UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA INDUSTRIAL

ANÁLISE E CARACTERIZAÇÃO DAS EMPRESAS DE PRESTAÇÃO DE SERVIÇOS COM VEÍCULOS

TESE SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE

MESTRE EM CIÊNCIAS

WILSON LUIZ BANNACH

FEVEREIRO - 1974

ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA A
OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

MESTRE EM CIÊNCIAS - ESPECIALIDADE GERÊNCIA
INDUSTRIAL E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

PROF. DOMINGOS BOECHAT ALVES, Ph.D.
Integrador dos Programas de Pós-Graduação em Engenharia

APRESENTADA PERANTE À BANCA EXAMINADORA COMPOSTA
DOS PROFESSORES:

PROF. RAJAMANI DORAISWAMI, Ph.D.
Orientador

PROF. CLÁVIO COUTINHO FILHO, M.Sc.

PROF. RAUL VALENTIM DA SILVA, M.Sc.

AGRADECIMENTOS

O autor deseja prestar sinceros agradecimentos

- ao Professor Rajamani Doraiswami pela eficiente orientação prestada;

- à CAPES e ao BNDE pelo apoio financeiro;

- pelas atenções recebidas do Departamento de Ciências Estatísticas e da Computação do Centro Tecnológico da Universidade Federal de Santa Catarina;

- ao Professor José Carlos Mello pelo empréstimo do material que possibilitou a elaboração do anexo 4 ;

- aos professores, funcionários e demais companheiros que anonimamente contribuiram para conclusão deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho trata do problema das empresas de prestação de serviços com veículos. O objetivo desta pesquisa é analisar estas empresas e obter o número ótimo necessário de veículos.

A abordagem sistêmica é usada para representar a empresa. A empresa é vista como um sistema com uma entrada, uma saída, um elemento de realimentação e interações entre eles. A entrada é a demanda de serviços. A saída é o serviço realizado. A realimentação é a informação do cliente. A entrada, sendo de natureza estocástica, faz o sistema empresa ser um "sistema estocástico".

O critério de desempenho do sistema é a soma ponderada do custo operacional dos veículos e o custo devido o atraso dos serviços. Usando técnica de programação inteira, o número ótimo necessário de veículos pode ser determinado.

A B S T R A C T

This work treats the problem of the enterprise that deals with vehicles which render services. The objective of this research is to analyse these enterprises and obtain an optimum number of vehicles needed.

System-theoretic approach is used to represent the enterprise. The enterprise is viewed as a system with an input, an output, a feedback element and interactions between them. The input is a demand of services. The output is the realized service. The feedback is the information from the costumer. The input being stochastic in nature, the enterprise system is a "stochastic system".

The criterion of performance of the system is chosen as the weighted sum of cost of operation of the vehicles' and cost due to delay of the services. Using integer programming technique, the optimum number of vehicles needed can be determined.

S U M Á R I O

CAPÍTULO III:

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

INTRODUÇÃO

Na atual organização humana os veículos são imprescindíveis à realização da atividade econômica. Os veículos representados para os propósitos deste trabalho por carros, caminhões e similares, são utilizados largamente no deslocamento de materiais, informação e pessoas.

Existem empresas empenhadas na exploração da atividade de transporte com fins lucrativos. Outras tem, nesta atividade, importante auxiliar do seu processo produtivo, Neste sentido, utilizam veículos próprios ou os serviços prestados pelas primeiras.

Para evitar que o projeto e a reestruturação desta atividade de transporte sejam feitos empiricamente, torna-se necessário uma análise da mesma, com a finalidade de caracterizá-la. A análise deverá determinar os objetivos, as restrições ao alcance do objetivo e as partes componentes de empresa com suas relações funcionais. Do ponto de vista do empresário, a meta da análise e caracterização é a obtenção de elementos para o projeto e manutenção da empresa em operação a um mínimo custo e atendendo a finalidade para a qual foi criada.

Orientados neste sentido, existem algums estudos realizados e apresentados como aplicações de probabilidade e estatística em publicações de probabilidade aplicada ou, em artigos de revistas de Pesquisa Operacional, Engenharia Industrial e outras. Estes estudos esparsos, alguns sofisticados no seu tratamento matemático, não permitem uma visão geral dos elementos e da constituição funcional destas empresas, porque estão dirigidos a situações e realizados com finalidade específica.

Para suprir, em parte, esta deficiência, este trabalho tem por objetivo a caracterização e a análise das empresas que prestam serviços utilizando veículos. Para englobar todas as situações existentes, optou-se por uma abordagem macroscópia. Isto significa que o enfoque adotado considera somente as características gerais e comuns a todas as empresas para as quais o presente estudo é válido. Serão, portanto, ignoradas as particu laridades das diversas organizações. Os capítulos I, II e III apresentam de maneira sistemática as características das empresas que prestam serviços com veículos, chamadas para facilidade de referência, sistemas com veículos.

A utilização dos elementos e de suas relações funcionais é discutida no capítulo IV, quando a determinação da quantidade necessária de veículos é abordada. Neste capítulo, discute - se os tipos de modelos adequados a representação do seu funcionamento, orientando a discussão para o problema número de veículos.

Embora as idéias aqui desenvolvidas estejam dirigidas para veículos, poderão ser usadas para outras empresas de prestação de serviços similares.

Espera-se que o presente trabalho propicie uma visão global necessária das empresas de prestação de serviço .

CAPÍTULO I

1. - CARACTERIZAÇÃO DAS EMPRESAS COMO SISTEMAS

1.1 - INTRODUÇÃO

Devido à diversidade de situações onde os veículos são utilizados, a caracterização das empresas só é possível, do ponto de vista macroscópico, pela utilização da abordagem de sistemas. A teoria de sistemas permite uma abordagem ao mesmo tempo geral e simples.

Iniciando com noções sobre sistemas, para embasar o leitor no assunto, este capítulo utiliza elementos da teoria de sistemas para apresentar de forma unificada as características comuns a todas as organizações que empregam veículos.

Para tornar a exposição mais clara, parte do assunto foi transferida para os subsequentes capítulos II e III .

1.2 - NOÇÕES DE SISTEMAS

1.2.1 - O Conceito de Sistema

O termo sistema tem muitos diferentes significados, porque no atual ambiente orientado para sistemas, todos parecem neles estar trabalhando. Existem sistemas de radar, sistemas de processamento de dados, sistemas de comunicação, sistemas de produção, sistemas administrativos, sistemas de pesquisa de mercado. Estas atividades e serviços de natureza diversa possuem algo em comum para assim serem chamadas.

De acordo com relatório do Grupo de Cibernética e Ciência de Sistemas do Instituto de Engenharia e Eletrônica (IEEE), o termo sistema [1] é definido como segue:

"Um sistema é um conjunto de diversos elementos humanos e de máquinas interagindo, integrados para alcançar um objetivo comum pela manipulação e controle de materiais, informações, energia e/ou pessoas".

1 - REF. 15 - pg. 52

Esta definição indica que qualquer atividade, serviço, máquina, pessoas, ou combinação homem-máquina, pode ser considerado um sistema. Um sistema supõe um conjunto de elementos unidos funcional e operacionalmente, formando um processo em andamento para alcançar um objetivo.

Os exemplos iniciais se enquadram perfeitamente nesta idéia, podendo ser considerados como sistemas.

1.2.2 - Os Elementos dos Sistemas

Embora os sistemas não sejam iguais, de uma forma global, todos apresentam os seguintes elementos:

a) Entrada
b) Processo ou Transformação
c) Saída
d) Restrição
e) Realimentação e Controle

A Figura 1 mostra a relação entre os elementos ou parâmetros do sistema. Parâmetro é definido como uma constante na qual propriedades e valores podem ser associados. Qualquer sistema pode ser definido em termos de seus parâmetros e de suas propriedades [2].

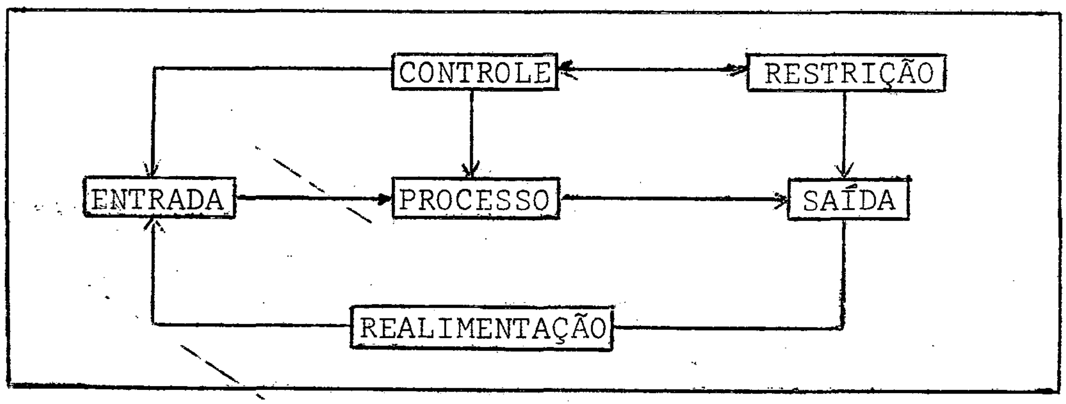


FIG. 1 - Relação entre os parâmetros de um sistema.

Entrada é o componente de inicialização e ativação da operação (funcionamento). Num sistema de produção a entrada está representada pela força de trabalho, energia e materiais.

2 - REF. 1 - pg. 14

Saída é o resultado da operação. Num sistema de pesquisa de mercado, os relatórios dos resultados da pesquisa constituem as saídas.

Processo é o conjunto de atividades que tornam possível a transformação da entrada em saída. As instalações, o processo e os procedimentos de produção formam o processo de um sistema de produção.

A entrada, a saída e o processo são os parâmetros básicos.

Todos os sistemas funcionam com restrição. A restrição estipula, para um sistema, as orientações internas e externas que limitam a sua atuação. É composta de dois elementos: o objetivo e as restrições ao seu alcance. A restrição limita o objetivo e acrescenta dimensões que o fazem mais real. Juntos tornam possível a fixação de um critério ou um índice de performance. O critério é um meio através do qual uma alternativa de estrutura, organização e funcionamento é medida e escolhida. As restrições atuam na entrada, processo e saída.

A realimentação e o controle são os parâmetros que ocorrem juntos. A realimentação é saída readmitida como entrada. A realimentação é introduzida no processo do qual a saída foi derivada. Pode, também, ser caracterizada como a operação que torna possível o controle da operação do sistema. Neste caso, temos o controle-realimentação, definido com uma função do sistema que compara a saída com um critério. A realimentação com o objetivo de controle, abastece o sistema com informações sobre a saída. Realizamos o controle pela correção das discrepâncias entre a saída e o critério adotado. O controle é exercido sobre entrada, processo e saída.

1.2.3 - Classificação dos Sistemas

No desenvolvimento de noções sobre sistemas, é útil classificá-los em algumas categorias gerais para melhor entendê-los.

Uma distinção elementar divide os sistemas em naturais e feitos pelo homem. Os sistemas feitos pelo homem são divididos em três categorias gerais:

a) de máquinas

b) humanos

c) homem-máquina

Os sistemas de máquinas são constituídos por máquinas. A característica primária destes sistemas é a performance automática. Chamamos performance automática à habilidade de perseguir, sem intervenção humana, através de caminhos lógicos pré-definidos, um objetivo. Na realidade, no atual estágio de desenvolvimento, o contacto humano não é completamente excluído. Embora o grau de envolvimento venha mudando, cabe ao homem algumas decisões de natureza administrativa e de controle. Típicos sistemas de máquinas são centrais de comutação telefônica, processos contínuos de fabricação, como refinarias e processos automáticos de produção de peças e materiais. A segunda e última importante característica destes sistemas é o alto grau de integrabilidade, ou seja, são capazes de adaptação a todas as variações do seu ambiente, produzindo as saídas desejadas.

Os sistemas humanos são projetados para operar só com pessoas. Devido a presença humana não são estáveis e previsíveis. Esta instabilidade e imprevisibilidade acarretam um desempenho variável, ocasionando grande variação na confiabilidade. Estas características são explicadas pelo tipo de trabalho realizado pelas pessoas nestes sistemas, pela sua influenciabilidade por outras pessoas e pelo estado psicológico variável, resultado da interação do homem com seu ambiente. Nos sistemas humanos - como sistemas administrativos - as pessoas são os elementos responsáveis pelas transformações das entradas em saída e pelo controle.

Os sistemas homem-máquina, como o nome diz, incluem homens e máquinas entre os seus elementos. Possuem toda a complexidade inerente a organização humana para alcançar um objetivo, acrescida dos problemas de projeto de equipamentos confiáveis, com operação automática ou não. Um motorista e seu carro, um operador e a máquina que opera, são exemplos de sistema homem-máquina. Para alcançar elevada performance é importante uma exata integração homem-máquina. A eficiência atinge o máxi mo quando a máquina própria ao serviço acrescentamos a pessoa adequada na sua operação.

Uma segunda distinção divide os sistemas em abertos e fechados.

Um sistema aberto troca materiais, energia e/ou informações com seu ambiente. Quando a trôca não existe, o sistema é fechado.

Ambiente é o conjunto de todos os elementos cujos atributos são mudados pela conduta do sistema, e que exercem influência no sistema quando se alteram. É razoável supor que os elementos não incluidos no sistema constituem o seu ambiente. Em geral, é difícil separar ambiente e sistema. Esta divisão é feita arbitrariamente de acordo com a conveniência da pessoa que esta analisando o sistema. Uma tendência nesta distinção está baseada no controle que o administrador (elemento do sistema) exerce sobre os objetos envolvidos. Os elementos da situação fora do controle são considerados pertencentes ao ambiente.

Dos conceitos de sistema e ambiente, surge a idéia da divisão de um sistema em sub-sistemas. Podemos identificar como sub-sistemas determinadas funções dentro do sistema total. Numa empresa, áreas funcionais como produção, pessoal, vendas e contabilidade, podem ser consideradas sub-sistemas. As entidades pertencentes a um sub-sistema são também parte do ambiente de outro, ou de muitos outros sub-sistemas. Baseados nas definições de sistema e sub-sistemas, podemos concordar com a frequente observação de que elementos de um sistema podem ser sistemas de menor ordem ou, colocado de outra maneira, todos os sistemas são sub-sistemas de um sistema de maior ordem. Isto implica numa hierarquia de sub-sistemas e vários níveis de sub-sistemas dentro de um sistema.

Um sistema ou um sub-sistema aberto torna-se fechado de duas maneiras: quando a interação com o ambiente é cortada ou quando a parte do ambiente que envolve a troca de energia, materiais ou informação é incluida no sistema. Portanto , um sistema é considerado aberto ou fechado dependendo da conveniência do analista.

Uma terceira classificação distingue sistemas adaptativos e não adaptativos. Os sistemas adaptativos reagem às mudanças no ambiente de maneira desejável, considerando o objetivo para o qual foi criado.

Num dado tempo, os valores dos parâmetros podem ser usados para descrever o estado do sistema. Se os valores dos parâmetros permanecem constantes, ou dentro de certos limites, com o decorrer do tempo, o sistema é estável. Em caso contrário, o sistema é instável. O equilíbrio - definido em termos do estado do sistema - existe quando na ausência de uma mudança externa brusca o estado do sistema, permanece inalterado . Se, após uma alteração brusca, há o retorno ao estado de equilíbrio o sistema é chamado estável.

Finalmente, temos a classe dos sistemas estocásticos. São assim denominados os sistemas com características aleatórias. Os sistemas representados por modelos de filas são exemplos desta categoria. Neles a entrada e o processo são melhor descritos em termos de distribuições de probabilidade.

1.2.4 - Caracterização e Análise de Sistemas

Os valores dos parâmetros e as propriedades de um sistema o definem e o caracterizam. A caracterização é, muitas vezes, difícil devido a complexidade apresentada. Um sistema pode ser constituido de sub-sistemas integrados de tal maneira que, a saída de um seja a entrada de outro, cujas saídas retornem, em parte, como entrada ao sub-sistema inicial.

A caracterização de um sistema inicia-se pela determinação dos sub-sistemas que o compõe.

Esta divisão do sistema total em sistemas componentes é uma das etapas da análise de sistemas. Definê-se análise como a separação de um todo nas suas partes componentes para identificar seus componentes e suas relações. Envolve o conceito de separação e particionamento de um complexo em partes menores mais fâcilmente identificáveis.

A divisão do sistema total está associada à determinação do grau de integração de seus componentes. A integração - definida como o arranjo de sub-sistemas que torna possível o processamento ininterrupto de entradas, num fluxo contínuo, até completar seu uso no sistema total - é um dos conceitos chaves da análise de sistemas. A integração é descoberta com base no postulado de que o analista pode fazer uma comparação entre as necessidades funcionais de um sub-sistema com seu imediatamente relacionado. Dois sub-sistemas, formando um sistema simples, estão integrados quando a saída de um deles é a adequada entrada do outro. A Figura 2 ilustra um sistema integrado de dois sub-sistemas.

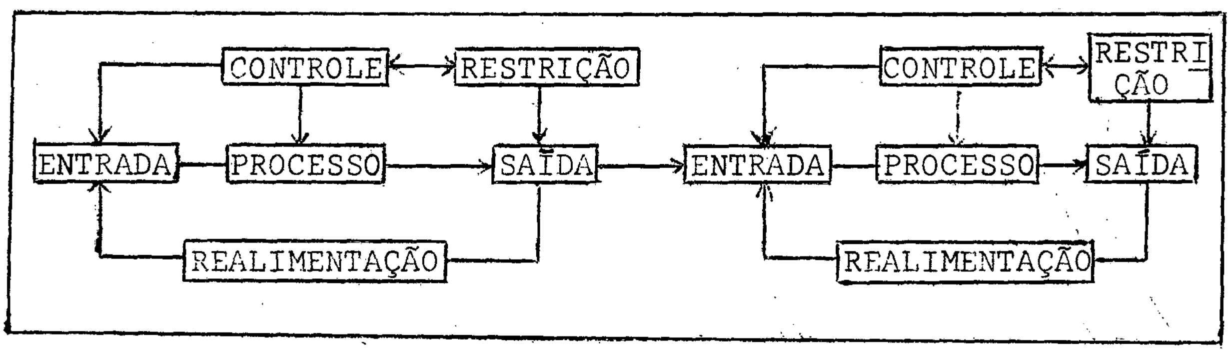


FIG. 2 - Sistema integrado de dois sub-sistemas.

Se o sistema total for formado de diversos sub-sistemas, a integração é obtida quando todos tem a adequada entrada originada de um ou mais sub-sistemas componentes ou da entrada do sistema total. A Figura 3 exemplifica um sistema integrado de quatro sub-sistemas.

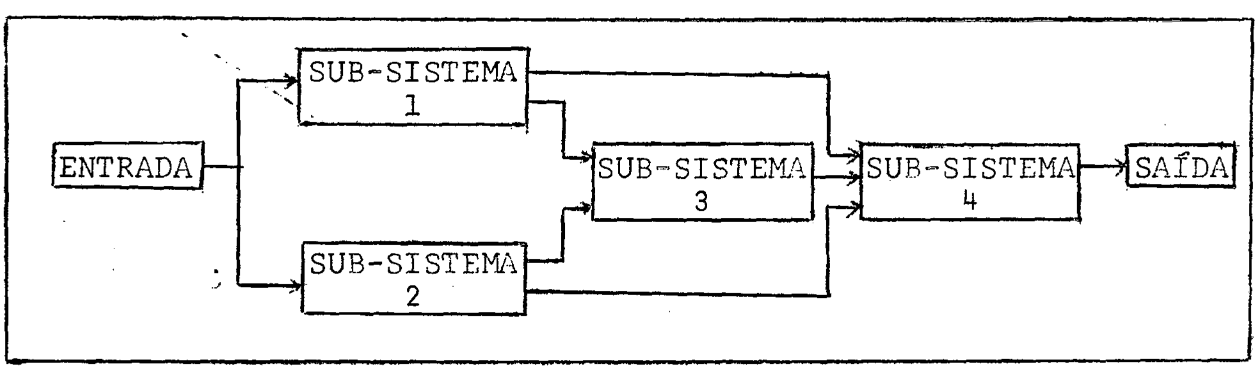


FIG. 3 - Exemplo de sistema integrado de quatro sub-sistemas.

A divisão de um sistema em partes componentes e a determinação da integração destas partes são feitas em conjunto. A caracterização através da definição de parâmetros e sub-sistemas, com suas relações e propriedades, é o resultado da análise. Especificamente, este resultado descreve o sistema se incluir:

a) Uma descrição de todos os elementos necessários para sua operação e manutenção em operação.

b) A política, estratégia, ou objetivo operacional que interrelaciona os elementos e é seguido na operação do sistema em estudo.

c) Fatores chaves, características ou atributos do sistema e de seus elementos.

Entretanto, a profundidade dos detalhes da descrição ou a omissão de partes depende da fronteira ou limites desejadas para a caracterização. Chamamos fronteira de uma descrição como o limite dentro do qual o analista realizará a descrição ou fora do qual não é necessário esclarecimentos. A fronteira é definida pelos limites ou restrições ao alcance do objetivo da descrição. Assim, a caracterização de um sistema com o objetivo de estudar o seu funcionamento difere da descrição com a finalidade de estudar os custos envolvidos na sua operação.

Na caracterização do sistema com veículos, a descrição será limitada pelos objetivos do presente trabalho.

1.2.5 - O Desempenho de um Sistema

Determinado sistema existe para cumprir uma finalidade específica. Comparando a capacidade de dois sistemas de igual finalidade para atingir o mesmo objetivo, notamos que podem ter eficiências diferentes. O mais eficiente é o mais propriamente organizado e com a mais adequada integração entre as suas partes constituintes. Os sistemas com a melhor alternativa de integração são sistemas otimizados. Tais sistemas excluem as desnecessárias e não produtivas entradas para processamento. Um sistema totalmente integrado e, então, um sistema ótimo, contém a mais econômica combinação de homens, máquinas, energia e informação.

Verificamos a eficiência e o desempenho pela comparação dos resultados da saída com um critério. Desta forma, é controlado, também, a capacidade do sistema para atingir o objetivo desejado. Os critérios, ou medidas da eficiência, são utilizados como um meio para determinar se as saídas são confiáveis e precisas e, se satisfazem às restrições. Neste sentido, os critérios são uma exigência operacional.

No projeto e na reestruturação de um sistema, a melhor alternativa de organização e funcionamento é escolhida pela utilização de critérios e de modelos. Visto de outro ângulo, a metodologia de otimização de sistemas envolve a experimentação com modelos.

Os modelos representam o sistema mas não o substituem. Reduzem complexos a proporções manuseáveis e servem para facilitar nosso pensamento e percepção.

A construção de um modelo inicia-se pela observação do sistema. Da observação surgem elementos para a formulação de hipóteses como explanações possíveis da conduta do sistema. O modelo surge como uma extensão e formalização dessas hipóteses.

Na prática, um modelo só é útil quando duplica a conduta do sistema. Entretanto, em determinadas situações, representam um sistema mais simples. Isto é feito sem grande perda, porque na experimentação alguns detalhes podem ser ignorados.

Construido o modelo, quer seja físico, probabilístico, determinístico ou de simulação, é necessário testar a sua validade.

O teste ou validação do modelo é realizado pela comparação dos dados obtidos através do modelo com os dados reais observados ou, dados de outro modelo aceito como representativo do sistema em estudo. O modelo será uma boa representação do sistema se fôr capaz de produzir os mesmos resultados do sistema real ou aproximações aceitas. Quando isto não ocorre, as hipóteses implícitas no modelo não são confirmadas e este deve ser modificado.

Testado e aceito, o modelo permite que previsões sejam feitas. Neste sentido, são úteis na experimentação , tornando possível a otimização. Mais especificamente, variando os parâmetros controláveis do sistema através de seus equivalentes do modelo, chega-se a situação que melhor satisfaz ao critério adotado.

Portanto, os modelos e critérios são imprescindíveis na otimização de um sistema. O método científico é basicamente o estabelecimento de modelos. Os modelos são usados para experimentação e previsões independentes de dados de observação. Os critérios fornecem um índice contínuo da maneira na qual o sistema está operando e continuam a ser úteis nos estágios subsequentes de projeto, operação e otimização do sistema.

1.3 - SISTEMAS COM VEÍCULOS

1.3.1 - O que é um Sistema com Veículos

Um sistema que emprega veículos para transformar suas entradas em saídas é um sistema com veículos.

Atualmente muitas organizações usam veículos para desenvolver as suas atividades. Em certas organizações, são imprescindíveis ao sucesso. Nesta categoria estão incluidas as empresas de transporte, quer sejam de transporte coletivo, de materiais e/ou informações. Para estas empresas os veículos constituem os elementos principais de transformação das entradas em saídas. Em outras organizações os veículos são auxiliares importantes, sem, entretanto, se constituirem nos elementos fundamentais do processo de transformação das entradas em saídas. Para esta situação, o sistema com veículos é um sub-sistema do sistema total formado pela empresa.

Independente da sua condição de sub-sistema ou sistema total, um sistema de veículos possue homens e máquinas. São, portanto, enquadrados na categoria de sistema homem-máquina. A presença humana - essencial ao seu funcionamento - é indispensável, atuando como elemento de processo e controle.

Deve ser considerado aberto, pois recebe do ambiente as tarefas ou serviços a serem realizados, a energia necessária e informações que permitem verificar a sua eficiência. Age sobre o ambiente nele produzindo alterações.

A sua continuidade depende da adaptabilidade às mudanças do ambiente. Se o número de serviços aumentar, o sistema deverá sofrer aumento na capacidade de transporte. Esta alteração pode ser traduzida em termos de um número maior de veículos ou pela utilização de outro tipo de veículos, com maior capacidade.

Embora possuam características comuns com outros sistemas, a diferenciação entre um sistema de veículos e os demais está baseada no elemento de transporte. Somente os primeiros utilizam veículos.

1.3.2 - Os Parâmetros do Sistema com Veículos

a) Entrada

Os sistemas com veículos são destinados à prestação de serviços. Os serviços ou tarefas são entradas.

Entendemos por tarefa determinada solicitação ao sistema constituido de características próprias. Diferenciamos as tarefas pela importância relativa e natureza. Assim, são tarefas distintas a distribuição de um produto acabado e o transporte de matéria-prima.

O trabalho realizado pelos veículos compõe - se de um número finito de tarefas iguais ou diferentes. O número de ocorrências de cada tarefa constitui um processo aleatório e o conjunto de ocorrências das tarefas uma coleção de processos aleatórios, portanto, um processo estocástico. Uma completa caracterização do processo de ocorrência das tarefas é obtida pela distribuição de probabilidade conjunta do número de ocorrências em cada tempo ou pelo conhecimento da sua foram representativa. O processo de ocorrência das tarefas será discutido em maiores detalhes no capítulo II .

b) Saída

A saída do sistema está representada pelas tarefas atendidas. O atendimento das solicitações é o objetivo do sistema. Todas as entradas devem sair na forma de serviços realizados.

c) Processo

Os serviços, após a entrada no sistema, sofrem um processo de seleção para atendimento. Nos sistemas com veículos existem bàsicamente três maneiras de seleção. A seleção poderá ser feita de tal modo que o atendimento seja provido

1º) Na ordem de chegada - Atendimento PEPS
Primeiro a chegar, primeiro a sair

2º) Em ordem aleatória - Atendimento EOA

3º) De acordo com regra de prioridade

No atendimento PEPS as tarefas são realizadas na ordem de ocorrência. Este procedimento parece ser o mais indicado quando os diferentes serviços são igualmente ou aproximadamente de mesma importância. Quando existem diferenças na importância, o atendimento na ordem de chegada não é aconselhável. Em alguns casos, a não adoção do atendimento PEPS deve ser analisado criteriosamente. Nesta situação, aparecem certos serviços prestados à pessoas que, de um modo geral, consideram injusto um atendimento em ordem diferente da ordem de chegada.

No atendimento EOA, as tarefas são selecionadas para atendimento por um processo de escolha aleatória aplicado ao total de tarefas a realizar num determinado instante. Este procedimento de seleção implica num sorteio, uma vez que as tarefas ocorrem numa sequência. Não é usual uma seleção desta natureza. Entretanto, quando o controle do processo de entrada apresentar deficiências, o atendimento naturalmente poderá tender a ordem aleatória.

No atendimento com prioridade, as tarefas de mais alta prioridade tem preferência sobre as tarefas de menor prioridade. Se uma tarefa A, com prioridade I, tiver seu aten dimento interrompido no momento da chegada de uma tarefa B, com prioridade I+1, dizemos que B tem prioridade com interrupção . Se, entretanto, A puder ser atendida completamente, B tem prioridade sem interrupção. Quando são prestados serviços com veículos, não é prático interromper o atendimento. Um sistema com veículos comporta somente prioridade sem interrupção. O estabelecimento de prioridades obedece critérios baseados na importância representada pelas tarefas para a empresa.

A tarefa selecionada é preparada para atendimento. Esta preparação significa torná-la em condição de transporte. Em muitos sistemas, não há necessidade de preparação. As tarefas já ocorrem em condição de atendimento.

