UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

JULIANNA TABALIPA

UM ESTUDO DA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES NO LIVRO DE AL-KWARIZMI

Florianópolis
2013

JULIANNA TABALIPA

UM ESTUDO DA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES NO LIVRO DE AL-KWARIZMI

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à banca examinadora da Universidade Federal de Santa Catarina para obtenção do grau de Habilitação Licenciatura em Matemática.
Orientadora: Carmem Suzane Comitre Gimenez

Florianópolis
2013

Julianna Tabalipa

UM ESTUDO DA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES NO LIVRO DE AL-KWARIZMI

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado para obtenção do Título de Habilitação Licenciatura em Matemática, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela portaria nº11/CCM/13.

Florianópolis, 08 de Março de 2013.

Prof. Nereu Estanislau Burin

Professor da disciplina

Universidade Federal de Santa Catarina

Banca Examinadora:

Prof.ª Orientadora, Carmem Suzane Comitre Gimenez
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof.ª, Rosemari Pereira,
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof., José Luiz Rosas Pinho,
Universidade Federal de Santa Catarina

Este trabalho é dedicado aos meus pais **Jaciel Renato Tabalipa e Ana Tabalipa**, principal razão para persistir e prosseguir.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, que mesmo nos momentos mais difíceis não me deixaram desistir. Me apoiaram e acreditaram no meu potencial, fazendo me sentir mais confiante e segura.

Aos meus irmãos, Anna Paula Tabalipa e Paulo Marcelo Tabalipa, que estiveram sempre ao meu lado me apoiando e dando conselhos.

Aos meus sobrinhos, Rhuann M. Tabalipa dos Santos e Renato K. Tabalipa dos Santos, que foram o maior estímulo desde o início dessa caminhada, e também a Sofia que chegou para fazer parte dessa história.

A minha avó Herta Schramm Tabalipa, que se fez presente durante todos esses anos.

A professora e orientadora Carmem Suzane Comitre Gimenez por seu apoio, persistência e colaboração na formação dos meus conhecimentos.

A todos os professores do curso de matemática, em especial, Eliezer Batista, José Luiz Rosas Pinho , Gustavo Adolfo Torres Fernandes da Costa e Antonio Vladmir Martins, pelas ótimas aulas ministradas e pelo exemplo de profissional que são.

A Iara D'Ávila e Silvia D'Ávila Fernandes, que me protegeram, orientaram e apoiaram sempre.

A Carlos Fabiano, Marcelo Gomes, Christian Arenhart, Irete Stein, Lucélia Oliveia de Souza, David Jonnes Francez e Lara Santos Ventura, que assim como eu, enfrentaram as dificuldades do curso de matemática, e dessa forma compreenderam e acompanharam toda essa trajetória. Saibam que foram essenciais em meu desenvolvimento.

As minhas eternas flores, Fayga Pereira, Barbara Carneiro, Melissa Costa Marques, Morena Pereira Porto, Gizele Mingo Justi e Pamela Cristina Deucher, que começamos como colegas de trabalho e conseguimos construir um laço de amizade verdadeira; que me acompanham desde as coisas mais banais até as essenciais.

A Carolina D'Ávila C. Cavalcanti e Cibele D'Ávila C. Cavalcanti, companhias para todos os momentos, as "primas" mais próximas que tenho.

A equipe da BS CFM, pela dedicação, compreensão e parceria.

E aos demais amigos que sempre foram meu consolo, apoio e alegria, aqueles que permanecem e aqueles que por algum motivo tiveram que partir, mas que marcaram enquanto estiveram por perto.

E principalmente a Deus que me deu o dom da vida e colocou todas essas pessoas importantes na minha vida.

O principal objetivo da educação é criar pessoas capazes de fazer coisas novas e não simplesmente repetir o que as outras gerações fizeram.

Jean William Fritz Piaget

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Diante do interesse de estudar as equações quadráticas ou de segundo grau, sua origem e formas de resolvê-las desde os primórdios até hoje, escolhemos fazer um estudo do livro “El libro Del Álgebra” que é obra original de Mohammed ibn-Musa al-Jwarizmi, escrita no século IX e considerada a primeira obra de Álgebra, além de ter um caráter didático. O livro foi traduzido integralmente para o espanhol por Ricardo Moreno Castillo a partir de um dos sete manuscritos que existem até hoje. Dos sete manuscritos, dois encontram-se no Afeganistão e são de difícil acesso; dos outros cinco, o mais completo e em melhor estado é do século XII, que está na Universidade de Oxford e foi usado pelo tradutor. Segundo Castillo, no século XII foram feitas duas traduções desta obra de al-Kwarizmi para o latim: uma em Segóvia, pelo inglês Roberto de Chester, em 1145, e outra em Toledo, pelo italiano Gerardo de Cremona, pouco tempo depois. Uma terceira tradução para o latim é atribuída a Guglielmo de Lunis, por volta do ano 1250, que foi traduzida também para o italiano. Estas três traduções limitaram-se à primeira parte, que trata especificamente de Álgebra, deixando de traduzir a parte geométrica e a parte dos problemas de heranças. Destas traduções para o latim existem muitas cópias, e por esse motivo a obra de al-Kwarizmi é bem conhecida e conservada, pelo menos a primeira parte. O manuscrito de Oxford é completo, com as três partes. Foi traduzido para o inglês por Frederic Rosen em 1831; esta versão foi consultada pelo tradutor, apesar de discordar em alguns trechos. O tradutor também consultou a recente versão francesa da obra, feita por Roshid Rashed, e um artigo de Luis Puig intitulado “Histórias de al-Kwarizmi”, publicado na revista Suma. A tradução em espanhol aqui estudada foi editada em 2009 pela editora espanhola NIVOLA Libros y Ediciones.

A figura a seguir apresenta parte da introdução da obra de Al-Kwarizmi:

Figura 1 – Introdução da obra de al-Kwarizmi

Fonte: al-Jwarizmi (2009)

Por termos esta obra apenas em espanhol, alguns trechos serão apresentados neste trabalho como uma tradução livre. Uma vez definido o tema e a bibliografia principal, tivemos que decidir quais partes do livro abordaríamos, pois o todo seria impossível. Sendo assim, decidimos estudar os seis tipos de equações quadráticas, como foram apresentadas por Al-Kwarizmi, e seis problemas, em que cada um refere-se a uma destas equações. Diante disso, este trabalho está divido em três capítulos: no primeiro capítulo, fazemos um resgate histórico da época em que Al-Kwarizmi desenvolveu a obra, o que ocorria no mundo neste período e posteriormente como foram se desenvolvendo e evoluindo as formas de resolução destas equações. No segundo capítulo apresentamos o desenvolvimento dessas equações da forma apresentada por Al-Kwarizmi, que relata e desenvolve todas as equações de forma textual, com exemplos; apresentamos também a mesma resolução em notações atuais. Ainda neste capítulo trazemos a resolução geométrica feita pelo autor dos exemplos dados para interpretar as equações. Vemos que o autor cita várias vezes os “dirhams”, quando se refere a um valor numérico, pois era a moeda utilizada na época em questão. Como as resoluções não são generalizadas, o uso de uma unidade de medida nos métodos é justificável. No terceiro capítulo descrevemos algumas propriedades que serão utilizadas para resolver os seis problemas apresentados por Al-Kwarizmi e dispostos neste capítulo. Cada um desses problemas refere-se a uma das equações que constam no primeiro capítulo. Juntamente com a descrição e resolução do autor, apresentaremos notações, desenvolvimentos e resoluções atuais.

2 RESGATE HISTÓRICO

Para que possamos estudar e analisar o livro escrito por al-Kwarizmi, precisamos ter uma noção histórica da vida do autor e do que ocorria no mundo neste mesmo período. Dessa forma, neste primeiro capítulo apresentaremos esse resgate histórico do autor e principalmente da região em que ele vivia, e também de como posteriormente vir-se-ia a resolver equações do mesmos tipo das apresentadas pelo autor.

Com a queda do Império Romano por volta do século V, surgiu na Europa um novo sistema social, político e econômico, chamado feudalismo, o qual se concretizou somente no fim do império Carolíngio. Este império foi perdendo força após a morte de Carlos Magno, rei que ficou conhecido pela conquista de vários territórios (como a Península Itálica, Barcelona e as Ilhas Baleares), pela expansão do cristianismo e a criação do primeiro conjunto de leis, elaborado para que se cumprissem as ações que seriam tomadas caso fosse possível a conversão do domínio dado a autoridades de lideranças políticas para a igreja. Logo após sua morte em 814, o império foi governado por Luis, conhecido como o Piedoso, até 840, quando faleceu e deixou o império sendo disputado por seus três herdeiros, que somente após três anos puderam tomar posse de sua parte no então partilhado Império Carolíngio, oficializada pelo Tratado de Verdun. Foi então que começou a decair o império, com o enfraquecimento militar e a tomada dos vikings. Esses povos conhecidos como vikings, assim chamados por causa do termo “vik” (que significa “homem do norte”, de onde eram originários, norte da Europa, exerciam suas principais atividades na agricultura, no artesanato e em atividades marítimas, como a pesca e a pirataria. Esta última era feita através de hostis invasões em terras do sul da Europa, onde saqueavam riquezas e muitas vezes permaneciam nas terras invadidas, tomando posse das mesmas.

Durante o período compreendido entre o fim do século V até o século IX, ocorreu a expansão dos árabes, vindos da Península Arábica, onde era difícil a permanência devido ao solo árido e a escassez de água. Além disso, em princípios do século VII cresceu o movimento religioso conhecido como Islam “que combinava elementos judeus e cristãos com antigas tradições beduínas”. O Islam nasceu das visões do profeta Maomé, em meados do século VI, que as reuniu em um livro chamado Alcorão (que significa “recitação”. Os fiéis do Islam acreditavam que era seu dever difundir a religião entre os povos não árabes. Após a morte do profeta Maomé, iniciou-se uma era de conquistas e em pouco mais de 100 anos formou-se um império que se estendia dos Pirineus até as fronteiras da China. Os árabes interessavam-se pela cultura e pela ciência dos povos conquistados; as principais obras eram traduzidas para o árabe e os conhecimentos novos eram aperfeiçoados, transmitidos e ensinados. Muitas descobertas e registros aconteceram nesta época, como a introdução do sistema decimal originário da Índia e a tradução das obras dos grandes matemáticos gregos. Mas não podemos ver os árabes apenas como transmissores do saber e de bases já formadas. Eles também tiveram papel importante na construção de novos conhecimentos em astronomia e matemática. Descobriram novos teoremas e aprofundaram e concretizaram estudos sobre álgebra usando como apoio a geometria grega, que já era conhecida.

