

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Dinâmica Populacional e o Modelo Predador - Presa

Ivo Paulek Junior

Prof. Daniel Norberto Kozakevich, Dr.
Orientador

Florianópolis - SC

2013

Ivo Paulek Junior

Dinâmica Populacional e o Modelo Predador - Presa

Trabalho acadêmico de graduação apresentado à disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso, do Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina.

Prof. Nereu Estanislau Burin

Florianópolis - SC
2013

Esta Monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela portaria 17/CCM/13.:

Prof. Nereu Estanislau Burin, Msc.
Professor da Disciplina

Banca Examinadora:

Prof. Daniel Norberto Kozakevich, Dr.
Orientador

Prof. Sônia Elena Palomino Bean, Dra.

Prof. Márcio Rodolfo Fernandes, Dr.

Agradecimentos

A Deus, acima de tudo.

Aos meus pais, Maria Clarice Sarturi e Ivo Paulek (in memoriam), pelo apoio incondicional e irrestrito, pelo esforço, e pela formação de pessoa e caráter dados, que foram sem dúvidas, fundamentais para conseguir a conclusão de graduação.

A minha namorada Bruna Tajima Silveira e sua família, pelo amor, amizade, dedicação, compreensão e apoio nos momentos mais difíceis dessa caminhada.

Ao meu orientador, Prof. Doutor Daniel Norberto Kozakevich, pela amizade, orientação e paciência durante a elaboração do trabalho, que me conduziram a um maior conhecimento matemático.

Aos meus colegas, Carlos, Marcelo, Julianna, Cláudia, Anderson, Nicélio, Marco Antônio, José Aparecido, Fabrício, Monike, Francilaine, Guilherme, Gio, André e tantos outros que estiverem comigo nessa jornada da graduação.

Ao coordenador do curso, Nereu Estanislau Burin, por todo auxílio durante a graduação.

A banca, que prontamente aceitou o convite e dedicaram seu tempo a leitura e contribuição para o aperfeiçoamento do trabalho.

Aos professores e servidores que me ajudaram durante a graduação, contribuindo para minha formação.

Sumário

Introdução	9
1 Modelos Matemáticos e Dinâmica Populacional	11
1.0.1 Introdução	11
1.0.2 Uso de Modelos - O Evento em Menor Escala	12
1.0.3 Método Científico	12
1.0.4 Modelagem Matemática	13
1.0.5 O Que É A Modelagem Matemática?	13
1.0.6 Passos da Modelagem Matemática	13
1.0.7 Tipos de Modelos	14
1.0.8 Utilizações da Modelagem Matemática	15
1.1 Modelos Matemáticos em Dinâmica Populacional em Populações Isoladas	16
1.1.1 Introdução	16
1.1.2 Dinâmica Populacional	17
1.1.3 Definições Matemáticas Preliminares	18

1.1.4	Modelo de Thomas Malthus	22
1.1.5	Modelo de Pierre Verhulst	25
2	Sistemas de Equações Diferenciais	30
2.1	Sistemas de Equações Diferenciais	30
2.1.1	Sistemas Lineares de Primeira Ordem	31
2.1.2	Sistemas Autônomos	31
2.1.3	Classificação de pontos de equilíbrio em sistemas lineares no plano de fase	32
2.1.4	Classificação da estabilidade dos pontos de equilíbrio	40
2.2	Sistemas de Equações Diferenciais Não - Lineares	40
2.2.1	Relação entre o Traço e o Determinante da Matriz Jacobiana e seus os autovalores	42
3	Modelo Com Interação entre Espécies	45
3.0.2	Interação entre espécies	45
3.1	O Modelo Predador - Presa	46
3.1.1	Analisando a Equação	48
3.1.2	Analisando o Sistema	49
3.1.3	Segundo Modelo	51
3.1.4	Terceiro Modelo	55
3.1.5	Analisando o Sistema	60
3.1.6	Comentários Finais	68

Introdução

Esse trabalho tem como objetivo exibir como a modelagem matemática, em conjunto com as equações diferenciais, auxiliam na análise de problemas que envolvem a dinâmica de populações. O mesmo foi inspirado em um artigo de Eric P. Anapolsky, sobre a análise matemática das interações competitivas entre duas espécies, o modelo predador - presa.

O trabalho está dividido em três capítulos.

No primeiro capítulo, daremos uma abordagem inicial sobre modelagem. O que é, como é feita, quais suas principais características... Também falaremos um pouco sobre os primeiros modelos construídos sobre a dinâmica populacional de espécies isoladas, que surgiram graças aos estudos de Thomas Malthus e Pierre de Verhulst.

No segundo capítulo, vamos exibir alguns conceitos sobre os sistemas de equações diferenciais, Como, por exemplo, sistemas lineares de equações diferenciais, a análise de seus pontos de equilíbrio, sistemas não lineares de equações diferenciais e como relacionamos os estudos nos pontos de equilíbrio dos sistemas lineares e não lineares. O mesmo servirá como uma base teórica para o estudo do modelo predador - presa.

No terceiro capítulo, falaremos sobre o modelo predador - presa. Daremos uma visão sobre o que é, como foi desenvolvido e faremos uma análise dos resultados que Eric P. Anapolsky obteve em seu artigo ao analisar o modelo.

Capítulo 1

Modelos Matemáticos e Dinâmica Populacional

Neste capítulo, introduziremos a idéia de modelagem científica e matemática. Daremos uma noção inicial de o que é, como é feita e como a modelagem ajuda a resolver problemas do cotidiano. Também falaremos sobre os primeiros modelos de dinâmica populacional estudados: O Modelo de Malthus e Modelo de Verhulst

1.0.1 Introdução

O que faz os seres humanos diferentes dos outros seres vivos? Segundo a comunidade científica, o homem, diferentemente de outros animais, tem consciência de que faz parte de um mundo, um universo e busca entendê-lo. Questiona, investiga e estabelece respostas, que são constantemente atualizadas. Quem somos? Para onde vamos? De onde viemos? São alguns desses questionamentos. Essas perguntas específicas estão com respostas pouco precisas, já que dependerá de onde as buscamos. Ciência, filosofia e religião, por exemplo, nos dão respostas bastante díspares entre si. Isso ocorre, principalmente, por causa dos métodos utilizados em cada uma dessas áreas para obter as suas respostas. Cada área de conhecimento usa seus próprios mecanismos para investigar e validar suas teorias. Não é objetivo desse trabalho responder estas perguntas, e tampouco, julgar inválidas as áreas que não usam o método científico como principal. Queremos deixar claro que, a busca do ho-

mem por respostas o levou a desenvolver vários caminhos. Cada um, levando a um destino diferente. E nesse cenário, foi necessário estabelecer algumas maneira e critérios para buscar o destino mais correto. Entrou em cena então, René Descartes, e seu método, considerado um dos precursores do método científico. Através da utilização de um tratamento lógico para a obtenção de respostas, dando uma prioridade racional e investigativa, foi obtido um avanço significativo da ciência, a partir daquele momento. O método cartesiano foi base para o desenvolvimento da modelagem matemática, método abordado nesse trabalho.

1.0.2 Uso de Modelos - O Evento em Menor Escala

Falamos disso para introduzir um dos métodos mais usados para responder as perguntas do homem, desde sua aurora intelectual até os dias de hoje. A modelagem. Segundo o dicionário, modelo é "o que se reproduz ou imita". Assim, a modelagem parte da imitação do objeto de estudo, de uma maneira simplificada. Através do estudo em menor escala, é possível extrair informações do evento em maior escala. Obviamente, isso não pode ser feito sem um rigoroso método de obtenção, análise e estudo dos dados. Que não nos deixe dúvidas, que mostre a partida, o caminho e o destino final. Hoje a obtenção das respostas, é feita através do método científico, proposto por Descartes. E esse será o método utilizado no nosso trabalho.

1.0.3 Método Científico

Método que teve início com as idéias de René Descartes, no seu livro "Discurso do Método" de 1637. Consiste em analisar o evento de maneira, quase que matemática. Primeiro, separamos suas hipóteses iniciais, então, coletamos dados para análise e logo após, comparamos os resultados obtidos com as hipóteses inicialmente formuladas. Assim, dependendo do conteúdo obtido, elas seriam validadas, descartadas ou reelaboradas. Esse método deu origem a modelagem matemática, que, usa método similar de análise de eventos.

1.0.4 Modelagem Matemática

Na busca por respostas a matemática desempenhou um papel fundamental. Muito pelo seu caráter isento, axiomático e lógico. Por essas características, as respostas na matemática só são aceitas após uma rígida análise. Ao longo dos anos, principalmente após a divulgação das idéias de Descartes, a ciência e a matemática ficaram cada vez mais íntimas. Um dos métodos desenvolvidos, após essa parceria, foi: pensar em um exemplo do evento em menor escala, analisá-lo, reconhecer seus padrões matemáticos e então usá-los para achar as respostas das questões estudadas. Ou seja, a junção da modelagem já utilizada, com o método científico e o tratamento matemático dos dados. E a matemática ganhou um nova área, a modelagem.

1.0.5 O Que É A Modelagem Matemática?

Segundo Bassanezi (2002), a Modelagem Matemática é a arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real. Nessa perspectiva, devemos utilizar um método confiável para a elaboração, construção e validação do modelo. Como já vimos anteriormente, o método científico (ou cartesiano) é o adotado.

1.0.6 Passos da Modelagem Matemática

Os passos da modelagem, seguindo esse método são: a) experimentação, b) abstração, c) resolução, d) validação e e) modificação.

Na experimentação, temos as coletas das informações necessárias através de métodos laboratoriais. O tratamento estatístico dessas informações dão confiabilidade nos dados obtidos, é fundamental desde esse momento a presença de um matemático, já que ele detem os conceitos e conteúdos necessários e dará a direção a ser seguida nesse trabalho.

Então teremos a fase de abstração, em que todos os dados obtidos serão modelados matematicamente, através de fórmulas e equações. Nesse estágio é feita a separação das variáveis de estado (que dão a evolução do sistema) e das

váriáveis de controle (que interferem diretamente no sistema), também aqui, formulamos como as variáveis dadas empiricamente se relacionam. Nessa etapa, estabelecemos nossas perguntas e hipóteses acerca o caso a ser estudado.

Na resolução, temos a resolução das equações e fórmulas dadas pela fase de abstração. Elas poderão ser simplificadas para termos um modelo matemático mais simples. Esse trabalho é feito por um matemático, e por tal, pode ser completamente desvinculado da realidade modelada.

A validação é a aceitação ou rejeição do modelo proposto, com base na análise dos dados coletados com os dados obtidos através do modelo na fase de resolução. Nessa fase são consideradas as devidas aproximações dadas a maior ou menor complexidade do sistema, mas deverá obter-se um mínimo de precisão.

Na modificação, ocorre quando os dados obtidos pelo modelo são muito distante dos dados coletados orinalmente, tal que necessitamos alterar ou até mesmo rever todo o modelo elaborado. Geralmente, isso ocorre quando são feitas muitas simplificações no modelo original para o matemático, de tal forma que omite variáveis fundamentais para o sucesso do mesmo.

1.0.7 Tipos de Modelos

Ao falar a palavra modelo, não podemos generalizar. Existem vários tipos de modelo, mesmo para um mesmo evento. A sua utilidade e sua complexidade levam a uma classificação dos modelos gerados na modelagem matemática. Vejamos alguns deles:

Modelo Objeto É um modelo mais geral. Ele acaba por ocultar algumas variáveis para simplificar a situação mas suas variáveis são muito mais estável e homogêneo.

