H. Ao longo desta dissertação, portanto, usaremos 'V' como uma variável metalinguística para 'G' e 'H', por comodidade, em definições ou provas que valem indiferentemente para os dois casos.

As seguintes propriedades valem para Kt.

I.1.1. Teorema da Dedução.  $\Gamma \cup \{B\} \vdash A$  sse  $\Gamma \vdash B \rightarrow A$ .

PROVA. Prova-se da maneira usual (v. por exemplo Mendelson 1979, p.32). O caso em que uma fórmula é obtida por  $R\forall$  é contornado devido às condições expressas no item d)iv) da definição 0.7 (como se segue: suponhamos que  $\forall C$  foi obtido por  $R\forall$  a partir de C. Então há uma subsequência da dedução de  $\forall C$  a partir de  $\Gamma \cup \{B\}$  que é uma prova de C. Ou seja,  $\vdash C$  e, por  $R\forall$ ,  $\vdash \forall C$ . Ora,  $\vdash \forall C \rightarrow (B \rightarrow \forall C)$  (A1). Logo, por MP,  $\Gamma \vdash B \rightarrow \forall C$ .)

I.1.2. Se  $\Gamma \vdash A$ , então  $\forall \Gamma \vdash \forall A$  (onde  $\forall \Gamma = \{\forall B : B \in \Gamma\}$ ).

PROVA. Suponhamos que  $\Gamma \vdash A$ . Temos quatro casos:

1)  $A \in \Gamma$ . Então  $\forall A \in \forall \Gamma$  e, obviamente,  $\forall \Gamma \vdash \forall A$ .

2)  $A$  é axioma. Então  $\vdash A$ , e  $\vdash \forall A$  (por  $R\forall$ ). Logo,  $\forall \Gamma \vdash \forall A$ .

3)  $A$  foi obtida a partir de B e  $B \rightarrow A$  por MP. Pela hipótese de indução, temos  $\forall \Gamma \vdash \forall B$  e  $\forall \Gamma \vdash \forall (B \rightarrow A)$ . Como  $\vdash \forall (B \rightarrow A) \rightarrow (\forall B \rightarrow \forall A)$  (A4 ou A5),  $\forall \Gamma \vdash$

$\nabla B \rightarrow \nabla A$ . Por MP,  $\nabla \Gamma \vdash \nabla A$ . (i.e., uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração), podemos estendê-

4)  $A = \nabla B$ , e foi obtida por RV. Se  $\Gamma \vdash A$ , então há uma prova de A em Kt, i.e.,  $\vdash A$ . Por RV,  $\vdash \nabla A$ , e  $\nabla \Gamma \vdash \nabla A$ . mostraremos que ela satisfaz as exigências de def. 2.1 (ou seja, que é uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração).

## I.2. VALORAÇÕES PARA Kt

I.2.2. DEFINIÇÃO. Seja  $v$  uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração e  $A_1, \dots, A_n$  uma sequência normal. Vamos então especificar as condições que as  $A_1, \dots, A_n$ -valorações devem satisfazer para que sejam valorações (para Kt).

B) ou, para algum  $m < n$ ,  $A_n = \nabla A_m$  e  $v'$  é uma função de FOR<sub>T</sub> em  $\{0,1\}$  tal

I.2.1. DEFINIÇÃO.  $v$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração (para Kt) se  $A_1, \dots, A_n$  é uma sequência normal de Kt e:

- 1) se  $A_n$  não é subfórmula de  $F$ , então  $v'(F) = v(F)$ ;
- 1)  $n = 1$  e  $v$  é uma semi-valoração;
- 2) se  $A_n$  é subfórmula de  $F$ , então:
  - 2)  $n > 1$ ,  $v$  é uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração e, se para algum  $m < n$ ,  $A_n = \nabla A_m$ ,
    - a) para  $F = A_n$ ,  $v'(F) = 0$  sse existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $v'$  tal que  $v'(A_m) = 0$  e, para  $\nabla = G$ ,  $v(n-1)v'$ ; para  $\nabla = H$ ,  $v'(n-1)v$ ;
    - I) se  $v(A_n) = 0$ , então existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $v'$  tal que  $v'(A_m) = 0$  e, para  $\nabla = G$ ,  $v(n-1)v'$ ; para  $\nabla = H$ ,  $v'(n-1)v$ ;
    - b) para  $F = \neg F'$ ,  $v'(F) = 1$  sse  $v'(F') = 0$ ;
    - II) se  $v(A_n) = 1$  então para todo  $p$ , todo  $q$ ,  $q < p < n$  tais que  $A_p = \nabla A_q$  e  $v(A_p) = 0$  existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $v_p$  tal que  $v_p(A_q) = 0$ ,  $v_p(A_m) = 1$  e, para  $\nabla = G$ ,  $v(n-1)v_p$ ; para  $\nabla = H$ ,  $v_p(n-1)v$ .
    - c) para  $F = F' \rightarrow F''$ ,  $v'(F) = 1$  sse  $v'(F') = 0$  ou  $v'(F'') = 1$ ;
    - d) para  $F = \nabla F'$ ,  $v'(F) = v(F')$ .

I.2.3. LEMA. Se  $v$  é uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração e  $v'$  é a extensão canônica de  $v$  a  $A_1, \dots, A_n$ , então  $v'$  é uma semi-valoração. Com isto ficam definidas as  $A_1, \dots, A_n$ -valorações e valorações para Kt (v. def. 0.11). O uso de sequências de fórmulas (sequências normais) e valorações que respeitam os requisitos de Kt (ou seja, que são "normais" - v. def. 2.4<sup>12</sup>) apenas no âmbito da sequência é de grande importância para a credibilidade, como se verá posteriormente.

II) Suponhamos que, para algum  $m < n$ ,  $A_n = \nabla A_m$ . Definamos, para cada fórmula  $F$ ,  $g(F)$ , da seguinte maneira: 1) Se  $A_n$  não é subfórmula de  $F$  ou  $A_n$  é subfórmula de  $F$  e, para alguma  $F'$ ,  $F = \nabla F'$ , então  $g(F) = 0$ . 2) Se  $A_n$  é subfórmula de  $F$  e, para alguma  $F'$ ,  $F''$ ,  $F = \neg F'$  ou  $F = F' \rightarrow F''$  então:

<sup>11</sup> V. Introdução, def. 0.17.

<sup>12</sup> Nas referências dentro de um mesmo capítulo, o número do capítulo não será mencionado.

ração até um  $A_i$  qualquer (i.e., uma  $A_1, \dots, A_i$ -valoração), podemos estendê-la para  $A_{i+1}$ , e assim por diante. Definiremos então uma extensão em particular (extensão canônica) e mostraremos que ela satisfaz as exigências da def. 2.1 (ou seja, que é uma  $A_1, \dots, A_{i+1}$ -valoração).

I.2.2. DEFINIÇÃO. Seja  $v$  uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração e  $A_1, \dots, A_n$  uma sequência normal. Dizemos que  $v'$  é a *extensão canônica* de  $v$  a  $A_1, \dots, A_n$  se:

A) ou, para todo  $m < n$ ,  $A_n \neq \nabla A_m$  e  $v' = v$ ;

B) ou, para algum  $m < n$ ,  $A_n = \nabla A_m$  e  $v'$  é uma função de  $\text{FOR}_{L_1}$  em  $\{0,1\}$  tal

I.2.4. DEFINIÇÃO. Seja  $v$  uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração. Para  $1 \leq k \leq n$ , e  $\nabla \in \{G, H\}$ , dizemos que  $v$  é  $\nabla$ - $A_1, \dots, A_n$ -normal se para todo  $p$ , todo  $q$ ,  $q < p \leq k$

1) se  $A_n$  não é subfórmula de  $F$ , então  $v'(F) = v(F)$ ;

2) se  $A_n$  é subfórmula de  $F$ , então:

a) para  $F = A_n$ ,  $v'(F) = 0$  sse existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $\bar{v}$  tal

que  $\bar{v}(A_m) = 0$  e, para  $\nabla = G$ ,  $v(n-1)\bar{v}$ ; para  $\nabla = H$ ,  $\bar{v}(n-1)v$ ;

b) para  $F = \neg F'$ ,  $v'(F) = 1$  sse  $v'(F') = 0$ ;

c) para  $F = F' \rightarrow F''$ ,  $v'(F) = 1$  sse  $v'(F') = 0$  ou  $v'(F'') = 1$ ;

d) para  $F = \nabla F'$ ,  $v'(F) = v(F')$ .

I.2.5. LEMA. Seja  $A_1, \dots, A_n$  uma sequência normal,  $v$  uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração e  $v'$  a extensão canônica de  $v$  a  $A_1, \dots, A_n$ . Suponhamos ainda que  $v$  é  $G$ - e  $H$ - $A_1, \dots, A_{n-1}$ -normal. Nesse caso,  $v'$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração.

PROVA. em primeiro lugar,  $v'$  é uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração, pois, por 2.3, é uma semi-valoração e, por construção, para  $1 \leq i \leq n-1$ ,  $v'(A_i) = v(A_i)$ . Prova-se agora que  $v'$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração.

PROVA. I) Suponhamos que, para todo  $m < n$ ,  $A_n \neq \nabla A_m$ . Por 2.2.A,  $v' = v$ . Como  $v$  é uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração,  $v$  - e portanto  $v'$  - é uma semi-valoração, pela def. 2.1.

Se, para algum  $m < n$ ,  $A_n = \nabla A_m$ , temos dois casos a examinar:

II) Suponhamos que, para algum  $m < n$ ,  $A_n = \nabla A_m$ . Definamos, para cada fórmula  $F$ ,  $g(F)$ , da seguinte maneira: 1) Se: a)  $A_n$  não é subfórmula de  $F$ ; ou b)  $A_n$  é subfórmula de  $F$  e, para alguma  $F'$ ,  $F = \nabla F'$ , então  $g(F) = 0$ . 2) Se  $A_n$  é subfórmula de  $F$  e, para alguma  $F'$ ,  $F''$ ,  $F = \neg F'$  ou  $F = F' \rightarrow F''$  então: para

$F = \neg F'$ , seja  $g(F) = g(F') + 1$ , e para  $F = F' \rightarrow F''$ , seja  $g(F) = g(F') + g(F'')$

+ 1.



Suponhamos que  $g(F) = 0$ . Então  $F = A_n$ ,  $A_n = \nabla A_m$  e as condições das semi-valorções são vácuas, ou, nos outros casos, por 2.2.B.1 e 2.2.B.2.d,  $v' = v$ ; logo, também aqui as condições das semi-valorções são respeitadas.

Suponhamos que  $g(F) > 0$ . Caímos então nos casos onde  $v'$  é construída por 2.2.B.2.b ou 2.2.B.2.c, e verificamos diretamente que também nesses casos as condições das semi-valorções são observadas. Portanto,  $v'$  é uma semi-valorção.

I.2.4. DEFINIÇÃO. Seja  $v$  uma  $A_1, \dots, A_n$ -valorção. Para  $1 \leq k \leq n$ , e  $\nabla \in \{G, H\}$ , dizemos que  $v$  é  $\nabla$ - $A_1, \dots, A_k$ -normal se para todo  $p$ , todo  $q$ ,  $q < p \leq k$  tais que  $A_p = \nabla A_q$  e  $v(A_p) = 0$ , existe uma  $A_1, \dots, A_k$ -valorção  $v_p$  tal que  $v_p(A_q) = 0$  e, para  $\nabla = G$ ,  $v(k)v_p$ ; para  $\nabla = H$ ,  $v_p(k)v$ .

I.2.5. LEMA. Seja  $A_1, \dots, A_n$  uma sequência normal,  $v$  uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valorção e  $v'$  a extensão canônica de  $v$  a  $A_1, \dots, A_n$ . Suponhamos ainda que  $v$  é  $G$ - e  $H$ - $A_1, \dots, A_{n-1}$ -normal. Nesse caso,  $v'$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valorção.

PROVA. Em primeiro lugar,  $v'$  é uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valorção, pois, por 2.3, é uma semi-valorção e, por construção, para  $1 \leq i \leq n-1$ ,  $v'(A_i) = v(A_i)$ . Provemos que é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valorção.

1- Se, para todo  $m < n$ ,  $A_n \neq \nabla A_m$ ,  $v'$  satisfaz todas as condições da definição (2.1) de uma  $A_1, \dots, A_n$ -valorção.

2- Se, para algum  $m < n$ ,  $A_n = \nabla A_m$ , temos dois casos a examinar:

I) Seja  $v'(A_n) = 0$ . Suponhamos que  $\nabla = G$ . Por 2.2.B.2.a, existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valorção  $\bar{v}$  tal que  $\bar{v}(A_m) = 0$  e  $v(n-1)\bar{v}$ . Como, para  $1 \leq i \leq n-1$ ,  $v'(A_i) = v(A_i)$ ,  $v'(n-1)\bar{v}$ ; assim, são satisfeitas as condições exigidas na definição de  $A_1, \dots, A_n$ -valorção (2.1.2.I). Para  $\nabla = H$ , prova-se analogamente.

II) Seja  $v'(A_n) = 1$ . Suponhamos que  $\nabla = G$ , e que existe  $p$ , existe  $q$ ,  $q <$



$p < n$  tais que  $A_p = GA_q$  e  $v'(A_p) = 0$ . Então  $v(A_p) = 0$  e, como  $v$  é  $G-A_1, \dots, A_{n-1}$ -normal, existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $v_p$  tal que  $v_p(A_q) = 0$  e  $v_p(A_m) = v(n-1)v_p$ . Logo,  $v'(A_m) = 0$  (tomando  $\bar{v} = v_p$ ); portanto,  $v_p(A_m) = 1$ . Assim,  $v_p(A_q) = 0$ ,  $v_p(A_m) = 1$  e  $v'(A_m) = 0$ . Por 2.1.2.II,  $v'$  é uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração. Para  $\nabla = H$ , prova-se analogamente.

I.2.6. LEMA. Seja  $v$  uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração. Então  $v$  é  $G$ - e  $H-A_1, \dots, A_n$ -normal.

PROVA. Por indução em  $n$ . Para  $n = 1$  a propriedade é trivial. Seja  $n > 1$  e suponhamos que toda  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração é  $G$ - e  $H-A_1, \dots, A_{n-1}$ -normal. Nesse caso segue-se em primeiro lugar do lema 2.5 que:

(¶) As extensões canônicas das  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valorações a  $A_1, \dots, A_n$  são  $A_1, \dots, A_n$ -valorações.

Provemos agora que  $v$  é  $G$ - e  $H-A_1, \dots, A_n$ -normal, examinando os casos.

1- Se, para todo  $m < n$ ,  $A_n \neq \nabla A_m$ , segue-se, do fato de que  $v$  é  $G$ - e  $H-A_1, \dots, A_{n-1}$ -normal, que  $v$  é  $G$ - e  $H-A_1, \dots, A_n$ -normal.

2- Suponhamos que, para algum  $m < n$ ,  $A_n = GA_m$ .

- I) Seja  $v(A_n) = 0$ . Temos que:

- 1)  $\varepsilon(\{A_1, \dots, A_n\}_{v,1}^G) = \varepsilon(\{A_1, \dots, A_{n-1}\}_{v,1}^G)$ ;
- 2)  $\varepsilon(\{A_1, \dots, A_n\}_{v',1}^H) = \varepsilon(\{A_1, \dots, A_{n-1}\}_{v',1}^H)$  para toda  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $v'$ .

Como, por hipótese de indução,  $v$  é  $G-A_1, \dots, A_{n-1}$ -normal, temos;

3) para todo  $p$ , todo  $q$ ,  $q < p < n$  tais que  $A_p = GA_q$  e  $v(A_p) = 0$ , existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $v_p$  tal que  $v_p(A_q) = 0$  e  $v_p(A_m) = v(n-1)v_p$ .

Para cada  $p$ , seja  $\bar{v}_p$  a extensão canônica de  $v_p$  a  $A_1, \dots, A_n$ . Então:

4)  $\bar{v}_p(A_q) = 0$  e  $\bar{v}_p(A_m) = v(n-1)\bar{v}_p$ . De 1), 2) e 4): 5)  $v(n)\bar{v}_p(A_m) = 1$ , então  $v(A_m) = 1$ .

De (¶), 3), 4) e 5), então:

6) para todo  $p$ , todo  $q$ ,  $q < p < n$  tais que  $A_p = GA_q$  e  $v(A_p) = 0$ , existe uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração  $\bar{v}_p$  tal que  $\bar{v}_p(A_q) = 0$  e  $v(n)\bar{v}_p$ .

Por outro lado, como  $v$  é  $A_1, \dots, A_n$ -valoração, temos, por 2.1 que:

7) existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $v_n$  ( $v_n = v'$ ) tal que  $v_n(A_m) = 0$  e  $v(n-1)v_n$ .

Seja  $\bar{v}_n$  a extensão canônica de  $v_n$  a  $A_1, \dots, A_n$ . Então:

8)  $\bar{v}_n(A_m) = 0$  e  $v(n-1)\bar{v}_n$ .

De 1), 2) e 8),

9)  $v(n)\bar{v}_n$ .

De (¶), 7), 8) e 9),

10) para  $p = n$ ,  $q = m$ ,  $A_p = GA_q$  e  $v(A_p) = 0$ , existe uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração  $\bar{v}_n$  tal que  $\bar{v}_n(A_m) = 0$  e  $v(n)\bar{v}_n$ .

De 6) e 10), então,  $v$  é  $G-A_1, \dots, A_n$ -normal.

Temos ainda pela hipótese de indução que  $v$  é  $H-A_1, \dots, A_n$ -normal. Disso,

e do fato de que  $A_n$  não é de forma HF, segue-se que:

11) para todo  $p$ , todo  $q$ ,  $q < p \leq n$  tais que  $A_p = HA_q$  e  $v(A_p) = 0$ , existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $v_p$  tal que  $v_p(A_q) = 0$  e  $v_p(n-1)v$ .

Para cada  $p$ , seja  $\bar{v}_p$  a extensão canônica de  $v_p$  a  $A_1, \dots, A_n$ . Então:

12)  $\bar{v}_p(A_q) = 0$  e  $\bar{v}_p(n-1)v$ .

De 2) e 12),

13)  $\bar{v}_p \models \varepsilon(\{A_1, \dots, A_n\}_{\bar{v}_p, 1}^H)$ .

Suponhamos agora que  $\bar{v}_p(A_n) = 0$ . Então  $\varepsilon(\{A_1, \dots, A_n\}_{\bar{v}_p, 1}^G) = \varepsilon(\{A_1, \dots, A_{n-1}\}_{\bar{v}_p, 1}^G)$  e, portanto,  $v \models \varepsilon(\{A_1, \dots, A_n\}_{\bar{v}_p, 1}^G)$ . Suponhamos que  $\bar{v}_p(A_n) = 1$ .

Por 2.2.B.2.a, para toda  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $\bar{v}$ , se  $v(n-1)\bar{v}$ , então  $\bar{v}(A_m) =$

= 1. Ora,  $v_p(n-1)v$ ; logo,  $v(A_m) = 1$ . Como  $\varepsilon(\{A_1, \dots, A_n\}_{\frac{G}{v_p, 1}}) = \varepsilon(\{A_1, \dots, A_{n-1}\}_{\frac{G}{v_p, 1}}) \cup \{A_m\}$ ,  $v \models \varepsilon(\{A_1, \dots, A_n\}_{\frac{G}{v_p, 1}})$ . Assim, nos dois casos:

14)  $v \models \varepsilon(\{A_1, \dots, A_n\}_{\frac{G}{v_p, 1}})$ .

De 13) e 14),

15)  $\bar{v}_p(n)v$ .

De (¶), 11), 12) e 15), então,  $v$  é  $H-A_1, \dots, A_n$ -normal.

II) Seja  $v(A_n) = 1$ . Temos:

1)  $\varepsilon(\{A_1, \dots, A_n\}_{\frac{G}{v, 1}}) = \varepsilon(\{A_1, \dots, A_{n-1}\}_{\frac{G}{v, 1}}) \cup \{A_m\}$ ;

2)  $\varepsilon(\{A_1, \dots, A_n\}_{\frac{H}{v, 1}}) = \varepsilon(\{A_1, \dots, A_{n-1}\}_{\frac{H}{v, 1}})$  para toda  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $v'$ .

Uma vez que  $v(A_n) = 1$ , temos disso e de 2.1.2.II que:

3) para todo  $p$ , todo  $q$ ,  $q < p \leq n$  tais que  $A_p = GA_q$  e  $v(A_q) = 0$ , existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $v_p$  tal que  $v_p(A_q) = 0$ ,  $v_p(A_m) = 1$  e  $v_p(n-1)v_p$ .

Para cada  $p$ , seja  $\bar{v}_p$  a extensão canônica de  $v_p$  a  $A_1, \dots, A_n$ . Então:

4)  $\bar{v}_p(A_q) = 0$ ,  $\bar{v}_p(A_m) = 1$  e  $\bar{v}_p(n-1)\bar{v}_p$ .

De 1), 2) e 4),

5)  $v(n)\bar{v}_p$ .

Portanto, de (¶), 3), 4) e 5),  $v$  é  $G-A_1, \dots, A_n$ -normal.

Prova-se que  $v$  é  $H-A_1, \dots, A_n$ -normal exatamente como no caso I).

3- Suponhamos que, para algum  $m < n$ ,  $A_n = HA_m$ . A prova é análoga à do caso 2.

I.2.7. COROLÁRIO. Seja  $A_1, \dots, A_n$  uma sequência normal,  $v$  uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração e  $v'$  a extensão canônica de  $v$  a  $A_1, \dots, A_n$ . Então  $v'$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração e, para  $1 \leq i \leq n-1$ ,  $v'(A_i) = v(A_i)$ .

PROVA. Como  $v$  é  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração, por 2.6  $v$  é  $G$ - e  $H-A_1, \dots, A_{n-1}$ -normal.

Por 2.5,  $v'$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração. E, por construção, para  $1 \leq i \leq n-1$ , temos que  $v'(A_i) = v(A_i)$ .

I.3.1. LEMA. Seja  $v$  uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração; então, para  $1 \leq i \leq n$ , se  $A_i$  é

I.2.8. TEOREMA.  $v$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração sse: 1)  $A_1, \dots, A_n$  é uma sequência normal; 2)  $v$  é uma semi-valoração; 3)  $v$  é G- e H- $A_1, \dots, A_n$ -normal.

PROVA. A) Se  $v$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração, temos, por 2.1, que  $A_1, \dots, A_n$  é uma sequência normal e que  $v$  é semi-valoração; de 2.6 segue que  $v$  é G- e H- $A_1, \dots, A_n$ -normal.

B) Seja  $A_1, \dots, A_n$  uma sequência normal, e seja  $v$  uma função de  $\text{FOR}_{L1}$  em  $\{0,1\}$  satisfazendo 2) e 3). Mostraremos que  $v$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração por indução em  $n$ .

Se  $n = 1$ , segue de 2) que  $v$  é uma  $A_1$ -valoração. Seja  $n > 1$  e suponhamos que qualquer função de  $\text{FOR}_{L1}$  em  $\{0,1\}$  que satisfaz 2) e é G- e H- $A_1, \dots, A_{n-1}$ -normal é uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração. Como  $v$  é G- e H- $A_1, \dots, A_n$ -normal, é então G- e H- $A_1, \dots, A_{n-1}$ -normal; como satisfaz 2),  $v$  é uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração. Temos agora três casos:

1- Para todo  $m < n$ ,  $A_n \neq \forall A_m$ . Imediatamente,  $v$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração.

2- Para algum  $m < n$ ,  $A_n = GA_m$ .

I) Seja  $v(A_n) = 0$ . Como  $v$  é G- $A_1, \dots, A_n$ -normal, existe uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração  $v_n$  tal que  $v_n(A_m) = 0$  e  $v(n)v_n$ . Obviamente  $v_n$  é uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração e  $v(n-1)v_n$ . Logo,  $v$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração.

II) Seja  $v(A_n) = 1$ . Como  $v$  é G- $A_1, \dots, A_n$ -normal, para todo  $p$ , todo  $q$ ,  $q < p < n$  tais que  $A_p = GA_q$  e  $v(A_p) = 0$ , existe uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração  $v_p$  tal que  $v_p(A_q) = 0$  e  $v(n)v_p$ . Obviamente  $v_p$  é uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração,  $v_p(A_m) = 1$  e  $v(n-1)v_p$ . Logo,  $v$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração.

3- Para algum  $m < n$ ,  $A_n = HA_m$ . Prova análoga à do caso 2.

Forma I.3. CORREÇÃO. conjunto  $\alpha = \{C: C \text{ é subfórmula de } B \rightarrow A_i \text{ e } C \in \{A_1, \dots, A_n\}\}$ . Se  $\alpha \neq \emptyset$ , arranjamos os elementos de  $\alpha$  numa sequência  $C_1, \dots, C_k$  que

I.3.1. LEMA. Seja  $v$  uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração; então, para  $1 \leq i \leq n$ , se  $A_i$  é um axioma de Kt,  $v(A_i) = 1$ .

PROVA. a) Se  $A_i$  é um axioma clássico (A1 - A3), segue-se facilmente do fato de que  $v$  é uma semi-valoração, que  $v(A_i) = 1$ .

b) Seja  $A_i$  da forma  $\nabla(A \rightarrow B) \rightarrow (\nabla A \rightarrow \nabla B)$ . Se  $v(A_i) = 0$ , então  $v(\nabla(A \rightarrow B)) = v(\nabla A) = 1$ , e  $v(\nabla B) = 0$ . Nesse caso, por 2.8, existiria uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração  $v'$  tal que  $v'(B) = 0$  e, para  $\nabla = G$ ,  $v(n)v'$ . Como  $A, A \rightarrow B \in \varepsilon(\{A_1, \dots, A_n\}_{v', 1}^G)$ , teríamos  $v'(A) = v'(A \rightarrow B) = 1$  e  $v'(B) = 0$  - o que não é possível. Logo,  $v(A_i) = 1$ . Para  $\nabla = H$ , analogamente.

c) Seja  $A_i$  da forma  $\neg G \rightarrow HA \rightarrow A$ . Suponhamos que  $v(\neg G \rightarrow HA) = 1$  - e  $v(G \rightarrow HA) = 0$ . Por 2.8 existe  $v'$  tal que  $v'(\neg HA) = 0$  e  $v(n)v'$ . Então  $v'(HA) = 1$ , ou seja,  $A \in \varepsilon(\{A_1, \dots, A_n\}_{v', 1}^H)$  e, portanto,  $v(A) = 1$ . Assim, se  $v(\neg G \rightarrow HA) = 1$ , temos que  $v(A) = 1$ . Logo,  $v(A_i) = 1$ .

d) Seja  $A_i$  da forma  $\neg H \rightarrow GA \rightarrow A$ . Tal como em d),  $v(A_i) = 1$ .

I.3.2. TEOREMA. Se  $F$  é um axioma de Kt e  $v$  é uma valoração, então  $v(F) = 1$ .

PROVA. Seja  $F$  um axioma de Kt;  $v$  uma valoração. Seja  $A_1, \dots, A_n$  uma sequência normal tal que, para algum  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $F = A_i$ . Por 0.11,  $v$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração e, por 3.1,  $v(F) = 1$ .

I.3.3. LEMA. Para todo  $n$ , todo  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , se  $v$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração e se  $r = 1$ , então  $F \in \Gamma$  (e nada há a provar) ou  $F$  é um axioma, e a propriedade  $\vdash A_i$ , então  $v(A_i) = 1$ .

PROVA. Por indução no número  $r$  de linhas de uma prova de  $A_i$  em Kt.

A) se  $r = 1$ ,  $A_i$  é um axioma e a propriedade segue de 3.1.

B) se  $r > 1$ , ou  $A_i$  é um axioma, e a propriedade segue de 3.1, ou:

a)  $A_i$  foi obtido por MP a partir de  $B$  e  $B \rightarrow A_i$ . Temos  $\vdash B$  e  $\vdash B \rightarrow A_i$ .

Formamos o seguinte conjunto  $\alpha = \{C: C \text{ é subfórmula de } B \rightarrow A_i \text{ e } C \notin \{A_1, \dots, A_n\}\}$ . Se  $\alpha \neq \emptyset$ , arranjamos os elementos de  $\alpha$  numa sequência  $C_1, \dots, C_k$  que respeite a ordem de comprimento das fórmulas. Caso  $\alpha = \emptyset$ , seja  $\sigma = A_1, \dots, A_n$  e  $v' = v$ . Caso contrário,  $\sigma = A_1, \dots, A_n, C_1, \dots, C_k$ . Formemos uma sequência  $v_0, v_1, \dots, v_k$ , onde  $v_0 = v$  e, para  $1 \leq j \leq k$ , seja  $v_j$  a extensão canônica de  $v_{j-1}$ . Tomemos  $v' = v_k$ . É óbvio então que  $\sigma$  é uma sequência normal e que  $v'$  é uma  $\sigma$ -valoração. Como  $\vdash B$  e  $\vdash B \rightarrow A_i$ , temos, pela hipótese de indução, que  $v'(B) = v'(B \rightarrow A_i) = 1$ . Logo,  $v'(A_i) = 1$ . Uma vez que  $v(A_i) = v'(A_i)$ , então,  $v(A_i) = 1$ .

b)  $A_i = \forall A_j$  e foi obtido de  $A_j$  por  $R\forall$ . Ora, para toda sequência normal  $\sigma$  onde ocorre  $A_i$ ,  $A_j$  ocorre também; logo, pela hipótese de indução, para toda  $\sigma$ -valoração  $v$ ,  $v(A_j) = 1$ . Segue-se de 2.8 que, para toda  $\sigma$ -valoração  $v$ ,  $v(A_i) = 1$ .

I.3.4. COROLÁRIO. Se  $\vdash F$ , então, para toda valoração  $v$ ,  $v(F) = 1$ .

PROVA. Suponhamos que  $\vdash F$ . Seja  $A_1, \dots, A_n$  uma sequência normal em que, para algum  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $A_i = F$ . Por 0.11  $v$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração e, por 3.3,  $v(F) = 1$ .

I.3.5. TEOREMA DE CORREÇÃO. Se  $\Gamma \vdash F$ , então  $\Gamma \models F$ .

PROVA. Suponhamos que  $\Gamma \vdash F$ , e seja  $D_1, \dots, D_r$  uma dedução de  $F$  a partir de  $\Gamma$ . Provamos o teorema aplicando indução em  $r$ .

A) se  $r = 1$ , então  $F \in \Gamma$  (e nada há a provar) ou  $F$  é um axioma, e a propriedade segue de 3.4 e 0.12.

PROVA. Primeiramente, é fácil provar, através de 0.14 que:

B) seja  $r > 1$ . Se  $F \notin \Gamma$ , e se  $F$  não é axioma, então:

a) para algum  $j < m$ ,  $i < m$ ,  $D_i = D_j \rightarrow F$ . I.e.,  $F$  foi obtido por MP a partir de  $D_i$  e  $D_j$ . Logo  $\Gamma \vdash D_i$ ,  $\Gamma \vdash D_j$  e, pela hipótese de indução,  $\Gamma \models D_i$ ,  $\Gamma \models D_j$ .

Portanto, para toda valoração  $v$ , se  $v \models \Gamma$ ,  $v(D_j) = v(D_1) = v(D_j \rightarrow F) = 1$  e então  $v(F) = 1$ . Ou seja,  $\Gamma \models F$ .

b) para algum  $j < m$ ,  $F = \forall D_j$ . I.e.,  $F$  foi obtido de  $D_j$  por  $R\forall$ . Nesse caso,  $\vdash D_j$  e  $\vdash F$ . Por 3.4, para toda valoração  $v'$ ,  $v'(F) = 1$ . Então, se  $v \models \Gamma$ ,  $v(F) = 1$ . Ou seja,  $\Gamma \models F$ .

1)  $f(A_n) = 0$ . Então  $A_n \in \Delta$ . i.e.,  $\Delta \models GA_n$ . Por 4.1 existe  $\Delta' \subseteq \Delta$   $A_n$ -saturado

I.4. COMPLETUDE Nesse caso, por 4.2,  $\varepsilon(\Delta'^H) \subset \Delta$ . Seja  $f'$  a função característica de  $\Delta'$ . Pela hipótese de indução,  $f$  e  $f'$  são  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valorações.

Ora,  $(A_1, \dots, A_{n-1}) \models \Gamma$ . A prova de completude, como foi dito, segue as vias habituais, usando as propriedades dos conjuntos  $F$ -saturados (v. 0.13 - 0.15).

I.4.1. LEMA. Se  $\Gamma \not\models \forall F$ , então existe  $\Delta$   $F$ -saturado tal que  $\varepsilon(\Gamma^\forall) \subset \Delta$ .

PROVA. Se  $\Gamma \not\models \forall F$ , então  $\Gamma^\forall \not\models \forall F$  e, por 1.2,  $\varepsilon(\Gamma^\forall) \not\models F$ . Por 0.15 há um conjunto  $\Delta$   $F$ -saturado tal que  $\varepsilon(\Gamma^\forall) \subset \Delta$ .

I.4.2. LEMA. Se  $\Delta$  é  $F$ -saturado,  $\Delta'$  é  $F'$ -saturado,  $\varepsilon(\Delta^G) \subset \Delta'$  sse  $\varepsilon(\Delta'^H) \subset \Delta$ .