Não se sabe certamente onde al-Kwarizmi nasceu, pois não se tem registros históricos concretos; em alguns consta Bagdá e em outros Khwarezm, mas pode-se ter certeza que ele viveu em Bagdá, pois foi onde participou da Biblioteca de Bagdá ou A Casa da Sabedoria, por alguns comparada com a Biblioteca de Alexandria, devido às suas semelhanças. A Casa da Sabedoria foi fundada pelo califa al-Mamún, inicialmente para realizar a tradução de obras importantes de Ptolomeu, Hipócrates e até mesmo parte das obras de Euclides. Durante sua existência, al-Jwarizmi (ou al-Khwarizmi, como se usa aqui no Brasil) dedicou-se a traduções e escreveu novas obras. Muitas dessas obras se perderam; dentre as que chegaram até os dias de hoje, podemos citar uma sobre geografia, que versava sobre latitudes e longitudes, mapas de cidades e montanhas, de regiões da Arábia e de toda a Europa, em geral. Para esta obra ele teve como base documentos e escritos de Ptolomeu. Mas sua obra principal, que o deixou conhecido como "pai da álgebra" é a que estudaremos neste trabalho. O título original desta obra é "*al-Mujtasar fi hisad al-jabr wa-l-muqabala,* onde *jabr* significa restaurar, colocar em ordem os termos após fazer alterações na equação, e da junção *al-jabr* procede a palavra álgebra. O termo *al-muqabala* significa comparação, que neste sentido refere-se a redução de termos semelhantes. Tal obra é dividida em três partes, no primeiro capítulo apresentam-se exemplos e resoluções de equações; o segundo capítulo apresenta demonstrações e resoluções baseadas na geometria; e o terceiro capítulo traz problemas de heranças e legados, sendo resolvidos com o que foi estudado e demonstrado nos dois capítulos anteriores da mesma obra. A obra de al- Kwarizmi tem caráter didático: incia-se com a explicação da resolução das equações, justifica geometricamente seus métodos, dá exemplos de aplicação de regras e métodos em seis problemas específicos e conclui com uma série de problemas, que hoje chamaríamos de "situação-problema", isto é, problemas que contextualizam situações envolvendo heranças de bens e terras, com resolução.

Todos os procedimentos que hoje utilizamos para resolver equações estão presentes nesta obra de Al-Kwarizmi: soma de opostos, regra de sinais, redução de termos semelhantes, propriedade das operações. Por exemplo, a regra de sinais aparece quando é apresentado o produto de somas e diferenças de dois números, juntamente com a propriedade distributiva. Quando falamos de termos semelhantes referimo-nos a agrupar os termos com x^2, x e termos independentes, dispostos na equação de segundo grau. Quando estudado por al – Kwarizmi, esses termos eram agrupados e igualados a um número maior que zero, pois naquela época os pesquisadores não conheciam os números negativos. E justamente por este motivo al – Kwarizmi dispôs a equação de segundo grau em seis formas diferentes: três delas são tratadas como completas e as outras três como incompletas. A tradução da obra original nos traz o desenvolvimento segundo o autor, que explicava e descrevia as equações e problemas em forma textual, ou seja, não utilizava notação. Na tradução que estudamos, o tradutor Ricardo Castillo Moreno apresenta no prefácio um quadro explicativo das equações em notação atual **(Quadro 1)** e no final do livro apresenta a forma algébrica das resoluções e explicações das equações e problemas.

Têm-se indícios de estudos da equação quadrática desde “Os Elementos” de Euclides (aproximadamente 300 a.C). No entanto nesta época não se tinha domínio dos números reais, do zero e desconheciam-se formas genéricas de resolver problemas com equações quadráticas. Como citado anteriormente, al-Kwarizmi foi o mentor da resolução deste tipo de equação. O autor usava o método de completar quadrado para tal, porém só admitia raízes positivas. Já no século XII, Bhaskara (1114-1185) e outros matemáticos fizeram estudos aprofundados desse tipo de equação e desenvolveram uma fórmula para encontrar suas raízes, considerando também as raízes negativas. A fórmula que temos hoje para a resolução da equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ é a seguinte:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

para $a \neq 0$, pois caso contrário teremos uma equação de grau 1 e não quadrática. O hábito de chamarmos “Fórmula de Bhaskara” começou a ser usado somente por volta de 1960 e somente no Brasil. Internacionalmente não é chamada assim, pois antes de Bhaskara já se resolviam problemas que ao serem desenvolvidos resultavam em equações de segundo grau. O método de resolução desenvolvido por al-Kwarizmi em seis casos resulta na fórmula conhecida hoje, quando os coeficientes a, b e c são números reais. Quando al-Kwarizmi diz *quadrado*, refere-se a x^2, quando diz *coisa* refere-se ao *x* , *coisas* (no plural) refere-se à *coisa* multiplicada por um número (*x* com um coeficiente) e *número* é tudo que não tem relação com o *quadrado* e a *coisa*.

Quadro 1 – Os seis tipos de equação quadrática

Apresentado pelo autor	**Equação em notação atual**	**Características dos coeficientes da equação quadrática** (notação atual)
Quadrado da coisa igual a coisas	$x^2 = bx$	$ax^2 + bx + c = 0$, com $a = 1$, $b < 0$ e $c = 0$.
Quadrado da coisa igual a número	$x^2 = c$	$ax^2 + bx + c = 0$, com $a = 1$, $b = 0$ e $c < 0$.
Coisas igual a número	$bx = c$	$ax^2 + bx + c = 0$, com $a = 0$, $b > 0$ e $c < 0$.
Quadrado da coisa mais coisas igual a número	$x^2 + bx = c$	$ax^2 + bx + c = 0$, com $a = 1$, $b > 0$ e $c < 0$.
Quadrado da coisa mais número igual a coisas	$x^2 + c = bx$	$ax^2 + bx + c = 0$, com $a = 1$, $b < 0$ e $c > 0$.
Quadrado da coisa igual a coisas mais número	$x^2 = bx + c$	$ax^2 + bx + c = 0$, com $a = 1$, $b < 0$ e $c < 0$.

Fonte: elaborado com dados de Al-Jwarizmi (2009)

3 DESENVOLVIMENTO DAS EQUAÇÕES

Neste segundo capítulo faremos uma análise do desenvolvimento algébrico e geométrico de Al-Kwarizmi na resolução das seis equações e paralelamente como desenvolveríamos hoje. Al-Kwarizmi não resolve a equações genericamente: seu desenvolvimento é por meio de exemplos numéricos. Após os métodos de Al-Kwarizmi, faremos sua transcrição para a notação usual e a resolução como a conhecemos hoje, com as raízes negativas e/ou nulas. Relembramos que o autor desconhecia os números negativos e o zero na resolução das equações; também não havia símbolos para a incógnita, para os coeficientes e para o sinal "igual". Toda a resolução é escrita em texto, sem qualquer símbolo. Já para os desenvolvimentos geométricos, precisamos saber que os quadriláteros são expressos por letras maiúsculas situadas nos vértices de sua diagonal. Quando o autor cita uma figura nomeada apenas com uma letra maiúscula, esta refere-se à área da figura.

3.1 Tipo 1: "Quadrado da coisa igual a coisas": $\boldsymbol{ax^2 = bx}$ (com $\boldsymbol{a = 1, b < 0}$ $\boldsymbol{e\ c = 0}$, na equação geral $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$).

"Se por exemplo te dizem: um quadrado é igual a cinco vezes a raiz, então a raiz do quadrado é cinco e o quadrado é vinte e cinco, que efetivamente é cinco vezes a raiz". (AL-JWARIZMI, 2009, p.25).

Em notação atual, a resolução do autor:

$$x^2 = 5x$$

$$x.x = 5x$$

$$x.\frac{x}{x} = 5\frac{x}{x}$$

$$x = 5\ e\ x^2 = 25$$

Resolução atual:

Esta é a resolução da equação incompleta como conhecemos hoje:

$$x^2 = 5x$$

$$x^2 - 5x = 0$$

$$x(x - 5) = 0$$

$$x = 0\ ou\ x = 5$$

Note que hoje conhecemos as duas raízes.

"e se te dizem: um terço de um quadrado é igual a quatro raízes, então todo o quadrado é igual a doze raízes, e é igual a cento e quarenta e quatro e a raiz é doze".(AL-JWARIZMI, 2009, p.25).

Em notação atual, a resolução do autor:

$$\frac{1}{3}x^2 = 4x$$

$$3.\frac{1}{3}x^2 = 3.4x$$

$$x^2 = 12x$$

$$x.x = 12x$$

$$x.\frac{x}{x} = 12x.\frac{1}{x}$$

$$x = 12 \ \ e\ x^2 = 144$$

Resolução atual:

$$\frac{1}{3}x^2 = 4x$$

$$x^2 = 12x$$

$$x^2 - 12x = 0$$

$$x(x - 12) = 0$$

$$x = 12\ ou\ x = 0$$

Note que neste segundo exemplo, com $a < 1$, o autor multiplica a fração por um número inteiro a fim de deixar $a = 1$

3.2 Tipo 2: "Quadrado da coisa igual a número": $\boldsymbol{ax^2 = c}$ (com $\boldsymbol{a = 1, b = 0\ e}$ $\boldsymbol{c < 0}$, na equação geral $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$).

"E se por exemplo te dizem: um quadrado é igual a nove, então este é o quadrado e a raiz é três".(AL-JWARIZMI, 2009, p.25).

Em notação atual, a resolução do autor:

$$x^2 = 9$$

$$x^2 = 3^2$$

$$x = 3$$

Resolução atual:

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm\sqrt{9}$$

$$x = 3\ ou\ x = -3$$

"E se te dizem: cinco quadrados é igual a oitenta, então o quadrado é um quinto de oitenta, que é dezesseis" (AL-JWARIZMI, 2009, p.25).