Modelo Teórico É o modelo mais fiel ao fenômeno. Nele, não podemos abrir mão de nenhuma variável ou detalhe, mesmo que pequeno, do evento real. Ganhamos em fidelidade na solução mas, muitas vezes, não há uma solução analítica. Teremos que buscar as soluções numéricas, que são muito mais trabalhosas de obter.

Podemos também classificar o modelo quanto a matemática utilizada nele ou quanto ao fenômeno estudado, vejamos

Modelo Linear e Modelo Não-Linear São modelos em que suas equações básicas, tem essa característica.

Modelo Estático e Modelo Dinâmico Modelo estático é o modelo que representa um momento em que o sistema não muda, já o modelo dinâmico leva em conta as variações de tempo, espaço e estado do sistema.

Modelo Educacional e Modelo Aplicativo O modelo educacional é um modelo baseado em poucas hipóteses e incógnitas e quase sempre temos uma solução analítica para o mesmo. Por isso, é pouco usado para previsões ou estudos mais aprofundados, mas é de grande valia para estudos educacionais. Um exemplo é o sistema predador-presa de Lotka-Volterra, que veremos mais adiante. Já os modelos aplicativos, são baseados em hipóteses reais e com um grande número de incógnitas que geram numerosas equações, ao passo que, apesar de mais difíceis de serem tratadas, elas são mais adequadas e precisas do evento.

Modelo Estocástico e Modelo Determinístico Modelos determinísticos são modelos que se supõem conhecidas todas as variáveis, de tal forma que podemos prever precisamente o futuro do sistema. Já os modelos estocásticos, prevêm o futuro do sistema em termos de probabilidade de acontecimentos.

1.0.8 Utilizações da Modelagem Matemática

Historicamente, apenas a Física e as Engenharias, utilizavam conceitos matemáticos para resolver e embasar suas questões. As ciências humanas e naturais utilizavam a linguagem natural para externar seus conceitos e resolver seus questionamentos. Com isso, elas frequentemente eram alvos de ambiguidades, de interpretações equivocadas e de distorções nas suas teorias. A partir do momento em que o método cartesiano foi adotado, tivemos uma grande melhora nessa situação. A matemática passou a ser adotada, mesmo que "disfarçada" e começou a ser vista com outros olhos.

Nas ciências atuais, vemos um quadro bem positivo para a matemática. Cada vez mais, em várias áreas de pesquisa, vemos uma busca por respostas

nos seus métodos. Se não respostas, modelos que indiquem o caminho dela. Isso levou a um avanço expressivo da matemática e na própria ciência, de tal forma que hoje, algumas teorias são aceitas ou rejeitadas com base em seu modelo matemático. A teoria matemática hoje, consiste em um grande trunfo para as outras ciências. Atualmente, a matemática nos permite modelar, analisar, entender e prever fenômenos de todo e qualquer tipo. As equações diferenciais, em especial, são usadas em quase todos os fenômenos físicos, químicos, biológicos, sociais, etc... Os fenômenos demográficos e populacionais são alguns deles, nos quais vamos nos aprofundar agora.

1.1 Modelos Matemáticos em Dinâmica Populacional em Populações Isoladas

1.1.1 Introdução

Entende-se por dinâmica populacional, o estudo da variação em vários tempos e espaços das densidades e valores absolutos de uma população. Queremos com esse estudo, por exemplo, buscar fatores que interferem nesses dados, prever o crescimento ou o decréscimo da população, ver como esse crescimento ou decréscimo se comporta quando há interação de espécies, etc.

O primeiro estudo divulgado nessa área, foi do economista inglês Thomas Malthus no ano de 1798, em seu artigo "An Essay on the Principle of Population as it Affects the Future Improvement of Society". Para o modelo de Malthus, a população mundial cresceria de uma forma exponencial, enquanto os recursos de sobrevivência cresceria de uma forma aritmética. Porém, Malthus não considerou que logo a população teria uma limitação de recursos e por isso, tenderia a se manter mais ou menos estável.

Coube ao matemático belga Pierre Verhulst, por volta de 1838, apresentar um modelo que incluísse esse detalhe. Ele argumentou em seu modelo que, o meio em que a população vive tem uma capacidade de suportar apenas um certo número máximo de membros da sua população, com seus recursos de sobrevivência. De tal forma que ele teria uma população que tenderia a ficar fixa nesse número, o próprio meio acabaria de limitar a população. Esse modelo é aceito como o mais correto biologicamente, já que não haveria como

manter um crescimento exponencial, levando em conta o próprio processo de reprodução e os recursos do meio. No entanto, ele serve para modelar algumas espécies em um curto espaço de tempo.

1.1.2 Dinâmica Populacional

Dinâmica populacional é o estudo da variação em vários tempos e espaços das densidades e valores absolutos de uma população. A biologia é uma das principais áreas que tem grande interesse nesse estudo. Por exemplo, nos estudos das populações em ecossistemas com várias espécies interagindo entre si, no estudo das populações de espécies com risco de extinção, no estudo do controle de pragas na agricultura, etc. Outro grande interesse, é obter informações populacionais de nós mesmos, seres humanos.

Essas informações são de grande valor político e ambiental. A partir do qual, grandes cidades fazem (ou deveriam fazer) seu planejamento urbano, levando em conta os recursos naturais do meio em que está estabelecida, da população atual e da população que a cidade terá no futuro. Outra aplicação dos dados é para calcular o fator previdenciário, que calcula quanto um cidadão receberá quando se aposentar. Através de análise desses dados, constatamos que hoje a população brasileira está envelhecendo e crescendo em um ritmo mais lento que nas últimas quatro décadas.

Esses são alguns dos interesses que motivaram estudos nessa área.

Vamos agora definir conceitos, que serão utilizados no decorrer desse trabalho:

População Definimos população como um agrupamento de indivíduos da mesma espécie.

Taxa de Natalidade A taxa de natalidade é o valor absoluto de nascimento em uma população, em um determinado intervalo de tempo.

Taxa de Mortalidade A taxa de mortalidade é o valor absoluto de mortes em uma população, em um determinado intervalo de tempo.

Taxa de Crescimento A taxa de crescimento da população é o valor dado pela diferença entre a taxa de natalidade e a taxa de mortalidade.

1.1.3 Definições Matemáticas Preliminares

Antes de iniciar o estudo matemático das duas equações, faz-se necessário introduzir algumas definições e conceitos.

Taxas de Variações

Suponha que temos duas quantidades desconhecidas x e y . Sendo que o valor da quantidade y depende do valor da quantidade x . Ou seja, temos uma função $f(x) = y$. Se x variar de x_1 para x_2 , então a variação de x será (também chamada de incremento de x).

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

assim, a mudança corresponde em y é

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

O quociente entre essas duas mudanças

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

é denominada *taxa de variação média de y em relação a x* .

Caso queremos aproximar a taxa de variação média em intervalos cada vez maiores, fazendo x_2 cada vez mais próximo de x_1 , e fazendo Δx cada vez mais próximo de 0. O limite dessas taxa de variações médias é a chamada de *taxa de variação instantânea de y com relação a x* . Essa taxa é dada pelo limite:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Definição 1 *Considere o deslocamento de um corpo de um lugar x_1 para outro x_2 . Suponha que ele estava em x_1 no tempo t_1 e em x_2 no tempo t_2 . Assim, seu deslocamento médio é dado pela taxa de variação*

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Caso queremos seu deslocamento instantâneo,

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Fisicamente, a taxa de deslocamento médio e instantâneo do corpo é denominada velocidade média e velocidade instantânea, respectivamente.

Definição 2 Considere a função $x = x(t)$ que dá o valor de uma população no tempo t . Assim, a variação do tamanho da população entre o tempo inicial t_1 e final t_2 é $\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$ e a taxa de variação da população é dada por:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

E a taxa de variação instantânea é dada por

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Derivada

O conceito de derivada está relacionado com a taxa de variação instantânea de uma função. Função que está presente em muitos estudos de hoje, como: a taxa de crescimento econômico do país, a taxa de mortalidade infantil, a taxa de crescimento populacional e por isso, temos a importância do conhecer sua variação instantânea em um dado momento. Essa taxa de variação é dada pelo cálculo da derivada da função no ponto dado.

Definição 3 Se uma função f é definida em um aberto I que contém x_0 , chamamos de derivada de f no ponto x_0 ao limite:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

se ele existir e for finito.

A notação para a derivada da função f no ponto x_0 é dada por:

$$f'(x_0) \text{ ou } \frac{df}{dx}(x_0)$$

Geometricamente, a derivada é a inclinação da reta tangente a função f no ponto x_0 .

Equações Diferenciais Ordinárias

Uma Equação Diferencial Ordinária, (ou EDO) é uma equação que envolve uma função e suas derivadas. Quando trabalhando com funções e suas taxas de variação, muitas vezes encontramos uma equação diferencial. Nos dias de hoje, a maioria dos modelos matemáticos envolve algum tipo de equação diferencial, sendo grande parte deles advindo de problemas do nosso cotidiano.

Definição 4 *Uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) é uma equação da forma*

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^n(x)) = 0$$

envolvendo uma função incógnita $y = y(x)$ e suas derivadas ou suas diferenciais. x é a variável independente, y é a variável dependente e o símbolo $y(n)$ denota a derivada de ordem n da função $y = y(x)$.

Exemplo 1 $y' = 15x^2$

Temos que as funções $y = 5x^3 + C$ com C uma constante, são soluções para a equação acima. Assim, denominamos a solução da equação diferencial ordinárias, as funções que satisfazem a equação dada.

Exemplo 2 $y'' = 12x$

Que admite a solução $y = 2x^3 + C_1x + C_2$

Exemplo 3 $y'' = 0$

Que admite as soluções $y = 3x$, $y = 4x$, $y = 135x$, e uma infinidade de soluções.

Vamos agora conhecer um tipo de equação diferencial que aparecerá no nosso trabalho:

Definição 5 *Uma Equação Diferencial Separável, é um equação da forma:*

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$

com $h(y) \neq 0$.

Para resolver essa equação, basta reescrever na forma

$$h(y)dy = g(x)dx$$

e então integrar ambos os lados

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx$$

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx$$

Exemplo 4 *Resolva a equação*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

Reescrevendo a equação:

$$xdx = ydy$$

Integrando ambos os lados:

$$\int xdx = \int ydy$$

Assim obtemos

$$\frac{x^2}{2} + C_1 = \frac{y^2}{2} + C_2$$

Reunindo as constantes e isolando y obtemos:

$$x^2 - y^2 = C$$

E esta relação satisfaz a equação dada.

1.1.4 Modelo de Thomas Malthus

A partir de agora, vamos estudar a parte matemática dos modelos de crescimento citados anteriormente, começando pelo o modelo de Thomas Malthus. Esse modelo, foi o primeiro a tentar prever o comportamento do crescimento das populações. Vamos construí-lo a partir de agora.

Considere uma função $x = f(t)$, que nos dá um valor da população x em um tempo t . Lembrando que temos $t > 0$. Temos também que a população é isolada e que as taxas de mortalidade e natalidade são proporcionais a própria população.

