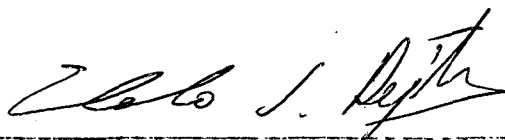


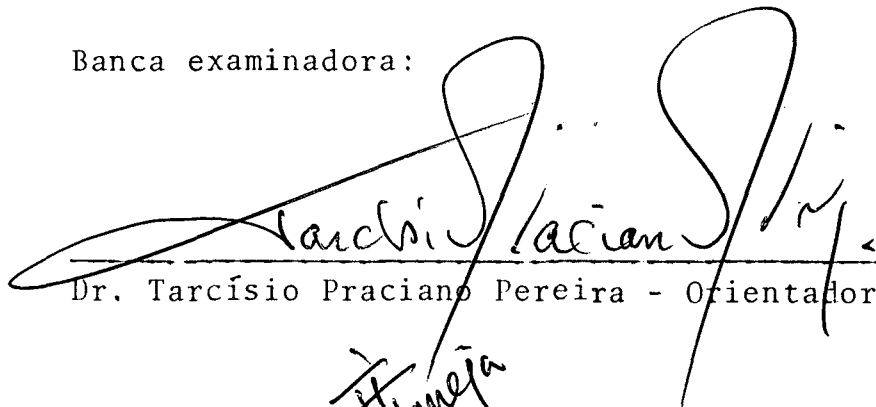
Esta Tese foi julgada adequada para obtenção do Tí
tulo de Mestre em Ciências,
Especialidade em Matemática e aprovada em forma final pelo
Curso de Pós-Graduação.

Coordenador:



Dr. Italo José Dejtter

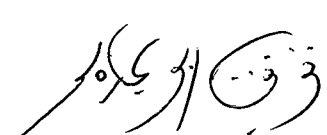
Banca examinadora:



Dr. Tarcísio Praciano Pereira - Orientador



Dr. Inder Jeet Tanerja



Dr. Teófilo Abuabara Saad

F. RODRIGUES DA SILVA

MODELOS MATEMÁTICOS EM DINÂMICA

DE POPULAÇÕES E

ESTATÍSTICA

1981

C O N T E Ú D O

Dedicatória	i
Agradecimentos	ii
Resumo	iii
Abstract	iv
Introdução	1
Capítulo 1. Espaço Multi-Medido e Espaço Métrico Multi-medido	2
1- Introdução	2
2- Espaço Multi-Medido, Definição	3
3- Espaço Métrico Multimedido, Definição.....	4
4- Baricentro de uma População	5-7
5- Resultados Particulares Impostos Pelas Aplicações ...	8-10
Capítulo 2. Distorção Relativa a duas Medidas numa População.	11-16
1- Introdução	11
2- Variedade Métrico-Multimedida	12
3- Baricentro	13
4- Distorção entre duas medidas de uma população	14
2.4.1- Definição, m,n-distorção métrico-local	14
2.4.2- Definição, m,n distorção Métrica	14
m,n Distorção absoluta	15
2.4.7- Definição m,n Distorção Absoluta	16
5- Equidistribuição e m,n Distorção	17
(2.5.5) Teorema	18
Capítulo 3. Aplicações	19-23

1- Introdução	19
2- Distribuição Subjacente	20
(3.2.1) Definição	20
(3.2.2) Deslocamento	20
(3.2.3) Dispersão	21
3- Biomassa	23
Apêndice	24-27
Espaço de Probabilidade	24
Espaço de Probabilidade Induzido	24
Hiper-Diedro em \mathbb{R}^n	25
Função de Distribuição de uma Probabilidade	25
Definição e Teorema	26
Observação. Equidistribuída	27
Referências	28-29
Índice	30

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Tarcísio Praciano Pereira, o meu profundo agradecimento, pela dedicação que teve em orientar-me neste trabalho e pelo exemplo de humanidade e amizade.

Ao Prof. José Orlando de Farias, pelas informações biológicas prestadas em diálogos e fontes de pesquisas.

Ao Prof. Dr. G. S. S. Ávila do Departamento de Matemática da UnB.

Ao Prof. Dr. Inder Jeet Tanerja do Departamento de Matemática da UFSC, membro da banca examinadora.

Ao Prof. Dr. Teófilo Abuabara Saad do Departamento de Matemática da UFSC, membro da banca examinadora.

Ao Prof. Ms. Nilo Kuelkamp do Departamento de Matemática da UFSC, pela leitura cuidadosa.

Ao Prof. Cassy Távora, do Departamento de Letras da FUFPI.

Ao Raimundo Deumar Gomes de Castro, pelo trabalho de datilografia.

À Universidade Federal do Piauí, pelo suporte financeiro.

À CAPES, pela bolsa concedida.

Aos colegas professores do Departamento de Matemática da Fundação Universidade Federal do Piauí e a todos aqueles que direta ou indiretamente colaboraram para a conclusão do meu Curso.

R E S U M O

Os resultados deste trabalho estão concentrados nos dois primeiros capítulos. No capítulo 1 provamos que as densidades que surgem frequentemente em estudos estatísticos são funções integráveis, conclusão obtida no § 5, (1.5.1). No capítulo 2, caracterizamos dois tipos de distorções entre duas medidas m, n de uma população e provamos que elas variam entre 0 e 1, sendo uma delas determinada por uma medida μ , positiva, finita, de variação total, $0 < \rho = \mu(X) \leq 1$.