PROVA. a) Suponhamos que  $\varepsilon(\Delta^G) \subset \Delta'$ , e seja  $A \in \varepsilon(\Delta'^H)$ . Então  $HA \in \Delta'$ ; logo,  $\neg HA \notin \Delta'$ . Nesse caso, como  $\varepsilon(\Delta^G) \subset \Delta'$ ,  $G\neg HA \notin \Delta$ ; assim,  $\neg G\neg HA \in \Delta$ . Ora,  $\vdash \neg G\neg HA \rightarrow A$ ; logo,  $\Delta \vdash A$ , i.e.,  $A \in \Delta$ . Portanto, se  $A \in \varepsilon(\Delta'^H)$ , então  $A \in \Delta$ . Ou seja,  $\varepsilon(\Delta'^H) \subset \Delta$ .

b) Suponhamos que  $\varepsilon(\Delta'^H) \subset \Delta$ . Analogamente a a),  $\varepsilon(\Delta^G) \subset \Delta'$ .

I.4.3. TEOREMA. Para todo conjunto  $\Delta$ , toda fórmula  $F$ , toda sequência  $A_1, \dots, A_n$ , toda função  $f$ , se  $\Delta$  é um conjunto  $F$ -saturado, e  $A_1, \dots, A_n$  é uma sequência normal, a função característica  $f$ , de  $\Delta$ , é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração.

PROVA. Primeiramente, é fácil provar, através de 0.14 que:

(1) para todo  $\Delta$ , toda  $F$ , toda sequência normal  $A_1, \dots, A_n$ , toda  $f$ ; se  $f$  é a função característica de  $\Delta$ , então  $f$  é uma semi-valoração.

Apliquemos agora indução em  $n$  para provar o teorema. Se  $n = 1$  a pro



priedade segue trivialmente de (¶) acima. Suponhamos que vale para  $n-1$ , e seja  $A_1, \dots, A_n$  uma sequência normal,  $\Delta$  um conjunto  $F$ -saturado e  $f$  a função característica de  $\Delta$ .

1- Se, para todo  $m < n$ ,  $A_n \neq \nabla A_m$ , trivialmente  $f$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração.

2- Para algum  $m < n$ ,  $A_n = GA_m$ .

I)  $f(A_n) = 0$ . Então  $A_n \notin \Delta$ , i.e.,  $\Delta \not\vdash GA_m$ . Por 4.1 existe  $\Delta'$   $A_m$ -saturado tal que  $\varepsilon(\Delta^G) \subset \Delta'$ . Nesse caso, por 4.2,  $\varepsilon(\Delta'^H) \subset \Delta$ . Seja  $f'$  a função característica de  $\Delta'$ . Pela hipótese de indução,  $f$  e  $f'$  são  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valorações. Ora,  $\{A_1, \dots, A_{n-1}\}_{f,1}^G \subset \Delta$ ; logo,  $\varepsilon(\{A_1, \dots, A_{n-1}\}_{f,1}^G) \subset \varepsilon(\Delta^G) \subset \Delta'$ ; assim,  $f' \models \varepsilon(\{A_1, \dots, A_{n-1}\}_{f,1}^G)$ . Por outro lado,  $\{A_1, \dots, A_{n-1}\}_{f,1}^H \subset \Delta'$ ; portanto,  $\varepsilon(\{A_1, \dots, A_{n-1}\}_{f,1}^H) \subset (\Delta'^H) \subset \Delta$ . Assim,  $f \models \varepsilon(\{A_1, \dots, A_{n-1}\}_{f,1}^H)$ . Logo, por 0.17,  $f(n-1)f'$ . E como  $\Delta'$  é  $A_m$ -saturado,  $f'(A_m) = 0$ . Temos então que, se  $f(A_n) = 0$ , existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $f'$  tal que  $f'(A_m) = 0$  e  $f(n-1)f'$ . Por 2.1,  $f$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração.

II)  $f(A_n) = 1$ . Suponhamos que existe  $p$ , existe  $q$ ,  $q < p < n$  tais que  $A_p = GA_q$  e  $f(A_p) = 0$ . Então  $GA_q \notin \Delta$  e  $\Delta \not\vdash GA_q$ . Por 4.1 existe  $\Delta'$   $A_q$ -saturado tal que  $\varepsilon(\Delta^G) \subset \Delta'$ ; nesse caso, por 4.2,  $\varepsilon(\Delta'^H) \subset \Delta$ . Seja  $f'$  a função característica de  $\Delta'$ . Pela hipótese de indução,  $f$  e  $f'$  são  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valorações. Por um argumento análogo ao caso anterior, mostra-se que  $f(n-1)f'$ . Como  $\Delta'$  é  $A_q$ -saturado,  $f'(A_q) = 0$ ; e como  $A_m \in \varepsilon(\Delta^G)$ ,  $f'(A_m) = 1$ . Portanto, se  $f(A_n) = 1$ ,  $f$  é  $A_1, \dots, A_n$ -valoração.

3- Para algum  $m < n$ ,  $A_n = HA_m$ . Prova-se analogamente ao caso 2.

I.4.4. TEOREMA.  $v$  é uma valoração sse para algum  $\Delta$  e alguma  $F$  tais que  $\Delta$  é  $F$ -saturado,  $v$  é a função característica de  $\Delta$ .

PROVA. a) Suponhamos que  $v$  é uma valoração. Seja  $[\nu]_1 = \{A: v(A) = 1\}$ , e seja  $[\nu]_0 = \{B: v(B) = 0\}$ . Seja  $F \in [\nu]_0$ ; então  $F \notin [\nu]_1$ , e vê-se facilmente que  $[\nu]_0$  e  $[\nu]_1$  são a forma de uma comunicação intitulada "Valorações na Lógica do Tempo".



$[v]_1 \not\vdash F$ . Seja  $F'$  uma fórmula tal que  $F' \notin [v]_1$ . Então  $v(F') = 0$ ,  $v(\neg F') = 1$  e  $\neg F' \in [v]_1$ . Mas  $v(\neg F' \rightarrow (F' \rightarrow F)) = 1$ ; logo,  $\neg F' \rightarrow (F' \rightarrow F) \in [v]_1$ . Assim,  $[v]_1 \vdash F' \rightarrow F$ ; logo,  $[v]_1 \cup \{F'\} \vdash F$ . Seja  $\Delta = [v]_1$ . Então  $\Delta$  é um conjunto  $F$ -saturado e, por construção de  $\Delta$ ,  $v$  é a função característica de  $\Delta$ .

b) Suponhamos que, para algum  $\Delta$  e alguma  $F$  tal que  $\Delta$  é  $F$ -saturado,  $v$  é a função característica de  $\Delta$ . Seja  $A_1, \dots, A_n$  uma sequência normal qualquer. Por 4.3,  $v$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração. Como a sequência  $A_1, \dots, A_n$  é qualquer, por 0.11  $v$  é uma valoração.

I.4.5. TEOREMA DE COMPLETUDE. Se  $\Gamma \vdash F$ , então  $\Gamma \not\vdash F$ .

PROVA. Suponhamos que  $\Gamma \vdash F$ , e que  $\Gamma \not\vdash F$ . Por 0.15 há um conjunto  $\Delta$   $F$ -saturado tal que  $\Gamma \subset \Delta$ . Seja  $v$  a função característica de  $\Delta$ . Por 4.4,  $v$  é uma valoração. Como  $\Gamma \subset \Delta$ ,  $v \vdash \Gamma$ ; e como  $\Delta$  é  $F$ -saturado,  $v(F) = 0$ . Portanto, por 0.12,  $\Gamma \not\vdash F$  - contradizendo a hipótese. Assim,  $\Gamma \not\vdash F$ .

#### I.5. OBSERVAÇÕES

base axiomática para  $K_m$  acrescentando aos postulados de  $K_t$  os seguintes esquemas de axiomas:

Como foi visto nas seções 3 e 4, obtivemos, por meio de uma semântica de valorações, teoremas de correção e completude para  $K_t$ .<sup>12a</sup> A questão da decidibilidade será levantada numa terceira parte deste trabalho. (V. Parte III.) Passemos agora a outros cálculos temporais, para ver como é possível construir semânticas de valorações para os mesmos, tal como fizemos com  $K_t$ .

T18.  $G A \rightarrow F A, H A \rightarrow P A$

T20.  $\neg F A \rightarrow F \neg A, \neg P A \rightarrow P \neg A$

T21.  $F \neg A \rightarrow \neg A, P \neg A \rightarrow \neg A$

<sup>12a</sup> O conteúdo deste Capítulo I foi desenvolvido por A.M. Loparić e C.A. Mortari e apresentado no IV Encontro Brasileiro de Lógica (Unicamp, 1980) sob a forma de uma comunicação intitulada "Valorações na Lógica do Tempo".

T24.  $PGA \rightarrow PFA, FHA \rightarrow PFA$

Regras derivadas:

R7.  $A \rightarrow FA$

R8.  $A \rightarrow PA$

## Capítulo II

### O CÁLCULO Km

#### II.1. APRESENTAÇÃO

Km é uma extensão de Kt, e poderia ser chamado a "lógica do tempo sem primeiro nem último momento". Isto não quer dizer que a ordem temporal deva consistir numa infinidade de momentos distintos: poderia haver apenas finitamente muitos momentos, ordenados em círculo. Trata-se da situação em que, para cada instante  $t$ , existe um  $t'$  anterior a  $t$ , e um  $t''$  posterior a  $t$  - seja isso por estarem os momentos numa "reta", seja por estarem em "círculo", etc.

Formamos uma base axiomática para Km acrescentando aos postulados de Kt os seguintes esquemas de axiomas:

A8.  $G-A \rightarrow -GA$

A9.  $H-A \rightarrow -HA$

Todos os teoremas de Kt são teoremas de Km. Entre as fórmulas prova das especificamente em Km, temos:

T19.  $GA \rightarrow FA, HA \rightarrow PA$

T20.  $-FA \rightarrow F-A, -PA \rightarrow P-A$

T21.  $F(A \rightarrow A), P(A \rightarrow A)$

T22.  $A \rightarrow FPA, A \rightarrow PFA$

T23.  $PGA \rightarrow PFA, FHA \rightarrow PFA$

T24.  $\text{PGA} \rightarrow \text{PFA}$ ,  $\text{FHA} \rightarrow \text{FPA}$ .  $v^*(k)v$ .

Regras derivadas:

II.2.3.  $(A_1, \dots, A_n)$  uma seqüência normal,  $v$  uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valora-

R7.  $A / FA$  extensão canônica de  $v$  a  $A_1, \dots, A_n$ . Suponhamos ainda que  $v$  é  $G_n$ .

R8.  $A / PA$   $(A_1, \dots, A_{n-1})$ -normal. Nesse caso,  $v'$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração.

PROVA. Por I.2.3 e por construção,  $v'$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração. Provemos

As propriedades I.1.1 (Teorema da Dedução) e I.1.2 também valem para  $v'$  que é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração.

1- Se para todo  $m < n$ ,  $A_m = \nabla A_m$ ,  $v'$  satisfaz as condições da definição 2.1.

2- Se, para algum  $m < n$ ,  $A_m = GA_m$ , temos dois casos a examinar:

## II.2. VALORAÇÕES PARA $K_m$

I)  $v'(A_m) = 0$ . Prova-se como em  $K_t$  (v. I.2.5).

II)  $v'(A_m) = 1$ . Como  $v$  é  $G_n$ -valoração, existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $v^*$  tal que  $v^*(A_m) = 1$  e, para  $\nabla = G$ ,  $v(n-1)v^*$ ; para  $\nabla = H$ ,  $v^*(n-1)v$ ; além disso, para todo  $p$ , todo  $q$ ,  $q < p < n$  tais que  $A_p = \nabla A_q$  e  $v(A_p) = 0$ , existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $v_p$  tal que  $v_p(A_q) = 0$ ,  $v_p(A_m) = 1$  e, para  $\nabla = G$ ,  $v(n-1)v_p$ ; para  $\nabla = H$ ,  $v_p(n-1)v$ .

II.2.1. DEFINIÇÃO.  $(A_1, \dots, A_n)$ -valoração para  $K_m$ ) A definição é como em  $K_t$  (v. I.2.1), com a seguinte nova redação para o item 2.II:

2) II) se  $v(A_m) = 1$ , então existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $v^*$  tal que  $v^*(A_m) = 1$  e, para  $\nabla = G$ ,  $v(n-1)v^*$ ; para  $\nabla = H$ ,  $v^*(n-1)v$ ; além disso, para todo  $p$ , todo  $q$ ,  $q < p < n$  tais que  $A_p = \nabla A_q$  e  $v(A_p) = 0$ , existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $v_p$  tal que  $v_p(A_q) = 0$ ,  $v_p(A_m) = 1$  e, para  $\nabla = G$ ,  $v(n-1)v_p$ ; para  $\nabla = H$ ,  $v_p(n-1)v$ .

II.2.4. A definição de extensão canônica de  $K_m$  é a mesma de  $K_t$ , de modo que não vamos repeti-la aqui. Da mesma forma, o lema que prova que as extensões canônicas são semi-valorações permanece sem alteração. Para  $n = 1$  a propriedade é trivial. Seja  $n > 1$ . Segue-se de 2.3 e da hipótese de indução que:

II.2.2. DEFINIÇÃO. Seja  $v$  uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração. Para  $1 \leq k \leq n$ , e  $\nabla \in \{G, H\}$ , dizemos que:

a)  $v$  é  $\nabla_0$ - $A_1, \dots, A_k$ -normal se para todo  $p$ , todo  $q$ ,  $q < p \leq k$  tais que  $A_p = \nabla A_q$  e  $v(A_p) = 0$ , existe uma  $A_1, \dots, A_k$ -valoração  $v_p$  tal que  $v_p(A_q) = 0$  e, para  $\nabla = G$ ,  $v(k)v_p$ ; para  $\nabla = H$ ,  $v_p(k)v$ ;

b)  $v$  é  $\nabla_1$ - $A_1, \dots, A_k$ -normal se existe uma  $A_1, \dots, A_k$ -valoração  $v^*$  tal que, pa

ra  $\nabla = G$ ,  $v(k)v^*$ ; para  $\nabla = H$ ,  $v^*(k)v$ .

I) Seja  $v(A_n) = 0$ . Temos:

II.2.3. LEMA. Seja  $A_1, \dots, A_n$  uma seqüência normal,  $v$  uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração e  $v'$  a extensão canônica de  $v$  a  $A_1, \dots, A_n$ . Suponhamos ainda que  $v$  é  $G_0$ -,  $G_1$ -,  $H_0$ - e  $H_1$ - $A_1, \dots, A_{n-1}$ -normal. Nesse caso,  $v'$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração.

PROVA. Por I.2.3 e por construção,  $v'$  é uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração. Provemos que é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração.

1- Se para todo  $m < n$ ,  $A_n \neq \nabla A_m$ ,  $v'$  satisfaz as condições da definição 2.1.

2- Se, para algum  $m < n$ ,  $A_n = GA_m$ , temos dois casos a examinar:

I)  $v'(A_n) = 0$ . Prova-se como em Kt (v. I.2.5).

II)  $v'(A_n) = 1$ . Como  $v$  é  $G_1$ - $A_1, \dots, A_{n-1}$ -normal, existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $v^*$  tal que  $v(n-1)v^*$ . Então  $v^*(A_m) = 1$  - caso contrário, por I.2.2.B.

2.a,  $v'(A_n) = 0$ . Obviamente  $v'(n-1)v^*$ . Suponhamos então que existe  $p$ , existe  $q$ ,  $q < p < n$  tais que  $A_p = GA_q$  e  $v'(A_p) = 0$ . Prova-se, como em Kt, que existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $v_p$  tal que  $v_p(A_q) = 0$ ,  $v_p(A_m) = 1$  e  $v'(n-1)v_p$ . Por 2.1,  $v'$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração.

3- Se, para algum  $m < n$ ,  $A_n = HA_m$ , a prova é análoga.

II.2.4. LEMA. Seja  $v$  uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração. Então  $v$  é  $G_0$ -,  $G_1$ -,  $H_0$ - e  $H_1$ - $A_1, \dots, A_n$ -normal.

PROVA. A prova procede como em I.2.6, por indução em  $n$ . Para  $n = 1$  a propriedade é trivial. Seja  $n > 1$ . Segue-se de 2.3 e da hipótese de indução que:

(¶) As extensões canônicas das  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valorações a  $A_1, \dots, A_n$  são  $A_1, \dots, A_n$ -valorações.

Teríamos agora três casos. Se  $A_n \neq \nabla A_m$ , para todo  $m < n$ , a prova é imediata. Examinemos então o caso em que, para algum  $m < n$ ,  $A_n = GA_m$ . (Se  $A_n = HA_m$ , a prova é análoga.) Prova-se que  $v$  é  $G_0$ - e  $H_0$ - $A_1, \dots, A_n$ -normal da mes-

Assim, de (¶), 6) e 10),  $v$  é  $H_1$ - $A_1, \dots, A_n$ -normal.

ma forma que se prova em Kt que  $\nu$  é  $G$ - e  $H$ - $A_1, \dots, A_n$ -normal, como no caso 11).

I) Seja  $\nu(A_n) = 0$ . Temos:

- 1)  $\varepsilon(\{A_1, \dots, A_n\}_{\nu, 1}^G) = \varepsilon(\{A_1, \dots, A_{n-1}\}_{\nu, 1}^G); \cup (A_n)$ .
- 2)  $\varepsilon(\{A_1, \dots, A_n\}_{\nu, 1}^H) = \varepsilon(\{A_1, \dots, A_{n-1}\}_{\nu, 1}^H)$ , para toda  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $\nu'$ .

Como  $\nu$  é  $G$ - $A_1, \dots, A_{n-1}$ -normal, temos:

- 3) existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $\nu^*$  tal que  $\nu(n-1)\nu^*$ .

Seja  $\bar{\nu}^*$  a extensão canônica de  $\nu^*$  a  $A_1, \dots, A_n$ . Então:

- 4)  $\nu(n-1)\bar{\nu}^*$ .

De 1), 2) e 4),

- 5)  $\nu(n)\bar{\nu}^*$ .

De (11), 3) e 5), então, existe uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração  $\bar{\nu}^*$  tal que  $\nu(n)\bar{\nu}^*$ . I.e.,  $\nu$  é  $G$ - $A_1, \dots, A_n$ -normal.

E, como  $\nu$  é  $H$ - $A_1, \dots, A_{n-1}$ -normal, temos:

- 6) existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $\nu^*$  tal que  $\nu^*(n-1)\nu$ .

Seja  $\bar{\nu}^*$  a extensão canônica de  $\nu^*$  a  $A_1, \dots, A_n$ . Então:

- 7)  $\bar{\nu}^*(n-1)\nu$ .

De 2) e 7),

- 8)  $\bar{\nu}^* \models \varepsilon(\{A_1, \dots, A_n\}_{\nu, 1}^H)$ .

Agora, suponhamos que  $\bar{\nu}^*(A_n) = 0$ . Então  $\varepsilon(\{A_1, \dots, A_n\}_{\nu^*, 1}^G) = \varepsilon(\{A_1, \dots, A_{n-1}\}_{\nu^*, 1}^G)$ , e  $\nu \models \varepsilon(\{A_1, \dots, A_n\}_{\nu^*, 1}^G)$ . Suponhamos que  $\bar{\nu}^*(A_n) = 1$ . Então  $\nu(A_n) = 1$  - caso contrário, por I.2.2.B.2.a,  $\bar{\nu}^*(A_n) = 0$ . Segue-se que  $\nu \models \varepsilon(\{A_1, \dots, A_n\}_{\nu^*, 1}^G)$ . Portanto, nos dois casos:

- 9)  $\nu \models \varepsilon(\{A_1, \dots, A_n\}_{\nu^*, 1}^G)$ .

De 8) e 9),

- 10)  $\bar{\nu}^*(n)\nu$ .

Assim, de (11), 6) e 10),  $\nu$  é  $H$ - $A_1, \dots, A_n$ -normal.

II) Seja  $v(A_n) = 1$ . Prova-se que  $v$  é  $H_1-A_1, \dots, A_n$ -normal como no caso I).

Temos:

$$10) \varepsilon(\{A_1, \dots, A_n\}_{v,1}^G) = \varepsilon(\{A_1, \dots, A_{n-1}\}_{v,1}^G) \cup \{A_n\}.$$

Como  $v(A_n) = 1$ , temos também, de 2.1.2.II, que:

11) existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $v^*$  tal que  $v^*(A_m) = 1$  e  $v(n-1)v^*$ .

Seja  $\bar{v}^*$  a extensão canônica de  $v^*$  a  $A_1, \dots, A_n$ . Então:

12)  $v(n-1)\bar{v}^*$  e  $\bar{v}^*(A_m) = 1$ .

Note-se que  $\bar{v}^* \models \varepsilon(\{A_1, \dots, A_{n-1}\}_{v,1}^G) \cup \{A_n\}$ . Assim, de 2), 10) e 12),

13)  $v(n)\bar{v}^*$ .

Portanto, de (11), 11) e 13),  $v$  é  $G_1-A_1, \dots, A_n$ -normal.

O Corolário correspondente a I.2.7 é enunciado e provado do mesmo

modo que em Kt.

II.2.5. TEOREMA.  $v$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração sse: 1)  $A_1, \dots, A_n$  é uma sequência normal; 2)  $v$  é uma semi-valoração e 3)  $v$  é  $G_0$ -,  $G_1$ -,  $H_0$ - e  $H_1-A_1, \dots, A_n$ -normal.

PROVA. A) Se  $v$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração, a prova segue de 2.1 e 2.4.

B) Seja  $A_1, \dots, A_n$  uma sequência normal e  $v$  uma função de  $\text{FOR}_{L_1}$  em  $\{0,1\}$  satisfazendo 2) e 3). A prova procede por indução em  $n$ . Se  $n = 1$ , segue-se de

2) que  $v$  é uma  $A_1$ -valoração. Seja  $n > 1$ . Caso  $A_n \neq \forall A_m$ , para todo  $m < n$ , trivialmente  $v$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração. Suponhamos que  $A_n = GA_m$ , para algum  $m < n$ . (Se  $A_n = HA_m$ , a prova é análoga.)

O caso  $v(A_n) = 0$  não traz diferenças em relação a Kt (v. I.2.8). Seja então  $v(A_n) = 1$ . Como  $v$  é  $G_1-A_1, \dots, A_n$ -normal, existe uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração  $v^*$  tal que  $v(n)v^*$ . Obviamente  $v^*$  é uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração,  $v^*(A_m) = 1$  e  $v(n-1)v^*$ . Suponhamos agora que existe  $p$ , existe  $q$ ,  $q < p < n$  tais que

$A_p = GA_q$  e  $v(A_p) = 0$ . A prova então segue como em I.2.8 e, por 2.1,  $v$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração.

Como II.3. CORREÇÃO. Temos  $f(A_n) = 1$ , i.e.,  $f(GA_m) = 1$ , e  $f(-GA_m) = 0$ .

mi-valoração (v, a prova em Kt),  $f(G-A) = 0$ . Por I.4.1 existe um conjunto

II.3.1. LEMA. Seja  $v$  uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração; então, para  $1 \leq i \leq n$ , se  $A_i$  é um axioma de Km,  $v(A_i) = 1$ .

PROVA. a) Se  $A_i$  é uma axioma de Kt, prova-se como em Kt que  $v(A_i) = 1$ .

b) Seja  $A_i$  da forma  $\nabla - A \rightarrow -\nabla A$ . Suponhamos que  $v(A_i) = 0$ . Então  $v(\nabla - A) = 1$  e  $v(-\nabla A) = 0$ . Logo,  $v(\nabla A) = 1$ . Para  $\nabla = G$ , por 2.5 existe uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração  $v^*$  tal que  $v^*(A) = 1$  e  $v^*(n)v^*$ ; logo,  $v^* \models \varepsilon(\{A_1, \dots, A_n\}_{v^*, 1}^G)$ . Então temos que  $v^*(-A) = 1$ ,  $v^*(A) = 0$  - uma contradição. Logo,  $v(A_i) = 1$ . Para  $\nabla = H$ , a prova é análoga.

Os lemas e teoremas I.3.2 a I.3.5 (do capítulo sobre Kt) aplicam-se imediatamente a Km, sem alteração a não ser substituir-se "Kt" por "Km". Não iremos, portanto, repeti-los aqui.

#### II.4. COMPLETEUDE

Similarmente, tudo o que foi mencionado sobre a completude de Kt aplica-se imediatamente a Km, com as alterações óbvias. A única diferença real acontece na prova do teorema correspondente a I.4.3. Vamos então desenvolvê-lo aqui.

II.4.1. TEOREMA. Para todo conjunto  $\Delta$ , toda fórmula  $F$ , toda sequência  $A_1, \dots, A_n$ , toda função  $f$ , se  $\Delta$  é um conjunto  $F$ -saturado, e  $A_1, \dots, A_n$  uma sequência normal, a função característica  $f$ , de  $\Delta$ , é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração.

PROVA. A prova procede como em Kt (v. I.4.3). O caso em que há diferença é quando, para algum  $m < n$ ,  $A_n = \nabla A_m$  e  $f(A_n) = 1$ . Suponhamos que  $\nabla = G$ . (Para  $\nabla = H$ , a prova é análoga.) Temos  $f(A_n) = 1$ , i.e.,  $f(GA_m) = 1$ , e  $f(-GA_m) = 0$ . Como  $\vdash G-A_m \rightarrow -GA_m$ ,  $\Delta \vdash G-A_m \rightarrow -GA_m$ , e  $f(G-A_m \rightarrow -GA_m) = 1$ . Uma vez que  $f$  é se mi-valorção (v. a prova em Kt),  $f(G-A_m) = 0$ . Por I.4.1 existe um conjunto  $\Delta^* -A_m$ -saturado tal que  $\varepsilon(\Delta^G) \subset \Delta^*$ . Por I.4.2  $\varepsilon(\Delta^{*H}) \subset \Delta$ . Seja  $f^*$  a função característica de  $\Delta^*$ . Pela hipótese de indução  $f$  e  $f^*$  são  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valorações. Ora,  $\{A_1, \dots, A_{n-1}\}_{f,1}^G \subset \Delta$ , logo,  $\varepsilon(\{A_1, \dots, A_{n-1}\}_{f,1}^G) \subset \varepsilon(\Delta^G) \subset \Delta^*$ . Então  $f^* \models \varepsilon(\{A_1, \dots, A_{n-1}\}_{f,1}^G)$ . Por outro lado,  $\{A_1, \dots, A_{n-1}\}_{f^*,1}^H \subset \Delta^*$ ; portanto,  $\varepsilon(\{A_1, \dots, A_{n-1}\}_{f^*,1}^H) \subset \varepsilon(\Delta^{*H}) \subset \Delta$ . Então  $f \models \varepsilon(\{A_1, \dots, A_{n-1}\}_{f^*,1}^H)$ . Segue-se que  $f(n-1)f^*$ . E, como  $\Delta^*$  é  $-A_m$ -saturado,  $f^*(-A_m) = 0$ ,  $f^*(A_m) = 1$ . Assim, existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $f^*$  tal que  $f^*(A_m) = 1$  e  $f(n-1)f^*$ . Supondo-se agora que existe  $p$ , existe  $q$ ,  $q < p < n$  tais que  $A_p = GA_q$  e  $f(A_p) = 0$ , a prova segue como em Kt. E, por 2.1,  $f$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração.

(Landin 1974, p.85)

Formamos uma base axiomática para Kr adicionando aos postulados de Kt o seguinte esquema de axioma:

A10.  $GA \rightarrow A$ .

Não há necessidade de se acrescentar  $HA \rightarrow A$  como postulado, pois esta fórmula pode ser deduzida a partir de A10.

Entre os teoremas de Kr, temos:

T25.  $HA \rightarrow A$

T26.  $A \rightarrow FA, A \rightarrow PA$

T27.  $G-A \rightarrow -GA, H-A \rightarrow -HA$

T28.  $GGA \rightarrow GA, HHA \rightarrow HA$



T28.  $GA \rightarrow (A \rightarrow \neg \neg GA)$ ,  $HA \rightarrow (A \rightarrow \neg \neg HA)$  <sup>13</sup>

Note-se que T27 corresponde aos axiomas A8 e A9 de Km. Portanto, Km é um subsistema de Kr.

### Capítulo III

#### O CÁLCULO Kr

As propriedades 1.1.1 e 1.1.2 também valem para Kr.

#### III.1. APRESENTAÇÃO

##### III.2. VALORAÇÕES PARA Kr

Kr (v. Landim 1974, p.84) é um dos vários sistemas que poderiam ser chamados "lógicas do tempo circular" - ou seja, que procuram exprimir a circularidade do tempo. Contudo, caso suponhamos tal circularidade, nem todas as fórmulas que seriam intuitivamente válidas são teoremas de Kr (e.g.,  $GA \rightarrow HA$ ). Estudaremos no próximo capítulo um outro cálculo, Ks, onde  $GA \rightarrow HA$ , por exemplo, é um teorema. Juntando Kr e Ks obtemos um sistema do qual todas as fórmulas que intuitivamente exprimem a circularidade do tempo são teoremas. (Cf. Landim 1974, p.85)

Formamos uma base axiomática para Kr adicionando aos postulados de Kt o seguinte esquema de axioma:

A10.  $GA \rightarrow A$ .

III.2.2. Não há necessidade de se acrescentar  $HA \rightarrow A$  como postulado, pois esta fórmula pode ser deduzida a partir de A10.

Entre os teoremas de Kr, temos:

T25.  $HA \rightarrow A$

T26.  $A \rightarrow FA$ ,  $\neg A \rightarrow PA$

T27.  $G\neg A \rightarrow \neg GA$ ,  $H\neg A \rightarrow \neg HA$

T28.  $GGA \rightarrow GA$ ,  $HHA \rightarrow HA$  (por exemplo).

T29.  $GA \rightarrow (A \rightarrow -H-GA), HA \rightarrow (A \rightarrow -G-HA)$ <sup>13</sup>

Note-se que T27 corresponde aos axiomas A8 e A9 de Km. Portanto, Km é um subsistema de Kr.

As propriedades I.1.1 e I.1.2 também valem para Kr.

III.2.3. LEMA. Seja  $A_1, \dots, A_n$  uma sequência normal,  $v$  uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração. III.2. VALORAÇÕES PARA Kr

As alterações, com respeito a Kt, são poucas.

III.2.1. DEFINIÇÃO. ( $A_1, \dots, A_n$ -valoração para Kr) A mesma de Kt (v. I.2.1.), alterando-se apenas o item abaixo:

2) II) se  $v(A_n) = 1$ , então  $v(A_m) = 1$  e para todo  $p$ , todo  $q$ ,  $q < p < n$ , tais que  $A_p = \nabla A_q$  e  $v(A_p) = 0$ , existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $v_p$  tal que  $v_p(A_q) = 0, v_p(A_m) = 1$  e, para  $\nabla = G, v(n-1)v_p$ ; para  $\nabla = H, v_p(n-1)v$ .

As valorações para Kr, convém lembrar, são obtidas pela definição geral (0.11). A definição de extensão canônica é a mesma de Kt (I.2.4). Prova-se que as extensões canônicas são semi-valorações da mesma forma que em I.2.5.

III.2.2. DEFINIÇÃO. Seja  $v$  uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração. Para  $1 \leq k \leq n$ , dizemos III.2.4. LEMA. Seja  $v$  uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração. Então  $v$  é  $G_1, G_2, H_1, H_2$ -que:

a)  $v$  é  $\nabla_0-A_1, \dots, A_k$ -normal se, para todo  $p$ , todo  $q$ ,  $q < p \leq k$ , tais que  $A_p =$

<sup>13</sup> A adição do esquema T28 a Kt gera o cálculo Kd - a "lógica do tempo denso". Adicionando o esquema T29 a Kt, teríamos uma "lógica do tempo discreto" - Ke. (V. Burgess 1979, p.570) Uma vez que tanto T28 como T29 são dedutíveis em Kr, não é possível fazer a distinção entre o caráter denso ou discreto do tempo. Tal só pode ser feito a partir de um cálculo que não tenha as duas fórmulas como teoremas (Kd, por exemplo).

$\nabla A_q$  e  $v(A_p) = 0$ , existe uma  $A_1, \dots, A_k$ -valoração  $v_p$  tal que  $v_p(A_q) = 0$  e, para  $\nabla = G$ ,  $v(k)v_p$ ; para  $\nabla = H$ ,  $v_p(k)v$ ;

b)  $v$  é  $\nabla_1-A_1, \dots, A_k$ -normal se, para todo  $p$ , todo  $q$ ,  $q < p \leq k$  tais que  $A_p = \nabla A_q$  e  $v(A_p) = 1$ ,  $v(A_q) = 1$ .

III.2.3. LEMA. Seja  $A_1, \dots, A_n$  uma sequência normal,  $v$  uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração e  $v'$  a extensão canônica de  $v$  a  $A_1, \dots, A_n$ . Suponhamos ainda que  $v$  é  $G_0$ -,  $G_1$ -,  $H_0$ - e  $H_1-A_1, \dots, A_{n-1}$ -normal. Nesse caso,  $v'$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração. PROVA. Por I.2.3 e por construção,  $v'$  é uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração. A prova procede então por indução em  $n$ , como em I.2.5. A diferença com relação à prova em Kt ocorre quando  $A_n = \nabla A_m$ , para algum  $m < n$ , e  $v'(A_n) = 1$ . Seja  $\nabla = G$ . (Para  $\nabla = H$ , a prova é análoga.) Como  $v$  é  $G_1$ - e  $H_1-A_1, \dots, A_{n-1}$ -normal, para todo  $p$ , todo  $q$ ,  $q < p < n$ , se  $A_p = GA_q$  ou  $A_p = HA_q$ , e  $v(A_p) = 1$ ,  $v(A_q) = 1$ . Ou seja,  $v \models \varepsilon(\{A_1, \dots, A_{n-1}\}_{v,1}^G)$  e  $v \models \varepsilon(\{A_1, \dots, A_{n-1}\}_{v,1}^H)$ . Por 0.17,  $v(n-1)v$ . Temos agora, de I.2.2.B.2.a, para toda  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $\bar{v}$ , se  $\bar{v}(n-1)v$ , então  $\bar{v}(A_m) = 1$ . Segue-se que  $v(A_m) = 1$ . Suponhamos então que existe  $p$ , existe  $q$ ,  $q < p < n$  tais que  $A_p = GA_q$  e  $v'(A_p) = 0$ . Prova-se como em I.2.5 que existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $v_p$  tal que  $v_p(A_q) = 0$ ,  $v_p(A_m) = 1$  e  $v_p(n-1)v_p$ . Além disso, como  $v(A_m) = 1$ ,  $v'(A_m) = 1$ . Por 2.1,  $v'$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração.