Assim temos a taxa de variação do crescimento dada por:

$$\frac{dx(t)}{dt} = (n - m)x(t)$$

Com $n > 0$ sendo a taxa de natalidade da população e $m > 0$ sendo a taxa de mortalidade da população. Uma análise básica aqui nos diz que se $m > n$ a população decresce (temos mais mortes que nascimentos) e se $n > m$ a população cresce (temos mais nascimentos que mortes).

Fazendo $k = n - m$ temos a equação:

$$\frac{dx(t)}{dt} = kx(t) \quad (1.1)$$

Que é a equação proposta por Malthus, uma equação diferencial ordinária. O que ela nos diz é que a taxa de crescimento populacional é proporcional a população. Assim, quanto maior for a população, mais ela crescerá.

Vamos agora extrair mais informações dessa equação. Para resolvê-la, podemos transformá-la em um Problema de Valor Inicial:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = kx(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Com x_0 sendo a população no instante $t = 0$.

Como temos uma equação diferencial separável, podemos resolvê-la integrando ambos os lados da igualdade:

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

$$\frac{dx}{x} = kdt$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int kdt$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \int kdt$$

$$\ln|x| + C_1 = kt + C_2$$

$$\ln|x| = kt + C_2 - C_1$$

Fazendo $C_2 - C_1 = C$:

$$\ln|x| = kt + C$$

Resolvendo a equação exponencial, se

$$\log_e|x| = kt + C$$

então pela definição de logaritmo

$$|x| = e^{kt+C}$$

E assim $x > 0$.

$$x = e^{kt+C} = e^{kt} \cdot e^C$$

Colocando $e^C = A$, com A constante.

$$x = Ae^{kt}$$

Note que

$$x(0) = Ae^{k \cdot 0} = Ae^0 = A$$

Assim, com $x = x(t)$ e $A = x(0) = x_0$ chegamos na solução geral:

$$x(t) = x_0 e^{kt} \tag{1.2}$$

Analisando essa solução, lembrando que $t > 0$:

i) Se $k > 0$, então $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \infty$ e a população cresce indefinidamente.

ii) Se $k < 0$, então $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ a população decresce, tendendo a extinção.

iii) Se $k = 0$, então $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_0$ a população permanece constante.

Mas, estudos posteriores a divulgação do trabalho de Malthus, mostraram que seu modelo contém algumas inconsistências. Por exemplo, não há nenhum meio conhecido que suporte o crescimento exponencial previsto pela equação, quando a taxa de crescimento é positiva. Mesmo fornecendo bons resultados a curto prazo, ela acaba ficando irreal a partir de um determinado tempo.

A parte desses fatos, temos um modelo razoável para um primeiro estudo de dinâmica populacional.

1.1.5 Modelo de Pierre Verhulst

Vimos anteriormente que, se $k > 0$ (taxa de crescimento da população), a população tenderia a crescer infinitamente. Diante dessa inconsistência, em 1838 o matemático belga Pierre Verhulst propôs uma modificação no modelo de Malthus. Como não há um ambiente que consiga manter o crescimento exponencial de uma população, Verhulst propôs a existência de uma população limite L suportada pelo mesmo. Levando essa informação em conta, o crescimento não seria constante. Mas dependeria do valor da população em cada instante t observado. Observou também que a população tenderia a aumentar, quando o seu valor absoluto estava abaixo dessa capacidade crítica, e diminuir, quando o valor da população estivesse acima da capacidade crítica. Partindo dessas informações, introduziu novo fator na equação de Malthus, que freasse o crescimento populacional conforme a população crescia.

Vamos ver agora como foi feita essas modificações. Partindo da equação de Malthus:

$$\frac{dx(t)}{dt} = kx(t)$$

No seu modelo, o crescimento k é uma função afim g do valor da própria população, e não constante, como alegou Malthus. Assim, teremos a equação:

$$\frac{dx(t)}{dt} = g(x)x(t)$$

Precisamos de uma função g que cumpra as novas hipóteses dadas por Verhulst. Considerando $x(t)$ o valor da população, L a população limite que o meio suporta e $g(x)$ o crescimento da população:

Se $x(t) > L$ então $g(x) < 0$.

Se a população é maior que a capacidade limite do meio, então o seu crescimento deverá ser negativo e ela deverá diminuir.

Se $x(t) < L$ então $g(x) > 0$.

Se a população é menor que a capacidade limite do meio, então o seu crescimento deverá ser positivo e ela deverá aumentar.

Uma função crescimento g que atende esse requisito é:

$$g(x) = k - \frac{kx(t)}{L}$$

Pois se:

$$x(t) > L \Rightarrow \frac{kx(t)}{L} > k \text{ e } g(x) < 0.$$

e

$$x(t) < L \Rightarrow \frac{kx(t)}{L} < k \text{ e } g(x) > 0$$

Assim, teremos

$$\frac{dx(t)}{dt} = g(x)x(t)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \left(k - \frac{kx(t)}{L}\right)x(t)$$

Lembrando que $x(t) = x$:

$$\frac{dx}{dt} = (k - \frac{kx}{L})x$$

$$\frac{dx}{dt} = (kx - \frac{kx^2}{L})$$

$$\frac{dx}{dt} = kx(1 - \frac{x}{L}) \tag{1.3}$$

Vamos achar a solução geral para essa equação. Note que ela também é uma Equação Diferencial Separável, assim podemos integrar ambos os lados

$$\frac{dx}{dt} = kx(1 - \frac{x}{L})$$

$$\frac{dx}{x(1-\frac{x}{L})} = kdt$$

$$\int \frac{dx}{x(1-\frac{x}{L})} = \int kdt$$

Para calcular a integral do lado esquerdo da igualdade, vamos recorrer ao método das frações parciais. Primeiro vamos desenvolver a expressão

$$\frac{1}{x(1-\frac{x}{L})} = \frac{1}{(x-\frac{x^2}{L})} = \frac{1}{(\frac{Lx-x^2}{L})} = \frac{L}{Lx-x^2} = \frac{L}{x(L-x)}$$

e então, pelas frações parciais

$$\frac{L}{x(L-x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{L-x}$$

Assim, integrando os dois lados

$$\int (\frac{1}{x} + \frac{1}{L-x}) dx = \int kdt$$

$$\int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{L-x} dx = \int k dt$$

$$\ln|x| + c_1 + (-\ln|L-x| + c_2) = kt + c_3$$

$$\ln|x| + c_1 - \ln|L-x| + c_2 = kt + c_3$$

$$\ln|x| - \ln|L-x| = kt + c_3 - c_1 - c_2$$

Colocando $C = c_3 - c_1 - c_2$

$$\ln|x| - \ln|L-x| = kt + C$$

Usando a propriedades de logaritmos

$$\ln\left|\frac{x}{L-x}\right| = kt + C$$

e

$$\ln\left|\frac{L-x}{x}\right| = -kt - C$$

Resolvendo a equação exponencial, se

$$\log_e\left|\frac{L-x}{x}\right| = -kt - C$$

então pela definição de logaritmo

$$\left|\frac{L-x}{x}\right| = e^{-kt-C} = e^{-C} e^{-kt}$$

Explicitando x :

$$\frac{L-x}{x} = \frac{L}{x} + \frac{-x}{x} = \frac{L}{x} - 1 = Ae^{-kt}$$

Assim:

$$\frac{L}{x} = Ae^{-kt} + 1$$

E temos a solução geral:

$$x = \frac{L}{Ae^{-kt} + 1}$$

onde $A = \pm e^{-C}$.

Para achar o valor de A, lembramos que $x = x_0 = x(0)$ Assim, quando $t = 0$, temos:

$$\frac{L-x_0}{x_0} = Ae^0 = A$$

Então temos como solução geral:

$$x(t) = \frac{L}{1 + \left(\frac{L-x_0}{x_0}\right)e^{-kt}} \quad (1.4)$$

Como podemos ver, quando t vai para o infinito, a solução geral converge para L . O que era o esperado. Esse segundo modelo, funciona melhor que o modelo de Malthus e hoje é um dos mais utilizados para modelar populações isoladas.

Capítulo 2

Sistemas de Equações Diferenciais

Neste capítulo, vamos introduzir os sistemas de equações diferenciais, que servirá de embasamento teórico para nosso próximo capítulo.

2.1 Sistemas de Equações Diferenciais

Consideremos uma equação diferencial de segunda ordem, homogênea de coeficientes constantes na variável x , dependente de t .

$$x'' + px' + qx = 0$$

Vamos fazer uma mudança de variáveis com $x' = y$ e $x'' = y'$ para convertê-la em um sistema linear de duas equações.

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -py - qx \end{cases}$$

Assim, a resolução de uma equação diferencial qualquer, converte-se na resolução de um sistema linear de duas equações de primeira ordem.

2.1.1 Sistemas Lineares de Primeira Ordem

Seja um sistema de primeira ordem

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + f_1(t) \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + f_2(t) \\ \dots \\ x'_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + f_n(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

Dizemos que o sistema é homogêneo se e somente se as funções $f_i, i = 1, \dots, n$ são identicamente nulas. Caso contrário, o sistema é dito não - homogêneo.

Podemos escrever qualquer sistema linear de n equações de primeira ordem sob forma matricial. Basta considerar $\mathbf{A}(t) = [a_{ij}]$ a matriz dos coeficientes, definir os vetores colunas $\mathbf{x} = [x_i]$ e $\mathbf{f}(t) = [f_i(t)]$. Assim, escrevemos o sistema na seguinte forma matricial:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) \quad (2.2)$$

2.1.2 Sistemas Autônomos

Seja o sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases} \quad (2.3)$$

em que a variável livre, t , não aparece explicitamente. Um sistema com essa característica é denominado **sistema autônomo**. Definimos **ponto crítico**, ou **ponto de equilíbrio** do sistema autônomo, como o ponto (x_*, y_*) , tal que

$$f(x_*, y_*) = g(x_*, y_*) = 0$$

Ou seja, o ponto em que as derivadas do sistema anulam-se.

Sistemas Autônomos Lineares

Um sistema com a forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases} \quad (2.4)$$

é chamado de sistema autônomo linear. Matricialmente escrevemos:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Em nosso trabalho, estaremos interessados em analisar o comportamento das trajetórias nas proximidades do ponto de equilíbrio.

2.1.3 Classificação de pontos de equilíbrio em sistemas lineares no plano de fase

Consideremos um sistema linear homogêneo, de coeficientes constantes, de duas equações diferenciais na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Queremos achar os pontos de equilíbrio do sistema, ou seja, os pontos onde temos

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = ax_1 + bx_2 = 0 \\ \frac{dx_2}{dt} = cx_1 + dx_2 = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

É fácil de ver que o ponto $(x_1, x_2) = (0, 0)$, é um ponto de equilíbrio. Nosso interesse é saber como as soluções se comportam nas proximidades desse ponto. Sabemos que a solução geral de um sistema linear de duas equações diferenciais de primeira ordem pode ser escrita

$$x = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 \quad (2.6)$$

Onde λ_1 e λ_2 são os autovalores próprios da matriz dos coeficientes das equações e \vec{v}_1 e \vec{v}_2 são os autovetores associados aos autovalores. Vamos agora analisar o comportamento da solução no ponto de equilíbrio $(0, 0)$ usando essas expressões. Faremos uma análise qualitativa da solução no plano de fases, que não é dado em x_1 e x_2 em função de t , mas de x_1 em função de x_2 .

O ponto de equilíbrio será o centro dos eixos x_1 e x_2 . O caminho percorrido no plano de fases pela solução, será denominada *trajetória*.