Finalmente, ainda neste capítulo, estabelecemos a relação entre distorção nula e equidistribuição, através dos teoremas, (2.5.4) e (2.5.5).

Palavras Chaves:

Distorção Métrico - Local, Distorção Absoluta, Espaço Métrico - Medido, Espaço Métrico - Multimedido, Espaço Métrico - Multimedido Subjacente, Espaço Multi - Medido, Multi - Probabilizada, Variedade: Métrico - Multimedida e Métrico - Multiprobabilizada.

ABSTRACT

The main results of this work are contained in the first two Chapters. In Chapter one we prove that densities appearing in statistics are integrable functions, §5.(5.1). In Chapter two we introduce two models of distortions relating two measures m and n in a population and we prove that they are among 0 and 1, being one of these estimated by a measure μ , positive, finite, of total variation

$$0 \leq \rho = \mu(X) \leq 1.$$

Key words:

Local - Metric Distortion, Absolute Distortion, Measure - Metric Space, Multimeasure-Metric Space, Subjacent Multimeasure - Metric Space, Multimeasure Space, Multiprobability, Multimeasure Metric Manifold, Multiprobability Metric Manifold.

I N T R O D U Ç Ã O

Este trabalho resulta da união de dois artigos ([7] e [8]), escritos paralelamente, sobre dinâmica de populações, a serem publicados, incluindo-se um capítulo de Aplicações e um Apêndice.

No capítulo 1, introduzimos dois novos conceitos: Espaço Multi-Medido e Espaço Métrico-Multimedido, ambos inspirados em exemplos tirados da estatística, os quais nos levaram a determinar uma aplicação prática para um importante Teorema da Teoria da Medida (Teorema de Radon - Nikodym).

No capítulo 2, mostramos que uma população no sentido da estatística, é um exemplo de Variedade (Topológica). Como resultado importante na continuação deste estudo, caracterizamos dois tipos de distorção relativamente a duas medidas, numa população. Uma delas depende do baricentro, enquanto a outra é absoluta e de "variação total" entre 0 e 1. Ainda neste capítulo, apresentamos uma relação entre Eqüidistribuição e distorção absoluta.

Os resultados finais deste capítulo, são os teoremas (2.5.4) e (2.5.5) que estabelecem relação entre distorção nula e eqüidistribuição.

No capítulo 3, fizemos aplicação de alguns de nos modelos, além de dar nova representação a outros existentes em certos trabalhos sobre Dinâmica de Populações.

CAPÍTULO 1

ESPAÇO MULTI-MEDIDO E ESPAÇO

MÉTRICO MULTI-MEDIDO.

1. Introdução.

Define-se uma população como um conjunto de elementos situados numa região geométrica onde se possa definir uma certa medida. Um bom exemplo neste momento é uma população biológica, um conjunto de indivíduos da mesma espécie, [10].

Identificaremos os elementos de uma população P , com o lugar que eles ocupam na região R onde habitam, no tempo t . Esta identificação será feita através de um isomorfismo de conjuntos entre indivíduos e lugares por eles ocupados. Dependendo da "aplicação", pode-se considerar um processo estático ou dinâmico para estabelecer este isomorfismo. Por exemplo, plebiscito, curva de fluxo de indivíduos de um lugar para outro, etc. A população vazia, isto é, com zero elementos, associaremos o conjunto vazio.

Seja R a região geométrica, associada, de P , (a região onde vive P). Se definirmos uma métrica d em R , então (R, d) é um espaço métrico e, portanto, (P, d) também será um espaço métrico. Neste capítulo, usaremos somente a letra X para indicar região e população.

2. ESPAÇO MULTI-MEDIDO.

Dada uma população X , chamaremos de A a σ -álgebra, de conjuntos, gerada por todas as subpopulações Y , possíveis de X . Tomando as medidas, número de habitantes n e volume (Medida de Lebesgue) m , em X , podemos obter os espaços medidos (X, A, n) e (X, A, m) ou, ainda, (X, A, n, m) .

Um exemplo concreto da existência de duas medidas numa mesma σ -álgebra A , e, além disso, um relacionamento entre elas, é o seguinte :

Sejam; uma população X , uma σ -álgebra A em X , e as duas medidas m e n definidas acima. Dado $Y \in A$, um quociente do tipo,

$$(1.2.1) \quad \frac{n(Y)}{m(Y)}, \quad m(Y) \neq 0,$$

é definido, em estatística, como densidade populacional de Y no tempo t , [12] .

O exemplo acima nos dá uma motivação para a seguinte definição.

(1.2.2) DEFINIÇÃO.

Dadas uma população X e uma σ -álgebra A em X , chamaremos Espaço Multi-Medido, ao objeto matemático:

$$(X, A, (m_i)_{i=1}^n),$$

onde as m_i , $i = 1, \dots, n$, são medidas em A , e, (X, A, m_i) , para cada $i = 1, \dots, n$, é um espaço medido.

3. ESPAÇO MÉTRICO - MULTI-MEDIDO

Na seção anterior, um exemplo nos sugeriu a definição de Espaço Multi-Medido (EmM). É razoável que, além de medidas de indivíduos ou de subconjuntos destes, se pense em distância entre eles. Um outro exemplo, portanto, poderia nos propor a ampliação da estrutura (EmM), acrescentando-lhe uma distância.