A tarefa apta para o transporte aguarda a disponibilidade de veículos. Para o sistema a tarefa foi atendida quando o veículo está novamente disponível para outro serviço. O tempo de permanência de uma tarefa em processamento será abordado no Capítulo III.

A transformação das entradas em saídas, é , num sistema com veículos, um processo simples constituido de seleção, preparação e atendimento. Este processo envolve homens e veículos e possue características aleatórias, representadas pelo tempo de permanência no sistema.

d) Restrições

Na teoria de sistemas, as restrições abrangem os objetivos do sistema e os entraves ao seu alcance. Para a determinação do número necessário de veículos, o sistema tem como objetivo o atendimento dos serviços. Atuam como restrições, o custo da operação, um tempo de atendimento médio pré-fixado e a capacidade do sistema (veja item 1.3.3-c).

É interessante realizar o transporte num tempo aceito como razoável pelo cliente, sob pena de perdê-lo, acarretando o desprestígio e a consequente diminuição dos lucros. Em geral, quanto mais rápido fôr o atendimento, maior o custo. Entretanto, em muitas situações, o maior preço é aceito pelo cliente, tendo em vista a maior rapidez conseguida. Estas relações devem ser consideradas para a fixação do melhor tempo médio de de atendimento.

Se num dado tempo, os serviços exederem a capacidade de atendimento, o sistema ficará com uma quantidade de tarefas sem condição momentânea de atendimento. Naturalmente, as tarefas excedentes serão perdidas para o sistema ou aguardarão atendimento quando o número de solicitações diminuir. Quando a última alternativa ocorre, o tempo de permanência no sistema aumenta. Um aumento na capacidade de atendimento diminui o tempo de permanência e aumenta o custo do sistema.

Existe uma capacidade de atendimento que possibilita o atendimento das tarefas dentro de um tempo médio máximo pre-fixado e a um custo mínimo. Esta valor da capacidade é procurado no projeto e reprojeto do sistema. Um modelo relacionando o objetivo do sistema e as restrições permite experimentação neste sentido. O modelo acrescido de critérios são as ferramentas da otimização da capacidade do sistema. As restrições são úteis no estabelecimento de modelos do sistema e na fixação de critérios através dos quais alternativas de estrutura e organização são medidas e avaliadas.

e) Controle e Realimentação

O controle num sistema com veículos consiste, basicamente, na manutenção do sistema em operação dentro de certos padrões ou critérios pré-estabelecidos.

Em geral, a ocorrência das tarefas foge ao controle direto. É precária a ação de elemento do sistema para alterar o número de ocorrências ou para tornar as chegadas mais regulares. Para eficiente operação e controle é necessário somente um registro dos tempos de ocorrência e tipos de tarefas.

O controle no processo mantém os veículos em condição de uso, assegura o atendimento de acordo com o processo de seleção adotado e mantém o tempo médio de permanência no sistema dentro dos valores pré-fixados.

A realimentação alimenta o processo com informações sobre o término do atendimento e a satisfação dos clientes.

Todos os sistemas devem manter um registro de suas operações para comparação com os padrões estabelecidos nos diversos níveis do processamento das entradas. Sem ele, o controle é impraticável. As informações destes registros permitem a verificação das discrepâncias em relação aos critérios adotados.

1.3.3 - Características de Diferenciação

Além das diferenças nos parâmetros existem outras características que permitem diferenciar os sistemas de veículos. Entre elas se destacam:

a) Tipo de Organização de Atendimento
b) Disponibilidade de veículos por tipo de tarefa
c) Capacidade do sistema
d) Ponto de Recebimento das Tarefas
e) Tipos de Operação
f) Número de canais de chegada

a) Tipos de Organização de atendimento

A organização em paralelo é a mais comum. O atendimento é realizado em paralelo quando um veículo atende totalmente uma tarefa após iniciá-la. Difere da organização em série, onde uma tarefa seria atendida por dois ou mais veículos, numa sequência determinada.

b) Disponibilidade de Veículos por Tipo de Tarefa

Quando a disponibilidade de um veículo depender do tipo de serviço, pode ocorrer:

1) Disponibilidade Total - Os veículos atendem qualquer tipo de tarefa que ocorrer.

2) Disponibilidade com Restrição - Determinado veículo atende somente certos tipos de tarefas.

3) Sem Disponibilidade - O veículo não atende as tarefas. Ocorre quando o veículo está em reparo ou manutenção.

Muitas frotas são compostas de conjuntos de veículos destinados a serviços específicos, onde cada conjunto atende somente à determinadas tarefas. Uma empresa pode possuir veículos do tipo A para rotinas administrativas e veículos do tipo B para a distribuição de seus produtos acabados. Evidentemente, a disponibilidade dos veículos do tipo A está restrita a certas tarefas. Na análise de sistemas com disponibilidade restrita, a frota total pode ser considerada como um conjunto de sub-frotas divididas de acordo com a disponibilidade para os diversos tipos de serviços. A análise torna-se mais complexa quando duas ou mais sub-frotas podem atender, além da exclusividade de certos serviços, tipos iguais de tarefas.

c) Capacidade do Sistema

A capacidade do sistema é o número de tarefas que podem ser atendidas ao mesmo tempo.

De um modo geral, o número de veículos é sempre menor ou igual a capacidade do sistema. A capacidade ajuda no projeto do sistema como elemento utilizado na determinação das necessidades humanas e do cálculo das necessidades em instalações físicas.

d) Ponto de Recebimento das Tarefas

Quanto ao ponto de atendimento das tarefas, os sistemas de veículos estão divididos em:

1) Sistemas de Ponto Único - Quando as tarefas são recebidas para realização num ponto determinado. Os veículos cumprem as tarefas recebidas e retornam ao mesmo ponto para iniciar outro serviço.

2) Sistemas de Vários Pontos - Quando as tarefas são recebidas para realização em diversos pontos determinados. Os veículos cumprem as tarefas recebidas e não retornam necessariamente ao mesmo ponto para iniciar outro serviço.

Um sistema típico de vários pontos está relacionado com as empresas de transporte coletivo operando numa região. As diversas cidades são pontos de recebimento das tarefas. Por outro lado, muitos sistemas são de ponto único. O serviço de entregas de uma loja é um exemplo.

e) Tipos de Operação

Um sistema com veículos pode operar de duas maneiras:

1ª) Operação em Tempo Contínuo - Quando o atendimento pode iniciar em qualquer instante, dentro do período de serviço. Engloba os sistemas onde um veículo pode atender um grupo de tarefas e aqueles onde cada veículo atende uma só tarefa. O atendimento em grupos apresenta, para certas situações, a vantagem de propiciar um melhor aproveitamento do veículo, sendo menor o custo por tarefa. Este procedimento, entretanto, aumenta o tempo no sistema dos serviços devido a necessidade de espera para a formação de lotes econômicos. Quando a rapidez é importante o atendimento isolado apresenta maior vantagem. As empresas de transporte de mercadorias adotam a primeira alternativa, enquanto um pronto-socorro utiliza seus veículos atendendo uma ocorrência de cada vez.

2ª) Operação em Tempo Discreto - Quando o atendimento somente inicia em instantes determinados dentro do período de serviço. Nas empresas de transporte coletivo este tipo de operação é universal.

f) Números de Canais de Chegada

Quanto ao número de canais de chegada, distingue-se sistemas com um só canal e sistemas com múltiplos canais. Nos sistemas com vários canais de chegada, as tarefas, dependendo do tipo, tomam um ou outro canal. Este tipo de sistema é o indicado quando existirem veículos de disponibilidade com restrição.

1.4 - CONCLUSÕES

De uma forma global, um sistema com veículos é um siste ma simples constituido de entrada aleatória. A estocasticidade da entrada e do processo ocasionam características aleatórias e produzem saídas probabilísticas. Forma, portanto, um sistema estocástico.

A multiplicidade de formas que aparece resulta da natureza variada de seus parâmetros, da variedade de características de diferenciação e de suas possíveis combinações.

Caracteriza-se como um sistema de prestração de serviço possuindo veículos e pessoas como elementos principais de processo.

O controle só é possível pela existência de critérios baseados nas restrições e de registros dos diversos níveis de operação.

A otimização pela utilização dos modelos procura dimensionar a sua capacidade. Os modelos para esta finalidade devem relacionar as restrições do sistema.

CAPÍTULO II

2. - A CARACTERIZAÇÃO DA EMPRESA - O PROCESSO DE OCORRÊNCIA DOS SERVIÇOS PRESTADOS PELOS VEÍCULOS.

2.1 - INTRODUÇÃO

Os instantes nos quais as tarefas individuais entram no sistema, são chamados instantes de chegada. Os intervalos entre instantes consecutivos de chegada são os tempos entre chegadas. As tarefas admitidas no sistema formam uma fila esperando atendimento quando não há veículos disponíveis.

O processo de ocorrência das tarefas é influenciado pela capacidade da fila e pelo tamanho da fonte de tarefas. O número máximo possível de elementos na fila é a sua capacidade. Quando finita, as tarefas excedentes são perdidas para o sistema. Se tarefas não são recusadas em nenhum momento, a capacidade da fila é infinita. A totalidade dos serviços que podem demandar atendimento é a fonte ou população de tarefas. A população pode ser finita ou infinita. Por fonte finita entendemos uma população com um número limitado de serviços, enquanto que, uma população com um número infinito ou muito grande constitui uma fonte infinita de tarefas.

Embora os sistemas sejam projetados para atender simultaneamente um número maior que a média das ocorrências, filas são formadas devido a ocorrência aleatória das tarefas. Mesmo as tarefas de ocorrência determinística podem ser consideradas como um caso particular de ocorrências probabilísticas com variância zero.

Para melhor caracterizar o processo de ocorrência das tarefas, seguem alguns conceitos básicos sobre processos estocásticos.

2.2 - PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

2.2.1 - Definição

Um processo estocástico é uma coleção $\{X(t) , t \in T\}$ de variáveis aleatórias.

Para um dado t, $X(t)$ pode assumir valores pertencentes a um espaço amostral Ω, real ou complexo. O conjunto T é chamado Conjunto de Índices do processo. Se T somente possue valores inteiros, o processo estocástico é chamado processo de parâmetro discreto e, se T englobar qualquer valor num dado intervalo, processo de parâmetro contínuo.

Muitos fenômenos observados na nossa vida cotidiana são processos estocásticos, obedecendo a definição acima. Em particular, o processo de ocorrência das tarefas se enquadra perfeitamente. Se t representar um intervalo de tempo, $X(t)$ - o número de ocorrências no intervalo t - assumir os valores do espaço amostral $\Omega = \{0, 1, 2, 3, ...\}$, o conjunto de ocorrências $\{X(t), t \in T\}$ será um processo estocástico.

2.2.2 - Descrição de um Processo Estocástico

Para um dado valor t fixo, $X(t)$ assume os valores de um espaço amostral Ω, cujos elementos ocorrem segundo uma determinada distribuição de probabilidade. Esta função distribuição de probabilidade pode ser normal, poisson, binomial, gama, etc., dependendo do processo particular. $X(t_1)$, $X(t_2)$, ..., $X(t_n)$ tem, num dado processo, a mesma distribuição.

Com finalidades práticas, T é um conjunto finito com n índices. Consequentemente, uma completa descrição de um processo estocástico é dada pela função distribuição conjunta de $X(t_1), \ldots, X(t_n)$ para todos os n inteiros $t_1, \ldots, t_n \in T$. Assim, dados todos os números $x_1, \ldots, x_n$

$$F_{X(t_1),\ldots,X(t_n)}(x_1, \ldots, x_n) = P|X(t_1) \leq \alpha, \ldots, X(t_n) \leq x_n| \quad (1)$$

será a função distribuição conjunta das variáveis aleatórias $X(t_1), \ldots, X(t_n)$ que dá uma completa descrição do processo em estudo. Desde que uma função distribuição é completamente determinada pela sua média, variância e momentos de maior ordem, estes parâmetros estatísticos descrevem completamente um processo estocástico.

Outra maneira de descrever um processo estocástico é dar a fórmula do valor de $X(t)$ para o processo em cada ponto t em termos de uma família de variáveis aleatórias cuja distribuição de probabilidade é conhecida [3].

2.2.3 - Implicações da Definição

Desde que, para um dado t, $X(t)$ toma valores de um espaço amostral Ω, um processo estocástico pode ser pensado como uma função de duas variáveis:

$$\{X(w,t),\ w \in \Omega,\ t \in T\}$$

$\{X(w,t)\}$ pode ser interpretado como segue:

a) Para um específico w_i, $\{X(w_i,t)\}$ é uma função de t representativa de uma observação do processo estocástico $\{X(t),\ t \in T\}$. Esta função é chamada "realização" ou "amostra" do processo.

b) Para um dado t_i, $\{X(w,t_i)\}$ são variáveis aleatórias com determinada distribuição.

c) Para dados t_i e w_i, $\{X(w_i,t_i)\}$ é um simples número.

d) Para t e w variáveis, $\{X(w,t)\}$ forma um conjunto de funções de t.

No estudo das ocorrências das tarefas, uma amostra do processo consiste num conjunto de observações do número de ocorrências em determinados intervalos não coincidentes em um período de atividade do sistema. Cada amostra dará uma realização e pode ter seus pontos representados num gráfico, como o da figura 4.

---
3 - REF. 14 - pg. 23

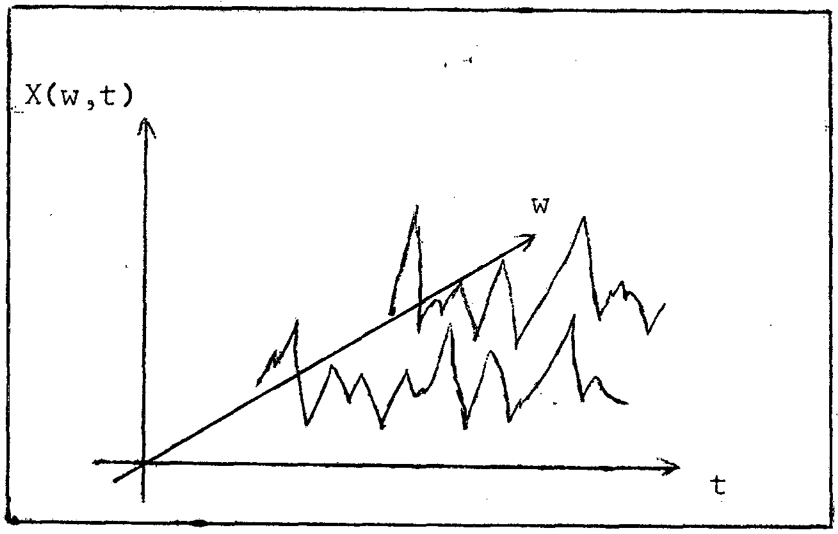


FIG. 4 - Amostras ou realização de um processo estocástico.

Os números de ocorrências, em dado intervalo de observação, para várias amostras, fornecem valores para a construção de gráfico, como o da figura 5. O número de ocorrências num intervalo obtido numa amostra particular é um número K , ou seja, $X(w_i,t_i) = K$.

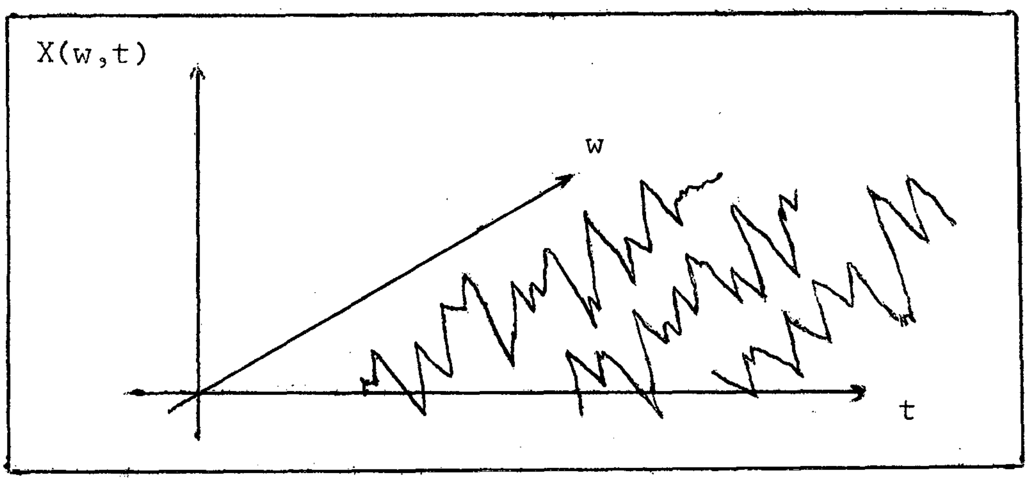


FIG. 5 - Variáveis aleatórias resultantes de diversas amostras de um processo estocástico em pontos fixos t_i .

2.2.4 - Classificação de Processos Estocásticos

a) Quanto a continuidade das variáveis X e t

Conforme X e t sejam contínuas ou discretas, os processos estocásticos podem ser:

1) <u>Processo de variável aleatória X(t) discreto e t discreto</u> - são os processos onde X(t) somente assume valores de um espaço amostral finito ou infinito numerável, e T possue somente valores inteiros. Estes são processos de parâmetro discreto. A figura 6 representa um processo deste tipo.

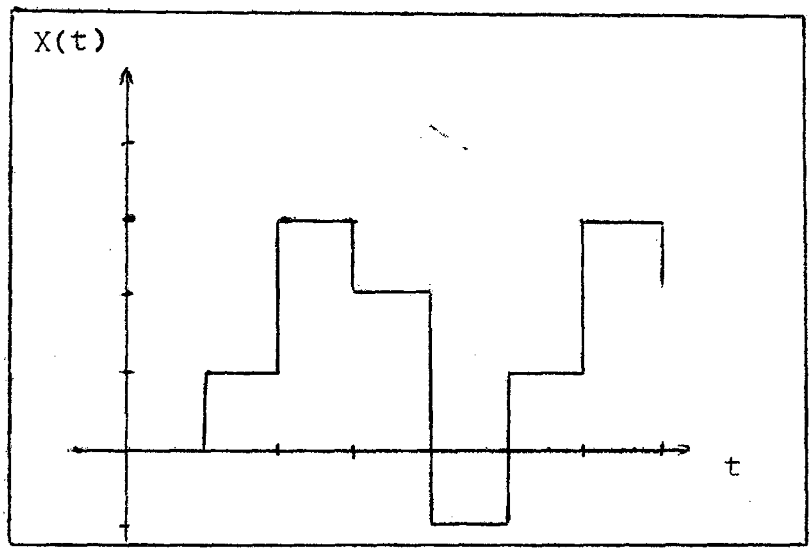


FIG. 6 - Processo estocástico com X(t) e t discretos.

2) <u>Processo de variável aleatória X(t) contínua e t discreto</u> - são os processos onde X(t) pode assumir qualquer valor num intervalo e t assume somente valores de um conjunto T de valores inteiros. Estes processos são, também, processos de parâmetro discreto. A figura 7 representa um processos desta natureza.

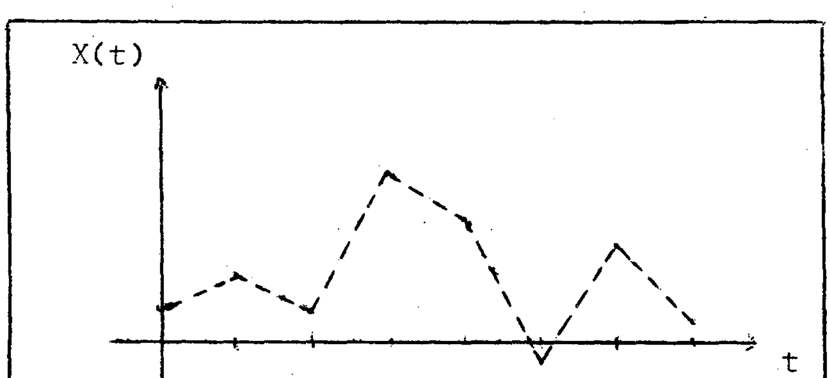


FIG. 7 - Processo estocástico com X(t) contínuo e t discreto.

3) <u>Processo de variável aleatória X(t) discreta e t contínuo</u> - são os processos onde X(t) assume só valores de um espaço amostral finito ou infinito numerável e T engloba um intervalo onde t pode tomar qualquer valor. É um processo de parâmetro contínuo e está representado graficamente na figura 8.

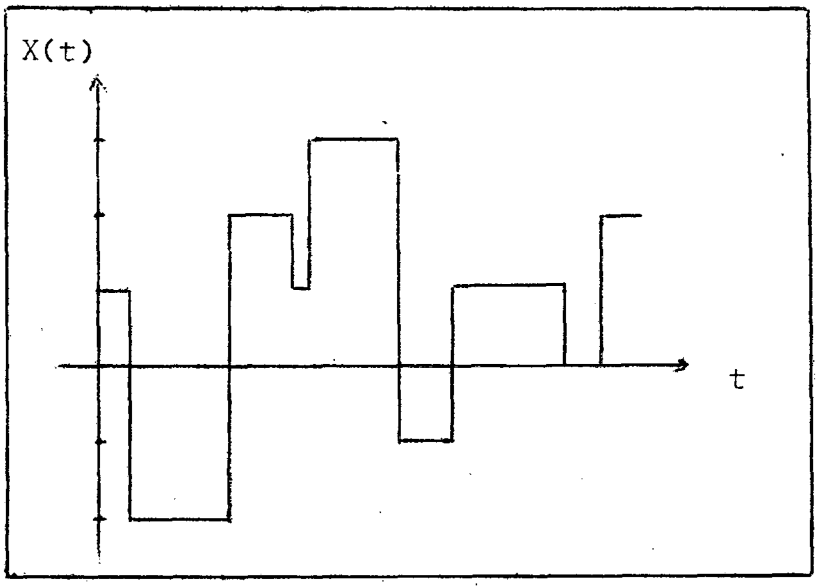


FIG. 8 - Processo estocástico com X(t) discreto e t contínuo.

4) <u>Processo de variável aleatória X(t) contínua e t contínuo</u> - são os processos onde X(t) assume valores de um espaço amostral infinito não numerável e t pode tomar qualquer valor do seu domínio T constituído de de um intervalo. Forma um processo de parâmetro contínuo perfeitamente contínuo. A figura 9 tem a sua representação gráfica.

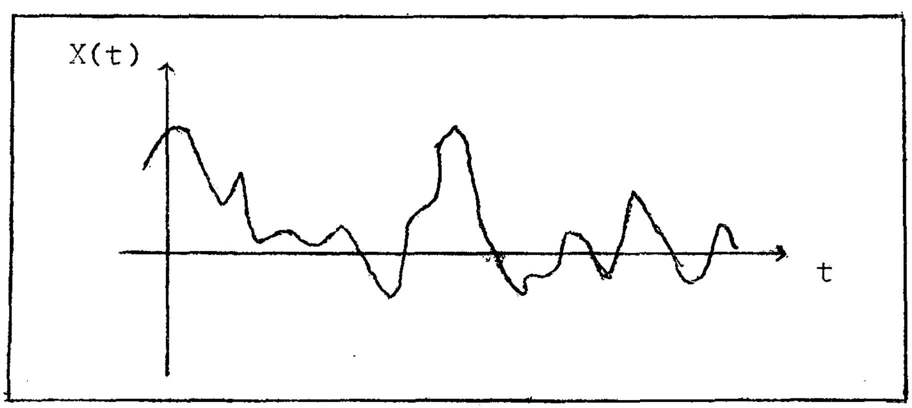


FIG. 9 - Processo estocástico com X(t) e t contínuo.

Um processo de ocorrências de tarefas, de uma maneira geral, é um processo com $X(t)$ - número de ocorrências no tempo t - discreto e, t - o tempo - contínuo. Considerando que duas ou mais tarefas não ocorrem ao mesmo tempo (juntas), o espaço dos resultados possíveis de $X(t)$ será $\Omega = \{0, 1\}$. Em caso contrário, pode ter outros elementos. Em particular, na análise do processo de ocorrência, as tarefas são observadas em intervalos iguais, não coincidentes. Neste caso, $\{X(t), t \in T\}$, onde $X(t)$ representa o número de ocorrências no intervalo t, será um processo com $X(t)$ discreto e t discreto.

b) Quanto ao domínio de $X(t)$

Como o espaço amostral da variável $X(t)$ pode conter valores reais ou complexos, os processos estocásticos podem ser divididos em:

1) Processos de valores reais - quando $X(t)$ toma só valores reais.

2) Processos de valores complexos - quando $X(t)$ assume valores complexos.

c) Processos físicos e não físicos

No sentido probabilístico, um processo estocástico $\{X(t), t \in T\}$ para $t_2 > t_1$ tem existência física se

$$P \{X(t_1)/X(t_2)\} = p \{X(t_1)\} \quad (2)$$

quando

$$P \{X(t_1)/X(t_2)\} \neq p \{X(t_1)\} \quad (3)$$

o processo não tem existência física.

Estas relações são melhor entendidas admitindo que t representa o tempo. A equação (2) significa que o futuro (t_2) não influencia o presente (t_1). Um processo onde o futuro influencia o presente não tem, no sentido adotado, existência física.

d) Quanto a dependência de $X(t)$ com t

Os processos físicos, quanto a dependência de $X(t)$ em relação a t, podem ser:

1) Processos de Markov (markovianos) - Um processo $\{X(t), t \in T\}$ é dito markoviano se, para qualquer conjunto n de valores $t_1 < t_2 < \ldots < t_n \in T$ e para quaisquer números reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$P\,|X(t_n) \leq x_n \,/\, X(t_{n-1}) = x_{n-1}, \ldots, X(t_1) = x_1| =$$

$$= P\,\{X(t_n) \leq x_n / X(t_{n-1}) = x_{n-1}\} \qquad (4)$$

O resultado da equação (4) pode ser interpretado, admitindo t como o tempo, da seguinte forma: Se $X(t)$ assumir no passado os valores $x_1, \ldots, x_{n-2}$ para os tempos $t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-2}$, seu valor $X(t_n)$ no futuro somente depende de seu valor atual $X(t_{n-1})$. Em outras palavras, num processo markoviano dado o "presente" e o "passado", o "futuro" independe do "passado".

2) Processos não Markovianos - Um processo estocástico $\{X(t), t \in T\}$ é não markoviano se, para qualquer conjunto n de valores $t_1 < t_2 < \ldots < t_n \in T$ e para quaisquer números reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$P\{X(t_n) \leq x_n / X(t_{n-1}) = x_{n-1}, \ldots, X(t_1) = x_1\} \neq$$

$$\neq P\{X(t_n) \leq x_n / X(t_{n-1}) = x_{n-1}\} \qquad (5)$$

A equação (5) diz que, num processo não markoviano, dado o "presente" e o "passado", o "futuro" depende dos eventos atuais e do passado.

3) Processo de Ruido Branco (White Noise Process) - Um processo estocástico $\{X(t), t \in T\}$, para o qual $X(t_i)$ é estatisticamente independente de $X(t_j)$, para todo $i \neq j$, é um processo de Ruido Branco. Nes

te caso, para qualquer $x_i \neq x_j$

$$P|X(t_i) \leq x_i / X(t_j) \leq x_j| = P|X(t_i) \leq x_i| \quad (6)$$

Um processo de ruído branco pode ser admitido como uma sequência de variáveis aleatórias independentes.

e) Processos estocásticos estacionários e não-estacionários

Um processo estocástico é estacionário quando a distribuição de probabilidade dos elementos de Ω permanece a mesma e com os parâmetros inalterados para todos os valores $t \in T$. O processo é não estacionário quando os parâmetros mudam com os valores de $t \in T$. Se t fôr o tempo, os processos não estacionários são chamados de processos evolucionários.

Quando o conjunto de índices T for linear[4], um processo estocástico $\{X(t), t \in T\}$ pode ser:

1) Estritamente estacionário (Strict sense Stationarity) - se a distribuição dos elementos de Ω fôr a mesma para todo $t \in T$.

2) Fracamente estacionário (weakly stationary)- Se possuir segundos momentos finitos [5] e

$$\text{cov } |X(t_1).X(t_2)| = \text{função } |t_1 - t_2|$$

Esta definição implica que $E(X(t)) = $ constante.

Na prática, quando o número médio de ocorrência das tarefas não fôr constante em diversos intervalos de observação, não coincidentes, o processo de ocorrência das tarefas será não estacionário.