Vamos analisar os casos possíveis em função dos valores dos autovalores da matriz dos coeficientes.¹

Autovalores Reais, Distintos e de Mesmo Sinal

$$1 - \lambda_1 < \lambda_2 < 0$$

Lembrando que a solução geral é dado por

$$x = c_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2$$

Assim, primeiro vamos analisar o que acontece com a solução geral quando t tende para o infinito. Como ambas as exponenciais tem expoente negativo, temos que as parcelas tenderão para zero. Ou seja, as soluções se aproximam do ponto de equilíbrio conforme o tempo aumenta.

Note que, como $\lambda_1 < \lambda_2$, a trajetória deverá ser dada pelo direção do autovetor \vec{v}_2 , pois a parcela $c_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1$ tende muito mais rápido para o ponto

¹Gráficos retirados da referência [11]

de equilíbrio que $c_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2$, assim, em tempos muito elevados ela poderá ser desprezada e levamos em conta apenas a parcela $c_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2$.

Ou seja,

$$t \rightarrow \infty \text{ então } x \rightarrow c_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2$$

Veja o plano de fases abaixo:

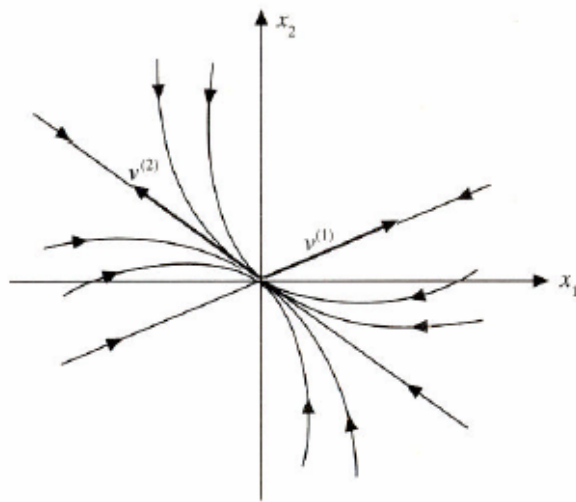


Figura 2.1: Nó Impróprio

Nessa situação, em que *todas as trajetórias seguem a mesma direção assintótica nas proximidades do ponto de equilíbrio*, ele é denominado *nó impróprio*.

$$2 - \lambda_1 < \lambda_2 > 0$$

Essa situação é o oposto ao caso anterior, agora quando $t \rightarrow \infty$, temos que $x \rightarrow \infty$. Ou seja, para tempos elevados as trajetórias se afastam do ponto de equilíbrio. Elas só estarão próximas do ponto de equilíbrio, quando $t \rightarrow -\infty$. As trajetórias são as mesmas do caso anterior, apenas mudando o seu sentido (elas saem do ponto de equilíbrio, e não vão em direção dele, como no caso anterior).

Autovalores Reais, Distintos e de Sinal Diferente

$$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$$

$$x = c_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2$$

Vamos analisar as trajetórias nesse caso,

$$\begin{aligned} t \rightarrow +\infty \text{ então } x &\rightarrow c_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 \rightarrow +\infty \\ t \rightarrow -\infty \text{ então } x &\rightarrow c_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2 \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Assim, quando $t \rightarrow +\infty$, as trajetórias se afastam do ponto de equilíbrio seguindo a direção de \vec{v}_1 . Quando $t \rightarrow -\infty$ as trajetórias se afastam do ponto de equilíbrio seguindo a direção de \vec{v}_2 .

Veja o plano de fases.

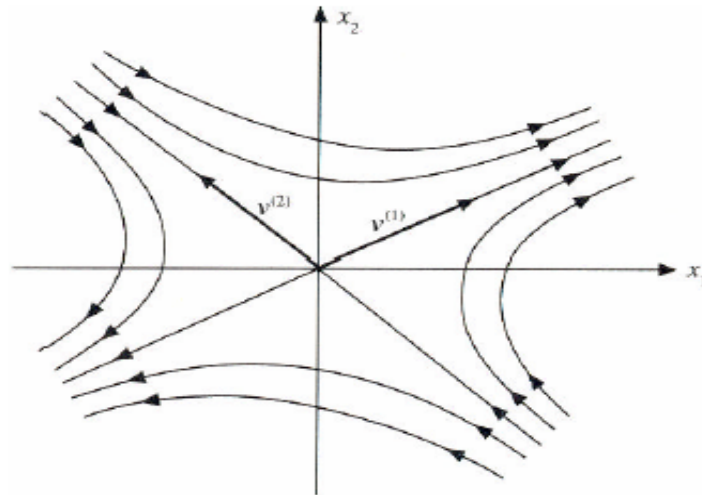


Figura 2.2: Ponto de Sela

Esse ponto de equilíbrio é denominado *ponto de sela*. Esse nome é dado pois em planos de fase tridimensionais, as trajetórias lembram a forma da sela de um cavalo.

Autovalores Reais e Iguais

Caso I - Existem dois Autovetores Linearmente Independentes

Nesse caso, a solução geral é dada por

$$x = c_1 e^{\lambda t} \vec{v}_1 + c_2 e^{\lambda t} \vec{v}_2 = e^{\lambda t} (c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2)$$

E $(c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2)$ é um vetor em que a direção será determinada pelas constantes c_1 e c_2 (condições iniciais do problema). O sentido da trajetória dependerá do sinal de λ .

Se $\lambda < 0$:

$$\begin{aligned} t \rightarrow +\infty \text{ então } x &\rightarrow 0 \\ t \rightarrow -\infty \text{ então } x &\rightarrow \infty \end{aligned}$$

As trajetórias se aproximam do ponto de equilíbrio conforme t aumenta. Veja o plano de fases:

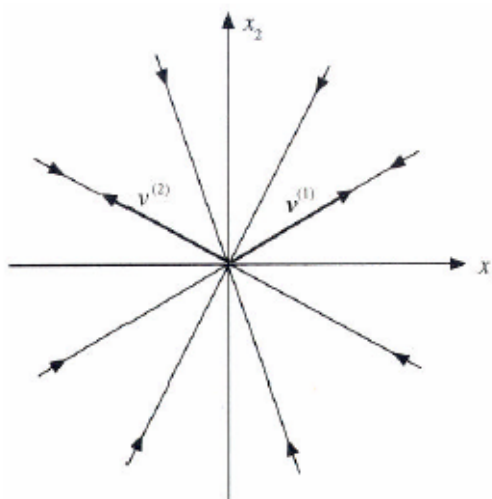


Figura 2.3: Nó Próprio

Aqui, como *cada trajetória segue uma direção distinta nas proximidades do ponto de equilíbrio*, nomeamos o mesmo como *nó próprio*.

Se $\lambda > 0$, o plano de fases teria a mesma forma, apenas mudando o fato que as trajetórias iriam para longe do ponto de equilíbrio (sentido oposto).

Caso II - Não Existem dois Autovetores Linearmente Independentes

Assim, recorreremos a um autovetor genérico para construirmos a solução geral:

$$x = c_1 e^{\lambda t} \vec{v} + c_2 e^{\lambda t} (\vec{u} + t\vec{v}) = e^{\lambda t} (c_1 \vec{v} + c_2 \vec{u} + c_2 t \vec{v})$$

Caso $\lambda < 0$

$$\begin{aligned} t \rightarrow +\infty \text{ então } x &\rightarrow e^{\lambda t} c_2 t \vec{v} \text{ e } x \rightarrow 0 \\ t \rightarrow -\infty \text{ então } x &\rightarrow \infty \end{aligned}$$

Assim, para tempos elevados, as trajetórias se aproximam-se do ponto de equilíbrio, seguindo a direção do vetor v . Veja o plano de fase:

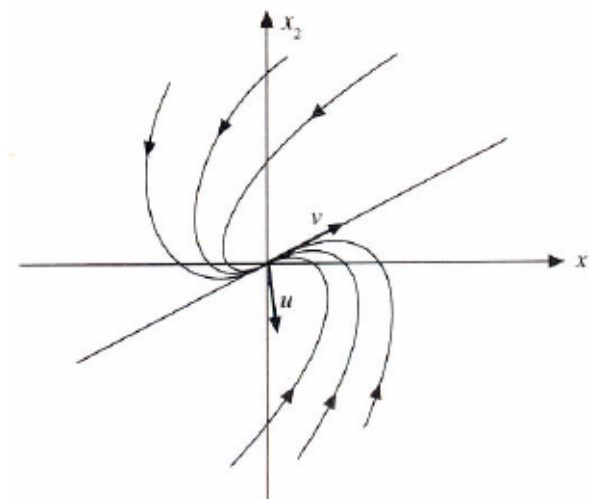


Figura 2.4: Nó Impróprio

Assim, o plano de equilíbrio é chamado de *nó impróprio*.

Se $\lambda > 0$, o sentido das trajetórias seria inverso.

Autovalores Complexos Conjugados

Nesse caso, $\lambda = \alpha \pm i\beta$, $\vec{v} = \vec{\alpha} \pm i\vec{\beta}$, e a solução geral será:

$$x = c_1 e^{\lambda t} [\cos(\beta t) \vec{\alpha} - \text{sen}(\beta t) \vec{\beta}] + c_2 e^{\lambda t} [\cos(\beta t) \vec{\alpha} - \text{sen}(\beta t) \vec{\beta}] = e^{\lambda t} \{ [c_1 \cos(\beta t) + c_2 \text{sen}(\beta t)] \vec{\alpha} + [-c_1 \text{sen}(\beta t) + c_2 \cos(\beta t)] \vec{\beta} \}$$

Agora, temos dois casos a considerar:

i) Os auto vetores tem a parte real nula, $\alpha = 0$

A solução é então a expressão

$$x = [c_1 \cos(\beta t) + c_2 \text{sen}(\beta t)] \vec{\alpha} + [-c_1 \text{sen}(\beta t) + c_2 \cos(\beta t)] \vec{\beta}$$

Como os vetores $\vec{\alpha}$ e $\vec{\beta}$ são multiplicados por coeficientes que assumem valores periódicos no tempo t , a solução x não assume qualquer comportamento específico quando t tende para $+\infty$ ou $-\infty$. Há momentos em que a solução se aproxima do ponto de equilíbrio, para logo depois se afastar, com esse comportamento repetindo-se infinitamente. Assim, teremos o plano de fases abaixo:

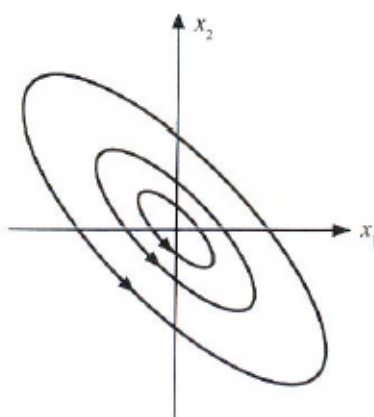


Figura 2.5: Centro

E agora designamos o ponto de equilíbrio de *centro*, já que as trajetórias "orbitam" em seu redor.

ii) Os auto vetores tem a parte real não nula, $\alpha \neq 0$

Nesse caso, a solução geral fica

$$x = e^{\lambda \alpha t} [c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t)] \vec{\alpha} + [-c_1 \sin(\beta t) + c_2 \cos(\beta t)] \vec{\beta}$$

Se $\alpha < 0$, temos que:

$$t \rightarrow +\infty \text{ então } x \rightarrow 0$$

$$t \rightarrow -\infty \text{ então } x \rightarrow \infty$$

As trajetórias ainda "orbitam" em torno do ponto crítico, mas agora, elas aproximam-se cada vez mais a medida que o tempo aumenta, formando uma espiral. O plano de fases ficaria assim:

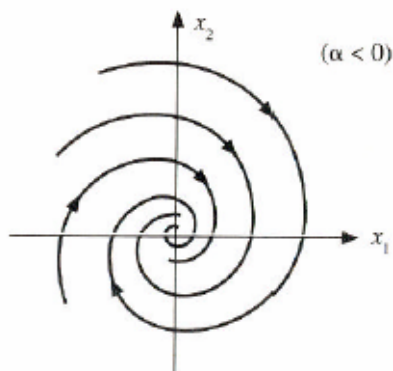


Figura 2.6: Foco

Agora, o ponto equilíbrio é denominado *foco*.

