

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

MODELO MATEMÁTICO PARA A SOLUÇÃO DA CAMADA LIMITE
TURBULENTA SOBRE SUPERFÍCIES CURVAS

Dissertação submetida à Universidade Federal
de Santa Catarina para a obtenção do Grau de
Mestre em Engenharia.

VILSON CARLOS DA SILVA FERREIRA

Florianópolis, 20 dezembro de 1978

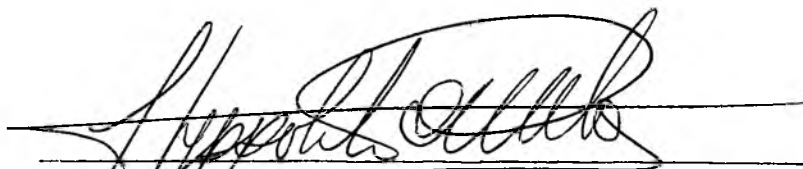
MODELO MATEMÁTICO PARA A SOLUÇÃO DA CAMADA LIMITE
TURBULENTA SOBRE SUPERFÍCIES CURVAS

VILSON CARLOS DA SILVA FERREIRA

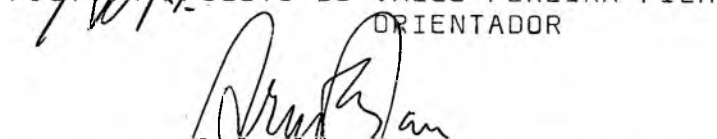
Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do Tí
tulo de

"MESTRE EM ENGENHARIA"

especialidade: Engenharia Mecânica, área: Termodéctica, e
aprovada em sua forma final pelo programa de Pós-Graduação

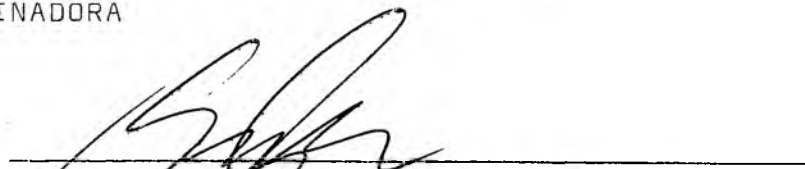


Prof. HYPOLITO DO VALLE PEREIRA FILHO, Ph.D.
ORIENTADOR

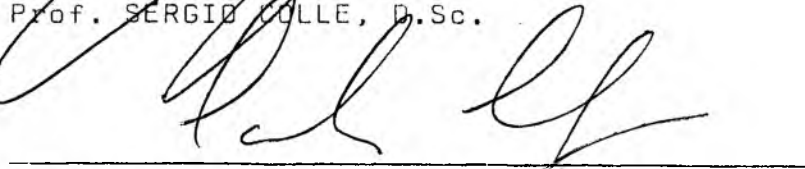


Prof. ARNO BLASS, Ph.D. - COORDENADOR

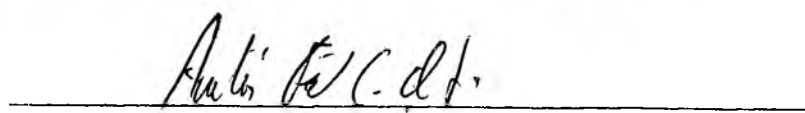
BANCA EXAMINADORA



Prof. SERGIO COLLE, D.Sc.



Prof. CARLOS ALBERTO CLEZAR - M.Sc.



Prof. ANTÔNIO FABIO C. DA SILVA - M.Sc.

A meus

pais,

esposa e filho

AGRADECIMENTOS

- A UFRGS e CNEN pelo suporte financeiro que possibilitou a realização deste trabalho;
 - A UFSC pelo seu corpo Docente a nossa disposição;
 - Ao orientador Prof. Hyppólito do Valle Pereira Filho, pela dedicação com que conduziu os nossos estudos;
 - Aos colegas Carlos Dutra e Lutero C. Lima pela intensa colaboração e acompanhamento dos estudos realizados;
 - Ao CPD-UFRGS que com a utilização do B-6700 tornou possível a realização deste trabalho;
 - A minha família pelo incentivo recebido;
- e a todos os que direta ou indiretamente concorreram para o perfeito êxito deste trabalho os meus sinceros agradecimentos.

S U M Á R I O

	p.
SIMBOLOGIA	i
RESUMO	iv
ABSTRACT	vi
1 - INTRODUÇÃO	1
2 - APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA	6
2.1 - Equações Gerais	6
2.2 - Ordem de Grandeza das Equações	10
2.3 - Hipóteses de Fechamento	12
2.3.1 - Parâmetro de estrutura	13
2.3.2 - Termo difusão	13
2.3.3 - Termo dissipação viscosa	14
3 - TRATAMENTO NUMÉRICO	18
3.1 - Adimensionalização	19
3.2 - Discretização	20
3.3 - Fluxograma	25

	p.
4 - ANÁLISE DOS RESULTADOS	28
4.1 - Resultados Obtidos	29
4.1.1 - Diagramas de velocidades	29
4.1.2 - Diagramas de energia cinética	30
4.1.3 - Coeficientes finais	31
4.2 - Análise Final	33
4.2.1 - Dados iniciais	33
4.2.2 - Conclusões	36
 BIBLIOGRAFIA	 39
 ANEXOS	
ANEXO 1 - PROCESSO DE MÉDIA	42
ANEXO 2 - EQUAÇÃO DA ENERGIA CINÉTICA TURBULENTA	47
ANEXO 3 - ORDEM DE GRANDEZA	53
ANEXO 4 - ADIMENSIONALIZAÇÃO	62
ANEXO 5 - DISCRETIZAÇÃO	67
ANEXO 6 - MODELO MATEMÁTICO	76
ANEXO 7 - DIAGRAMAS OBTIDOS	77

S I M B O L O G I A

A_j, B_j, C_j, D_j	Coeficientes da equação diferencial linearizada.
Bk	Razão da progressão geométrica para o crescimento dos intervalos na direção y
C_1	Constante dissipativa
c	Constante para o perfil inicial de velocidades.
C_f	Coeficiente de Fricção.
\bar{D}	Termo de dissipação viscosa na equação da energia cinética.
f	Função curvatura $\frac{R(x)}{R(x)+y}$.
G_j, g_j	Coeficientes da função solução das matrizes tri-diagonais.
H	Fator de forma.
H'	Função definida em (6.2).
K(y)	Parâmetro de estrutura.

k	Constante = 0,4 .
L_1, L_2, l^2	Escalas de grandezas.
l_d	Comprimento de dissipação.
n	Expoente definido pela equação (33)
P'	Flutuação de pressão.
\bar{P}	Pressão média.
Q'	Energia cinética turbulenta definida como $1/2(u'_i u'_i)$.
\bar{Q}	Energia cinética média.
R_e	Número de Reynolds baseado no diâmetro.
R_δ	Número de Reynolds baseado em δ .
R_{δ^*}	Número de Reynolds baseado em δ^* .
R_θ	Número de Reynolds baseado em θ .
r_0	Constante igual a 110.
$U_0(x)$	Velocidade do escoamento potencial.
U_∞	Velocidade do escoamento potencial não perturbado.
u_i	(u ou v) velocidades instantâneas.
u'_i	(u' ou v') flutuações de velocidades.
\bar{u}_i	(\bar{u} ou \bar{v}) velocidades médias.
u^*	Velocidade de fricção.
u^+	Velocidade adimensionalizada segundo \bar{u}/u^*

v	Velocidade adimensionalizada segundo \bar{v}/U_0 .
$-\rho \overline{u'v'}$	Tensor de Reynolds.
V	Velocidade definida em (4.5).
x	Coordenada na direção do escoamento.
y	Coordenada normal ao escoamento.
y^+	Transformação de coordenada segundo $\frac{yu^*}{\nu}$.
$\alpha(x,y)$	Função definida em (6.1).
β	Constante igual a 0,2.
δ	Espessura da camada limite a $\bar{u}/U_0=0,9899$.
ϵ'	Critério de erro.
ϵ''	Critério de convergência.
θ	Espessura de momento.
μ	Viscosidade absoluta.
ν	Viscosidade cinemática.
ξ	Nova coordenada na direção x .
η	Nova coordenada na direção y .
ρ	Densidade.
$\phi.33$	Função definida pela tabela (6.1) .
X_i	Forças de campo

MODELO MATEMÁTICO PARA A SOLUÇÃO DA CAMADA LIMITE TURBULENTO SOBRE SUPERFÍCIES CURVAS

R E S U M O

Para a determinação das grandezas do escoamento turbulento incompressível (médio), três equações fundamentais foram utilizadas: a equação da conservação da massa, da conservação do movimento e a da energia cinética turbulenta. Há no entanto, no sistema assim formado, um problema de fechamento originado, no processo de média, pela não linearidade das equações $(u_i u_j)$. Para levantar-se esta dificuldade empregou-se um modelo matemático de turbulência relacionando; tensão turbulenta com energia cinética turbulenta (parâmetro de estrutura), dissipação viscosa com a energia cinética e com o comprimento de dissipação e finalmente o termo de difusão da energia com o gradiente da energia cinética ao longo da camada limite.

Feitas as simplificações próprias da camada limite e substituindo-se as relações do modelo turbulento obteve-se um sistema de três equações diferenciais, não lineares, acopladas em coordenadas curvilíneas.

A solução analítica é dificultada pela não linearidade das equações do movimento e da energia cinética. Para contornar este problema, linearizou-se o modelo numérico associado. Utilizou-se um método implícito de diferenças finitas aproveitando a característica tridiagonal das matrizes obtidas.

ABSTRACT

In order to calculate the parameters involved in mean incompressible turbulent flow, the continuity equation, the momentum equations and the turbulent kinetic energy equation, were used. This system of differential equations presents a closure problem originating in the time-averaged procedure due the non-linearity of the equations $(u_i u_i |^j)$. To resolve this difficulty a mathematical model of turbulence relating turbulent shear stress to turbulent kinetic energy (structure parameter), viscous dissipation to dissipation length and the diffusion term to the turbulent kinetic energy gradient, was used.

After some appropriate simplifications to the turbulent model concerning the boundary layer, a system of three two-dimensional, coupled partial differential equations in curvilinear coordinates was reached.

The non-linearity in the momentum equation and kinetic energy equation cause a great difficulty to find an analytical solution. To resolve this problem, the associated numerical model, was linearized. An implicit finite difference method using the tridiagonal characteristic of the matrixes was used.

I N T R O D U Ç Ã O

O presente trabalho tem por objetivo a determinação dos diversos parâmetros do escoamento turbulento sobre superfícies curvas, empregando as equações da conservação da massa, do movimento e da energia cinética turbulenta. Concentrou-se este estudo na camada limite e principalmente próximo à parede, já que ali tem-se gradientes acentuados e é predominante o efeito da viscosidade.

O estudo da hidrodinâmica sofreu com Ludwig Prandtl (1904), importante modificação conceitual. A teoria da camada limite dividiu o escoamento em duas regiões: a potencial e a viscosa (onde a resistência ao escoamento está concentrada). A partir desta data, muito se tem pesquisado sobre o comportamento da camada limite sob diversas condições.

O escoamento laminar sofreu atenção especial de início. Apesar da relativa complexidade das equações, foi possível obter-se soluções analíticas (ainda que aproximadas) com excelente resultado. O mesmo não se pode dizer do escoamento turbulento. A maioria destes trabalhos tem campo de validade restrito as condições

pré-fixadas e mesmo assim com resultados não tão precisos.

A grande dificuldade na solução do escoamento turbulento é o aparecimento de novas variáveis no sistema, originadas pelo processo de média estatística (*Time-average*)². (Anexo 1 e 2). As novas variáveis introduzidas tornam o sistema indeterminado.

O próprio processo de média pode *criar* mais equações, porém realmente não soluciona o problema de indeterminação. Junto com a nova equação criada, aparece um número ainda maior de novas variáveis dependentes. O problema de fechamento é realmente resolvido com o auxílio de um modelo matemático que relaciona as novas variáveis entre si, ou com gradientes das variáveis principais. (*)

A medida que se aumenta o número de equações o sistema se torna anti-econômico, sob o ponto de vista de tempo de computação, além de elevar o grau de complexidade do problema.

O modelo matemático empregado no presente trabalho é composto de três relações auxiliares:

- Relação entre a tensão turbulenta e a energia cinética turbulenta - "Parâmetro de Estrutura"
- Relação entre a dissipação viscosa e a energia cinética
- Relação entre o termo de difusão e o gradiente de energia cinética (Anexo 6).

(*) Vale registrar que o modelo matemático de Davidov emprega 23 equações de transporte enquanto que o de Kolavadin, 28 equações.

Assim montou-se um sistema possível de três equações diferenciais a três incógnitas.

Muito se tem empregado a equação da energia cinética junto com as demais equações básicas (continuidade e movimento) para a solução da camada limite.

Para a placa plana, McDonald³ preferiu solucionar as três equações por meio de um método integral. Já Mellor e Herring⁴ resolveram o mesmo sistema por diferenças finitas e adotaram como modelo matemático de fechamento relações envolvendo o comprimento de mistura de Prandtl. Pereira Filho⁵ resolveu a placa plana com e sem gradiente de pressão, acoplando ao sistema mais uma equação a do transporte de dissipação viscosa ao longo da camada limite. Vale registrar os trabalhos de Akatnov e Tul'bert⁶ publicados em Leningrado, para um escoamento sobre placa plana e interior de tubos (secção circular e retangular) que além da equação da energia utilizaram a equação do tensor de Reynolds ($\overline{u'v'}$). Burbank e Fillo⁷ também resolveram a placa plana e no modelo de fechamento utilizaram o parâmetro de estrutura assim como se está fazendo.

A maioria dos resultados teóricos para a placa plana é comparada com os dados experimentais de Klebanoff⁸ ou com os de Wieghardt⁹.

Para superfícies curvas ou sólidos de revolução grande número de trabalhos (principalmente experimentais) já foram apresentados. Cebeci¹⁰ analisou o escoamento sobre corpos de revolução com fluxo axial empregando apenas duas equações (continuidade e movimento) e para o fechamento, os conceitos de Prandtl e fator de in-

termitência. Junto com Smith, Cebeci¹¹ desenvolveu um completo estudo teórico abrangendo desde o escoamento laminar até o turbulento sobre sólidos de revolução. Pesquisou detalhadamente a convergência dos resultados em função da malha de diferenças finitas. Dos trabalhos experimentais sobre superfícies curvas a duas dimensões, dois podem ser facilmente reproduzidos teoricamente. O primeiro, de So e Mellor¹², analisa o efeito da curvatura convexa na camada limite. O raio de curvatura é variável e a superfície côncava envolvente é flexível a fim de ajustar o escoamento potencial a um pequeno gradiente de pressão. O segundo é de Shivaprasad e Ramaprian^{13, 14}. Este envolve escoamento sobre superfície levemente curva (côncava e convexa) com raio constante. Entre outras grandezas analisadas o parâmetro de estrutura é determinado a cada estação tanto para a parte côncava quanto para a convexa.

Limitações:

Apesar da pretendida generalização que se desejou dar ao problema, acredita-se que está limitado devido as sucessivas simplificações e artifícios matemáticos empregados com a finalidade de se obter um sistema passível de solução.

Assim:

* A análise da ordem de grandeza, com os critérios da camada limite, eliminou diversos termos de pequena ordem...

* A introdução do modelo matemático por si só...

* A introdução do modelo matemático próprio da placa plana em superfícies curvas...

* E outras considerações, tais como a eliminação sistemática das forças de campo (gravitacionais) tornam o resultado restrito.

Então, sem a comprovação de outros casos, limita-se o programa a:

— Escoamentos incompressíveis, com fluídos de baixo peso específico.

— A região física estará delimitada a *pouco* além do ponto de estagnação e *pouco* aquém do ponto de separação.

— Escoamentos com gradientes de pressão não muito acentuados.

— Escoamentos sobre superfícies com curvatura inferior a $(\delta/R \leq 0,1)$.

APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

Serão apresentadas neste capítulo as equações fundamentais do problema e a obtenção da equação da energia cinética turbulenta por meio do processo de média. As novas variáveis introduzidas por este processo (produtos de flutuações tais como: $\overline{u'_i u'^i}$, $\overline{u'_i p'}$, $\overline{u'_i u'^i u'_j}$) foram relacionadas com o modelo matemático. Analisou-se a seguir a ordem de grandeza dos termos das equações e foi montado um sistema de equações diferenciais parciais, não lineares em coordenadas curvilíneas a duas dimensões.

2.1 - EQUAÇÕES GERAIS

Na forma mais geral, as equações fundamentais de um escoamento incompressível em notação tensorial¹⁵ são:

$$u^i|_i = 0 \quad (1)$$

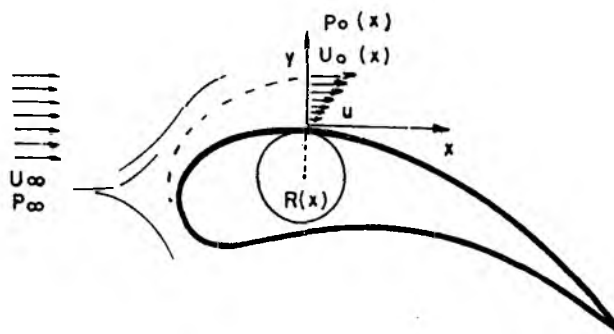
$$\rho \left(\dot{u}^i + u^j u^i|_j \right) = -p^i + \mu u^i|_j + \chi^i \quad (2)$$

onde (1) é a equação da conservação da massa (continuidade) e (2) a equação de Navier-Stokes.

O sistema assim apresentado é passível de solução, pois temos quatro grandezas desconhecidas (u_i , P) e quatro equações.

A seguir, desprezou-se o efeito das forças campo (χ^i) em presença das forças de inércia, viscosidade e de contato.

Como a proposição era determinar o escoamento incompressível sobre superfícies curvas, havia necessidade de um sistema de referência compatível com esta situação. O sistema de coordenadas empregado é tal que o eixo dos x segue a superfície curva e o eixo dos y a ela é normal a cada ponto (Fig. 1)



(Fig. 1)

Para regime permanente e as coordenadas assim definidas a equação da continuidade e a de Navier-Stokes são fornecidas por Schlichting¹⁶ e por Milne-Thompson¹⁷:

$$f \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + f \frac{v}{R} = 0 \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
fu \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{f v u}{R} = - \frac{f}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + v \left[f^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{f}{R} \frac{\partial u}{\partial y} + \right. \\
\left. - \frac{f^2 u}{R^2} + \frac{2f^2}{R} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{f^3}{R^2} \frac{dR}{dx} v + \frac{f^3}{R^2} y \frac{dR}{dx} \frac{\partial u}{\partial x} \right] \quad (4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
fu \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - f \frac{u^2}{R} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + v \left[\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{2f^2}{R} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{f}{R} \frac{\partial v}{\partial y} + \right. \\
\left. + f^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{f^2}{R^2} v + \frac{f^3}{R^2} \frac{dR}{dx} u + \frac{f^3}{R^2} y \frac{dR}{dx} \frac{\partial v}{\partial x} \right] \quad (5)
\end{aligned}$$

onde a função f é definida como:

$$f(x, y) = \frac{R(x)}{R(x) + y}$$

e $R(x)$ é o inverso da curvatura.

As equações acima (3), (4) e (5) são gerais; válidas por tanto para o escoamento laminar e turbulento (instantâneo). Como não há interesse no escoamento instantâneo (randômico), mas sim no seu efeito final, obteve-se a equação para o escoamento médio. Assim decompondo as grandezas instantâneas em:

$$\begin{aligned}
u &= \bar{u} + u' \\
v &= \bar{v} + v' \\
P &= \bar{P} + P' \\
\rho &= \text{cste} = \bar{\rho}
\end{aligned} \quad (6)$$

O termo que contém a barra ($\bar{\quad}$) é o valor médio da grandeza e o que contém a apóstrofe ($'$) é o valor de sua flutuação. Introduzindo as relações (6) nas equações (3), (4) e (5) e utilizando a técnica da média² obtidas conforme anexo 1, as equações do

escoamento médio:

$$f \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + f \frac{\bar{v}}{R} = 0 \quad (7)$$

$$\begin{aligned} f \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{f}{R} \bar{u} \bar{v} = & - \frac{f}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + v \left[f^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + f \frac{\bar{u}}{R} \right) + \right. \\ & + \frac{2f^2}{R} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{f^3}{R^2} \frac{dR}{dx} \bar{v} + \frac{f^3}{R^2} y \frac{dR}{dx} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \left. \right] - f \frac{\overline{\partial u'^2}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \\ & - \frac{2f}{R} \overline{u'v'} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} f \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - f \frac{\bar{u}^2}{R} = & - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} + v \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + f \frac{\bar{v}}{R} \right) - \frac{2f^2}{R} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \right. \\ & + \frac{f^2}{R^2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{f^3}{R^2} \frac{dR}{dx} \bar{u} + \frac{f^3}{R^2} y \frac{dR}{dx} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \left. \right] - \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} - f \frac{\overline{\partial u'v'}}{\partial x} + \\ & - \frac{f}{R} \left(\overline{v'^2} - \overline{u'^2} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

e juntando a equação da energia cinética (10) obtida no anexo 2 ao sistema de equações:

$$\begin{aligned} f \bar{u} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial y} = & - \overline{u'^2} f \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\bar{v}}{R} \right) - \overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{u'v'} f \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \right. \\ & - \frac{\bar{u}}{R} \left. \right) - \overline{v'^2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - f \left(\frac{\partial \overline{u'Q}}{\partial x} \right) - f \frac{\overline{v'Q}}{R} - \frac{\partial \overline{v'Q}}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \left[f \frac{\partial \overline{u'P'}}{\partial x} + \right. \\ & + \frac{\overline{v'P'}}{R} \left. \right] + \frac{\partial}{\partial y} \overline{v'P'} \left. \right] + v \left[f^2 \frac{\partial^2 \bar{Q}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{Q}}{\partial y^2} + \frac{f^3}{R^3} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} \frac{dR}{dx} + \right. \\ & + \left. \frac{f \partial \bar{Q}}{R \partial y} \right] - v \bar{D} \end{aligned} \quad (10)$$

Com uma rápida inspeção no sistema assim formado identifica-se como grandezas desconhecidas:

$$\begin{array}{l} \bar{u}_i \longrightarrow \bar{u}, \bar{v} \\ \overline{u'_i u'_j} \longrightarrow \overline{u'^2}, \overline{v'^2}, \overline{u'v'} \end{array}$$

$$\overline{u'_i u'_j u'_j} \longrightarrow \overline{u'Q}, \overline{v'Q}$$

$$\overline{u'_i P'} \longrightarrow \overline{u'P'}, \overline{v'P'}$$

$$\overline{(u'_{i,j} + u'_{j,i}) u'_{j,i}} \longrightarrow \overline{0}$$

e \overline{P}

obtendo-se assim um sistema com mais incógnitas que equações.

A análise da ordem de grandeza contornou em parte o problema da indeterminação pois muitos dos termos desprezados levaram consigo algumas incógnitas.

2.2 - ORDEM DE GRANDEZA DAS EQUAÇÕES

Felizmente, nem todos os termos do sistema de equações tem a mesma ordem de grandeza. Assim uns foram desprezados em presença de outros de maior ordem. Definiu-se então, as escalas de grandeza L_1 segundo a direção X e L_2 na direção Y. Para a camada limite teremos:

$$O[L_1] \gg \delta \quad \text{e} \quad O[L_2] \approx \delta, \quad \text{tal que}$$

$$\frac{L_2}{L_1} \lll 1 \tag{11}$$

Admitiu-se $R(x)$ como sendo da ordem de L_1 . E então:

$$f(x,y) = \frac{R(x)}{R(x)+y} = \frac{O(L_1)}{O(L_1)+O(L_2)} \approx \frac{O(L_1)}{O(L_1)} = O(1) \tag{12}$$

Assim a equação da continuidade ficará:

$$f \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + f \frac{\bar{v}}{R} = 0$$

$$O(1) \frac{O(\bar{u})}{O(L_1)} + \frac{O(\bar{v})}{O(L_2)} + O(1) \frac{O(\bar{v})}{O(L_1)} = 0 \quad (13)$$

E multiplicando por $\frac{O(L_1)}{O(\bar{v})}$:

$$\frac{O(\bar{u})}{O(\bar{v})} + \frac{O(L_1)}{O(L_2)} + O(1) = 0$$

e foi possível concluir:

$$\frac{O(\bar{v})}{O(\bar{u})} = \frac{O(L_2)}{O(L_1)} \lll 1 \quad (14)$$

Assumiu-se ainda:

$$\frac{O(\pi)O(L_1)}{O(v)} = O(R_e) \ggg O(1) \quad (15)$$

E para as flutuações de velocidades:

$$O(\ell^2) \approx O(\overline{u'v'}) \approx O(\overline{u'^2}) \approx O(\overline{v'^2})$$

$$O(\bar{Q}) \approx O(\ell^2) \quad (16)$$

Substituindo estas relações nas equações do movimento e da energia cinética e, após as manipulações algébricas necessárias (anexo 3), chegou-se as equações (17), (18), (19) e (20). Nelas foram desprezados os termos contendo $\frac{1}{O(R_e)}$, $\frac{O(L_2)}{O(L_1)}$ e $\frac{O(\ell^2)}{O(\bar{u}^2)}$ na primeira equação do movimento; todos os termos da segunda equação do movimento com exceção $O(L_1)$, $\frac{O(\Delta P) O(L_1^2)}{\rho O(L_2^2) O(\bar{u}^2)}$; e desprezados os termos $\frac{O(L_2)}{O(L_1)}$, $\frac{O(L_2)}{O(L_1^2) O(\bar{u})}$ na equação da energia cinética (Vide anexo 3).

Finalmente obteve-se:

$$f \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + f \frac{\bar{v}}{R} = 0 \quad (17)$$

$$f \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = - \frac{f}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + f \frac{\bar{u}}{R} \right) - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u'v'}) \quad (18)$$

$$f \frac{\bar{u}^2}{R} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} \quad (19)$$

$$f \bar{u} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial y} = - \overline{u'v'} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - f \frac{\bar{u}}{R} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[- \overline{v'(Q + P/\rho)} + v \frac{\partial \bar{Q}}{\partial y} \right] + \frac{f}{R} \left[- \overline{v'(Q + P/\rho)} + v \frac{\partial \bar{Q}}{\partial y} \right] - v \bar{D} \quad (20)$$

Onde as incógnitas agora são:

$$\bar{u}_i \text{ ————— } \bar{u}, \bar{v}$$

$$\overline{u'_i u'_i} \text{ ————— } 2\bar{Q}$$

$$u'_i u'_j \text{ ————— } \overline{u'v'}$$

$$\overline{u'_2 Q}, \overline{u'_2 P'} \text{ ————— } \overline{v'Q}, \overline{v'P'}$$

\bar{P} e \bar{D} (em número de oito).

2.3 - HIPÓTESES DE FECHAMENTO

Para tornar o sistema composto pelas equações (17), (18), (19) e (20) solúvel, utilizou-se um conjunto de relações auxiliares (modelo matemático) procurando relacionar as variáveis original das pelo processo de média com as variáveis fundamentais (\bar{u} , \bar{v} e \bar{Q}).

2.3.1 - PARÂMETRO DE ESTRUTURA

A primeira das relações auxiliares surgiu com a análise do comportamento do tensor de Reynolds e da energia cinética turbulenta ao longo da camada limite. Tanto para a placa plana^{7, 5} quanto para superfícies curvas¹³ o comportamento destas duas grandezas é similar. Tal é a semelhança que, ao se fazer a razão entre o tensor turbulento pelo dobro da energia cinética é obtido um fator praticamente constante e igual a 0,15 na região central da camada limite. Chama-se este fator de "Parâmetro de Estrutura" = $K(y)$. (Anexo 6)

Assim:

$$-\frac{\overline{u'v'}}{2\overline{Q}} = K(y) \approx K$$

Então

$$-\overline{u'v'} = 2K\overline{Q} \quad (21)$$

2.3.2 - TERMO DE DIFUSÃO

A segunda relação auxiliar, necessária ao fechamento, engloba as variáveis $\overline{v'Q}$ e $\overline{v'P'}$ existentes na equação da energia cinética turbulenta.

Costuma-se agrupar os termos contendo estas variáveis e identificá-los como "Difusão" da energia cinética. Assim, para coordenadas curvilíneas tiramos da equação (20):

$$\text{Difusão} = \frac{\partial}{\partial y} \left[- \frac{v' (Q + P'/\rho)}{\rho} + v \frac{\partial \bar{Q}}{\partial y} \right] + \frac{f}{R} \left[- \frac{v' (Q + P'/\rho)}{\rho} + v \frac{\partial \bar{Q}}{\partial y} \right] \quad (22)$$

O primeiro membro da expressão acima (22) pode ser identificado como um termo de difusão sem o efeito da curvatura (placa plana) (21)⁴. Associou-se este membro a seguinte relação matemática:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[- \frac{v' (Q + P'/\rho)}{\rho} + v \frac{\partial \bar{Q}}{\partial y} \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha \frac{\partial \bar{Q}}{\partial y} \right) \quad (23)$$

E pela semelhança, o segundo será:

$$\frac{f}{R} \left[- \frac{v' (Q + P'/\rho)}{\rho} + v \frac{\partial \bar{Q}}{\partial y} \right] = \frac{f}{R} \alpha \frac{\partial \bar{Q}}{\partial y} \quad (24)$$

A função $\alpha (x,y)$ será apresentada no anexo 6.

2.3.3 - TERMO DE DISSIPACÃO VISCOSA

Identificou-se o último termo da equação (20) como sendo responsável pela dissipação viscosa da energia cinética. Este termo também tem necessidade de ser representado como função das variáveis médias (Q). Utilizou-se a relação que Beckwith e Bushnell¹⁸ idealizaram para a placa plana baseados no procedimento de Glushko (1965):

$$v \bar{v} = C_1 \frac{\alpha \bar{Q}}{\ell_d^2} \quad (25)$$

Onde C_1 é uma constante dissipativa a ser determinada; ℓ_d uma função de comprimento de dissipação semelhante ao comprimento de mistura. (Anexo 6)

As equações são agora reescritas:

$$\bar{u}f \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = - \frac{f}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \nu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + f \frac{\bar{u}}{R} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (2K\bar{Q}) \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}f \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial y} = & 2K\bar{Q} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - f \frac{\bar{u}}{R} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha \frac{\partial \bar{Q}}{\partial y} \right) + f \frac{\alpha}{R} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial y} + \\ & - C \frac{\alpha \bar{Q}}{\ell_d^2} \end{aligned} \quad (27)$$

Foi possível, ainda, eliminar a variável \bar{P} do sistema, empregando, como fez Schlichting¹⁹, a equação de Bernoulli para uma linha de corrente:

$$\frac{P_\infty}{\rho} + \frac{1}{2} U_\infty^2 = \frac{P(x)}{\rho} + \frac{1}{2} U\sigma^2(x) = \text{CSTE.}$$

Integrando a equação (19) ao longo da camada limite:

$$\int_0^y \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} dy = \rho \int_0^y f \frac{\bar{u}^2}{R} dy \quad \text{ou}$$

$$\bar{P}_0(x) - \bar{P}_p(x) = \rho \int_0^y f \frac{\bar{u}^2}{R} dy$$

E substituindo na equação de Bernoulli:

$$\bar{P}_p(x) = \text{CSTE} - \rho \left[\frac{U_\infty^2(x)}{2} + \int_0^y f \frac{\bar{u}^2}{R} dy \right]$$

E derivando com relação a x:

$$\frac{\partial \bar{P}(x)}{\partial x} = -\rho \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{U_0^2(x)}{2} + \int_0^y f \frac{\bar{u}^2}{R} dy \right]$$

Expressão que substituída na equação (26) fica:

$$\begin{aligned} f \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} &= U_0 f \frac{dU_0}{dx} + f \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y f \frac{\bar{u}^2}{R} dy + \\ &+ v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + f \frac{\bar{u}}{R} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (2K\bar{Q}) \end{aligned}$$

E finalmente formou-se um sistema de equações diferenciais, parciais, não lineares, acopladas em coordenadas curvilíneas, a saber:

$$f \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + f \frac{\bar{v}}{R} = 0 \quad (28)$$

$$\begin{aligned} f \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} &= U_0 f \frac{dU_0}{dx} + f \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y f \frac{\bar{u}^2}{R} dy + \\ &+ v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + f \frac{\bar{u}}{R} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (2K\bar{Q}) \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} f \bar{u} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial y} &= 2K\bar{Q} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - f \frac{\bar{u}}{R} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha \frac{\partial \bar{Q}}{\partial y} \right) + \\ &+ f \frac{\alpha}{R} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial y} - C_1 \frac{\alpha \bar{Q}}{\ell_d^2} \end{aligned} \quad (30)$$

onde os valores a determinar são: \bar{u} , \bar{v} , \bar{Q} já que foram admitidas como conhecidas as funções $K(y)$, $\alpha(x,y)$, ℓ_d e a constante, C_1 .