III.2.5. TEOREMA.  $v$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração sse: 1)  $A_1, \dots, A_n$  é uma sequência normal.

III.2.4. LEMA. Seja  $v$  uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração. Então  $v$  é  $G_0$ -,  $G_1$ -,  $H_0$ - e  $H_1-A_1, \dots, A_n$ -normal.

PROVA. A prova é feita do modo habitual, por indução em  $n$ . A propriedade é trivial para  $n = 1$ . Seja portanto  $n > 1$ . Temos imediatamente que (¶) as extensões canônicas das  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valorações até  $A_1, \dots, A_n$  são  $A_1, \dots, A_n$ -valorações. relação a I.2.3 ocorre quando  $n > 1$ ,  $A_n = \nabla A_m$ , para algum  $m < n$ , e

$v(A_n) = 1$ . Prova-se que  $v$  é  $G_0$ - e  $H_0-A_1, \dots, A_n$ -normal do mesmo modo como prova

mos em Kt (v. I.2.6) que as  $A_1, \dots, A_n$ -valorações são  $G$ - e  $H$ - $A_1, \dots, A_n$ -normais. Resta provar que  $\nu$  é  $G_1$ - e  $H_1$ - $A_1, \dots, A_n$ -normal, e para isto teríamos três casos a considerar. Quando  $A_n \neq \nabla A_m$ , para todo  $m < n$ , a prova é imediata. Seja  $A_n = \nabla A_m$ , para algum  $m < n$ , e seja  $\nabla = G$ . (Se  $\nabla = H$ , a prova é similar.)

I) Seja  $\nu(A_n) = 0$ . Segue-se disto e do fato de que  $\nu$  é  $G_1$ - $A_1, \dots, A_{n-1}$ -normal que, para todo  $p$ , todo  $q$ ,  $q < p \leq n$  tais que  $A_p = GA_q$  e  $\nu(A_p) = 1$ , que  $\nu(A_q) = 1$ . Ou seja,  $\nu$  é  $G_1$ - $A_1, \dots, A_n$ -normal. Além disso, como  $A_n$  não é de forma HF, para alguma  $F$ , e  $\nu$  é  $H_1$ - $A_1, \dots, A_{n-1}$ -normal, temos que para todo  $p$ , todo  $q$ ,  $q < p \leq n$  tais que  $A_p = HA_q$  e  $\nu(A_p) = 1$ ,  $\nu(A_q) = 1$ . Ou seja,  $\nu$  é  $H_1$ - $A_1, \dots, A_n$ -normal.

II) Seja  $\nu(A_n) = 1$ . Prova-se que  $\nu$  é  $H_1$ - $A_1, \dots, A_n$ -normal como no caso I) acima. Pela definição 2.1 temos que  $\nu(A_m) = 1$ . I.e., para  $p = n$ ,  $q = m$ ,  $A_p = GA_q$  e  $\nu(A_p) = 1$ ,  $\nu(A_q) = 1$ . E como  $\nu$  é  $G_1$ - $A_1, \dots, A_{n-1}$ -normal, segue-se que  $\nu$  é  $G_1$ - $A_1, \dots, A_n$ -normal.

O Corolário deste lema, correspondente a I.2.7, é enunciado e prova do do mesmo modo que em Kt.

III.2.5. TEOREMA.  $\nu$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração sse: 1)  $A_1, \dots, A_n$  é uma sequência normal; 2)  $\nu$  é uma semi-valoração e 3)  $\nu$  é  $G_0$ -,  $G_1$ -,  $H_0$ - e  $H_1$ - $A_1, \dots, A_n$ -normal.

PROVA. A) Se  $\nu$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração, a prova segue de 2.1 e 2.4.

B) Seja  $A_1, \dots, A_n$  uma sequência normal e  $\nu$  uma função de  $\text{FOR}_{L_1}$  em  $\{0,1\}$  satisfazendo 2) e 3). A prova é feita por indução em  $n$ , como em I.2.8. A diferença com relação a I.2.8 ocorre quando  $n > 1$ ,  $A_n = \nabla A_m$ , para algum  $m < n$ , e  $\nu(A_n) = 1$ . Seja  $\nabla = G$ . (Para  $\nabla = H$ , analogamente.) Como  $\nu$  é  $G_1$ - $A_1, \dots, A_{n-1}$ -nor-

mal,  $v(A_m) = 1$ . Suponhamos então que existe  $p$ , existe  $q$ ,  $q < p < n$ , tais que  $A_p = GA_q$  e  $v(A_p) = 0$ . A prova então segue como I.2.8 e, por 2.1,  $v$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração.  $GA_m \rightarrow A_m$ , logo,  $\Delta \vdash A_m$ .  $A_m \in \Delta$  e  $f(A_m) = 1$ . Supondo-se agora que existe  $p$ , existe  $q$ ,  $q < p < n$  tais que  $A_p = GA_q$  e  $f(A_p) = 0$ , a prova segue como em Kt. E, por 2.1,  $f$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração.

### III.3. CORREÇÃO

III.3.1. LEMA. Seja  $v$  uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração; então, para  $1 \leq i \leq n$ , se  $A_i$  é um axioma de Kr,  $v(A_i) = 1$ .

PROVA. a) Se  $A_i$  é um axioma de Kt, prova-se como em Kt (I.3.1) que  $v(A_i) = 1$ .

b) Seja  $A_i$  da forma  $GA \rightarrow A$ . Suponhamos que  $v(GA) = 1$ . Como  $v$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração, por 2.5  $v(A) = 1$  - e é então impossível que  $v(A_i) = 0$ . Ou seja,  $v(A_i) = 1$ .

Os lemas e teoremas I.3.2 a I.3.5, do capítulo sobre Kt, aplicam-se imediatamente a Kr. Não achamos necessário repeti-los aqui, uma vez que não há alterações.

### III.4. COMPLETUDE.

Da mesma forma, os lemas e teoremas com respeito à completude de Kt aplicam-se a Kr sem alterações (a não ser, é claro, ler-se "Kr" onde se lê "Kt"). Vamos desenvolver aqui apenas o teorema correspondente a I.4.3, que é onde existe uma diferença, se bem que mínima.

III.4.1. TEOREMA. Para todo conjunto  $\Delta$ , toda fórmula  $F$ , toda sequência  $A_1, \dots, A_n$ , toda função  $f$ , se  $\Delta$  é um conjunto  $F$ -saturado e  $A_1, \dots, A_n$  uma sequência normal, a função característica  $f$ , de  $\Delta$ , é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração.

PROVA. A prova procede como em Kt (v. I.4.3). O caso em que há diferença é

quando, para algum  $m < n$ ,  $A_n = \nabla A_m$  e  $f(A_n) = 1$ . Suponhamos que  $\nabla = G$ . (Para  $\nabla = H$ , a prova é análoga.) Temos  $f(A_n) = 1$ , i.e.,  $f(GA_m) = 1$ . Então  $GA_m \in \Delta$ , e  $\Delta \vdash GA_m$ . Ora,  $\vdash GA_m \rightarrow A_m$ ; logo,  $\Delta \vdash A_m$ ,  $A_m \in \Delta$  e  $f(A_m) = 1$ . Supondo-se agora que existe  $p$ , existe  $q$ ,  $q < p < n$  tais que  $A_p = GA_q$  e  $f(A_p) = 0$ , a prova segue como em Kt. E, por 2.1,  $f$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração.

#### IV.1. APRESENTAÇÃO

Conforme havíamos mencionado no capítulo anterior, estudaremos neste capítulo o cálculo Ks (v. Landim 1974, p.89). Formemos uma base axiomática para Ks acrescentando aos postulados de Kt o seguinte esquema de axioma:

A11.  $GA \rightarrow HA$

Não há necessidade de se juntar  $HA \rightarrow GA$  como axioma, pois esta fórmula pode ser provada em Ks. Vejamos então alguns teoremas de Ks:

T30.  $HA \rightarrow GA$

T31.  $\neg G-GA \rightarrow A, \neg H-HA \rightarrow A$

T32.  $FA \rightarrow PA, PA \rightarrow FA$

T33.  $FGA \rightarrow A, PHA \rightarrow A$

T34.  $A \rightarrow GFA, A \rightarrow HPA$

T35.  $GA \leftrightarrow HA, HA \leftrightarrow GA$

T36.  $FA \leftrightarrow PA, PA \leftrightarrow FA$

As propriedades I.1.1 e I.1.2 também são válidas em Ks.

#### IV.2. VALORAÇÕES PARA Ks

IV.2.1. DEFINIÇÃO.  $\nu$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração (para Ks) se  $A_1, \dots, A_n$  é uma sequência normal de Ks e:

1)  $n = 1$  e  $v$  é uma semi-valorção;

2)  $n > 1$ ,  $v$  é uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valorção e, se para algum  $m < n$ ,  $A_n = VA_m$ ,

I) se  $v(A_n) = 0$ , então existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valorção  $v'$  tal que  $v'(A_n) = 0$ ,  $v(n-1)v'$  e  $v'(n-1)v$ ;

## Capítulo IV

### O CÁLCULO Ks

II) se  $v(A_n) = 1$  então para todo  $p, q < p < n$  tais que  $A_p = VA_q$  e  $v(A_p) = 0$  existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valorção  $v_p$  tal que  $v_p(A_p) = 0$ ,  $v_p(A_n) = 1$ ,  $v_p(n-1)v$  e  $v_p(n-1)v$ .

#### IV.1. APRESENTAÇÃO

Conforme havíamos mencionado no capítulo anterior, estudaremos neste capítulo o cálculo Ks (v. Landim 1974, p.89). Formamos uma base axiomática para Ks acrescentando aos postulados de Kt o seguinte esquema de axioma:

A11.  $GA \rightarrow HA$

IV.2.2. Definição (extensão canônica) Como em Kt (v. I.2.21, com nova redação para o item 2) a):

Não há necessidade de se juntar  $HA \rightarrow GA$  como axioma, pois esta fórmula pode ser provada em Ks. Vejamos então alguns teoremas de Ks:

2) a) para  $F = A_n$ ,  $v'(F) = 0$  sse existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valorção  $\bar{v}$  tal que  $\bar{v}(A_n) = 0$ ,  $\bar{v}(n-1)\bar{v}$  e  $\bar{v}(n-1)v$ .

T30.  $HA \rightarrow GA$

T31.  $\neg G-GA \rightarrow A, \neg H-HA \rightarrow A$

T32.  $FA \rightarrow PA, PA \rightarrow FA$

T33.  $FGA \rightarrow A, PHA \rightarrow A$

T34.  $A \rightarrow GFA, A \rightarrow HPA$

T35.  $GA \leftrightarrow HA, HA \leftrightarrow GA$  v uma  $A_1, \dots, A_n$ -valorção. Para  $1 < k \leq n$ , dizemos

T36.  $FA \leftrightarrow PA, PA \leftrightarrow FA$  se para todo  $p$ , todo  $q, q < p \leq k$  tais que  $A_p = VA_q$  e  $v(A_p) = 0$ , existe uma  $A_1, \dots, A_k$ -valorção  $v_p$  tal que  $v_p(A_p) = 0$ ,  $v_p(k)v$  e  $v_p(k)v$ .

As propriedades I.1.1 e I.1.2 também são válidas em Ks.

#### IV.2. VALORAÇÕES PARA Ks

IV.2.1. Definição.  $v$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valorção (para Ks) se  $A_1, \dots, A_n$  é uma sequência normal de Ks e:

Suponha ainda que  $v$  é G-valorção. Nesse caso,  $v'$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valorção.



- 1)  $n = 1$  e  $v$  é uma semi-valorção;
- 2)  $n > 1$ ,  $v$  é uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valorção e, se para algum  $m < n$ ,  $A_n = \nabla A_m$ ,
- I) se  $v(A_m) = 0$ , então existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valorção  $v'$  tal que  $v'(A_m) = 0$ ,  $v(n-1)v'$  e  $v'(n-1)v$ ;
- II) se  $v(A_m) = 1$  então para todo  $p$ , todo  $q$ ,  $q < p < n$  tais que  $A_p = \nabla A_q$  e  $v(A_p) = 0$  existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valorção  $v_p$  tal que  $v_p(A_q) = 0$ ,  $v_p(A_m) = 1$ ,  $v(n-1)v_p$  e  $v_p(n-1)v$ .

Valorações para  $K_s$ , lembremo-nos, são obtidas pela definição geral (0.11). A definição de extensão canônica sofre uma pequena alteração com relação a  $K_t$ :

IV.2.2. DEFINIÇÃO (*extensão canônica*) Como em  $K_t$  (v. I.2.2), com nova redação para o item 2) a):

- 2) a) para  $F = A_n$ ,  $v'(F) = 0$  sse existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valorção  $\bar{v}$  tal que  $\bar{v}(A_m) = 0$ ,  $v(n-1)\bar{v}$  e  $\bar{v}(n-1)v$ .

Prova-se como em I.2.5 que as extensões canônicas são semi-valorções.

IV.2.3. DEFINIÇÃO. Seja  $v$  uma  $A_1, \dots, A_n$ -valorção. Para  $1 < k \leq n$ , dizemos que  $v$  é  $\nabla$ - $A_1, \dots, A_k$ -normal se para todo  $p$ , todo  $q$ ,  $q < p \leq k$  tais que  $A_p = \nabla A_q$  e  $v(A_p) = 0$ , existe uma  $A_1, \dots, A_k$ -valorção  $v_p$  tal que  $v_p(A_q) = 0$ ,  $v(k)v_p$  e  $v_p(k)v$ .

IV.2.4. LEMA. Seja  $A_1, \dots, A_n$  uma sequência normal,  $v$  uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valorção e  $v'$  a extensão canônica de  $v$  a  $A_1, \dots, A_n$ . Suponhamos ainda que  $v$  é  $G$ -e  $H$ - $A_1, \dots, A_{n-1}$ -normal. Nesse caso,  $v'$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valorção.

PROVA. Como em I.2.5.  $v'$  é obviamente uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração; provemos que é  $A_1, \dots, A_n$ -valoração. Seja  $A_n = \nabla A_m$ , para algum  $m < n$ . Se  $v'(A_n) = 0$ , por 2.2 existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $\bar{v}$  tal que  $\bar{v}(A_m) = 0$ ,  $v(n-1)\bar{v}$  e  $\bar{v}(n-1)v$ . Então  $v'(n-1)\bar{v}$  e  $\bar{v}(n-1)v'$ ; logo,  $v'$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração. Consideremos então  $v'(A_n) = 1$ . Suponhamos que existe  $p$ , existe  $q$ ,  $q < p < n$  tais que  $A_p = \nabla A_q$  e  $v'(A_p) = 0$ . Então  $v(A_p) = 0$  e, como  $v$  é  $\nabla$ - $A_1, \dots, A_{n-1}$ -normal, existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $v_p$  tal que  $v_p(A_q) = 0$ ,  $v(n-1)v_p$  e  $v_p(n-1)v$ . Por 2.2.B.2.a,  $v_p(A_m) = 1$  (caso contrário,  $v'(A_n) = 0$ ). E, é claro,  $v'(n-1)v_p$  e  $v_p(n-1)v'$ . Também neste caso, portanto,  $v'$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração.

IV.2.5. LEMA. Seja  $v$  uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração. Então  $v$  é  $G$ - e  $H$ - $A_1, \dots, A_n$ -normal para todo  $p$ , todo  $q$ ,  $q < p < n$  tais que  $A_p = GA_q$  e  $v(A_p) = 0$ , existe uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração  $\bar{v}$  tal que  $\bar{v}(A_q) = 0$ ,  $v(n-1)\bar{v}$  e  $\bar{v}(n-1)v$ .

PROVA. O mecanismo da prova é o mesmo de I.2.6, i.e., por indução em  $n$ . A propriedade é trivial para  $n = 1$ . Seja  $n > 1$ . Da hipótese de indução e do lema anterior, segue-se que (1) as extensões canônicas das  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valorações a  $A_1, \dots, A_n$  são  $A_1, \dots, A_n$ -valorações.

Consideremos o caso importante, isto é, quando  $A_n = \nabla A_m$ , para algum  $m < n$ . Seja  $\nabla = G$ . (Para  $\nabla = H$ , analogamente.)

I)  $v(A_n) = 0$ . Temos:

- 1)  $\varepsilon(\{A_1, \dots, A_n\}_{v,1}^G) = \varepsilon(\{A_1, \dots, A_{n-1}\}_{v,1}^G)$ ;
- 2)  $\varepsilon(\{A_1, \dots, A_n\}_{v,1}^H) = \varepsilon(\{A_1, \dots, A_{n-1}\}_{v,1}^H)$  para toda  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $v'$ .

Por hipótese de indução,  $v$  é  $G$ - $A_1, \dots, A_{n-1}$ -normal. Então:

- 3) para todo  $p$ , todo  $q$ ,  $q < p < n$  tais que  $A_p = GA_q$  e  $v(A_p) = 0$ , existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $v_p$  tal que  $v_p(A_q) = 0$ ,  $v(n-1)v_p$  e  $v_p(n-1)v$ .

Para cada  $p$ , seja  $\bar{v}_p$  a extensão canônica de  $v_p$  a  $A_1, \dots, A_n$ . Então:

- 4)  $\bar{v}_p(A_q) = 0$ ,  $v(n-1)\bar{v}_p$  e  $\bar{v}_p(n-1)v$ .

De 1), 2) e 4), e a definição 0.17,

5)  $v(n)\bar{v}_p$ , e

6)  $\bar{v}_p \models \epsilon(\{A_1, \dots, A_n\}_{v,1}^H)$ .

Precisamos provar então que  $v \models \epsilon(\{A_1, \dots, A_n\}_{v,1}^G)$ . Se  $\bar{v}_p(A_n) = 0$ , não há problema. Seja  $\bar{v}_p(A_n) = 1$ . Nesse caso, por 2.2.B.2.a,  $v(A_m) = 1$  - caso contrário  $\bar{v}_p(A_n) = 0$ . Nos dois casos, portanto:

7)  $v \models \epsilon(\{A_1, \dots, A_n\}_{v,1}^G)$ .

De 6) e 7), por 0.17,

8)  $\bar{v}_p(n)v$ .

De (1), 3), 4), 5) e 8), então:

9) para todo p, todo q,  $q < p < n$  tais que  $A_p = GA_q$  e  $v(A_p) = 0$ , existe uma

$A_1, \dots, A_n$ -valoração  $\bar{v}_p$  tal que  $\bar{v}_p(A_p) = 0$ ,  $v(n)\bar{v}_p$  e  $\bar{v}_p(n)v$ .

Por outro lado, como  $v$  é  $A_1, \dots, A_n$ -valoração, temos, por 2.1 que:

10) existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $v_n$  ( $v_n = v^0$ ) tal que  $v_n(A_m) = 0$ ,

$v(n-1)v_n$  e  $v_n(n-1)v$ .

Seja  $\bar{v}_n$  a extensão canônica de  $v_n$  a  $A_1, \dots, A_n$ . Então:

11)  $\bar{v}_n(A_m) = 0$ ,  $v(n-1)\bar{v}_n$  e  $\bar{v}_n(n-1)v$ .

De 1), 2) e 11),

12)  $v(n)\bar{v}_n$ .

Prova-se por um raciocínio similar ao feito acima que:

13)  $\bar{v}_n(n)v$ .

De (1), 10), 11), 12) e 13),

14) para  $p = n$ ,  $q = m$ ,  $A_p = GA_q$  e  $v(A_p) = 0$ , existe uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração

$\bar{v}_n$  tal que  $\bar{v}_n(A_m) = 0$ ,  $v(n)\bar{v}_n$  e  $\bar{v}_n(n)v$ .

De 9) e 14), então,  $v$  é  $G-A_1, \dots, A_n$ -normal.

O leitor já terá percebido que as diferenças em relação a Kt (I.2.6) são poucas. Onde em Kt tínhamos de provar, por exemplo, que " $v(n)v_p$ ", temos agora de provar que " $v(n)v_p$  e  $v_p(n)v$ " - o que é feito da maneira ilustrada no caso acima. Omitiremos, portanto, os demais casos desta prova, que prossegue como em I.2.6. O leitor não terá dificuldade alguma em desenvolver os casos não apresentados.

teorema não oferece dificuldades, mas para estabelecê-lo necessitamos do lema abaixo:

O lema 2.5 tem um corolário, que é enunciado e provado como seu correspondente em Kt (v. I.2.7).

IV.2.6. TEOREMA.  $v$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração sse: 1)  $A_1, \dots, A_n$  é uma sequência normal; 2)  $v$  é uma semi-valoração; 3)  $v$  é G- e H- $A_1, \dots, A_n$ -normal.

PROVA. Prova-se como o teorema correspondente no capítulo sobre Kt (I.2.8.). As alterações são mínimas, e não oferecem dificuldade alguma.

Para V e H, prova-se da mesma forma.

### IV.3. CORREÇÃO

Demonstrado este lema, a prova do teorema correspondente a I.4.3

IV.3.1. LEMA. Seja  $v$  uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração; então, para  $1 \leq i \leq n$ , se  $A_i$  é um axioma de Ks,  $v(A_i) = 1$ .

PROVA. a) Se  $A_i$  é um axioma de Kt, prova-se como em Kt (I.3.1) que  $v(A_i) = 1$ .

b) Seja  $A_i$  da forma  $GA \rightarrow HA$ . Suponhamos que  $v(A_i) = 0$ . Então  $v(GA) = 1$  e  $v(HA) = 0$ . Por 2.6 existe uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração  $v'$  tal que  $v'(A) = 0$ ,  $v(n)v'$  e  $v_p(n)v$ . Mas então, por 0.17,  $v' \models \varepsilon(\{A_1, \dots, A_n\}_{v,1}^G)$ . Logo,  $v'(A) = 1$  - uma contradição. Portanto,  $v(A_i) = 1$ .

Os lemas e teoremas I.3.2 a I.3.5, de Kt, aplicam-se imediatamente a Ks, sem alteração alguma. Não é necessário, assim, repeti-los aqui.

## IV.4. COMPLETUDE

A seção sobre a completude de Ks apresenta alterações com relação a Kt apenas no teorema correspondente a I.4.3 (ou seja, na prova de que a função característica de um conjunto F-saturado, para alguma F, é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração). A prova de tal teorema não oferece dificuldades, mas para efetuá-la necessitamos do lema abaixo:

IV.4.1. LEMA. Se  $\Delta$  é um conjunto F-saturado,  $\Delta'$  é F'-saturado,  $\varepsilon(\Delta^\nabla) \subset \Delta'$  sse  $\varepsilon(\Delta'^\nabla) \subset \Delta$ .  
 PROVA. Seja  $\nabla = G$ , e suponhamos que  $\varepsilon(\Delta^G) \subset \Delta'$ . Seja  $A \in \varepsilon(\Delta'^G)$ . Então  $GA \in \Delta'$  e  $\Delta' \vdash GA$ . Como  $\vdash GA \rightarrow HA$ ,  $\Delta' \vdash HA$ , e  $HA \in \Delta'$ . Então  $A \in \varepsilon(\Delta'^H)$ . De I.4.2, temos que  $\varepsilon(\Delta^G) \subset \Delta'$  sse  $\varepsilon(\Delta'^H) \subset \Delta$ . Então  $A \in \Delta$ .

Suponhamos agora que  $\varepsilon(\Delta'^G) \subset \Delta$ . A prova é análoga.

Para  $\nabla = H$ , prova-se da mesma forma.

Demonstrado este lema, a prova do teorema correspondente a I.4.3 faz-se sem dificuldade alguma, razão pela qual vamos omiti-la.

A10.  $GA \rightarrow A$

A11.  $GA \rightarrow HA$

A12.  $GA \rightarrow GGA$

Kc3 tem MP como regra de dedução, e apenas RG como regra de prova.

<sup>14</sup> Existem pelo menos dois outros cálculos de tempo circular: Kc e Kc2. (V. Apêndice) Ambos procuram evitar a equivalência entre operadores do passado e do futuro. Intuitivamente, buscam manter a distinção entre passado e futuro a despeito da circularidade do tempo. Estes dois cálculos caracterizam o que C.I. Hamblin denominou de lógica temporal "leste-oeste" - "no sentido em que a Califórnia está a leste, mas não oeste, de Sidney, e oeste, mas não leste, de Manchester". (Citado em Prior 1987, p.65.) Para um exame mais detalhado destes cálculos, ver Prior 1967, cap. IV.

PH pode ser deduzida dos postulados acima, bem como os demais axiomas de Kt (ou seja, A5 e A7). Kt, portanto, é um subsistema de Kc3.

Entre os esquemas de teoremas de Kc3, temos:

### Capítulo V

#### O CÁLCULO Kc3

T37.  $HA \rightarrow A$

T38.  $HA \rightarrow GA$

#### V.1. APRESENTAÇÃO

T39.  $HA \rightarrow HHA$

T40. Kc3 foi apresentado por Prior, se bem que não com esta denominação (v. 1967, cap. IV, seções 1 e 2), e é também um cálculo que procura exprimir a circularidade do tempo.<sup>14</sup> Corresponderia a Kr U Ks, acrescido do postulado característico de Ktt (i.e., a "lógica do tempo transitivo". V. Apêndice.).

T44.  $GGA \rightarrow HA, HHA \rightarrow GA$  (Kc3 contém Kc2)

T45. A linguagem de Kc3 é  $L_1$ . Uma base axiomática para este cálculo pode ser formada adicionando-se aos esquemas de axiomas clássicos (A1 - A3) os seguintes:

T47.  $GA \rightarrow A, HA \rightarrow HA, (A \rightarrow G-HA) \rightarrow A$  (Kc3 contém Kc)

A4.  $G(A \rightarrow B) \rightarrow (GA \rightarrow GB)$

T48.  $-G-GA \rightarrow G, -G-HA \rightarrow A$

A6.  $-G-HA \rightarrow A$

A10.  $GA \rightarrow A$

A11.  $GA \rightarrow HA$

A12.  $GA \rightarrow GGA$

Kc3 tem MP como regra de dedução, e apenas RG como regra de prova.

As propriedades 1.1.1 e 1.1.2 também valem para Kc3.

<sup>14</sup> Existem pelo menos dois outros cálculos de tempo circular: Kc e Kc2. (V. Apêndice) Ambos procuram evitar a equivalência entre operadores do passado e do futuro. Intuitivamente, buscam manter a distinção entre passado e futuro a despeito da circularidade do tempo. Estes dois cálculos caracterizam o que C.L. Hamblin denominou de lógica temporal "leste-oeste" - "no sentido em que a Califórnia está a leste, mas não oeste, de Sidney, e oeste, mas não leste, de Manchester". (Citado em Prior 1967, p.65.) Para um exame mais detalhado destes cálculos, ver Prior 1967, cap. IV.

G e H comportam-se em Kc3 como o operador de necessidade (L) em S5.

RH pode ser deduzida dos postulados acima, bem como os demais axiomas de Kt (ou seja, A5 e A7). Kt, portanto, é um subsistema de Kc3.

Entre os esquemas de teoremas de Kc3, temos:

- T37.  $HA \rightarrow A$
- T38.  $HA \rightarrow GA$
- T39.  $HA \rightarrow HHA$
- T40.  $-G-GA \rightarrow A, -H-HA \rightarrow A$
- T41.  $GA \leftrightarrow HA, HA \leftrightarrow GA$
- T42.  $G-A \rightarrow -GA, H-A \rightarrow -HA$  (Kc3 contém Km)
- T43.  $GGA \rightarrow A, HHA \rightarrow A$  (Kc3 contém Kc)
- T44.  $GGA \rightarrow HA, HHA \rightarrow GA$  (Kc3 contém Kc2)
- T45.  $A \rightarrow (GA \rightarrow (HA \rightarrow HGA)), A \rightarrow (HA \rightarrow (GA \rightarrow GHA))$  (Kc3 contém K1 - "lógica do tempo linear". V. Apêndice)
- T46.  $GGA \rightarrow GA, HHA \rightarrow HA$  (Kc3 contém Kd)
- T47.  $GA \rightarrow (A \rightarrow -H-GA), HA \rightarrow (A \rightarrow -G-HA)$  (Kc3 contém Ke)
- T48.  $-G-GA \rightarrow G-G-A, -H-HA \rightarrow H-H-A$ <sup>15</sup>

Como a única regra de prova de Kc3 é RG, convém lembrar que no item d) ii) da def. 0.7 (consequência sintática) o único valor que o símbolo ' $\phi$ ' pode tomar é 'G'.

As propriedades I.1.1 e I.1.2 também valem para Kc3.

## V.2. VALORAÇÕES PARA Kc3

<sup>15</sup> Todos os cálculos temporais apresentados neste trabalho (com exceção de K3, que veremos a seguir) são subsistemas de Kc3. Vê-se então que Kc3 é dos cálculos mais fortes - o que já era de se esperar, uma vez que os operadores G e H comportam-se em Kc3 como o operador de necessidade (L) em S5.



V.2.1. DEFINIÇÃO. Seja  $A_1, \dots, A_n$  uma sequência normal e  $f, f'$  funções de  $\text{FOR}_{L1}$  em  $\{0,1\}$ . Para  $1 \leq k \leq n$ , dizemos que  $f(\Lambda, k) f'$  sse  $f' \models \{A_1, \dots, A_k\}_{f,1}^G$  e  $f \models \{A_1, \dots, A_k\}_{f',1}^H$ .

V.2.2. DEFINIÇÃO.  $v$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração (para Kc3) se  $A_1, \dots, A_n$  é uma sequência normal e:

- 1)  $n = 1$  e  $v$  é uma semi-valoração;
- 2)  $n > 1$ ,  $v$  é uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração e, se para algum  $m < n$ ,  $A_n = \nabla A_m$ , I) se  $v(A_m) = 0$ , então existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $v'$  tal que  $v'(A_m) = 0$ ,  $v(\Lambda, n-1)v'$  e  $v'(\Lambda, n-1)v$ ;

II) se  $v(A_m) = 1$  então  $v(A_m) = 1$  e, para todo  $p$ , todo  $q$ ,  $q < p < n$  tais que  $A_p = G A_q$  ou  $A_p = H A_q$  e  $v(A_q) = 0$ , existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $v_p$  tal que  $v_p(A_q) = 0$ ,  $v_p(A_m) = 1$ ,  $v(\Lambda, n-1)v_p$  e  $v_p(\Lambda, n-1)v$ .

II) seja  $v'(A_m) = 1$ . Por 2.3.B.2.e, para toda  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $\bar{v}$ , se  $v(\Lambda, n-1)\bar{v}$  a definição de extensão canônica sofre uma pequena alteração com relação a Kt. portanto,  $v(\Lambda, n-1)v$ , e  $v(A_m) = 1$ . Então  $v'(A_m) = 1$ . Suponhamos

V.2.3. DEFINIÇÃO. (*extensão canônica*) A mesma de Kt (v. I.2.2), com nova relação para o seguinte item:

- 2) a) para  $F = A_n$ ,  $v'(F) = 0$  sse existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $\bar{v}$  tal que  $\bar{v}(A_m) = 0$ ,  $v(\Lambda, n-1)\bar{v}$  e  $\bar{v}(\Lambda, n-1)v$ .

V.2.6. LEMA. Seja  $v$  uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração. Então  $v$  é G-, H- e GH- $A_1, \dots, A_n$ -normal. A prova de que as extensões canônicas são semi-valorações é a mesma (I.2.5).

V.2.4. DEFINIÇÃO. Seja  $v$  uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração. Para  $1 \leq k \leq n$ , dizemos extensões canônicas das  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valorações e  $A_1, \dots, A_n$  são  $A_1, \dots, A_n$ -valorações que:

- a)  $v$  é GH- $A_1, \dots, A_k$ -normal se para todo  $p$ , todo  $q$ ,  $q < p \leq k$  tais que  $A_p =$

$GA_q$  ou  $A_p = HA_q$  e  $v(A_p) = 0$ , existe uma  $A_1, \dots, A_k$ -valoração  $v_p$  tal que  $v_p(A_q) = 0$ ,  $v(\Lambda, k)v_p$  e  $v_p(\Lambda, k)v$ ;  
 b)  $v$  é  $\nabla$ - $A_1, \dots, A_k$ -normal se para todo  $p$ , todo  $q$ ,  $q < p \leq k$  tais que  $A_p = \nabla A_q$  e  $v(A_p) = 1$ ,  $v(A_q) = 1$ .

V.2.5. LEMA. Seja  $A_1, \dots, A_n$  uma sequência normal,  $v$  uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração e  $v'$  a extensão canônica de  $v$  a  $A_1, \dots, A_n$ . Suponhamos ainda que  $v$  é G-, H- e GH- $A_1, \dots, A_{n-1}$ -normal. Nesse caso,  $v'$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração.

PROVA. Como em Kt (v. I.2.5). O caso interessante ocorre quando, para algum  $m < n$ ,  $A_n = \nabla A_m$ .

I) seja  $v'(A_n) = 0$ . Por 2.3.B.2.a, existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $\bar{v}$  tal que  $\bar{v}(A_m) = 0$ ,  $v(\Lambda, n-1)\bar{v}$  e  $\bar{v}(\Lambda, n-1)v$ . Obviamente  $v'(\Lambda, n-1)\bar{v}$  e  $\bar{v}(\Lambda, n-1)v'$ . Por 2.1,  $v'$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração.

