PREFÁCIO

Diante da aceitação que lograram as três edições da nossa « Álgebra Elementar » e das cartas de encômios que nos dirigiram eminentes professores dos Estados e da Capital Federal atinentes à orientação que demos ao nosso trabalho, propusemo-nos, aquiescendo à tarefa que nos confiou a Comp. Melhoramentos de S. Paulo, a publicar as nossas « Lições de Matemática ».

Verão os competentes que o nosso compêndio, a-pesar-de consolidado em autores de nota, não se argüe da cópia dos trabalhos preexistentes. E' de ver que se não perdeu nele a nossa individualidade, porque à doutrina assimilada juntámos as nossas observações próprias.

De acôrdo com o que mais recentemente se há publicado sôbre o assunto e sempre em obediência ao atual programa do Colégio « Pedro II », procurámos expor a matéria com clareza e sem o exagerado formalismo que a pedagogia condena como absolutamente inóquo no curso elementar de matemática para alunos da primeira série.

Cumpre-nos dedicar, à guisa de apresentação, algumas palavras a vários pontos do nosso livro.

Mereceram-nos especial cuidado as operações fundamentais, desde a noção concreta inicial até à sua prática e interpretação geométrica, e assim procurámos desenvolver minuciosamente a parte concernente ao cálculo mental, aos processos de abreviação e à resolução dos respectivos problemas.

Quanto aos problemas, tivemos a preocupação de relacioná-los a certas noções adquiridas pelo estudante em outras disciplinas do curso, especialmente na de Ciências Físicas e Naturais.

Em tratando de quocientes aproximados, é que surge a primeira noção de aproximação no cálculo, noção essa devidamente desenvolvida ao diante, quando se considera a divisão dos números decimais e a raiz quadrada dos inteiros e fracionários.

Em harmonia com o critério adotado, a par das noções teóricas, que julgámos por bem não abandonar de todo, encontra-se farta e original exemplificação nos demais capítulos referentes à parte do programa dedicada à aritmética, com que procurámos despertar a atenção do aluno para as vantagens das aplicações concretas da matéria, mas dentro do tolerável limite de simplicidade que deve caraterizar as exposições didáticas. E' isso, a nosso ver, coisa interessante e indispensável, de que se colhem excelentes frutos.

Usando de linguagem adaptada à compreensão do aluno, pusemos ainda todo o cuidado nas modificações que sofreu o sistema métrico decimal, não só definindo os padrões, as unidades principais e secundárias, senão também empregando a grafia e as abreviaturas adotadas pela recente publicação do Ministério do Trabalho, Indústria e Comércio.

Conforme as exigências da orientação metodológica moderna, só se vão calculando áreas e volumes de formas geométricas adrede definidas em capítulos anteriores, sempre que se nos depara a oportunidade de exercitar o aluno em operações com as unidades do nosso sistema de pesos e medidas.

Justificando objetivamente, como ampliação do campo numérico, a introdução dos números algébricos ou qualificados, demorámo-nos bastante nas operações fundamentais que com êles se podem efetuar, todas referidas, é claro, às construções gráficas correspondentes.

A essa altura, não é ocioso advertirmos que depois de estudar as expressões algébricas, sua classificação, valor numérico, adição e subtração, dedicámos um capítulo especial à noção de equação.

A nós, mas aos nossos brilhantes colegas, não nos cabe ajuizar do mérito do nosso trabalho, mas verá o leitor que, empregando exemplos simplicíssimos, procurámos fazer surgir automàticamente a idéia de equação como tradução algébrica do enunciado de um problema. E ampla é a exemplificação com que fechámos êste capítulo e que nos permite considerar elementarmente as principais transformações empregadas na resolução dos tipos simples.

No capítulo seguinte, além de estudarmos elementarmente os eixos coordenados, desenvolvemos a representação gráfica das variações sucessivas de grandeza dos dados geográficos, estatísticos e metereológicos por nós considerados e todos atinentes ao nosso País, procurando assim formar intuitivamente no espírito do estudante a noção primeira de função.

Pensamos assim, que as nossas «Lições de Matemática» — 1.ª série — satisfazem ao espírito do programa do Colégio «Pedro II», em cuja introdução se lê: «A princípio, deve o ensino da Matemática acostumar o aluno à prática dos cálculos mentais, tornando-o seguro e desembaraçado nas operações numéricas. E', pois, necessário que êle compreenda bem o alcance e a natureza das operações elementares e adquira habilidade crescente no modo de aplicá-las. Convém ainda que desenvolva o senso de estimativa das grandezas e de apreciação do grau de exatidão dos cálculos sôbre valores aproximados. Enfim, pela prática freqüente das verificações dos exercícios numéricos, cumpre ao professor estimular a confiança do discípulo em si mesmo».

Ginásio Paranaense, em Curitiba, fevereiro de 1934.

ALGACIR MUNHOZ MAEDER

ÍNDICE

Pag.

CAPÍTULO I: *Numeração*

Noção de grandeza . . . 1
Noção de números e comparação de coleções . . . 2
Série natural dos números . . . 3
Símbolos . . . 4
Sinais de relação . . . 5
Representação gráfica . . . 5
Números concretos e abstratos . . . 5
Numeração falada . . . 7
Numeração escrita . . . 9
Numeração romana . . . 12
Exercícios . . . 13

CAPÍTULO II: *Adição*

Noção de adição e definição . . . 14
Princípios relativos à adição . . . 15
Prática da operação . . . 16
Indicações práticas . . . 20
Interpretação geométrica. Prova . . . 21
Cálculo abreviado e exercícios de cálculo mental . . . 22
Resolução de problemas . . . 24
Exercícios . . . 25

CAPÍTULO III: *Subtração*

Noção de subtração e definição . . . 28
Princípios relativos à subtração . . . 29
Prática da operação . . . 31
Interpretação geométrica. Prova . . . 34
Princípios relativos às somas e diferenças . . . 34
Cálculo abreviado e exercícios de cálculo mental . . . 37
Complemento aritmético dos números . . . 37
Resolução de problemas . . . 40
Exercícios . . . 41

Pag.

Capítulo IV: *Multiplicação*

Noção de multiplicação e definição . . . 43
Produto de dois fatores . . . 44
Prática da operação . . . 46
Interpretação geométrica . . . 53
Produto de vários fatores . . . 54
Princípios relativos às somas, diferenças e produtos . . . 58
Cálculo abreviado e exercícios de cálculo mental . . . 62
Resolução de problemas . . . 65
Exercícios . . . 66

Capítulo V: *Divisão*

Noção de divisão exata e de divisão inexata . . . 68
Definição . . . 70
Divisor de um número . . . 71
Prática da divisão . . . 72
Interpretação geométrica. Prova . . . 79
Princípios relativos à divisão . . . 80
Cálculo abreviado e exercícios de cálculo mental . . . 82
Resolução de problemas . . . 84
Exercícios . . . 85

Capítulo VI: *Problemas de recapitulação*

Problemas resolvidos . . . 87
Problemas propostos . . . 88

Capítulo VII: *Potenciação*

Noção de potência e definição . . . 91
Quadrado e cubo de um número . . . 92
Interpretação geométrica . . . 92
Princípios relativos às potências . . . 94

Capítulo VIII: *Divisibilidade*

Noção de múltiplo e divisor . . . 97
Princípios fundamentais . . . 100
Caracteres de divisibilidade . . . 103
Exercícios . . . 111
Prova das operações fundamentais . . . 112

Capítulo IX: *Máximo divisor comum*

Noção, definição e abreviatura . . . 115
Pesquisa do m. d. c. de dois números . . . 115
Simplificações . . . 117
Princípios relativos ao m. d. c. de 2 números . . . 118

Pag.

Exercícios sôbre o m. d. c. de 2 números . . . 120
Pesquisa do m. d. c. de vários números . . . 120
Cálculo mental do m. d. c. . . . 122
Exercícios sôbre o m. d. c. de vários números . . . 123

Capítulo X: *Números primos*

Noção, definição e princípios gerais . . . 124
Tábua de números primos . . . 125
Reconhecimento dos números primos . . . 126
Propriedades dos números primos . . . 127
Decomposição em fatores primos . . . 129
Decomposição abreviada . . . 131
Divisores de um número . . . 132
Determinação do m. d. c. . . . 137
Exercícios . . . 138

Capítulo XI: *Mínimo múltiplo comum*

Noção, definição e abreviatura . . . 140
Pesquisa do m. m. c. de vários números . . . 140
Pesquisa do m. m. c. com auxílio do m. d. c. . . . 142
Propriedades do m. m. c. . . . 143
Cálculo mental do m. m. c. . . . 144
Exercícios . . . 145

Capítulo XII: *Frações ordinárias*

Noção de número fracionário e definição . . . 146
Comparação de uma fração com a unidade . . . 149
Propriedade fundamental . . . 151
Simplificação . . . 152
Redução ao mesmo denominador . . . 155
Comparação . . . 158
Números mixtos . . . 160
Divisões inexatas . . . 163
Adição . . . 164
Subtração . . . 167
Multiplicação . . . 168
Elevação à potência . . . 176
Divisão . . . 176
Cálculo de expressões fracionárias . . . 179
Exercícios e problemas . . . 180

Capítulo XIII: *Frações decimais — Números decimais*

Fração decimal . . . 185
Número decimal . . . 185

Pag.

Propriedades 188
Adição 189
Subtração 190
Multiplicação 191
Divisão 192
Quocientes aproximados 193
Conversão de frações ordinárias em números decimais 198
Frações geratrizes das dízimas periódicas 205
Exercícios 209

Capítulo XIV: *Noções sôbre as principais formas geométricas*

Preliminares 210
Pontos, linhas superfícies 211
Segmentos 212
Linhas 213
Superfícies 215
Retas entre si 216
Retas e planos 218
Planos entre si 219
Polígonos 220
Triângulos 222
Quadriláteros 223
Paralelogramos 224
Circunferência e círculo 225
Prisma 227
Paralelepípedo 227
Pirâmide, tronco de pirâmide 228
Cilindro 228
Cone e tronco de cone 229
Esfera 229

Capítulo XV: *Números complexos. Sistema inglês de pesos e medidas*

Números complexos e incomplexos 230
Medida do tempo 230
Medida dos arcos e dos ângulos 231
Moeda inglesa 232
Redução de complexo a incomplexo 232
Redução de incomplexo a complexo 233
Exercícios 234
Adição 234
Exercícios e problemas 235
Subtração 236
Exercícios e problemas 237

Pag.

Multiplicação 237
Exercícios e problemas 239
Divisão 239
Exercícios e problemas 242
Sistema inglês de pesos e medidas 242
Medidas de comprimento 242
Medidas de superfície 243
Medidas de volume 243
Medidas de capacidade 244
Medidas de pêso 244

Capítulo XVI: *Sistema métrico decimal*

Preliminares e histórico 245
Unidades principais e secundárias 247
Medidas efetivas 247
Medidas de comprimento 248
Medidas de superfície 251
Medidas agrárias 252
Medidas de volume 253
Medidas de massa 255
Medidas de capacidade 257
Densidade 258

Capítulo XVII: *Determinação de áreas e volumes*

Noção de medida indireta 259
Medidas de circunferência 259
Área do retângulo 260
Área do quadrado 260
Área do paralelogramo 260
Área do triângulo 260
Área do trapézio 261
Área dos polígonos irregulares 261
Área dos polígonos regulares 261
Área do círculo 262
Volume do paralelepípedo retângulo 262
Volume do cubo 263
Volume do prisma reto 263
Volume da pirâmide 263
Volume do cilindro reto 264
Volume do cone reto 264
Volume da esfera 265
Exercícios 265

Pag.

Capítulo XVIII: *Números relativos ou qualificados*

Noções gerais 267
Segmentos 269
Adição 271
Subtração 273
Soma algébrica 276
Multiplicação 277
Potências 281
Raízes 282
Divisão 282
Frações 284

Capítulo XIX: *Expressões algébricas*

Símbolos algébricos e fórmulas 285
Classificação das expressões algébricas 285
Valor numérico de monômios e polinômios 286
Exercícios 287
Elementos de um monômio. Noção de expoente 289
Redução de termos semelhantes 292
Exercícios 293

Capítulo XX: *Adição e subtração algébricas*

Adição de monômios 297
Adição de polinômios 298
Indicação prática 299
Subtração de monômios 299
Subtração de polinômios 300
Indicação prática 302
Exercícios 303

Capítulo XXI: *Equações do 1.º grau*

Primeira noção de equação com uma incógnita 305
Equações eqüivalentes 306
Resolução de equações do 1.º grau de 1 incógnita 306
Exercícios 310
Resolução de problemas numéricos simples 310
Problemas 311

Capítulo XXII: *Eixos coordenados — Representação gráfica*

Preliminares 313
Coordenadas de um ponto 314
Determinação de um ponto 315
Exercícios 317

Pag.

Espécies de gráficos 319
Gráficos empíricos 319
Gráficos matemáticos 327

Capítulo XXIII: *Multiplicação algébrica*

Prática da operação 329
Indicação prática 331
Quadrado de um binômio 334
Cubo de um binômio 334
Exercícios 335

Capítulo XXIV: *Raiz quadrada*

Noção e definição de raiz 338
Raiz quadrada 339
Raízes quadradas inteiras 340
Prática da operação 341
Raízes quadradas fracionárias 346
Extração de raízes aproximadas 348
Radiciação de frações ordinárias 350
Radiciação de números decimais 352
Exercícios 354

Apêndice

Números primos compreendidos entre 1 e 10.000 357
Raízes quadradas de 1 a 1.000 359

NOTA:

A capa dêste livro foi desenhada pelo prof. Hermes Cardoso e as figuras do texto foram traçadas pelos professores Hermes Cardoso, Murat Guimarães e David Azambuja.

LIÇÕES DE MATEMÁTICA

CAPÍTULO I

NUMERAÇÃO

1. **Noção de grandeza.** — Nas salas de aula dos cursos complementares, onde os professores ministram as suas lições, encontram-se vários objetos distintos, como sejam, por exemplo, as carteiras destinadas aos alunos que compõem a classe, os mapas colocados na parede, os modelos de sólidos geométricos dispostos sôbre a mesa, os livros guardados no armário, etc.

Êsses objetos, que podem ser semelhantes como as carteiras ou diferentes como os modelos, formam *coleções*. As coleções podem aumentar ou diminuir e a duração das aulas pode variar de um dia para outro.

A duração das aulas e as coleções de objetos que citámos são *grandezas*.

Dizemos, então, que *grandeza* é tudo aquilo que pode aumentar ou diminuir.

Entre as grandezas, fazemos a distinção de *contínuas* e *descontínuas*.

As grandezas *contínuas* são formadas por um todo homogêneo e podem ser divididas, sem alteração da sua natureza, em partes tão pequenas como se queira.

As grandezas *descontínuas* são formadas por coleções de objetos distintos e não podem ser divididas, sem alteração da sua natureza, em partes tão pequenas como se queira.

No exemplo que acima demos, são grandezas descontínuas o grupo de alunos, o conjunto de carteiras, de mapas, de modelos e de livros, enquanto que a duração da lição é grandeza contínua.

Para maior facilidade da compreensão das noções fundamentais que trataremos a seguir, faremos sempre referência às grandezas descontínuas.

2. **Noção de número.** — A apreciação dessas coleções, como de quaisquer outras, traz ao nosso espírito as idéias seguintes: *a*) do objeto isolado, que o nosso pensamento separa intuìtivamente do grupo; *b*) da importância das coleções, isto é, da *quantidade* de objetos de que se compõem (1).

Ao objeto isolado, damos a denominação de *unidade*. Assim, em um grupo de alunos, a unidade é o aluno; em uma coleção de moedas a unidade é a moeda; em uma coleção de selos a unidade é o sêlo.

A apreciação da quantidade de objetos que compõem as coleções conduz-nos à idéia de *número natural*.

Verificamos, assim, que *a noção de número se origina, por abstração, da idéia de coleção de objetos distintos*.

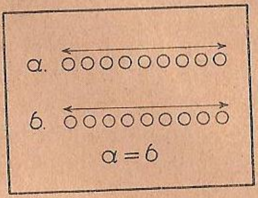
Para melhor esclarecer essa noção, vejamos como se pode fazer a comparação de duas coleções.

3. **Comparação de duas coleções.** — Imaginemos que duas crianças que ainda não sabem contar desejam comparar em *quantidade* as coleções de moedas que possuem em seus cofres.

O processo que empregarão para alcançarem o seu objetivo será naturalmente o seguinte: irão retirando, uma a uma, as moedas de cada um dos cofres e dispondo-as sôbre a mesa, umas em frente das outras, da maneira indicada nas figuras que seguem.

Assim procedendo, chegarão a um dos três resultados que se podem apresentar.

1.º Poderá suceder que, quando for retirada a última moeda da coleção *a*, também seja retirada a última da coleção *b*.

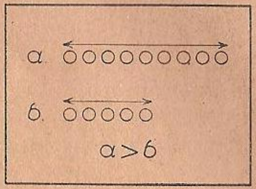


Neste caso, haverá correspondência completa entre as unidades das duas coleções, isto é, a cada uma das moedas da coleção *a* corresponderá uma única moeda da coleção *b* e, a cada uma das moedas da coleção *b* corresponderá uma única moeda da coleção *a*.

Dizemos, então, que a coleção *a* contém *tantas* moedas *quantas* contém a coleção *b*.

2.º Poderá suceder que, quando for retirada a última moeda da coleção *b*, ainda se encontrem algumas na coleção *a*.

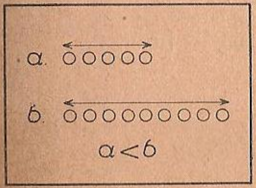
(1) Os conceitos de unidade e pluralidade são primitivos, isto é, não definíveis por outros já conhecidos.



Neste caso, a cada uma das moedas da coleção *b* corresponde uma das moedas da coleção *a*; mas, nem a todas as moedas da coleção *a* correspondem moedas da coleção *b*.

Dizemos, então, que a coleção *a* contém *mais* moedas do que a coleção *b*.

3.º Poderá suceder ainda que, quando for retirada a última moeda da coleção *a*, ainda se encontrem moedas na coleção *b*.



Neste caso, que é o inverso do anterior, a cada uma das moedas da coleção *a* corresponde uma das moedas da coleção *b*; mas nem a todas as moedas da coleção *b* correspondem moedas da coleção *a*.

Dizemos, então, que a coleção *a* contém *menos* moedas do que a coleção *b*.

Aliás, êsse processo rudimentar de comparação era o empregado pelos homens primitivos para apreciarem a *quantidade* de objetos de que se compunham as coleções que tinham necessidade de considerar.

4. **Série natural dos números.** — Reunamos um objeto a outro para formar uma coleção; dizemos que essa coleção contém um e um, ou *dois* objetos. Reunamos outro objeto à coleção assim formada; dizemos que a nova coleção contém um e um e um, ou *três* objetos. Assim prosseguindo, formaremos, cada vez que juntamos um objeto a uma coleção já obtida, uma nova coleção à qual faremos corresponder um novo número.

As coleções, assim formadas, correspondem os números seguintes:

Tais números, denominados inteiros e formados numa ordem determinada, constituem a *série natural dos números*.

Como é fácil de imaginar, essa série é *ilimitada*, uma vez que podemos sempre reünir um objeto a uma coleção qualquer para formar uma nova coleção, ou seja, podemos sempre reünir uma unidade a um número qualquer para formar um novo número.

Conhecida a série natural dos números, para procurar o número correspondente a uma determinada coleção, iremos separando, um a um, os objetos que a compõem e dizendo sucessivamente: *um*, *dois*, *três*, etc.

Se, ao enunciarmos o número nove, tivermos separado o último objeto da coleção, dizemos que ela se compõe de nove objetos.

Assim procedendo, nada mais fizemos do que *contar* os objetos da coleção considerada.

Contar os objetos de uma coleção significa, pois, procurar o número dêles.

Devemos notar que a série natural dos números está ligada à idéia de *ordem*. «*Ordenar objetos* é fazer corresponder um dêsses objetos ao número um e chamá-lo *primeiro;* outro objeto ao número dois e chamá-lo *segundo*, etc.».

5. **Zero**. — Por um procedimento inverso ao indicado, podemos desfazer uma coleção, retirando, um a um, todos os seus objetos.

Retirado o último, a coleção desaparece naturalmente.

Para indicar êsse fato, costumamos dizer que o número de objetos da coleção é zero.

Zero, então, é considerado como número, indicando a ausência de objetos.

6. **Números iguais**. — No primeiro caso considerado na comparação das coleções (n.º 3, 1.º), em que a coleção *a* contém tantos objetos quantos contém a coleção *b*, dizemos que a ambas correspondem *números iguais* ou o mesmo número.

7. **Números desiguais**. — No segundo caso, em que a coleção *a* contém mais objetos do que a coleção *b*, dizemos que o número correspondente à primeira é *maior que* o número correspondente à segunda.

Inversamente, no terceiro caso, em que a coleção *a* contém menos objetos do que a coleção *b*, dizemos que o número correspondente à primeira é *menor que* o número correspondente à segunda.

8. **Símbolos**. — Para representar os números inteiros, empregam-se dez símbolos, denominados *algarismos*.

Correspondem êles aos números seguintes:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
zero	um	dois	três	quatro	cinco	seis	sete	oito	nove.

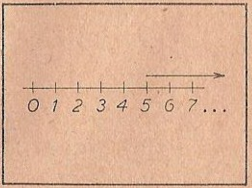
Os números inteiros podem ser também representados por letras.

Assim é que dizemos, por exemplo, número *a*, número *b*, número *c*, etc.

9. **Sinais de relação.** — Para indicar as relações entre os números, empregamos os símbolos abreviativos seguintes:

$a = b$ (*a* igual a *b*)
$a > b$ (*a* maior que *b*)
$a < b$ (*a* menor que *b*)
$a \gtrless b$ (*a* diferente de *b*)
$a \geqq b$ (*a* maior ou igual a *b*)
$a \leqq b$ (*a* menor ou igual a *b*).

10. **Representação gráfica.** — Sôbre uma reta indefinida, marquemos um ponto qualquer correspondente ao número 0. A partir dêsse ponto, em direção à direita, marquemos segmentos sucessivos iguais a uma certa unidade escolhida. Os pontos, assim determinados, representam as distâncias de cada um dêles ao ponto zero, tomado como origem. Assim, a distância de 0 a 1 mede 1 unidade, de 0 a 2 mede 2 unidades, de 0 a 3 mede 3 unidades...



Localizam-se, assim, gràficamente os números.

Observemos que, de acôrdo com essa representação, cada número é maior que qualquer um dos que o precedem e menor que qualquer um dos que o sucedem, na série natural. Assim

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 \ldots$$

11. **Números concretos. Números abstratos.** — Conforme já vimos, um mesmo número pode corresponder a duas ou mais coleções de objetos diferentes. Êsse fato leva-nos a considerar também os números independentemente das coleções que representam. Assim, podemos dizer simplesmente 5 unidades, 8 unidades, etc., sem mencionar a natureza dessas unidades.

Dessas duas maneiras de considerar os números, fazendo ou não *abstração* da natureza das coleções correspondentes, resultam os números *abstratos* e *concretos*.

Número abstrato é o que não designa a espécie da unidade a que se refere. — Exemplo: 3 unidades.

Número concreto é o que designa a espécie da unidade a que se refere. — Exemplo: 7 livros.

12. **Numeração.** — Aos primeiros numeros da série natural foram dados, como vimos, nomes especiais e para representá-los foram empregados sinais gráficos (algarismos) diferentes.

Mas, tendo em vista o fato de ser essa série ilimitada, verifica-se a impossibilidade de se continuar sempre empregando nomes e símbolos arbitrários, distintos dos que correspondem aos precedentes, para a representação de todos os números que se possam formar.

Além disso, a nossa memória não poderia reter todos êsses nomes e símbolos, como também, ao enunciar ou escrever um número qualquer, dificilmente poderíamos fazer idéia da sua ordem de grandeza, ou seja, da sua colocação na série natural.

Para facilitar a representação dos números, criou-se a *numeração*.

Numeração é, pois, o conjunto de leis, princípios e artifícios empregados para a representação dos números.

A numeração compreende duas partes: *numeração falada* e *numeração escrita*.

O objeto da numeração falada é dar nomes aos números, com auxílio de pequeno número de palavras, combinadas entre elas segundo regras simples, de maneira que êsses nomes possam dar idéia da ordem de grandeza dos números a que correspondem.

O objeto da numeração escrita é representar os números, com auxílio de pequeno número de sinais (algarismos), combinados entre êles segundo regras simples, de maneira que os símbolos, assim formados, possam dar idéia da ordem de grandeza dos números a que correspondem.

NUMERAÇÃO FALADA

13. — Aos primeiros números da série natural foram dados os seguintes nomes: *um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez.*

Vejamos como se pode, com auxílio dessas palavras, contar os objetos que compõem uma coleção qualquer.

Imaginemos que se trata de uma coleção de selos.

Grupemos os selos de dez em dez. A cada grupo, assim formado, denominemos *dezena*. Suponhamos que, depois de formados cinco dêsses grupos (dezenas), ainda restam oito selos na coleção. Dizemos, então, que a nossa coleção se compõe de cinco dezenas e oito.

Suponhamos, agora, que obtemos mais de dez grupos de dez selos, ou seja, mais de dez dezenas. Grupemos as dezenas de dez em dez. A cada um dos novos grupos, assim formados, denominemos *centena*. Se, depois de formados sete desses grupos (centenas) ainda restarem na coleção cinco dezenas e oito selos, diremos que a nossa coleção se compõe de sete centenas, cinco dezenas e oito.

Suponhamos, ainda, que obtemos mais de dez centenas. Grupemos as centenas de dez em dez. A cada um dos novos grupos, assim formados, denominemos *milhar*. Se, depois de formados dois desses grupos (milhares) ainda restarem na coleção sete centenas, cinco dezenas e oito, diremos que a nossa coleção se compõe de dois milhares, sete centenas, cinco dezenas e oito.

Observemos que, ao iniciar a contagem dos selos de nossa coleção, a unidade era o sêlo (unidade simples). Depois de formados os primeiros grupos, adotámos como unidade um dêsses grupos, formado de *dez* selos (dezena); essa nova unidade já não é simples como a primeira, mas composta ou de segunda ordem. Depois de formados os segundos grupos, adotámos como unidade um dêsses grupos, formado de *dez* dos grupos anteriores (centena); essa nova unidade é denominada de terceira ordem.

14. **Convenção fundamental.** — *Uma unidade de uma ordem qualquer é formada pela reünião de dez unidades da ordem precedente.* — Assim, pois

dez unidades simples formam uma dezena;
dez dezenas formam uma centena;
dez centenas formam uma unidade de milhar...

Para enunciar números maiores que os que acima considerámos, bastaria criar nomes distintos para designar as novas ordens obtidas.

Entretanto, para abreviar a nomenclatura e diminuir o número de palavras a serem empregadas, grupamos as ordens três a três, a partir da primeira, para formar as *classes*.

Indiquemos, no quadro que segue, as classes formadas pelas unidades das nove primeiras ordens:

Primeira ordem	*: unidades*	*de unidades*	*: primeira classe*
segunda ordem	*: dezenas*		
terceira ordem	*: centenas*		
quarta ordem	*: unidades*	*de milhares*	*: segunda classe*
quinta ordem	*: dezenas*		
sexta ordem	*: centenas*		
sétima ordem	*: unidades*	*de milhão*	*: terceira classe*
oitava ordem	*: dezenas*		*etc.*
nona ordem	*: centenas*		

Com auxílio de treze palavras apenas, podemos, pois, enunciar todos os números inferiores a um bilhão. São elas: um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez (uma dezena), cem (uma centena), mil (um milhar) e um milhão.

Essas palavras correspondem, respectivamente, aos nomes dos nove primeiros números, das primeiras ordens e aos das primeiras classes.

Para enunciar números ainda maiores, emprega-se uma palavra nova (formada com a terminação *lhão*) para designar cada uma das demais classes que se podem formar. Denominam-se elas: bilhão (quarta classe), trilhão (quinta classe), quatrilhão (sexta classe), etc.

15. **Observação.** — Foram consagradas pelo uso as seguintes modificações:

1.ª Diz-se: onze, doze, treze, quatorze e quinze no lugar de dez e um, dez e dois, dez e três, dez e quatro e dez e cinco; as denominações dezeseis, dezesete, dezoito e dezenove foram apenas contraídas.

2.ª Diz-se: dez, vinte, trinta, quarenta, cinqüenta, sessenta, setenta, oitenta e noventa no lugar de uma dezena, duas dezenas, três dezenas, quatro dezenas, cinco dezenas, seis dezenas, sete dezenas, oito dezenas e nove dezenas.

3.ª Diz-se: cem, duzentos, trezentos, quatrocentos, quinhentos, seiscentos, setecentos, oitocentos e novecentos no lugar de uma centena, duas centenas, três centenas, quatro centenas, cinco centenas, seis centenas, sete centenas, oito centenas, nove centenas.

4.ª Diz-se: mil, dois mil, três mil, etc., no lugar de um milhar, dois milhares, três milhares, etc.

NUMERAÇÃO ESCRITA

16. — Para a representação dos nove primeiros números empregam-se, como vimos, os sinais gráficos (algarismos) seguintes: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Com o auxílio dêsses sinais e o símbolo 0 (zero), cuja significação adiante daremos, podem ser representados todos os números que se imaginarem.

Para isso, entretanto, é preciso que êsses sinais sejam convenientemente combinados, de maneira a representarem, em um mesmo número, cada uma das unidades de suas diferentes ordens.

Estabeleceu-se, para êsse fim, a seguinte

17. **Convenção fundamental.** — *Todo o algarismo escrito à esquerda de outro representa unidades dez vezes maiores do que representaria se estivesse escrito no lugar dêsse outro.*

Assim, a partir da direita, o primeiro algarismo representa unidades simples, o segundo dezenas, o terceiro centenas, etc.

Para se escrever um número qualquer, basta, portanto, representar as unidades de suas diferentes ordens pelos algarismos correspondentes e dispô-los de acôrdo com a convenção acima.

Exemplo: escrever, com algarismos, o número cinco mil seiscentos e vinte e quatro.

Êsse número contém, como se sabe, *cinco* unidades de milhar, *seis* centenas, *duas* dezenas e *quatro* unidades, ou seja:

5 unidades de milhar 6 centenas 2 dezenas 4 unidades.

Para indicar as unidades das ordens correspondentes aos algarismos acima, escrevemos, de acôrdo com a convenção fundamental, o algarismo 2 à esquerda do algarismo 4, o algarismo 6 à esquerda de 2 e o algarismo 5 à esquerda de 6, isto é, escrevemos simplesmente 5.624.

18. **Observação.** — Pode suceder que, no número dado para ser escrito, faltem unidades de certas ordens. Para indicar êsse fato, coloca-se, no lugar correspondente às unidades que faltam, o símbolo 0 (zero).

Exemplo: escrever o número quinhentos e oito.

Esse número contém, como se sabe, *cinco* centenas e oito unidades, mas não contém dezenas.

Empregando o símbolo 0 para indicar a ausência de dezenas, escrevemos o número dado da maneira seguinte: 508.

Devemos notar que o emprêgo do símbolo *0* foi indispensável para que o algarismo 5, que representa unidades de terceira ordem (centenas), pudesse ficar colocado em terceiro lugar, a partir da direita.

19. **Valores dos algarismos.** — O símbolo *0*, empregado, como dissemos, para indicar nos números ausência de unidades de uma certa ordem, é considerado como algarismo. Eleva-se, assim, a dez o número de algarismos arábicos empregados para a representação dos números.

Os algarismos *1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,* e *9* são denominados *algarismos significativos* e o algarismo *0* é chamado *algarismo insignificativo.*

Em conseqüência da convenção fundamental (n.º 17), os algarismos significativos representam dois valores: *absoluto* e *relativo.*

Valor absoluto é o valor que êle representa quando está isolado.

Valor relativo é o valor que êle representa, conforme a posição que ocupa no número.

Exemplo: assim, em o número 24.739, o valor absoluto do algarismo 7 é *sete unidades* e o valor relativo é *sete centenas.*

20. **Regra para escrever os números.** — De acôrdo com o que já expusemos, podemos estabelecer, para escrever qualquer número inteiro enunciado, a regra seguinte:

Escrevem-se, uns em seguida aos outros, da esquerda para a direita os algarismos que representam as unidades das diferentes ordens, a partir das unidades de ordem mais elevada, indicando-se por zeros as unidades de qualquer ordem, que faltarem.

Exemplo: assim, o número sessenta e cinco milhões, quatrocentos e sete mil e cinco unidades é escrito com algarismos da maneira seguinte: 65.407.005.

21. **Regra para ler os números.** — Para se ler um número inteiro qualquer escrito, emprega-se a regra seguinte:

Separam-se, no número dado, classes de três algarismos da direita para a esquerda, podendo a última da esquerda conter um, dois ou três algarismos; em seguida, lêem-se separadamente as classes, da esquerda para a direita, dando-se a cada uma a denominação que lhe corresponde.

Exemplo: assim, lê-se o número 5.724.753 da maneira seguinte: cinco milhões, setecentos e vinte e quatro mil, setecentos e cinqüenta e três unidades.

22. **Conseqüências da convenção fundamental.** — Além da conseqüência já citada (n.º 19), decorrem ainda da convenção fundamental as seguintes:

1.ª *Colocando-se um ou mais zeros à esquerda de um número, o seu valor não se altera.*

Consideremos o número *58*. Colocando-se à sua esquerda, três zeros, por exemplo, resultará: *00058*. Examinando o número obtido, verificamos que os valores absoluto e relativo de cada um dos seus algarismos conservaram-se os mesmos. Com efeito, o algarismo *8*, que representava unidades simples no número dado, continua representando unidades simples e que o algarismo 5, que representava dezenas, continua ainda representando dezenas. Assim, pois, o número dado não sofreu alteração com a colocação dos zeros à sua esquerda.

2.ª *Colocando-se um zero à direita de um número inteiro, o número resultante eqüivale a dez vezes o anterior.*

Consideremos o número *29*. Colocando-se, à sua direita, um zero, resultará o número *290*. Examinando o número obtido, verificamos que, a-pesar dos valores absolutos dos algarismos não terem variado, o valor relativo de cada um tornou-se eqüivalente a dez vezes o anterior. Com efeito, o algarismo 9, que representava unidades simples no número primitivo, passou a representar dezenas no número resultante, e o algarismo 2, que representava dezenas no número primitivo, passou a representar centenas no outro número.

23. **Base de um sistema de numeração.** — De acôrdo com as convenções estabelecidas no sistema de numeração que acabámos de expor, *dez* unidades de uma ordem qualquer formam uma unidade de ordem imediatamente superior. Dizemos, então, que o sistema a que nos referimos é decimal ou de base dez.

Base de um sistema de numeração é, pois, *o número de unidades necessárias para formar uma unidade de ordem imediatamente superior.*

Empregando convenções análogas às que citámos, podemos formar outros sistemas de numeração de bases quaisquer, como sejam, por exemplo, sistema de base 2, de base 7, de base 12, etc.

O sistema decimal, porém, é universalmente adotado.

NUMERAÇÃO ROMANA

24. — Os algarismos que empregavam os romanos em sua numeração eram sete letras maiúsculas do alfabeto latino, às quais atribuiam os valores seguintes:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1.000.

E, com auxílio das regras que enunciaremos a seguir, representavam os números usuais, empregando apenas êsses símbolos.

A numeração romana, não apresentando vantagens de ordem prática, encontra-se quasi completamente abandonada.

Presentemente, só dela nos servimos em casos especiais, como sejam, por exemplo, na designação dos números de ordem de capítulos ou parágrafos de livros, na inscrição de datas em monumentos, na indicação das divisões horárias dos mostradores de relógios, na distinção da cronologia dos reis, dos papas, etc.

Para a representação dos números, os algarismos romanos são combinados de acôrdo com as seguintes regras:

1.ª *Somam-se os valores representados pelos algarismos semelhantes escritos consecutivamente.* — Exemplos

2	3	20	30	200	300	2.000	3.000
II	III	XX	XXX	CC	CCC	MM	MMM.

25. **Observação.** — Os algarismos V, L e D não se repetem. Os demais podem ser tomados consecutivamente até três vezes no máximo.

2.ª *O valor de todo o algarismo escrito à esquerda de outro de valor maior é subtraído do valor dêsse outro.* — Exemplos

IV	IX	XL	XC	CD	CM...
4	9	40	90	400	900

3.ª *O valor de todo o algarismo escrito à direita de outro de valor maior é somado ao valor dêsse outro.* — Exemplos

6	11	60	110	600	1.100
VI	XI	LX	CX	DC	MC...

4.ª *Para tornar o valor de um número representado em algarismos romanos mil, um milhão, um bilhão, etc. de vezes maior, basta colocar-se sôbre êle um, dois, três, etc. traços horizontais.*

Exemplos

XIV	$\overline{XIV}$	$\overline{\overline{XIV}}$	$\overline{\overline{\overline{XIV}}}$
14	14.000	14.000.000	14.000.000.000.

26. **Exercícios.**

1. Representar com algarismos romanos o número 1.934. R. MCMXXXIV.
2. Representar com algarismos romanos o número 12.568. R. $\overline{XII}$DLXVIII.
3. Representar com algarismos romanos o número 353.149. R. $\overline{CCCLIII}$CXLIX.
4. Representar com algarismos arábicos o número MMCCCXCV. R. 2.395.
5. Representar com algarismos arábicos o número $\overline{XII}$DXLI. R. 12.541.
6. Representar com algarismos arábicos o número $\overline{CCXXXVI}$DXXI. R. 236.521.

Observação. — Depois de dar as operações fundamentais, resolveremos alguns problemas sôbre a numeração.

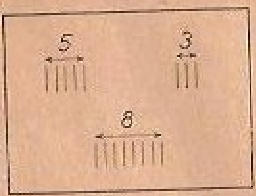
Capítulo II

ADIÇÃO

27. **Noção de adição.** — Um estudante, para formar a sua bibliotéca, adquire, em uma livraria, 5 compêndios, e noutra 3.

Para saber quantos livros adquiriu, êle reune todos em uma coleção única e conta-os.

Assim procedendo, efetua a *adição* das duas coleções. A coleção resultante é a *soma* das duas coleções primitivas e o número 8, que lhe corresponde, é a *soma* dos numeros 5 e 3 que correspondem às duas coleções consideradas.



Em se tratando de números concretos, é evidente que a adição só tem sentido quando os números considerados representam unidades da mesma espécie. A *soma* é sempre da mesma espécie das unidades representadas pelos números dados.

Assim, no exemplo acima, em que se reuniram duas coleções de livros, a coleção resultante é também composta de livros.

28. **Definição.** — Para o caso de números abstratos, definimos a adição da maneira seguinte:

Adição é a operação que tem por fim reünir em um só número todas as unidades contidas em dois ou mais números dados.

29. **Sinal.** — Para indicar a adição entre dois ou mais numeros emprega-se o sinal $+$, que se lê *mais*.

30. **Parcelas e soma.** — Os números dados para serem somados denominam-se *parcelas* ou *termos* da adição, e o resultado da adição denomina-se *soma* ou *total*.

Assim, no exemplo dado acima

$$5+3=8,$$

5 e 3 são as *parcelas* ou *termos* e 8 é a *soma* ou *total*.

No capítulo anterior, explicámos o emprêgo do sinal $=$. O termo ou conjunto de termos colocados à esquerda dêsse sinal denomina-se *primeiro membro* da igualdade e o termo ou conjunto de termos colocados à direita dêsse sinal denomina-se *segundo membro* da igualdade.

31. **Sinais de coleção.** — Além dos sinais de relação, mencionados no capitulo anterior (n.º 9), e dos demais que iremos introduzindo à medida que necessitarmos, devemos considerar os seguintes: ( ), [ ] e { }, denominados *sinais de coleção*.

O sinal ( ), denominado parêntesis, indica que as operações nele contidas devem ser consideradas como *efetuadas*.

Assim, na expressão

$$3+5+(8+7),$$

$3+5$ é uma *soma* indicada e $(8+7)$ é uma *soma efetuada*.

Ainda com a mesma significação, empregam-se os sinais [ ] e { } denominados, respectivamente, *colchetes* e *chaves*.

32. **Princípios relativos à adição.** — 1.º *A ordem das parcelas não influe na soma.*

Com efeito, imaginemos que, para formar uma coleção de 18 livros, reunimos três coleções compostas de 7, 5 e 6 livros, respectivamente. E' evidente que a ordem em que forem reunidos êsses livros não influe em o número de livros da coleção total. Assim, podemos indiferentemente reünir as duas primeiras coleções e depois a terceira, ou reünir a primeira e a terceira e depois a segunda, ou ainda reünir a segunda e a terceira e depois a primeira. — Assim, pois

$$7+5+6=6+7+5.$$

De uma maneira geral, representando por a e b dois números quaisquer, teremos sempre

$$a+b=b+a.$$

2.º *A soma de vários números não se altera quando se substituem alguns dentre êles pela sua soma, ou inversamente,* *quando se substitue um dêles por alguns outros, cuja soma seja igual a êsse número.*

Ainda considerando o exemplo concreto acima dado, observamos que, para compor a coleção total de 18 livros, é indiferente reünir uma a uma, as coleções dadas, ou reünir prèviamente duas delas, a de 7 e a de 5 livros, por exemplo, em uma única de 12, e depois, a essa nova coleção assim formada, reünir a terceira coleção de 6 livros. Em qualquer caso, a coleção resultante se comporá de 18 livros. — Assim, pois

$$(7+5)+6=7+5+6,$$

ou $$12+6=7+5+6.$$

De uma maneira geral, representando por a, b e c três números quaisquer, teremos sempre

$$a+(b+c)=a+b+c.$$

33. **Observação.** — De acôrdo com a significação da adição e do número zero (n.º 5), dizemos que, somando zero a um número qualquer ou somando um número qualquer a zero, o resultado é o próprio número considerado. — Assim

$$5+0=5;\ 0+5=5;\ 0+0=0.$$

De uma maneira geral, representando por a um número qualquer, teremos sempre

$$a+0=a;\ 0+a=a.$$

34. **Prática da operação.** — Distinguimos, na adição, os três casos seguintes:

1.º *Adição de dois números de um só algarismo.*

2.º *Adição de um número de um só algarismo a outro de vários algarismos.*

3.º *Adição de vários números quaisquer.*

35. **1.º Caso.** — Consideremos os numeros 4 e 3, cuja soma queremos obter. Decompondo-os em suas unidades, encontraremos

$$4=1+1+1+1,$$
$$3=1+1+1.$$

De acôrdo com a definição, teremos de reünir as unida-

des de ambos os números dados em um número único, o que conseguimos da maneira seguinte:

$$4+3=1+1+1+1+1+1+1=7.$$

Na prática, não temos necessidade de operar assim, por isso que guardamos de memória os resultados das adições de dois números de um algarismo (1).

Êsses resultados podem ser obtidos pela *tabuada de somar*, que se vê ao lado. Para construí-la, escrevem-se, na primeira linha horizontal, os números de 0 a 9. Depois, forma-se cada uma das demais linhas horizontais somando 1 a cada um dos números escritos. Repete-se essa operação até serem escritas dez linhas consecutivas.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Para se encontrar na tabuada o número correspondente à soma de dois outros de um algarismo, percorre-se a coluna vertical começada por um dêles até encontrar-se a linha horizontal que se inicia pelo outro.

Como exemplo, indicámos, na figura acima, as duas maneiras de se obter a soma dos números 8 e 4.

36. **2.º Caso.** — Consideremos os números 4 e 33, cuja soma queremos obter.

Tendo em vista que 33 é um número composto de 3 dezenas e 3 unidades, podemos escrever

$$33=30+3$$

e indicar a operação do modo seguinte:

$$33+4=30+(3+4).$$

Somando os dois termos contidos entre os parêntesis (3 e 4 unidades), encontraremos 7 unidades. Resulta, portanto

$$33+4=30+7=37.$$

(1) Devemos notar que a idéia de adição está implicitamente contida na idéia de número.

A igualdade acima indica que, para obter o resultado da operação proposta, basta somar as unidades de 4 às unidades de 33.

Pode acontecer também que a soma das unidades dos dois números dados seja maior que 10. Vejamos, então, como se deverá proceder.

Consideremos os números 48 e 9.

Indiquemos a operação de maneira análoga à anterior

$$48+9=40+(8+9).$$

Efetuando a operação indicada nos parêntesis, resultará:

$$48+9=40+17.$$

Decompondo o número 17 em 1 dezena e 7 unidades, resultará:

$$48+9=(40+10)+7.$$

Efetuando a operação indicada entre os parêntesis, obteremos

$$48+9=50+7=57.$$

Na prática, dizemos: 8 mais 9, 17, e retemos mentalmente uma dezena para reüní-la às dezenas do número 48.

37. **3.º Caso**. — Consideremos os números 38, 127 e 285, cuja soma queremos obter.

Notando que o número 38 se compõe de 3 dezenas e 8 unidades, que o número 127 se compõe de 1 centena, 2 dezenas e 7 unidades, e que o número 286 se compõe de 2 centenas, 8 dezenas e 6 unidades, poderemos representar êsses três números dados da maneira seguinte:

$$\begin{aligned} 38 &= \phantom{100+{}} 30+8, \\ 127 &= 100+20+7, \\ 286 &= 200+80+6. \end{aligned}$$

Isto posto, a adição dos números considerados poderá ser indicada assim

$$38+127+286=(30+8)+(100+20+7)+(200+80+6).$$

Como sabemos que a ordem das parcelas não influe na soma (n.º 32), podemos escrever

$$38+127+286=(100+200)+(30+20+80)+(8+7+6).$$

Notemos que as somas indicadas nos diversos parêntesis representam, respectivamente, a soma das *centenas*, das *dezenas* e das *unidades* dos números considerados.

Efetuando essas operações, encontraremos

$$38+127+286=300+130+21.$$

Assim procedendo, nada mais fizemos do que efetuar a soma das unidades de cada ordem (centenas, dezenas e unidades simples) dos números considerados.

Notemos, porém, que o número 21, correspondente à soma das unidades dos números dados, compõe-se de 2 dezenas e 1 unidade, ou seja: $21=20+1$ e que o número 130, correspondente à soma das dezenas, compõe-se de 1 centena e 3 dezenas, ou seja

$$130=100+30.$$

De acôrdo com essas considerações, teremos

$$38+127+286=300+130+21=(300+100)+(30+20)+1.$$

Reunindo as centenas, em um número único e as dezenas em outro, encontraremos finalmente

$$\begin{aligned} 38+127+286 &= (300+100)+(30+20)+1= \\ &= 400+50+1=451. \end{aligned}$$

Na prática, dispomos a operação da maneira indicada ao lado, escrevendo os números dados de modo que as unidades de mesma ordem de cada um dêles fiquem colocadas em uma mesma coluna vertical. Iniciando a operação pela coluna das unidades simples, encontramos a soma parcial 21. Escrevemos 1 na coluna das unidades, sob o traço horizontal e retemos mentalmente 2 dezenas para reüní-las à soma das dezenas dos números dados. Somando as dezenas, inclusive as 2 provenientes da soma das unidades, encontramos 15. Escrevemos 5 na coluna das dezenas e retemos 1 centena para reüní-la à soma das centenas dos números dados. Somamos, depois, as centenas, inclusive a proveniente da soma das dezenas e escrevemos o resultado obtido (4) na coluna das centenas.

$$\boxed{\begin{array}{r} 38 \\ 127 \\ 286 \\ \hline 451 \end{array}}$$

38. **Regra geral**. — *Para somar dois ou mais números quaisquer, somam-se sucessivamente as unidades de mesma ordem de todos êles, a partir das unidades simples: se, de*

alguma dessas somas parciais, resultarem unidades de ordem imediatamente superior, essas são reservadas para serem reunidas às da ordem correspondente. — Exemplos

187	5	198
32	32	264
643	873	353
1.081	1.941	1.259
415	18.329	10.133
2.342	134.165	18.019
4.700	155.345	30.226

39. **Indicações práticas.** — Quando são muitas as parcelas de uma adição, para facilitar a operação, podemos separá-las em pequenos grupos, somar êsses grupos e depois reünir as somas parciais obtidas. — Exemplos

195		431	
286		1.282	
377	858	619	2.332
468		3.164	
559		218	
641	1.668	45	3.427
732		1.378	
823		2.154	
914	2.469	219	3.751
4.995	4.995	9.510	9.510

No caso da adição de muitas parcelas, devemos ainda, se não quisermos adotar a disposição acima, tomar cuidado especial com as reservas provenientes da adição de cada coluna, a-fim-de evitarmos enganos que fàcilmente poderão ser cometidos.

Sob êsse ponto de vista, podemos adotar na prática duas disposições diversas. Consiste uma delas em escrevermos, acima da primeira parcela, nas colunas correspondentes, as reservas obtidas em cada coluna, dispondo-as de maneira que as unidades de mesma ordem se correspondam em uma mes-

ma coluna vertical. — Exemplo

23	145
145	367
367	589
589	702
702	914
914	236
236	33
	22
	27
2.953	2.953

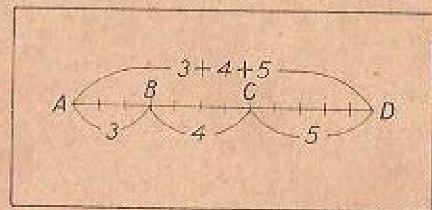
40. **Interpretação geométrica.** — Consideremos a soma indicada

$$3+4+5.$$

Representemos, respectivamente, os números dados pelos segmentos seguintes:

$$AB=3$$
$$BC=4$$
$$CD=5,$$

tirados todos sôbre o mesmo suporte, como se vê na figura que segue:



Tendo em vista que

$$AB+BC+CD=AD$$
e
$$3+4+5=12,$$

segue-se que o segmento AD representa geomètricamente o total obtido (1).

(1) Mais adiante, no capítulo «Noções sôbre as principais formas geométricas», faremos o estudo dos segmentos.

41. **Prova.** — Denominamos *prova* de uma operação a outra operação que se faz para verificar a exatidão do resultado obtido na operação já efetuada.

Devemos notar, entretanto, que a prova de uma operação não nos pode dar a segurança completa da exatidão da operação efetuada, mas apenas uma *probabilidade* de que assim aconteça, uma vez que, tanto na operação direta como na prova, podem ser cometidos erros que se compensem.

Empregam-se na adição freqüentemente as seguintes:

1.ª Efetua-se novamente a operação em sentido inverso, isto é, de baixo para cima, se a primeira tiver sido efetuada de cima para baixo, ou inversamente, de cima para baixo, se a primeira operação tiver sido efetuada de baixo para cima.

O resultado obtido na operação inicial e na prova deve ser o mesmo, uma vez que, como já sabemos, a ordem das parcelas não influe na soma (n. 32).

2.ª Prova dos 9 (vide n.º 151).

3.ª Prova pelo complemento aritmético do total obtido na operação efetuada (vide n.º 63).

42. **Cálculo mental.** — Necessitando freqüentemente os homens, em todos os ramos de sua atividade, de efetuar operações fundamentais, o cálculo mental e as operações abreviadas apresentam grande utilidade prática.

Empregam-se geralmente na adição mental os seguintes processos:

1.º *Processo da decomposição.*
2.º *Processo da inversão.*
3.º *Processo da compensação.*

Ésses processos, que se fundam nos princípios relativos à adição (n.º 32), diferem dos que se empregam geralmente nas adições escritas. Assim é que, nas adições escritas, a operação se inicia pela direita, ou seja, pelas unidades simples das parcelas, enquanto que, nas adições mentais, a operação se inicia em geral pelas mais altas unidades das parcelas.

Processo da decomposição: Consideremos a soma indicada

$$65 + 38.$$

Reunindo ao maior dêsses números (65) as unidades do menor (38), a partir das de ordem mais elevada (dezenas), podemos obter mentalmente a soma procurada. — Com efeito

$$65 + 38 = (65 + 30) + 8 = 95 + 8 = 103.$$

Consideremos, ainda, mais alguns exemplos e notemos que as operações indicadas em cada um devem ser efetuadas mentalmente.

$$86 + 75 = (86 + 70) + 5 = 156 + 5 = 161,$$

$$324 + 248 = (324 + 200) + 40 + 8 = \\ = (524 + 40) + 8 = 564 + 8 = 572,$$

$$846 + 357 = (846 + 300) + 50 + 7 = \\ = (1146 + 50) + 7 = 1196 + 7 = 1203,$$

$$1245 + 368 = (1245 + 300) + 60 + 8 = \\ = (1545 + 60) + 8 = 1605 + 8 = 1613.$$

Processo da transposição: Consideremos a soma indicada

$$26 + 53 + 44,$$

em que a soma das unidades de dois dos números dados é 10.

Para facilitar o cálculo mental da soma procurada, efetuamos preliminarmente a soma dos números que apresentam essa particularidade (26 e 44) para depois somar ao resultado obtido a outra parcela. — Com efeito

$$26 + 53 + 44 = (26 + 44) + 53 = 70 + 53 = 123.$$

Consideremos, ainda, mais alguns exemplos e notemos que as operações indicadas em cada um devem ser efetuadas mentalmente.

$$32 + 45 + 18 + 25 = (32 + 18) + \\ + (45 + 25) = 50 + 70 = 120,$$

$$81 + 37 + 59 + 73 = (81 + 59) + \\ + (37 + 73) = 140 + 110 = 250,$$

$$128 + 144 + 132 + 166 = (128 + \\ + 132) + (144 + 166) = 260 + 310 = 570.$$

Processo da compensação: Consideremos a soma indicada

$$48 + 95.$$

Para facilitar o cálculo mental da soma procurada, tiremos 5 unidades de 48 para reünir a 95 e efetuemos a soma dos números assim obtidos. — Com efeito

$$48 + 95 = 43 + 100 = 143.$$

Consideremos, ainda, mais alguns exemplos e notemos que as operações indicadas em cada um devem ser efetuadas mentalmente.

$$89 + 93 = 90 + 92 = 182,$$
$$245 + 88 = 233 + 100 = 333,$$
$$228 + 345 = 200 + 373 = 573.$$

Casos especiais: Entre o grande número de casos particulares que se podem apresentar na prática, consideremos os seguintes:

1.º Quando são dados dois números de dois algarismos, estando um dêles compreendido entre 10 e 20 e outro entre 90 e 100, ou um dêles entre 20 e 30 e o outro entre 80 e 90, ou um dêles entre 30 e 40 e o outro entre 70 e 80, etc., a sua soma é sempre igual a cem mais a soma das unidades simples dos números dados. — Exemplos

$$19 + 99 = 100 + 18 = 118,$$
$$23 + 89 = 100 + 12 = 112,$$
$$38 + 77 = 100 + 15 = 115,$$
$$47 + 69 = 100 + 16 = 116,$$
$$54 + 58 = 100 + 12 = 112.$$

2.º Quando são dados dois números tais, cuja soma das unidades de mesma ordem seja, no máximo, igual a 9, a soma de ambos pode ser obtida mentalmente, pelo processo empregado nas adições escritas, iniciando-se, porém, de preferência, a operação pelas unidades de ordem mais elevada.