Como condições de contorno:

$$\bar{u} = v = \bar{Q} = 0 \quad \text{para } y \longrightarrow 0$$

$$\bar{u} = U_0(x) \quad \text{para } y \longrightarrow \infty$$

$$\bar{Q} = Q_0 = \text{cte} \quad \text{para } y \longrightarrow \infty$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{para } y \longrightarrow \infty$$

TRATAMENTO NUMÉRICO

As equações obtidas no capítulo anterior foram trabalhadas para a sua solução numérica; foram adimensionalizadas e sofreram uma mudança de variáveis com a finalidade de contornar o rápido crescimento da camada limite na direção x ⁵,¹⁸.

Seguiu-se a linearização e o desacoplamento da equação da energia, sendo possível pela discretização em torno de um ponto genérico $P_{i+1/2,j}$.

Para a solução do sistema de equações parabólicas utilizou-se um método numérico implícito de diferenças finitas aproveitando-se a característica tridiagonal das Equações (Ames,²⁰). Este método não oferece restrição quanto ao tamanho da malha de diferenças finitas⁵, porém a única dificuldade é quanto maior o incremento na direção x menor a precisão dos resultados.

Finalmente é fornecido o fluxograma para a solução do modelo numérico associado por meio de computação (Fortran IV).

3.1 - ADIMENSIONALIZAÇÃO

As equações (28), (29) e (30) foram adimensionalizadas se gundo novas variáveis:

$$u = \frac{\bar{u}}{U_0(x)} \quad ; \quad v = \frac{\bar{v}}{U_0(x)} \quad e \quad Q = \frac{\bar{Q}}{U_0^2(x)}$$

E para as variáveis independentes fez-se a transformação de x para ξ e y para η , assim definidas:

$$\xi(x) = \int_0^x \frac{U_0(x)}{v} dx \quad (31)$$

$$\eta(x, y) = y \frac{U_0(x)}{v(2\xi)^n} \quad (32)$$

onde n é uma função de ξ e δ . Ou tirando o valor de n na expressão acima:

$$n = \frac{\ln \left[\frac{U_0(x)}{U_0(0)} \frac{\delta}{\delta_0} (2\xi_0)^{n_0} \right]}{\ln(2\xi)} \quad (33)$$

Como δ varia rapidamente é de se supor que o mesmo se dê com n . A orientação de Schlichting¹⁹ é utilizar-se uma faixa de va riação para n entre 0,5 e 0,8. Admitiu-se para o presente caso n constante e igual a 0,5.

Com a utilização destas relações, as equações (28), (29) e (30) serão: (Vide anexo 4)

$$(2\xi)^{2n} f \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} + (2\xi)^{2n} u f \frac{\eta}{\xi} + f \frac{v}{R_n} = 0 \quad (34)$$

$$\begin{aligned}
(2\xi)^{2n} f u \frac{\partial u}{\partial \xi} + v \frac{\partial u}{\partial \eta} &= (2\xi)^{2n} \frac{f}{U_0} \frac{dU_0}{d\xi} \left[1 - u^2 + 2 \int_0^\eta f \frac{u^2}{R_\eta} d\eta + \right. \\
&+ \left. \eta f \frac{u^2}{R_\eta} \right] + (2\xi)^{2n} f \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^\eta f \frac{u^2}{R_\eta} d\eta - f \frac{u^2}{R_\eta} \eta \frac{n}{\xi} \right] + \\
&+ \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\partial u}{\partial \eta} + f \frac{u}{R_\eta} \right] + (2\xi)^n \frac{\partial}{\partial \eta} 2(KQ) \quad (35)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2\xi)^{2n} u f \frac{\partial Q}{\partial \xi} + v \frac{\partial Q}{\partial \eta} &= - 2 u Q f (2\xi)^{2n} \frac{1}{U_0} \frac{dU_0}{d\xi} + \\
&+ (2\xi)^n 2KQ \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{uf}{R_\eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\alpha}{v} \frac{\partial Q}{\partial \eta} \right) + \frac{f \alpha}{v R_\eta} \frac{\partial Q}{\partial \eta} + \\
&- (2\xi)^{2n} \epsilon_1 \frac{v \alpha Q}{U_0^2 \ell_d^2} \quad (36)
\end{aligned}$$

onde a nova variável V introduzida é função de \bar{v} :

$$v = \frac{V}{(2\xi)^n} - v \frac{(2\xi)^n}{U_0} f u \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (37)$$

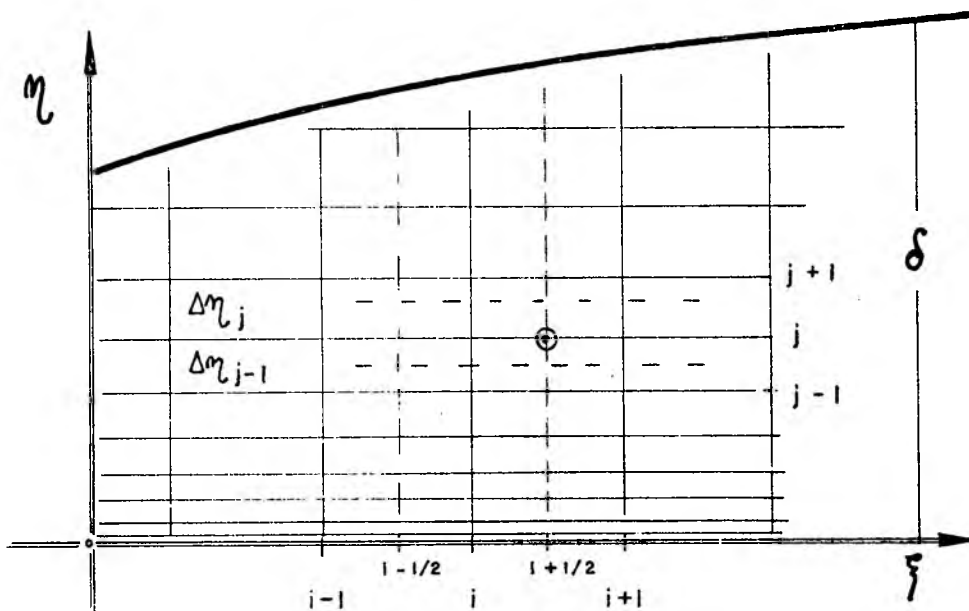
e R_η :

$$R_\eta = \frac{R(x) U_0(x)}{(2\xi)^n v} \quad (38)$$

3.2 - DISCRETIZAÇÃO

Dado o comportamento da camada limite, foi conveniente escolher-se uma malha variável com pequenos intervalos próximo a parede e cada vez maiores para pontos mais afastados dela (na direção η) (Fig. 2). Assim a relação entre dois intervalos adjacentes é

tal que $\Delta\eta_i = Bk \cdot \Delta\eta_{i-1}$, onde Bk deve assumir valor maior que a unidade ($Bk \approx 1,03$ a $1,09$)¹¹. Na outra direção (ξ) a malha pode ou não ter intervalos constantes dependendo do caso analisado. Para superfícies com pequeno raio de curvatura é conveniente que $\Delta\xi$ seja variável.



(Fig. 2)

A discretização foi feita em torno de um ponto genérico $P_{i+1/2, j}$. Uma função neste ponto é entendida como:

$$F_{i+1/2, j} = \frac{1}{2} (F_{i, j} + F_{i+1, j}) \quad (39)$$

$$F_{i+1/2, j+1/2} = \frac{1}{4} (F_{i, j} + F_{i+1, j} + F_{i, j+1} + F_{i+1, j+1}) \quad (40)$$

As diversas derivadas em relação a ξ e η são assim representadas:

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} \Big|_{i+1/2, j} = \frac{F_{i+1, j} - F_{i, j}}{\Delta \xi} \quad (41)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} \Big|_{i+1/2, j} = \frac{F_{i+1, j+1} - F_{i+1, j-1} + F_{i, j+1} - F_{i, j-1}}{2(\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(A \frac{\partial F}{\partial \eta} \right) \Big|_{i+1/2, j} &= A_{i+1/2, j+1/2} \frac{(F_{i+1, j+1} - F_{i+1, j})}{\Delta \eta_j (\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} + \\ &- A_{i+1/2, j-1/2} \frac{(F_{i+1, j} - F_{i+1, j-1})}{\Delta \eta_{j-1} (\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} + \\ &+ A_{i+1/2, j+1/2} \frac{(F_{i, j+1} - F_{i, j})}{\Delta \eta_j (\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} + \\ &- A_{i+1/2, j-1/2} \frac{(F_{i, j} - F_{i, j-1})}{\Delta \eta_{j-1} (\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} \end{aligned} \quad (43)$$

A linearização das equações do movimento e da energia é conseguida após a substituição das relações (39), (40), (41), (42) e (43) nas equações (34), (35) e (36). Separando os termos de tal sorte a se obter:

$$A_j F_{i+1, j+1} + B_j F_{i+1, j} + C_j F_{i+1, j-1} = D_j \quad (44)$$

Os termos contendo o índice (i+1) são os novos valores, enquanto os que contiverem (i) são conhecidos da estação anterior.

Os coeficientes A_j , B_j , C_j e D_j assumem formas diferentes para cada uma das duas equações. (Anexo 5)

A expressão (44) forma um sistema de equações lineares, cuja matriz representativa é parcialmente povoada (matriz tridimensional). A sua solução, dada por Ames²⁰, pode assim ser sintetizada:

$$F_{i+1,j} = G_j F_{i+1,j+1} + g_j \quad (45)$$

onde

$$G_j = - \frac{A_j}{B_j + C_j G_{j-1}} \quad (46)$$

$$g_j = \frac{D_j - C_j g_{j-1}}{B_j + C_j G_{j-1}} \quad (47)$$

O valor desconhecido é $F_{i+1,j}$, pois como iniciou-se os cálculos pelo ponto mais alto da camada limite o valor de $F_{i+1,j+1}$ já foi determinado.

A equação (45) está sujeita as seguintes condições de contorno

$$u_1 = 0 \longrightarrow G_1 = 0 \quad ; \quad g_1 = 0$$

$$Q_1 = 0 \longrightarrow GQ_1 = 0 \quad ; \quad g_{Q1} = 0$$

A equação do movimento contém no seu último termo a variável Q considerada conhecida da estação anterior. Este procedimento faz com que o sistema seja desacoplado.

Como pode ser percebido pela análise dos coeficientes da expressão (44), o método tridiagonal exige o conhecimento da função numa estação anterior para a determinação da função na atual. Assim para a estação inicial ($i=1$) forneceu-se perfis de velocidades e de energia cinética turbulenta (anexo 6).

Como a camada limite cresce ao longo do escoamento, a quantidade de pontos na direção η deve também variar para acompanhar este crescimento. A escolha da condição de contorno superior $\bar{u} = U_0(x)$ quando $y \longrightarrow \delta$ ou $u_\delta = 0,99$ implica na validade de:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \eta} \right|_{\eta_{\text{máx}}} \leq \epsilon' \quad (48)$$

onde ϵ' será um pequeno valor pré-fixado (critério de erro). Em diferenças finitas e aplicando a expressão (48), temos para este critério:

$$u_\delta (1 - G_{N-1}) - g_{N-1} \leq \Delta \eta_{N-1} \epsilon' \quad (49)$$

que quando satisfeito fornece o número N de pontos na vertical.

A precisão exigida para os resultados foi dada por meio de um critério de convergência aplicado à equação do movimento. Após a determinação do perfil atual de velocidade $u_{i+1,j}^m$ (onde m é o número da iteração), determinou-se a velocidade $v_{i+1/2,j}$ com o auxílio da equação da continuidade. Testou-se a seguir a convergência segundo o critério apresentado por Pereira Filho⁵ e assim definido:

$$\left| \frac{u_{i+1,2}^m - u_{i+1,2}^{m-1}}{u_{i+1,2}^{m-1}} \right| \leq \epsilon'' \quad (50)$$

onde ϵ'' deve ser prescrito (≈ 0.005).

Como a equação da energia cinética está desacoplada do movimento e na determinação de $Q_{i+1,j}$ são empregados valores de $u_{i+1,j}$, tidos como corretos, não se previu iterações para ela.

Como deixou-se transparecer a determinação de $u_{i+1,j}$ (atual) é possível com o auxílio do perfil $V_{i+1/2,j}$. Então para o início das operações precisou-se também de um perfil inicial de V . Este dado inicial poderá ser nulo ($V = 0$) ou com a expressão (37) fazendo $v = 0$:

$$V_{i+1/2,j} = v u f (2\xi)^{2n} \left. \frac{\partial \eta}{\partial x} \right|_{i+1/2,j} \quad (51)$$

3.3 - FLUXOGRAMA

O procedimento utilizado para tornar possível a solução do problema por meio de computação será assim sintetizado:

* Bloco 1

Junto com as diversas constantes são fornecidos os perfis de velocidades e de energia cinética. A subrotina Table 2 é especialmente utilizada para este fim.

* Bloco 2

A distribuição de pressão (utilizada na equação do movimento) é fornecida analiticamente (pressão teórica) ou na forma discreta, com o auxílio de uma função de interpolação lagrangiana.

* Bloco 3

Com os dados anteriores pode-se solucionar o algoritmo tridiagonal para a equação do movimento. Determinou-se $u_{i+1,j}$.

* Bloco 4

Com a velocidade u , determinada no bloco anterior, foi possível determinar a velocidade $V_{i+1/2,j}$ na equação da continuidade.

* Bloco 5

O teste de convergência é feito mantendo-se o critério pré-estabelecido. ($\epsilon'' = 0,005$)

* Bloco 6

Antes de solucionar a equação da energia pelo algoritmo tridiagonal, determinou-se as funções $\alpha(x,y)$ e l_d .

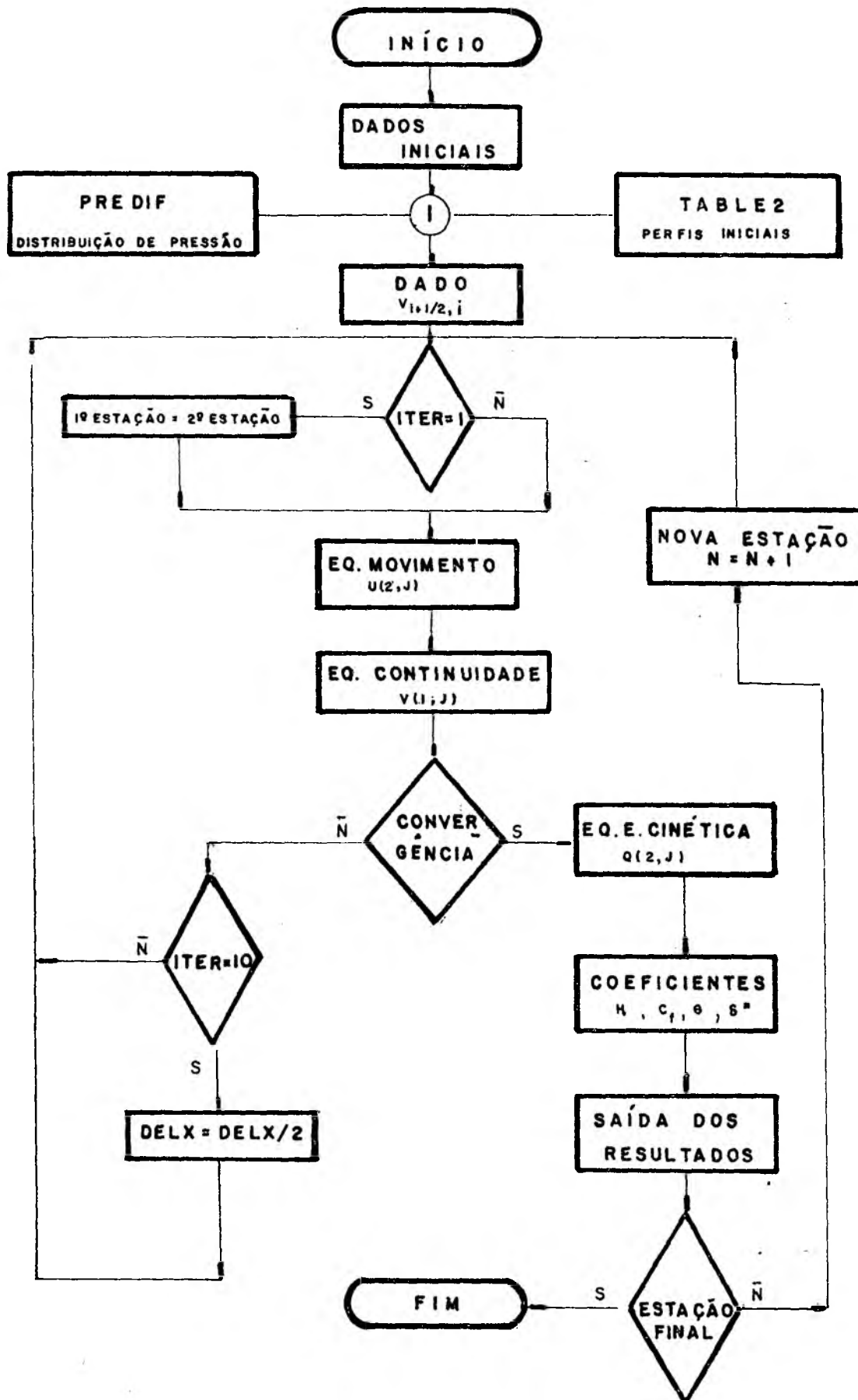
* Bloco 7

Calculou-se neste bloco todos os parâmetros do escoamento turbulento da estação atual tais como: Coeficiente de Fricção, espessuras da camada limite (de deslocamento, de momento e de energia), números de Reynolds baseados nas diferentes espessuras e Fator de forma (δ^*/θ).

* Bloco 8

Saída dos resultados. Os resultados poderão sair na forma de diagramas ou tabelados.

Um diagrama de bloco ficaria:



ANÁLISE DOS RESULTADOS

A melhor análise de resultados que se pode fazer para um método numérico é a comprovação com a solução exata. Quando não há solução analítica exata, recorre-se a trabalhos experimentais. O escoamento turbulento é o próprio caso em questão. Não há solução exata para ele. Há muito se estuda um meio de obtê-la, porém as não linearidades e o fechamento das equações dificultam sobremaneira. É bem possível que esta descoberta só venha a ocorrer daqui a muito tempo, pois com o advento de modernas máquinas de computação e com o desenvolvimento de métodos numéricos satisfatórios em nível de engenharia a inexistência de uma solução exata ficou em segundo plano.

No presente trabalho escolheu-se os dados experimentais de So e Mellor¹² para serem reproduzidos. A placa plana, com os dados de Wieghardt⁹, também foi analisada como verificação inicial pois, como se sabe, ela é o caso particular de uma superfície curva com raio infinito. Estudou-se ainda o escoamento radial sobre cilindros circulares ($Re = 1,03 \times 10^6$ e $Re = 3,6 \times 10^6$) no entanto seus re-

sultados não são apresentados pois carecem de algum refinamento.

4.1 - RESULTADOS OBTIDOS

A utilização de uma sub-rotina⁵ (PLOT2) permitiu a melhor e mais rápida comprovação dos resultados. Plotou-se com ela diagramas de velocidades, energia cinética, tensão na parede e diversos coeficientes do escoamento turbulento. (ANEXO 7)

4.1.1 - DIAGRAMAS DE VELOCIDADES

Foram registrados para a placa plana:

$\frac{\bar{u}}{U_0}$ VERSUS y/δ (Gráfico - G1)

$\frac{\bar{v}}{\bar{v}_{\text{máx}}}$ VERSUS y/δ (G1)

u^+ VERSUS $\text{Log}_{10}(y^+)$ (G2)

v^+ VERSUS $\text{Log}_{10}(y^+)$ (G2)

$\frac{U_0 - \bar{u}}{u^*}$ VERSUS y/δ (G3)

E para o canal (TRABALHO DE So e Mellor)

$\frac{\bar{u}}{U_0}$ VERSUS y (pol) (G12)

$$u^+ \quad \text{VERSUS} \quad \text{Log}_{10}(y^+) \quad (G13)$$

$$\frac{U_0 - \bar{u}}{u^*} \quad \text{VERSUS} \quad \text{Log}_{10}(y/\delta^*) \quad (G14)$$

4.1.2 - DIAGRAMAS DE ENERGIA CINÉTICA

PLACA PLANA:

$$\frac{2\bar{Q}}{u^{*2}} \quad \text{VERSUS} \quad y/\delta \quad (G4)$$

e o balanço de Energia Cinética turbulenta segundo a forma:

$$\text{CONVECÇÃO} = \text{PRODUÇÃO} + \text{DIFUSÃO} - \text{DISSIPACÃO}$$

para perto ($0 \leq y/\delta \leq 0,1$) e longe ($0,1 \leq y/\delta \leq 1$) da parede. Analisando-se o comportamento destes termos, confirmamos a expectativa apresentada por Rotta²²:

* Próximo a parede os termos de produção e dissipação tem praticamente o mesmo valor absoluto (porém sinais contrários)

* Muito próximo a parede a difusão tem mesma ordem de grandeza que os demais termos.

* Fora da região da parede os termos (todos) tendem a zero. (Gráficos: G5, G6 e G15)

Foi plotado também a distribuição de tensão ao longo da espessura da camada limite próximo a parede:

$$\tau_l \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \text{ VERSUS } y^+ \quad (G7)$$

$$\tau_t \left(2\rho K(y)\bar{Q} \right) \text{ VERSUS } y^+ \quad (G7)$$

$$\tau_{tt} \left(\tau_l + \tau_t \right) \text{ VERSUS } y^+ \quad (G7)$$

para $y^+ \leq 60$

CANAL:

$$\frac{2\bar{Q}}{u^{*2}} \text{ VERSUS } y/\delta \quad (G16)$$

$$\frac{2\bar{Q}}{U_0^2} \text{ VERSUS } y/\delta \quad (G17)$$

e o balanço dos diversos termos da Equação da ENERGIA CINÉTICA.

4.1.3 - COEFICIENTES FINAIS

— Coeficiente de Atrito (C_f)

Além do valor do coeficiente calculado segundo:

$$CFCAL = 2 \left(\frac{u^*}{U_0} \right)^2 \quad (G8) \quad \text{e} \quad (G18) \quad (52)$$

calculou-se diferentes valores para C_f dados por fórmulas empíricas:

$$CFX1 = 0,0592 \text{ REX}^{-0,2} \quad (53)$$

$$CFDELTA = 0,045 (\text{REDEL})^{-0,25} \quad (54)$$

$$CFTHETA = 0,0576 \left(\text{Log}_{10}(4,075 R_\theta) \right)^{-2} \quad (55)$$

$$CFTET2 = 0,0256 R_{\theta}^{-0,25} \quad (56)$$

$$CFX2 = \left[2 \text{Log}_{10}(\text{REX}) - 0,65 \right]^{-2,3} \quad (57)$$

$$CFH = 0,246 \left[10^{-0,6784} \right] R_{\theta}^{-0,268} \quad (58)$$

Os diagramas registrados no anexo 7 para a placa plana são os seguintes:

CFCAL versus x (em metros)

CFTET2 versus x (em metros)

CFH versus x (em metros)

Espessuras da Camada Limite

São plotadas segundo as seguintes fórmulas:

$$\delta^*(\text{PL/PL}) = \int_0^{\infty} (1 - u) dy \quad (G9)$$

$$\delta^*(\text{CANAL}) = \int_0^{\infty} f(1 - u) dy \quad (G19)$$

$$\theta (\text{PL/PL}) = \int_0^{\infty} u(1 - u) dy \quad (G9)$$

$$\theta (\text{CANAL}) = \int_0^{\infty} fu(1 - u) dy \quad (G19)$$

$$\delta_e (\text{PL/PL}) = \int_0^{\infty} u(1 - u^2) dy \quad (G9)$$

$$\delta_e (\text{CANAL}) = \int_0^{\infty} fu(1 - u^2) dy \quad (G19)$$

e também a espessura δ dada como o valor de y para quando

$$\frac{u}{U_0} = 0,98999 .$$

- NÚMERO DE REYNOLDS

Calculados segundo:

$$R_{\delta} = \frac{U_0(x) \delta}{\nu} \quad (G10)$$

$$R_{\delta^*} = \frac{U_0(x) \delta^*}{\nu} \quad (G10)$$

$$R_{\theta} = \frac{U_0(x) \theta}{\nu} \quad (G10)$$

- FATOR DE FORMA

Definido como:

$$H = \frac{\delta^*}{\theta} \quad (G11) \text{ e } (G20)$$

4.2 - ANÁLISE FINAL

4.2.1 - DADOS INICIAIS

Procurou-se utilizar os perfis iniciais $u(1,J)$ e $Q(1,J)$ os mais próximos dos reais. A vantagem obtida foi a rápida estabilização dos resultados. A não utilização de perfis tão apurados (como o caso do perfil de velocidade senoidal $\rightarrow u(1,j) = \text{SEN}\left(\frac{\pi y}{2\delta}\right)$) levou o programa a consumir um tempo excessivo para o mesmo número de estações e os resultados nem sempre convergiam, mesmo para valores imprecisos. É possível que isto se deva as hipóteses de fechamento que levam na sua formulação as derivadas das variáveis dependentes (u e Q).

Modelou-se um perfil genérico de velocidade (inicial) baseado na característica universal do escoamento turbulento. Próximo a parede (sub-camada viscosa) a variação de u^+ é linear com relação a y^+ e longe $u = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}$.

Foi testado, com mesmo êxito, o perfil inicial adotado por Cebeci²¹ na placa plana para um comprimento inicial de $X_0 = 0,387m$ e $U_0 = 33m/s$.

Já as distribuições de energia cinética foram dadas discretamente tomando-se os próprios valores iniciais fornecidos por So e Mellor¹² e Klebanoff² para o canal e placa plana respectivamente. A tabela 6.2 registra estes valores.

A espessura da camada limite $\delta(1)$ e a velocidade de fricção $u^*(1)$ tem capital importância para o perfeito desenvolvimento do programa. Os seus valores precisam ser muito próximo dos valores corretos pois são fatores determinantes para a geração do perfil inicial de velocidade e do número de pontos na vertical. Um perfil inicial muito alto ou muito baixo afetará a convergência dos resultados nas estações subsequentes.

A falta de valores corretos para $\delta(1)$ e $u^*(1)$ deve ter sido o maior motivo pelo qual não se conseguiu ainda resultados satisfatórios para outros casos analisados. (cilindro circular).

A determinação de u^* (ou de C_f) é função do escoamento na parede. Quanto mais próximo dela estiver os primeiros pontos, mais real deverá ser o resultado. Entretanto quanto menor forem os intervalos iniciais e conseqüentemente mais próximo da parede estará

o primeiro ponto, maior será a quantidade de pontos na direção normal ao escoamento. (Lembrar que $\Delta\eta_i = B_k \cdot \Delta\eta_{i-1}$ $B_k > 1$). Como na região próximo a parede a velocidade varia linearmente ($u^+ = y^+$) são suficientes ali alguns pontos apenas para se ter uma informação perfeita do gradiente de u . Assim existe um número ideal de pontos na vertical que, além da precisão, fornece uma malha econômica em tempo de máquina. A melhor combinação encontrada para cada caso foi:

PLACA PLANA

$$\Delta\eta(1) = 0,025$$

$$B_k = 1,03$$

CANAL

$$\Delta\eta(1) = 0,03$$

$$B_k = 1,03$$

que fornecem 99 pontos iniciais para o primeiro caso e 101 para o segundo.

O número de pontos na direção ξ influi na precisão dos resultados e não na sua convergência, como já era esperado⁵. Por outro lado o aumento do valor de $\Delta\xi$ diminui o tempo global de computação. Estas duas características são opostas permitindo a determinação de um intervalo ótimo dentro da precisão estabelecida.

A tabela 1 registra o consumo do tempo de processamento

de máquina para cada caso em relação aos intervalos $\Delta\xi$ adotados.

CASO	$\Delta\eta(1)$	Bk	TEMPO/ESTAÇÃO	TEMPO TOTAL	$\Delta\xi$	X(TOTAL)
PL/PLANA	0,025	1,03	2,42 seg	3532,2 seg	5000	3,62 m
CANAL	0,03	1,03	4,1562 seg	623,437 seg	5000	1,8034 m

TABELA 1

4.2.2 - CONCLUSÕES

Os resultados encontrados tanto para a placa plana quanto para o canal, quando comparados com os dados de Wieghardt ou de So e Mellor respectivamente são tidos como bons.

Os diagramas de velocidades, como os demais coeficientes deles dependentes, foram obtidos com uma boa precisão. A distribuição de energia cinética próximo a parede, no entanto, contém valores fora dos esperados. No caso do canal este desvio parece ser mais acentuado. A perfeita comprovação não pode ser feita porque os dados de So e Mellor são para $y/\delta > 0,1$.

Acreditamos que na solução genérica de qualquer superfície curva o modelo matemático deverá sofrer algum refinamento para a melhor precisão dos resultados. Este refinamento poderá ser:

1 - No parametro de estrutura que, conforme Shivaprasad e Ramaprian¹⁴, varia não só com y mas também com x . Ter-se-á $K(x,y)$ ao invés de $K(y)$ apenas.

2 - Numa nova função $\alpha(x, y)$.

3 - No valor da constante dissipativa¹⁸ C_1 que carece de maiores estudos a fim de que seja encontrado o melhor valor para su perfícies curvas.

4 - No valor de n , que no caso foi tornado sempre constante e igual a 0,5. É possível se encontrar o melhor valor para ca da situação ou se necessário obter-se uma função $n(x)$.

5 - No critério de erro (CRIT) que dá o aumento do número de pontos na vertical devido ao crescimento da camada limite.

6 - Na discretização das equações.