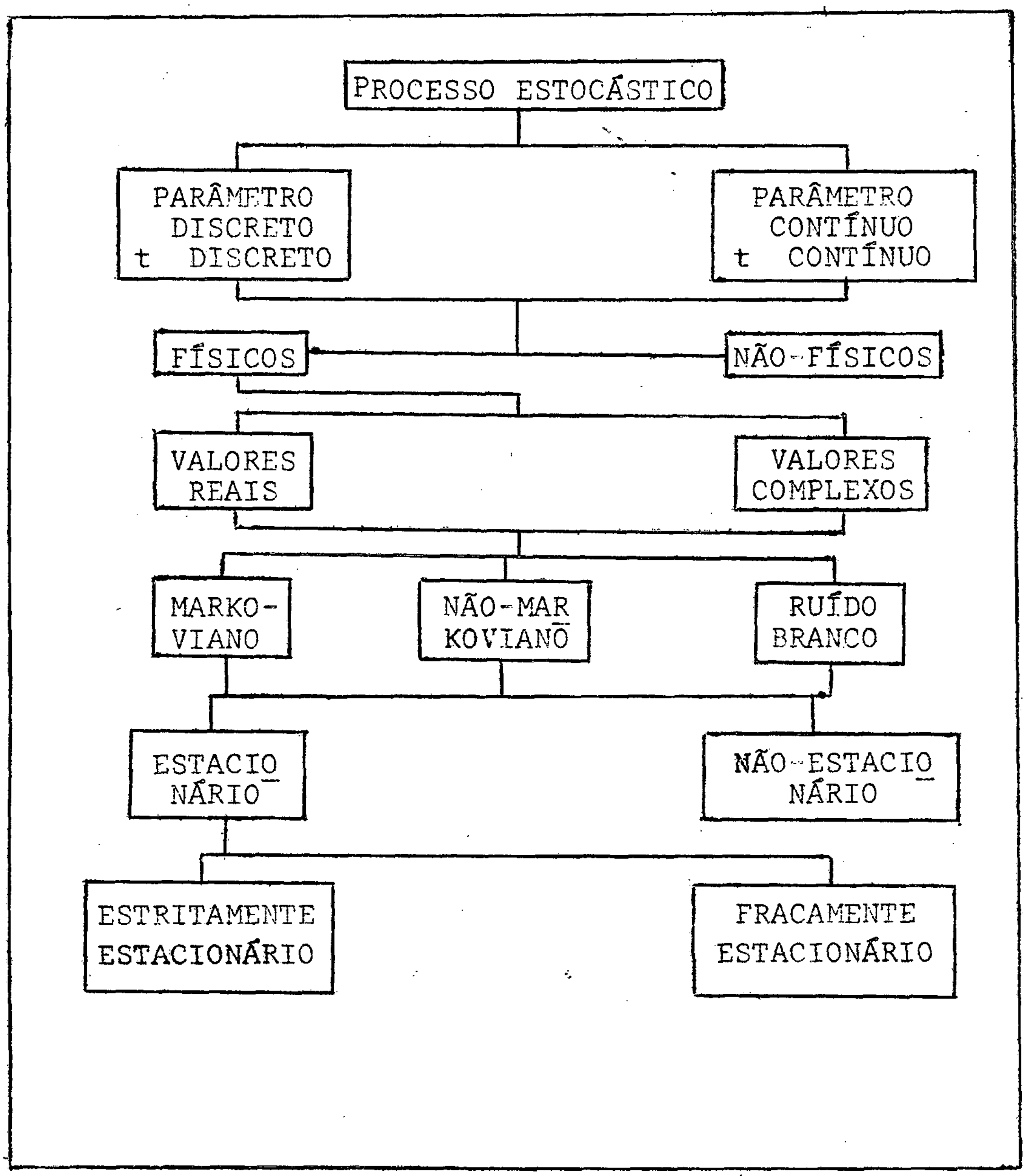
---

4 - Um conjunto de índices T é linear se dados quaisquer $t_1, t_2 \in T$, $t_1 + t_2 \in T$.

5 - Segundos momentos são definidos por $E\{|X(t) - a|^2\}$, sendo <u>a</u> um valor qualquer.

Quando as médias e as variâncias nos diversos intervalos forem constantes, o processo de ocorrência será considerado, para os propósitos deste trabalho, como estacionário.

O Quadro 1 apresenta um esquema para a classificação de processos estocásticos.



QUADRO 1 - Esquema de Classificação de processos estocásticos.

Do exposto conclui-se que, a ocorrência das tarefas é um processo físico, de valores reais, t (tempo) contínuo e X(t) discreto. A priori, não é possível classificá-lo quanto a dependência de X(t) com o tempo t e identificar as distribuições dos valores de Ω ao longo do tempo. O estudo do processo dá estas informações.

2.3 - HIPÓTESES SOBRE AS OCORRÊNCIAS - O PROCESSO DE POISSON.

2.3.1 - Generalidades

O estudo do processo de ocorrência dos serviços é feito contando as tarefas em especificados períodos de tempo, dentro do período de atendimento p - definido como o espaço de tempo dentro do qual os serviços são realizados.

Durante a existência do sistema, ocorrem muitos períodos de atendimento. A vida do sistema será formada por uma sucessão de períodos $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$, intercalados por períodos de não atendimento, os quais podem ser nulos ou não. Para efeito de estudo, divide-se H - a amplitude do período de atendimento - em h intervalos iguais de atendimento, ou seja,

$$\frac{H}{h} = |t_{i+1} - t_i| \qquad i = \{0,1,\ldots h-1\} \tag{7}$$

de tal modo que

$$H = \sum_{i=0}^{h-1} |t_{i+1} - t_i| \tag{8}$$

A observação das ocorrências nestes intervalos, é feita por um processo de contagem.

2.3.2 - Processo de Contagem

Um processo $\{M(t), t > 0\}$ que conta o número de eventos ocorrendo num intervalo, com M(t) somente tomando valores inteiros positivos e tendo os eventos distribuídos por algum mecanismo estocástico, forma um processo de contagem.

As variáveis aleatórias T_1, T_2, T_3, ... que medem os tempos entre as ocorrências sucessivas de eventos, são chamadas de tempos entre chegadas sucessivas.

2.3.3 - O Processo de Poisson

Considere-se eventos ocorrendo no intervalo de tempo $(0, t)$. Seja $N(t)$ o número de eventos que ocorrem neste intervalo.

O processo $\{N(t), t \in T\}$, para o qual t é o tempo, é um processo de Poisson se:

a) Os incrementos $|N(t) - N(s)|$, para todo $t > s \in T$, em intervalos $|t - s|$ não coincidentes, forem independentes.

b) Puder existir o máximo de um evento num pequeno intervalo Δt .

c) A probabilidade de ocorrência de um evento simples , num intervalo Δt , fôr proporcional a Δt .

O processo de Poisson é um processo de contagem. $N(t)$ somente assume valores inteiros positivos. É um processo com $N(t)$ discreto e t contínuo, de valor real e físico, podendo, portanto, representar o processo de ocorrências das tarefas de um sistema com veículos.

Se os incrementos $N(t) - N(s)$, para intervalos não coincidentes, forem estacionários, o processo de contagem $\{N(t), t \in T\}$ é chamado processo de "Poisson Homogêneo" . Neste caso, para qualquer $h > 0$ e $t > s$, $N(t) - N(s)$ e $N(t+h) - N(s+h)$ são identicamente distribuídos. Num processo de Poisson Homogêneo, os momentos de $N(t) - N(s)$ dependem somente de $t - s$.

Por outro lado, se os incrementos $N(t) - N(s)$, para intervalos não coincidentes, não forem estacionários, o processo $\{N(t), t \in T\}$ é chamado processo de "Poisson não Ho mogêneo". Nesta situação os momentos de $N(t) - N(s)$ dependem também de s e, $N(t) - N(s)$ e $N(t+h) - N(s+h)$ não são identicamente distribuídos, embora possuam distribuição do mesmo tipo.

O processo de Poisson é importante não só porque pode servir para modelo de fenômenos importantes (chegadas de clientes ou tarefas para serviço, realizados por vários mecanismos, como vendedores, pistas de um aeroporto, veículos, etc.; ocorrências de quebras e acidentes, por exemplo), como também de base para construção de outros processos estocásticos.

2.3.4 - Derivações axiomáticas do processo de Poisson

Algumas derivações importantes do processo de Poisson podem ser obtidas dos axiomas da definição. Serão consideradas, apenas, aquelas de maior interesse para o problema em estudo.

a) Probabilidade da ocorrência de n eventos num intervalo $(t_2 - t_1)$.

Seja, $P_n(t)$ a probabilidade de n eventos no intervalo $(0, t)$ e $P_{n+1}(t + \Delta t)$ a probabilidade de $n+1$ eventos no intervalo $(0, t + \Delta t)$.

$n+1$ eventos podem ocorrer de duas maneiras:

1º) n eventos em $(0, t)$ e um evento em $(t, t + \Delta t)$ ou,

2º) $n+1$ eventos em $(0, t)$ e nenhum evento em $(t, t + \Delta t)$.

Se o processo fôr de incrementos estacionários

$$P_1(\Delta t) = \gamma \cdot \Delta t \tag{9}$$

e

$$P_o(t) = 1 - \gamma \Delta t \tag{10}$$

Então:

$$P_{n+1}(t + \Delta t) = P_n(t).P_1(\Delta t) + P_{n+1}(t).P_o(\Delta t) =$$

$$= P_n(t).P_1(\Delta t) + P_{n+1}(t).(1-\gamma\Delta t) \qquad (11)$$

e, portanto,

$$\frac{P_{n+1}(t + \Delta t) - P_{n+1}(t)}{\Delta t} = \gamma P_n(t) - \gamma P_{n+1}(t) \qquad (12)$$

Tomando o limite da equação (12) quando $\Delta t \to 0$, resulta:

$$P'_{n+1}(t) + \gamma P_{n+1}(t) = \gamma P_n(t) \qquad (13)$$

A solução da equação (13) fornece:

$$P_{n+1}(t) = \frac{(\gamma t)^{n+1} e^{-\gamma t}}{(n + 1)!} \qquad (14)$$

Da equação (14), demonstra-se que, para o intervalo (t_1, t_2)

$$P_n(t_2) = \frac{|\gamma(t_2-t_1)|^n}{n!} e^{-\gamma(t_2-t_1)} \qquad (15)$$

A equação (14) e a equação (15) são somente aplicáveis se o processo fôr Poisson homogêneo. Quando o processo fôr Poisson não homogêneo, os incrementos não são estacionários e, então

$$P_1(\Delta t) = \gamma(t).\ \Delta t \qquad (16)$$

e

$$P_o(\Delta t) = 1 - \gamma(t).\ \Delta t \qquad (17)$$

Neste caso

$$P_{n+1}(t+\Delta t) = P_n(t).P_1(\Delta t) + P_{n+1}(t).P_o(\Delta t) =$$

$$= \gamma(t).P_n(t).\Delta t + P_{n+1}(t).|1-\gamma(t).\Delta t| \qquad (18)$$

e, portanto,

$$\frac{P_{n+1}(t+\Delta t)-P_{n+1}(t)}{\Delta t} = \gamma(t).P_n(t)- \gamma(t).P_{n+1}(t) \qquad (19)$$

O limite da equação (19), quando $\Delta t \to 0$, é

$$P'_{n+1}(t) + \gamma(t).\ P_{n+1}(t) = \gamma(t).\ P_n(t) \qquad (20)$$

A solução da equação (20), adaptada para um intervalo (t_1, t_2), é

$$P_n(t) = \frac{\left|\int_{t_1}^{t_2} \gamma(t).dt\right|^n}{n!} \cdot e^{-\int_{t_1}^{t_2} .\gamma(t).dt} \qquad (21)$$

A equação (15) e a equação (21) permitem o cálculo da probabilidade de ocorrência de n eventos num intervalo qualquer (t_1, t_2), respectivamente, para processo de Poisson homogêneo e não homogêneo.

b) <u>Média e Variância do Processo</u>

Da equação (21) obtém-se a equação (22) - média do processo - e a equação (23) - variância do processo - usando as definições de média e variância de uma variável aleatória simples.

$$E\ |N(t)| = \int_{t_1}^{t_2} \gamma(t).\ dt \qquad (22)$$

$$\gamma\ |N(t)| = \int_{t_1}^{t_2} \gamma(t).\ dt \qquad (23)$$

Quando o processo fôr homogêneo, $\gamma(t) = \gamma$, para todo t .

Note que as estatísticas do processo são função da amplitude do intervalo (t_1, t_2). Isto significa que um aumento no tamanho do intervalo de observação acarreta um aumento na mé dia e variância do número de ocorrências, como mostram claramente a equação (22) e a equação (23).

c) Parâmetro do Processo

O processo de Poisson é caracterizado somente pelo parâmetro $\gamma(t)$ - chamado usualmente de função intensidade. A função intensidade é sempre considerada como contínua, de modo que

$$\gamma(t) = \frac{d}{dt} E|N(t)| = \frac{d}{dt} V|N(t)| \tag{24}$$

Desde que, conhecido $\gamma(t)$, especifica-se o processo, basta determinar ou estimar esta função. Este problema será discutido no item 2.3.5 .

d) O processo de Poisson não é estacionário

porque $E|N(t)|$ e $V|N(t)|$ são funções do tempo. Os incrementos poderão ser estacionários ou não.

e) O processo de Poisson $\{N(t), t \in T\}$ é um processo Markoviano.

Para um processo de Poisson

$$N(t_n) = N(t_{n-1}) + \sum_{i=1}^{n-2} |N(_{i+1}) - N(t_i)| \tag{25}$$

Como os incrementos $|N(t_{i+1}) - N(t_i)|$ são independentes, conclue-se, com auxílio da equação (25), que para quaisquer números reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$P\{N(t) \leq x_n / N(t_{n-1}) \leq x_{n-1}, \ldots, N(t_1) \leq x_1\} =$$

$$= P\{N(t_n) \leq x_1 / N(t_{n-1}) \leq x_{n-1}\} \tag{26}$$

A equação (26) mostra que o processo de Poisson é Markoviano.

f) <u>O tempo entre as ocorrências, quando estas obedecem um processo de Poisson com parâmetro $\gamma(t)$ é um processo exponencial com parâmetro $\gamma(t)$.</u>

Se num intervalo $(t, t + \Delta t)$ ocorrem, em média, $\int_t^{t+\Delta t} \gamma(t).dt$ tarefas, o tempo médio entre as ocorrências, no tempo t, será

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\int_t^{t+\Delta t} .dt}{\int_t^{t+\Delta t} .\gamma(t).dt} = \frac{1}{\gamma(t)} \qquad (27)$$

O resultado da equação (27) é idêntico ao da teoria da probabilidade para a distribuição de Poisson e a distribuição exponencial. Portanto, a afirmativa inicial é verdadeira.

2.3.5 - <u>Estimativa do parâmetro do processo</u>

Caracteriza-se perfeitamente o processo de Poisson pela sua função intensidade $\gamma(t)$. O problema da definição do processo de ocorrência das tarefas, admitido como Poisson, estará resolvido se uma estimativa aceitável de $\gamma(t)$ fôr obtida.

A estimativa é o resultado da estimação. Chamamos estimação a determinação de quantidade desconhecida através de dados de observação. No caso em estudo, a quantidade desconhecida é uma função - representada por $\gamma(t)$ - e os dados de observação são os números de ocorrências das tarefas nos intervalos de estudo.

De um modo geral, uma estimativa é obtida pelo uso dos dados observados e de estimadores. Para um específico conjunto de dados, o estimador dará a estimativa da quantidade desconhecida. Assim, o problema de estimação consiste na obtenção de estimadores com determinadas propriedades desejáveis.

Não serão discutidos os métodos de obtenção e as propriedades de estimadores, porque fogem ao objetivo deste trabalho. Será apresentado um método de obtenção da função intensidade $\gamma(t)$ usando estimadores aceitos para esta situação:

a) Estimativa de $\gamma(t)$ - Processo de Poisson Homogêneo

Se o processo fôr homogêneo $\gamma(t) = \gamma =$ constante. Neste caso, γ será um simples número.

O número de ocorrências $N(t)$, num pré-fixado tempo de observação t, poderá ser usado para a obtenção de estimativas de γ. Usando a equação (22), $\hat{\gamma}$ - a estimativa de γ - será obtida por

$$\hat{\gamma} = \frac{N(t)}{t} \tag{28}$$

A equação (28) dará boas estimativas para tempos de observação grandes. Na realidade, quanto maior o intervalo de observação mais precisa será a estimativa.

Quando não existe certeza da homogeneidade do processo, a equação (28) dá uma estimativa de γ no intervalo de observação t. Neste caso, uma nova maneira de observação dará maiores informações.

Se a observação fôr feita durante um período dividido em intervalos não coincidentes, usando um processo de contagem $\{N(t), t > 0\}$ obtém-se o número de ocorrências em cada intervalo. Desta forma, resulta uma amostra do processo. Seja $N(t_i)$ o número de ocorrências no intervalo i : $(t_i, t_{i+1}), i=0,1,2,..h$

Tomando os $h + 1$ valores $\gamma(t_i)$, obtidos pela equação (29), pode-se estudar o comportamento de $\gamma(t)$ com t. Gràficamente, para um processo de Poisson homogêneo, $\gamma(t_i)$ tem comportamento representado pela figura 10.

$$\gamma(t_i) = \sum_{j=0}^{i} |N(t_j) \cdot (t_{j+1} - t_j)| \tag{29}$$

Como esperado, num processo homogêneo, para h suficiente, a medida que novos valores $N(t)$ vão sendo adicionados, a equação (29) tenderá ao valor desejado γ. Esta propriedade pode ser enunciada mais rigorosamente pela equação (30):

$$\gamma = \lim_{h \to \infty} \sum_{i=0}^{h} |N(t_j)/(t_{j+1} - t_j)| \qquad (30)$$

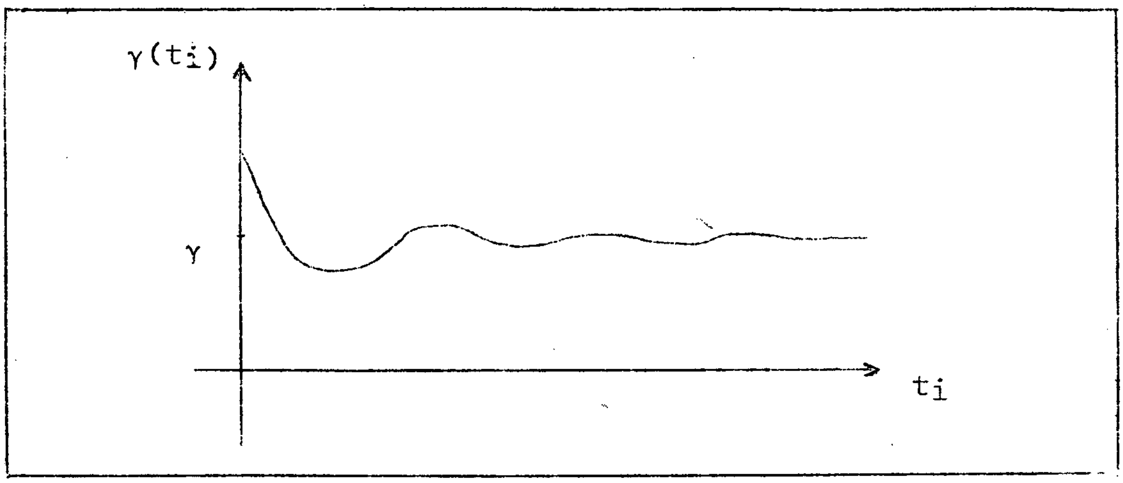


FIG. 10 - Comportamento do parâmetro de um processo de Poisson com o tempo, quando novos valores de observações vão sendo sucessivamente adicionados.

As equações apresentadas são estimadores não tendenciosos e consistentes. Estas propriedades são facilmente demonstráveis, sendo por isso, excluídas as provas.

Por outro lado, se a observação de um processo de Poisson homogêneo é continuada até que m ocorrências sejam contadas, então o tempo W_m necessário para obtê-las poderá ser usado para a obtenção de estimativas de γ. A quantidade $2\gamma\ W_m$ tem distribuição qui-quadrado com $2m$ graus de liberdade [6]. Esta informação permite construir intervalos de confiança para γ.

Seja

$$p\ (a < 2\ W_m < b) = \alpha \qquad (31)$$

Dado α, $\underline{a}$ e $\underline{b}$ podem ser determinados e, então, o intervalo $(a/2W_m, b/2W_m)$ conterá γ c/uma probabilidade α. Este é o intervalo de confiança para γ estimado pela equação (32).

$$\hat{\gamma} = \frac{m}{W_m} \qquad (32)$$

6 - Demonstração Anexo 1 - Parte A

Todos estes procedimentos informam sobre os valores estimados. Se maior segurança nos resultados é desejada, deve-se tomar várias amostras do processo. Esta condição é necessária para decidir se o processo é não homogêneo ou quando o processo fôr não homogêneo.

b) Estimativa de $\gamma(t)$ - Processo de Poisson não homogêneo.

Um processo de Poisson não é homogêneo quando as médias de ocorrências em diversos intervalos iguais não coincidentes forem diferentes. Nesta situação, a função intensidade $\gamma(t)$ não será um simples número.

Tomando várias amostras do processo, calcula-se a média de ocorrências em cada intervalo não coincidente. Dividindo essas médias pela amplitude do intervalo correspondente, obtém-se um valor $\gamma(t)$, admitido correspondente ao valor t considerado com o ponto médio do intervalo. Desta forma, são obtidos vários pontos da função $\hat{\gamma}(t)$. Uma curva aproximada a estes pontos será uma estimativa da função $\gamma(t)$. Nesta aproximação, é utilizado o método dos mínimos quadrados.

Este procedimento para a estimação da função intensidade permite o cálculo do número de amostras em cada intervalo, para a obtenção dos pontos da função $\hat{\gamma}(t)$ com desejada precisão, pela aplicação da equação (33).

$$n_i = z^2 \frac{S^2(t_i)}{e^2} \tag{33}$$

onde

n_i - é o número de amostras necessárias no intervalo i.

e - é o erro desejado = $|\gamma(t_i) - \hat{\gamma}(t_i)|$

z - valor da variável normal reduzida correspondente a probabilidade desejada da estimativa $\hat{\gamma}(t_i)$ diferir de $\gamma(t_i)$ de um valor menor que "e".

$S(t_i)$ - desvio padrão de um número M_i ($M_i < n_i$) de amostras preliminares.

A equação (33), para uma dada precisão (erro), não fornece necessàriamente valores iguais para os diversos intervalos. Nos intervalos onde a média de ocorrências fôr maior, maior será também o número de amostras.

O procedimento apresentado para a estimativa de $\gamma(t)$, implica na necessidade de um número grande de amostras ($n_i > 30$). A precisão dada pela equação (34) aumenta com o aumento de n_i.

$$|\gamma(t_i) - \hat{\gamma}(t_i)| \doteq z \frac{S(t_i)}{\sqrt{n_i}} \tag{34}$$

2.3.6 - Teste para verificar se os serviços ocorrem segundo um processo de Poisson.

Existem razões práticas para considerar o processo de ocorrência das tarefas como um processo de Poisson. Muitos eventos semelhantes seguem tal processo. Esta, entretanto, não é uma razão suficiente para uma suposição desta natureza.

Existem testes para verificar se as ocorrências seguem um processo de Poisson. Neste item será apresentado um teste de fácil aplicação que difere ligeiramente conforme $\gamma(t)$ seja constante ou não. Por isso, antes da sua aplicação, é necessário decidir se o processo é homogêneo ou não. Isto é feito admitindo-se o processo como Poisson e estimando-se $\gamma(t)$. Se $\gamma(t)$ fôr constante, o processo é homogêneo. Em caso contrário, não. Após esta decisão é aplicado o teste conveniente.

a) Teste quando $\gamma(t)$ fôr constante.

Seja $\{N(t),\ t \geq 0\}$ um processo de Poisson com função intensidade $\gamma(t) = \gamma$. Admita-se que no intervalo $(0, T)$, $N(T) = K$; então os K tempos $t_1, t_2, \ldots, t_K$, nos quais os eventos ocorrem, são valores de variáveis aleatórias independentes $U_1, \ldots, U_K$ uniformente distribuídas no intervalo $(0, T)$ [7].

7 - REF. 14 - pg. 140

Baseado nesta propriedade, qualquer método que verifique se as observações $U_1, U_2, \ldots, U_k$ são independentes e uniformente distribuidas estará testando se as ocorrências obedecem a um processo de Poisson.

Por outro lado, de acordo com o teorema do limite central, para n suficientemente grande

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} U_i \quad \text{é normal} \tag{35}$$

$$\text{com média} \quad E(S_n) = n\, E(U_1) = n\, \frac{T}{2} \tag{36}$$

$$\text{e variância} \quad V(S_n) = n\, V(U_1) = n\, \frac{T^2}{12} \tag{37}$$

A equação (36) e a equação (37) ajudam na construção de intervalos de confiança para S_n. Para um nível de significância α, o valor S_n observado deverá estar compreendido entre

$$\frac{n\,T}{2} - z\,T\sqrt{\frac{n}{12}} \leqslant S_n \leqslant \frac{n\,T}{2} + z\,T\sqrt{\frac{n}{12}} \tag{38}$$

onde "z" é o valor da variável aleatória normal reduzida Y que torna

$$P(-z \leq Y \leq z) = \alpha$$

Nível de significância diz que a probabilidade do intervalo dado pela equação (38) conter S_n é α, ou, de outra forma, se as ocorrências forem do tipo Poisson, temos uma probabilidade α de aceitá-las como tal.

<u>Exemplo</u> - Suponha que,observadas uma série de eventos por 10 minutos, notou-se ocorrências nos seguintes tempos;0,20; 0,33; 0,98; 2,02; 3,92; 4,12; 5,74; 6,42; 7,87; 8,49; 9,85 e 9,94. Com um nível de significância de 95% estes eventos podem ser aceitos como pertencentes a um processo de Poisson.

De fato, para os valores dados n = 12 e T = 10 , $S_n = 59{,}84$ pertence ao intervalo

$$\left| \frac{12 \, . \, 10}{2} - 1{,}96 \, . \, 10 \sqrt{\frac{12}{12}} \; , \; \frac{12.10}{2} + 1{,}96.10 \sqrt{\frac{12}{12}} \right|$$

b) <u>Teste quando $\gamma(t)$ não é constante</u>

Seja $\{N(t),\ t \geq 0\}$ um processo de Poisson com valor esperado

$$E|N(t)| = m(t) = \int_0^t \gamma(t).dt \tag{39}$$

Admita-se que no intervalo $(0,t)$, $N(t) = K$; então , os K tempos $t_1, t_2, \ldots, t_K$, nos quais os eventos ocorrem, são valores das variáveis aleatórias independentes $U_1, U_2, \ldots, U_K$ com igual distribuição acumulada [8].

$$F_{U_j}(\mu) = \frac{m(\mu)}{m(t)} \quad , \quad 0 \leq \mu \leq t \tag{40}$$

Desde que $U_1, U_2, \ldots, U_K$ são independentes, para K suficientemente grande

$$S_K = \sum_{i=1}^{K} U_i \tag{41}$$

é normal com média

$$E(S_K) = K\ E(U_1) = K \int_0^t \mu\left(\frac{dF_{U_1}}{d\mu}\right).d\mu =$$

$$= \frac{K}{m(t)} \int_0^t \mu\left(\frac{dm(\mu)}{d\mu}\right).d\mu \tag{42}$$

e variância

$$V(S_K) = K\ V(U_1) = K \int_0^t |\mu - E(S_K)|^2 \left(\frac{dF_{U_1}}{d\mu}\right).d\mu =$$

$$= \frac{K}{mt} \int_0^t |\mu - \frac{K}{m(t)} \int_0^t \mu\left(\frac{dm(\mu)}{d\mu}\right)d\mu\,|^2 \left(\frac{dm(\mu)}{d\mu}\right).d\mu \tag{43}$$

8 - Demonstração - Anexo 1 - Parte B

O intervalo de confiança para S_K é montado de maneira semelhante ao caso do processo homogêneo. A equação (44) dá os limites do intervalo

$$E(S_K) - z\sqrt{V(S_K)} \leq S_K \leq E(S_K) + z\sqrt{V(S_K)} \qquad (44)$$

Dado o nível de significância α, z é o valor da variável aleatória normal reduzida "y", que torna

$$P(-z \leq y \leq z) = \alpha$$

Se o valor S_K observado satisfizer a desigualdade da eq.(44), a hipótese de que os eventos são Poisson é aceita.

Qualquer outro teste para verificar a independência das variáveis $U_1, U_2, \ldots, U_K$, distribuídas segundo a função acumulada dada pela equação (40), servirá para verificar se os eventos ocorrem segundo o processo de Poisson.

2.3.7 - Soma de Processos de Poisson

Existem sistemas alimentados por diversos tipos de tarefas. Se estas forem admitidas por um único canal de chegada, o processo de ocorrência será, para o sistema, o resultado da soma das ocorrências de diversos tipos.

Se todos os n tipos ocorrem segundo processos de Poisson com parâmetros $\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t)$, respectivamente, o processo soma será um processo de Poisson com parâmetro

$$\gamma(t) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i(t) \qquad (45)$$

A equação (45) é um resultado conhecido da teoria de probabilidade.

Quando n fôr suficientemente grande, o teorema do limite central é aplicável. Neste caso, o processo soma será normal com média μ_j e variância σ_j^2, dados pela eq.(46).

$$\mu_j = \sigma_j^2 = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i\left(\frac{t_{j+1}+t_j}{2}\right) \cdot \left|t_{j+1} - t_j\right| \qquad (46)$$

2.4 - HIPÓTESES SOBRE AS OCORRÊNCIAS - O PROCESSO DE CONTAGEM RENOVAÇÃO.

2.4.1 - O Processo de Contagem Renovação

O processo de contagem renovação é um processo de contagem $\{R(t), t \geq 0\}$ de uma série de eventos com tempos entre ocorrências identicamente distribuídas e independentes.