Se $\alpha > 0$, o sentido da trajetória seria oposto.

2.1.4 Classificação da estabilidade dos pontos de equilíbrio

Um ponto de equilíbrio é *estável* se, para qualquer condição inicial na sua vizinhança, a trajetória da solução correspondente permanecer *próxima* desse ponto. Um ponto de equilíbrio é *assintoticamente estável*, se for estável e a trajetória se aproximar do ponto quando $t \rightarrow +\infty$. Já, um ponto de equilíbrio que não seja *estável* é chamado de *instável*.

2.2 Sistemas de Equações Diferenciais Não - Lineares

A análise do comportamento da solução no plano de fase, nas proximidades pontos de equilíbrio de um sistema linear, é relativamente simples. Assim, uma forma de abordarmos um sistema não linear seria através de uma aproximação em um sistema linear. Esse processo é chamado de **linearização**.

Considere o sistema não linear, cujo ponto de equilíbrio é $(0, 0)$.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases} \quad (2.7)$$

A linearização em torno do ponto de equilíbrio é baseada na expansão em série de Taylor de $P(x, y)$ e de $Q(x, y)$ em torno do ponto $(0, 0)$.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(0, 0) + \frac{\partial P}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial P}{\partial y}(0, 0)y + R_P(x, y) \approx \frac{\partial P}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial P}{\partial y}(0, 0)y \\ \frac{dy}{dt} = Q(0, 0) + \frac{\partial Q}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial Q}{\partial y}(0, 0)y + R_Q(x, y) \approx \frac{\partial Q}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial Q}{\partial y}(0, 0)y \end{cases} \quad (2.8)$$

$R_P(x, y)$ e $R_Q(x, y)$ são termos desprezíveis desde que (x, y) esteja suficientemente próxima de $(0, 0)$. Ou, rigorosamente, $R_P(x, y)$ e $R_Q(x, y)$ satisfazem a condição:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{R_P(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{R_Q(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

Assim sendo, se queremos apenas analisar o que acontece nas proximidades do ponto de equilíbrio, podemos "substituir" nosso sistema não linear por seu *sistema linear associado*, dado por:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial P}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial P}{\partial y}(0,0)y \\ \frac{dy}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial Q}{\partial y}(0,0)y \end{cases} \quad (2.9)$$

Classificação de pontos de equilíbrio em sistemas não lineares no plano de fase

Vejamos agora como se associa os autovalores ($\lambda_1 e \lambda_2$) da matriz de coeficientes do sistema linear associado e classificação do ponto de equilíbrio do sistema não linear original:

- Se λ_1 e λ_2 não são reais e iguais ou não são imaginários puros, as trajetórias do sistema linear associado em $(0,0)$ são do mesmo tipo e tem a mesma estabilidade que as do sistema não linear.
- Se λ_1 e λ_2 são reais e iguais, então $(0,0)$ é um nó ou um foco do sistema não linear. Se $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$, o ponto é assintoticamente estável. Se $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, o ponto é instável.
- Se λ_1 e λ_2 são imaginários puros, então $(0,0)$ é um centro ou um foco do sistema não linear e a sua estabilidade é indeterminada (pode ser estável, instável ou assintoticamente estável).

As tabelas abaixo resume os casos mencionados:

Tabela 1 - Autovalores Reais

λ_1, λ_2	Sistema Linear Associado	Sistema Não Linear
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Nó próprio instável	nó próprio instável
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Nó próprio estável	nó próprio estável
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	Ponto de sela instável	Ponto de sela instável
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Nó próprio ou impróprio instável	Nó próprio ou impróprio ou foco instável
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Nó próprio ou impróprio assintoticamente estável	Nó próprio ou impróprio ou foco assintoticamente estável

Tabela 2 - Autovalores complexos

$\lambda = \alpha \pm i\beta$	Sistema Linear Associado	Sistema Não Linear
$\alpha > 0$	Foco instável	Foco instável
$\alpha < 0$	Foco assintoticamente estável	Foco assintoticamente estável
$\alpha = 0$	Centro estável	Centro ou foco de estabilidade indeterminada

2.2.1 Relação entre o Traço e o Determinante da Matriz Jacobiana e seus os autovalores

Seja a matriz

$$E = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Sabemos que o traço da matriz E é dado por:

$$\tau(E) = A + D$$

E seu determinante é dado por:

$$\text{Det}(E) = AD - BC$$

Vamos calcular seus autovalores através do polinômio característico:

$$\text{Det}(E - \lambda I) = 0$$

$$E - \lambda I = \begin{pmatrix} A - \lambda & B \\ C & D - \lambda \end{pmatrix}$$

Assim,

$$\text{Det}(E - \lambda I) = (A - \lambda)(D - \lambda) - BC = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda(A + D) + AD - BC = 0$$

E temos os autovalores:

$$\lambda = \frac{A+D}{2} \pm \frac{\sqrt{(-A-D)^2 - 4(AD-BC)}}{2}$$

$$\lambda = \frac{A+D}{2} \pm \frac{\sqrt{A^2 + 2AD + D^2 - 4AD - 4BC}}{2}$$

$$\lambda = \frac{A+D}{2} \pm \frac{\sqrt{(A+D)^2 - 4(AD-BC)}}{2}$$

$$\lambda = \frac{A+D}{2} \pm \frac{\sqrt{\tau(E)^2 - 4\text{Det}(E)}}{2}$$

Assim, teremos um autovalor complexo caso:

$$\sqrt{\tau(E)^2 - 4\text{Det}(E)} < 0$$

$$\tau(E)^2 - 4\text{Det}(E) < 0$$

E o valor de sua parte real é dada por:

$$\frac{A+D}{2}$$

$$\frac{\tau(E)}{2}$$

Assim, temos algumas relações úteis para nosso próximo capítulo, na análise qualitativa dos autovalores de uma matriz.

Capítulo 3

Modelo Com Interação entre Espécies

Vamos ver nesse capítulo, o modelo que ficou conhecido como Predador - Presa, utilizado para prever a variação populacional nos locais onde existe a interação entre duas espécies. Primeiro analisaremos o sistema na sua forma mais básica e depois partiremos para dois modelos mais elaborados, adaptados do modelo original.

Introdução

No capítulo 1, vimos alguns dos modelos utilizados para prever a taxa de variação de populações isoladas. Neles, não são levado em conta a interação entre espécies em um mesmo meio. Vamos apresentar nesse capítulo, um modelo de predição de populações em que duas ou mais espécies dividem o mesmo território.

3.0.2 Interação entre espécies

Espécies de diferentes animais em um meio podem interagir de várias maneiras. A ecologia classifica as maneiras de interação de espécies em duas categorias: interação harmônica e interação desarmônica. Na interação

harmônica, as espécies que interagem entre si não levam nenhuma desvantagem por esse fato ocorrer. Algumas das interações harmônicas são: mutualismo e cooperação, relações em que ambas as espécies levam vantagem na interação, sendo o primeiro tipo, obrigatória para a sobrevivência de ambas as espécies, comensalismo, inquilinismo e epifitismo, onde uma espécie é beneficiada e a outra é neutra, não sendo beneficiada nem prejudicada.

Já na interação desarmônica, pelo menos uma das espécies acaba levando prejuízos por causa da interação. Temos como exemplos de interações desarmônicas: A competição, que pode ocorrer entre indivíduos da mesma espécie ou entre indivíduos de espécies diferentes, quando dependem dos mesmos fatores ambientais para sua sobrevivência como mesma fonte de alimento, mesmo espaço, etc... O parasitismo, quando uma espécie (parasita) acaba vivendo às custas de outra (hospedeiro), ao extrair os nutrientes necessários para sua subsistência e o Predatismo, onde uma espécie (presa) acaba servindo de alimento para a outra (predador).

Vamos levar em conta para o estudo do modelo, apenas a interação predatória.

3.1 O Modelo Predador - Presa

Os primeiros estudos de modelos com interações de espécie foram apresentados no início da década de 20, no século XX. Eles tiveram como base o modelo de Malthus. Esse modelo foi proposto, de uma forma independentemente, por dois matemáticos. Em 1925 pelo matemático austro-húngaro, naturalizado norte-americano Alfred J. Lotka e em 1926 pelo matemático italiano Vito Volterra. Lotka nasceu em 1880 e faleceu em 1949. Suas pesquisas contemplaram as áreas de demografia, físico-química e estatística. Já Vito Volterra, nasceu em 1860 e faleceu em 1940. Começou a trabalhar com equações integrais e voltou sua atenção para a dinâmica populacional após a Primeira Guerra Mundial.

Os modelos apresentados são muito utilizados nos dias de hoje, principalmente na ecologia e na agricultura. Podemos usá-lo para prever populações em ecossistemas, dos mais simples aos mais complexos, prever quando o desequilíbrio ocorrerá, controlar pragas que assolam a produção agrícola, etc...

O modelo mais simples parte das seguinte hipóteses:

1. A população de presas crescerá exponencialmente na ausência de predadores.
2. A população de predadores se extingue, caso haja falta de presas. Ela não consegue mudar sua alimentação para outra presa.
3. Os predadores consomem quantidades infinitas de presas.
4. Não existe nenhuma outra espécie no meio, além das duas.
5. Não há, durante o processo, alterações no ambiente que favorecerá uma das duas espécies e também as adaptações genéticas são lentas.
6. O ambiente é totalmente homogêneo.
7. Não há restrições no meio, e o espaço usado para as presas é infinito.

Tendo essas hipóteses, vamos considerar:

$x = x(t)$ uma função que dá o número de presas, em função do tempo e $y = y(t)$ uma função que dá o número de predadores em função do tempo.

O número de interações entre os predadores e as presas será dado pelo produto dos dois valores absolutos das populações dos mesmos, ou seja, xy .

Assim o sistema de equações Lotka - Volterra fica:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = -\alpha y(t) + \beta x(t)y(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

como $x = x(t)$ e $y = y(t)$ e ainda usando a notação de Lagrange para derivadas, temos:

$$\begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = -\alpha y + \beta xy \end{cases} \quad (3.2)$$

onde a, b, α, β são constantes positivas.

Observando essa equação, vemos que a taxa de variação da população de presas é dada pelo seu crescimento natural ax menos sua captura por predadores, dada na equação por bxy que é a taxa de encontros com predadores. Ou seja:

$$x' = ax - bxy$$

Também que a taxa de variação da população de predadores é dada pelo seu crescimento na presença de presas para consumo, que é dada por βxy , que é a taxa de encontros com presas, menos o decréscimo causado pela ausência de presas, dado na equação por αy . Ou seja:

$$y' = -\alpha y + \beta xy$$

Assim, no caso de ausência de predadores, a equação que dá o número de presas fica:

$$x' = ax$$

como a é positivo, a população de presas aumentará, já que é a única espécie no meio.