Neste item muitos pontos podem ser abordados com o interesse num resultado mais preciso. Assim as não linearidades existentes nos termos de pressão e curvatura foram sempre consideradas conhecidas (da estação anteriormente determinada). É possível que melhores resultados se obtenha, quando este artifício for evitado.

Os itens acima, bem como os que se seguem englobam as principais metas a serem atingidas com futuros trabalhos:

1 - A complementação desta dissertação com a análise de novos e variados casos:

1.a - Escoamento radial sobre cilindros circulares para di versos números de Reynolds.

1.b - Escoamento sobre perfis especiais tais como aerofó-

lios, pás de hélice etc...

Assim será possível completar a análise dos efeitos da curvatura e de gradientes de pressão no desenvolvimento da camada limite sobre superfícies curvas.

2 - Introduzir a transferência de calor no problema, com a inclusão de mais uma equação.

3 - Introduzir o transporte de massa no problema ora proposto.

4 - Analisar o escoamento com controle da camada limite (sucção ou insuflamento na parede).

5 - Determinar o escoamento compressível sob as mesmas condições.

B I B L I O G R A F I A

B I B L I O G R A F I A

REF.

- | | | |
|-----|----|---|
| 1 - | 6 | AKATNOV, N.I. e TUL'BERT, V.F. <i>Use of turbulent energy balance equation in the theory of turbulent flows along walls.</i> Izvestiya Akademii Nauk. SSSR. Mekhanika Zhidrosti i Gaza. N° 3, pp.25-33, Leningrado, 1973. |
| 2 - | 20 | AMES, W.F. <i>Numerical Methods for Partial Differential Equations.</i> Barnes e Noble, Inc. 1969. |
| 3 - | 18 | BECKWITH, K. e TILLMANN, W. <i>On the Turbulent Kinetic Energy Field Method.</i> AFOSR-IFP-STANFORD CONFERENCE. 1968. |
| 4 - | 7 | BURBANK, R.A. e FILHO, John A. <i>Calculation of two dimensional, turbulent boundary layer using the turbulent-energy equation including the viscous sublayer.</i>
(informação pessoal) |
| 5 - | 10 | CEBECI, T. <i>Laminar and turbulent incompressible boundary layers on slender bodies of revolution in axial flow.</i>
An ASME Publication, Paper n° 69, WA/Fe 2 |

- 6 - 11 CEBECI, T. e SMITH, A.M.O. *A Finite Difference Method for Calculating Compressible Laminar and Turbulent Boundary Layers*. An ASME Publication. *Journal of Basic Engineering*. - 1968.
- 7 - 21 CEBECI, T. e SMITH, A.M.O. *A Finite Difference Solution of the Incompressible Turbulent Boundary Layer Equations by an Eddy Viscosity Concept*. McDounell Bouglas, Report DAC 67130, 1968.
- 8 - 15 FLÜGGE, W. *Tensor Analysis and Continuum Mechanics*. Berlin, Cap. 6, p.95 e 96, Springer Verlag.
- 9 - 2 HINZE, O. *Turbulence*. Segunda ed. McGraw-Hill Inc, 1975.
- 10 - 8 KLEBANOFF, P.S. *Characteristics of turbulence in boundary layer with zero pressure gradient*. National Advisory Committee for Aeronautics, Technical note 3178.
- 11 - 2 Mc DONALD, H. e CAMARATA, F.J. *An extended mixing length approach for computing the turbulent boundary layer development*. AFOSR-IFP-Stanford Conference. Vol. 1. 1968
- 12 - 4 MELLOR, G.L. e HERRING, H. James. *Two methods of calculating turbulent boundary layer behavior based on numerical solutions of the equations of motion*. AFOSR-IFP - Stanford Conference. 1968
- 13 - 17 MILNE, L. e THOMPSON, . *Hydrodynamics*. p.717, 5a. ed.
- 14 - 1 PRANDTL, Ludwig. *Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung*. Congresso de Heidelberg, 1904.
- 15 - 22 ROTTA, J.C. *Turbulent Boundary Layers in Incompressible Flow*. Progress in Aeronautical Sciences. Vol. 2. Pergamon, Press, 1962.

- 16 - 16 SCHLICHTING, Hermann. *Boundary Layer Theory*. p.112, 4a. ed. McGraw-Hill
- 17 - 19 ———. *Boundary Layer Theory*. 6a. ed. McGraw Hill.
- 18 - 14 SHIVAPRASAD, B.G. e RAMAPRIAN, B.R. *Mean Flow Measurements in Turbulent Boundary Layers along Mildly curved Surfaces*. AIAA Journal. Vol.15, nº 2.
- 19 - 13 ———. *Turbulence Measurements in Boundary Layers along Mildly Curved Surfaces*. *Journal of Fluids Engineering*. Vol.100, 1978.
- 20 - 12 SO, Ronald M.C. e MELLOR, George L. *Experiment on Convex Curvature Effects in Turbulent Boundary Layers*. *Journal fluid Mechanics*. Vol.60, part. 1, 1973.
- 21 - 5 PEREIRA Filho - Hyppolito do Valle. *A Four Equation Model for Numerical Solution of the Turbulent Boundary Layer*. Dissertação de Doutorado pela Universidade de Houston, Maio/1964.
- 22 - 9 WIEGHARDT, K. e TILLMANN, W. U e M. 6617. *On the turbulent friction layer for rising pressure*. Naca, Tm. 1314, 1951.

A N E X O S.

ANEXO 1

PROCESSO DE MÉDIA

Tratando-se as variáveis instantâneas como sendo a soma de uma parcela média mais uma flutuação:

$$u = \bar{u} + u'$$

$$v = \bar{v} + v'$$

$$P = \bar{P} + P'$$

tem-se para a equação da conservação da massa:

$$f \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} + u') + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v} + v') + \frac{f}{R} (\bar{v} + v') = 0 \quad (1.1)$$

ou

$$f \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}) + f \frac{\partial (u')}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v}) + \frac{\partial}{\partial y} (v') + f \frac{\bar{v}}{R} + f \frac{v'}{R} = 0 \quad (1.2)$$

e com a média a equação (1.2) fica:

$$\overline{f \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}} + \overline{f \frac{\bar{v}}{R}} = 0 \quad (1.3)$$

pois

$$\overline{f \frac{\partial u'}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial v'}{\partial y}} + \overline{f \frac{v'}{R}} = 0 \quad (1.4)$$

A equação (1.3) pode ainda ser reescrita:

$$f \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + f \frac{\bar{v}}{R} = 0 \quad (1.5)$$

que é a equação da continuidade referida ao escoamento médio. Substituindo-se (1.5) em (1.2):

$$f \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + f \frac{v'}{R} = 0 \quad (1.6)$$

Para a equação do movimento médio, tirando-se de (4) e (5) do capítulo 2.

Na direção X:

$$\begin{aligned} f(\bar{u} + u') \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} + u') + (\bar{v} + v') \frac{\partial (\bar{u} + u')}{\partial y} + \frac{f}{R} (\bar{v} + v') (\bar{u} + u') = \\ = - \frac{f}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{P} + P') + v \left[f^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\bar{u} + u') + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\bar{u} + u') + \right. \\ \left. + \frac{f}{R} \frac{\partial}{\partial y} (\bar{u} + u') - \frac{f^2}{R} (\bar{u} + u') + \frac{2f^2}{R} \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v} + v') + \right. \\ \left. - f \frac{f^3}{R^2} \frac{dR}{dx} (\bar{v} + v') + \frac{f^3}{R^2} y \frac{dR}{dx} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} + u') \right] \quad (1.7) \end{aligned}$$

E na direção Y:

$$\begin{aligned} f(\bar{u} + u') \frac{\partial}{\partial x} (\bar{v} + v') + (\bar{v} + v') \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v} + v') - f \frac{(\bar{u} + u')^2}{R} = \\ = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (\bar{P} + P') + v \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} (\bar{v} + v') - \frac{2f^2}{R} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} + u') + \right. \\ \left. + \frac{f}{R} \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v} + v') + f^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\bar{v} + v') - \frac{f^2}{R^2} (\bar{v} + v') + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{f^3}{R^2} \frac{dR}{dx} (\bar{u} + u') + \frac{f^3}{R^2} y \frac{dR}{dx} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{v} + v')] \quad (1.8)$$

e multiplicando-se (1.6) uma vez por u' e outra vez por v' , tem-se após a média:

$$f \overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}} + \overline{u' \frac{\partial v'}{\partial y}} + f \overline{\frac{u' v'}{R}} = 0 \quad (1.9)$$

$$f \overline{v' \frac{\partial u'}{\partial x}} + \overline{v' \frac{\partial v'}{\partial y}} + f \overline{\frac{v'^2}{R}} = 0 \quad (1.10)$$

Jogando as expressões (1.9) em (1.7) e (1.10) em (1.8) e após a média a equação resultante será:

$$\begin{aligned} f \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{f}{R} \bar{u} \bar{v} + f \overline{\frac{\partial u'^2}{\partial x}} + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u' v'}) + \frac{2f}{R} \overline{u' v'} = - \\ - \frac{f}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + v \left[f^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{f}{R} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \frac{f^2}{R} \bar{u} + \frac{2f^2}{R} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{f^3}{R^2} \frac{dR}{dx} \bar{v} + \right. \\ \left. + \frac{f^3}{R^2} y \frac{dR}{dx} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right] \quad (1.11) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \frac{f}{R} \bar{u}^2 + \frac{\partial v'^2}{\partial y} + f \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u' u'}) + \frac{f}{R} (\overline{v'^2} - \overline{u'^2}) = \\ = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} + v \left[\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} - \frac{2f^2}{R} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{f}{R} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + f^2 \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} - f^2 \frac{\bar{v}}{R^2} + \right. \\ \left. + \frac{f^3}{R^2} \frac{dR}{dx} \bar{v} + \frac{f^3}{R^2} y \frac{dR}{dx} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right] \quad (1.12) \end{aligned}$$

como

$$f = \frac{R(x)}{R(x)+y}$$

então

$$\frac{\partial f}{\partial y} = - \frac{f^2}{R(x)}$$

Pode-se juntar os termos das equações acima:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{f}{R} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \frac{\bar{u} f^2}{R^2} \quad \text{da equação (1.11)}$$

e

$$\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + \frac{f}{R} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \frac{\bar{v} f^2}{R^2} \quad \text{da equação (1.12)}$$

e igualar a:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{f \bar{u}}{R} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{f \bar{v}}{R} \right)$$

respectivamente:

Então:

$$\begin{aligned} f \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + f \frac{\bar{u} \bar{v}}{R} = & - \frac{f}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + v \left[f^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + f \frac{\bar{u}}{R} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{2f^2}{R} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{f^3}{R^2} \frac{dR}{dx} \bar{v} + \frac{f^3}{R^2} y \frac{dR}{dx} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right] - f \frac{\partial \bar{u}'^2}{\partial x} - \\ & - \frac{\partial \bar{u}' \bar{v}'}{\partial y} - \frac{2f}{R} \bar{u}' \bar{v}' \end{aligned} \quad (1.13)$$

e

$$f \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \frac{f \bar{u}^2}{R} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} + v \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + f \frac{\bar{v}}{R} \right) - \frac{2f^2}{R} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{f^2}{R^2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{f^3}{R^2} \frac{dR}{dx} \bar{u} + \frac{f^3}{R^2} y \frac{dR}{dx} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \Big] - \frac{\partial v'^2}{\partial y} - f \frac{\partial u'v'}{\partial x} - \\
& - \frac{f}{R} (\overline{v'^2} - \overline{u'^2}) \qquad (1.15)
\end{aligned}$$

ANEXO 2

EQUAÇÃO DA ENERGIA CINÉTICA TURBULENTA

Define-se energia cinética turbulenta como o semi somatório das flutuações de velocidades ao quadrado:

$$Q = 1/2 (u'_i u'_i) = 1/2 (u'^2 + v'^2 + w'^2)$$

A sua equação é obtida a partir da equação de Navier-Stokes para fluídos incompressíveis:

$$\rho \frac{D\tilde{V}}{Dt} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \tilde{V} \quad (2.1)$$

A equação (2.1) é uma equação vetorial para o escoamento instantâneo. Para o escoamento turbulento pode-se empregar as velocidades médias e suas flutuações:

$$\rho \frac{D}{Dt} (\bar{V} + \tilde{V}') = -\nabla (\bar{P} + P') + \mu \nabla^2 (\bar{V} + \tilde{V}') \quad (2.2)$$

e como para o regime permanente e escoamento médio:

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} = 0$$

$$(\bar{V} + \tilde{V}') \cdot \nabla (\bar{V} + \tilde{V}') = -\frac{1}{\rho} \nabla (\bar{P} + P') + \nu \nabla^2 (\bar{V} + \tilde{V}')$$

ou

$$\bar{V} \cdot \nabla \bar{V} + \bar{V} \cdot \nabla \tilde{V}' + \tilde{V}' \cdot \nabla \bar{V} + \tilde{V}' \cdot \nabla \tilde{V}' = -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{P} - \frac{1}{\rho} \nabla P' + \nu \nabla^2 \bar{V} + \nu \nabla^2 \tilde{V}' \quad (2.3)$$

Aplicando-se a média na equação (2.3):

$$\overline{\underline{V} \cdot \nabla \underline{V}} + \overline{\underline{V}' \cdot \nabla \underline{V}'} = - \frac{1}{\rho} \nabla \bar{P} + \nu \nabla^2 \underline{\underline{V}} \quad (2.4)$$

Subtraindo-se (2.4) de (2.3):

$$\underline{\underline{V}} \cdot \nabla \underline{V}' + \underline{V}' \cdot \nabla \underline{\underline{V}} + \underline{V}' \cdot \nabla \underline{V}' = - \frac{1}{\rho} \nabla P' + \nu \nabla^2 \underline{V}' + \overline{\underline{V}' \cdot \nabla \underline{V}'}, \quad (2.5)$$

que é válida para o escoamento turbulento apenas.

Multiplicando-se escalarmente (2.5) por \underline{V}' e tomando-se a média dos termos, tem-se obtido a equação (escalar) da energia cinética turbulenta:

$$\overline{\underline{\underline{V}} \cdot (\nabla \bar{Q})} + \overline{\underline{V}' \cdot (\underline{\underline{V}} \cdot \nabla \underline{V})} + \overline{\underline{V}' \cdot (\underline{V}' \cdot \nabla \underline{V}')} = - \frac{1}{\rho} \overline{\underline{V}' \cdot \nabla P'} + \nu \overline{\underline{V}' \cdot \nabla^2 \underline{V}'} \quad (2.6)$$

E no sistema de coordenadas curvilíneas, descrito no capítulo 2, os operadores são assim escritos:

(L. Milne - Thompson).¹⁷

$$\frac{\partial \underline{i}_x}{\partial x} = - \underline{i}_y / R \quad ; \quad \frac{\partial \underline{i}_y}{\partial x} = \underline{i}_x / R$$

$$\frac{\partial \underline{i}_x}{\partial y} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \underline{i}_y}{\partial y} = 0$$

$$\nabla = f \frac{\partial}{\partial x} \underline{i}_x + \frac{\partial}{\partial y} \underline{i}_y$$

Então o primeiro termo:

$$\overline{\underline{\underline{V}} \cdot \nabla \bar{Q}} = (\overline{u} \underline{i}_x + \overline{v} \underline{i}_y) \cdot \left(f \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} \underline{i}_x + \frac{\partial \bar{Q}}{\partial y} \underline{i}_y \right)$$

$$\underline{\bar{v}} \cdot \nabla \bar{Q} = \bar{u} f \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial y} \quad (T1)$$

para o segundo termo:

$$\begin{aligned} \nabla \bar{V} &= \left(f \frac{\partial}{\partial x} \underline{i}_x + \frac{\partial}{\partial y} \underline{i}_y \right) (\bar{u} \underline{i}_x + \bar{v} \underline{i}_y) = f \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\bar{v}}{R} \right) \underline{i}_x \underline{i}_x + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \underline{i}_y \underline{i}_x + \\ &+ f \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\bar{u}}{R} \right) \underline{i}_x \underline{i}_y + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \underline{i}_y \underline{i}_y \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \underline{v}' \cdot \nabla \underline{\bar{V}} &= (u' \underline{i}_x + v' \underline{i}_y) \cdot \nabla \underline{\bar{V}} \\ &= \left[u' f \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\bar{v}}{R} \right) + v' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] \underline{i}_x + \left[u' f \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\bar{u}}{R} \right) + v' \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right] \underline{i}_y \end{aligned}$$

logo o segundo termo será

$$\begin{aligned} \overline{\underline{v}' \cdot (\underline{v}' \cdot \nabla \underline{\bar{V}})} &= (\bar{u}' \underline{i}_x + \bar{v}' \underline{i}_y) \cdot (\underline{v}' \cdot \nabla \underline{\bar{V}}) \\ &= \bar{u}'^2 f \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\bar{v}}{R} \right) + \bar{u}' \bar{v}' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \\ &+ \bar{v}' \bar{u}' f \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\bar{u}}{R} \right) + \bar{v}'^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \end{aligned} \quad (T2)$$

o terceiro termo:

$$\nabla \cdot \left[\underline{v}' (\underline{v}' \cdot \underline{v}') \right] = (\nabla \cdot \underline{v}') (\underline{v}' \cdot \underline{v}') + \underline{v}' \cdot \nabla (\underline{v}' \cdot \underline{v}')$$

como

$$\nabla \cdot \underline{v}' = 0 \quad (\text{Vide equação (1.6) - anexo 1})$$

e

$$\nabla(\underline{V}' \cdot \underline{V}') = 2 \underline{V}' \cdot (\nabla \underline{V}')$$

logo

$$\underline{V} \cdot \nabla(\underline{V}' \cdot \underline{V}') = 2 \underline{V}' \cdot (\underline{V}' \cdot \nabla \underline{V}')$$

ou

$$\underline{V}' \cdot (\underline{V}' \cdot \nabla \underline{V}') = \underline{V}' \cdot \left[\nabla \frac{\underline{V}' \cdot \underline{V}'}{2} \right] = \nabla \cdot \left\{ \underline{V}' \left[\frac{(\underline{V}' \cdot \underline{V}')}{2} \right] \right\}$$

ou ainda

$$\nabla \cdot [\underline{V}' Q] = \underline{V}' \cdot (\underline{V}' \cdot \nabla \underline{V}')$$

e em coordenadas curvilíneas:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [\underline{V}' Q] &= \left(f \frac{\partial}{\partial x} \underline{i}_x + \frac{\partial}{\partial y} \underline{i}_y \right) \cdot (u' Q \underline{i}_x + v' Q \underline{i}_y) \\ &= f \left(\frac{\partial u' Q}{\partial x} + \frac{v' Q}{R} \right) + \frac{\partial}{\partial y} v' Q \end{aligned}$$

e com a média, o terceiro termo:

$$\nabla \cdot \left[\frac{\underline{V}' Q}{\underline{V}' Q} \right] = f \left(\frac{\partial \overline{u' Q}}{\partial x} + \frac{\overline{v' Q}}{R} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{v' Q}) \quad (T.3)$$

O quarto termo é semelhante ao terceiro:

$$\nabla \cdot [\underline{V}' P'] = \underline{V}' \cdot \nabla P' + P' \cdot \nabla \underline{V}' = \underline{V}' \cdot \nabla P'$$

e

$$\nabla \cdot [\underline{V}' P'] = \left(f \frac{\partial}{\partial x} \underline{i}_x + \frac{\partial}{\partial y} \underline{i}_y \right) \cdot (u' P' \underline{i}_x + v' P' \underline{i}_y)$$

que será

$$\nabla \cdot \left[\overline{v'P'} \right] = f \left[\frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'P'}) + \frac{\overline{v'P'}}{R} \right] + \left(\frac{\partial}{\partial y} \overline{v'P'} \right) \quad (T4)$$

Finalmente para o último termo, partindo de

$$\nabla^2 (\underline{v'} \cdot \underline{v'}) = \nabla \cdot \left[\nabla (\underline{v'} \cdot \underline{v'}) \right]$$

como

$$\nabla (\underline{v'} \cdot \underline{v'}) = 2 \underline{v'} : \nabla \underline{v'}$$

ou

$$\nabla^2 (\underline{v'} \cdot \underline{v'}) = 2 \nabla \cdot (\underline{v'} : \nabla \underline{v'}) = 2 \left[\nabla \underline{v'} : \nabla \underline{v'} + \underline{v'} : \nabla^2 \underline{v'} \right]$$

$$\nabla^2 Q = \nabla \underline{v'} : \nabla \underline{v'} + \underline{v'} : \nabla^2 \underline{v'}$$

e conseqüentemente:

$$\underline{v'} : \nabla^2 \underline{v'} = \nabla^2 Q - \nabla \underline{v'} : \nabla \underline{v'}$$

Em coordenadas curvilíneas será escrito:

$$\begin{aligned} \nabla^2 Q &= \nabla \cdot (\nabla Q) = \left(f \frac{\partial}{\partial x} \underline{i}_x + \frac{\partial}{\partial y} \underline{i}_x \right) \cdot \left(f \frac{\partial Q}{\partial x} \underline{i}_x + \frac{\partial Q}{\partial y} \underline{i}_x \right) \\ &= f \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(f \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{f} \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \right] \end{aligned}$$

(Vide Milne-Thompson)¹⁷

Como

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{R(x)}{R(x)+y} \right) = \frac{y f^2}{R^2} \frac{\partial R}{\partial x} = y \frac{f^2}{R^2} \frac{dR}{dx}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial y} (1/f) = \frac{1}{R}$$

então

$$\nabla^2 \bar{Q} = f^2 \frac{\partial^2 \bar{Q}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{Q}}{\partial y^2} + y \frac{f^3}{R^2} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} \frac{dR}{dx} + \frac{f}{R} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial y}$$

e

$$\overline{\nabla V' : \nabla V'} = f^2 \left[\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{v'}{R} \right]^2 + \left[\frac{\partial u'}{\partial y} \right]^2 + \left[\frac{\partial v'}{\partial y} \right]^2 +$$

$$+ f^2 \left[\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{u'}{R} \right]^2 = \bar{D}$$

$$\overline{V' \cdot \nabla^2 V'} = \nabla^2 \bar{Q} - \bar{D} \quad (T5)$$

Montando-se a equação, seguindo a seguinte orientação:

$$(T1) = - (T2) - (T3) - (T4) + (T5)$$

Assim:

$$\begin{aligned} \bar{u} f \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial y} = & - \overline{u'^2} f \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\bar{v}}{R} \right) - \overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{u'v'} f \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\bar{u}}{R} \right) + \\ & - \overline{v'^2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - f \left(\frac{\partial u' \bar{Q}}{\partial x} \right) - f \frac{v' \bar{Q}}{R} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\overline{v' \bar{Q}} \right) - \frac{1}{\rho} \left\{ f \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\overline{u' P'} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\overline{v' P'}}{R} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \overline{v' P'} \right\} + v \left\{ f^2 \frac{\partial^2 \bar{Q}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{Q}}{\partial y^2} + y \frac{f^3}{R^2} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} \frac{dR}{dx} + \right. \\ & \left. + \frac{f}{R} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial y} \right\} - v \bar{D} \quad (2.7) \end{aligned}$$

Obtem-se assim a equação da conservação da energia cinética turbulenta, em coordenadas curvilíneas bidimensionais para o escoamento incompressível.

ANEXO 3

ORDEM DE GRANDEZA

A análise da ordem de grandeza dos termos das equações (movimento e energia cinética) é conseguida com as considerações iniciais do capítulo 2 item 2.2 onde:

$$\frac{L_2}{L_1} \lll 1 \quad (3.1)$$

$$f \approx 0(1) \quad (3.2)$$

$$f/R \approx 0\left(\frac{1}{L_1}\right) \quad (3.3)$$

$$\frac{O(\bar{v})}{O(\bar{u})} = \frac{O(L_2)}{O(L_1)} \lll 1 \quad (3.4)$$

e ainda a escala "l" para as flutuações de velocidades, tal que:

$$O(l^2) \approx O(\overline{u'^2}) \approx O(\overline{v'^2}) \approx O(\overline{u'v'})$$

Tem-se para as equações do movimento:

Direção X:

$$f \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \longrightarrow 0(1) \frac{O(\bar{u}^2)}{O(L_1)} = \frac{O(\bar{u}^2)}{O(L_1)} \quad (T1)$$

$$\bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \longrightarrow 0(\bar{v}) \frac{O(\bar{u})}{O(L_2)} = \frac{O(\bar{u}^2)}{O(L_1)} \quad (T2)$$

$$\frac{f}{R} \bar{v} \bar{u} \longrightarrow 0\left(\frac{1}{L_1}\right) O(\bar{v}) O(\bar{u}) = \frac{O(\bar{u}^2) O(L_2)}{O(L_1^2)} \quad (T3)$$

$$\frac{f}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} \longrightarrow \frac{O(1)}{\rho} \frac{O(\Delta P)}{O(L_1)} \quad (T4)$$

$$v f^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \longrightarrow v O(1)^2 \frac{O(\bar{u})}{O(L_1^2)} = v \frac{O(\bar{u})}{O(L_1^2)} \quad (T5)$$

$$v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + f \frac{\bar{u}}{R} \right) \longrightarrow v \frac{O(\bar{u})}{O(L_1^2)} \cdot \left[\frac{O(L_1^2)}{O(L_2^2)} + \frac{O(L_1)}{O(L_2)} \right] \quad (T6)$$

$$2 v \frac{f^2}{R} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \longrightarrow v \frac{O(1)O(\bar{v})}{O(L_1)O(L_1)} = v \frac{O(\bar{u})O(L_2)}{O(L_1^2)O(L_1)} \quad (T7)$$

$$v \frac{f^3}{R^2} \frac{dR}{dx} \bar{v} \longrightarrow v \frac{O(1)O(L_1)O(\bar{v})}{O(L_1^2)O(L_1)} = v \frac{O(\bar{u})O(L_2)}{O(L_1^2)O(L_1)} \quad (T8)$$

$$v \frac{f^3}{R^2} y \frac{dR}{dx} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \longrightarrow v \frac{O(1)O(L_2)O(L_1)O(\bar{u})}{O(L_1^2)O(L_1)O(L_1)} = v \frac{O(L_2)O(\bar{u})}{O(L_1^3)} \quad (T9)$$

$$f \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} \longrightarrow \frac{O(1)O(\ell^2)}{O(L_1)} = \frac{O(\ell^2)}{O(L_1)} \quad (T10)$$

$$\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} \longrightarrow \frac{O(\overline{u'v'})}{O(L_2)} = \frac{O(\ell^2)}{O(L_2)} \quad (T11)$$

$$\frac{2f}{R} \overline{u'v'} \longrightarrow O(1/L_1) O(\overline{u'v'}) = \frac{O(\ell^2)}{O(L_1)} \quad (T12)$$

Finalmente tem-se com a equação:

$$\begin{aligned} \frac{O(\bar{u}^2)}{O(L_1)} + \frac{O(\bar{u}^2)}{O(L_1)} + O(\bar{u}^2) \frac{O(L_2)}{O(L_1^2)} &= - \frac{O(\Delta P)}{\rho O(L_1)} + v \left\{ \frac{O(\bar{u})}{O(L_1^2)} + \right. \\ &+ \frac{O(\bar{u})}{O(L_1^2)} \left[\frac{O(L_1^2)}{O(L_2^2)} + \frac{O(L_1)}{O(L_2)} \right] + \frac{O(\bar{u})}{O(L_1^2)} \cdot \frac{O(L_2)}{O(L_1)} - \frac{O(u)O(L_2)}{O(L_1^2)O(L_1)} + \\ &\left. + \frac{O(L_2)O(\bar{u})}{O(L_1^3)} \right\} - \frac{O(\ell^2)}{O(L_1)} - \frac{O(\ell^2)}{O(L_2)} - \frac{O(\ell^2)}{O(L_1)} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Na direção Y:

$$f\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \longrightarrow O(1) \frac{O(\bar{u})O(\bar{v})}{O(L_1)} = \frac{O(\bar{u}^2)O(L_2)}{O(L_1^2)} \quad (T13)$$

$$\frac{\bar{v} \partial \bar{v}}{\partial y} \longrightarrow O(\bar{v}) \frac{O(\bar{v})}{O(L_2)} = \frac{O(\bar{u}^2)O(L_2)}{O(L_1^2)} \quad (T14)$$

$$f \frac{\bar{u}^2}{R} \longrightarrow O(1) \frac{O(\bar{u}^2)}{O(L_1)} = \frac{O(\bar{u}^2)}{O(L_1)} \quad (T15)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \longrightarrow \frac{O(\Delta P)}{\rho O(L_2)} = \frac{O(\Delta P)}{\rho O(L_2)} \quad (T16)$$

$$v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + f \frac{\bar{v}}{R} \right) \longrightarrow v \left[\frac{O(\bar{u})}{O(L_1)O(L_2)} + \frac{O(\bar{u})}{O(L_1^2)} \right] \quad (T17) + (T18)$$

$$2v \frac{f^2}{R} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \longrightarrow v \frac{O(1)O(\bar{u})}{O(L_1)O(L_1)} = v \frac{O(\bar{u})}{O(L_1^2)} \quad (T19)$$

$$v \frac{f^2}{R^2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \longrightarrow v \frac{O(1)O(\bar{v})}{O(L_1^2)O(L_1^2)} = v \frac{O(\bar{u})O(L_2)}{O(L_1^5)} \quad (T20)$$

$$v \frac{f^3}{R^2} \frac{dR}{dx} \bar{u} \longrightarrow v \frac{O(1)O(L_1)O(\bar{u})}{O(L_1^2)O(L_1)} = v \frac{O(\bar{u})}{O(L_1^2)} \quad (T21)$$

$$v \frac{f^3}{R^2} y \frac{dR}{dx} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \longrightarrow v \frac{O(L_2)O(L_1)O(\bar{v})}{O(L_1^2)O(L_1^2)} = v \frac{O(\bar{u})O(L_2^2)}{O(L_1^4)} \quad (T22)$$

$$\frac{\partial v'^2}{\partial y} \longrightarrow \frac{O(\ell^2)}{O(L_2)} \quad (T23)$$

$$f \frac{\partial \bar{u}'v'}{\partial x} \longrightarrow \frac{O(1)O(\ell^2)}{O(L_1)} = \frac{O(\ell^2)}{O(L_1)} \quad (T24)$$

$$\frac{f}{R} (\bar{v}'^2 - \bar{u}'^2) \longrightarrow \frac{O(1)}{O(L_1)} \left[O(\ell^2) - O(\ell^2) \right] = \frac{O(\ell^2)}{O(L_1)} - \frac{O(\ell^2)}{O(L_1)}$$

(T25)

então:

$$\begin{aligned}
 \frac{O(\bar{u}^2)O(L^2)}{O(L_1^2)} + \frac{O(\bar{u}^2)O(L_2)}{O(L_1^2)} - \frac{O(\bar{u}^2)}{O(L_1)} = -\frac{O(\Delta P)}{\rho O(L_2)} + \nu \left[\frac{O(\bar{u})}{O(L_1)O(L_2)} + \right. \\
 \left. + \frac{O(\bar{u})}{O(L_1^2)} - \frac{O(\bar{u})}{O(L_1^2)} + \frac{O(\bar{u})O(L_2)}{O(L_1^5)} + \frac{O(\bar{u})}{O(L_1^2)} + \frac{O(\bar{u})O(L_2^2)}{O(L_1^4)} \right] + \\
 - \frac{O(\ell^2)}{O(L_2)} - \frac{O(\ell^2)}{O(L_1)} - \frac{O(\ell^2)}{O(L_1)} - \frac{O(\ell^2)}{O(L_1)} \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