É um processo físico de valores reais inteiros, com parâmetro contínuo. Uma grande variedade de fenômenos pode ser descrita pelo processo de renovação. Pode representar o processo de faltas e reposição de equipamentos, certos fluxos de tráfego, como chamadas telefônicas que chegam a uma central, e aparecem como modelos de saída nos circuitos de escala dos contadores de partículas radioativas. Se $R(t)$ representar o número de tarefas ocorridas num intervalo, o processo de ocorrência das tarefas pode ser de renovação.

Na realidade, a única restrição para a adoção do processo de renovação como um processo de entrada num sistema com veículos e a independência dos tempos entre ocorrências. Somente será uma boa representação quando a população de tarefas fôr infinita. Em outras palavras, quando a fonte de serviços fôr infinita ou muito grande, o tempo entre ocorrências sucessivas é independente é a utilização do processo de renovação é válida.

2.4.2 - A Equação de Renovação

Muitas quantidades de interesse na teoria do processo de contagem renovação satisfazem uma relação da forma da equação (47):

$$g(t) = h(t) + \int_0^t g(t-s).f(s).ds \qquad (47)$$

onde $f(t)$, $g(t)$ e $h(t)$ são funções definidas para $t \geq 0$.

Se $f(t)$ e $h(t)$ são funções conhecidas, $g(t)$ é a função desconhecida a ser determinada como solução da equação (47). Em várias demonstrações de características dos processos de renovação a equação (48) é utilizada.

2.4.3 - Processo de Contagem com Tempo entre Ocorrências Exponenciais.

A variável aleatória T representativa dos tempos entre ocorrências tem distribuição exponencial com parâmetro γ, se sua função densidade de probabilidade fôr dada pela equação (48).

$$f(t) = \gamma e^{-\gamma T} , \quad T > 0 \qquad (48)$$

$$= 0 \quad \text{para quaisquer outros valores.}$$

A distribuição exponencial, além do tempo entre ocorrências, pode representar a densidade do tempo de serviço dos veículos. Será apresentada em maiores detalhes no item 3.2.2 .

Se os tempos entre chegadas $\{T_n\}$ são exponencialmente distribuídos com parâmetro γ, então o processo de renovação $\{R(t), t \geq 0\}$ é um processo de Poisson com parâmetro γ [9].

Quando o parâmetro da distribuição exponencial fôr função do tempo, o processo de renovação $\{R(t), t \geq 0\}$ será um processo de Poisson não homogêneo. De outra forma, se o processo de Poisson fôr não homogêneo com parâmetro $\gamma(t)$, o tempo entre as ocorrências será exponencial com parâmetro $\gamma(t)$.

2.4.4 - O Processo de Renovação com Tempo entre Ocorrências Gama.

A distribuição gama é uma família de distribui-

9 - REF. 14 - pg. 174

ções de dois parâmetros que pode ser usada para aproximar a maioria das distribuições de tempos entre ocorrências.

Consequentemente, o processo de renovação com distribuição entre ocorrências gama é de particular interesse. Se T - a variável aleatória representativa dos tempos entre chegadas - fôr gama, a sua função densidade de probabilidade será dada pela equação (49).

$$f(T) = \frac{h}{\Gamma(k)} \cdot (hT)^{k-1} . e^{-hT} \quad , \quad T > 0 \qquad (49)$$

$$= 0 \quad \text{para quaisquer outros valores}$$

A distribuição gama tem dois parâmetros, k e h, para os quais se exige $k > 1$ e $h > 0$. $\Gamma(k)$ é a função gama definida pela equação (50).

$$\Gamma(k) = \int_0^\infty x^{k-1} . e^{-x} . dx \quad , \text{ para } k > 0 \qquad (50)$$

Um caso particular de interesse, pela sua melhor adequação para utilização em computadores digitais, é a distribuição gama com parâmetro k inteiro. Neste caso, a função densidade de probabilidade obedece a equação (51).

$$f(T) = \frac{h}{(k-1)!} \cdot (hT)^{k-1} . e^{-hT} \quad , \quad T > 0 \qquad (51)$$

O valor esperado e a variância são dados, respectivamente, pela equação (52) e equação (53).

$$E(T) = k/h \qquad (52)$$

$$V(T) = k/h^2 \qquad (53)$$

Da distribuição gama, duas distribuições importantes e conhecidas são derivadas. Se $k = 1$, obtemos a distribuição exponencial com parâmetro h. Se $h = 1/2$ e $k = \frac{n}{2}$, com n inteiro positivo, obtemos uma família de distribuições de um parâmetro chamada qui-quadrado ("n" é o número de graus de liberdade).

Para acrescentar um melhor entendimento na capacidade da distribuição gama para representar uma grande variedade de distribuições de tempos entre ocorrências, é interessante observar o comportamento da variância com o aumento sucessivo do parâmetro k, mantida fixa a média.

O Quadro 2 apresenta os valores para a análise da variância.

k	h	E(T)	V(T)
1	0,1	10	100,0
2	0,2	10	50,0
3	0,3	10	33,3
4	0,4	10	25,0
'	'	'	'
'	'	'	'
'	'	'	'
∞		10	0

QUADRO 2 - Comportamento da variância da distribuição gama de mesma média com aumentos sucessivos do parâmetro k .

Quando k aumenta, mantida constante a média, a variância diminui. Este fato mostra que a distribuição gama engloba tempos entre ocorrências cujas variâncias vão desde valores grandes até variância zero. Quando a variância é zero , o tempo entre ocorrências é constante.

Uma característica de identificação da distribuição gama é o coeficiente de variação C_V, definido como a relação entre a variância e o quadrado da média de uma distribuição. Para a dist. gama assume a forma da equação (54).

$$C_V = \frac{k/h^2}{(k/h)^2} = 1/k \qquad (54)$$

C_V , para a dist. gama, assume valores entre zero e um, uma vez que k é sempre maior ou igual a um. Se dados de amostras de tempos entre ocorrências indicarem coeficientes de variação menores ou iguais a 1, há fortes razões para admitir os tempos entre ocorrências como uma variável aleatória com distribuição gama.

Neste trabalho, será considerado somente os processos de renovação com tempos entre ocorrências gama de parâmetro k inteiro.

a) <u>Probabilidade de ocorrência de n eventos no intervalo $|0, t|$</u>.

Seja W_m o tempo necessário para a ocorrência de n eventos com tempo entre ocorrência gama com parâmetro k inteiro. $W_m(t)$ será a soma de n eventos com dist. gama. A distribuição de $W_m(t)$ obedece a função densidade, representada pela equação (55).

$$f_{W_m}(t) = \frac{h^{nk} \cdot t^{nk-1}}{(nk-1)!} \cdot e^{-nt} \tag{55}$$

Da equação (55) surge a equação (56):

$$1 - F_{W_n}(t) = \int_t^{\infty} \frac{h^{nk} . x^{nk}}{(nk-1)!} . e^{-hx} . dx = \sum_{m=0}^{nk-1} \frac{1}{m!} (nt)^m . e^{-ht} \tag{56}$$

Desde que a probabilidade do tempo necessário para a ocorrência de n eventos ser maior que t é igual à probabilidade de que no tempo t não tenham ocorrido n eventos , a equação (57) é verdadeira.

$$1 - F_{W_n}(t) = P|W_m > t| = P|R(t) < n| \tag{57}$$

Então,

$$P_R(n) = \sum_{m=nk}^{(m+1)k-1} \frac{1}{m!} . (ht)^m . e^{-kt} \tag{58}$$

A equação (58) dá a probabilidade de ocorrência de n eventos no intervalo $|0, t|$. Para um intervalo qualquer (t_i, t_{i+1}), a equação (59) permite calcular a probabilidade de n ocorrências.

$$P_{R(t)}(n) = \sum_{m=nk}^{(n+1)k-1} \frac{1}{m!} |h(t_{i+1} - t_i)|^m . e^{-h(t_{i+1}-t_i)} \qquad (59)$$

b) Média e Variância do Processo

A média e a variância do processo são calculados, respectivamente, pela equação (6) e equação (62), para o intervalo $|0, t|$.

$$E|R(t)| = \sum_{n=0}^{\infty} n \sum_{m=nk}^{(n+1)k-1} \frac{1}{m!} (nt)^m . e^{-ht} \qquad (60)$$

$$V|R(t)| = \sum_{n=0}^{\infty} \{n-E|R(t)|\}^2 \sum_{m=nk}^{(n+1)k-1} \frac{1}{m!} (nt)^m . e^{-ht} \qquad (61)$$

Os resultados da equação (60) e equação (61) não são expressões simples. PARZEN[10] mostra que a expressão do valor esperado do processo toma a forma da equação (62).

$$E|R(t)| = \frac{ht}{k} + \frac{1}{k} \sum_{r=1}^{k-1} \frac{\exp(2\Pi ir/k)}{1-\exp(2\Pi ir/k)} \{1-\exp|-ht(1-\exp(2\ ir/k))|\} \qquad (62)$$

c) Parâmetros do Processo

O processo de renovação tem dois parâmetros. h e k definem a distribuição gama particular do tempo entre as ocorrências e caracterizam o processo de renovação.

d) Propriedades Assintóticas do Processo

O processo de renovação apresenta interessantes pro-

10 - REF. 14 - pg. 177

priedades para grandes valores de t .

Se $E(T) < \infty$, então

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E|R(t)|}{t} = \frac{1}{E(T)} \tag{63}$$

Se $E(T) < \infty$ e $V(T) < \infty$, então

$$\lim_{t\to\infty} \frac{V|R(t)|}{t} = \frac{V(t)}{|E(t)|^3} \tag{64}$$

Se $E(T^2) < \infty$, então, para qualquer número real x

$$\lim_{t\to\infty} P \left| \frac{R(t)-(t/e(t))}{t.V(t)/|E(T)|^3} \leq x \right| = \frac{1}{2\Pi} \int_{-\infty}^{x} e^{-1/2.y^2} .dy \quad . \tag{65}$$

Estas propriedades são apresentadas sem demonstração.[11]

e) O processo de renovação não é um processo estacionário, pois $E|R(t)|$ e $V|R(t)|$ dependem do tempo t .

f) O teste de verificação das ocorrências e estimativa dos parâmetros estão referidos, respectivamente, no item 3.4.4 e item 3.4.5 .

2.5 - OCORRÊNCIAS CONJUNTAS

Quando dois ou mais serviços ocorrem simultaneamente , temos ocorrências conjuntas. O processo de ocorrência poderá , então, ser decomposto em dois:

a) Processo de ocorrências considerando as tarefas conjuntas como um único serviço.

b) Processo de definição do número de tarefas ocorrendo simultaneamente.

---

11 - Para melhor discussão das propriedades assintóticas, veja REF. 16 .

O primeiro pode ser representado por um processo de renovação, enquanto o segundo será definido pela distribuição de probabilidade do número tarefas conjuntas. A variável aleatória x representativa do número de ocorrências simultâneas pode assumir uma distribuição de Poisson dada pela equação (66).

$$P(x=k) = \frac{h^k}{k!} \cdot e^{-k} \qquad (66)$$

O parâmetro h somente assume valores maiores que zero e x toma valores do espaço amostral infinito numerável = 0, 1, 2, ...

Na impossibilidade de aceitação da variável x como tendo distribuição de Poisson, recorre-se às distribuições experimentais ou empíricas como aproximações aceitas. São, também, utilizadas para caracterizar o processo de ocorrência propriamente dito quando um processo de renovação não se adapta. As distribuições empíricas estão descritas no item 3.4 .

2.6 - SIMULAÇÃO DO PROCESSO DE OCORRÊNCIA DAS TAREFAS

2.6.1 - Introdução

Bàsicamente, a simulação do processo de ocorrência das tarefas pelo método de Monte Carlo, consiste na geração dos tempos entre chegadas sucessivas. A soma do tempo de ocorrência da tarefa I com o tempo entre chegadas gerado I+1 resulta no instante de ocorrência da tarefa I+1 .

Nesta simulação da ocorrência dos serviços é utilizado a distribuição do tempo entre chegadas. Para a geração do tempo entre ocorrências com determinada distribuição de probabilidade, o método mais utilizado é o da transformação inversa. Este método consiste no seguinte:

a) Obtenção da função distribuição acumulada inversa das variáveis que se deseja gerar.
Seja x a variável aleatória cujos valores são desejados e F(x) a sua função distribuição acumulada.

Nesta primeira etapa é calculada a função

$$x = f(y) = F^{-1}(x) \tag{67}$$

b) Dado que y é uniformemente distribuída no intervalo $|0, 1|$ [12], um gerador de números aleatórios uniformemente distribuídos neste intervalo, dará os valores de y. Estes valores usados na equação (67) permitem a obtenção dos valores da variável x com função densidade acumulada $F(x)$.

O método de mapeamento ou transformação inversa é utilizado quando a inversa de $F(x)$ existe ou, puder ser representada por uma função aproximada cuja inversa exista.

A simulação do processo de ocorrência das tarefas é usada nos modelos de simulação dos sistemas com veículos.

As idéias aqui desenvolvidas sobre simulação de processos de ocorrência estão apresentadas em linguagem FORTRAN e dirigidas para computadores de pequeno porte. Neste trabalho foi utilizado um IBM-1130.

2.6.2 - Simulação do Processo de Renovação Estacionário

A figura 11 mostra o algorítmo para a geração de n ocorrências, obedècendo um processo de renovação estacionário.

A variável T(I), I=1,N assume o tempo de ocorrência da tarefa I. ENTRE é o nome genérico da sub-rotina de geração dos tempos entre chegadas x.

Quando o processo de ocorrência das tarefas fôr Poisson homogêneo, a sub-rotina ENTRE deverá gerar variáveis aleatórias exponenciais. Quando o processo fôr de renovação com tempo entre chegadas gama, a sub-rotina ENTRE deverá gerar variáveis gama. As sub-rotinas para a geração de variáveis aleatórias com determinada distribuição são extensivamente tratadas na literatura de simulação, como em |10| e |12|.

---

12 - REF. 11 - pg. 296

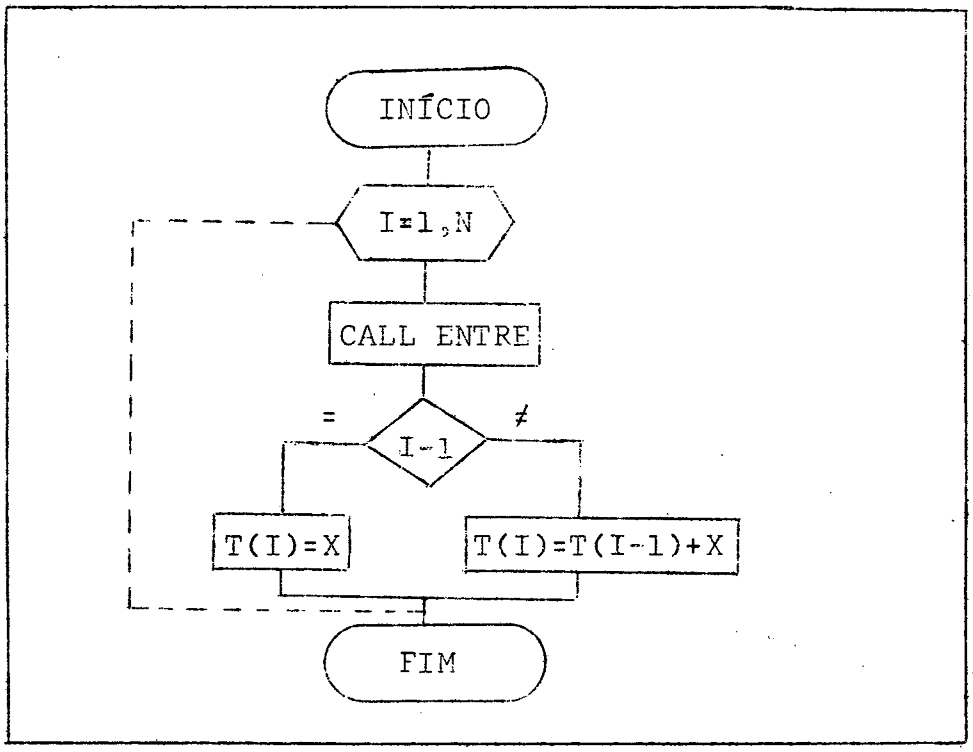


FIG. 11 - Algorítmo para geração de N ocorrências de serviços, segundo um processo de contagem renovação estacionário.

Se o tempo entre ocorrências estiver representado por uma distribuição experimental, o método desenvolvido por MARSAGLIA poderá ser usado como alternativa. O método consiste na utilização de 1.000 endereços na memória, onde são guardados os valores do tempo entre ocorrências, correspondente ao ponto médio x do intervalo de classe. Guarda-se na ordem crescente dos valores x; para cada intervalo, uma quantidade de pontos médios igual a parte inteira da frequência de classe multiplicada por 1.000 . Os valores de x são tirados deste conjunto , usando números aleatórios uniformemente distribuídos no intervalo |0, 1|. A parte inteira do resultado da multiplicação do número gerado por 1.000 será o endereço do valor da variável x com a distribuição experimental desejada.

O método de MARSAGLIA gera as variáveis rápidamente e é mais preciso para variáveis aleatórias discretas. Quando usado para variáveis contínuas, perde em precisão devido a discretização. Neste caso, um aumento no número de intervalos de classe melhora a precisão. A figura 12 apresenta a parte do programa de geração dos valores de x armazenados no vetor V(I),I=1,1000 segundo uma distribuição empírica qualquer.

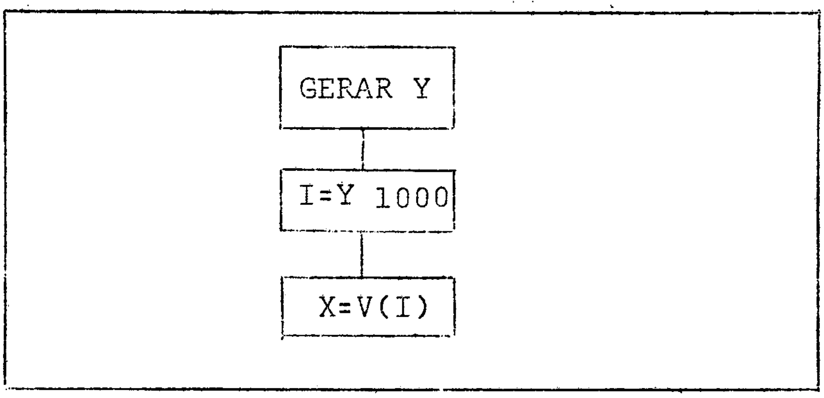


FIG. 12 - Parte principal do programa para a geração de com distribuição empírica.

Existem técnicas desenvolvidas para a geração dos números aleatórios Y uniformemente distribuídos no intervalo |0, 1|. Podem ser encontrados em |1| e |7|.

2.6.3 - Simulação do Processo de Contagem Renovação Estacionário com Ocorrências Conjuntas.

O algorítmo para a simulação do processo com ocorrências conjuntas é semelhante àquele para processo sem ocorrências conjuntas.

Como mostra a figura 13, apenas um gerador do número IR de ocorrências conjuntas é acrescentado.

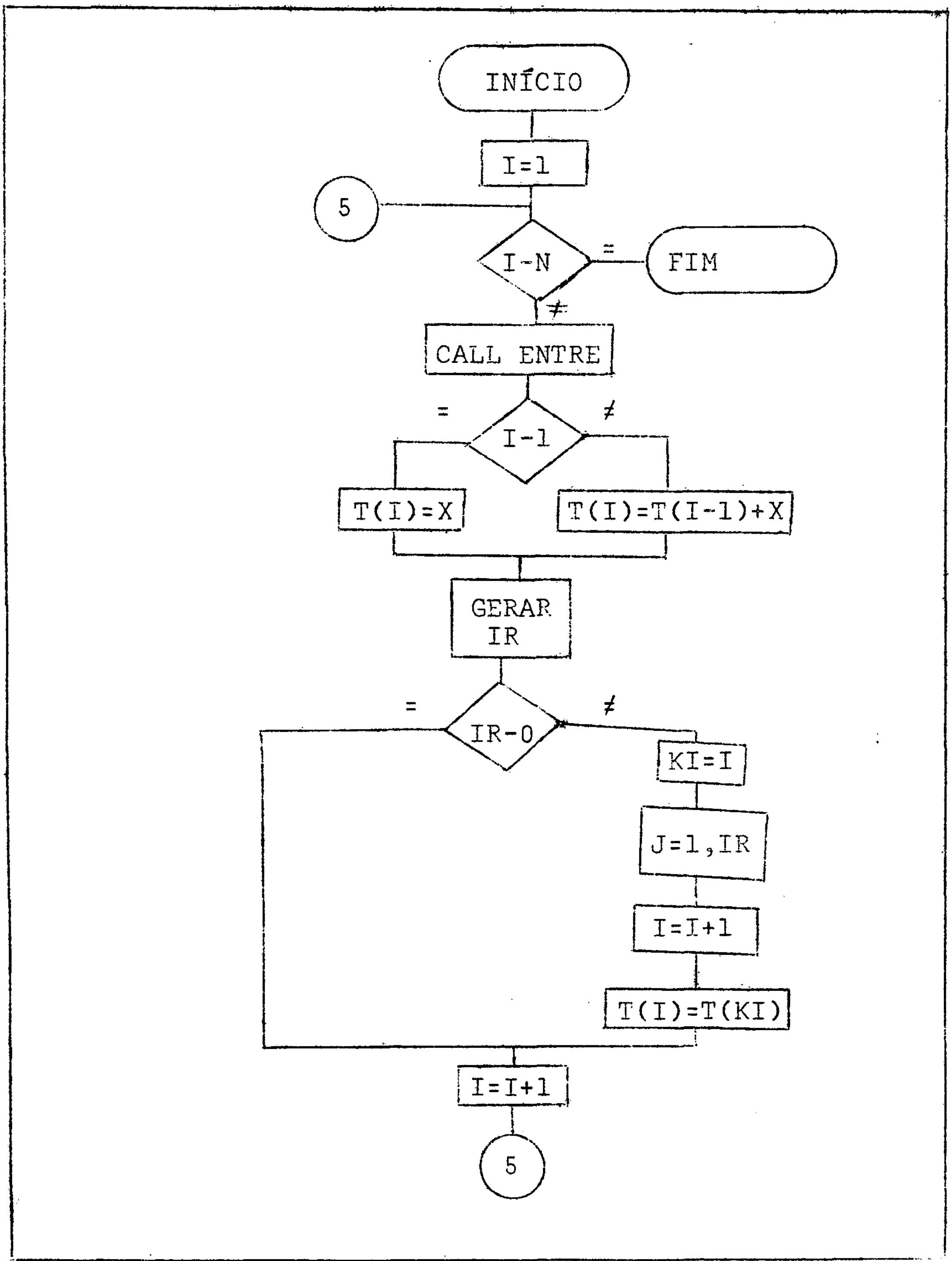


FIG. 13 - Algorítmo para a simulação de um processo de ocorrência de serviços contagem renovação estacionário com ocorrências conjuntas.

2.6.4 - Exemplo

Para ilustrar o funcionamento dos procedimentos expostos, a Tabela 1 mostra o resultado da simulação do processo de ocorrência contagem renovação com tempos entre ocorrências gama e distribuição de ocorrências conjuntas Poisson. A distribuição gama tem parâmetros $k = 10$ e $h = 0,1$, enquanto a distribuição de Poisson tem parâmetro $\gamma = 1,0$. O programa e as sub-rotinas utilizadas nesta simulação estão no anexo 2.

ORDEM OCORRÊNCIAS	INSTANTES DE OCORRÊNCIAS
1	71,65
2	71,65
3	71,65
4	131,38
5	185,48
6	185,48
7	185,48
8	185,48
9	266,25
10	320,62
11	361,46
12	394,54
13	439,70
14	439,70
15	439,70
16	485,93
17	530,04
18	590,58
19	590,58
20	590,58
21	633,54
22	633,54
23	633,54
24	684,20

TABELA 1 - Ocorrências simuladas de um processo estacionário de renovação, com tempo entre chegadas gama e ocorrências conjuntas Poisson.

Analisando os resultados, percebe-se a existência de ocorrências conjuntas. O Quadro 3 mostra que a média do número de ocorrências conjuntas se aproxima de 1 . Este fato era esperado devido a utilização, para o número de ocorrências conjuntas, de uma distribuição de Poisson com média $\gamma=1$.

	Número Ocorrências Conjuntas A	Número Eventos Simulados	MÉDIA A ÷ B
Simulação I	478	522	0,915
Simulação II	562	438	1,292
Simulação III	495	505	0,980
MÉDIA SIMULAÇÃO	511.666	545.000	1,062
TEÓRICO	500	500	1,000

QUADRO 3 - Número e média das ocorrências conjuntas simuladas segundo distribuição de Poisson.

Pode-se verificar que o tempo entre as ocorrências é gama com os parâmetros indicados.

2.6.5 - Simulação do Processo de Contagem Renovação Não-Estacionário.

Quando a forma funcional dos parâmetros como função do tempo fôr conhecida, o algorítmo de simulação assemelha-se ao caso estacionário. Os parâmetros da distribuição que será usada para gerar o tempo entre as ocorrências I e I+1 são obtidos a partir da forma funcional dos parâmetros pelo utilização de T(I) como valor da variável independente. A figura 14 apresenta o algorítmo para a simulação de um processo não estacionário quando a forma funcional dos parâmetros são conhecidos.