II) seja  $v'(A_n) = 1$ . Por 2.3.B.2.a, para toda  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $\bar{v}$ , se  $v(\Lambda, n-1)\bar{v}$  e  $\bar{v}(\Lambda, n-1)v$ ,  $\bar{v}(A_m) = 1$ . É claro que  $v \models \{A_1, \dots, A_{n-1}\}_{v,1}^G$  e  $v \models \{A_1, \dots, A_{n-1}\}_{v,1}^H$ ; portanto,  $v(\Lambda, n-1)v$ , e  $v(A_m) = 1$ . Então  $v'(A_m) = 1$ . Suponhamos que existe  $p$ , existe  $q$ ,  $q < p < n$  tais que  $A_p = GA_q$  ou  $A_p = HA_q$  e  $v'(A_p) = 0$ . Prova-se da maneira usual (v. I.2.5) que existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $v_p$  tal que  $v_p(A_q) = 0$ ,  $v'(\Lambda, n-1)v_p$ ,  $v_p(\Lambda, n-1)v'$  e  $v_p(A_m) = 1$ . Por 2.1,  $v'$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração.

V.2.6. LEMA. Seja  $v$  uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração. Então  $v$  é G-, H- e GH- $A_1, \dots, A_n$ -normal.

PROVA. Do modo habitual, por indução em  $n$ . A propriedade é trivial para  $n = 1$ . Seja  $n > 1$ . Da hipótese de indução e do lema anterior segue-se que (¶) as extensões canônicas das  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valorações a  $A_1, \dots, A_n$  são  $A_1, \dots, A_n$ -valorações.

A prova de que  $v$  é G- e H- $A_1, \dots, A_n$ -normal é feita exatamente co-

mo em Kr (v. III.2.4). Resta então provar que  $v$  é  $\text{GH-}A_1, \dots, A_n$ -normal. Suponhamos que, para algum  $m < n$ ,  $A_m = \nabla A_m$  e  $\nabla = G$ . (Para  $\nabla = H$ , analogamente.)

I) Seja  $v(A_n) = 0$ . Então:

- 1)  $\{A_1, \dots, A_n\}_{v,1}^G = \{A_1, \dots, A_{n-1}\}_{v,1}^G$ ;
- 2)  $\{A_1, \dots, A_n\}_{v,1}^H = \{A_1, \dots, A_{n-1}\}_{v,1}^H$ , para toda  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $v'$ .

Como  $v$  é  $\text{GH-}A_1, \dots, A_{n-1}$ -normal, temos:

- 3) para todo  $p$ , todo  $q$ ,  $q < p < n$  tais que  $A_p = \text{GA}_q$  ou  $A_p = \text{HA}_q$  e  $v(A_p) = 0$ , existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $v_p$  tal que  $v_p(A_q) = 0$ ,  $v(\Lambda, n-1)v_p$  e  $v_p(\Lambda, n-1)v$ .

Para cada  $p$ , seja  $\bar{v}_p$  a extensão canônica de  $v_p$  a  $A_1, \dots, A_n$ . Então:

- 4)  $\bar{v}_p(A_q) = 0$ ,  $v(\Lambda, n-1)\bar{v}_p$  e  $\bar{v}_p(\Lambda, n-1)v$ .

De 1), 2) e 4), por 2.1,

- 5)  $\bar{v}_p \models \{A_1, \dots, A_n\}_{v,1}^G$ ,  $\bar{v}_p \models \{A_1, \dots, A_n\}_{v,1}^H$  e  $v \models \{A_1, \dots, A_n\}_{v,1}^H$ .

De 5),

- 6)  $v(\Lambda, n)\bar{v}_p$ .

Uma vez que  $v(\Lambda, n-1)v_p$  e  $v_p(\Lambda, n-1)v$ , temos que  $v \models \{A_1, \dots, A_{n-1}\}_{v,1}^G$

e  $v_p \models \{A_1, \dots, A_{n-1}\}_{v,1}^G$ ; logo,  $\{A_1, \dots, A_{n-1}\}_{v,1}^G = \{A_1, \dots, A_{n-1}\}_{v_p,1}^G$ . Como

$v(A_n) = 0$ , por 2.2 existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $v'$  tal que  $v'(A_m) = 0$ ,  $v(\Lambda, n-1)v'$  e  $v'(\Lambda, n-1)v$ . Segue-se disso que  $v'(\Lambda, n-1)v_p$  e  $v_p(\Lambda, n-1)v'$ ; por

2.3,  $\bar{v}_p(A_n) = 0$ . Então  $\{A_1, \dots, A_{n-1}\}_{v_p,1}^G = \{A_1, \dots, A_n\}_{v_p,1}^G$  e, portanto:

- 7)  $v \models \{A_1, \dots, A_n\}_{v,1}^G$ .

De 5) e 7),

- 8)  $\bar{v}_p(\Lambda, n)v$ .

Assim, de (1), 3), 4), 6) e 8), temos:

9) para todo  $p$ , todo  $q$ ,  $q < p < n$  tais que  $A_p = GA_q$  ou  $A_p = HA_q$  e  $v(A_p) = 0$ , existe uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração  $\bar{v}_p$  tal que  $\bar{v}_p(A_q) = 0$ ,  $v(\Lambda, n)\bar{v}_p$  e  $\bar{v}_p(\Lambda, n)v$ .

Temos que  $v(A_n) = 0$ , portanto:

10) existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $v_n$  ( $v_n = v'$ ) tal que  $v_n(A_m) = 0$ ,  $v(\Lambda, n-1)v_n$  e  $v_n(\Lambda, n-1)v$ .

Seja  $\bar{v}_n$  a extensão canônica de  $v_n$  a  $A_1, \dots, A_n$ . Então:

11)  $\bar{v}_n(A_m) = 0$ ,  $v(\Lambda, n-1)\bar{v}_n$  e  $\bar{v}_n(\Lambda, n-1)v$ .

De 1), 2) e 11),

12)  $\bar{v}_n \models \{A_1, \dots, A_n\}_{v,1}^G$ ,  $\bar{v}_n \models \{A_1, \dots, A_n\}_{v,1}^H$  e  $v \models \{A_1, \dots, A_n\}_{v,1}^H$ .

De 12),

13)  $v(\Lambda, n)\bar{v}_n$ .

Ora, obviamente  $v_n(\Lambda, n-1)v_n$ , e, como  $v_n(A_m) = 0$ , por 2.3  $\bar{v}_n(A_n) = 0$ .

Então  $\{A_1, \dots, A_n\}_{v,1}^G = \{A_1, \dots, A_{n-1}\}_{v,1}^G$ , e, portanto,

14)  $v \models \{A_1, \dots, A_n\}_{v,1}^G$ .

De 12) e 14),

15)  $\bar{v}_n(\Lambda, n)v$ .

Assim, de (11), 10), 13) e 15), temos:

16) para  $p = n$ ,  $q = m$ ,  $A_p = GA_q$  e  $v(A_p) = 0$ , existe uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração  $\bar{v}_n$  tal que  $\bar{v}_n(A_m) = 0$ ,  $v(\Lambda, n)\bar{v}_n$  e  $\bar{v}_n(\Lambda, n)v$ .

De 9) e 16), então, temos que  $v$  é GH- $A_1, \dots, A_n$ -normal.

II) Seja  $v(A_n) = 1$ . Então: Além disso, para  $1 \leq i < n$ ,  $v^*(A_i) = v(A_i)$ . Como  $v$  é uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração,  $v^*$  é uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração. Provemos

$$17) \{A_1, \dots, A_n\}_{v,1}^G = \{A_1, \dots, A_{n-1}\}_{v,1}^G \cup \{A_n\}.$$

De 2.2.2.II temos, uma vez que  $v(A_n) = 1$ ,

$$18) v(A_m) = 1 \text{ e para todo } p, \text{ todo } q, q < p < n \text{ tais que } A_p = GA_q \text{ ou } A_p = HA_q \text{ e } v(A_p) = 0, \text{ existe uma } A_1, \dots, A_{n-1}\text{-valoração } v_p \text{ tal que } v_p(A_q) = 0, v_p(A_m) = 1, v(\Lambda, n-1)v_p \text{ e } v_p(\Lambda, n-1)v.$$

Para cada  $p$ , seja  $\bar{v}_p$  a extensão canônica de  $v_p$  a  $A_1, \dots, A_n$ . Então:

$$19) \bar{v}_p(A_q) = 0, v(\Lambda, n-1)\bar{v}_p \text{ e } \bar{v}_p(\Lambda, n-1)v.$$

De 2) e 19),

$$20) v(\Lambda, n)\bar{v}_p.$$

Como  $v(A_n) = 1$ , temos, de 19), que:

$$21) v \models \{A_1, \dots, A_n\}_{v,1}^G.$$

Temos agora duas possibilidades:

(A) Suponhamos que  $\bar{v}_p(A_n) = 1$ . Então  $\bar{v}_p \models \{A_1, \dots, A_n\}_{v,1}^G$ . Disso e de 21),  $\bar{v}_p(\Lambda, n)v$ . De (1), 18) e 20),  $v$  é GH- $A_1, \dots, A_n$ -normal.

(B) Suponhamos que  $\bar{v}_p(A_n) = 0$ . Definamos, para cada  $p$ , uma nova função  $v_p^*$  de  $\text{FOR}_{L_1}$  em  $\{0,1\}$ , da seguinte maneira: para qualquer fórmula  $F$ ,

a) se  $A_n$  não é subfórmula de  $F$ , então  $v_p^*(F) = v_p(F)$ ;

b) se  $A_n$  é subfórmula de  $F$ , então:

b.1) para  $F = A_n$ ,  $v_p^*(F) = 1$ ;

b.2) para  $F = \neg F'$ ,  $v_p^*(F) = 1$  sse  $v_p^*(F') = 0$ ;

b.3) para  $F = F' \rightarrow F''$ ,  $v_p^*(F) = 1$  sse  $v_p^*(F') = 0$  ou  $v_p^*(F'') = 1$ ;

b.4) para  $F = \nabla F'$ ,  $v_p^*(F) = v_p(F)$ .

É fácil ver, pelo mesmo raciocínio utilizado na prova do lema I.2.3, que  $v_p^*$  é uma semi-valoração. Além disso, para  $1 \leq i < n$ ,  $v_p^*(A_i) = v_p(A_i)$ . Co-

mo  $v_p$  é uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração,  $v_p^*$  é uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração. Provemos

que  $v_p^*$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração. Temos que  $v_p(A_m) = 1$ ; logo,  $v_p^*(A_m) = 1$ . Suponhamos então que existe  $r$ , existe  $s$ ,  $s < r < n$  tais que  $A_r = GA_s$  ou  $A_r = HA_s$  e  $v_p^*(A_r) = 0$ . Ora,  $\{A_1, \dots, A_{n-1}\}_{v_p^*, 1}^G = \{A_1, \dots, A_{n-1}\}_{v_p, 1}^G$ . Assim, como  $v(\Lambda, n-1)v_p$  e  $v_p(\Lambda, n-1)v$ , segue-se que  $v(\Lambda, n-1)v_p^*$ ,  $v_p^*(\Lambda, n-1)v$ , e que  $\{A_1, \dots, A_{n-1}\}_{v_p, 1}^G = \{A_1, \dots, A_{n-1}\}_{v_p^*, 1}^G$ . Portanto, para cada  $r$  tal que  $v_p^*(A_r) = 0$ ,  $v(A_r) = 0$ . De 2.2.2.II, existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $v_r$  tal que  $v_r(A_q) = 0$ ,  $v_r(A_m) = 1$ ,  $v_r(\Lambda, n-1)v_r$  e  $v_r(\Lambda, n-1)v$ . Mas então  $v_p^*(\Lambda, n-1)v_r$ ,  $v_r(\Lambda, n-1)v_p^*$ , e por 2.2,  $v_p^*$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração. Como  $v_p^*(A_n) = 1$ ,  $v_p^* \models \{A_1, \dots, A_n\}_{v_p, 1}^G$ ; e, claro,  $v \models \{A_1, \dots, A_n\}_{v_p^*, 1}^G$ ,  $v_p^* \models \{A_1, \dots, A_n\}_{v, 1}^H$  e  $v \models \{A_1, \dots, A_n\}_{v_p^*, 1}^H$ . Segue-se disso que  $v(\Lambda, n)v_p^*$  e  $v_p^*(\Lambda, n)v$ . Assim, para todo  $p$ , todo  $q$ ,  $q < p \leq n$  tais que  $A_p = GA_q$  ou  $A_p = HA_q$  e  $v(A_p) = 0$ , existe uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração  $v_p^*$  tal que  $v_p^*(A_q) = 0$ ,  $v(\Lambda, n)v_p^*$  e  $v_p^*(\Lambda, n)v$ . Ou seja,  $v$  é  $GH-A_1, \dots, A_n$ -normal.

O Lema 2.6 tem um corolário (que corresponde a I.2.7). Este corolário é enunciado e provado como em I.2.7.

V.2.7. TEOREMA.  $v$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração sse: 1)  $A_1, \dots, A_n$  é uma seqüência normal; 2)  $v$  é uma semi-valoração; 3)  $v$  é  $G$ -,  $H$ - e  $GH-A_1, \dots, A_n$ -normal.

PROVA. A prova é feita como em I.2.8. As alterações são irrelevantes.

### V.3. CORREÇÃO

#### V.4. COMPLETIDE

V.3.1. LEMA. Seja  $v$  uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração; então, para  $1 \leq i \leq n$ , se  $A_i$  é um axioma de Kc3,  $v(A_i) = 1$ .

PROVA. a) se  $A_i$  é um axioma do cálculo proposicional clássico, segue-se fa-

çamos antes provar o seguinte lema:

cilmente, do fato de que  $v$  é uma semi-valorção, que  $v(A_i) = 1$ .

b)  $A_i$  é de forma  $G(A \rightarrow B) \rightarrow (GA \rightarrow GB)$ . Suponhamos que  $v(A_i) = 0$ . Então

$v(G(A \rightarrow B)) = v(GA) = 1$ , e  $v(GB) = 0$ . Por 2.7 existe uma  $A_1, \dots, A_n$ -valorção

$v'$  tal que  $v'(B) = 0$ ,  $v(\Lambda, n)v'$  e  $v'(\Lambda, n)v$ . Ou seja,  $v' \models \{A_1, \dots, A_n\}_{v, 1}^G$ . En-

tão  $v'(GA) = v'(G(A \rightarrow B)) = 1$ . Por 2.7,  $v'(A) = v'(A \rightarrow B) = 1$  - e não é possível  $v'(B) = 0$ . Então  $v(A_i) = 1$ .

c)  $A_i$  é de forma  $\neg G\text{-}HA \rightarrow A$ . Suponhamos que  $v(\neg G\text{-}HA) = 1$ . Então  $v(G\text{-}HA) = 0$ .

Por 2.7 existe uma  $A_1, \dots, A_n$ -valorção  $v'$  tal que  $v'(\neg HA) = 0$ ,  $v(\Lambda, n)v'$  e

$v'(\Lambda, n)v$ . Ora, então  $v'(HA) = 1$  e, como  $v' \models \{A_1, \dots, A_n\}_{v, 1}^H$ ,  $v(A) = 1$ . Assim,  $v(A_i) = 1$ .

d)  $A_i$  é de forma  $GA \rightarrow A$ . Se  $v(GA) = 1$ , por 2.7  $v(A) = 1$ . Então  $v(A_i) = 1$ .

e)  $A_i$  é de forma  $GA \rightarrow HA$ . Se  $v(A_i) = 0$ ,  $v(GA) = 1$  e  $v(HA) = 0$ . Por 2.7 existe

uma  $A_1, \dots, A_n$ -valorção  $v'$  tal que  $v'(A) = 0$ ,  $v(\Lambda, n)v'$  e  $v'(\Lambda, n)v$ . Então

$v' \models \{A_1, \dots, A_n\}_{v, 1}^G$ , e  $v'(A) = 1$ : uma contradição. Logo,  $v(A_i) = 1$ .

f)  $A_i$  é de forma  $GA \rightarrow GGA$ . Se  $v(A_i) = 0$ , então  $v(GA) = 1$  e  $v(GGA) = 0$ . Por

2.7 existe uma  $A_1, \dots, A_n$ -valorção  $v'$  tal que  $v'(GA) = 0$ ,  $v(\Lambda, n)v'$  e

$v'(\Lambda, n)v$ . Então  $v' \models \{A_1, \dots, A_n\}_{v, 1}^G$ , e  $v'(GA) = 1$ : uma contradição. Logo,

$v(A_i) = 1$ .

Os lemas e teoremas I.3.2 a I.3.5, sobre a correção de Kt, aplicam-

-se a Kc3 sem alteração alguma, de modo que não vamos repeti-los aqui.

#### V.4. COMPLETEUDE

Vamos desenvolver aqui apenas o teorema correspondente a I.4.3. que é onde há alguma diferença em relação ao capítulo sobre Kt. Para tanto, necessitamos antes provar o seguinte lema:



V.4.1. LEMA. Se  $\Delta$  é F-saturado, e  $\Delta'$  é F'-saturado, por 4.1,  $A_m \in \Delta$ , e  $f(A_m) = 0$ . a)  $\varepsilon(\Delta^\nabla) \subset \Delta'$  sse  $\varepsilon(\Delta'^\nabla) \subset \Delta$ ; existe  $q$ ,  $q < p < n$  tais que  $A_p = GA_q$  ou  $A_p = HA_q$ . b)  $\varepsilon(\Delta^\nabla) \subset \Delta$ ; (a) Suponhamos  $A_p = GA_q$ . Então  $f(GA_q) = 0$ , e  $\Delta \vdash GA_q$ . c)  $\Delta^\nabla \subset \varepsilon(\Delta'^\nabla)$ . conjunto  $\Delta'$   $A_q$ -saturado tal que  $\varepsilon(\Delta'^\nabla) \subset \Delta'$ . Seja  $f'$  a função característica de  $\Delta'$ . PROVA. a) Suponhamos que  $\varepsilon(\Delta^\nabla) \subset \Delta'$ , e seja  $A \in \varepsilon(\Delta'^\nabla)$ . Então  $\nabla A \in \Delta'$ ; logo,  $\neg \nabla A \notin \Delta'$ . Nesse caso, como  $\varepsilon(\Delta^\nabla) \subset \Delta'$ ,  $\nabla \neg \nabla A \notin \Delta$ ; assim,  $\neg \nabla \neg \nabla A \in \Delta$ . Ora,  $\vdash \neg \nabla \neg \nabla A \rightarrow A$ ; logo,  $\Delta \vdash A$ , e  $A \in \Delta$ . Assim,  $\varepsilon(\Delta'^\nabla) \subset \Delta$ . b) Seja  $A \in \varepsilon(\Delta'^\nabla)$ . Então  $\nabla A \in \Delta^\nabla$ ,  $\nabla A \in \Delta$ , e  $\Delta \vdash \nabla A$ . Como  $\vdash \nabla A \rightarrow A$ ,  $\Delta \vdash A$ , e  $A \in \Delta$ . Portanto,  $\varepsilon(\Delta^\nabla) \subset \Delta$ . c) Seja  $\nabla A \in \Delta^\nabla$ . Como  $\vdash \nabla A \rightarrow \nabla \nabla A$ ,  $\Delta \vdash \nabla \nabla A$ , e  $\nabla \nabla A \in \Delta$ . Logo,  $\nabla A \in \varepsilon(\Delta'^\nabla)$ . Então  $\Delta^\nabla \subset \varepsilon(\Delta'^\nabla)$ .

V.4.2. TEOREMA. Para todo conjunto  $\Delta$ , toda fórmula F, toda sequência  $A_1, \dots, A_n$ , toda função  $f$ , se  $\Delta$  é um conjunto F-saturado, e  $A_1, \dots, A_n$  é uma sequência normal, a função característica  $f$ , de  $\Delta$ , é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração.

PROVA. A prova procede como em I.4.3. As diferenças ocorrem quando, para algum  $m < n$ ,  $A_m = \nabla A_m$ . Seja  $\nabla = G$ . (Para  $\nabla = H$ , analogamente.)

I)  $f(A_m) = 0$ , i.e.,  $A_m \notin \Delta$ , e  $\Delta \not\vdash GA_m$ . Por I.4.1 existe  $\Delta'$   $A_m$ -saturado tal que  $\varepsilon(\Delta^G) \subset \Delta'$ . Seja  $f'$  a função característica de  $\Delta'$ . Pela hipótese de indução (v. I.4.3)  $f$  e  $f'$  são  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valorações. Ora,  $\{A_1, \dots, A_{n-1}\}_{f,1}^G \subset \Delta^G$ . Logo, por 4.1,  $\{A_1, \dots, A_{n-1}\}_{f,1}^G \subset \varepsilon(\Delta^G) \subset \Delta'$ . Assim,  $f' \models \{A_1, \dots, A_{n-1}\}_{f,1}^G$ . Similarmente, usando 4.1 e I.4.2, mostramos que  $f' \models \{A_1, \dots, A_{n-1}\}_{f,1}^H$ ,  $f \models \{A_1, \dots, A_{n-1}\}_{f,1}^G$  e  $f \models \{A_1, \dots, A_{n-1}\}_{f,1}^H$ . Por 2.1,  $f(\Lambda, n-1)f'$  e  $f'(\Lambda, n-1)f$ . Como  $\Delta'$  é  $A_m$ -saturado,  $f'(A_m) = 0$ . Portanto, existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $f'$  tal que  $f'(A_m) = 0$ ,  $f(\Lambda, n-1)f'$  e  $f'(\Lambda, n-1)f$ . Por 2.2,  $f$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração.

II)  $f(A_n) = 1$ . I.e.,  $f(GA_m) = 1$ ,  $A_m \in \varepsilon(\Delta^G)$ . Logo, por 4.1,  $A_m \in \Delta$ , e  $f(A_m) = 1$ . Suponhamos então que existe  $p$ , existe  $q$ ,  $q < p < n$  tais que  $A_p = GA_q$  ou  $A_p = HA_q$  e  $f(A_p) = 0$ . (a) Suponhamos  $A_p = GA_q$ . Então  $f(GA_q) = 0$ , e  $\Delta \not\vdash GA_q$ . Por I.4.1 há um conjunto  $\Delta'$   $A_q$ -saturado tal que  $\varepsilon(\Delta^G) \subset \Delta'$ . Seja  $f'$  a função característica de  $\Delta'$ ; pela hipótese de indução (v. I.4.3),  $f$  e  $f'$  são  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valorações. Ora,  $A_m \in \varepsilon(\Delta^G)$ ; logo,  $A_m \in \Delta'$ , e  $f'(A_m) = 1$ . Como  $\Delta'$  é  $A_q$ -saturado,  $f'(A_q) = 0$ . Por um raciocínio análogo ao caso I) acima, prova-se que  $f(\wedge, n-1)f'$  e  $f'(\wedge, n-1)f$ . Assim, por 2.1,  $f$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração. (b) Suponhamos  $A_p = HA_q$ . Então  $f(HA_q) = 0$ ,  $HA_q \notin \Delta$ . Como  $\vdash GA_q \rightarrow HA_q$ ,  $GA_q \notin \Delta$ , e caímos então no caso (a) anterior.

Tanto quanto pudemos apurar, K3 é um cálculo novo. Nada foi encontrado a respeito dele em lugar algum, nem mesmo menção de seus axiomas característicos. K3 procura enfatizar todas as inferências válidas na suposição de ter o tempo a seguinte estrutura: dado um instante  $t_0$  qualquer, se outros instantes  $t_1, \dots, t_n$  são posteriores (anteriores) a  $t_0$ , então  $t_1 = \dots = t_n$ . Ou seja, cada instante teria no máximo um futuro, e um passado.<sup>16</sup>

A linguagem de K3 é  $L_1$ . Formemos uma base axiomática para K3 juntando aos postulados de K1 os seguintes esquemas de axiomas:

$$A13. \quad \neg GA \rightarrow G\neg A$$

$$A14. \quad \neg HA \rightarrow H\neg A$$

Entre os teoremas de K3, temos:

$$T49. \quad FA \rightarrow GA, \quad PA \rightarrow HA$$

$$T50. \quad F\neg A \rightarrow \neg FA, \quad P\neg A \rightarrow \neg PA$$

$$T51. \quad FA \vee FB \rightarrow G(A \vee B), \quad PA \vee PB \rightarrow H(A \vee B)$$

$$T52. \quad G(A \rightarrow B) \rightarrow (FA \rightarrow FB), \quad H(A \rightarrow B) \rightarrow (PA \rightarrow PB)$$

$$T53. \quad FA \rightarrow G(A \rightarrow B), \quad PA \rightarrow H(A \rightarrow B)$$

<sup>16</sup> Talvez se pudesse chamar K3 de "lógica do imediatismo e da memória curta".

$$T54. \quad F \rightarrow A \rightarrow G(A \rightarrow B), \quad F \rightarrow A \rightarrow H(A \rightarrow B)$$

$$T55. \quad [A \rightarrow (FB \rightarrow F(A \rightarrow B))], \quad PA \rightarrow (PB \rightarrow P(A \rightarrow B))$$

$$T56. \quad (GHA \rightarrow FB) \rightarrow (GHA \rightarrow GB), \quad (HGA \rightarrow PB) \rightarrow (HGA \rightarrow HB)$$

$$T57. \quad F(-A \rightarrow A) \rightarrow GA, \quad P(-A \rightarrow A) \rightarrow GA$$

## Capítulo VI

$$T58. \quad F((A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow -B)) \rightarrow G-, \quad P((A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow -B)) \rightarrow H-A$$

### O CÁLCULO K3

$$T59. \quad F(A \rightarrow B) \rightarrow (FA \rightarrow GB), \quad P(A \rightarrow B) \rightarrow (PA \rightarrow HB)$$

$$T60. \quad VI.1. \text{ APRESENTAÇÃO } (CA), \quad A \rightarrow (HA \rightarrow (GA \rightarrow GHA))^{17}$$

Tanto quanto pudemos apurar, K3 é um cálculo novo. Nada foi encontrado a respeito dele em lugar algum, nem mesmo menção de seus axiomas característicos. K3 procura enfeixar todas as inferências válidas na suposição de ter o tempo a seguinte estrutura: dado um instante  $t_0$  qualquer, se outros instantes  $t_1, \dots, t_n$  são posteriores (anteriores) a  $t_0$ , então  $t_1 = \dots = t_n$ . Ou seja, cada instante teria no máximo um futuro, e um passado.<sup>16</sup>

#### VI.2. VALORAÇÕES PARA K3

A linguagem de K3 é  $L1$ . Formamos uma base axiomática para K3 juntan-  
do aos postulados de Kt os seguintes esquemas de axiomas:

$$A13. \quad -GA \rightarrow G-A$$

$$A14. \quad -HA \rightarrow H-A$$

Entre os teoremas de K3, temos:

$$T49. \quad FA \rightarrow GA, \quad PA \rightarrow HA$$

$$T50. \quad F-A \rightarrow -FA, \quad P-A \rightarrow -PA$$

$$T51. \quad FA \vee FB \rightarrow G(A \vee B), \quad PA \vee PB \rightarrow H(A \vee B)$$

$$T52. \quad G(A \rightarrow B) \rightarrow (FA \rightarrow FB), \quad H(A \rightarrow B) \rightarrow (PA \rightarrow PB)$$

$$T53. \quad FA \rightarrow G(A \rightarrow B), \quad PA \rightarrow H(A \rightarrow B)$$

<sup>17</sup> Juntando os esquemas T60 a Kt, obtemos o cálculo K1 (tempo linear).

<sup>16</sup> Talvez se pudesse chamar K3 de "lógica do imediatismo e da memória curta"...

T54.  $F \rightarrow A \rightarrow G(A \rightarrow B), P \rightarrow A \rightarrow H(A \rightarrow B)$

T55.  $FA \rightarrow (FB \rightarrow F(A \rightarrow B)), PA \rightarrow (PB \rightarrow P(A \rightarrow B))$

T56.  $(GHA \wedge FB) \rightarrow (GHA \wedge GB), (HGA \wedge PB) \rightarrow (HGA \wedge HB)$

T57.  $F(\neg A \rightarrow A) \rightarrow GA, P(\neg A \rightarrow A) \rightarrow HA$

T58.  $F((A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B)) \rightarrow G\neg A, P((A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B)) \rightarrow H\neg A$

T59.  $F(A \rightarrow B) \rightarrow (FA \rightarrow GB), P(A \rightarrow B) \rightarrow (PA \rightarrow HB)$

T60.  $A \rightarrow (GA \rightarrow (HA \rightarrow HGA)), A \rightarrow (HA \rightarrow (GA \rightarrow GHA))^{17}$

Regras derivadas:

R9.  $FA / GA$

R10.  $PA / HA$

As propriedades I.1.1 e I.1.2 também valem para K3.

## VI.2. VALORAÇÕES PARA K3

VI.2.1. DEFINIÇÃO. Seja  $\Gamma$  um conjunto de fórmulas, e  $f, f'$  funções de um conjunto  $\Delta$ , contendo  $\Gamma$ , em  $\{0,1\}$ :

$$f'(\Gamma^\nabla)f =_{df} \text{ para toda } F \in \varepsilon(\Gamma^\nabla), f'(F) = f(\nabla F).$$

VI.2.2. DEFINIÇÃO. Seja  $A_1, \dots, A_n$  uma sequência normal e  $f, f'$  funções de  $\text{FOR}_{L1}$  em  $\{0,1\}$ . Para  $1 \leq k \leq n$ , dizemos que:

$$f(\Omega, k)f' \text{ sse } f'(\{A_1, \dots, A_k\}^G)f \text{ e } f(\{A_1, \dots, A_k\}^H)f'.$$

VI.2.3. DEFINIÇÃO.  $v$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração (para K3) se  $A_1, \dots, A_n$  é uma

<sup>17</sup> Juntando os esquemas T60 a Ktt, obtemos o cálculo K1 (tempo linear). Entretanto, como  $\not\vdash_{K3} GA \rightarrow GGA$ , K3 não contém K1. Cumpre notar também, como já foi dito no capítulo anterior, que K3 não é subsistema de Kc3.

seqüência normal e:  $v'(A_p) = 0$ . Então  $v(A_p) = 0$  e, pela hipótese do lema, e-

1)  $n = 1$  e  $v$  é uma semi-valorção; tal que  $v(\Omega, n-1)v$ . Por (2.4),  $v_p(A_m) = 1$ .

2)  $n > 1$ ,  $v$  é uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valorção e, se para algum  $m < n$ ,  $A_n = \nabla A_m$ .

I) se  $v(A_n) = 0$ , então existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valorção  $v'$  tal que  $v'(A_m) = 0$  e, para  $\nabla = G$ ,  $v(\Omega, n-1)v'$ ; para  $\nabla = H$ ,  $v'(\Omega, n-1)v$ ;  $G$ - e  $H$ - $A_1, \dots, A_{n-1}$ -normal.

II) se  $v(A_n) = 1$ , então para todo  $p$ , todo  $q$ ,  $q < p < n$  tais que  $A_p = \nabla A_q$  e  $v(A_p) = 0$ , existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valorção  $v_p$  tal que  $v_p(A_m) = 1$  e, para  $\nabla = G$ ,  $v(\Omega, n-1)v_p$ ; para  $\nabla = H$ ,  $v_p(\Omega, n-1)v$ .

cas das  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valorções a  $A_1, \dots, A_n$  são  $A_1, \dots, A_n$ -valorções. Prove-

VI.2.4. DEFINIÇÃO. (*extensão canônica*) A mesma de Kt (v. I.2.2), com nova redação para o item:

2) a) para  $F = A_n$ ,  $v'(F) = 0$  sse existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valorção  $\bar{v}$  tal que  $\bar{v}(A_m) = 0$  e, para  $\nabla = G$ ,  $v(\Omega, n-1)\bar{v}$ ; para  $\nabla = H$ ,  $\bar{v}(\Omega, n-1)v$ .

b) existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valorção  $v'$  tal que  $v'(A_m) = 0$  e  $v(\Omega, n-1)v'$ .

VI.2.5. DEFINIÇÃO. Seja  $v$  uma  $A_1, \dots, A_n$ -valorção. Para  $1 \leq k \leq n$ , dizemos que  $v$  é  $\nabla$ - $A_1, \dots, A_k$ -normal se, para todo  $p$ , todo  $q$ ,  $q < p \leq k$  tais que  $A_p = \nabla A_q$  e  $v(A_p) = 0$ , existe uma  $A_1, \dots, A_k$ -valorção  $v_p$  tal que, para  $\nabla = G$ ,  $v(\Omega, k)v_p$ ; para  $\nabla = H$ ,  $v_p(\Omega, k)v$ .

VI.2.6. LEMA. Seja  $A_1, \dots, A_n$  uma seqüência normal,  $v$  uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valorção e  $v'$  a extensão canônica de  $v$  a  $A_1, \dots, A_n$ . Suponhamos ainda que  $v$  é  $G$ - e  $H$ - $A_1, \dots, A_{n-1}$ -normal. Nesse caso,  $v'$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valorção.

PROVA. Como em I.2.7. O caso interessante é quando, para algum  $m < n$ ,  $A_n = \nabla A_m$ . Seja  $\nabla = G$ . (Para  $\nabla = H$ , analogamente.) I) se  $v'(A_n) = 0$ , por 2.4 existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valorção  $\bar{v}$  tal que  $\bar{v}(A_m) = 0$  e  $v(\Omega, n-1)\bar{v}$ . Por construção, para  $1 \leq i < n$ ,  $v(A_i) = v'(A_i)$ . Logo,  $v'(\Omega, n-1)\bar{v}$ , e, por 2.3,  $v'$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valorção. II)  $v'(A_n) = 1$ . Suponhamos que existe  $p$ , existe  $q$ ,  $q < p < n$

tais que  $A_p = GA_q$  e  $v'(A_p) = 0$ . Então  $v(A_p) = 0$  e, pela hipótese do lema, existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $v_p$  tal que  $v(\Omega, n-1)v_p$ . Por 2.4,  $v_p(A_m) = 1$ , e por construção de  $v'$ ,  $v'(\Omega, n-1)v_p$ . Por 2.3,  $v'$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração.