E a equação da energia cinética turbulenta:

onde: $O(\overline{u'v'}) \approx O(\overline{u'^2}) \approx O(\overline{v'^2}) \approx O(\bar{Q}) \approx O(\ell^2)$

$$\bar{u}f \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} \longrightarrow O(\bar{u}) \frac{O(\bar{Q})}{O(L_1)} \quad (T26)$$

$$\bar{v} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial y} \longrightarrow O(\bar{v}) \frac{O(\bar{Q})}{O(L_2)} = \frac{O(\bar{u})O(\bar{Q})}{O(L_1)} \quad (T27)$$

$$\overline{u'^2} f \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \longrightarrow O(\overline{u'^2}) \frac{O(\bar{u})}{O(L_1)} = \frac{O(\bar{u})O(\bar{Q})}{O(L_1)} \quad (T28)$$

$$\overline{u'^2} f \frac{\bar{v}}{R} \longrightarrow O(\overline{u'^2}) \frac{O(\bar{v})}{O(L_1)} = \frac{O(\bar{Q})O(\bar{u})O(L_2)}{O(L_1^2)} \quad (T29)$$

$$\overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \longrightarrow O(\overline{u'v'}) \frac{O(\bar{u})}{O(L_2)} = O(\bar{Q}) \frac{O(\bar{u})}{O(L_2)} \quad (T30)$$

$$\overline{u'v'} f \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \longrightarrow O(\overline{u'v'}) \frac{O(\bar{v})}{O(L_1)} = O(\bar{Q})O(\bar{u}) \frac{O(L_2)}{O(L_1^2)} \quad (T31)$$

$$\overline{u'v'} f \frac{\bar{u}}{R} \longrightarrow O(\overline{u'v'}) \frac{O(\bar{u})}{O(L_1)} = O(\bar{Q}) \frac{O(\bar{u})}{O(L_1)} \quad (T32)$$

$$\overline{v'^2} \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} \longrightarrow O(\overline{v'^2}) \frac{O(\overline{v})}{O(L_2)} = O(\overline{Q}) \frac{O(\overline{u})}{O(L_1)} \quad (T33)$$

$$f \frac{\partial \overline{u'Q}}{\partial x} \longrightarrow \frac{O(\overline{u'Q})}{O(L_1)} \quad (T34)$$

$$f \frac{\overline{v'Q}}{R} \longrightarrow \frac{O(\overline{v'Q})}{O(L_1)} \quad (T35)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \overline{u'Q} \longrightarrow \frac{O(\overline{v'Q})}{O(L_2)} \quad (T36)$$

$$\frac{1}{\rho} f \frac{\partial \overline{u'P'}}{\partial x} \longrightarrow \frac{1}{\rho} \frac{O(\overline{u'P'})}{O(L_1)} \quad (T37)$$

$$\frac{1}{\rho} f \frac{\overline{v'P'}}{R} \longrightarrow \frac{1}{\rho} \frac{O(\overline{v'P'})}{O(L_1)} \quad (T38)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (\overline{v'P'}) \longrightarrow \frac{1}{\rho} \frac{O(\overline{v'P'})}{O(L_2)} \quad (T39)$$

$$v f^2 \frac{\partial^2 \overline{Q}}{\partial x^2} \longrightarrow v \frac{O(\overline{Q})}{O(L_1^2)} \quad (T40)$$

$$v \frac{\partial^2 \overline{Q}}{\partial y^2} \longrightarrow v \frac{O(\overline{Q})}{O(L_2^2)} \quad (T41)$$

$$v y \frac{f^3}{R^2} \frac{\partial \overline{Q}}{\partial x} \frac{dR}{dx} \longrightarrow v \frac{O(L_2) O(\overline{Q})}{O(L_1^3)} \quad (T42)$$

$$v \frac{f}{R} \frac{\partial \overline{Q}}{\partial y} \longrightarrow v \frac{O(\overline{Q})}{O(L_1) O(L_2)} \quad (T43)$$

$$v \overline{D} \longrightarrow v O(\overline{D}) \quad (T44)$$

Então

$$\begin{aligned}
 \frac{O(\bar{u})O(\bar{Q})}{O(L_1)} + \frac{O(\bar{u})O(\bar{Q})}{O(L_1)} &= - \frac{O(\bar{Q})O(\bar{u})}{O(L_1)} - \frac{O(\bar{Q})O(\bar{u})O(L_2)}{O(L_1^2)} - \frac{O(\bar{Q})O(\bar{u})}{O(L_2)} + \\
 &- \frac{O(\bar{Q})O(\bar{u})O(L_2)}{(L_1^2)} + \frac{O(\bar{Q})O(\bar{u})}{O(L_1)} - \frac{O(\bar{Q})}{O(L_1)} \frac{(\bar{u})}{O(L_1)} - \frac{O(\bar{u}'\bar{Q})}{O(L_1)} + \\
 &- \frac{O(\bar{v}'\bar{Q})}{O(L_1)} - \frac{O(\bar{v}'\bar{Q})}{O(L_1)} - \frac{1}{\rho} \frac{O(\bar{u}'P')}{O(L_1)} - \frac{1}{\rho} \frac{O(\bar{v}'P')}{O(L_1)} - \frac{1}{\rho} \frac{O(\bar{v}'P')}{O(L_2)} + \\
 &+ v \frac{O(\bar{Q})}{O(L_1^2)} + v \frac{O(\bar{Q})}{O(L_2^2)} + v \frac{O(L_2)O(\bar{Q})}{O(L_1^3)} + v \frac{O(\bar{Q})}{O(L_1)O(L_2)} + \\
 &- v O(\bar{D}) \tag{3.7}
 \end{aligned}$$

Multiplicando-se a equação (3.5) por $\frac{O(L_1)}{O(U^2)}$, a equação (3.6) por $\frac{O(L_1^2)}{O(\bar{u}^2)O(L_2)}$ e a (3.7) por $\frac{O(L_1)}{O(\bar{u})O(\bar{Q})}$ e chamando de $O(Re) =$

$$= \frac{O(u)O(L_1)}{v} :$$

tem-se

Na direção X:

$$\begin{aligned}
 O(1)+O(1) + \frac{O(L_2)}{O(L_1)} &= - \frac{O(\Delta P)}{\rho O(L_1^2)} + \frac{1}{O(Re)} \left\{ O(1) + \frac{O(L_1^2)}{O(L_2^2)} + \frac{O(L_1)}{O(L_2)} + \right. \\
 &+ \left. \frac{O(L_2)}{O(L_1)} - \frac{O(L_2)}{O(L_1)} + \frac{O(L_2)}{O(L_1)} \right\} - \frac{O(\ell^2)}{O(\bar{u}^2)} - \frac{O(L_1)}{O(L_2)} \cdot \frac{O(\ell^2)}{O(\bar{u}^2)} - \frac{O(\ell^2)}{O(\bar{u}^2)} \tag{3.8}
 \end{aligned}$$

Na direção Y:

$$\begin{aligned}
O(1) + O(1) - \frac{O(L_1)}{O(L_2)} &= - \frac{O(\Delta P)}{\rho O(L_2^2)} \frac{O(L_1^2)}{O(\bar{u}^2)} + \frac{1}{O(Re)} \left\{ \frac{O(L_1^2)}{O(L_2^2)} + \frac{O(L_1)}{O(L_2)} + \right. \\
&\quad \left. - \frac{O(L_1)}{O(L_2)} + \frac{1}{O(L_1^2)} + \frac{O(L_1)}{O(L_2)} + \frac{O(L_2)}{O(L_1)} \right\} - \frac{O(\ell^2)}{O(L_2^2)} \cdot \frac{O(L_1^2)}{O(\bar{u}^2)} + \\
&\quad - \frac{O(\ell^2)O(L_1)}{O(L_2)O(\bar{u}^2)} - \frac{O(\ell^2)O(L_1)}{O(\bar{u}^2)O(L_2)} - \frac{O(\ell^2)O(L_1)}{O(L_2)O(\bar{u}^2)} \quad (3.9)
\end{aligned}$$

E para a energia cinética:

$$\begin{aligned}
O(1) + O(1) &= - O(1) - \frac{O(L_2)}{O(L_1)} - \frac{O(L_1)}{O(L_2)} - \frac{O(L_2)}{O(L_1)} + O(1) - O(1) + \\
&\quad - \frac{O(\bar{u}'\bar{Q})}{O(\bar{u})O(\bar{Q})} - \frac{O(\bar{u}'\bar{Q})}{O(\bar{u})O(\bar{Q})} - \frac{O(\bar{u}'\bar{Q})O(L_1)}{O(L_2)O(\bar{u})O(\bar{Q})} - \frac{1}{\rho} \frac{O(\bar{u}'\bar{P}')}{O(\bar{u})O(\bar{Q})} + \\
&\quad - \frac{1}{\rho} \frac{O(\bar{v}'\bar{P}')}{O(\bar{u})O(\bar{Q})} - \frac{1}{\rho} \frac{O(\bar{v}'\bar{P}')O(L_1)}{O(L_2)O(\bar{u})O(\bar{Q})} + \frac{v}{O(L_1)O(\bar{u})} + \frac{vO(L_1)}{O(L_2^2)O(\bar{u})} + \\
&\quad + \frac{vO(L_2)}{O(\bar{u})O(L_1^2)} + \frac{v}{O(L_2)O(\bar{u})} - v \frac{O(\bar{D})O(L_1)}{O(\bar{u})O(\bar{Q})} \quad (3.10)
\end{aligned}$$

E desprezando-se na equação (3.8) os termos $\frac{1}{O(Re)}$, $\frac{O(L_2)}{O(L_1)}$ e $\frac{O(\ell^2)}{O(\bar{u}^2)}$ em presença de $O(1)$, $\frac{O(L_1^2)}{O(Re)O(L_2^2)}$, $\frac{O(L_1)}{O(Re)O(L_2)}$ e

$\frac{O(L_1)O(\ell^2)}{O(L_2)O(\bar{u}^2)}$; na equação (3.9) todos os demais termos em presença de

$\frac{O(L_1)}{O(L_2)}$ e $\frac{O(\Delta P)O(L_1^2)}{\rho O(L_2^2)O(\bar{u}^2)}$; na equação (3.10) os $\frac{O(L_2)}{O(L_1)}$, $\frac{vO(L_2)}{O(L_2^2)O(\bar{u})}$ na

presença dos demais.

Reescrevendo as equações com os termos reais:

$$f\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = - \frac{f}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{f\bar{u}}{R} \right) - \frac{\partial}{\partial y} (\bar{u}'\bar{v}') \quad (3.11)$$

$$f \frac{\bar{u}^2}{R} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}f \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial y} = & - \overline{u'^2} f \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \overline{u'v'} \frac{f\bar{u}}{R} - \overline{v'^2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - f \frac{\bar{v}'\bar{Q}}{R} + \\ & - \frac{\partial}{\partial y} \overline{v'Q} - \frac{1}{\rho} f \frac{\bar{v}'P'}{R} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \overline{v'P'} + v \frac{\partial^2 \bar{Q}}{\partial y^2} + \\ & + v \frac{f}{R} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial y} - v \bar{D} \end{aligned} \quad (3.13)$$

A equação (3.13) pode ser reagrupada:

$$\begin{aligned} \bar{u}f \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial y} = & - \overline{u'^2} f \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \overline{v'^2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \overline{u'v'} \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \frac{f\bar{u}}{R} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ - \overline{v'(Q + P'/\rho)} + v \frac{\partial \bar{Q}}{\partial y} \right\} + \frac{f}{R} \left\{ - \overline{v'(Q + P'/\rho)} + \right. \\ & \left. + v \frac{\partial \bar{Q}}{\partial y} \right\} - v \bar{D} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Que costuma ser identificada com os termos:

CONVECÇÃO = PRODUÇÃO + DIFUSÃO - DISSIPACÃO

O segundo, terceiro e quarto termos do lado direito da equação (3.14) compõem a parcela de produção. Analisando a ordem de grandeza da equação (3.10) identifica-se com os termos (T28), (T30), (T32) e (T33). Pode-se desprezar os termos que contêm gradientes na direção x em presença dos gradientes da direção y²².

A parcela de difusão está representada pelo quinto e sex-

to termo da equação (3.14). O quinto termo é a própria parcela de difusão para a superfície plana, o outro será entendido como um fator corretivo de difusão devido a curvatura. (Este se anula quando $R \rightarrow \infty$).

O termo (T44) tem semelhança com a dissipação viscosa da equação geral da energia, pois contém derivadas ao quadrado; chama-se de dissipação da energia cinética turbulenta.

Reescrevendo o sistema de equações:

$$f\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = - \frac{f}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \nu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{f\bar{u}}{R} \right) - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u'v'}) \quad (3.15)$$

$$f \frac{\bar{u}^2}{R} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} f\bar{u} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial y} = & - \overline{u'v'} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \frac{f\bar{u}}{R} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[- \overline{v' \left(Q + \frac{P'}{\rho} \right)} + \nu \frac{\partial \bar{Q}}{\partial y} \right] + \\ & + \frac{f}{R} \left[- \overline{v' \left(Q + \frac{P'}{\rho} \right)} + \nu \frac{\partial \bar{Q}}{\partial y} \right] - \nu \bar{D} \end{aligned} \quad (3.17)$$

ANEXO 4

ADIMENSIONALIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES

4.1 - EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE

Definindo-se $U_0(x)$ como velocidade do escoamento potencial e U_{∞} como a velocidade do escoamento não perturbado, adimensionaliza-se partindo de:

$$u = \frac{\bar{u}}{U_0} \quad v = \frac{\bar{v}}{U_0}$$

então a equação da continuidade:

$$f \frac{\partial}{\partial x} (U_0 u) + \frac{\partial}{\partial y} (U_0 v) + f \frac{U_0 v}{R} = 0$$

$$f u \frac{\partial U_0}{\partial x} + f U_0 \frac{\partial u}{\partial x} + U_0 \frac{\partial v}{\partial y} + f \frac{U_0 v}{R} = 0 \quad (4.0)$$

E com uma mudança de variáveis para ξ e η onde:

$$\xi = \int_0^x \frac{U_0(x) dx}{v} \quad e \quad \eta = \frac{y U_0(x)}{(2\xi)^n v}$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial x} = \frac{dU_0}{dx} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{dU_0}{d\xi} \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{U_0}{v} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{U_0}{(2\xi)^{n_V}} \cdot \frac{\partial v}{\partial \eta} \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\eta}{v} \left(\frac{dU_0}{d\xi} - \frac{n}{\xi} U_0 \right) \quad (4.4)$$

e definindo

$$v = \frac{V}{(2\xi)^n} - v \frac{(2\xi)^n}{U_0} \cdot f u \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (4.5)$$

Substituindo (4.1), (4.2), (4.3) e (4.4) em (4.0) após algum algebrismo:

$$(2\xi)^{2n} f \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} + (2\xi)^{2n} u f \frac{n}{\xi} + \frac{fV}{R_\eta} = 0 \quad (4.6)$$

onde R_η é definido como: $\frac{RU_0}{(2\xi)^{n_V}}$

4.2 - EQUAÇÃO DO MOVIMENTO

Dada a equação:

$$f \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = f U_0 \frac{dU_0}{dx} + f \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^y \frac{\bar{u}^2}{R} dy \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{f \bar{u}}{R} \right) + \frac{\partial}{\partial y} 2(K\bar{Q}) \quad (4.7)$$

Utiliza-se como na equação anterior:

$$u = \frac{\bar{u}}{U_0} ; \quad v = \frac{\bar{v}}{U_0} \quad \text{e} \quad Q = \frac{\bar{Q}}{U_0^2} \quad (4.8)$$

Então substituindo-se as relações (4.7) em (4.8) e ainda executando a mudança de variáveis (x e y para ξ e η) com as equações (4.1), (4.2), (4.3) e (4.4) obteve-se, após algumas simplificações:

$$\begin{aligned} (2\xi)^{2n} f u \frac{\partial u}{\partial \xi} + v \frac{\partial u}{\partial \eta} &= (2\xi)^{2n} \frac{f}{U_0} \frac{dU_0}{d\xi} \left\{ 1 - u^2 + 2 \int_0^\eta \frac{f u^2}{R_\eta} d\eta + \right. \\ &+ \left. \frac{f u^2 \eta}{R_\eta} \right\} + (2\xi)^{2n} f \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^\eta \frac{f u^2}{R_\eta} d\eta - \frac{f u^2 \eta}{R_\eta} \left(\frac{n}{\xi} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\partial u}{\partial \eta} + \right. \\ &+ \left. \frac{f u}{R} \right] + (2\xi)^n \frac{\partial}{\partial \eta} 2(KQ) \end{aligned} \quad (4.9)$$

onde os termos são assim identificados:

$$\text{FPRES} : (2\xi)^{2n} \frac{f}{U_0} \frac{dU_0}{d\xi} \left\{ 1 - u^2 + 2 \int_0^\eta \frac{f u^2}{R_\eta} d\eta + \frac{f u^2}{R_\eta} \eta \right\}$$

$$\text{FCURV} : (2\xi)^{2n} f \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^\eta \frac{f u^2}{R_\eta} d\eta - \frac{f u^2}{R_\eta} \left(\frac{n}{\xi} \right) \eta \right\}$$

$$\text{TVISC} : \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{f u}{R_\eta} \right)$$

$$\text{FECT} : (2\xi)^n \frac{\partial}{\partial \eta} 2(KQ)$$

4.3 - EQUAÇÃO DA ENERGIA CINÉTICA TURBULENTA

Dada a equação (27) do segundo capítulo e seguindo o mesmo caminho das equações anteriores:

$$\begin{aligned}
 u U_0 f \frac{\partial}{\partial x} (U_0^2 Q) + v U_0 \frac{\partial}{\partial y} (U_0^2 Q) &= 2K U_0^2 Q \left\{ \frac{\partial}{\partial y} (U_0 u) + \right. \\
 &\left. - f u \frac{U_0}{R} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \alpha \frac{\partial}{\partial y} (U_0^2 Q) \right\} + f \frac{\alpha}{R} \frac{\partial}{\partial y} (U_0^2 Q) + \\
 &- C_1 \alpha \frac{U_0^2 Q}{\ell_d^2}
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial x} (U_0^2 Q) = 2 Q U_0 \frac{dU_0}{dx} + U_0^2 \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (U_0^2 Q) = U_0^2 \frac{\partial Q}{\partial y}$$

fica-se com

$$\begin{aligned}
 u U_0 f \left(2Q U_0 \frac{dU_0}{dx} + U_0^2 \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + v U_0^3 \frac{\partial Q}{\partial y} &= 2K U_0^3 Q \left[\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{f u}{R} \right] + \\
 + U_0^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha \frac{\partial Q}{\partial y} \right) + f \frac{U_0^2 \alpha}{R} \frac{\partial Q}{\partial y} - C_1 \alpha \frac{U_0^2 Q}{\ell_d^2}
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Com a mudança de variáveis proposta (equações (4.1), (4.2), (4.3) e (4.4)) e mais:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{U_0}{v} \cdot \frac{\partial Q}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial Q}{\partial \eta} \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \eta} = \frac{U_0}{(2\xi)^n v} \cdot \frac{\partial Q}{\partial \eta} \quad (4.14)$$

após algum algebrismo, vem:

$$\begin{aligned} (2\xi)^{2n} u f \frac{\partial Q}{\partial \xi} + v \frac{\partial Q}{\partial \eta} = & - 2uQf(2\xi)^{2n} \frac{1}{U_0} \frac{dU_0}{d\xi} + \\ & + (2\xi)^n 2KQ \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{uf}{R_\eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\alpha}{v} \frac{\partial Q}{\partial \eta} \right) + \frac{\alpha f}{v R_\eta} \frac{\partial Q}{\partial \eta} + \\ & - C_1 \alpha \frac{(2\xi)^{2n} v Q}{(U_0 l_d)^2} \end{aligned} \quad (4.15)$$

onde identifica-se por

$$\text{CONVECÇÃO} \quad : \quad (2\xi)^{2n} u f \frac{\partial Q}{\partial \xi} + v \frac{\partial Q}{\partial \eta} + 2ufQ(2\xi)^{2n} \frac{1}{U_0} \frac{dU_0}{d\xi}$$

$$\text{PRODUÇÃO} \quad : \quad (2\xi)^n 2KQ \left[\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{fu}{R_\eta} \right]$$

$$\text{DIFUSÃO} \quad : \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\alpha}{v} \frac{\partial Q}{\partial \eta} \right) + \frac{\alpha f}{v R_\eta} \frac{\partial Q}{\partial \eta}$$

$$\text{DISSIPACÃO} \quad : \quad (2\xi)^{2n} \frac{v \alpha C_1 Q}{(U_0 l_d)^2}$$

ANEXO 5

DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES

5.1 - EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE

Para a equação da continuidade a discretização será em torno do ponto $P_{i+1/2, j-1/2}$. Partindo da equação (4.6) do anexo 4, teremos:

$$\begin{aligned}
 (2\xi)_{i+1/2}^{2n} f_{i+1/2, j-1/2} \frac{\partial u}{\partial \xi} \Big|_{i+1/2, j-1/2} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \Big|_{i+1/2, j-1/2} + \\
 + n(2\xi)_{i+1/2}^{2n} f_{i+1/2, j-1/2} \frac{u_{i+1/2, j-1/2}}{\xi_{i+1/2}} + \\
 + f_{i+1/2, j-1/2} \frac{v_{i+1/2, j-1/2}}{R_{\eta_{i+1/2}}} = 0 \quad (5.1)
 \end{aligned}$$

onde:

$$(2\xi)_{i+1/2}^{2n} = \left[\frac{(\xi_i + \xi_{i+1})}{2} \right]^{2n} = (\xi_i + \xi_{i+1})^{2n} = \text{CSIM} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned}
 f_{i+1/2, j-1/2} &= 0.25(f_{i, j} + f_{i+1, j} + f_{i, j-1} + f_{i+1, j-1}) = \\
 &= \text{EFED (J)} \quad (5.3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial \xi} \Big|_{i+1/2, j-1/2} &= (u_{i+1, j} + u_{i+1, j-1} - u_{i, j-1} - \\
 &- u_{i, j}) / 2\Delta\xi = \text{DEUVE} \quad (5.4)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} \Big|_{i+1/2, j-1/2} = \left(v_{i+1/2, j} - v_{i+1/2, j-1} \right) / \Delta \eta_{j-1} \quad (5.5)$$

$$v_{i+1/2, j-1/2} = \left(v_{i+1/2, j} + v_{i+1/2, j-1} \right) / 2 \quad (5.6)$$

e assim com estas relações:

$$v_{i+1/2, j} = \left\{ v_{i+1/2, j-1} \left(\frac{1}{\Delta \eta_{j-1}} - \frac{EFED(J)}{2R \eta_{i+1/2}} \right) - \right. \\ \left. CSIM \cdot EFED(J) \left[DEUVE + n \frac{UVENT}{\xi_{i+1/2}} \right] \right\} / \left(\frac{1}{\Delta \eta_{j-1}} + \frac{EFED(J)}{2R \eta_{i+1/2}} \right) \quad (5.7)$$

onde

$$u_{i+1/2, j-1/2} = \left(u_{i+1, j} + u_{i+1, j-1} + u_{i, j} + u_{i, j-1} \right) / 4 = \\ = UVENT$$

5.2 - EQUAÇÃO DO MOVIMENTO

Dada a equação (4.9) (anexo 4), a discretização agora será em torno do ponto $P_{i+1/2, j}$:

$$\begin{aligned}
& (2\xi)_{i+1/2}^{2n} f_{i+1/2,j} u_{i+1/2,j} \left. \frac{\partial u}{\partial \xi} \right|_{i+1/2,j} + \\
& v_{i+1/2,j} \left. \frac{\partial u}{\partial \eta} \right|_{i+1/2,j} = (2\xi)_{i+1/2}^{2n} f_{i+1/2,j} \left(\frac{1}{U_0} \frac{dU_0}{d\xi} \right) \Big|_{i+1/2,j} \\
& \left\{ 1 - (u^2)_{i+1/2,j} + 2 \int_0^\eta f \frac{u^2}{R_\eta} d\eta \Big|_{i+1/2,j} + \right. \\
& \left. + f_{i+1/2,j} \frac{(u^2)_{i+1/2,j}}{R_{\eta i+1/2,j}} \eta_j \right\} + (2\xi)_{i+1/2}^{2n} f_{i+1/2,j} \cdot \\
& \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^\eta \frac{fu^2}{R_\eta} d\eta \Big|_{i+1/2,j} - f_{i+1/2,j} \frac{(u^2)_{i+1/2,j}}{R_{\eta i+1/2}} \left(\frac{\eta}{\xi_{i+1/2}} \right) \right\} \\
& + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \Big|_{i+1/2,j} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{fu}{R_\eta} \right) \Big|_{i+1/2,j} + \\
& + (2\xi)_{i+1/2}^n \left. \frac{\partial}{\partial \eta} (2KQ) \right|_{i+1/2,j} \quad (5.8)
\end{aligned}$$

Os termos com integral podem ser transformados em somatórios. Ou, como:

$$\int_0^\eta \frac{fu^2}{R_\eta} d\eta \Big|_{i+1/2,j} = \left\{ \int_0^\eta \frac{fu^2}{R_\eta} d\eta \Big|_{i,j} + \int_0^\eta \frac{fu^2}{R_\eta} d\eta \Big|_{i+1,j} \right\} / 2$$

e

$$\int_0^\eta \frac{fu^2}{R_\eta} d\eta \Big|_{i,j} = \sum_{p=2}^j \frac{\Delta \eta_p}{2R_{\eta i+1}} \left[f_{i,p} (u^2)_{i,p} + f_{i,p-1} (u^2)_{i,p-1} \right]$$

e ainda, como:

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} \Big|_{i+1/2, j} = (F_{i+1, j} - F_{i, j}) / \Delta \xi$$

então

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\int_0^{\eta} \frac{fu^2}{R\eta} d\eta \right) \Big|_{i+1/2, j} = \frac{1}{\Delta \xi} \left(\int_0^{\eta} \frac{fu^2}{R\eta} d\eta \Big|_{i+1, j} - \int_0^{\eta} \frac{fu^2}{R\eta} d\eta \Big|_{i, j} \right)$$

E as variáveis e suas derivadas reescritas segundo as relações (39), (40), (41), (42) e (43) do capítulo 3:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \Big|_{i+1/2, j} &= \frac{1}{\Delta \eta_j (\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} \left[u_{i+1, j} - u_{i+1, j-1} \right] - \\ &\frac{1}{\Delta \eta_{j-1} (\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} \left[u_{i+1, j} - u_{i+1, j-1} \right] + \\ &\frac{1}{\Delta \eta_j (\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} \left[u_{i, j+1} - u_{i, j} \right] - \\ &\frac{1}{\Delta \eta_{j-1} (\Delta \eta_j + \Delta \eta_{j-1})} \left[u_{i, j} - u_{i, j-1} \right] \end{aligned}$$

O último termo será:

$$2 \frac{\partial}{\partial \eta} (KQ) \Big|_{i+1/2, j} = 2K \frac{\partial Q}{\partial \eta} \Big|_{i+1/2, j} + 2Q \frac{\partial K}{\partial \eta} \Big|_{i+1/2, j} = \text{FECT}(J)$$

Juntando os termos contendo $u_{i+1,j+1}$; $u_{i+1,j}$ e $u_{i+1,j-1}$ para o lado direito e os termos contendo $u_{i,j+1}$, $u_{i,j}$ e $u_{i,j-1}$ para o lado esquerdo com os demais termos; e ainda chamando de:

$$A_{i+1/2,j} = (2\xi)_{i+1/2}^n f_{i+1/2,j} u_{i+1/2,j}$$

$$V_{i+1/2,j} = \text{VELM}$$

$$\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1} = \text{DELSUM}$$

$$f_{i+1/2,j} = \text{EFEM}(J)$$

$$\begin{aligned} & u_{i+1,j+1} \left[\frac{\text{VELM}}{2 \text{DELSUM}} - \frac{1}{\Delta\eta_j \text{DELSUM}} - \frac{\text{EFEM}(J)}{2 \text{DELSUM} R_{\eta_{i+1/2}}} \right] + \\ & + u_{i+1,j} \left[\frac{A_{i+1/2,j}}{\Delta\xi} + \frac{1}{\Delta\eta_j \text{DELSUM}} + \frac{1}{\Delta\eta_{j-1} \text{DELSUM}} \right] + \\ & + u_{i+1,j-1} \left[-\frac{\text{VELM}}{2 \text{DELSUM}} - \frac{1}{\Delta\eta_{j-1} \text{DELSUM}} + \frac{\text{EFEM}(J)}{2 \text{DELSUM} R_{\eta_{i+1/2}}} \right] = \\ & = u_{i,j+1} \left[-\frac{\text{VELM}}{2 \text{DELSUM}} + \frac{1}{\Delta\eta_j \text{DELSUM}} + \frac{\text{EFEM}(J)}{2 \text{DELSUM} R_{\eta_{i+1/2}}} \right] + \\ & + u_{i,j} \left[\frac{A_{i+1/2,j}}{\Delta\xi} - \frac{1}{\Delta\eta_j \text{DELSUM}} - \frac{1}{\Delta\eta_{j-1} \text{DELSUM}} \right] + \\ & + u_{i,j-1} \left[\frac{\text{VELM}}{2 \text{DELSUM}} + \frac{1}{\Delta\eta_{j-1} \text{DELSUM}} - \frac{\text{EFEM}(J)}{2 \text{DELSUM} R_{\eta_{i+1/2}}} \right] - \\ & \left[\frac{\text{EFEM}(J)}{R_{\eta_{i+1/2}}} \right]^2 u_{i+1/2,j} + \text{FPRES}(J) + \text{FCURV}(J) + \text{FECT}(J) \quad (5.9) \end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned}
 \text{FPRESS}(J) = & (2\xi)_{i+1/2}^{2n} f_{i+1/2,j} \left(\frac{1}{U_0} \frac{dU_0}{d\xi} \right) \left\{ 1 - (u^2)_{i+1/2,j} + \right. \\
 & + \sum_{p=2}^j \frac{\Delta\eta_p}{2R_{\eta_i}} \left(f_{i,p} u^2_{i,p} + f_{i,p-1} (u^2)_{i,p-1} \right) + \\
 & + \sum_{p=2}^j \frac{\Delta\eta_p}{2R_{\eta_{i+1}}} \left(f_{i+1,p} u^2_{i+1,p} + f_{i+1,p-1} u^2_{i+1,p-1} \right) + \\
 & \left. + f_{i+1/2,j} \frac{(u^2)_{i+1/2,j}}{R_{\eta_{i+1/2}}} \cdot \eta_j \right\} \\
 \text{FCURV}(J) = & (2\xi)_{i+1/2}^{2n} f_{i+1/2,j} \left\{ \frac{1}{\Delta\xi} \left[\sum_{p=2}^j \frac{\Delta\eta_p}{2R_{\eta_{i+1}}} \left(f_{i+1,p} (u^2)_{i+1,p} + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. + f_{i+1,p-1} (u^2)_{i+1,p-1} \right) - \sum_{p=2}^j \frac{\Delta\eta_p}{2R_{\eta_i}} f_{i,p} (u^2)_{i,p-1} + \right. \\
 & \left. \left. + f_{i,p-1} (u^2)_{i,p-1} \right] - f_{i+1/2,j} \frac{(u^2)_{i+1/2,j}}{R_{\eta_{i+1/2}}} \cdot \eta_j \left(\frac{n}{\xi_{i+1/2}} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