Em notação atual, a resolução do autor:

$$5x^2 = 80$$

$$5\frac{x^2}{5} = \frac{80}{5}$$

$$x^2 = 16$$

$$x^2 = 4^2$$

$$x = 4$$

Resolução atual:

$$5x^2 = 80$$

$$x^2 = \frac{80}{5}$$

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm\sqrt{16}$$

$$x = -4\ ou\ x = 4$$

3.3 Tipo 3: “Coisas igual a números”: $bx = c$ (com a=0, $b = 1$ e $c < 0$, na equação geral $ax^2 + bx + c = 0$).

“E se te dizem: quatro raízes é igual a vinte, então a raiz é cinco e seu quadrado é vinte e cinco”.(AL-JWARIZMI, 2009, p.27).

Em notação atual, a resolução do autor:

$$4x = 20$$

$$4x = 4.5$$

$$\frac{4}{4}x = 4\frac{5}{4}$$

$$x = 5 \;\; e \;\; x^2 = 25$$

Resolução atual:

$$4x = 20$$

$$x = \frac{20}{4}$$

$$x = 5$$

“E se te dizem: um meio da raiz é dez, então a raiz é vinte e seu quadrado é quatrocentos”.(AL-JWARIZMI, 2009, p.27).

Em notação atual, a resolução do autor:

$$\frac{1}{2}x = 10$$

$$2\frac{1}{2}x = 2.10$$

$$x = 20 \;\; e \;\; x^2 = 400$$

Resolução atual:

$$\frac{1}{2}x = 10$$

$$\frac{x}{2} = 10$$

$$x = 20$$

Note que nas equações incompletas podemos isolar a “coisa”, ou seja, isolamos o x para podermos encontrar o seu valor, já nas equações completas isso não será possível, pois teremos a equação da forma $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0, b \neq 0$ e $c \neq 0$. Para a resolução algébrica das três próximas equações usaremos o método utilizado pelo autor, que será apresentado juntamente com cada um dos próximos casos, e também será descrita a forma geométrica de resolução utilizada pelo mesmo.

Para a resolução algébrica das três próximas equações usaremos o método utilizado pelo autor, que será apresentado juntamente com cada um dos próximos casos, e também será descrita a forma geométrica de resolução utilizada pelo mesmo.

3.4 Tipo 4: “Quadrado da coisa mais coisas igual a número”: $ax^2 + bx = c$ (com $a = 1, b > 0$ e $c < 0$, na equação geral $ax^2 + bx + c = 0$).

> [...] se por exemplo te dizem: um quadrado mais dez raízes é igual a trinta e nove dirhans, isto significa: qual é o quadrado que quando soma com ele dez

> vezes a raiz dá igual a trinta e nove? A solução está em dividir por dois o número de raízes, e neste caso resulta ser cinco, multiplicá-lo por si mesmo e é vinte e cinco, somas sobre este trinta e nove e dá sessenta e quatro, calculas a raiz quadrada, que é oito, e subtrai a metade do número de raízes (que é cinco) e dá três, e essa é a raiz sobre cujo quadrado se soma, e o quadrado é nove. Além disso, se fala de dois quadrados, ou três, ou menos, ou mais, transforma-o em um só quadrado, e faz como que está com ele (raízes ou números) as mesmas transformações que fizeste com o quadrado. (AL-JWARIZMI, 2009, p.27).

Em notação atual temos o exemplo acima da seguinte forma:

$$x^2 + 10x = 39$$
$$10 \div 2 = 5$$
$$5.5 = 25$$
$$25 + 39 = 64$$
$$\sqrt{64} = 8$$
$$8 - 5 = 3$$

Logo $x = 3$ é a solução. De fato,

$$x^2 + 10x = (3)^2 + 10.3 = 9 + 30 = 39$$

Atualmente poderíamos utilizar a fórmula de resolução, para resolver a mesma equação, mas para isso a igualaríamos à zero, ou seja, a equação $x^2 + 10x = 39$, seria reescrita e a usaríamos como $x^2 + 10x - 39 = 0$ de onde podemos tirar os seguintes dados:

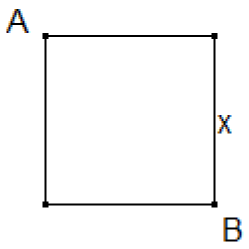
$$a = 1, b = 10 \; e \; c = -39$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4.1.(-39)}}{2.1}$$
$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 156}}{2}$$
$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{256}}{2}$$
$$x_1 = \frac{-10 + 16}{2} = 3 \qquad e \qquad x_2 = \frac{-10 - 16}{2} = -13$$

Note que o valor de x_2 não poderia ser encontrado, pois na época em questão desconheciam-se os números negativos. Sendo assim, a única resposta correta seria $x = 3$.

O autor justificava geometricamente seu método usando áreas, como veremos a seguir:

“Em relação a quadrado mais dez raízes igual a trinta e nove dirhams, a figura é um quadrado de lado desconhecido, e é o quadrado que queres conhecer e cujas raízes também queres conhecer, e é a figura AB” (AL-JWARIZMI, 2009, pg 31).

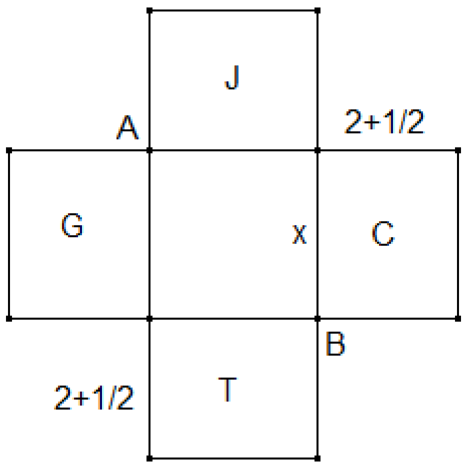
Figura 2 – Quadrado AB



Fonte: Elaborado pelo autor

> Cada um dos lados é a raiz, e quando se multiplica por um número qualquer, obtém um certo número de raízes, e cada raiz é igual a raiz dessa superfície, e quando se diz que com o quadrado há dez raízes, tomamos um quarto de dez, que é dois mais um meio, e desenhamos dois mais um meio em cada lado da figura, e se formam, junto ao quadrado AB, as figuras J,T,C e G. (AL-JWARIZMI, 2009, p.31)

Figura 3 – Quadrado AB mais dez raízes

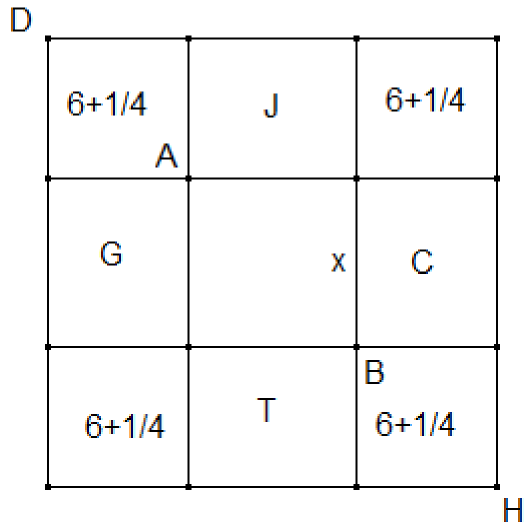


Fonte: Elaborado pelo autor

> E assim surge um quadrado, de lados iguais também desconhecidos, e com um defeito em seus cantos, de dois mais um meio por dois mais um meio em cada canto, e isso é que se necessita para calcular a figura, dois mais um meio por si mesmo quatro vezes, e tudo isso soma vinte e cinco. E sabemos que a área do quadrado mais as quatro superfícies que estão ao seu redor (que são dez raízes) somam trinta e nove, e quando adicionamos sobre ela vinte e cinco (que são os quatro quadrados que estão nos cantos do quadrado AB) se completa o quadrado maior DH, e sabemos então que todo ele vale sessenta e

> quatro, e um de seus lados, sua raiz, que é oito (AL-JWARIZMI, 2009, p. 31).

Figura 4 – Quadrado DH



Fonte: Elaborado pelo autor

“E quando tiramos de oito a quarta parte de dez duas vezes(que são os extremos da figura grande DH), que é cinco, sobra o lado, três, e essa é a raiz desse quadrado” (AL-JWARIZMI, 2009,p.33).

Note que al-Kwarizmi partiu do quadrado de lado x (figura 2), e logo após acrescentou retângulos de lados medindo $x\ e\ 2+\frac{1}{2}$ (figura 3). No entanto apenas com esses dados não poderia chegar à resposta desejada. Para que isso fosse possível, acrescentou aos quatro cantos vagos, quadrados de lados $2+\frac{1}{2}$. Sabemos que podemos algebrizar a área formada pela figura 3; teremos que o quadrado central mede x^2 e os retângulos são $4.\left[x.\left(2+\frac{1}{2}\right)\right]=10x$, mas também sabemos que $x^2+10x=39$, e como foram acrescentados mais quatro quadrados de lado $2+\frac{1}{2}$, temos que acrescentar a essa expressão a área destes, que é $4.\left[\left(2+\frac{1}{2}\right).\left(2+\frac{1}{2}\right)\right]=25$, somando 25 a ambos os lados da expressão teremos:

$$x^2+10x+25=39+25$$

$$x^2+10x+25=64$$

Mas $x^2+10x+25=(x+5)^2$, substituindo na equação teremos:

$$(x+5)^2=64$$

$$\sqrt{(x+5)^2} = \sqrt{64}$$

$$x + 5 = 8$$

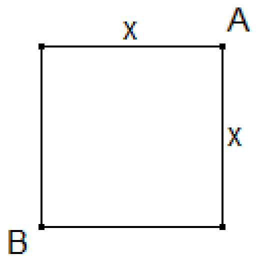
$$x = 3$$

Conhecemos a ideia utilizada acima como “completar quadrado.”