Suponhamos que X é uma população biológica em que se possa definir distância entre seus elementos. Consideremos a σ -álgebra $A = P(X)$; o conjunto de partes de X . Dado $Y \subset X$, é possível definirmos uma métrica d , em X , e termos o objeto:

$$(X, A, d, n),$$

onde n é a medida número de habitantes em X .

(1.3.1) DEFINIÇÃO.

Seja X uma população. Chamaremos Espaço Métrico-Multimedido, ao objeto:

$$(X, A, d, (m_i)_{i=1}^n), \text{ satisfazendo:}$$

EMmM-1. $(X, A, (m_i)_{i=1}^n)$ é um espaço Multi-Medido

EMmM-2. (X, d) é um espaço métrico.

4. BARICENTRO DE UMA POPULAÇÃO.

O baricentro é definido como ponto central (médio) da população, através do qual se pode acompanhar o deslocamento da mesma, [11]. Todavia, definiremos o mesmo, de uma maneira bem mais geral, levando em conta as várias medidas usadas na população X , generalizando, deste modo, a sua representatividade como localização da população, em função de uma certa medida.

(1.4.1) DEFINIÇÃO.

Sejam X uma população e (EmM) um espaço multi-medido. O baricentro, no instante t_0 , da população X relativamente à medida m_i , será definido por:

$$B_{m_i t_0}(X) = \frac{1}{m_i(X)} \int_X b dm_i, \quad (1.4.1)$$

para algum $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, onde b é o vetor posição da população.

Desde que não haja dúvidas, usaremos neste capítulo e nas aplicações, a notação B_t , no lugar de $B_{m_i t}$, (1.4.1).

Exemplo: Dado um conjunto X de partículas, no espaço, com vetor posição b , o seu baricentro no instante t_0 é:

$$B_{t_0} = \frac{1}{M} \int b dm,$$

onde m é a massa de cada partícula e M a massa total do conjunto.

(1.4.2) DEFINIÇÃO.

Chamaremos a equação (1.4.1)' de função deslocamento da população X com o tempo t e temos:

$$T \xrightarrow{B_t} R ; t \rightsquigarrow B_t.$$

(1.4.3) A função B_t , conforme definimos, representa o deslocamento da população X , relativamente à medida m_i . Observe-mos que, embora o baricentro não pertença à população, podemos imaginá-lo como um ponto da região geométrica R , de X .

Dado um ponto B_{t_0} , fixo, se $t_0 < t_1$, então $\vec{B}_{t_0} B_{t_1}$ é o vetor deslocamento do baricentro, do ponto B_{t_0} ao B_{t_1} .

Sejam B_{t_0} , fixo, B_{t_1} e B_{t_2} pontos da imagem da função baricentro, tais que, $t_0 < t_1 < t_2$. O vetor $\vec{B}_{t_1} B_{t_2} = \vec{B}_{t_0} B_{t_2} - \vec{B}_{t_0} B_{t_1}$ é o vetor diferença do deslocamento de X no intervalo de tempo dado.

Dada uma população X , seja (X, A, d, m_i) um espaço métrico - medido, onde d é a distância euclidiana e m_i é a medida da definição de baricentro, (1.4.1).

A distância entre dois pontos do baricentro de X , B_{t_1} e B_{t_2} é dada por:

$$d(B_{t_1}, B_{t_2}), \text{ isto é, o comprimento do } \underline{\text{ve}}$$

tor diferença, do deslocamento de X no intervalo $t_1 < t_2$.

(1.4.4) Seja $(X, A, d, (m_i)_{i=1}^n)$ um espaço métrico-multimedid

do, onde $A = \mathbb{P}(X)$, (conjunto das partes de X). Dado $Y \subset A$, sejam $B_t(Y)$, $B_t(X)$, respectivamente o baricentro de Y e de X , relativamente à medida m_i , para algum $i \in \{1, \dots, n\}$. A função,

$$A \times T \xrightarrow{F} \mathbb{R} \text{ (reais);}$$

$$F_Y(t) = d(B_t(Y), B_t(X)), \text{ (1.4.4)'} \text{ deter}$$

mina a cada instante t , a distância entre os dois baricentros dados. Se Y for unitário, F dá a distância do único elemento de Y ao baricentro de X e se Y for vazio, nós definimos F como sendo 0.

5. CONDIÇÕES PARTICULARES IMPOSTAS PELAS APLICAÇÕES.

Neste parágrafo tratamos de certas propriedades que satisfazem as funções densidades usadas em dinâmica de populações.

Sejam X uma população e A uma σ -álgebra em X . Observamos que densidades são quocientes de medidas:

$$\frac{m_i(Y)}{m(Y)} = \bar{h}_i(Y), \quad Y \in A, \quad m(Y) \neq 0.$$

O quociente acima representa o valor médio de uma certa função h_i no conjunto Y . O próximo teorema nos leva a uma definição de h_i , que nos permite defini-la pontualmente:

$$x \mapsto h_i(x), \quad x \in X.$$

(1.5.1) TEOREMA.

Seja (X, A, m, m_i) um espaço multi-medido em que, m é a medida de Lebesgue e m_i é positiva, finita e absolutamente contínua, com relação à medida de Lebesgue,

$$(m_i \ll m).$$

Então a densidade,

$$\bar{h}_i(Y) = \frac{m_i(Y)}{m(Y)}, \quad Y \in A, \quad m(Y) \neq 0$$

é uma função integrável, isto é, $h_i \in L_m^1(X)$, com $\bar{h}_i(Y)$ sendo seu valor médio em Y .