Genericamente a equação (5.9) pode ser assim representada:

$$A_j u_{i+1,j+1} + B_j u_{i+1,j} + C_j u_{i+1,j-1} = D_j$$

5.3 - EQUAÇÃO DA ENERGIA CINÉTICA

Dada a equação (4.15) (anexo 4) procede-se a discretização em torno do ponto $P_{i+1/2,j}$.

$$\text{CONVECÇÃO} : (2\xi)_{i+1/2}^{2n} f_{i+1/2,j} u_{i+1/2,j} \frac{\partial Q}{\partial \xi} \Big|_{i+1/2,j} +$$

$$+ v_{i+1/2,j} \frac{\partial Q}{\partial \eta} \Big|_{i+1/2,j} +$$

$$+ 2 u_{i+1/2,j} Q_{i+1/2,j} f_{i+1/2,j} (2\xi)_{i+1/2}^{2n} \left(\frac{1}{\text{lb}} \frac{d\text{lb}}{d\xi} \right)_{i+1/2,j}$$

$$\text{PRODUÇÃO} : 2(2\xi)_{i+1/2}^n K_j Q_{i+1/2,j} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \Big|_{i+1/2,j} - \frac{u_{i+1/2,j} f_{i+1/2,j}}{R_{\eta i+1/2}} \right)$$

$$\text{DIFUSÃO} : \frac{\text{ALFA}_{i+1/2,j+1/2}}{v\Delta\eta_j \cdot \text{DELSUM}} \left(Q_{i+1,j+1} - Q_{i+1,j} \right) +$$

$$- \frac{\text{ALFA}_{i+1/2,j-1/2}}{v\Delta\eta_{j-1} \cdot \text{DELSUM}} \left(Q_{i+1,j} - Q_{i+1,j-1} \right) +$$

$$- \frac{\text{ALFA}_{i+1/2,j+1/2}}{v\Delta\eta_j \cdot \text{DELSUM}} \left(Q_{i,j+1} - Q_{i,j} \right) +$$

$$- \frac{\text{ALFA}_{i+1/2,j-1/2}}{v\Delta\eta_{j-1} \cdot \text{DELSUM}} \left(Q_{i,j} - Q_{i,j-1} \right) +$$

$$+ \frac{\text{ALFA}_{i+1/2,j}}{v R_{\eta i+1/2}} f_{i+1/2,j} \frac{\partial Q}{\partial \eta} \Big|_{i+1/2,j}$$

$$\text{DISSIPAÇÃO : } \frac{v C_1 (2\xi)_{i+1/2}^2 \text{ALFA}_{i+1/2,j}}{2 \left(U_{0\ i+1/2} \cdot \ell_{d\ i+1/2,j} \right)^2} (Q_{i+1,j} + Q_{i,j})$$

Juntando-se os termos contendo $Q_{i+1,j+1}$, $Q_{i+1,j}$ e $Q_{i+1,j-1}$ para o lado direito e o restante para o outro lado, como foi feito para a equação do movimento:

$$\begin{aligned} & Q_{i+1,j+1} \left[\frac{\text{VELM}}{2 \text{DELSUM}} - \frac{\text{ALFA}_{i+1/2,j+1/2}}{v \Delta \eta_j \text{DELSUM}} - \frac{\text{ALFA}_{i+1/2,j} \text{EFEM}(j)}{2 v R_{\eta i+1/2} \text{DELSUM}} \right] \\ & Q_{i+1,j} \left[\frac{A_{i+1/2,j}}{\Delta \xi} - 2(2\xi)_{i+1/2}^n \frac{K_j}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)_{i+1/2,j} - \frac{u_{i+1/2,j} f_{i+1/2,j}}{R_{\eta i+1/2}} \right] + \\ & + \frac{\text{ALFA}_{i+1/2,j+1/2}}{v \Delta \eta_j \text{DELSUM}} + \frac{\text{ALFA}_{i+1/2,j-1/2}}{v \Delta \eta_{j-1} \text{DELSUM}} + \\ & + u_{i+1/2,j} f_{i+1/2,j} (2\xi)_{i+1/2}^{2n} \left(\frac{1}{U_0} \frac{dU_0}{d\xi} \right) \Big|_{i+1/2,j} + \\ & + \left[\frac{v (2\xi)_{i+1/2}^{2n} \text{ALFA}_{i+1/2,j} C_1}{2 U_{0\ i+1/2}^2 \ell_{d\ i+1/2,j}^2} \right] + \\ & + Q_{i+1,j-1} \left[- \frac{\text{VELM}}{2 \text{DELSUM}} - \frac{\text{ALFA}_{i+1/2,j-1/2}}{v \Delta \eta_{j-1} \text{DELSUM}} + \right. \\ & \left. + \frac{\text{ALFA}_{i+1/2,j} f_{i+1/2,j}}{2 v R_{\eta i+1/2} \text{DELSUM}} \right] = \\ & = Q_{i,j+1} \left[- \frac{\text{VELM}}{2 \text{DELSUM}} + \frac{\text{ALFA}_{i+1/2,j+1/2}}{v \Delta \eta_j \text{DELSUM}} + \right. \\ & \left. + \frac{\text{ALFA}_{i+1/2,j} f_{i+1/2,j}}{2 v R_{\eta i+1/2} \text{DELSUM}} \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{i,j} & \left[\frac{A_{i+1/2,j}}{\Delta \xi} + (2\xi)_{i+1/2}^{2n} 2 \frac{K_j}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \Big|_{i+1/2,j} + \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{u_{i+1/2,j} f_{i+1/2,j}}{R_{\eta i+1/2}} \right) - \frac{ALFA_{i+1/2,j+1/2}}{v \Delta \eta_j} \frac{DELSUM}{DELSUM} + \right. \\
& \left. - \frac{ALFA_{i+1/2,j-1/2}}{v \Delta \eta_{j-1}} \frac{DELSUM}{DELSUM} - (2\xi)_{i+1/2}^{2n} u_{i+1/2,j} f_{i+1/2,j} \left(\frac{1}{U_0} \cdot \frac{dU_0}{d\xi} \right) \Big|_{i+1/2} + \right. \\
& \left. - (2\xi)_{i+1/2}^{2n} v c_1 \frac{ALFA_{i+1/2,j}}{2 U_0^2_{i+1/2} \ell_d^2_{i+1/2,j}} \right] + \\
& + Q_{i,j-1} \left[\frac{VELM}{2 \frac{DELSUM}{DELSUM}} + \frac{ALFA_{i+1/2,j-1/2}}{v \Delta \eta_{j-1}} \frac{DELSUM}{DELSUM} + \right. \\
& \left. - \frac{ALFA_{i+1/2,j} f_{i+1/2,j}}{2v R_{\eta i+1/2} \frac{DELSUM}{DELSUM}} \right] \tag{5.10}
\end{aligned}$$

que também podem ser genericamente representada:

$$A Q_j Q_{i+1,j+1} + B Q_j Q_{i+1,j} + C Q_j Q_{i+1,j-1} = D Q_j$$

ANEXO 6

HIPÓTESES DE FECHAMENTO

6.1 - PARÂMETRO DE ESTRUTURA

Define-se parâmetro de estrutura a relação entre o tensor turbulento pelo dobro da energia cinética. Conforme Hinze² a sua variação ao longo da camada limite pode ser analisada na figura 6.1.

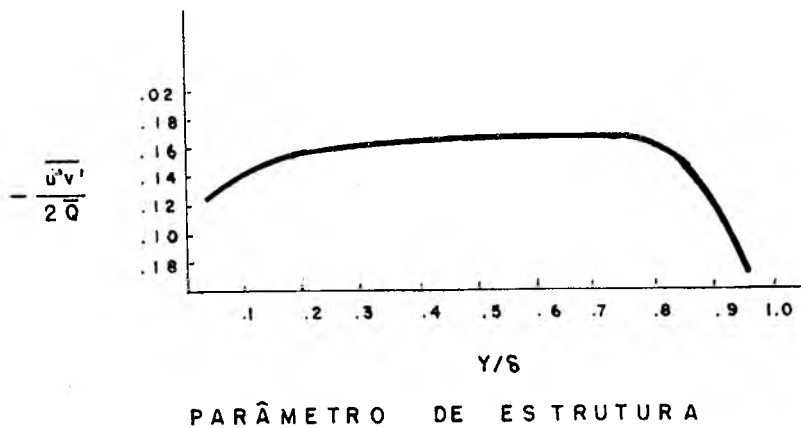


Fig. 6.1

Próximo a parede o valor de $K(y)$ não está bem definido. Para tanto ajustou-se uma reta segundo:

$$K(y) = 0 \quad \text{para} \quad y = 0$$

$$K(y) = 0,15 \quad \text{para} \quad y = 0,1$$

Outra curva⁷ foi testada para esta mesma região.

$$K(y) = 4,02 (y/\delta) - 34,6 (y/\delta)^2 + \\ + 113 (y/\delta)^3 - 125 (y/\delta)^4 \quad \text{para } y/\delta < 0,35$$

$$K(y) = 0,15 \quad \text{para } y/\delta > 0,35$$

6.2 - TERMOS DE DIFUSÃO E DISSIPACÃO

As hipóteses de fechamento para estes dois termos foram apresentadas por Beckwith e Bushnell¹⁸. Para isto faremos:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[-\overline{v(Q + P'/\rho)} + \nu \frac{\partial \bar{Q}}{\partial y} \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[\alpha \frac{\partial \bar{Q}}{\partial y} \right]$$

para o termo de difusão e

$$\nu \bar{D} = C_1 \alpha \frac{\bar{Q}}{\lambda_d^2}$$

para o termo de dissipação viscosa.

A função $\alpha(x,y)$ é dada por:

$$\alpha(x,y) = \nu \left[1 + H' \beta k r \right] \quad (6.1)$$

$$H' = \begin{cases} \frac{kr}{r_0} & \text{se } 0 < \frac{kr}{r_0} < 0,75 \\ \frac{kr}{r_0} - \left(\frac{kr}{r_0} - 0,75\right)^2 & \text{se } 0,75 < \frac{kr}{r_0} < 1,25 \\ 1 & \text{se } 1,25 < \frac{kr}{r_0} < \infty \end{cases} \quad (6.2)$$

$$r = \frac{l_d}{v} \sqrt{Q} = \frac{l_d}{v} \sqrt{U^2 Q} \quad (6.3)$$

$$l_d = \phi.33 \delta$$

A função $\phi.33$ é dada pela tabela 6.1 abaixo

y/δ	0	0,2	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	1,4
$\phi.33$	0	0,2	0,3	0,33	0,32	0,3	0,26	0,01

TABELA 6.1

As constantes assumem os seguintes valores:

$$\beta = 0,2$$

$$r_0 = 110$$

$$k = 0,4$$

A constante dissipativa teve seu valor determinado em torno de 6.

Tanto a função $\phi.33$ como o parâmetro de estrutura são dados em função de y/δ . A cada estação seus valores são corrigidos em função do número de pontos na vertical.

6.3 - PERFIS INICIAIS

6.3.1 - VELOCIDADES

O perfil modelado foi o seguinte:

$$u(1,J) = cy \quad \text{para} \quad y/\delta \leq 0,01$$

$$u(1,J) = \left(y/\delta\right)^{\frac{1}{7}} \quad \text{para} \quad y/\delta > 0,01$$

onde

$$c = \frac{(u^*)^2}{U_0^2 \nu}$$

O perfil de Cebeci e Smith²¹ também foi testado:

$$u(1,J) = 39,5338y - 1,6193345 \times 10^3 y^2 + \\ + 39,175433 \times 10^3 y^3 - 453,744745 \times 10^3 y^4$$

$$\text{para} \quad 0 \leq y \leq 0,07 \text{cm}$$

$$u(1,J) = 0,605772038 + 0,790956858y - \\ - 0,34408574y^2 - 0,0546494158y^3$$

$$\text{para} \quad 0,07 \leq y \leq 0,93 \text{cm}$$

6.3,2 - ENERGIA CINÉTICA

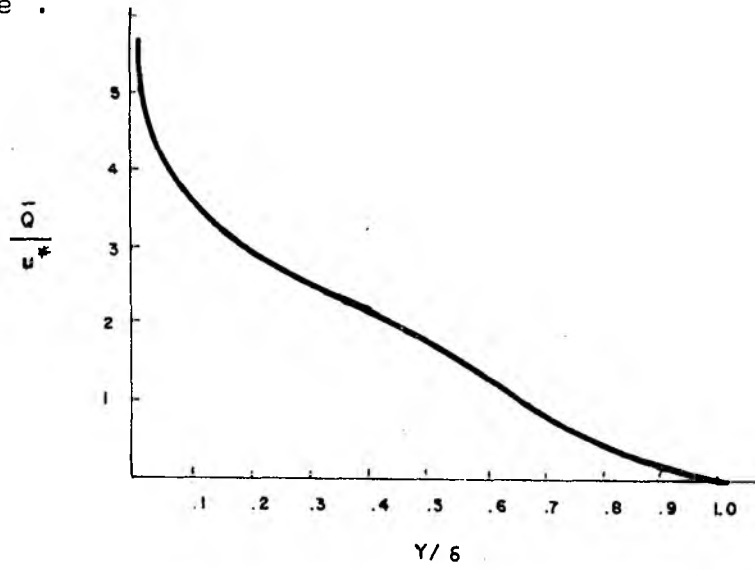
Os perfis de energia cinética são dados na forma discreta para cada um dos casos analisados. Os dados obtidos por Klebanoff são utilizados na placa plana enquanto que para o canal tomou-se os próprios valores encontrados por So e Mellor numa estação inicial.

A tabela abaixo registra os valores tomados:

TABELA 6.2

y/δ	PL/PLANA	CANAL	K(y)
	$\bar{2Q}/(u^*)^2$	$\bar{2Q}/U_0^2$	
0,00006	0,066	-	-
0,0001	0,11	$5,5 \times 10^{-6}$	0,000279
0,001	1,1	$5,5 \times 10^{-5}$	0,00279
0,01	11,0	$5,5 \times 10^{-4}$	0,0279
0,1	6,85	$5,5 \times 10^{-3}$	0,14
0,15	6,4	$4,7 \times 10^{-3}$	0,14
0,2	6,0	4×10^{-3}	0,14
0,3	5,2	3×10^{-3}	0,14
0,4	4,5	2×10^{-3}	0,145
0,5	3,5	1×10^{-3}	0,15
0,55	3	$7,5 \times 10^{-4}$	0,15
0,6	2,5	5×10^{-4}	0,15
0,7	1,8	4×10^{-4}	0,15
0,8	1	3×10^{-4}	0,15
0,9	0,4	2×10^{-4}	0,15
0,99	0,01	1×10^{-5}	0,15

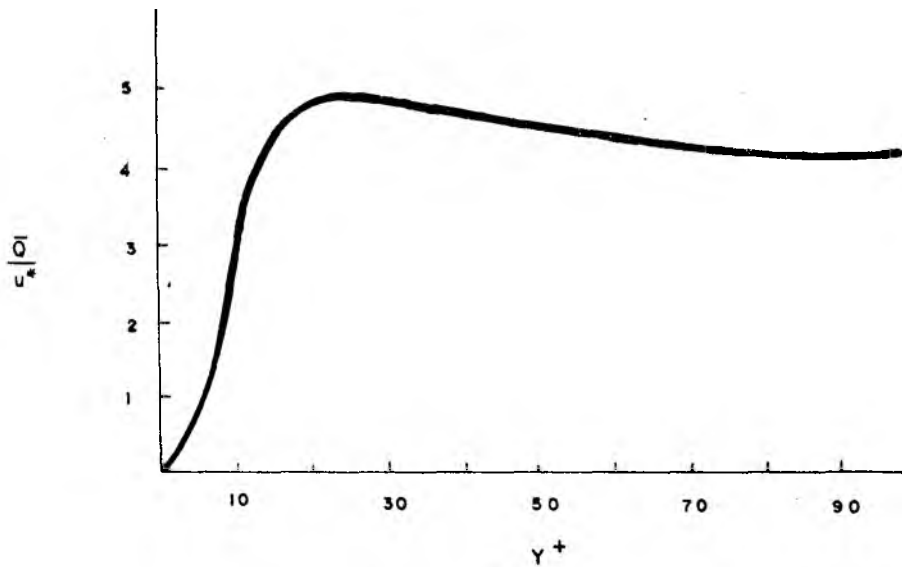
A distribuição de energia cinética segundo Klebanoff é dada por Hinze .



ENERGIA CINÉTICA TURBULENTA

Fig. 6.2

e próximo a parede:



ENERGIA CINÉTICA TURBULENTA

Fig. 6.3

A N E X O 7

GRÁFICOS EM ANEXO

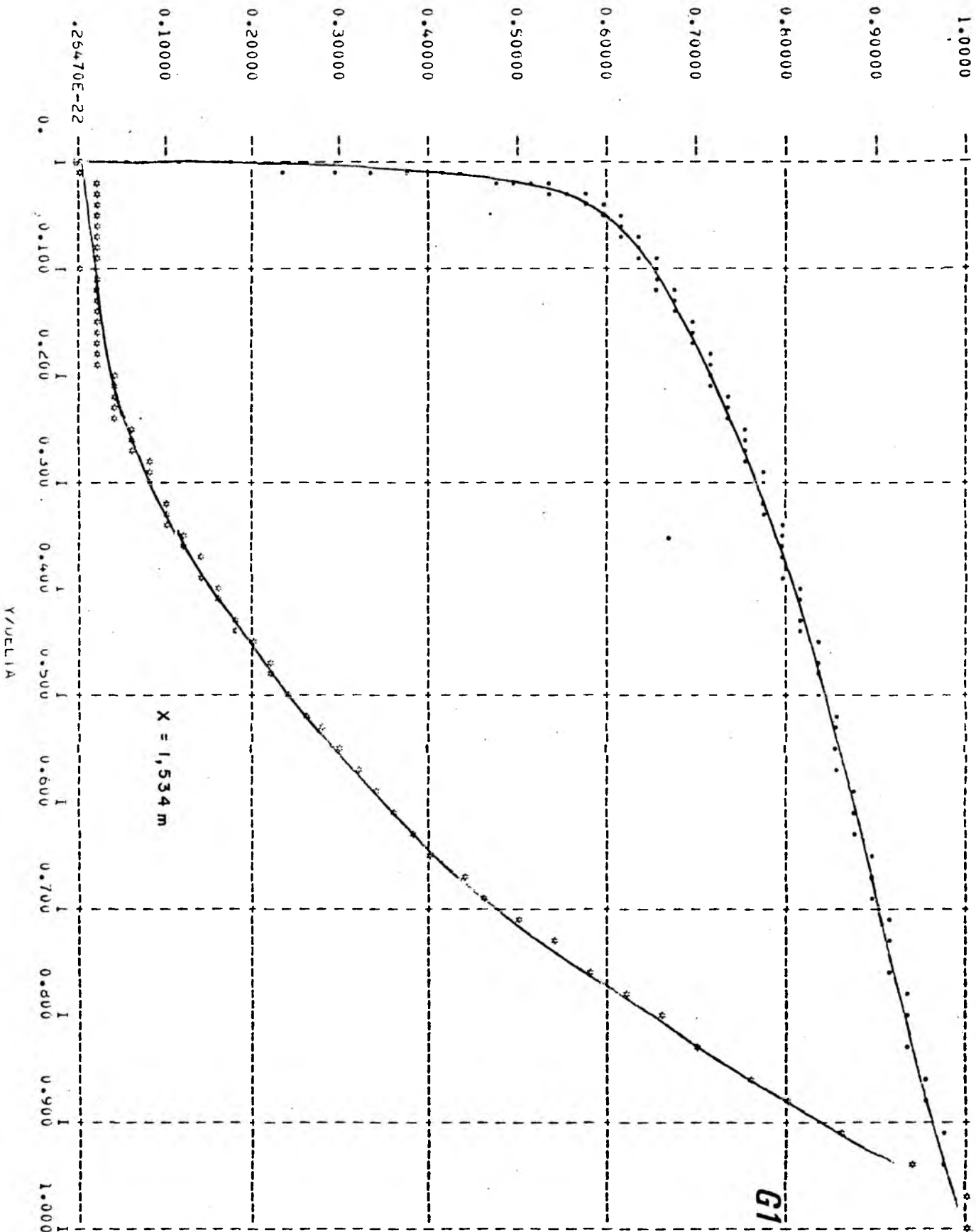
G1	u	x	y/δ	placa plana
	v	x	y/δ	placa plana
G2	u^+	x	$\text{Log}_{10} (y^+)$	placa plana
	v^+	x	$\text{Log}_{10} (y^+)$	placa plana
G3	$\frac{U_0 - u}{u^*}$	x	y/δ	placa plana
G4	$\frac{2\bar{Q}}{u^{*2}}$	x	y/δ	placa plana
G5	BALANÇO DE ENERGIA			placa plana
G6	BALANÇO DE ENERGIA			placa plana
G7	BALANÇO DE TENSÃO			placa plana
G8	COEFICIENTE DE FRICÇÃO			placa plana
G9	ESPESSURAS			placa plana
G10	Nº DE REYNOLDS			placa plana
G11	FATOR DE FORMA			placa plana
G12	u	x	y	canal
G13	u^+	x	$\text{Log}_{10} (y^+)$	canal
G14	$\frac{U_0 - u}{u^*}$	x	$\text{Log}_{10} (y/\delta^*)$	canal
G15	BALANÇO DE ENERGIA			canal
G16	$\frac{2\bar{Q}}{u^{*2}}$	x	y/δ	canal
G17	$\frac{2\bar{Q}}{U_0^2}$	x	y/δ	canal
G18	COEFICIENTE DE FRICÇÃO			canal
G19	ESPESSURAS			canal
G20	FATOR DE FORMA			canal

COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS DE
WIEGHARDT COM OS DO PROGRAMA:
"PLACA PLANA"

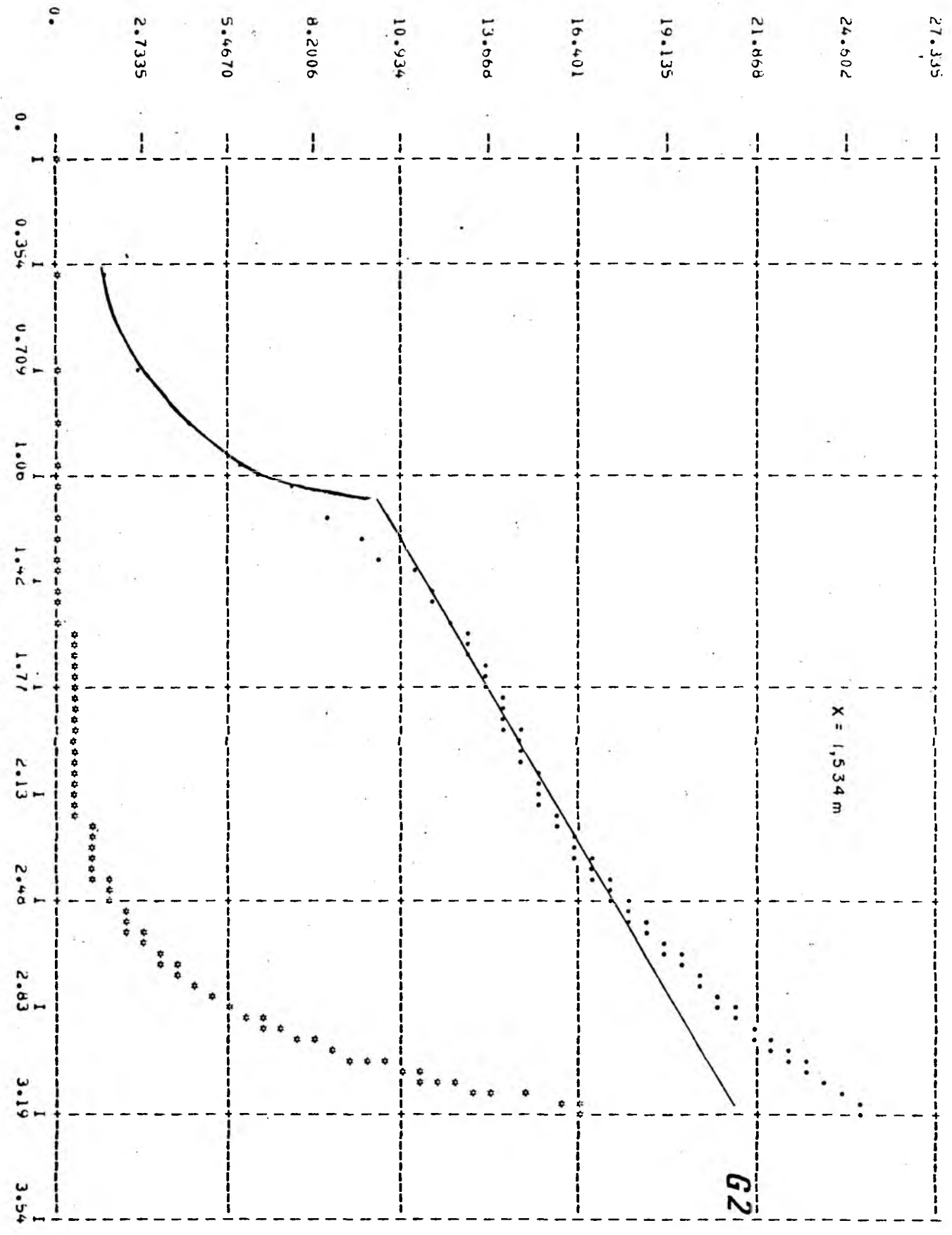
DADOS DE WIEGHARDT - PLACA PLANA - $U_0 = 33$ M/S

X	U_i	DUI	THETA	H	Hs	G	CF	CFLT
0,087	33,10	0,0	0,021	2,102	1,836	10,148	0,00534	0,00179
0,187	32,80	0,0	0,049	1,642	1,803	8,491	0,00424	0,00292
0,287	33,00	0,0	0,071	1,543	1,793	8,012	0,00396	0,00308
0,387	32,80	0,0	0,042	1,503	1,783	7,838	0,00364	0,00307
0,487	33,00	0,0	0,110	1,469	1,784	7,692	0,00345	0,00308
0,637	33,00	0,0	0,131	1,438	1,786	7,414	0,00337	0,00309
0,787	33,00	0,0	0,157	1,428	1,779	7,523	0,00317	0,00299
0,937	32,90	0,0	0,177	1,401	1,787	7,186	0,00317	0,00302
1,087	33,00	0,0	0,201	1,397	1,783	7,235	0,00308	0,00294
1,237	33,00	0,0	0,222	1,390	1,782	7,236	0,00301	0,00289
1,437	32,90	0,0	0,251	1,382	1,781	7,211	0,00293	0,00283
1,687	32,90	0,0	0,286	1,377	1,780	7,266	0,00284	0,00276
1,987	33,00	0,0	0,328	1,365	1,782	7,175	0,00278	0,00270
2,287	33,00	0,0	0,374	1,358	1,358	7,189	0,00269	0,00264
2,587	32,90	0,0	0,408	1,345	1,786	7,039	0,00266	0,00263
2,887	33,00	0,0	0,449	1,340	1,787	7,035	0,00260	0,00259
3,187	33,00	0,0	0,486	1,333	1,789	6,932	0,00260	0,00256
3,487	33,00	0,0	0,525	1,331	1,789	6,954	0,00256	0,00252
3,787	33,00	0,0	0,559	1,330	1,788	6,971	0,00253	0,00248
4,087	33,00	0,0	0,597	1,334	1,787	7,130	0,00247	0,00242
4,387	33,00	0,0	0,642	1,321	1,790	6,917	0,00247	0,00242
4,687	33,00	0,0	0,671	1,314	1,794	6,819	0,00248	0,00242
4,987	33,00	0,0	0,710	1,314	1,793	6,856	0,00243	0,00238

V E L L O C I T A D E
U •
E
V * 0.30000

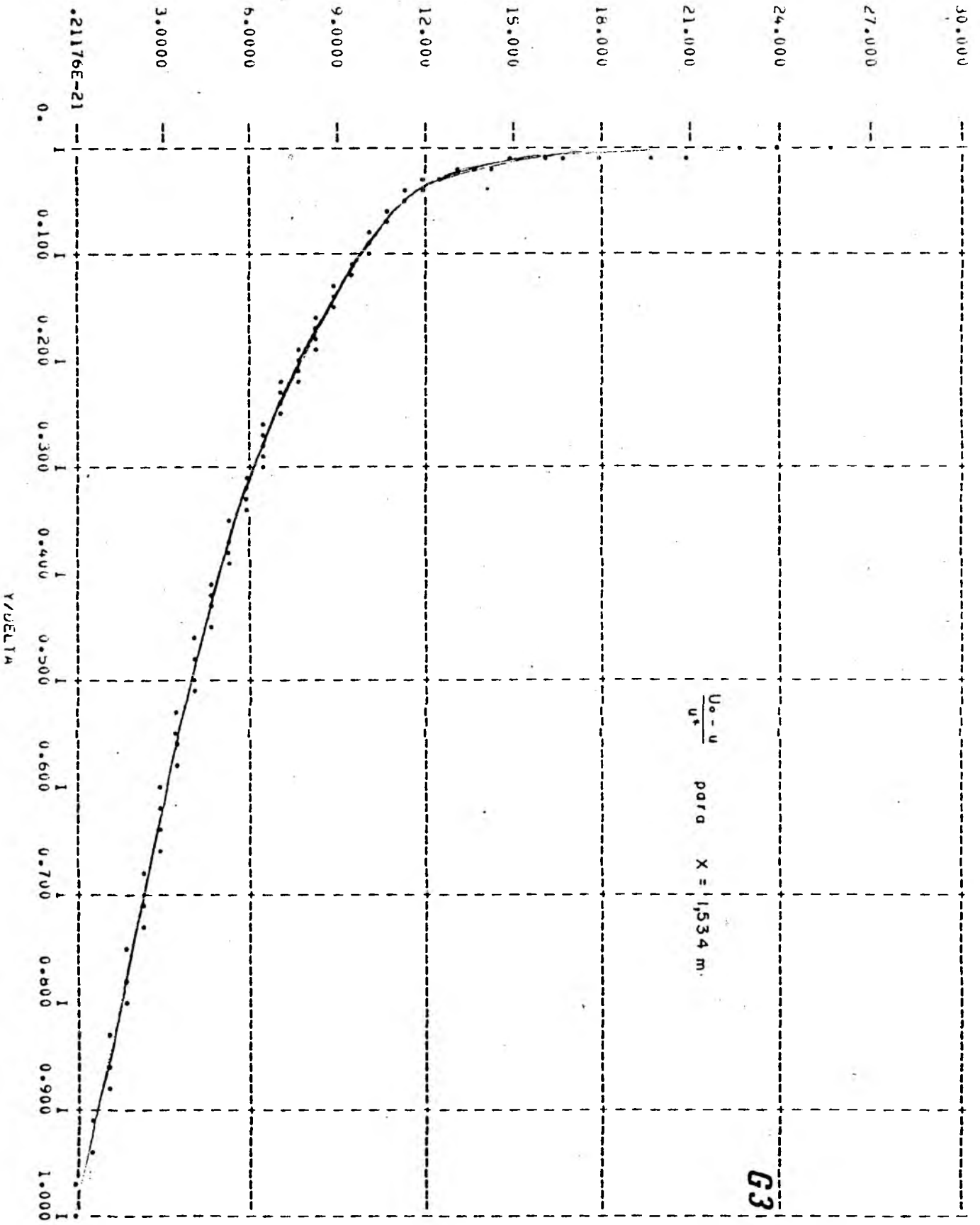


U
M
A
I
S
E
V
A
I
S



$\text{Log}_{10} (Y \cdot \text{USIA} / \text{R} / \text{VISC})$

D I F F E R E N C I A L I D A D E

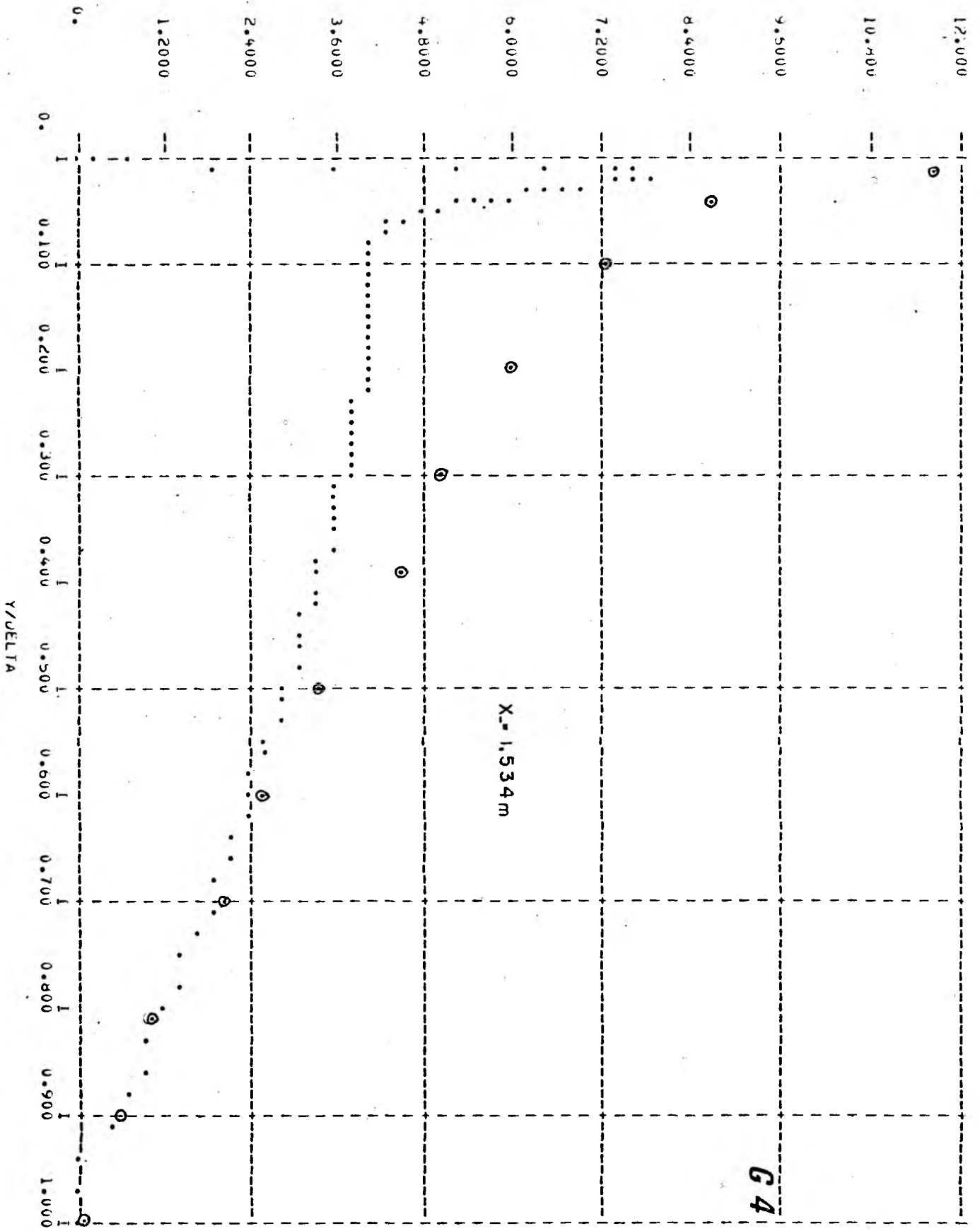


para $X = 1,534$ m.