43. Resolução de Problemas.

1. — *Napoleão nasceu em 1769 e morreu com a idade de 52 anos. Em que ano morreu Napoleão?*

O ano em que morreu Napoleão será obtido pela soma do ano em que nasceu e do número de anos que viveu, ou seja:

ano em que nasceu	1769
idade com que morreu	52
ano em que morreu	1821

2. — *Uma escola tem 3 classes: a 1.ª é frequentada por 45 alunos, a 2.ª por 37 e a 3.ª por 53. Quantos alunos freqüentam a escola?*

Evidentemente, o número total de alunos da escola será obtido pela soma do número de alunos de cada classe, ou seja:

alunos de 1.ª classe . . .	45
alunos de 2.ª classe . . .	37
alunos de 3.ª classe . . .	53
total de alunos	135

3. — *Um operário ganha 60$000 em uma semana de trabalho; na semana seguinte ganha 8$000 mais do que na 1.ª; na 3.ª semana ganha 12$000 mais do que na 2.ª. Quanto recebeu o operário pelas três semanas de trabalho?*

Para resolver o problema proposto, devemos verificar primeiramente quanto ganhou o operário em cada semana e somar depois os salários correspondentes às três semanas, ou seja:

1.ª semana		60$000
2.ª semana . .	60$000 + 8$000 . . .	68$000
3.ª semana . .	68$000 + 12$000 . . .	80$000
	total recebido	208$000

4. — *Um professor gasta em um mês: 500$000 de aluguer de casa, 500$000 na alimentação, 280$000 na aquisição de livros e revistas científicas, 300$000 em roupas e 220$000 em pequenas despesas. Depois de pagas todas essas despesas, verifica o professor que lhe restam ainda 200$000 do ordenado que recebeu. Quanto ganha mensalmente?*

Para resolver o problema proposto, devemos somar as importâncias correspondentes aos gastos efetuados no mês e, ao total assim obtido, somar a importância que restou, ou seja:

aluguer de casa	500$000
alimentação	500$000
livros e revistas	280$000
roupas	300$000
pequenas despesas	220$000
total dos gastos	1:800$000
importância excedente . . .	200$000
ordenado mensal	2:000$000

44. Exercícios.

Efetuar mentalmente as adições seguintes:

1.	16 + 10 + 3	R. 29
2.	23 + 15 + 5	R. 43
3.	37 + 24 + 10	R. 71
4.	45 + 32 + 25	R. 102
5.	54 + 48 + 32	R. 134
6.	63 + 54 + 27 + 26	R. 170
7.	78 + 63 + 32 + 47	R. 220
8.	120 + 150 + 20	R. 290

9. 280 + 130 + 45 R. 455
10. 310 + 148 + 122 R. 580

Efetuar as adições seguintes:

11. 45 + 63 + 84 R. 192
12. 121 + 344 + 455 R. 920
13. 209 + 648 + 713 + 824 R. 2.394
14. 1.245 + 1.673 + 724 + 531 R. 4.173
15. 4.420 + 1.709 + 853 + 718 R. 7.700
16. 3.619 + 1.937 + 1.243 + 824 R. 7.623
17. 5.711 + 2.222 + 4.331 + 1.027 R. 13.291
18. 10.031 + 3.429 + 8.155 + 9.037 R. 30.652
19. 12.988 + 25.541 + 18.139 + 10.001 R. 66.669
20. 354.728 + 527.049 + 180.353 + 211.125 R. 1.273.255

45. Problemas.

1. Uma pessoa adquire uma casa por 60:000$000. Por quanto dev vendê-la para obter um lucro de 2:800$000? R. 62:800$0

2. Uma pessoa nasceu em 1795 e morreu aos 48 anos de idade. que ano morreu? R. 1.8

3. Quantos dias transcorrem de 1.º de janeiro a 30 de abril, em ano bisexto? R. 1

4. Quantos dias transcorrem de 12 de março a 29 de maio do mesmo an R.

5. Um operário entrou em uma usina aos 18 anos de idade e trabal durante 23 anos. Que idade tinha ao sair? R. 4

6. A distância de Lisboa a Pernambuco é de 3.176 milhas, de Perna buco à Bahia 400, da Bahia ao Rio de Janeiro 736. Qual é a d tância entre Lisboa e Rio de Janeiro? R. 4.312 milh

7. Contam-se 20 estrêlas de 1.ª grandeza, 65 de 2.ª, 200 de 3.ª, 4 de 4.ª e 1.100 de 5.ª. Quantas são as estrêlas que se observam a 5.ª grandeza? R. 1.8

8. A exportação de café pelo pôrto de Santos foi de 9.318.260 sac em 1930, de 10.865.120 em 1931 e de 6.152.986 em 1932. Qual foi exportação total de café pelo referido pôrto nesses 3 anos? R. 26.336.666 s

9. O estado de Santa Catarina tem uma superfície de 94.000 Km aproximadamente, e a superfície do estado de São Paulo mede 156.0 Km.² mais que a daquele. Qual é a superfície do estado de S Paulo? R. 250.000 Km.

10. Um operário gasta em um mês: de aluguer de casa 50$000, na al mentação 195$000, em roupas 38$000 e em outras pequenas desp sas 48$000. Depois de pagas todas essas despesas, verifica o operár que ainda lhe restam 87$000 do salário que recebeu. Quanto ganh mensalmente? R. 418$00

11. A exportação de cacau do Brasil foi de 66.862.841 kgs. em 193 em 1931 aumentou de 9.000.492 kgs. sôbre o ano anterior e em 193

aumentou de 21.648.442 kgs. sôbre o ano anterior. Qual foi a exportação total dessa mercadoria nos 3 anos mencionados? R. 240.237.949 kgs.

Um ciclista percorreu em um dia 15.619 metros, no dia seguinte 1.738 metros mais do que no anterior e no terceiro dia 951 metros mais do que no segundo. Qual foi o percurso total do ciclista nesses 3 dias? R. 51.284 ms.

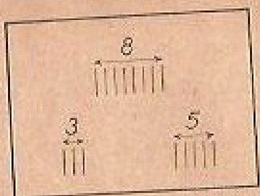
Uma pessoa deposita em um banco 50$000 e continua depositando, em cada mês seguinte, 5$000 mais que no anterior. No fim de um ano quanto depositou? R. 930$000.

Capítulo III

SUBTRAÇÃO

46. **Noção de subtração.** — Um estudante, que possue uma coleção de 8 livros, dá emprestado 3 a um seu colega. Contando depois os livros da coleção resultante, verificará que ela se compõe de 5 livros.

Assim procedendo, efetuou uma *subtração*. A coleção final, que continua em poder do primeiro estudante, é o *resto* proveniente da separação efetuada e o número 5, que lhe corresponde, é o *resto* da subtração dos números 8 e 3 que correspondem às duas coleções consideradas.



Por outro lado, vejamos que, comparando a coleção que possuia inicialmente o primeiro estudante com a que lhe restou, podemos dizer que na coleção de 8 livros há um *excesso* de 3 livros sôbre a coleção de 5 livros ou que a *diferença* entre elas é de 3 livros.

Naturalmente, quando o segundo estudante devolver os livros que tomou emprestado, restalecer-se-á a coleção primitiva, ou seja, *reunindo* à coleção de 5 livros, a coleção de 3 livros, ter-se-á novamente a coleção de 8 livros.

Em se tratando de números concretos, é evidente que a subtração só tem sentido quando os números considerados representam unidades da mesma espécie. A diferença é sempre da mesma espécie das unidades representadas pelos números propostos.

Assim, no exemplo dado acima, em que se subtraiu uma coleção de livros de outra coleção de livros, a coleção resultante é também composta de livros.

47. **Definição.** — Para o caso de números abstratos, definimos a subtração da maneira seguinte:

Subtração é a operação que tem por fim, conhecendo a soma de duas parcelas e uma delas, determinar a outra.

48. **Sinal.** — Para indicar a subtração, emprega-se o sinal —, que se lê *menos*.

49. **Termos e resultado da subtração.** — Os números dados na subtração denominam-se *termos*. O maior dêles é denominado *minuendo* e o menor *subtraendo*. O resultado da subtração é denominado *resto*, *excesso*, ou *diferença*. — Assim, no exemplo dado acima

$$8-3=5,$$

8 e 3 são os *termos*, 8 é o *minuendo*, 3 o *subtraendo* e 5 é o *resto*, *excesso* ou *diferença*.

50. **Parêntesis.** — Recordemos que, ao tratar do emprêgo dos parêntesis no capítulo anterior (n.º 31), dissemos que as operações neles contidas devem ser consideradas como efetuadas. — Assim, quando escrevemos

$$(8+5-3)+(3-2+9)-(6+4-1),$$

queremos dizer que, depois de efetuadas as operações entre os números contidos nos parêntesis, devemos somar o primeiro resultado ao segundo e dêsse total, assim obtido, subtrair o terceiro.

51. **Princípios relativos à subtração.** — 1.º *Para subtrair de um número a soma indicada de várias parcelas, pode-se subtrair do número dado sucessivamente cada uma das parcelas da soma.*

Com efeito, imaginemos que, de uma coleção de *20* objetos, queremos tirar sucessivamente três coleções de *3*, *5* e *7* objetos, respectivamente, cada uma.

Para êsse fim, podemos tirar da coleção primitiva, composta de *20* objetos, um a um, os objetos necessários para formar as três coleções consideradas.

Aliás, assim procedendo, nada mais fazemos do que tirar da coleção dada todos os objetos que devem compor as coleções que desejamos formar, o que significa, tirar da coleção de 20 objetos a soma das coleções de 3, 5 e 7 objetos. — Assim, pois

$$20-(3+5+7)=20-3-5-7.$$

De uma maneira geral, representando por n o número de objetos da coleção primitiva e por a, b, e c, respectivamente, o número de objetos de cada uma das coleções dela tiradas, podemos escrever

$$n-(a+b+c)=n-a-b-c.$$

2.º *A diferença entre dois números não se altera se, a ambos, somarmos o mesmo número.*

Com efeito, imaginemos, por exemplo, que um estudante possue uma coleção de 10 livros e outro possue uma coleção de 7 livros. Comparando essas coleções, verificamos que a primeira excede de 3 a segunda.

Evidentemente, se ambos adquirirem simultâneamente 2 livros cada um, o primeiro continuará possuindo 3 livros mais que o segundo, isto é, a *diferença* entre as duas coleções continuará sendo a mesma. — Assim, pois

$$10-7=(10+3)-(7+3).$$

De uma maneira geral, representando por a o número de livros que possuia o primeiro estudante, por b o número de livros que possuia o segundo e por n o número de livros que ambos adquiriram simultâneamente, podemos escrever

$$a-b=(a+n)-(b+n).$$

Com auxílio de considerações análogas, verifica-se também que a *diferença entre dois números não se altera quando, de ambos se subtrai, se for possível o mesmo número.* — Assim, pois

$$10-7=(10-3)-(7-3),$$

ou, de uma maneira geral

$$a-b=(a-n)-(b-n).$$

3.º *Para subtrair um número de uma soma indicada de várias parcelas, pode-se, se a operação for possível, subtraí-lo de uma das parcelas dessa soma.*

Com efeito, consideremos três coleções compostas, respectivamente, de 7, 6 e 9 objetos cada uma, que deverão ser reunidas em uma única, da qual queremos tirar uma coleção de três objetos.

Evidentemente, o resultado que obtemos, reunindo as

três coleções dadas em uma única e depois separando, um a um, os objetos necessários para formar a nova coleção, será o mesmo que o resultado que podemos obter separando, de uma das coleções componentes da coleção total, os objetos necessários para formar a nova coleção e depois reunindo os objetos restantes dessa coleção aos objetos das demais. — Assim, pois

$$(7+6+9)-3=7+6+(9-3).$$

De uma maneira geral, representando respectivamente por a, b e c o número de objetos de cada uma das coleções que devem ser reunidas e por n o número de objetos que, da coleção assim formada, devem ser separados, podemos escrever

$$(a+b+c)-n=a+b+(c-n).$$

52. **Observação.** — De acôrdo com a significação da subtração e do número zero (n.º 5), dizemos que, subtraindo zero de um número qualquer, o resultado que se obtém é o próprio número. — Assim

$$5-0=5 \text{ e } 0-0=0$$

ou, de uma maneira geral, representando por a um número qualquer

$$a-0=a.$$

Ainda pelos mesmos motivos acima expostos, dizemos que a diferença entre dois números iguais é zero. — Assim

$$5-5=0,$$

ou, de uma maneira geral

$$a-a=0.$$

53. **Prática da operação.** — Distinguimos, na subtração, os três casos seguintes:

1.º *O subtraendo e o resto têm sòmente um algarismo.*

2.º *O minuendo e o subtraendo têm vários algarismos, mas todos os algarismos do primeiro representam valores maiores ou iguais que os algarismos correspondentes do segundo.*

3.º *O minuendo e o subtraendo têm vários algarismos, mas, pelo menos um dos algarismos do primeiro, representa valor menor que o algarismo correspondente do segundo.*

54. **1.º Caso.** — Consideremos os números 15 e 7, cuja diferença queremos obter.

De acôrdo com a definição, a questão se reduz, neste caso, à procura do número que deve ser somado a 7 para que o total seja 15. — Assim, por ser

$$7+8=15,$$

concluímos que

$$15-7=8.$$

Aliás, todos os resultados das subtrações previstos no primeiro caso são fornecidos pela tabuada da adição. Entretanto, na prática, não temos necessidade de consultá-la, uma vez que guardamos de memória todos êsses resultados.

55. **2.º Caso.** — Consideremos os números 943 e 521, cuja diferença queremos obter.

Decompondo o segundo nas unidades de suas diferentes ordens, podemos escrever

$$943-521=943-(500+20+1).$$

De acôrdo com o primeiro princípio (n.º 51, 1.º), para subtrair do número 943 a soma indicada $(500+20+1)$, podemos subtrair sucessivamente dêsse número cada uma das parcelas dessa soma. — Assim, podemos escrever

$$943-521=943-500-20-1.$$

Decompondo, agora, o número 943 nas unidades de suas diferentes ordens, resultará:

$$943-521=900+40+3-500-20-1.$$

De acôrdo com o terceiro princípio (n.º 3), para subtrair cada um dos números 500, 20 e 1 da soma indicada $900+40+3$, podemos subtraí-lo respectivamente de cada uma das parcelas dessa soma. — Assim, podemos escrever

$$943-521=(900-500)+(40-20)+(3-1).$$

Resulta, portanto, que, para subtrair um número de outro, neste caso, basta subtrair as unidades de mesma ordem.

56. **3.º Caso.** — Sejam os números 745 e 382, cuja diferença queremos obter.

Pelos motivos expostos no caso anterior podemos escrever

$$745-382=700+40+5-300-80-2,$$

ou

$$745-382=(700-300)+(40-80)+(5-2).$$

Observando as diferenças indicadas nos parêntesis, verificamos que não é possível subtrair 80 de 40, ou seja, 8 dezenas de 4 dezenas.

Para tornar possível essa subtração, reunamos 100 unidades ao número 40. Obtemos, assim, 140 unidades ou 14 dezenas, das quais podemos tirar 80 unidades ou 8 dezenas. Entretanto, para que a diferença entre os números dados não se altere, é preciso, de acôrdo com o 2.º princípio (n.º 51, 2.º), somar ao subtraendo também 100 unidades ou uma centena, o que fazemos, reunindo-a às centenas do subtraendo.

Transformamos, assim, a operação acima indicada na seguinte:

$$745-382=700+140+5-400-80-2,$$

ou

$$745-382=(700-400)+(140-80)+(5-2),$$

que se efetua da maneira indicada no caso anterior.

Na prática, dispomos a operação da maneira indicada ao lado, escrevendo os números dados de modo que as unidades de mesma ordem de cada um dêles fiquem colocadas em uma mesma coluna vertical. Iniciando a operação pela coluna das unidades simples, dizemos:

$$\boxed{\begin{array}{r} 745 \\ \underline{382} \\ 363 \end{array}}$$

cinco menos dois, três. Escrevemos 3 na coluna das unidades sob o traço. Prosseguindo, dizemos: quatorze menos oito, seis. Escrevemos 6 na coluna das dezenas.

Dizemos, depois sete menos *quatro*, três. Escrevemos 3 na coluna das centenas. Obtemos, assim, a diferença 363.

57. **Regra geral.** — *Para subtrair dois números quaisquer, subtraem-se sucessivamente as unidades de mesma ordem de ambos, a partir das unidades simples; se alguma dessas subtrações parciais não for possível, somam-se, às unidades representadas pelo algarismo do minuendo, dez unidades de mesma ordem; efetua-se depois a subtração e aumenta-se de uma unidade o algarismo seguinte do subtraendo.* — Exemplos

$$\begin{array}{r} 8.543.678 \\ \underline{6.431.542} \\ 2.112.136 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7.034.236 \\ \underline{5.381.429} \\ 1.652.807 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6.000.008 \\ \underline{5.948.237} \\ 51.771 \end{array}$$

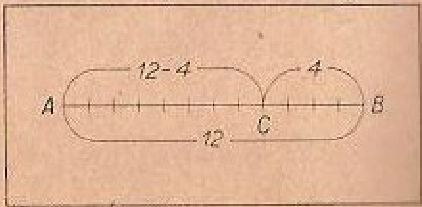
58. **Interpretação geométrica.** — Consideremos a diferença indicada

$$12 - 4.$$

Representemos os números dados pelos segmentos seguintes:

$$AB = 12$$
$$BC = 4,$$

tirados todos sôbre o mesmo suporte como se vê na figura que segue:



Tendo em vista que

$$AB - BC = AC$$
$$12 - 4 = 8.$$

Segue-se que AC representa geomètricamente o resto obtido.

59. **Prova.** — Empregam-se freqüentemente na subtração as seguintes:

1.ª Soma-se o resto encontrado na operação efetuada ao subtraendo. O total obtido deve ser igual ao minuendo. — Exemplo

$$748 - 239 = 509 \text{ e } 239 + 509 = 748.$$

2.ª Subtrai-se o resto encontrado na operação efetuada do minuendo. O resultado obtido deve ser igual ao subtraendo. — Exemplo

$$165 - 38 = 127 \text{ e } 165 - 127 = 38.$$

3.ª Prova dos 9 (vide n.º 152).

60. **Princípios relativos às somas e diferenças.** — 1.º *Para somar a um número a diferença indicada de dois outros, soma-se a êsse número o primeiro têrmo da diferença e do resultado obtido subtrai-se o segundo têrmo.* — Assim, dizemos que

$$25 + (9 - 4) = 25 + 9 - 4.$$

Com efeito, o número 9, excedendo de 5 unidades o número 4, segue-se que, se somarmos os números 25 e 9, obteremos um total que excederá também de 5 unidades o resultado exato a que devem conduzir as operações acima indicadas. Para obtê-lo, então, devemos subtrair dêsse total o número 4.

De uma maneira geral, podemos escrever

$$n + (a - b) = n + a - b.$$

2.º *Para subtrair de um número a diferença indicada de dois outros, pode-se somar a êsse número o segundo têrmo da diferença e, da soma assim obtida, subtrair o primeiro têrmo.* — Assim, dizemos que

$$27 - (7 - 4) = 27 - 7 + 4,$$

ou $$27 - (7 - 4) = 27 + 4 - 7.$$

Com efeito, sabemos, pelo segundo princípio relativo à subtração (n.º 51, 2.º), que a diferença indicada entre dois números não se altera quando a ambos somamos o mesmo número. Somando, pois, 4 unidades aos dois têrmos da diferença acima indicada, resultará

$$27 - (7 - 4) = 27 + 4 - (7 - 4 + 4),$$

ou $$27 - (7 - 4) = 27 + 4 - 7.$$

De uma maneira geral, podemos escrever

$$n - (a - b) = n - a + b,$$

ou $$n - (a - b) = n + b - a.$$

61. **Aplicações.** — Consideremos a expressão

$$24 - 7 - 3 + 12.$$

Essa expressão define, como vimos (n.º 51), um certo número, que pode ser calculado da maneira que indicámos, ou seja, subtraindo 7 de 24; do resto, assim obtido, subtraindo 3; finalmente, a êsse novo resto somando 12.

Devemos notar, entretanto que, aplicando os princípios que estudámos, podemos dar uma disposição diversa ao nosso cálculo.

Com efeito, para subtrair 3 da diferença indicada 24 — 7 podemos somar êsse número ao segundo termo dessa diferença (n.º 51, 2.º). — Assim, podemos escrever

$$24 - 7 - 3 + 12 = 24 - (7 + 3) + 12.$$

Finalmente, para somar 12 à diferença indicada 24 — (7 + 3), podemos somar êsse número ao primeiro termo dessa diferença (n.º 51, 1.º). — Assim, podemos escrever

$$24 - 7 - 3 + 12 = 24 - (7 + 3) + 12 = (24 + 12) - (7 + 3).$$

Observamos assim que, para calcular o valor de uma expressão aritmética, *somam-se todos os termos aditivos, somam-se todos os termos subtrativos e procura-se o excesso dessa primeira soma sôbre a segunda.*

Exemplos. — Calcular a expressão

$$148 - 75 - 63 + 215 - 27 + 49.$$

Dispondo os termos da maneira acima indicada, teremos:

$$148 - 75 - 63 + 215 - 27 + 49 = \\ = (148 + 215 + 49) - (75 + 63 + 27).$$

Efetuando as operações indicadas nos parêntesis, virá:

$$148 - 75 - 63 + 215 - 27 + 49 = 412 - 165.$$

Subtraindo a segunda soma da primeira, resultará finalmente

$$148 - 75 - 63 + 215 - 27 + 49 = 247.$$

Calcular a expressão

$$125 - 14 + 38 + 407 - 146 - 25 - 385.$$

Por um procedimento análogo ao indicado no exemplo anterior, encontraremos sucessivamente:

$$125 - 14 + 38 + 407 - 146 - 25 - 385 = (125 + 38 + \\ + 407) - (14 + 146 + 25 + 385) = 570 - 570 = 0.$$

Ainda de acôrdo com os princípios relativos às somas e diferenças (n.º 60), verificamos que podemos suprimir os parêntesis contidos em uma expressão aritmética, mediante a seguinte regra: para suprimir os parêntesis precedidos do sinal +, conservam-se os sinais de todos os termos neles encerrados e para suprimir os parêntesis precedidos do sinal

—, atribue-se o sinal — ao primeiro e trocam-se os sinais de todos os demais neles encerrados.

Exemplos. — Sem alterar o valor da expressão que segue, suprimir os parêntesis nela contidos.

$$(15 + 28) + (17 + 32) - (30 + 15).$$

Procedendo da maneira indicada na regra acima, podemos escrever

$$(15 + 28) + (17 + 32) - (30 + 15) = \\ = 15 + 28 + 17 + 32 - 30 - 15.$$

Sem alterar o valor da expressão que segue, suprimir os parêntesis nela contidos.

$$(8 - 6 + 4) + (9 - 5 - 3) - (12 + 5 - 10) - (7 - 5 - 1).$$

Procedendo de acôrdo com a regra acima, podemos escrever

$$(8 - 6 + 4) + (9 - 5 - 3) - (12 + 5 - 10) - (7 - \\ - 5 - 1) = 8 - 6 + 4 + 9 - 5 - 3 - 12 - \\ - 5 + 10 - 7 + 5 + 1.$$

62. **Cálculo mental.** — Antes de tratarmos do complemento aritmético dos números, cuja determinação constitue a principal aplicação do cálculo mental na subtração, indicaremos, nos exemplos que seguem, algumas das operações que se podem efetuar mentalmente para o cálculo da diferença entre dois números, conforme os casos que se apresentarem. — Exemplos

$$83 - 32 = 83 - (30 + 2) = 83 - 30 - 2 = 53 - 2 = 51,$$

$$72 - 27 = 72 - (30 - 3) = 72 - 30 + 3 = 75 - 30 = 45,$$

$$654 - 213 = 654 - (200 + 13) = \\ = 654 - 200 - 13 = 454 - 13 = 441,$$

$$547 - 98 = 547 - (100 - 2) = 547 - 100 + 2 = 549 - 100 = 449,$$

$$3831 - 1815 = 3831 - (1831 - 16) = \\ = 3831 - 1831 + 16 = 2000 + 16 = 2016.$$

63. **Complemento aritmético dos números.** — Damos essa denominação à *diferença entre um certo número e o número formado da unidade seguida de tantos zeros quantos são os algarismos dêsse número.*

Assim, o complemento aritmético de *3.463* se obtém da maneira seguinte:

$$10.000 - 3.463 = 6.537.$$

Pràticamente, obtém-se com rapidez o complemento aritmético de um número, subtraindo-se de *9* cada um dos seus algarismos, à exceção do seu último algarismo significativo da direita, que se subtrai de 10.

Assim, no exemplo considerado, podemos determinar fàcilmente o complemento do número acima, efetuando mentalmente operações correspondentes às seguintes:

$$9 - 3 = 6;\ 9 - 4 = 5;\ 9 - 6 = 3;\ 10 - 3 = 7.$$

A-pesar-de serem restritas as aplicações do complemento aritmético dos números nas operações fundamentais, citemos as duas seguintes:

1.ª *Prova da adição.* — Consideremos a adição seguinte:

$$235 + 318 + 427 = 980.$$

Procurando o complemento aritmético do total obtido, encontraremos o número *20*.

Efetuemos, agora, a adição das três parcelas dadas e dêsse complemento aritmético. — Encontraremos, assim

$$20 + 235 + 318 + 427 = 1000,$$

o que nos permite dizer que a operação efetuada está exata.

De uma maneira geral, quando se soma o complemento aritmético do total encontrado na operação primitiva às parcelas, deve-se encontrar, estando exata a operação, a unidade seguida de tantos zeros quantos são os algarismos do total obtido.

2.ª *Combinação de adições e subtrações.* — Consideremos a subtração seguinte:

$$815 - 386 = 429.$$

Com auxílio do complemento aritmético do subtraendo, podemos efetuar a operação acima de uma maneira diversa.

Para isso, basta somarmos ao minuendo o complemento do subtraendo e dessa soma subtrairmos 1.000. — Com efeito, podemos escrever

$$815 - 386 = 815 + (1000 - 386) - 1000,$$

ou $$815 - 386 = 815 + 614 - 1000,$$

ou $$815 - 386 = 1429 - 1.000,$$

de onde resulta $$815 - 386 = 429.$$

Consideremos agora uma expressão em que se encontrem indicadas várias adições e subtrações. — Seja

$$287 + 369 - 232 + 721 - 417.$$

Aplicando ao cálculo dessa expressão os complementos aritméticos dos termos subtrativos, encontraremos sucessivamente:

$$287 + 369 - 232 + 721 - 417 = 287 + 369 + \\ +(1000 - 232) + 721 + (1000 - 417) - \\ - 2.000 = 287 + 369 + 768 + 721 + \\ + 583 - 2.000 = 2728 - 2.000 = 728.$$

De uma maneira geral, podemos dizer que, para efetuar várias adições e subtrações indicadas consecutivamente, com o emprêgo dos complementos aritméticos, basta substituir todos os termos que devem ser subtraídos por seus respectivos complementos e somar depois êsses complementos aos demais números considerados, subtraindo-se finalmente tantas vezes 10, 100, 1.000, etc. quantos forem os termos subtrativos de um, dois, três, etc. algarismos.

Devemos notar, entretanto, que êsse processo só poderá apresentar vantagens de ordem prática se todos os termos subtrativos tiverem o mesmo número de algarismos, pois que assim bastará subtrair, no final da operação, um número exato de dezenas ou centenas ou milhares, etc.

Exemplos. — 1.º Calcular, empregando os complemenplos aritméticos dos termos subtrativos, o valor da expressão

$$748 + 2327 - 1087 + 32.$$

Substituindo cada um dos termos subtrativos pelo seu respectivo complemento e subtraindo da expressão 20.000 por serem dois os termos subtrativos e terem ambos quatro algarismos, resultará:

$$748 + 2327 - 1835 - 1087 + 32 = 748 + 2327 + \\ + 8165 + 8913 + 32 - 20.000 = 20.185 - 20.000 = 185.$$

2.º Calcular, empregando os complementos aritméticos dos termos subtrativos, o valor da expressão

$$524 + 17219 - 12841 + 32618 - 17412 - 11031.$$

Substituindo cada um dos termos subtrativos pelo seu respectivo complemento e subtraindo da expressão 300.000, por serem três os termos subtrativos e terem todos cinco algarismos, resultará:

$$524 + 17219 - 12841 + 32618 - 17412 - 11031 = 524 +$$
$$+ 17219 + 87159 + 32618 + 82588 + 88969 - 300.000 =$$
$$= 309.077 - 300.000 = 9.077.$$

64. Resolução de problemas.

1. — *Calcular a distância da Lua ao Sol, sabendo-se que a distância da Terra ao Sol é de 149.400.000 km. e que a distância da Terra à Lua é de 384.380 km., quando a Lua está exatamente colocada entre a Terra e o Sol.*

A distância da Lua ao Sol nessa ocasião será evidentemente obtida pela diferença entre as distâncias da Terra ao Sol e a Lua. Assim

Distância da Terra ao Sol . . .	149.400.000 km.
Distância da Terra à Lua . . .	384.380 km.
Distância da Lua ao Sol	149.015.620 km.

2. — *Quantos anos transcorreram desde o descobrimento do Brasil (1500) até o ano corrente (1934)?*

O número de anos transcorridos entre os dois dados acima será evidentemente obtido pela diferença de ambos. Assim

Ano que corre presentemente	1934
Ano em que foi descoberto o Brasil . . .	1500
Número de anos transcorridos . . .	434

3 — *Calcular o número de automóveis que tem o Uruguai, sabendo-se que a Venezuela tem 11.750, o Chile 25.440, Cuba 41.380, México 62.500 e que o número de automóveis existentes no Brasil, que é de 185.293, excede de 3.800 o total dos existentes em todos êsses países reunidos.*

O número de automóveis existentes no Uruguai será obtido pela diferença entre o número de automóveis existentes no Brasil e a soma dos existentes nos países citados, reunida ao excesso dado. Assim:

Número de automóveis existentes na Venezuela .	11.750
Número de automóveis existentes no Chile . .	25.440
Número de automóveis existentes em Cuba . .	41.380
Número de automóveis existentes no México .	62.500
Excesso do Brasil sôbre o total	3.800
Sôma	144.870
Total de automóveis existentes no Brasil . . .	185.293
Total obtido acima	144.870
Número de automóveis existentes no Uruguai .	40.423

65. Exercícios.

Efetuar mentalmente as subtrações seguintes:

1.	37 — 15?	R. 22
2.	84 — 34?	R. 50
3.	86 — 31?	R. 55
4.	86 — 19?	R. 67
5.	89 — 26?	R. 63
6.	136 — 16?	R. 120
7.	143 — 72?	R. 71
8.	584 — 131?	R. 453
9.	635 — 314?	R. 321
10.	1.015 — 995?	R. 20

Efetuar as subtrações seguintes:

11.	1.924 — 736?	R. 1.188
12.	2.041 — 895?	R. 1.146
13.	3.243 — 954?	R. 2.289
14.	12.006 — 9.841?	R. 2.165
15.	15.119 — 10.983?	R. 4.136
16.	120.000 — 9.999?	R. 110.001
17.	2.590.018 — 198.345?	R. 2.391.673
18.	3.010.304 — 282.973?	R. 2.727.331
19.	5.000.000 — 4.555.666?	R. 444.334
20.	8.090.807 — 6.070.707?	R. 2.020.100

Calcular o complemento aritmético dos números seguintes:

21.	de 43?	R. 57
22.	de 128?	R. 872
23.	de 1.245?	R. 8.755
24.	de 30.617?	R. 69.383
25.	de 429.343?	R. 570.657

Calcular as expressões seguintes:

26.	175 — (12 + 15 + 18)?	R. 130
27.	324 — (29 — 12 — 10)?	R. 317
28.	640 — (174 — 132 + 85)?	R. 513
29.	739 — (209 — 185 + 43)?	R. 672
30.	1.254 — (148 + 163 + 215 — 107)?	R. 835

66. Problemas.

1. Sabendo-se que a soma de dois números é 189.518 e que um dêles é 123.749, calcular o outro. R. 65.769.

2. Sabendo-se que a diferença entre dois números é 549 e que o menor dêles é 381, calcular o maior. R. 930.

3. Sabendo-se que a diferença entre dois números é 628 e que o maior dêles é 915, calcular o menor. R. 287.

4. Uma pessoa vendeu um automóvel por 14:550\$000, obtendo um lucro de 650\$000. Por quanto havia adquirido êsse veículo? R. 13:900\$000.

5. Uma pessoa nascida em 1903, que idade tem em 1934? R. 31 anos.

6. Duas caixas contém o mesmo número de penas, cada uma. Tirando-se 15 da primeira para colocar na segunda, quantas penas conterá a segunda mais que a primeira? R. 30.

7. Uma pessoa dá emprestado a outra 1:200\$000. Em três ocasiões diversas, o devedor pagou as importâncias de 75\$000, 132\$000 e 168\$000. Quanto continua devendo? R. 825\$000.

8. Uma caixa de frutas pesa 45 kg., outra pesa 12 kg. menos que a primeira e outra 7 kg. mais que a segunda. Quanto pesam as três juntas? R. 118 kg.

9. Calcular a distância entre S. Salvador e Maceió, sabendo-se que a de Maceió ao Rio de Janeiro é de 1.031 milhas, e que a do Rio de Janeiro a Vitória, é de 295 milhas, e que a de Vitória a S. Salvador é de 466 milhas. R. 270 milhas.

10. Um turista foi de S. Paulo a Santa Rita do Parnaíba, via Ribeirão Preto-Barretos, e voltou via Uberaba-Ribeirão Preto, fazendo um percurso total de 1.646 km. Calcular de quanto o segundo trajeto é maior que o primeiro, sabendo-se que a distância de Ribeirão Preto a Santa Rita do Parnaíba via Barretos é de 476 km. R. 8 km.

Capítulo IV.

MULTIPLICAÇÃO

67. **Noção de multiplicação.** — Consideremos a adição indicada

$$6+6+6+6+6,$$

em que todas as parcelas são iguais.

As adições dessa natureza, formadas exclusivamente de parcelas iguais, recebem a denominação particular de *multiplicação.*

Se efetuarmos a adição acima indicada, encontraremos

$$6+6+6+6+6=30.$$

O total obtido (30) denomina-se *produto*. A parcela que se repete (6) denomina-se *multiplicando* e o número dessas parcelas (5), *multiplicador*.

Devemos notar que, mesmo em se tratando de aplicações concretas, o multiplicador é, em geral, um número abstrato e o produto, nesse caso, é sempre da mesma espécie do multiplicando, pelo mesmo motivo que a soma é da mesma espécie das parcelas [1].

Para o caso dos números abstratos, dizemos simplesmente que o produto de *6* por *5* é a soma de 5 parcelas iguais a 6.

De uma maneira geral, o produto de um número a por um número b é a soma de b parcelas iguais a a.

68. **Definição.** — *Multiplicação é a operação que tem por fim, sendo dados dois números em certa ordem, tomar o primeiro como parcela tantas vezes quantas são as unidades do segundo.*

---

(1) Pode suceder também que o multiplicando e o multiplicador sejam números concretos. Nesse caso, o produto será de espécie diferente. Por exemplo: 4 metros × 3 metros = 12 metros quadrados.

69. **Sinal.** — Para indicar a multiplicação, emprega-se o sinal $\times$, que se lê *multiplicado por* ou *vezes*. — Assim, no lugar de escrever, como acima fizemos

$$6+6+6+6+6=30,$$

escrevemos simplesmente

$$6\times5=30.$$

Às vezes, costuma-se substituir o sinal $\times$ por um simples ponto colocado entre os fatores. Assim, a multiplicação de 6 por 5 pode ser também indicada da maneira seguinte:

$$6\,.\,5=30.$$

Para indicar a multiplicação de números representados por letras não se costuma empregar nenhum sinal entre elas. Assim, para indicar a multiplicação de um número qualquer a por outro b, escrevemos simplesmente

$$ab.$$

70. **Fatores e produto.** — Os números dados na multiplicação denominam-se *fatores*. O primeiro dêles é denominado *multiplicando* e o segundo *multiplicador*. O resultado da multiplicação é o *produto*. — Assim, no exemplo dado acima

$$6\times5=30$$

6 e 5 são os *fatores*, 6 é o *multiplicando*, 5 o *multiplicador* e 30 o *produto*.

PRODUTO DE DOIS FATORES

71. **Princípio.** — *O valor de um produto de dois fatores não se altera quando se inverte a ordem dêles.* — Assim, dizemos que

$$5\times4=4\times5.$$

De acôrdo com a definição, 5×4 significa uma soma de 4 parcelas iguais a 5, ou seja

$$5\times4=5+5+5+5.$$

Representemos por 5 traços, dispostos em linhas horizontais, as unidades contidas em cada uma das parcelas da soma

acima indicada. E, como as parcelas são 4, consideremos 4 linhas. Formamos, assim, o quadro que se vê ao lado, onde se encontram vários traços, que podem ser contados em qualquer ordem.

Contando-os pelas linhas horizontais, verificamos que, contendo cada uma delas 5 traços, as 4 conterão $5+5+5+5$ ou 5×4 traços.

Contando-os, depois pelas colunas verticais, verificamos que, contendo cada uma delas 4 traços, as 5 conterão $4+4+4+4+4$ ou 4×5 traços.

Como nos dois casos contamos todos os traços contidos no quadro, concluímos que os produtos 5×4 e 4×5, que os representam, correspondem ao mesmo número de traços, sendo, portanto, iguais.

De uma maneira geral, representando por a e b dois números quaisquer, teremos

$$ab=ba.$$

72. **Observações.** — 1.ª O produto de zero por um número qualquer ou de um número qualquer por zero é sempre igual a zero. — Assim, dizemos que

$$0\times5=0 \text{ e } 5\times0=0.$$

Com efeito, consideremos o produto

$$0\times5.$$

De acôrdo com a definição (n.º 68), sabemos que

$$0\times5=0+0+0+0+0=0.$$

Por outro lado teremos também

$$5\times0=0,$$

uma vez que, segundo o princípio acima (n.º 71)

$$5\times0=0\times5.$$

De uma maneira geral, representando por a um número qualquer, teremos sempre

$$a\times0=0 \text{ e } 0\times a=0.$$

Verificamos, assim, que a condição necessária e suficiente para que um produto de dois fatores seja nulo é que um dêles seja igual a zero.

2.ª O produto de 1 por um número qualquer ou de um número qualquer por 1 é sempre igual a êsse próprio número. — Assim, dizemos que

$$1 \times 7 = 7 \quad \text{e} \quad 7 \times 1 = 7.$$

Com efeito, consideremos o produto indicado

$$1 \times 7.$$

Pela definição (n.º 68), sabemos que

$$1 \times 7 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 7.$$

Por outro lado, teremos também

$$7 \times 1 = 7,$$

uma vez que, consoante o princípio acima (n.º 71)

$$7 \times 1 = 1 \times 7.$$

De uma maneira geral, representando por a um número inteiro qualquer, teremos sempre

$$a \times 1 = a \quad \text{e} \quad 1 \times a = a.$$

73. **Prática da multiplicação.** — Distinguimos na multiplicação os casos principais seguintes:

1.º *Cada um dos dois números dados tem apenas um algarismo.*

2.º *O multiplicando é um número de dois ou mais algarismos e o multiplicador tem apenas um algarismo.*

3.º *Cada um dos dois números dados tem dois ou mais algarismos.*

74. **1.º Caso.** — Consideremos o produto indicado

$$3 \times 4.$$

De acôrdo com a definição, teremos

$$3 \times 4 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12.$$

Na prática, porém, não temos necessidade de proceder assim, uma vez que guardamos de memória todos os resultados

que se podem obter pela multiplicação de dois números simples quaisquer.

Aliás, êsses resultados todos encontram-se na tabuada de multiplicar ou tabela de Pitágoras, que se vê ao lado. Para construí-la escrevem-se, em linha horizontal, os 9 primeiros números; forma-se, depois, a segunda linha horizontal, somando cada número da primeira a si mesmo; forma-se depois, a terceira linha horizontal, somando os números correspondentes das duas primeiras linhas; forma-se depois a quarta linha horizontal, somando os números da primeira linha aos números correspondentes da terceira; assim prossegue-se, somando sempre os números da última linha obtida aos números correspondentes da primeira, até a formação da 9.ª linha.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Dêsse modo de formação das diversas linhas, resulta que a primeira coluna vertical à esquerda contém os números inteiros de 1 a 9 e que cada um dêsses números indica o número de parcelas de que são formados os números escritos na mesma linha horizontal.

Para encontrarmos, por exemplo, o produto de 5 por 7, na tabela de Pitágoras, procuramos o número 5 na primeira linha horizontal e 7 na primeira coluna vertical à esquerda. O produto 35 encontra-se na intercessão da 5.ª coluna e da 7.ª linha. Por um procedimento análogo, encontramos também, como se vê na figura ao lado, o produto de 7 por 5.

75. **2.º Caso.** — Consideremos o produto indicado

$$452 \times 3.$$

Consoante a definição, teremos

$$452 \times 3 = 452 + 452 + 452.$$

Para efetuar a soma indicada no 2.º membro, podemos aplicar a regra conhecida (n.º 38), dispondo a operação da maneira que se vê ao lado.

$$\begin{array}{r} 452 \\ 452 \\ \underline{452} \\ 1.356 \end{array}$$

Notemos, porém, que os algarismos de cada coluna sendo sempre os mesmos, a soma de cada uma das colunas reduz-se a uma multiplicação do 1.º caso. — Com efeito

$$2+2+2=2\times 3=6,$$
$$5+5+5=5\times 3=15,$$
$$4+4+4=4\times 3=12,$$

ou, tendo em vista que os algarismos 2, 5 e 4 representam, respectivamente, unidades, dezenas e centenas

2 unidades $\times 3=$ 6 unidades,
5 dezenas $\times 3=15$ dezenas,
4 centenas $\times 3=12$ centenas.

Obtemos, pois, o resultado, multiplicando sucessivamente por 3 as unidades, dezenas e centenas do número dado e reunindo depois todos êsses produtos.

$$\begin{array}{r} 452 \\ \underline{3} \\ 1.356 \end{array}$$

Na prática, podemos dispor a operação da maneira indicada ao lado, escrevendo uma só vez o multiplicando (452) e indicando, pelo multiplicador (3), sob êle escrito, o número de parcelas que devem ser tomadas.

Para efetuar a operação, dizemos simplesmente: 3 vezes 2, 6; escrevemos 6 e prosseguimos; 3 vezes 5, 15; escrevemos 5 e retemos 1; 4 vezes 3, 12; 12 mais 1, 13; escrevemos 13. Encontramos, assim, o produto 1356.

Nas multiplicações do segundo caso, observa-se, pois, a regra seguinte:

Para multiplicar um número de vários algarismos por outro de um algarismo, multiplicam-se sucessivamente as unidades de cada ordem do multiplicando pelo multiplicador, a partir das unidades simples; se de algum dêsses produtos resultarem unidades de ordem superior, essas são reservadas para serem reunidas às da ordem correspondente.

76. **Casos particulares.** — 1.º Consideremos o produto indicado

$$125\times 100,$$

em que o multiplicando é um número qualquer e o multiplicador é formado pela unidade seguida de zeros.

De acôrdo com o princípio já estudado (n.º 71), sabemos que

$$125\times 100=100\times 125.$$

O produto 100×125, indicando que se devem tomar 125 parcelas iguais a uma centena (100), concluimos que o seu valor será 125 centenas ou 12500 unidades. — Assim, pois

$$125\times 100=12.500.$$

Nas multiplicações dêsse caso especial, observa-se, pois, a regra seguinte:

Para multiplicar um número qualquer por outro formado pela unidade seguida de zeros, basta escrever, à direita do primeiro, tantos zeros quantos contém o segundo.

2.º Consideremos o produto indicado

$$125\times 500,$$

em que o multiplicando é um número qualquer e o multiplicador é formado por um algarismo significativo seguido de zeros.

Conforme a definição, o produto 125×500 significa uma soma de 500 parcelas iguais a 125.

Para somar as 500 parcelas iguais, podemos reüní-las em grupos de 5 parcelas cada um e tomar 100 dêsses grupos. Cada um dos grupos assim formados, valerá, pois

$$125\times 5=625 \text{ (2.º caso)}.$$

Os 100 grupos valerão, portanto, de acôrdo com o caso particular acima

$$625\times 100=62.500.$$

Assim, pois $$125\times 500=62.500.$$

Nas multiplicações dêsse 2.º caso especial, observa-se, pois, a regra seguinte:

Para multiplicar um número qualquer por outro formado por um algarismo significativo seguido de zeros, basta multiplicar o primeiro pelo algarismo significativo do segundo, escrevendo-se à direita do produto obtido tantos zeros quantos contém o segundo.

77. 3.º **Caso.** — Consideremos o produto indicado

$$764 \times 236,$$

em que o multiplicando e o multiplicador são números compostos.

Pela definição, o produto 764×236 significa uma soma de 236 parcelas iguais a 764.

Notemos, porém, que podemos, para facilitar essa adição, grupar as parcelas em somas parciais e depois reünir os totais assim obtidos (n.º 32, 2.º).

Grupemos, então, as parcelas da maneira seguinte: um grupo de 6, outro de 30 e outro de 200 parcelas, todas iguais a 764.

Tendo em vista que a soma das parcelas iguais de cada grupo é uma multiplicação, resultará

764×6	(soma do 1.º grupo)
764×30	(soma do 2.º grupo)
764×200	(soma do 3.º grupo).

A primeira multiplicação, acima indicada, pertencendo ao 2.º caso (n.º 75) e as duas últimas a um dos casos particulares já estudados (n.º 76, 2.º), podemos escrever

$764 \times 6 = 4.584$	(1.º produto parcial)
$764 \times 30 = 22.920$	(2.º produto parcial)
$764 \times 200 = 152.800$	(3.º produto parcial).

Evidentemente, reünindo os três produtos parciais obtidos, teremos somado as 236 parcelas iguais a 764, ou seja, teremos *multiplicado* 764 por 236. — Assim, pois

```
   764
   236
  ----
  4584
 22920
152800
------
180304
```

$$764 \times 236 = 764 \times 6 + 764 \times 30 + 764 \times 200 =$$
$$= 4.584 + 22.920 + 152.800 = 180.304.$$

Na prática, pode-se dar à operação a disposição adiante indicada, escrevendo-se, apenas uma vez, o multiplicando e o multiplicador e procedendo-se da maneira seguinte:

```
   764
   236
  ----
  4584
 2292
1528
------
180304
```

Sob o traço, escrevem-se os *produtos parciais* obtidos pela multiplicação de 764 por 6, por 30 e por 200, com o cuidado de que fiquem colocadas em coluna vertical as unidades de mesma ordem de cada um dêles; sob o segundo traço, finalmente, escreve-se a soma dos produtos parciais obtidos. Em geral, não se escrevem os zeros que se encontram à direita dos produtos parciais, a partir do segundo, uma vez que se observe, como se vê no quadro à direita, o cuidado de dispor êsses produtos como se neles figurassem os zeros.

78. **Regra geral.** — Nas multiplicações do terceiro caso, observa-se, pois, a regra seguinte:

Para multiplicar um número de vários algarismos por outro de vários algarismos, multiplicam-se sucessivamente as unidades de cada ordem do multiplicando, a partir das unidades simples, pelas unidades de cada ordem do multiplicador, colocando-se cada um dos produtos parciais de modo que o último algarismo da direita fique colocado na mesma coluna que o correspondente do multiplicador; somam-se os produtos parciais obtidos. — Exemplos

```
   389542       150392       123456
     1245         6425         6789
   ------       ------      -------
   1947710       751960      1111104
  1558168      300784       987648
  779084      601568       864192
 389542      902352       740736
---------   ---------   ---------
484979790   966268600   838142784
```

79. **Observação.** — De acôrdo com a regra acima estabelecida, quando se encontrarem, entre os algarismos do multiplicador, um ou mais zeros, devemos ter o cuidado de colocar o primeiro algarismo da direita de cada produto parcial proveniente do algarismo significativo do multiplicador, que se seguir ao zero, exatamente na mesma coluna vertical a que pertence êsse algarismo.

```
  315
  204
 ----
 1260
 000
630
-----
64260
```

Como é fácil de verificar, com tal cuidado pode-se evitar o trabalho de escrever os zeros correspondentes ao produto do multiplicando pelo algarismo insignificativo do multiplicador.

Assim é que, na prática, costuma-se dar à operação, a disposição indicada à direita.

```
  315
  204
 ----
 1260
630
-----
64260
```

80. **Casos particulares.** — 1.º Consideremos o produto indicado

$$7219 \times 3600,$$

em que o multiplicando é um número qualquer e o multiplicador é formado por dois ou mais algarismos significativos seguidos de um ou mais zeros.

Segundo as considerações expendidas no caso especial já considerado, (n.º 76, 2.º), para efetuar o produto acima indicado, basta multiplicar 7.219 por 36 e à direita do produto assim obtido escrever dois zeros. — Assim, pois

$$7.219 \times 3600 = 25988400.$$

2.º Consideremos o produto indicado

$$7.200 \times 254$$

em que o multiplicando é formado por dois ou mais algarismos significativos seguidos de um ou mais zeros.

De acôrdo com o princípio relativo aos produtos de dois fatores, (n.º 71) sabemos que

$$7200 \times 254 = 254 \times 7200.$$

Recaimos, assim, no caso anterior, bastando, portanto, multiplicar 254 por 72 e à direita do produto assim obtido escrever dois zeros. — Assim, pois

$$7200 \times 254 = 1828800.$$

3.º Consideremos o produto indicado

$$1400 \times 250,$$

em que, tanto o multiplicando como o multiplicador são formados de dois ou mais algarismos significativos seguidos de um ou mais zeros.

Conforme o primeiro caso especial acima, para multiplicar 1400 por 250, basta multiplicar 1400 por 25 e escrever depois um zero à direita do produto obtido. Por outro lado, para multiplicar 1400 por 25, de acôrdo com o 2.º caso especial, basta multiplicar 14 por 25 e escrever dois zeros à direita do produto obtido. Assim, resulta que, para efetuar o produto acima indicado, basta multiplicar 14 por 25 e escrever três zeros à direita do produto obtido. — Assim, pois

$$1400 \times 250 = 350.000$$

Nas multiplicações dêsses três casos especiais, observa-se, pois a regra seguinte:

Quando um ou ambos os fatores de um produto são formados por algarismos significativos seguidos de zeros, efetua-se a multiplicação dos números formados pelos algarismos significativos de ambos, escrevendo-se à direita do produto, assim obtido, tantos zeros quantos se encontram à direita de um ou de ambos os fatores.

81. **Número de algarismos de um produto.** — Procuremos, sem efetuar a operação, determinar o número de algarismos do produto de um número de 4 algarismos por outro de 3 algarismos.

Ora, o multiplicando, estando compreendido entre 1.000 e 10.000 (exclusive) e o multiplicador entre 100 e 1.000 (exclusive), o produto estará compreendido entre 1.000×100 ou 100.000 e 10.000×1.000 ou 10.000.000 (exclusive) e terá, portanto, 6 ou 7 algarismos.

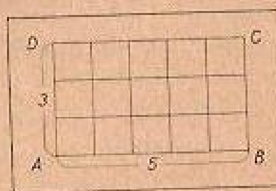
De uma maneira geral, dizemos que o *número de algarismos de um produto de dois fatores é igual à soma do número de algarismos do multiplicando e do multiplicador, ou a essa soma diminuida de uma unidade.*

82. **Interpretação geométrica.** — Consideremos o produto indicado:

$$5 \times 3.$$

Representemos os números dados pelos segmentos seguintes:

$$AB = 5$$
$$AD = 3.$$



A superfície do retângulo construído com a base AB e a altura AD, que contém exatamente 15 quadrados de lado igual à unidade adotada, como se vê na figura ao lado, representa geomètricamente o produto

$$3 \times 5 = 15.$$

83. **Prova da multiplicação.** — Empregam-se constantemente na multiplicação as seguintes:

1.ª Inverte-se a ordem dos fatores e efetua-se novamente a operação. Se o resultado, assim encontrado, for igual ao obtido na operação primitiva, concluimos que ela deve estar exata. — Exemplo

Operação	Prova
453	237
237	453
3171	711
1359	1185
906	948
107361	107361

2.ª Prova dos 9 (vide n.º 153).

PRODUTO DE VÁRIOS FATORES

84. **Definição.** — *Sendo dados vários números em uma certa ordem, o produto dêsses números será o resultado que se obtém multiplicando o primeiro pelo segundo, o produto obtido pelo terceiro, o novo produto pelo quarto, e assim por diante, até o último.* — Assim, a expressão

$$5\times2\times3\times4$$

indica que se devem efetuar, com os números nela contidos, as operações seguintes:

$$5\times2=10;\quad 10\times3=30;\quad 30\times4=120.$$

85. **Princípios.** — 1.º *O produto de vários fatores não se altera quando se modifica, de um modo qualquer, a ordem dos fatores.*

Consideremos, preliminarmente, as proposições seguintes:

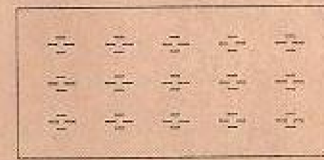
a) O produto de 3 fatores não se altera quando se modifica a ordem dos dois últimos. — Assim, dizemos que

$$4\times5\times3=4\times3\times5.$$

Com efeito, representemos por grupos de 4 pequenos traços, dispostos em linha horizontal, as unidades do primeiro fator. Consideremos 5 dêsses grupos em cada linha horizontal

e tracemos os demais grupos necessários para completarmos 3 linhas horizontais idênticas.

Construimos, assim, o quadro que se vê ao lado, onde se encontram, representadas pelos traços, todas as unidades que compõem o produto considerado, uma vez que, cada linha horizontal compreendendo 5 grupos de 4 traços, ou seja 4×5 traços, as 3 linhas compreenderão $4\times5\times3$ traços.



Considerando, agora, as colunas verticais, verificamos que cada uma delas, compreendendo 3 grupos de 4 traços, ou seja, 4×3 traços, as 5 colunas compreenderão $4\times3\times5$ traços.

Os dois produtos que se podem obter, somando todos os traços contidos no quadro pelas linhas horizontais ou pelas colunas verticais, isto é, $4\times5\times3$ e $4\times3\times5$ são, portanto, iguais, uma vez que ambos correspondem ao mesmo número de traços.

b) O produto de vários fatores não se altera quando se modifica a ordem dos dois últimos. — Assim, dizemos que

$$7\times6\times3\times4\times5=7\times6\times3\times5\times4.$$

De acôrdo com a definição (n.º 84), podemos escrever

$$7\times6\times3\times4\times5=(7\times6\times3)\times5\times4,$$

em que imaginamos efetuado o produto indicado entre os parêntesis.

De conformidade com a demonstração dada acima, podemos, pois, escrever

$$(7\times6\times3)\times4\times5=(7\times6\times3)\times5\times4,$$

ou, suprimindo os parêntesis

$$7\times6\times3\times4\times5=7\times6\times3\times5\times4.$$

c) O produto de vários fatores não se altera quando se modifica a ordem de dois fatores consecutivos. — Assim, dizemos que

$$7\times6\times3\times4\times5=7\times6\times4\times3\times5.$$

Com efeito, de acôrdo com o caso anterior, podemos escrever

$$7 \times 6 \times 3 \times 4 = 7 \times 6 \times 4 \times 3.$$

Multiplicando por 5 êsses dois produtos indicados, obteremos ainda produtos iguais. — Assim, pois

$$7 \times 6 \times 3 \times 4 \times 5 = 7 \times 6 \times 4 \times 3 \times 5.$$

d) *O produto de vários fatores não se altera quando se modifica, de um modo qualquer, a ordem dos fatores.* — Assim, dizemos que

$$7 \times 6 \times 3 \times 4 \times 5 = 5 \times 6 \times 7 \times 3 \times 4.$$

Com efeito, pela proposição anterior, encontraremos, invertendo a ordem de dois fatores consecutivos, respectivamente:

$$\begin{aligned} 7 \times 6 \times 3 \times 4 \times 5 &= 7 \times 6 \times 4 \times 3 \times 5, \\ 7 \times 6 \times 4 \times 3 \times 5 &= 7 \times 4 \times 6 \times 3 \times 5, \\ 7 \times 4 \times 6 \times 3 \times 5 &= 4 \times 7 \times 6 \times 3 \times 5, \\ 4 \times 7 \times 6 \times 3 \times 5 &= 4 \times 7 \times 3 \times 6 \times 5, \\ 4 \times 7 \times 3 \times 6 \times 5 &= 4 \times 3 \times 7 \times 6 \times 5, \\ 4 \times 3 \times 7 \times 6 \times 5 &= 4 \times 3 \times 6 \times 7 \times 5, \\ 4 \times 3 \times 6 \times 7 \times 5 &= 4 \times 3 \times 6 \times 5 \times 7. \end{aligned}$$

De uma maneira geral, teremos sempre:

$$\begin{aligned} abcde &= abdce = adbce = dabce = \\ &= dacbe = dcabe = dcbae = dcbea. \end{aligned}$$

86. **Conseqüências.** — Do princípio que acabámos de considerar, tiram-se, fàcilmente as conseqüências seguintes:

1.ª *O produto de vários fatores não se altera quando se substituem dois ou mais dentre êles pelo seu produto efetuado.* — Assim, dizemos que

$$4 \times 3 \times 6 \times 7 \times 5 = (4 \times 3 \times 6) \times 7 \times 5 = 72 \times 7 \times 5,$$

ou $$4 \times 3 \times 6 \times 7 \times 5 = (3 \times 7 \times 5) \times 4 \times 5 = 105 \times 4 \times 5.$$

Com efeito, na primeira expressão acima considerada, podemos, conforme a definição, multiplicar sucessivamente o primeiro fator pelo segundo, o produto obtido pelo terceiro e indicar as demais multiplicações.