O autor ainda utiliza uma segunda forma de representar geometricamente o mesmo problema:

“E há uma outra figura que nos leva ao mesmo resultado. É a figura AB, que é o quadrado,e queremos adicionar sobre ele dez raízes.”(AL-JWARIZMI, 2009, p.33)

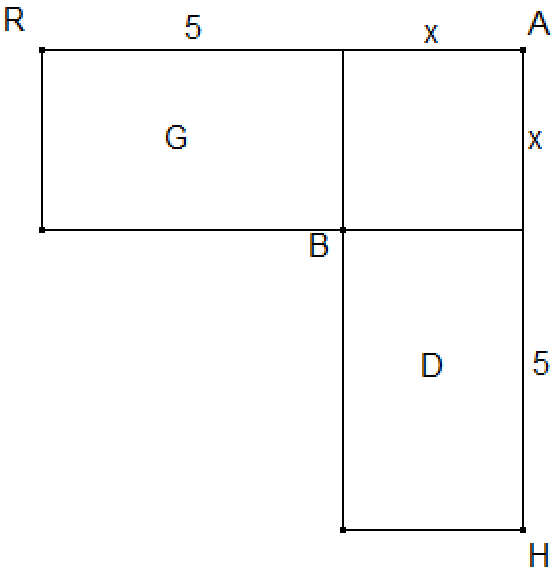
Figura 5 – Quadrado AB



Fonte: Elaborado pelo autor

> Então dividimos dez entre dois, e é cinco, e construímos dois retângulos sobre os lados do quadrado AB, que são as figuras G e D. A largura de cada uma delas é cinco braças (que é a metade do número de raízes), o comprimento igual ao lado da figura AB, e nos falta no canto da figura AB um quadrado de cinco por cinco (que é a metade de dez que adicionamos aos lados da figura que representa o quadrado). (AL-JWARIZMI, 2009, p.33)

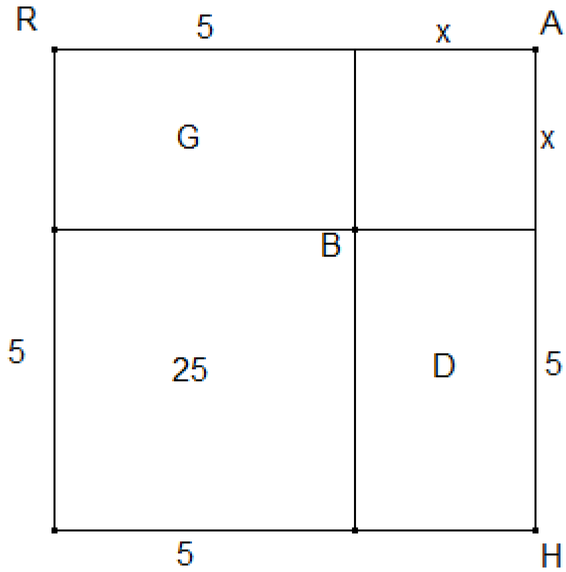
Figura 6 – Quadrado AB mais dez raízes



Fonte: Elaborado pelo autor

> E sabemos que a figura inicial é o quadrado, e que as figuras laterais são dez raízes, e que todo ele soma trinta e nove. E falta completar a figura grande, o quadrado de cinco por cinco, que é vinte e cinco. E o somamos a trinta e nove para completar a figura grande, que é RH, e resulta igual a sessenta e quatro. Tome sua raiz que é oito (um dos lados da figura final), e quando subtraímos o mesmo que aumentamos sobre ele (que é cinco) sobra três, que é o lado da figura AB (que é o quadrado) e essa é a raiz, e o quadrado é nove (AL-JWARIZMI, 2009, p.33).

Figura 7 – Quadrado RH



Fonte: Elaborado pelo autor

Analisando o relato do autor percebemos que ele iniciou novamente com o quadrado de lado x, consequentemente de área x^2, como mostra a figura 4; em seguida acrescentou dois retângulos de lados comuns ao quadrado inicial e estes com um vértice em comum, como na figura 5, somando uma área de $10x$, pois $2.(5.x) = 10x$. Sabia-se que para completar o quadrado da figura 6, dever-se-ia acrescer um quadrado de lado cinco, chegando à seguinte equação:

$$x^2 + 10x + 25 = 39 + 25$$

$$x^2 + 10x + 25 = 64$$

Podemos resolver essa equação de duas formas:

1- Conforme a descrição do autor, que chegou a um quadrado de lado $l = x + 5$ e área de 64 u.m., e sabendo que trata-se de um quadrado temos que $A = l^2$ e $64 = l^2$ de onde podemos concluir que $l = 8\ dirhams$. Podemos então igualar as duas equações que envolvem o lado do quadrado e teremos que :

$$x + 5 = 8$$

$$x = 3$$

2- A segunda forma de resolvermos esta mesma equação é tomando o primeiro lado da igualdade como um produto notável, ou seja, $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$ e teremos:

$$(x + 5)^2 = 64$$

$$\sqrt{(x + 5)^2} = \sqrt{64}$$

$$x + 5 = 8$$

$$x = 3$$

Alguns livros didáticos já apresentam a resolução de equações quadráticas por meio de áreas, mas só do tipo $ax^2 + bx = c$

3.5 Tipo 5: "Quadrado da coisa mais número igual a coisas": $\boldsymbol{ax^2 + c = bx}$ (com $\boldsymbol{a = 1, b < 0\ e\ c > 0}$, na equação geral $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$).

> Se te dizem: um quadrado mais vinte e um dirhams é igual a dez de suas raízes, e isto significa: qual é o quadrado que quando soma sobre ele vinte e um dirhams todo ele dá lugar a dez das raízes do mesmo quadrado? A solução está em dividir por dois as raízes, e resulta em cinco, multiplicá-la por si própria e da vinte e cinco, subtrai o vinte e um que está com o quadrado e dá quatro, calcula sua raiz quadrada e dá dois , e o subtrai da metade do número de raízes (que é cinco) e dá três , e esta é a raiz do quadrado sobre o qual se soma, e o quadrado é nove. E se queres, soma a raiz quadrada sobre a metade do número de raízes (que é cinco) e dá sete, e essa é a raiz do quadrado sobre o qual se soma, e o quadrado é quarenta e nove (AL-JWARIZMI, 2009, p.29).

Em notação atual temos:

$$x^2 + 21 = 10x$$

$$\frac{10}{2} = 5$$

$$5.5 = 25$$

$$25 - 21 = 4$$

$$\sqrt{4} = 2$$

$$5 - 2 = 3 \ \ e \ \ 5 + 2 = 7$$

Então as raízes são $x = 3\ e\ x = 7$.

De fato,

Para $x = 3$,

$$x^2 + 21 = 3^2 + 21 = 9 + 21 = 30 = 10.3$$

Para $x = 7$,

$$x^2 + 21 = 7^2 + 21 = 49 + 21 = 70 = 10.7$$

O autor, al-Kwarizmi, nos traz duas observações sobre este problema:

Observação 1: “...E tens que saber que, se neste caso, ao dividir por dois o número de raízes e multiplicá-la por si mesma, dá lugar a um número menor do que o de dirhams que estão com o quadrado, então o problema é impossível.”

Esta observação nos diz que na equação $ax^2 + c = bx$ se $\left(\frac{b}{2}\right)^2 < c$, então o problema não terá solução. De fato, se

$$a = 1\ e\ \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c = \frac{b^2 - 4c}{4} < 0\ então\ b^2 - 4c < 0$$

e se isso ocorre não existem raízes reais, por isso o problema seria impossível no conjunto dos números reais e consequentemente no universo dos racionais positivos de Al-Kwarizmi.

Observação 2: “...E se é igual ao número de dirhams que estão com o quadrado, então a raiz do quadrado é igual a metade do número de raízes, sem somar nem subtrair nada.”

Já a segunda observação nos diz que se $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = c$, então $x = \frac{b}{2}$.

De fato, se

$a = 1\ e\ \left(\frac{b}{2}\right)^2 = c \Rightarrow \frac{b^2-4c}{4} = 0 \Rightarrow b^2 - 4c = 0$, neste caso a raiz (dupla) é $\frac{b}{2}$, pois $\frac{\sqrt{b^2-4c}}{2} = 0$.

Hoje se apresentássemos esta equação a alunos de oitava série, eles usariam a fórmula para resolvê-lo. A equação em sua forma inicial $x^2 + 21 = 10x$, seria reescrito como $x^2 - 10x + 21 = 0$, e identificados a, b e c, seriam substituídos na fórmula:

$$a = 1, b = -10\ e\ c = 21$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4.1.21}}{2.1}$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 84}}{2}$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{16}}{2}$$

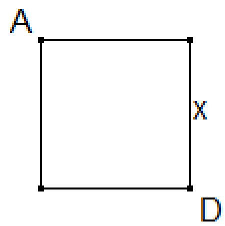
$$x_1 = \frac{10+4}{2} = 7 \quad e \quad x_2 = \frac{10-4}{2} = 3$$

Podemos ver que os valores encontrados utilizando a fórmula são os mesmos que o autor encontrou.

Ainda neste problema podemos estudar a forma geométrica de resolução de Al-Kwarizmi:

"Enquanto um quadrado mais vinte e um dirhams igual a dez raízes, representamos o quadrado mediante uma figura cujo lado é desconhecido, e é a figura AD."(AL-JWARIZMI, 2009, p.33 e 35).

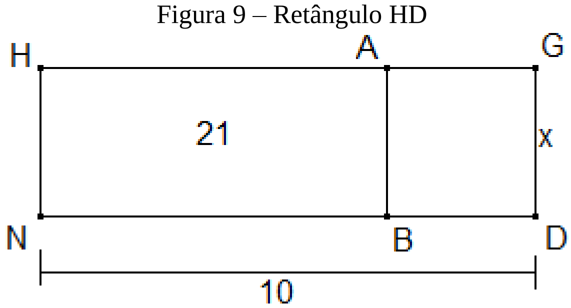
Figura 8 – Quadrado AD



Fonte: Elaborado pelo autor

> Depois estendemos junto a ele um retângulo paralelo, um de cujos lados é igual a um dos lados de AD, que é o lado HN da figura HB. O comprimento do lado das duas figuras juntas é HG, e já sabemos que é dez, porque em qualquer quadrado, se multiplicas um de seus lados por um, tens a raiz desse quadrado, e se por dois, duas de suas raízes. Então quando se diz que um quadrado mais vinte e um é igual a dez raízes, sabemos que o comprimento do lado HG é dez, porque o lado DG é a raiz do quadrado (AL-JWARIZMI, 2009, p.35).