Por outro lado,  $v$  é  $H-A_1, \dots, A_{n-1}$ -normal e, como  $A_n$  não é de forma HF, temos:

VI.2.7. LEMA. Seja  $v$  uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração. Então  $v$  é  $G$ - e  $H-A_1, \dots, A_n$ -normal.

PROVA. Por indução em  $n$ . Para  $n = 1$  a propriedade é trivial. Seja  $n > 1$ . Do lema anterior e da hipótese de indução segue-se que (¶) as extensões canônicas das  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valorações a  $A_1, \dots, A_n$  são  $A_1, \dots, A_n$ -valorações. Provejamos o lema examinando os casos. Se, para todo  $m < n$ ,  $A_n \neq \nabla A_m$ , a prova é imediata. Suponhamos que  $A_n = \nabla A_m$ , para algum  $m < n$ . Seja  $\nabla = G$ . (Para  $\nabla = H$  a demonstração é análoga.) Temos dois casos:

I)  $v(A_n) = 0$ . Por 2.3, temos:

1) existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $v'$  tal que  $v'(A_m) = 0$  e  $v(\Omega, n-1)v'$ .

Seja  $\bar{v}'$  a extensão canônica de  $v'$  a  $A_1, \dots, A_n$ . Então:

2)  $\bar{v}'(A_m) = 0$  e  $v(\Omega, n-1)\bar{v}'$ .

De 2), por 2.2,

3)  $\bar{v}'(\{A_1, \dots, A_{n-1}\}^G)v$  e  $v(\{A_1, \dots, A_{n-1}\}^H)\bar{v}'$ .

Como  $A_n \neq HF$ ,

4)  $v(\{A_1, \dots, A_n\}^H)\bar{v}'$ .

Como  $\bar{v}'(A_m) = 0$ ,  $\bar{v}'(A_n) = v(A_n)$ . Por 2.1 e 2.2,

5)  $\bar{v}'(\{A_1, \dots, A_n\}^G)v$ .

De 4) e 5), por 2.2,

6)  $v(\Omega, n)\bar{v}'$ .

De (¶),  $\bar{v}'$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração. Como  $\bar{v}'(\{A_1, \dots, A_n\}^G)v$ , para todo  $p$ , todo  $q$ ,  $q < p \leq n$  tais que  $A_p = GA_q$  e  $v(A_p) = 0$ ,  $\bar{v}'(A_q) = 0$ . Logo,

tomando  $\bar{v}' = v_p$ , para todo  $p$ , todo  $q$ ,  $q < p \leq n$  tais que  $A_p = GA_q$  e  $v(A_p) = 0$ , existe uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração  $v_p$  tal que  $v(\Omega, n)v_p$ . I.e.,  $v$  é  $G-A_1, \dots, A_n$ -normal.

Por outro lado,  $v$  é  $H-A_1, \dots, A_{n-1}$ -normal e, como  $A_n$  não é de forma

HF, temos:

7) para todo  $p$ , todo  $q$ ,  $q < p \leq n$  tais que  $A_p = HA_q$  e  $v(A_p) = 0$ , existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $v_p$  tal que  $v_p(\Omega, n-1)v$ .

Para cada  $p$ , seja  $\bar{v}_p$  a extensão canônica de  $v_p$  a  $A_1, \dots, A_n$ . Então:

8)  $\bar{v}_p(\Omega, n-1)v$ .

De 8), por 2.2,

9)  $v(\{A_1, \dots, A_{n-1}\}^G)\bar{v}_p$  e  $\bar{v}_p(\{A_1, \dots, A_{n-1}\}^H)v$ .

Como  $A_n \neq HF$ ,

10)  $\bar{v}_p(\{A_1, \dots, A_n\}^H)v$ .

Temos agora três possibilidades:

(A) Suponhamos que  $\bar{v}_p(A_n) = 1$ . Nesse caso, por 2.4.B.2.a,  $v(A_m) = 1$ . Então  $v(A_m) = \bar{v}_p(A_n)$ . De 9), por 2.1 e 2.2,

11)  $v(\{A_1, \dots, A_n\}^G)\bar{v}_p$ .

De 10) e 11),

12)  $\bar{v}_p(\Omega, n)v$ .

Assim, de (11), 7) e 12), temos que, para todo  $p$ , todo  $q$ ,  $q < p \leq n$ , tais que  $A_p = HA_q$  e  $v(A_p) = 0$ , existe uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração  $\bar{v}_p$  tal que  $\bar{v}_p(\Omega, n)v$ . I.e.,  $v$  é  $H-A_1, \dots, A_n$ -normal.

(B) Suponhamos que  $\bar{v}_p(A_n) = 0$ , e  $v(A_m) = 0$ . Então  $v(\{A_1, \dots, A_n\}^G)\bar{v}_p$  e, como no caso (A) acima,  $v$  é  $H-A_1, \dots, A_n$ -normal.



(C) Suponhamos que  $\bar{v}_p(A_n) = 0$ , e  $v(A_m) = 1$ . Definamos, para cada  $p$ , novas funções  $v_p^*$  de  $\text{FOR}_{L1}$  em  $\{0,1\}$ , da seguinte maneira: para toda fórmula  $F$ ,

a) se  $A_n$  não é subfórmula de  $F$ , então  $v_p^*(F) = v_p(F)$ ;

b) se  $A_n$  é subfórmula de  $F$ , então:

b.1) para  $F = A_n$ ,  $v_p^*(F) = 1$ ;

b.2) para  $F = \neg F'$ ,  $v_p^*(F) = 1$  sse  $v_p^*(F') = 0$ ;

b.3) para  $F = F' \rightarrow F''$ ,  $v_p^*(F) = 1$  sse  $v_p^*(F') = 0$  ou  $v_p^*(F'') = 1$ ;

b.4) para  $F = \forall F'$ ,  $v_p^*(F) = v_p(F)$ .

É fácil ver que  $v_p^*$  é uma semi-avaliação. Além disso, como  $v_p$  é uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -avaliação e, para  $1 \leq i < n$ ,  $v_p^*(A_i) = v_p(A_i)$ ,  $v_p^*$  é uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -avaliação. Provemos que é uma  $A_1, \dots, A_n$ -avaliação. Suponhamos que existe  $r$ , existe  $s$ ,  $s < r < n$  tais que  $A_r = GA_s$  e  $v_p^*(A_r) = 0$ . Então  $v_p(A_r) = 0$ . Uma vez que  $v_p(\Omega, n-1)v$ , segue-se que  $v_p^*(\Omega, n-1)v$ . Por hipótese,  $v(A_m) = 1$ . Então existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -avaliação  $v$  tal que  $v(A_m) = 1$  e  $v_p^*(\Omega, n-1)v$ . Logo,  $v_p^*$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -avaliação. Claramente  $v_p^*({A_1, \dots, A_n}^H)v$ , e, como  $v(A_m) = v_p^*(A_m) = 1$ ,  $v_p^*({A_1, \dots, A_n}^G)v$ . I.e.,  $v_p^*(\Omega, n)v$ . Assim, para todo  $p$ , todo  $q$ ,  $q < p \leq n$  tais que  $A_p = HA_q$  e  $v_p(A_p) = 0$ , existe uma  $A_1, \dots, A_n$ -avaliação  $v_p^*$  tal que  $v_p^*(\Omega, n)v$ . Ou seja,  $v$  é  $H-A_1, \dots, A_n$ -normal.

II) Seja  $v(A_m) = 1$ . Temos, de 2.3,

13) para todo  $p$ , todo  $q$ ,  $q < p \leq n$  tais que  $A_p = GA_q$  e  $v_p(A_p) = 0$ , existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -avaliação  $v_p$  tal que  $v_p(A_m) = 1$  e  $v_p(\Omega, n-1)v_p$ .

Para cada  $p$ , seja  $\bar{v}_p$  a extensão canônica de  $v_p$  a  $A_1, \dots, A_n$ . Então:

14)  $\bar{v}_p(A_m) = 1$  e  $v_p(\Omega, n-1)\bar{v}_p$ . Seja  $V = G$ . (Para  $V = H$ , analogamente.) Por 2.8

não uma  $A_1, \dots, A_n$ -avaliação  $v'$  tal que  $v'(\Omega, n)v'$ . Por 2.2,  $v'({A_1, \dots, A_n}^G)v'$  e

15)  $\bar{v}_p({A_1, \dots, A_{n-1}}^G)v$  e  $v({A_1, \dots, A_{n-1}}^H)\bar{v}_p$ . Portanto,  $v(A_m) = 1$ .

Como  $A_n \neq HF$ , lemas 1.3.2 a 1.3.5, do capítulo sobre Kt, aplicam-se

$$16) v(\{A_1, \dots, A_n\}^H) \bar{v}_p.$$

E, como  $\bar{v}_p(A_m) = v(A_n) = 1$ ,

$$17) \bar{v}_p(\{A_1, \dots, A_n\}^G) v.$$

De 16) e 17),

$$18) v(\Omega, n) \bar{v}_p.$$

Da mesma maneira análoga, os lemas e teoremas sobre a completude da Kt a-

Assim, de (11), 13), 14) e 18),  $v$  é  $G-A_1, \dots, A_n$ -normal.

Prova-se que  $v$  é  $H-A_1, \dots, A_n$ -normal como no caso I).

O corolário correspondente a I.2.7 é enunciado e provado do mesmo

modo que em Kt.

VI.2.8. TEOREMA.  $v$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração sse: 1)  $v$  é uma semi-valoração; 2)  $A_1, \dots, A_n$  é uma sequência normal e 3)  $v$  é  $G$ - e  $H-A_1, \dots, A_n$ -normal.

PROVA. Este teorema é facilmente demonstrado da mesma forma como foi provado o teorema I.2.8. i.e.,  $A_n \notin \Delta$ , e  $\Delta \not\vdash GA_m$ . Por I.4.1 existe  $\Delta'$   $A_m$ -saturado tal

que  $\epsilon(\Delta') \subset \Delta'$ . Seja  $A$  uma fórmula tal que  $f(GA) = 1$ . Então  $GA \in \Delta$ , e, é cla-  
ro,  $A \in \epsilon(\Delta')$ . Logo,  $A \in \Delta'$ , e  $f'(A) = 1$ . Seja  $B$  uma fórmula tal que  $f(HB) =$

### VI.3. CORREÇÃO

VI.3.1. LEMA. Seja  $v$  uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração; então, para  $1 \leq i \leq n$ , se  $A_i$  é um axioma de K3,  $v(A_i) = 1$ .

PROVA. a) se  $A_i$  é um axioma de Kt, prova-se como em Kt que  $v(A_i) = 1$ .

b) Seja  $A_i$  da forma  $\neg \nabla A \rightarrow \nabla \neg A$ . Suponhamos que  $v(A_i) = 0$ . Então  $v(\neg \nabla A) = 1$  e  $v(\nabla \neg A) = 0$ . Logo,  $v(\nabla A) = 0$ . Seja  $\nabla = G$ . (Para  $\nabla = H$ , analogamente.) Por 2.8 há uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração  $v'$  tal que  $v(\Omega, n)v'$ . Por 2.2,  $v'(\{A_1, \dots, A_n\}^G)v$  e então  $v'(A) = v'(\neg A) = 0$  - uma contradição. Portanto,  $v(A_i) = 1$ .

Os lemas e teoremas I.3.2 a I.3.5, do capítulo sobre Kt, aplicam-se imediatamente a K3, sem alterações. Em vista disso, não vamos repeti-los aqui.

#### VI.4. COMPLETEUDE

De maneira análoga, os lemas e teoremas sobre a completude de Kt aplicam-se sem alterações a K3. A única diferença ocorre no teorema correspondente a I.4.3. Vamos então desenvolvê-lo aqui.

**VI.4.1. TEOREMA.** Para todo conjunto  $\Delta$ , toda fórmula  $F$ , toda sequência  $A_1, \dots, A_n$ , toda  $f$ , se  $\Delta$  é um conjunto  $F$ -saturado e  $A_1, \dots, A_n$  uma sequência normal, a função característica  $f$ , de  $\Delta$ , é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração.

**PROVA.** A prova procede como em I.4.3. As diferenças ocorrem quando, para algum  $m < n$ ,  $A_n = \nabla A_m$ . Seja  $\nabla = G$ . (Para  $\nabla = H$ , analogamente.) Temos dois casos:

I)  $f(A_n) = 0$ . I.e.,  $A_n \notin \Delta$ , e  $\Delta \not\vdash GA_m$ . Por I.4.1 existe  $\Delta'$   $A_m$ -saturado tal que  $\varepsilon(\Delta^G) \subset \Delta'$ . Seja  $A$  uma fórmula tal que  $f(GA) = 1$ . Então  $GA \in \Delta$ , e, é claro,  $A \in \varepsilon(\Delta^G)$ . Logo,  $A \in \Delta'$ , e  $f'(A) = 1$ . Seja  $B$  uma fórmula tal que  $f(GB) = 0$ . Então  $f(-GB) = 1$ , e  $-GB \in \Delta$ . Como  $\vdash -GB \rightarrow G-B$ ,  $\Delta \vdash G-B$ ,  $G-B \in \Delta$ . Logo,  $-B \in \varepsilon(\Delta^G)$ , e então  $-B \in \Delta'$ ,  $B \notin \Delta'$  e  $f'(B) = 0$ . Assim, para qualquer fórmula  $GF$ ,  $f'(F) = f(GF)$ . Segue-se que  $f'(\{A_1, \dots, A_{n-1}\}^G)f$ .

Por outro lado, se  $\varepsilon(\Delta^G) \subset \Delta'$ , por I.4.2  $\varepsilon(\Delta'^H) \subset \Delta$ . Através de um raciocínio análogo ao mostrado acima, prova-se que  $f(\{A_1, \dots, A_{n-1}\}^H)f'$ . Por 2.2,  $f(\Omega, n-1)f'$ . Como  $\Delta'$  é  $A_m$ -saturado,  $f'(A_m) = 0$ . Além disso, pela hipótese de indução (v. I.4.3),  $f$  e  $f'$  são  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valorações. Assim, existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $f'$  tal que  $f'(A_m) = 0$  e  $f(\Omega, n-1)f'$ . Por 2.3,  $f$  é

uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração.

II)  $f(A_n) = 1$ . Suponhamos que existe  $p$ , existe  $q$ ,  $q < p < n$  tais que  $A_p = GA_q$  e  $f(A_p) = 0$ . Então  $GA_q \notin \Delta$ , e  $\Delta \not\vdash GA_q$ . Por I.4.1 existe um conjunto  $\Delta'$   $A_q$ -saturado tal que  $\varepsilon(\Delta^q) \subset \Delta'$ . Seja  $f'$  a função característica de  $\Delta'$ . Como  $A_m \in \varepsilon(\Delta^q)$ ,  $f'(A_m) = 1$ . Pela hipótese de indução (v. I.4.3),  $f$  e  $f'$  são  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valorações. Por um raciocínio análogo ao do caso I) acima, mostra-se que  $f(\Omega, n-1)f'$ . Por 2.3,  $f$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração.

---

CÁLCULOS MODAIS-TEMPORAIS

Capítulo VII  
O CÁLCULO T-Kt

VII.1. APRESENTAÇÃO

PARTE II

CÁLCULOS MODAIS-TEMPORAIS

Uma das maneiras usuais de combinar operadores de lógica temporal com operadores modais é através de definições. Tomemos um cálculo temporal qualquer, por exemplo, kt. Introduzimos os operadores modais através das seguintes definições:

$$(1) \quad LA =_{df} A \wedge GA \wedge HA$$

$$(2) \quad MA =_{df} A \vee FA \vee PA$$

Obtemos então as equivalências

$$(3) \quad LA \leftrightarrow A \wedge GA \wedge HA$$

$$(4) \quad MA \leftrightarrow A \vee FA \vee PA$$

Intuitivamente, (3) diz que uma proposição é necessária se e somente se for verdadeira todo o tempo. Contudo, sentimos que pode haver proposições verdadeiras todo o tempo sem serem de alguma forma necessárias. Da mesma maneira, algo não deixa de ser possível mesmo se sempre falso. Ou seja, ao invés das equivalências (3) e (4), gostaríamos de ter apenas as seguintes implicações:

$$(5) \quad LA \rightarrow A \wedge GA \wedge HA$$

$$(6) \quad A \vee FA \vee PA \rightarrow MA$$

Vamos então apresentar alguns cálculos com esta característica dese

Os operadores modais e temporais serão introduzidos axiomáticamente e não mais definidos em função dos últimos. Obtemos desta maneira o cálculo modal-temporal, ao mais fraco dos quais chamaremos "T-Kt". Este cálculo é uma extensão conservadora de T como de Kt. Em T-Kt aparecem também novos teoremas (fórmulas mistas) envolvendo os dois tipos de operador, modal e temporal.

## Capítulo VII

### O CÁLCULO T-Kt

#### VII.1. APRESENTAÇÃO

T-Kt pode ser entendido de várias maneiras, e desta forma obtemos uma classe. Uma das maneiras usuais de combinar operadores de lógica temporal com operadores modais é através de definições. Tomemos um cálculo temporal qualquer, por exemplo, Kt. Introduzimos os operadores modais através das seguintes definições:

$$(1) \quad LA =_{df} A \wedge GA \wedge HA$$

$$(2) \quad MA =_{df} A \vee FA \vee PA$$

Obtemos então as equivalências base axiomática para T-Kt acrescentando aos esquemas de axiomas A1 - A7 de Kt as seguintes:

$$(3) \quad LA \leftrightarrow A \wedge GA \wedge HA$$

$$(4) \quad MA \leftrightarrow A \vee FA \vee PA$$

$$A15. \quad L(A \rightarrow B) \rightarrow (LA \rightarrow LB)$$

Intuitivamente, (3) diz que uma proposição é necessária se e somente se for verdadeira todo o tempo. Contudo, sentimos que pode haver proposições verdadeiras todo o tempo sem serem de alguma forma necessárias. Da mesma maneira, algo não deixa de ser possível mesmo se sempre falso. Ou seja, ao invés das equivalências (3) e (4), gostaríamos de ter apenas as seguintes implicações:

$$(5) \quad LA \rightarrow A \wedge GA \wedge HA$$

$$(6) \quad A \vee FA \vee PA \rightarrow MA$$

<sup>16</sup> Como se pode ver nos cálculos bi-modais T-T e S4-S4 de Ishimoto, onde aparecem dois operadores de necessidade: um mais forte e um outro mais fraco. (V. Ishimoto & Fujikawa 1970) Vamos então apresentar alguns cálculos com esta característica dese-

jada. Os operadores modais e temporais serão introduzidos axiomáticamente - não mais definiremos os primeiros em função dos últimos. Obtemos desta maneira cálculos modais-temporais, ao mais fraco dos quais chamaremos "T-Kt". Este cálculo é uma extensão conservativa tanto de T como de Kt. Em T-Kt aparecem também novos teoremas (fórmulas mistas) envolvendo os dois tipos de operador, modal e temporal.

T-Kt pode ser estendido de várias maneiras, e desta forma obtemos uma classe inteira de cálculos modais-temporais. Podemos estendê-lo modalmente, ou seja, tornando mais forte o ramo modal (S4-Kt, B-Kt, S5-Kt) ou então temporalmente (T-Km, T-K1, T-Kc3, etc.). Pode-se ainda fazer as duas coisas - e obtemos então cálculos como S4-Kc, B-K3, S5-Kc2, etc. As combinações possíveis são numerosas; examinaremos apenas algumas delas.

Passemos então ao exame de T-Kt. Sua linguagem é  $L_2$ . Formamos uma base axiomática para T-Kt acrescentando aos esquemas de axiomas A1 - A7 de Kt os seguintes:

$$A15. \quad L(A \rightarrow B) \rightarrow (LA \rightarrow LB)$$

$$A16. \quad LA \rightarrow A$$

$$A17. \quad LA \rightarrow GA$$

$$A18. \quad LA \rightarrow HA$$

T-Kt tem MP como regra de dedução, e sua única regra de prova é a regra de Gödel (N).<sup>18</sup>

<sup>18</sup> Como se pode ver, os cálculos modais-temporais são muito semelhantes aos cálculos bi-modais T-T e S4-S4 de Ishimoto, onde aparecem dois operadores de necessidade: um mais forte e um outro mais fraco. (V. Ishimoto & Fujikawa 1970; Ishimoto & Watanabe 1974.) Segundo Ishimoto (1970, p.129), a su-

R13.  $A \rightarrow$  Todos os teoremas de T, bem como de Kt, são teoremas de T-Kt. Entre os novos teoremas (fórmulas "mistas") temos os seguintes:

$$T61. LA \rightarrow A \wedge GA \wedge HA, LA \rightarrow A \wedge HA \wedge GA$$

$$T62. A \vee FA \vee PA \rightarrow MA, A \vee PA \vee FA \rightarrow MA$$

$$T63. FA \rightarrow MA, PA \rightarrow MA$$

$$T64. GLA \rightarrow GA, HLA \rightarrow HA$$

$$T65. LLA \rightarrow GA, LLA \rightarrow HA$$

$$T66. LLA \rightarrow GLA, LLA \rightarrow HLA$$

$$T67. LGA \rightarrow GGA, LHA \rightarrow HHA$$

$$T68. GLA \rightarrow GGA, HLA \rightarrow HHA$$

$$T69. LLA \rightarrow GGA, LLA \rightarrow HHA$$

$$T70. LLA \rightarrow GHA, LLA \rightarrow HGA$$

$$T71. L(A \wedge B) \rightarrow (GA \wedge GB), L(A \wedge B) \rightarrow (HA \wedge HB)$$

$$T72. L(-A \rightarrow A) \rightarrow GA, L(-A \rightarrow A) \rightarrow HA$$

$$T73. L(B \rightarrow A) \wedge L(-B \rightarrow A) \rightarrow GA, L(B \rightarrow A) \wedge L(-B \rightarrow A) \rightarrow HA$$

$$T74. LA \rightarrow (GB \rightarrow G(A \wedge B)), LA \rightarrow (HB \rightarrow H(A \wedge B))$$

Regras derivadas:

R11.  $A \rightarrow B / LA \rightarrow LB$  (consequência sintática) o único valor que o símbolo

R12.  $A \rightarrow B / GA \rightarrow GB$

---

As propriedades 1.1.1 (Teorema da Dedução) e 1.1.2 também valem para a gestão teria sido apresentada primeiramente por J. Rubin. Por outro lado, a idéia de tomar modalidades temporais e aléticas como primitivas numa mesma lógica já se encontra na "lógica ockhamista" abordada por Prior (1967, cap. VII; v. também Burgess 1979, pp.574-7). (Uma questão interessante seria ver se a lógica ockhamista corresponde a algum dos cálculos modais-temporais acima mencionados.) Além destas referências, nada mais encontramos com respeito a cálculos modais-temporais. Acharmos que um estudo aprofundado a respeito deles deveria ser efetuado, nos seus aspectos sintáticos, semânticos, bem como nas suas implicações filosóficas. Um estudo que reservaremos para, quem sabe, trabalhos posteriores, uma vez que nosso objetivo aqui é apenas o de construir semânticas de valorações. É o cálculo T-Kt, procederemos como



R13.  $A \rightarrow B / HA \rightarrow HB$  anteriormente, apresentando para T-Kt uma semântica de valorações e procurando provar correção e completude, e mais as regras RG e RH.

VII. As fórmulas abaixo não são teoremas de T-Kt:

1.  $A \wedge GA \wedge HA \rightarrow LA, A \wedge HA \wedge GA \rightarrow LA$
2.  $MA \rightarrow A \vee FA \vee PA, MA \rightarrow A \vee PA \vee FA$
3.  $GA \rightarrow LA, HA \rightarrow LA$
4.  $MA \rightarrow FA, MA \rightarrow PA$
5.  $GA \rightarrow GLA, HA \rightarrow HLA$
6.  $GA \rightarrow LLA, HA \rightarrow LLA$
7.  $GLA \rightarrow LLA, HLA \rightarrow LLA$
8.  $GGA \rightarrow LGA, HHA \rightarrow LHA$
9.  $GGA \rightarrow GLA, HHA \rightarrow HLA$
10.  $GGA \rightarrow LLA, HHA \rightarrow LLA$
11.  $GHA \rightarrow LLA, HGA \rightarrow LLA$
12.  $A \wedge \neg A$

Como a única regra de prova de T-Kt é N, convém lembrar que no item

d) ii) da definição 0.7 (consequência sintática) o único valor que o símbolo 's' pode tomar é 'L'.

As propriedades I.1.1 (Teorema da Dedução) e I.1.2 também valem para T-Kt. As provas são as mesmas, com as modificações óbvias.

VII.1.1. Se  $\Gamma \vdash A$ , então  $L\Gamma \vdash LA$  (onde  $L\Gamma = \{LB : B \in \Gamma\}$ ).

PROVA. Prova-se do mesmo modo que em I.1.2.

Tendo então uma idéia do que é o cálculo T-Kt, procederemos como

nos cálculos estudados anteriormente, apresentando para T-Kt uma semântica de valorações e procurando provar correção e completude.

## VII.2. VALORAÇÕES PARA T-Kt

VII.2.1. DEFINIÇÃO.  $v$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração (para T-Kt) se  $A_1, \dots, A_n$  é uma sequência normal (v. 0.9) e:

1)  $n = 1$  e  $v$  é uma semi-valoração;

2)  $n > 1$ ,  $v$  é uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração e:

A) se, para algum  $m < n$ ,  $A_n = \nabla A_m \dots$  (como em Kt; v. I.2.1);

B) se, para algum  $m < n$ ,  $A_n = LA_m$ ,

I) se  $v(A_m) = 0$ , então existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $v'$  tal que  $v'(A_m) = 0$  e  $v(L, n-1)v'$ ; <sup>19</sup>

II) se  $v(A_m) = 1$ , então  $v(A_m) = v(GA_m) = v(HA_m) = 1$  e, para todo  $p$ , todo  $q$ ,  $q < p < n$  tais que  $A_p = LA_q$  e  $v(A_p) = 0$ , existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $v_p$  tal que  $v_p(A_q) = 0$ ,  $v_p(A_m) = 1$  e  $v(L, n-1)v_p$ .

Valorações para T-Kt são obtidas através da definição geral (0.11).

VII.2.2. DEFINIÇÃO. Seja  $v$  uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração e  $A_1, \dots, A_n$  uma sequência normal. Dizemos que  $v'$  é a *extensão canônica* de  $v$  a  $A_1, \dots, A_n$  se:

A) ou, para todo  $m < n$ ,  $A_n \neq \nabla A_m$ ,  $A_n \neq LA_m$  e  $v' = v$ ;

B) ou, para algum  $m < n$ ,  $A_n = \nabla A_m$  ou  $A_n = LA_m$  e  $v'$  é uma função de  $FOR_{L2}$  em  $\{0,1\}$  tal que, para toda fórmula  $F$ ,

1) se  $A_n$  não é subfórmula de  $F$ , então  $v'(F) = v(F)$ ;

PROVA. Por I.2.3 e por construção,  $v'$  é uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração. Para pro-

var que é  $A_1, \dots, A_n$ -valoração, temos três casos:

<sup>19</sup> V. definição 0.17.

- 1- 2) se  $A_n$  é subfórmula de  $F$ , então:
- para  $F = A_n$ ,
- 2- Para I) se  $A_n = \nabla A_m$ ,  $v'(F) = 0$  sse existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $\bar{v}$  tal que  $\bar{v}(A_m) = 0$  e, para  $\nabla = G$ ,  $v(n-1)\bar{v}$ ; para  $\nabla = H$ ,  $\bar{v}(n-1)v$ ;
- 3- Para II) se  $A_n = LA_m$ ,  $v'(F) = 0$  sse  $v(A_m) = 0$  ou  $v(\nabla A_m) = 0$  ou existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $\bar{v}$  tal que  $\bar{v}(A_m) = 0$  e  $v(L, n-1)\bar{v}$ ;
- para  $F = \neg F'$ ,  $v'(F) = 1$  sse  $v'(F') = 0$ ;
  - para  $F = F' \rightarrow F''$ ,  $v'(F) = 1$  sse  $v'(F') = 0$  ou  $v'(F'') = 1$ ;
  - para  $F = \nabla F'$  ou  $F = LF'$ ,  $v'(F) = v(F)$ .

Prova-se como em Kt (v. I.2.3) que as extensões canônicas são semi-valorações.

VII.2.3. DEFINIÇÃO. Seja  $v$  uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração. Para  $1 \leq k \leq n$ , dizemos que:

- $v$  é  $\nabla$ - $A_1, \dots, A_k$ -normal ... (como em Kt - v. I.2.4);
- $v$  é  $L_0$ - $A_1, \dots, A_k$ -normal se para todo  $p$ , todo  $q$ ,  $q < p \leq k$  tais que  $A_p = LA_q$  e  $v(A_p) = 0$ , existe uma  $A_1, \dots, A_k$ -valoração  $v_p$  tal que  $v_p(A_q) = 0$  e  $v(L, k)v_p$ ;
- $v$  é  $L_1$ - $A_1, \dots, A_k$ -normal se para todo  $p$ , todo  $q$ ,  $q < p \leq k$  tais que  $A_p = LA_q$  e  $v(A_p) = 1$ ,  $v(A_q) = v(\nabla A_q) = 1$ .

VII.2.4. LEMA. Seja  $A_1, \dots, A_n$  uma sequência normal;  $v$  uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração e  $v'$  a extensão canônica de  $v$  a  $A_1, \dots, A_n$ . Suponhamos ainda que  $v$  é  $G$ -,  $H$ -,  $L_0$ - e  $L_1$ - $A_1, \dots, A_{n-1}$ -normal. Nesse caso,  $v'$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração.

PROVA. Por I.2.3 e por construção,  $v'$  é uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração. Para provar que é  $A_1, \dots, A_n$ -valoração, temos três casos:

1- Para todo  $m < n$ ,  $A_n \neq \nabla A_m$  e  $A_n \neq LA_m$ . Imediatamente,  $v'$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração.

2- Para algum  $m < n$ ,  $A_n = \nabla A_m$ . Prova-se como em Kt (v. I.2.5) que  $v'$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração.

3- Para algum  $m < n$ ,  $A_n = LA_m$ .

I)  $v'(A_n) = 0$ . Por 2.2, temos três possibilidades:

a)  $v(A_m) = 0$ . Obviamente  $v \models \varepsilon(\{A_1, \dots, A_{n-1}\}_{v,1}^L)$ , pois  $v$  é  $L_1-A_1, \dots, A_{n-1}$ -normal. Por 0.17,  $v(L, n-1)v$ , e, por construção de  $v'$ ,  $v(L, n-1)v'$ . Então  $v'$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração.

b)  $v(\nabla A_m) = 0$ . Seja  $\nabla = G$ . (Para  $\nabla = H$ , analogamente.) Por 2.3 existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $v_n$  tal que  $v_n(A_m) = 0$  e  $v_n(L, n-1)v_n$ . Então  $v_n \models \varepsilon(\{A_1, \dots, A_{n-1}\}_{v_n,1}^G)$ . Seja  $A \in \varepsilon(\{A_1, \dots, A_{n-1}\}_{v,1}^L)$ . Então  $v(LA) = 1$ , e, como  $v$  é  $L_1-A_1, \dots, A_{n-1}$ -normal,  $v(GA) = 1$ . Portanto,  $A \in \varepsilon(\{A_1, \dots, A_{n-1}\}_{v,1}^G)$ , e  $\varepsilon(\{A_1, \dots, A_{n-1}\}_{v,1}^L) \subset \varepsilon(\{A_1, \dots, A_{n-1}\}_{v,1}^G)$ . Logo,  $v_n \models \varepsilon(\{A_1, \dots, A_{n-1}\}_{v,1}^L)$ . Por 0.17,  $v(L, n-1)v_n$ . Por construção de  $v'$ ,  $v'(L, n-1)v_n$ . Portanto, existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $v_n$  tal que  $v_n(A_m) = 0$  e  $v'(L, n-1)v_n$ . Por 2.1,  $v'$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração.

c) há uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $\bar{v}$  tal que  $\bar{v}(A_m) = 0$  e  $\bar{v}(L, n-1)\bar{v}$ . Obviamente  $v'(L, n-1)\bar{v}$  e, portanto,  $v'$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração.

II)  $v'(A_n) = 1$ . De 2.2,  $v(A_m) = v(\nabla A_m) = 1$ . Logo,  $v'(A_m) = v'(\nabla A_m) = 1$ . Suponhamos que existe  $p$ , existe  $q$ ,  $q < p < n$  tais que  $A_p = LA_q$  e  $v'(A_p) = 0$ . Então  $v(A_p) = 0$  e, como  $v$  é  $L_0-A_1, \dots, A_{n-1}$ -normal, existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $v_p$  tal que  $v_p(A_q) = 0$  e  $v_p(L, n-1)v_p$ . Prova-se facilmente, à maneira de I.2.5, que  $v_p(A_m) = 1$  e  $v'(L, n-1)v_p$ . Por 2.1, portanto,  $v'$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração.

VII.2.5. LEMA. Seja  $v$  uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração. Então  $v$  é G-, H-,  $L_0$ - e  $L_1$ - $A_1, \dots, A_n$ -normal.

PROVA. Por indução em  $n$ . Para  $n = 1$  a propriedade é trivial. Seja  $n > 1$ . Segue-se do lema 2.4 e da hipótese de indução que (¶) as extensões canônicas das  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valorações a  $A_1, \dots, A_n$  são  $A_1, \dots, A_n$ -valorações.