G3

21176E-21

E N E R G I A C I N E T I C A



R A L A N C O D E E N E R G I A

1.5127

1.3915

1.1103

0.82909

0.54790

0.25670

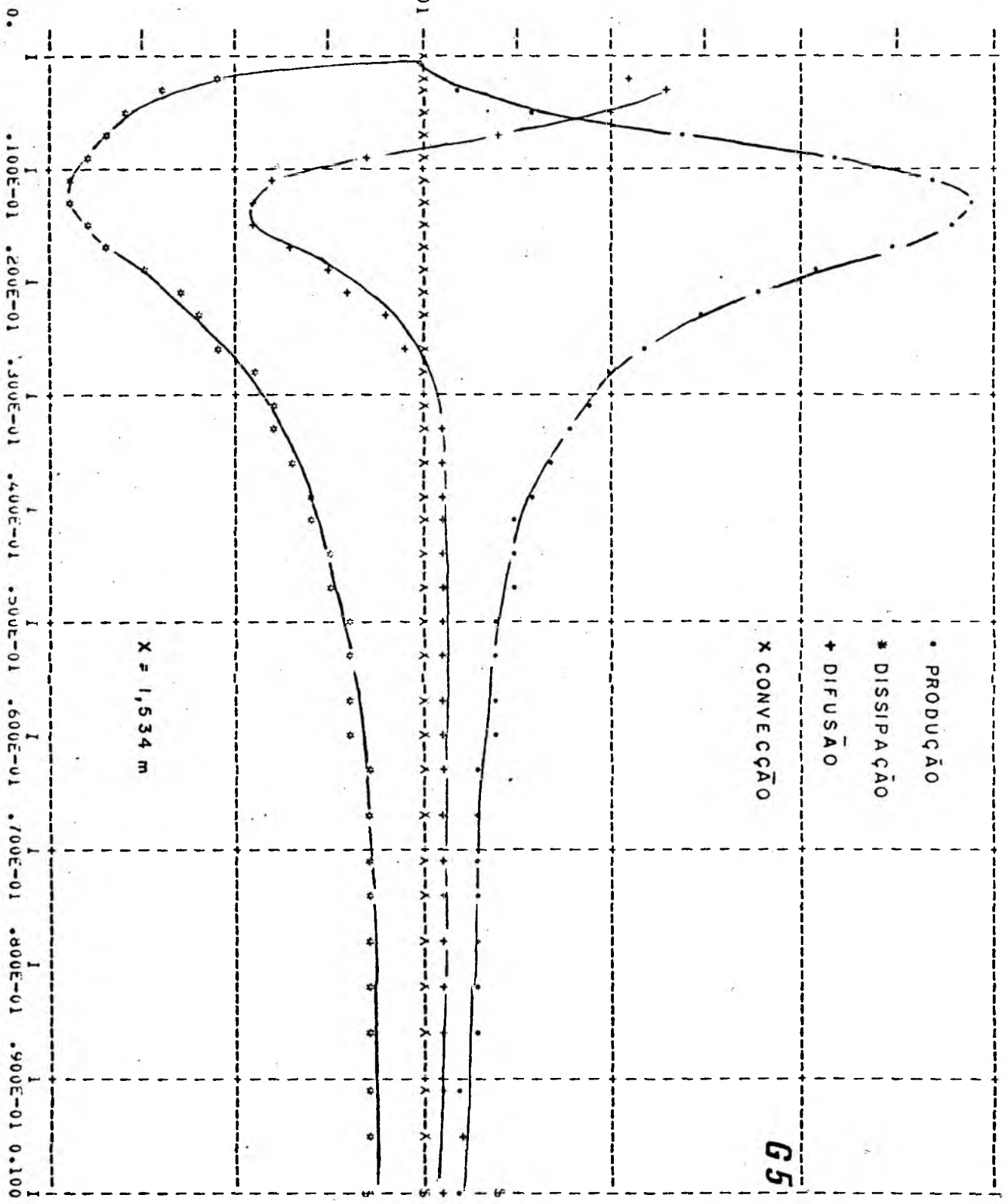
-0.14496E-01

-0.29569

-0.57689

-0.85808

-1.1393

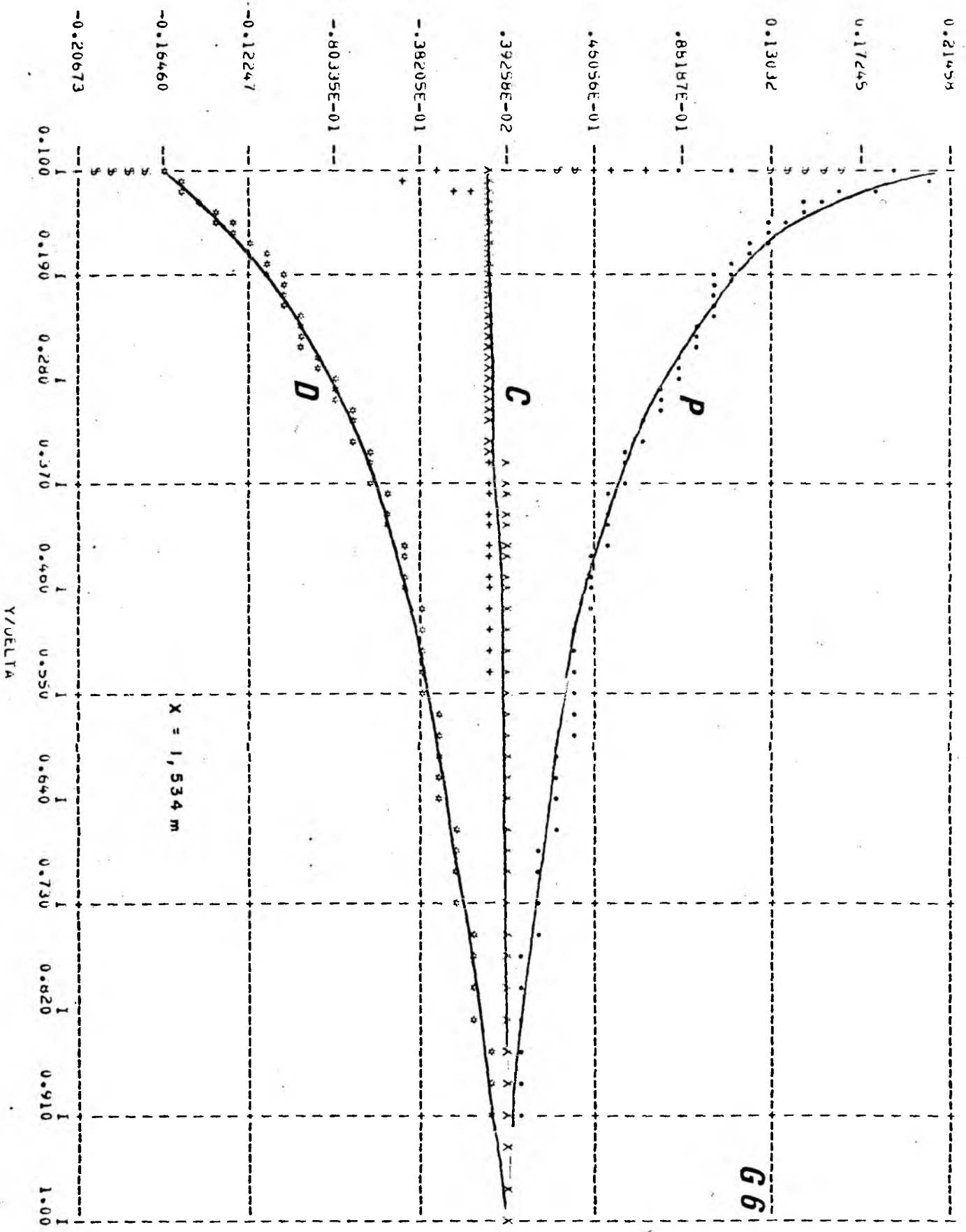


X = 1,534 m

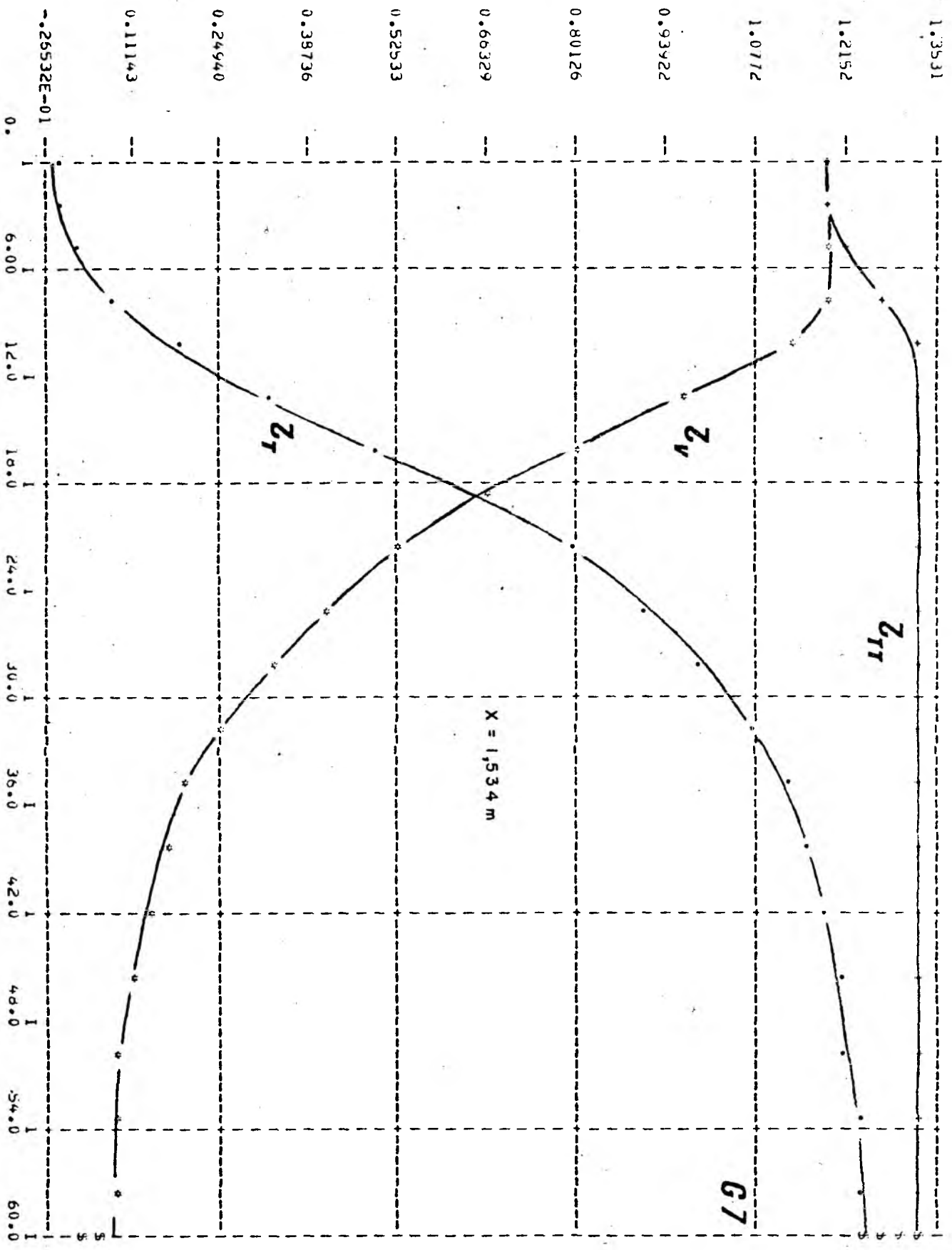
G5

VIVELLA

H A L A N C O D E E N E R G I A



TITUR
 R U .
 R T .
 T V I *
 S I *
 C T T
 T O +
 T A
 L



Y*UStAK/VISC

X = 1,534 m

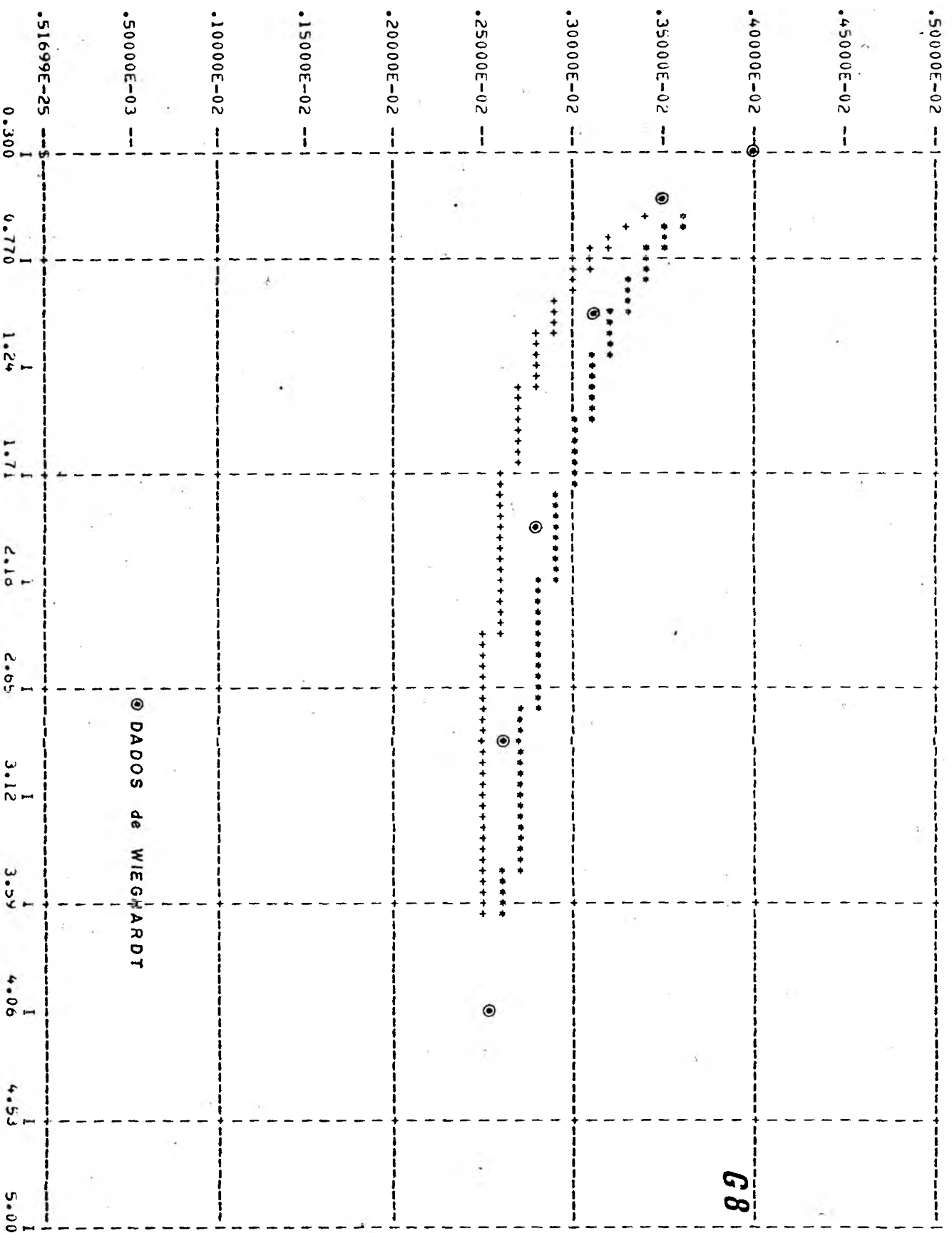
G7

Z1

Z2

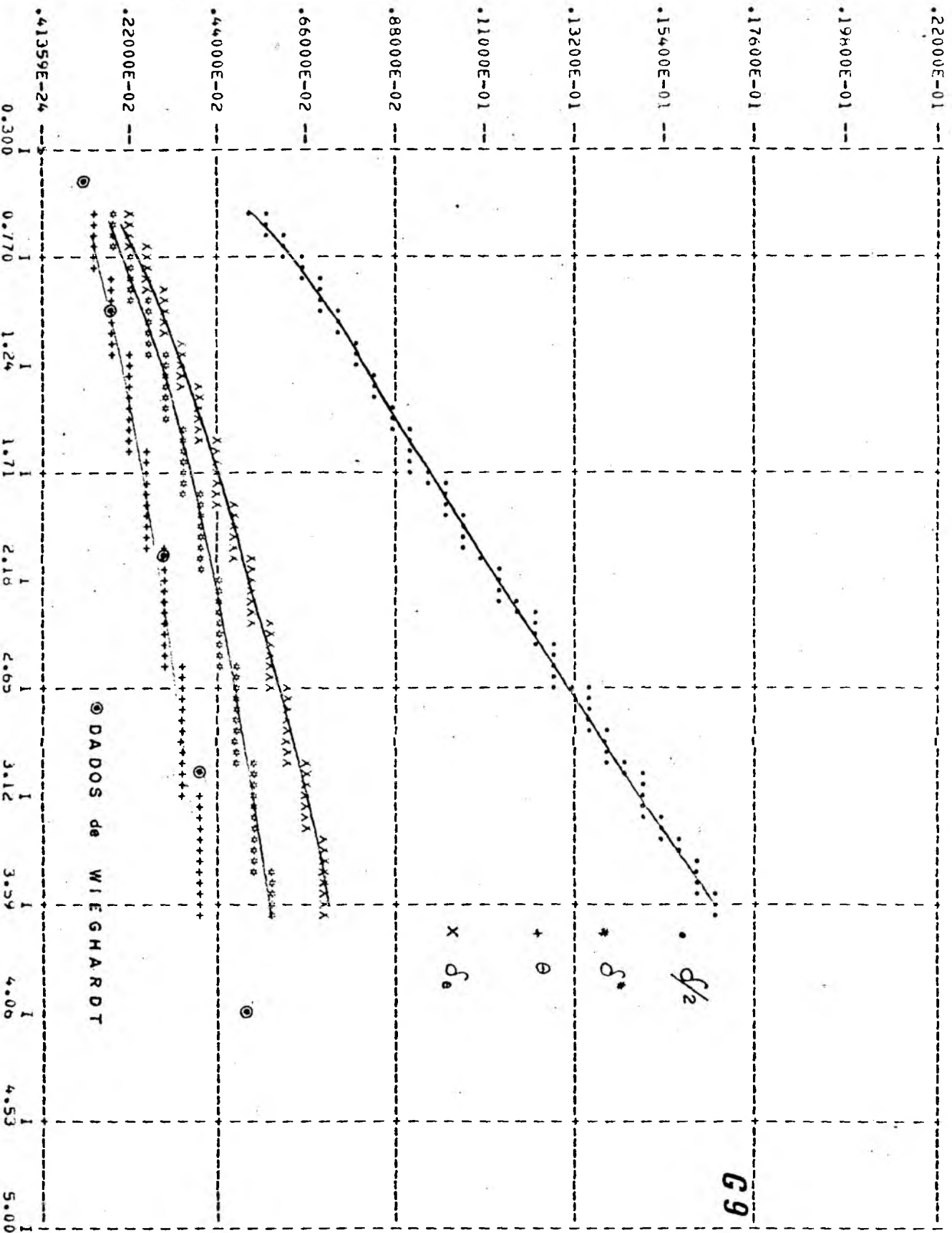
Z1

C O N F I C I E N T E C C A O

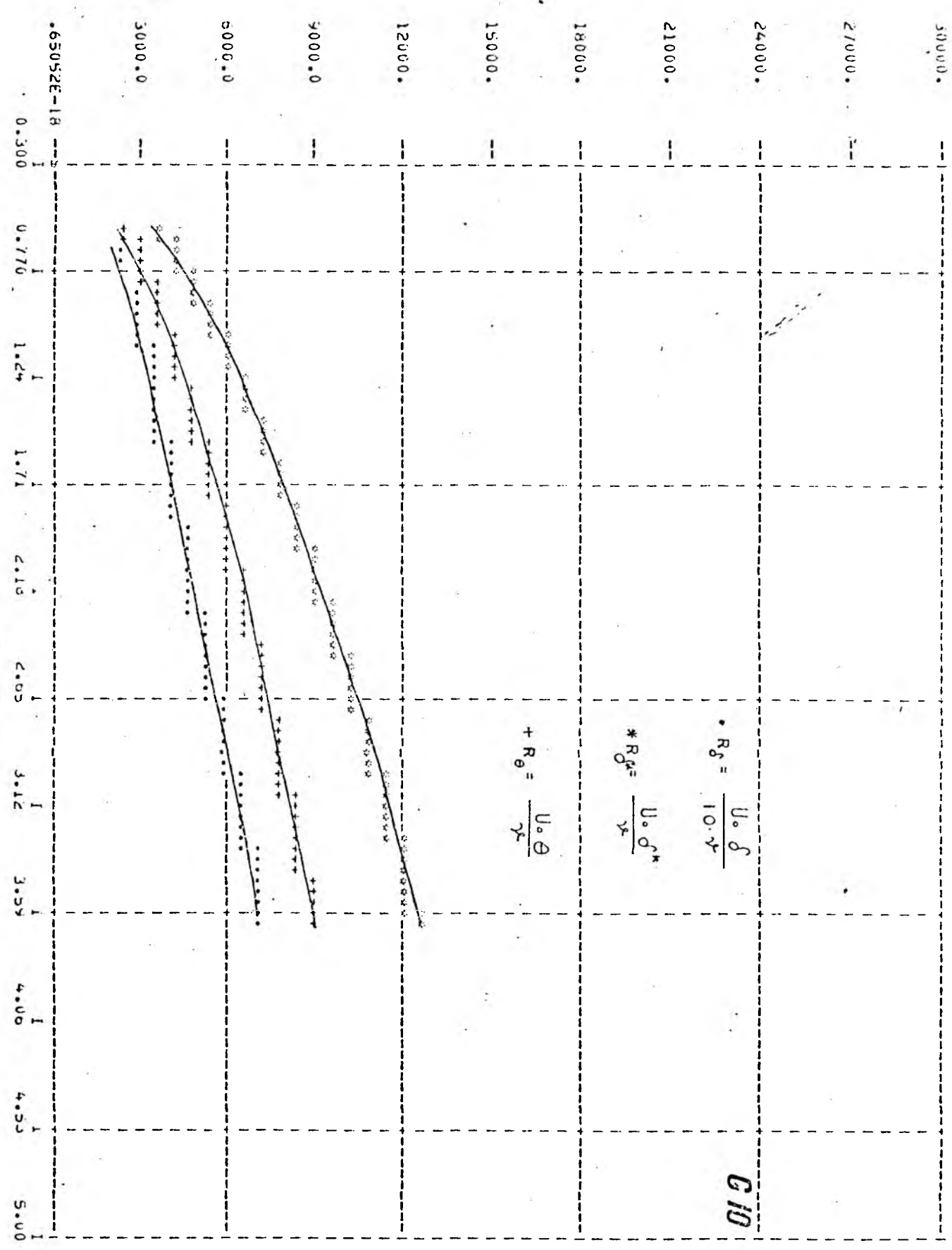


G8

ESPESURAS D A C A M A D A



NUMERO DE REYNOLDS



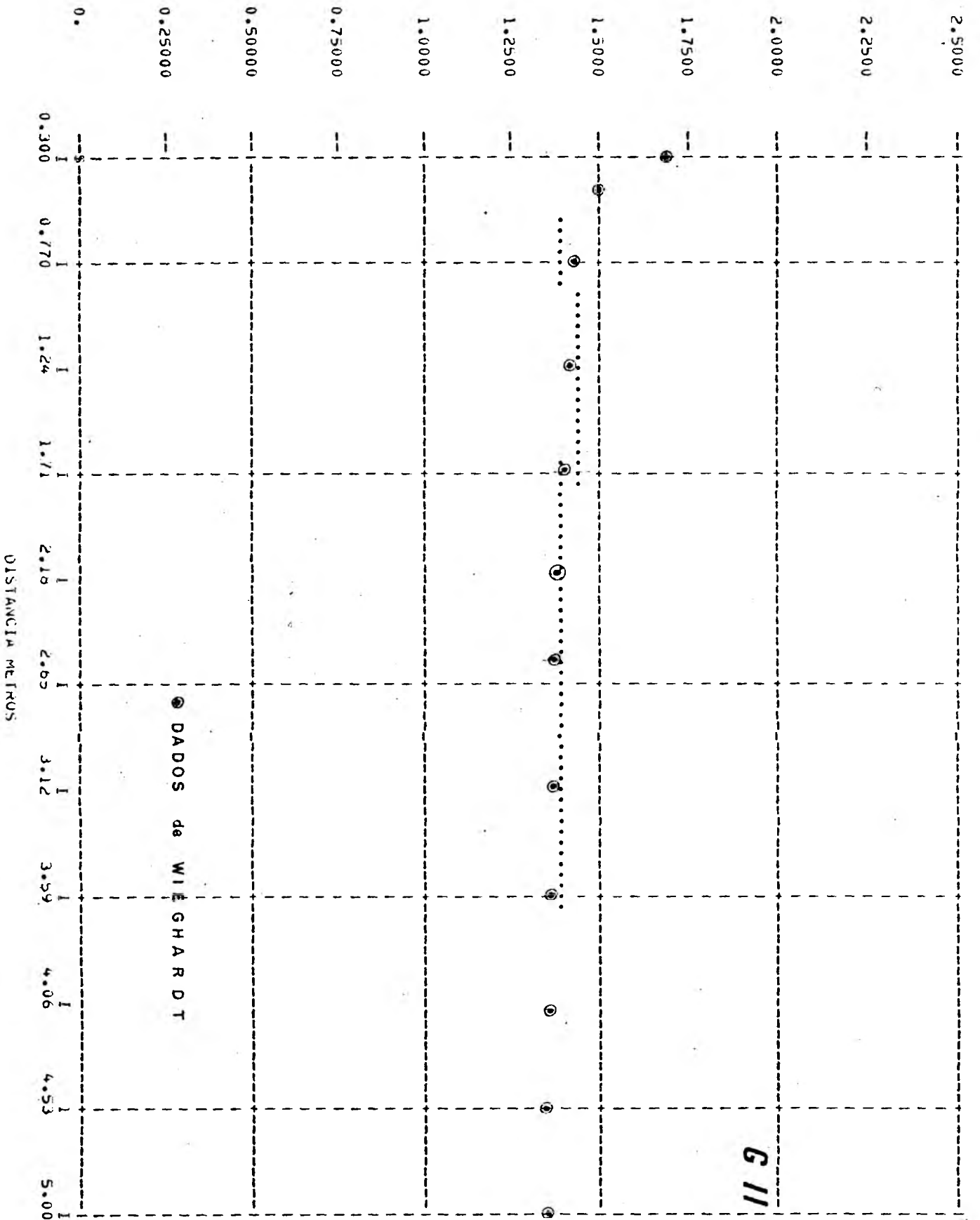
$$R_{\delta} = \frac{U_0 \delta}{10 \cdot \nu}$$

$$* R_{\delta}^* = \frac{U_0 \sigma^*}{\nu}$$

$$+ R_{\theta} = \frac{U_0 \theta}{\nu}$$

C10

F A T O R D E F O R M A



COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS DE
SO E MELLOR COM OS DO PROGRAMA
"CANAL"