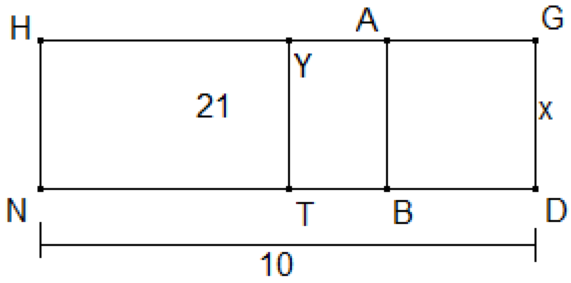
Figura 9 – Retângulo HD



Fonte: Elaborado pelo autor

“E dividimos o lado HG em duas metades, através do ponto Y. É evidente que o segmento HY é igual ao segmento YG, e também são iguais os segmentos YT e GD (AL-JWARIZMI, 2009, p.35).

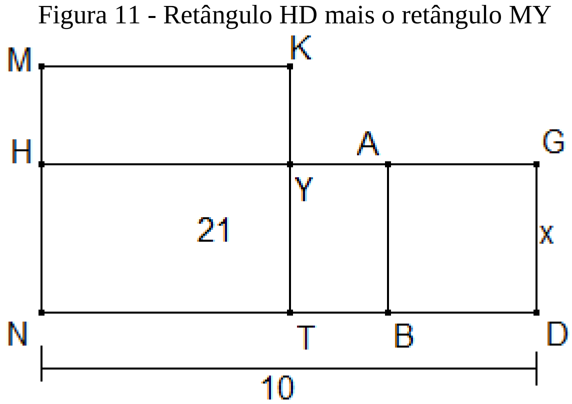
Figura 10 - Retângulo HD dividido pelo segmento YT



Fonte: Elaborado pelo autor

> E prolongamos o lado YT para um comprimento igual a YG, para quadrar e teremos o segmento KT igual a KM. Assim, aparece o quadrado MT, cujo lado KT é evidentemente cinco (por ser os lados iguais) e sua superfície é portanto vinte e cinco, e este é o produto da metade do número de raízes por si mesma (cinco por cinco são vinte e cinco). E é evidente que a superfície do retângulo HB é o vinte e um que somamos ao quadrado, e cortamos do retângulo a linha KT (que é um dos lados do quadrado MT), e é a figura AT (AL-JWARIZMI, 2009, p.35).

Figura 11 - Retângulo HD mais o retângulo MY

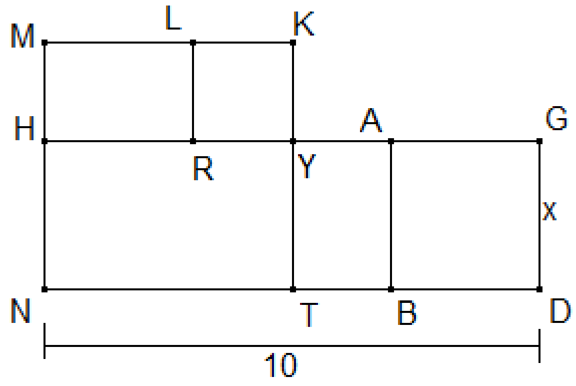


Fonte: Elaborado pelo autor

> E tomamos do segmento MK o segmento LK igual a KY e é evidente que YT é igual a ML, e o resto do segmento MK que é o segmento LK, é igual ao segmento YK. E assim aparece o retângulo MR que é igual ao retângulo AT, e é evidente que o retângulo HT somado com o retângulo MR é igual ao retângulo BH, que é vinte e um. Como a figura MT é igual a vinte e cinco, quando tiramos de TM o retângulo TH e o retângulo RM (que somam vinte e um), temos o quadrado pequeno RK, que é a diferença entre vinte e cinco e vinte e um, que é quatro, e sua raiz é o segmento RY, igual ao segmento AY, que vale dois. E se o tiramos do segmento GY (que é a metade do número de raízes) é o segmento AG, que é três a raiz do quadrado inicial. E se somamos sobre GY (que é a metade do numero de raízes) é sete, que é o segmento RG,

que é a raiz de um quadrado maior que esse quadrado, e quando aumentamos sobre o vinte e um, é igual a dez vezes a raiz (AL-JWARIZMI, 2009, p.35).

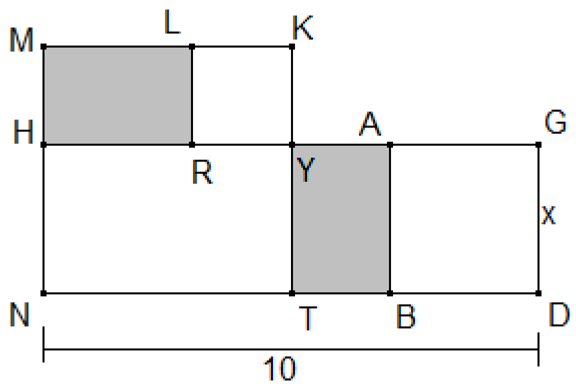
Figura 12 – Identificação de RK



Fonte: Elaborado pelo autor

Note que o autor partiu novamente do quadrado de lado x, e sabia que ao somar 21 teria que resultar em $10x$. Como já sabia que o quadrado tinha lado x, acrescentou a este um retângulo para que quando fizesse sua área total encontrasse $10x$, sendo assim concluiu-se que o retângulo final tinha 10 dirhams de comprimento e x de altura como vimos na figura 8. Em seguida, dividiu o comprimento do retângulo ao meio, encontrando dois retângulos de 5 dirhams de comprimento e x de altura. Depois estendeu para cima o segmento que dividia o retângulo ao meio até completar 5 dirhams também, donde formou o quadrado de lado 5 dirhams. Dessa forma, obteve-se a Figura 13:

Figura 13 – Conclusão que MR é igual a YB



Fonte: Elaborado pelo autor

Mas perceba que o quadrado MT da figura acima tem área $A_2 = 25$ dirhams, e retângulo inicial tem área $A_1 = 21$ dirhams, ou seja, precisamos tirar um quadrado de $4\,dirhams$ da A_2, para que tenhamos áreas iguais para MT e HD. Sabemos que os retângulos MLRH e TYAB são iguais, pois os segmentos KY ,AY e RY são iguais. Como citado anteriormente, o quadrado LKYR tem área igual a 4 dirhams, e conhecendo sua área podemos encontrar quanto vale seu lado KY. Assim, YA=KY=2.

Agora, como já conhecemos o valor do segmento YA, podemos descobrir quanto vale o segmento AG, pois,

$$AG = YG - YA$$

$$AG = 5 - 2 = 3$$

Desta forma concluímos que $x = 3$ e $x^2 = 9$.

Podemos notar que al-Kwarizmi fez a resolução geométrica apenas supondo que o lado desconhecido era menor que a cinco. Dessa forma não temos a resolução geométrica de quando $x = 7$.

3.6 Tipo 6: "Quadrado da coisa igual a coisas mais números": $\boldsymbol{ax^2 = bx + c}$ (com $\boldsymbol{a = 1, b < 0\ e\ c < 0}$, na equação geral $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$).

> Enquanto a raízes mais números igual a quadrados, é como se te dizem: três raízes mais quatro é igual a um quadrado. A solução está em dividir por dois o número de raízes, e resulta em um mais um meio, o multiplica por si mesmo que é dois mais um quarto, soma a este quatro e dá seis mais um quarto, calcula a raiz quadrada e é dois mais um meio, soma ele a metade do número de raízes (que é um mais um meio), e é quatro e essa é a raiz do quadrado, e o quadrado é dezesseis (AL-JWARIZMI, 2009, p.31).

Em notação atual temos:

$$3x + 4 = x^2$$

$$\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2 + \frac{1}{4}$$

$$2 + \frac{1}{4} + 4 = 6 + \frac{1}{4} = \frac{24 + 1}{4} = \frac{25}{4}$$

$$\sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}} = \frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2}$$

$$\left(2+\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{4+1+2+1}{2}=\frac{8}{2}=4$$

Sendo assim conclui-se que $x = 4$ é solução do problema. De fato,

$3.4 + 4 = 16 = 4^2$.

Este sexto e último caso também podemos resolver utilizando a fórmula de resolução, reescrevendo a equação $3x + 4 = x^2$ como $x^2 - 3x - 4 = 0$. Temos que $a = 1, b = -3\ e\ c = -4$. Aplicando na fórmula:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4.1.(-4)}}{2.1}$$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}$$

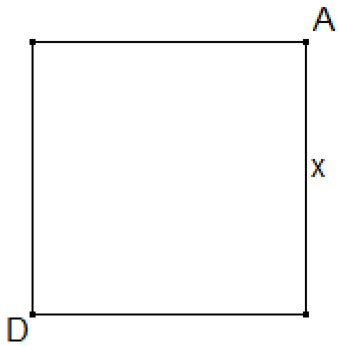
$$x=\frac{3\pm\sqrt{25}}{2}$$

$$x_1=\frac{3+5}{2}=4\quad e\quad x_2=\frac{3-5}{2}=-1$$

Veja que utilizando a fórmula de resolução encontramos duas soluções para o problema $x_1 = 4$ e $x_2 = -1$, mas a raiz -1 era desconhecida por Al-Kwarizmi. Podemos ter uma melhor percepção desse estudo quando vemos a resolução geométrica do autor, pois em todos os casos ele faz um estudo utilizando área, sendo assim seria impossível trabalharmos áreas negativas. Vejamos a resolução geométrica deste sexto caso.

> Em relação a três raízes mais quatro igual a quadrado, representamos o quadrado mediante um quadrado de lado desconhecido, que é a figura AD. E este quadrado abrange todas as três raízes e os quatro números mencionados, e em todo quadrado um dos lados por um é uma raiz (AL-JWARIZMI, 2009, p.35).

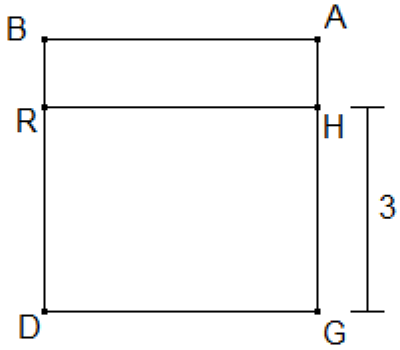
Figura 14 – Quadrado AD



Fonte: Elaborado pelo autor

“Cortamos do quadrado AD a figura HD, e supomos que um dos seus lados, o lado HG, é três, que é o número de raízes e igual a RD. É evidente que o retângulo HB é o quatro que soma as raízes” (AL-JWARIZMI, 2009, p.37).