Prova-se que  $v$  é G- e H- $A_1, \dots, A_n$ -normal como em Kt (v. I.2.6). Provemos então que  $v$  é  $L_0$ - e  $L_1$ - $A_1, \dots, A_n$ -normal, examinando os casos. Se, para todo  $m < n$ ,  $A_n \neq LA_m$ , a prova é imediata. Suponhamos então  $A_n = LA_m$ , para algum  $m < n$ . Há duas possibilidades:

I)  $v(A_n) = 0$ . Temos: seja  $\bar{v}$  a extensão canônica de  $v$  a  $A_1, \dots, A_n$ . Então:

$$1) \varepsilon(\{A_1, \dots, A_n\}_{v,1}^L) = \varepsilon(\{A_1, \dots, A_{n-1}\}_{v,1}^L).$$

Como  $v$  é  $L_0$ - $A_1, \dots, A_{n-1}$ -normal,

2) para todo  $p$ , todo  $q$ ,  $q < p < n$  tais que  $A_p = LA_q$  e  $v(A_p) = 0$ , existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $v_p$  tal que  $v_p(A_q) = 0$  e  $v(L, n-1)v_p$ .

Para cada  $p$ , seja  $\bar{v}_p$  a extensão canônica de  $v_p$  a  $A_1, \dots, A_n$ . Então:

$$3) \bar{v}_p(A_q) = 0 \text{ e } v(L, n-1)\bar{v}_p.$$

De 1) e 3),

$$4) v(L, n)\bar{v}_p.$$

Assim, de (¶), 2), 3) e 4),

5) para todo  $p$ , todo  $q$ ,  $q < p < n$  tais que  $A_p = LA_q$  e  $v(A_p) = 0$ , existe uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração  $\bar{v}_p$  tal que  $\bar{v}_p(A_q) = 0$  e  $v(L, n)\bar{v}_p$ .

Por outro lado, como  $v(A_n) = 0$ , temos, de 2.1,

6) existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $v_n$  tal que  $v_n(A_m) = 0$  e  $v(L, n-1)v_n$ .

Seja  $\bar{v}_n$  a extensão canônica de  $v_n$  a  $A_1, \dots, A_n$ . Então:

$$7) \bar{v}_n(A_m) = 0 \text{ e } v(L, n-1)\bar{v}_n.$$

mel. De 1) e 7)

8)  $v(L, n) \bar{v}_n$ .

Assim, de (¶), 5), 6), 7) e 8),  $v$  é  $L_0-A_1, \dots, A_n$ -normal.

Uma vez que  $v(A_n) = 0$ , segue-se imediatamente, do fato de que  $v$  é  $L_1-A_1, \dots, A_{n-1}$ -normal, que  $v$  é  $L_1-A_1, \dots, A_n$ -normal.

VII.3. CORREÇÃO

II)  $v(A_n) = 1$ . De 2.1, temos:

9) para todo  $p$ , todo  $q$ ,  $q < p \leq n$  tais que  $A_p = LA_q$  e  $v(A_p) = 0$ , existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $v_p$  tal que  $v_p(A_q) = 0$ ,  $v_p(A_m) = 1$  e  $v(L, n-1)v_p$ .

PROVA. a) Para cada  $p$ , seja  $\bar{v}_p$  a extensão canônica de  $v_p$  a  $A_1, \dots, A_n$ . Então:

10)  $\bar{v}_p(A_q) = 0$ ,  $\bar{v}_p(A_m) = 1$  e  $v(L, n-1)\bar{v}_p$ .

De 10) e 0.17,

11)  $v(L, n) \bar{v}_p$ .

Assim, de (¶), 9), 10) e 11),  $v$  é  $L_0-A_1, \dots, A_n$ -normal.

Por outro lado,  $v$  é  $L_1-A_1, \dots, A_{n-1}$ -normal, i.e.,

12) para todo  $p$ , todo  $q$ ,  $q < p < n$  tais que  $A_p = LA_q$  e  $v(A_p) = 1$ ,  $v(A_q) = v(\nabla A_q) = 1$ .

E, como  $v(A_n) = 1$ , temos:

13)  $v(A_m) = v(\nabla A_m) = 1$ .

De 12) e 13), portanto,  $v$  é  $L_1-A_1, \dots, A_n$ -normal.

VII.3.3. LEMA. Para toda  $n$ , todo  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , se  $v$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração e  $v(A_i) = 1$ .

O corolário do lema 2.5 (que corresponde a I.2.7) é enunciado e provado do mesmo modo que em Kt (v. I.2.7).

PROVA. Segue imediatamente de 3.1.

VII.2.6. TEOREMA.  $v$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração sse: 1)  $A_1, \dots, A_n$  é uma sequência normal; 2)  $v$  é uma semi-valoração e 3)  $v$  é  $G$ -,  $H$ -,  $L_0$ - e  $L_1-A_1, \dots, A_n$ -normal.

mal. (v. I.3.3).

PROVA. Apesar de estarmos agora trabalhando com  $L2$ , com um operador a mais, a prova deste teorema não oferece dificuldades, e faz-se do mesmo modo que em  $Kt$  (v. I.2.8).

### VII.3. CORREÇÃO.

VII.3.1. COROLÁRIO. Se  $\vdash F$ , então, para toda valoração  $v$ ,  $v(F) = 1$ .

VII.3.1. LEMA. Seja  $v$  uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração; então, para  $1 \leq i \leq n$ , se  $A_i$  é um axioma de  $T-Kt$ ,  $v(A_i) = 1$ .

PROVA. a) se  $A_i$  é um axioma de  $Kt$ , prova-se como em  $Kt$  (v. I.3.1) que  $v(A_i) = 1$ .

b)  $A_i$  é de forma  $L(A \rightarrow B) \rightarrow (LA \rightarrow LB)$ . Se  $v(A_i) = 0$ , então  $v(L(A \rightarrow B)) = v(LA) = 1$ , e  $v(LB) = 0$ . Por 2.6 existe uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração  $v'$  tal que  $v'(B) = 0$  e  $v(L, n)v'$ . Como  $A, A \rightarrow B \in \varepsilon(\{A_1, \dots, A_n\}_{v, 1}^L)$ ,  $v'(A \rightarrow B) = v'(A) = 1$ . Não é possível, portanto,  $v'(B) = 0$ . Segue-se que  $v(A_i) = 1$ .

c)  $A_i$  é de forma  $LA \rightarrow A$ . Se  $v(LA) = 1$ , por 2.6  $v(A) = 1$ . Então  $v(A_i) = 1$ .

d)  $A_i$  é de forma  $LA \rightarrow \forall A$ . Se  $v(LA) = 1$ , por 2.6  $v(\forall A) = 1$ . Então  $v(A_i) = 1$ .

VII.4.1. LEMA. Se  $\Gamma \not\vdash LF$ , então existe  $\Delta$   $F$ -saturado tal que  $\varepsilon(\Gamma^L) \subset \Delta$ .

VII.3.2. TEOREMA. Se  $F$  é um axioma de  $T-Kt$  e  $v$  é uma valoração,  $v(F) = 1$ .

PROVA. Segue imediatamente de 3.1.

VII.3.3. LEMA. Para todo  $n$ , todo  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , se  $v$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração e  $\vdash A_i$ , então  $v(A_i) = 1$ .

PROVA. Por indução no número  $r$  de linhas de uma prova de  $A_i$  em  $T-Kt$ .

A) se  $r = 1$ ,  $A_i$  é um axioma e a propriedade segue de 3.1.

B) se  $r > 1$ , ou  $A_i$  é um axioma, e a propriedade segue de 3.1, ou:

a)  $A_i$  foi obtido por MP a partir de  $B$  e  $B \rightarrow A_i$ . Prova-se exatamente como

em Kt (v. I.3.3).

b)  $A_i = LA_j$  e foi obtido de  $A_j$  por N. Ora, para toda sequência normal  $\sigma$  onde ocorre  $A_i$ ,  $A_j$  ocorre também; logo, pela hipótese de indução, para toda  $\sigma$ -valoração  $\nu$ ,  $\nu(A_j) = 1$ . Segue-se de 2.6 que, para toda  $\sigma$ -valoração  $\nu$ ,  $\nu(A_i) = 1$ .

VII.3.4. COROLÁRIO. Se  $\vdash F$ , então, para toda valoração  $\nu$ ,  $\nu(F) = 1$ .

PROVA. Imediatamente, por 0.11 e 3.3.

VII.3.5. TEOREMA DE CORREÇÃO. Se  $\Gamma \vdash F$ , então  $\Gamma \models F$ .

PROVA. Como em I.3.5, por indução no número de linhas de uma dedução de  $F$  a partir de  $\Gamma$ . A única diferença é que, ao invés de termos RG e RH, como em Kt, a única regra de prova de T-Kt é N. A demonstração do teorema, contudo, é feita da mesma forma.

#### VII.4. COMPLETEDE.

VII.4.1. LEMA. Se  $\Gamma \not\vdash LF$ , então existe  $\Delta$  F-saturado tal que  $\varepsilon(\Gamma^L) \subset \Delta$ .

PROVA. Se  $\Gamma \not\vdash LF$ , então  $\Gamma^L \not\vdash LF$  e, por 1.1,  $\varepsilon(\Gamma^L) \not\vdash F$ . Por 0.15 há um conjunto

$\Delta$  F-saturado tal que  $\varepsilon(\Gamma^L) \subset \Delta$ .

VII.4.2. LEMA. Se  $\Delta$  é F-saturado,  $\varepsilon(\Delta^L) \subset \Delta$ .

PROVA. Seja  $A \in \varepsilon(\Delta^L)$ . Então  $LA \in \Delta$ . Como  $\vdash LA \rightarrow A$ ,  $\Delta \vdash A$ , e  $A \in \Delta$ .

VII.4.3. TEOREMA. Para todo conjunto  $\Delta$ , toda fórmula  $F$ , toda sequência  $A_1, \dots, A_n$ , toda função  $f$ , se  $\Delta$  é um conjunto F-saturado, e  $A_1, \dots, A_n$  é uma sequência normal, a função característica  $f$ , de  $\Delta$ , é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração.



PROVA. Faz-se como em I.4.3. O único caso em que há diferença acontece quando, para algum  $m < n$ ,  $A_n = LA_m$ .

I)  $f(A_n) = 0$ . I.e.,  $A_n \notin \Delta$ , e  $\Delta \not\vdash LA_m$ . Por 4.1 existe  $\Delta'$   $A_m$ -saturado tal que  $\varepsilon(\Delta^t) \subset \Delta'$ . Seja  $f'$  a função característica de  $\Delta'$ . Pela hipótese de indução (v. I.4.3),  $f$  e  $f'$  são  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valorações. Ora,  $\{A_1, \dots, A_{n-1}\}_{f,1}^t \subset \Delta^t$ ;

assim,  $\varepsilon(\{A_1, \dots, A_{n-1}\}_{f,1}^t) \subset \varepsilon(\Delta^t) \subset \Delta'$ . Assim,  $f' \models \varepsilon(\{A_1, \dots, A_{n-1}\}_{f,1}^t)$ . Logo,  $f \models (L, n-1) f'$ . E, como  $\Delta'$  é  $A_m$ -saturado,  $f'(A_m) = 0$ . Então  $f$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração.

II)  $f(A_n) = 1$ . I.e.,  $f(LA_m) = 1$ . Então  $LA_m \in \Delta$ . Como  $\vdash LA_m \rightarrow A_m$ ,  $\vdash LA_m \rightarrow GA_m$  e  $\vdash LA_m \rightarrow HA_m$ ,  $\Delta \vdash A_m$ ,  $\Delta \vdash GA_m$  e  $\Delta \vdash HA_m$ . Segue-se que  $f(A_m) = f(GA_m) = f(HA_m) = 1$ . Suponhamos então que existe  $p$ , existe  $q$ ,  $q < p < n$  tais que  $A_p = LA_q$  e  $f(A_p) = 0$ . Prova-se facilmente, por um raciocínio análogo ao caso I)

acima, que existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $f_p$  tal que  $f_p(A_q) = 0$ ,  $f_p(A_m) = 1$  e  $f \models (L, n-1) f_p$ . Por 2.1,  $f$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração.

O teorema correspondente a I.4.4 é enunciado e provado do mesmo modo como em Kt (v. I.4.4).

As propriedades I.1.1, I.1.2 e VII.1.1 também valem para B-Kt.

VII.4.4. TEOREMA DE COMPLETUDE. Se  $\Gamma \models F$ , então  $\Gamma \vdash F$ .

PROVA. Como em I.4.5.

VIII.2.1. DEFINIÇÃO. ( $A_1, \dots, A_n$ -valoração para B-Kt) Como em T-Kt (v. VII.2.1), com a seguinte nova redação para os itens

B) I) se  $v(A_n) = 0$ , então existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $v'$  tal que  $v'(A_m) = 0$ ,  $v \models (L, n-1) v'$  e  $v' \models (L, n-1) v$ ;

II) se  $v(A_n) = 1$ , então  $v(A_m) = v(VA_m) = 1$  e para todo  $p$ , todo  $q$ ,  $q < p$

$< n$  tais que  $A_p = LA_q$  e  $v(A_p) = 0$ , existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $v_p$  tal que  $v_p(A_q) = 0$ ,  $v_p(A_m) = 1$ ,  $v(L, n-1)v_p$  e  $v_p(L, n-1)v$ .

VIII.2.2. DEFINIÇÃO. (artefato Capítulo VIII em T-Kt (VII.2.2), com nova redação para o item

O CÁLCULO B-Kt

VIII.1. APRESENTAÇÃO

B-Kt é uma extensão modal de T-Kt e, como o nome indica, é obtido juntando-se a T-Kt o esquema de axioma a seguir:

A19.  $-L-LA \rightarrow A$

B-Kt é extensão conservativa de B e de Kt. Alguns teoremas mais:

T75.  $FHA \rightarrow LMA, PGA \rightarrow LMA$

T76.  $FLA \rightarrow LMA, PLA \rightarrow LMA$

T77.  $MLA \rightarrow HFA, MLA \rightarrow GPA$

T78.  $MLA \rightarrow GMA, MLA \rightarrow HMA$

As propriedades I.1.1, I.1.2 e VII.1.1 também valem para B-Kt.

VIII.2. VALORAÇÕES PARA B-Kt

VIII.2.1. DEFINIÇÃO. ( $A_1, \dots, A_n$ -valoração para B-Kt) Como em T-Kt (v. VII.2.1), com a seguinte nova redação para os itens

B) I) se  $v(A_n) = 0$ , então existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $v'$  tal que  $v'(A_m) = 0$ ,  $v(L, n-1)v'$  e  $v'(L, n-1)v$ ;

II) se  $v(A_n) = 1$ , então  $v(A_m) = v(\nabla A_m) = 1$  e para todo  $p$ , todo  $q$ ,  $q < p$

$< n$  tais que  $A_p = LA_q$  e  $v(A_p) = 0$ , existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $v_p$  tal que  $v_p(A_q) = 0$ ,  $v_p(A_m) = 1$ ,  $v(L, n-1)v_p$  e  $v_p(L, n-1)v$ .

VIII.2.2. DEFINIÇÃO. (*extensão canônica*) Como em T-Kt (VII.2.2), com nova redação para o item

a) II) se  $A_n = LA_m$ ,  $v'(F) = 0$  sse  $v(A_m) = 0$  ou  $v(\nabla A_m) = 0$  ou existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $\bar{v}$  tal que  $\bar{v}(A_m) = 0$ ,  $v(L, n-1)\bar{v}$  e  $\bar{v}(L, n-1)v$ .

Prova-se facilmente que as extensões canônicas são semi-valorações.

VIII.2.3. DEFINIÇÃO. ( $A_1, \dots, A_k$ -normalidade) Como em T-Kt (VII.2.3), com nova redação para o item

c)  $v$  é  $L_0-A_1, \dots, A_k$ -normal se para todo  $p$ , todo  $q$ ,  $q < p \leq k$  tais que  $A_p = LA_q$  e  $v(A_p) = 0$ , existe uma  $A_1, \dots, A_k$ -valoração  $v_p$  tal que  $v_p(A_q) = 0$ ,  $v(L, k)v_p$  e  $v_p(L, k)v$ .

VIII.2.4. LEMA. Seja  $A_1, \dots, A_n$  uma sequência normal,  $v$  uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração e  $v'$  a extensão canônica de  $v$  a  $A_1, \dots, A_n$ . Suponhamos ainda que  $v$  é G-, H-,  $L_0$ - e  $L_1-A_1, \dots, A_{n-1}$ -normal. Nesse caso,  $v'$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração.

PROVA. Por construção,  $v'$  é uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração. Provamos que é  $v'$  uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração examinando os casos. A diferença em relação a T-Kt ocorre quando  $A_n = LA_m$ , para algum  $m < n$ .

I)  $v'(A_n) = 0$ . Por 2.2, temos três possibilidades:

a)  $v(A_m) = 0$ . Obviamente  $v \models \varepsilon(\{A_1, \dots, A_{n-1}\}^L_{v,1})$ , pois  $v$  é  $L_1-A_1, \dots, A_{n-1}$ -normal. Por 0.17,  $v(L, n-1)v$ . Por construção de  $v'$ ,  $v(L, n-1)v'$  e  $v'(L, n-1)v$ . Então  $v'$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração.

b)  $v(\nabla A_m) = 0$ . Seja  $\nabla = G$ . (Para  $\nabla = H$ , analogamente.) Por 2.3 existe

uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $v_n$  tal que  $v_n(A_m) = 0$  e  $v_n(L, n-1)v_n$ . Então  $v_n \models \varepsilon(\{A_1, \dots, A_{n-1}\}^G_{v_n, 1})$  e  $v_n \models \varepsilon(\{A_1, \dots, A_{n-1}\}^H_{v_n, 1})$ . Prova-se como em T-Kt (v. VII.2.4)

que  $v_n(L, n-1)v_n$ . Seja  $A_r = LA_s$ ,  $s < r < n$ , tal que  $v_n(A_r) = 1$ .  $A_s \in \varepsilon(\{A_1, \dots, A_{n-1}\}^L_{v_n, 1})$ . Como  $v_n$  é uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração, é uma  $A_1, \dots, A_r$ -valoração e, por 2.1,  $v_n(HA_s) = 1$ . Então  $A_s \in \varepsilon(\{A_1, \dots, A_{n-1}\}^H_{v_n, 1})$ , e  $v(A_s) = 1$ .

PROVA. Como em I.2.8, com as modificações necessárias. Portanto,  $v \models \varepsilon(\{A_1, \dots, A_{n-1}\}^L_{v_n, 1})$ . Então  $v_n(L, n-1)v_n$ . Por construção de  $v'$ ,

$v'(L, n-1)v_n$  e  $v_n(L, n-1)v'$ . Assim, existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $v_n$  tal que  $v_n(A_m) = 0$ ,  $v'(L, n-1)v_n$  e  $v_n(L, n-1)v'$ . Por 2.1,  $v'$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração.

VIII.3.1. LEMA. Seja  $v$  uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração; então, para  $1 \leq i \leq n$ , se  $A_i$

é um axioma de B-Kt,  $v(A_i) = 1$ .  
c) há uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $\bar{v}$  tal que  $\bar{v}(A_m) = 0$ ,  $v(L, n-1)\bar{v}$  e  $\bar{v}(L, n-1)v$ . Obviamente  $v'(L, n-1)\bar{v}$  e  $\bar{v}(L, n-1)v'$ . Logo,  $v'$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração.

b) é de forma  $\neg(L-LA + A$ . Se  $v(\neg(L-LA)) = 1$ ,  $v(L-LA) = 0$  e, por 2.5, existe

II)  $v'(A_n) = 1$ . De 2.2,  $v(A_m) = v(\forall A_m) = 1$ . Logo,  $v'(A_m) = v'(\forall A_m) = 1$ .

Suponhamos que existe  $p$ , existe  $q$ ,  $q < p < n$  tais que  $A_p = LA_q$  e  $v'(A_p) = 0$ .

Prova-se facilmente, à menira de I.2.5, que existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração

$v_p$  tal que  $v_p(A_q) = 0$ ,  $v_p(A_m) = 1$ ,  $v'(L, n-1)v_p$  e  $v_p(L, n-1)v'$ . Por 2.1,  $v'$  é

uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração.

VIII.2.5. LEMA. Seja  $v$  uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração. Então  $v$  é G-, H-,  $L_0$ - e  $L_1$ -

$-A_1, \dots, A_n$ -normal.

PROVA. Prova-se que  $v$  é G- e H- $A_1, \dots, A_n$ -normal como em Kt (v. I.2.8). Prova-se

que  $v$  é  $L_1$ - $A_1, \dots, A_n$ -normal como em T-Kt (v. VII.2.5). A prova de que  $v$

é  $L_0$ - $A_1, \dots, A_n$ -normal não oferece dificuldades, e é feita através da mesma

argumentação utilizada para provar que as  $A_1, \dots, A_n$ -valorações são  $\nabla$ - $A_1, \dots,$

$A_n$ -normais em Ks (v. IV.2.5).

O corolário do lema acima (que corresponde a I.2.7) é enunciado e provado do mesmo modo que em Kt (v. I.2.7).

VIII.4.1. LEMA. Se  $\Delta$  é um conjunto F-saturado,  $\Delta'$  é F'-saturado,  $\varepsilon(\Delta') \subset \Delta$

VIII.2.6. TEOREMA.  $\nu$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração sse: 1)  $A_1, \dots, A_n$  é uma sequência normal; 2)  $\nu$  é uma semi-valoração e 3)  $\nu$  é G-, H-,  $L_0$ - e  $L_1$ - $A_1, \dots, A_n$ -normal.

PROVA. Como em I.2.8, com as modificações necessárias.

Suponhamos agora que  $\varepsilon(\Delta') \subset \Delta$ . A prova é análoga.

### 3. CORREÇÃO

VIII.3.1. LEMA. Seja  $\nu$  uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração; então, para  $1 \leq i \leq n$ , se  $A_i$  é um axioma de B-Kt,  $\nu(A_i) = 1$ .

PROVA. a) se  $A_i$  é um axioma de T-Kt, prova-se como em T-Kt (v. VII.3.1) que  $\nu(A_i) = 1$ .

b)  $A_i$  é de forma  $\neg L-LA \rightarrow A$ . Se  $\nu(\neg L-LA) = 1$ ,  $\nu(L-LA) = 0$  e, por 2.5, existe uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração  $\nu'$  tal que  $\nu'(\neg LA) = 0$ ,  $\nu(L, n)\nu'$  e  $\nu'(L, n)\nu$ . Então  $\nu'(LA) = 1$ , e, é claro,  $\nu(A) = 1$ . Assim,  $\nu(A_i) = 1$ .

Os lemas e teoremas VII.3.2 a VII.3.5 aplicam-se imediatamente a B-Kt, sem alterações (a não ser ler-se "B-Kt" onde se lê "T-Kt").

### VIII.4. COMPLETUDE

A seção sobre a completude de B-Kt apresenta alterações com relação a T-Kt apenas no teorema correspondente a VII.4.3 (ou seja, na prova de que a função característica de um conjunto F-saturado, para alguma F, é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração, para alguma sequência normal  $A_1, \dots, A_n$ ). A prova de tal teo

rema é feita sem dificuldade, mas para tanto necessitamos do seguinte lema:

VIII.4.1. LEMA. Se  $\Delta$  é um conjunto F-saturado,  $\Delta'$  é F'-saturado,  $\varepsilon(\Delta^L) \subset \Delta'$  e  $\varepsilon(\Delta'^L) \subset \Delta$ .

PROVA. Suponhamos que  $\varepsilon(\Delta^L) \subset \Delta'$ . Seja  $A \in \varepsilon(\Delta'^L)$ . Então  $LA \in \Delta'$ ;  $-LA \notin \Delta'$ . Como  $\varepsilon(\Delta^L) \subset \Delta'$ ,  $L-LA \notin \Delta$ , e, assim,  $-L-LA \in \Delta$ . Como  $\vdash -L-LA \rightarrow A$ ,  $\Delta \vdash A$ , e  $A \in \Delta$ . Logo,  $\varepsilon(\Delta'^L) \subset \Delta$ .

Suponhamos agora que  $\varepsilon(\Delta'^L) \subset \Delta$ . A prova é análoga.

#### DECIDIBILIDADE

Demonstrado este lema, a prova do teorema correspondente a VII.4.3 faz-se sem problemas, razão pela qual vamos omiti-la.

## Capítulo IX

### A DECIDIBILIDADE DE T-Kt

Neste capítulo mostraremos como, a partir das suas respectivas semânticas de valorações, obtemos **PARTE III** decisão para os cálculos aqui estudados. Tomaremos T-Kt como **DECIDIBILIDADE** permitirá ver o comportamento tanto de operadores modais como de operadores temporais. Além disso, T e Kt são subsistemas de T-Kt, e um método de decisão para os primeiros é imediato se tivermos método de decisão para o último. Quanto aos demais cálculos, modais e modais-temporais, o método de decisão é facilmente obtido do mesmo modo como em T-Kt, fazendo-se necessárias apenas pequenas alterações para adaptar o método a cada cálculo.

Como dissemos ao início deste trabalho, o método de decisão que aqui mostraremos é feito através de tabelas de verdade generalizadas.<sup>20</sup> Dada uma fórmula A, é fácil construir uma sequência normal finita  $A_1, \dots, A_n$  onde A é o último termo. Seja  $V(A_1, \dots, A_n)$  a classe de todas as  $A_1, \dots, A_n$ -valorações. Definiremos uma relação de equivalência da seguinte forma:  $v \approx v'$  se e somente se para  $1 \leq i \leq n$ ,  $v(A_i) = v'(A_i)$ . Como  $A_1, \dots, A_n$  é uma sequência finita, é óbvio que  $V(A_1, \dots, A_n)/\approx$  é finito. Assim, um método de decisão para T-Kt consistirá num procedimento que nos permita produzir, para toda  $|v| \in V(A_1, \dots, A_n)/\approx$ , a restrição  $\bar{v}$  de alguma  $v' \in |v|$  ao conjunto  $\{A_1, \dots, A_n\}$ . Tal constrói

<sup>20</sup> O que se segue é baseado em Loparić 1977, onde Andréa Loparić apresenta um método de decisão para o cálculo K de Kripke a partir de uma semântica de valorações.

## Capítulo IX

### A DECIDIBILIDADE DE T-Kt

Neste capítulo mostraremos como, a partir das suas respectivas semânticas de valorações, obtemos métodos de decisão para os cálculos aqui estudados. Tomaremos T-Kt como exemplo, o que nos permitirá ver o comportamento tanto de operadores modais como de operadores temporais. Além disso, T e Kt são subsistemas de T-Kt, e um método de decisão para os primeiros é imediato se tivermos método de decisão para o último. Quanto aos demais cálculos, modais e modais-temporais, o método de decisão é facilmente obtido do mesmo modo como em T-Kt, fazendo-se necessárias apenas pequenas alterações para adaptar o método a cada cálculo.

Como dissemos ao início deste trabalho, o método de decisão que aqui mostraremos é feito através de tabelas de verdade generalizadas.<sup>20</sup> Dada uma fórmula  $A$ , é fácil construir uma sequência normal finita  $A_1, \dots, A_n$  onde  $A$  é o último termo. Seja  $V(A_1, \dots, A_n)$  a classe de todas as  $A_1, \dots, A_n$ -valorações. Definiremos uma relação de equivalência da seguinte forma:  $v \cong v'$  sse para  $1 \leq i \leq n$ ,  $v(A_i) = v'(A_i)$ . Como  $A_1, \dots, A_n$  é uma sequência finita, é óbvio que  $V(A_1, \dots, A_n)/\cong$  é finito. Assim, um método de decisão para T-Kt consistirá num procedimento que nos permita produzir, para toda  $|v| \in V(A_1, \dots, A_n)/\cong$ , a restrição  $\bar{v}$  de alguma  $v' \in |v|$  ao conjunto  $\{A_1, \dots, A_n\}$ . Tal constru

<sup>20</sup> O que se segue é baseado em Loparić 1977, onde Andréa Loparić apresenta um método de decisão para o cálculo K de Kripke a partir de uma semântica de valorações.



ção, designada por  $T(A_1, \dots, A_n)$ , e chamada "tabela" para  $A_1, \dots, A_n$ , decide da validade de uma fórmula qualquer da sequência (e, conseqüentemente, da propriedade de ser um teorema). Em particular, da fórmula  $A$ .

Agora, como  $(A_1, A_2, A_3)^5 = (A_1, A_2, A_3)^8 = 4$ , temos, para  $i \in \{1, 2\}$ , Vejamos, através de um exemplo, como isto funcionaria. Seja  $A$  a fórmula  $L \rightarrow B \rightarrow GB$ . Vamos construir uma sequência normal  $A_1, \dots, A_n$  onde  $A_n = A$ . Primeiro, listamos todas as subfórmulas de  $A$ :  $B, \neg B, \neg\neg B, GB, L \rightarrow B, L \rightarrow B \rightarrow GB$ . Uma vez que há na sequência uma fórmula de forma LF, é necessário, de acordo com a definição 0.9, que GF e HF a precedam. Ou seja, nossa sequência  $A_1, \dots, A_n$  agora é:  $B, \neg B, \neg\neg B, GB, G \rightarrow B, H \rightarrow B, L \rightarrow B, L \rightarrow B \rightarrow GB$  (onde  $n = 8$ ).

O procedimento que aqui vamos mostrar consiste em construir a tabela para  $A_1$  - ou seja,  $T(A_1)$  - e depois estendê-la sucessivamente:  $T(A_1, A_2), \dots, T(A_1, \dots, A_n)$ .

	1	2	3	4	5	6	7	8
	B	$\neg B$	$\neg\neg B$	GB	$G \rightarrow B$	$H \rightarrow B$	$L \rightarrow B$	$L \rightarrow B \rightarrow GB$
1)	1	0	1	1	1	1	1	1
2)	0	1	0	1	1	1	0	1
3)	1	0	1	0	0	1	0	1
4)	0	1	0	0	0	1	0	1
5)	1	0	1	1	1	0	0	1
6)	0	1	0	1	1	0	0	1
7)	1	0	1	0	0	0	0	1
8)	0	1	0	0	0	0	0	1
9)	1	0	1	1	1	1	0	1

$T(A_1)$ ,  $T(A_1, A_2)$  e  $T(A_1, A_2, A_3)$  são construídas da maneira normal, i.e., como no cálculo proposicional clássico. Mas em  $T(A_1, \dots, A_4)$  duas no-

vas linhas foram acrescentadas. Vejamos como isso se explica.  $T(A_1, A_2, A_3) / \cong$  tem obviamente apenas dois elementos:  $|v_1|$  e  $|v_2|$ . Os elementos de  $|v_1|$  e  $|v_2|$ , restritos a  $A_1, A_2, A_3$  são representados na tabela pelas linhas 1 e 2. Agora, como  $\{A_1, A_2, A_3\}^G = \{A_1, A_2, A_3\}^H = \emptyset$ , temos, para  $i \in \{1, 2\}$ ,

I)  $v_1(B) = 0$ ,  $v_1 \models \varepsilon(\{A_1, A_2, A_3\}_{v_1, 1}^G)$  e  $v_1 \models \varepsilon(\{A_1, A_2, A_3\}_{v_1, 1}^H)$ . Desta forma são satisfeitas as condições necessárias para a existência de  $v'$  e  $v''$  em  $T(A_1, \dots, A_4)$  tais que  $v' \in |v_1|$ ,  $v'' \in |v_2|$  e  $v'(A_4) = v''(A_4) = 0$ .

II) vacuamente, para todo  $p$ , todo  $q$ ,  $q < p < 4$  tais que  $A_p = GA_q$  e  $v_i(A_p) = 0$ , há um  $j \in \{1, 2\}$  tal que  $v_j(A_4) = 0$ ,  $v_j(A_4) = 1$ ,  $v_j \models \varepsilon(\{A_1, A_2, A_3\}_{v_j, 1}^G)$  e  $v_j \models \varepsilon(\{A_1, A_2, A_3\}_{v_j, 1}^H)$ . (I.e.,  $v(3)v_j$ .) Assim, ficam satisfeitas as condições necessárias para a existência de  $\bar{v}'$ ,  $\bar{v}''$  em  $T(A_1, \dots, A_4)$  tais que  $\bar{v}' \in |v_1|$ ,  $\bar{v}'' \in |v_2|$  e  $\bar{v}'(A_4) = \bar{v}''(A_4) = 1$ .

Em vista de I e II, é plausível que  $T(A_1, \dots, A_4) / \cong$  tenha quatro elementos  $|v_1|, \dots, |v_4|$ , sendo a restrição de cada um deles a  $A_1, \dots, A_4$  representada pelas linhas 1 - 4 da tabela.