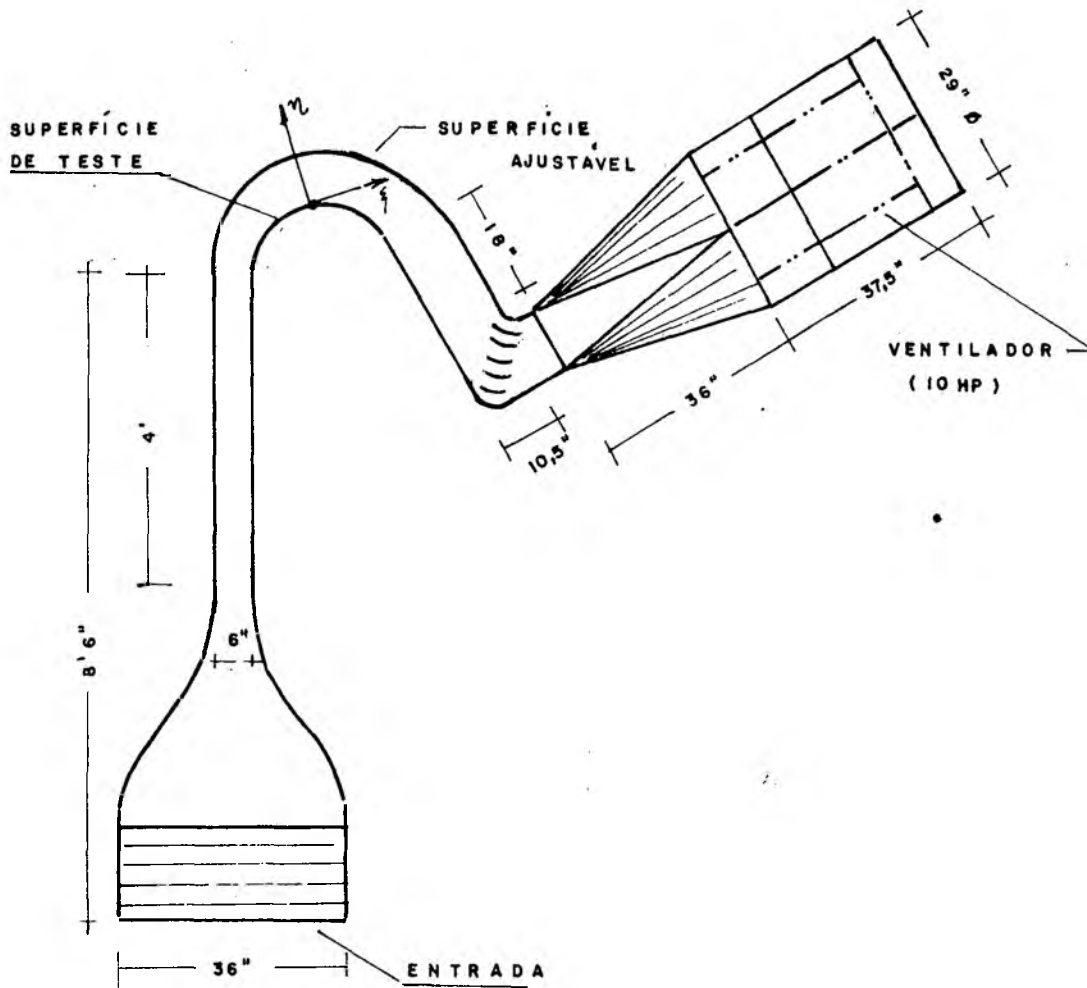
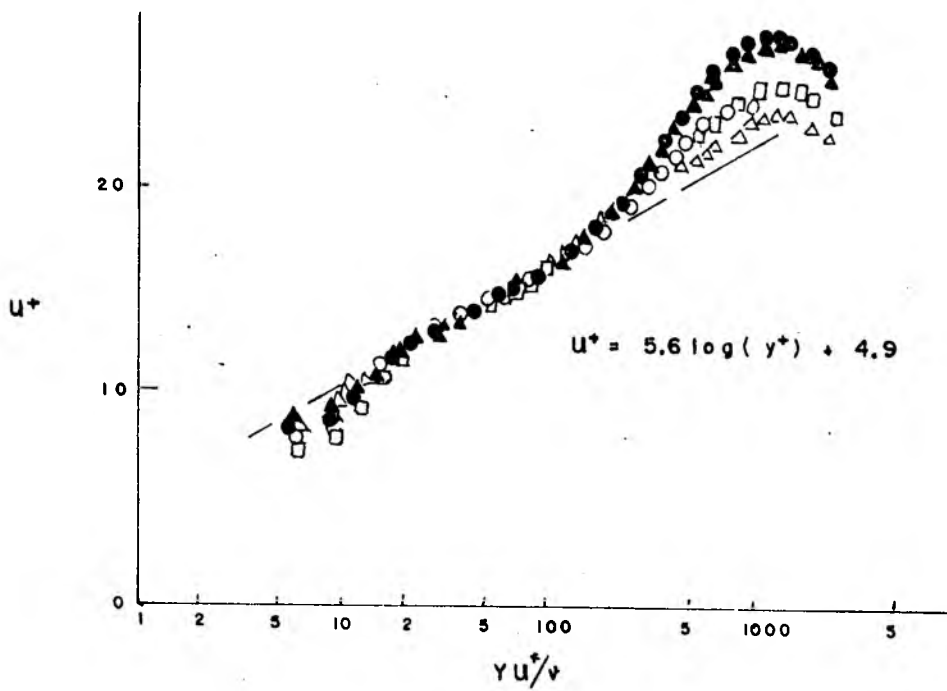
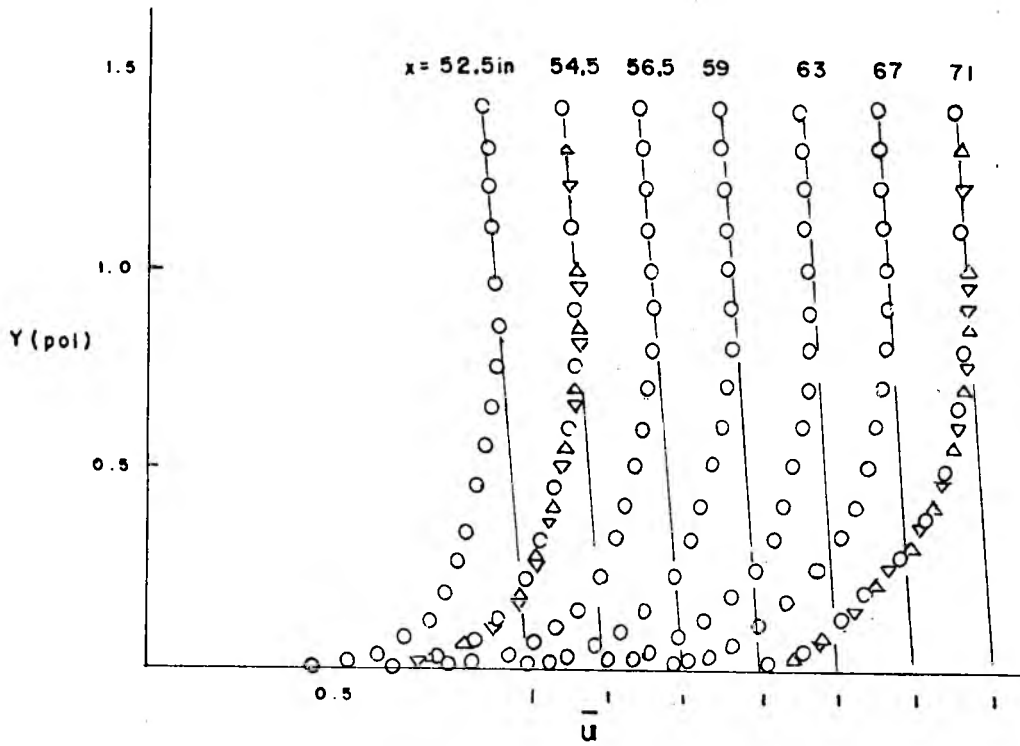
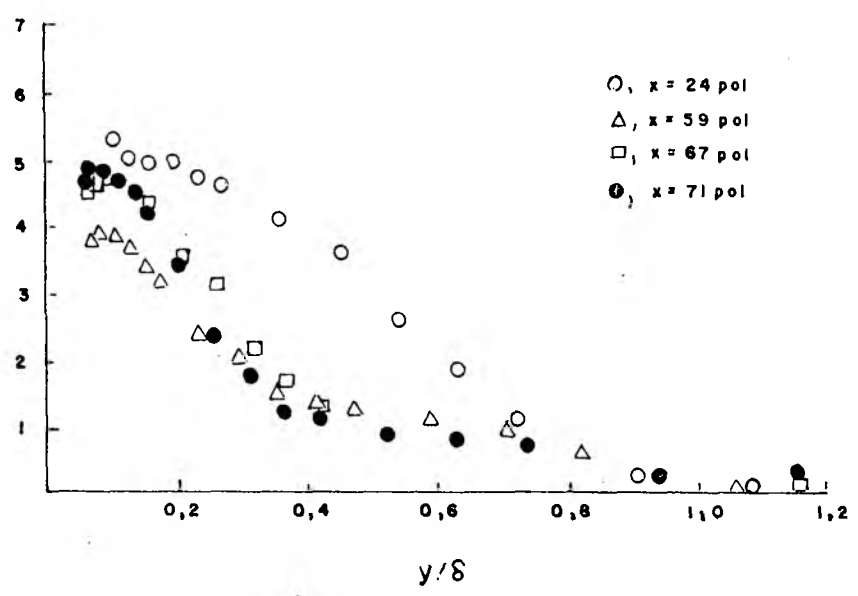
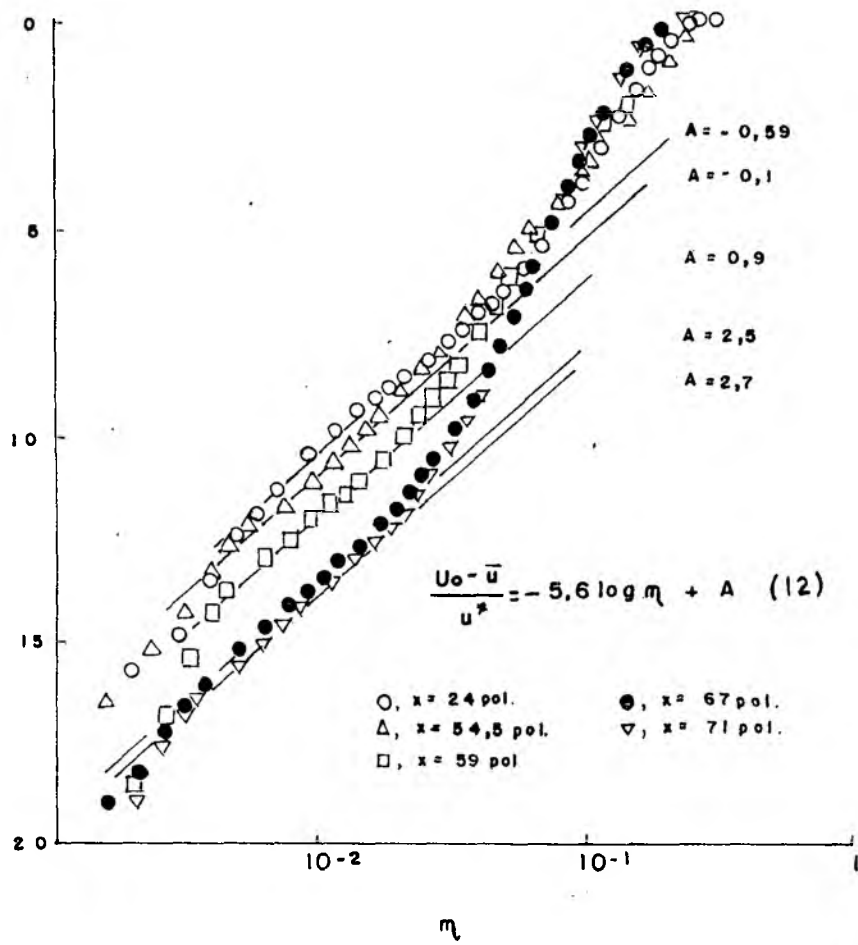


DIAGRAMA DA SUPERFICIE CURVA TESTADA POR
 R.M.C. SO E G.L. MELLOR¹²

DISTRIBUIÇÃO DE VELOCIDADES ¹²



○, $x = 24in$ - △ $x = 54.5in$ - □ $x = 59in$ - ▲, $x = 57in$ - ●, $x = 71in$

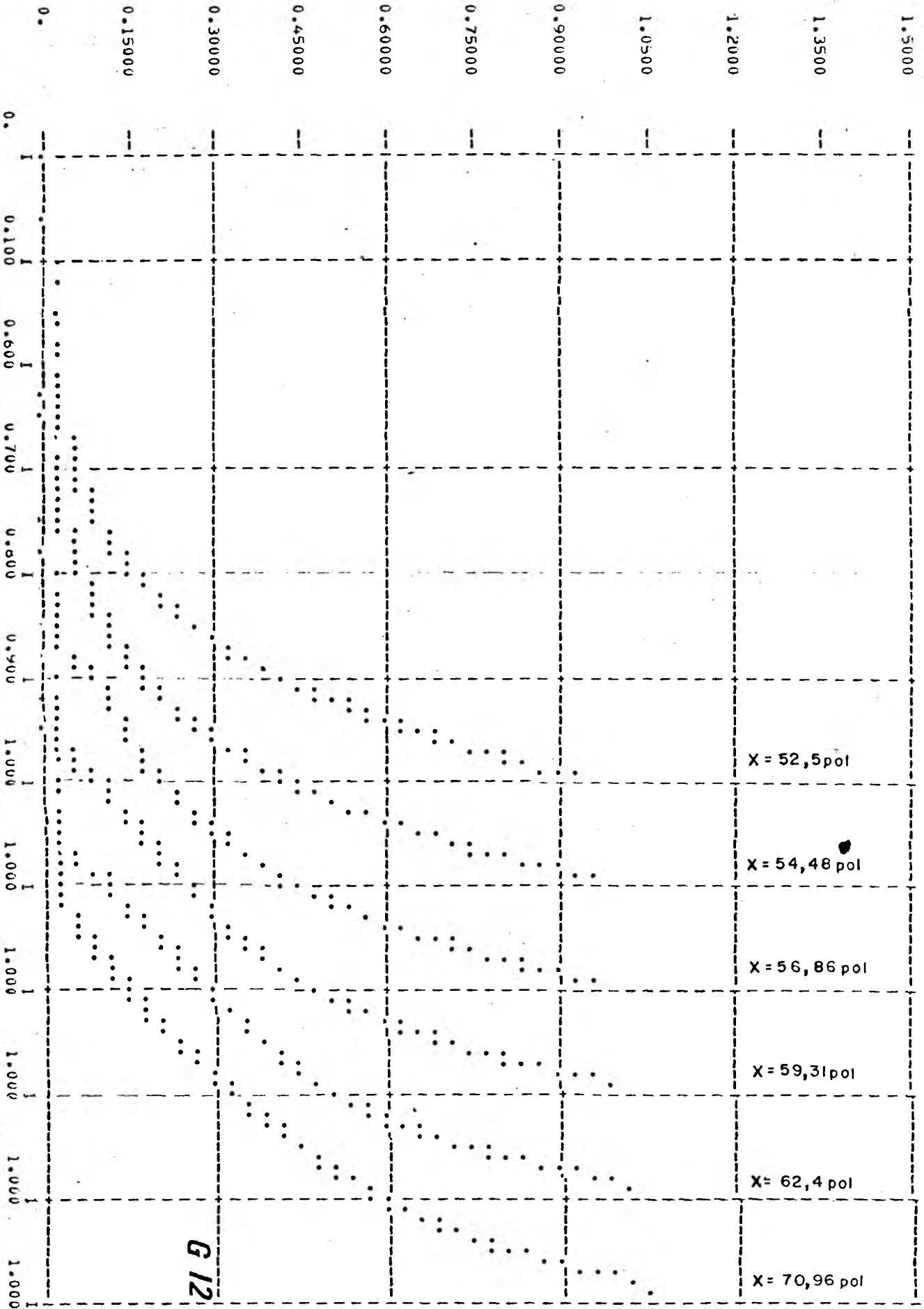


ENERGIA CINÉTICA TURBULENTA ($2\bar{Q}/u^*$) (12)

DADOS DE R.M.C SO E G.L. MELLOR

X	R	U _o	δ	δ*	θ	C _f
(Po1)	(Po1)	(Pe/s)	(Po1)	(Po1)	(Po1)	-
24,0	∞	70,27	0,55	0,083	0,059	0,00352
52,5	10,59	78,74	0,95	0,112	0,085	0,00336
54,5	10,89	78,87	0,95	0,118	0,087	0,00310
56,5	11,20	78,78	0,95	0,125	0,091	0,00290
59,0	11,52	78,34	0,95	0,130	0,093	0,00275
63,0	11,84	78,66	0,95	0,133	0,094	0,00248
67,0	12,82	78,79	0,95	0,146	0,100	0,00243
71,0	12,82	78	0,95	0,155	0,105	0,00233

Y
R
E
A
L



G 12

X = 52,5 pol

X = 54,48 pol

X = 56,86 pol

X = 59,31 pol

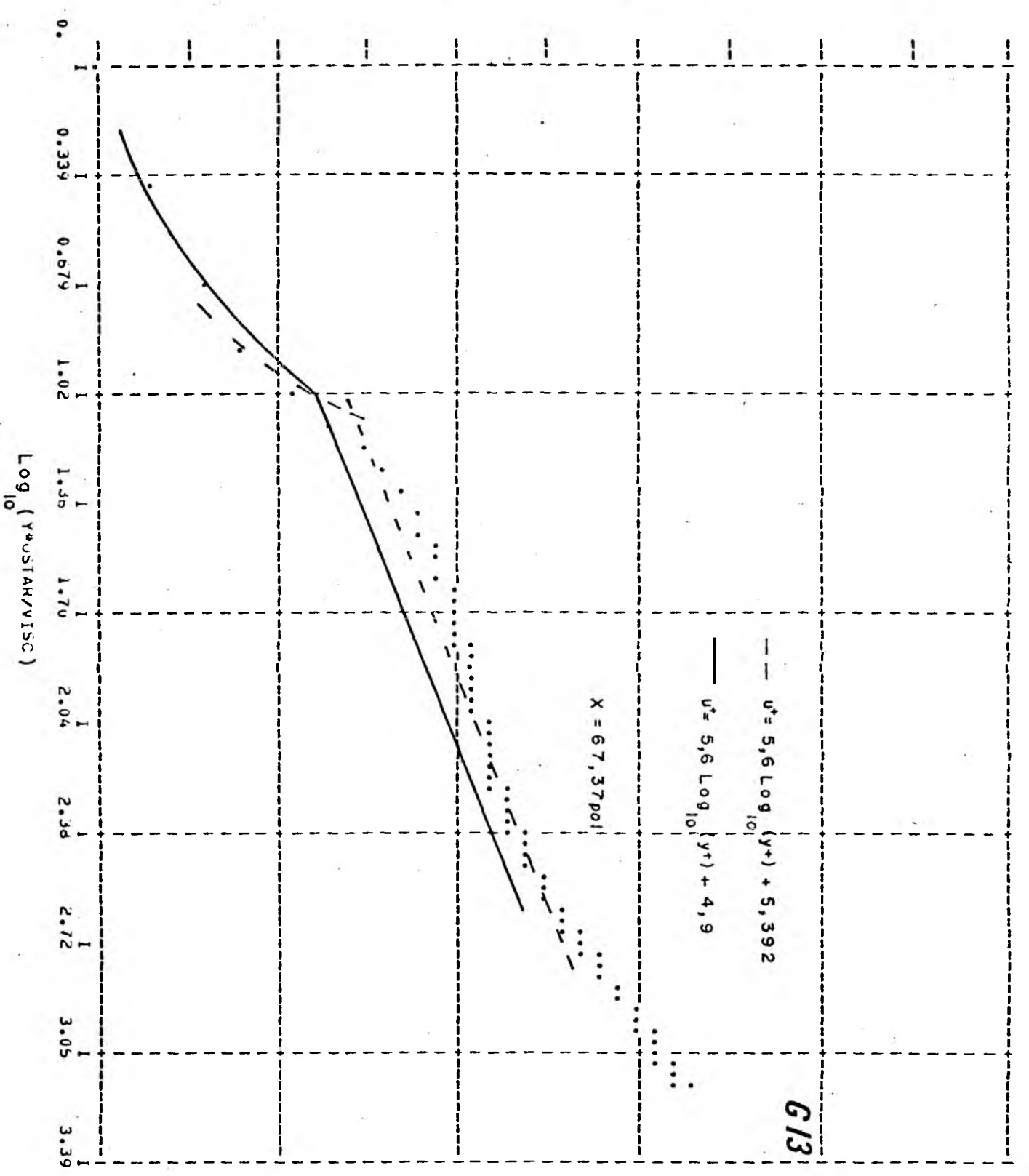
X = 62,4 pol

X = 70,96 pol

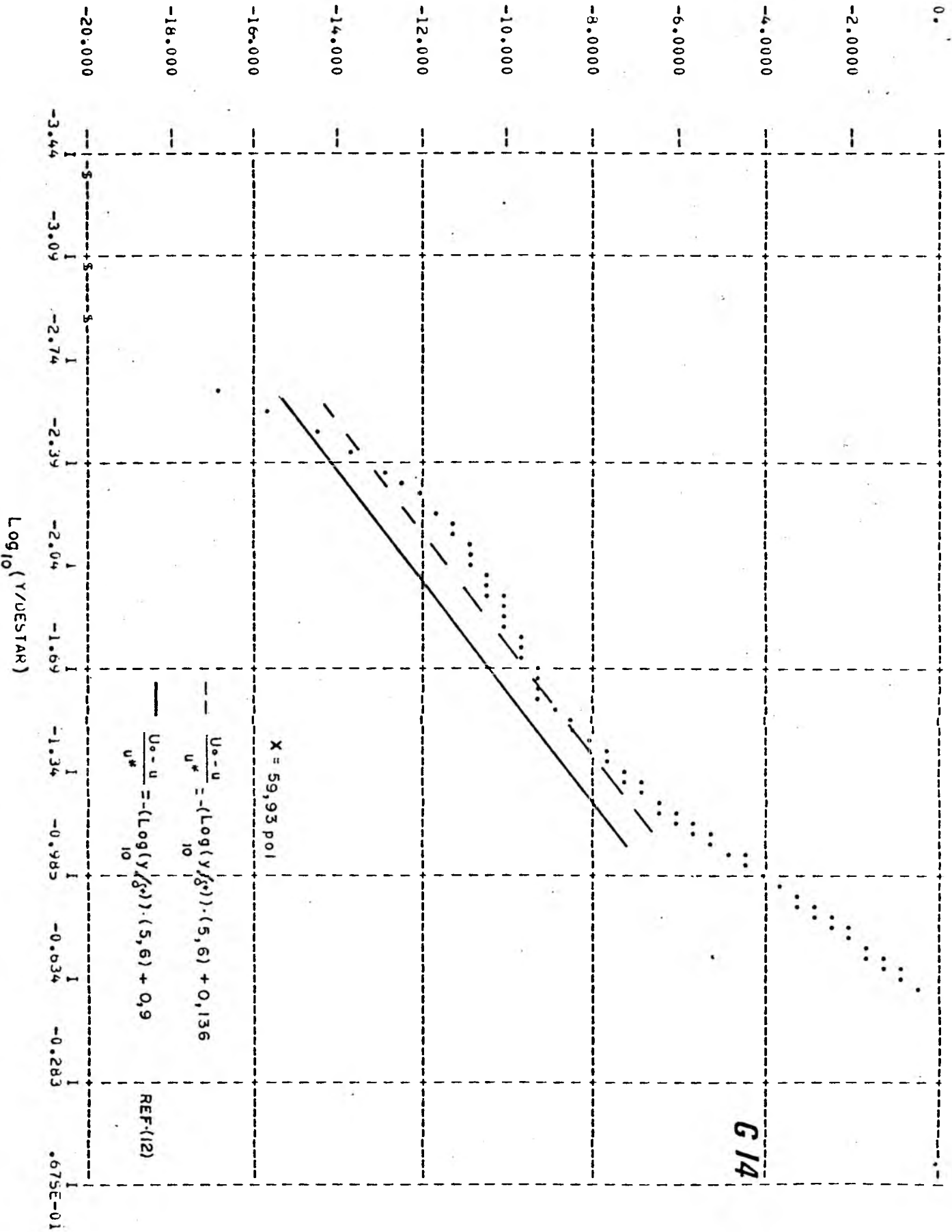
u

U
M
A
I
S

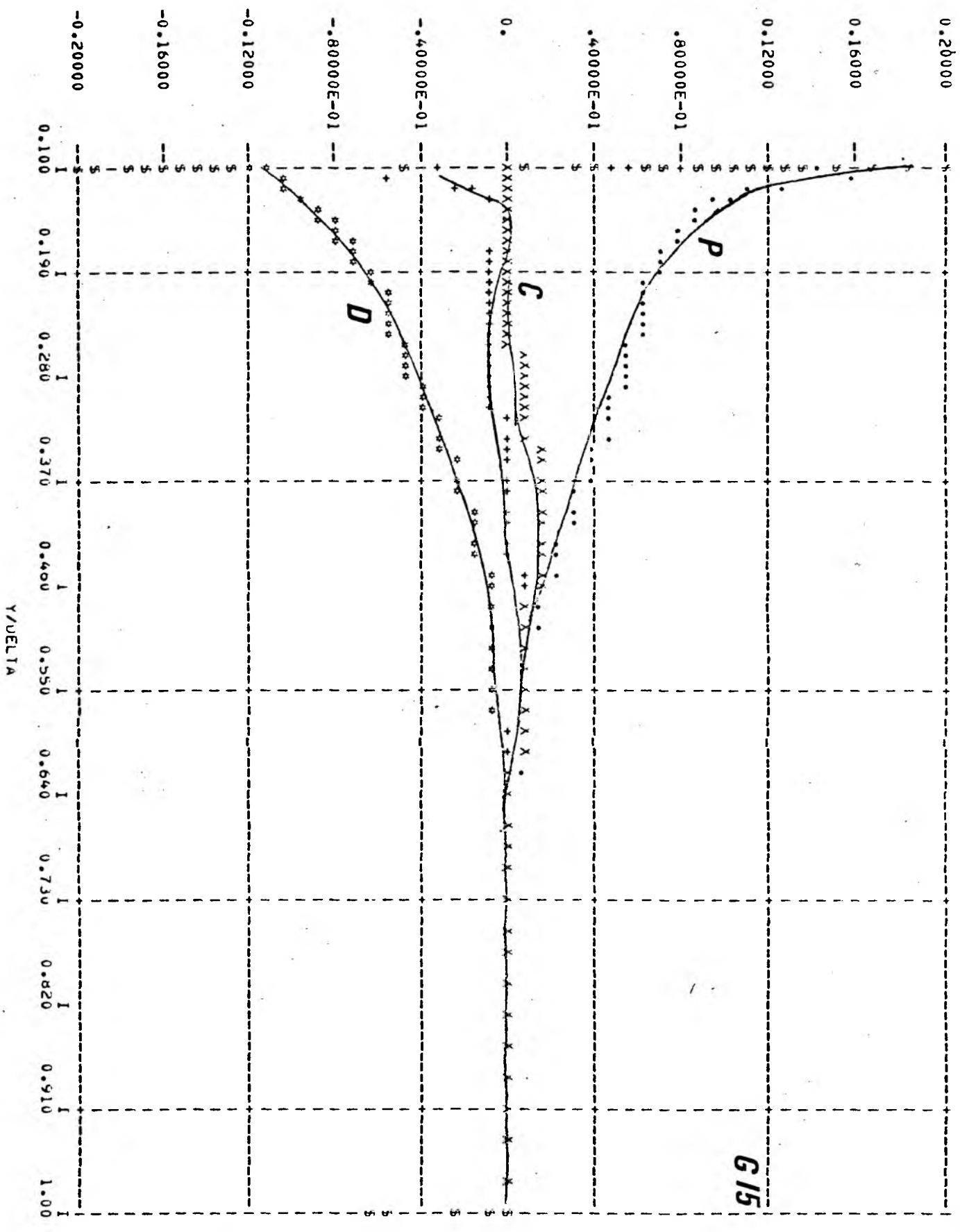
42.887
38.599
34.310
30.021
25.732
21.444
17.155
12.866
8.5775
4.2887
0.