DEMONSTRAÇÃO.

Para provarmos o teorema, necessitamos de dois lemas:

LEMA-1

Todas as medidas m_i , $i = 1, \dots, n$, dos espaços definidos nos parágrafos anteriores, envolvidas nas aplicações são: finitas, positivas e absolutamente contínuas, com relação à medida de Lebesgue.

Demonstração:

Se X é uma população e A é uma σ -álgebra em X , nota-se que as medidas definidas em A , envolvidas em tais aplicações são de dois tipos:

- a) número de habitantes, volume (ou áreas),
- b) medidas que dependem dos indivíduos, (peso, por exemplo).

Se m representa a medida de Lebesgue e m_i qualquer outra medida de tipos (a) ou (b), então m_i é absolutamente contínua com relação a m . De fato, se $m(X) = 0$, temos a área ou volume da região X , nulos, portanto, não teremos habitantes, logo as $(m_i)_{i=1}^n$ são todas nulas.

Por outro lado, de acordo com os tipos (a) e (b) de medidas usadas naqueles parágrafos, não há

dúvidas de que são todas positivas e finitas. Assim, o nosso lema fica demonstrado.

LEMA-2. (Teorema de Radon Nikodym).

Se m_i e m são medidas definidas numa σ -álgebra A em X , positivas, finitas e m_i absolutamente contínua, com relação à medida m , então existe uma única,

$$h_i \in L_m^1(X),$$

tal que,

$$m_i(B) = \int_B h_i dm,$$

para cada i , onde $B \subset X$.

Demonstração: (ver, [9]).

Demonstração do teorema (1.5.1):

Pelos lemas (1) e (2) existe uma função h_i (derivada no sentido de Radon Nikodym de m_i , relativo à m), tal que,

$$h_i \in L_m^1(X), \text{ isto é,}$$

$$m_i(Y) = \int_Y h_i dm.$$

Dividindo-se ambos os membros desta equação por $m(Y) \neq 0$, temos:

$$\frac{m_i(Y)}{m(Y)} = \frac{1}{m(Y)} \int_Y h_i dm = \bar{h}_i(Y), \text{ valor médio de } h_i,$$

em Y , concluindo a nossa demonstração.

CAPÍTULO 2

DISTORÇÃO RELATIVA A DUAS MEDIDAS

NUMA POPULAÇÃO.

1. INTRODUÇÃO.

No capítulo 1, estudamos uma população X , identificando-a com sua região geométrica R , associada, através de um isomorfismo de conjuntos, $f: X \rightarrow R$, entre indivíduos e lugares. Diante deste fato, surgiu-nos a ideia de que, populações são Variedades. De fato, no sentido da estatística, uma população é uma Variedade (Topológica), tendo uma região $R \subset \mathbb{R}^n$, como conjunto de parametrização, como veremos posteriormente. Em geral, não temos hipótese de convexidade sobre X , mas, podemos tomar uma região R' , suficientemente grande, tal que, $R \equiv R' \subset \mathbb{R}^n$ e, assim, temos as funções:

$$X \xrightarrow{f} R \xrightarrow{i} R', \text{ onde } f \text{ é um isomorfismo de conjuntos e } \underline{i} \text{ é a inclusão,}$$

Chamaremos o conjunto R' de região geométrica subjacente da população X ,

Dada uma σ -álgebra A em X , definamos a família de isomorfismos de conjuntos:

$$g_Y: f(Y) \rightarrow \mathbb{R}^n; \quad Y \in A, \text{ com } g_Y = f/Y.$$

Não é difícil verificar que os pares (Y, g_Y) , $Y \in A$, satisfazem os axiomas de um "ATLAS", [6].

(2.1.1) DEFINIÇÃO. A dimensão de uma população X , como variedade, é a dimensão de sua região geométrica subjacente, no caso, $n = 2$ ou $n = 3$.

2. VARIEDADE MÉTRICO - MULTIMEDIDA.

(2.2.1) PROPOSIÇÃO.

Sejam (X, A, m_i) um espaço medido e $X \xrightarrow{f} R$ uma função mensurável. Se B for uma família de conjuntos de Borel em R , podemos induzir através de f uma estrutura de espaço medido $(R, B, f(m_i))$, com

$$f(m_i)(Y) = m_i(f^{-1}(Y)) ; Y \in B$$

Demonstração. ver [3, ch.3, th.(3.1.3)] .

(2.2.2) DEFINIÇÃO.

Dada uma população X , chamaremos Variedade Métrico Multimedida ao objeto matemático:

$$(X_R, A, B, d, f, (m_i)_{i=1}^n),$$

satisfazendo:

VmMM-1. $(X, A, (m_i)_{i=1}^n)$ é um espaço multi-medido, (cap.1)

VmMM-2 $(R, B, d, (f(m_i))_{i=1}^n)$ é um espaço métrico-multimedido, (cap.1)

VmMM-3. $f: X \rightarrow R$ é um isomorfismo de conjuntos

VmMM-4. (m_i) e $(f(m_i))$, $i = 1, \dots, n$, são medidas finitas, positivas, d é a restrição a $R \subset \mathbb{R}^n$, da métrica euclídiana, f mensurável.

(2.2.3) DEFINIÇÃO. O espaço métrico-multimedido

$$(R, B, d, (f(m_i)_{i=1}^n), (V_{mMM-2}),$$

será chamado, espaço métrico-multimedido subjacente, da variedade métrico-multimedida

$$(X_R, A, B, d, f, (m_i)_{i=1}^n),$$

e serão representados simplesmente por R e X_R respectivamente.