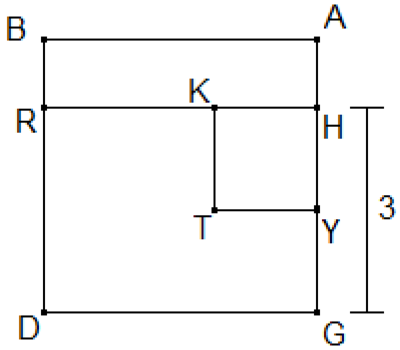
Figura 15- Quadrado AD dividido pelo segmento RH



Fonte: Elaborado pelo autor

“Cortamos o lado GH (que é o número de raízes) em duas partes mediante o ponto Y, e desenhamos com ele a figura quadrada TH, que é o produto da metade do número de raízes (que é um e meio) por si mesmo, e é dois mais um quarto” (AL-JWARIZMI, 2009, p.37).

Figura 16 – Identificação do quadrado TH

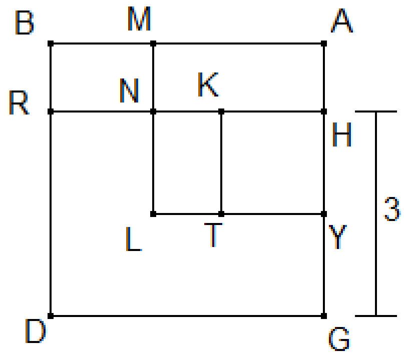


Fonte: Elaborado pelo autor

> Depois somamos ao segmento TY (para iguala-lo ao segmento AY) o segmento TL, e o segmento LY é igual AY e o segmento KN igual a TL. E sabemos que o retângulo AR é o quatro que soma as três raízes, e o retângulo NA mais o retângulo KL é igual ao retângulo AR, o qual é igual a quatro. E é evidente que o quadrado MY é a metade do número de raízes (que é um mais um meio) por si mesmo (que é dois mais um quarto) mais quatro, que é a soma dos retângulos NA mais KL. E sobra do lado do quadrado inicial (o

> quadrado AD, que é o quadrado da coisa) a metade do número de raízes (um mais um meio) e é o segmento YG. E quando somamos sobre AY (que é a raiz do quadrado MY e vale dois mais um meio) e somamos a ele o segmento YG (que é a metade do três das raízes e é um mais um meio) dá quatro, e é o segmento AG, a raiz do quadrado representado pela figura AD, e esta é a raiz e isso que nos torna claro (AL-JWARIZMI, 2009, p.37).

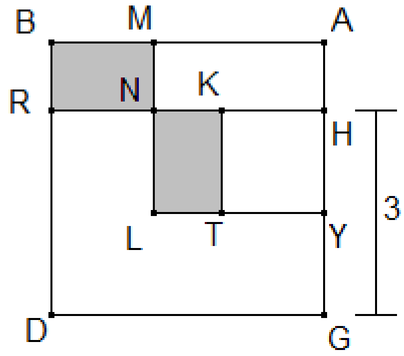
Figura 17 – Identificação do quadrado MY



Fonte: Elaborado pelo autor

Analisando o que foi dito pelo autor, temos que o segmento BM é igual ao segmento YG, ao segmento HY e ao segmento NL, e todos medem $\frac{3}{2}$. Sabemos que isto é verdade porque Y é o ponto médio do segmento HG, e também sabemos que ao retirarmos o quadrado MAYL do quadrado BAGD, temos que o segmento BM é igual ao segmento YG. E o segmento NK é igual ao segmento AH, pois NK é igual a LT (que é o segmento que foi acrescido ao segmento YT para que AY fosse igual a LY), desta forma podemos concluir que os retângulos BMNR e KTLN são iguais.

Figura 18 – Conclusão que BN é igual a NT



Fonte: Elaborado pelo autor

Note que o retângulo MAHN mais o retângulo NKTL é igual a 4, que é igual ao retângulo BAHR. Com isto podemos calcular a área do quadrado MAYL e posteriormente o valor do seu lado. Algebrizando o que foi dito anteriormente temos:

$$MAYL = 4 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 4 + \frac{9}{4} = \frac{25}{4}$$

Sabendo que a área do quadrado MAYL vale $\frac{25}{4}$, podemos encontrar quanto vale o lado deste mesmo quadrado, e resulta $\frac{5}{2}$.

Uma vez conhecido o lado do quadrado MAYL, ou seja, sabemos que o segmento AY mede $\frac{5}{2}$, podemos descobrir quanto vale o lado de quadrado BAGD, pois em notação algébrica temos que:

$$AG = AY + YG$$

$$AG = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Concluímos então que $x = 4$ e $x^2 = 16$.

Acredita-se que Al-Kwarizmi teve acesso aos “Elementos” de Euclides na Casa da Sabedoria, o que justifica o uso de resultados na Geometria Plana em suas construções.

4 EXEMPLOS PROPOSTOS COMO PROBLEMAS

Veremos agora seis problemas propostos por Al-Kwarizmi após seus métodos de resolução das equações quadráticas Após descrevermos a resolução do autor, apresentaremos os problemas em notação atual, utilizando a fórmula de resolução $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Como teremos um exemplo referindo-se a cada tipo de equação apresentada no capítulo anterior, já podemos imaginar que os três primeiros exemplos são das equações incompletas, que serão de fácil e breve resolução. Nos três últimos exemplos as resoluções não são tão breves, o que nos faz dividir a explicação e resolução em duas ou mais partes.

Mas antes de apresentarmos os problemas resolvidos no livro precisamos analisar brevemente o "Capítulo sobre la multiplicación", onde Al-Kwarizmi nos apresenta as propriedades necessárias para a resolução dos problemas.

> [...]te mostrarei como multiplicar coisas, isto é, raízes, uma pela outra, quando estão só ou quando estão acompanhadas de números, se estão subtraídas de números ou se números são subtraídos, como juntamos uma com outra ou como subtraímos uma da outra. E há de saber que sempre que se multiplica um número por um número, se repete um dos números tantas vezes como unidades tem o outro. E se há dezenas mais unidades, ou subtraídas delas unidades, são necessárias quatro multiplicações: dezenas por dezenas, dezenas por unidades, unidades por dezenas e unidades por unidades. E se as unidades que acompanham as coisas estão somadas, os quatro produtos somam. E quando subtraem todos, então o quarto produto também soma. E se uma delas soma e outra subtrai, o quarto produto subtrai (AL-JWARIZMI, 2009, p.39).

As explicações destas propriedades também se dão por meio de exemplos apresentados de forma descritiva como veremos abaixo.

"Quando te dizem: dez menos a coisa (e a coisa significa a raiz) por dez, multiplicas dez por dez (que é cem) menos dez pela coisa (que são dez coisas subtraídas), e então diz: cem menos dez vezes a coisa" (AL-JWARIZMI, 2009, p.39).

Em notação atual:

$$(10 - x)10 = 100 - 10x$$

"E se dizem: dez mais a coisa por dez, multiplicas dez por dez (que é cem), e a coisa por dez (que são dez coisas somadas), e terá cem mais dez vezes a coisa" (AL-JWARIZMI, 2009, p.39).

Em notação atual:

$$(10 + x)10 = 100 + 10x$$

Note que nos dois exemplos acima foi utilizada a propriedade distributiva; no primeiro exemplo a distributiva da multiplicação em relação à diferença e no segundo exemplo a distributiva da multiplicação em relação à soma.

"E se dizem: dez mais a coisa por si mesmo: dez por dez é cem, dez pela coisa, dez coisas, dez pela coisa, dez coisas também, e a coisa pela coisa, o quadrado que soma, e é isto cem dirhams, mais vinte coisas mais o quadrado"(AL-JWARIZMI, 2009, p. 39, 41)

Em notação atual:

$$(10+x)(10+x) = 100 + 10x + 10x + x^2 = 100 + 20x + x^2$$

Atualmente conhecemos esse procedimento como o quadrado da soma:

$$(10+x)(10+x) = (10+x)^2 = 10^2 + 2.10.x + x^2$$

"E se dizem: dez menos a coisa por dez menos a coisa, dez por dez é cem, menos a coisa por dez (que são dez coisas subtraídas), menos a coisa por dez (que são dez coisas subtraídas), e menos a coisa por menos a coisa, que é o quadrado somado, e isto é cem mais o quadrado da coisa menos vinte coisas" (AL-JWARIZMI, 2009, p.41).

Em notação atual:

$$(10-x)(10-x) = 100 - 10x - 10x + x^2 = 100 + x^2 + 20x$$

Atualmente conhecemos este procedimento por quadrado da diferença, pois $(10-x)(10-x) = (10-x)^2 = 10 - 2.10.x + x^2$

"E se dizem: dez menos a coisa por dez mais a coisa, dez por dez é cem, menos a coisa por dez, dez vezes a coisa (subtraindo), mais a coisa por dez, dez vezes a coisa (somando), e menos a coisa pela coisa, o quadrado (subtraindo), e isto é cem dirhams menos o quadrado" (AL-JWARIZMI, 2009, p.41).

$$(10-x)(10+x) = 100 - 10x + 10x - x^2$$

Conhecemos este procedimento como produto da diferença pela soma, ou diferença de quadrados:

$(10 - x)(10 + x) = 10^2 - x^2$

"E cem mais um quadrado menos vinte raízes, somado a cinquenta mais dez raízes menos dois quadrados, é igual a cento e cinquenta, menos um quadrado, menos dez raízes" (AL-JWARIZMI, 2009, p.43).

Em notação atual:

$$(100 + x^2 - 20x) + (50 + 10x - 2x^2) = 150 - x^2 - 10x$$

Note que fizemos acima o *al-muqabala*, ou seja reduzimos na equação os termos semelhantes.

“E todas as vezes que aparece na multiplicação somas ou subtrações (por exemplo, menos a coisa ou mais a coisa), o último produto sempre está subtraindo” (AL-JWARIZMI, 2009, p.43).