Na construção de  $T(A_1, \dots, A_5)$  não ocorre esse desdobramento de linhas - o que já era de se esperar, pois, se  $B \leftrightarrow \neg\neg B$ ,  $GB$  e  $G\neg\neg B$  devem tomar valores iguais. Vejamos, por exemplo, como não é possível  $G\neg\neg B$  tomar o valor 0 na linha 1. Seja  $v \in |v_1|$ , cuja restrição a  $A_1, \dots, A_4$  é representada pela linha 1. Temos que  $\{A_1, \dots, A_4\}^H = \emptyset$ , e  $\{A_1, \dots, A_4\}_{v, 1}^G = \{GB\}$ . I.e.,  $\varepsilon(\{A_1, \dots, A_4\}_{v, 1}^G) = \{B\}$ . Caso ocorresse  $v(G\neg\neg B) = 0$ , deveríamos ter  $v_i$ ,  $i \in \{1, \dots, 4\}$  tal que  $v_i(\neg\neg B) = 0$  e  $v(4)v_i$  (i.e.,  $v_i \models \varepsilon(\{A_1, \dots, A_4\}_{v_i, 1}^G)$  - e então  $v_i(B) = 1$ ). Mas  $v_i(\neg\neg B) = 0$  e  $v_i(B) = 1$  não é possível. Logo,  $G\neg\neg B$  não pode

<sup>21</sup> No restante deste capítulo, usaremos  $\sigma_i$  para designar o segmento ini-

tomar o valor 0 na linha 1.  $T(\sigma_n)$  de  $(\sigma_n) \times J(\sigma_n)$  em  $(0,1)$ , onde:

1)  $J(\sigma_n) = (1,2)$ ,  $T(\sigma_n)(A_1,1) = 1$  e  $T(\sigma_n)(A_1,2) = 0$ ;  
 2) Seja  $J(\sigma_{n-1}) = (1, \dots, q)$ ;  
 para todo  $p$ , todo  $q$ ,  $q < p < 5$  tais que  $A_p = GA_q$  e  $v(A_p) = 0$ , há um  $j \in \{1, \dots, 4\}$  tal que  $v_j(A_q) = 0$ ,  $v_j(A_3) = 1$  e  $v(4)v_j$ .

Essa situação repete-se na linha 2, onde mais uma vez  $G--B$  pode tomar apenas o valor 1. Nas linhas 3 e 4, ocorre o contrário: só é possível que  $G--B$  tome o valor 0. Assim, não se verifica, em  $T(A_1, \dots, A_5)$ , desdobramento de linhas.

Por outro lado, em  $T(A_1, \dots, A_6)$  isto volta a ocorrer, e as razões são análogas às apontadas na construção de  $T(A_1, \dots, A_4)$ . O mesmo raciocínio aplica-se a  $T(A_1, \dots, A_7)$ , mas aqui houve apenas uma linha desdobrada (comparar linhas 1 e 9). Para  $i \in \{2, \dots, 8\}$ , vemos que  $v_i(--B) = 0$ , ou  $v_i(G--B) = 0$ , ou  $v_i(H--B) = 0$  e, portanto, as condições necessárias para  $v_i(A_7) = 1$  não podem ser satisfeitas - ao contrário das condições necessárias para  $v_i(A_7) = 0$ . Nessas linhas, portanto,  $v_i(A_7) = 0$ .

$T(A_1, \dots, A_8)$  é construída da maneira usual.

Uma vez indicado o funcionamento do método de decisão através do exemplo anterior, passemos a uma definição precisa de uma tabela para uma sequência normal  $A_1, \dots, A_n$ .

IX.1. DEFINIÇÃO. Seja  $A_1, \dots, A_n$  uma sequência normal, e convençionemos designar por  $\sigma_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) o segmento inicial até  $i$  de  $A_1, \dots, A_n$ .<sup>21</sup> Uma tabela

<sup>21</sup> No restante deste capítulo, usaremos  $\sigma_i$  para designar o segmento ini-

para  $A_1, \dots, A_n$  é uma função  $T[\sigma_n]$  de  $\{\sigma_n\} \times J(\sigma_n)$  em  $\{0,1\}$ , onde:

1)  $J(\sigma_1) = \{1,2\}$ ,  $T[\sigma_1](A_1,1) = 1$  e  $T[\sigma_1](A_1,2) = 0$ ;

2) Seja  $J(\sigma_{n-1}) = \{1, \dots, q\}$ ;

a) Se  $A_n$  é variável proposicional, então  $J(\sigma_n) = \{1, \dots, 2q\}$  e:

i) para  $i < n$ ,  $j \in J(\sigma_{n-1})$ ,  $T[\sigma_n](A_i, j) = T[\sigma_{n-1}](A_i, j)$ ;

ii) para  $i < n$ ,  $j' \in J(\sigma_{n-1})$  e  $j = q + j'$ ,  $T[\sigma_n](A_i, j) = T[\sigma_{n-1}](A_i, j')$ ;

iii) para  $i = n$ ,  $j \in J(\sigma_{n-1})$ ,  $T[\sigma_n](A_i, j) = 1$ ;

iv) para  $i = n$ ,  $j' \in J(\sigma_{n-1})$  e  $j = q + j'$ ,  $T[\sigma_n](A_i, j) = 0$ ;

b) se  $A_n = \neg A_k$ ,  $k < n$ ,  $J(\sigma_n) = J(\sigma_{n-1})$  e:

i) para  $i < n$ ,  $T[\sigma_n](A_i, j) = T[\sigma_{n-1}](A_i, j)$ ;

ii) para  $i = n$ ,  $T[\sigma_n](A_i, j) \neq T[\sigma_{n-1}](A_i, j)$ ;

c) se  $A_n = A_k \rightarrow A_e$ ,  $k < n$ ,  $e < n$ ,  $J(\sigma_n) = J(\sigma_{n-1})$  e:

i) para  $i < n$ ,  $T[\sigma_n](A_i, j) = T[\sigma_{n-1}](A_i, j)$ ;

ii) para  $i = n$ ,  $T[\sigma_n](A_i, j) = 1$  sse  $T[\sigma_{n-1}](A_k, j) = 0$  ou  $T[\sigma_{n-1}](A_e, j) = 1$ ;

d) se  $A_n = GA_k$ ,  $k < n$ , para cada  $j \in J(\sigma_{n-1})$ :

I) seja  $\alpha(j, n-1) = \{j' \in J(\sigma_{n-1}) : T[\sigma_{n-1}](A_k, j') = 0\}$  e, para todo  $r$ ,

$1 \leq r < n$ , se  $A_r = GA_s$  e  $T[\sigma_{n-1}](A_r, j) = 1$ , então  $T[\sigma_{n-1}](A_s, j')$

$= 1$ , e para todo  $t$ ,  $1 \leq t < n$ , se  $A_t = HA_u$  e  $T[\sigma_{n-1}](A_t, j') = 1$ , então  $T[\sigma_{n-1}](A_u, j) = 1$ ;

II) para todo  $p$ , todo  $q$ ,  $q < p < n$  tais que  $A_p = GA_q$  e  $T[\sigma_{n-1}](A_p, j) = 0$ ,

seja  $\beta(p, j, n-1) = \{j' \in J(\sigma_{n-1}) : T[\sigma_{n-1}](A_q, j') = 0, T[\sigma_{n-1}](A_k, j') = 0\}$ .

cial até  $i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , de uma sequência normal  $A_1, \dots, A_m$  qualquer.

= 1, e, para todo  $r$ ,  $1 \leq r < n$ , se  $A_r = GA_s$  e  $T[\sigma_{n-1}](A_r, j) = 1$ , então  $T[\sigma_{n-1}](A_s, j') = 1$ ; e, para todo  $t$ ,  $1 \leq t < n$ , se  $A_t = HA_u$  e  $T[\sigma_{n-1}](A_t, j') = 1$ , então  $T[\sigma_{n-1}](A_u, j) = 1$ };

III) Seja  $\{j_1, \dots, j_m\} \subset J(\sigma_{n-1})$  tal que:  $\neq \phi$  e, para todo  $p < n$ ,

1)  $j_{m'} < j_{m''}$  se  $m' < m''$ ;

2)  $j_m \in \{j_1, \dots, j_m\}$  se  $\alpha(j_m, n-1) \neq \phi$  e, para todo  $p < n$ ,

1)  $\beta(p, j_m, n-1) \neq \phi$ .

Então  $J(\sigma_n) = \{1, \dots, q, \dots, q + m\}$ , e:

i) para  $i < n$ ,  $j \leq q$ ,  $T[\sigma_n](A_i, j) = T[\sigma_{n-1}](A_i, j)$ ;

ii) para  $i < n$ ,  $j = q + m'$ ,  $T[\sigma_n](A_i, j) = T[\sigma_{n-1}](A_i, j_{m'})$ ;

iii) para  $i = n$ ,  $j$  tal que  $\alpha(j, n-1) = \phi$ ,  $T[\sigma_n](A_i, j) = 1$ ;

iv) para  $i = n$ ,  $j$  tal que  $\alpha(j, n-1) \neq \phi$  e, para cada algum  $p < n$ ,

$\beta(p, j, n-1) = \phi$ ,  $T[\sigma_n](A_i, j) = 0$ ;

v) para  $i = n$ ,  $j$  tal que  $\alpha(j, n-1) \neq \phi$  e, para cada  $p < n$ ,  $\beta(p, j, n-1)$

$\neq \phi$ , caso em que, para algum  $m' \in \{1, \dots, m\}$ ,  $j = j_{m'}$  ou  $j = q + m'$ ,

1) se  $j = j_{m'}$ , então  $T[\sigma_n](A_i, j) = 1$ ;

2) se  $j = q + m'$ , então  $T[\sigma_n](A_i, j) = 0$ ;

e) se  $A_n = HA_k$ ,  $k < n$ , para cada  $j \in J(\sigma_{n-1})$

I) seja  $\gamma(j, n-1) = \{j' \in J(\sigma_{n-1}) : T[\sigma_{n-1}](A_k, j') = 0 \text{ e, para todo } r,$

$1 \leq r < n$ , se  $A_r = HA_s$  e  $T[\sigma_{n-1}](A_r, j) = 1$ , então  $T[\sigma_{n-1}](A_s, j')$

$= 1 \text{ e, para todo } t, 1 \leq t < n$ , se  $A_t = GA_u$  e  $T[\sigma_{n-1}](A_t, j') = 1$ ,

então  $T[\sigma_{n-1}](A_u, j) = 1$ };

II) para todo  $p$ , todo  $q$ ,  $q < p < n$  tais que  $A_p = HA_q$  e  $T[\sigma_{n-1}](A_p, j)$

$= 0$ , seja  $\delta(p, j, n-1) = \{j' \in J(\sigma_{n-1}) : T[\sigma_{n-1}](A_q, j') = 0$ ,

$T[\sigma_{n-1}](A_k, j') = 1 \text{ e, para todo } r, 1 \leq r < n$ , se  $A_r = HA_s$  e

$T[\sigma_{n-1}](A_r, j) = 1$ , então  $T[\sigma_{n-1}](A_s, j') = 1$ ; e, para todo  $t, 1 \leq t$

$< n$ , se  $A_t = GA_u$  e  $T[\sigma_{n-1}](A_t, j') = 1$ , então  $T[\sigma_{n-1}](A_u, j) = 1$ ;

III) Seja  $\{j_1, \dots, j_m\} \subset J(\sigma_{n-1})$  tal que:

1)  $j_{m'} < j_m''$  se  $m' < m''$ ;

2)  $j_m \in \{j_1, \dots, j_m\}$  se  $\gamma(j_m, n-1) \neq \emptyset$  e, para todo  $p < n$ ,

$\delta(p, j, n-1) \neq \emptyset$ .

Então  $J(\sigma_n) = \{1, \dots, q, \dots, q + m\}$ , e:

i) para  $i < n$ ,  $j \leq q$ ,  $T[\sigma_n](A_i, j) = T[\sigma_{n-1}](A_i, j)$ ;

ii) para  $i < n$ ,  $j = q + m'$ ,  $T[\sigma_n](A_i, j) = T[\sigma_{n-1}](A_i, j_{m'})$ ;

iii) para  $i = n$ ,  $j$  tal que  $\gamma(j, n-1) = \emptyset$ ,  $T[\sigma_n](A_i, j) = 1$ ;

iv) para  $i = n$ ,  $j$  tal que  $\gamma(j, n-1) \neq \emptyset$  e, para algum  $p < n$ ,

$\delta(p, j, n-1) = \emptyset$ ,  $T[\sigma_n](A_i, j) = 0$ ;

v) para  $i = n$ ,  $j$  tal que  $\gamma(j, n-1) \neq \emptyset$  e, para cada  $p < n$ ,  $\delta(p, j, n-1)$

$\neq \emptyset$ , caso em que, para algum  $m' \in \{1, \dots, m\}$ ,  $j = j_{m'}$  ou  $j = q + m'$ ,

1) se  $j = j_{m'}$ , então  $T[\sigma_n](A_i, j) = 1$ ;

2) se  $j = q + m'$ , então  $T[\sigma_n](A_i, j) = 0$ ;

f) se  $A_n = LA_k$ ,  $k < n$ , pela definição de sequência normal temos  $e < n$ ,

$f < n$  tais que  $A_e = GA_k$  e  $A_f = HA_k$ . Para cada  $j \in J(\sigma_{n-1})$

I) seja  $\theta(j, n-1) = \{j' \in J(\sigma_{n-1}) : T[\sigma_{n-1}](A_k, j') = 0 \text{ e, para todo } r,$

$1 \leq r < n$ , se  $A_r = LA_s$  e  $T[\sigma_{n-1}](A_r, j) = 1$ , então  $T[\sigma_{n-1}](A_s, j')$

$= 1$ };

II) para todo  $p$ , todo  $q$ ,  $q < p < n$  tais que  $A_p = LA_q$  e  $T[\sigma_{n-1}](A_p, j)$

$= 0$ , seja  $\zeta(p, j, n-1) = \{j' \in J(\sigma_{n-1}) : T[\sigma_{n-1}](A_q, j') = 0,$

$T[\sigma_{n-1}](A_k, j') = 1 \text{ e, para todo } r, 1 \leq r < n, \text{ se } A_r = LA_s \text{ e}$

$T[\sigma_{n-1}](A_r, j) = 1$ , então  $T[\sigma_{n-1}](A_s, j') = 1$ };

III) Seja  $\{j_1, \dots, j_m\} \subset J(\sigma_{n-1})$  tal que:

1)  $j_{m'} < j_m''$  se  $m' < m''$ ;

IX.3. LEMA 2)  $j_m \in \{j_1, \dots, j_m\}$  se  $\theta(j, n-1) \neq \phi$  e, para todo  $p < n$ , e  $A_1 = LA_k$  então, para  $\zeta(p, j_m, n-1) \neq \phi$  e  $T[\sigma_{n-1}](A_k, j_m) = T[\sigma_{n-1}](A_e, j_m) = T[\sigma_n](A_e, j_m) = T[\sigma_n](A_f, j_m) = 1$ .

PROVA. Por indução em  $n$ . Então  $J(\sigma_n) = \{1, \dots, q, \dots, q + m\}$ , e:

- i) para  $i < n$ ,  $j \leq q$ ,  $T[\sigma_n](A_i, j) = T[\sigma_{n-1}](A_i, j)$ ;
- ii) para  $i < n$ ,  $j = q + m'$ ,  $T[\sigma_n](A_i, j) = T[\sigma_{n-1}](A_i, j)$ ;
- iii) para  $i = n$ ,  $j$  tal que  $\theta(j, n-1) = \phi$ ,  $T[\sigma_n](A_i, j) = 1$ ;
- iv) para  $i = n$ ,  $j$  tal que  $\theta(j, n-1) \neq \phi$  e, para algum  $p < n$ , segue-se do Lema 2 que  $\zeta(p, j, n-1) = \phi$ ,  $T[\sigma_n](A_i, j) = 0$ ;
- v) para  $i = n$ ,  $j$  tal que  $\theta(j, n-1) \neq \phi$ , para todo  $p < n$ ,  $\zeta(p, j, n-1) \neq \phi$ ,  $T[\sigma_{n-1}](A_k, j) = 0$  ou  $T[\sigma_{n-1}](A_e, j) = 0$  ou  $T[\sigma_{n-1}](A_f, j) = 0$ ,  $T[\sigma_n](A_i, j) = 0$ ;
- vi) para  $i = n$ ,  $j$  tal que  $\theta(j, n-1) \neq \phi$ , para todo  $p < n$ ,  $\zeta(p, j, n-1) \neq \phi$ ,  $T[\sigma_{n-1}](A_k, j) = T[\sigma_{n-1}](A_e, j) = T[\sigma_{n-1}](A_f, j) = 1$ , caso em que, para algum  $m' \in \{1, \dots, m\}$ ,  $j = j_m$ , ou  $j = q + m'$ ,
  - 1) se  $j = j_m$ , então  $T[\sigma_n](A_i, j) = 1$ ;
  - 2) se  $j = q + m'$ , então  $T[\sigma_n](A_i, j) = 0$ .

Resta agora provar que as tabelas de valorações são um procedimento de decisão para T-Kt, isto é, que T-Kt é decidível através de tais tabelas. Logo,  $T[\sigma_{n-1}](A_k, j) = 1$  - e é impossível  $T[\sigma_n](A_k, j) = 0$ .

IX.2. LEMA. Seja  $A_1, \dots, A_m$  uma sequência normal. Para todo  $j \in J(\sigma_k)$ ,  $1 \leq k \leq m$ , existe  $j^* \in J(\sigma_m)$  tal que, para todo  $i$ ,  $1 \leq i \leq k$ ,  $T[\sigma_k](A_i, j) = T[\sigma_m](A_i, j^*)$ .

PROVA. Prova-se facilmente por indução em  $m - k$ , baseada nas condições i) e ii) de a) - f) da definição 1.

IX.3. LEMA. Seja  $A_1, \dots, A_n$  uma seqüência normal. Para  $1 \leq i \leq n$ , se  $A_i = LA_k$  então, para todo  $j \in J(\sigma_n)$ , se  $T[\sigma_n](A_i, j) = 1$ , então  $T[\sigma_n](A_k, j) = T[\sigma_n](A_e, j) = T[\sigma_n](A_f, j) = 1$ , onde  $A_e = GA_k$  e  $A_f = HA_k$ .

PROVA. Por indução em  $n$ .

1)  $n = 1$ . Trivialmente.

2)  $n > 1$ . Hipótese de indução: para  $1 \leq i < n$ , se  $T[\sigma_{n-1}](A_i, j) = 1$ , então  $T[\sigma_{n-1}](A_k, j) = T[\sigma_{n-1}](A_e, j) = T[\sigma_{n-1}](A_f, j) = 1$ .

Por construção, para  $i < n$ ,  $T[\sigma_n](A_i, j) = T[\sigma_{n-1}](A_i, j)$ . Segue-se do

Lema 2 que:

(¶) para  $1 \leq i < n$ , se  $T[\sigma_n](A_i, j) = 1$ , então  $T[\sigma_n](A_k, j) = T[\sigma_n](A_e, j) = T[\sigma_n](A_f, j) = 1$ .

Seja  $i = n$ , e suponhamos que  $A_n = LA_k$  e  $T[\sigma_n](A_n, j) = 1$ .

I) Suponhamos que  $T[\sigma_n](A_k, j) = 0$ . Pela definição 1, temos:

(a) i)  $\theta(j, n-1) = \emptyset$  ou ii) para todo  $p < n$ ,  $\zeta(p, j, n-1) \neq \emptyset$  (1.2.f.iv); ou

(b) i)  $\theta(j, n-1) = \emptyset$  ou ii) para algum  $p < n$ ,  $\zeta(p, j, n-1) = \emptyset$ , ou iii)

$$T[\sigma_{n-1}](A_k, j) = T[\sigma_{n-1}](A_e, j) = T[\sigma_{n-1}](A_f, j) = 1 \quad (1.2.f.v).$$

(a) i)  $\theta(j, n-1) = \emptyset$ . Logo, para toda  $j' \in J(\sigma_{n-1})$ , se, para todo  $r$ ,  $1 \leq r < n$  tal que  $A_r = LA_s$  e  $T[\sigma_{n-1}](A_r, j) = 1$ ,  $T[\sigma_{n-1}](A_s, j') = 1$ , então  $T[\sigma_{n-1}](A_k, j') = 1$ . Ora, para todo  $r$ ,  $1 \leq r < n$  tal que  $A_r = LA_s$  e  $T[\sigma_n](A_r) = 1$ , temos, por (¶), que  $T[\sigma_n](A_s, j) = 1$  e, portanto, que  $T[\sigma_{n-1}](A_s, j) = 1$ . Logo,  $T[\sigma_{n-1}](A_k, j) = 1$  - e é impossível  $T[\sigma_n](A_k, j) = 0$ .

ii) para todo  $p < n$ ,  $\zeta(p, j, n-1) \neq \emptyset$ . Se tivermos  $\theta(j, n-1) = \emptyset$ , caímos em i), o que, como vimos, não é possível. Logo,  $\theta(j, n-1) \neq \emptyset$ . Mas temos por hipótese que  $T[\sigma_n](A_k, j) = 0$  - i.e.,  $T[\sigma_{n-1}](A_k, j) = 0$ . Ora, se  $\theta(j, n-1) \neq \emptyset$ ; para todo  $p < n$ ,  $\zeta(p, j, n-1) \neq \emptyset$  e  $T[\sigma_{n-1}](A_k, j) = 0$ , por 1.2.f.v, temos  $T[\sigma_n](A_n, j) = 0$  - o que contraria a hipótese do lema.



(b) i)  $\alpha(j, n-1) = \phi$ . Por 1.2.d.iii,  $T[\sigma_n](A_k, j) = 1$  - contrariando a hipótese. Assim, em (a),  $T[\sigma_{n-1}](A_k, j) = T[\sigma_n](A_k, j) = 1$ .

(b) i)  $\theta(j, n-1) = \phi$ . Como em (a) i).

ii) para algum  $p < n$ ,  $\zeta(p, j, n-1) = \phi$ . Temos que  $\theta(j, n-1) \neq \phi$  (caso contrário caímos em (a) i)). Mas isto é suficiente, por 1.2.f.iv, para que tenhamos  $T[\sigma_n](A_n, j) = 0$  - contrariando a hipótese do lema.

iii)  $T[\sigma_{n-1}](A_k, j) = T[\sigma_{n-1}](A_e, j) = T[\sigma_{n-1}](A_f, j) = 1$ . Ora, então  $T[\sigma_n](A_k, j) = 1$ .

Assim, em (b),  $T[\sigma_n](A_k, j) = 1$ .

De (a) e (b), portanto, se  $T[\sigma_n](A_n, j) = 1$ ,  $T[\sigma_n](A_k, j) = 1$ .

II) Suponhamos que  $T[\sigma_n](A_e, j) = 0$ . Temos então:

(a)  $\alpha(j, n-1) \neq \phi$  (1.2.d.iii), ou

(b) i)  $\alpha(j, n-1) = \phi$  ou ii) para algum  $p < n$ ,  $\beta(p, j, n-1) = \phi$  (1.2.d.v).

(a)  $\alpha(j, n-1) \neq \phi$ . Mostraremos que essa suposição implica  $\theta(j, n-1) \neq \phi$ . Pela definição, se  $\alpha(j, n-1) \neq \phi$ , existe  $j'$  tal que  $T[\sigma_{n-1}](A_k, j') = 0$  e, para todo  $r$ ,  $1 \leq r < n$ , se  $A_r = GA_s$  e  $T[\sigma_{n-1}](A_r, j) = 1$ , então  $T[\sigma_{n-1}](A_s, j') = 1$ . Suponhamos então que existe  $t$ ,  $1 \leq t < n$  tal que  $A_t = LA_u$ ,  $u < t$ , e  $T[\sigma_{n-1}](A_t, j) = 1$ . Pela hipótese de indução,  $T[\sigma_{n-1}](GA_u, j) = 1$  - e então  $T[\sigma_{n-1}](A_u, j') = 1$ . Assim, existe  $j'$  tal que  $T[\sigma_{n-1}](A_k, j') = 0$  e, para todo  $t$ ,  $1 \leq t < n$ , se  $A_t = LA_u$  e  $T[\sigma_{n-1}](A_t, j) = 1$ ,  $T[\sigma_{n-1}](A_u, j') = 1$ . Ou seja,  $\theta(j, n-1) \neq \phi$ .

Temos agora duas possibilidades. Suponhamos que, para algum  $p < n$ ,  $\zeta(p, j, n-1) = \phi$ . Nesse caso, por 1.2.f.iv,  $T[\sigma_n](A_n, j) = 0$  - contrariando a hipótese do lema. Deveremos ter então que, para todo  $p < n$ ,  $\zeta(p, j, n-1) \neq \phi$ . Mas, como  $T[\sigma_{n-1}](A_e, j) = 0$ , por 1.2.f.v segue-se que  $T[\sigma_n](A_n, j) = 0$  - novamente contrariando a hipótese do lema. Assim, não é possível que  $\theta(j, n-1) \neq \phi$  - e, portanto, que  $\alpha(j, n-1) \neq \phi$ .

(b) i)  $\alpha(j, n-1) = \phi$ . Por 1.2.d.iii,  $T[\sigma_n](A_e, j) = 1$  - contrariando a hipótese.

Não é necessário considerar (b) ii), pois, ou  $\alpha(j, n-1) = \phi$  ou então  $\alpha(j, n-1) \neq \phi$  e, nos dois casos, chegamos a uma contradição. Por conseguinte, de (a) e (b),  $T[\sigma_n](A_n, j) = 1$ .

III) Suponhamos  $T[\sigma_n](A_f, j) = 1$ . Analogamente a II), não é possível fazer tal suposição.

IX.4. LEMA. Seja  $A_1, \dots, A_n$  uma sequência normal. Para toda valoração  $\nu$  há um

$j \in J(\sigma_n)$  tal que, para  $1 \leq i \leq n$   $\nu(A_i) = T[\sigma_n](A_i, j)$ .

PROVA. Seja  $\nu$  uma valoração qualquer. Por definição (0.11)  $\nu$  é uma valoração para a sequência  $A_1, \dots, A_n$  - i.e.,  $\nu$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração. A prova procede por indução em  $n$ .

1) Seja  $n = 1$ . Pela definição 1,  $J(\sigma_1) = \{1, 2\}$ . Há duas possibilidades:

I)  $\nu(A_1) = 0$ . Por 1.1, temos que  $T[\sigma_1](A_1, 2) = 0$ . Há então um  $j = 2$  tal que  $T[\sigma_1](A_1, j) = \nu(A_1)$ .

II)  $\nu(A_1) = 1$ . Por 1.1 temos que  $T[\sigma_1](A_1, 1) = 1$ . Há então um  $j = 1$  tal que  $T[\sigma_1](A_1, j) = \nu(A_1)$ .

2) Seja  $n > 1$ , e seja  $J(\sigma_{n-1}) = \{1, \dots, q\}$ .

Hipótese de indução: para toda valoração  $\nu$  existe  $j \in J(\sigma_{n-1})$  tal que, para  $1 \leq i < n$ ,  $\nu(A_i) = T[\sigma_{n-1}](A_i, j)$ .

O que diz a hipótese de indução é que, para toda valoração  $\nu$ , há uma linha  $j$  da tabela até  $n-1$  tal que  $\nu$  e  $j$  coincidem até  $n-1$ . É preciso então provar que coincidem na tabela até  $n$ , o que faremos examinando a construção da tabela até  $n$ .

Por construção, para  $i < n$ ,  $T[\sigma_n](A_i, j) = T[\sigma_{n-1}](A_i, j)$ . Segue-se

do Lema 2 que:

(¶) Para toda valoração  $v$ , há um  $j \in J(\sigma_n)$  tal que, para  $1 \leq i < n$ ,  $v(A_i) = T[\sigma_{n-1}](A_i, j)$ .

a) Seja  $A_n$  uma variável proposicional. Por 1.2.a,  $J(\sigma_n) = \{1, \dots, 2q\}$ .

I)  $v(A_n) = 0$ . Por (¶), existe  $j \in J(\sigma_n)$  tal que, para  $1 \leq i < n$ ,  $v(A_i) = T[\sigma_n](A_i, j)$ . Suponhamos que  $j \in J(\sigma_{n-1})$  - i.e.,  $j \in \{1, \dots, q\}$ . Por 1.2.a.i, há  $j' \in J(\sigma_n)$  tal que, para  $i < n$ ,  $v(A_i) = T[\sigma_n](A_i, j')$ . Por 1.2.a.iv, para  $i = n$ ,  $T[\sigma_n](A_i, j) = 0$ . Logo, existe  $j' \in J(\sigma_n)$  tal que, para  $1 \leq i \leq n$ ,  $T[\sigma_n](A_i, j) = v(A_i)$ . Suponhamos agora que  $j = q + j'$ . Por 1.2.a.iv,  $T[\sigma_n](A_n, j) = 0$  - e portanto, existe  $j \in J(\sigma_n)$  tal que, para  $1 \leq i \leq n$ ,  $v(A_i) = T[\sigma_n](A_i, j)$ .

II)  $v(A_n) = 1$ . Prova-se analogamente.

b) Seja  $A_n = \neg A_k$ ,  $k < n$ .

I)  $v(A_n) = 0$ . Então  $v(A_k) = 1$ . Por (¶) há um  $j \in J(\sigma_n)$  tal que  $v(A_k) = T[\sigma_n](A_k, j)$ . Por 1.2.b.ii, para  $i = n$ ,  $T[\sigma_n](A_n, j) \neq T[\sigma_n](A_k, j)$ . Como  $T[\sigma_n](A_k, j) = T[\sigma_{n-1}](A_k, j) = 1$ ,  $T[\sigma_n](A_n, j) = 0$ .

II)  $v(A_n) = 1$ . Prova-se analogamente ao caso anterior.

c) Seja  $A_n = A_k \rightarrow A_e$ ,  $e < n$ ,  $k < n$ .

I)  $v(A_n) = 0$ . Então  $v(A_k) = 1$  e  $v(A_e) = 0$ . Por (¶) existe  $j \in J(\sigma_n)$  tal que  $T[\sigma_n](A_k, j) = 1$  e  $T[\sigma_n](A_e, j) = 0$ . Por 1.2.c.ii,  $T[\sigma_n](A_n, j) = 0$ .

II)  $v(A_n) = 1$ . Prova-se analogamente ao caso anterior.

d) Seja  $A_n = GA_k$ ,  $k < n$ . Prova-se analogamente ao caso f) abaixo.

e) Seja  $A_n = HA_k$ ,  $k < n$ . Prova-se analogamente ao caso f) abaixo.

f) Seja  $A_n = LA_k$ ,  $k < n$ . Como  $A_1, \dots, A_n$  é uma sequência normal, existe  $e < n$ ,

$f < n$  tais que  $A_e = GA_k$  e  $A_f = HA_k$ .

I) Seja  $v(A_n) = 0$ . Pela definição, existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $v'$  tal que  $v'(A_k) = 0$  e  $v(L, n-1)v'$ . Por (¶) existe  $j' \in J(\sigma_n)$  tal que, para  $i < n$ ,  $T[\sigma_n](A_i, j) = v'(A_i)$ . Então:  $T[\sigma_n](A_k, j') = 0$  e, para todo  $r$ ,  $1 \leq r < n$  tal que  $A_r = LA_s$  e  $v(A_r) = 1$ ,  $T[\sigma_n](A_r, j) = 1$  e  $T[\sigma_n](A_s, j') = 1$ . Por definição,  $\theta(j, n-1) \neq \phi$ . Verificando na definição 1.2 os itens iv, v e vi de f), vemos que, qualquer o caso, há sempre  $j^*$  tal que, para  $i < n$ ,  $T[\sigma_n](A_i, j) = v(A_i)$  e, além disso,  $T[\sigma_n](A_n, j^*) = 0$ . Portanto, existe  $j \in J(\sigma_n)$  tal que, para  $1 \leq i \leq n$   $v(A_i) = T[\sigma_n](A_i, j)$ .

II) Seja  $v(A_n) = 1$ . Pela definição de  $A_1, \dots, A_n$ -valoração,  $v(A_k) = v(GA_k) = v(HA_k) = 1$  e, para todo  $p$ , todo  $q$ ,  $q < p < n$  tais que  $A_p = LA_q$  e  $v(A_p) = 0$ , existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $v_p$  tal que  $v_p(A_q) = 0$ ,  $v(L, n-1)v_p$  e  $v_p(A_k) = 1$ . Por (¶), existe  $j \in J(\sigma_n)$  tal que  $T[\sigma_n](A_k, j) = T[\sigma_n](A_e, j) = T[\sigma_n](A_f, j) = 1$  e, para todo  $p$ , todo  $q$ ,  $q < p < n$  tais que  $A_p = LA_q$  e  $v(A_p) = 0$ , temos  $T[\sigma_n](A_p, j) = 0$ . Além disso, para todo  $t$ ,  $1 \leq t < n$  tal que  $A_t = LA_u$  e  $v(A_t) = 1$ ,  $T[\sigma_n](A_t, j) = 1$ . Segue-se também de (¶) que existe  $j' \in J(\sigma_n)$  tal que, para  $1 \leq i < n$ ,  $v_p(A_i) = T[\sigma_n](A_i, j')$ . Temos portanto que  $T[\sigma_n](A_q, j') = 0$ ,  $T[\sigma_n](A_k, j') = 1$  e, como  $v(L, n-1)v_p$ , para todo  $t$ ,  $1 \leq t < n$  tal que  $A_t = LA_u$  e  $T[\sigma_n](A_t, j) = 1$ ,  $T[\sigma_n](A_u, j') = 1$ . Disso tudo segue-se que, para todo  $p < n$ ,  $\zeta(p, j, n-1) \neq \phi$ . Por 1.2.f.vi, temos que existe  $j \in J(\sigma_n)$  ( $j = j_m'$ ) tal que, para  $1 \leq i \leq n$ ,  $v(A_i) = T[\sigma_n](A_i, j)$ .

IX.5. LEMA. Se  $\vdash A$  então, para toda sequência normal  $A_1, \dots, A_n$ , onde  $A = A_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , e para todo  $j \in J(\sigma_n)$ ,  $T[\sigma_n](A_i, j) = 1$ .

PROVA. Procedemos por indução no número  $r$  de linhas de uma prova de  $A_i$  em T-Kt. Seja  $A_i$  da forma  $LA + A$ . Pelo Lema 3, se  $T[\sigma_n](LA, j) = 1$ ,  $T[\sigma_n](A, j) = 1$ .

1)  $r = 1$ . Nesse caso,  $A_i$  é um axioma de T-Kt.