3. BARICENTRO.

Em geral não temos hipótese de que uma população X seja um conjunto convexo e nem conexo, portanto, como estamos trabalhando com população e região separadamente, não podemos identificar o baricentro, $B_t(X)$, como sendo um ponto de X .

Entretanto, a região R' subjacente de X poderá ser considerada convexa e conexa de maneira que, o baricentro pode ser visto como um ponto abstrato de R via isomorfismo f .

(2.3.1) DEFINIÇÃO.

Definiremos o baricentro de uma subpopulação $X_i \subset X$ pela expressão:

$$B_t(f(X_i)), \\ f(m_i)$$

no tempo t . Apesar de ele se encontrar no espaço subjacente, usaremos a notação $B_t(X_i)$, do cap.1 (abuso de linguagem).

(2.3.2) O baricentro é usado para representar uma dada população ou subpopulação no tempo t , (cap.1), com respeito a uma certa medida. No próximo parágrafo, usaremos o baricentro para

definir uma maneira de calcular a distorção de uma população relativamente a duas medidas m, n .

4. DISTORÇÃO RELATIVAMENTE A DUAS MEDIDAS.

(2.4.1) DEFINIÇÃO. Distorção Métrica Local.

Sejam $B_{m_t}(X_i)$, $B_{n_t}(X_i)$, os baricentros da subpopulação $X_i \subset X$, com relação às medidas m, n respectivamente. Então, para toda subpopulação, não vazia, $X_i \subset X$, chamaremos m, n distorção Local de X_i ao quociente:

$$j_{m,n}^t(X_i) = \frac{d(B_{m_t}(X_i), B_{n_t}(X_i))}{d(R')},$$

onde o denominador é o diâmetro do conjunto R' , espaço subjacente de X_i , e o numerador é a distância entre os baricentros de X_i , com relação às medidas m e n .

(2.4.2) DEFINIÇÃO. m, n Distorção Métrica.

Seja X uma população. Se $X_i \subset X$ é uma subpopulação de X , definiremos:

$$J_{m,n}^t(X) = \sup_{X_i} j_{m,n}^t(X_i). \text{ Se } X = \emptyset, \quad J_{m,n}^t(X) = 0.$$

(2.4.3) PROPOSIÇÃO.

Dada uma população X , então, $J_{m,n}^t(X)$ é uma função do tempo, tomando valores no intervalo $[0, 1]$.

Demonstração. Se $X = \emptyset$ temos $J_{m,n}^t(X) = 0$, por definição.

Suponhamos $X \neq \emptyset$. Como, $d(R') = \sup \{d(x,y); x,y \in R'\}$ então,

$$0 \leq d\left(\frac{B_t(X_i)}{m}, \frac{B_t(X_i)}{n}\right) \leq d(R),$$

desde que, $\frac{B_t(X_i)}{m}$ e $\frac{B_t(X_i)}{n}$ pertencem ao espaço sub

jacente, por hipótese. Portanto;

$$0 \leq J_{m,n}^t(X) \leq 1.$$

m,n DISTORÇÃO ABSOLUTA.

(2.4.4) LEMA.

Seja (X, A, m) um espaço medido, onde m é uma medida positiva, finita.

Então, $m'(Y) = \frac{1}{m(X)} m(Y)$, $Y \in A$, é uma pro

babilidade induzida de m , com $m(X) \neq 0$.

Demonstração.

De fato, se $Y = X$, temos $m'(Y) = 1$, e, se $Y = \emptyset$ temos $m'(Y) = 0$ que são os valores extremos para $m'(Y)$. Portanto, $0 < m'(Y) \leq 1$, $\forall Y \in A$.

(2.4.5) LEMA.

Seja (X, A, m, n) um espaço multimedido, com m, n positivas e finitas. Dado $Y \in A$, definimos

$$\mu(Y) = \frac{1}{2} |m' - n'| (Y), \text{ onde } m', n'$$

são probabilidades induzidas em X de m e n respectivamente.

Então, (X, A, μ) é um espaço medido com medida μ , finita, positiva.

Demonstração.

μ é a variação total de $\frac{1}{2} |m' - n'|$, portanto é uma medida positiva. Como m', n' são finitas, então, μ é finita. Assim; μ é uma medida em A , logo, (X, A, μ) é um espaço medido.

(2.4.6) TEOREMA.

Se (X, A, m, n) é um espaço multi-medido, com m, n positivas e finitas, a equação:

$$\mu = \frac{1}{2} |m' - n'|,$$

define uma medida finita positiva com variação total $\rho = \mu(X)$, tal que, $0 \leq \rho = \mu(X) \leq 1$.

Demonstração. Pelos lemas (1) e (2), m' e n' são probabilidades e portanto $|m' - n'|$ não pode ser maior que 2. Logo,

$$0 < |m' - n'| < 2, \text{ portanto,}$$

$$0 < \frac{1}{2} |m' - n'| < 1.$$

(2.4.7) DEFINIÇÃO. m, n Distorção Absoluta.

Dado o espaço multi-medido (X, A, m, n) , chamaremos m, n distorção absoluta de X ao número,

$$\rho = \mu(X), \text{ de (2.4.6).}$$

(2.4.8) PROPOSIÇÃO.

A função $m, n, \rho: T \rightarrow [0, 1]$ está bem definida.