Analisando o trecho acima vemos que já se conhecia a regra de sinais. Note que os termos utilizados no título *al-jabr* (álgebra) e *al-muqabala* (redução de termos semelhantes) foram utilizados em todas as propriedades acima, e também serão usados nos problemas que estudaremos neste capítulo.

4.1 Problema 1: Quadrado igual a raízes ($ax^2 = bx$)

> O primeiro dos seis te diz: Divides dez em duas partes, e multiplicas uma delas pela outra. Depois multiplica uma delas por si mesma, e teremos que o resultado desta multiplicação por si mesma é igual a quatro vezes o produto de uma das partes por outra. A solução esta em colocar umas das partes como a coisa, a outra como dez menos a coisa, e multiplicar a coisa por dez menos a coisa, que resulta em dez coisas menos um quadrado. Depois multiplica por quatro (porque te disse: quatro vezes), e é quatro vezes o produto de uma parte pela outra, que por sua vez é quarenta coisas menos quatro quadrados. Depois multiplica a coisa pela coisa, que é uma das duas partes, e resulta que o quadrado é igual a quarenta coisas menos quatro quadrados. Reduz os quatro quadrados somando-os sobre o quadrado, e sobram quarenta coisas igual a cinco quadrados, e o quadrado é igual a oito raízes, então é sessenta e quatro, e a raiz é oito, que é aquela das duas partes que se multiplica por si mesma, e de dez sobra dois, que é a outras das duas partes (AL-JWARIZMI, 2009, p.49).

Em notação atual,

- O Problema: Dividir 10 em duas partes (ou parcelas) a e b de modo que

$$4ab = a^2.$$

- A equação:

$$x.(10 - x) = 10x - x^2$$

Quando o autor refere-se a “dividir dez em duas partes”, não quer dizer que estas sejam iguais, por isso chama uma delas de x e a outra de $(10 - x)$. Como o problema nos diz que quatro vezes uma das partes multiplicada pela outra é uma das duas multiplicada por si mesma, tomou x, que é uma das partes e a multiplicou por si própria resultando x^2, e então igualou a $4.(10x - x^2)$:

$$x.x = 4.(10x - x^2)$$

$$x^2 = 40x - 4x^2$$

$$5x^2 = 40x$$

$$\frac{1}{5x}.5x^2 = \frac{1}{5x}.40x$$
$$x = 8$$

Verificação:

Para $x = 8$,

$$x^2 = 64$$
$$8(10-8) = 16 \text{ e}$$
$$16.4 = 64$$

4.2 Problema 2: Quadrado igual a número ($ax^2 = c$)

> Segundo problema: divides dez em duas partes, e multiplica cada parte por si mesma, depois multiplicas dez por si mesmo e o que resulta de multiplicar o dez por si mesmo é igual a uma das partes multiplicada por si mesma e multiplicada por dois mais sete nonos, ou igual a outra parte por si mesma e multiplica por seis mais um quarto. A solução esta em chamar uma das partes de coisa, e a outra de dez menos a coisa. Multiplicas a coisa por si mesma e tens um quadrado, depois por dos e por sete nonos, e tens dois quadrados mais sete nonos do quadrado. Depois multiplica o dez por si mesmo, e tens cem, e resulta que cem é igual a dois quadrados mais sete nonos do quadrado. O convertes em um só quadrado, e como nove dividido por vinte e cinco é um quinto mais quatro quintos de um quinto, pegas um quinto de cem mais quatro quintos da sua quinta parte, e sobra trinta e seis igual ao quadrado, pegas sua raiz e é seis, que é uma das duas partes, e outra é necessariamente quatro (AL-JWARIZMI, 2009, p.49,51).

Notação atual do problema: Dividir 10 em duas partes a e b tal que

$$\frac{25}{9}a^2 = \frac{25}{4}b^2 = 100$$

Seguindo o raciocínio do autor, denotamos uma das partes desconhecidas como x, sendo ela a primeira parte e a outra como$10 - x$, sendo a segunda. E então podemos escrever a explicação do autor em notação atual da seguinte forma:

Para a primeira parte:

$$x.x = x^2$$
$$10.10 = x^2\left(2 + \frac{7}{9}\right)$$
$$100 = 2x^2 + \frac{7}{9}x^2$$
$$x^2\left(\frac{25}{9}\right) = 100$$
$$x^2 = 100.\left(\frac{9}{25}\right)$$

$$x^2 = 100.\left(\frac{1}{5}+\frac{4}{5}.\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5}.100 + \frac{4}{25}.100$$

$$x^2 = 20 + 16 = 36$$

$$x = 6$$

Neste primeiro caso temos que $x = 6$ e $10 - x = 10 - 6 = 4$, ou seja, uma das partes vale 6 e a outra 4.

Na segunda forma sendo $(10 - x).(10 - x).\left(6 + \frac{1}{4}\right) = 100$, o autor não desenvolveu a resolução, pois note que ao desenvolvermos as multiplicações teríamos que $100 - 20x + x^2 = 16$, ou $x^2 + 84 = 20x$, e tal equação não se encaixa na equação que estamos desenvolvendo, esta seria uma equação completa.

Perceba que o autor desmembrou a fração $\frac{9}{25}$, como $\frac{1}{5} + \frac{4}{5}.\frac{1}{5}$ e usou a propriedade distributiva já apresentada. Este método substitui os algoritmos de adição e multiplicação de frações que não eram conhecidos. Os nossos alunos fariam hoje:

$$x^2 = 100.\frac{9}{25} = 4.9 = 36$$

$$x = 6$$

4.3 Problema 3: Coisas igual a número ($bx = c$)

> Terceiro problema: Divides dez em duas partes, depois divide uma delas pela outra terá quatro. A solução esta em colocar uma das duas partes como a coisa, e a outra como dez menos a coisa, depois divides dez menos a coisa pela coisa, para que seja quatro. Já sabes que quando multiplicas o que te resulta da divisão pelo divisor, te aparece o que dividiste, o quociente neste problema é quatro e o divisor é a coisa, e ao multiplicar quatro pela coisa terá que quatro vezes a coisa é igual ao número que dividiste, que é dez menos a coisa. Separas o dez da coisa, somando-a sobre as quatro coisas, e terá cinco vezes a coisa igual a dez, e então a coisa, uma só vez, é igual a dois (AL-JWARIZMI, 2009, p.51).

Em notação atual temos:

- O problema: Dividir 10 em duas partes (ou parcelas) a e b tal que $\frac{a}{b} = 4$.
- A equação: uma das partes é x e a outra $10 - x$.

$$\frac{(10 - x)}{x} = 4$$

$$(10 - x) = 4x$$

$$10 = 5x$$

$$x = 2$$

No caso acima, seguimos a resolução do autor, e encontramos que uma das partes é dois e a outra consequentemente será 8. Mas também poderíamos resolver o mesmo exercício trocando o divisor pelo dividendo? Será que se desenvolvêssemos dessa forma cairíamos numa equação da forma $bx = c$. Vejamos:

$$\frac{x}{(10-x)} = 4$$

$$x = 4(10-x)$$

$$x = 40 - 4x$$

$$5x = 40$$

$$x = 8$$

que é a solução já encontrada.

4.4 Problema 4: Quadrado mais raízes igual número ($ax^2 + bx = c$)

> Quarto problema: Multiplicamos a terceira parte de uma certa quantidade mais um dirham por sua quarta parte mais um dirham, e o resultado é vinte. A solução está em multiplicar um terço da coisa por um quarto da coisa, e terá um meio de um sexto do quadrado. Multiplicas um dirham por um terço da coisa, e tens um terço da coisa, e um dirham por um quarto da coisa, que é um quarto da coisa, e um dirham por um dirham. E todo ele é um meio de um sexto do quadrado, mais um terço da coisa, mais quarto da coisa, mais um dirham igual a vinte dirhams. Subtrai dos vinte dirham um dirham, e sobra dezenove dirhams igual a um meio de um sexto do quadrado, mais um terço da coisa, mais um quarto da coisa (AL-JWARIZMI, 2009, p.51).

Em notação atual:

- O problema: a terça parte de um número somada com 1 é multiplicada pela sua quarta parte também somada com 1, e o resultado é 20. Qual é o número?
- A equação:

$$\left(\frac{1}{3}x+1\right).\left(\frac{1}{4}x+1\right) = 20$$

$$\frac{1}{2}.\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + 1 = 20$$

$$\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{6}x^2\right) + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 19$$

"Agora transforma todos em números inteiros, multiplica tudo o que tens por doze, e terá que um quadrado mais sete raízes é igual a duzentos e vinte e oito dirhams" (AL-JWARIZMI, 2009, p.51).

$$\frac{1}{12}x^2 + \frac{7}{12}x = 19$$

$$12.\left(\frac{1}{12}x^2 + \frac{7}{12}x\right) = 19.12$$

$$x^2 + 7x = 228$$

Agora temos a equação que desejávamos, da forma $ax^2 + bx = c$.

> E a metade do número de raízes multiplicado por si mesmo é doze mais um quarto, somamos a este o número (que é duzentos e vinte e oito) e terá duzentos e quarenta mais um quarto. Toma sua raiz que é quinze mais um meio, e subtrai dele a metade do número de raízes (que é três mais um meio) e terá doze, e essa é a quantidade (AL-JWARIZMI, 2009, p.51, 53)

$$\frac{7}{2}.\frac{7}{2} = \frac{49}{4} = 12 + \frac{1}{4}$$

$$12 + \frac{1}{4} + 228 = 240 + \frac{1}{4}$$

$$\sqrt{240 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{961}{4}} = \frac{31}{2} = 15 + \frac{1}{2}$$

$$15 + \frac{1}{2} - \left(3 + \frac{1}{2}\right) = \frac{30 + 1 - 7}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

Logo $x = 12$.

Podemos ainda utilizar a "fórmula" que encontramos ao generalizar o procedimento acima para resolvermos o mesmo problema. De $x^2 + 7x = 228$, que é a equação final do problema, temos:

$$x = -\frac{7}{2} + \frac{\sqrt{7^2 + 4.228}}{2} = -\frac{7}{2} + \frac{\sqrt{49 + 912}}{2} = -\frac{7}{2} + \frac{\sqrt{961}}{2}$$

$$x = -\frac{7}{2} + \frac{31}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

Verificação:

$$x^2 + 7x = 12^2 + 7.12 = 144 + 84 = 228$$

Hoje resolvemos o problema reescrevendo a equação $x^2 + 7x = 288$ como $x^2 + 7x - 288 = 0$ e usando a fórmula. Esta resolução nos dá as duas raízes: $x_1 = 12$ e $x_2 = -19$.