Já no caso da ausência de presas, a equação que modela o crescimento de predadores fica:

$$y' = -\alpha y$$

como α é positivo, a população de presas tende a diminuir pela falta de alimento (presas).

3.1.1 Analisando a Equação

Uma outra maneira de ver essa equação é dividir a taxa de variação das presas, pelo número de presas e a taxa de variação dos predadores, pelo número de predadores. Para isso, estamos considerando o valor de predadores e presas diferente de zero. Teremos então o sistema:

$$\begin{cases} \frac{x'}{x} = a - by \\ \frac{y'}{y} = -\alpha + \beta x \end{cases} \quad (3.3)$$

Nessa outra visão, vemos que a taxa de reprodução média das presas é algum a constante. Sua queda é dada conforme aumentamos o número de predadores na região. Esse fato é dado pelo fator by na equação.

Por outro lado, vemos que a taxa de reprodução média das presas é algum α constante. Seu aumento é causado por um aumento da quantidade de presas que há na região, representado na equação por βx .

Em suma, conseguimos ver a dependência das interações para o crescimento das populações. No caso das presas, em um ambiente sem predadores, a sua população aumenta de forma constante. Já no caso dos predadores, em um ambiente sem presas, sua população diminui até a extinção.

3.1.2 Analisando o Sistema

Agora, vamos estudar os pontos de equilíbrio do sistema Lotka - Volterra.

Sabemos que temos um ponto de equilíbrio quando suas derivadas são nulas (não há variação). Vamos calcular esses pontos do sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0 \Leftrightarrow ax - bxy = 0 \\ \frac{dy}{dt} = 0 \Leftrightarrow -\alpha y + \beta xy = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Na primeira equação:

$$ax - bxy = 0 \Leftrightarrow x(a - by) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } a - by = 0 \Rightarrow y = \frac{a}{b}$$

Na segunda equação:

$$-\alpha y + \beta xy = 0 \Leftrightarrow y(-\alpha + \beta x) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } (-\alpha + \beta x = 0 \Rightarrow x = \frac{\alpha}{\beta})$$

Tiramos dessa análise, dois pontos de equilíbrio:

$A(0, 0)$ e $B(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{a}{b})$

O ponto A é o ponto trivial, sem predadores e nem presas as populações não vão variar. Já o ponto B é de nosso interesse, pois possui uma população positiva. Vamos analisar o comportamento da solução nas suas proximidades.

Primeiro passo é linearizar o sistema no ponto B. Para isso, vamos encontrar a matriz Jacobiana. Sabemos que a Matriz Jacobiana é dada por:

$$J(x', y') = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Como:

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = a - by$$

$$\frac{\partial x'}{\partial y} = -bx$$

$$\frac{\partial y'}{\partial x} = \beta y$$

$$\frac{\partial y'}{\partial y} = -\alpha + \beta y$$

A matriz Jacobiana do sistema é:

$$J(x', y') = \begin{pmatrix} a - by & -bx \\ \beta y & -\alpha + \beta y \end{pmatrix}$$

O Jacobiano no ponto de equilíbrio é:

$$J(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{a}{b}) = \begin{pmatrix} a - b(\frac{a}{b}) & -b(\frac{\alpha}{\beta}) \\ \beta(\frac{a}{b}) & -\alpha + \beta(\frac{\alpha}{\beta}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - a & -b(\frac{\alpha}{\beta}) \\ \frac{a\beta}{b} & -\alpha + \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\alpha b}{\beta} \\ \frac{a\beta}{b} & 0 \end{pmatrix}$$

Calculando seus autovalores por $\det(J - \lambda I) = 0$:

$$J - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\alpha b}{\beta} \\ \frac{a\beta}{b} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & -\frac{\alpha b}{\beta} \\ \frac{a\beta}{b} & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(J - \lambda I) = 0$$

$$(\lambda^2 + \alpha a) = 0$$

$$\lambda^2 = -\alpha a$$

$$\lambda = \pm\sqrt{-\alpha a}$$

Como temos dois auto-valores imaginários conjugados, o ponto é ponto de centro. Ou seja, as curvas das soluções são elipses centradas no ponto de equilíbrio.

Veja:

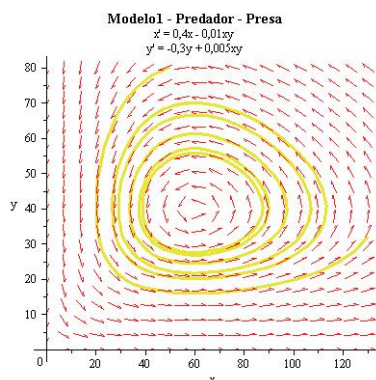


Figura 3.1: Plano de Fases - Modelo 1

3.1.3 Segundo Modelo

Essa primeira apresentação parece modelar bem a interação entre uma população de presas e predadores em um mesmo espaço. Como em toda

análise superficial, acabamos por omitir informações relevantes para uma boa modelagem do objeto de estudo. Por isso, vamos olhar com atenção uma das hipóteses.

Nos é dado que a população de presas cresce de acordo com o modelo Malthusiano na ausência de predadores. Sabemos que isso pode ser verdade, em populações controladas e apenas por um curto período de tempo. Na natureza, dispomos das mais diversas formas de controle populacional, de modo que elas acabam por ser limitadas, de uma forma ou de outra. Seja por competição por alimento, disponibilidade de alimento, tamanho do meio em que ela vive, etc...

Vamos então reescrevê-la usando o modelo de Pierre Verhulst, que leva essa situação em conta. Podemos escrever a equação que dá a taxa de crescimento das presas da seguinte maneira:

$$x' = ax\left(1 - \frac{x}{K}\right) - bxy$$

Com K sendo a capacidade máxima de presas que o ambiente suporta. Como vimos no capítulo anterior, quando a população é maior que K , a taxa de crescimento populacional das presas tende a decrescer, quando ela é menor que K , a taxa de crescimento tende a aumentar.

Assim, nosso sistema ficará:

$$\begin{cases} x' = ax\left(1 - \frac{x}{K}\right) - bxy \\ y' = -\alpha y + \beta xy \end{cases} \quad (3.5)$$

Uma modelagem bem mais fiel ao caso estudado.

Analisando o Segundo Modelo

Primeiramente, vamos achar os pontos de equilíbrio do sistema abaixo:

$$\begin{cases} x' = ax\left(1 - \frac{x}{K}\right) - bxy \\ y' = -\alpha y + \beta xy \end{cases} \quad (3.6)$$

Sabendo que o sistema está em equilíbrio quando $x' = 0$ e $y' = 0$, temos:

$$\begin{cases} ax(1 - \frac{x}{K}) - bxy = 0 \\ -\alpha y + \beta xy = 0 \end{cases}$$

Assim:

$$ax(1 - \frac{x}{K}) - bxy = 0$$

$$x(a(1 - \frac{x}{K}) - by) = 0$$

Assim $x = 0$ é o primeiro ponto:

Continuando a análise:

$$a(1 - \frac{x}{K}) - by = 0$$

$$a(1 - \frac{x}{K}) = by$$

$$y = \frac{a}{b}(1 - \frac{x}{K})$$

E o segundo ponto é $y = \frac{a}{b}(1 - \frac{x}{K})$.

Como não modificamos a segunda equação, os pontos de equilíbrio são os mesmo encontrados anteriormente:

$$x = \frac{a}{b} \text{ e } y = 0 .$$

Agora temos três pontos de equilíbrio:

$$A = (0, 0), B = (K, 0), C = (\frac{\alpha}{\beta}, \frac{a}{b} - \frac{a\alpha}{b\beta K})$$

O ponto A é o ponto trivial, já explicado. O ponto B é diz que na ausência de predadores, e com a população inicial no limite K de suporte do ambiente, não esperamos que aconteça alguma alteração populacional significativa. Vamos analisar o terceiro ponto:

Linearizando e calculando o a Matriz jacobiana do sistema:

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = a - \frac{2ax}{K} - by$$

$$\frac{\partial x'}{\partial y} = -bx$$

$$\frac{\partial y'}{\partial x} = \beta y$$

$$\frac{\partial y'}{\partial y} = -\alpha + \beta y$$

A matriz Jacobiana do sistema é:

$$J(x', y') = \begin{pmatrix} a - \frac{2ax}{K} - by & -bx \\ \beta y & -\alpha + \beta x \end{pmatrix}$$

Aplicando o ponto $(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{a}{b} - \frac{a\alpha}{b\beta K})$ na matriz jacobiana, temos:

$$J(x', y') = \begin{pmatrix} a - \frac{2a(\frac{\alpha}{\beta})}{K} - b(\frac{a}{b} - \frac{a\alpha}{b\beta K}) & -b(\frac{\alpha}{\beta}) \\ \beta(\frac{a}{b} - \frac{a\alpha}{b\beta K}) & -\alpha + \beta(\frac{\alpha}{\beta}) \end{pmatrix}$$

$$J(x', y') = \begin{pmatrix} a - \frac{2a(\frac{\alpha}{\beta})}{K} - b(\frac{a}{b} - \frac{a\alpha}{b\beta K}) & -b(\frac{\alpha}{\beta}) \\ \beta(\frac{a}{b} - \frac{a\alpha}{b\beta K}) & -\alpha + \beta(\frac{\alpha}{\beta}) \end{pmatrix}$$

$$J(x', y') = \begin{pmatrix} a - \frac{2a\alpha}{\beta K} - a + \frac{a\alpha}{\beta K} & -\frac{\alpha b}{\beta} \\ \frac{a\beta}{b} - \frac{a\alpha}{bK} & -\alpha + \alpha \end{pmatrix}$$

$$J(x', y') = \begin{pmatrix} -\frac{a\alpha}{\beta K} & -\frac{ab}{\beta} \\ \frac{aK\beta - a\alpha}{bK} & 0 \end{pmatrix}$$

O traço da matrix jacobiana é $-\frac{a\alpha}{\beta K}$, que é negativo, pois todos os parâmetros são positivos. Então, o determinante irá decidir se o ponto de equilíbrio é um ponto de sela, um nó estável ou um foco estável.

Calculando o determinante:

$$\det(J(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{a}{b} - \frac{a\alpha}{b\beta K})) = (0 - (-\frac{ab}{\beta} \cdot \frac{aK\beta - a\alpha}{bK})) = (\frac{a\alpha(K\beta - \alpha)}{\beta K})$$

Que é positivo, pois todos os parâmetros são positivos. Pois

$$K\beta - \alpha < 0 \Rightarrow K\beta < \alpha$$

Lembremos que o valor da população de predadores no ponto de equilíbrio é $\frac{a}{b}(1 - \frac{\alpha}{\beta K})$. Se $K\beta < \alpha$ então teremos $\frac{\alpha}{\beta K} > 1$ o que nos daria uma população negativa de predadores, o que não faz sentido.

Analisando o Δ do polinômio característico da matriz Jacobiana temos:

$$\Delta = \tau - 4 \det(J)$$

$$\Delta = -\frac{a\alpha}{\beta K} - 4 \cdot \frac{a\alpha(K\beta - \alpha)}{\beta K}$$

Lembrando que $K\beta - \alpha < 0$, temos que o $\Delta < 0$, o que nos dará um par de autovalores complexos. Como $\tau < 0$, teremos que a parte real dos autovalores complexos negativa, e assim, teremos no ponto um foco estável.