Por outro lado, quando os fatores que se devem multiplicar não se encontram nessa mesma ordem, como acontece na segunda expressão acima, podemos, de conformidade com o princípio precedente, modificar convenientemente a ordem dos fatores, de modo que fiquem colocados na mesma disposição indicada na primeira expressão. — De uma maneira geral, teremos

$$abcde = bde(ac).$$

2.ª *Para multiplicar um produto de vários fatores por um número qualquer, basta multiplicar um só dos fatores por êsse número, conservando-se os demais.* — Assim dizemos que

$$(3 \times 4 \times 5) \times 6 = 3 \times 4 \times (5 \times 6) = 3 \times 4 \times 30.$$

Com efeito, o produto procurado é

$$(3 \times 4 \times 5) \times 6 = 3 \times 4 \times 5 \times 6,$$

no qual se pode, como sabemos, substituir os fatores 5 e 6 pelo seu produto efetuado 30. — De uma maneira geral, teremos

$$(abcd)n = ab(cn)d.$$

3.ª *Para multiplicar um número qualquer por um produto de vários fatores, pode-se multiplicar êsse número pelo primeiro fator, o produto obtido pelo segundo e assim por diante, até o último fator.* — Assim, dizemos que

$$6 \times (3 \times 4 \times 5) = 6 \times 3 \times 4 \times 5.$$

Com efeito, a ordem dos fatores não alterando o produto, podemos escrever

$$6 \times (3 \times 4 \times 5) = (3 \times 4 \times 5) \times 6,$$

ou, suprimindo os parêntesis

$$(3 \times 4 \times 5) \times 6 = 3 \times 4 \times 5 \times 6,$$

ou, ainda, modificando a ordem dos fatores,

$$3 \times 4 \times 5 \times 6 = 6 \times 3 \times 4 \times 5,$$

de onde resulta finalmente

$$6 \times (3 \times 4 \times 5) = 6 \times 3 \times 4 \times 5.$$

De uma maneira geral, teremos

$$n(abcd) = nabcd.$$

4.ª *Para multiplicar um produto de vários fatores por outro produto de vários fatores, reunem-se, em um produto único todos os fatores contidos nos produtos dados, tomados em uma ordem qualquer.* — Assim, dizemos que

$$(3 \times 5 \times 7) \times (4 \times 6 \times 8) = 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8.$$

Com efeito, considerando o produto $(3 \times 5 \times 7)$ como efetuado, podemos escrever

$$(3 \times 5 \times 7) \times (4 \times 6 \times 8) = (3 \times 5 \times 7) \times 4 \times 6 \times 8,$$

ou, suprimindo os parêntesis,

$$(3 \times 5 \times 7) \times 4 \times 6 \times 8 = 3 \times 5 \times 7 \times 4 \times 6 \times 8,$$

ou, modificando a ordem dos fatores

$$3 \times 5 \times 7 \times 4 \times 6 \times 8 = 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8.$$

Resulta, assim, que

$$(3 \times 5 \times 7) \times (4 \times 6 \times 8) = 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8.$$

De uma maneira geral, teremos

$$(ace) \times (bdf) = abcdef.$$

PRINCÍPIOS RELATIVOS ÀS SOMAS, DIFERENÇAS E PRODUTOS

87. **Convenção sôbre o emprêgo dos parêntesis.** — Voltemos, ainda uma vez, a tratar da significação dos parêntesis empregados no cálculo (n.º 29). — Consideremos a expressão

$$(5 + 3 + 2) \times 6.$$

A soma $5 + 3 + 2$, indicada entre os parêntesis, é considerada efetuada, ou seja, como um *número único*. Isto posto, na expressão acima se encontra indicado um produto de *dois* fatores. — Resulta, assim, que

$$(5 + 3 + 2) \times 6 = 10 \times 6 = 60.$$

Consideremos, agora, a expressão

$$(8 - 5) \times 3.$$

A diferença $8 - 5$, indicada entre os parêntesis, é do mesmo modo considerada como um só número. Isto posto, na expressão acima, se encontra indicado um produto de *dois* fatores. — Resulta, assim, que

$$(8 - 5) \times 3 = 3 \times 3 = 9.$$

Consideremos, ainda, a expressão

$$5 + 3 + (2 \times 6).$$

O produto 2×6, indicado entre os parêntesis, é do mesmo modo considerado como um só número. Assim, como na expressão acima se encontra indicada uma soma de três parcelas. — Resulta, assim, que

$$5 + 3 + (2 \times 6) = 5 + 3 + 12 = 20.$$

Costuma-se, entretanto, dispensar os parêntesis quando o produto indicado afeta apenas uma das parcelas. — Assim é que

$$5 + 3 + (2 \times 6) = 5 + 3 + 2 \times 6.$$

Notemos, ainda, que as expressões

$$(5 + 3 + 2) \times 6 \quad \text{e} \quad 5 + 3 + 2 \times 6$$

não devem absolutamente ser confundidas, pois que elas representam *valores diferentes*. — Com efeito

$$(5 + 3 + 2) \times 6 = 10 \times 6 = 60.$$
$$5 + 3 + 2 \times 6 = 8 + 12 = 20.$$

Resumindo, dizemos que, quando se encontram indicadas várias adições, subtrações e multiplicações em uma expressão qualquer, efetuam-se, em primeiro lugar, os produtos dos números ligados pelo sinal $\times$, para efetuarem-se depois as adições e subtrações, e que, quando uma multiplicação afeta vários termos, é preciso colocá-los todos entre parêntesis. — Exemplos

$$(10 + 5 - 3 + 2) \times 4 = 14 \times 4 = 56.$$

$$(10+5)\times 4-3+2=15\times 4-3+2=$$
$$=60-3-2=62-3=59,$$

$$10+(5-3)\times 4+2=10+2\times 4+2=10+8+2=20,$$

$$10+5\times 4-3\times 4+2=10+20-12+2=32-12=20,$$

$$10\times 4+5\times 4-3\times 4+2\times 4=40+20-12+8=68-12=56.$$

88. **Princípios.** — 1.º *Para multiplicar uma soma ou uma diferença indicada por um número qualquer, pode-se multiplicar cada termo da soma ou da diferença por êsse número e somar ou subtrair os resultados assim obtidos.* — Assim, dizemos que

$$(7+3)\times 4=7\times 4+3\times 4 \quad \text{e} \quad (7-3)\times 4=7\times 4-3\times 4.$$

Com efeito, considerando a primeira das expressões acima, verificamos, de acôrdo com a definição de multiplicação, que

$$(7+3)\times 4=(7+3)+(7+3)+(7+3)+(7+3),$$

ou, suprimindo os parêntesis,

$$(7+3)\times 4=7+3+7+3+7+3+7+3,$$

ou, ainda, invertendo a ordem das parcelas

$$(7+3)\times 4=7+7+7+7+3+3+3+3,$$

ou, ainda segundo a definição de multiplicação

$$(7+3)\times 4=7\times 4+3\times 4.$$

Com auxílio de um raciocínio análogo, verificamos também que

$$(7-3)\times 4=7\times 4-3\times 4.$$

De maneira geral, teremos

$$(a+b)\times n=an+bn,$$
$$(a-b)\times n=an-bn.$$

2.º *Para multiplicar um número qualquer por uma soma ou uma diferença indicada, pode-se multiplicar êsse número por cada um dos termos da soma ou da diferença e somar ou subtrair os resultados assim obtidos.* — Assim, dizemos que

$$5\times(7+3)=5\times 7+5\times 3 \quad \text{e} \quad 5\times(7-3)=5\times 7-5\times 3.$$

Com efeito, considerando a primeira expressão e tendo em vista que a ordem dos fatores não altera o produto, podemos escrever

$$5\times(7+3)=(7+3)\times 5,$$

ou, aplicando o princípio anterior

$$(7+3)\times 5=7\times 5+3\times 5,$$

ou, ainda, invertendo a ordem dos fatores nos produtos indicados no 2.º membro

$$7\times 5+3\times 5=5\times 7+5\times 3.$$

Resulta, portanto, que

$$5\times(7+3)=5\times 7+5\times 3.$$

Com auxílio de um raciocínio análogo, verificamos também que

$$5\times(7-3)=5\times 7-5\times 3.$$

De maneira geral, teremos

$$n(a+b)=na+nb$$
$$n(a-b)=na-nb.$$

Exemplos

$$(8+5)\times 3=8\times 3+5\times 3=24+15=39,$$

$$(9-6)\times 5=9\times 5-6\times 5=45-30=15,$$

$$(3+a)\times 2=3\times 2+a\times 2=6+2a,$$

$$2(a+5)=2\times a+2\times 5=2a+10,$$

$$a(3+x)=a\times 3+a\times x=3a+ax,$$

$$(7+5+3)\times 5=7\times 5+5\times 5+3\times 5=35+25+15=75,$$

$$3\times(10+2+1)=3\times 10+3\times 2+3\times 1=30+6+3=39,$$

$$(a+b+2)\times 6=a\times 6+b\times 6+2\times 6=6a+6b+12,$$

$$(a+b+c)\times x=a\times x+b\times x+c\times x=ax+bx+cx,$$

$$a(m+n+x)=a\times m+a\times n+a\times x=am+an+ax.$$

3.º *Para multiplicar uma soma indicada por outra, pode-se multiplicar sucessivamente os termos da primeira por* *cada um dos termos da segunda e somar os resultados assim obtidos* (1). — Assim, dizemos que

$$(7+3)\times(6+2)=7\times6+3\times6+7\times2+3\times2.$$

Com efeito, considerando $7+3$ como um só número e tendo em vista que, para multiplicar um número qualquer por uma soma indicada basta multiplicá-lo por cada um dos termos dessa soma e somar os resultados assim obtidos (n.º 88, 2.º), podemos escrever

$$(7+3)\times(6+2)=(7+3)\times6+(7+3)\times2,$$

ou ainda, tendo em vista que, para multiplicar uma soma indicada por um número qualquer basta multiplicar cada termo dessa soma por êsse número e somar os resultados assim obtidos (n.º 88, 1.º)

$$(7+3)\times6+(7+3)\times2=7\times6+3\times6+7\times2+3\times2.$$

Assim, resulta, pois

$$(7+3)\times(6+2)=7\times6+3\times6+7\times2+3\times2.$$

De uma maneira geral, teremos

$$(a+b)\times(c+d)=ac+bc+ad+bd.$$

89. **Cálculo rápido mental ou escrito.** — O emprêgo do cálculo rápido mental ou escrito na multiplicação oferece interêsse bem maior do que na subtração, uma vez que a multiplicação, como a adição, é praticada com muita freqüência.

A seguir, examinaremos o processo da *decomposição* e alguns dos processos especiais, notáveis que se podem empregar, segundo os casos que se apresentarem, todos fundados nos princípios já estudados. Em cada caso, indicaremos as operações que podem ser efetuadas mentalmente ou por escrito para a obtenção do produto.

Devemos, além disso, notar que é de grande utilidade prática reter de memória os resultados a que conduzem as multiplicações de dois números inferiores a 20.

Consideremos, para maior clareza, os dois casos seguintes:

(1) Mais adiante demonstraremos os demais princípios relativos às somas, diferenças e produtos.

1.º *O multiplicador só tem um algarismo significativo.*

2.º *O multiplicador tem dois algarismos significativos.*

90. **1. Caso.** — Nos exemplos que seguem, as operações mencionadas podem ser também efetuadas mentalmente.

$$36\times7=(30+6)\times7=30\times7+6\times7=210+42=252,$$

$$68\times5=(70-2)\times5=70\times5-2\times5=350-10=340,$$

$$234\times8=(200+30+4)\times8=200\times8+30\times8+4\times8=$$
$$=1.600+240+32=1872,$$

$$127\times6=(100+30-3)\times6=100\times6+30\times6-3\times6=$$
$$=600+180-18=780-18=762.$$

Emprêgo dos processos particulares.

a) *Multiplicação por 4.* — Notando que $4=2\times2$, resultará:

$$45\times4=45\times2\times2=90\times2=180,$$
$$163\times4=163\times2\times2=326\times2=656.$$

b) *Multiplicação por 9.* — Notando que $9=10-1$, resultará:

$$28\times9=28\times(10-1)=28\times10-28=280-28=252,$$

$$132\times9=132\times(10-1)=132\times10-132=$$
$$=1320-132=1.188.$$

c) *Multiplicação por 20.* — Notando que $20=2\times10$, resultará:

$$86\times20=86\times2\times10=172\times10=1720,$$

$$123\times20=123\times2\times10=246\times10=2460.$$

d) *Multiplicação por 40.* — Notando que $40=4\times10$, resultará:

$$57\times40=57\times4\times10=228\times10=2280,$$

$$135\times40=135\times4\times10=540\times10=5.400.$$

91. **2.º Caso.** — *Emprêgo do processo da decomposição.*

Consideremos o produto indicado:

$$37\times42.$$

Aplicando os princípios relativos às operações já estudadas, encontraremos sucessivamente:

$$37\times 42=(30+7)\times(40+2)=30\times 40+7\times 40+30\times 2+7\times 2=$$
$$=(30\times 40)+(7\times 40+30\times 2)+(7\times 2).$$

(3×4) centenas $+ (7\times 4+3\times 2)$ dezenas $+ (7\times 2)$ unidades.

Assim, resulta que

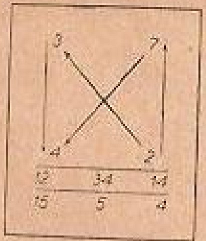
$$37\times 42=(3\times 4)\times 100+(7\times 4+3\times 2)\times 10+(7\times 2)=$$
$$=12\times 100+(28+6)\times 10+14=1200+340+14=1554.$$

O produto de dois números de dois algarismos compreende, pois:

1.º As unidades resultantes do produto das unidades simples dos dois números dados.

2.º As dezenas resultantes da soma dos produtos em cruz das dezenas e unidades dos dois números dados.

3.º As centenas resultantes do produto das dezenas dos dois números dados.



Na prática, costuma-se dispor a operação da maneira indicada ao lado, dizendo-se simplesmente: 2 vezes 7, 14; escreve-se 4 e retem-se 1; 2 vezes 3, 6; 4 vezes 7, 28; 6 mais 28, 34; 34 mais 1 (reserva), 35; escreve-se 5 e retem-se 3; 4 vezes 3, 12; 12 mais 3, 15; escreve-se 15. Obtém-se, assim, o produto 1554. — Exemplos

$$68\times 45=(6\times 4)\times 100+(8\times 4+6\times 5)\times 10+(8\times 5)=$$
$$=24\times 100+(32+30)\times 10+40=2400+620+40=3.060,$$

$$83\times 79=(8\times 7)\times 100+(3\times 7+8\times 9)\times 10+3\times 9=$$
$$=56\times 100+(21+72)\times 10+27=5.600+930+27=6.557.$$

Emprêgo dos processos particulares:

a) *Multiplicação por 11.* — Notando que $11=10+1$, resultará:

$$37\times 11=37\times(10+1)=37\times 10+37\times 1=370+37=407,$$

$$242\times 11=242\times(10+1)=242\times 10+$$
$$+242\times 1=2420+242=2662.$$

b) *Multiplicação por 22.* — Notando que $22=2\times 11$, resultará:

$$43\times 22=43\times 2\times 11=86\times 11=946.$$
$$324\times 22=324\times 2\times 11=648\times 11=7.128.$$

c) *Multiplicação por 19.* — Notando que $19=20-1$, resultará:

$$34\times 19=34\times(20-1)=34\times 20-34\times 1=680-34=646,$$

$$263\times 19=263\times(20-1)=$$
$$=263\times 20-263=5260-263=4997.$$

d) *Multiplicação por 21.* — Notando que $21=20+1$, resultará:

$$59\times 21=59\times(20+1)=59\times 20+59=1180+59=1239,$$

$$243\times 21=243\times(20+1)=$$
$$=243\times 20+243=4860+243=5103.$$

e) *Multiplicação por 12.* — Notando que $12=10+2$, resultará:

$$97\times 12=97\times(10+2)=97\times 10+97\times 2=970+194=1164,$$

$$316\times 12=316\times(10+2)=$$
$$=316\times 10+316\times 2=3160+632=3792.$$

f) *Multiplicação por 99.* — Notando que $99=100-1$, resultará:

$$48\times 99=48\times(100-1)=48\times 100-48=4800-48=4752,$$

$$242\times 99=242\times(100-1)=$$
$$=242\times 100-242=24200-242=23958.$$

g) *Multiplicação por 101.* — Notando que $101=100+1$, resultará:

$$75\times 101=75\times(100+1)=75\times 100+75=7500+75=7575,$$
$$524\times 101=524\times(100+1)=524\times 100+524=52.924.$$

92. **Observação.** — Além dos processos especiais que examinámos, outros muitos podem ainda ser considerados, segundo os casos particulares que se apresentarem. Aliás, no capítulo que segue, ao tratarmos da divisão, voltaremos ainda sôbre êles.

93. **Resolução de problemas.**

1. — *A distância da Terra à Lua é aproximadamente de 60 raios terrestres e o raio médio terrestre mede 6.371 km. Quantos quilômetros separam a Terra da Lua?*

Para determinar a distância pedida, devemos evidentemente multiplicar o comprimento do raio terrestre pelo número dêles, ou seja:

Distância da Terra à Lua . . . 60 raios
Medida do raio terrestre . . . . 6.371 km.
Distância em quilômetros da terra à Lua . . $60 \times 6.371 = 382.260$ km.

2. — *A luz percorre 300.000 quilômetros por segundo. Quantos quilômetros percorre em 7 minutos?*

Devemos primeiramente multiplicar 7 minutos por 60 para transformar o tempo dado em segundos. Depois, obteremos o percurso pedido, multiplicando a velocidade da luz dada pelo número de segundos considerados, ou seja:

Número de segundos de 1 minuto . . 60 s.
Número de segundos de 7 minutos . . $60 \times 7 = 420$.
Distância percorrida pela luz em 1 segundo . . 300.000 km.
Distância percorrida pela luz em 420 segundos . . $300.000 \times 420 = 126.000.000$ km.

3. — *Dois automóveis partem simultâneamente de S. Paulo em direção ao Rio de Janeiro. O primeiro percorre, em média, 70 quilômetros por hora e o segundo percorre 50 quilômetros por hora. Depois de 4 horas de marcha, qual é a distância que separa os veículos?*

Para obter a distância pedida, basta verificar de quanto se adianta o primeiro automóvel do segundo em 1 hora e depois multiplicar o resultado obtido por 4, que é o número de horas dadas, ou seja:

Percurso do 1.º automóvel em 1 hora . . . . . . 70 km.
Percurso do 2.º automóvel em 1 hora . . . . . . 50 km.
Afastamento de ambos em 1 hora . . $70 - 50 =$ . . 20 km.
Afastamento de ambos em 4 horas . . $4 \times 20 =$ . . 80 km.

94. Exercicios.

Efetuar mentalmente as multiplicações seguintes:

1.	1.243×2?	R. 2.486	6.	215×40?	R. 8.600
2.	761×3?	R. 2.283	7.	101×9?	R. 909
3.	436×4?	R. 1.744	8.	81×11?	R. 891
4.	332×20?	R. 6.640	9.	41×19?	R. 779
5.	324×30?	R. 9.720	10.	35×22?	R. 770.

Efetuar as multiplicações seguintes:

11.	761×49?	R. 37.289	16.	$4 \times 9 \times 11$?	R. 396
12.	1.245×54?	R. 67.230	17.	$5 \times 13 \times 22$?	R. 1.430
13.	12.322×63?	R. 776.286	18.	$2 \times 5 \times 7 \times 17$?	R. 1.190
14.	20.008×165?	R. 3.301.320	19.	$3 \times 8 \times 11 \times 19$?	R. 5.016
15.	43.964×1.232?	R. 54.163.648	20.	$11 \times 13 \times 15 \times 17$?	R. 36.465.

Calcular as expressões seguintes:

21.	$(43 + 54) \times 32$?	R. 3.104
22.	$(67 - 31) \times 41$?	R. 1.476
23.	$(29 + 33 + 12) \times 18$?	R. 1.332

24.	$(40 + 35 - 17) \times 19$?	R. 1.102
25.	$(53 + 24) \times (32 + 18)$?	R. 3.850
26.	$15 \times 4 - 18 \times 3$?	R. 6
27.	$21 \times 5 + 32 \times 3 + 41 \times 4$?	R. 365
28.	$31 \times 6 + 29 \times 5 - 28 \times 3$?	R. 247
29.	$4 \times 5 + 8 \times 3 + 6 \times 7 + 9 \times 3$?	R. 113
30.	$5 \times 6 - 4 \times 7 + 8 \times 9 - 7 \times 7$?	R. 25.

95. Problemas.

1. Quantos minutos há em 7 horas? R. 420 m.
2. Quantos segundos há em 3 dias? R. 259.200 s.
3. Calcular o valor de um terreno de 1.248 metros quadrados, sabendo-se que o metro quadrado custa 3\$000. R. 3:744\$000.
4. Em 100 litros de ar há aproximadamente 21 litros de oxigênio. Quantos litros dêsse gás há em 1.200 litros de ar? R. 252 l.
5. Sabendo-se que um metro cúbico de ar à temperatura de 0° centígrados e à pressão normal pesa 1.293 gramas, calcular o pêso de 15 metros cúbicos de ar nas mesmas condições de temperatura e pressão. R. 19.395 g.
6. Qual é a quantidade de ar que um indivíduo normal e adulto inspira durante 3 dias, sabendo-se que êle inspira 8 litros por minuto? R. 34.560 l.
7. Em 10 quilogramas de água pura há 1.111 gramas de hidrogênio e 8.889 gramas de oxigênio. Pergunta-se, em 60 quilogramas daquele líquido quantas gramas há de cada um dos gases. R. H = 6.666 e O = 53.334 g.
8. Sabendo-se que o som percorre 342 metros por segundo, calcular quantos metros percorrerá em 2 horas. R. 2.462.400 m.
9. O volume da Terra é 23 vezes maior que o de Mercúrio e o volume de Júpiter é 1.340 vezes maior que o da Terra. Quantas vezes o volume de Júpiter é maior que o de Mercúrio? R. 30.820 vezes.
10. A distância da Terra ao Sol é de 152.880.000 quilômetros e a distância de Neptuno ao Sol é 30 vezes maior que a da Terra ao Sol. Qual é a distância de Neptuno ao Sol? R. 4.586.400.000 km.

CAPÍTULO V

DIVISÃO

96. **Noção de divisão exata.** — Imaginemos que desejamos repartir igualmente, entre 5 estudantes, uma coleção composta de 15 moedas. Para êsse fim, podemos proceder da maneira seguinte: entregamos uma moeda a cada um, para o que tiramos da coleção 5 moedas; ela passa, então, a conter 15 — 5 ou 10 moedas; entregamos novamente uma moeda a cada um, para o que tiramos da coleção restante 5 moedas; ela passa, então, a conter 10 — 5 ou 5 moedas; entregamos ainda uma moeda a cada um, para o que tiramos da coleção restante 5 moedas; terminamos, assim, a distribuição, uma vez que nenhuma moeda mais resta na coleção, pois 5 — 5 = 0.

Assim procedendo, efetuamos as operações seguintes:

$$15-5=10$$
$$10-5=5$$
$$5-5=0.$$

O número de subtrações efetuadas (3) corresponde ao número de moedas recebidas por cada um dos estudantes. O conjunto dessas subtrações constitue uma *divisão*, em que o número de moedas da coleção repartida (15) é o *dividendo*, o número de estudantes (5) é o *divisor* e o número de subtrações efetuadas (3) é o *quociente*. Dizemos, ainda, que a divisão acima efetuada é *exata*, porque, terminada a última subtração possível (5 — 5), nenhuma moeda resta na coleção.

97. **Noção de divisão inexata.** — Imaginemos, agora, que a coleção que desejamos repartir igualmente entre os 5 estudantes contém 19 moedas.

De acôrdo com as considerações expendidas no exemplo anterior, efetuaremos as operações seguintes:

$$19-5=14$$
$$14-5=9$$
$$9-5=4.$$

Neste caso, ao terminar a última subtração possível (9 — 5), verificamos que restam 4 moedas que não podem ser igualmente repartidas, uma vez que são em número de 5 os estudantes. Por êsse motivo, dizemos que a divisão, nesse caso, não é exata, e sim *inexata*. O resto encontrado na última subtração possível (4) é o *resto* da divisão. Evidentemente, o resto é sempre menor que o divisor.

Devemos notar que, nos dois exemplos dados, a questão se reduz à procura do maior número de vezes (exato ou não) que um certo número (5) está contido em outro (15 ou 19). Ao resultado (3), obtido nos dois casos, damos a denominação de *quociente*.

98. **Observação.** — Notemos que as operações efetuadas no primeiro exemplo dado correspondem às seguintes:

$$15-5-5-5=0,$$

ou $$15-(5+5+5)=0,$$

ou $$15-5\times 3=0,$$

de onde resulta $$15=5\times 3+0.$$

Anàlogamente, podemos escrever, em relação ao segundo exemplo

$$19-5-5-5=4,$$

ou $$19-(5+5+5)=4,$$

ou $$19-5\times 3=4,$$

de onde resulta $$19=5\times 3+4.$$

Verificamos, assim, que nos dois casos considerados

$$15=5\times 3+0 \quad \text{e} \quad 19=5\times 3+4,$$

o dividendo pode ser considerado uma soma de duas parcelas, sendo que, a primeira, formada pelo produto do divisor pelo quociente, contém exatamente o divisor um número inteiro de vezes, e a segunda, que pode ser ou não zero, é o resto da divisão.

De uma maneira geral, teremos sempre

$$a=b\times q+r,$$

em que $r<b$, podendo ser $r \gtrless 0$ ou $r=0$.

Tendo em vista o que acabámos de expor, podemos dar à divisão a seguinte:

99. **Definição.** — *Divisão é a operação que tem por fim, sendo dados dois números em certa ordem, procurar o maior número de vezes que o segundo (divisor) está contido no primeiro (dividendo), denominando-se resto da divisão ao excesso do dividendo sôbre o produto do divisor pelo quociente.*

Como dissemos, o resto é sempre menor que o divisor e pode ser igual a zero ou diferente dêle. Quando o resto é igual a zero a divisão é *exata* e o quociente obtido é denominado *exato;* quando é diferente de zero a divisão é *inexata* e o quociente obtido é denominado *quociente inteiro* (1).

100. **Sinal.** — Para indicar a divisão emprega-se o sinal $:$, que se lê *dividido por.*

Assim, para indicar o quociente entre 15 e 5, escrevemos:

$$15:5.$$

Emprega-se, ainda, com a mesma significação de $:$, o sinal $\div$ ou um traço horizontal colocado entre os números considerados. Assim, escrevemos

$$15:5=15\div 5=\frac{15}{5},$$

ou, de uma maneira geral,

$$a:b=a\div b=\frac{a}{b}.$$

Para representar uma *divisão exata efetuada* pode-se escrever $15:5=3$ ou $15\div 5=3$ ou $\frac{15}{5}=3$.

Entretanto, para representar uma divisão *inexata efetuada*, sòmente considerando números inteiros, não se pode adotar a forma acima. Nesse caso, deve-se adotar a representação geral (n.º 98)

$$a=bq+r,$$

ou seja, para o caso particular da divisão de 19 por 5

$$19=5\times 3+4.$$

101. **Observação.** — A *divisão exata* pode ser considerada como a operação *inversa* da multiplicação.

(1) Quando estudarmos as frações, completaremos as noções sôbre os quocientes.

Com efeito, consideremos o exemplo seguinte: repartir igualmente, entre 4 estudantes, uma coleção de 8 moedas.

Procedendo da maneira indicada em o n.º 96, verificaremos que a cada estudante caberão 2 moedas, ou seja

$$8:4=2.$$

E' natural que se reunirem todas as moedas recebidas, formarão os estudantes novamente a coleção primitiva, composta de 8 moedas, ou seja

$$2\times 4=8.$$

As operações realizadas pelos estudantes correspondem às seguintes:

$$2\times 4=8 \quad \text{e} \quad 8:4=2.$$

De uma maneira geral, teremos

$$a=bq \quad \text{e} \quad \frac{a}{b}=q.$$

Dizemos, então, que a divisão exata é operação inversa à multiplicação.

Baseados nesse fato, podemos definir a divisão exata da maneira seguinte:

102. *Divisão exata é a operação que tem por fim, sendo dados um produto de dois fatores e um dêles, calcular o outro.* — Assim, dado o produto

$$8=4\times x,$$

dizemos que o quociente (x) é 2, porque

$$4\times 2=8.$$

Neste caso o produto (8) é o *dividendo*, o primeiro fator (4) é o *divisor* e o segundo fator (2) é o *quociente*.

Nas divisões exatas, o *dividendo é igual ao produto do divisor pelo quociente.*

103. **Divisor de um número.** — No exemplo acima dado, em que

$$8\div 4=2,$$

dizemos que 4 é um *divisor* de 8, que 8 é *divisível* por 4 ou que 8 é *múltiplo* de 4, porque a divisão de 8 por 4 se faz exatamente.

Assim, denominamos divisor de um número a outro número que o divide exatamente.

104. **Conseqüências da definição.** — Da definição acima dada, decorrem naturalmente as conseqüências seguintes:

1.ª *Quando o dividendo é igual ao divisor, o quociente é igual a um.* — Com efeito, por ser

$$1 \times a = a,$$

concluímos, de conformidade com a definição, que

$$\frac{a}{a} = 1.$$

2.ª *Quando o divisor é um, o quociente é igual ao dividendo.* — Com efeito, por ser

$$a \times 1 = a,$$

concluímos pela definição que

$$\frac{a}{1} = a.$$

3.ª *Quando o dividendo é zero e o divisor é diferente de zero, o quociente é igual a zero.* — Com efeito, por ser

$$0 \times a = 0,$$

concluímos, de acôrdo com a definição, que

$$\frac{0}{a} = 0.$$

105. **Prática da divisão.** — Antes de entrar na apreciação dos casos que se apresentam na divisão, vejamos como se obtém o *número de algarismos do quociente.*

Para isso, consideremos o quociente indicado

$$25249 : 63.$$

Multiplicando o divisor sucessivamente por 10, 100, 1000, encontraremos

$$63 \times 10 = 630,$$
$$63 \times 100 = 6300,$$
$$63 \times 1000 = 63000.$$

Estando o dividendo compreendido entre 6300 e 63000, concluímos que o quociente estará compreendido entre 100 e 1000 e terá, portanto, três algarismos.

Verificamos, assim, que *o número de algarismos de um quociente é igual ao número mínimo de zeros que se precisa escrever à direita do divisor para formar número superior ao dividendo.*

Distinguimos, na divisão, os casos seguintes:

1.º *o divisor e o quociente têm apenas um algarismo.*

2.º *o divisor tem vários algarismos e o quociente tem apenas um algarismo.*

3.º *o divisor e o quociente têm vários algarismos.*

106. **1.º Caso.** — Consideremos o quociente indicado

$$47 : 7.$$

Tendo em vista que, acrescentando *um zero* ao divisor, o número assim formado (70) é maior que o dividendo (47), ou seja

$$70 > 47,$$

concluímos que o quociente procurado tem apenas *um algarismo.*

Procurando, na tabela de Pitágoras, os múltiplos sucessivos de 7, encontraremos, na sétima coluna

$$7 \times 6 = 42 \quad \text{e} \quad 7 \times 7 = 49.$$

Concluímos, acordemente com a definição, que 6 é o quociente inteiro procurado de 47 por 7.

Por outro lado, verificamos que o resto dessa divisão é 5, por isso que

$$47 - 7 \times 6 = 47 - 42 = 5.$$

Escrevemos, então

$$47 = 7 \times 6 + 5.$$

Entretanto, na prática não temos necessidade de proceder assim, uma vez que retemos de memória todos os resultados a que podem conduzir as divisões do 1.º caso.

107. **2.º Caso.** — Consideremos o quociente indicado

$$426 : 73.$$

Tendo em vista que, acrescentando *um zero* ao divisor, o número assim formado (730) é maior que o dividendo (426), ou seja

$$730 > 426,$$

concluímos que o quociente procurado tem apenas *um algarismo.*

Como no caso anterior, podemos procurar os múltiplos sucessivos de 73, efetuando as operações seguintes:

$$73\times1;\quad 73\times2;\quad 73\times3...,$$

até encontrarmos, dois dêles entre os quais esteja compreendido o dividendo (426). Verificaremos, assim, que o quociente procurado é 5, uma vez que

$$73\times5=365 \quad \text{e} \quad 73\times6=438.$$

Entretanto, não sendo prático tal processo, prefere-se procurar um meio pelo qual se determine o limite superior do quociente.

Notando que o divisor é composto de 7 dezenas e 3 unidades, verificamos que o limite superior do quociente será obtido pela divisão das dezenas do dividendo pelas dezenas do divisor, ou seja

$$42\div7=6.$$

Resta-nos verificar se 6 é o quociente verdadeiro ou um número maior que êle, no caso presente.

Ora, representando por q o quociente e por r o resto, podemos escrever, de acôrdo com a definição

$$426=73\times q+r,$$

ou $$420+6=(70+3)\times q+r,$$

ou, ainda

$$42 \text{ dezenas}+6 \text{ unidades}=(7 \text{ dezenas}+3 \text{ unidades})\times q+r.$$

Por essa igualdade verificamos que o dividendo deverá conter os produtos do quociente pelas dezenas e unidades do divisor. Conseqüentemente, como acima dissemos, o produto do quociente pelas 7 dezenas do divisor, sendo um certo número de dezenas, estará contido nas 42 dezenas do dividendo.

Por outro lado, devemos notar que as 42 centenas do dividendo contêm também as dezenas que podem provir do produto do quociente pelas unidades simples do divisor. Por isso as 42 dezenas devem ser iguais ou maiores que o produto das 7 dezenas do divisor pelo quociente procurado. Assim, pois, dividindo 42 por 7, obteremos o número 6, que é igual ou maior que o quociente verdadeiro.

Efetuando o produto de 73 por 6, encontramos 438. E, como 438 é *maior que* o dividendo (426), diminuimos o quociente de uma unidade. Obtemos, assim, o quociente 5. Multiplicando-o por 73, encontramos 365. E, como 365 é *menor que* o dividendo (426), concluimos que 5 é o quociente procurado.

Na prática, dispomos a operação da maneira indicada ao lado e procedemos do modo seguinte:

Dividendo . . . 426	**73 . . . divisor**	
73×5 365	**5 . . . quociente**	
Resto 61		

Dividimos 42 por 7 e obtemos o quociente 6. Para verificar se tal quociente é o verdadeiro, por êle multiplicamos 73; e como o produto obtido (438) é maior que o dividendo (426), concluimos que o quociente é menor que 6. Tomamos agora 5 para o quociente e multiplicamos 73 por 5; sendo o produto assim obtido (365) menor que o dividendo (426), concluimos que 5 é o quociente verdadeiro.

Em geral não se costuma escrever o produto do divisor pelo quociente, subtraindo mentalmente do dividendo êsse produto. Dessarte pode-se dispor a operação pela forma indicada ao lado, em que se vê escrito imediatamente o resto da divisão.

426	**73**
61	**5**

De acôrdo com o exposto, estabelecemos, para as divisões do 2.º caso, a seguinte regra:

Para dividir um número de vários algarismos por outro, sendo o quociente número simples, divide-se o número constituído do primeiro ou dos dois primeiros algarismos do dividendo pelo primeiro algarismo do divisor. Verifica-se, depois, a exatidão dêsse quociente, multiplicando-o pelo divisor; se o produto assim obtido for menor que o dividendo, o quociente encontrado é o verdadeiro; em caso contrário, subtrai-se-lhe uma ou mais unidades sucessivamente até que o seu produto pelo divisor seja menor que o dividendo.

108. **3.º Caso.** — Consideremos o quociente indicado

$$24281:43.$$

Tendo em vista que o número mínimo de zeros que devem ser acrescentados ao divisor para torná-lo maior que o dividendo é *três*, isto é:

$$43000>24281,$$

infere-se que o quociente procurado tem *três algarismos*, constando, assim, de centenas, dezenas e unidades.

Segundo a definição, o dividendo (24281) deverá conter o produto do divisor (43) pelo quociente, isto é, pelas centenas, dezenas e unidades do quociente.

O produto do divisor (43) pelas centenas do quociente sendo um certo número de centenas, estará contido nas 242 centenas do dividendo.

Por outro lado, devemos notar que as 242 centenas do dividendo incluem também as centenas que podem provir do produto do divisor pelas dezenas e unidades simples do quociente.

Concluimos daí, que as 242 centenas do dividendo são iguais ou maiores que o produto do divisor (43) pelas centenas do quociente. Conseqüentemente, o quociente inteiro de 242 por 43 não poderá ser *menor que* as centenas do quociente procurado. Fàcilmente, poderemos verificar ainda que o quociente obtido, não poderá também ser *maior que* as centenas do quociente procurado, pois, se tal acontecesse êsse número seria maior que o quociente completo resultante da divisão considerada, o que não é possível, visto como o quociente de uma parte do dividendo (242) pelo divisor não pode ser maior que o do dividendo inteiro por êste último.

Assim, pois, dividindo 242 por 43, de acôrdo com a regra dada no caso anterior, obteremos o quociente 5, que é o número de centenas do quociente procurado. Multiplicando as centenas do quociente (5) pelo divisor (43) obteremos o produto (215 centenas), que subtraído do dividendo completo (24281) origina o resto (2781), o qual deverá conter o produto do divisor pelas dezenas e unidades simples do quociente.

Considerando o novo dividendo (2781) e repetindo o raciocínio, obteremos as dezenas do quociente (6). Multiplicando êsse número pelo divisor e subtraindo do novo dividendo (2781) o produto obtido, obteremos um resto que deverá conter o produto do divisor pelas unidades simples do quociente. Repetindo, ainda, tais considerações, obteremos as unidades simples (4) do quociente procurado.

```
                24281 | 43
43 × 500 . .  21500   |-----------
              -----      5 centenas
                2781 | 43
43 × 60 . . .   2580  |-----------
              -----      6 dezenas
                 201 | 43
43 × 4 . . . .   172  |-----------
              -----      4 unidades
resto . . . . . .  28
```

A-fim-de melhor compreender a série de operações efetuadas para a procura do quociente, dispusemos a divisão da maneira indicada no quadro ao lado, por onde se pode observar que o primeiro dividendo considerado (242) é constituido de tantos algarismos quantos os necessários, separados da esquerda para a direita do dividendo completo (24281), para formarem um número que possa conter o divisor (43) pelo menos uma vez; e por tudo se vê que o segundo dividendo parcial considerado é o resto proveniente da subtração do produto do divisor (43) pelas centenas do quociente (5) do dividendo anterior, etc.

Na prática, dispomos a operação da maneira indicada no 2.º caso e dividimos 242 por 43; multiplicamos o quociente obtido (5) pelo divisor (43) e subtraimos o produto resultante (215) do dividendo; obtemos, assim, o primeiro resto (27) à direita do qual escrevemos o algarismo seguinte (8) do 1.º dividendo; dividimos depois o novo dividendo (278) por (43); multiplicamos o quociente obtido (6) pelo divisor (43), e subtraimos o produto resultante (258) do 2.º dividendo; obtemos, dessarte, o segundo resto (20) à direita do qual escrevemos o algarismo seguinte (1) do dividendo; dividimos depois o novo dividendo (201) por 43, obtendo finalmente o último algarismo do quociente (4). Em geral, não se costuma escrever os produtos do divisor pelos algarismos do quociente, mas efetua-se mentalmente as subtrações respectivas.

```
24281 | 43
215   |-----
-----    564
 278
 258
 ---
  201
  172
  ---
   29
```

```
24281 | 43
 278  |-----
  201    564
   29
```

109. **Regra geral.** — *Separam-se no dividendo, da esquerda para a direita, os algarismos necessários para formar um número que contenha o divisor, pelo menos uma vez e menos de dez vezes; divide-se êsse número pelo divisor, de acôrdo com a regra dada no 2.º caso e obtém-se o primeiro algarismo do quociente; multiplica-se êsse algarismo pelo divisor e subtrai-se o produto obtido do dividendo; à direita do resto, escreve-se o algarismo seguinte do dividendo, formando-se novo dividendo parcial; divide-se êste pelo divisor e obtém-se o segundo algarismo do quociente, com o qual se opera do mesmo modo que com o primeiro; continua-se assim a operação até que todos os algarismos do dividendo tenham sido considerados e que se tenha efetuado a divisão do último dividendo parcial; o último resto parcial obtido é o resto da divisão.* — Exemplos

```
1256688 | 48          6833265 | 123        283936 | 23
 296      26181        0683     55555       053     12345
  086                   0682                 079
   388                   0676                 103
    048                   0615                 116
     00                    000                  01
```

110. **Observação.** — Pode suceder que um ou mais dos dividendos parciais, a partir do segundo, sejam menores que o divisor. Significa isto naturalmente que o quociente não contém unidades dessas ordens.

```
10962 | 54
 0162   203
   00
```

A operação é efetuada, neste caso, ainda pela regra geral, acima dada, mas deve-se ter o cuidado de, encontrando-se um dividendo parcial menor que o divisor, baixar o algarismo seguinte do dividendo e colocar no quociente um ou mais zeros correspondentes aos algarismos que se baixam do primeiro dividendo para tornar o dividendo parcial maior que o divisor, como se vê nos exemplos dados acima.

```
108162 | 54
 00162   2003
    00
```

111. **Casos particulares.** — 1.° Consideremos o quociente indicado

$$12500:100,$$

em que o dividendo é formado por algarismos significativos seguidos de zeros e o divisor é formado pela unidade seguida do mesmo número de zeros.

Tendo em vista que (n.° 76)

$$125 \times 100 = 12500,$$

concluimos, imediatamente que

$$12500:100 = 125.$$

Assim, pois, *para dividir um número constituído de algarismos significativos seguidos de zeros pela unidade seguida de igual ou menor número de zeros, basta suprimir da direita do dividendo tantos zeros quantos contém o divisor.* — 2.° Consideremos os quocientes indicados

$$4528:10; \quad 4528:100 \quad \text{e} \quad 4528:1000,$$

em que os divisores são formados da unidade seguida de zeros.

Tendo em vista que dividir um número por 10 (1 dezena)

significa averiguar quantas dezenas contém êsse número, concluimos que o quociente procurado será o próprio número de dezenas do dividendo e o resto será o de unidades simples do dividendo. Assim, pois, o quociente inteiro de 4528 por 10 é 452 e o resto da divisão é 8.

Com auxílio de considerações análogas, concluiremos também fàcilmente que o quociente inteiro de 4528 por 100 é 45 e o resto da divisão é 28, e que o quociente de 4528 por 1000 é 4 e o resto da divisão é 528.

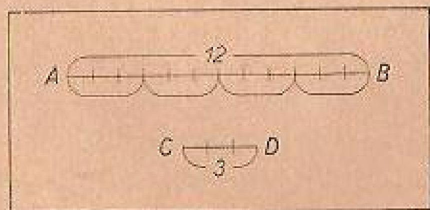
Assim como assim, para dividir um número qualquer pela unidade seguida de zeros, separam-se, à sua direita, tantos algarismos quantos zeros contém o divisor. O número separado à esquerda é o quociente inteiro e o número separado à direita é o resto da divisão.

112. **Interpretação geométrica.** — Consideremos o quociente indicado

$$12:3.$$

Representando os números dados pelos segmentos seguintes:

$$AB = 12$$
$$CD = 3,$$



como se vê na figura acima, o quociente

$$12:3 = 4,$$

representa o número de vezes que o segmento AB contém o segmento CD.

113. **Prova da divisão.** — Empregam-se constantemente na divisão as seguintes:

1.ª Multiplica-se o divisor pelo quociente e soma-se o resto, se houver. O resultado obtido deve ser igual ao dividendo.

2.ª Prova dos 9 (vide n.° 154).

114. **Princípios relativos à divisão.** — PROPRIEDADES DOS QUOCIENTES EXATOS. — 1.ª *Para dividir uma soma ou uma diferença indicada por um número qualquer, pode-se dividir cada termo da soma ou da diferença por êsse número e somar ou subtrair os resultados assim obtidos.* — Assim, dizemos que

$$(12+8):4=(12:4)+(8:4)=3+2$$

e $$(12-8):4=(12:4)-(8:4)=3-2.$$

Os termos da soma e da diferença indicadas, sendo divisíveis exatamente por 4, os quocientes de cada um dêles por 4 serão, respectivamente

$$12:4=3 \quad \text{e} \quad 8:4=2.$$

De acôrdo com a definição de divisão exata (n.º 101), teremos

$$12=4\times3 \quad \text{e} \quad 8=4\times2.$$

Por outro lado, sabemos que

$$(3+2)\times4=4\times3+4\times2=12+8$$

e $$(3-2)\times4=4\times3-4\times2=12-8.$$

Assim, pois $\quad 3+2 \quad$ e $\quad 3-2$

são os quocientes procurados, uma vez que ambos multiplicados pelo divisor (4) reproduzem, respectivamente, os dividendos dados ($12+8$ e $12-8$). — De uma maneira geral, teremos

$$(a+b):n=(a:n)+(b:n)$$

$$(a-b):n=(a:n)-(b:n).$$

Exemplos

$$(15+30):5=15:5+30:5=3+6=9,$$

$$(12+20+8):4=12:4+20:4+8:4=3+5+2=10,$$

$$(21+35+49+70):7=21:7+35:7+49:7+70:7=$$
$$=3+5+7+10=25,$$

$$(40-20):10=40:10-20:10=4-2=2.$$

2.ª *Para dividir um produto indicado de vários fatores por um número, basta dividir um só dos fatores por êsse número, conservando-se os demais* (1). — Assim, dizemos que

$$(7\times3\times10):5=7\times3\times(10:5)=7\times3\times2.$$

(1) No capítulo VIII estudaremos as propriedades dos quocientes inteiros.

Com efeito, tendo em vista que

$$(7\times3\times2)\times5=7\times3\times(2\times5)=7\times3\times10,$$

concluimos que $\quad 7\times3\times2$

é de fato o quociente procurado, uma vez que o seu produto pelo divisor é igual ao dividendo. — De uma maneira geral, teremos

$$(a\times b\times c):n=(a:n)\times b\times c.$$

Exemplos

$$(8\times4\times5):2=(8:2)\times4\times5=4\times4\times5=80,$$

$$(15\times18\times31):5=(15:5)\times18\times31=3\times18\times31=1674,$$

$$(6\times21\times30):7=6\times(21:7)\times30=6\times3\times30=540,$$

$$20ab:4=(20\times a\times b):4=(20:4)\times a\times b=5\times a\times b=5ab,$$

$$18ax:6=(18\times a\times x):6=(18:6)\times a\times x=3\times a\times x=3ax.$$

Embora não sejam necessários os parêntesis para indicar as operações acima, preferimos empregá-los, a-fim-de facilitar a compreensão dos exemplos dados.

115. **Observação.** — Pode suceder que, na divisão de um produto indicado de vários fatores por um certo número, seja êsse número igual a um dos fatores do produto, como, por exemplo, em

$$(8\times5):8.$$

Como nos exemplos anteriores, encontraremos

$$(8\times5):8=(8:8)\times5=1\times5.$$

E, como o produto da unidade por um número qualquer, é igual a êsse próprio número, podemos escrever

$$(8\times5):8=5.$$

Por êsse motivo, costuma-se dizer que, *quando um dos fatores do produto indicado é igual ao divisor, para se obter o quociente basta cancelar êsse fator.*

Devemos, entretanto, notar que tal maneira de dizer não é rigorosa, uma vez que, de fato, o que se faz é dividir um dos fatores do produto indicado pelo divisor.

3.ª *Para dividir um número qualquer por um produto indicado de vários fatores, pode-se dividir êsse número pelo primeiro fator, o quociente obtido pelo segundo e assim (por* *diante, até o último fator.* — Assim, dizemos que

$$45:(3\times5)=(45:3):5=15:5=3.$$

Com efeito, tendo em vista que

$$(3\times5)\times15:5=3\times5\times(15:5)=3\times5\times3=45,$$

concluímos que

$$15:5 \quad \text{ou} \quad 3$$

é realmente o quociente procurado, uma vez que o seu produto pelo divisor é igual ao dividendo. — De uma maneira geral, teremos

$$n:(a\times b)=(n:a):b.$$

Exemplos

$$120:(4\times5)=(120:4):5=30:5=6,$$

$$180:(2\times3\times5)=(180:2):(3\times5)=90:(3\times5)=$$
$$=(90:3):5=30:5=6.$$

116. **Cálculo rápido mental ou escrito.** — Aplicando os princípios estudados, podemos, em certos casos, abreviar a divisão e até efetuá-la mentalmente.

Examinaremos a seguir o processo da *decomposição* e alguns dos processos especiais notáveis que se podem empregar segundo os casos que se apresentarem. As operações indicadas nos exemplos que daremos poderão ser também efetuadas mentalmente.

Emprêgo do processo da decomposição:

$$165:15=(150+15):15=150:15+15:15=10+1=11,$$

$$624:12=(600+24):12=600:12+24:12=50+2=52,$$

$$2472:24=(2400+72):24=2400:24+72:24=100+3=103.$$

Emprêgo dos processos particulares:

a) *Divisão por 4.* — Notando que $4=2\times2$, resultará:

$$180:4=180:2:2=90:2=45,$$

$$656:4=656:2:2=328:2=164.$$

b) *Divisão por 6.* — Notando que $6=2\times3$, resultará:

$$252:6=252:2:3=126:3=42,$$

$$1188:6=1188:2:3=594:3=198.$$

c) *Divisão por 9.* — Notando que $9=3\times3$, resultará:

$$405:9=405:3:3=135:3=45,$$

$$1368:9=1368:3:3=456:3=152.$$

d) *Divisão por 5.* — Notando que $5=10:2$, resultará:

$$245:5=245\times2:10=490:10=49,$$

$$1675:5=1675\times2:10=3350:10=335.$$

117. **Observação.** — Quando o divisor tem apenas um algarismo, como nos exemplos dados acima, o processo realmente prático para a obtenção do quociente consiste em efetuar mentalmente a divisão de acôrdo com a regra dada no 2.º caso (n.º 107).

e) *Divisão por 25.* — Notando que $25=100:4$, resultará:

$$475:25=475\times4:100=1900:100=19,$$

$$1375:25=1375\times4:100=5500:100=55.$$

Multiplicações abreviadas. — Daremos a seguir mais alguns processos especiais empregados na multiplicação.

a) *Multiplicação por 5.* — Tendo em vista que $5=10:2$, resultará:

$$48\times5=48\times10:2=480:2=240,$$

$$123\times5=123\times10:2=1230:2=615.$$

b) *Multiplicação por 50.* — Tendo em vista que $50=$ $=100:2$, resultará:

$$54\times50=54\times100:2=5400:2=2700,$$

$$143\times50=143\times100:2=14300:2=7150.$$

c) *Multiplicação por 25.* — Tendo em vista que $25=$ $=100:4$, resultará:

$$63\times25=63\times100:4=6300:4=1575,$$

$$281\times25=281\times100:4=28100:4=7025.$$

d) *Multiplicação por 250.* — Tendo em vista que $250=$ $=1.000:4$, resultará:

$$43\times250=43\times1000:4=43000:4=10750,$$

$$428\times250=428\times1000:4=428.000:4=107000.$$

e) Multiplicação por 125. — Tendo em vista que $125 = 1000:8$, resultará:

$$79 \times 125 = 79 \times 1000:8 = 79000:8 = 9875,$$
$$237 \times 125 = 237 \times 1000:8 = 237000:8 = 29625.$$

f) Multiplicação por 15. — Tendo em vista que $15 = 10 + 5 = 10 + (10:2)$, resultará:

$$63 \times 15 = 63 \times 10 + 63 \times 10:2 = 630 + 630:2 = 630 + 215 = 845.$$
$$148 \times 15 = 148 \times 10 + 148 \times 10:2 = 1480 + 740 = 2220.$$

Na prática, efetuamos imediatamente o produto do número dado por 10 e tomamos para outra parcela a metade dêsse produto. Assim

$$63 \times 15 = 630 + 215 = 845,$$
$$148 \times 15 = 1480 + 740 = 2220.$$

118. Resolução de problemas.

1. — *Um automóvel demorou 5 horas para fazer um percurso de 250 quilômetros. Quantos quilômetros por hora percorreu em média?*

Evidentemente, o número de quilômetros percorridos em 1 hora será obtido pela divisão do número total de quilômetros percorridos pelo número de horas em que foi feito, ou seja:

Distância percorrida	250 km.
Tempo gasto no percurso	5 h.
Distância percorrida em 1 hora $250:5 =$	50 km.

2. — *Quantas horas há em 25.200 segundos?*

Evidentemente, o número de horas que há no tempo dado será obtido pela divisão dêsse número pelo número de segundos que há em uma hora, ou seja

Em uma hora há	60 m.
Em um minuto há	60 s.
Em uma hora há $60 \times 60 =$	3600 s.
Em 25.200 segundos há . . $25.200:3.600 =$ . .	7 h.

3. — *Qual é o número que dividido por 7 dá de quociente 11 e de resto 3?*

Como sabemos que o dividendo é igual ao produto divisor pelo quociente mais o resto, para obter o número pedido bastará multiplicar o divisor pelo quociente e ao produto somar o resto dado, ou seja

Divisor	7
Produto do divisor pelo quociente . $7 \times 11 =$	77
Dividendo . . . . $77 + 3 =$	80

119. Exercícios.

Efetuar mentalmente as divisões seguintes:

1.	432 : 4?	R. 108	6.	390 : 30?	R. 13
2.	215 : 5?	R. 43	7.	1.800 : 200?	R. 9
3.	350 : 25?	R. 14	8.	4.500 : 300?	R. 15
4.	500 : 125?	R. 4	9.	480 : 15?	R. 32
5.	480 : 20?	R. 24	10.	1.800 : 150?	R. 12

Efetuar as divisões seguintes:

11.	2.244 : 17?	R. 132	16.	738.815 : 95?	R. 7.777
12.	4.826 : 19?	R. 254	17.	879.912 : 99?	R. 8.888
13.	8.487 : 23?	R. 369	18.	202.909 : 101?	R. 2.009
14.	86.702 : 77?	R. 1.226	19.	425.088 : 123?	R. 3.456
15.	677.403 : 81?	R. 8.363	20.	1.552.085 : 7.219?	R. 215

Determinar os restos das divisões seguintes:

21.	7.118 : 49?	R. 13
22.	14.907 : 53?	R. 14
23.	30.825 : 78?	R. 15
24.	172.060 : 2.124?	R. 16
25.	366.768 : 3.031?	R. 17

Calcular as expressões seguintes:

26.	$(60 + 45) : 15$?	R. 7	31.	$(90 \times 4) : 3$?	R. 120
27.	$(85 - 25) : 5$?	R. 12	32.	$(17 \times 18 \times 19) : 6$?	R. 969
28.	$(120 + 150 + 180) : 30$?	R. 15	33.	$180 : (2 \times 3 \times 5)$?	R. 6
29.	$(240 + 252 - 168) : 12$?	R. 27	34.	$1.980 : (4 \times 5 \times 9)$?	R. 11
30.	$(350 - 275 + 125) : 25$?	R. 8	35.	$9.240 : (7 \times 10 \times 11)$?	R. 12

120. Problemas.

1. Medindo o meridiano terrestre aproximadamente 40.000.000 de metros e tendo 360 graus, qual é o comprimento de 1 grau? R. 111.111 m.

2. Repartiram-se igualmente 360$000 entre certo número de pessoas, de modo que cada uma recebeu 12$000. Quantas eram elas? R. 30.

3. Um operário, que ganha mensalmente 270$000, quanto ganha por dia? R. 9$000.

4. Sabendo-se que o som percorre 341 metros por segundo, determinar a distância de um ponto da cidade a outro em que foi dado um tiro, cujo estampido foi ouvido no segundo ponto 7 segundos depois de ter sido dado no primeiro. R. 2.387 m.

5. Em uma divisão inexata, o divisor é 12, o quociente 4 e o resto 11. Qual é o dividendo? R. 59.

6. Em uma divisão inexata, o dividendo é 135, o quociente 12 e o resto 3. Qual é o divisor? R. 11.

7. Em uma divisão inexata, o quociente é 14, o dividendo 189 e o divisor 13. Qual é o resto? R. 7.

8. Dois automóveis partem, no mesmo instante, um ao encontro do outro, de dois pontos opostos, distantes de 300 quilômetros. O primeiro percorre 40 quilômetros por hora e o segundo 35. Depois de quantas horas a contar da partida de ambos se encontrarão os automóveis? R. 4 h.