Demonstração. Pela definição (2.4.7) temos $\rho = \mu(X)$ e como m, n são funções de t , bem definidas, então, m, n é uma função de t , conseqüentemente bem definida.

5. EQUIDISTRIBUIÇÃO E m, n -DISTRORÇÃO.

Neste parágrafo, vamos estabelecer uma relação entre m, n distorção e equidistribuição.

(2.5.1) DEFINIÇÃO.

$(X, A, (m'_i)_{i=1}^n)$ será chamado um espaço multi-probabilizado se (X, A, m'_i) , $i=1, \dots, n$ for um espaço de probabilidade.

(2.5.2) DEFINIÇÃO.

$(X_R, A, B, d, f, (m'_i)_{i=1}^n)$ será chamado uma variedade métrico-multiprobabilizada (VmMP) se cada m'_i , $i=1, \dots, n$, for uma probabilidade e tivermos, (1.3.1), cap.1.

(2.5.3) LEMA.

Temos uma associação canônica de uma (VmMP) a toda (VmMM), $(X_R, A, B, d, f, (m_i)_{i=1}^n)$.

Demonstração. Lema, (2.4.4)

(2.5.4) TEOREMA.

As afirmações abaixo são equivalentes, no tempo t_0 fixo.

- (1) $\rho(X) = 0$ para duas probabilidades m'_i, m'_j , em X .
 m'_i, m'_j
- (2) X é m'_i, m'_j equidistribuída.

(3) $F_{m_i'} = F_{m_j'}$ onde $F_{m_i'}$, $F_{m_j'}$ são funções de distribuição de probabilidades m_i' , m_j' respectivamente, para toda variável aleatória, ver (A.2.7).

Demonstração.

(2) \Rightarrow (3) é um teorema usual em probabilidade.

(3) \Rightarrow (1). Supondo (3), pelo teorema (2.4.6) temos, $\rho(Y) = \mu(Y) = \frac{1}{2} |m_i' - m_j'| (Y) = 0$, que acarreta, $m_{,n}^{\rho}(Y) = 0$ para todo $Y \in A$, portanto, temos (1).

(1) \Rightarrow (3). Se (1) é verdadeira, por (2.4.5), as probabilidades de todo $Y \in A$ são as mesmas, portanto, temos (3).

(2.5.5) TEOREMA.

As seguintes alternativas são equivalentes, num tempo t , fixo.

$$(1) \quad J_{m_i', m_j'}^t(X) = 0.$$

$$(2) \quad \rho_{m_i', m_j'}(X) = 0.$$

(3) X é m_i' , m_j' equidistribuída.

Demonstração.

Supondo (3) verdadeira, os baricentros de cada $Y \in A$, coincidem relativamente à m_i' , m_j' , logo temos (1). Reciprocamente, (1) sendo verdadeira, temos (3) obviamente. Portanto, (1) \Leftrightarrow (3). A outra equivalência vem do teorema (2.5.4).

CAPÍTULO 3

APLICAÇÕES.

1. INTRODUÇÃO.

Em princípio, este capítulo tem por objetivo, aplicação de modelos definidos em capítulos anteriores; todavia, em muitos casos, inserimos parte teórica, inspirada em bibliografia sobre dinâmica de populações, dando a certos modelos uma roupagem nova através da teoria da medida, dos espaços métricos e equações diferenciais.

(3.1.1) DENSIDADE.

Seja (X, A, m, n) um espaço multi-medido, onde X é uma população biológica e m, n são respectivamente, volume (medida de Lebesgue) e número de habitantes de $Y \in A$. Então, a densidade populacional de Y no instante t , pode ser escrita em função do tempo t .

De fato, sabe-se que,

$$D_Y = \frac{n(Y)}{m(Y)}, \quad (\text{cf; cap. 1, (1.2.1)}).$$

O número de habitantes de Y é dado pela equação diferencial,

$$\frac{dn}{dt} = (N - M)n, \quad (\text{desprezando-se o movimento migratório}),$$

onde, N e M são respectivamente os índices de natalidade e mortalidade, [2], cuja solução é:

$$n_t(Y) = Ce^{ht}, \quad h = N - M \text{ e } C \text{ constante.}$$

Portanto, $D_Y(t) = \frac{C e^{ht}}{m(Y)}$, observando que $m(Y)$ é constante para cada $Y \in A$, fixo, num instante t .

2. DISTRIBUIÇÃO SUBJACENTE.

(3.2.1) DEFINIÇÃO.

Chamaremos distribuição subjacente, à distribuição individual dos elementos de uma população na região geométrica subjacente R .

Exemplo: Numa população biológica a distribuição subjacente pode ser:

Aleatória, Agregada ou Uniforme, [11] .

Dada uma população X , seja $(R, B, d, f(m))$ o seu espaço métrico-medido subjacente, (cap.2, (2.2.3)), onde $f(m)$ é a medida número de habitantes, transferida pelo isomorfismo $f: X \rightarrow R$. Com uma definição conveniente para a distância \underline{d} pode-se calcular o índice de "distribuição", (agregação, [11]), comparando-se \underline{d} com a densidade populacional, em B .

(3.2.2) DESLOCAMENTO.

(3.2.2)' DEFINIÇÃO.

Diz-se que uma população X deslocou-se, (migrou) após um certo intervalo de tempo $t_1 < t_2$, se a função deslocamento $B_{m_i}^t(X)$ (baricentro relativo à medida m_i), (cap.1,

(1.4.2)), não for constante nesse intervalo.