Note que $x_2 = -19$ também é solução, pois,

$$x^2 + 7x = (-19)^2 + 7.(-19) = 361 - 133 = 228$$

4.5 Problema 5: Quadrado mais número igual a raízes ($ax^2 + c = bx$)

> Quinto problema: Divides dez em duas partes, depois multiplica cada uma delas por si mesma, soma os dois resultados e terá cinquenta e oito dirhams. A solução está em colocar uma das partes como a coisa, e a outra como dez menos a coisa, multiplicas dez menos a coisa por si mesmo e terá cem mais o quadrado menos vinte coisas, depois multiplicas a coisa por si mesma e terás o quadrado, depois soma todos, e terá que cem, mais dois quadrados menos vinte coisas é igual a cinquenta e oito dirhams. Separa o cem e os dois quadrados das vinte coisas que são subtraídas, somando-os sobre os cinquenta e oito dirhams, e terá que cem mais dois quadrados é igual a cinquenta e oito dirhams mais vinte coisas. Como queremos um só quadrado, há de pegar a metade do que tens, e é cinquenta dirhams mais um quadrado igual a vinte e nove dirhams e dez coisas. Agora reduz este subtraindo do cinquenta o vinte e nove, e terá vinte e um mais um quadrado igual a dez coisas (AL-JWARIZMI, 2009, p.53).

Em notação atual,

- O problema: Dividir 10 em duas parcelas tais que a soma de seus quadrados é 58.
- A equação: uma parte é x e a outra é $(10 - x)$

$$(x.x) + (10 - x).(10 - x) = 58$$
$$x^2 + 100 - 20x + x^2 = 58$$
$$100 + 2x^2 - 20x = 58$$
$$100 + 2x^2 = 58 + 20x$$
$$\frac{1}{2}.(100 + 2x^2) = \frac{1}{2}.(58 + 20x)$$
$$50 + x^2 = 29 + 10x$$
$$x^2 + 21 = 10x$$

> A metade do número de raízes é cinco, multiplicado por si mesmo é vinte e cinco, o subtraímos o vinte e um (que esta acompanhando o quadrado) e sobra quatro, tomamos sua raiz e é dois, o subtraímos da metade do número de raízes (que é cinco) e terá três, que é uma das partes, e a outra será sete (AL-JWARIZMI, 2009, p.53).

Em notação atual:

$$\frac{10}{2}.\frac{10}{2} = 25$$
$$25 - 21 = 4$$
$$\sqrt{4} = 2$$
$$5 - 2 = 3 \quad e \quad 5 + 2 = 7$$

Assim, uma parte é 3 e a outra é 7. De fato, $3^2 + 7^2 = 9 + 49 = 58$.

Usando a fórmula obtemos também as raízes 3 e 7:

$$x^2 - 10x + 21 = 0$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4(-21)}}{2}$$

$$x = 5 \pm \frac{\sqrt{16}}{2}$$

$$x_1 = 5 + 2 = 3 \quad e \quad x_2 = 5 + 2 = 7$$

4.6 Problema 6: Raízes mais número igual a quadrados ($\boldsymbol{ax^2 = bx + c}$)

> Sexto problema: Um terço de uma quantidade se multiplica por sua quarta parte, e é igual a esse valor acrescentado a vinte e quatro dirhams. A solução está em considerar a quantidade como coisa, depois multiplica um terço da coisa por um quarto da coisa (e é um meio de um sexto do quadrado) e se iguala a coisa mais vinte e quatro dirhams. Depois multiplica um meio de um sexto por doze para fazer inteira tua quantidade, e terá que duzentos e oitenta e oito dirhams mais doze coisas é igual a um quadrado (AL-JWARIZMI, 2009, p.53).

Em notação atual,

- O problema: A terceira parte de um número multiplicada pela sua quarta parte é igual ao mesmo número somado com 24. Qual é o número?
- A equação: Seja *x* a quantidade considerada.

$$\frac{1}{3}x.\frac{1}{4}x = x + 24$$

$$\frac{1}{2}.\frac{1}{6}x^2 = x + 24$$

$$12.\left(\frac{1}{12}x^2\right) = 12.(x + 24)$$

$$x^2 = 12x + 288$$

> E a metade das raízes é seis, e multiplicado por si mesma e somada com duzentos e oitenta e oito é trezentos e vinte e quatro, toma sua raiz (que é dezoito), soma sobre ela a metade do número de raízes (que é seis), e terá vinte e quatro, e essa é a quantidade (AL-JWARIZMI, 2009, p.53).

Novamente podemos expressar a resolução do autor em notação atual, e teremos:

$$\frac{12}{2}.\frac{12}{2} = 36$$

$$36 + 288 = 324$$

$$\sqrt{324} = 18$$

$$18 + 6 = 24$$

De fato,

$$\left(\frac{1}{3}.24\right)\left(\frac{1}{4}.24\right) = 8.6 = 48 = 24 + 24$$

Usando a fórmula para a equação $x^2 - 12x - 288 = 0$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4.1.(-288)}}{2.1}$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 1152}}{2}$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{1296}}{2}$$

$$x_1 = \frac{12 + 36}{2} = 24 \quad e \quad x_2 = \frac{12 - 36}{2} = -12$$

Note que -12 também é solução, pois:

$$\left[\frac{1}{3}(-12)\right].\left[\frac{1}{4}(-12)\right] = (-4).(-3) = 12 = (-12) + 24$$

Os seis problemas apresentados por al-Kwarizmi preparam a resolução de problemas de geometria e cálculos financeiros para divisão de heranças (de acordo com as leis islâmicas). É notável que tudo que conhecemos hoje de resolução de equações deste tipo, tenha sido desenvolvido sem números negativos, sem o zero e sem notação alguma!

5 CONCLUSÃO

Durante o desenvolvimento do trabalho pudemos observar a evolução da Matemática com relação ao universo numérico, desenvolvimento de fórmulas para resolução de problemas e o grande avanço que isto nos proporcionou. A construção do saber foi se dando pouco a pouco; podemos notar isso quando nos deparamos com as resoluções de Al-Kwarizmi, limitadas apenas a números racionais positivos. E com o passar do tempo novas soluções puderam ser adotadas, diante de um novo universo numérico. Outra grande "conquista" foi o uso das notações; para nós, hoje, habituados às notações desde os primeiros anos escolares, achamos a forma textual usada por al-Kwarizmi de difícil compreensão e entendimento. Diversas vezes recorremos à "nossa" notação para entender a descrição do autor.

Surpreendeu-nos o que permanece no ensino da matemática, gerado pela obra de al-Kwarizmi. Hoje ao analisarmos o desenvolvimento das equações estudadas, notamos que das resoluções geométricas apenas a que é representada pela equação $ax^2 + bx = c$ permaneceu. Já das propriedades que foram apresentadas de forma breve, por não ser o foco do trabalho, como quadrado da soma, quadrado da diferença, produto da soma pela diferença, propriedade distributiva redução de termos semelhantes, são todas utilizadas para a resolução de equações e problemas, e apresentadas de forma genérica na maioria dos livros didáticos do oitavo ano escolar. A abordagem de al-Kwarizmi da geometria também se faz presente nos livros didáticos no ensino básico. Ofuscada pela grandiosidade da Álgebra, a parte geométrica desta obra de al-Kwarizmi apresenta conceitos, métodos de cálculo de áreas e volumes, propriedades dos quadriláteros e triângulos, relações métricas no círculo e bons problemas.

Conhecer a evolução dos conteúdos escolares proporciona ao professor mais ferramentas para sua escolha de abordagem. As dificuldades dos alunos na compreensão da Álgebra podem ser minimizadas se conhecemos as dificuldades encontradas em todo o desenvolvimento deste conteúdo, desde al-Kwarizmi até hoje. Também aprendemos que o saber não vem "pronto", é resultado de muitas pessoas e instituições, impulsionado pelas necessidades de cada época. Um dos objetivos de Al-Kwarizmi ao escrever seu livro era instruir as pessoas na partilha de bens, seguindo as regras do Alcorão; por este motivo a última parte do livro é uma coleção de problemas que envolvem heranças.

"El libro de Álgebra" é uma obra rica em conteúdo e saber, tanto que apenas aproximadamente um terço dela foi estudado neste trabalho; dessa forma, fica a sugestão para novos trabalhos: estudar com mais detalhes as propriedades, a parte geométrica e também os problemas de heranças e legados.

REFERÊNCIAS

ABU Ja'far Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi. Disponível em: <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Printonly/Al-Khwarizmi.html>. Acesso em: 07 maio 2012.

AL-JWARIZMI, Mohammed Ibn-Musa. **El libro del Álgebra**. Tradução, introdução e notas de Ricardo Moreno Castillo. Três Cantos, Espanha: Nivola, 2009.

BHASKARA II. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2013. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Bhaskara_II&oldid=34149900>. Acesso em: 7 jul. 2012

CAABA. Mundo Islâmico. Disponível em: <http://www.mundoislamico.com/caaba.htm>. Acesso em: 23 mar. 2012.

CARLOS Magno. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2012. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Carlos_Magno&oldid=34169421>. Acesso em: 15 mar. 2012.

EQUAÇÃO. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2012. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Equa%C3%A7%C3%A3o&oldid=33452402>. Acesso em: 22 dez.2012.

FUNÇÃO Quadrática. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2013. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Fun%C3%A7%C3%A3o_quadr%C3%A1tica&oldid=34084931>. Acesso em: 10 set.2012

SOUS, Rainer. Império Carolíngio. **Mundo educação**. Disponível em: <http://www.mundoeducacao.com.br/historiageral/imperio-carolingio.htm>. Acesso em: 15 mar. 2012a.

SOUS, Rainer. Viking. **História do Mundo**. Disponível em: <http://www.historiadomundo.com.br/viking/>. Acesso em 18 mar. 2012b.

SOUS, Rainer. Árabe. **História do Mundo.** Disponível em: <http://www.historiadomundo.com.br/arabe/>. Acesso em 14 mar. 2012c.