9. Um automóvel que percorre 80 quilômetros por hora, sai 5 horas depois do outro que percorre 60 quilômetros por hora, na mesma direção. Em quanto tempo o segundo alcançará o primeiro? R. 15 h.

10. Pagou-se 84$000 por uma barrica de erva-mate, cujo pêso bruto é 80 quilogramas sendo que o da barrica vazia é 8 vezes menor. Quanto vale um quilo dessa mercadoria? R. 1$200.

CAPÍTULO VI

PROBLEMAS DE RECAPITULAÇÃO SÔBRE AS OPERAÇÕES COM NÚMEROS INTEIROS

121. Resolvamos os problemas seguintes:

1. — *Quantos são os números que podem ser escritos com 4 algarismos?*

O maior número de 4 algarismos é 9.999
O maior número de 3 algarismos é 999
Os números de 4 algarismos são, ao todo, 9.999 — 999 = 9.000

2. — *Quantos algarismos teremos de escrever para representar todos os números compreendidos entre 1 e 300 inclusive?*

Para os 9 primeiros números empregam-se 9
Para os 90 seguintes empregam-se 90 × 2 = ... 180
Para os restantes (300 — 99) empregam-se 201 × 3 = . 603
Para os 300 números empregam-se 9 + 180 + 603 = . 792

3. — *Procurar dois números, sabendo-se que a sua soma é 60 e que o quociente exato do maior pelo menor é 3.*

O quociente do número maior pelo menor sendo 3, segue-se que o número maior é igual a três vezes o menor. Assim, pois

3 × o número menor + 1 vez o número menor = 60
4 vezes o número menor . . . . = 60
O número menor = 60 : 4 . . . . = 15
O número maior = 60 — 15 . . . . = 45

4. — *Procurar dois números cuja soma é 75 e cuja diferença é 15.*

O número maior + o número menor . . . . . = 75
O número maior — o número menor . . . . = 15
O número maior + o número maior . . . . = 90
2 vezes o número maior . . . . = 90
O número maior = 90 : 2 . . . . = 45
O número menor = 75 — 45 . . . . = 30

5. — *Se 12 quilogramas de açúcar custam 14$400, 15 quilogramas quanto custarão?*

12 quilogramas custam . . . . . . 14$400
1 quilograma custa 14$400 : 12 . . . = 1$200
15 quilogramas custam 1$200 × 15 . . = 18$000

6. — *Um automóvel parte de S. Paulo para Cafelândia no mesmo instante em que outro parte de Cafelândia para S. Paulo. O primeiro faz 52 quilômetros por hora e o segundo 55, em média. Depois de quantas horas de marcha se encontrarão os automóveis, sabendo-se que a distância S. Paulo-Cafelândia é de 248 quilômetros?*

O automóvel que parte de S. Paulo em 1 hora faz . . 52 km.
O automóvel que parte da Cafelândia em 1 hora faz . 55 km.
Aproximam-se ambos em 1 hora de 52 + 55 = . . . 107 km.
Para percorrer 428 km. levarão ambos 428 : 107 . . 4 h.

7. — *Em um dos jardins de Curitiba há cisnes e coelhos, contando-se 58 cabeças e 178 pernas, no todo. Quantos são os cisnes e quantos são os coelhos?*

Se todos os animais fossem coelhos, o número de pernas seria 58 × 4 = 232
Mas, como as pernas são 178, há um excesso de 232 — 178 = . . . 54
A diferença entre o número de pernas dêsses animais sendo 4 — 2 = 2
O número de cisnes será 54 : 2 = ... 27
O número de coelhos será 58 — 27 = ... 31

122. Problemas propostos.

1. Quantos são os números que podem ser escritos com 3 algarismos? R. 900.

2. Quantos são os números que podem ser escritos com 4 algarismos? R. 9.000.

3. Quantos são os números que podem ser escritos com 5 algarismos? R. 90.000.

4. Quantos algarismos teremos de escrever para representar todos os números de 3 algarismos? R. 2.700.

5. Quantos algarismos teremos de escrever para representar todos os números de 4 algarismos? R. 36.000.

6. Quantos algarismos teremos de escrever para representar todos os números de 5 algarismos? R. 450.000.

7. Quantos algarismos teremos de escrever para representar todos os números compreendidos entre 1 e 1.000? R. 2.888.

8. Quantos algarismos teremos de escrever para representar todos os números compreendidos entre 1 e 10.000? R. 38.888.

9. Quantos algarismos teremos de escrever para representar todos os números compreendidos entre 1 e 100.000? R. 488.888.

10. Quantos algarismos teremos de escrever para representar todos os números compreendidos entre 1 e 245? R. 623.

11. Quantos algarismos teremos de escrever para representar todos os números compreendidos entre 1 e 1.718? R. 5.761.

12. Quantos algarismos teremos de escrever para representar todos os números compreendidos entre 1 e 15.368? R. 65.728.

13. Quantos algarismos teremos de escrever para representar todos os números compreendidos entre 48, inclusive, e 917 inclusive? R. 2.558.

14. Quantos algarismos teremos de escrever para representar todos os números compreendidos entre 1.243 e 15.224? R. 61.142.

15. Quantos algarismos teremos de escrever para representar todos os números compreendidos entre 25.419 e 124.633? R. 520.693.

16. Quantas vezes teremos de escrever o algarismo 5 para representar todos os números compreendidos entre 1 e 1.000? R. 300.

17. Quantas vezes teremos de escrever o algarismo 2 para representar todos os números compreendidos entre 1 e 10.000? R. 4.000 vezes.

18. Quantas vezes teremos de escrever o algarismo 7 para representar todos os números compreendidos entre 1 e 100.000 exclusive? R. 50.000.

19. Escrevendo-se a série natural dos números inteiros sem separar os algarismos, qual é o 60.º algarismo escrito? R. 3.

20. Escrevendo-se a série natural dos números inteiros, sem separar os algarismos, qual é o 500.º algarismo escrito? R. 0.

21. Escrevendo-se a série natural dos números inteiros sem separar os algarismos, qual é o 1.800.º algarismo escrito? R. 6.

22. Procurar dois números, sabendo-se que a sua soma é 136 e a sua diferença é 22. R. 79 e 57.

23. Procurar três números inteiros consecutivos cuja soma é 108. R. 35, 36 e 37.

24. Procurar três números ímpares consecutivos cuja soma é 51. R. 15, 17 e 19.

25. Procurar três números pares consecutivos cuja soma é 66. R. 20, 22 e 24.

26. Procurar dois números, sabendo-se que a sua diferença é 3 e que o seu produto aumenta de 24 quando se somam 2 ao maior dêles. R. 15 e 12.

27. Procurar dois números, sabendo-se que a sua soma é 60 e que a divisão do maior pelo menor dá 3 como quociente e 8 como resto. R. 47 e 13.

28. Procurar dois números, sabendo-se que a sua diferença é 120 e que o quociente exato do maior pelo menor é 6. R. 144 e 24.

29. O produto de dois números é 2.790. Subtraindo-se 5 do maior dêles e somando 5 ao outro, o novo produto difere do primitivo de 60. Quais são êsses números, sabendo-se que a sua soma é 107. R. 45 e 62.

30. Um trem, fazendo 40 quilômetros por hora, parte duas horas na frente de outro que faz 50 quilômetros por hora, marchando ambos na

mesma direção. Depois de quanto tempo o segundo alcançará o primeiro? R. 8 h.

31. Se 8 quilogramas de açúcar custam 9$600, quanto custarão 15 quilogramas? R. 18$000.

32. Qual é o salário diário de um operário que recebe 255$000 pelo trabalho de 1 mês? R. 8$500.

33. Um relógio cuja marcha adianta 3 minutos cada 5 horas, é acertado ao meio dia. Quando êsse relógio marcar 22 horas dêsse mesmo dia, qual será a hora verdadeira? R. 21 h. 54 m.

34. Uma fonte escoa 80 litros de água cada dez minutos. Em quanto tempo poderá essa fonte encher um tanque de 2.400 litros? R. 5 h.

35. Um pai tem 30 anos e seu filho 5. Daquí a quantos anos a idade do pai será o dôbro da de seu filho? R. 20 a.

36. Um pai tem 40 anos e seus três filhos têm, respectivamente, 10, 12 e 14 anos. Daquí a quantos anos a idade do pai será igual à soma da de seus três filhos? R. 2 a.

37. Sabendo-se que 100 graus centigrados valem 80 Reaumur, pergunta-se qual é a temperatura de um corpo em graus centigrados quando o termômetro nele aplicado marca 24 graus Reaumur? R. 30 c.

38. Repartir 78$000 entre 3 pessoas, de modo que a segunda receba 5$000 mais que a primeira e a terceira receba 8$000 mais que a segunda. R. 20$, 25$ e 33$.

39. Um pai trabalha junto com seu filho, ganhando 4$000 por dia mais que êle. No fim de certo número de dias de serviço, o primeiro recebe 120$000 e o segundo 80$000. Qual é o salário diário de cada um e quantos dias trabalharam? R. 12$, 8$ e 10 d.

40. Pagou-se 3:200$000 pelo trabalho de 10 dias de 35 operários, entre homens e mulheres. Calcular o número de homens e o de mulheres que participaram dêsse trabalho. Sabendo-se que os homens ganham 10$000 por dia e as mulheres 8$000. R. 20 h. e 15 m.

Capítulo VII

POTENCIAÇÃO

123. **Noção de potência.** — Consideremos o produto indicado:

$$3 \times 3 \times 3 \times 3,$$

em que todos os fatores são iguais.

Os produtos dessa natureza, em que todos os fatores são iguais, recebem a denominação de potência.

124. **Definição.** — *Denominamos potência de um número a um produto de vários fatores iguais a êsse número.* — Assim, no exemplo dado acima

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81,$$

dizemos que 81 é uma *potência*.

Distinguimos, nas potências, os elementos seguintes: *base* e *grau*.

A base de uma potência é o fator que se repete.

O grau de uma potência é indicado pelo número de fatores iguais que são tomados.

125. **Notação.** — Para representar abreviadamente uma potência, escrevemos a base respectiva e indicamos o grau correspondente por um número, denominado *expoente*, escrito em algarismos menores que a base e colocado um pouco acima dela, à direita. — Assim, escrevemos

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81 = 3^4,$$

e dizemos que 81 é a quarta potência de 3, que 4 é o *expoente* da potência e que 3 é a sua *base*.

126. **Observação.** — Por extensão do conceito de potência, dizemos que um número qualquer é considerado como elevado a potência 1. — Assim, dizemos que

$$7^1 = 7; \quad 10^1 = 10 \quad e \quad a^1 = a.$$

Não se usa, entretanto, escrever o expoente 1, que se considera subentendido.

127. **Quadrado de um número.** — A segunda potência de um número recebe a denominação particular de *quadrado* dêsse número. — Assim, dizemos que

$$5^2 \text{ ou } 25$$

é o *quadrado* de 5.

Os quadrados dos números compreendidos entre 1 e 10 são, respectivamente:

Números . .	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quadrados .	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100.

128. **Cubo de um número.** — A terceira potência de um número recebe a denominação particular de *cubo* dêsse número. — Assim, dizemos que

$$5^3 \text{ ou } 125$$

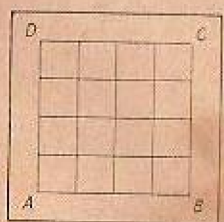
é o *cubo* de 5.

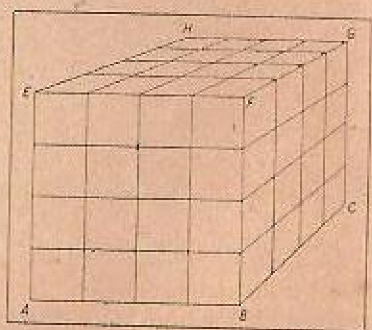
Os cubos dos números compreendidos entre 1 e 10 são respectivamente:

Números .	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cubos .	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000.

129. **Interpretação geométrica.** — 1.ª Interpretemos o quadrado do número 4.

Para isso, consideremos o quadrado ABCD. Sendo os lados iguais entre si, admitamos que cada um dêles representa grà-





ficamente o número 4. Dividindo os lados AB e BC em quatro partes iguais, e traçando, pelos pontos assim determinados,

paralelas aos lados AD e DC, decomporemos o quadrado ABCD, como se vê na figura acima, em 16 quadrados menores de lado igual à unidade adotada.

A área do quadrado considerado será, pois

$$4 \times 4 = 4^2 = 16.$$

2.ª Interpretemos geomètricamente o cubo do número 4.

Para isso, consideremos o cubo ABCEFGH, que se vê na figura acima. Sendo as arestas iguais entre si, admitamos que cada uma delas representa gràficamente o número 4. O cubo ABCEFGH pode ser decomposto em 64 cubos menores de aresta igual à unidade adotada.

O volume do cubo considerado representa, pois

$$4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64.$$

130. **Observações.** — 1.ª As potências de zero são tôdas iguais a zero. — Com efeito, de acôrdo com a definição, teremos

$$0^5 = 0 \times 0 \times 0 \times 0 \times 0 = 0.$$

De uma maneira geral, teremos sempre

$$0^n = 0.$$

2.ª As potências de 1 são tôdas iguais a 1. — Com efeito, segundo a definição, teremos:

$$1^5 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1.$$

De uma maneira geral, teremos

$$1^n = 1.$$

3.ª As potências de 10 são tôdas constituídas pela unidade seguida de tantos zeros quantas são as unidades dos expoentes respectivos. — Com efeito, conforme a definição e tendo em vista a extensão dada ao conceito de potência, teremos

$$10^1 = 10,$$
$$10^2 = 10 \times 10 = 100,$$
$$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1.000,$$
$$10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10.000.$$

De uma maneira geral, podemos sempre representar um número formado pela unidade seguida de n zeros sob a forma de potência, tomando 10 para base e n para expoente, ou seja

$$10^n.$$

131. Princípios relativos às potências. — TEOREMA I: *Para multiplicar duas ou mais potências de mesma base, conserva-se a base comum e toma-se para expoente a soma dos expoentes das potências consideradas.* — Assim, dizemos que

$$7^2\times 7^3=7^5.$$

Com efeito, de conformidade com a definição (n.º 124), podemos escrever

$$7^2\times 7^3=(7\times 7)\times(7\times 7\times 7)=7\times 7\times 7\times 7\times 7=7^5$$

De uma maneira geral, teremos

$$a^2\times a^3=a^5;\qquad a^m\times a^n=a^{m+n}.$$

TEOREMA II: *Para dividir duas potências de mesma base, conserva-se a base comum e toma-se para expoente a diferença entre os expoentes das potências consideradas.* — Assim, dizemos que

$$7^5:7^3=7^2.$$

Com efeito, tendo em vista que, segundo o teorema anterior

$$7^3\times 7^2=7^5,$$

concluímos que

$$7^2$$

é realmente o quociente das duas potências consideradas, uma vez que, o seu produto pelo divisor reproduz o dividendo.

De uma maneira geral, teremos

$$a^5:a^3=a^2;\qquad a^m:\ a^n=a^{m-n}.$$

TEOREMA III: *Para elevar uma potência indicada a outra potência, conserva-se a base e toma-se para expoente o produto dos expoentes considerados.* — Assim, dizemos que

$$(7^3)^2=7^{3\times 2}.$$

Com efeito, sabemos que

$$(7^3)^2=7^3\times 7^3,$$

ou, pelo teorema I

$$(7^3)^2=7^3\times 7^3=7^{3+3}=7^{3\times 2}=7^6.$$

De uma maneira geral, teremos

$$(a^3)^2=a^{3\times 2};\quad (a^m)^n=a^{mn}.$$

TEOREMA IV: *Para multiplicar entre si dois ou mais produtos indicados e de fatores que contêm ou não expoentes,*

escreve-se uma só vez cada um dos fatores, com um expoente igual à soma dos expoentes que houver naqueles produtos. — Assim, dizemos que

$$(3^2\times 5^3)\times(3^4\times 5^2\times 7)=3^6\times 5^5\times 7.$$

Com efeito, sabemos que

$$(3^2\times 5^3)\times(3^4\times 5^2\times 7)=3^2\times 3^4\times 5^3\times 5^2\times 7,$$

ou, ainda

$$3^2\times 3^4\times 5^3\times 5^2\times 7=(3^2\times 3^4)\times(5^3\times 5^2)\times 7,$$

ou, ainda, de acôrdo com o teorema I

$$(3^2\times 3^4)\times(5^3\times 5)\times 7=3^6\times 5^5\times 7.$$

Concluímos, assim, que

$$(3^2\times 5^3)\times(3^4\times 5^2\times 7)=3^6\times 5^5\times 7.$$

De uma maneira geral, teremos

$$(a^m\times b^n)\times(a^p\times b^q\times c)=a^{m+p}\times b^{n+q}\times c.$$

TEOREMA V: *Para dividir dois produtos indicados e constituído de fatores afetados de expoentes, pode-se, sendo possível, escrever uma só vez cada um dos fatores, com um expoente igual à diferença dos expoentes que houver no dividendo e divisor, conservando-se no quociente, sem modificação, os fatores que só figuram no dividendo.* — Assim, dizemos que

$$(3^4\times 5^2\times 7):(3^2\times 5)=3^2\times 5\times 7.$$

Com efeito, tendo em vista que, de acôrdo com o teorema anterior

$$(3^2\times 5)\times(3^2\times 5\times 7)=3^4\times 5^2\times 7,$$

concluímos que

$$3^2\times 5\times 7$$

é realmente o quociente das duas potências consideradas, uma vez que o seu produto pelo divisor reproduz o dividendo.

De uma maneira geral, teremos

$$(a^m\times b^n\times c):(a^p\times b^q)=a^{m-p}\times b^{n-q}\times c.$$

TEOREMA VI: *Uma potência de um produto indicado é igual ao produto das potências de mesmo grau de cada um dos fatores.* — Assim, dizemos que

$$(3\times 5\times 7)^3=3^3\times 5^3\times 7^3.$$

Com efeito, de acôrdo com a definição, vem

$$(3\times5\times7)^3=(3\times5\times7)\times(3\times5\times7)\times(3\times5\times7)=$$
$$=3\times5\times7\times3\times5\times7\times3\times5\times7=$$
$$=3\times3\times3\times5\times5\times5\times7\times7\times7=3^3\times5^3\times7^3.$$

De uma maneira geral, teremos

$$(a\times b\times c)^n=a^n\times b^n\times c^n.$$

Teorema VII: *Uma potência de quociente indicado é igual ao quociente das potências de mesmo grau do dividendo e divisor.* — Assim, dizemos que

$$(5:3)^2=5^2:3^2.$$

Com efeito, de acôrdo com a definição, teremos

$$(5:3)^2=(5:3)\times(5:3)=5:3\times5:3.$$

Mas, como $\quad 5:3\times5:3=5\times5:3:3,$

resultará de acôrdo com o teorema relativo à divisão de um número por um produto indicado

$$5\times5=3:3=5^2:(3\times3)=5^2:3^2.$$

De uma maneira geral, teremos

$$(a:b)^n=a^n:b^n.$$

Teorema VIII: *O quadrado de uma soma indicada de dois números é igual ao quadrado do primeiro, mais duas vezes o produto do primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo.* — Assim, dizemos que

$$(5+7)^2=5^2+2\times5\times7+7^2.$$

Com efeito, conforme a definição teremos

$$(5+7)^2=(5+7)(5+7).$$

Aplicando o teorema relativo ao produto de duas somas indicadas, encontraremos

$$(5+7)(5+7)=5\times5+7\times5+5\times7+7\times7=$$
$$=(5\times5)+(7\times5+5\times7)+(7\times7),$$

de onde tiramos

$$(5\times5)+(7\times5+5\times7)+(7\times7)=5^2+2\times5+7+7^2.$$

De modo geral, teremos

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

Capítulo VIII

DIVISIBILIDADE

132. **Definições.** — Das noções que demos de múltiplo de um número e divisor de um número (n.º 103), resultam as definições seguintes:

Um número é múltiplo de outro quando é igual ao produto dêsse outro por um número inteiro qualquer.

Um número é divisível por outro quando contém exatamente êsse outro um número inteiro de vezes.

Decorre imediatamente dessas definições que todo o número que é *múltiplo* de outro é também por êle *divisível*.

Assim, tendo em vista que

$$15:3=5 \quad \text{ou} \quad 15=3\times5,$$

dizemos que 15 é múltiplo de 3 porque é igual ao produto de 3 pelo número inteiro 5 ou que 15 é divisível por 3 porque 15 contém exatamente 5 vezes o número 3.

Dizemos, ainda, que *um número é divisor, fator, submúltiplo ou parte alíquota de outro quando está contido exatamente um número inteiro de vezes nesse outro.*

Assim, no exemplo dado acima, em que

$$15:3=5,$$

dizemos que 3 é *fator, divisor*, ou *submúltiplo* porque está contido exatamente 5 vezes no número 15.

133. **Múltiplos de um número.** — Para obter os múltiplos de um número, conforme a definição, basta multiplicá-lo pela série natural dos números inteiros.

Assim, os múltiplos de 7, por exemplo, serão:

$$7\times1=7;\quad 7\times2=14;\quad 7\times3=21;\quad 7\times4=28;\quad 7\times5=35...$$

Como é fácil de compreender a série dos múltiplos de um número é ilimitada.

134. **Divisores de um número.** — Para obter os divisores de um número, basta dividí-lo pela série natural dos números inteiros inferiores a êle e tomar os que o dividirem exatamente.

Assim, para obter os divisores de 18, procedemos da maneira seguinte:

$$18:1=18;\quad 18:2=9;\quad 18:3=6;$$
$$18:6=3;\quad 18:9=2;\quad 18:18=1.$$

Devemos notar, entretanto, que, na pesquisa dos divisores de um número, sucede sempre (como no exemplo acima), ao encontrarmos um quociente exato, como em

$$18:3=6,$$

obtermos simultâneamente dois divisores, pois sendo

$$18=3\times 6,$$

resulta que 3 e 6 são divisores de 18.

Infere-se daí que, apenas com 3 divisões, podemos obter os 6 divisores de 18, que são: 1, 2, 3, 6, 9 e 18.

135. **Observação.** — *Das considerações expendidas acima decorre evidentemente que todo o número é divisível pela unidade e que é também múltiplo e divisor de si mesmo.*

Assim, com exceção de 1, todos os números inteiros têm, pelo menos, dois divisores.

136. **Números primos.** — *Damos a denominação de número primo a todo o número que só é divisível por si mesmo e pela unidade.*

Assim, dizemos que o número 13 é *primo*, porque os seus únicos divisores são 13 e 1.

137. **Divisores comuns.** — Dois ou mais números podem ter divisores comuns, além da unidade. Com efeito, considerando os números

6 e 9,

verificaremos que o número 3 é divisor de ambos. Dizemos, então, que o número 3 é *divisor comum* dos números 6 e 9.

138. **Números primos entre si.** — Damos a denominação de números primos entre si aos números que só têm para divisor comum a unidade.

Assim, dizemos que 8 e 9 são primos entre si, porque só têm para divisor comum a unidade.

Com efeito, os divisores de ambos são respectivamente:

de 8 — 1, 2, 4, 8,
de 9 — 1, 3, 9,

entre os quais o único divisor comum é a unidade.

Sendo dados três ou mais números, dizemos que são *primos entre si dois a dois* quando dois quaisquer dentre êles são primos entre si. — Assim, os números

8, 15 e 77

são *primos entre si dois a dois, porque*

8 e 15; 8 e 77; 15 e 77

são primos entre si.

Entretanto, quando se nos deparam três ou mais números que só têm para divisor comum a unidade, dizemos simplesmente que tais números são primos entre si. — Assim, os números

6, 15 e 20

são simplesmente *primos entre si*, porque nenhum número, além da unidade, divide simultâneamente os três. Tais números, porém, não são primos entre si dois a dois, uma vez que

6 e 15; 6 e 20; 15 e 20

têm, considerados dois a dois, divisores comuns diferentes da unidade.

139. **Divisibilidade.** — Para reconhecer se um número é divisível por outro, segundo o que acabámos de expor, basta verificar se a divisão do primeiro pelo segundo é exata. Entretanto, em muitos casos especiais, podemos reconhecer, sem necessidade de efetuar a operação, se um número é divisor de outro, ou, se não o for, como determina o resto da divisão, mediante o emprêgo de certas regras, denominadas *caractéres de divisibilidade.*

Dessas regras, que podem ser estendidas para uma infinidade de números, empregam-se na prática sòmente as mais simples, que se referem às potências de 10 e a outros poucos números, como veremos a seguir.

140. **Princípios fundamentais.** — Não falando em noções até agora adquiridas, apoiam-se os caractéres de divisibilidade nos princípios seguintes:

1.º *Se um número dividir exatamente dois ou mais outros, dividir-lhe-á do mesmo modo a soma.* — Seja, pois a soma indicada

$$15+18+21.$$

Sendo todos os seus termos exatamente divisíveis por 3, a soma (54) também o será. — Com efeito, tendo em vista que

$$15=5\times 3$$
$$18=6\times 3$$
$$21=7\times 3,$$

resultará

$$15+18+21=5\times 3+6\times 3+7\times 3.$$

Por outro lado, sabemos que

$$5\times 3+6\times 3+7\times 3=(5+6+7)\times 3.$$

Resulta, assim, que

$$15+18+21=(5+6+7)\times 3.$$

Tendo em vista a igualdade acima, inferimos que a soma dada é divisível por 3, uma vez que o produto é sempre divisível por qualquer dos seus fatores.

Corolário: *Se um número dividir exatamente outro, dividir-lhe-á do mesmo modo os múltiplos.* — Assim, sendo dado

$$60=15\times 4,$$

dizemos que 5, sendo divisor de 15, também é de 60. — Com efeito, por ser

$$15\times 4=15+15+15+15,$$

ou $\quad 60=15+15+15+15,$

concluimos, de acôrdo com o princípio acima, que 5, dividindo exatamente os termos da soma, divide também a soma (60).

2.º *Se um número dividir exatamente dois outros, dividir-lhe-á do mesmo modo a diferença.* — Assim, dada a diferença indicada

$$30-18,$$

dizemos que, sendo os seus termos divisíveis por 6, a diferença entre êles (12) também é divisível exatamente por êsse número. — Com efeito, tendo em vista que

$$30=5\times 6$$
$$18=3\times 6,$$

resultará: $\quad 30-18=5\times 6-3\times 6.$

Por outro lado, sabemos que

$$5\times 6-3\times 6=(5-3)\times 6.$$

Resulta, assim, que

$$30-18=(5-3)\times 6.$$

Tendo em vista a igualdade acima, concluimos que a diferença dada é divisível por 6, uma vez que o produto é sempre divisível por qualquer dos seus fatores.

3.º *Em uma soma de duas parcelas, se um número dividir exatamente uma delas, mas não dividir a outra, não dividirá também a soma, e são iguais os restos das divisões da parcela não divisível e da soma por êsse número.* — Assim, dada a soma indicada

$$15+37,$$

dizemos que o número 5, dividindo uma das parcelas (15), mas não dividindo a outra (37), não dividirá também a soma (52) e que são o mesmo os restos da divisão por êsse número da parcela não divisível e da soma (2). — Com efeito, tendo em vista que

$$15=5\times 3$$
$$37=5\times 7+2,$$

resultará: $\quad 15+37=5\times 3+5\times 7+2.$

Por outro lado, sabemos que

$$5\times 3+5\times 7+2=(3+7)\times 5+2.$$

Resulta, assim, que

$$15+37=(3+7)\times 5+2.$$

Considerando a igualdade acima obtida, verificamos que a soma dada $(15+37)$ não é divisível pelo número dado (5) e que o resto dessa divisão (2) é o mesmo que o da divisão da parcela não divisível (37) por êsse próprio número.

4.º *Se um número dividir exatamente dois outros, dividirá do mesmo modo o resto da divisão do maior dêsses números pelo menor.* — Assim, sendo dado

$$36=15\times 2+6,$$

dizemos que o número 3, dividindo o dividendo (36) e o divisor (15), dividirá também o resto (6).

Com efeito, 3 dividindo 15, divide também o seu múltiplo 15×2 (n.º 140, 1.º).

Por outro lado, dividindo o dividendo (36) e o produto do divisor pelo quociente (15×2), dividirá também a diferença entre êsses números, que é precisamente o resto da divisão (6).

5.º *Se um número dividir exatamente o divisor e o resto sendo inexata a divisão, dividirá do mesmo modo o dividendo.* — Assim, sendo dado

$$36=15\times 2+6,$$

dizemos que o número 3, dividindo o divisor (15) e o resto (6), dividirá também o dividendo (36).

Com efeito, 3 dividindo 15, divide também o seu múltiplo (15×2).

Por outro lado, dividindo as parcelas $(15\times 2+6)$, divide também a soma, que é precisamente o dividendo (36).

6. *Quando se multiplica ou divide o dividendo e o divisor por um mesmo número, o quociente não se altera, mas o resto da divisão fica multiplicado ou dividido por êsse mesmo número.* — Assim, sendo dado

$$36=15\times 2+6,$$

dizemos que, multiplicando o dividendo (36) e o divisor (15) pelo mesmo número (3), o quociente inteiro (2) não se altera, mas o resto da divisão (6) fica multiplicado por êsse número: dizemos, ainda, que, dividindo o dividendo (36) e o divisor (15) pelo mesmo número (3), o quociente inteiro (2) não se altera, mas o resto da divisão (6) fica dividido por êsse número.

Com efeito, multiplicando ambos os membros da igualdade acima por 3 e tendo em vista que o segundo membro é uma soma indicada, encontraremos

$$36\times 3=(15\times 2+6)\times 3,$$

ou $$36\times 3=(15\times 2)\times 3+6\times 3.$$

Por outro lado, considerando que

$$(15\times 2)\times 3=15\times 2\times 3=(15\times 3)\times 2,$$

teremos, substituindo na igualdade acima, $(15\times 2)\times 3$ por $(15\times 3)\times 2$

$$36\times 3=(15\times 3)\times 2+6\times 3.$$

Notando que o resto (6) é menor que o divisor (15), concluimos que o produto do resto pelo número considerado (6×3) será menor que o produto do divisor por êsse mesmo número (15×3). Assim, resulta que a igualdade acima representa uma divisão em que o dividendo é 36×3, o divisor é 15×3, o quociente é 2 (o mesmo da divisão primitiva) e o resto é 6×3.

Com a mesma facilidade, demonstra-se também a segunda parte do enunciado, que pode ser expresso pela igualdade seguinte:

$$36:3=(15:3)\times 2+6:3.$$

141. **Principais caractéres de divisibilidade.** — Estabeleceremos a seguir os principais caracteres de divisibilidade, empregados freqüentemente na prática.

142. **Divisibilidade pelas potências de 10.** — Princípio: *Um número é divisível por 10, 100, 1000 e em geral pela unidade seguida de zeros quando os seus últimos algarismos da direita são tantos zeros quantos os que acompanham a unidade no divisor.* — Evidentemente, todos os múltiplos de 10, sendo números inteiros de dezenas, terminam em zero; todos os múltiplos de 100, sendo números inteiros de centenas, devem ter dois zeros como últimos algarismos da direita; todos os múltiplos de 1000, sendo números inteiros de unidades de milhar, devem ter três zeros como últimos algarismos da direita, etc.

143. **Divisibilidade por 2 e por 5.** — Princípio: *O resto da divisão de um número por 2 ou por 5 é o mesmo que se obtém dividindo por 2 ou por 5 o número representado pelo seu último algarismo da direita.* — Consideremos o número 569.

Êsse número pode ser escrito, como sabemos, da maneira seguinte:

$$569 = 560 + 9.$$

A primeira parcela da soma indicada no 2.º membro da igualdade acima, terminando em zero, é divisível por 10 (princípio anterior) e conseqüentemente por 2 e por 5 também, uma vez que

$$10 = 2 \times 5.$$

Assim, tendo em vista que 2 e 5 dividem exatamente a primeira parcela, concluímos que o resto da divisão da soma (569) por 2 ou por 5 será o mesmo que o da divisão da segunda parcela por 2 ou por 5.

Particularizando para o caso do divisor 2, devemos notar que, além de zero, entre os números de um algarismo, são divisíveis por 2 os seguintes: 2, 4, 6 e 8.

Assim, sòmente os números terminados em 0, 2, 4, 6 e 8 são divisíveis por 2. Tais números são denominados *pares*, em distinção aos demais, terminados em 1, 3, 5, 7 e 9, denominados *ímpares*, que não são divisíveis por 2.

Em relação ao divisor 5, devemos notar que, entre os números de um algarismo, apenas 0 e 5 são divisíveis por 5. Assim sòmente os números terminados em 0 e 5 são divisíveis por 5.

Conseqüências: 1.ª *Um número é divisível por 2 quando o número representado pelo seu último algarismo da direita é divisível por 2.*

2.ª *Um número é divisível por 5 quando o número representado pelo seu último algarismo da direita é divisível por 5.*

144. **Divisibilidade por 4 e por 25.** — Notemos que

$$100 = 10^2; \quad 4 = 2^2 \quad \text{e} \quad 25 = 5^2.$$

Princípio: *O resto da divisão de um número por 4 ou por 25 é o mesmo que se obtém dividindo por 4 ou por 25 o número formado pelos seus dois últimos algarismos da direita.* — Consideremos o número 1569.

Êsse número pode ser escrito, como sabemos, da maneira seguinte:

$$1569 = 1500 + 69.$$

A primeira parcela da soma indicada no 2.º membro da igualdade acima, tendo dois zeros como últimos algarismos da direita, é divisível por 100 e conseqüentemente por 4 e por 25, uma vez que

$$100 = 4 \times 25.$$

Assim, tendo em vista que 4 e 25 dividem exatamente a primeira parcela, concluímos que o resto da divisão da soma (1569) por 4 ou por 25 será o mesmo que o da divisão da segunda parcela por 4 ou por 25.

Verificamos, do exposto que sòmente são divisíveis por 4 ou 2^2 os números cujos dois últimos algarismos da direita são zeros ou formam um número divisível por 4 e que sòmente são divisíveis por 25 ou 5^2 os números cujos dois últimos algarismos da direita são zeros ou formam um número divisível por 25.

Conseqüências: 1.ª *Um número é divisível por 4 quando os seus dois últimos algarismos da direita formam um número divisível por 4.*

2.ª *Um número é divisível por 25 quando os seus dois últimos algarismos da direita formam um número divisível por 25.*

145. **Divisibilidade por 8 e 125.** — Notemos que

$$1000 = 10^3; \quad 8 = 2^3; \quad \text{e} \quad 125 = 5^3.$$

Princípio: *O resto da divisão de um número por 8 ou por 125 é o mesmo que se obtém dividindo por 8 ou por 125 o número formado pelos seus três últimos algarismos da direita.*

Com auxílio de considerações análogas às expendidas na demonstração do princípio anterior, demonstra-se também o presente princípio, do qual se deduzem as seguintes *conseqüências:*

1.ª *Um número é divisível por 8 quando os seus três últimos algarismos da direita formam um número divisível por 8.*

2.ª *Um número é divisível por 125 quando os seus três últimos algarismos da direita formam um número divisível por 125.*

146. **Divisibilidade por 9.** — Princípio: *O resto da divisão de um número por 9 é o mesmo que se obtém dividindo por 9 a soma dos valores absolutos dos seus algarismos.*

Demonstremos, preliminarmente, os lemas seguintes:

1.º A unidade seguida de zeros é igual a um múltiplo de 9 mais 1.

Com efeito, tendo em vista que

$$10 = 9 + 1$$
$$100 = 99 + 1$$
$$1000 = 999 + 1,$$

concluimos que

$$10 = m.9 + 1$$
$$100 = m.9 + 1$$
$$1000 = m.9 + 1,$$

uma vez que 9, 99, 999... são múltiplos de 9, por se comporem de nove unidades de cada ordem.

2.º Um número formado por um algarismo significativo seguido de zeros é igual a um múltiplo de 9 mais o valor absoluto dêsse algarismo.

Consideremos o número 7000. — Com efeito, tendo em vista que

$$7000 = 7 \times 1000,$$

teremos, de acôrdo com o lema anterior,

$$7000 = 7 \times (m.9 + 1),$$

de onde resulta

$$7000 = 7 \times m.9 + 7.$$

Mas, notando que

$$7 \times m.9 = m.9,$$

teremos finalmente

$$7000 = m.9 + 7.$$

3.º Um número qualquer é igual a um múltiplo de 9 mais a soma dos valores absolutos de seus algarismos.

Consideremos o número 7843.

Como sabemos, êsse número pode ser escrito da maneira seguinte:

$$7843 = 7000 + 800 + 40 + 3.$$

Mas, de acôrdo com o lema anterior, teremos

$$7000 = m.9 + 7$$
$$800 = m.9 + 8$$
$$40 = m.9 + 4$$
$$3 = \quad 3$$

ou, somando ordenadamente:

$$7843 = m.9 + (7 + 8 + 4 + 3).$$

Resulta, dessarte que

$$7843 = m.9 + 22.$$

Assim, tendo em vista que 9 divide exatamente a primeira parcela da soma indicada no 2.º membro da igualdade acima, chegamos à conclusão de que o resto da divisão da soma (7843) por 9 é o mesmo que o da divisão da segunda parcela por 9.

Conseqüência: *Um número é divisível por 9 quando a soma dos valores absolutos de seus algarismos é divisível por 9.*

147. **Divisibilidade por 3.** — Princípio: *O resto da divisão de um número qualquer por 3 é o mesmo que se obtém dividindo por 3 a soma dos valores absolutos de seus algarismos.* — Consideremos o número 4391.

Aplicando o princípio anterior, podemos escrever

$$4391 = m.9 + (4 + 3 + 9 + 1) = m.9 + 17.$$

Mas, notando que todo o múltiplo de 9 é também múltiplo de 3, resultará

$$4391 = m.3 + (4 + 3 + 9 + 1) = m.3 + 17.$$

Conseqüência: *Um número é divisível por 3 quando a soma dos valores absolutos de seus algarismos é divisível por 3.*

148. **Divisibilidade por 11.** — Princípio: *O resto da divisão de um número qualquer por 11 é o mesmo que se obtém dividindo por 11 o excesso da soma dos valores absolutos dos algarismos de ordem ímpar sôbre a dos de ordem par, a partir da direita, juntando-se, à primeira soma, se for menor que a segunda, um múltiplo de 11 suficiente para tornar possível a subtração.* — Demonstremos, preliminarmente, os lemas seguintes:

1.º A unidade seguida de zeros é igual a um múltiplo de 11 mais ou menos 1; mais se o número de zeros for par e menos se for ímpar. — Assim, dizemos que

$$1000 = m.\,11 - 1$$
$$10000 = m.\,11 + 1.$$

Com efeito, sabemos que

$$10 = 11 - 1,$$

ou seja $$10 = m.\,11 - 1.$$

Multiplicando por 10 ambos os membros da igualdade acima, e notando que o segundo membro é constituido por uma diferença indicada, obteremos

$$10 \times 10 = (m.\,11 - 1) \times 10,$$

ou $$100 = m.\,11 \times 10 - 10,$$

ou, ainda, tendo em vista que $m.\,11 \times 10$ é também $m.\,11$

$$100 = m.\,11 - 10.$$

Substituindo, na igualdade acima 10 por $11 - 1$, encontraremos:

$$100 = m.\,11 - (11 - 1)$$

ou $$100 = m.\,11 - (m.\,11 - 1),$$

ou, suprimindo os parêntesis de acôrdo com a regra conhecida

$$100 = m.\,11 - m.\,11 + 1,$$

de onde resulta, por ser $m.\,11 - m.\,11$ também $m.\,11$

$$100 = m.\,11 + 1.$$

Multiplicando por 10 ambos os membros da igualdade acima, encontraremos sucessivamente:

$$100 \times 10 = (m.\,11 + 1) \times 10 = m.\,11 \times 10 + 10 = m.\,11 + 10 =$$
$$= m.\,11 + (11 - 1) = m.\,11 + 11 - 1 = m.\,11 - 1.$$

Resulta, assim, que

$$1000 = m.11 - 1.$$

Pelos mesmos motivos, encontraremos também

$$10000 = m.\,11 + 1.$$

Resumindo os resultados obtidos, virá

$$10 = m.\,11 - 1$$
$$100 = m.\,11 + 1$$
$$1000 = m.\,11 - 1$$
$$10000 = m.\,11 + 1.$$

2.º Um número formado por algarismo significativo seguido de zeros é igual a um múltiplo de 11 mais ou menos o valor absoluto do algarismo significativo; mais se o número de zeros for par e menos se for ímpar. — Assim, dizemos que

$$7000 = m.\,11 - 7$$
$$70000 = m.\,11 + 7.$$

Com efeito, considerando o número 7000, sabemos que

$$7000 = 7 \times 1000.$$

Aplicando o lema anterior, resultará

$$7000 = 7 \times (m.\,11 - 1),$$

ou $$7000 = 7 \times m.11 - 7.$$

Mas, notando que

$$7 \times m.\,11 = m.\,11,$$

teremos, finalmente

$$7000 = m.\,11 - 7.$$

Anàlogamente, encontraremos em relação a 70.000:

$$70.000 = 7 \times 10.000 = 7 \times (m.\,11 + 1) = 7 \times m.\,11 + 7 = m.\,11 + 7.$$

3.º Um número qualquer é igual a um múltiplo de 11 mais o excesso da soma dos valores absolutos de seus algarismos de ordem ímpar sôbre a dos de ordem par, a partir da direita.

Consideremos o número 43827.

Como sabemos, êsse número pode ser escrito da maneira seguinte:

$$43827 = 40000 + 3000 + 800 + 20 + 7.$$

Mas, segundo os dois lemas anteriores, teremos

$$40000 = m.11 + 4$$
$$3000 = m.11 - 3$$
$$800 = m.11 + 8$$
$$20 = m.11 - 2$$
$$7 = 7$$

ou, somando ordenadamente

$$43827 = m.11 + 4 - 3 + 8 - 2 + 7.$$

Resulta, assim, que

$$43827 = m.11 + (4 + 8 + 7) - (3 + 2)$$

ou $$43827 = m.11 + 19 - 5,$$

ou, ainda $$43827 = m.11 + 14.$$

Demonstra-se do mesmo modo que, quando a soma dos valores absolutos dos algarismos de ordem ímpar é menor que a dos de ordem par, pode-se, a-fim-de tornar essa subtração possível, somar um múltiplo qualquer de 11 à primeira das somas mencionadas.

Conseqüência: *Um número é divisível por 11 quando o excesso da soma dos valores absolutos dos algarismos de ordem ímpar sôbre a dos de ordem par é múltiplo de 11.*

149. Exemplos. — 1.º Verificar se o número 18425 é divisível por 3 e, se não o for, determinar o resto da divisão.

Somando os valores absolutos dos algarismos do número dado, encontraremos

$$1 + 8 + 4 + 2 + 5 = 20.$$

Não sendo divisível por 3 a soma obtida (20), o número dado não é divisível por 3. Sendo 2 o resto da divisão de 20 por 3, segue-se que o resto da divisão de 18425 por 3 é também 2.

2.º Verificar se o número 92610 é divisível por 9.

Somando os valores absolutos dos algarismos do número dado, encontraremos

$$9 + 2 + 6 + 1 + 0 = 18.$$

Sendo divisível por 9 a soma obtida (18), o número dado é divisível por 9.

3.º Verificar se o número 85918 é divisível por 11 e, se não o for, determinar o resto da divisão.

Somando os valores absolutos dos algarismos de ordem ímpar, a partir da direita, chegaremos a

$$8 + 9 + 8 = 25.$$

Somando os valores absolutos dos algarismos de ordem par, a partir da direita, virá

$$1 + 5 = 6.$$

Subtraindo a segunda soma obtida da primeira, obteremos

$$25 - 6 = 19.$$

O resto obtido (19) não sendo divisível por 11, o número dado não é divisível por 11. O resto da divisão de 19 por 11 sendo 8, concluimos que o resto da divisão de 85918 por 11 é também 8.

4.º Verificar se o número 809193 é divisível por 11 e, se não o for, determinar o resto da divisão.

Somando os valores absolutos dos algarismos de ordem ímpar, encontraremos

$$3 + 1 + 0 = 4.$$

Somando os valores absolutos dos algarismos de ordem par, encontraremos

$$9 + 9 + 8 = 26.$$

Como a subtração não é possível, devemos somar à primeira das somas obtidas o menor múltiplo de 11 (ou seja 33, no presente caso) necessário para que se torne maior que a segunda. — Obtemos assim

$$4 + 33 = 37,$$

Efetuando a subtração, encontraremos

$$37 - 26 = 11.$$

O resto encontrado, 11, indica que o número dado é divisível por 11.

Exercícios.

1. — Verificar, entre os números que seguem, quais os que são divisíveis por 2, 3, 4, 5, 8, 9, 11 e 25:

1.202; 1.821; 2.452; 3.085; 4.072; 4.527; 4.609; 22.675.

2. — Determinar o resto da divisão por 2, 3, 4, 5, 8, 9, 11 e 25 de cada um dos números seguintes:

1.031; 1.217; 2.347; 2.729; 4.373; 7.129; 8.101; 9.973.

3. — Investigar, entre os números que seguem, quais os que são divisíveis sòmente por 9 e quais os que são divisíveis também por 3:

2.649; 2.991; 8.163; 17.001; 28.230; 31.533; 125.601; 249.300.

4. — Qual o algarismo que deve ser colocado à direita dos números que seguem para que os números resultantes sejam divisíveis por 9?

3.167; 7.207; 8.521; 9.601; 12.018; 66.370; 89.999; 99.070.

5. — Investigar, entre os números que seguem, quais os que são divisíveis por 11.

19.260; 89.111; 94.030; 109.351; 555.555; 100.001; 145.970; 170.935.

6. — Formar 10 múltiplos de 11, empregando sòmente os algarismos 5 e 0.

PROVA DAS OPERAÇÕES FUNDAMENTAIS

150. As leis relativas aos restos de qualquer número por certos divisores podem ser aplicadas às provas das operações fundamentais que estudámos nos capítulos anteriores. Assim é que se aplica freqüentemente na prática o princípio de divisibilidade por 9, para êsse fim.

151. **Prova por 9 da adição.** — Consideremos a adição:

$$865 + 750 = 1615,$$

cuja provável exatidão queremos verificar, aplicando o princípio de divisibilidade por 9. — Tendo em vista que

$$865 = m.9 + 1$$
$$750 = m.9 + 3,$$

segue-se que, se a operação efetuada estiver exata, a soma obtida deverá ser igual a $m.9 + (1 + 3)$ ou $m.9 + 4$, isto é,

$$1615 = m.9 + 4.$$

Regra: *Para verificar uma adição efetuada, verifica-se o resto da divisão por 9 do total obtido é igual ao resto da divisão por 9 da soma dos restos da divisão por 9 das parcelas que nela se encontram.*

152. **Prova por 9 da subtração.** — Consideremos a subtração

$$868 - 750 = 118,$$

cuja provável exatidão queremos verificar, aplicando o princípio de divisibilidade por 9. — Tendo em vista que

$$868 = m.9 + 4$$
$$750 = m.9 + 3,$$

segue-se que, se a subtração efetuada estiver exata, o resto obtido deve ser igual a $m.9 - (4 - 3)$ ou $m.9 - 1$, isto é,

$$118 = m.9 - 1.$$

Se a subtração dos restos não fosse possível na ordem acima dada, somaríamos 9 ao minuendo para depois efetuá-la.

Regra: *Para verificar uma subtração efetuada, verifica-se se o resto da divisão por 9 da diferença obtida é igual ao resto da divisão por 9 da diferença dos restos da divisão por 9 dos termos que nela se encontram.*

153. **Prova por 9 da multiplicação.** — Consideremos a multiplicação:

$$485 \times 273 = 132405,$$

cuja provável exatidão queremos verificar, aplicando o princípio de divisibilidade por 9. — Tendo em vista que

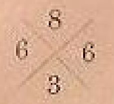
$$485 = m.9 + 8$$
$$273 = m.9 + 3,$$

segue-se que, se a multiplicação estiver exata, o produto obtido deve ser igual a $m.9 + (8 \times 3)$ ou $m.9 + 24$ ou $m.9 + 6$, isto é,

$$132405 = m.9 + 6.$$

Regra: *Para verificar uma multiplicação efetuada, verifica-se se o resto da divisão por 9 do produto obtido é igual ao resto da divisão por 9 do produto dos restos da divisão por 9 dos fatores.*

Na prática, adota-se a disposição seguinte:



$$
\begin{array}{r}
485 \\
273 \\
\hline
1455 \\
3395 \\
970 \\
\hline
132405
\end{array}
$$

154. **Prova por 9 da divisão.** — Consideremos a divisão indicada:

$$132492 : 485,$$

na qual se encontrou o quociente inteiro 273 e o resto 87.

Representando essa divisão inexata da maneira conhecida (n.º 98)

$$132492 = 485 \times 273 + 87,$$

e notando que

$$485 = m.\,9 + 8$$
$$273 = m.\,9 + 3$$
$$87 = m.\,9 + 6,$$

segue-se que, se a divisão estiver bem feita, o quociente inteiro obtido deve ser igual a $m.\,9 + (8 \times 3 + 6)$ ou $m.\,9 + 30$ ou $m.\,9 + 3$, isto é,

$$132492 = m.\,9 + 3.$$

Regra: *Para verificar uma divisão efetuada, verifica-se se o resto da divisão por 9 do quociente obtido é igual ao resto da divisão por 9 da soma do produto dos restos da divisão por 9 do multiplicando e do multiplicador com o da divisão por 9 do resto obtido na divisão efetuada.*

CAPÍTULO IX

MÁXIMO DIVISOR COMUM

155. Como já vimos (n.º 138), dois ou mais números podem ter divisores comuns além da unidade. — Assim, os números 6, 12 e 18, cujos divisores são, respectivamente:

De 6: *1, 2, 3, 6,*
De 12: *1, 2, 3,* 4, *6,* 12,
De 18: *1, 2, 3, 6,* 9, 18,

apresentam os seguintes divisores comuns:

1, 2, 3 e 6.

Ao maior dêles, ou seja a 6 no presente caso, damos a denominação de *máximo divisor comum.*

156. **Definição.** — *Máximo divisor comum de dois ou mais números é o maior número que os divide exatamente.*

Quando o único divisor comum de dois ou mais números é a unidade, êsses números são primos entre si (n.º 138).

157. **Abreviatura.** — Na prática, indica-se o máximo divisor comum de dois ou mais números pela abreviatura *m. d. c.* — Assim, no exemplo dado acima, escrevemos simplesmente:

m. d. c. (6, 12 e 18) = 6.

158. **Pesquisa do m. d. c. de dois números.** — Demonstremos preliminarmente os dois princípios seguintes:

1.º *Quando um número é divisível por outro o menor dêles é o m. d. c. de ambos.* — Assim, dados os números

36 e 12,

em que 36 é divisível por 12, dizemos que

m. d. c. (36 e 12) = 12.

Com efeito, sendo 12 divisor de 36 e de si mesmo, é divisor comum dos números dados. Além disso, é o maior número que satisfaz a essa condição, uma vez que número maior que 12 não pode dividir exatamente 12.

2.º *Se um número não é divisível por outro, o m.d.c. de ambos é o mesmo que o do menor e o resto da divisão do maior pelo menor.* — Assim dados os números

$$180 \text{ e } 50,$$

em que

$$180 = 50 \times 3 + 30,$$

dizemos que

$$\text{m.d.c.} \quad (180 \text{ e } 50) = \text{m.d.c.} \quad (50 \text{ e } 30).$$

Com efeito, sabemos que (n.º 140, 5.º), quando um número divide exatamente o dividendo e o divisor de uma divisão inexata, divide também o *resto* dessa divisão, e que, quando um número divide exatamente o divisor e o resto de uma divisão inexata, divide também o dividendo.

Assim, tendo em vista que o dividendo é o maior dos números dados (180), o divisor é o menor (50) e resto (30) dessa divisão, concluimos que o maior dos divisores comuns de 180 e 50 será também o maior dos divisores comuns de 50 e 30.

159. **Aplicações.** — 1.ª Procuremos o m.d.c. dos números 180 e 60.

Dividindo 180 por 60, vem

$$\begin{array}{r|l} 180 & 60 \\ \cline{2-2} 00 & 3 \end{array}$$

A divisão sendo exata, concluimos, de acôrdo com o 1.º princípio, que:

$$\text{m.d.c.} \quad (180 \text{ e } 60) = 3.$$

2.ª Procuremos o m.d.c. dos números 180 e 50.

Dividindo 180 por 50, chega-se a

$$\begin{array}{r|l} 180 & 50 \\ \cline{2-2} 30 & 3 \end{array}$$

A divisão não sendo exata, devemos dividir, de acôrdo com o 2.º princípio, 50 por 30. — Assim procedendo, vem

$$\begin{array}{r|l} 50 & 30 \\ \cline{2-2} 20 & 1 \end{array}$$

Como a divisão acima também não é exata, concluimos que 30 não é o m.d.c. procurado. Entretanto, êsse m.d.c. deverá ser o mesmo que o m.d.c. entre o divisor (30) e o resto dessa nova divisão (20).

Dividindo 30 por 20, encontraremos

$$\begin{array}{r|l} 30 & 20 \\ \cline{2-2} 10 & 1 \end{array}$$

Como a divisão ainda não é exata, dividamos 20 por 10:

$$\begin{array}{r|l} 20 & 10 \\ \cline{2-2} 0 & 2 \end{array}$$

A divisão sendo exata, concluimos que 10 é o m.d.c. procurado.

Na prática dispomos a operação da maneira indicada ao lado, escrevendo, *sôbre* os divisores considerados, os quocientes sucessivos *e sob* os dividendos considerados os respectivos restos. O processo que aplicámos é denominado *processo das divisões sucessivas.*

	3	1	1	2
180	50	30	20	10
30	20	10	00	

Pelas considerações expendidas, podemos estabelecer a regra seguinte:

160. **Regra.** — *Para determinar o m.d.c. de dois números, divide-se o maior pelo menor: se o resto obtido for zero, o menor dos números dados é o m.d.c. de ambos, se não o for, divide-se o divisor pelo resto obtido, procedendo-se nessa divisão como na primeira. Continua-se a operação do mesmo modo, até que se chegue a um resto igual a zero. O último divisor, neste caso, é o m.d.c. procurado.*

Exemplo: Determinar o m.d.c. dos números 8795 e 6820.

Aplicando a regra e dispondo a operação da maneira indicada acima, vem

	1	3	2	4	1	5	6
8795	6820	1975	895	185	155	30	5
1975	895	185	155	30	5	0	

Assim, pois

$$\text{m.d.c.} \quad (8795 \text{ e } 6820) = 5.$$

161. **Simplificações.** — 1.ª Quando o resto encontrado em uma das divisões for igual a 1, não se deve mais prosse-

guir na operação, uma vez que o m. d. c. procurado, devendo dividir exatamente os restos obtidos nas divisões sucessivas, será também igual a 1, o que nos permite afirmar serem primos entre si os números dados.

2.ª Quando o divisor e o resto de uma das divisões forem reconhecidos como primos entre si, pelo mesmo motivo acima exposto, não se deve mais continuar a operação, já que os números dados são também, nesse caso, primos entre si.

3.ª Quando, em uma das divisões efetuadas se obtiver um resto maior que a metade do divisor correspondente, pode-se tomar, na divisão seguinte, no lugar dêsse resto, um divisor formado pela diferença entre o divisor precedente e êsse resto.

Para melhor esclarecer, voltemos ao exemplo dado acima, em que determinámos o m. d. c. dos números 8795 e 6820.

Dispondo a operação segundo a maneira habitual e aplicando a simplificação mencionada, depara-se-nos

	1	3	2	4	5	6
8795	6820	1975	895	185	30	5
1975	895	185	155	5	0	

Notemos, que, quando encontrámos

$$895 = 185 \times 4 + 155,$$

tomámos, para divisor, no lugar de 155, que é maior que a metade do divisor precedente (185), o divisor obtido pela maneira seguinte:

$$185 - 155 = 30.$$

162. **Princípios relativos ao m. d. c. de 2 números.** — 1.º *Se um número dividir exatamente dois outros, dividirá do mesmo modo o m. d. c. de ambos.* — Assim, dado

$$\text{m. d. c.} \quad (36 \text{ e } 24) = 12,$$

dizemos que 4, sendo divisor de 36 e 24 o é também de 12.