Exemplo: A população de Camarões (*PENAEUS SCHMITTI*) desova em alto mar. A população de jovens embriões migra até os estuários para um determinado período de crescimento, logo depois, ingressando à população adulta, [4] .

Temos ainda:

$$\frac{dB_t}{dt} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{d^2B_t}{dt^2} = 0,$$

isto é, velocidade e aceleração de migração nulas, direcionalmente, no intervalo de tempo de permanência nos estuários.

(3.2.3) DISPERSÃO.

DEFINIÇÃO - 1

Dada uma população X , seja (X, A, d, n) um espaço métrico-medido, onde d é a distância euclídeana e n é a medida número de elementos de $X_i \in A$. Chama-se distância média de dispersão da população X , no tempo t , à função:

$$\xi(t) = \frac{\sum_{i=1}^{n(X)} F_i(t)}{n(X)},$$

em que $F_i(t) = d(B_t^i, B_t)$, (cap.1, (1.4.4)', e B_t^i, B_t são respectivamente, baricentros de X_i e X , [11] .

DEFINIÇÃO - 2

Sejam X uma população e $[t_1, t_2]$, um intervalo de tempo. Dada a função ξ , da definição - 1, temos:

(1) Se $\frac{d\xi}{dt} > 0$ em (t_1, t_2) , diz-se que houve migração dispersiva por dispersão.

(2) Se $\frac{d\xi}{dt} < 0$ em (t_1, t_2) , diz-se que houve migração dispersiva por contração.

Exemplo. Os lagos de certas regiões do Brasil aumentam ou diminuem as suas águas, conforme as precipitações pluviométricas durante as estações do ano. Certos indivíduos, de algumas populações de tais lagos, procuram as margens para desova ou à busca de alimentos.

Na região Nordeste do Brasil, em determinado ano, choveu só no inverno e no ano seguinte foi seca total. Se (a, b) representa o intervalo de tempo inverno, (b, c) o verão, e (a', b') o ano seguinte, então:

$$(1) \frac{d\xi}{dt} > 0 \text{ em } (a, b)$$

$$(2) \frac{d\xi}{dt} < 0 \text{ em } (b, c)$$

$$(3) \frac{d\xi}{dt} < 0 \text{ em } (a', b').$$

3. BIOMASSA:

Seja (X, A, m, n) um espaço multi-medido, onde X é uma população de peixes numa Piscicultura intensiva em que a taxa de sobrevivência de indivíduos de X é constante, durante um certo intervalo de tempo, ξ, m, n são respectivamente, peso e número de indivíduos.

Define-se a biomassa total de X no instante t , por:

$$B(t) = n(X) m(X)_t ,$$

onde $n(X)$ e $m(X)_t$ são respectivamente, número de indiví-
duos e peso total no instante t .

A biomassa é um exemplo de produto de medidas, no
espaço (X, A, m, n) .

Através da lei de Malthus, [2] , (equação diferen-
cial muito usada em dinâmica de populações), a biomassa total
no tempo t , será dada por:

$$B(t) = Ce^{ht} m(X)_t , \text{ (cap.3, 3.1.1).}$$

APÊNDICE

ESPAÇO DE PROBABILIDADE E

FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO.

1. ESPAÇO DE PROBABILIDADE.

(A.1.1) DEFINIÇÃO.

(X, A, m) é chamado um Espaço de Probabilidade, se for um espaço medido com, $0 \leq m \leq 1$.

(A.1.2) DEFINIÇÃO.

$(\mathbb{R}^n, B, f(m))$ será chamado espaço de probabilidade de induzido em \mathbb{R}^n , onde B , são os borelianos de \mathbb{R}^n , se:

EPI-1) $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma variável aleatória

EPI-2) (X, A, m) é um espaço de probabilidade

EPI-3) $f(m)(Y) = m(f^{-1}(Y))$; $Y \in B$, (cap.2, (2.2.1)).

2. FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NUM ESPAÇO
DE PROBABILIDADE INDUZIDO EM \mathbb{R}^n .

(A.2.1) DEFINIÇÃO.

Dados $A, B \in \mathbb{R}^n$, isto é, $A = (a_i), B = (b_i)$,
 $i = 1, \dots, n$, diz-se que $A < B$ se $a_i < b_i, \forall i = 1, \dots, n$.
 Dizemos que $A > 0$ se $a_i > 0, \forall i = 1, \dots, n$.

(A.2.2) DEFINIÇÃO.

Dado $A \in \mathbb{R}^n$, o conjunto, $D_A = \{Y \in \mathbb{R}^n; Y < A\}$
 será chamado Hiper-Diedro em \mathbb{R}^n .

(A.2.3) DEFINIÇÃO.

Seja (\mathbb{R}^n, B, p) um espaço de probabilidade induzi-
 do, (A.1.3), onde $p = f(m)$. A função, $F_p: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$, tal
 que, $F_p(A) = p(D_A)$, será chamada Função de Distribuição da
 probabilidade p no espaço (\mathbb{R}^n, B, p) .

(A.2.4) TEOREMA.

F_p é crescente com $\lim_{k \rightarrow +\infty} F_p(Y_k) = 0$ e

$\lim_{k \rightarrow -\infty} F_p(Y_k) = 1$, para $Y_k = kA + B, A, B \in \mathbb{R}^n$,

$A > 0$.

Demonstração.

Para todo $A, B \in \mathbb{R}^n$, $A > 0$ e toda probabilidade p no espaço $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, p)$, temos $F_p(A) = p(D_A)$.