- a) Seja  $A_i$  da forma  $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ . Suponhamos que, para alguma  $j \in J(\sigma_n)$ ,  $T[\sigma_n](A_i, j) = 0$ . Por 1.2.c.ii,  $T[\sigma_n](A, j) = T[\sigma_n](B, j) = 1$ , e  $T[\sigma_n](A, j) = 0$  - o que não é possível. Logo, para toda  $j \in J(\sigma_n)$ ,  $T[\sigma_n](A_i, j) = 1$ .
- b) Se  $A_i$  for da forma A2 ou A3, prova-se pelo mesmo raciocínio.
- c) Seja  $A_i$  da forma  $L(A \rightarrow B) \rightarrow (LA \rightarrow LB)$ . Suponhamos que, para alguma  $j \in J(\sigma_n)$ ,  $T[\sigma_n](A_i, j) = 0$ . Por 1.2.c.ii,  $T[\sigma_n](L(A \rightarrow B), j) = T[\sigma_n](LA, j) = 1$ , e  $T[\sigma_n](LB, j) = 0$ . Pela definição 1 vemos que, se  $T[\sigma_n](LB, j) = 0$ , então  $\theta(j, n-1) \neq \emptyset$  - caso contrário, por 1.2.f.iii,  $T[\sigma_n](LB, j) = 1$ . De  $\theta(j, n-1) \neq \emptyset$  segue-se que existe  $j' \in J(\sigma_n)$  tal que  $T[\sigma_{n-1}](B, j') = 0$  e, para todo  $r$ ,  $1 \leq r < n$ , se  $A_r = LA_s$  e  $T[\sigma_{n-1}](A_r, j) = 1$ , então  $T[\sigma_{n-1}](A_s, j') = 1$ . Ora,  $T[\sigma_{n-1}](L(A \rightarrow B), j) = T[\sigma_{n-1}](LA, j) = 1$  - logo,  $T[\sigma_{n-1}](A \rightarrow B, j') = 1$ . Mas temos que  $T[\sigma_{n-1}](B, j') = 0$ , o que, pela condição 1.2.c.ii, não é possível. Portanto, para toda  $j \in J(\sigma_n)$ ,  $T[\sigma_n](A_i, j) = 1$ .
- d) Seja  $A_i$  da forma  $G(A \rightarrow B) \rightarrow (GA \rightarrow GB)$  ou  $H(A \rightarrow B) \rightarrow (HA \rightarrow HB)$ . Prova-se analogamente a c).
- e) Seja  $A_i$  da forma  $\neg G \neg HA \rightarrow A$ . Suponhamos que, para alguma  $j \in J(\sigma_n)$ ,  $T[\sigma_n](A_i, j) = 0$ . Então  $T[\sigma_n](\neg G \neg HA, j) = 1$  e  $T[\sigma_n](A, j) = 0$ , ou seja,  $T[\sigma_n](G \neg HA, j) = 0$ . Segue-se que existe  $j' \in J(\sigma_n)$  tal que  $T[\sigma_{n-1}](\neg HA, j') = 0$  e, para todo  $t$ ,  $1 \leq t < n$ , se  $A_t = HA_u$  e  $T[\sigma_{n-1}](A_t, j') = 1$ ,  $T[\sigma_{n-1}](A_u, j) = 1$ . Ora,  $T[\sigma_{n-1}](HA, j') = 1$ , e temos então  $T[\sigma_{n-1}](A, j) = T[\sigma_n](A, j) = 1$  - contrariando a suposição inicial de que  $T[\sigma_n](A, j) = 0$ . Logo, para toda  $j \in J(\sigma_n)$ ,  $T[\sigma_n](A_i, j) = 1$ .
- f) Seja  $A_i$  da forma  $\neg H \neg GA \rightarrow A$ . Analogamente a e), prova-se que para toda  $j \in J(\sigma_n)$ ,  $T[\sigma_n](A_i, j) = 1$ .
- g) Seja  $A_i$  da forma  $LA \rightarrow A$ . Pelo Lema 3, se  $T[\sigma_n](LA, j) = 1$ ,  $T[\sigma_n](A, j) = 1$ . Logo, para toda  $j \in J(\sigma_n)$ ,  $T[\sigma_n](A_i, j) = 1$ .

h) Seja  $A_i$  da forma  $LA \rightarrow GA$  ou  $LA \rightarrow HA$ . Prova-se analogamente ao caso anterior. Uma definição tal, um procedimento de decisão por tabelas é facilmente obtido.

2)  $r > 1$ . Se  $A_i$  é um axioma, a propriedade já foi provada em 1).

a)  $A_i$  foi obtido por MP a partir de  $B$  e  $B \rightarrow A_i$ . Temos então que  $\vdash B$  e  $\vdash B \rightarrow A_i$ . Tomemos uma sequência normal  $A_1, \dots, A_{n+k}$ ,  $k \geq 0$ , onde  $A_{n+k} = B \rightarrow A_i$ . É claro que  $B$  ocorre nessa sequência. Como  $\vdash B$  e  $\vdash B \rightarrow A_i$ , temos, pela hipótese de indução que, para toda  $j^* \in J(\sigma_{n+k})$ ,  $T[\sigma_{n+k}](B \rightarrow A_i, j^*) = T[\sigma_{n+k}](B, j^*) = 1$ . Nesse caso, é necessário que, para toda  $j^* \in J(\sigma_{n+k})$ ,  $T[\sigma_{n+k}](A_i, j^*) = 1$ . Ora, pelo Lema 2, se, para alguma  $j \in J(\sigma_n)$ ,  $T[\sigma_n](A_i, j) = 0$ , então, para algum  $j^* \in J(\sigma_{n+k})$ ,  $T[\sigma_{n+k}](A_i, j) = 0$ . Logo, segue-se que, para toda  $j \in J(\sigma_n)$ ,  $T[\sigma_n](A_i, j) = 1$ .

b)  $A_i = LA_k$  e foi obtido por N a partir de  $A_k$ . Temos que  $\vdash A_k$  e, pela hipótese de indução, para toda  $j \in J(\sigma_n)$ ,  $T[\sigma_n](A_k, j) = 1$ . Mas então, por 1.2.f.I, para toda  $j \in J(\sigma_n)$ ,  $\theta(j, n-1) = \phi$ . Logo,  $T[\sigma_n](A_i, j) = 1$ , por 1.2.f.iii.

IX.6. TEOREMA.  $\vdash A$  sse para toda sequência normal  $A_1, \dots, A_n$ , onde  $A = A_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , e para toda  $j \in J(\sigma_n)$   $T[\sigma_n](A_i, j) = 1$ .

PROVA. A) Suponhamos que  $\vdash A$ . A prova é imediata, pelo Lema 5.

B) Suponhamos que para toda sequência normal  $A_1, \dots, A_n$ , onde  $A = A_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , e para toda  $j \in J(\sigma_n)$ ,  $T[\sigma_n](A_i, j) = 1$ . Suponhamos que  $\not\vdash A_i$ . Então  $\not\vdash A_i$ ; logo, existe uma valoração  $\nu$  tal que  $\nu(A_i) = 0$ . Pelo Lema 4, existe  $j \in J(\sigma_n)$  tal que  $T[\sigma_n](A_i, j) = 0$  - contradizendo a hipótese. Logo,  $\vdash A_i$ .

Assim, T-Kt é decidível pelas tabelas de valorações. Para outros cálculos, temporais e modais-temporais, o método é o mesmo, sendo suficientes pequenas alterações. Note-se que a definição da tabela  $T(A_1, \dots, A_n)$  é estri-

tamente baseada, ou reflete, a definição de  $A_1, \dots, A_n$ -valoração. Dispondo-se então de uma definição tal, um procedimento de decisão por tabelas é facilmente obtido.

#### PARTE IV

---

#### CONSIDERAÇÕES FINAIS

## Capítulo X

### PROBLEMAS ABERTOS

O objetivo a que nos havíamos proposto era o de construir semânticas de valorações para os diversos cálculos temporais e modais-temporais. Como se pôde ver nos capítulos anteriores, isto foi conseguido para um bom número de sistemas: construímos a semântica, provamos correção, completude e mostramos como obter um método de decisão. No entanto, há alguns cálculos para os quais isto não foi possível. São eles Ktt, K1, Kd, Kc, Kc2 (estes bem conhecidos - v., e.g., Landin 1974, Prior 1967), S4-Kt, S5-Kt e suas várias extensões (S4-K1, S5-Kd, S5-Kc3, etc.).

Idealizamos para alguns destes cálculos definições de  $A_1, \dots, A_n$ -valorações que pareçam ser bastante "naturais" e "satisfatórias": o problema reside em não se conseguir provar que as  $A_1, \dots, A_n$ -valorações assim definidas são  $A_1, \dots, A_n$ -normais (i.e., o lema correspondente a I.2.8). Vemos apresentá-los aqui, juntamente com as definições de  $A_1, \dots, A_n$ -valorações sugeridas.

#### X.1. O CÁLCULO Ktt

Ktt, já tivemos ocasião de mencionar, seria a "lógica do tempo transitivo". Sua linguagem é  $L1$ , e obtém-se uma base axiomática para ele acrescentando aos postulados de Kt o seguinte esquema de axioma:



A12. GA + GCA

X.1.1. DEFINIÇÃO. Seja  $A_1, \dots, A_n$  uma seqüência normal, e  $f, f'$  funções de  $L_1$  em  $(0,1)$ . Para  $1 \leq k \leq n$ , dizemos que:

Capítulo X

PROBLEMAS ABERTOS

O objetivo a que nos havíamos proposto era o de construir semânticas de valorações para os diversos cálculos temporais e modais-temporais. Como se pôde ver nos capítulos anteriores, isto foi conseguido para um bom número de sistemas: construímos a semântica, provamos correção, completude e mostramos como obter um método de decisão. No entanto, há alguns cálculos para os quais isto não foi possível. São eles Ktt, K1, Kd, Kc, Kc2 (estes bem conhecidos - v., e.g., Landim 1974, Prior 1967), S4-Kt, S5-Kt e suas várias extensões (S4-K1, S5-Kd, S5-Kc3, etc.).

Idealizamos para alguns destes cálculos definições de  $A_1, \dots, A_n$ -valorações que parecem ser bastante "naturais" e "satisfatórias": o problema reside em não se conseguir provar que as  $A_1, \dots, A_n$ -valorações assim definidas são  $A_1, \dots, A_n$ -normais (i.e., o lema correspondente a I.2.8). Vamos apresentá-los aqui, juntamente com as definições de  $A_1, \dots, A_n$ -valorações sugeridas.

X.1. O CÁLCULO Ktt + [HA + HGA]

A21. A + [HA + (GA + GHA)]

Ktt, já tivemos ocasião de mencionar, seria a "lógica do tempo transitivo". Sua linguagem é  $L_1$ , e obtemos uma base axiomática para ele acrescentando aos postulados de Kt o seguinte esquema de axioma:

A12.  $GA \rightarrow GGA$

X.1.1. DEFINIÇÃO. Seja  $A_1, \dots, A_n$  uma seqüência normal, e  $f, f'$  funções de  $FOR_{L1}$  em  $\{0,1\}$ . Para  $1 \leq k \leq n$ , dizemos que:

$f(\Pi, k) f'$  sse  $f' \models \epsilon(\{A_1, \dots, A_k\}_{f,1}^G) \cup \{A_1, \dots, A_k\}_{f,1}^H$  e  $f \models \epsilon(\{A_1, \dots, A_k\}_{f',1}^H) \cup \{A_1, \dots, A_k\}_{f',1}^G$ .

X.1.2. DEFINIÇÃO.  $v$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -valoração (para Ktt) se  $A_1, \dots, A_n$  é uma seqüência normal e:

1)  $n = 1$  e  $v$  é uma semi-valoração;

2)  $n > 1$ ,  $v$  é uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração e, se para algum  $m < n$ ,  $A_n = \nabla A_m$ ,

I) se  $v(A_n) = 0$ , então existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $v'$  tal que  $v'(A_m) = 0$  e, para  $\nabla = G$ ,  $v(\Pi, n-1)v'$ ; para  $\nabla = H$ ,  $v'(\Pi, n-1)v$ ;

II) se  $v(A_n) = 1$ , então para todo  $p$ , todo  $q$ ,  $q < p < n$  tais que  $A_p = \nabla A_q$  e  $v(A_p) = 0$ , existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valoração  $v_p$  tal que  $v_p(A_q) = 0$ ,  $v_p(A_m) = 1$  e, para  $\nabla = G$ ,  $v(\Pi, n-1)v_p$ ; para  $\nabla = H$ ,  $v_p(\Pi, n-1)v$ .

## X.2. O CÁLCULO K1

K1 é uma extensão de Ktt, e corresponderia a uma "lógica do tempo

linear". Uma base axiomática para o mesmo é obtida adicionando-se os esquemas abaixo a Ktt:

A20.  $A \rightarrow (GA \rightarrow (HA \rightarrow HGA))$

A21.  $A \rightarrow (HA \rightarrow (GA \rightarrow GHA))$

X.2.1. DEFINIÇÃO. Seja  $A_1, \dots, A_n$  uma seqüência normal, e  $f, f'$  funções de  $FOR_{L1}$  em  $\{0,1\}$ . Para  $1 \leq k \leq n$ , dizemos que:

uma seqüência  $f(\Psi, k)f'$  sse  $f(\Pi, k)f'$ ,  $f' \models \{A_1, \dots, A_k\}_{f', 1}^H$  e  $f' \models \{A_1, \dots, A_k\}_{f', 1}^G$ .

1)  $n = 1$  e  $v$  é uma semi-avaliação;

X.2.2. DEFINIÇÃO. ( $A_1, \dots, A_n$ -avaliação para K1) Como em Ktt, com a seguinte alteração nos itens

I) ... para  $\nabla = G$ ,  $v(\Psi, n-1)v'$ ; para  $\nabla = H$ ,  $v'(\Psi, n-1)v$ ;

II) ... para  $\nabla = G$ ,  $v(\Psi, n-1)v_p$ ; para  $\nabla = H$ ,  $v_p(\Psi, n-1)v$ .

II) se  $v(A_n) = 1$ , então para todo  $p$ , todo  $q$ ,  $q < p < n$  tais que  $A_p = \dots$

$\nabla A_q$  e  $v(A_q) = 0$  existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -avaliação  $v_p$  tal que  $v_p(A_q) = 0$ .

X.3. O CÁLCULO S4-Kt

$v_p(A_n) = 1$  e, para  $\nabla = G$ ,  $v(\Sigma, n-1)v_p$ ; para  $\nabla = H$ ,  $v_p(\Sigma, n-1)v$ ;

B) se Obtemos S4-Kt adicionando a T-Kt o seguinte esquema:

I) se  $v(A_1) = 0$ , então existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -avaliação  $v'$  tal que

A22.  $LA \rightarrow LLA$

$v'(A_n) = 0$  e  $v(\Psi, n-1)v'$ ;

II) Para definir  $A_1, \dots, A_n$ -avaliações para S4-Kt, necessitamos de um ou

tro tipo de seqüência que não a seqüência normal até agora utilizada, e que definimos a seguir:

X.3.1. DEFINIÇÃO.  $A_1, \dots, A_n$  é uma seqüência supernormal se, para  $1 \leq i \leq n$ ,

a) se  $B$  é uma subfórmula de  $A_i$  então existe  $j < i$  tal que  $B = A_j$ ;

b) se  $A_i = LA_k$ ,  $1 \leq k \leq i$ , e existe  $A_j = \nabla A_k$ ,  $1 \leq j \leq n$ , então  $i < j$ ;

c) para  $1 \leq i \leq j$ , se  $A_i = A_j$  então  $i = j$ .

A23.  $L-A \rightarrow L-LA$

X.3.2. DEFINIÇÃO. Seja  $A_1, \dots, A_n$  uma seqüência supernormal e  $f, f'$  funções de

X.4.1. DEFINIÇÃO. ( $A_1, \dots, A_n$ -avaliação para S5-Kt) Como em S4-Kt, com a seguinte alteração nos itens

FOR<sub>L2</sub> em  $\{0, 1\}$ . Para  $1 \leq k \leq n$ , dizemos que:

a)  $f(\Sigma, k)f'$  sse  $f' \models \epsilon(\{A_1, \dots, A_k\}_{f', 1}^G) \cup \{A_1, \dots, A_k\}_{f', 1}^L$  e  $f' \models \epsilon(\{A_1, \dots, A_k\}_{f', 1}^H) \cup \{A_1, \dots, A_k\}_{f', 1}^L$ ;

b)  $f(\Phi, k)f'$  sse  $f' \models \{A_1, \dots, A_k\}_{f', 1}^L$ .

X.3.3. DEFINIÇÃO.  $v$  é uma  $A_1, \dots, A_n$ -avaliação (para S4-Kt) se  $A_1, \dots, A_n$  é

uma sequência supernormal e:

1)  $n = 1$  e  $v$  é uma semi-valorção;

2)  $n > 1$ ,  $v$  é uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valorção e:

A) se, para algum  $m < n$ ,  $A_n = \nabla A_m$ ,

I) se  $v(A_n) = 0$ , então existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valorção  $v'$  tal que  $v'(A_m) = 0$  e, para  $\nabla = G$ ,  $v(\Sigma, n-1)v'$ ; para  $\nabla = H$ ,  $v'(\Sigma, n-1)v$ ;

II) se  $v(A_n) = 1$ , então para todo  $p$ , todo  $q$ ,  $q < p < n$  tais que  $A_p = \nabla A_q$  e  $v(A_p) = 0$  existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valorção  $v_p$  tal que  $v_p(A_q) = 0$ ,  $v_p(A_m) = 1$  e, para  $\nabla = G$ ,  $v(\Sigma, n-1)v_p$ ; para  $\nabla = H$ ,  $v_p(\Sigma, n-1)v$ ;

B) se, para algum  $m < n$ ,  $A_n = LA_m$ ,

I) se  $v(A_n) = 0$ , então existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valorção  $v'$  tal que  $v'(A_m) = 0$  e  $v(\Phi, n-1)v'$ ;

II) se  $v(A_n) = 1$ , então  $v(A_m) = 1$  e para todo  $p$ , todo  $q$ ,  $q < p < n$  tais que  $A_p = LA_q$  e  $v(A_p) = 0$ , existe uma  $A_1, \dots, A_{n-1}$ -valorção  $v_p$  tal que  $v_p(A_q) = 0$ ,  $v_p(A_m) = 1$  e  $v(\Phi, n-1)v_p$ .

#### X.4. O CÁLCULO S5-Kt

Podemos notar características comuns a estes cálculos problemáticos,

Obtemos S5-Kt adicionando a T-Kt o esquema abaixo:

A23.  $L-A \rightarrow L-LA$

S4-Kt:  $LA \rightarrow LLA$

X.4.1. DEFINIÇÃO. ( $A_1, \dots, A_n$ -valorção para S5-Kt) Como em S4-Kt, com a seguinte alteração nos itens

B) I) ... e  $v'(\Phi, n-1)v$ ;

II) ... e  $v_p(\Phi, n-1)v$ .

## X.5. OBSERVAÇÕES FINAIS (GA (equivalente a A20))

A  $\wedge$  HA  $\wedge$  GA  $\rightarrow$  GHA (equivalente a A21)

Para cada um dos cálculos acima apresentados, dispondo da definição de  $A_1, \dots, A_n$ -valoração, facilmente definimos valoração, extensão canônica,  $A_1, \dots, A_n$ -normalidade, etc. Prova-se que as extensões canônicas assim definidas são semi-valorações, bem como o lema correspondente a I.2.7. O que não se conseguiu, conforme dissemos, foi a prova do lema correspondente a I.2.8. As mais diversas tentativas foram feitas, sem sucesso. A questão pode resumir-se a uma técnica de prova inviável, ou até mesmo a uma incapacidade de ver o óbvio. A idéia de que não é possível construir semânticas de valorações para alguns cálculos não nos parece muito plausível, pois pode-se mostrar que as definições são as mesmas de Kc3, se entendermos 'V' como 'L'. Para S4, contudo, existe uma relação muito estreita entre valorações e modelos de Kripke.<sup>22</sup> O-  
ra, temos semânticas de Kripke para Ktt, K1 e Kd (v. Landim 1974), e é fácil construir-las para S4-Kt e S5-Kt.<sup>23</sup> Isso nos leva a crer que a não obtenção de resultados nestes casos está ligada apenas a dificuldades de natureza técnica. Ficam as questões em aberto. É o que nos propomos investigar em trabalhos futuros.

Podemos notar características comuns a estes cálculos problemáticos, observando seus axiomas específicos. Senão vejamos:

Ktt: GA  $\rightarrow$  GGA

S4-Kt: LA  $\rightarrow$  LLA

S5-Kt: MA  $\rightarrow$  LMA (equivalente a A23)

<sup>22</sup> V. Loparić 1977 onde isto é feito para o cálculo K.

<sup>23</sup> A única alteração de monta que têm as semânticas de Kripke para cálculos modais-temporais é a existência de duas relações de acessibilidade. Para ter uma idéia, v. Ishimoto & Watanabe 1974, onde são apresentados modelos de Kripke para cálculos bi-modais.

<sup>24</sup> Canções. Os Lusíadas. Canto Primeiro. 2ª estrofe.

K1:  $A \wedge GA \wedge HA \rightarrow HGA$  (equivalente a A20)

$A \wedge HA \wedge GA \rightarrow GHA$  (equivalente a A21)

Kd:  $GGA \rightarrow GA$

Kc2:  $GGA \rightarrow HA$

Kc:  $GGA \rightarrow A$

APÊNDICE

BASES AUTOMÁTICAS PARA OS CÁLCULOS ABORDADOS NESTA DISSERTAÇÃO

Note-se a estrutura bastante similar destas fórmulas. Isto sugere que, se encontrarmos a solução para um dos cálculos, facilmente resolveremos o problema de outros.

Curioso é que dispomos, para S5, de uma semântica de valorações. As definições são as mesmas de Kc3, se entendermos '∇' como 'L'. Para S4, contudo, o problema persiste. O fato de não se obter valorações para S5-Kt deve-se à existência de teoremas tipo  $LA \rightarrow GLA$  e  $LA \rightarrow HLA$ .

Ficam as questões em aberto. É o que nos propomos investigar em trabalhos futuros,

*se a tanto [nos] ajudar o engenho e arte...*<sup>24</sup>

<sup>24</sup> Camões, *Os Lusíadas*, Canto Primeiro, 2ª estrofe.

A21.  $A \rightarrow (HA \rightarrow (GA \rightarrow GHA))$

A22.  $LA \rightarrow LLA$

A23.  $L-A \rightarrow L-LA$

A24.  $GGA \rightarrow GA$

## APÊNDICE

### BASES AXIOMÁTICAS PARA OS CÁLCULOS ABORDADOS NESTA DISSERTAÇÃO

A25.  $GGA \rightarrow HA$

A26.  $GGA \rightarrow A$

A27. I) ESQUEMAS DE AXIOMAS

A28.  $HA \rightarrow (A \rightarrow G-HA)$

A1.  $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

A2.  $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

A3. II) REGRAS DE INFERÊNCIA  
 $(-B \rightarrow -A) \rightarrow ((-B \rightarrow A) \rightarrow B)$

A4.  $G(A \rightarrow B) \rightarrow (GA \rightarrow GB)$

A5.  $H(A \rightarrow B) \rightarrow (HA \rightarrow HB)$

A6.  $A-G-HA \rightarrow A$

A7.  $A-H-GA \rightarrow A$

A8.  $G-A \rightarrow -GA$

A9.  $H-A \rightarrow -HA$

A10.  $GA \rightarrow A$

A11.  $GA \rightarrow HA$

A12.  $GA \rightarrow GGA$

A13.  $-GA \rightarrow G-A$

A14.  $-HA \rightarrow H-A$

A15. III) CÁLCULOS TEMPORAIS  
 $L(A \rightarrow B) \rightarrow (LA \rightarrow LB)$

A16.  $LA \rightarrow A$

A17.  $LA \rightarrow GA$

A18.  $LA \rightarrow HA$

A19.  $-L-LA \rightarrow A$

A20.  $A \rightarrow (GA \rightarrow (HA \rightarrow HGA))$

A21.  $A \rightarrow (HA \rightarrow (GA \rightarrow GHA))$

A22.  $LA \rightarrow LLA$

A23.  $L-A \rightarrow L-LA$

A24.  $GGA \rightarrow GA$

A25.  $GGA \rightarrow HA$

A26.  $GGA \rightarrow A$

A27.  $GA \rightarrow (A \rightarrow \neg H-GA)$

A28.  $HA \rightarrow (A \rightarrow \neg G-HA)$

#### IV) CÁLCULOS MODAIS

##### II) REGRAS DE INFERÊNCIA

MP.  $A, A \rightarrow B / B$

RG.  $A / GA$

RH.  $A / HA$

N.  $A / LA$

#### V) CÁLCULOS MODAIS-TEMPORAIS

T-Kt: T. Todos os cálculos abordados nesta dissertação são obtidos acrescentando-se postulados ao Cálculo Proposicional Clássico (P). Uma base axiomática para P consiste nos esquemas de axiomas A1, A2 e A3, e na regra MP.

S5-Kt: T-Kt + A23

##### III) CÁLCULOS TEMPORAIS

Kt:  $P + A4, A5, A6, A7, RG \text{ e } RH$

Km:  $Kt + A8, A9$

Kr:  $Kt + A10$

Ks:  $Kt + A11$

Kc3:  $P + A4, A6, A10, A11, A12, RG$



K3: Kt + A13, A14

Kd: Kt + A24

Ke: Kt + A27, A28

Kc: Kt + A26

Kc2: Kt + A25

Ktt: Kt + A12

K1: Ktt + A20, A21

#### BIBLIOGRAFIA

01. BENTZEN, J.F.A.K. van. "Tense Logic and Standard Logic". *Logique et Analyse*, (80): 41-83, 1978.

02. BURGESS, John P. "Logic and Time". *Journal of Symbolic Logic*, 44(4): 565-582, 1979.

#### IV) CÁLCULOS MODAIS

K: P + A15, N *Os Lusíadas*. São Paulo: Seara, 1960.

T: K + A16

B: T + A19

S4: T + A22 G.E. & CRESSWELL, M.J. *An Introduction to Modal Logic*. London, Methuen, 1972.

S5: T + A23

06. ISHIMOTO, Areta & FUJIKAWA, Yoshimi. "On Some BI-Modal Predicate Calculi". *Journal of Symbolic Logic*, (100): 129-41, 1970.

#### V) CÁLCULOS MODAIS-TEMPORAIS

T-Kt: T + A4, A5, A6, A7, A17, A18

B-Kt: T-Kt + A19 *Report of the Division of Humanities*, Tokyo Institute of Technology, 11: 63-78, 1974.

S4-Kt: T-Kt + A22

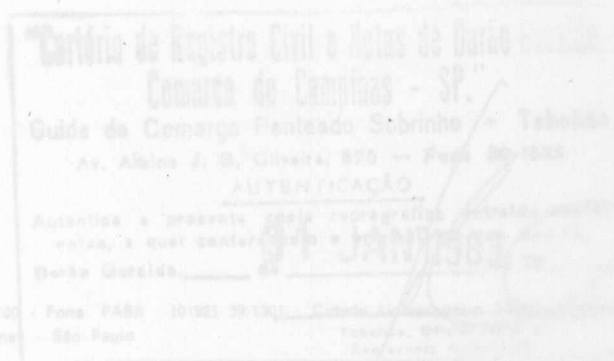
S5-Kt: T-Kt + A23 "A Completeness Theorem in Modal Logic". *Journal of Symbolic Logic*, 24: 1-14, 1959.

09. \_\_\_\_\_. "Semantical Analysis of Modal Logic. I. Normal Propositional Logic". *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 9: 67-96, 1963.

10. LACEY, Hugh M. *A Linguagem do Espaço e do Tempo*. trad. Marcos Barbosa de Oliveira. São Paulo, Perspectiva, 1972.

11. LANDIM FILHO, Reul Ferreira. *Completude et Decidabilité de Quelques Systèmes de Logique du Temps*. Institut Supérieur de Philosophie, Université Catholique de Louvain, janvier 1974. (Thèse de Doctorat)
- BIBLIOGRAFIA
12. \_\_\_\_\_. "Teoremas da Completude das do Tempo". In: \_\_\_\_\_. & ALMEIDA, Guido Antonio de (org.) *Filosofia da Linguagem e Lógica*. São Paulo, 1974.
01. BENTHEM, J.F.A.K. van. "Tense Logic and Standard Logic". *Logique et Analyse*, (80): 41-83, 1978.
13. LOPARIĆ, Andréa M. "The Method of Valuations in Modal Logic". In: ARRUDA, 1974.
02. BURGESS, John P. "Logic and Time". *Journal of Symbolic Logic*, 44(4):566-82, 1979. *First Brazilian Conference*. New York, Marcel Dekker, 1977.
03. CAMÕES, Luís Vaz de. *Os Lusíadas*. São Paulo, Saraiva, 1960. New York, D. Van Nostrand, 1970.
04. CHANG, C.C. & KEISLER, H.J. *Model Theory*. Amsterdam, North-Holland, 1973.
15. PRIOR, Arthur N. *Time and Modality*. Oxford, Clarendon Press, 1957.
05. HUGHES, G.E. & CRESSWELL, M.J. *An Introduction to Modal Logic*. London, Methuen, 1972. *and Futures*. Oxford, Clarendon Press, 1967.
16. \_\_\_\_\_. *and Futures*. Oxford, Clarendon Press, 1967.
06. ISHIMOTO, Arata & FUJIKAWA, Yoshimi. "On Some Bi-Modal Predicate Calculi". *Bulletin of the Tokyo Institute of Technology*, (100):129-41, 1970.
07. SHIMIZU, S. & WATANABE, Y. "Some Bi-Modal Propositional Logics and Their Completeness". *Report of the Division of Humanities, Tokyo Institute of Technology*, (1):63-79, 1974. *and its Applications*. New York, D. Van Nostrand, 1971.
18. SHIMIZU, S. *and its Applications*. New York, D. Van Nostrand, 1971.
08. KRIPKE, Saul. "A Completeness Theorem in Modal Logic". *Journal of Symbolic Logic*, 24: 1-14, 1959.
09. \_\_\_\_\_. "Semantical Analysis of Modal Logic, I, Normal Propositional Logic". *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 9: 67-96, 1963.
10. LACEY, Hugh M. *A Linguagem do Espaço e do Tempo*. trad. Marcos Barbosa de Oliveira. São Paulo, Perspectiva, 1972.

11. LANDIM FILHO, Raul Ferreira. *Completude et Decidabilité de Quelques Systèmes de Logique du Temps*. Institut Supérieur de Philosophie, Université Catholique de Louvain, janvier 1974. (Tese de Doutorado)
12. \_\_\_\_ "Teorema da Completude para as Lógicas do Tempo". In: \_\_\_\_ & ALMEIDA, Guido Antonio de (org.) *Filosofia da Linguagem e Lógica*. São Paulo, Loyola; Rio de Janeiro, PUC, 1980. cap. IV, p.113-33.
13. LOPARIĆ, Andréa M. "The Method of Valuations in Modal Logic". In: ARRUDA, A.I., DA COSTA, N.C.A, CHUAQUI, R. (org.) *MATHEMATICAL LOGIC: Proceedings of the First Brazilian Conference*. New York, Marcel Dekker, 1977.
14. MENDELSON, Elliott. *Introduction to Mathematical Logic*. 2 ed. New York, D. Van Nostrand, 1979.
15. PRIOR, Arthur N. *Time and Modality*. Oxford, Clarendon Press, 1957.
16. \_\_\_\_ *Past, Present and Future*. Oxford, Clarendon Press, 1967.
17. RESCHER, Nicholas & URQUHART, Alasdair. *Temporal Logic*. Wien, New York, Springer-Verlag, 1971.
18. SHOENFIELD, Joseph. *Mathematical Logic*. California, Addison-Wesley, 1967.
19. SNYDER, D.P. *Modal Logic and its Applications*. New York, D. Van Nostrand, 1971.





UNICAMP

 Fls. N.º 00  
 Proc. N.º 059178  
 Rub. *Curating*

P A R E C E R CCPG/ 017/83.

PROC.SERCA/PG/059 /79-IFCH

O SR. (A) CEZAR AUGUSTO MORTARI,-----  
 -----, defendeu sua Tese de Mestrado em 05 de  
 Janeiro , de 1983, perante a Comissão Julgadora com-  
 posta pelos seguintes Professores Doutores: Oswaldo Porchat  
 de Assis Pereira da Silva, (Orientador), Raul Ferreira Landim  
 Filho e Elias Humberto Alves,-----

-----  
 -----  
 tendo sido aprovado(a) com o grau " A " ( Excelente ).

Em se considerando a Resolução CCPG/  
 025/78, à Secretaria Geral para que o Colendo Conselho Dire-  
 tor se digne homologar a Comissão Julgadora, a Ata de defe-  
 sa e conceder a(o) candidato(a) o Título de Mestre em Lógica  
 e Filosofia da Ciência, na área de Lógica e Epistemologia ✓

Campinas, 13 de Janeiro de 1983

ATTÍLIO JOSÉ GIAROLA

Coordenador

Cursos de Pós-Graduação (Reitoria)  
 Universidade Estadual de Campinas

BIBLIOTECA UNIVERSITÁRIA

AJG/emb\*

 Endereço Telegrafico: UNICAMP - Telex (019) 1150 - Endereçamento Postal: 13100 -  
 Barão Geraldo - Campinas

"Cartório de Registro Civil e Notas de Barão Geraldo,  
 Comarca de Campinas - SP."  
 Guide de Camargo Penteado Sobrinho - Tabelião  
 Av. Albino J. B. Oliveira, 875 - Fone 80-1532

AUTENTICAÇÃO

Autentica a presente cópia reprográfica extraída destas  
 notas, a qual conferência com o original que dou 16,  
 Barão Geraldo, de 31 JAN 1983 10

Tabelião, Oficial Público e  
 Escrivão Autorizado