Com efeito, de modo geral, tendo em vista que, quando um número é divisor de dois outros, sê-lo-á também do resto da sua divisão, (n.º 140, 4.º), concluimos que êsse número dividirá exatamente os restos sucessivos obtidos na pesquisa do m. d. c. dos números considerados, inclusive o penúltimo que é o m. d. c. de ambos.

Conseqüência: *Para determinar todos os divisores comuns de dois números, basta determinar todos os divisores do m. d. c. de ambos.* — Assim, dado

$$\text{m. d. c.} \quad (90 \text{ e } 60) = 30,$$

e tendo em vista que os divisores de 30 são 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30, concluimos que os divisores comuns a 90 e 60 são

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 10,\ 15 \text{ e } 30.$$

2.º *Se dois números forem multiplicados por um terceiro, o m. d. c. de ambos ficará também multiplicado por êsse último.* — Assim, dado

$$\text{m. d. c.} \quad (90 \text{ e } 60) = 30,$$

dizemos que

$$\text{m. d. c.} \quad (90 \times 5 \text{ e } 60 \times 5) = 30 \times 5.$$

Com efeito, de uma maneira geral, tendo em vista que, quando se multiplicam dois números por um terceiro, o resto da divisão dêsses dois números fica também multiplicado por êsse terceiro (n.º 140, 6.º), concluimos que os restos sucessivos obtidos na pesquisa do m. d. c. dos números considerados ficam todos multiplicados por êsse terceiro, inclusive o penúltimo, que é o m. d. c. de ambos.

3.º *Se dois números forem divididos por um terceiro que os possa dividir exatamente, o m. d. c. de ambos ficará também dividido por êsse número.* — Assim, dado

$$\text{m. d. c.} \quad (90 \text{ e } 60) = 30,$$

dizemos que

$$\text{m. d. c.} \quad (90:3 \text{ e } 60:3) = 30:3$$

A demonstração é análoga à do princípio anterior.

Conseqüência: *Se dois números forem divididos pelo m. d. c. de ambos, os quocientes obtidos serão números primos entre si.* — Assim, dado

$$\text{m. d. c.} \quad (90 \text{ e } 60) = 30,$$

dizemos que os quocientes obtidos

$$90:30 = 3 \text{ e } 60:3 = 2,$$

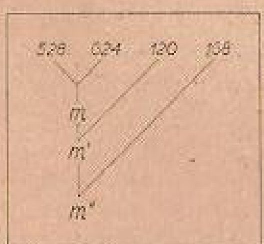
ou sejam, 3 e 2 são números primos entre si.

Com efeito, quando se dividem dois números por um terceiro, o m. d. c. de ambos fica dividido por êsse número. Assim, se o divisor for o próprio m. d. c., o quociente obtido será a unidade, o que indica serem primos entre si os números dados.

163. Exercícios sôbre o m. d. c. de dois números.

1.	M. d. c. de	85 e	168?	R. 1
2.	M. d. c. de	180 e	154?	R. 2
3.	M. d. c. de	297 e	420?	R. 3
4.	M. d. c. de	1.092 e	2.420?	R. 4
5.	M. d. c. de	1.320 e	2.275?	R. 5
6.	M. d. c. de	1.428 e	2.970?	R. 6
7.	M. d. c. de	1.596 e	5.005?	R. 7
8.	M. d. c. de	1.840 e	5.016?	R. 8
9.	M. d. c. de	1.980 e	5.031?	R. 9
10.	M. d. c. de	2.090 e	5.590?	R. 10
11.	M. d. c. de	8.020 e	8.180?	R. 20
12.	M. d. c. de	11.190 e	12.030?	R. 30
13.	M. d. c. de	12.440 e	13.240?	R. 40
14.	M. d. c. de	16.850 e	28.550?	R. 50
15.	M. d. c. de	123.875 e	128.875?	R. 125.

164. M. d. c. de vários números. — Procuremos o m. d. c. dos números 528, 624, 120 e 168.



Representando por m o m. d. c. dos dois primeiros números (528 e 624), por m' o m. d. c. dos números m e 120 e por m'' o m. d. c. dos números m' e 168, dizemos que m'' é o m. d. c. dos números dados (528, 624, 120 e 168).

Assim, representando por M o m. d. c. dos números dados, demonstraremos que

$$M = m''.$$

Com efeito, sendo M divisor de 528 e 624 sê-lo-á de m (m. d. c. de ambos). Dividindo exatamente m e 120 dividirá do mesmo modo m' (m. d. c. de ambos). Finalmente, sendo divisor de m' e 168, sê-lo-á também de m'' (m. d. c. de ambos).

Tendo em vista que M é divisor de m'', concluímos que M não pode ser maior que m''.

Por outro lado, notemos que, sendo m'' divisor de m' e 168, sê-lo-á também de m e 120, múltiplos de m' e de 528 e 624, múltiplos de m.

Resulta, assim, que m'' é divisor comum dos números dados (528, 624, 120 e 168). Além disso, é evidente que não pode ser maior que M, uma vez que M representa o m. d. c. dêsses números.

Considerando que M não pode ser maior que m'' e que m'' não pode ser maior que M, chegamos à conclusão de que, em vista do axioma conhecido (1) êsses números são iguais, ou seja

$$M = m''.$$

De acôrdo com as considerações expendidas, podemos estabelecer a regra seguinte:

165. Regra. — *Para determinar o m. d. c. de vários números, procura-se o m. d. c. de dois dentre êles; depois, procura-se o m. d. c. dêsse m. d. c. e um terceiro número; depois, procura-se o m. d. c. dêsse m. d. c. e um quarto número, prosseguindo-se assim até serem considerados todos os números dados. O último m. d. c. encontrado é o m. d. c. dos números propostos.*

Exemplo: Determinar o m. d. c. dos números 528, 624, 120 e 168.

Aplicando a regra, encontraremos sucessivamente:

m. d. c. (528 e 624) = 48.
m. d. c. (48 e 120) = 24.
m. d. c. (24 e 168) = 24.

Resulta, assim, que

m. d. c. (528, 624, 120 e 168) = 24.

166. Conseqüências. — Resultam das considerações até agora expendidas as conseqüências seguintes:

1.ª *Se um número dividir exatamente vários outros, dividirá do mesmo modo o m. d. c. de todos.*

2.ª *Para determinar todos os divisores comuns de vários números, basta determinar todos os divisores do m. d. c. dêsses números.*

3.ª *Se vários números forem multiplicados por um certo número, o m. d. c. dêles ficará também multiplicado por êsse número.*

(1) O axioma a que nos referimos é o seguinte: Uma quantidade é necessàriamente igual, maior ou menor que outra de mesma natureza.

4.ª *Se vários números forem divididos por um certo número que possa dividí-los exatamente, o m.d.c. dêles ficará também dividido por êsse número.*

5.ª *Se vários números forem divididos pelo m.d.c. dêles, os quocientes obtidos serão números primos entre si.*

167. **Cálculo mental.** — Quando são dados números pequenos, o m.d.c. pode ser obtido mentalmente, como veremos nos exemplos que seguem.

1.º Determinar mentalmente o m.d.c. dos números 6, 12 e 18.

O m.d.c. procurado não podendo ser maior que o menor dos números dados, verificamos mentalmente se 6 divide exatamente 12 e 18. Como isso acontece, segue-se que 6 é o m.d.c. procurado.

2.º Determinar mentalmente o m.d.c. dos números 15, 20 e 30.

Verificamos mentalmente se 15 divide exatamente 20 e 30. Como 15 não divide 20, segue-se que 15 não pode ser o m.d.c. procurado. Verificamos se o maior divisor de 15, diferente de 15, que é 5, divide exatamente 20 e 30. Como 5 divide exatamente 15, 20 e 30, segue-se que 5 é o m.d.c. procurado.

3.º Determinar o m.d.c. dos números 12, 18 e 28.

O menor dos números dados (12) não dividindo exatamente os dois outros (18 e 28) não pode ser o m.d.c. procurado.

O maior divisor de 12, diferente de 12, que é 6, não dividindo exatamente um dos números dados (28), não pode ser o m.d.c. procurado.

O maior divisor de 12, diferente de 12 e 6, que é 4, não dividindo exatamente um dos números dados (18), não pode ser o m.d.c. procurado.

O maior divisor de 12, diferente de 12, 6 e 4, que é 2, dividindo exatamente os números propostos, é o m.d.c. procurado.

168. **Regra.** — *Para determinar o m.d.c. de vários números pequenos, verifica-se mentalmente se o menor dêles divide exatamente os demais. Se dividir, êsse número será o m.d.c. procurado. Se não dividir, ensaiam-se sucessivamente os divisores do número menor, tomados em sua ordem natural*

decrescente, até encontrar um dêles que divida exatamente os números propostos. O número, assim obtido, será o m.d.c. procurado.

169. **Exercícios sôbre o m.d.c. de vários números.**

1.	M.d.c. de 560, 623 e 840?	R. 7
2.	M.d.c. de 576, 660 e 708?	R. 12
3.	M.d.c. de 690, 943 e 1.150?	R. 23
4.	M.d.c. de 1.080, 1.512 e 1.800?	R. 72
5.	M.d.c. de 1.617, 1.694 e 1.848?	R. 77
6.	M.d.c. de 2.046, 2.511 e 2.790?	R. 93
7.	M.d.c. de 28, 40, 88 e 146?	R. 2
8.	M.d.c. de 44, 64, 412 e 508?	R. 4
9.	M.d.c. de 1.115, 2.007, 2.899 e 4.460?	R. 223
10.	M.d.c. de 2.410, 4.097, 5.543 e 6.989?	R. 241.

CAPÍTULO X

NÚMEROS PRIMOS

170. **Definição.** — Como já vimos (n.º 138), *damos a denominação de número primo a todo o número que só é divisível por si mesmo e pela unidade.* — Assim, dizemos que

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17...

são números primos, por isso que cada um dêles tem apenas os divisores acima citados.

Aos números que não são primos, damos a denominação *de números múltiplos.* — Assim, dizemos que

4, 6, 8, 9, 10, 12, 14...

são números múltiplos.

Evidentemente, os números múltiplos têm sempre mais de dois divisores.

Os números primos e os números múltiplos formam *conjuntos* denominados, respectivamente, conjunto dos números primos e conjunto dos números múltiplos (1).

Recordemos, ainda, que demos a denominação de *números primos entre si* aos números que só tem para divisor comum a unidade (n.º 138) e de *números primos entre si dois a dois* a três ou mais números tais que dois quaisquer dentre êles são primos entre si.

171. **Princípios gerais.** — 1.º *Todo o número que não é primo admite, pelo menos, um divisor primo, diferente de 1.* — Com efeito, sendo dado um número qualquer que não é primo, sabemos que pode ter um ou mais divisores diferentes de si mesmo e da unidade. O menor dêles evidentemente é

(1) A denominação empregada constantemente de *série de números primos* é falsa.

primo, pois, se não o fosse, admitiria divisores ainda menores, os quais também o seriam do número dado (n.º 140), e isso não é possível, visto como o divisor considerado é o menor que tem o número proposto.

2.º *O conjunto dos números primos é ilimitado.* — Para demonstrar o presente princípio, admitamos que um número qualquer N seja o maior de todos os números primos.

Formemos o produto da série natural dos números inteiros até N e somemos 1 a êsse produto. Representando por P o resultado dessas operações, teremos:

$2 \times 3 \times 4 \times 5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \times N + 1 = P.$

E' evidente que P é maior que N, ou seja:

$$P > N.$$

Em relação ao número P, temos os dois casos seguintes a considerar:

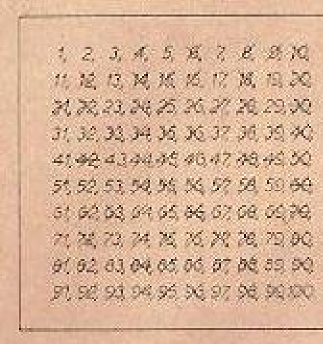
1.º P é número primo.

2.º P não é número primo.

Se P for número primo, o princípio fica demonstrado, uma vez que $P > N$ e que supusemos que N é o maior número primo.

Se P não for número primo, terá, pelo menos, um fator primo, segundo o princípio anterior. Entretanto, tal fator não poderá ser nenhum dos números primos compreendidos entre 2 e N, porquanto êsses números não podem dividir a segunda parcela da soma acima indicada (1), e, conseqüentemente, não podem dividir a soma P. Infere-se daí, que o fator primo de P é maior que N, o que nos permite afirmar que N não é o maior de todos os números primos.

172. **Tábua de números primos.** — Damos a seguir o processo que podemos empregar para a construção de uma tábua de números primos, desde 1 até um limite qualquer.



Escrevem-se, em sua ordem natural, os números inteiros, desde 1 até o limite que se quiser adotar para a tabela, como se vê na figura ao lado.

Riscam-se, depois, a partir de 2 exclusive, os números de 2 em 2; depois, a partir de 3 exclusive, riscam-se os números de 3 em 3; depois a partir de 5 exclusive, riscam-se os números de 5 em 5, assim prosseguindo-se. Evidentemente, os números riscados são os múltiplos sucessivos de 2, 3, 5, etc.

Devemos notar não só que seria inútil riscar os números de 4 em 4, de 6 em 6, de 8 em 8, por serem todos múltiplos de 2; de 9 em 9, por serem todos múltiplos de 3, etc., como também que, para riscar os múltiplos de cada número, pode-se tomar como ponto de partida o quadrado de cada um. Com efeito, notemos, por exemplo que, quando riscamos os números da tábua de 7 em 7, os múltiplos de 7 menores que 7^2 ou 49, que são 7×2, 7×3, 7×4, 7×5 e 7×6 já foram riscados, como múltiplos de 2, de 3 e de 5. Por êsse motivo é que se vêm, no quadro acima, vários números riscados mais de uma vez. Notemos, ainda que, depois de considerados os múltiplos de 7, podemos dar por terminada a operação, uma vez que, o primeiro múltiplo de 11 ainda não riscado, sendo 11^2 ou 121, já se encontra além do limite que adotámos (100).

Os números não riscados são todos os números primos compreendidos entre 1 e 100.

O processo acima é devido a Eratóstenes, filósofo grego, e tem a denominação de *crivo de Eratóstenes*.

173. **Reconhecimento dos números primos.** — Verifiquemos se o número 499 é primo.

Tendo em vista que, de acôrdo com o 1.º princípio geral estudado (n.º 171), todo o número que não é primo admite, pelo menos, um divisor primo diferente de 1, concluimos que, no reconhecimento dos números primos, não é preciso dividir o número dado por todos os números menores que êle, mas sòmente pelos *números primos* que estão nesse caso.

Devemos, então, dividir 499 sucessivamente pelos números primos 2, 3, 5, 7, 11...

Verificamos imediatamente que 499 não é divisível por 2, nem por 3, nem por 5, nem por 7, nem por 11.

Ensaiando os números primos seguintes a 11, encontraremos

$$\begin{array}{r|l} 499 & 13 \\ \cline{2-2} 109 & 38 \\ 05 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 499 & 17 \\ \cline{2-2} 159 & 29 \\ 06 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 499 & 19 \\ \cline{2-2} 119 & 26 \\ 05 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 499 & 23 \\ \cline{2-2} 039 & 21 \\ 16 & \end{array}$$

Ao efetuarmos a divisão de 499 por 23, encontrámos o quociente inteiro (21), menor que o divisor (23); e, como não obtivemos divisão exata, podemos afirmar, desde já, que

499 é primo, sem precisar prosseguir nas divisões dêsse número pelos demais números primos inferiores a êle.

Com efeito, se 499 não fosse primo, admitiria, pelo menos, um divisor primo, divisor êsse que seria maior que 23, uma vez que já foram considerados todos os números primos compreendidos entre 2 e 23, inclusive. Nesse caso, porém, o quociente obtido seria menor que 23 e dividiria também exatamente 499, o que, aliás, não é possível, por isso que já se verificou que 499 não é divisível pelos números, primos ou múltiplos, compreendidos entre 2 e 23, inclusive.

Devemos notar ainda que, para verificar se um número qualquer é divisível por 2, ou por 3, ou por 5, ou por 11, basta aplicar os *caracteres de divisibilidade* estudados e que para verificar se é divisível por 7, basta efetuar *mentalmente* a operação.

174. **Regra.** — *Para reconhecer se um número dado é primo, basta dividí-lo sucessivamente por cada um dos números primos tomados em sua ordem natural crescente, a partir de 2; se chegarmos, sem encontrar divisão exata, a obter um quociente igual ou menor que o divisor empregado, podemos afirmar que o número dado é primo.*

175. **Propriedades dos números primos.** — 1.ª *Um número qualquer dividindo um produto de dois fatores e sendo primo com um dêles, dividirá necessàriamente o outro fator.* — Assim, dado

$$7\times12=84,$$

dizemos que 4, dividindo o produto (84) e sendo primo com um dos fatores (7), dividirá necessàriamente o outro fator (12).

Com efeito, 4 e 7 sendo números primos entre si, teremos

$$\text{m.d.c. de } (7 \text{ e } 4)=1.$$

Multiplicando êsses números por 12 e notando que m.d.c. de ambos ficará também multiplicado por êsse número (n.º 162, 2.º), resultará:

$$\text{m.d.c. de } (7\times12 \text{ e } 4\times12)=12.$$

Tendo em vista que 4 divide 7×12 (por hipótese) e também 4×12, concluimos que dividirá necessàriamente 12, por ser êsse número o m.d.c. de ambos (n.º 162).

2.ª *Um número qualquer, dividindo um produto de vá-*

rios fatores, dividirá necessàriamente um dos fatores, pelo menos. — Assim, dado

$$5\times7\times9=315,$$

dizemos que 3, dividindo o produto (315) dividirá, pelo menos, um dos fatores (9).

Com efeito, o produto acima indicado pode ser escrito sob a forma seguinte:

$$5\times(7\times9).$$

De acôrdo com o teorema anterior, o número considerado (3) sendo primo com o primeiro fator (5), dividirá necessàriamente o outro fator (7×9). Pelo mesmo motivo, êsse número, dividindo o produto (7×9) e sendo primo com um dos fatores (7), dividirá necessàriamente o outro (9).

176. **Conseqüências.** — 1.ª *Um número primo, dividindo um produto de fatores primos, é igual a um dêsses fatores.* — Com efeito, para que um número qualquer possa dividir um produto de vários fatores é necessário que divida, pelo menos, um dêsses fatores; e, como todos êles são números primos, resulta que o divisor do produto é um dos próprios fatores.

2.ª *Um número qualquer, dividindo uma potência de um número, dividirá também êsse número.* — Com efeito, sendo

$$15^3=15\times15\times15,$$

concluimos que 5, dividindo 15^3, dividirá necessàriamente 15, uma vez que 15^3 é um produto de 3 fatores iguais a 15.

3.ª *Quando dois ou mais números são primos entre si, as potências de qualquer grau dêsses números também o são.* — Com efeito, dados os números primos entre si

$$12 \text{ e } 5,$$

verificamos que

$$12^5 \text{ e } 5^4,$$

são também primos entre si, uma vez que, se 12^5 e 5^4 admitissem um divisor comum qualquer diferente de 1, conforme a conseqüência anterior, êsse número dividiria do mesmo modo as respectivas bases 12 e 5, o que aliás, não é possível por serem 12 e 15 números primos entre si.

177. **Decomposição de um número em fatores primos.** — Teorema: *Todo o número que não é primo é igual a um produto de fatores primos.* — Consideremos o número 36.

Sabemos que 36 não sendo primo, admite, pelo menos, um divisor primo diferente de 1.

Sendo 2 êsse divisor e representando por q o quociente, teremos

$$36=2\times q.$$

Se o número inteiro q for primo, o teorema está demonstrado. Supondo, porém que q não seja primo, pelo mesmo motivo acima exposto, sabemos que êsse número admitirá, pelo menos, um divisor primo.

Sendo 3 êsse divisor e representando por q o quociente, teremos

$$q=3\times q'.$$

Mas, substituindo q por $3\times q'$ na primeira igualdade acima considerada, encontraremos

$$36=2\times q=2\times3\times q',$$

ou

$$36=2\times3\times q'.$$

Se o número inteiro q for primo, o teorema está demonstrado. Supondo, porém, que q não seja primo, ainda pelo mesmo motivo exposto, sabemos que êsse número admitirá, pelo menos, um divisor primo. Assim, prosseguindo, obteremos, sucessivamente, quocientes cada vez menores, até encontrarmos um quociente que sòmente possa ser divisível por si mesmo e pela unidade, isto é, que seja um número primo.

Decompor um número qualquer em fatores primos significa procurar dois ou mais números primos cujo produto seja igual ao número proposto. — Consideremos o número 2.310.

$$\begin{array}{l|l}
2310 & 2 \\ \hline
\quad 1155 & 3 \\ \hline
\qquad 385 & 5 \\ \hline
\qquad\quad 77 & 7 \\ \hline
& 11
\end{array}$$

Notando que 2310 é divisível por 2, teremos

$$2310=2\times1155.$$

Notando que 1155 é divisível por 3, teremos

$$2310=2\times(3\times385).$$

Notando que 385 é divisível por 5, teremos

$$2310=2\times3\times(5\times77).$$

Notando que 77 é divisível por 7, teremos

$$2310 = 2 \times 3 \times 5 \times (7 \times 11),$$

ou

$$2310 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11.$$

178. **Regra.** — *Para decompor um número em fatores primos, divide-se êsse número pelo seu menor divisor primo, diferente de 1; divide-se depois o quociente obtido pelo seu menor divisor primo; assim se prossegue, dividindo sempre o último quociente pelo seu menor divisor primo, até que se encontre um quociente igual à unidade. Os números que serviram de divisores são os fatores procurados.* — Na prática, dispõe-se a operação da maneira indicada aos lados, em que os números escritos à esquerda do traço vertical são os dividendos e os quocientes sucessivos e os que se encontram escritos à direita do mesmo traço são os fatores primos procurados dos números propostos.

23100	2
11550	2
5775	3
1925	5
385	5
77	7
11	11
1	

60060	2
30030	2
15015	3
5005	5
1001	7
143	11
13	13
1	

Para determinar os divisores sucessivos, aplicam-se os caracteres simples da divisibilidade e efetuam-se, em geral, mentalmente as divisões respectivas.

Obtemos, assim

$$23100 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 11$$

e

$$60060 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13,$$

ou, notando que $2 \times 2 = 2^2$ e $5 \times 5 = 5^2$,

$$23100 = 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7 \times 11$$

e

$$60060 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13.$$

TEOREMA: *Todo o número que não é primo admite sòmente um sistema único de fatores primos.* — Suponhamos que, decompondo um número qualquer N em seus fatores primos encontramos

$$N = 2 \times 3 \times 7.$$

Queremos provar que, empregando um outro método de decomposição qualquer, não podemos encontrar para o número N fatores diferentes dos que acima obtivemos, ou os mesmos fatores elevados a potências distintas.

Com efeito, imaginemos que, efetuando nova decomposição, encontrámos

$$N = a \times b \times c.$$

Teríamos, então

$$N = 2 \times 3 \times 7,$$
$$N = a \times b \times c,$$

ou

$$2 \times 3 \times 7 = a \times b \times c.$$

O fator 2, dividindo o primeiro produto, dividirá também o segundo e como êsse produto é formado de fatores primos, concluimos que 2 é igual a um dos fatores do segundo produto. Admitamos, assim, que $a = 2$.

Do mesmo modo, concluimos que 3 é também fator do segundo produto. Admitamos, assim, que $b = 3$.

Ainda pelo mesmo motivo, concluimos que 7 é igualmente fator do segundo produto. Seja $c = 7$.

Resulta, assim, que os fatores do segundo produto (a, b, c), são necessàriamente os mesmos do primeiro (2, 3, 7), e que cada um dêles figura nos dois produtos considerados o mesmo número de vezes.

179. **Observação.** — De acôrdo com o teorema que acabámos de demonstrar é indiferente, ao efetuar a decomposição de um número dado em seus fatores primos, iniciarmos as divisões por qualquer dêles.

Entretanto, na prática, costuma-se iniciar as divisões pelo menor divisor do número considerado, seguindo-se depois, nas divisões sucessivas, a ordem natural dos números primos, o que geralmente facilita muito a operação.

180. **Decomposição abreviada.** — 1.º Aplicando o teorema anterior, podemos, muitas vezes, abreviar a decomposição de certos números em fatores pimos. Recorrdemos que um número formado pela unidade seguida de zeros contém sòmente os fatores 2 e 5 elevados a uma potência indicada pelo número de zeros que acompanham a unidade, ou seja:

$$10 = 2 \times 5; \quad 100 = 2^2 \times 5^2; \quad 1000 = 2^3 \times 5^3; \quad 10000 = 2^4 \times 5^4 ...$$

Baseados nesse fato, podemos sempre abreviar a decomposição em fatores primos dos números formados de algarismos significativos seguidos de zeros.

Com efeito, consideremos o número 14.000.

Tendo em vista que

$$14000 = 14 \times 1000,$$

teremos

$$14000 = 14 \times 2^3 \times 5^3,$$

ou, por ser $14 = 2 \times 7$:

$$14000 = 2 \times 7 \times 2^3 \times 5^3,$$

de onde resulta finalmente:

$$14000 = 2^4 \times 5^3 \times 7.$$

Pelo mesmo motivo, teremos também

$$490.000 = 49 \times 10.000 = 49 \times 2^4 \times 5^4 = 7^2 \times 2^4 \times 5^4 = 2^4 \times 5^4 \times 7^2.$$

2.º Muitas vezes sucede que, à simples vista dos números dados, verifica-se que podem ser decompostos em dois fatores quaisquer, cada um dos quais, por sua vez, poderá ser decomposto em dois outros, e assim sucessivamente.

Nesses casos, a decomposição pode ser abreviada, como se verá nos exemplos que seguem:

$$84 = 7 \times 12 = 7 \times 3 \times 4 = 7 \times 3 \times 2^2 = 2^2 \times 3 \times 7,$$

$$96 = 8 \times 12 = 8 \times 3 \times 4 = 2^3 \times 3 \times 2^2 = 2^5 \times 3,$$

$$108 = 9 \times 12 = 9 \times 3 \times 4 = 3^2 \times 3 \times 2^2 = 3^3 \times 2^2 = 2^2 \times 3^3.$$

181. **Divisores de um número.** — Consideremos, preliminarmente, os teoremas seguintes:

1.º *Se um número fôr divisível separadamente por vários números primos entre si dois a dois, será divisível também pelo produto de todos êles.* — Com efeito, designemos por N um número qualquer e suponhamos que é divisível por 2, por 3 e por 5, números êsses que são primos entre si, dois a dois.

Tendo em vista que N é divisível por 2, podemos escrever

$$N : 2 = q \quad \text{ou} \quad N = 2 \times q. \qquad (A)$$

Por outro lado, como 3 divide N e é primo com 2, concluimos que dividirá q. — Assim

$$q : 3 = q' \quad \text{ou} \quad q = 3 \times q', \qquad (B)$$

Substituindo na igualdade (A) q pelo valor dado pela igualdade (B), encontraremos

$$N = 2 \times q = 2 \times 3 \times q',$$

ou

$$N = 2 \times 3 \times q'. \qquad (C)$$

Vejamos, ainda que, de acôrdo com a igualdade (A), 5 dividindo N e sendo primo com 2, dividirá q e que, pela igualdade (B), 5 dividindo q e sendo primo com 3, dividirá q'. Assim

$$q : 5 = q'' \quad \text{ou} \quad q' = 5 \times q''. \qquad (D)$$

Substituindo, na igualdade (C) q pelo valor dado pela igualdade (D), encontraremos finalmente

$$N = 2 \times 3 \times q' = 2 \times 3 \times 5 \times q''.$$

Como q'' é número inteiro, fica provado que N é divisível pelo produto dos fatores primos considerados.

2.º *Para que um número seja divisível por outro é necessário e suficiente que contenha todos os fatores primos dêsse outro elevados, pelo menos, à mesma potência.* — Com efeito, designemos por N e N′ dois números, respectivamente iguais aos produtos seguintes:

$$N = 3^3 \times 5^2 \times 7,$$
$$N' = 3^2 \times 5.$$

Tendo em vista que N é divisível por 3^3, concluimos que o será também por 3^2, por ser 3^3 múltiplo de 3^2 (n.º 140). Do mesmo modo, concluimos que N é igualmente divisível por 5. Por outro lado, sabemos que N, sendo divisível por 3^2 e 5, também será divisível pelo seu produto N′.

Entretanto, admitindo que os fatores dos números dados fossem, respectivamente:

$$N = 3^3 \times 5^2 \times 7,$$
$$N' = 3 \times 7^2,$$

concluiríamos que N não seria divisível por N′, uma vez que o fator 7 tem, no número N, um expoente menor que no número N′.

Com efeito, se N fosse divisível por N′, teríamos

$$N : N' = q \quad \text{ou} \quad N = N'q.$$

ou, substituindo N' pelo produto de seus fatores primos acima dados:

$$N = N'q = 3 \times 7^2 \times q,$$

ou

$$N = 3 \times 7^2 \times q.$$

Ora, a igualdade acima não sendo verdadeira, por isso que, como sabemos, um número não pode admitir duas decomposições distintas em fatores primos (n.º 178), concluimos que N não poderá ser, nesse caso, divisível por N'.

182. **Determinação dos divisores de um número.** — Consideremos o número 180, cujos divisores queremos determinar.

Decompondo 180 em seus fatores primos, encontraremos

$$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5.$$

Todos os divisores de 2^2 sendo também divisores de 180, verificamos que, entre os divisores de 180, estão

$$1;\ 2;\ 2^2.$$

O número dado sendo divisível também por 3 e sendo êsse número (3) primo com os fatores acima, concluimos que os produtos de 3 por êsses fatores são também divisores de 180. Obtemos, assim, os novos divisores

$$1 \times 3;\ 2 \times 3;\ 2^2 \times 3.$$

Do mesmo modo, 180 sendo divisível também por 3^2 e sendo êsse número (3) primo com os primeiros fatores acima encontrados, concluimos que os produtos de 3 por êsses fatores são também divisores de 180. Obtemos, assim, os novos divisores

$$1 \times 3^2;\ 2 \times 3^2;\ 2^2 \times 3^2.$$

Finalmente, 180 sendo divisível por 5 e sendo êsse número (5) primo com todos os divisores até agora obtidos, concluimos que os produtos de 5 por êsses fatores são também divisores de 180. Obtemos, assim, os novos divisores

$$1 \times 5;\ 2 \times 5;\ 2^2 \times 5;$$

$$1 \times 3 \times 5;\ 2 \times 3 \times 5;\ 2^2 \times 3 \times 5;\ 1 \times 3^2 \times 5;\ 2 \times 3^2 \times 5;\ 2^2 \times 3^2 \times 5.$$

Obtemos, assim, todos os divisores de 180, ou sejam

$$1;\ 2;\ 2^2;\ 3;\ 2 \times 3;\ 2^2 \times 3;\ 3^2;\ 2 \times 3^2;\ 2^2 \times 3^2;\ 5;\ 2 \times 5;\ 2^2 \times 5;$$

$$3 \times 5;\ 2 \times 3 \times 5;\ 2^2 \times 3 \times 5;\ 3^2 \times 5;\ 2 \times 3^2 \times 5;\ 2^2 \times 3^2 \times 5;$$

ou, efetuando os produtos indicados

1; 2; 4; 3; 6; 12; 9; 18; 36; 5; 10; 20; 15; 30; 60; 45; 90; 180.

Regra: *Para determinar todos os divisores de um número decompõe-se êsse número em seus fatores primos; toma-se a unidade e as potências sucessivas do 1.º fator; multiplicam-se depois êsses divisores pelas potências sucessivas do 2.º fator; multiplicam-se depois todos os divisores assim obtidos pelas potências sucessivas do 3.º fator, assim prosseguindo-se até serem consideradas as potências sucessivas do último fator.* — Na prática, dispõe-se a operação da maneira que se vê ao lado.

		1
180	2	2
90	2	4
45	3	3,6,12.
15	3	9,18,36.
5	5	5,10,20,15,30,60,45,90,180
1		

Decompõe-se o número dado em seus fatores primos, tirando-se um traço vertical à direita dêsses fatores. À direita dêsse traço, escrevem-se os divisores, a partir de 1 que se coloca um pouco acima do primeiro fator primo. Sob o divisor 1, escrevem-se as potências sucessivas do 1.º fator (2), obtendo-se, dêsse modo, o 1.º grupo de divisores

1, 2, 4.

Sob o divisor 4, escrevem-se as potências sucessivas do 2.º fator (3 e 9); à direita de 3, escrevem-se os produtos dêsse número pelos divisores do 1.º grupo (2 e 4), obtendo-se, assim, os divisores 3, 6 e 9; à direita de 9, escrevem-se os produtos dêsse número pelos divisores do 1.º grupo (2 e 4), obtendo-se os divisores 18 e 36. Forma-se, dêsse modo, o 2.º grupo de divisores

3, 6, 12, 9, 18 e 36.

Sob o divisor 9, escreve-se o 3.º fator primo (5); à direita de 5, escrevem-se os produtos dêsse número pelos divisores dos dois primeiros grupos (2, 4, 3, 6, 12, 9, 18 e 36), obtendo-se, dêsse modo, o 3.º grupo de divisores

5, 10, 20, 15, 30, 60, 45, 90, 180.

Exemplo: *Determinar os divisores do número 720.*

Adotando a disposição acima, encontraremos

		1
720	2	2
360	2	4
180	2	8
90	2	16
45	3	3,6,12,24,48
15	3	9,18,36,72,144
5	5	5,10,20,40,80,15,30,60,120,240,45,90,180,360,720,
1		

183. **Determinação do número de divisores de um número qualquer.** — Vejamos como se pode determinar o número de divisores de um número qualquer. Para isso, voltemos ao primeiro exemplo, acima dado.

Ao decompor 180 em seus fatores primos, encontrámos

$$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5.$$

E, para formar os três grupos de divisores dêsse número, dispusemos as potências sucessivas de cada fator da maneira seguinte:

1.ª série: $1, 2, 2^2$,
2.ª série: $1, 3, 3^2$,
3.ª série: $1, 5$.

Notemos que o expoente do primeiro fator primo obtido na decomposição é 2 e que a primeira série acima contém 3 números, que o expoente do segundo fator primo também é 2 e que a segunda série contém também 3 números e que o terceiro fator primo tem o expoente 1 e que a terceira série contém 2 números.

Assim, verificamos que o número de fatores de cada série é igual ao expoente do fator primo correspondente aumentado de 1, ou seja

1.ª série $(2+1$ fatores$)$,
2.ª série $(2+1$ fatores$)$,
3.ª série $(1+1$ fatores$)$.

O número de divisores provenientes do produto dos fatores contidos nas duas primeiras séries será, pois

$$(2+1)\ (2+1).$$

e o número de divisores provenientes do produto dos fatores

contidos na terceira série pelos contidos nas duas anteriores será, pois

$$(2+1)\ (2+1)\ (1+1) \quad \text{ou} \quad 3 \times 3 \times 2 \quad \text{ou} \quad 18.$$

Concluimos, assim, que o *número de divisores de um número qualquer é igual ao produto dos expoentes dos fatores primos dêsse número, aumentados, cada um, de uma unidade.*

Exemplos: 1.º *Determinar o número de divisores de 504.* — Decompondo o número dado em seus fatores primos teremos

$$504 = 2^3 \times 3^2 \times 7.$$

Somando 1 a cada um dos expoentes dos fatores acima e notando que o expoente de 7 é 1, resultará

$$3+1=4; \quad 2+1=3 \quad \text{e} \quad 1+1=2.$$

Formando o produto das somas, assim obtidas, encontraremos:

$$4 \times 3 \times 2 = 24.$$

O número dado tem 24 divisores.

2.º *Determinar o número de divisores de 81.675.* — Decompondo-o em seus fatores primos, teremos

$$81.675 = 3^3 \times 5^2 \times 11^2.$$

Somando 1 a cada um dos expoentes dos fatores acima, resultará

$$3+1=4; \quad 2+1=3 \quad \text{e} \quad 2+1=3.$$

Formando o produto das somas, assim obtidas, encontraremos

$$4 \times 3 \times 3 = 36.$$

O número dado tem 36 divisores.

184. **Determinação do m. d. c. de vários números.** — Segundo os princípios estudados, podemos determinar o m. d. c. de vários números pela decomposição dêsses números em seus fatores primos.

Com efeito, consideremos os números

$$36 = 2^2 \times 3^2,$$
$$60 = 2^2 \times 3 \times 5,$$
$$72 = 2^3 \times 3^2,$$

Os fatores 2^2 e 3 sendo comuns aos três números dados, segue-se que êsses números são divisíveis pelo produto $2^2 \times 3$. Assim, $2^2 \times 3 = 20$ é um divisor comum dos números propostos. Por outro lado, verificamos também que êsse divisor comum é o maior que podem ter êsses números, uma vez que, se tomássemos um outro fator qualquer não comum ou aumentássemos de uma unidade o expoente de um dêles, o produto resultante não dividiria os números que não tivessem na sua composição êsse fator.

185. **Regra.** — *Para determinar o m.d.c. de dois ou mais números decompostos em fatores primos, forma-se o produto dos fatores primos comuns a todos os números dados, tomado cada um dêles com seu menor expoente.*

Exemplos: 1.º *Determinar, pela decomposição em fatores primos, o m.d.c. dos números 120, 180 e 210.* — Aplicando a regra dada acima, encontraremos

$$\begin{array}{r|l}120&2\\60&2\\30&2\\15&3\\5&5\\1&\end{array}\quad\begin{array}{r|l}180&2\\90&2\\45&3\\15&3\\5&5\\1&\end{array}\quad\begin{array}{r|l}210&2\\105&3\\35&5\\7&7\\1&\end{array}\quad\begin{array}{|l}120 = 2^3 \times 3 \times 5\\180 = 2^2 \times 3^2 \times 5\\210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7.\end{array}\quad\begin{array}{|l}\text{m. d. c. de (120,}\\\text{180 e 210)} =\\= 2 \times 3 \times 5 = 30.\end{array}$$

2.º *Determinar, pela decomposição em fatores primos, o m.d.c. dos números 220, 280 e 360.* — Aplicando a regra dada acima, encontraremos

$$\begin{array}{r|l}220&2\\110&2\\55&5\\11&11\\1&\end{array}\quad\begin{array}{r|l}280&2\\140&2\\70&2\\35&5\\7&7\\1&\end{array}\quad\begin{array}{r|l}360&2\\180&2\\90&2\\45&3\\15&3\\5&5\\1&\end{array}\quad\begin{array}{|l}220 = 2^2 \times 5 \times 11.\\280 = 2^3 \times 5 \times 7\\360 = 2^3 \times 3^2 \times 5\end{array}\quad\begin{array}{|l}\text{m. d. c. de (220, 280 e}\\360) = 2^2 \times 5 = 20.\end{array}$$

186. **Exercícios.**

Verificar se são primos os números seguintes:

1.	3.167?	R. E'
2.	5.213?	R. Não é
3.	7.823?	R. E'
4.	10.019?	R. Não é
5.	15.221?	R. Não é

Decompor em factores primos os números seguintes:

6.	120?	R. $2^3 \times 3 \times 5$
7.	180?	R. $2^2 \times 3^2 \times 5$
8.	252?	R. $2^2 \times 3^2 \times 7$
9.	472?	R. $2^3 \times 59$
10.	630?	R. $2 \times 3^2 \times 5 \times 7$
11.	1.078?	R. $2 \times 7^2 \times 11$
12.	2.965?	R. $5 \times 7^2 \times 11$
13.	7.650?	R. $2 \times 3^2 \times 5^2 \times 17$
14.	7.865?	R. $5 \times 11^2 \times 13$
15.	14.399?	R. $7 \times 11^2 \times 17$.

Determinar os divisores dos números seguintes:

16.	De 150?	R. 1, 2, 3, 6, 5, 10, 15, 30, 25, 50, 75, 150
17.	De 315?	R. 1, 3, 9, 5, 15, 45, 7, 21, 63, 35, 105 e 315
18.	De 4.719?	R. 1, 3, 11, 33, 121, 363, 13, 39, 143, 429, 1.573 e 4.719.

Determinar o número de divisores dos números seguintes:

19.	De 140?	R. 12
20.	De 324?	R. 15
21.	De 1.728?	R. 28
22.	De 2.800?	R. 30
23.	De 9.000?	R. 64.

Determinar os divisores comuns dos números seguintes:

24.	De 90 e 140?	R. 1, 2, 5 e 10
25.	De 504 e 540?	R. 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 e 36
26.	De 837 e 1.023?	R. 1, 3 e 31.

Capítulo XI

MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM

187. Como já vimos (n.º 133), um número qualquer admite uma infinidade de múltiplos, cujo menor é o próprio número.

Assim, dados os números 5, 6 e 10, podemos formar:

Múltiplos de 5: 5, 10, 15, 20, 25, *30*, 35, 40, 45, 50, 55, *60*...

Múltiplos de 6: 6, 12, 18, 24, *30*, 36, 42, 48, 54, *60*, 66, 72...

Múltiplos de 10: 10, 20, *30*, 40, 50, *60*, 70, 80, 90, 100, 110..., em que se encontram varios múltiplos comuns aos números dados, como sejam

30, 60...,

múltiplos êsses que se sucedem também indefinidamente.

Ao menor dêles, ou seja 30, no caso presente, damos a denominação de *mínimo múltiplo comum*.

188. **Definição.** — *Mínimo múltiplo comum de dois ou mais números é o menor número que é divisível exatamente por êsses números.*

189. **Abreviatura.** — Na prática indica-se o mínimo múltiplo comum de dois ou mais números pela abreviatura seguinte: *m. m. c.*

Assim, no exemplo dado acima, escrevemos simplesmente

$$\text{m. m. c.} \quad (5,\ 6 \text{ e } 10) = 30.$$

190. **Pesquisa do m. m. c. de vários números.** — Recordemos que, para um número ser divisível por outro é necessário e sufficiente que contenha todos os fatores primos dêsse outro elevados, pelo menos, à mesma potência.

Baseados nesse princípio, podemos fàcilmente estabelecer a regra para a pesquisa do m. m. c. de vários números.

Consideremos, para isso, os números 18, 24 e 30.

Decompondo-os em seus fatores primos, encontraremos

$$18 = 2 \times 3^2,$$
$$24 = 2^3 \times 3,$$
$$30 = 2 \times 3 \times 5.$$

Evidentemente, todos os múltiplos comuns dos números propostos devem conter os fatores que figuram na composição de cada um dêles, elevados, pelo menos, à mesma potência. Assim, o m. m. c. dos números dados deverá conter exclusivamente tais fatores. — Resulta, assim, que

$$\text{m. m. c. de } (18,\ 24,\ 30) = 2^3 \times 3^2 \times 5.$$

191. **Regra.** — *Para determinar o m. m. c. de dois ou mais números depois de decompostos em seus fatores primos, forma-se o produto dos fatores primos comuns e não comuns de todos os números dados, tomado cada um dêles com seu maior expoente.* — Exemplos

1.º Determinar, pela decomposição em fatores primos, o m. m. c. dos números 180, 270 e 360.

Aplicando a regra dada acima, encontraremos

180	2	270	2	360	2		
90	2	135	3	180	2		
45	3	45	3	90	2	$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5.$	m. m. c. de (180, 270 e
15	3	15	3	45	3	$270 = 2 \times 3^3 \times 5.$	360) $= 2^3 \times 3^3 \times 5 =$
5	5	5	5	15	3	$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5.$	$= 1080.$
1		1		5	5		
				1			

2.º Determinar, pela decomposição em fatores primos, o m. m. c. dos números 104, 210 e 315.

Aplicando a regra acima, encontraremos

140	2	210	2	315	3		
70	2	105	3	105	3	$140 = 2^2 \times 5 \times 7$	m. m. c. de (140, 210
35	5	35	5	35	5	$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$	e 315) $= 2^2 \times 3^2 \times$
7	7	7	7	7	7	$315 = 3^2 \times 5 \times 7$	$\times 5 \times 7 = 1260.$
1		1		1			

192. Observação. — *Quando dois números são primos entre si, o m.m.c. de ambos é igual ao produto dêles.* — Com efeito, não contendo os números dados fatores comuns diferentes da unidade, segue-se que o m.m.c. dêsses números deverá conter todos os fatores primos que figuram na composição de ambos.

Do mesmo modo, verifica-se também que, quando vários números são primos entre si dois a dois, o m.m.c. dêsses números é igual ao produto de todos êles.

193. Pesquisa do m. m. c. de dois números com auxílio do m. d. c. de ambos. — Consideremos os números 60 e 36.

Decompondo-os em seus fatores primos, encontraremos

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5,$$
$$36 = 2^2 \times 3^2.$$

Tendo em vista que o m.m.c. dos dois números dados é o produto das mais altas potências dos fatores primos de ambos, verificamos que, para obter êsse m.m.c. bastará multiplicar um dos números dados pelos fatores primos do outro que nele não figuram.

No caso presente, multiplicando 36 por 5, encontraremos o m.m.c. dêsses números (180).

Mas, considerando que o m.d.c. dos números dados é o produto das mais baixas potências dos fatores comuns dêsses números, segue-se que, dividindo um dêles (60) pelo m.d.c. de ambos (12) o quociente obtido conterá os fatores primos que não figuram no outro.

Resulta assim, que, para multiplicar um dos números propostos pelos fatores primos do outro e que não entram em sua composição, basta multiplicar o primeiro pelo quociente do segundo pelo m.d.c. de ambos.

Das considerações que acabamos de expender, resulta a seguinte regra:

194. Regra. — *Para determinar o m.m.c. de dois números dados, divide-se o produto de ambos pelo m.d.c. dêsses números.* — Exemplos

1.º Determinar o m.m.c. de 90 e 120.

Procurando o m.d.c. dêsses números, encontraremos

$$\text{m.d.c. } (90 \text{ e } 120) = 30.$$

Aplicando a regra dada acima, obteremos

$$\text{m.m.c. } (90 \text{ e } 120) = 90 \times 120 : 30 = 10800 : 30 = 360.$$

2.º Determinar o m.m.c. de 685 e 959.

Procurando o m.d.c. dêsses números encontraremos

$$\text{m.d.c. } (685 \text{ e } 959) = 137.$$

Aplicando a regra dada acima, obteremos:

$$\text{m.m.c. } (685 \text{ e } 959) = 685 \times 959 : 137 = 656915 : 137 = 4795.$$

195. Propriedades do m. m. c. de dois ou mais números. — 1.ª *Se vários números forem multiplicados ou divididos por um certo número, o seu m.m.c. ficará também multiplicado ou dividido por êsse mesmo número.* — Assim, sendo dados

$$\text{m.m.c. } (60, 90 \text{ e } 120) = 360,$$

dizemos que,

$$\text{m.m.c. } (60 \times 2,\ 90 \times 2 \text{ e } 120 \times 2) = 360 \times 2,$$
$$\text{m.m.c. } (60 : 2,\ 90 : 2 \text{ e } 120 : 2) = 360 : 2.$$

Com efeito, quando multiplicamos dois ou mais números pelo mesmo número, passa êste a figurar na composição de cada um dos primeiros, e, conseqüentemente, o m.m.c. dos produtos considerados deverá também conter êsse fator.

Por outro lado, quando dividimos dois ou mais números pelo mesmo número, o divisor considerado é um fator que fica cancelado da composição dos números dados e, conseqüentemente, o m.m.c. dos quocientes não poderá conter êsse fator.

2.ª *Dividindo-se o m.m.c. de vários números por cada um dêstes, os quocientes resultantes serão números primos entre si.* — Assim, sendo dados

$$\text{m.m.c. } (60, 90 \text{ e } 120) = 360,$$

dizemos que, efetuando as divisões que seguem

$$360 : 60 = 6; \quad 360 : 90 = 4; \quad 360 : 120 = 3,$$

os quocientes 6, 4 e 3 são números primos entre si.

Com efeito, se os quocientes obtidos nas divisões mencionadas não fossem números primos entre si, admitiriam, pelo menos, um fator primo comum, diferente de 1. Nesse caso, quando multiplicássemos os quocientes pelos números dados, o fator considerado apareceria no produto elevado a uma potência mais alta da que há em todos êsses números, o que, aliás, não é possível.

196. **Aplicações.** — A primeira propriedade do m.m.c. de vários números pode ser vantajosamente aplicada na pesquisa do m.m.c., como veremos nos exemplos que seguem.

1.° *Determinar o m.m.c. dos números 1200, 1500 e 1800.* — De acôrdo com a propriedade citada, para procurar o m.m.c. dos números dados podemos dividí-los por um fator comum qualquer e depois multiplicar o m.m.c. obtido por êsse mesmo fator.

Dividindo 1200, 1500 e 1800 por 100 e procurando o m.m.c. dos quocientes respectivos, encontraremos

m.m.c. (12, 15 e 18) = 180.

Multiplicando o m.m.c. obtido por 100, resultará:

m.m.c. (1200, 1500 e 1800) = 18000.

2.° *Determinar o m.m.c. dos números 36, 40 e 64* — Dividindo os números dados por 4 e procurando o m.m.c. dos quocientes respectivos, encontraremos

m.m.c. (9, 10 e 16) = 720.

Multiplicando o m.m.c. obtido por 4, encontraremos

m.m.c. (36, 40 e 64) = 2880.

197. **Cálculo mental.** — Quando são dados números pequenos, o m.m.c. pode ser obtido mentalmente, como veremos nos exemplos que seguem:

1.° *Determinar o m.m.c. dos números 6, 12 e 24.* — O m.m.c. procurado não podendo ser menor que o maior dos números dados, verificamos mentalmente se 24 é divisível por 6 e por 12. Como isso acontece, 24 é o m.m.c. procurado.

2.° *Determinar mentalmente o m.m.c. dos números 9, 12 e 18.* — Verificamos mentalmente se 18 é divisível exatamente por 9 e 12. Como 18 não é divisível por 12, segue-se que 18 não pode ser o m.m.c. procurado. Verificamos se o menor múltiplo de 18, diferente de 0 e 18, que é 36, é divisível exatamente pelos números propostos. Como 36 é divisível por 9, 12 e 18, é o m.m.c. procurado.

3.° *Determinar mentalmente o m.m.c. dos números 15, 30 e 40.* — O maior dos números dados (40), não sendo exatamente divisível pelos dois outros (15 e 30), não pode ser o m.m.c. procurado.

O menor múltiplo de 40, diferente de 0 e 40, que é 80, não sendo exatamente divisível por 15 e por 30, não pode ser o m.m.c. procurado.

O menor múltiplo de 40, diferente de 0, 40 e 80, que é 120, sendo exatamente divisível por 15 e por 30, é o m.m.c. procurado.

198. **Regra.** — *Para determinar o m.m.c. de vários números pequenos, verifica-se mentalmente se o maior dêles é exatamente divisível pelos demais. Se isso suceder, êsse número será o m.m.c. Se não o for, ensaiam-se sucessivamente os diversos múltiplos do maior tomados em sua ordem natural crescente, até encontrar um que seja exatamente divisível pelos números propostos. O número, assim obtido, será o m.m.c. procurado.*

199. **Exercícios.**

Determinar o m.m.c. dos seguintes números:

1. De 40 e 60?	R. 120
2. De 80 e 120?	R. 240
3. De 150 e 180?	R. 900
4. De 264 e 408?	R. 4.488
5. De 500 e 750?	R. 1.500
6. De 715 e 1.001?	R. 5.005
7. De 837 e 1.023?	R. 9.207
8. De 2.007 e 2.453?	R. 22.077
9. De 18, 20 e 24?	R. 360
10. De 60, 180 e 450?	R. 900
11. De 60, 84 e 132?	R. 4.620
12. De 84, 98 e 168?	R. 1.176
13. De 12, 15, 20 e 75?	R. 300
14. De 27, 36, 49 e 54?	R. 5.292
15. De 30, 32, 36, 41 e 72?	R. 59.040.

Capítulo XII

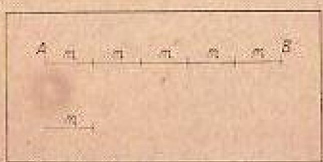
FRAÇÕES ORDINÁRIAS

200. **Noção de número fracionário.** — Nas noções preliminares que demos no capítulo I, fizemos distinção entre grandezas contínuas e descontínuas, bem como dissemos que a noção de *número inteiro* se origina, por abstração, da idéia de coleção de objetos distintos.

Cuidemos, agora, de dar uma noção sôbre novos números — os *números fracionários* — introduzidos na Matemática como ampliação do campo numérico.

Consideremos, para isso, a medida das grandezas contínuas e vejamos os dois casos que se podem apresentar.

1.º Consideremos o segmento AB.

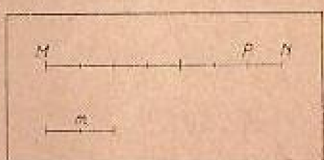


Para medí-lo, devemos compará-lo com outra grandeza da mesma espécie e conhecida, tomada para unidade de medida, ou seja, o segmento m, no caso presente.

Aplicando sucessivamente a unidade sôbre o segmento AB, verificamos que AB contém exatamente 5 vezes m.

A medida de AB é expressa, então, por um número inteiro (5).

2.º Consideremos, agora, o segmento MN.



Aplicando sucessivamente a unidade m sôbre o segmento MN, verificamos que MN não contém exatamente um certo número de vezes m. Com efeito, aplicando o segmento m sôbre o segmento MN, determinaremos o ponto P, após 3 medidas exatas de m. Êsse ponto P não corresponde à extremi-

dade do segmento dado e, por outro lado, aplicando 4 vezes a unidade, a extremidade m cairá, além do ponto N.

Evidentemente a medida do segmento MN não pode ser expressa por um número inteiro, por ser maior de 3 e menor de 4 unidades m.

Recorramos, então, ao processo seguinte: dividamos o segmento, m, tomado para unidade, em um certo número de partes iguais, duas por exemplo, e designemos cada uma delas por *um meio* da unidade m.

Aplicando a unidade, assim dividida, no segmento dado, verificamos que MN contém exatamente 7 vezes o segmento correspondente a um meio da unidade adotada.

Dizemos, então, que MN mede 7 vezes um meio de m.

Para representar essa medida, temos necessidade de empregar dois números, um dos quais indica o número de partes em que se dividiu a unidade m (2) e o outro indica o número dessas partes contidas no segmento MN (7).

Convencionou-se escrever os dois números mencionados, o segundo sôbre o primeiro, separados por um traço, como se segue:

$$\frac{7}{2},$$

dizendo-se, então, que ambos constituem um *número fracionário* ou uma fração.

Em conseqüência:

201. **Definição.** — *Dá-se a denominação de fração a uma ou várias partes iguais em que se divide a unidade.*

Termos de uma fração. — Como dissemos, as frações são representadas por dois números, escritos um sôbre o outro, separados por um traço. Denominam-se êsses números, respectivamente, *numerador* e *denominador*.

O *denominador*, escrito sob o traço, indica o número de partes em que foi dividida a unidade, no caso considerado.

O *numerador*, escrito sôbre o traço, indica o número de vezes que a grandeza medida contém essas partes. — Assim, dada a fração

$$\frac{4}{5},$$

dizemos que o denominador (5) indica o número de partes em que foi dividida a unidade, e o numerador (4) indica o número de vezes que a grandeza medida contém uma dessas partes.

O numerador e o denominador são denominados simultâneamente de *termos* da fração. — Assim, dada a fração

$$\frac{7}{8}$$

dizemos que 7 e 8 são os termos da fração.

202. **Modo de escrever uma fração.** — Para escrever uma fração, escreve-se o numerador sôbre o denominador, separados por um traço horizontal. — Exemplo

$$\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6} \text{ e } \frac{6}{7}.$$

203. **Modo de ler uma fração.** — A maneira comum e genérica de enunciar uma fração consiste em dizer-se o numerador, e depois o denominador acompanhado da palavra *avos*. — Assim, a fração

$$\frac{17}{25}$$

é lida: dezesete vinte e cinco avos.

204. **Observações.** — 1.ª As frações cujos denominadores são números compreendidos entre 2 e 9 inclusive, enunciam-se sem a terminação avos no denominador, empregando-se as designações seguintes: *meios, terços, quartos, quintos, sextos, sétimos, oitavos* e *nonos*. — Assim, as frações

$$\frac{2}{3}, \frac{4}{5} \text{ e } \frac{7}{9}$$

são lidas, respectivamente: dois terços, quatro quintos e sete nonos.