Como $D_A \subset D_B$ se $A < B$, então,

$$F_p(A) = p(D_A) < p(D_B) = F_p(B).$$

Por outro lado, $p(D_A) > 0$ e a relação de ordem definida em (A.2.1) é uma relação total na reta,

$$r: Y_k = kA + B, \quad (k \in \mathbb{R}); \quad A, B \in \mathbb{R}^n.$$

Temos que F_p/r (F_p restrita a r), é função de distribuição de uma probabilidade p em r , logo $F_p/r(Y_k)$ é uma função crescente, em uma variável, limitada superiormente por 1 e inferiormente por 0. Portanto:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} F_p/r(Y_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} F_p(Y_k) = 0 \quad e$$

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} F_p/r(Y_k) = \lim_{k \rightarrow -\infty} F_p(Y_k) = 1.$$

(A.2.5) DEFINIÇÃO.

Uma função de distribuição em \mathbb{R}^n é uma função crescente $F_p: \mathbb{R}^n \rightarrow [0,1]$ tal que para toda reta,

$$Y = kA + B, \quad A, B \in \mathbb{R}^n \quad e \quad k \in \mathbb{R},$$

temos:

$$a) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} F_p(Y_k) = 0$$

$$b) \quad \lim_{k \rightarrow -\infty} F_p(Y_k) = 1.$$

(A.2.6) TEOREMA.

À toda função de distribuição em \mathbb{R}^n , corresponde uma probabilidade p .

Demonstração. Ver [2, cap.2] .

(A.2.7) OBSERVAÇÃO.

Dados um espaço de probabilidade, (X, A, m) e uma variável aleatória,

$$X \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n,$$

temos um espaço de probabilidade induzido, $(\mathbb{R}^n, B, f(m))$, e, conseqüentemente, uma função de distribuição F_p , onde $p = f(m)$.

Dizemos que F_p é a função de distribuição de \underline{m} relativamente à variável aleatória f .

(A.2.8) TEOREMA.

$$F_p = F_q \Leftrightarrow p = q, \text{ para duas probabilidades } p \text{ e } q.$$

Demonstração. Ver [2, cap.2] .

(A.2.9) DEFINIÇÃO.

X é p, q equidistribuída, se $p = q \Leftrightarrow F_p = F_q$ para duas probabilidades p, q em X .

5. REFERÊNCIAS.

- [1] Bartle, R. G. - The Elements of Integration. Copyright (C) 1966, by John Wiley & Sons, Inc. USA.
- [2] Caputo, H. P. Introdução ao Estudo das Equações Diferenciais e Suas Aplicações, 1973, Livro Técnico e Científico Editores S.A. - Rio de Janeiro - GB Brasil.
- [3] Chung, Kai Lai; A Course In Probability Theory, ACADEMIC PRESS, INC (LONDON), Ltda, 1974.
- [4] Farias, J. O. Ecologia de Formas Jovens de Penaeus Schmitti-Burkenroad, 1936 no Rio Tavares-Florianópolis-SC . UFPR (Tese de Mestrado), 1979.
- [5] Honig, Chaim S. - A Integral de Lebesgue e suas Aplicações. Rio de Janeiro, IMPA, 1977. 298 p.
- [6] Lang, S. Introduction to differentiable manifolds, Wiley New York, 1966.
- [7] Praciano Pereira, Te Rodrigues, S. F. Distorção Relativa a duas Medidas. UFSC-1981 (Pre-Print, Sem. Castelan-UFSC)
- [8] Rodrigues, S. F. Espaço Multi-Medido e Espaço Métrico - Multimedido, UFSC-1981 (Pre-Print, Sem. Castelan - UFSC)
- [9] Rudin, W; Real and Complex Analysis. McGraw-Hill - New York, 1974.
- [10] Salomon, Maurice E. Dinâmica de Populações. Tradução de Janette de Toledo Cardoso Mello. São Paulo - EPU. 1978. (Tema de B; v.3).
- [11] Santos, E.P. Dinâmica de Populações Aplicada à Pesca e Piscicultura, Ed. Universidade de São Paulo, 1978.

- [12] Sounis, Emílio, 1913. - Bioestatística: Princípios Fundamentais, Metodologia Estatística, Aplicações às Ciências Biológicas. Editora. São Paulo, McGraw-Hill do Brasil. 1975. p. lust.

INDICE ALFABÉTICO

- Absolutamente contínua; 8,26
 Álgebra, -; 3
 Atlas; 11
 Baricentro; 5,13
 Biomassa; 23
 Deslocamento; 20
 Densidade; 3,8,19
 Dispersão; 21
 Distribuição Subjacente;
 Ao acaso; 20
 Agregada; 20
 Uniforme; 20
 Distorção,
 Métrico-Local; 14
 Absoluta; 15
 Espaço;
 De probabilidade
 Métrico-Medido; 4
 Métrico-Multimedido Subjacente; 13
 Multi-Medido; 3
 Equidistribuição; 17
 Função,
 Deslocamento; 6
 De Distribuição; 17, 24
 Medida; 3
 Migração; 20
 Multi-probabilizada; 17
 População;
 Biológica; 2,19
 Radon-Nikodym (teor); 9
 Região Geométrica,
 Associada; 2
 Subjacente; 11
 Variedade;
 Métrico-Multimedido; 12
 Métrico-Multiprobabilizada; 17
 Vetor deslocamento; 5,6