3.1.4 Terceiro Modelo

Conseguimos com nosso modelo anterior uma segurança maior. Se assumirmos que os pontos de equilíbrio estão suficientemente afastados de ambos os eixos, para proteger cada população de perturbações aleatórias, as soluções

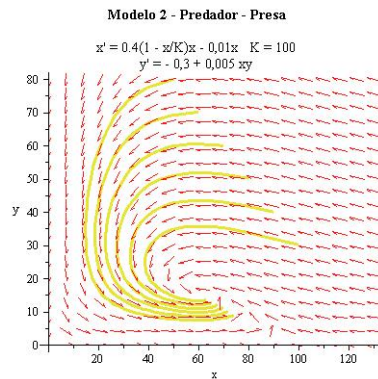


Figura 3.2: Plano de Fases - Modelo 2

que começam próximas a esses pontos são estáveis. O que garante que as populações não correm risco de extinção, conforme o tempo vai avançando. Mas, apesar disso, temos um problema com o modelo anterior.

Vamos lembrar que a equação que dá a população das presas é

$$x' = ax\left(1 - \frac{x}{K}\right) - bxy$$

O dano nas presas pelo predador é dado por bxy . Que parece fazer sentido, quanto mais encontros entre as espécies, maior será o dano causado pelos predadores nas presas. Dizemos que bx é a taxa de sucesso obtido pelos predadores ou também chamada de taxa de predação do sistema. De outra maneira, podemos dizer que em um certo intervalo de tempo, um predador deve matar uma certa fração bx de presas. Se temos 5 predadores e 10 presas, teremos uma certa taxa de sucesso obtida. Agora, se tivermos 5 predadores e 500000 presas, a taxa de sucesso será a mesma? A resposta é não. Os predadores tem uma capacidade limitada de causar dano nas presas (necessidade alimentar). Sendo assim, faz-se necessário alterações em nosso modelo.

Revisando o Modelo - O problema da Predação Linear

Como vimos anteriormente, não há como manter na natureza a taxa linear de predação dada na equação

$$x' = ax\left(1 - \frac{x}{K}\right) - bxy$$

Na natureza, os predadores são movidos pela sua necessidade alimentar. Uma vez que essa necessidade é saciada, não há mais motivo para predação. Devemos traduzir esse fato nas nossas equações, como forma de manter o modelo o mais próximo da realidade.

Vamos definir $h(x) = T_P$ como uma função que nos dá a taxa de predação (T_P) na equação, em função do número de presas. Nossa primeira hipótese em que $h(x) = bx$, com b positivo, foi descartada. Precisamos de uma função $h(x)$ que cumpra duas condições básicas:

- $h(0) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = w$ com w sendo constante.

Ou seja, na ausência de presas, a taxa de predação deverá ser zero. E também quando a população de presas se aproximar do infinito, deveremos chegar a uma taxa de predação limite. Chamamos essa taxa de taxa de saturação de predação, dado por w e ela deverá ser atingida nas melhores condições de caça para os predadores.

Uma função que cumpre essas condições é

$$h(x) = w \frac{x}{D+x}$$

Existem muitas outras funções que cumprem esses dois itens, mas vamos escolher a função acima por três motivos:

- O limite da função quando x se aproxima do infinito é óbvio, sem ser necessário efetuar cálculos para calculá-lo.
- A função será fácil de manipular na hora de analisarmos a equação mais a fundo.
- Os parâmetros w e D são conhecidos.

Os parâmetros w e D nos dão significados interessantes. Sabemos que w é a taxa ótima de predação, onde os predadores tem seu maior sucesso na captura de presas. Note que nessa função, w depende de D . Aumentando D , diminuímos o valor de w e vice-versa. Assim, podemos admitir que w é um fator biológico que diminuiu a taxa de predação. Podemos ver w de duas maneiras, como o tempo de procura da presa pelo predador, ou como a qualidade da camuflagem do meio ambiente para a presa. Em ambos, damos um sentido a função. Quando aumenta o tempo de procura da presa ou quando a qualidade da camuflagem do ambiente é aumentada, diminui a taxa de predação. Quando diminui tempo de procura da presa pelo predador ou quando a camuflagem do ambiente é diminuída, aumenta a taxa de predação.

Juntamos todas essas informações, temos um novo modelo para a equação das presas:

$$x' = ax\left(1 - \frac{x}{K}\right) - h(x)y$$

com

$$h(x) = w\frac{x}{D+x}$$

Assim temos a nova equação:

$$x' = ax\left(1 - \frac{x}{K}\right) - yw\frac{x}{D+x}$$

Revisando a Equação do Predador

Com essas revisões, obtemos uma equação bem realística, que nos diz como a população de presas cresce ou decresce. Entretanto, ainda não fizemos um refinamento na equação dos predadores

$$y' = -\alpha y + \beta xy$$

Essa equação, por exemplo, nos diz que quando a população de presas se aproxima do infinito, a taxa de crescimento da população de predadores também se aproxima do infinito. O que não é nem um pouco possível em um ambiente natural. Um modelo mais realístico, leva em conta a capacidade que o ambiente tem para suportar uma população de predadores. Assim como as presas, o ambiente suporta apenas um número Q de predadores, e condições ideais. Esse valor Q é chamado de valor crítico de predadores no ambiente. Quando temos uma população de predadores de valor abaixo ao de Q , temos que a população deve crescer até atingir esse valor limite. Já quando o valor da população é maior que Q , ele deve cair gradativamente, até atingir esse limite. Assim temos a seguinte equação

$$y' = \alpha y \left(1 - \frac{y}{Q}\right)$$

baseada no modelo logístico. Onde α é a taxa de crescimento natural e Q é a capacidade máxima que o ambiente suporta.

Analisando mais atentamente, vemos que Q deverá ser dado em função da população de presas e não constante, já que um dos fatores limitantes do meio ambiente é a disposição de alimento. Agora, se J é o valor de presas que um predador precisa para manter o ambiente em equilíbrio, então xJ^{-1} é o número de predadores que uma população de x presas necessita para o ambiente ficar equilibrado. Substituindo Q por xJ^{-1} na equação acima, nos dá uma nova equação que modela a população de predadores:

$$y' = \alpha y \left(1 - \frac{y}{xJ^{-1}}\right)$$

O Sistema Revisado

Depois das revisões feitas, temos o nosso novo sistema:

$$\begin{cases} x' = ax \left(1 - \frac{x}{K}\right) - yw \frac{x}{D+x} \\ y' = \alpha y \left(1 - \frac{y}{xJ^{-1}}\right) \end{cases} \quad (3.7)$$

Temos cada parâmetro com seu significado:

- a e α são as taxas de crescimento natural das presas e dos predadores, respectivamente.
- K é a capacidade de suporte do meio para as presas.
- J é o número de presas necessária para suportar um predador no ambiente equilibrado.
- w é a taxa máxima de predação.
- D é o tempo de procura do predador, ou a qualidade da camuflagem do ambiente.

3.1.5 Analisando o Sistema

Vamos agora analisar nosso novo sistema. Como nos sistemas anteriores, temos aqui um sistema não - linear de equações diferenciais. Começaremos, assim como já fizemos nos outros modelos, achando seus pontos de equilíbrio.

Na equação da presa, temos os seguintes pontos de equilíbrio:

$$x' = ax\left(1 - \frac{x}{K}\right) - yw\frac{x}{D+x}$$

$$ax\left(1 - \frac{x}{K}\right) - yw\frac{x}{D+x} = 0$$

$$x\left(a\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{yw}{D+x}\right) = 0$$

Assim, $x = 0$

$$a\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{yw}{D+x} = 0$$

$$a\left(1 - \frac{x}{K}\right) = \frac{yw}{D+x}$$

$$a\left(1 - \frac{x}{K}\right)(D+x) = yw$$

$$yw = a(1 - \frac{x}{K})(D + x)$$

$$y = \frac{a}{w}(1 - \frac{x}{K})(D + x)$$

Temos aqui uma função do segundo grau, com os zeros em $x = -D$ ou $x = K$. Como todos os parâmetros são positivos, $x = -D$ nos dá uma população negativa de presas, o que não faz sentido. Mas os conhecimentos das raízes nos dão informações da localização de seu vértice que pode ter uma componente positiva de presas. Manipulando a equação acima:

$$y = \frac{a}{w}(1 - \frac{x}{K})(D + x)$$

$$y = (\frac{a}{w} - \frac{ax}{wK})(D + x)$$

$$y = \frac{aD}{w} - \frac{ax^2}{wK} + \frac{ax}{w} - \frac{axD}{wK}$$

$$y = -\frac{a}{wK}x^2 + x(\frac{a}{w} - \frac{aD}{wK}) + \frac{aD}{w}$$

$$y = -\frac{a}{wK}x^2 + x(\frac{aK-aD}{wK}) + \frac{aD}{w}$$

Como todos os parâmetros são positivos, o coeficiente em x^2 é negativo, e assim a concavidade da parábola é para baixo. Nesse caso, deve haver, para alguns valores de K e D, casos em que o vértice da parábola está no primeiro quadrante.

Assim, os pontos de equilíbrio são $x = 0$ e $y = -\frac{a}{wK}x^2 + x(\frac{aK-aD}{wK}) + \frac{aD}{w}$.

Vamos achar os pontos de equilíbrio na equação do predador.

$$y' = \alpha y(1 - \frac{y}{xJ^{-1}})$$

$$\alpha y(1 - \frac{y}{xJ^{-1}}) = 0$$

Então $y = 0$ ou $\alpha(1 - \frac{y}{xJ^{-1}}) = 0$

$$1 - \frac{y}{xJ^{-1}} = 0$$

$$\frac{y}{xJ^{-1}} = 1$$

$$y = \frac{x}{J}$$

Assim, os dois pontos de equilíbrio são $y = 0$ ou $y = \frac{x}{J}$.

Vamos fazer algumas considerações. Não vamos levar em conta o ponto de equilíbrio trivial $(0, 0)$. Apesar de fazer sentido, no meio ambiente sem predadores e sem presas as populações não mudam, uma população zero de presas faria a derivada da equação dos predadores indefinida. Nosso ponto interessante de equilíbrio nesse caso, são os pontos não triviais do primeiro quadrante.

Os pontos exatos de equilíbrio da equação das presas são obtidos após alguns cálculos trabalhosos. Além disso, os mesmos gerariam dados para o determinante e traço da matriz Jacobiana complexos demais para conseguirmos fazer a análise. Então, façamos o seguinte. Definindo que o ponto de equilíbrio tem as coordenadas (x^*, y^*) , e então dividir x, y, D e K por x^* . Agora temos $x = \frac{x}{x^*}$, então $x^* = 1$ e $y^* = J^{-1}$.