2.ª Quando os denominadores são potências de 10, no enunciado das frações empregam-se também designações particulares, tais como: *décimos, centésimos, milésimos*, etc. — Assim, as frações

$$\frac{7}{10} \text{ e } \frac{17}{1000}$$

são lidas, respectivamente: sete décimos e dezesete milésimos.

3.ª Quando os termos da fração são expressos por letras, enuncia-se o numerador, em seguida a palavra *sôbre*, e depois o denominador. — Assim, as frações

$$\frac{a}{b} \text{ e } \frac{m}{n}$$

são lidas, respectivamente: a sôbre b e m sôbre n.

4.ª Por analogia com a observação anterior, usa-se enunciar as frações, em que um dos termos contém operações indicadas, ou ambos são números de vários algarismos, introduzindo-se a palavra *sôbre* entre o numerador e o denominador. — Assim, as frações

$$\frac{507}{12049}, \frac{37}{14\times5} \text{ e } \frac{18\times3}{7}$$

quinhentos e sete sôbre doze mil e quarenta e nove, trinta e sete sôbre quatorze vezes cinco e dezoito vezes três sôbre sete.

205. **Frações ordinárias.** — Denominam-se *frações ordinárias* as frações cujo denominador não é potência de 10. — Assim, as frações

$$\frac{7}{9}, \frac{11}{12}, \frac{15}{20} \text{ e } \frac{1}{50}$$

são denominadas frações ordinárias.

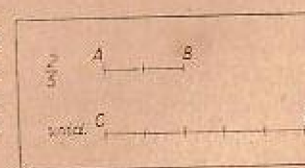
206. **Frações decimais.** — Denominam-se *frações decimais* as frações cujo denominador é potência de 10. — Assim, as frações

$$\frac{7}{10}, \frac{11}{100} \text{ e } \frac{13}{1000}$$

são denominadas frações decimais.

207. **Comparação de uma fração com a unidade.** — Consideremos os três casos seguintes:

1.º O numerador é menor que o denominador.
2.º O numerador é maior que o denominador.
3.º O numerador é igual ao denominador.



No 1.º caso, em que o segmento AB, que representa a grandeza que se quer medir, é menor que a unidade tomada CD, dizemos que a fração que exprime a medida, ou seja

$$\frac{2}{5}$$

é menor que a unidade. Escrevemos, pois

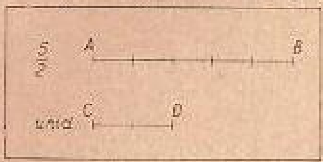
$$\frac{2}{5} < 1.$$

As frações menores que a unidade são denominadas frações próprias. — Assim

$$\frac{5}{6},\ \frac{7}{8},\ \frac{3}{13}\ \text{e}\ \frac{1}{15}$$

são frações próprias.

No 2.º caso, em que o segmento AB, que representa a grandeza que se quer medir, é maior que a unidade tomada CD, dizemos que a fração que exprime a medida, ou seja



$$\frac{5}{2},$$

é maior que a unidade. Escrevemos, pois:

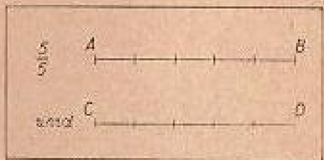
$$\frac{5}{2} > 1.$$

As frações maiores que a unidade são denominadas frações impróprias. — Assim

$$\frac{6}{5},\ \frac{8}{7},\ \frac{13}{3}\ \text{e}\ \frac{11}{4}$$

são frações impróprias.

No 3.º caso, em que o segmento AB, que representa a grandeza que se quer medir, é igual à unidade tomada, CD, dizemos que a fração que exprime a medida, ou seja



$$\frac{5}{5},$$

é igual à unidade. — Escrevemos, pois

$$\frac{5}{5} = 1.$$

208. **Observações.** — 1.ª Tendo em vista a origem das frações, consideram-se, por analogia, os números inteiros como frações cujo denominador é a unidade. — Assim

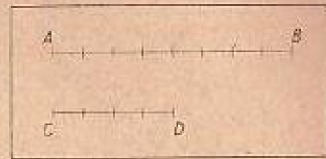
$$5 = \frac{5}{1},\ 7 = \frac{7}{1}\ 10 = \frac{10}{1},$$

ou, de uma maneira geral

$$\frac{a}{1} = a.$$

2.ª Quando o numerador de uma fração é divisível exatamente pelo denominador, a fração representa um número inteiro, igual ao quociente dessa divisão.

Com efeito, consideremos o segmento AB, cuja medida é 2, quando se toma o segmento CD para unidade. Como é fácil verificar, se dividirmos a unidade em duas partes iguais, o segmento AB conterá 4 *meios* da unidade; se dividirmos a unidade em 4 partes, o segmento AB conterá 8 *quartos* da unidade, etc. — Resulta assim que os números



$$2,\ \frac{4}{2},\ \frac{8}{4},\ \frac{16}{8}\ \ldots$$

exprimem a medida da mesma grandeza, quando se toma a mesma unidade. — Conseqüentemente

$$2 = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{16}{8} = \ldots$$

De acôrdo com as considerações acima expendidas, concluimos que *um número qualquer pode ser posto sob a forma de fração, bastando, para isso, tomar para numerador o produto do número dado pelo denominador que se quiser dar à fração.* Exemplos

$$3 = \frac{3\times 4}{4} = \frac{12}{4},\ 5 = \frac{5\times 7}{7} = \frac{35}{7}\ \text{e}\ 10 = \frac{10\times 3}{3} = \frac{30}{3}.$$

209. **Propriedade fundamental.** — *Multiplicando-se os dois termos de uma fração pelo mesmo número, diferente de zero, ou dividindo-se ambos por um divisor comum, o valor da fração não se altera.* — Assim, dada a fração

$$\frac{2}{5}$$

dizemos que, multiplicando os dois termos por 4, obtemos uma fração eqüivalente à fração dada, ou seja:

$$\frac{2}{5} = \frac{2\times 4}{5\times 4} = \frac{8}{20}.$$

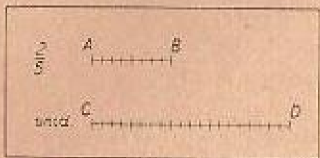
Do mesmo modo, dada a fração:

$$\frac{8}{20},$$

dizemos que, dividindo os dois termos por 4, obtemos uma fração eqüivalente à fração dada, ou seja

$$\frac{8}{20}=\frac{8:4}{20:4}=\frac{2}{5}.$$

Com efeito, consideremos o segmento AB, cuja medida é $\frac{2}{5}$ quando se toma para unidade o segmento CD, ou seja, AB contém duas das cinco partes iguais em que se dividiu a unidade tomada, CD. Se dividirmos cada uma dessas partes em 4 partes iguais, a unidade CD conterá exatamente 5×4 ou 20 dessas novas partes e o segmento AB conterá, por sua vez, 2×4 ou 8 dessas partes.



Resulta, assim, que a medida AB, que era inicialmente expressa pela fração $\frac{2}{5}$, passa a ser expressa pela fração $\frac{2\times 4}{5\times 4}$.

Conseqüentemente, as frações

$$\frac{2}{5} \text{ e } \frac{2\times 4}{5\times 4},$$

ou

$$\frac{2}{5} \text{ e } \frac{8}{20},$$

que exprimem a medida de uma mesma grandeza quando se toma a mesma unidade, são eqüivalentes. Invertendo-se a ordem das considerações acima, demonstra-se também a 2.ª parte do enunciado.

210. **Simplificação de frações.** — *Simplificar uma fração é reduzí-la a outra eqüivalente, cujos termos sejam respectivamente menores que os da fração dada.* — Consideremos a fração

$$\frac{420}{630}$$

cujos termos apresentam, como fàcilmente se verifica, vários fatores comuns.

De acôrdo com a propriedade fundamental, dividamos os termos da fração dada por um divisor comum. — Encontraremos, sucessivamente:

$$\frac{420:2}{630:2}=\frac{210}{315}=\frac{210:3}{315:3}=\frac{70}{105}=\frac{70:5}{105:5}=\frac{14}{21}=\frac{14:7}{21:7}=\frac{2}{3}.$$

211. **Regra.** — *Para simplificar uma fração dividem-se os seus dois termos por um de seus divisores comuns.* — **Fração irredutível.** — Encontrámos, no exemplo dado acima, sucessivamente, as frações

$$\frac{420}{630}=\frac{210}{315}=\frac{70}{105}=\frac{14}{21}=\frac{2}{3},$$

tôdas iguais entre si.

Observando as simplificações feitas, verificamos que a última fração obtida $\left(\frac{2}{3}\right)$ não pode ser simplificada, por isso que os seus termos (2 e 3) não têm divisor comum, diferente de 1.

Dizemos, então, que $\frac{2}{3}$ é uma *fração irredutível*, isto é, que está *reduzida à sua expressão mais simples.*

Uma fração é irredutível quando os seus termos são números primos entre si. — Assim

$$\frac{2}{5},\ \frac{3}{7},\ \frac{5}{9},\ \frac{12}{35} \text{ e } \frac{15}{16}$$

são frações irredutíveis, por isso que os termos de cada uma são, respectivamente, números primos entre si.

Do que acima ficou exposto, resulta a seguinte regra:

Para reduzir uma fração à sua expressão mais simples, dividem-se os seus termos por um divisor comum; depois, dividem-se os termos da fração resultante por um divisor comum, assim prosseguindo-se até obter-se uma fração cujos termos sejam primos entre si. — Exemplos

$$\frac{36}{48}=\frac{36:2}{48:2}=\frac{18}{24}=\frac{18:2}{24:2}=\frac{9}{12}=\frac{9:3}{12:3}=\frac{3}{4},$$

$$\frac{120}{150}=\frac{120:10}{150:10}=\frac{12}{15}=\frac{12:3}{15:3}=\frac{4}{5},$$

$$\frac{378}{432}=\frac{378:2}{432:2}=\frac{189}{216}=\frac{189:9}{216:9}=\frac{21}{24}=\frac{21:3}{24:3}=\frac{7}{8}.$$

212. **Disposição prática.** — Para facilitar as simplificações de uma fração, riscam-se os têrmos, à medida que forem divididos, escrevendo-se os quocientes segundo a disposição indicada a seguir.

$$\begin{array}{c} 3 \\ \cancel{9} \\ \cancel{36} \\ \hline \cancel{48} \\ \cancel{12} \\ 4 \end{array} = \frac{3}{4} \qquad \begin{array}{c} 7 \\ \cancel{63} \\ \cancel{189} \\ \cancel{378} \\ \hline \cancel{432} \\ \cancel{216} \\ \cancel{72} \\ 8 \end{array} = \frac{7}{8} \qquad \begin{array}{c} 4 \\ \cancel{12} \\ \cancel{120} \\ \hline \cancel{150} \\ \cancel{15} \\ 5 \end{array} = \frac{4}{5}$$

213. **Observação.** — Tendo em vista que, quando se dividem dois números pelo seu m. d. c. (n.º 162, 3.º), os quocientes resultantes são números primos entre si, segue-se que, para reduzir uma fração à sua expressão mais simples, basta dividir seus termos pelo m. d. c. de ambos. — Exemplos

1.º Reduzir, à sua expressão mais simples, a fração

$$\frac{90}{120}.$$

Calculando mentalmente o m. d. c. de 90 e 120, segundo a regra conhecida, encontraremos

$$\text{m. d. c. } (90 \text{ e } 120) = 30.$$

Dividindo os termos da fração dada por 30, resultará

$$\frac{90}{120} = \frac{3}{4}.$$

2.º Reduzir, à sua expressão mais simples a fração

$$\frac{135}{225}.$$

Calculemos o m. d. c. de 135 e 225.

	1	1	2
225	135	90	45
090	45	00	

Obtido o m. d. c. procurado:

$$\text{m. d. c. } (135 \text{ e } 225) = 45,$$

dividamos ambos os termos da fração por êsse número

$$\frac{135}{225} = \frac{135:45}{225:45} = \frac{3}{5}.$$

Devemos notar que geralmente o processo das divisões sucessivas, acima dado, é mais rápido que o do m. d. c., sendo, por isso mesmo, aplicado de preferência na prática.

214. **Simplificação de formas fracionárias.** — Tendo em vista os princípios relativos aos produtos e às frações, podemos simplificar as frações cujos termos são *produtos indicados*, desde que ambos apresentem fatores comuns. — Exemplos

$$\frac{\overset{1}{\cancel{36}} \times \overset{12}{\cancel{24}} \times \overset{\overset{1}{\cancel{6}}}{\cancel{54}}}{\underset{5}{\cancel{45}} \times \underset{5}{\cancel{30}} \times \underset{\underset{1}{\cancel{2}}}{\cancel{72}}} = \frac{12}{25} \qquad \frac{\overset{\overset{6}{\cancel{30}}}{\cancel{360}} \times \overset{\overset{1}{\cancel{11}}}{\cancel{77}} \times \overset{1}{\cancel{100}}}{\underset{\underset{1}{\cancel{12}}}{\cancel{1200}} \times \underset{11}{\cancel{121}} \times \underset{7}{\cancel{49}} \cdot \underset{5}{\cancel{25}}} = \frac{6}{385}.$$

Exercícios.

Reduzir à expressão mais simples as frações seguintes:

1.	$\frac{24}{36}$	R.	$\frac{2}{3}$	11.	$\frac{354}{366}$	R.	$\frac{59}{61}$
2.	$\frac{45}{105}$	R.	$\frac{3}{7}$	12.	$\frac{360}{648}$	R.	$\frac{5}{9}$
3.	$\frac{72}{90}$	R.	$\frac{4}{5}$	13.	$\frac{448}{512}$	R.	$\frac{7}{8}$
4.	$\frac{72}{168}$	R.	$\frac{3}{7}$	14.	$\frac{504}{1224}$	R.	$\frac{7}{17}$
5.	$\frac{96}{264}$	R.	$\frac{4}{11}$	15.	$\frac{543}{1991}$	R.	$\frac{3}{11}$
6.	$\frac{105}{126}$	R.	$\frac{5}{6}$	16.	$\frac{600}{840}$	R.	$\frac{5}{7}$
7.	$\frac{220}{240}$	R.	$\frac{11}{12}$	17.	$\frac{624}{816}$	R.	$\frac{13}{17}$
8.	$\frac{254}{635}$	R.	$\frac{2}{5}$	18.	$\frac{655}{917}$	R.	$\frac{5}{7}$
9.	$\frac{273}{315}$	R.	$\frac{13}{15}$	19.	$\frac{452}{565}$	R.	$\frac{4}{5}$
10.	$\frac{327}{436}$	R.	$\frac{3}{4}$	20.	$\frac{917}{1048}$	R.	$\frac{7}{8}$

215. **Redução de várias frações ao mesmo denominador.** — *Consiste esta questão em converter duas ou mais frações em outras eqüivalentes que tenham o mesmo denominador.* — Consideremos as frações

$$\frac{2}{3}, \; \frac{3}{4} \text{ e } \frac{4}{5}.$$

Multiplicando os termos da primeira fração dada por

4×5, os da segunda por 3×5 e os da terceira por 3×4, encontraremos respectivamente:

$$\frac{2 \times 4 \times 5}{3 \times 4 \times 5}, \frac{3 \times 3 \times 5}{4 \times 3 \times 5}, \frac{4 \times 3 \times 4}{5 \times 3 \times 4}.$$

De acôrdo com a propriedade fundamental, as frações assim obtidas são, respectivamente iguais às frações dadas. — Assim

$$\frac{2 \times 4 \times 5}{3 \times 4 \times 5} = \frac{2}{3}, \frac{3 \times 3 \times 5}{4 \times 3 \times 5} = \frac{3}{4}, \frac{4 \times 3 \times 4}{5 \times 3 \times 4} = \frac{4}{5},$$

ou, efetuando as operações indicadas

$$\frac{40}{60} = \frac{2}{3}, \frac{45}{60} = \frac{3}{4}, \frac{48}{60} = \frac{4}{5}.$$

Ficaram, assim, as frações dadas reduzidas a outras respectivamente eqüivalentes, tendo todas o mesmo denominador.

216. **Regra.** — *Para reduzir duas ou mais frações a outras eqüivalentes de mesmo denominador, basta multiplicar os termos de cada uma delas pelo produto dos denominadores das demais.*

217. **Redução de várias frações ao mínimo denominador comum.** — O denominador comum de duas ou mais frações deve ser, como vimos, múltiplo de todos os denominadores. Assim, duas ou mais frações podem ter uma infinidade de grupos de outras frações eqüivalentes, tendo o mesmo denominador. — Com efeito, dadas as frações

$$\frac{2}{3} \text{ e } \frac{4}{5}$$

podemos obter os grupos:

$$\frac{10}{15} \text{ e } \frac{12}{15}, \frac{20}{30} \text{ e } \frac{24}{30}, \frac{30}{45} \text{ e } \frac{36}{45} \ldots$$

cada um dos quais é composto de duas frações de mesmo denominador, respectivamente eqüivalentes às frações dadas.

Entre todos êsses grupos, encontra-se um dêles, precisamente o primeiro acima considerado, em que o denominador comum é o mínimo múltiplo comum dos denominadores das frações propostas.

Naturalmente, as frações a que nos referimos

$$\frac{2}{3} \text{ e } \frac{4}{5}$$

encontram-se reduzidas à expressão mais simples. Quando, porém, tal não suceder, o trabalho preliminar que devemos ter é o de reduzí-las à expressão mais simples para depois reduzí-las ao mínimo denominador comum.

218. **Regra.** — *Para reduzir duas ou mais frações ao mínimo denominador comum, reduzem-se à expressão mais simples as frações dadas; em seguida, procura-se o m.m.c. dos denominadores; depois, multiplica-se cada um dos numeradores pelo quociente do m.m.c. pelo denominador respectivo, dando-se êsse m.m.c. para denominador comum.* — Exemplos

1.º Reduzir ao mínimo denominador comum as frações

$$\frac{24}{36} \text{ e } \frac{14}{16}.$$

Reduzindo ambas à expressão mais simples, encontraremos

$$\frac{24}{36} = \frac{2}{3} \text{ e } \frac{14}{16} = \frac{7}{8}.$$

Considerando, então as frações

$$\frac{2}{3} \text{ e } \frac{7}{8},$$

obtemos mentalmente o m.m.c. dos denominadores, ou seja

$$\text{m.m.c. } (3 \text{ e } 8) = 24.$$

Aplicando a regra, encontraremos

$$\frac{2 \times 8}{24} \text{ e } \frac{3 \times 7}{24},$$

ou, efetuando as operações indicadas

$$\frac{16}{24} \text{ e } \frac{21}{24}.$$

2.º Reduzir ao mínimo denominador comum as frações

$$\frac{7}{84}, \frac{11}{108} \text{ e } \frac{13}{144}.$$

Encontrando-se as frações dadas já reduzidas à expressão mais simples, procuremos o m.m.c. dos denominadores, segundo a regra conhecida.

$$\begin{array}{r|l} 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 144 & 2 \\ 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} 84 &= 2^2 \times 3 \times 7 \\ 108 &= 2^2 \times 3^3 \\ 144 &= 2^4 \times 3^2 \end{aligned}$$

$$\text{m.m.c. } (84,108,144) = 2^4 \times 3^3 \times 7 = 3024.$$

Aplicando a regra, encontraremos

$$\frac{7 \times 36}{3024} \qquad \frac{11 \times 28}{3024} \qquad \frac{13 \times 21}{3024},$$

ou, efetuando as operações indicadas

$$\frac{252}{3024}, \ \frac{308}{3024} \text{ e } \frac{273}{3024}.$$

Exercícios.

Reduzir ao mínimo denominador comum as frações seguintes:

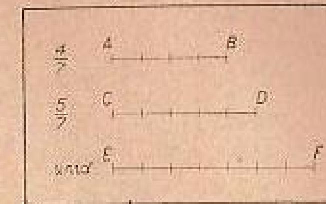
1. $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{9}$ — R. $\frac{27}{36}$ e $\frac{20}{36}$
2. $\frac{3}{8}$ e $\frac{2}{7}$ — R. $\frac{21}{56}$ e $\frac{16}{56}$
3. $\frac{7}{9}$ e $\frac{11}{12}$ — R. $\frac{28}{36}$ e $\frac{33}{36}$
4. $\frac{3}{20}$ e $\frac{4}{15}$ — R. $\frac{9}{60}$ e $\frac{16}{60}$
5. $\frac{5}{12}$, $\frac{6}{15}$ e $\frac{7}{18}$ — R. $\frac{75}{180}$, $\frac{72}{180}$ e $\frac{70}{180}$
6. $\frac{11}{20}$, $\frac{13}{30}$ e $\frac{7}{40}$ — R. $\frac{66}{120}$, $\frac{52}{120}$ e $\frac{21}{120}$
7. $\frac{17}{36}$, $\frac{11}{60}$ e $\frac{13}{72}$ — R. $\frac{170}{360}$, $\frac{66}{360}$ e $\frac{65}{360}$
8. $\frac{21}{62}$, $\frac{10}{93}$ e $\frac{5}{124}$ — R. $\frac{126}{372}$, $\frac{40}{372}$ e $\frac{15}{372}$
9. $\frac{5}{72}$, $\frac{5}{80}$, $\frac{5}{96}$ e $\frac{5}{144}$ — R. $\frac{100}{1440}$, $\frac{90}{1440}$, $\frac{75}{1440}$ e $\frac{50}{1440}$
10. $\frac{1}{120}$, $\frac{1}{150}$, $\frac{1}{180}$ e $\frac{1}{210}$ — R. $\frac{105}{12600}$, $\frac{84}{12600}$, $\frac{70}{12600}$ e $\frac{60}{12600}$

219. **Comparação de frações.** — Consideremos os casos seguintes

1.º *As frações dadas têm o mesmo denominador.*
2.º *As frações dadas têm o mesmo numerador.*

a) Consideremos as frações

$$\frac{4}{7} \text{ e } \frac{5}{7}$$



tendo ambas o mesmo denominador.

Representando pelo segmento EF a unidade tomada para medida dos segmentos AB e CD, verificamos que CD, cuja medida é $\frac{5}{7}$ é maior que AB, cuja medida é $\frac{4}{7}$, por isso que CD contém 5 partes da unidade e AB contém apenas 4, partes essas todas iguais entre si. — Assim, pois

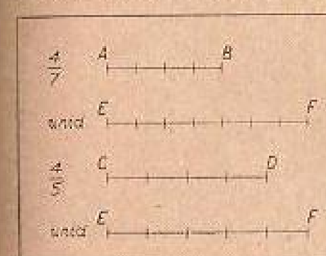
$$\frac{5}{7} > \frac{4}{7}.$$

Quando duas frações têm o mesmo denominador, a maior é a que tem o maior numerador.

b) Consideremos as frações

$$\frac{4}{7} \text{ e } \frac{4}{5},$$

ambas tendo o mesmo numerador.



Representando pelo segmento EF a unidade tomada para a medida dos segmentos AB e CD, verificamos que CD, cuja medida é $\frac{4}{5}$ de EF, é maior que AB, cuja medida é $\frac{4}{7}$ de FF, por isso que ambas contêm 4 partes da unidade, mas as partes contidas por CD são maiores que as contidas por AB. — Assim, pois

$$\frac{4}{5} > \frac{4}{7}.$$

Quando duas frações têm o mesmo numerador, a maior é a que tem o menor denominador.

220. **Observação.** — Quando são dadas duas frações de numeradores e denominadores, respectivamente, desiguais, para compará-las entre si, devemos, salvo casos muito especiais, reduzí-las ao mesmo denominador ou ao mesmo nume-

rador, a-fim-de recairmos em um dos casos fundamentais, acima dados.

Na prática prefere-se sempre reduzir as frações ao mesmo *denominador*. — Exemplos

1.º Comparar as frações

$$\frac{2}{3} \text{ e } \frac{4}{7}.$$

Reduzindo-as ao mesmo denominador, encontraremos

$$\frac{2}{3}=\frac{14}{21} \text{ e } \frac{4}{7}=\frac{12}{21}.$$

Tendo em vista que

$$\frac{14}{21}>\frac{12}{21}$$

resulta que
$$\frac{2}{3}>\frac{4}{7}.$$

2.º Escrever, em ordem decrescente da grandeza, as frações:

$$\frac{4}{9},\ \frac{5}{6},\ \frac{7}{12} \text{ e } \frac{11}{18}.$$

Reduzindo-as ao mesmo denominador, encontraremos

$$\frac{4}{9}=\frac{16}{36},\ \frac{5}{6}=\frac{30}{36},\ \frac{7}{12}=\frac{21}{36} \text{ e } \frac{11}{18}=\frac{22}{36}.$$

Tendo em vista que

$$\frac{30}{36}>\frac{22}{36}>\frac{21}{36}>\frac{16}{36},$$

resulta que
$$\frac{5}{6}>\frac{11}{18}>\frac{7}{12}>\frac{4}{9}.$$

221. **Números mixtos.** — *Damos a denominação número mixto à soma indicada de um número natural com uma fração menor que a unidade.* — Assim, dizemos que

$$2+\frac{3}{5} \text{ e } 7+\frac{2}{3},$$

são números mixtos.

Para simplificar a representação dos números mixtos, convencionou-se dispensar o emprêgo do sinal + entre a parte inteira e a fracionária. — Assim, escrevemos simplesmente

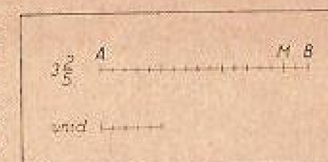
$$2\frac{3}{5} \text{ e } 7\frac{2}{3}$$

no lugar de
$$2+\frac{3}{5} \text{ e } 7+\frac{2}{3}.$$

222. **Transformação de um número mixto em fração imprópria.** — Consideremos o número mixto

$$3\frac{2}{5}$$

que exprime a medida do segmento AB, quando se toma o segmento CD para unidade, como se vê na figura ao lado.



Se dividirmos cada um dos segmentos iguais à unidade em 5 partes iguais verificaremos que o segmento AM, que corresponde à parte inteira do número mixto (3) ficará dividido em 3×5 ou 15 quintos da unidade. O segmento todo AB conterá, em conseqüência, $(5\times3+2)$ ou 17 quintos da unidade. — Resulta, então, que

$$3\frac{2}{5}=\frac{3\times5+2}{5}=\frac{17}{5}.$$

Regra: *Para reduzir um número mixto a fração imprópria, dá-se para numerador o produto do inteiro pelo denominador da fração de número mixto, mais o seu numerador, e para denominador o próprio denominador dessa fração.* — Exemplos

$$4\frac{5}{6}=\frac{4\times6+5}{6}=\frac{24+5}{6}=\frac{29}{6},$$

$$5\frac{9}{10}=\frac{5\times10+9}{10}=\frac{50+9}{10}=\frac{59}{10}.$$

Transformação de uma fração imprópria em número mixto. — Consideremos a fração imprópria

$$\frac{17}{5}.$$

Considerando, ainda, a figura acima dada, verificamos que o segmento AB, cuja medida é $\frac{17}{5}$, conterá 3 unidades mais dois quintos da unidade, uma vez que cada unidade contém 5 quintos. — Resulta, então, que

$$\frac{17}{5} = 17 : 5 = 3 + \frac{2}{5} = 3\frac{2}{5}.$$

Regra: *Para reduzir uma fração imprópria a um número mixto, efetua-se a divisão do numerador pelo denominador, tomando-se o quociente inteiro dessa divisão para parte inteira do número mixto, o resto para numerador da fração própria que o acompanha e o divisor para denominador dessa fração.* — Exemplos

$$\frac{17}{7} = 17 : 7 = 2 + \frac{3}{7} = 2\frac{3}{7},$$

$$\frac{43}{8} = 43 : 8 = 5 + \frac{3}{8} = 5\frac{3}{8}.$$

223. Exercícios.

Transformar em números mixtos as frações impróprias seguintes:

1. $3\frac{1}{3}$	R. $\frac{10}{3}$	6. $12\frac{11}{12}$	R. $\frac{155}{12}$
2. $4\frac{2}{5}$	R. $\frac{22}{5}$	7. $15\frac{1}{13}$	R. $\frac{196}{13}$
3. $7\frac{3}{8}$	R. $\frac{59}{8}$	8. $20\frac{1}{25}$	R. $\frac{501}{25}$
4. $10\frac{1}{9}$	R. $\frac{91}{9}$	9. $35\frac{11}{23}$	R. $\frac{816}{23}$
5. $11\frac{4}{7}$	R. $\frac{81}{7}$	10. $49\frac{7}{15}$	R. $\frac{742}{15}$

Transformar em fração imprópria os números mixtos seguintes:

11. $\frac{29}{7}$	R. $4\frac{1}{7}$	16. $\frac{323}{20}$	R. $16\frac{3}{20}$
12. $\frac{23}{3}$	R. $7\frac{2}{3}$	17. $\frac{233}{12}$	R. $19\frac{5}{12}$
13. $\frac{65}{7}$	R. $9\frac{2}{7}$	18. $\frac{129}{4}$	R. $32\frac{1}{4}$
14. $\frac{101}{9}$	R. $11\frac{2}{9}$	19. $\frac{4331}{12}$	R. $360\frac{11}{12}$
15. $\frac{31}{2}$	R. $15\frac{1}{2}$	20. $\frac{1663}{4}$	R. $415\frac{3}{4}$

224. Divisões inexatas. — Quando estudámos a divisão de números inteiros, no capítulo V, dissemos que, para indicar a divisão entre dois números, além dos sinais relativos àquela operação, podíamos adotar a forma seguinte:

$$\frac{15}{5} = 3.$$

Dissemos, ainda, que a divisão exata é a operação inversa da multiplicação, o que nos permite escrever no exemplo dado acima

$$15 = 5 \times 3.$$

Cuidemos, agora, das divisões inexatas e vejamos que, por exemplo, a operação

$$7:3 \quad \text{ou} \quad \frac{7}{3},$$

que é irrealizável quando se trata de grandezas descontínuas, é possível de ser interpretada quando diz respeito a uma grandeza contínua.

Com efeito, tratando-se de repartir 7 metros de uma certa fazenda entre três pessoas, verifica-se fàcilmente que a operação

$$\frac{7}{3}$$

é possível de ser interpretada.

Dizemos, por êsse motivo, que *uma fração pode ser considerada como um quociente indicado, em que o numerador é o dividendo e o denominador é o divisor.*

Ainda mais, de acôrdo com o que já estudámos até agora, verificamos também que mesmo a divisão inexata pode ser considerada como operação inversa da multiplicação. — Assim, dada a fração

$$\frac{7}{3},$$

podemos dizer que ela representa o quociente da divisão

$$7:3,$$

uma vez que, multiplicando-se o divisor (3) por êsse quociente $\left(\frac{7}{3}\right)$, obtém-se o dividendo (7), ou seja

$$\frac{7}{3} \times 3 = 7.$$

Completemos, agora, as noções que demos, ao estudar a divisão sôbre o quociente das divisões exatas e inexatas.

Denominamos quociente exato o que provém de uma divisão exata. — Exemplo

$$\begin{array}{l|l} 40 & 8 \\ \hline & 5 \end{array} \text{ (quociente exato)}$$

Denominamos quociente inteiro o quociente que provém de uma divisão inexata. — Exemplo

$$\begin{array}{l|l} 42 & 8 \\ \hline 2 & 5 \end{array} \text{ (quociente inteiro)}$$

Finalmente, denominamos quociente completo ao quociente inteiro de uma divisão inexata, somado a uma fração, cujo numerador é o resto da divisão e cujo denominador é o respectivo divisor. — Exemplo

$$\begin{array}{l|l} 42 & 8 \\ \hline 2 & 5\frac{2}{8} \end{array} \text{ (quociente completo).}$$

OPERAÇÕES

225. **Adição.** — Consideremos os casos seguintes:

1.º *adição de frações de mesmo denominador.*
2.º *adição de frações de denominadores diferentes.*

226. **1.º Caso.** — Consideremos a soma indicada

$$\frac{5}{9}+\frac{2}{9}+\frac{1}{9},$$

em que as frações tôdas têm o mesmo denominador.

Indicando o denominador comum (9) que cada uma das frações propostas representa um certo número de *partes iguais* da unidade (nonos), segue-se evidentemente que, para obter-se o total dessas partes, basta somar os numeradores. — Resulta, assim, que

$$\frac{5}{9}+\frac{2}{9}+\frac{1}{9}=\frac{8}{9}.$$

Regra: *Para somar frações que têm o mesmo denominador, somam-se os numeradores, escrevendo-se o total obtido sôbre o mesmo denominador comum das frações dadas.* —

Exemplos

$$\frac{2}{7}+\frac{3}{7}+\frac{4}{7}=1\frac{2}{7},$$

$$\frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=\frac{6}{6}=1.$$

227. **2.º Caso.** — Consideremos a soma indicada

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{5},$$

em que as frações dadas têm denominadores diferentes.

Indicando êsses denominadores (3 e 5) que cada uma das frações propostas representa *partes desiguais* da unidade, segue-se evidentemente que não poderemos somá-las, sem prèviamente reduzi-las ao mesmo denominador.

Reduzindo-as ao mínimo denominador comum, encontraremos

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{10}{15}+\frac{12}{15}=\frac{10+12}{15}=\frac{22}{15}=1\frac{7}{15}.$$

228. **Regra.** — *Para somar frações que têm denominadores diferentes, reduzem-se prèviamente as frações dadas ao mesmo denominador, depois somam-se os numeradores das frações resultantes, escrevendo-se o total obtido sôbre o denominador comum das frações consideradas.* — Exemplos

$$\frac{4}{5}+\frac{5}{12}+\frac{7}{15}=\frac{48}{60}+\frac{25}{60}+\frac{28}{60}=\frac{101}{60}=1\frac{41}{60},$$

$$\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{21}=\frac{6}{42}+\frac{3}{42}+\frac{2}{42}=\frac{11}{42}.$$

229. **Adição de números mixtos.** — Consideremos a adição indicada

$$4\frac{2}{5}+3\frac{3}{4}.$$

Para efetuá-la, poderíamos transformar os números mixtos dados em fração e depois aplicar a regra citada acima.

Entretanto, para maior simplicidade do cálculo, prefere-se proceder da maneira seguinte: somam-se primeiramente as frações, extraindo-se, se houver lugar, os inteiros da soma obtida; somam-se, depois, as partes inteiras, juntando-se ao total obtido os inteiros encontrados na soma das frações. —

Encontraremos, assim

$$4\frac{2}{5}+3\frac{3}{4}=4+3+\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{4}\right)=4+3+\left(\frac{8}{20}+\frac{15}{20}\right)=$$

$$=4+3+\frac{23}{20}=(4+3+1)+\frac{3}{20}=8\frac{3}{20}.$$

Consideremos, ainda, os exemplos seguintes:

$$2\frac{1}{3}+\frac{4}{5}+3+\frac{5}{6}=2+3+\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}\right)=2+3+$$

$$+\left(\frac{10}{30}+\frac{24}{30}+\frac{25}{30}\right)=2+3+\frac{59}{30}=(2+3+1)+\frac{29}{30}=6\frac{29}{30},$$

$$5\frac{1}{4}+3\frac{1}{6}+2\frac{1}{8}=5+3+2+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}\right)=$$

$$=5+3+2+\left(\frac{6}{24}+\frac{4}{24}+\frac{3}{24}\right)=(5+3+2)+\frac{13}{24}=10\frac{13}{24}.$$

230. **Exercícios.**

Efetuar as operações seguintes:

1. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ R. $\frac{5}{6}$
2. $\frac{3}{5}+\frac{4}{7}$ R. $1\frac{6}{35}$
3. $\frac{5}{9}+\frac{7}{11}$ R. $1\frac{19}{99}$
4. $\frac{3}{5}+\frac{7}{8}+\frac{2}{3}$ R. $2\frac{17}{120}$
5. $\frac{5}{12}+\frac{7}{15}+\frac{3}{20}$ R. $1\frac{1}{30}$
6. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ R. $1\frac{17}{60}$
7. $\frac{1}{2}+\frac{5}{9}+\frac{4}{5}+\frac{2}{3}$ R. $2\frac{47}{90}$
8. $\frac{5}{6}+\frac{5}{12}+\frac{5}{18}+\frac{5}{24}$ R. $1\frac{53}{72}$
9. $\frac{7}{8}+\frac{11}{12}+\frac{15}{16}+\frac{19}{20}$ R. $3\frac{163}{240}$
10. $\frac{1}{18}+\frac{5}{24}+\frac{7}{36}+\frac{11}{42}$ R. $\frac{121}{168}$
11. $\frac{5}{7}+\frac{9}{14}+\frac{11}{21}+\frac{13}{35}$ R. $2\frac{53}{210}$
12. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$ R. $1\frac{9}{20}$

13. $\frac{5}{9}+\frac{2}{7}+\frac{5}{6}+\frac{3}{8}+\frac{2}{3}$ R. $2\frac{361}{504}$
14. $\frac{11}{13}+\frac{5}{12}+\frac{1}{6}+\frac{3}{26}+\frac{1}{3}$ R. $1\frac{137}{156}$
15. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$ R. $1\frac{83}{140}$
16. $2\frac{1}{3}+3\frac{1}{4}+5\frac{1}{6}$ R. $10\frac{3}{4}$
17. $3\frac{1}{7}+4\frac{5}{14}+2\frac{8}{21}$ R. $9\frac{37}{42}$
18. $5+2\frac{5}{12}+3\frac{1}{6}+\frac{2}{9}$ R. $10\frac{29}{36}$
19. $6+\frac{11}{15}+3\frac{2}{5}+\frac{7}{12}+\frac{5}{9}$ R. $11\frac{49}{180}$
20. $12+3\frac{3}{20}+1\frac{7}{30}+\frac{4}{15}+11$ R. $27\frac{13}{20}$

231. **Subtração.** — Consideremos os casos seguintes:

1.º *Subtração de frações de mesmo denominador.*

2.º *Subtração de frações de denominadores diferentes.*

232. **1.º Caso.** — Consideremos a diferença indicada

$$\frac{5}{9}-\frac{2}{9}$$

em que as frações dadas têm o mesmo denominador.

Indicando o denominador comum (9) que cada uma das frações propostas representa um certo número de *partes iguais* da unidade (nonos), segue-se evidentemente que, para obter-se a diferença dessas partes, basta subtrair os numeradores. — Resulta, assim que

$$\frac{5}{9}-\frac{2}{9}=\frac{5-2}{9}=\frac{3}{9}.$$

Regra: *Para subtrair frações que têm o mesmo denominador, subtraem-se os numeradores, escrevendo-se a diferença obtida sôbre o mesmo denominador comum das frações dadas.* — Exemplos

$$\frac{5}{6}-\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3},$$

$$\frac{7}{8}-\frac{5}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}.$$

233. **2.º Caso.** — Consideremos a diferença indicada

$$\frac{7}{8}-\frac{5}{6},$$

em que as frações dadas têm denominadores diferentes.

Indicando êsses denominadores (8 e 6) que cada uma das frações propostas representa *partes desiguais* da unidade, segue-se evidentemente que não poderemos subtraí-las, sem prèviamente reduzi-las ao mesmo denominador.

Reduzindo-as ao mínimo denominador comum, encontraremos

$$\frac{7}{8}-\frac{5}{6}=\frac{21}{24}-\frac{20}{24}=\frac{21-20}{24}=\frac{1}{24}.$$

Regra: *Para subtrair frações que têm denominadores diferentes, reduzem-se prèviamente as frações dadas ao mesmo denominador, depois subtraem-se os numeradores das frações resultantes, escrevendo-se a diferença obtida sôbre o denominador comum das frações consideradas.* — Exemplos

$$\frac{7}{15}-\frac{5}{12}=\frac{28}{60}-\frac{25}{60}=\frac{3}{60}=\frac{1}{20}.$$

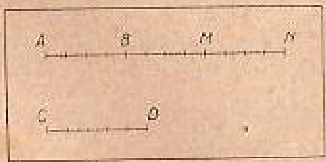
$$\frac{1}{14}-\frac{1}{21}=\frac{3}{42}-\frac{2}{42}=\frac{1}{42}.$$

234. **Multiplicação.** — Consideremos os casos seguintes:

1.º *Multiplicação de uma fração por um número inteiro.*
2.º *Multiplicação de um número inteiro por uma fração.*
3.º *Multiplicação de uma fração por outra fração.*

235. **1.º Caso.** — Consideremos o produto indicado

$$\frac{4}{5}\times 3,$$



em que a fração $\frac{4}{5}$ representa a medida do segmento AB quando se toma CD para unidade. De acôrdo com a definição dada para a multiplicação de inteiros (n.º 68), o produto do segmento AB por 3 é igual à soma de três segmentos iguais a AB, ou seja

$$AB+AB+AB=AN.$$

Representando o segmento AB pela sua medida, teremos

$$\frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{4}{15}=AN.$$

Somando as frações acima, encontraremos

$$\frac{4\times 3}{15}=AN,$$

ou

$$\frac{12}{15}=AN.$$

Das considerações acima, resulta, portanto, que

$$\frac{4}{5}\times 3=\frac{4\times 3}{5}=\frac{12}{5}.$$

236. **Regra.** — *Para multiplicar uma fração por um número inteiro, multiplica-se o numerador pelo inteiro e dá-se a êsse produto o denominador da fração.* — Exemplos

$$\frac{7}{8}\times 5=\frac{35}{8}=4\,\frac{3}{8}.$$

$$\frac{5}{11}\times 7=\frac{35}{11}=3\,\frac{2}{11}.$$

237. **Simplificação.** — Consideremos o produto indicado

$$\frac{4}{15}\times 3,$$

em que o denominador da fração proposta *é divisível exatamente* pelo multiplicador.

Efetuando o produto acima pela regra dada (n.º 236), encontraremos

$$\frac{4}{15}\times 3=\frac{4\times 3}{15}=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}.$$

Notemos, porém, que a fração

$$\frac{4\times 3}{15}$$

é suscetível de simplificação, uma vez que os seus termos contêm o fator comum 3. Simplificando-a, teremos

$$\frac{4\times 3}{15}=\frac{4}{15:3}=\frac{4}{5},$$

donde resulta

$$\frac{4}{15}\times 3=\frac{4\times 3}{15}=\frac{4}{15:3}=\frac{4}{5}.$$

Do exposto, segue-se que, quando o denominador é exatamente divisível pelo multiplicador, o produto é uma fração cujo numerador é o mesmo da fração proposta, e cujo denominador é o quociente do denominador dessa fração pelo multiplicador. — Exemplos

$$\frac{7}{8}\times 4=\frac{7}{8:4}=\frac{7}{2}=3\frac{1}{2}.$$

$$\frac{11}{12}\times 6=\frac{11}{12:6}=\frac{11}{2}=\frac{1}{2}.$$

238. **Observação.** — Dado o produto

$$\frac{4}{5}\times 3=\frac{4\times 3}{5},$$

dizemos que a fração

$$\frac{4}{5}$$

foi multiplicada por 3, ou que a fração

$$\frac{4\times 3}{5}$$

é 3 vezes maior que a fração

$$\frac{4}{5}.$$

Por outro lado, dado o produto

$$\frac{4}{15}\times 3=\frac{4}{15:3},$$

dizemos que a fração

$$\frac{4}{15}$$

foi multiplicada por 3, ou que a fração

$$\frac{4}{15:3}$$

é 3 vezes maior que a fração

$$\frac{4}{15}.$$

Resumindo, dizemos que *quando se multiplica o numerador de uma fração por certo número, a fração se torna êsse número de vezes maior, e que quando se divide* (a divisão exata sendo possível) *o denominador de uma fração por certo número, a fração se torna êsse número de vezes maior.*

Inversamente, verifica-se também que *quando se divide o numerador de uma fração por certo número, a fração se torna êsse número de vezes menor, e que, quando se multiplica o denominador de uma fração por certo número, a fração se torna êsse número de vezes menor.* — Assim, a fração

$$\frac{12:3}{5}$$

é 3 vezes menor que a fração

$$\frac{12}{5},$$

e a fração

$$\frac{4}{5\times 3}$$

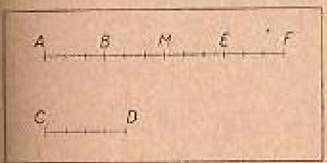
é 3 vezes menor que a fração

$$\frac{4}{5}.$$

239. **2.º Caso.** — Consideremos o produto indicado

$$2\times\frac{3}{4},$$

em que a fração $\frac{3}{4}$ representa a medida do segmento AB, quando se toma CD para unidade.



Como vimos no caso anterior, denomináramos produto do segmento AB por 4 o segmento AF, correspondente à soma de 4 segmentos iguais a AB. Por analogia, dizemos que o produto do segmento AB por $\frac{3}{4}$ é o segmento AM, cuja medida é $\frac{6}{4}$ quando se toma CD para unidade. — Resulta, assim, que

$$2\times\frac{3}{4}=\frac{2\times 3}{4}=\frac{6}{4}.$$

240. **Regra.** — *Para multiplicar um número inteiro por uma fração, multiplica-se o inteiro pelo numerador e dá-se a êsse produto o denominador da fração.* — Exemplos

$$5\times\frac{3}{4}=\frac{15}{4}=3\,\frac{3}{4},$$

$$8\times\frac{11}{13}=\frac{88}{13}=6\,\frac{10}{13}.$$

241. **Simplificação**. — Notemos que o presente caso comporta também, quando é possível, a simplificação dada no caso anterior. — Exemplos

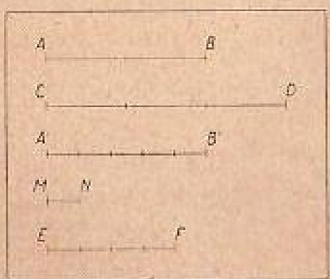
$$4\times\frac{7}{8}=\frac{7}{8:4}=\frac{7}{2}=3\,\frac{1}{2},$$

$$5\times\frac{2}{15}=\frac{2}{15:5}=\frac{2}{3}.$$

242. **3. Caso.** — Consideremos o produto indicado

$$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5},$$

em que a fração $\frac{2}{3}$ representa a medida do segmento AB, quando se toma CD para unidade.



Dividamos o segmento A'B', que é igual a AB, em 5 partes iguais e representemos pelo segmento MN uma dessas partes. Em seguida, tracemos o segmento EF contendo 4 vezes o segmento MN. — Teremos, assim

$$AB=\frac{2}{3}\text{ de CD},$$

$$CD=1,$$

$$A'B'=\frac{2}{3}\text{ de CD divididos em 5 partes iguais.}$$

$$MN=\frac{1}{5}\text{ de }\frac{2}{3}\text{ de CD},$$

$$EF=\frac{4}{5}\text{ de }\frac{2}{3}\text{ de CD}.$$

Dizemos, então, que o produto

$$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}$$

é uma fração que mede um segmento igual a $\frac{4}{5}$ do segmento medido por $\frac{2}{3}$.

Notemos que o segmento MN medindo $\frac{1}{5}$ de AB, deve ser representado por uma fração 5 *vezes menor* (n.º 237) que a fração que mede o segmento AB, ou seja

$$MN=\frac{2}{3\times5},$$

e que o segmento EF, medindo 4 vezes MN, deve ser representado por uma fração *4 vezes maior* (n.º 237) que a fração $\frac{2}{3\times5}$, que mede o segmento MN, ou seja

$$EF=\frac{2\times4}{3\times5}.$$

Teremos, então

$$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{2\times4}{3\times5}=\frac{8}{15}.$$

243. **Regra.** — *Para multiplicar duas frações entre si forma-se uma fração, cujo numerador é o produto dos numeradores das frações dadas e cujo denominador é o produto dos denominadores das mesmas frações.* — Exemplos

$$\frac{4}{5}\times\frac{5}{6}=\frac{20}{30}=\frac{2}{3},$$

$$\frac{7}{8}\times\frac{9}{10}=\frac{63}{80}.$$

244. **Multiplicação de números mixtos.** — Consideremos o produto indicado

$$2\,\frac{1}{3}\times4\,\frac{2}{5}.$$

Para efetuá-lo, devemos transformar os números mixtos em frações impróprias e aplicar a regra dada acima. — Encontraremos, assim

$$2\,\frac{1}{3}\times4\,\frac{2}{5}=\frac{7}{3}\times\frac{22}{5}=\frac{154}{15}=10\,\frac{4}{15}.$$

Consideremos, ainda, os exemplos seguintes

$$5\frac{1}{5}\times 6\frac{1}{6}=\frac{26}{5}\times\frac{37}{6}=\frac{962}{30}=32\frac{2}{30}=32\frac{1}{15},$$

$$4\frac{7}{8}\times 7\frac{5}{7}=\frac{39}{8}\times\frac{54}{7}=\frac{2106}{56}=37\frac{34}{56}=37\frac{17}{28}.$$

245. **Produto de várias frações.** — Consideremos o produto indicado

$$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}.$$

Como no caso da multiplicação de vários números inteiros, denominamos produto de várias frações ao resultado que se obtém multiplicando a primeira pela segunda, o produto obtido pela terceira, etc.

Assim, a expressão

$$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}$$

indica que se devem efetuar, entre as frações acima, as operações seguintes:

$$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{2\times 4}{3\times 5},$$

$$\frac{2\times 4}{3\times 5}\times\frac{6}{7}=\frac{2\times 4\times 6}{3\times 5\times 7}.$$

246. **Regra.** — *Para multiplicar várias frações, forma-se uma fração tendo para numerador o produto dos numeradores de todas as frações dadas e para denominador o produto dos denominadores de todas as frações dadas.* — Exemplos

$$\frac{7}{8}\times\frac{5}{9}\times\frac{3}{5}=\frac{105}{360}=\frac{7}{24},$$

$$1\frac{2}{3}\times 3\frac{1}{4}\times 4\frac{1}{5}=\frac{5}{3}\times\frac{13}{4}\times\frac{21}{5}=\frac{1365}{60}=22\frac{45}{60}=22\frac{3}{4}.$$

247. **Frações de frações.** — Quando tratámos da multiplicação de frações (n.º 241) dissemos que o produto indicado

$$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}$$

significa uma fração de outra fração, ou seja

$$\frac{4}{5} \text{ de } \frac{2}{3}.$$

Daí provém a denominação constantemente empregada no cálculo: *fração de fração.*

248. **Exercícios.**

Efetuar as operações seguintes:

1. $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$ R. $\frac{1}{6}$
2. $\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}$ R. $\frac{4}{15}$
3. $\frac{3}{5}\times\frac{5}{7}$ R. $\frac{3}{7}$
4. $\frac{3}{7}\times\frac{5}{11}$ R. $\frac{15}{77}$
5. $\frac{2}{3}\times\frac{5}{13}$ R. $\frac{10}{39}$
6. $3\frac{1}{7}\times\frac{7}{8}$ R. $\frac{11}{4}$
7. $2\frac{16}{39}\times 6\frac{1}{2}$ R. $15\frac{2}{3}$
8. $5\frac{2}{7}\times 5\frac{1}{3}$ R. $28\frac{4}{21}$
9. $7\frac{1}{3}\times 6\frac{4}{5}$ R. $49\frac{13}{15}$
10. $5\frac{7}{8}\times 6\frac{1}{9}$ R. $35\frac{65}{72}$
11. $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}$ R. $\frac{1}{24}$
12. $\frac{2}{3}\times\frac{5}{6}\times\frac{6}{7}$ R. $\frac{10}{21}$
13. $\frac{7}{8}\times\frac{4}{11}\times\frac{11}{14}$ R. $\frac{1}{4}$
14. $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}$ R. $\frac{1}{120}$
15. $\frac{8}{9}\times\frac{7}{8}\times\frac{5}{7}\times\frac{3}{5}$ R. $\frac{1}{3}$
16. $\frac{4}{7}\times\frac{3}{5}\times 3\frac{1}{7}$ R. $1\frac{19}{245}$
17. $2\frac{2}{5}\times 2\frac{1}{9}\times\frac{1}{3}$ R. $1\frac{31}{45}$
18. $3\frac{1}{2}\times 2\frac{1}{4}\times 1\frac{5}{6}$ R. $14\frac{7}{16}$
19. $4\frac{4}{5}\times 3\frac{3}{4}\times 2\frac{5}{6}\times 1\frac{1}{3}$ R. 68
20. $5\frac{7}{8}\times 7\frac{1}{7}\times 4\frac{9}{10}\times 3\frac{5}{9}$ R. $731\frac{1}{9}$

249. **Elevação à potência.** — Consideremos a potência indicada

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3.$$

A potência de um número — inteiro ou fracionário — sendo um produto de vários fatores iguais a êsse número e indicando o expoente o número dêsses fatores, segue-se que

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{1} = \frac{3^3}{4^3}.$$

250. **Regra.** — *Para elevar uma fração a uma potência qualquer elevam-se os seus termos a essa potência.* — Exemplos

$$\left(\frac{7}{8}\right)^4 = \frac{7^4}{8^4},$$

$$\left(\frac{1}{9}\right)^5 = \frac{1^5}{9^5} = \frac{1}{9^5}.$$

251. **Divisão.** — Recordemos que, ao tratar da ampliação do conceito da divisão no presente capítulo (n.º 224), verificámos que a divisão inexata também pode ser considerada como operação inversa à multiplicação.

252. **Caso geral.** — Consideremos o quociente indicado

$$\frac{4}{5} : \frac{2}{3}.$$

Efetuando a divisão, deveremos encontrar uma fração, cujo produto por $\frac{2}{3}$ seja $\frac{4}{5}$.

Dizemos que o quociente procurado se obtém da maneira seguinte

$$\frac{4}{5} : \frac{2}{3} = \frac{4}{5}\times\frac{3}{2} = \frac{4\times3}{5\times2},$$

uma vez que

$$\frac{2}{3}\times\frac{4\times3}{5\times2} = \frac{4}{5},$$

isto é, o produto do divisor $\left(\frac{2}{3}\right)$ pelo quociente $\left(\frac{4\times3}{5\times2}\right)$ é igual ao dividendo $\left(\frac{4}{5}\right)$.

253. **Regra.** — *Para dividir uma fração por outra, multiplica-se a primeira pela segunda invertida.* — Exemplos

$$\frac{7}{8} : \frac{5}{6} = \frac{7}{8}\times\frac{6}{5} = \frac{42}{40} = 1\,\frac{2}{40} = 1\,\frac{1}{20};$$

$$\frac{4}{7} : \frac{3}{8} = \frac{4}{7}\times\frac{8}{3} = \frac{32}{21} = 1\,\frac{11}{21}.$$

254. **Casos particulares.** — Examinemos, a seguir, os casos particulares que se podem apresentar.