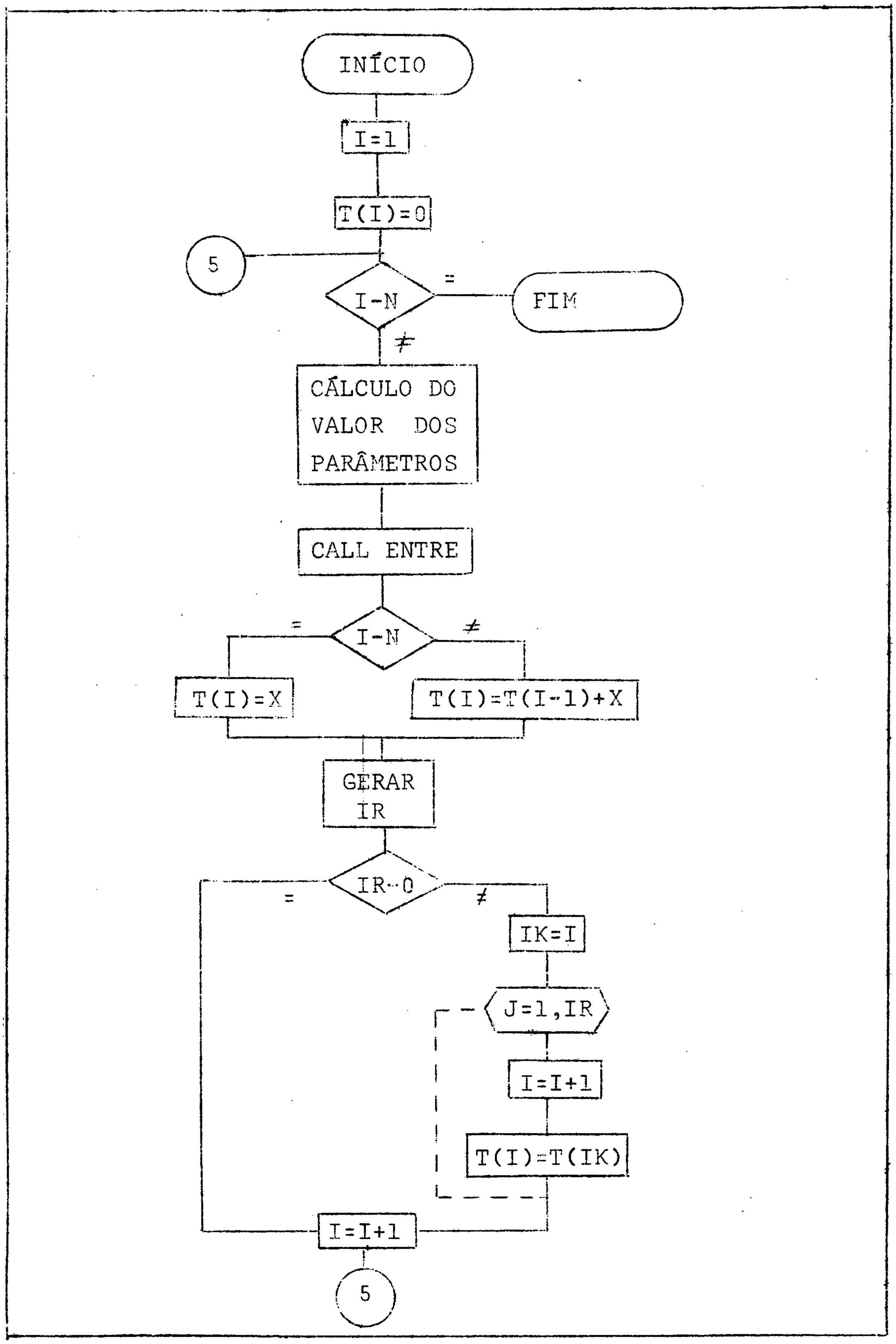
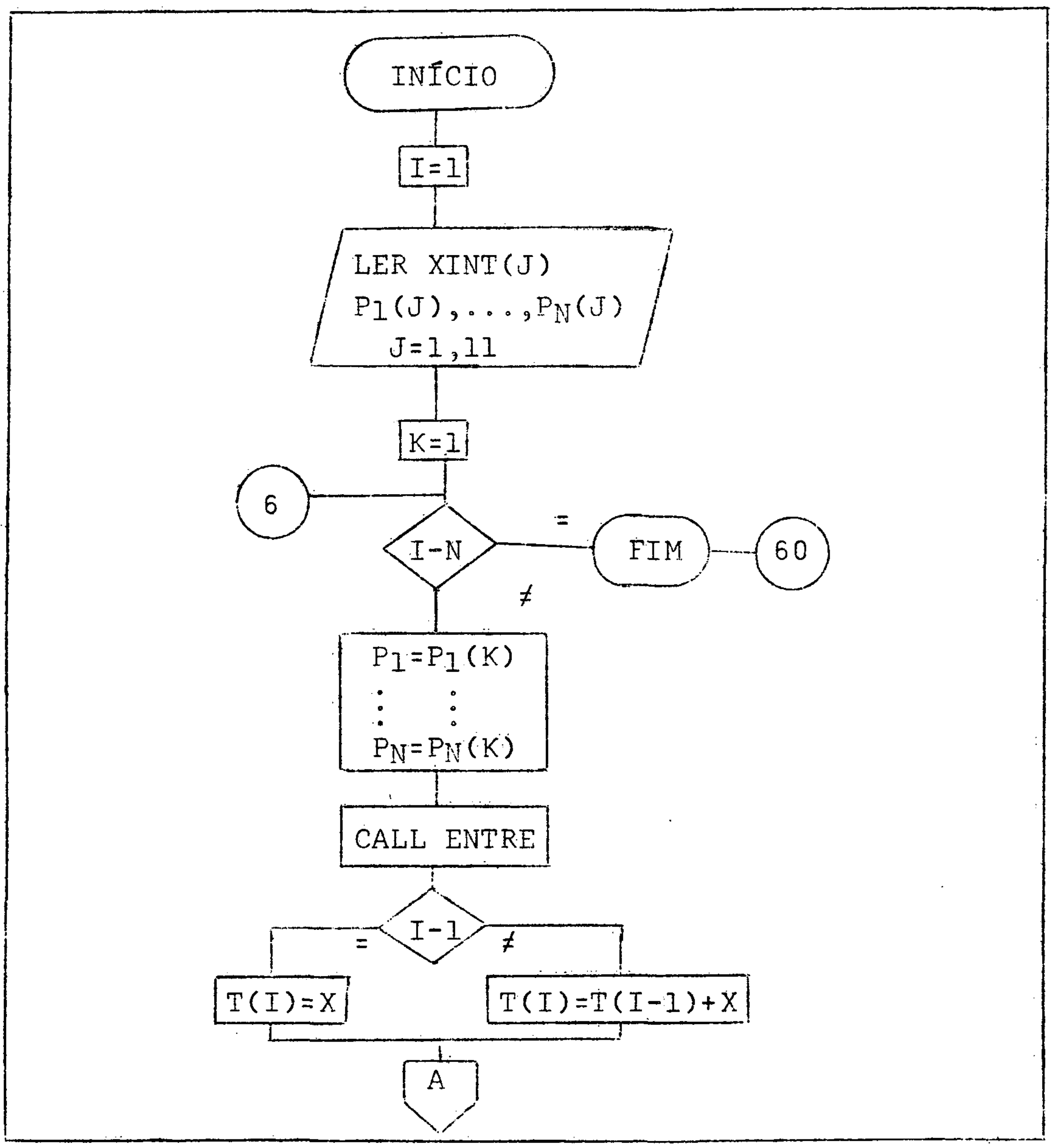


FIG. 14 - Algorítmo para a simulação de um processo de renovação quandos as formas funcionais dos parâmetros são conhecidas.

Quando a forma funcional dos parâmetros fôr desconhecida, mas seus valores, estimados como descrito no item 3.4.3, são conhecidos para os diversos intervalos do período de atendimento, o algorítmo da figura 11 ainda é válido em linhas gerais. Apenas o cálculo do valor dos parâmetros sofre alterações. Como o valor dos parâmetros em cada intervalo é constante, será somente necessário um arquivo com os valores dos extremos de cada intervalo com os respectivos valores dos parâmetros.

Considera-se o extremo superior pertencendo ao intervalo I. A figura 15 mostra o algorítmo para o armazenamento dos parâmetros e a geração de um processo não estacionário , para o qual a forma funcional dos parâmetros é desconhecida,mas seus valores estimados determinados.



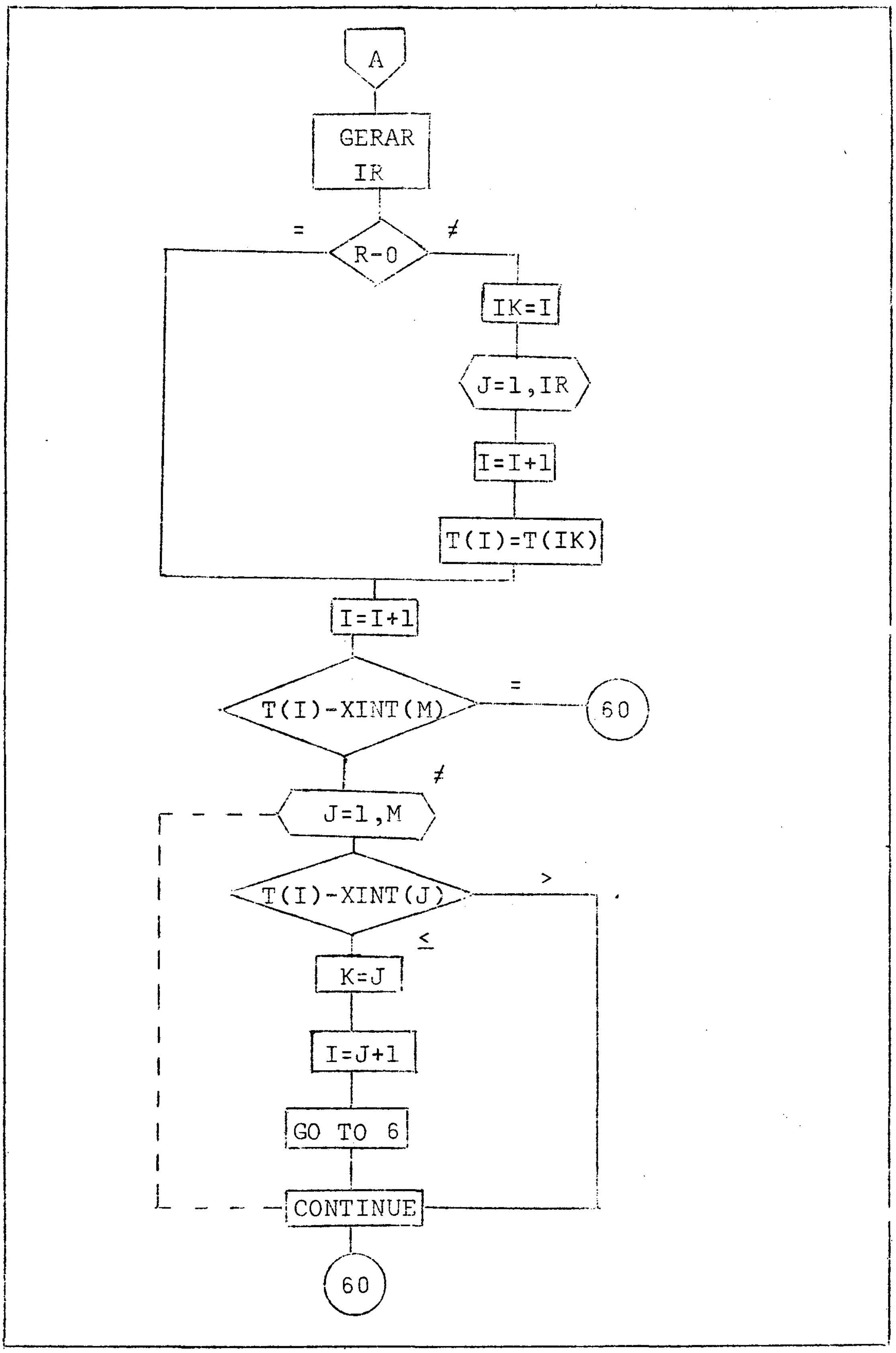


FIG. 15 - Algorítmo para o armazenamento dos parâmetros e a geração de um processo não estacionário , com parâmetros estimados para os diversos intervalos.

As variáveis XINT(J), $P_1(J)$, ..., $P_N(J)$, representam, respectivamente, os extremos superiores dos intervalos e os valores dos parâmetros do intervalo J. P_1, ..., P_n são os valores dos parâmetros a serem usados pela sub-rotina ENTRE.

Finalmente, aparece a situação em que cada intervalo de estudo do processo de ocorrência é representado por uma distribuição experimental. Neste caso, o processo será descrito por uma matriz P(I,J) das distribuições dos tempos entre ocorrências. P(I,1), I = 2, N+1 contém os pontos médios dos N intervalos de classe e P(1,J), J = 2, M+1 os M extremos superiores dos M intervalos. Os valores P(I,J), I = 2, N + 1 , J = 2, M + 1 são as frequências de classe. Com os dados da matriz P(I,J) e utilizando as idéias de MARSAGLIA, poderão ser gerados os tempos de ocorrências dos serviços, de maneira semelhante ao algorítmo da figura 12. A geração do processo de ocorrência por este caminho tem o inconveniente da utilização de grande espaço da memória do computador usado. Este espaço aumenta com o número de intervalos, uma vez que, para cada intervalo, são necessárias 1.000 posições de memória.

2.6.6 - Exemplo

Ilustrando a aplicabilidade dos procedimentos expostos para a simulação de processo de renovação não estacionário, a Tabela 3 apresenta o resultado da simulação de um processo com tempo entre ocorrências gama de parâmetros estimados , mostrados na Tabela 2.

EXTREMO SUPERIOR INTERVALO	k	h
100,000	5	0,10
200,000	4	0,20
300,000	3	0,30
400,000	2	0,10
500,000	1	0,10
600,000	2	0,20
700,000	3	0,20
800,000	4	0,20
900,000	5	0,25
1000,000	6	0,30
1100,000	-	-

TABELA 2 - Parâmetros estimados de um processo de renovação não estacionário com tempo entre chegadas gama.

Admite-se que o processo tenha ocorrências conjuntas, distribuídas segundo Poisson, com parâmetro γ = 0,1. O programa utilizado nesta simulação está no anexo 3 .

Ordem Ocorrência	Instante Ocorrência	Ordem Ocorrência	Instante Ocorrência
1	24,90	40	529,41
2	106,97	41	540,47
3	121,37	42	546,03
4	137,62	43	550,24
5	164,61	44	526,67
6	186,33	45	574,34
7	205,44	46	579,27
8	209,02	47	598,09
9	213,58	48	607,53
10	223,51	49	618,20
11	223,51	50	623,29
12	234,67	51	643,20
13	245,58	52	648,09
14	267,79	53	656,99
15	267,79	54	669,48
16	278,67	55	700,50
17	287,83	56	713,31
18	291,72	57	713,31
19	298,04	58	721,37
20	301,87	59	747,61
21	301,87	60	747,61
22	320,25	61	761,14
23	331,27	62	786,96
24	336,96	63	804,54
25	351,92	64	813,69
26	361,18	65	838,08
27	390,23	66	838,08
28	399,40	67	848,47
29	440,87	68	856,20
30	450,59	69	856,20
31	458,68	70	865,53
32	468,97	71	887,22
33	478,62	72	914,74
34	478,62	73	932,01
35	486,60	74	950,24
36	490,89	75	958,26
37	490,89	76	976,37
38	494,44	77	991,18
39	501,59		

TABELA 3 - Ocorrências simuladas segundo um processo não estacionário de renovação com tempo entre chegadas gama e ocorrências conjuntas Poisson.

Quando várias simulações são feitas, variando as condições iniciais, pode-se mostrar a validade do modelo proposto. O Quadro 4 mostra o número de eventos simulados, a média dos resultados simulados, a média e a variância estimada nos diversos intervalos.

INTERVALO.	OCORRÊNCIAS SIMULADAS							MÉDIA SIMULAÇÃO	MÉDIA ESTIMADA.	VARIÂNCIA ESTIMADA
	1	2	3	4	5	6	7			
0-100	1	2	2	1	2	2	1	1,57	2,00	500,00
100-200	4	3	6	4	7	7	5	5,14	5,00	100,00
200-300	11	6	13	10	10	12	10	10,28	10,00	30,00
300-400	8	7	4	5	4	4	8	5,71	5,00	200,00
400-500	10	7	4	7	8	9	8	7,57	10,00	100,00
500-600	10	5	8	11	7	8	9	8,28	10,00	100,00
600-700	6	6	7	7	5	8	6	6,43	6,66	75,00
700-800	3	6	6	4	7	5	6	5,28	5,00	100,00
800-900	4	4	5	4	4	5	7	4,71	5,00	80,00
900-1000	6	5	4	4	5	6	6	5,00	5,00	66,60

QUADRO 4 - Comparação das médias de ocorrências simuladas de um processo de renovação com a média estimada de valores reais observados.

Média estimada é obtida dos dados da Tabela 2, pela utilização da equação (52). A variância estimada surge de maneira similar através da equação (53).

A análise do Quadro 4 mostra que, independente do número reduzido de rodadas com o modelo e da grande variância do processo estimado, os resultados tendem ao valor estimado. A precisão aumenta com o número de rodadas. Pode-se, portanto, admitir o modelo adotado como representativo do processo desejado.

2.7 - CONCLUSÕES

O processo de ocorrência das tarefas é um processo estocástico de valores reais e inteiros positivos. Dos muitos existentes, pode ser representado por um processo de Poisson.

A identificação do processo de ocorrência das tarefas como um processo de Poisson, depende de teste para verificação da identidade. O teste proposto parte da hipótese que o processo é Poisson, estimando, como etapa preliminar, o parâmetro - $\gamma(t)$. Após este passo, é verificado se a hipótese inicial é verdadeira ou falsa.

Outra possibilidade de identificação das ocorrências é o processo de renovação. Este processo só é válido quando os tempos entre as ocorrências tiverem coeficientes de variação compreendidos entre 0 e 1 e forem independentes.

Nas demais situações, o processo poderá ter como aproximação aceita as distribuições experimentais.

A simulação das ocorrências é bàsicamente simples. Como foi mostrado, consiste na soma sucessiva dos tempos entre chegadas. Os modelos apresentados para a simulação do processo de ocorrência são lógicos e facilmente entendidos. Esta simulação só se justifica quando usada em modelos de simulação do sistema.

CAPÍTULO III

3. - A CARACTERIZAÇÃO DA EMPRESA - O TEMPO NO SISTEMA DE UM SERVIÇO.

3.1 - INTRODUÇÃO

O tempo de permanência de uma tarefa no sistema - definido como a diferença entre o instante de chegada do veículo após realizá-la e o instante de ocorrência - é um importante elemento de caracterização do processo de transformação das entradas em saídas. O tempo no sistema é a soma de diversos fatores representando os tempos das diversas etapas de processamento, ou seja:

a) Tempo de preparação da tarefa - T_1

b) Tempo de espera na fila - T_2

c) Tempo de preparação do veículo - T_3

d) Tempo de realização da tarefa - T_4

e) Tempo de espera de preparação - T_5

Chama-se tempo de preparação de uma tarefa, o tempo necessário para torná-la em condições de atendimento. Num varejista, por exemplo, os pedidos precisam ser aprovados, as quantidades pedidas tomadas dos depósitos, embaladas para transporte e conferidas. O tempo gasto nestas atividades é o tempo de preparação das tarefas.

O tempo gasto para tornar o veículo apto para o serviço é o tempo de preparação do veículo. Envolve atividades como abastecimento, revisão e manutenção após cada serviço. Junto com T_4 forma o tempo de bloqueamento do veículo.

O tempo de espera na fila é consequência da falta momentânea de veículos, causada pela estocasticidade das ocorrências e do tempo de bloqueamento.

Quando não houver capacidade de preparação simultânea para mais de um serviço, ou esta capacidade fôr insuficiente , existirá, devido a aleatoriedade das ocorrências e do tempo de preparação das tarefas, um tempo gasto em fila aguardando preparação.

Se algumas parcelas dos tempos nos sistemas forem irrelevantes, em relação as outras, podem ser desprezadas para efeito de análise.

As variáveis aleatórias T_1, T_2, T_3, T_4 e T_5 são definidas por apropriadas distribuições de probabilidade ou processos estocásticos representativos.

Neste capítulo, serão apresentadas as distribuições e processos que melhor se adaptam na definição das variáveis T_i, $i = 1, 2, \ldots, 5$.

3.2 - O TEMPO DE REALIZAÇÃO DAS TAREFAS

O tempo de realização das tarefas é definido pela sua função densidade de probabilidade, quando o processo estocástico representativo fôr estacionário. Para os processos não estacionários, o tempo de serviço não tem, em geral, uma representação simples. Neste caso, o processo $\{X(t), t \in T\}$ poderá ser caracterizado pela função densidade de probabilidade conjunta.

3.2.1 - Tempo de serviço Erlang

Quando o coeficiente de variação do tempo de serviço estiver compreendido entre zero e um, T_4 pode pertencer à família de distribuições,conhecidas como distribuições Erlang. Estas funções são distribuições gama com parâmetro K inteiro. As funções de probabilidade gama foram descritas no item 2.3.4.

A distribuição Erlang representa a função densidade de probabilidade da variável T_4 , se os tempos de serviço das tarefas fôr considerado uma variável aleatória independente e identicamente distribuídos.

3.2.2 - Tempo de Serviço Exponencial

Obtém-se, nos modelos matemáticos de comportamento de um sistema de veículos, uma grande simplificação se T_4 puder ser tratado como uma variável de função densidade exponencial dada pela equação (48).

A vantagem do tempo de serviço exponencial é a existência de expressão matemática simples, quando o processo $\{X(t),\ t \geq 0\}$ representativa do tempo de serviço fôr exponencial não estacionário. Neste caso, pode-se mostrar que a probabilidade $P(t)$ do tempo de serviço ser maior que t, é dado pela equação (67):

$$P(t) = \exp\left(-\int_{0}^{t} \mu(t).dt\right) \tag{67}$$

onde $\mu(t)$ é o parâmetro do processo. Se $\mu(t)$ fôr função do tempo, a média e a variância também o serão. A equação (68) dá a média do processo no tempo t.

$$E\,|X(t)| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\int_{t}^{t+\Delta t} dt}{\int_{t}^{t+\Delta t} \mu(t)dt} = \frac{1}{\mu(t)} \tag{68}$$

Em outras palavras, a equação (68) permite o cálculo do tempo médio de serviço para as tarefas iniciadas no tempo t.

3.2.3 - Tempo de serviço não estacionário e correlacionado com outros aspectos do sistema.

Quando a distribuição do tempo de serviço mudar com o tempo, este será não estacionário. A não estacionariedade surge por diferentes motivos. As variações de tráfego nas vias utilizadas para o serviço é uma das razões importantes. Outros aspectos ou situações particulares podem influir no tempo de serviço. Por exemplo, se um grande número de tarefas existem na fila, o serviço tende a ser realizado mais ràpidamente.

Na análise do tempo de serviço devemos fazer clara distinção entre as influências dessa natureza e as de origem aleatória. Em geral, os modelos matemáticos existentes não consideram a estacionaridade e as diversas correlações que podem existir. Neste caso, o melhor modelo de comportamento, ou pelo menos mais fácil de ser construído, é um modelo de simulação, usando distribuição experimental para representar o tempo de serviço.

3.3 - TEMPO DE SERVIÇO REPRESENTADO POR DISTRIBUIÇÕES EXPERIMENTAIS.

Distribuições experimentais são distribuições de frequência. Para obter a distribuição de frequência de uma variável aleatória, toma-se uma amostra com n elementos, sendo n dado pela equação (69), derivada da lei dos grande números.

$$n = \frac{1}{4e^2h} \qquad (69)$$

O erro desejado "e" é a diferença entre as frequências de classe e a probabilidade da variável cair nesta classe ou intervalo. "h" é a probabilidade do erro ser maior que e.

De posse das n observações, segue-se as seguintes etapas para construir as distribuições de frequência:

a) Determina-se a diferença entre o maior e o menor valor observado. Esta diferença é chamada amplitude dos dados.

b) Divide-se esta amplitude total em um número conveniente de intervalos de classe, todos com a mesma amplitude. Os intervalos de classe são escolhidos, para diminuir os erros de agrupamento, de tal modo que seus pontos médios coincidam com dados realmente observados. O número de intervalos de classe usualmente tomados variam entre 5 e 20 .

c) Calcula-se as frequências relativas de classe. Frequência relativa de classe ou, para facilidade de referência, chamada neste trabalho frequência de classe, é a relação entre o número de observações que caem dentro do intervalo de classe e o número total de observações feitas.

O arranjo tabular dos intervalos de classe com as respectivas frequências é chamado distribuição experimental.

Dada uma distribuição de frequência, considera-se a probabilidade da variável aleatória assumir um valor dentro do intervalo de classe como a frequência de classe.

Estas distribuições são úteis como etapa inicial no teste de uma variável aleatória para verificar se possue uma esperada distribuição teórica. Na inexistência de uma curva teórica que se adapte às frequências observadas, pode-se utilizar as distribuições experimentais. Neste sentido, são especialmente úteis nos modelos de simulação.

Podem, também, ser usadas como aproximações de processos estocásticos não estacionários. Por exemplo, se o tempo de serviço não fôr estacionário, divide-se o período de atendimento em intervalos não coincidentes e mede-se o tempo de serviço de todas as tarefas iniciadas neste intervalo. Considera-se a distribuição experimental obtida com estes dados como a distribuição do tempo de serviço das tarefas iniciadas neste intervalo. O conjunto de todas as distribuições de frequência dos diversos intervalos dará uma aproximação do processo representativo do tempo de serviço.

3.4 - IDENTIFICAÇÃO DO TEMPO DE SERVIÇO

3.4.1 - Generalidades

Quando é necessário determinar o processo representativo do tempo de serviço, deve-se ter respostas seguras para as seguintes questões:

a) Todas as tarefas possuem tempo de serviço com a distribuição de probabilidade do mesmo tipo ?

b) Os tempos de serviço são correlacionados com outros aspectos do sistema ?

c) A distribuição do tempo de serviço é estacionária ?

A resposta a estas questões constitui o passo inicial. A identificação do tempo de serviço é facilitada, em alguns casos, quando indicações tiradas da experiência, são aplicáveis. Para tempos de serviço não correlacionados com outros aspectos do sistema, a distribuição exponencial é razoável num sistema onde um número grande de tarefas ocorre e o tempo de serviço é pequeno ou, onde ocorre um número pequeno de tarefas e o tempo de serviço é grande [13]. A distribuição de Erlang será representativa se a investigação indicar um coeficiente de variação entre 0 e 1. KENDALL [14] afirma que, muitas vezes, a distribuição Erlang dá uma boa representação de dados observados.

O procedimento de identificação do tempo de serviço com distribuições teóricas tem duas etapas. Primeiro, é feita uma estimativa dos parâmetros da distribuição suposta uma boa aproximação. Em seguida, são testados os dados agrupados em distribuições experimentais com a distribuição teórica suposta, tendo como parâmetro as estimativas feitas ou aproximações convenientes. Poderão ser usados testes como qui-quadrado e Kolmogorov-Smirnov.

3.4.2 - Estimativa de $\mu(t)$

Obtém-se uma estimativa da função $\mu(t)$ - parâmetro do processo exponencial - adotando o seguinte procedimento:

a) Divide-se o período de atendimento em intervalos não coincidentes.

b) Toma-se as médias dos tempos de serviço iniciadas nestes intervalos como o valor esperado do tempo de realização das tarefas iniciadas no ponto médio do intervalo.

---

13 - REF. 2 - pg. 20

14 - REF. 6 - pg. 152

c) O inverso das quantidades obtidas em b) são as estimativas de $\mu(t)$ nos pontos médios dos intervalos.

d) Escolhe-se a curva que se adapta melhor aos pontos $\{t, \mu(t)\}$. Esta curva é a função estimativa de $\mu(t)$.

O número n_i de observações necessárias no intervalo i para o cálculo das médias é dado pela equação (70).

$$n_i = \frac{z^2 \, S_i^2}{e^2} \tag{70}$$

S_i é o desvio padrão dos tempos observados numa amostra preliminar. O erro "e" é a diferença entre a média real e a média calculada. É um valor arbitrado de acordo com a precisão desejada. "z" equivale ao valor da variável aleatória normal reduzida, correspondente a uma probabilidade desejada do valor calculado diferir do valor real de uma quantidade menor que "e".

A equação (70) dá uma idéia da quantidade de observações necessárias para os serviços iniciados no intervalo "i". Os n_i valores observados permitem estimativas mais precisas se o intervalo "i" fôr reduzido a um ponto. Mas, devido a demora no aparecimento de serviços iniciados juntamente num ponto, a utilização de um intervalo de maior amplitude é justificada.

Quando o processo fôr seguramente estacionário, o número de observações necessárias decresce. Neste caso, considera-se o período de atendimento como o único intervalo de estudo. O inverso da média das observações é a estimativa de $\mu(t) = \mu$ = constante.

3.4.3 - Estimativa dos parâmetros da distribuição Erlang.

Estimativa dos parâmetros da distribuição Erlang é obtida pela utilização da média e da variância dos dados observados. Embora fórmulas para função densidade de proba bilidade, quando os parâmetros variam com o tempo, sejam de obtenção difícil, estimativas dos parâmetros como função do tempo podem ser feitas para utilização em modelos de simulação do processo de tempo de serviço não estacionário.

Obtém-se uma estimativa dos parâmetros $\gamma(t)$ e $K(t)$ da distribuição Erlang adotando o seguinte procedimento:

a) Divide-se o período de atendimento em intervalos não coincidentes.

b) Tomam-se as médias e as variâncias dos tempos de serviço iniciados nestes intervalos, como valor esperado e variância do tempo de realização das tarefas iniciadas no ponto médio do intervalo, ou seja, calcula-se, respectivamente, $\hat{E}(t)$ e $\hat{V}(t)$ para cada intervalo.

c) Calcula-se os parâmetros pelas fórmulas dadas pela equação (71) e equação (72), para cada intervalo "i".

$$\hat{\gamma}(t) = \frac{\hat{E}(t)}{\hat{V}(t)} \tag{71}$$

$$\hat{K}(t) = \frac{\{\hat{E}(t)\}^2}{\hat{V}(t)} \tag{72}$$

Quando a estimativa de $K(t)$ não fôr um número inteiro, toma-se o inteiro mais próximo. Neste caso, $\hat{\gamma}(t)$ é recalculado pela equação (73):

$$\hat{\gamma}(t) = \frac{\hat{K}(t)}{\hat{V}(t)} \tag{73}$$

Estes valores estimados para os diversos intervalos, são somente úteis para emprego em modelos de simulação.

Quando o tempo de serviço fôr estacionário, adota-se o mesmo procedimento considerando o período de atendimento como o intervalo único.

3.4.4 - Teste de Identificação

A etapa final da identificação de processo do tempo de serviço consiste no teste de ajustamento das observações com a distribuição teórica de parâmetros estimados. Para cada intervalo se aplica o teste de ajustamento. Se o teste indicar que as curvas teóricas são boas aproximações dos dados observados agrupados em tabelas de frequência, estas serão consideradas como representativas do processo.

Os testes mais comumente utilizados nestas situações são o teste do qui-quadrado e o teste de Kolmogorov -Smirnov. Para uma definição, uso e exposição sobre limitações e aplicações destes testes, é interessante consultar, por exemplo, |4| e |8| .

Quando o teste indicar que as curvas teóricas não são boas aproximações, as distribuições experimentais serão a melhor representação do tempo de serviço.

3.5 - TEMPO DE SERVIÇO DE TAREFAS DIFERENTES

3.5.1 - Generalidades

Um sistema de entrada única alimentado por tarefas diferentes com tempos de serviço que não pertencem à mesma distribuição ocorre muitas vezes.

Para estas situações, admite-se a entrada como constituída de uma única tarefa, com tempo de serviço como média ponderada dos tempos de realização das diversas tarefas individuais, dadas as médias de ocorrência como fator de ponderação.

Seja $t_1, t_2, \ldots, t_K$ as variáveis representativas dos tempos de serviço de K diferentes tarefas, com médias de ocorrências $m_1, m_2, \ldots, m_K$, respectivamente. O tempo de serviço t de todas as tarefas consideradas em conjunto é dado pela equação (74).

$$t = \frac{\sum_{i=1}^{K} m_i t_i}{\sum_{i=1}^{K} m_i} \qquad (74)$$

Fazendo

$$\alpha_i = \frac{m_i}{\sum_{i=1}^{K} m_i} \qquad (75)$$

resulta

$$t = \sum_{i=1}^{K} \alpha_i t_i \qquad (76)$$

3.5.2 - Número grande de tarefas diferentes

Para um número de tarefas suficientemente grande, o teorema do limite central permite aproximar a uma normal a distribuição dos tempos de serviço para as tarefas consideradas em conjunto.