Com esses dados, vamos calcular as derivadas parciais:

$$\frac{\partial x'}{\partial x} \text{ em } x^* = 1 \text{ e } y^* = J^{-1}$$

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = ax^*(1 - \frac{x^*}{K}) - y^*w \frac{x^*}{D+x^*}$$

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = ax^*(-\frac{1}{K}) + (1 - \frac{x^*}{K})a - \frac{y^*w(D+x^*) - y^*wx^*}{(D+x^*)^2}$$

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = a(-\frac{1}{K}) + (1 - \frac{1}{K})a - \frac{J^{-1}w(D+1) - J^{-1}w}{(D+1)^2}$$

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = a\left(1 - \frac{1}{K} - \frac{1}{K}\right) - J^{-1}w \frac{D-1}{(D+1)^2}$$

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = a\left(1 - \frac{1}{K} - \frac{1}{K}\right) - J^{-1}w \frac{D-1}{(D+1)^2}$$

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = a\left(-\frac{1}{K} + \frac{w}{aJ(D+1)^2}\right)$$

Calculando $\frac{\partial x'}{\partial y}$ em $x^* = 1$ e $y^* = J^{-1}$

$$\frac{\partial x'}{\partial y} = ax^*\left(1 - \frac{x^*}{K}\right) - y^*w \frac{x^*}{D+x^*}$$

$$\frac{\partial x'}{\partial y} = 0 - \frac{wx^*(D+x^*)-0}{(D+x^*)^2}$$

$$\frac{\partial x'}{\partial y} = -w \frac{x^*}{D+x^*}$$

$$\frac{\partial x'}{\partial y} = -\frac{w}{D+1}$$

Calculando $\frac{\partial y'}{\partial x}$ em $x^* = 1$ e $y^* = J^{-1}$

$$\frac{\partial y'}{\partial x} = \alpha y^*\left(1 - \frac{y^*}{x^*J^{-1}}\right)$$

$$\frac{\partial y'}{\partial x} = 0 + \alpha y^*\left(-y^*J\left(-\frac{1}{x^{*2}}\right)\right)$$

$$\frac{\partial y'}{\partial x} = \alpha J^{-1}\left(-J^{-1}J\left(-\frac{1}{1}\right)\right)$$

$$\frac{\partial y'}{\partial x} = \frac{\alpha}{J}\left(-1(-1)\right)$$

$$\frac{\partial y'}{\partial x} = \frac{\alpha}{J}$$

Calculando $\frac{\partial y'}{\partial y}$ em $x^* = 1$ e $y^* = J^{-1}$

$$\frac{\partial y'}{\partial y} = \alpha y^* \left(1 - \frac{y^*}{x^* J^{-1}}\right)$$

$$\frac{\partial y'}{\partial y} = \alpha \left(1 - \frac{y^*}{x^* J^{-1}}\right) + \alpha y^* \left(-\frac{1}{x^* J^{-1}}\right)$$

$$\frac{\partial y'}{\partial y} = \alpha \left(1 - \frac{J^{-1}}{J^{-1}}\right) + \alpha J^{-1} \left(-\frac{1}{J^{-1}}\right)$$

$$\frac{\partial y'}{\partial y} = \alpha(1 - 1) + \alpha J^{-1} \left(-\frac{1}{J^{-1}}\right)$$

$$\frac{\partial y'}{\partial y} = -\alpha$$

Assim, a matriz Jacobiana do sistema nos pontos $x^* = 1$ e $y^* = J^{-1}$ é dada por:

$$J(x^* = 1, y^* = J^{-1}) = \begin{pmatrix} a\left(-\frac{1}{K} + \frac{w}{aJ(D+1)^2}\right) & -\frac{w}{D+1} \\ \frac{\alpha}{J} & -\alpha \end{pmatrix}$$

Agora precisamos buscar informações sobre o traço e o determinante da matriz. Vamos começar calculando o determinante:

$$\begin{aligned} \det(J) &= \left(-\alpha a\left(-\frac{1}{K} + \frac{w}{aJ(D+1)^2}\right) - \left(-\frac{\alpha}{J} \frac{w}{D+1}\right)\right) \\ &= \frac{\alpha a}{K} - \frac{\alpha a w}{aJ(D+1)^2} + \frac{\alpha w}{J(D+1)} \\ &= \frac{\alpha a}{K} - \frac{\alpha a w + \alpha a w(D+1)}{aJ(D+1)^2} \\ &= \alpha a \left(\frac{1}{K} - \frac{w+w(D+1)}{aJ(D+1)^2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha a \left(\frac{1}{K} + \frac{-w+wD+w}{aJ(D+1)^2} \right) \\
&= \alpha a \left(\frac{1}{K} + \frac{wD}{aJ(D+1)^2} \right)
\end{aligned}$$

Então temos

$$\det(J) = \alpha a \left(\frac{1}{K} + \frac{wD}{aJ(D+1)^2} \right)$$

Como todos os parâmetros são positivos, então o determinante será positivo e teremos que o ponto de equilíbrio será um foco estável, foco instável ou centro. O sinal do traço da matriz determinará esse fato.

$$\tau(J) = a \left(-\frac{1}{K} + \frac{w}{aJ(D+1)^2} \right) - \alpha$$

$$a \left(-\frac{1}{K} + \frac{w}{aJ(D+1)^2} \right) - \alpha < 0$$

$$a \left(-\frac{1}{K} + \frac{w}{aJ(D+1)^2} \right) < \alpha$$

$$-\frac{1}{K} + \frac{w}{aJ(D+1)^2} < \frac{\alpha}{a}$$

Lembrando que $x^* = 1$, $y^* = J^{-1}$ e $y = \frac{a}{w} \left(1 - \frac{x}{K} \right) (D + x)$, temos que $\frac{w}{aJ} = \left(1 - \frac{1}{K} \right) (D + 1)$. Então

$$-\frac{1}{K} + \left(1 - \frac{1}{K} \right) (D + 1) \frac{1}{(D+1)^2} < \frac{\alpha}{a}$$

$$-\frac{1}{K} + \frac{1 - \frac{1}{K}}{(D+1)} < \frac{\alpha}{a}$$

$$\frac{-(D+1)+K-1}{K(D+1)} < \frac{\alpha}{a}$$

$$\frac{-D-1+K-1}{K(D+1)} < \frac{\alpha}{a}$$

$$\frac{K-D-2}{K(D+1)} < \frac{\alpha}{a}$$

$$\frac{2\frac{K-D}{2}-1}{K(D+1)} < \frac{\alpha}{a}$$

Note a expressão $\frac{K-D}{2}$. Lembre que ela é a coordenada x do vértice da equação que dá os pontos de equilíbrios das presas. Então agora temos dois casos a considerar

- Ponto de Equilíbrio a direita do Vértice:

Como dividimos H , K e D pelo ponto x^* , a inequação

$$\frac{K-D}{2} < 1$$

significa afirmar que o vértice está a esquerda do ponto de equilíbrio. E se isso ocorre temos

$$\frac{K-D}{2} - 1 < 0$$

e então, a inequação é verdadeira para todos os valores (positivos, claro) de parâmetros. Com a análise acima, as soluções que tomamos suficientemente próximas do ponto de equilíbrio irão convergir para o mesmo conforme o tempo tende para o infinito.

- Ponto de Equilíbrio a esquerda do Vértice:

Nesse caso

$$\frac{K-D}{2} - 1 > 0$$

o que significa que ambos os termos da equação são positivos. Então se $\frac{\alpha}{a}$ for muito maior que $\frac{2^{\frac{K-D}{2}} - 1}{K(D+1)}$, o ponto de equilíbrio é estável. Caso contrário, as soluções próximas ao ponto de equilíbrio acabam viajando em torno do ponto e se afastando em um ciclo limite.

3.1.6 Comentários Finais

Assim, para esse último modelo, a estabilidade dos dois pontos interessantes de equilíbrios está garantida no caso de um valor alto de $\frac{\alpha}{a}$. Ou seja, precisamos de um valor α muito maior que o valor de a . Isso, quer dizer que o crescimento natural da população de predadores terá que ser maior que o crescimento da população de presas. O que dependerá diretamente da característica das populações estudadas. Apesar de matematicamente ser fácil de modelar um sistema e manipular seus parâmetros, para conseguirmos encontrar um ponto de equilíbrio, isso na vida real é bastante complicado. E muitas vezes inviável.

O que queremos deixar claro também, é que a modelagem matemática é uma ferramenta bastante completa para análise das dinâmicas das populações. Mas seus estudos envolvem sistemas de equações bastante complexas e que muitas vezes envolvem soluções apenas computacionais. A precisão de suas soluções dependerá da não omissão de todos os parâmetros envolvidos e da precisão de seus dados.

Conclusão

O presente trabalho me deu a oportunidade, antes de tudo, de aplicar os conhecimentos obtidos no decorrer da graduação e a chance de aprender conceitos novos. Alguns dos quais, nem foram citados no decorrer de minha graduação, como por exemplo: sistemas de equações diferenciais lineares e não lineares, linearização e conceitos de estabilidade dos pontos de equilíbrio dos sistemas de equações diferenciais.

Conhecemos também alguns dos modelos de dinâmica populacional mais usados hoje em dia, e podemos perceber que apesar de existir uma certa facilidade para manipular variáveis na matemática, na vida real, essa situação pode ser bastante complicado. Isso fica mais claro na equação predador - presa. Para buscarmos a estabilidade das soluções nos pontos de equilíbrio, manipulamos variáveis e constantes. Entretanto, fazer isso no ambiente das espécies, pode ser muito difícil, pois acaba mexendo com taxas de reproduções e predações que não são facilmente manipuláveis.

Observamos também como os campos das ciências humanas e naturais ligam-se intrinsecamente com a matemática. Muitas vezes acabamos abordando os campos de estudos de uma maneira extremamente fragmentada. A própria matemática, historicamente, não era ferramenta de estudos em campos além das ciências ditas exatas. Hoje, vemos que qualquer situação natural, biológica, econômica, social, pode ser modelada através de equações. O conhecimento matemático hoje é a porta para a compreensão do mundo em que vivemos.

Referências Bibliográficas

- [1] LIMA, Aristóteles Meneses: VIEIRA, Marcílio de Macêdo *Introdução á Modelagem Matemática Aplicada ao Crescimento de Populações*, Monografia, Universidade Virtual do Maranhão - UNIVIMA, Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC, Caxias - MA, 2009
- [2] http://pt.wikipedia.org/wiki/Dinamica_populacional, Acesso em 01/02/2013
- [3] http://pt.wikipedia.org/wiki/Pierre_François_Verhulst, Acesso em 01/02/2013
- [4] http://pt.wikipedia.org/wiki/Alfred_J._Lotka, Acesso em 01/02/2013
- [5] http://pt.wikipedia.org/wiki/Vito_Volterra, Acesso em 01/02/2013
- [6] <http://online.redwoods.edu/instruct/darnold/DEProj/sp04/eric/presentation.pdf>, Acesso em 01/02/2013
- [7] STEWART, James, *Cálculo Vol. 1*, Editora Ática, 2012
- [8] STEWART, James, *Cálculo Vol. 2*, Editora Ática, 2012
- [9] FIGUEIREDO, Djairo Guedes: NEVES, Aloisio Freiria: *Equações Diferenciais Aplicadas*, IMPA, 2009
- [10] CORRÊA JÚNIOR, Valdir José, *Modelagem Matemática Predador versus Presa*, Monografia , Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC, Florianópolis - SC, 2006
- [11] ANOPOSLKY, E. P., *Predator - Prey Modelling*, 2004
- [12] RIZZI, Rogério Luíz, *Equações Diferenciais não lineares* ,disponível em <http://www.inf.unioeste.br/rogerio/EDO-introd8.pdf>, 12/02/2012

- [13] COIMBRA, Maria Do Carmo, *Equações Diferenciais, uma Primeira Abordagem*, disponível em http://paginas.fe.up.pt/~mcoimbra/aulas/Publicacoes/PCP1_EDO.pdf, 12/02/2012