D I F F E R E N C A L
V E L



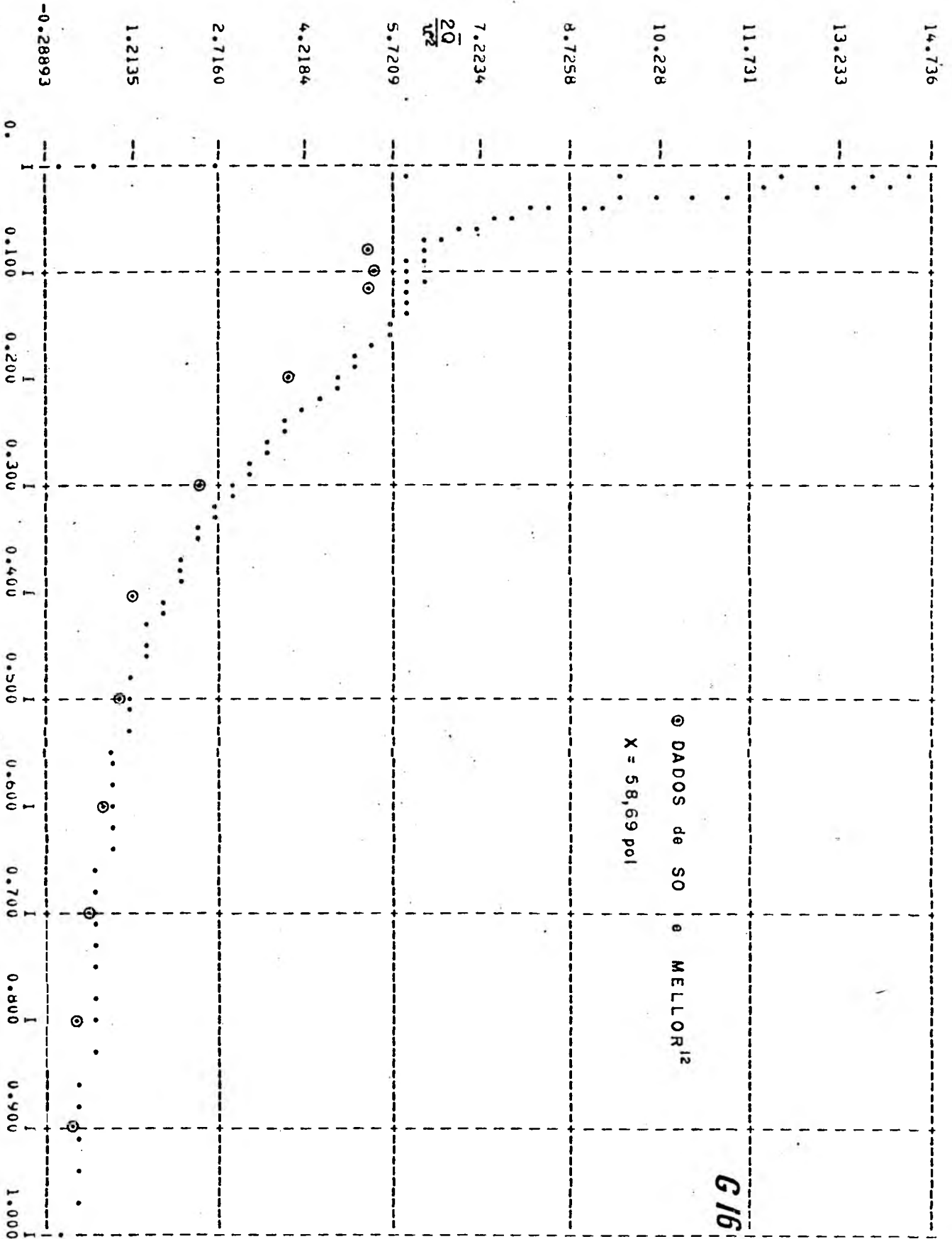
P R O D U C T I O N
D E E N E R G I A



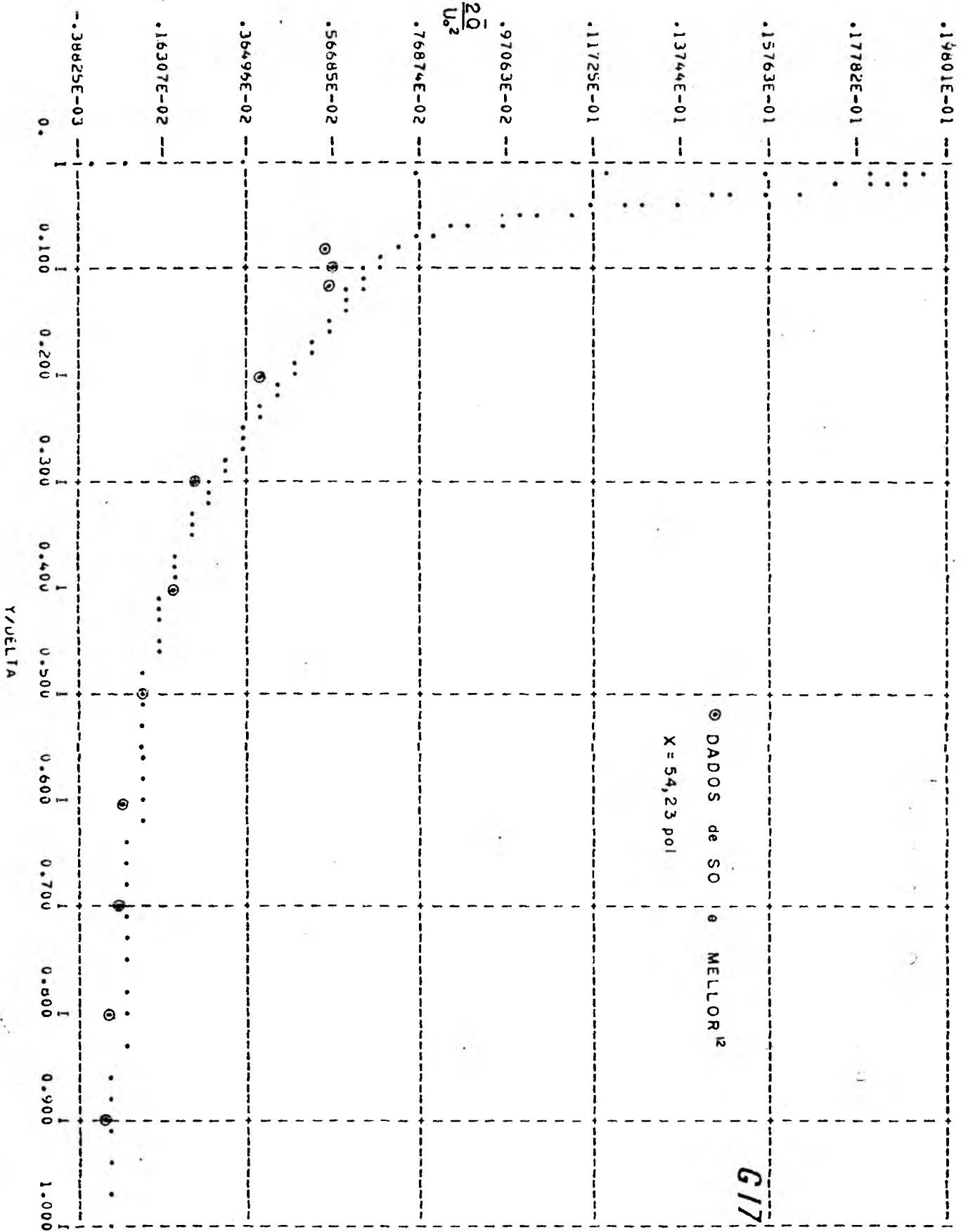
G15

Y/Delta

E N E R G I A C I N E T I C A

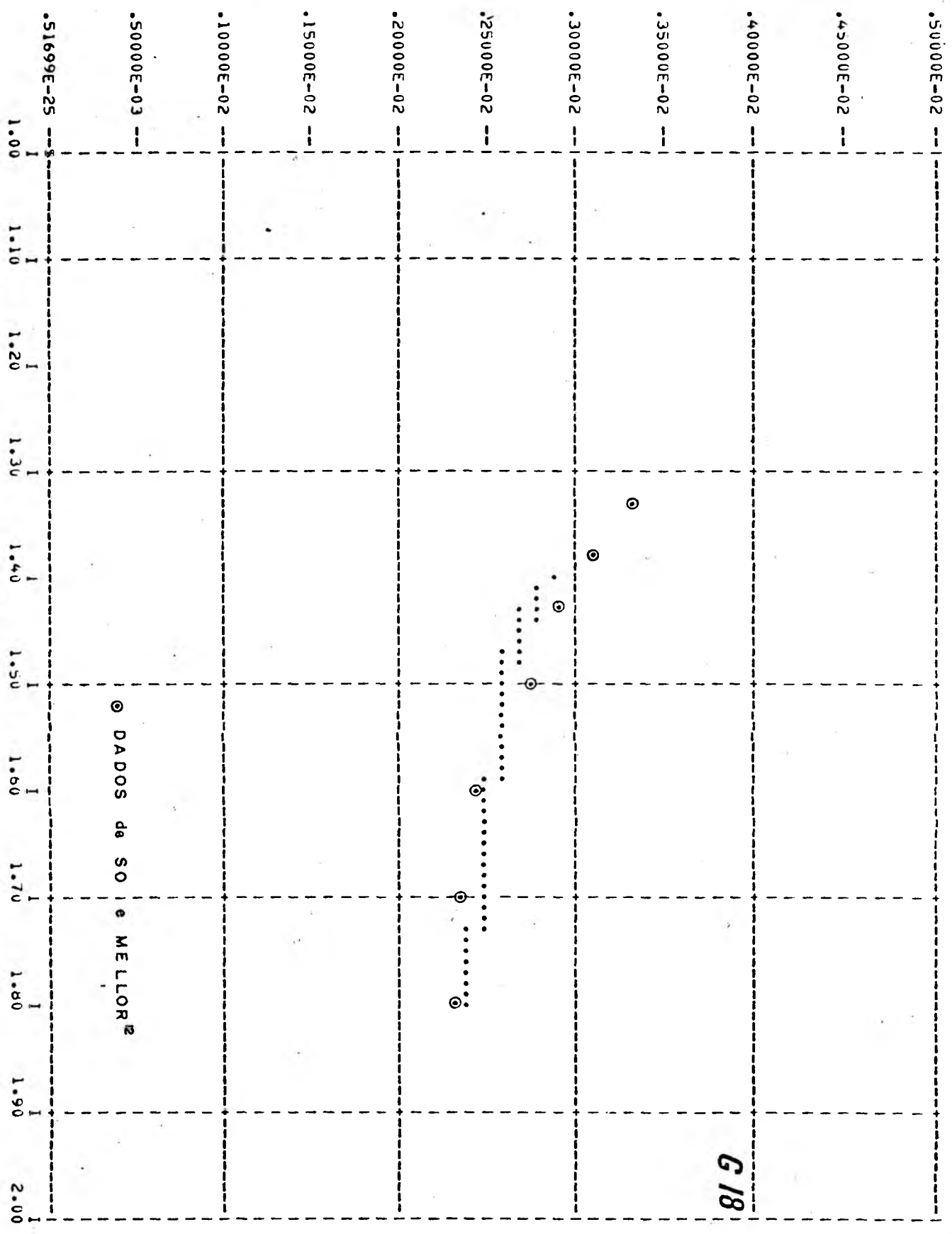


E N E R G I A C I N E T I C A



CF

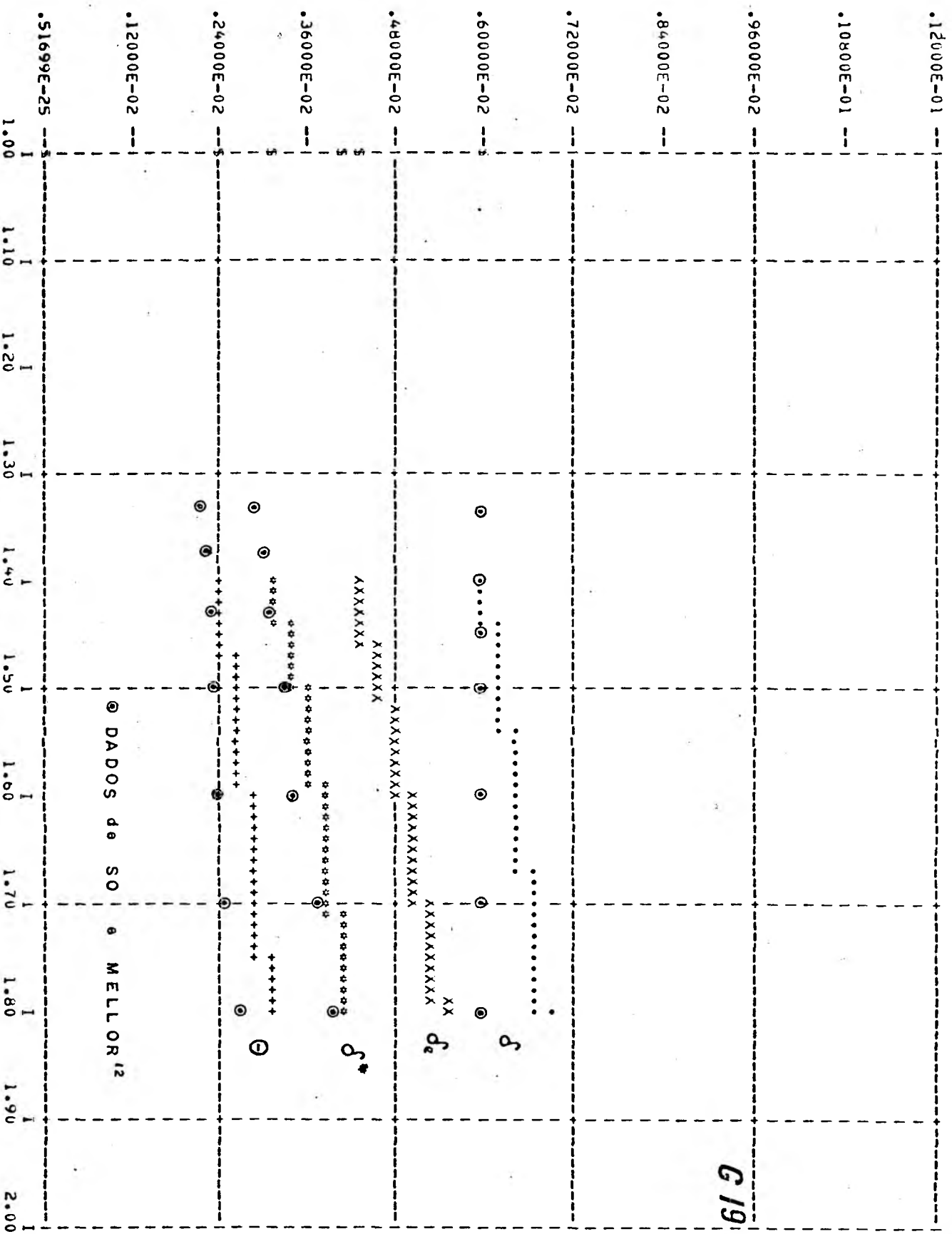
C
O
E
F
F
I
C
I
E
N
T
E



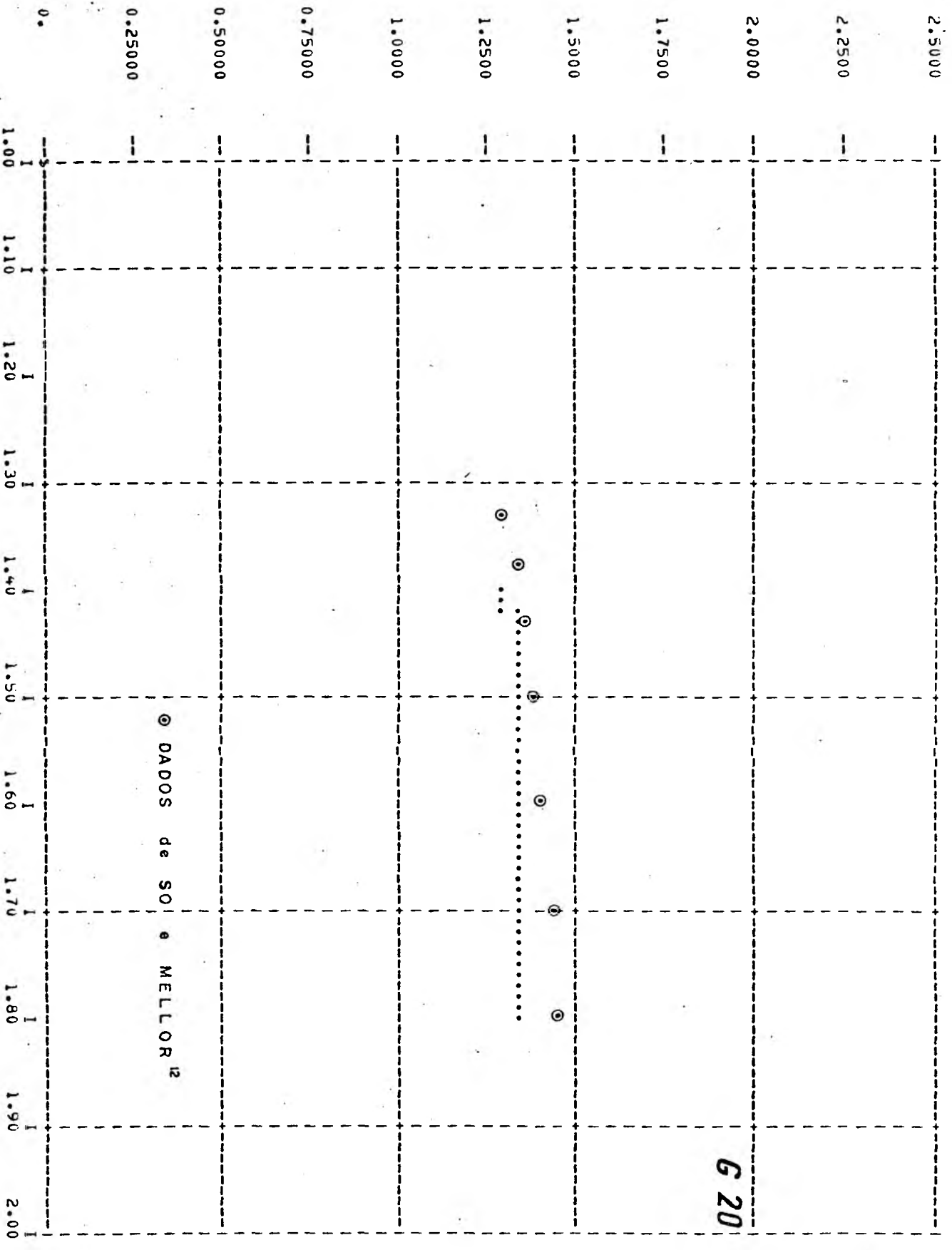
G 18

X FISICO (M)

ESSPESURAS



F A T O R D E F O R M A θ



X FISICO (M)

DADOS de SO e MELLOR 12

620

CANAL

	X	R	U.	DELTA	MODEL*	TTA	CF	U*	FFURMA
	(POL)	(POL)	(PE/S)	(POL)	(POL)	(POL)		(PE/S)	
52.6240	10.61	78.7494	0.930	0.129	0.089	0.0034	3.70	1.44	
52.7479	10.62	78.7573	0.931	0.117	0.089	0.0044	2.06	1.31	
52.8718	10.64	78.7665	0.932	0.119	0.090	0.0014	3.06	1.33	
52.9957	10.65	78.7759	0.933	0.119	0.090	0.0030	2.11	1.32	
53.1195	10.65	78.7855	0.934	0.121	0.090	0.0014	2.75	1.34	
53.2433	10.70	78.7950	0.935	0.120	0.090	0.0024	2.31	1.33	
53.3671	10.71	78.8045	0.936	0.121	0.090	0.0017	2.65	1.34	
53.4909	10.73	78.8137	0.937	0.120	0.091	0.0023	2.56	1.33	
53.6145	10.75	78.8226	0.938	0.121	0.091	0.0021	2.68	1.33	
53.7382	10.77	78.8311	0.939	0.121	0.091	0.0023	2.78	1.33	
53.8618	10.79	78.8392	0.940	0.121	0.091	0.0025	2.71	1.33	
53.9855	10.81	78.8466	0.941	0.121	0.091	0.0024	2.84	1.33	
54.1091	10.83	78.8534	0.942	0.121	0.091	0.0027	2.74	1.33	
54.2328	10.85	78.8596	0.943	0.121	0.091	0.0024	2.95	1.33	
54.3564	10.87	78.8664	0.944	0.121	0.092	0.0028	2.76	1.32	
54.4800	10.89	78.8724	0.945	0.122	0.092	0.0024	2.97	1.32	
54.6037	10.91	78.8788	0.946	0.122	0.092	0.0024	2.78	1.32	
54.7270	10.92	78.8847	0.947	0.122	0.092	0.0025	2.98	1.32	
54.8505	10.94	78.8914	0.948	0.122	0.092	0.0025	2.80	1.32	
54.9740	10.95	78.8982	0.949	0.123	0.093	0.0025	2.98	1.32	
55.0974	10.98	78.9055	0.950	0.123	0.093	0.0029	2.82	1.32	
55.2213	11.00	78.9127	0.951	0.123	0.093	0.0026	2.97	1.32	
55.3449	11.02	78.9204	0.952	0.123	0.093	0.0028	2.84	1.32	
55.4686	11.04	78.9284	0.953	0.124	0.093	0.0026	2.97	1.32	
55.5924	11.05	78.9314	0.954	0.124	0.094	0.0028	2.85	1.32	
55.7141	11.05	78.9400	0.955	0.124	0.094	0.0026	2.96	1.32	
55.8399	11.10	78.9481	0.956	0.125	0.094	0.0028	2.85	1.32	
55.9677	11.12	78.9572	0.957	0.125	0.094	0.0026	2.95	1.32	
56.0976	11.14	78.9665	0.958	0.125	0.094	0.0029	2.87	1.32	
56.2211	11.15	78.9741	0.959	0.126	0.094	0.0026	2.94	1.33	
56.3454	11.17	78.9834	0.960	0.126	0.094	0.0028	2.87	1.33	
56.4693	11.19	78.9972	0.961	0.127	0.095	0.0027	2.93	1.33	
56.5932	11.22	78.7540	0.964	0.127	0.094	0.0028	2.87	1.33	
56.7172	11.22	78.7599	0.966	0.127	0.094	0.0027	2.91	1.33	
56.8411	11.25	78.7655	0.968	0.128	0.094	0.0027	2.87	1.33	
56.9652	11.31	78.8255	0.969	0.128	0.097	0.0027	2.90	1.33	
57.0892	11.33	78.8284	0.971	0.129	0.097	0.0027	2.86	1.33	
57.2132	11.35	78.8558	0.971	0.129	0.097	0.0027	2.84	1.33	
57.3373	11.37	78.8249	0.974	0.130	0.098	0.0027	2.86	1.33	
57.4614	11.39	78.8458	0.975	0.130	0.098	0.0027	2.88	1.33	
57.5855	11.41	78.8474	0.976	0.131	0.098	0.0027	2.85	1.33	
57.7096	11.42	78.8667	0.978	0.131	0.099	0.0026	2.87	1.33	
57.8334	11.44	78.8244	0.979	0.132	0.099	0.0027	2.85	1.33	
57.9580	11.45	78.8405	0.980	0.132	0.099	0.0026	2.86	1.33	
58.0821	11.45	78.8349	0.982	0.133	0.100	0.0027	2.85	1.33	
58.2063	11.47	78.8314	0.984	0.133	0.100	0.0026	2.85	1.33	
58.3305	11.48	78.8370	0.986	0.134	0.100	0.0027	2.84	1.33	
58.4544	11.49	78.8406	0.985	0.134	0.101	0.0026	2.85	1.33	
58.5780	11.50	78.8430	0.985	0.135	0.101	0.0026	2.84	1.34	
58.7032	11.50	78.8473	0.987	0.135	0.101	0.0026	2.84	1.34	

"CANAL"

X	R	U.	DELTA	DELTA*	TIA	CF	U*	FFORMA
(POL)	(POL)	(PE/S)	(POL)	(POL)	(POL)	(POL)	(PE/S)	
58.4175	11.51	78.3432	0.988	0.136	0.102	0.0026	2.83	1.34
58.9417	11.52	78.3407	0.989	0.136	0.102	0.0026	2.83	1.34
59.0660	11.52	78.3396	0.991	0.137	0.102	0.0026	2.83	1.34
59.1903	11.53	78.3400	0.992	0.137	0.102	0.0026	2.83	1.34
59.3145	11.53	78.3418	0.993	0.138	0.103	0.0026	2.83	1.34
59.4388	11.54	78.3447	0.994	0.138	0.103	0.0026	2.82	1.34
59.5631	11.54	78.3488	0.995	0.138	0.103	0.0026	2.82	1.34
59.6874	11.55	78.3540	0.996	0.139	0.103	0.0026	2.82	1.34
59.8117	11.55	78.3602	0.996	0.139	0.104	0.0026	2.82	1.34
59.9359	11.56	78.3674	0.997	0.140	0.104	0.0026	2.82	1.34
50.0602	11.56	78.3753	0.998	0.140	0.104	0.0026	2.82	1.34
50.1845	11.57	78.3841	0.999	0.140	0.104	0.0026	2.82	1.34
50.3088	11.57	78.3935	1.000	0.141	0.105	0.0026	2.82	1.34
50.4331	11.58	78.4036	1.001	0.141	0.105	0.0026	2.81	1.34
50.5573	11.58	78.4143	1.002	0.141	0.105	0.0026	2.81	1.34
50.6816	11.59	78.4255	1.003	0.142	0.105	0.0026	2.81	1.34
50.8059	11.60	78.4371	1.004	0.142	0.106	0.0026	2.81	1.35
50.9301	11.61	78.4491	1.005	0.143	0.106	0.0026	2.81	1.35
51.0544	11.61	78.4615	1.005	0.143	0.106	0.0026	2.81	1.35
51.1786	11.62	78.4741	1.006	0.143	0.106	0.0026	2.81	1.35
51.3029	11.63	78.4859	1.007	0.143	0.106	0.0026	2.81	1.35
51.4271	11.64	78.4999	1.008	0.144	0.107	0.0026	2.81	1.35
51.5514	11.65	78.5131	1.009	0.144	0.107	0.0026	2.81	1.35
51.6756	11.67	78.5262	1.010	0.144	0.107	0.0026	2.81	1.35
51.7994	11.68	78.5394	1.011	0.144	0.107	0.0026	2.81	1.35
51.9240	11.69	78.5526	1.011	0.145	0.107	0.0026	2.81	1.35
52.0482	11.70	78.5657	1.012	0.145	0.108	0.0026	2.81	1.35
52.1724	11.72	78.5787	1.013	0.145	0.108	0.0026	2.81	1.35
52.2965	11.74	78.5916	1.014	0.146	0.108	0.0026	2.81	1.35
52.4207	11.75	78.6042	1.015	0.146	0.108	0.0026	2.81	1.35
52.5448	11.77	78.6157	1.015	0.146	0.108	0.0025	2.81	1.35
52.6690	11.79	78.6289	1.016	0.146	0.108	0.0025	2.81	1.35
52.7931	11.81	78.6408	1.017	0.146	0.109	0.0025	2.81	1.35
52.9172	11.83	78.6524	1.018	0.147	0.109	0.0025	2.81	1.35
53.0413	11.85	78.6637	1.019	0.147	0.109	0.0025	2.80	1.35
53.1654	11.87	78.6746	1.020	0.147	0.109	0.0025	2.80	1.35
53.2895	11.89	78.6852	1.021	0.147	0.109	0.0025	2.80	1.35
53.4135	11.91	78.6953	1.022	0.148	0.109	0.0025	2.80	1.35
53.5376	11.94	78.7050	1.022	0.148	0.110	0.0025	2.80	1.35
53.6616	11.95	78.7142	1.023	0.148	0.110	0.0025	2.80	1.35
53.7856	11.99	78.7231	1.024	0.148	0.110	0.0025	2.80	1.35
53.9096	12.02	78.7314	1.025	0.149	0.110	0.0025	2.80	1.35
54.0336	12.04	78.7392	1.026	0.149	0.110	0.0025	2.80	1.35
54.1576	12.07	78.7466	1.027	0.149	0.110	0.0025	2.80	1.35
54.2815	12.10	78.7535	1.028	0.149	0.111	0.0025	2.80	1.35
54.4055	12.13	78.7599	1.029	0.149	0.111	0.0025	2.80	1.35
54.5294	12.15	78.7671	1.030	0.150	0.111	0.0025	2.80	1.35
54.6533	12.19	78.7711	1.031	0.150	0.111	0.0025	2.80	1.35
54.7772	12.22	78.7759	1.031	0.150	0.111	0.0025	2.80	1.35
54.9011	12.25	78.7803	1.032	0.150	0.111	0.0025	2.80	1.35

TII

"CANAL"

T III

X	R	U.	DELTA	DEL*	TTA	CF	U*	FFORMA
(POL)	(POL)	(PE/S)	(POL)	(POL)	(POL)		(PE/S)	
55.0250	12.29	78.7842	1.033	0.151	0.112	0.0025	2.79	1.35
55.1489	12.32	78.7875	1.034	0.151	0.112	0.0025	2.79	1.35
55.2727	12.35	78.7904	1.035	0.151	0.112	0.0025	2.79	1.35
55.3966	12.39	78.7928	1.036	0.151	0.112	0.0025	2.79	1.35
55.5204	12.42	78.7948	1.037	0.151	0.112	0.0025	2.79	1.35
55.6442	12.45	78.7963	1.038	0.152	0.112	0.0025	2.79	1.35
55.7680	12.49	78.7974	1.039	0.152	0.113	0.0025	2.79	1.35
55.8918	12.52	78.7981	1.040	0.152	0.113	0.0025	2.79	1.35
56.0155	12.55	78.7984	1.041	0.153	0.113	0.0025	2.78	1.35
56.1393	12.59	78.7983	1.042	0.153	0.113	0.0025	2.78	1.35
56.2630	12.62	78.7979	1.043	0.153	0.113	0.0025	2.78	1.35
56.3868	12.65	78.7972	1.044	0.153	0.114	0.0025	2.78	1.35
56.5105	12.69	78.7962	1.045	0.154	0.114	0.0025	2.78	1.35
56.6342	12.72	78.7949	1.045	0.154	0.114	0.0025	2.78	1.35
56.7579	12.75	78.7934	1.047	0.154	0.114	0.0025	2.78	1.35
56.8815	12.79	78.7917	1.048	0.154	0.114	0.0025	2.77	1.35
57.0052	12.82	78.7899	1.049	0.155	0.115	0.0025	2.77	1.35
57.1289	12.85	78.7880	1.050	0.155	0.115	0.0025	2.77	1.35
57.2526	12.88	78.7850	1.051	0.155	0.115	0.0025	2.77	1.35
57.3762	12.91	78.7839	1.052	0.156	0.115	0.0025	2.77	1.35
57.4999	12.94	78.7819	1.053	0.156	0.115	0.0025	2.76	1.35
57.6235	12.97	78.7799	1.054	0.157	0.116	0.0025	2.76	1.35
57.7471	12.99	78.7780	1.055	0.157	0.116	0.0025	2.76	1.35
57.8707	13.02	78.7763	1.056	0.157	0.116	0.0025	2.76	1.35
57.9943	13.04	78.7748	1.057	0.157	0.116	0.0025	2.76	1.35
58.1180	13.05	78.7736	1.058	0.158	0.117	0.0024	2.75	1.35
58.2416	13.08	78.7727	1.059	0.158	0.117	0.0024	2.75	1.35
58.3652	13.10	78.7722	1.060	0.158	0.117	0.0024	2.75	1.35
58.4888	13.12	78.7721	1.061	0.158	0.117	0.0024	2.75	1.35
58.6123	13.13	78.7725	1.062	0.159	0.117	0.0024	2.75	1.35
58.7359	13.14	78.7734	1.063	0.159	0.118	0.0024	2.75	1.35
58.8595	13.15	78.7750	1.064	0.159	0.118	0.0024	2.74	1.35
58.9831	13.15	78.7773	1.064	0.160	0.118	0.0024	2.74	1.35
59.1067	13.17	78.7804	1.065	0.160	0.118	0.0024	2.74	1.35
59.2303	13.17	78.7843	1.065	0.160	0.119	0.0024	2.74	1.35
59.3539	13.17	78.7891	1.067	0.161	0.119	0.0024	2.74	1.35
59.4775	13.16	78.7949	1.068	0.161	0.119	0.0024	2.74	1.35
59.6011	13.15	78.8018	1.069	0.161	0.119	0.0024	2.74	1.35
59.7247	13.15	78.8098	1.070	0.162	0.119	0.0024	2.73	1.35
59.8483	13.13	78.8190	1.071	0.162	0.120	0.0024	2.73	1.35
59.9719	13.12	78.8296	1.071	0.162	0.120	0.0024	2.73	1.35
70.0955	13.10	78.8415	1.072	0.162	0.120	0.0024	2.73	1.36
70.2192	13.07	78.8550	1.073	0.162	0.120	0.0024	2.73	1.36
70.3428	13.04	78.8700	1.074	0.163	0.120	0.0024	2.73	1.36
70.4665	13.01	78.8857	1.074	0.163	0.120	0.0024	2.73	1.36
70.5901	12.99	78.9051	1.075	0.163	0.120	0.0024	2.73	1.36
70.7138	12.99	78.9254	1.076	0.163	0.120	0.0024	2.73	1.36
70.8375	12.89	78.9476	1.076	0.163	0.120	0.0024	2.73	1.36
70.9612	12.84	78.9719	1.077	0.163	0.120	0.0024	2.73	1.36
70.9612	12.84	78.9719	1.078	0.163	0.120	0.0024	2.73	1.36