Seja $E(t_i)$ o tempo médio de serviço da tarefa t_i, $i = 1, \ldots, K$. Para K suficientemente grande, t tem uma distribuição normal com média e variância dadas pelas equação (77) e equação (78), respectivamente.

$$E(t) = \sum_{i=1}^{K} \alpha_i \, E(t_i) \qquad (77)$$

$$V(t) = \sum_{i=1}^{K} \alpha_i^2 \, V(t_i) \qquad (78)$$

Este resultado somente é válido se as variáveis $t_1, t_2, \ldots, K$ forem independentes.

3.5.3 - Número pequeno de tarefas diferentes

Quando o número K de tarefas não fôr suficiente para a aplicação do teorema do limite central, obtém-se a distribuição de t a partir das distribuições experimentais de $\alpha_i t_i$, i = 1, 2, ..., K . Mesmo quando as distribuições teóricas de t_i, i = 1, ..., K são conhecidas, a distribuição de t não pertence ao conjunto das funções densidade de probabilidade usuais.

Para a utilização do procedimento apresentado neste ítem, é necessário calcular a distribuição de frequência da distribuição teórica do tempo de serviço, como passo inicial.

A obtenção da distribuição de frequências de t , dadas as distribuições experimentais de t_i, i=1,2,...,K, é feita utilizando conceitos de função e soma de variáveis aleatórias. O procedimento é melhor entendido através de um exemplo.

Para exemplificar, admita-se duas tarefas com distribuição de frequência dadas pela Tabela 4 e Tabela 5, com médias de ocorrências m_1 = 1 e m_2 = 2 , respectivamente.

Intervalo de Classe - t_i	Ponto Médio de Classe α_i	Frequência Relativa de Classe
1,5 - 2,5	2	0,1
2,5 - 3,5	3	0,2
3,5 - 4,5	4	0,3
4,5 - 5,5	5	0,3
5,5 - 6,5	6	0,1

TABELA 4 - Distribuição de frequência do tempo de serviço de uma tarefa com média de ocorrências m_i = 1

Intervalo de Classe - t_2	Ponto Médio de Classe	Frequência de Classe
1,5 - 2,5	2	0,2
2,5 - 3,5	3	0,3
3,5 - 4,5	4	0,2
4,5 - 5,5	5	0,2
5,5 - 6,5	6	0,1

TABELA 5 - Distribuição de frequência do tempo de serviço de uma tarefa com média de ocorrências $m_2 = 2$

Para os valores dados m_1 e m_2, obtém-se:

$$\alpha_1 = 1/3$$

$$\alpha_2 = 2/3$$

Como etapa intermediária, calcula-se os valores $T_i = \alpha_i \, x_i$, $i = 1, 2$ com as respectivas frequências. A Tabela 6 apresenta os resultados do cálculo, que consiste simplesmente no produto dos valores x_i pelo α_i, respectivo, mantendo-se constante as frequências de classe.

T_1	Frequência F_1	T_2	Frequência F_2
2/3	0,1	4/3	0,2
1	0,2	2	0,3
4/3	0,3	8/3	0,2
5/3	0,3	10/3	0,2
2	0,1	4	0,1

TABELA 6 - Distribuição de frequência de $T_i = \alpha_i \, x_i$, $i = 1, 2$.

Multiplicando cada valor de T_i e sua frequência, respectivamente, por todos os valores de t_2 e suas fre quências (as frequências são multiplicadas pela frequências), obtemos um conjunto de pares $\{T_1 \times T_2, F_1 \times F_2\}$. Deste conjunto verifica-se quantos valores $T_1 . T_2$ caem nos intervalos de classe iniciais da Tabela 4 e soma-se os respectivos $F_1 \times F_2$. Esta soma será a frequência de classe procurada da variável $t = 1/3t_1 + 2/3t_2$. A Tabela 7 apresenta os resultados assim obtidos:

Intervalo de Classe	Ponto Médio de Classe	Frequências de Classe
1,5 - 2,5	2	0,06
2,5 - 3,5	3	0,34
3,5 - 4,5	4	0,34
4,5 - 5,5	5	0,22
5,5 - 6,5	6	0,04

TABELA 7 - Distribuição de frequência de $t = 1/2t_1 + 2/3t_2$, com as variáveis t_1 e t_2 possuindo distribuições experimentais dadas pela Tabela 4 e Tabela 5, respectivamente.

3.6 - CONSIDERAÇÕES SOBRE SIMULAÇÃO DO TEMPO DE SERVIÇO

A simulação do tempo de serviço estacionário utiliza as técnicas usuais [15] quando uma distribuição teórica é apropriada ou as idéias de MARSAGLIA, para serviços com tempos representados por distribuições experimentais.

A simulação do tempo de serviço não estacionário exige os tempos de ocorrência para a definição dos parâmetros. Neste caso, os parâmetros estimados, ou a sua fórmula funcional estimada, são utilizados da maneira indicada no item 2.6.5. As

15 - A literatura de simulação existente mostra essas técnicas. Para tempo de serviço Erlang as sub-rotinas do anexo 2 podem ser usadas.

idéias desenvolvidas no item 2.6.5 para processos não estacionários, representados por distribuições experimentais, são válidas para a simulação do tempo de serviço.

3.7 - CONCLUSÕES

Todo o desenvolvimento feito para o tempo de serviço aplica-se às demais variáveis componentes do tempo de permanência no sistema.

O tempo de espera na fila é uma consequência do processo representativo do tempo de bloqueamento e do processo de ocorrência das tarefas. De forma análoga, surge o tempo de espera da preparação como resultado da aleatoriedade da preparação e do processo de ocorrência.

As distribuições teóricas de probabilidade mais comuns e adaptáveis às variáveis componentes do tempo de permanência no sistema, são a distribuição exponencial e a distribuição Erlang. Somente a primeira tem expressão matemática conhecida para as situações de não estacionariedade. Quando não existem distribuições teóricas adaptáveis, usa-se as distribuições experimentais, que são somente úteis em modelos de simulação.

CAPÍTULO IV

4. - QUANTIDADE DE VEÍCULOS NO SISTEMA

4.1 - INTRODUÇÃO

Os veículos são os elementos imprescindíveis para o atendimento dos serviços. O sistema realiza a transformação das entradas através deles. O objetivo de atendimento das tarefas só é possível pela disponibilidade de um número suficiente de veículos.

O tempo no sistema e o custo de processamento das entradas sofrem influência da quantidade de veículos e do número de ocorrências, como mostra o Quadro 5 .

Número de Veículos	Número de Ocorrências	Tempo no Sistema	Custo de Operação
constante	aumenta	aumenta	aumenta
constante	diminui	diminui	diminui
diminui	aumenta	aumenta	nada se pode afirmar
diminui	diminui	nada se pode afirmar	diminui
aumenta	aumenta	nada se pode afirmar	aumenta
aumenta	diminui	diminui	nada se pode afirmar

QUADRO 5 - Influência da quantidade de veículos no tempo no sistema de um serviço e no custo de operação.

Da análise do Quadro 5 conclue-se a existência de uma quantidade de veículos que permite o atendimento das tarefas dentro de um tempo médio pré-fixado no sistema e a um custo de operação mínimo.

Para a obtenção deste número, há a necessidade de um modelo relacionando as variáveis envolvidas. A experimentação com modelo representativo auxilia na determinação da quantidade de veículos do sistema em estudo.

Portanto, este problema evolue da construção para a experimentação com modelos.

4.2 - OS MODELOS DO SISTEMA E O DIMENSIONAMENTO DO NÚMERO DE VEÍCULOS.

4.2.1 - Os modelos do sistema

Os sistemas com entrada-saída estocástica são representados por modelos descritivos porque não permitem soluções ótimas para um problema de decisão, como a determinação do número necessário de veículos. Os modelos descritivos são modelos orientados para o problema que podem ser usados para explorar a conduta de um dado arranjo [16].

Modelos matemáticos probabilísticos são adequados para a descrição do comportamento de um sistema com veículos, através das distribuições de probabilidade ou processos estocásticos representativos das ocorrências e das variáveis aleatórias componentes do tempo no sistema como função do número de veículos, tipo de prioridade adotada e de características de diferenciação. Este tipo de modelo dá informações diferentes dos modelos determinísticos. Enquanto os modelos determinísticos são constituídos de um conjunto de equações cuja solução por técnicas da otimização permite encontrar o resultado ótimo, os modelos probabilísticos descrevem prováveis estados do sistema com a variação dos parâmetros. Só a experimentação com os modelos estocásticos permitem informações do seu comportamento para diversos valores dos parâmetros.

Os modelos matemáticos probabilísticos existentes, aplicados a sistemas com veículos, são úteis apenas para

---

16 - REF. 17 - pg. 14

determinados casos específicos. Quando não existe tempo de preparação e o sistema fôr de ponto único, com uma só canal de chegada e processo de ocorrência Poisson estacionário, com atendimento na ordem de chegada e tempo de serviço exponencial, os modelos matemáticos existentes [17] satisfazem plenamente. Para esta mesma situação, quando o tempo de serviço fôr Erlang, dificuldades adicionais surgem na solução das equações diferença-diferenciais que descrevem o sistema. Como apontado em |9| a análise torna-se impraticável por este caminho.

Para evitar as dificuldades de estabelecimento de modelos matemáticos probabilísticos, os modelos de simulação são mais práticos e fáceis de construção. Este é o caso dos sistemas com entradas ou tempo de processamento do serviço não estacionário. Num sentido mais geral, a simulação, como técnica de solução de problemas, é apropriada para sistemas complexos, sujeitos a flutuações aleatórias e com relações difíceis ou impossíveis de descrição por modelos matemáticos.

Os sistemas com veículos, em sua maioria, são melhores representados por modelos de simulação, devido a estocasticidade de seus elementos e, algumas vezes, da complexidade apresentada.

Neste capítulo, serão consideradas apenas as idéias básicas para a construção de modelos de simulação e a sua utilização na determinação do número de veículos em sistemas de ponto único.

4.2.2 - A construção de modelos de simulação e as medidas do sistema.

A primeira etapa na construção do modelo é a determinação da natureza do problema. O modelo de um sistema com veículos, com o objetivo da escolha do número de veículos, deve fornecer elementos que permitem sua utilização na comparação com os critérios adotados. Deverá gerar dados para o cálculo de certas medidas relacionadas com as restrições do problema. Espe

---

17 - REF. 2 e 9

cificamente, o tempo médio no sistema será uma medida útil. Desta forma, a solução do problema de determinação do número de veículos num sistema com veículos, é feita pela utilização do modelo para gerar dados que possibilitem a obtenção de medidas relacionadas com as restrições.

O modelo em si é uma sequência lógica das operações relevantes para o problema em estudo, realizadas pelo sistema. Esta sequência lógica de operações é usualmente representada por diagramas de bloco.

A análise do sistema real, tendo em vista o objetivo do modelo, fornece os elementos para sua construção. A definição das entradas do modelo é um importante fator. A análise deve determinar quais os parâmetros do sistema que serão utilizados para caracterizar as entradas do modelo.

A Figura 16 mostra as três partes a serem definidas para a elaboração de modelos do sistema.

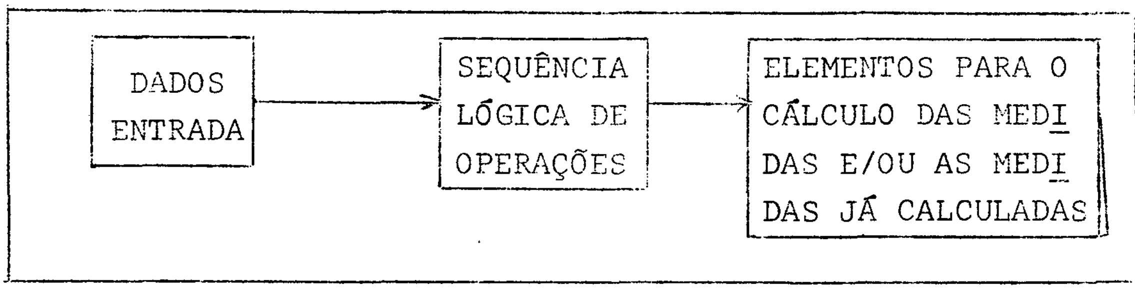


FIG. 16 - Partes constituintes do modelo de simulação de um sistema com veículos.

4.2.3 - As medidas e os critérios

A mensuração do comportamento de um sistema com veículos é feita usualmente pela utilização de determinadas medidas. Entre elas destaca-se:

a) Tempo médio no sistema

b) Variância do tempo no sistema

c) Probabilidade do tempo no sistema ser maior que t

d) Idênticas medidas para os componentes do tempo no sistema.

e) Número médio de serviços na fila e no sistema

f) Variância do número de serviços na fila e no sistema

g) Probabilidade do número de serviços na fila ou no sistema ser maior que n

h) Intensidade de tráfego

i) Ocupância

j) Custo operacional dos veículos

k) Custo do sistema.

Estas medidas, na sua maioria, são determinadas a partir de dados levantados diretamente ou simulados. Embora as primeiras dispensam explicações do seu significado, é necessária uma exposição mais detalhada das quatro últimas:

A) <u>Intensidade de tráfego ρ</u>

É definida pela relação entre o tempo médio no sistema e o tempo médio entre chegadas.

Mede a capacidade do sistema. ρ é um número que estipula em termos médios, a capacidade mínima necessária para o atendimentos das tarefas. Quando a capacidade de atendimento fôr menor que a intensidade de tráfego, as filas dos serviços esperando atendimento crescem indefinidamente. Mesmo para uma capacidade maior que ρ existem filas temporárias devido a estocasticidade do sistema.

B) <u>Ocupância θ</u>

Mede a fração de tempo que cada veículo está ocupado, ou seja, é a relação entre tempo médio entre chegadas e o tempo médio de serviço para cada veículo.

A ocupância θ varia entre 0 e 1, correspondendo aos dois extremos, desocupação e ocupação total. Chamando, θ_1, θ_2, ..., θ_n, as ocupâncias dos veículos 1, 2, ..., N , define-se ocupância média pela equação (79):

$$\theta = \frac{\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n}{N} \qquad (79)$$

Os valores θ_i, $i = 1, 2, \dots, N$ só serão iguais a $\bar{\theta}$

quando existir um perfeito revezamento na utilização dos veículos.

C) Custo Operacional dos Veículos

É o total dos custos devido a existência e operação dos veículos. O Anexo 4 dá as parcelas componentes e fornece fórmulas para calculá-las.

D) Custo Total do Sistema

Engloba, além do custo operacional dos veículos, itens relativos a depreciação de instalações físicas e equipamentos existentes, materiais normais de expediente, etc. Compõe-se dos gastos e despesas para a operação do sistema.

Em termos de definição do número ótimo de veículos, são mais importantes as medidas relacionadas com as restrições, como o tempo médio no sistema, a intensidade de tráfego e o custo operacional dos veículos. Estas medidas permitem a construção de um modelo matemático determinístico para o problema da otimização do número de veículos. Os critérios são definidos em termos dessas medidas e utilizados como elementos das restrições e da função objetivo, neste modelo determinístico como mostra o item 4.2.4.

4.2.4 - Modelo Matemático

As medidas ou variáveis relacionadas com a quantidade de veículos podem ser agrupadas de modo a originar um índice de desempenho para o sistema. O problema consiste na determinação do número de veículos N que minimize este índice, sujeito às restrições do sistema. A equação (80) é a expressão do índice de desempenho I_p, enquanto a equação (81) e a equação (82) representam as restrições.

$$I_p = C_o \cdot N + C_e \cdot E|N(t)| \cdot E(T) \tag{80}$$

$$E(t) \cdot N \geq a \cdot E(T) \tag{81}$$

$$E(T) \leq b \tag{82}$$

onde

$E(t)$ - é o tempo médio entre chegadas.

$E(T)$ - é o tempo médio no sistema.

C_o - é o custo operacional médio de um veículo.

C_e - é o custo de espera de uma tarefa. Entende - se custo de espera de uma tarefa como uma perda-lucro não auferido, diminuição de prestígio, etc. da empresa pela demora na realização do serviço. Pode ser entendido como uma penalidade para atendimento demorado. Não é facilmente calculado, sendo praticamente indeterminável com exatidão.

b - é o limite superior fixado para o tempo médio no sistema. Se a rapidez fôr muito importante, pequenos valores são fixados para este limite. Estes pequenos valores são superiores à soma das médias de T_1, T_2, T_4, T_5 para que o modelo tenha solução.

a - é um valor sempre superior a 1. Diz que um número de ocorrências simultâneas superior a a vezes a média de serviço pode ser atendido sem espera em fila, quando todos os veículos estiverem disponíveis. Deverá ter um valor tal que a inequação (83) seja obedecida.

$$a \geq \frac{\rho \cdot E(t)}{E(T)} \tag{83}$$

Devido a dificuldade da determinação do valor de C_e, o procedimento será a obtenção do número de veículos que satisfazendo às restrições das equações (81) e (82), minimizem I_p para vários valores possíveis do custo de espera. O conjunto de resultados assim obtidos facilita a análise de sensibilidade do número de veículos com o custo de demora, tornando mais correta a decisão. O mesmo poderá ser feito para as outras variáveis envolvidas no modelo.

4.2.5 - Exemplo de Modelo de Simulação

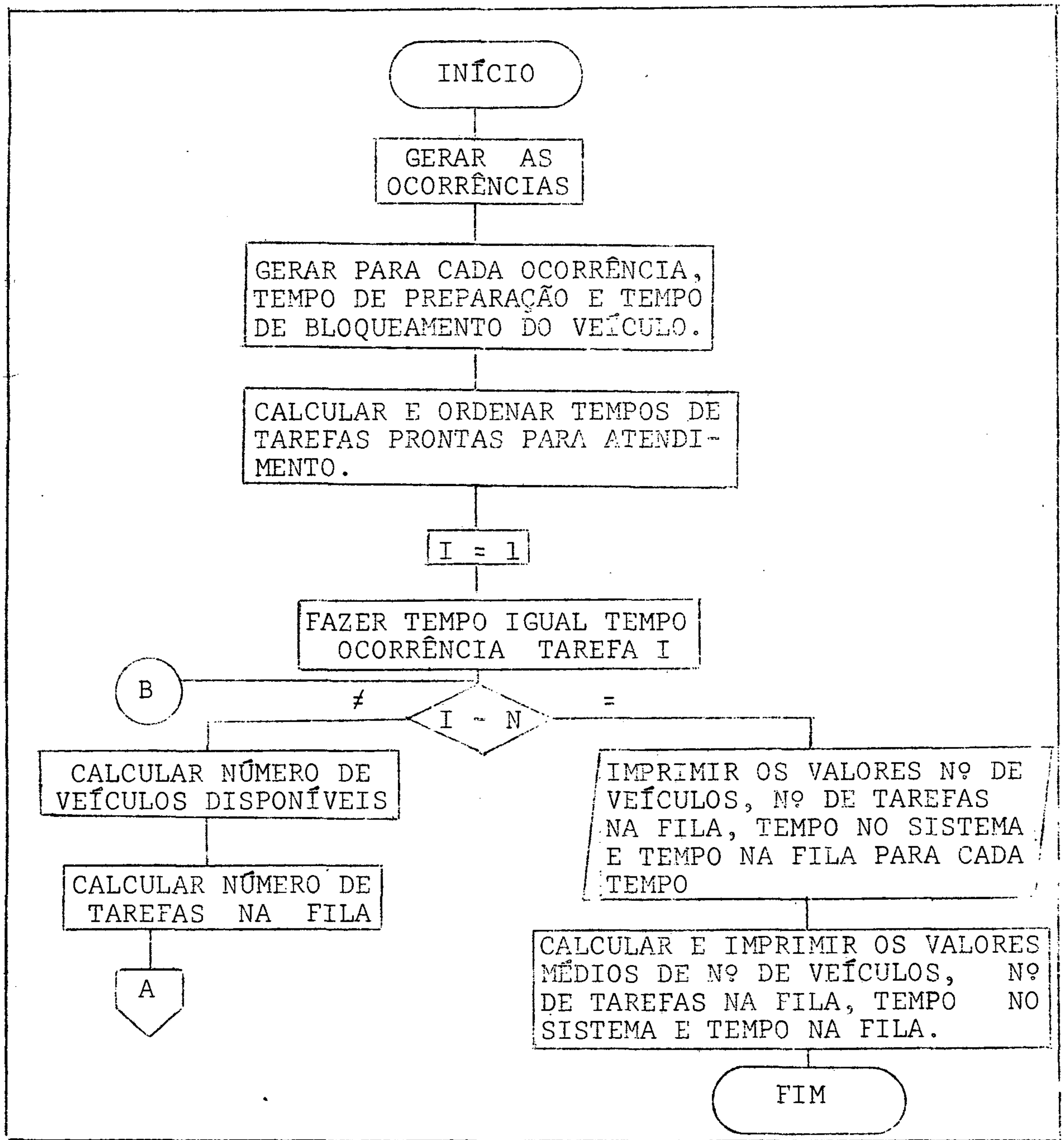
Como ilustração das idéias sobre construção de modelos orientados para a determinação dos veículos, considere o fluxograma da figura 17. Este diagrama de bloco representa o modelo para a simulação de um sistema de veículos.

a) de ponto único

b) um só canal de chegada

c) preparação das tarefas em paralelo com capacidade infinita.

d) processamento na ordem de chegada, observando o critério: primeira tarefa preparada, primeira atendida.



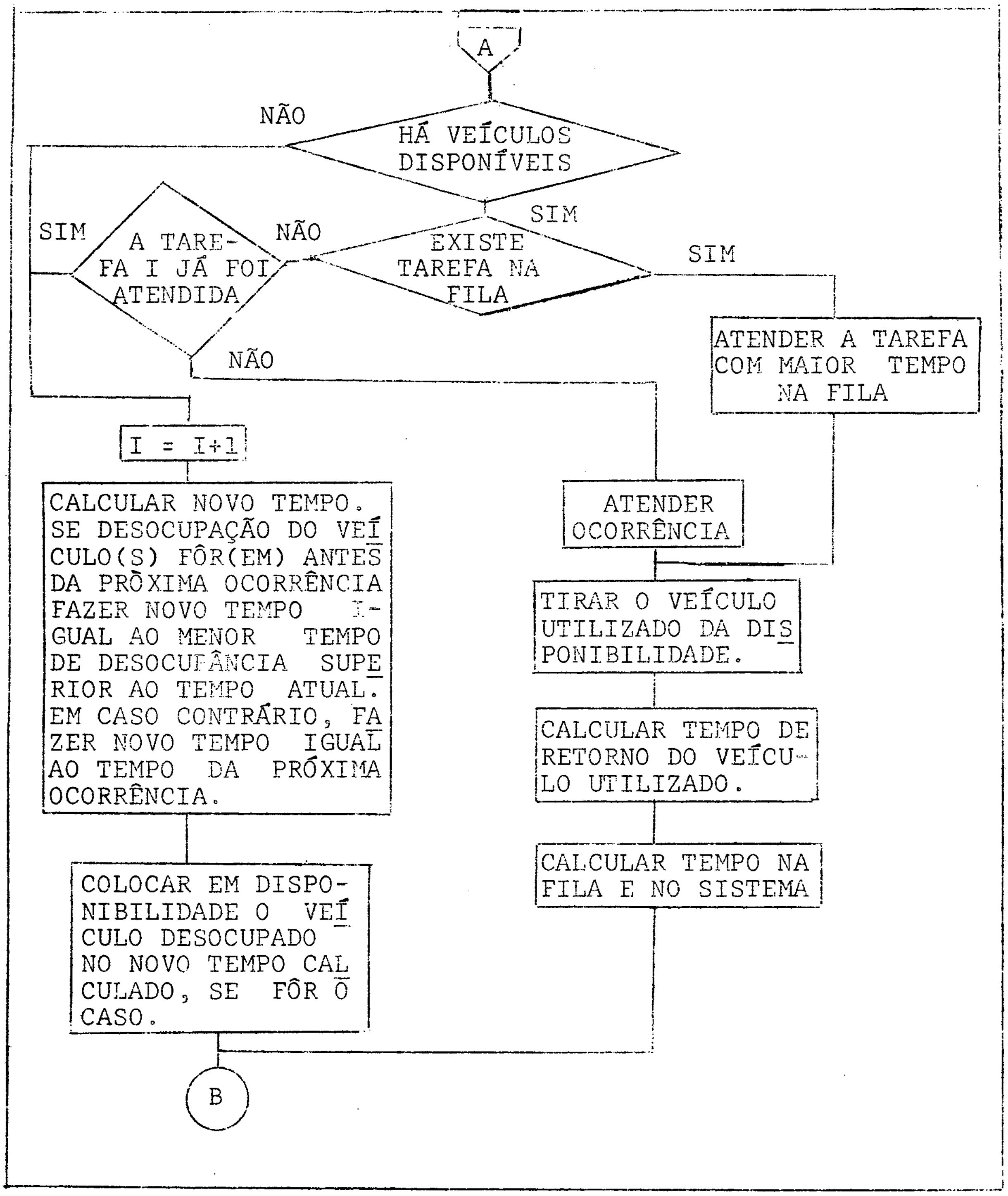


FIG. 17 - Modelo de simulação simplificado de um sistema com veículos de ponto único e um canal de chegada com atendimento PEPS.