1.º *Divisão de um número inteiro por uma fração.* — Consideremos o quociente indicado

$$8 : \frac{3}{7}.$$

Dando ao dividendo o denominador 1 e aplicando a regra acima, encontraremos

$$\frac{8}{1} : \frac{3}{7} = \frac{8}{1}\times\frac{7}{3} = \frac{56}{3} = 18\,\frac{2}{3}.$$

2.º *Divisão de uma fração por um número inteiro.* — Consideremos o quociente indicado

$$\frac{4}{5} : 7.$$

Dando ao divisor o denominador 1 e aplicando a regra acima, encontraremos

$$\frac{4}{5} : \frac{7}{1} = \frac{4}{5}\times\frac{1}{7} = \frac{4}{35}.$$

255. **Divisão de números mixtos.** — Consideremos o quociente indicado

$$3\,\frac{1}{4} : 2\,\frac{5}{7}.$$

Reduzindo os números mixtos a frações impróprias e aplicando a regra da divisão de frações, encontraremos

$$3\,\frac{1}{4} : 2\,\frac{5}{7} = \frac{13}{4} : \frac{19}{7} = \frac{13}{4}\times\frac{7}{19} = \frac{91}{76} = 1\,\frac{15}{76}.$$

Consideremos, ainda, os exemplos seguintes:

$$1\,\frac{1}{2} : 1\,\frac{4}{5} = \frac{3}{2} : \frac{9}{5} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6},$$

$$7\,\frac{2}{9} : 1\,\frac{2}{3} = \frac{65}{9} : \frac{5}{3} = \frac{195}{45} = 4\,\frac{15}{45} = 4\,\frac{1}{3}.$$

256. Exercícios.

Efetuar as operações seguintes:

1.	$\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$	R. $1\frac{1}{2}$
2.	$\frac{2}{3} : \frac{3}{5}$	R. $1\frac{1}{9}$
3.	$\frac{5}{7} : \frac{2}{9}$	R. $3\frac{3}{14}$
4.	$\frac{5}{9} : \frac{11}{12}$	R. $\frac{20}{33}$
5.	$\frac{8}{11} : \frac{4}{7}$	R. $1\frac{3}{11}$
6.	$\frac{3}{7} : 5$	R. $\frac{3}{35}$
7.	$\frac{4}{37} : 6$	R. $\frac{2}{111}$
8.	$5 : \frac{1}{2}$	R. 10
9.	$17 : \frac{3}{11}$	R. $62\frac{1}{3}$
10.	$3\frac{3}{5} : 6$	R. $\frac{3}{5}$
11.	$3\frac{1}{9} : 7$	R. $\frac{4}{9}$
12.	$10 : 2\frac{4}{7}$	R. $3\frac{8}{9}$
13.	$15 : 3\frac{1}{3}$	R. $4\frac{1}{2}$
14.	$19\frac{1}{2} : \frac{2}{3}$	R. $29\frac{1}{4}$
15.	$5 : \frac{3}{13}$	R. $21\frac{2}{3}$
16.	$2\frac{1}{2} : 1\frac{2}{7}$	R. $1\frac{17}{18}$
17.	$4\frac{1}{5} : 3\frac{1}{3}$	R. $1\frac{13}{50}$
18.	$2\frac{7}{9} : 3\frac{9}{14}$	R. $\frac{350}{459}$
19.	$17\frac{2}{5} : 15\frac{1}{3}$	R. $1\frac{31}{230}$
20.	$37\frac{1}{3} : 5\frac{1}{11}$	R. $7\frac{1}{3}$

257. Cálculo de expressões fracionárias. — Calculemos o valor de cada uma das expressões seguintes:

$$\frac{3\frac{2}{5}}{4\frac{1}{15}} = \frac{\frac{17}{5}}{\frac{61}{15}} = \frac{17}{5} : \frac{61}{15} = \frac{17 \times 15}{5 \times 61} = \frac{17 \times 3}{61} = \frac{51}{61}.$$

$$\frac{3\frac{1}{2} + 4\frac{2}{3}}{5\frac{1}{6} - 2\frac{1}{2}} = \frac{\frac{7}{2} + \frac{14}{3}}{\frac{31}{6} - \frac{5}{2}} = \frac{\frac{21}{6} + \frac{28}{6}}{\frac{31}{6} - \frac{15}{6}} = \frac{\frac{49}{6}}{\frac{16}{6}} = \frac{49}{6} : \frac{16}{6} =$$

$$= \frac{49 \times 6}{6 \times 16} = \frac{49}{16} = 3\frac{1}{16}.$$

$$\frac{2\frac{2}{3}}{5} \times \frac{3\frac{1}{2}}{4} = \frac{\frac{8}{3}}{5} \times \frac{\frac{7}{2}}{4} = \frac{8}{3} : \frac{5}{1} \times \frac{7}{2} : \frac{4}{1} = \frac{8}{3 \times 5} \times \frac{7}{2 \times 4} =$$

$$= \frac{8 \times 7}{3 \times 5 \times 2 \times 4} = \frac{7}{3 \times 5} = \frac{7}{15}.$$

$$\frac{4\frac{1}{3} - 3\frac{4}{9}}{3\frac{1}{2} + 2\frac{1}{3}} \times \frac{5 + \frac{5}{6}}{2 \times \frac{7}{9}} = \frac{\frac{13}{3} - \frac{31}{9}}{\frac{7}{2} + \frac{7}{3}} \times \frac{\frac{35}{6}}{\frac{14}{9}} = \frac{\frac{39}{9} - \frac{31}{9}}{\frac{21}{6} + \frac{14}{6}} \times \frac{\frac{35}{6}}{\frac{14}{9}} =$$

$$\frac{\frac{8}{9}}{\frac{35}{6}} \times \frac{\frac{35}{6}}{\frac{14}{9}} = \frac{8 \times 6}{9 \times 35} \times \frac{35 \times 9}{6 \times 14} = \frac{8 \times 6 \times 35 \times 9}{9 \times 35 \times 6 \times 14} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}.$$

258. Exercícios.

Calcular o valor das expressões seguintes:

1.	$\dfrac{3 + \frac{1}{2}}{2 - \frac{1}{4}}$	R. 2.
2.	$\dfrac{2\frac{3}{4} - 1\frac{2}{5}}{3\frac{1}{2} + \frac{1}{5}}$	R. $\frac{27}{74}$

3. $\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}}{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{1}{6}}$ R. $\dfrac{5}{19}$

4. $\dfrac{1\frac{2}{3}+3\frac{1}{4}\times 5}{5\frac{1}{6}-3\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}$ R. $4\dfrac{23}{48}$

5. $\dfrac{\frac{5}{21}-\frac{1}{15}+\frac{29}{35}}{\frac{11}{12}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}}$ R. 2

6. $\dfrac{\frac{3}{4}-\frac{7}{20}+\frac{1}{15}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{15}}$ R. 1

7. $\dfrac{\frac{1}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{5}{6}}{\frac{2}{3}\times\frac{7}{8}\times\frac{1}{7}}$ R. $2\dfrac{2}{3}$

8. $\dfrac{\frac{7}{32}\times 4}{\frac{7}{8}\times 3}+\dfrac{\frac{3}{4}\times 8}{\frac{3}{5}\times 2}$ R $5\dfrac{1}{3}$

9. $\dfrac{4\frac{8}{9}\times 3\frac{3}{5}}{5\frac{5}{7}\times 1\frac{1}{6}}-\dfrac{1\frac{2}{3}\times 2\frac{1}{4}}{4\frac{4}{7}\times 4\frac{3}{8}}$ R. $2\dfrac{181}{400}$

10. $\dfrac{1\frac{5}{7}\times 2\frac{1}{3}}{2\frac{1}{2}+4\frac{1}{6}}\times\dfrac{3\frac{3}{8}+4\frac{1}{2}}{1\frac{3}{4}\times 3\frac{1}{3}}$ R. $\dfrac{81}{100}$

259. Resolução dos problemas.

1. — *Uma bomba pode esgotar a água de uma mina em 6 dias, outra em 8 dias e uma terceira em 12 dias. Correndo juntas, que fração do líquido escoará pelas três em 1 dia?*

A primeira em um dia escoará . . . . $\dfrac{1}{6}$

A segunda em um dia escoará . . . . $\dfrac{1}{8}$

A terceira em um dia escoará . . . . $\dfrac{1}{12}$

As três juntas, em um dia, esgotarão $\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{12}=\dfrac{3}{8}$

2. — *Sabendo que se empregam, na preparação de 100 quilogramos de bronze para estátuas, 70 quilogramos de cobre, 27 de zinco e 3 de estanho, calcular a quantidade com que entra cada um dêsses metais na composição de 1 quilogramo daquela liga.*

Em 100 kg. de bronze, entram de cobre . . . 70 kg.

Em 1 kg. de bronze, entram de cobre . $70:100=\dfrac{7}{10}$ ks.

Em 100 kg. de bronze, entram de zinco . . . 27 kg.

Em 1 kg. de bronze entram de zinco . . . $27:100=\dfrac{27}{100}$ kg.

Em 100 kg. de bronze, entram de estanho . . . 3 kg.

Em 1 kg. de bronze, entram de estanho . . $3:100=\dfrac{3}{100}$ kg.

Solução: $\dfrac{7}{10}$ kg. de cobre, $\dfrac{27}{100}$ kg. de zinco e $\dfrac{3}{100}$ kg. de estanho.

3. — *Distribuiu-se uma certa importância entre três pessoas, do modo seguinte: deu-se $\frac{1}{4}$ à primeira, $\frac{1}{3}$ à segunda e 2:500$000 à terceira. Qual foi a importância distribuida?*

A primeira recebeu . . . . $\dfrac{1}{4}$

A segunda recebeu . . . . $\dfrac{1}{3}$

As duas primeiras receberam . . . . . $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{7}{12}$

Restou para a terceira . . . . $1-\dfrac{7}{12}=\dfrac{5}{12}$

A importância distribuida foi 2:500$000 $\times\dfrac{12}{5}=$ 6:000$000

4. — *Uma pessoa, depois de gastar $\frac{1}{4}$ do seu dinheiro, $\frac{1}{3}$ do que lhe restou e $\frac{1}{5}$ do que então tinha, ficou com 3:200$000. Quanto possuia inicialmente?*

Depois de ter gasto $\dfrac{1}{4}$ ficou com . . . . $1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$

Depois de ter gasto $\dfrac{1}{3}$ do restante ficou com $\dfrac{3}{4}-\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{2}$

Depois de ter gasto $\dfrac{1}{5}$ do restante ficou com $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{2}{5}$

A importância que possuía a princípio era

$$3{:}200\$000 : \frac{2}{5} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 8{:}000\$000$$

5. — *Dois aviões partem do Rio e de Paranaguá. O primeiro leva 5 horas para ir a Paranaguá, e o segundo 4 horas para ir ao Rio. Pergunta-se a que horas êles se cruzarão, sabendo-se que partem às 7 horas.*

Demorando o 1.º no percurso . . . . 5 h,

a fração que faz por hora é . . . . $\frac{1}{5}$

Demorando o 2.º no percurso . . . . 4 h,

A fração que faz por hora é . . . . $\frac{1}{4}$

Em uma hora ambos, entre si, se aproximam de $\frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{5}{9}$,

O cruzamento se dará, portanto, depois de . $\frac{9}{5}$ h ou 1 h $\frac{4}{5}$,

ou, como ambos partiram às 7 horas . . $7 + 1\frac{4}{5} = 8$ h $\frac{4}{5}$

260. Problemas.

1. Quanto são $\frac{11}{12}$ de 1.200? R. 1.100.
2. Qual é o número cujos $\frac{5}{6}$ valem 100? R. 120.
3. Qual é o número cujos $\frac{2}{5}$ eqüivalem a $\frac{3}{4}$ de 64? R. 120.
4. Qual é o número cujos $\frac{2}{7}$ eqüivalem a $\frac{4}{5}$ de 50? R. 140.
5. Qual é o número cujos $\frac{5}{6}$ valem $66\frac{2}{3}$ R. 80.
6. Qual é o número cujos $\frac{7}{8}$ valem $78\frac{3}{4}$ R. 90.
7. Qual é o número que, aumentado dos seus $\frac{2}{3}$, produz 100? R. 60.
8. Qual é o número que, aumentado dos seus $\frac{4}{5}$ produz 135? R. 75.
9. A diferença entre dois números é 36 e o menor dêles eqüivale aos $\frac{4}{5}$ do outro. Quais são êsses números? R. 180 e 144.
10. A diferença entre dois números é 40 e o menor dêles eqüivale aos $\frac{3}{7}$ do outro. Quais são êsses números? R. 70 e 30.

11. Um operário demora $4\frac{1}{2}$ dias para fazer $\frac{5}{7}$ de um certo serviço. Em quanto tempo fará o serviço todo? R. $6\frac{3}{10}$ d.
12. 5 metros de sêda custam 65$000. Qual será o valor de $\frac{3}{4}$ metros? R. 9$750.
13. $4\frac{1}{2}$ quilogramos de açúcar custam 5$040. Qual é o custo de $2\frac{1}{4}$ quilogramos? R. 2$520.
14. Um navio percorre $15\frac{4}{5}$ milhas por hora. Em 6 horas de marcha quantas milhas percorrerá? R. $94\frac{4}{5}$
15. Um automóvel percorre 91 quilômetros em 2 horas. Em $5\frac{1}{2}$ horas quantos quilômetros percorrerá? R. $250\frac{1}{4}$ Km.
16. Um avião percorre 367 quilômetros em 2 horas. Em $1\frac{1}{2}$ hora quantos quilômetros percorreu? R. $275\frac{1}{4}$ Km.
17. Calcular a distância percorrida por um cavaleiro durante 1 hora de marcha, sabendo-se que em $\frac{2}{3}$ dêsse tempo foi o percurso feito ao passo e o restante ao trote, e que o cavalo faz 100 m. por minuto a passo e 220 a trote. R. 8.400 m.
18. Na preparação de 347 quilogramos de latão entram $277\frac{3}{5}$ quilogramos de cobre e o restante de zinco. Qual é a composição de 20 quilogramos de latão? R. 16 kg. e 4 kg.
19. Na preparação de 100 quilogramos de pólvora negra empregam-se $12\frac{1}{2}$ quilogramos de carvão, $12\frac{1}{2}$ de enxôfre e 75 de salitre. Qual é a composição de 17 quilogramos de pólvora? R. s. $12\frac{3}{4}$ kg. c. $2\frac{1}{8}$ e. $2\frac{1}{8}$
20. Uma granada de mão pesa 1.075 gramos e o seu envólucro 352 gramos. Calcular a quantidade de milenite que a mesma contém, sabendo-se que a sua carga é composta de $\frac{2}{7}$ de trotil, $\frac{1}{3}$ de chedite e o restante de milenite. R. $275\frac{3}{7}$ g.
21. Sabendo-se que de um quilogramo de água do mar se pode extrair $\frac{19}{100}$ quilogramos de sal, quantos quilogramos de água são precisos para se obter 21 quilogramos de sal? R. $110\frac{10}{19}$ kg.

22. A que temperatura do termômetro de Reaumur correspondem 50 graus centigrados, sabendo-se que 1 grau centigrado eqüivale a $\frac{4}{5}$. R: R. 40.

23. Converter 60° R. em graus centigrados, levando em conta que 1 grau Reaumur eqüivale a $\frac{5}{4}$ C. R. 75° C.

24. A que temperatura do termômetro de Reaumur correspondem 5 graus centigrados abaixo de zero? R. 4° R.

25. A que temperatura do termômetro centigrado correspondem 8 graus Reaumur abaixo de zero? R. 10° C.

26. Os volumes de Vênus e Marte, referidos à Terra, são expressos, respectivamente, pelas frações $\frac{9}{10}$ e $\frac{2}{13}$. Quantas vezes Vênus é maior que Marte? R. $5\frac{17}{20}$

27. Em unidades astronômicas, a distância de Mercúrio ao Sol é $\frac{3}{10}$ e a de Vênus ao Sol é $\frac{18}{25}$. Qual dos dois planetas está mais afastado do Sol e quantas vezes mais que o outro? R. v. $2\frac{2}{5}$

28. Sabendo-se que a distância do Sol à Terra mede aproximadamente 147.900.000 quilômetros, calcular o número **de** quilômetros que a luz percorre por segundo, sabendo-se que ela demora $8\frac{13}{60}$ minutos para percorrer a distância entre os dois astros. R. 300.000 km.

29. Tendo em vista que o oxigênio ocupa aproximadamente $\frac{1}{5}$ do volume do ar, e o azoto $\frac{4}{5}$ pede-se quanto existe de cada um dêsses gases em 2.000 litros de ar atmosférico. R. 400 l. O. e 1.600 l. Az.

30. Sabendo-se que o som percorre 340 metros por segundo, calcular a profundidade de um poço, em que se deixou cair uma pedra, cujo ruido se ouviu $3\frac{1}{2}$ segundos depois de produzido. R. $19\frac{2}{3}$ m.

Capítulo XIII

FRAÇÕES DECIMAIS — NÚMEROS DECIMAIS

261. **Fração decimal.** — *Fração decimal é toda fração cujo denominador é potência de 10.* — Assim, dizemos que

$$\frac{7}{10},\ \frac{17}{100}\ \text{e}\ \frac{3793}{1000}$$

são frações decimais.

262. **Número decimal.** — Consideremos a fração decimal

$$\frac{3793}{1000}.$$

Transformando-a em número mixto, temos

$$\frac{3793}{1000} = 3 + \frac{793}{1000}$$

ou, decompondo a fração que acompanha o inteiro

$$\frac{3793}{1000} = 3 + \frac{793}{1000} = 3 + \frac{700}{1000} + \frac{90}{1000} + \frac{3}{1000}.$$

Simplificando as frações contidas no segundo membro da igualdade acima, encontraremos

$$\frac{3793}{1000} = 3 + \frac{7}{10} + \frac{9}{100} + \frac{3}{1000}.$$

Dessarte, a fração dada ficou decomposta em uma parte inteira e várias *partes decimais da unidade*, isto é, *3 inteiros, 7 décimos, 9 centésimos* e *3 milésimos*.

Designando os décimos, centésimos, milésimos, etc., *por* *unidades decimais de primeira, de segunda, de terceira ordem, etc.*, e notando ser

$$1=\frac{10}{10};\ \frac{1}{10}=\frac{10}{100};\ \frac{1}{100}=\frac{10}{1000}\ldots$$

verificamos que, como os números inteiros, as frações decimais podem ser decompostas em unidades de diferentes ordens (decimais ou não), que se sucedem segundo a mesma lei: *cada unidade de uma ordem vale 10 unidades da ordem seguinte.*

Em conseqüência dêsse fato é que as frações decimais podem ser escritas de modo análogo aos números inteiros, bastando se fixe o lugar que deve ser ocupado pelo algarismo das unidades simples na parte inteira e se aplique a convenção fundamental da numeração escrita. — Com efeito, dada a fração decimal

$$\frac{3793}{1000}=3+\frac{7}{10}+\frac{9}{100}+\frac{3}{1000},$$

se, dos algarismos que representam as unidades decimais das diferentes ordens, convencionarmos separar por *uma vírgula* o que representa as unidades simples da parte inteira, e se escrevermos, depois dela, sucessivamente, os décimos, centésimos, milésimos, etc., vem

$$\frac{3791}{1000}=3+\frac{7}{10}+\frac{9}{100}+\frac{3}{1000}=3{,}793.$$

Dêsse modo, a *fração decimal*

$$\frac{3793}{1000}$$

fica escrita sob a forma do *número decimal*

$$3{,}793.$$

263. Conversão de fração decimal em número decimal. — Consideremos a fração decimal

$$\frac{371}{100}.$$

De acôrdo com o que acima se expôs, para transformar a fração dada em número decimal, bastará escrever o numerador e neste separar, a partir da direita, tantos algarismos

decimais quantos são os zeros do denominador. — Teremos, assim

$$\frac{371}{100}=3{,}71.$$

Quando o número de algarismos do numerador for inferior ao de zeros do denominador, para tornar possível a separação dos algarismos decimais do primeiro, poder-se-á escrever à sua esquerda o número de zeros que para isso for necessário. — Assim, dada a fração

$$\frac{47}{10000},$$

teremos

$$\frac{47}{10000}=\frac{00047}{10000}=0{,}0047.$$

264. Conversão de número decimal em fração decimal. — Consideremos o número decimal

$$31{,}495.$$

Para convertê-lo em fração decimal bastará, pelos motivos expostos, escrever o número decimal como numerador da fração e sem a vírgula, e para denominador tomar um número formado pela unidade seguida de tantos zeros quantos são os algarismos decimais do número dado. — Teremos, assim

$$31{,}495=\frac{31495}{1000}.$$

265. Modo de ler um número decimal. — Lê-se a parte inteira, acompanhada da designação de *unidades*, e depois a decimal com a menção da unidade representada pelo último algarismo da direita. — Assim, o número decimal

$$3{,}078$$

é lido: *três unidades e setenta e oito milésimos.*

Do mesmo modo, o número decimal

$$0{,}0008$$

é lido: *oito décimos milésimos*, uma vez que, sendo nula a parte inteira, não há necessidade de mencioná-la.

266. Modo de escrever um número decimal. — Escreve-se a parte inteira, seguida de uma vírgula, e depois a decimal, com o cuidado de colocar cada algarismo no lugar das unidades que representa.

Assim, o número decimal *oito unidades, cento e quarenta e sete milésimos* é escrito

$$8{,}147.$$

Do mesmo modo, o número *dezenove centésimos milésimos* é escrito

$$0{,}00019.$$

267. **Propriedades dos números decimais.** — 1.º *O valor de um número decimal não se altera quando se colocam ou suprimem zeros à sua direita.* — Assim, dizemos que

$$3{,}57 = 3{,}5700.$$

Com efeito, contendo os números acima o mesmo número de unidades simples de décimos e de centésimos, são eqüivalentes. — Pelo mesmo motivo, teremos

$$13{,}7000 = 13{,}7.$$

2.º *Para multiplicar um número decimal por 10, 100, 1000, basta deslocar-lhe a vírgula 1, 2, 3... casas para a direita.* — Assim, dizemos que

$$3{,}571 \times 100 = 357{,}1.$$

Com efeito, transformando o número decimal em fração teremos

$$3{,}571 \times 100 = \frac{3571}{1000} \times 100 = \frac{3571 \times 100}{1000} = \frac{3571}{10} = 357{,}1.$$

Quando o número de algarismos da parte decimal for inferior ao de zeros do multiplicador, escrevem-se à direita do número decimal, o número de zeros suficiente para se completar deslocamento da vírgula. — Exemplo

$$3{,}7 \times 1000 = 3{,}700 \times 1000 = 3700.$$

3.º *Para dividir um número decimal por 10, 100, 1000... basta deslocar-lhe a vírgula 1, 2, 3... casas para a esquerda.* — Assim, dizemos que

$$431{,}5 : 100 = 4{,}315.$$

Com efeito, tendo em vista que

$$4{,}315 \times 100 = 431{,}5$$

segue-se que 4,315 é o quociente de 431,5 por 100.

OPERAÇÕES

268. **Adição.** — Consideremos a soma indicada

$$3{,}305 + 2{,}36 + 54{,}8.$$

Convertendo êsses números em frações decimais encontraremos

$$3{,}305 = \frac{3305}{1000},$$

$$2{,}36 = \frac{236}{100},$$

$$54{,}8 = \frac{548}{10}.$$

Somando as frações correspondentes aos números decimais dados, obteremos

$$\frac{3305}{1000} + \frac{236}{100} + \frac{548}{10} = \frac{3305}{1000} + \frac{2360}{1000} + \frac{54800}{1000} = \frac{60465}{1000}.$$

Transformando a soma obtida em número decimal, virá

$$\frac{60465}{1000} = 60{,}465.$$

Resulta, portanto,

$$3{,}305 + 2{,}360 + 54{,}800 = 60{,}465,$$

ou,

$$3{,}305 + 2{,}36 + 54{,}8 = 60{,}465.$$

Verificamos, assim, que, para obter a soma de dois ou mais números decimais, bastará:

1.º escrevê-los todos com o mesmo número de algarismos decimais;

2.º somar os números inteiros obtidos depois da supressão das vírgulas;

3.º separar na soma, da direita para a esquerda, tantos algarismos decimais quantos são os do número que mais os contenha.

Na prática, pode-se dar à operação a disposição indicada a seguir, escrevendo-se os números dados de maneira que as

$$\begin{array}{r} 3{,}305 \\ 2{,}360 \\ 54{,}800 \\ \hline 60{,}465 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3{,}305 \\ 2{,}36 \\ 54{,}8 \\ \hline 60{,}465 \end{array}$$

unidades de mesma ordem de cada um dêles fiquem colocadas em coluna vertical, e opera-se do modo seguinte: somam-se os números como se fossem inteiros, e no resultado coloca-se uma vírgula que corresponda à respectiva coluna. Em geral, não se usa escrever os zeros para igualar as casas decimais das parcelas, porque se toma o cuidado de dispô-las como se nelas figurassem os zeros.

269. **Regra.** — *Para somar números decimais, escrevêmo-los uns sob os outros de modo que as vírgulas se correspondam verticalmente, efetua-se a soma como se fossem números inteiros e coloca-se no resultado, uma vírgula em coluna com as das parcelas.* — Exemplos

$$\begin{array}{r} 8{,}5 \\ 0{,}43 \\ 6{,}232 \\ 7{,}4893 \\ \hline 22{,}6513 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2{,}1945 \\ 3{,}166 \\ 2{,}08 \\ 1{,}7 \\ \hline 9{,}1405 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0{,}3 \\ 0{,}33 \\ 0{,}333 \\ 0{,}3333 \\ \hline 1{,}2963 \end{array}$$

270. **Exercícios.**

Efetuar as operações seguintes:

1. $3{,}95 + 4{,}87$? R. 8,82.
2. $6{,}03 + 8{,}541$? R. 14,571.
3. $7{,}68 + 9{,}54 + 6$? R. 23,22.
4. $8{,}21 + 7{,}63 + 8{,}5$? R. 24,34.
5. $1{,}542 + 8{,}19 + 7{,}08$? R. 16,812.
6. $10{,}509 + 9{,}87 + 3{,}154$? R. 23,533.
7. $16{,}125 + 17{,}85 + 21{,}148$? R. 55,123.
8. $29{,}1428 + 31{,}673 + 18{,}427$? R. 79,2428.
9. $6{,}8 + 7{,}5 + 9 + 6{,}0006 + 1{,}149$? R. 30,4496.
10. $12{,}3 + 6{,}15 + 12 + 7{,}1465 + 12{,}178$? R. 49,7745.

271. **Subtração.** — Consideremos a diferença indicada

$$7{,}5 - 3{,}186.$$

Do mesmo modo que na adição, encontraremos, sucessivamente:

$$7{,}5 - 3{,}186 = \frac{75}{10} - \frac{3186}{1000} = \frac{7500}{1000} - \frac{3186}{1000} = \frac{4314}{1000} = 4{,}314$$

ou $$7{,}5 - 3{,}186 = 4{,}314.$$

Na prática, pode-se dar à operação a disposição indicada a seguir, escrevendo-se os números dados de maneira que as unidades de mesma ordem fiquem colocadas em coluna vertical, e opera-se do modo seguinte: subtraem-se êsses números como se fossem inteiros, e coloca-se, no resultado, uma vírgula na coluna das vírgulas.

$$\begin{array}{r} 7{,}500 \\ 3{,}186 \\ \hline 4{,}314 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7{,}5 \\ 3{,}186 \\ \hline 4{,}314 \end{array}$$

Em geral, não se usa escrever os zeros com que se igualam as casas decimais dos números dados, porque se toma o cuidado de dispô-las como se neles figurassem os zeros.

272. **Regra.** — *Para subtrair números decimais, escreve-se o subtraendo sob o minuendo, de modo que as vírgulas se correspondam verticalmente; efetua-se a subtração como se fossem números inteiros, e coloca-se no resultado uma vírgula em coluna com as dos números dados.* — Exemplos

$$\begin{array}{r} 14{,}443 \\ 6{,}666 \\ \hline 7{,}777 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1{,}3 \\ 0{,}00065 \\ \hline 1{,}29935 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8, \\ 1{,}375 \\ \hline 6{,}625 \end{array}$$

273. **Exercícios.**

Efetuar as operações seguintes:

1. $3{,}75 - 1{,}81$? R. 1,94.
2. $4{,}128 - 3{,}09$? R. 1,038.
3. $14{,}12 - 13{,}157$? R. 0,963.
4. $15{,}7 - 0{,}001354$? R. 15,698646.
5. $6 - 1{,}35$? R. 4,65.
6. $7 - 5{,}459$? R. 1,541.
7. $8 - 3{,}1475$? R. 4,8525.
8. $10 - 9{,}00015$? R. 0,99985.
9. $0{,}8 - 0{,}1234567$? R. 0,6765433.
10. $0{,}9 - 0{,}807060504$? R. 0,092939496.

274. **Multiplicação.** — Consideremos o produto indicado

$$4{,}21 \times 3{,}8.$$

Convertendo êsses números em frações decimais e efetuando depois a multiplicação, encontraremos

$$4{,}21 \times 3{,}8 = \frac{421}{100} \times \frac{38}{10} = \frac{15998}{1000} = 15{,}998.$$

Verificamos assim, que o resultado obtido é um número

$$\boxed{\begin{array}{r} 4{,}21 \\ 3{,}8 \\ \hline 3368 \\ 1263 \\ \hline 15{,}998 \end{array}}$$

decimal correspondente ao produto dos números dados, em que o número de casas decimais é a soma dos números de decimais dos fatores.

Na prática, dispõe-se a operação da maneira indicada ao lado, operando-se como se fossem números inteiros e separando-se, no produto, tantos algarismos decimais quantos são os dos fatores.

275. **Regra.** — *Para multiplicar números decimais, procede-se como se êles fossem números inteiros, e depois separa-se à direita do produto, tantos algarismos decimais quantos contêm, ao todo, os dois fatores.* — Exemplos

$$\begin{array}{r} 0{,}897 \\ 3{,}12 \\ \hline 1794 \\ 897 \\ 2691 \\ \hline 2{,}79864 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0{,}00032 \\ 0{,}00024 \\ \hline 128 \\ 64 \\ \hline 0{,}0000000768 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0{,}0678 \\ 453 \\ \hline 2034 \\ 3390 \\ 2712 \\ \hline 30{,}7134 \end{array}$$

276. **Exercícios.**

1. $3{,}15 \times 8$?	R. 25,2.
2. $4{,}13 \times 3{,}9$?	R. 16,107.
3. $5{,}47 \times 7{,}38$?	R. 40,3686.
4. $12{,}06 \times 1{,}317$?	R. 15,88302.
5. $15{,}708 \times 17{,}619$?	R. 276,759252.
6. $4{,}5 \times 7{,}8 \times 9{,}6$?	R. 336,96.
7. $0{,}81 \times 5{,}3 \times 7{,}8$?	R. 33,4854.
8. $0{,}741 \times 5{,}3 \times 6{,}9$?	R. 27,09837.
9. $3{,}727 \times 2{,}35 \times 7{,}5$?	R. 65,688375.
10. $4{,}696 \times 3{,}237 \times 6{,}54$?	R. 99,41422608.

277. **Divisão.** — Consideremos o quociente indicado

$$19{,}4 : 0{,}27.$$

Convertendo êsses números em frações decimais e efetuando depois a divisão, encontraremos

$$19{,}4 : 0{,}27 = \frac{194}{10} : \frac{27}{100} = \frac{194}{10} \times \frac{100}{27} = \frac{19400}{270} = \frac{1940}{27}.$$

Observemos que, contràriamente ao que se passou com relação à adição, subtração e multiplicação, o quociente de dois números decimais é *fração ordinária*.

Naturalmente, essa fração em alguns casos especiais, po-

derá ser igual a um número inteiro ou a um número decimal. Então, o quociente de dois números decimais será um número inteiro ou decimal. — Exemplos

$$2{,}35 : 0{,}47 = \frac{235}{100} : \frac{47}{100} = \frac{235 \times 100}{100 \times 47} = \frac{235}{47} = 5,$$

$$0{,}185 : 0{,}5 = \frac{185}{1000} : \frac{5}{10} = \frac{185 \times 10}{1000 \times 5} = \frac{185 \times 2}{1000} = 0{,}37.$$

Observemos, ainda, que *o quociente exato de dois números decimais é o quociente dos números inteiros que se obtém suprimindo as vírgulas dos números dados, depois de reduzidos ao mesmo número de algarismos decimais.* — Assim, dado

$$0{,}29 : 0{,}147$$

teremos

$$0{,}29 : 0{,}147 = \frac{290}{147}.$$

Na prática, procura-se converter a fração ordinária correspondente ao quociente de números decimais, em *número decimal*, exato ou com uma aproximação dada, como veremos, a seguir, no estudo dos *quocientes aproximados*.

278. **Noção de quociente aproximado.** — Consideremos a divisão indicada

$$13 : 3.$$

Evidentemente, o quociente procurado está compreendido entre os números 4 e 5, uma vez que

$$3 \times 4 = 12,$$
$$3 \times 5 = 15.$$

Por outro lado, tendo em vista que

$$5 - 4 = 1,$$

dizemos que o quociente de 13 por 3 difere de 3 ou de 4 de *menos de uma unidade*, ou que, se substituirmos o quociente procurado por 3 ou por 4, o êrro que cometeremos será *menor que uma unidade*.

Isto posto, dizemos que 4 e 5 são quocientes aproximados de 13 por 3.

Entretanto, tendo em vista a noção que demos de quociente inteiro (n.º 96), quando tratámos da divisão inexata dos números bem como a ampliação do conceito de quociente que fizemos (n.º 224) quando estudámos os números fracionários, costumamos sempre nos referir, salvo indicação expressa em contrário, aos *quocientes aproximados por falta.*

Voltando, ainda, ao exemplo acima dado, procuremos maiores aproximações na pesquisa do quociente de 13 por 3.

Transformando o número inteiro 13 em décimos, teremos 130 décimos. Dividindo 130 décimos por 3, encontraremos 43, uma vez que

$$130 = 43 \times 3 + 1.$$

Mas como o quociente, neste caso, é da espécie do dividendo, segue-se que

$$4{,}3$$

é o quociente aproximado por falta de 13 por 4, *a menos de* $\frac{1}{10}$.

Do mesmo modo, transformando 13 inteiros em centésimos, milésimos, etc., e efetuando as divisões por 3, encontraríamos que

$$4{,}33$$

é o quociente aproximado por falta de 13 por 4, *a menos de* $\frac{1}{100}$ e que

$$4{,}333$$

é o quociente aproximado por falta de 13 por 4, *a menos de* $\frac{1}{1000}$ etc.

Estendendo êsse conceito aos números fracionários, podemos estabelecer a definição que segue.

279. **Definição.** — *Quociente aproximado de dois números inteiros ou fracionários a menos de* $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, *etc., por falta, é o maior número de décimos, centésimos, milésimos, etc., cujo produto pelo divisor possa ser subtraído do dividendo.*

280. **Pesquisa de um quociente aproximado.** — Consideremos os casos seguintes:

1.º *Quociente aproximado de um número inteiro por um número inteiro;*

2.º *Quociente aproximado de um número decimal por um número inteiro e*

3.º *quociente aproximado de um número decimal por um número decimal.*

281. **1.º Caso.** — Consideremos a divisão indicada

$$87 : 40,$$

cujo quociente aproximado de $\frac{1}{100}$ por falta queremos obter.

Em conseqüência da definição acima dada, bastará evidentemente converter 87 inteiros em centésimos, para depois dividi-lo por 40.

Assim procedendo, para quociente de 8700 centésimos por 40, encontraremos 217 centésimos. — Resulta, portanto que

$$2{,}17$$

é o quociente aproximado de $\frac{1}{100}$ por falta de 87 por 40.

282. **Regra.** — *Para obter o quociente aproximado de* $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, *etc., por falta de dois números inteiros, multiplica-se o dividendo por 10, 100, 1000, etc., procura-se depois o quociente aproximado, de uma unidade por falta do dividendo, assim modificado, pelo divisor e faz-se êsse quociente exprimir décimos, centésimos, milésimos, etc.*

283. **2.º Caso.** — Consideremos a divisão indicada

$$32{,}657 : 18,$$

cujo quociente aproximado de $\frac{1}{100}$ por falta queremos obter.

Em analogia ao caso anterior, dever-se-á dividir os 3265 centésimos do dividendo por 18.

Assim procedendo, para quociente de 3265 centésimos por 18, encontraremos 181 centésimos. — Resulta, portanto, que

$$1{,}81$$

é o quociente aproximado de $\frac{1}{100}$ por falta de 32,657 por 18.

284. **3.º Caso.** — Consideremos a divisão indicada

$$5{,}3 : 0{,}37,$$

cujo quociente aproximado de $\frac{1}{10}$ por falta queremos obter.

Conforme vimos (n.º 277), o quociente exato procurado dos números decimais propostos é uma *fração ordinária*, obtida do modo seguinte:

$$5{,}3 : 0{,}37 = \frac{53}{10} : \frac{37}{100} = \frac{53 \times 100}{10 \times 37} = \frac{53 \times 10}{37} = \frac{530}{37}.$$

Como a aproximação dada para a pesquisa do quociente é $\frac{1}{10}$, devemos evidentemente de acôrdo com a definição (n.º 279) procurar o maior número de décimos cujo produto por 37 possa ser subtraído de 530.

Dividindo 5300 décimos por 37, encontraremos 143 décimos, segue-se, assim, que

$$14{,}3$$

é o quociente aproximado de $\frac{1}{10}$ por falta de 5,3 por 0,37.

Notemos, ainda, que o quociente exato dos números decimais propostos

$$\frac{530}{37}$$

é uma fração cujos termos são êsses mesmos números decimais multiplicados por 100, ou seja, pelo número preciso para tornar inteiro o divisor.

285. **Regra.** — *Para obter o quociente aproximado de* $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, *etc., por falta de dois números decimais, suprime-se a vírgula do divisor e multiplica-se o dividendo pela unidade seguida de tantos zeros quantos algarismos decimais havia no divisor. Procura-se, depois o quociente aproximado de* $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, *etc., do dividendo, assim modificado, pelo novo divisor.*

286. **Prática da divisão.** — Depois de dadas as noções sôbre os quocientes aproximados, podemos cuidar da prática da divisão dos números decimais.

Consideremos, para isso, os exemplos seguintes:

1.º Determinar o quociente de 3,9 por 8 com aproximação de 0,001.

Tendo em vista as regras acima dadas, devemos proceder do modo seguinte:

```
3.900 | 8
 70     487
  60
   4
```

a) multiplicamos 3,9 por 1000 (visto a aproximação ser de 0,001);

b) dividimos o produto obtido (3900) por 8;

c) dividimos o quociente encontrado por 1000.

Obtemos, assim o quociente procurado

$$0{,}487.$$

2.º Determinar o quociente de 17 por 5,45 com aproximação de 0,01.

Procedemos do modo seguinte:

```
170000 | 545
 0650    311
  1050
   505
```

a) multiplicamos 17 por 100 (visto o divisor conter dois algarismos decimais) e suprimimos a vírgula do divisor;

b) multiplicamos 1700 por 100 (visto a aproximação ser de 0,01);

c) dividimos 170000 por 545;

d) dividimos o quociente encontrado por 100.

Obtemos, assim, o quociente procurado

$$3{,}11.$$

3.º Determinar o quociente de 25,17 por 0,236 com aproximação de 0,1.

Procedemos do modo seguinte:

```
251700 | 236
 1570    1066
  1540
   124
```

a) Multiplicamos 25,17 por 1000 (visto o divisor conter três algarismos decimais) e suprimimos a vírgula do divisor.

b) Multiplicamos 25170 por 10 (visto a aproximação ser de 0,1);

c) dividimos 251700 por 236;

d) dividimos o quociente encontrado por 100.

Obtemos, assim o quociente procurado

$$106{,}6.$$

287. **Observação.** — A-fim-de facilitar a operação, na prática costuma-se proceder da maneira seguinte: depois de se terem multiplicado os números decimais propostos pela potência de 10 necessária *para tornar inteiro o divisor*, efetua-se a divisão como se fosse para procurar o quociente com aproximação de uma unidade; depois de considerar todos os algarismos da parte inteira do dividendo, coloca-se vírgula no quociente; prossegue-se na divisão, considerando os algarismos sucessivos da parte decimal do dividendo, completados com zeros se for preciso, até obter-se o quociente com a aproximação desejada. — Exemplos

Determinar o quociente de 2357,48 por 14,3 com aproximação de 0,01.

2357 4,8	143
927	164,85
694	
1228	
840	
125	

Resultado: 164,85.

Determinar o quociente de 1,5 por 0,0029 com aproximação de 0,001.

15000	00029
50	517,241
210	
70	
120	
40	
11	

Resultado: 517,241.

Determinar o quociente de 0,9 por 1,32 com aproximação de 0,0001.

0900	132
1080	0,6818
240	
1080	
24	

Resultado: 0,6818.

288. **Exercícios.**

Determinar, com aproximação de 0,01, os quocientes dos números seguintes:

1. de 31 por 9? R. 3,44.
2. de 7 por 13? R. 0,53.
3. de 5 por 3,7? R. 1,35.
4. de 8,1 por 19? R. 0,42.
5. de 6,31 por 0,7? R. 9,01.

Determinar, com aproximação de 0,001, os quocientes dos números seguintes:

6. de 1,09 por 6? R. 0,181.
7. de 12,5 por 0,33? R. 37,878.
8. de 0,07 por 1,45? R. 0,048.
9. de 2,005 por 3,02? R. 0,663.
10. de 0,0128 por 0,0193? R. 0,663.

289. **Conversão de frações ordinárias em números decimais.** — Procuremos o quociente aproximado de $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ ... por falta de 27 por 16, com auxílio da regra prática que demos no n.º 282.

27	16
110	1,6875
140	
120	
80	
0	

Tendo chegado, na última divisão parcial feita, a um resto nulo, verificámos que o quociente obtido é *exato*. — Podemos pois, escrever

$$27:16=1{,}6875,$$

uma vez que

$$27=16\times 1{,}6875.$$

Por outro lado, tendo em vista que

$$27:16=\frac{27}{16}$$

segue-se que

$$\frac{27}{16}=1{,}6875.$$

Dizemos, então, que a fração ordinária considerada *pode ser convertida em fração decimal.*

Servindo-nos, ainda, da regra acima citada (n.º 282), procuremos o quociente aproximado de $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ por falta de 11 por 3.

11	3
20	3,666...
20	
20	
2	
.	
.	

O resto obtido nas divisões parciais (2), sendo sempre o mesmo, segue-se que a operação pode ser prolongada indefinidamente, reproduzindo-se sempre o mesmo algarismo (6) no quociente.

Êsse fato leva-nos a admitir que *não existe fração decimal igual à fração ordinária* $\frac{11}{3}$, embora os quocientes sucessivos que se podem obter de 11 por 3 se aproximem, cada vez mais de $\frac{11}{3}$.

Procuremos, agora, estabelecer a condição necessária e suficiente para que uma fração ordinária possa ser convertida *exatamente* em decimal.

Consideremos, para isso, o teorema seguinte:

290. *A condição necessária e suficiente para que uma fração ordinária irredutível seja convertível exatamente em fração decimal é que o seu denominador não contenha outros fatores primos que 2 e 5.* — Assim, dizemos que as frações

$$\frac{3}{4},\ \frac{4}{25}\ \text{e}\ \frac{7}{20}$$

são convertíveis exatamente em frações decimais, uma vez que

$$4=2\times 2,$$
$$25=5\times 5,$$
$$20=2\times 2\times 5.$$

Por outro lado, dizemos que as frações

$$\frac{4}{27},\ \frac{5}{6}\ \text{e}\ \frac{8}{15},$$

não são convertíveis exatamente em frações decimais, uma vez que

$$21=3\times 7,$$
$$6=2\times 3,$$
$$15=3\times 5.$$

Com efeito, consideremos a fração ordinária

$$\frac{a}{b},$$

reduzida à sua expressão mais simples.

Admitindo-se que exista uma fração decimal igual à proposta, ter-se-á

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{10^n},$$

em que c e n são números inteiros.

Tendo em vista que a e b são números primos entre si, segue-se que c e 10^n são eqüimúltiplos de a e b.

Isto posto e considerando que os únicos fatores primos de 10^n são 2 e 5, concluimos que b, sendo divisor de 10^n, não pode admitir outros divisores que 2 e 5.

Do mesmo modo, verifica-se também que, quando o denominador de uma fração ordinária não contém outros fatores

primos que 2 e 5, essa fração é exatamente convertível em decimal.

290. **Conseqüências.** — Consideremos a fração

$$\frac{3}{40}.$$

Decompondo o denominador em fatores primos, encontraremos

$$\frac{3}{40}=\frac{3}{2^3\times 5}.$$

Multiplicando os seus termos por 5, a-fim-de tornar o denominador potência de 10, teremos

$$\frac{3}{40}=\frac{3}{2^3\times 5}=\frac{3\times 5^3}{2^3\times 5^3}=\frac{3\times 5^3}{10^3}=\frac{375}{1000}.$$

Reduzindo a número decimal, a fração decimal acima obtida, virá

$$\frac{375}{1000}=0{,}375.$$

Observemos que o maior expoente de um dos fatores, 2 ou 5, do denominador da fração $\frac{3}{40}$ é *3* e que essa fração foi transformada em outra decimal eqüivalente, cujo denominador é 10^3 ou *1000*.

Além disso, tendo em vista que o denominador 1000 da fração decimal considerada, dá lugar a um número decimal de *3* algarismos, segue-se que o número de algarismos decimais de uma fração convertível exatamente em número decimal é dado pelo maior expoente que tiver um dos fatores, 2 ou 5, no denominador dessa fração.

Aplicação: Determinar o número de algarismos decimais que apresentará a fração $\frac{7}{160}$ convertida em número decimal.

Decompondo 160 em fatores primos, encontraremos

$$\frac{7}{160}=\frac{7}{2^5\times 5}.$$

Tendo em vista que o maior expoente de um dos fatores do denominador é 5, segue-se que o número decimal eqüivalente à fração proposta terá 5 algarismos.

292. **Conversão exata.** — Para converter uma fração ordinária em decimal no caso de ser exata a conversão — poder-se-á proceder da maneira que acabámos de indicar (n.° 290).

Entretanto, na prática, prefere-se procurar o quociente do numerador pelo denominador da fração proposta, como se verá nos exemplos que seguem.

1.° Converter em número decimal a fração ordinária $\frac{237}{200}$

```
237   | 200
      -------
370     1,185
1700
 1000
  000
```

Resultado: $\frac{237}{200} = 1{,}185.$

2.° Converter em número decimal a fração ordinária $\frac{15}{160}$.

Reduzindo a fração dada à sua expressão mais simples, teremos

$$\frac{15}{160} = \frac{15 : 5}{160 : 5} = \frac{3}{32}.$$

Dividindo 3 por 32, encontraremos

```
300   | 32
      ---------
120     0,09375
 240
  160
   00
```

Resultado: $\frac{15}{160} = \frac{3}{32} = 0{,}09375.$

293. **Conversão aproximada.** — Como sabemos (n.° 289) a conversão exata de uma fração ordinária em número decimal nem sempre é possível.

Por êsse motivo, costuma-se, na prática, substituir as frações ordinárias não convertíveis em decimais, por números decimais de valores aproximados de $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$ dessas frações. — Consideremos a fração

$$\frac{7}{6}.$$

Dividindo o numerador pelo denominador, de acôrdo com a regra conhecida, encontraremos


```
 7    | 6
      ---------
10      1,1666...
 40
  40
   4
```

Designando por $q_1, q_2, q_3, q_4,...$ os quocientes aproximados sucessivos de 7 por 6, teremos

$q_1 = 1{,}1$ (com aproximação de 0,1),
$q_2 = 1{,}16$ (com aproximação de 0,01),
$q_3 = 1{,}166$ (com aproximação de 0,001),
$q_4 = 1{,}1666$ (com aproximação de 0,0001).

Verificamos, assim, que nenhum dos quocientes aproximados obtidos corresponde ao *valor exato* da fração $\frac{7}{6}$, mas dêste se aproximam de quantidades cada vez menores.

294. **Números decimais periódicos.** — Consideremos, ainda, dois exemplos de conversão aproximada de frações ordinárias em decimais. — Sejam as frações

$$\frac{7}{9} \text{ e } \frac{4}{11}.$$

Efetuando a divisão do numerador de cada uma pelo denominador respectivo, encontraremos

```
70    | 9              40    | 11
      --------               -----------
 70     0,777...        70     0,363636...
  70                     40
   7.                     70
    .                      40
                            70
                             4.
                              .
```

Aos quocientes aproximados

$$0{,}777... \text{ e } 0{,}363636...$$

damos a denominação de *números decimais periódicos* ou dízimas periódicas.

Números decimais periódicos são, pois, *números decimais cujos algarismos decimais se sucedem indefinidamente, segundo uma lei determinada.*

Denominamos, ainda, *período* ao algarismo ou grupo de algarismos que se repetem.

Assim, dados os números decimais periódicos

0,777... e 0,363636...,

dizemos que os períodos são respectivamente,

7 e 36.

Em relação aos períodos dos números decimais periódicos, dois casos se podem apresentar:

1.º O primeiro período inicia-se imediatamente após a vírgula;

2.º entre a vírgula e o primeiro período há uma parte que se não repete, denominada *não periódica*.

Para distinguir êsses dois tipos, dizemos que *dízima periódica simples* é aquela cujo período se inicia imediatamente após a vírgula e que *dízima periódica composta* é aquela que apresenta, entre a vírgula e o primeiro período, uma parte não periódica. — Assim

7,333... e 0,129129...

são dízimas periódicas simples e

3,41666... e 0,0777...

são dízimas periódicas compostas.

295. **Observação.** — Demonstram-se duas leis que permitem prever a natureza do resultado a que pode conduzir a conversão de frações ordinárias em decimais, segundo os casos que se apresentam.

Entretanto, tendo em vista a natureza do presente curso, preferimos apenas enunciá-las, fazendo-as compreender pela exemplificação.

1.ª *Toda fração irredutível cujo denominador não contém o fator 2 nem o fator 5, convertida em decimal, origina uma dízima periódica simples.* — Exemplo: as frações

$$\frac{3}{7},\ \frac{4}{9},\ \frac{5}{21}\ \text{e}\ \frac{19}{13},$$

convertidas em decimais, dão origem a dízimas periódicas simples.

2.ª *Toda fração irredutível cujo denominador contém os fatores 2 ou 5 com fatores primos diferentes, convertidas em decimal, origina uma dízima periódica composta.* — Exemplo

$$\frac{5}{6},\ \frac{7}{12},\ \frac{19}{30}\ \text{e}\ \frac{21}{50},$$

convertidas em decimais, dão origem a dízimas periódicas compostas.

296. **Frações geratrizes das dízimas periódicas.** — Consideremos a fração

$$\frac{2}{3}.$$

Convertendo-a em número decimal, encontraremos

0,666...

Dizemos, então, que $\frac{2}{3}$ é a fração geratriz da dízima periódica 0,666...

Denominamos, pois, fração geratriz de uma dízima periódica à fração ordinária que a originou.

297. **Determinação das frações geratrizes das dízimas periódicas.** — Consideremos os casos seguintes:

1.º *determinação da geratriz de uma dízima periódica simples;*

2.º *determinação da geratriz de uma dízima periódica composta.*

298. 1.º **Caso.** — Consideremos a dízima periódica simples

0,3636...,

cuja geratriz

$$\frac{a}{b}$$

queremos determinar e notemos que $a < b$, uma vez que $0,3636... < 1$.

De acôrdo com a definição, os quocientes aproximados de $\frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^4}, \frac{1}{10^6}...$ por falta de a por b serão, respectivamente,

0,36...
0,3636...
0,363636...,

nos quais os algarismos se repetem indefinidamente na mesma ordem, de 2 em 2.

Evidentemente, para que a sucessão dos algarismos do quociente se dê nessa ordem, é necessário e suficiente que os restos ou dividendos parciais também se reproduzam, de 2 em 2.

Assim é que, se designarmos por x o resto diferente de a, teremos

$$\begin{array}{l|l} a0 & b \\ \quad x0 & 0{,}3636\ldots \\ \quad\; a0 & \\ \quad\quad x0 & \\ \quad\quad\; a. & \end{array}$$

Tendo em vista que, para obter os algarismos *3* e *6* do quociente foi preciso juntar dois zeros à direita de a, segue-se que, se dividirmos *100* a por b, obteremos o quociente inteiro *36* e o resto a.

Adotando a representação usual das divisões inexatas, podemos escrever

$$100a = b \times 36 + a.$$

Subtraindo a de ambos os membros da igualdade acima, teremos

$$100a - a = b \times 36.$$

ou

$$99a = b \times 36.$$

Dividindo ambos os membros por *99b*, encontraremos

$$\frac{99a}{99b} = \frac{b \times 36}{99b},$$

ou, simplificando,

$$\frac{a}{b} = \frac{36}{99}.$$

A consideração do exemplo acima bem como a de outros que se possam formular, conduz-nos à regra seguinte:

299. **Regra.** — *Para obter a fração geratriz de uma dízima periódica simples, cuja parte inteira é nula, forma-se uma fração que tenha para numerador o período e para denominador um número formado de tantos noves quantos são os algarismos do período.* — Exemplos

A geratriz de 0,243243... é $\frac{243}{999} = \frac{9}{37}$.

A geratriz de 0,006006... é $\frac{6}{999} = \frac{2}{333}$.

Vejamos, agora, como se determinam as geratrizes das dízimas periódicas simples, cuja parte inteira não é nula.

Consideremos, para isso, a dízima periódica

$$3{,}4545\ldots$$

Por convenção, escrevemos (1)

$$3{,}4545\ldots = 3 + 0{,}4545\ldots$$

Como a fração geratriz de 0,4545... é

$$\frac{45}{99} = \frac{5}{11},$$

resulta que a geratriz de

$$3{,}4545\ldots \text{ é } 3 + \frac{5}{11} = \frac{38}{11}.$$

Para determinar a fração geratriz de uma dízima periódica com parte inteira, basta, pois, formar um número mixto, cuja parte inteira seja a mesma da dízima periódica considerada e cuja parte fracionária seja a fração geratriz da dízima periódica, que se obtém anulando-lhe a parte inteira. — Exemplos

1.º A geratriz de 7,333... é

$$7 + \frac{3}{9} = 7 + \frac{1}{3} = \frac{22}{3}.$$

300. **2.º Caso.** — Consideremos a dízima periódica composta

$$0{,}43636\ldots,$$

cuja geratriz queremos determinar.

Se procurarmos a fração geratriz da dízima periódica simples

$$4{,}3636\ldots,$$

encontraremos, de acôrdo com a regra conhecida

$$4 + \frac{36}{99},$$

(1) A convenção que se adota é a seguinte: uma dízima periódica com parte inteira pode ser considerada como a soma da parte inteira com a decimal.

Tendo em vista que 0,43636... é *dez vezes menor* que 4,3636..., segue-se que a fração geratriz procurada é *dez vezes menor* que a da simples, acima obtida.

Conseqüentemente, a geratriz de 0,43636... será

$$\left(4+\frac{36}{99}\right):10.$$

Notando que, para dividir uma soma indicada por certo número se deve dividir cada parcela por êsse número, teremos

$$\left(4+\frac{36}{99}\right):10=\frac{4}{10}+\frac{36}{990}.$$

Reduzindo as frações que se encontram no 2.º membro da igualdade acima ao mesmo denominador e indicando a soma dos numeradores, virá

$$\frac{4}{10}+\frac{36}{990}=\frac{4\times99}{990}+\frac{36}{990}=\frac{4\times99+36}{990},$$

ou, substituindo 99 por 100 — 1,

$$\frac{4\times99+36}{990}=\frac{4(100-1)+36}{990}.$$

Notando que, para multiplicar certo número por uma diferença indicada, se deve multiplicar por êsse número cada têrmo da diferença, obteremos

$$\frac{4(100-1)+36}{990}=\frac{400-4+36}{990}=\frac{400+36-4}{990}=\frac{436-4}{990}.$$

Segue-se, assim, que a geratriz da dízima periódica composta 0,43636... é

$$\frac{436-4}{990}.$$

A consideração dêsse exemplo, bem como a de outros que se possam formular, conduz-nos à regra dada a seguir.

301. **Regra.** — *Para obter a fração geratriz de uma dízima periódica composta, cuja parte inteira é nula, forma-se uma fração que tenha para numerador o excesso do número formado pela parte não periódica, seguida do período, sôbre a parte não periódica, e para denominador um número formado por tantos noves quantos são os algarismos do período, seguidos de tantos zeros quantos são os algarismos da parte não periódica.* — Exemplos

A geratriz de 0,72555... é $\frac{725-72}{900}=\frac{653}{900}$.

A geratriz de 0,007575... é $\frac{75}{9900}=\frac{1}{132}$.

Quando a parte inteira da dízima periódica composta que se considera não é nula procede-se do mesmo modo como no caso das dízimas periódicas simples que têm parte inteira. — Exemplos

A geratriz de 3,63737... é $3+\frac{637-6}{990}=3\,\frac{631}{990}$.

A geratriz de 5,00066... é $5\,\frac{6}{9000}=5\,\frac{6}{9000}=5\,\frac{1}{1500}$.

302. **Exercícios.**

Determinar as frações geratrizes das dízimas periódicas seguintes:

1. de 0,777... R. $\frac{7}{9}$
2. de 0,3232... R. $\frac{32}{99}$
3. de 0,123123... R. $\frac{41}{333}$
4. de 3,0606... R. $3\frac{2}{33}$
5. de 5,195195... R. $5\frac{65}{333}$
6. de 0,5333... R. $\frac{8}{15}$
7. de 0,34666... R. $\frac{26}{75}$
8. de 0,003636... R. $\frac{1}{275}$
9. de 7,4333... R. $7\frac{13}{30}$
10. de 5,789393... R. $5\frac{521}{660}$

Capítulo XIV

NOÇÕES SÔBRE AS PRINCIPAIS FORMAS GEOMÉTRICAS

303. **Preliminares.** — Os diferentes objetos que nos são dados a observar, apresentam-se-nos com várias qualidades, tais como côr, temperatura, forma, pêso, tamanho, etc. (1).