O programa do quadro 6 é o modelo de simulação em FORTRAN do sistema representado em diagrama de bloco pela figura 17.

```
C
C
C    SIMULAÇÃO DO COMPORTAMENTO DO SISTEMA
C      CÁLCULO DE MEDIDAS DO SISTEMA
C
C
       DIMENSION TEC(200),TP(200),TCT(200),TEMPO(200),NVD(200,N(101),
      1NTF(200),TF(200),TEF(200),TC(200),TIF(200),TR(200),TPS(200),
      2TB(200),LB(200),ATCT(200),ATEF(200),ATPS(200),ATP(200),ATC(200),
      3ATR(101),AB(101),GI(8),BTR(200)
       IT=1
       IU=0
       DO 120 IX=1,4
       READ(2,141)GI(IX)
   141 FORMAT(F8.3)
   120 CONTINUE
       IN=GI(1)
       IM=GI(2)
       EX=GI(3)
       AX=GI(4)
       IX=20
       DO 121 IY=1,IN
       N(IY)=1
       TR(IY)=0
       ATR(IY)=0
       AB(IY)=IN+1
   121 CONTINUE
       DO 122 IZ=1,200
       TF(IZ)=0
       TIF(IZ)=0
       TEF(IZ)=0
       ATEF(IZ)=0
       ATPS(IZ)=0
       ATP(IZ)=0
       ATC(IZ)=0
       LB(IZ)=0
       BTR(IZ)=999.
   122 CONTINUE
       RT=0
       I=1
       TCT(1)=0
C   GERAÇÃO TEMPOS ENTRE CHEGADAS
       CONTINUE
   150 CALL EMPO(EX,IX,IY,X)
       IX=IY
       TEC(I)=X
C   GERAÇÃO DOS TEMPOS DE PREPARAÇÃO
       TP(I)=0
C   GERAÇÃO TEMPOS DE BLOQUEAMENTO
       CALL EMPO (AX,IX,IY,X)
       IX=IY
       TB(I)=X
C   CÁLCULO TEMPOS DE TAREFAS PRONTAS PARA ATENDIMENTO
       RT=RT+TEC(I)
       TCT(I)=RT+TP(I)
       IF(I-IM)1,2,1
     1 I=I+1
C   ORDENAÇÃO TEMPOS DE TAREFAS PRONTAS PARA ATENDIMENTO
     2 K=0
     7 J=1
```

```
    5 IF(TCT(J)-TCT(J+1))3,3,4
    4 TEMP=TCT(J)
      TCT(J)=TCT(J+1)
      TCT(J+1)=TEMP
    3 J=J+1
      IF(J-(I-K))5,6,6
    6 K=K+1
      IF(I-K)7,8,8
    8 L=1
      MA=0
      NA=0
      KX=0
C TEMPO INICIAL=0
      TEMPO(L)=0
      IP=0
  100 IF(L-IM)10,9,10
    9 GO TO 999
C CÁLCULO DO N. DE VEÍCULOS DISPONÍVEIS NO TEMPO(L)
   10 NVD(L)=0
      DO 11 KB=1,IN
      IF(N(KB)-1)11,50,11
   50 NVD(L)=NVD(L)+1
   11 CONTINUE
C CALCULO DO N. DE TAREFAS NA FILA NO TEMPO(L)
      NTF(L)=0
      DO 12 KC=1,IM
      IF(TF(KC)-1))12,51,12
   51 NTF(L)=NTF(L)+1
   12 CONTINUE
      IA=0
      IML=0
      DO 13 KD=1,IN
C VERIFICAÇAO SE EXISTE VEICULOS DISPONIVEIS
      IF(N(KD)-1)53,52,53
   52 IA=IA+1
   53 IF(IA)55,54,55
   54 IF(KD-IN)56,57,57
   56 GO TO 13
   57 GO TO 770
   55 ML=0
C VERIFICAÇAO SE EXISTE TAREFA NA FILA
      DO 14 KC=1,IM
      IF(TF(KC)-1)58,59,58
C REALIZAÇAO DA TAREFA DA FILA
   59 IF(IML)115,116,115
  115 TEMPO(L+1)=TEMPO(L)
      L=L+1
  116 ML=ML+1
      TF(KC)=C
C O VEICULO UTILIZADO E RETIRADA DA DISPONIBILIDADE
      IF(BTR(L)-TEMPO(L))854,855,854
  855 NVD(L)=NVD(L)-1
  854 N(KD)=0
C CALCULO DO TEMPO DE ESPERA NA FILA DA TAREFA REALIZADA
      TEF(KC)=TEMPO(L)-TIF(KC)
C CALCULO DO TEMPO DE CHEGADA NO SISTEMA DA TAREFA REALIZADA
```

```
      SOMA=0
      DO 15 KH=1,KC
      SOMA=SOMA+TP(KH)
   15 CONTINUE
      TC(KC)=TCT(KC)-SOMA
C CALCULO DO TEMPO DE RETORNO DO VEICULO UTILIZADO
      TR(KD)=TEMPO(L)+TB(KC)
C CALCULO TEMPO DE PERMANENCIA NO SISTEMA DA TAREFA REALIZADA
      TPS(KC)=TEF(KC)+TB(KC)+TP(KC)
C GERAÇAO ARQUIVO P/ DADOS DO RELATORIO
      LB(L)=KC
      ATCT(L)=TCT(KC)
      ATEF(L)=TEF(KC)
      ATPS(L)=TPS(KC)
      ATP(L)=TP(KC)
      ATC(L)=TC(KC)
      IA=0
      IML=1
      NA=LB(L)
   58 IF(ML)60,14,60
   60 GO TO 13
   14 CONTINUE
      IF(KX)61,62,61
   61 IF(TEMPO(L)-TCT(MA+1))63,64,63
   63 GO TO 13
   64 TEMPO(L+1)=TEMPO(L`
      L=L+1
   62 IF(KD-IN)66,66,63
   66 IF(MA)68,67,68
   67 IF(TEMPO(L)-TCT(1))63,89,63
   68 IF(TEMPO(L)-TCT(MA))63,89,63
C REALIZAÇAO DA OCORRENCIA DO TEMPO(L)
   69 MA=MA+1
   89 KX=0
C O VEICULO UTILILIZADO E RETIRADO DA DISPONIBILIDADE
      IF(BTR(L)-TEMPO(L))856,857,856
  857 NVD(L)=NVD(L)-1
  856 N(KD)=0
      NA=NA+1
C CALCULO DO TEMPO DE CHEGADA NO SISTEMA DA TAREFA
C REALIZADA
      SOMA=0
      DO 18 KG=1,MA
      SOMA=SOMA+TP(KG)
   18 CONTINUE
      TC(MA)=TC(MA)-SOMA
C CALCULO TEMPO DE RETORNO DO VEICULO UTILIZADO
      TR(KD)=TEMPO(L)+TB(MA)
C CALCULO DO TEMPO NO SISTEMA DA OCORRÊNCIA REALIZADA
      TPS(MA)=TEF(L)+TB(MA)+TP(MA)
C GERAÇAO ARQUIVO PARA DADOS DO RELATORIOS
      LB(L)=MA
      ATCT(L)=TCT(MA)
      ATEF(L)=TEF(MA)
      ATPS(L)=TPS(MA)
      ATP(L)=TP(MA)
      ATC(L)=TC(MA)
      IA=0
      KX=KX+1
```

```
   13 CONTINUE
      KX=0
  771 IF'BTR(L)-TEMPO(L))1000,770,1000
 1000 MA=MA+1
      IP=1
  770 IF(TEMPO(L)-TCT(MA))71,70,71
C COLOCAÇAO TAREFA NA FILA
   70 IF(LB(L)-MA)231,232,231
  231 TF(MA)=1
      TIF(MA)=TEMPO(L)
      MA=MA+1
      IF(IP)560,561,560
  560 MA=MA-1
      GO TO 71
  561 GO TO 770
C CALCULO NOVO TEMPO
  232 MA=MA+1
   71 MB=0
      IP=0
      IF(TCT(MA)-TCT(MA-1))780,781,780
  781 MA=MA-1
  780 JA=0
      DO 16 KE=1,IN
      IF(TR(KE)-TEMPO(L))80,80,81
   80 JA=JA+1
      ATR(KE)=TCT(MA)
      AB(KE)=IN+1
      GO TO 16
   81 IF(TCT(MA)-TR(KE))82,83,83
   82 ATR(KE)=TCT(MA)
      AB(KE)=IN+1
      GO TO 16
   83 ATR(KE)=TR(KE)
      AB(KE)=KE
   16 CONTINUE
      IQ=IN+1
      L=L+1
      TEMPO(L)=TCT(MA)
      DO 17 KF=1,IN
      IF(TEMPO(L)-ATR(KF))84,84,85
   84 IF(TEMPO(L)-TCT(MA))17,172,17
  172 IF(JA-IN)86,17,86
   86 IQ=AB(KF)
      GO TO 17
   85 IF(JA-IN)87,17,87
   87 TEMPO(L)=ATR(KF)
      BTR(L)=TEMPO(L)
      IQ=AB(KF)
   17 CONTINUE
      N(IQ)=1
      TR(IQ)=0
      GO TO 100
  999 LX=L-1
      IF(IU)394,429,394
  429 KT=1
      KM=52
      ID=1
  395 WRITE(3,1001)ID
```

```
1001 FORMAT(1H1),//,7X,'****COMPORTAMENTO DO SISTEMA',40X,'PG',
    I4,///,*5X,'TEMPO OCORREN-',3X,'SEQUENCIA',3X,'TEMPO',5X,
    *'TEMPO NO',3X,'TEMPO PRE-',3X,'TEMPO',5X,'VEICULOS',
    *6X,'TAREFAS',/,5X,'CIA EVENTO',7X,'EVENTOS',5X,
    *'NA FILA',3X,'SISTEMA',4X,'PARAÇAO',6X,'CHEGADA',
    *3X,'DISPONIVEIS',3X,'NA FILA',/)
     DO 600 L=KT,KM
     IF(L-LX)393,394,394
 393 WRITE(3,700)TEMPO(L),LB(L),ATEF(L),ATPS(L),ATP(L),ATC(L),
    *NVD(L),NTF(L)
 700 FORMAT(6X,F12.4,6X,I4,5X,F9.3,2X,F9.3,2X,F9.3,3X,F9.3,
    *4X,I4,8X,I5)
 600 CONTINUE
     KT=KM
     IU=1
     KM=KM+51
     ID=ID+1
     GO TO 395
 394 TMEF=0
     TEPF=0
     TMPS=0
     TEPS=0
     TMNVD=0
     XMTF=0
     JM=L-2
     DO 20 IX=1,JM
     TMNVD=TMNVD+(TEMPO(IX+1)-TEMPO(IX))
     XMTF=XMTF+NTF(IX+1)*(TEMPO)I+1)-TEMPO(IX))
     IF(LB(IX))21,20,21
  21 TMEF=TMEF+ATEF(IX)
     TEPF=TEPF+1
     TMPS=TMPS?ATPS(IX)
     TEPS=TEPS+1
  20 CONTINUE
     TMEF=TMEF/TEPF
     TMPS=TMPS/TEPS
     XMTF=XMTF/TMNVD
     IF(IT)1010,1011,1010
1010 KT=0
     ID=1
1395 WRITE(3,1111)ID
1111 FORMAT(1H1,///,'****MEDIDAS DE COMPORTAMENTO',40X,'PG',I4,///
    *///,3X,'NUMERO',5X,'TEMPO MEDIO',
    *3X,'MEDIA TARE-',3X,'TEMPO MEDIO',/,
    *3X,'VEICULOS',3X,'NA FILA',7X,
    *'FAS NA FILA',3X,'NO SISTEMA',/)
1011 WRITE(3,2000)IN,TMEF,XMTF,TMPS
2000 FORMAT(4X,I4,6X,F11.5,5X,F10.5,5X,F10,5,4X,F10.5,4X,F10.5)
     IT=0
     CALL EXIT
     END
```

QUADRO 6 - Programa para simulação do comportamento de um sistema com veículos de ponto único e um só canal de chegada com atendimento PEPS.

a) Utilização e significado das variáveis principais do programa do Quadro 6.

As primeiras oito (8) colunas dos cartões de dados são colocadas, respectivamente,

1º) Número total (IN) de veículos.

2º) Número (IM) de eventos a serem simulados. Capacidade máxima do programa - 200 eventos simulados.

3º) Quando fôr o caso, os parâmetros do processo de ocorrência, tempo de serviço, tempo de preparação e tempo de bloqueamento. Deve-se observar que alguns valores, como o número de cartões de dados a serem lidos, e os valores dos parâmetros das distribuições, devem ser acrescentados, respectivamente, mudado o valor 4 do DO 120 IX=1,4 para o valor da quantidade de cartões de dados e colocado as variáveis de definição dos parâmetros abaixo do cartão IX.

O programa utiliza a subrotina EMPO, que gera variáveis aleatórias com distribuição exponencial. Quando o processo fôr de tipo diferente, devemos substituir o cartão

150 CALL EMPO(EX,IX,IY,X)

pelo gerador do processo de ocorrência, o cartão

CALL EMPO(AX,IX,IY,X)

pelo gerador do tempo de bloqueamento.

Se o sistema tiver tempo de preparação X, devemos substituir o cartão TP(I)=0 pelo gerador apropriado e acrescentar em seguida o cartão

TP(I)=X

As seguintes variáveis e relações devem ser entedidas:

TEMPO(L) - Tempo atual

N(I) - indica se o veículo I está ou não disponível.

N(I) = 0 - o veículo não está disponível.

N(I) = 1 - o veículo está disponível.

TCT(I) - tempo em que a tarefa I está pronta para atendimento. Representa o tempo da tarefa de término da preparação da tarefa I.

NVD(L) - número de veículos disponíveis no tempo L .

TF(I) - indica se I está ou não na fila.

TF(I) = 0 - a tarefa I não está na fila.

TF(I) = 1 - a tarefa I está na fila.

NTF(L) - número de tarefas na fila no tempo L .

TIF(I) - tempo entrada na fila da tarefa I .

TEF(I) - tempo de espera na fila da tarefa I .

TEF(I) = TEMPO(L) - TIF(I)

TP(I) - tempo de preparação da tarefa I .

TC(I) - tempo de chegada no sistema da tarefa I .

$$TC(I) = TCT(I) - \sum_{k=1}^{I} TP(KC)$$

TB(J) - tempo de bloqueamento para a tarefa I .

TR(J) - tempo de retorno a disponibilidade do veículo J.

TR(J) = TEMPO(L) - TB(I)

TPS(I) - tempo no sistema da tarefa I .

TPS(I) = TEF(I) + TB(I) + TP(I)

As variáveis acima iniciadas com A são variáveis do arquivo de dados para o relatório.

TMEF - tempo médio espera na fila

XMTF - número médio de tarefas na fila

TMPS - tempo médio de permanência no sistema das tarefas

O Quadro 7 apresenta o resultado da simulação com o modelo do quadro 6. O processo de ocorrência das tarefas é Poisson, com parâmetro $\gamma = 0.001$ e o tempo de bloqueamento dos veículos exponencial com parâmetro $\mu = 0.C05$. O tempo de pre

****COMPORTAMENTO DO SISTEMA PG 1

TEMPO OCORRÊNCIA EVENTO	SEQUÊNCIA EVENTOS	TEMPO NA FILA	TEMPO NO SISTEMA	TEMPO PREPARAÇÃO	TEMPO CHEGADA	VEÍCULOS DISPONÍVEIS	TAREFAS NA FILA
0.0000	0	0.000	0.000	0.000	0.000	1	0
600.1619	1	0.000	249.827	0.000	600.161	1	0
845.8983	0	0.000	0.000	0.000	0.000	0	0
849.9895	2	4.091	442.046	0.000	845.898	0	1
1287.9445	0	0.000	0.000	0.000	0.000	1	0
1303.6418	3	0.000	47.468	0.000	1303.641	1	0
1351.1103	0	0.000	0.000	0.000	0.000	1	0
4574.7314	4	0.000	408.783	0.000	4574.731	1	0
4983.5136	0	0.000	0.000	0.000	0.000	1	0
5406.1338	5	0.000	161.078	0.000	5406.133	1	0
5567.2119	0	0.000	0.000	0.000	0.000	1	0
5677.1591	6	0.000	118.348	0.000	5677.159	1	0
5795.5078	0	0.000	0.000	0.000	0.000	1	0
6460.3984	7	0.000	54.525	0.000	6460.159	1	0
6514.9238	0	0.000	0.000	0.000	0.000	1	0
7245.7773	8	0.000	24.784	0.000	7245.777	1	0
7270.5605	0	0.000	0.000	0.000	0.000	1	0
8869.5703	9	0.000	292.149	0.000	8869.570	1	0
9161.7187	0	0.000	0.000	0.000	0.000	1	0
9350.7383	10	0.000	95.681	0.000	9350.738	1	0
9446.4179	0	0.000	0.000	0.000	0.000	1	0
11207.7871	11	0.000	204.875	0.000	11207.787	1	0
11412.6621	0	0.000	0.000	0.000	0.000	1	0
11496.9043	12	0.000	267.625	0.000	11496.904	1	0
11678.5605	0	0.000	0.000	0.000	0.000	0	0
11764.5273	13	85.966	174.528	0.000	11678.560	0	1
11853,0879	0	0.000	0.000	0.000	0.000	1	0
12732.6152	14	0.000	233.485	0.000	12732.615	1	0
12966.0996	0	0.000	0.000	0.000	0.000	1	0
13046.8203	15	0.000	108.366	0.000	13046.820	1	0
13133.5781	0	0.000	0.000	0.000	0.000	0	0
13155.1855	16	21.607	286.276	0.000	13133.578	0	1
13419.8535	0	0.000	0.000	0.000	0.000	1	0
14196.0742	17	0.000	77.901	0.000	14196.074	1	0

QUADRO 7 - Relatório do programa de simulação do Quadro 6.

paração foi admitido como zero.

O Quadro 8 é o resultado do cálculo de medidas do sistema, pela utilização do modelo do Quadro 6.

***MEDIDAS DE COMPORTAMENTO

NÚMERO VEÍCULOS	TEMPO MÉDIO NA FILA	MÉDIA TAREFAS NA FILA	TEMPO MÉDIO NO SISTEMA
1	43.17043	0.05135	267.18719

QUADRO 8 - Medidas de um sistema de ponto único e um só canal de chegada com atendimento PEPS, gerados com o programa do Quadro 6.

b) Análise do Quadro 7.

O Quadro 7 apresenta o comportamento simulado do sistema.

A primeira coluna dá o tempo de ocorrência do evento. Evento significa início do atendimento de um serviço, retorno à disponibilidade de um veículo ou colocação de tarefa na fila.

Na coluna sequência de eventos,

- 0 (zero) significa colocação de tarefa na fila ou retorno de um veículo.
- Os demais números representam a ordem de atendimento das tarefas prontas para atendimento.

As colunas três a seis são, por si, explicativas.

Na coluna veículos disponíveis, aparecem as quantidades de veículos nos diversos tempos. Quando a sequência de eventos indicar 0 (zero) e o número de veículos disponíveis nes se tempo fôr maior ou igual aos veículos disponíveis no tempo' anterior, significa que houve um retorno. Por exemplo, no tempo 1287.9445, a coluna sequência de eventos é zero e o número de veículos é maior que no tempo 849.9895 . Então, houve um retorno. Entre os instantes 849.9895 e 1287.9445 não havia veículos disponíveis.

A última coluna indica o número de tarefas na fila, contada sempre no tempo seguinte a sua ocorrência. Assim, a ocorrência pronta para atendimento 13 permaneceu na fila do instante 11.678,560 até o tempo 11.764,526, ou seja, [illegible].

c) Validação do Modelo

O Quadro 9 apresenta os resultados de medidas do sistema, obtidas através da simulação com o modelo da Figura 14, utilizando o programa do Quadro 6.

	TEMPO MÉDIO NA FILA	MÉDIA TAREFAS NA FILA	TEMPO MÉDIO NO SISTEMA
Simulação 1	43.17[illegible]	0.051	267.187
Simulação 2	32.[illegible]	0.029	204.430
Simulação 3	30.20[illegible]	0.039	240.156
Simulação 4	53.049	0.051	251.250
Simulação 5	60.210	0.062	270.082
Simulação 6	35.8[illegible]5	0.038	245.141
Simulação 7	60.824	0.062	270.541
Simulação 8	69.703	0.071	258.695
MÉDIA SIMULAÇÃO	49.253	0.050	250.935
TEÓRICO	50.000	0.050	250.000

QUADRO 9 - Medidas de sistema com veículos, obtidas através do programa do Quadro 6.

Note que a média das simulações se aproxima bastante do valor teórico calculado, utilizando os resultados da teoria das filas para a mesma situação, ou seja, ocorrências Poisson, com parâmetro $\gamma = 0.0[illegible]1$ e tempo de blo[illegible] cial com parâmetro $\mu = 0.005$ igual ao tempo de serviço e possuindo um único veículo.

Em geral, a aproximação da média real só será boa com um número maior de simulações. Quanto maior a quantidade de eventos simulados ou maior o número de simulações feitas, mais preciso serão os resultados. Como afirmado por MCMILLAN e GONZALEZ, não existem regras objetivas para fixar a quantidade de eventos simulados:

"As variâncias são reduzidas com o aumento do tempo de simulação, mas a um custo que deveria ser compensador em termos da precisão ganha. Para sistema complexos, estes ganhos requerem extremamente longas rodadas. Em muitos casos, o próprio tamanho não pode ser decidido a priori, simplesmente porque desejamos processar o modelo até que condições específicas resultem. Então, estamos de fato interpretando tempo como uma das informações de saída a mais do que mera magnitude do tamanho da amostra. Neste ponto parece evidente que o analista deveria usar todos os dados gerados e que ele não necessitaria recorrer a amostragem da saída. Se dados adicionais são desejados, a simulação deveria ser continuada, em lugar de ser repetida com um segundo conjunto de condições iniciais".[18]

Muitas vezes, entretanto, devido a limitação de capacidade da máquina utilizada, é impossível continuar a simulação. Neste caso, a alternativa consiste em nova simulação com novo conjunto de condições iniciais.

No modelo exemplificado, esta segunda alternativa foi utilizada. Cada simulação engloba um total de 200 eventos, resultando em um número de serviços simulados superior a 90. Desta forma, foi usado, para o cálculo das médias, um total superior à 700 tarefas, o que constitue uma grande amostra. Devido a este fato, parece lógica a precisão alcançada, validando o modelo proposto.

---

18 - REF. 10 - pg. 492-498.

4.3 - CONCLUSÕES

O problema da determinação do número de veículos utiliza, numa primeira etapa, um modelo probabilístico do sistema . Este modelo, devido às características do sistema, é, em geral, um modelo de simulação que fornece elementos para o cálculo das medidas e/ou as medidas já calculadas.

As medidas do sistema relacionadas com as restrições ' do sistema são utilizadas em modelo matemático determinístico , para determinar o número de veículos. Este modelo pode ser otimizado pelas técnicas usuais se conhecidas as formas das funções das medidas com o número de veículos.

Quando as medidas não tem forma funcional conhecida, utiliza-se o modelo do sistema para gerar nvárias medidas para diversas quantidades de veículos. Deste conjunto, escolhemos o número de veículos para o qual as medidas utilizadas no modelo matemático proposto minimizem o índice de desempenho.

Este é o procedimento que pode ser adotado.

CAPÍTULO V

5. - CONCLUSÕES FINAIS

Para melhor visualização, as conclusões estão apresentadas na forma de diagramas. A figura 18 apresenta os componentes e elementos básicos dos sistemas de veículos com suas relações funcionais.

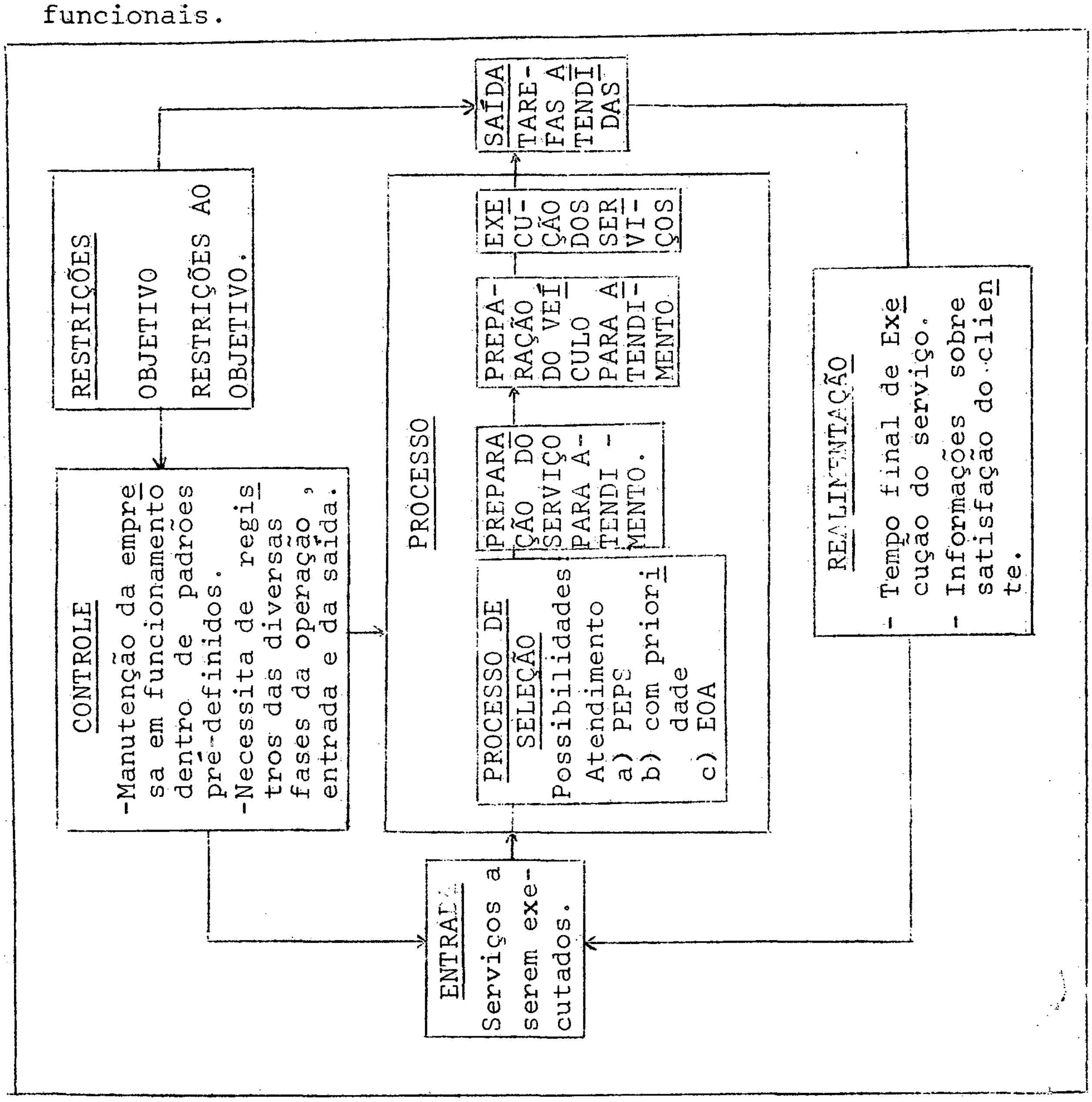


FIG. 18 - Diagrama dos elementos básicos do sistema com veículos e suas relações.

As restrições do sistema de veículos são utilizadas para fixar critérios ou índices de desempenho para avaliar o seu comportamento.

As entradas são os serviços a serem atendidos e ocorrem segundo um processo estocástico. Podem ser definidas por uma das três alternativas expostas no diagrama da Figura 19.

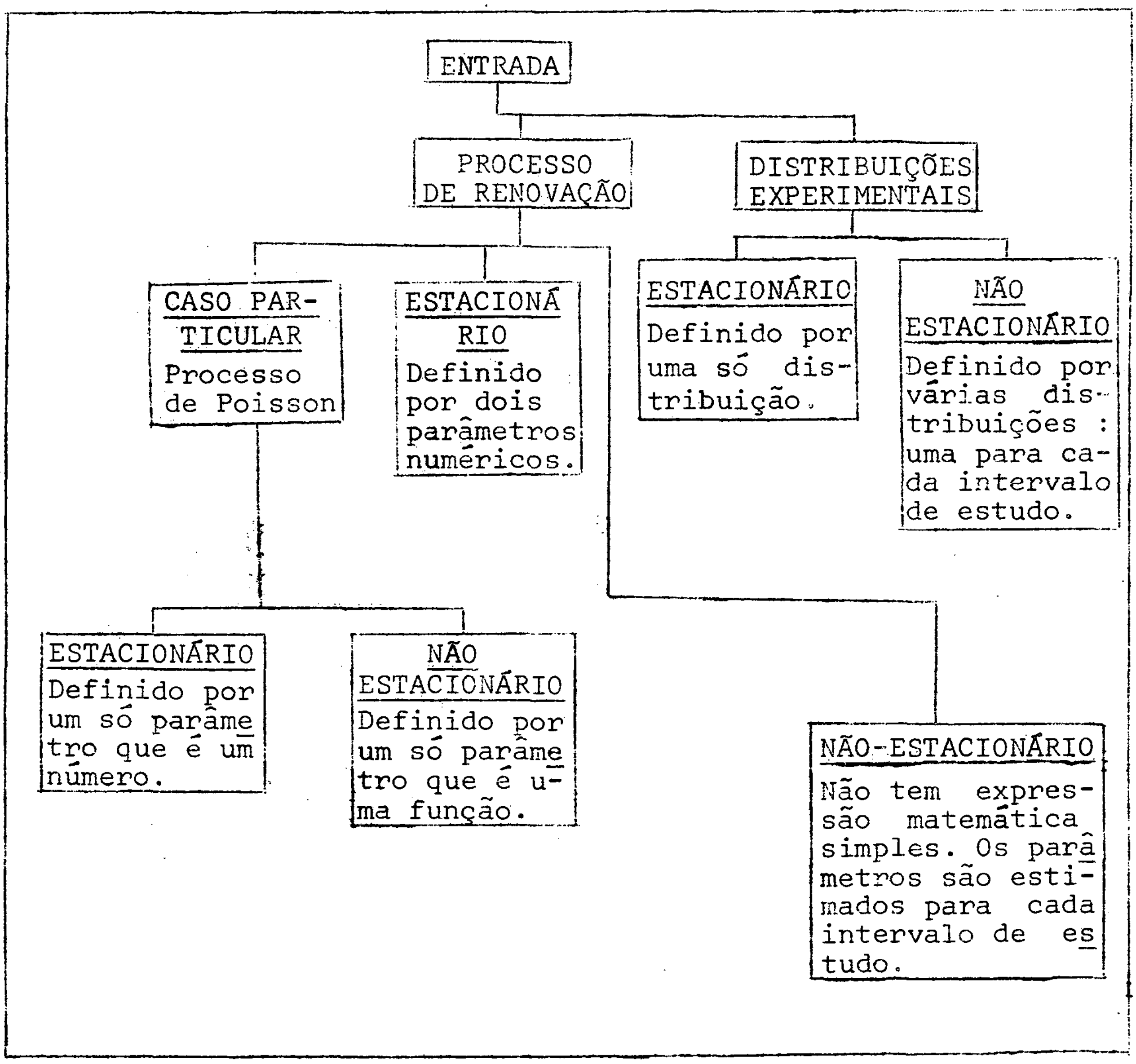


FIG. 19 - Alternativas para a definição do processo de ocorrência dos serviços.

Implicitamente considerado, na aplicação da equação (33) e princip mente a equação (69), é a grande quantidade de dados de observação necessários para a definição do processo de ocorrência dos serviços.

A estocasticidade do processo de transformação dos serviços em tarefas atendidas, está representada pelo tempo de preparação da tarefa, tempo de preparação do veículo e tempo de execução do serviço. Devido a estocasticidade das ocorrências e das características aleatórias do processo, aparecem os tempos adicionais de espera para preparação e espera na fila. A soma dessas parcelas dá o tempo no sistema de um serviço. A figura 20 apresenta as alternativas de definição destas parcelas aleatórias.

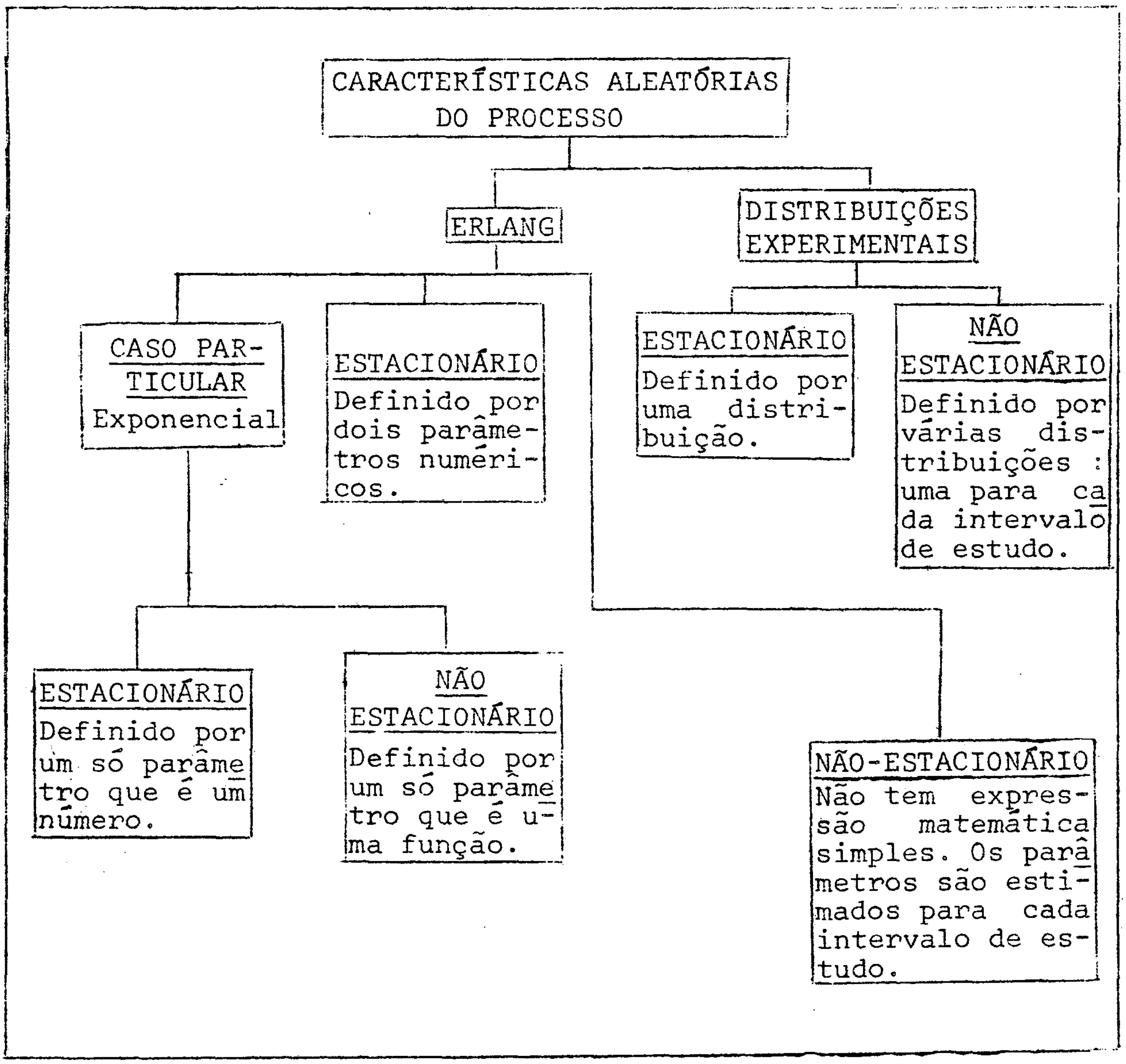


FIG. 20 - Alternativas para a definição das parcelas aleatórias do processo de transformação dos serviços a realizar em realizados.

A multiplicidade de formas do sistema de veículos resulta da natureza variada de seus parâmetros, da variedade de características de diferenciação e de suas combinações possíveis. A figura 21 apresenta estas características.

A simulação das ocorrências e das características aleatórias do processo permite, principalmente para os casos da não existência de modelos matemáticos para o sistema, analisar seu comportamento pela utilização de modelos de simulação . Pelo que foi mostrado, a simulação dessas características é essencialmente simples e de fácil entendimento.

O sistema, pelas suas características estocásticas, tem representado seu comportamento por modelos matemáticos probabilísticos ou modelos de simulação. Os primeiros somente existem para determinadas situações específicas, devido a dificuldades de estabelecimento e solução das equações de diferença-diferenciais para a maioria dos sistemas. Os modelos de simulação, são, em geral, mais simples.

Orientados para o problema da determinação da quantidade necessária de veículos, os modelos devem permitir o cálculo das medidas do sistema relacionadas com as restrições. A figura 22 apresenta o esquema para a determinação do número de veículos de um sistema de prestação de serviço.

No modelo matemático determinístico do item 4.2.4 há, para sua aplicação, a dificuldade da determinação exata do custo de espera. Desta forma, o procedimento proposto, visando maior precisão na decisão, é fazer uma análise de sensibilidade do número de veículos em relação a este custo.

O sistema de veículos deve ser adaptativo. O controle deverá, continuamente, determinar as características do processo estocástico de ocorrência dos serviços e das partes aleatórias do processo de transformação propriamente dito, usando estas informações para as correções necessárias.

Finalmente, o estudo apresentado é somente válido para sistemas estáveis. Esta consideração está implícita na obtenção de dados para a definição das características aleatórias e nos modelos matemáticos existentes para o sistema.

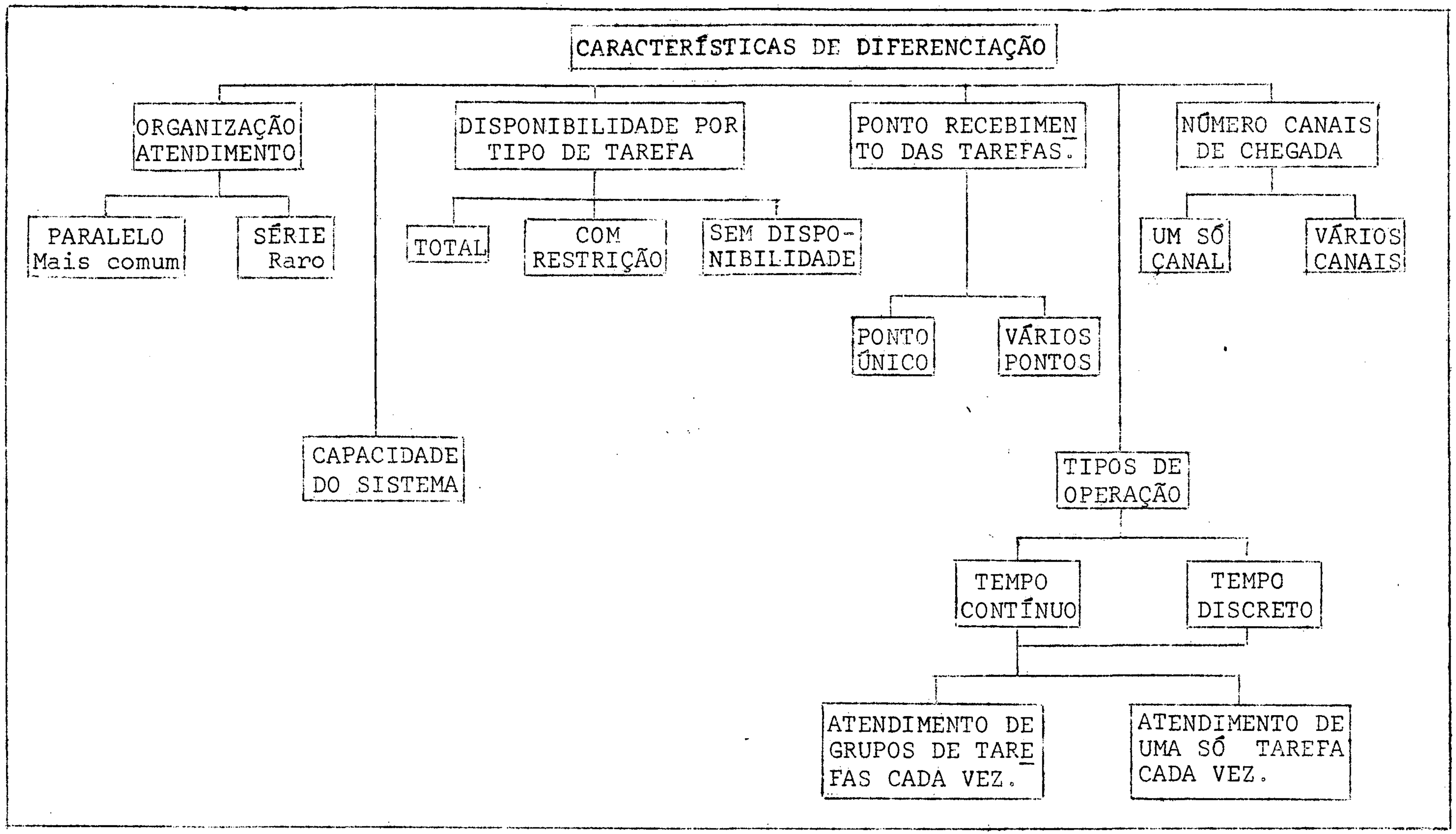


FIG. 21 - Diagrama das características de diferenciação das empresas de prestação de serviços com veículos.

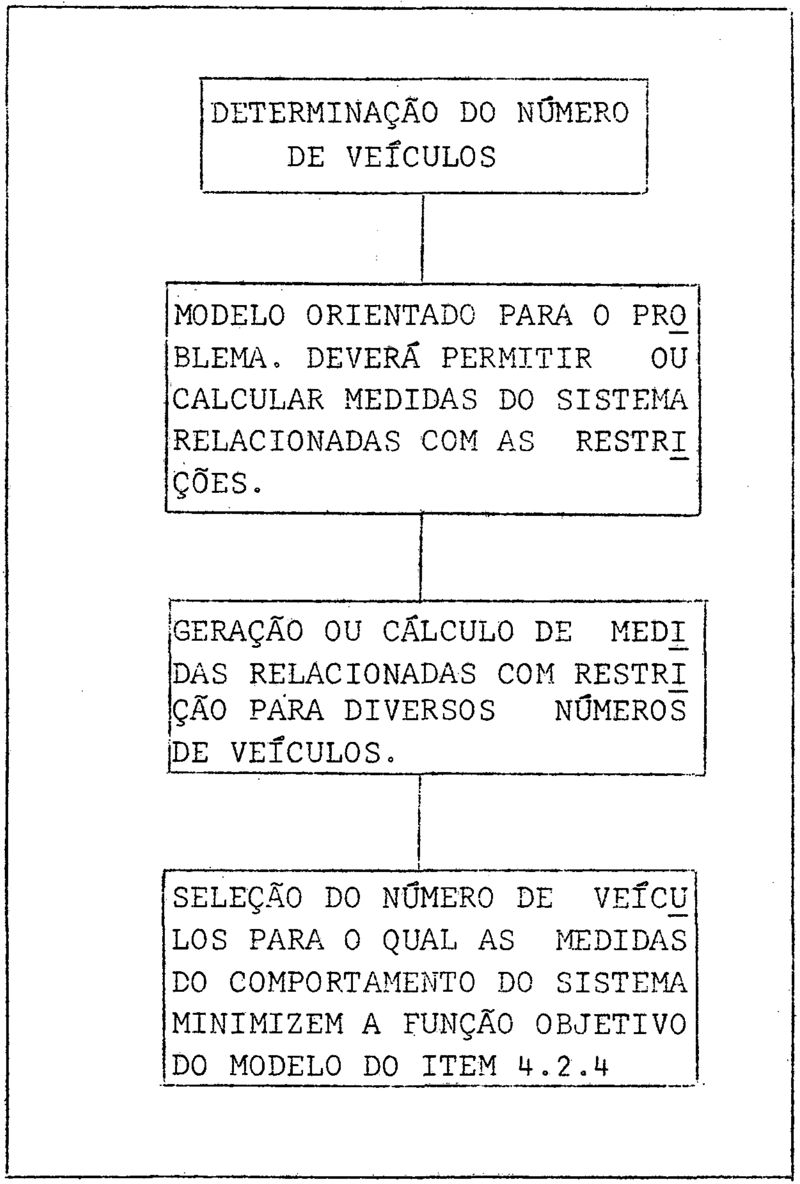


FIG. 22 - Esquema para a determinação do número de veículos de um sistema de prestação de serviço.

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

|1| AGUIAR, Márcia B. de - Gerador de Números Aleatórios para o Sistema IBM-1130 - Rio de Janeiro, 1972 (Tese para obtenção do grau de Mestre em Ciências em Informática).

|2| COX, D.R. e SMITH, Walter L. - Queues - London, Methven & Co. Ltd., 1961.

|3| HARE Jr., Van Covart - Systems Analysis: a diagnostic approach - New York, Hartcourt, Brace and World , Inc., 1967.

|4| HOEL, Paul G. - Introduction to Mathematical Statistics - New York, John Wiley & Sons, Inc., 1963.

|5| JAISWAL, N.K. - Priority Queues - New York, Academic Press Inc., 1968.

|6| KENDALL, M.G. e STUART, A. - The Advanced Theory of Statistic - London, Charles Griffin & Company Limited, 1969 - 1v. 3ª ed.

|7| KNUTH, Donald E. - The Art of Computer Programming - London, Addison-Wesley Publishing Company, 1968, 2v.

|8| KREYSZIG, Erwin - Introdutory Mathematical Statistics - Principles and Methods - New York, John Wiley & Sons, Inc., 1970.

|9| LEE, A.M. - Applied Queueing Theory - London, MacMillan and Company Limited, 1966.

|10| MCMILLAN, Claude e GONZALEZ, Richard F. - Systems Analysis, a computer approach to decision models - Illinois, Richard D. Irwin Inc., 1968.

|11| MEYER, Paul L. - Probabilidade, Aplicações à Estatística - Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico S.A.,1970.

|12| NAYLOR, T.H., BALINTFY, Joseph L., BURDICK, Donald S. e CHU, Kong - Técnicas de Simulação em Computadores - São Paulo, Editora Vozes Ltda., 1971.

|13| OPTNER, Stanford L. - Systems Analysis for Business Management - New Jersey, Prentice Hall Inc.,1968.

|14| PARZEN, Emanuel - Stochastic Process - London, Holden-Day Inc., 1962.

|15| RUDWICK, Bernard H. - Systems Analysis for Effective Planning - New York, John Wiley & Sons , Inc., 1969.

|16| SMITH, W.L. - Renewal Theory and Its Ramifications - Journal Royal Statistic Society, 1968, 20v., B.

|17| STARR, Martin K. - Systems Management of Operations - New Jersey, Prentice Hall Inc., 1971.

A N E X O 1

TEOREMAS

PARTE A - TEOREMA 1

Suponha que a observação de um processo de Poisson homogêneo seja continuado até que m ocorrências sejam contadas. Seja W_m o tempo de observação necessário para contar as m ocorrências. Desejamos provar que a quantidade $2\gamma W_m$ tem distribuição qui-quadrado com 2m graus de liberdade. γ é o parâmetro do processo.

DEMONSTRAÇÃO:

Se o processo de ocorrência dos eventos fôr Poisson homogêneo com função intensidade $\gamma(t) = \gamma$, então

$$P_m(W_m) = \frac{(\gamma W_m)^m}{m!} \cdot e^{-\gamma W_m} \qquad (83)$$

Por outro lado, se $2\gamma W_m$ tiver uma distribuição qui-quadrado com 2m graus de liberdade, sua função densidade será:

$$f(2\gamma W_m) = \frac{1}{2^m(m-1)!} \cdot (2\gamma W_m)^{m-1} . e^{-\gamma W_m} \qquad (84)$$

$$W_m > 0$$

A distribuição acumulada da variável com distribuição, dada pela equação (84), pode ser expressa em termos da distribuição dada pela equação (83) [19]. Desta forma, pode-se calcular a mesma probabilidade pelas duas equações. Então a quantidade $2\gamma W_m$ tem distribuição qui-quadrado com 2m graus de liberdade.

---

19 - REF. 11 - pg. 209

PARTE B - TEOREMA 2

Seja $N(t), t \geq 0$ um processo de Poisson não homogêneo. Suponha que no intervalo $(0, t)$ ocorram k eventos nos tempos $t_1, t_2, \ldots, t_k$. Então, esses k tempos, onde os eventos ocorrem, são valores das variáveis aleatórias independentes $U_1, U_2, \ldots, U_k$, respectivamente, com mesma distribuição acumulada

$$F_{U_j} = \frac{m(u)}{m(t)} \quad , \qquad 0 < u < t \qquad (85)$$

DEMONSTRAÇÃO:

A probabilidade condicionada P_c de que em cada k subintervalos quaisquer (t_i, t_i+h_i), $i = 1, 2, \ldots, k$ não coincidentes ocorra uma tarefa, dado que tenha ocorrido k tarefas no intervalo $(0, t)$ é dado pela equação (86).

$$P_c = \frac{m(h_i).e^{-m(h_i)} \cdot m(h_k).e^{-m(h_k)} . e^{-|m(t)-m(h_i)-\ldots-m(h_k)|}}{\frac{|m(t)|^k}{k!} \cdot e^{-m(t)}} =$$

$$= \frac{k!}{|m(t)|^k} \cdot m(h_i) \ldots m(h_k) \qquad (86)$$

Sendo

$$m(t) = \int_0^t \gamma(t).dt \qquad (87)$$

A probabilidade conjunta P das ocorrências de um evento em cada um dos k intervalos não coincidentes acima referidos é dado, utilizando a equação (21), por

$$P = \frac{k!}{|m(t)|^k} \cdot m(h_i) \ldots m(k) \qquad (88)$$

A comparação da equação (88) com a equação (86) mostra que a afirmativa inicial é verdadeira.

A N E X O 2

PROGRAMAS E SUB-ROTINAS USADAS NA SIMULAÇÃO DO PROCESSO DE OCORRÊNCIA DO ITEM 2.6.4

1) - SUB-ROTINAS

a) Gerador de números aleatórios - Gerador RANDU

```
  SUBROUTINE RANDU (IX,IY,YFL)
  IY=IX*899
  IF(IY)5,6,6
5 IY=IY+32767+1
6 YFL=IY
  YFL=YFL/32767
  RETURN
  END
```

OBS.: Para maiores detalhes sobre a utilização do gerador RANDU veja |1| .

b) Gerador de variáveis aleatórias com distribuição gama de parâmetro k inteiro.

```
   SUBROUTINE GAMA(K,A,X,IX)
  TR=1.
  DO 5 I=1,K
  CALL GAL(IX,IY,YFL)
  IX=IY
5 TR=TR*YFL
  X=-ALOG(TR)/A
  RETURN
  END
```

Dados de entrada: A e K = parâmetros da distribuição gama. K é o parâmetro inteiro.

IX = dado de entrada da sub-rotina RANDU. Deverá ser definido no programa principal.

Dados de saída: X = variável aleatória com distribuição gama de parâmetros A e K.

c) Gerador de variáveis aleatórias com distribuição de Poisson.

```
      SUBROUTINE POISN(B,X,IX)
      X=0.
      B=EXP(-B)
      TR=1.0
    5 CALL GAL(IX,IY,YFL)
      IX=IY
      TR=TR*YFL
      IF(TR-B)10,8,8
    8 X=X+1.
      GO TO 5
   10 RETURN
      END
```

Dado de entrada: B = parâmetro da distribuição de Poisson.

Dado de saída: X = variável aleatória com distribuição Poisson de parâmetro B.

2) - PROGRAMA PRINCIPAL

```
C GERAÇÃO PROCESSO DE OCORRÊNCIA ESTACIONÁRIO
C PROCESSO DE RENOVAÇÃO COM OCORRÊNCIAS CO...AS
C TEMPO ENTRE OCORRÊNCIAS GAMA
      DIMENSION T(1000)
      I=0
      M=100
      IX=90
      K=10
      A=0.2
      B=1
    5 IF(I-M)10,20,20
   10 CALL GAMA(K,A,X,IX)
      I=I+1
      IF(I-1)11,21,11
   11 T(I)=T(I-1)+X
      GO TO 12
   21 T(I)=X
   12 CALL POISN(B,R.IX)
      KR=R
      KI=I
      IF(KR)22,22,13
   13 DO 25 J=1,KR
      I=I+1
      T(I)=T(KI)
   25 CONTINUE
   22 GO TO 5
```

```
 20 WRITE(3,100)
100 FORMAT(1H1,////,10X,'ORDEM OCORRÊNCIA',5X,
   *'TEMPO OCORRÊNCIA',/)
    DO 30 K=1,M
    WRITE(3,200)K,T(K)
200 FORMAT(16X,I4,14X,F10.4)
 30 CONTINUE
    CALL EXIT
    END
```

<u>OBS.</u>: M = é o número de ocorrências a ser simulada.

A N E X O 3

PROGRAMA USADO NA SIMULAÇÃO DO PROCESSO DE OCORRÊNCIA DO ITEM 2.6.6

```
C PROCESSO DE OCORRÊNCIA NÃO ESTACIONÁRIO
C PROCESSO DE RENOVAÇÃO COM OCORRÊNCIAS CONJUNTAS
C TEMPO ENTRE OCORRÊNCIAS GAMA
      DIMENSION T(1000),XINT(100),IPI(100),P2(100)
      M=11
      IX=432
      IX=432
      B=0.1
      I=1
      N=M*10
      DO 500 J=1,M
      READ(2,10)XINT(J),IPI(J),P2(J)
   10 FORMAT(F10.5,15,F10.5)
  500 CONTINUE
      K=1
    6 IF(I-N)1,2,2
    1 KA=IPI(K)
      A=P2(K)
      CALL GAMA(KA,A,X,IX)
      IF(I-1)3.4,3
    4 T(I)=X
      GO TO 12
    3 T(I)=T(I-1)+X
   12 CALL POISN(B,R.IX)
      KR=R
      KI=I
      IF(KR)22,22,13
   13 DO 25 J=1,KR
      I=I+1
      T(I)=T(KI)
   25 CONTINUE
   22 CONTINUE
      IF(I-1)161,162,161
  162 IF(T(I)-XINT(M))60,2,2
  161 IF(T(I-1)-XINT(M))60,2,2
   60 DO 700 J=1,M
      IF(T(I)-XINT(J))61,61,700
   61 K=J
      I=I+1
      GO TO 6
  700 CONTINUE
    2 WRITE(3,100)
```

```
100 FORMAT(1H1,////,10X,'ORDEM OCORRÊNCIA',5X,
   *'TEMPO OCORRÊNCIA',/)
          DO 30 K=1,I
    WRITE(3,200)K,T(K)
200 FORMAT(16X,I4,14X,F10.4)
 30 CONTINUE
    CALL EXIT
    END
```

A N E X O 4

CUSTO OPERACIONAL DOS VEÍCULOS [20]

1) - COMPONENTES

Os custos operacionais podem ser divididos em:

I) Diretos - Aqueles diretamente ligados aos veículos. Nesta categoria são colocados os itens:

a.- combustível
b.- lubrificação e lavagem
c.- Pneus e câmaras
d.- bateria
e.- retificação do motor
f.- reforma da carroceria
g.- manutenção
h.- salário do motorista e ajudantes
i.- seguro
j.- licenciamento, impostos e multas
k.- juros
l.- depreciação.

II) Indiretos - Aqueles relativos à despesas administrativas. Incluem todos os gastos indiretos da empresa -over head - como salário do pessoal de escritório, propaganda, contabilidade, aluguéis, água, luz, limpeza, telefone, impostos, material de escritório, honorários, serviços técnicos, jurídicos, juros e despesas bancárias , descontos de fretes, etc. Sendo indiretos, estes custos devem ser rateados entre as unidades da frota.
O confronto dessas despesas com os custos diretos possibilita a determinação do quociente de participação (% do total dos custos diretos) aplicável a cada item do custo indireto.

---

20 - Resumo publicações revista Transporte Moderno, de Janeiro a Agosto de 1970.

Análise de balanços e demonstrações de lucros e perdas tem mostrado, para o quociente de participação das despesas administrativas, valores situados entre 20 % e 25 % . Todavia, este valor pode variar bastante com a estrutura da empresa.

2) - FATORES QUE AFETAM O CUSTO OPERACIONAL

a) Distância percorrida por mês

Quanto maior a quilometragem realizada num período de tempo fixado, menor será o custo do quilometro rodado, devido a diluição dos custos fixos.

b) Tipo de tráfego

O tráfego nos centros urbanos densamente povoados, provocam um maior desgaste em comparação com o tráfego em estradas.

c) Região

Existem variações de salários, combustíveis, de serviços, etc. de região para região. A altitude também afeta a eficiência dos veículos.

d) Tipo de estrada

O tipo de pavimento, região e traçado afetam o rendimento dos veículos e, consequentemente, o custo operacional.

e) Porte do veículo

Quanto maior o porte do veículo, menor será o custo tonelada quilometro transportado.

Quanto maior o porte do veículo e a sua quilometragem média mensal, menor o custo tonelada-quilometro.

3) - OBTENÇÃO DAS INFORMAÇÕES PARA O CÁLCULO DOS CUSTOS

Para a obtenção de bons resultados, é necessário que a empresa possua, para cada veículo, um relato de todos os acontecimentos, como viagens, lubrificações, acidentes, abastecimentos, pinturas, etc.

c) Pneus e câmaras

$$P = \frac{(N_d \times P_d + N_t \times P_t) \times km}{(K_n + K_r)} \qquad (92)$$

P = custo mensal de pneus e câmaras
N_d = número de pneus dianteiros
N_t = número de pneus traseiros
P_d = preço do pneu dianteiro
P_t = preço do pneu traseiro
km = quilometragem média mensal
K_n = quilometragem útil de um pneu novo
K_r = quilometragem útil de um pneu recapado

OBS.: Os preços P_d e P_t incluem a câmara e o custo de recapagem.
Os valores K_r e K_n variam com o tipo de serviço, tipo de estrada, pressão dos pneus, etc. Por isso, cada pneu deve ter um controle próprio, ou um controle por veículo.

d) Bateria

$$B = \frac{(P_n - P_t) \times 30}{V_u} \qquad (93)$$

B = custo mensal com bateria
P_n = preço de uma bateria nova
P_t = preço de troca de uma bateria usada
V_u = vida útil média das bateriais, em dias

e) Retificação do motor

$$R = \frac{P_r \times km}{K_r} \qquad (94)$$

R = custo mensal da retificação
P_r = preço de uma retificação completa
km = quilometragem média mensal
K_r = quilometragem útil do motor entre duas retíficas.

A quilometragem útil do motor depende do tipo de serviço executado, da carga, cuidados operacionais, etc. Se a parada para efetuar a retificação fôr muito grande, deve-se computar os lucros cessantes.

f) Reforma da carroceria

Essa despesa só é computada quando é feita por terceiros ou quando se trata de carroceria metálica. O custo mensal de reforma R_c é:

$$R_c = \frac{P_c}{t_c} \times 30 \qquad (95)$$

P_c = preço total do serviço de reforma
t_c = tempo médio entre duas reformas sucessivas

g) Manutenção

O cálculo desta parcela de custo deve ser feito usando valores médios, relativos a um período de tempo relativamente longo.

$$M = \frac{(C_p + C_o) \times km}{K_t} + D \qquad (96)$$

M = custo médio da manutenção
C_p = despesas médias com peças em cada parada para manutenção.
C_o = despesas médias com mão-de-obra em cada parada para manutenção.
km = quilometragem média mensal
K_t = quilometragem média entre duas paradas consecutivas.
D = depreciação mensal do equipamento de oficina.

h) Salário do motorista e ajudante

Além dos salários pagos deve-se acrescentar os encargos sociais e custos diversos, como uniforme, salário do motorista de reserva, diárias, etc.

i) Seguro

Deve-se conhecer o valor do prêmio anual de cobertura . Este valor dividido por doze dá as parcelas de custos mensais.

j) Licenciamento, impostos e multas

As despesas com licenciamento e impostos são anuais. As multas não devem ser esquecidas.

k) Juros

Corresponde ao cômputo do rendimento certo que a empresa sacrifica para adquirir o veículo.

Os juros anuais podem ser calculados pela fórmula:

$$J = (P - L) \cdot \frac{n + 1}{2n} \times i + L \times i \qquad (97)$$

J = juros anuais

P = valor de compra do veículo

L = valor residual

n = vida útil em anos

i = taxa anual de juros. Pode ser o valor da correção monetária ou o rendimento em outra aplicação do capital. Corresponde à taxa mínima de atratividade da empresa.

OBS.: A equação (97) só é válida se a depreciação do veículo fôr linear.

k) Depreciação

Existem vários métodos de depreciação. A maneira mais simples e mais utilizada é o método da depreciação linear. É o mais usado para efeitos legais.

O método da depreciação linear admite que o veículo se deprecie a uma taxa constante. Neste caso, as quotas Q de depreciação anual serão:

$$Q = \frac{P - P_m}{m} \qquad (98)$$

P = custo de aquisição do veículo
P_m = valor residual
m = vida útil

Na prática, a depreciação é, em geral, maior nos primeiros anos da vida do veículo. Como a depreciação deve se aproximar ao máximo da perda real para que se possa trabalhar com valores reais, o método exponencial pode ser de grande valor. Este método admite que o valor do equipamento diminui, anualmente, segundo uma porcentagem fixa do valor que possuia no início de cada período. O valor líquido V, após n anos, a taxa r% será:

$$V = P(1 - r)^n \tag{99}$$

Na prática, pode-se calcular a taxa r a partir da equação (99), conhecendo-se os valores de V e n.

1) Despesas indiretas ou administrativas

Na falta de valores reais precisos, pode ser calculada, considerando 20% a 25% do valor total do custo direto (veja o item III - Custos Indiretos).