A consideração de objetos, sob o ponto de vista apenas do *tamanho* e da *forma*, conduz-nos à percepção do *meio* em que êles existem, isto é, do *espaço*.

Chamamos corpo *geométrico* ou *sólido* a qualquer porção limitada do espaço.

Os sólidos, bem como o espaço que os contém, possuem três dimensões, a saber: *comprimento*, *largura* e *altura* (ou espessura).

304. **Noção de superfície.** — A consideração de corpos cuja espessura seja muito pequena, conduz-nos à noção de *superfície*, isto é, da figura geométrica de duas dimensões apenas. Assim, a fôlha de papel, ou a camada de tinta com a qual se haja pintado um corpo, embora tenham três dimensões, dão-nos a idéia de *superfícies*.

305. **Noção de linha.** — A consideração de corpos cuja espessura e cuja largura sejam muito pequenas, conduz-nos à noção de *linha*, isto é, da figura geométrica de uma dimensão apenas. Assim, um pedaço de fio ou um traço feito sôbre um corpo, embora tenham três dimensões, dão-nos idéia de *linhas*.

306. **Ponto geométrico.** — A consideração de corpos cujas três dimensões sejam muito pequenas, conduz-nos à noção de *ponto*, isto é, do elemento geométrico sem nenhuma dimensão. Assim, um grão de areia ou o sinal feito com uma

(1) E' elementar o estudo que fazemos no presente capítulo. Todas as noções aqui tratadas serão convenientemente desenvolvidas nos volumes subseqüentes das nossas «Lições de Matemática».

ponta sôbre um corpo, embora tenham três dimensões, dão-nos a idéia de *pontos*.

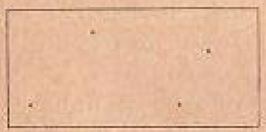
307. **Pontos, linhas e superfícies.** — Uma vez adquiridas as noções de *espaço* e de *ponto*, o nosso espírito tem a faculdade de conceber as linhas como formadas por uma série infinita de pontos, e as superfícies como formadas por uma série infinita de pontos ou linhas.

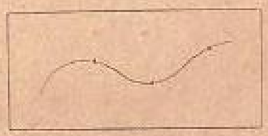
Quando um ponto faz parte de certa linha (ou de certa superfície), dizemos que êle *é* ponto daquela linha (ou daquela superfície). Da linha (ou da superfície) dizemos então que *passa pelo* ponto ou *contém* o ponto.

Quando uma linha faz parte de certa superfície, dizemos que ela *é* linha daquela superfície. Da superfície dizemos então que *passa pela* linha ou *contém* a linha.

Quando a linha *é* de uma superfície, todos os seus pontos *são* dessa superfície.

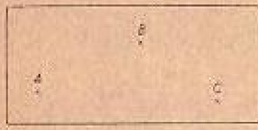
308. **Representação gráfica do ponto.** — Marcamos um ponto *de* uma superfície, por-meio-de duas pequenas linhas que se cortem no lugar desejado.

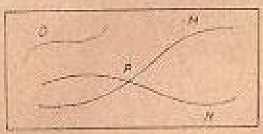




Marcamos um ponto *de* uma linha, por-meio-de pequena linha que corte a primeira no lugar desejado.

309. **Designação do ponto, da linha e da superfície.** — Designamos o ponto, por-meio-de uma letra colocada junto a êle. Designamos a linha, designando um ou mais de seus





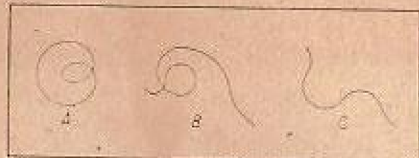
pontos. Os pontos designados devem ser tais, que não permitam confusão entre as diferentes linhas que porventura estejamos estudando na mesma figura. Dizemos: ponto A, ponto B, ponto C, linha D, linha PM, linha PN.

Designamos a superfície, designando um ou mais de seus pontos, nas mesmas condições da linha.

Dado uma linha qualquer AB, podemos considerá-la descrita de A para B ou de B para A. Em ambos os casos a linha é a mesma; varia apenas o sentido em que é considerada.

310. **Linha fechada.** — Dizemos que uma linha é *fechada* quando prolongada suficientemente, em qualquer dos sentidos, acaba passando novamente pelos mesmos pontos, e assim indefinidamente. Quando uma linha não é fechada, embora possa passar duas ou mais vezes por um ou outro de seus pontos, apresentará, quando prolongada indefinidamente, sempre novos pontos.

Assim, dizemos que a linha A é fechada e que as linhas B e C não são fechadas.



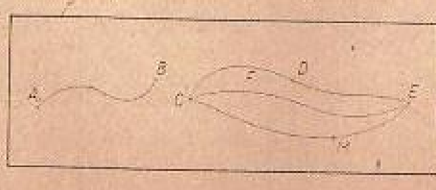
311. **Segmento de linha.** — A porção de uma linha, compreendida entre dois dos seus pontos, é um *segmento dessa linha*. Todo o segmento de linha tem certo comprimento. Quando o sentido não é levado em consideração, a êsses dois pontos chama-se indistintamente *extremidades;* quando devemos entrar em conta com o sentido em que o segmento foi traçado, a primeira extremidade toma o nome de *origem*.

Designamos um segmento, designando suas extremidades, em qualquer ordem.

Quando o sentido deve ser tomado em conta, é indispensável designar primeiramente a origem.

Quando dois ou mais segmentos de linhas diversas têm as mesmas extremidades, devemos designar mais um ponto intermediário de cada um, a-fim-de evitar confusão.

Assim, dizemos: segmento AB, segmento CDE, CFE, CME.



312. **Superfície fechada.** — Dada uma superfície qualquer, ela pode sempre ser prolongada indefinidamente.

Dizemos que uma superfície é *fechada*, quando, prolongada suficientemente, acaba *passando* novamente por todos os seus pontos, e assim indefinidamente.

Quando a superfície não é fechada, embora *passe* duas ou mais vezes por um ou outro de seus pontos, apresentará, quando prolongada indefinidamente, sempre novos pontos.

A porção da superfície, limitada por uma de *suas* linhas fechadas, é *segmento dessa superfície*. Todo o segmento de superfície tem certa *área*.

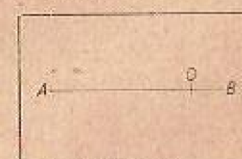
LINHAS

313. A forma de uma linha depende da posição relativa de seus pontos. O número de formas lineares imagináveis é, portanto, ilimitado.

314. **Linha reta.** — A mais simples de todas as formas lineares é a forma *retilínea*.

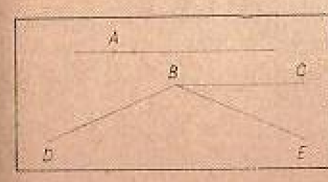
Temos a noção da forma retilínea, observando um pedaço de fio bem esticado. Se agora supusermos êsse fio prolongado indefinidamente, nos dois sentidos, teremos a *linha reta* ou, abreviadamente, *a reta*.

Se considerarmos um ponto qualquer da reta, a cada uma das partes que êle separa na reta chama-se *semi-reta*. A semi-reta é, pois, limitada num dos sentidos e ilimitada no outro. Ao ponto que limita a semi-reta num dos sentidos, chama-se *origem da semi-reta*. A semi-reta não tem *extremidade*.



As duas semi-retas em que o ponto divide uma reta, chama-se semi-retas opostas.

Designamos a semi-reta, designando-lhe a origem, ou a origem e mais um de seus pontos, quando há mais de uma com a mesma origem.



Assim, dizemos; semi-reta A, semi-reta BC, semi-reta BD, semi-reta BE.

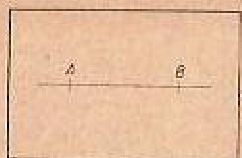
A porção da reta, compreendida entre dois de seus pontos, é, como já vimos ao tratar de linhas quaisquer, um *segmento dessa reta*. Quando mencionamos um segmento retilíneo, dizemos abreviadamente segmento, mas se se tratar de segmento de outra qualidade, devemos especificá-lo.

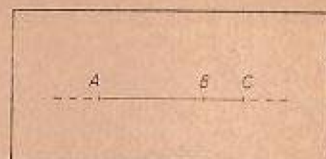
A vários pontos, segmentos e semi-retas, pertencentes à mesma reta, chama-se *colineares*. A reta que *passa* por êles é o seu *suporte*.

Um ponto tem uma infinidade de suportes; isto é, por um ponto *passa* uma infinidade de retas. Um segmento (ou uma semi-reta) só pode ter um suporte, isto é, por dois ou mais pontos, em linha reta, só pode *passar* uma reta.

Designamos um segmento, designando a origem e a extremidade. Designamos uma reta designando um dos seus pontos ou um dos seus segmentos.

Assim, dizemos: *segmento AB*; se dissermos *reta AB*, referimo-nos ao suporte daquele segmento.





Dois segmentos são *iguais*, quando é possível fazer um dêles coincidir com o outro nas extremidades.

Colocando dois segmentos sôbre um mesmo suporte, um em seguida ao outro, de modo que a origem do segundo seja extremidade do primeiro, o segmento que tem para origem a origem do primeiro, e para extremidade a extremidade do segundo, é a *soma* dos dois primeiros segmentos.

Exemplo: O segmento AC é a soma dos segmentos AB e BC.

315. **Linhas não retas.** — As linhas que não são retas podem ser poligonais, curvas ou mixtas.

Linha *poligonal* (ou quebrada) é a linha formada por dois ou mais segmentos, em que, a partir do segundo, a origem de cada um é a extremidade do precedente, não sendo colineares cada dois segmentos consecutivos.

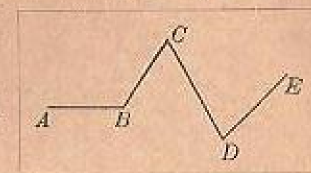
Os segmentos que formam uma linha poligonal são os seus lados.

Cada extremidade comum a dois lados é um *vértice* da linha poligonal.

À soma dos lados de uma linha poligonal chama-se *comprimento* dessa linha.

A origem do primeiro lado é origem da linha poligonal; a extremidade do último lado é a extremidade da linha poligonal.

As noções de sentido e de linha fechada, que já estudámos ao tratar de linhas quaisquer, aplicam-se também às linhas poligonais.



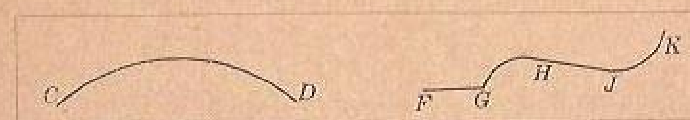
Designamos uma linha poligonal, designando seus vértices e as extremidades, em ordem.

Assim, dizemos: linha ABCDE.

Linha curva é a linha que não tem nenhum segmento reto.

Linha mixta é a linha formada de segmentos, uns retos e outros curvos.

Exemplo: CD é uma linha curva; FGHJK é uma linha mixta.



SUPERFÍCIES

316. A *forma* de uma superfície depende das *formas* e da *posição* relativa das linhas que a compõem. O número de formas de superfícies imagináveis é, portanto, ilimitado.

317. **Superfície plana.** — A mais simples das *formas* que uma superfície pode ter é a *forma plana*.

A qualidade essencial da *superfície plana*, ou abreviadamente *plano*, é que passam retas *suas* por qualquer de seus pontos e em todas as direções.

Há superfícies não planas que também *contêm* retas; mas não por qualquer dos seus pontos e em todas as direções.

Vários pontos ou várias figuras são *complanares*, quando pertencem ao mesmo plano.

Uma figura é *plana* quando todos os seus pontos são complanares. No caso contrário a figura chama-se *reversa*.

Toda a linha reta é plana e pertence a uma infinidade de planos. Há linhas não retas planas e outras reversas.

Uma linha não reta e plana só pode pertencer a um plano; isto é, por três pontos, não em linha reta, *passa* um único plano.

A porção do plano limitada por uma de suas linhas fechadas é *segmento dêsse plano.*

RETAS ENTRE SI

318. Duas retas podem ser complanares ou não.

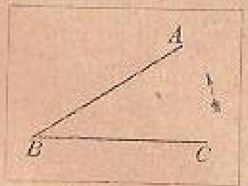
A duas retas complanares que não se encontram, chama-se *paralelas*. Quando duas retas se encontram, chamam-se *concorrentes*. Duas retas concorrentes são sempre complanares. Duas retas não complanares nem são concorrentes nem paralelas.

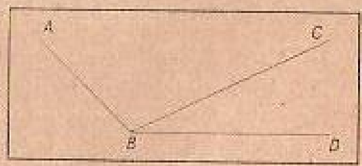
Uma semi-reta (ou um segmento) e uma reta são paralelas, quando o suporte da semi-reta (ou do segmento) e a reta são paralelos.

319. **Ângulos.** — *Ângulo plano*, ou abreviadamente *ângulo*, é a figura formada por duas semi-retas que têm a mesma origem.

A origem comum é o *vértice* do ângulo e as semi-retas são os seus *lados*.

Dois ângulos são *iguais*, quando podemos fazer um dêles coincidir com o outro nos vértices e nos lados. O que carateriza o valor de um ângulo é a abertura existente entre seus lados.





Designamos o ângulo, designando-lhe um ponto de um dos lados, em seguida o vértice e depois um ponto do outro lado.

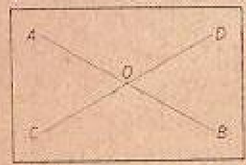
Assim, dizemos: ângulo ABC ou CBA.

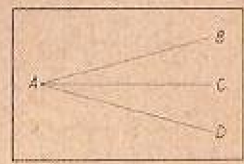
Dois ângulos são *adjacentes* quando têm o mesmo vértice e um lado comum, ficando os outros dois lados separados pelo suporte do lado comum.

Os ângulos ABC e CBD são adjacentes; ABC e ABD não são adjacentes, pois, embora tenham o mesmo vértice e um lado comum, o suporte dêste não separa os outros dois.

Dois ângulos são *opostos pelo vértice* quando os lados de um são as semi-retas opostas aos lados do outro.

Os ângulos AOD e BOC são opostos pelo vértice, bem como AOC e BOD.





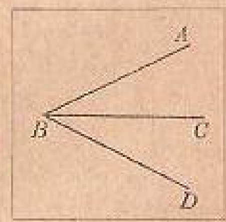
Dois ângulos opostos pelo vértice são sempre iguais.

Assim, o ângulo AOD é igual ao ângulo BOC. Do mesmo modo o ângulo AOC é igual ao ângulo BOD.

Dados dois ângulos, se colocarmos um dêles adjacentemente ao outro, o ângulo formado pelos lados não comuns é a *soma* dos dois primeiros.

Assim, o ângulo BAD é a soma dos ângulos BAC e CAD.

Um ângulo *é maior que* outro quando pode ser decomposto em dois ângulos adjacentes, dos quais um é igual a êsse outro.

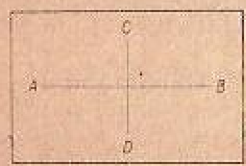


Assim, dizemos que o ângulo ABD é maior que o ângulo ABC.

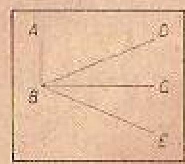
Duas retas que se cortam, formam quatro ângulos. Considerados dois a dois, êsses ângulos podem ser ou adjacentes ou opostos pelo vértice.

Ângulo reto. — Se são iguais dois ângulos adjacentes formados por duas retas que se cortam, os quatro são iguais entre si, e às duas retas chama-se perpendiculares.

Duas semi-retas são perpendiculares, quando os seus suportes são perpendiculares.



Ao ângulo cujos lados são perpendiculares, chama-se *ângulo reto*.



Ângulo agudo é todo ângulo menor que o ângulo reto; *ângulo obtuso* é todo o ângulo maior que o ângulo reto.

Exemplo: ABC é um ângulo reto; ABD é um ângulo agudo; ABE é um ângulo obtuso.

A reta perpendicular a um segmento e passando pelo meio dêle, chamamos *mediatriz* dêsse segmento.

O menor caminho que liga um ponto a uma reta, é na direção da reta que passa pelo ponto e é perpendicular à primeira.

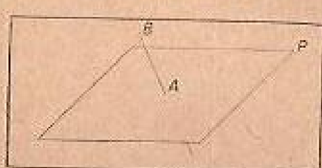
Chama-se *distância* de um ponto a uma reta ao segmento da perpendicular compreendido entre o ponto e a reta.

Dadas duas paralelas, são sempre iguais os segmentos de quaisquer das suas perpendiculares comuns e compreendidos entre elas.

Chama-se *distância* entre duas paralelas ao segmento de uma das suas perpendiculares comuns, e compreendido entre elas. Duas paralelas são portanto eqüidistantes em toda a sua extensão.

RETAS E PLANOS

320. Um plano e uma reta não pertencente a êle são *paralelos*, quando não se encontram. Quando uma reta e um plano se encontram são *concorrentes*. Ao ponto em que a reta *encontra* ou *fura* o plano, chama-se *traço* da reta sôbre o plano.



Assim, dizemos que A é o traço da reta BA sôbre o plano P.

Uma reta é *perpendicular* a um plano quando, encontrando o plano, é perpendicular a tôdas as retas dêsse plano e que passam pelo seu traço.

Quando uma reta é perpendicular a um plano, o plano é perpendicular à reta, e ambos se dizem perpendiculares entre si.

O menor caminho que liga um ponto a um plano, é na direção da reta perpendicular a êsse plano e tirada por aquele ponto.

Distância de um ponto a um plano chama-se ao segmento da perpendicular a êsse plano e compreendido entre o ponto e o plano.

Dada uma reta e um plano paralelos, se por um ponto da reta tirarmos uma perpendicular ao plano, esta será também perpendicular à reta.

São sempre iguais os segmentos das perpendiculares comuns a uma reta e a um plano paralelos, e compreendidos entre a reta e o plano.

Chama-se *distância* entre uma reta e um plano ao segmento de qualquer perpendicular comum e compreendido entre um e outra.

Um plano e uma reta paralelos são, portanto, eqüidistantes em toda a sua extensão.

PLANOS ENTRE SI

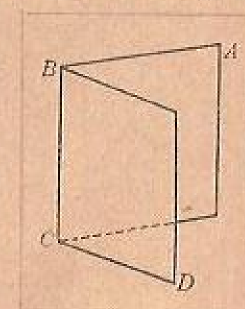
321. Dois planos que não se encontram são paralelos.

Dados dois planos paralelos, qualquer reta perpendicular a um dêles é perpendicular ao outro. Os segmentos de quaisquer perpendiculares comuns compreendidos entre dois planos paralelos, são sempre iguais. Chama-se *distância* entre dois planos paralelos ao segmento de qualquer das suas perpendiculares comuns e entre êles compreendido. Dois planos paralelos são portanto eqüidistantes em toda a sua extensão.

322. **Ângulo diedro.** — A intersecção de dois planos divide cada um dêles em duas partes.

A figura formada por duas dessas partes, uma de cada plano chama-se *ângulo diedro* ou abreviadamente *diedro*.

A reta comum aos dois planos é a *aresta* do diedro; as partes do plano que formam o diedro são as *faces* do diedro.



Assim, dizemos que BC é a aresta do diedro ABCD; BCD e BCA são suas faces.

Chama-se *ângulo plano* correspondente a um diedro ao ângulo formado por duas perpendiculares à aresta e tiradas por um mesmo ponto desta e em cada uma das suas faces.

Todos os ângulos planos de um mesmo diedro são iguais.

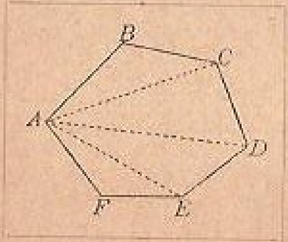
O valor de um ângulo diedro depende do valor do seu ângulo plano. O diedro é *reto* quando seu ângulo plano é reto; conforme o ângulo plano de um diedro seja agudo ou obtuso, o diedro é *agudo* ou *obtuso*.

Dois planos são perpendiculares quando formam um diedro reto.

POLÍGONOS

323. *Polígono* é uma linha poligonal fechada, isto é, aquela cuja origem coincide com a extremidade.

E' claro que, nesse caso, a coincidência da origem com a extremidade dá lugar a um novo vértice. No polígono, cada vértice tem dois vértices que lhe são consecutivos.



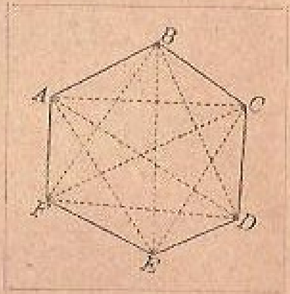
Chama-se *ângulo interno* de um polígono a cada um dos ângulos formados pelas semi-retas que nele contém dois lados consecutivos.

Designamos um polígono, designando os seus diferentes vértices, em ordem.

Assim, dizemos: polígono ABCDEF.

Chama-se *diagonal* de um polígono a cada um dos segmentos que unem dois vértices não consecutivos. Assim, dizemos que AC, AD e AE são diagonais do polígono ABCDEF.

Na figura que se vê ao lado, encontram-se traçadas todas as diagonais distintas que pode ter o polígono ABCDEF.



E' claro que três é o menor número de lados que uma linha poligonal deve ter para ser fechada. Um polígono pode ter, pois, três ou mais lados.

Em relação ao número de lados, denominam-se os polígonos:

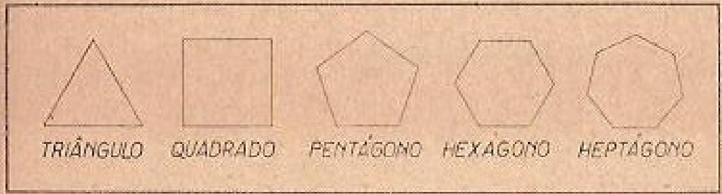
Triângulo, o de três lados.
Quadrilátero, o de quatro lados.
Pentágono, o de cinco lados.
Hexágono, o de seis lados.
Heptágono, o de sete lados.
Octógono, o de oito lados.
Eneágono, o de nove lados.
Decágono, o de dez lados.
Undecágono, o de onze lados.
Dodecágono, o de doze lados.

Pentadecágono, o de quinze lados.
Icoságono, o de vinte lados.

Aos demais não se costuma dar nomes especiais: dizem-se simplesmente polígonos de treze lados, de dezenove lados, etc.

Os polígonos podem ser:
Eqüiláteros, quando os seus lados são todos iguais.
Eqüiângulos, quando os seus ângulos são todos iguais.
Regulares, quando os seus lados e ângulos são todos iguais.

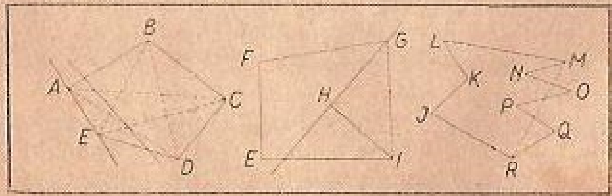
Na figura que segue encontram-se vários exemplos de polígonos regulares.



Os polígonos podem, ainda, ser *côncavos* e *convexos*.

Há vários modos para distinguir o polígono côncavo do convexo.

Todo o polígono reverso é côncavo. O suporte de qualquer dos lados de um polígono convexo não corta o polígono; ao passo que nos polígonos côncavos há lados cujos suportes cortam o polígono. As diagonais de um polígono convexo são sempre interiores; ao passo que no polígono côncavo há diagonais exteriores e formadas mesmo de partes internas e externas. Uma reta não pode cortar um polígono convexo em mais de dois pontos; ao passo que um polígono côncavo pode ser cortado por uma reta em mais de dois pontos.



Assim, dizemos que o polígono ABCDE é convexo, e os polígonos EFGHI e JKLMNOPQR são côncavos.

Dois polígonos *são iguais* quando podemos fazer coincidir os vértices de um dêles respectivamente com os vértices do outro.

324. **Triângulos.** — O mais simples de todos os polígonos é o triângulo.

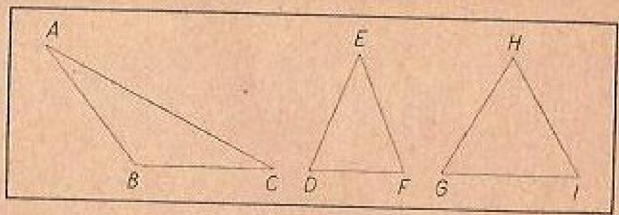
Dessarte, aplica-se ao triângulo tudo o que, quando tratámos de polígonos quaisquer, dissemos a respeito de vértices, lados, ângulos internos e modo de designar.

Devemos notar entretanto que, não tendo vértices não consecutivos, o triângulo não tem diagonais.

Todo triângulo é convexo.

Quanto à relação entre os lados, os triângulos podem ser: *escalenos* ou *isósceles*.

Escaleno é o triângulo que tem os três lados desiguais; *isósceles* é o triângulo que pelo menos tem dois lados iguais. Quando o triângulo tem os três lados iguais não deixa de ser isósceles, mas toma o nome especial de equilátero.



Assim, dizemos que o triângulo ABC é escaleno, que o triângulo DEF é isósceles, sem ser equilátero, e que o triângulo isósceles GHI é equilátero.

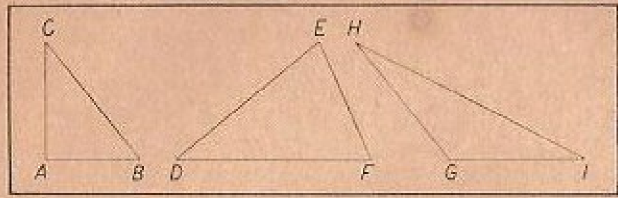
Quanto à natureza dos ângulos, os triângulos podem ser *retângulos* ou *obliquângulos*.

Retângulo é o triângulo que tem um ângulo reto; *obliquângulo* é o triângulo que não tem nenhum ângulo reto.

Os triângulos obliquângulos podem ser: *acutângulos* ou *obtusângulos*.

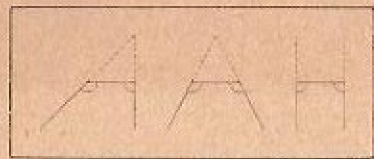
E' *acutângulo* o triângulo que tem os três ângulos agudos; *obtusângulo* é o que tem um ângulo obtuso.

Assim, dizemos que o triângulo ABC é retângulo, que o triângulo DEF é acutângulo e que o triângulo GHI é obtusângulo.



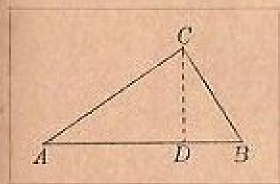
Num triângulo retângulo, aos lados do ângulo reto chama-se *catetos;* ao lado oposto ao ângulo reto chama-se *hipotenusa.*

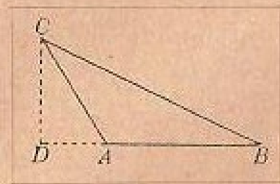
E' fácil verificar que o triângulo não pode ter mais de um ângulo reto, nem mais de um ângulo obtuso, nem um ângulo reto e outro obtuso.



Altura de um triângulo é a distância entre qualquer vértice e o lado oposto. O lado em questão toma o nome de *base* em relação a esta altura.

Um triângulo tem, portanto, três alturas, e a cada uma corresponde uma base.





Pela denominação de altura, entendemos também a posição da reta que, partindo de um vértice, é perpendicular ao lado oposto. Assim, quando dizemos: a área do triângulo é igual à metade do produto da base pela altura, estamos falando de comprimento; quando dizemos: as três alturas se encontram num mesmo ponto, estamos aludindo à posição.

325. **Quadriláteros.** — Quadrilátero é o polígono de quatro lados.

Ao quadrilátero aplicamos o que ficou dito sôbre vértices, ângulos, diagonais, lados, modo de designar, etc., quando tratámos de polígonos quaisquer.

Dois lados não consecutivos de um quadrilátero são também chamados *opostos*. Quadrilátero é, portanto, formado por dois pares de lados opostos.

326. **Paralelogramos.** — Chama-se paralelogramo ao quadrilátero que tem os lados opostos iguais e paralelos.

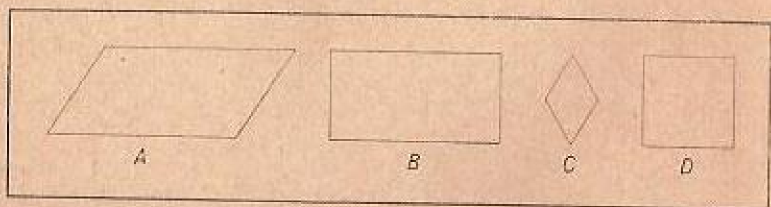
Verifica-se fàcilmente que, sendo paralelos, os lados opostos de um quadrilátero, são também iguais, o que nos permite dizer simplesmente que *paralelogramo* é o quadrilátero que tem os lados opostos paralelos.

Os paralelogramos se classificam em *retângulos* e *losangos*.

Retângulo é o paralelogramo que tem os quatro ângulos iguais.

Losango é o paralelogramo que tem os quatro lados iguais.

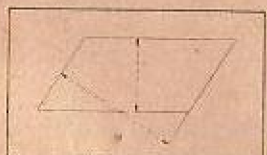
Quando o paralelogramo é simultâneamente retângulo e losango, toma o nome especial de *quadrado*.



Assim, dizemos que A é paralelogramo, que B é retângulo, que C é losango e que D é quadrado.

Altura de um paralelogramo é a distância entre dois lados opostos.

A cada um dêsses lados chama-se *base* em relação àquela altura.



Os paralelogramos têm, pois, duas alturas.

Nos retângulos, cada um dos lados pode ser considerado como altura.

327. **Trapézio.** — Trapézio é o quadrilátero que tem dois lados opostos paralelos.

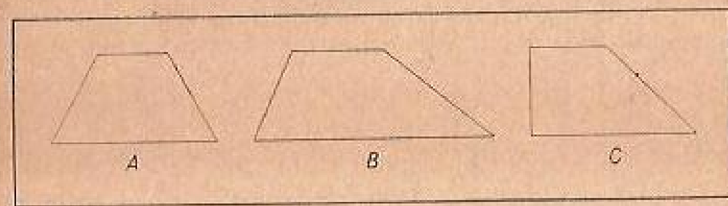
Aos lados não paralelos do trapézio chama-se *bases*. Para distingui-las, dizemos à maior *base maior* e à outra *base menor*.

Os trapézios podem ser: isósceles, escalenos e retângulos.

Trapézio isósceles é aquele que tem os lados não paralelos iguais.

Trapézio escaleno é aquele que tem os lados não paralelos desiguais.

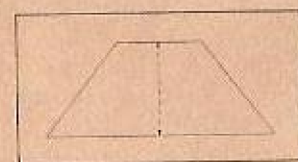
Trapézio retângulo é aquele que tem um dos lados não paralelos perpendicular às bases.



Assim, dizemos que A é trapézio isósceles, que B é trapézio escaleno e que C é trapézio retângulo.

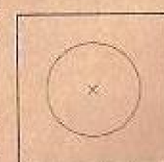
Altura de um trapézio é a distância entre as bases.

Nos trapézios retângulos, o lado perpendicular às bases pode ser considerado como altura.



CIRCUNFERÊNCIA E CÍRCULO

328. *Circunferência* é a linha plana cujos pontos distam igualmente de um ponto chamado centro.



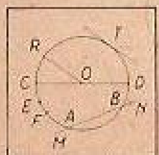
E' fácil verificar, de acôrdo com a definição, que se trata de linha fechada, e que o centro deve estar dentro do segmento de plano limitado pela curva.

Raio de uma circunferência é a distância constante de qualquer ponto da curva ao centro. Todos os raios são, portanto, iguais.

Corda é o segmento compreendido entre dois pontos quaisquer da curva. As cordas que passam pelo centro tomam o nome especial de *diâmetro*. O diâmetro é, portanto, igual ao dôbro do raio.

Arco é qualquer porção da circunferência. A êle se pode chamar também *segmento de circunferência*.

Secante é a reta que corta a circunferência. E' claro que uma reta não pode cortar a circunferência em mais de dois pontos. A secante é, pois, o suporte de uma corda.



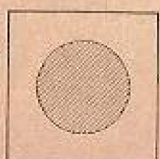
Tangente a uma circunferência é a reta que toca a circunferência num ponto.

Assim, considerando a figura acima, dizemos que

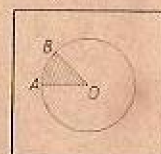
OR é um raio,
AB é uma corda,
EF é um arco,
MN é uma secante e
T é una tangente.

Todo o diâmetro divide a circunferência em dois arcos iguais chamados *semi-circunferência*.

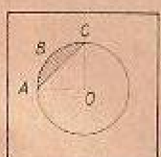
Círculo é a porção de plano limitada pela circunferência.



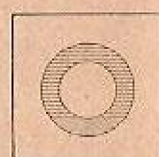
E' bem de ver que se não deve confundir círculo com circunferência, uma vez que circunferência é uma *linha*, e círculo é una *porção de plano*, limitada por essa linha.



Sector circular é a porção do círculo limitada por um arco e os dois raios que determinam suas extremidades.



Segmento circular é a porção do círculo limitada por um arco e a corda que une as suas extremidades.



Coroa circular é a porção de plano compreendida entre duas circunferências que têm o mesmo centro.

POLIEDROS

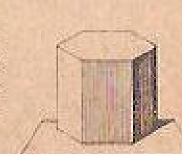
329. *Poliedro* é um *sólido* limitado por superfícies planas. Os planos que formam a superfície de um poliedro são polígonos e a êles chama-se *faces* do poliedro; aos lados das faces chama-se *arestas* do poliedro; aos vértices das faces chama-se *vértices* do poliedro.

A duas faces que têm um lado comum chama-se *faces consecutivas;* duas faces consecutivas formam um diedro do poliedro.

Quatro é o menor númèro de faces que pode ter um poliedro. Os poliedros têm, pois, quatro ou mais faces.

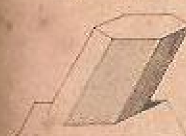
Chama-se *diagonal* de um poliedro ao segmento que liga dois vértices não pertencentes à mesma face.

330. **Prisma.** — Prisma é um poliedro em que duas das faces são polígonos iguais e paralelos, chamados *bases* do prisma, e as demais são paralelogramos, determinados pelos pares de lados iguais e paralelos, um de cada base. Estas últimas chamam-se *fáces laterais* do prisma.



Aos lados comuns às bases e faces laterais chama-se arestas das bases; os lados que só pertencem às faces laterais são as arestas laterais. Umas e outras são arestas do poliedro.

Conforme o número de lados das bases, os prismas podem ser triangulares, quadrangulares, pentagonais, hexagonais, etc.



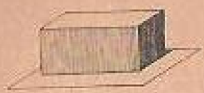
O prisma é *reto* quando as arestas laterais são perpendiculares às bases. O prisma é *oblíquo* quando as arestas laterais são oblíquas em relação às bases.

O prisma é regular quando, além de ser reto, suas bases são polígonos regulares.

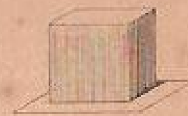
Chama-se altura de um prisma à distância entre suas bases.

331. **Paralelepípedo.** — Quando as bases de um prisma são também paralelogramos, êle toma o nome especial de *paralelepípedo*.

Num paralelepípedo, qualquer das faces pode ser considerada como base, sendo então altura a distância entre essa e a sua oposta.

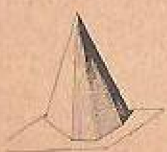


Quando um paralelepípedo é reto e as bases são retângulos, toma o nome especial de *paralelepípedo retângulo*. Nesse caso as faces laterais também são retângulos.



Cubo ou hexaedro regular é o paralelepípedo retângulo cujas faces são todas quadradas.

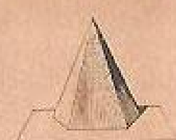
332. **Pirâmide.** — Pirâmide é um poliedro em que uma das faces é um polígono qualquer, chamado *base*, e as demais são triângulos, determinados pelos lados da base e por um ponto comum, situado fora do seu plano. A estas últimas chama-se *faces laterais* da pirâmide.



O vértice comum às faces laterais chama-se *vértice da pirâmide*.

Conforme o número de lados da base, as pirâmides podem ser triangulares, quadrangulares, etc.

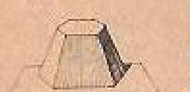
Altura de uma pirâmide é a distância entre o vértice e o plano da base.



A pirâmide é *regular* quando sua base é polígono regular, e, além disso, a altura passa pelo centro da base.

Na pirâmide triangular, qualquer face pode ser considerada como base.

333. **Tronco de pirâmide.** — A porção da pirâmide compreendida entre a base e um plano paralelo à base, chama-se *tronco de pirâmide*.

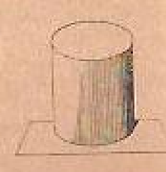


A intersecção dêsse plano com as faces laterais forma uma segunda base. O tronco de pirâmide tem, pois, duas bases, uma maior do que a outra.

Altura de um tronco de pirâmide é a distância entre as bases.

334. **Cilindro.** — Cilindro circular reto ou abreviadamente *cilindro* é o sólido gerado pela revolução de um retângulo em-tôrno-de um dos seus lados.

O suporte do lado fixo chama-se *eixo* do cilindro; a superfície gerada pelo lado oposto chama-se *superfície lateral* do cilindro; os círculos gerados pelos outros dois lados são as *bases* do cilindro.

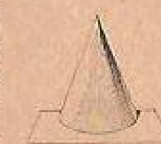


A área do retângulo gera o *volume* do cilindro.

Altura de um cilindro é a distância entre as bases. O segmento do eixo compreendido entre as bases, é, pois, igual à altura do cilindro.

335. **Cone.** — Cone circular reto ou abreviadamente *cone* é o sólido gerado pela revolução de um triângulo retângulo em-tôrno-de um dos seus catetos.

Ao suporte do cateto fixo chama-se *eixo* do cone; à superfície gerada pela hipotenusa chama-se superfície lateral do cone; e o círculo gerado pelo outro cateto é a *base* do cone. O vértice do ângulo agudo fixo é o *vértice* do cone. A área do triângulo gera o volume do cone. Altura de um cone é a distância do vértice à base. O segmento do eixo, compreendido entre o vértice e a base, é, pois, igual à altura do cone.



336. **Tronco de cone.** — Tronco de cone é a porção do cone compreendida entre a base e um plano paralelo à base.

A intersecção da superfície lateral do cone com um plano paralelo à base forma uma segunda base, menor que a outra.

Altura de um tronco de cone é a distância entre as bases.

337. **Esfera.** — Esfera é o sólido limitado por uma superfície cujos pontos distam igualmente de um ponto fixo chamado centro. A esta superfície chama-se *superfície esférica*.

À distância constante, entre um ponto qualquer da superfície esférica e o centro, chama-se *raio* da esfera ou da superfície esférica.

A esfera também pode ser concebida como gerada pelo movimento de um semi-círculo em-tôrno-do seu diâmetro. A área do semi-círculo gera o *volume* da esfera; a semi-circunferência, correspondente ao semi-círculo, gera a superfície esférica.

Capítulo XV

NÚMEROS COMPLEXOS — SISTEMA INGLÊS DE PESOS E MEDIDAS

338. **Números incomplexos e complexos.** — Os números concretos podem ser incomplexos e complexos.

Incomplexos são os que se referem a uma única unidade concreta. — Exemplo

15 dias,

ou abreviadamente, 15^d

Complexos são os que se referem a duas ou mais unidades da mesma espécie, mas que não são ligadas pelas relações decimais. — Exemplo

6 meses 7 dias 4 horas,

ou abreviadamente, $6^m\ 7^d\ 4^h$.

Como veremos a seguir, o módo de ler, de escrever e de operar com os números complexos não é tão simples como com os números do sistema decimal.

A-pesar-disso, êsses números são empregados para exprimir a medida de algumas grandezas, a saber: tempo, arcos e ângulos, moeda inglesa, etc.

339. **Medida do tempo.** — Adotou-se modernamente para unidade de tempo o *segundo*, cujos múltiplos são

minuto = 60 segundos,
hora = 60 minutos,
dia = 24 horas.

Os intervalos de tempo inferiores a um segundo são expressos geralmente em frações decimais do segundo.

Entre outras unidades, empregam-se, na medida dos intervalos de tempo, as seguintes:

a *semana*, que corresponde a 7 dias,
o *mês*, que corresponde a 30 ou 31 dias, e
o *ano*, que corresponde a 365 dias (1).

340. **Medidas dos arcos e dos ângulos.** — A unidade adotada para a medida dos arcos é o *grau*, que corresponde a uma das 360 partes iguais em que se divide a circunferência.

Divide-se o grau em 60 *minutos* e o minuto em 60 *segundos*. — Assim é que

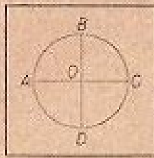
1 *grau* = 60 minutos,
1 *minuto* = 60 segundos.

Na designação dos graus, minutos e segundos de arco, empregam-se os sinais seguintes:

5° (5 graus),
$7'$ (7 minutos),
$13''$ (13 segundos).

Isto posto, para designar o arco de 10 graus, 45 minutos e 18 segundos, escrevemos simplesmente

$10^\circ 45' 18''$



Se dividirmos a circunferência traçada ao lado em 4 partes iguais, marcaremos os arcos AB, BC, CD e DA, denominados *quadrantes*.

Cada um dêles medirá, naturalmente

$$\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ.$$

Se dividirmos, ainda, o quadrante BC em 90 partes iguais e ligarmos os pontos, assim determinados, ao centro da circun-

(1) Oportunamente os estudantes adquirirão as noções seguintes:
dia sideral é o intervalo de tempo que decorre entre duas passagens consecutivas de uma estrêla pelo meridiano do mesmo lugar;
dia solar verdadeiro é o intervalo de tempo que decorre entre duas passagens consecutivas do Sol pelo meridiano do mesmo lugar (é variável por efeito da simultaneidade dos dois movimentos principais da Terra);
dia solar médio é a média constante de um grande número de dias solares verdadeiros;
ano trópico é a duração da revolução completa da Terra em tôrno do Sol. Corresponde aproximadamente a $365\frac{1}{4}$ dias solares médios;
ano civil é um intervalo de tempo convencional correspondente a um número inteiro de *dias civis*: 365 ou 366;
os anos de 366 dias denominam-se *bissextos*.

ferência, obteremos 90 ângulos iguais, cada um dos quais tem por medida *um grau*.

Por outro lado, sendo reto o ângulo BOC, resulta que o ângulo de 1 grau vale $\frac{1}{90}$ do ângulo reto (1).

As unidades de ângulo representam-se do mesmo modo que as de arco.

341. **Moeda inglesa.** — A unidade monetária inglesa é a *libra esterlina*, também denominada *soberano*.

Divide-se a libra em 20 *schiling* ou soldos, e o schiling em 12 *pence* ou dinheiros. — Assim é que

1 *libra* = 20 schiling,
1 *schiling* = 12 dinheiros.

Na designação de libras, schiling e dinheiros empregam-se os sinais seguintes:

7 £ (7 libras),
6 S (schiling),
5 d (5 dinheiros).

Isto posto, para designar a importância de 12 libras, 8 schiling e 4 dinheiros, escrevemos

£ 12 — 8 s — 4 d.

Na prática, abrevia-se ainda mais a notação, escrevendo-se simplesmente o sinal £ à frente do número dado, a saber

£ 12 — 8'' — 4.

342. **Passar um número da forma complexa à incomplexa.** — Exemplo: *reduzir a segundos*

$$3^d\ 6^h\ 15^m\ 10^s.$$

Transformando 3 dias em horas, temos

$$24 \times 3 = 72 \text{ horas.}$$

Essas 72 horas, somadas às 6 do número dado, dão-nos

$$72 + 6 = 78 \text{ horas.}$$

Transformando 78 horas em minutos, resulta

$$78 \times 60 = 4680 \text{ minutos.}$$

(1) Na 2.ª série de nossas «Lições de Matemática», fazemos o estudo completo da medida dos ângulos.

Somando êsses 4680 minutos aos 15 do número proposto, obtemos

$$4680 + 15 = 4695 \text{ minutos.}$$

Transformando 4695 minutos em segundos, vem

$$4695 \times 60 = 281700 \text{ segundos.}$$

Finalmente, reunindo a êsses 281700 segundos os 10 do número considerado, segue-se

$$281700 + 10 = 281710 \text{ segundos.}$$

Na prática, dispõe-se a operação da maneira indicada ao lado.

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 3 \\ \hline 72 \\ +6 \\ \hline 78 \\ \times 60 \\ \hline 4680 \\ +15 \\ \hline 4695 \\ \times 60 \\ \hline 281700 \\ +10 \\ \hline 281710 \end{array}$$

E' bem de ver que poderíamos exprimir o resultado referido a outra unidade do número proposto, que não a menor. — Com efeito, tendo em vista que

$$1 \text{ segundo} = \frac{1}{60} \text{ do minuto,}$$

$$1 \text{ segundo} = \frac{1}{3600} \text{ da hora e}$$

$$1 \text{ segundo} = \frac{1}{86400} \text{ do dia,}$$

segue-se que, para exprimir o resultado acima em minutos, bastará dividir por 60 o total de segundos do número dado, por 3600 se o quisermos exprimir em horas, e por 86.400 se é a dias que se deve referir. — Com efeito,

$$3\,d\ 6\,h\ 15\,m\ 10\,s = 281710\,s = \frac{281710}{60}\,m = 4695,^m 16$$

$$3\,d\ 6\,h\ 15\,m\ 10\,s = 281710\,s = \frac{281710}{3600}\,h = 78,^h 25$$

$$3\,d\ 6\,h\ 15\,m\ 10\,s = 281710\,s = \frac{281710}{86400}\,d = 3,^d 26.$$

343. **Passar um número da forma incomplexa à complexa.** — Exemplo: *exprimir 8615'' em graus, minutos e segundos.*

Para transformar 8615'' em minutos, basta dividí-lo por 60, ou seja,

$$8615 : 60.$$

$$\begin{array}{l|l|l}
8615'' & 60 & \\
261 & 143' & 60 \\
215 & 23' & 2^{\circ} \\
35'' & &
\end{array}$$

O quociente, que é 143, representa minutos, e o resto, que é 35, representa segundos.

Para transformar 143 minutos em graus, basta dividi-los por 60, isto é,

$$143 : 60.$$

O quociente encontrado, 2, representa graus e o resto 23 representa minutos. — Em resumo, temos

$$8615' = 2^{\circ}23'35''$$

344. Exercícios.

1. Reduzir £ 15-7-9 a dinheiros. R. 3.693^{d}
2. Reduzir $13^{\circ}40'12''$ a segundos. R. $49.212''$
3. Reduzir $6^{d}12^{h}45^{m}54^{s}$ a segundos. R. 564.354^{s}
4. Reduzir $10^{d}4^{h}13^{m}17^{s}$ a minutos. R. $14.653, 2^{s}$
5. Reduzir $9^{d}12^{h}6^{m}5^{s}$ a horas. R. $228,^{h}101$
6. Reduzir 1.454^{d} a libras, schiling e dinheiros. R. £. 6-1-2
7. Reduzir $27.209''$ a graus, minutos e segundos. R. $7^{\circ}33'29''$
8. Reduzir 130.700^{s} a dias, horas, minutos e segundos. R. $1^{d}12^{h}18^{m}20^{s}$
9. Reduzir 8.829^{m} a dias, horas e minutos. R. $6^{d}3^{h}9^{m}$
10. Reduzir 751^{h} a semanas, dias e horas. R. $4^{s}3^{d}7^{h}$

OPERAÇÕES

345. Adição. — Consideremos a soma indicada

$$8^{h}40^{m}32^{s} + 7^{h}30^{m}48^{s} + 5^{h}25^{m}50^{s}$$

Para efetuá-la, bastará reünir as unidades de cada ordem dos números dados, observando o que estabelece a regra da adição de números inteiros.

1	2	
8^{h}	40^{m}	32^{s}
7^{h}	30^{m}	48^{s}
5^{h}	25^{m}	50^{s}
21^{h}	97^{m}	130^{s}
21^{h}	37^{m}	10^{s}

Iniciando a operação temos

$$32^{s} + 48^{s} + 50^{s} = 130^{s}$$

Mas, notando que

$$130^{s} = 120^{s} + 10^{s} = 2^{m} + 10^{s},$$

escrevemos, no resultado, 10 segundos, e retemos 2 minutos para reuní-los à soma das unidades, que, em os números dados, representam os minutos. — Resulta, portanto,

$$2^{m} + 40^{m} + 30^{m} + 25^{m} = 97^{m}$$

Mas, por ser

$$97^{m} = 60^{m} + 37^{m} = 1^{h} + 37^{m},$$

escrevemos, no resultado, 37 minutos, e retemos 1 hora para reuní-la à soma das horas dos números propostos. — Obtemos, assim

$$1^{h} + 8^{h} + 7^{h} + 5^{h} = 21^{h}.$$

Portanto

$$8^{h}40^{m}32^{s} + 7^{h}30^{m}48^{s} + 5^{h}25^{m}50^{s} = 21^{h}37^{m}10^{s}.$$

Consideremos, ainda, os exemplos seguintes:

	3 3
£	14-18-11
£	13-15-10
£	12-14- 6
£	10-10- 9
£	52-60-36
£	52- 0- 0

2	1	
5°		
7°	$52'$	
8°	$47'$	$43''$
9°	$56'$	$58'',75$
31°	$156'$	$101'',75$
31°	$36'$	$41'',75$

346. Exercícios e problemas.

Efetuar as operações seguintes:

1. $18^{\circ}17'16'' + 29^{\circ}28'27'' + 45^{\circ}44'43''$ R. $93^{\circ}30'26''$
2. $15^{d}21^{h}57^{m} + 18^{d}19^{h}53^{m} + 12^{d}18^{h}51^{m}$ R. $47^{d}12^{h}41^{m}$
3. $12^{d}15^{h}17^{m}14^{s} + 19^{d}17^{h}18^{m}29^{s} + 20^{h}45^{m}32^{s}$ R. $35^{d}5^{h}21^{m}15^{s}$
4. $15^{d}\ 8^{d}9^{h} + 7^{d}20^{h}53^{m} + 10^{d}13^{h}45^{m}53^{s}$ R. $41^{d}19^{h}38^{m}53^{s}$
5. $25^{\circ} + 23^{\circ}48' + 24^{\circ}37'52''$ R. $73^{\circ}25'52''$
6. $32^{\circ}6'19'' + 28^{\circ} + 12'59'' + 17' + 12^{\circ}13'$ R. $72^{\circ}49'18''$
7. $19^{\circ}6'12'' + 28'7'' + 25^{\circ}47'54'' + 39'18'' + 25''$ R. $46^{\circ}1'56''$
8. Um operário recebe, na primeira semana de trabalho, L. 1-15-7, na segunda £. 1-13-8, na terceira £. 1-7-9 e na quarta £. 1-17-11; quanto recebeu ao todo? £. 6-14-11.
9. Qual é a duração do ano, sabendo-se que a primavera dura 89 dias, 17 horas e 35 minutos; o verão 89 dias, 1 hora e 2 minutos; o inverno 93 dias, 14 horas e 13 minutos; o outono 92 dias, 20 horas e 59 minutos? (Lafférrière y Mendez) R. $365^{d}5^{h}49^{m}$.
10. Duas cidades se encontram sôbre o mesmo meridiano; a latitude da primeira é $18^{\circ}49'36''$ N e a da segunda é $27^{\circ}19'32''$ S. Avaliar em graus, minutos e segundos a distância que as separa. R. $46^{\circ}9'8''$.

347. Subtração. — Consideremos a diferença indicada

$$7^d6^h15^m - 5^d9^h30^m.$$

Para efetuá-la, bastará subtrair, das unidades de cada ordem do minuendo, as unidades de mesma ordem do subtraendo, observando o que estabelece a regra da subtração de números inteiros.

6	29	75
7^d	6^h	15^m
5^d	9^h	30^m
1^d	20^h	45^m

Ao subtrair os minutos dos números dados, notamos que de 15 não se pode subtrair 30. Tomamos, então, 1 hora do minuendo, ou sejam 60 minutos, e reunimos aos 15 nele contidos. — Obtemos, assim,

$$60^m + 15^m - 30^m = 75^m - 30^m = 45^m.$$

Notemos que das 6 horas do minuendo, havendo-se tirado uma para a subtração parcial já efetuada, restam apenas 5. E, como de 5 não é possível subtrair 9, tomamos 1 dia do minuendo, ou sejam 24 horas, e reunimos às 5 nele contidas. — Resulta, assim,

$$24^h + 5^h - 9^h = 29^h - 9^h = 20^h.$$

Finalmente, subtraindo os dias contidos nos números propostos, vem

$$6^d - 5^d = 1^d.$$

Em resumo, temos

$$7^d6^h15^m - 5^d9^h30^m = 1^d20^h45^m.$$

Consideremos, ainda, os exemplos seguintes:

5	26	22
6£	7^s	10^d
4£	18^s	11^d
1£	8^s	11^d

89	59	60
90°		
15°	32′	47″
74°	27′	13″

348. Exercícios e problemas.

Efetuar as operações seguintes:

1. 180° — 67°48′35″ — R. 112°11′25″
2. 32°6′ — 18°14′25″ — R. 13°41′35″
3. 29°12′6″ — 22°15′9″ — R. 6°56′57″
4. $15^d - 6^d4^h12^m33^s$ — R. $8^d19^h47^m27^s$
5. $21^d7^h - 18^d15^h6^m39^s$ — R. $2^d15^h53^m21^s$
6. $23^d12^h5^m - 20^d15^h53^m18^s$ — R. $2^d20^h11^m42^s$
7. $25^d7^h4^m33^s - 21^d9^h12^m34^s$ — R. $3^d21^h15^m59^s$
8. Qual foi o intervalo de tempo transcorrido desde as 6 horas do dia 7 de setembro até as 15 horas do dia 15 de novembro do mesmo ano? R. 69^d8^h
9. Avaliar, em horas, minutos e segundos o excesso da duração de um ano bissexto sôbre o ano trópico, que é de $365^d5^h48^m47^s5488$. R. $18^h11^m12{,}4512$
10. As latitudes austrais de duas cidades situadas no mesmo meridiano são, respectivamente, 48°17′32″ e 19°35′18″. Avaliar em graus, minutos e segundos a distância que as separa. R. 28°42′14″.

349. Multiplicação. — Consideremos os casos seguintes:

1.° *O multiplicando é complexo e o multiplicador incomplexo.*

2.° *Os dois fatores são complexos.*

350. 1.° Caso. — Consideremos o problema seguinte: *Calcular o arco 7 vezes maior que 15°32′24″.*

Evidentemente, a solução do problema proposto será obtida pelo produto de 15°32′24″ por 7.

Para efetuá-lo, bastará multiplicar pelo multiplicador cada uma das unidades de que se compõe o multiplicando. — Encontramos, assim

15°32′24″
7
105°224′168″
108° 46′ 48″

$$24'' \times 7 = 168''.$$

Mas, tendo em vista que

$$168'' = 120'' + 48'' = 2^m + 48'',$$

escrevemos apenas 48″ e retemos 2′ para reuní-los ao produto parcial seguinte. — Resulta, portanto,

$$32' \times 7 + 2' = 224' + 2' = 226'.$$

Mas, por ser

$$226' = 180' + 46' = 3^\circ + 46',$$

escrevemos no resultado 46′ e retemos 3° para reuní-los ao produto parcial subseqüente. — Obtemos, assim

$$15^\circ \times 7 + 3^\circ = 105^\circ + 3^\circ = 108^\circ.$$

Em resumo, temos

$$15^\circ 32' 24'' \times 7 = 108^\circ 46' 48''.$$

Mas também se pode resolver o problema dado, reduzindo o número complexo à forma incomplexa, para depois efetuar a operação. — Encontraremos, assim,

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times 60 \\ \hline 900 \\ +32 \\ \hline 932 \\ \times 60 \\ \hline 55920 \\ +24 \\ \hline 55944 \end{array}$$

ou, efetuando a multiplicação

$$55944'' \times 7 = 391608''.$$

Exprimindo o resultado obtido em graus, minutos e segundos,

$$\begin{array}{r|l} 391608 & 60 \\ \cline{2-2} 316 & 6526 \;|\; 60 \\ 160 & 526 \quad 108 \\ 408 & 46 \\ 48 & \end{array}$$

Resulta, portanto

$$15^\circ 32' 24'' \times 7 = 108^\circ 46' 48''.$$

351. **2.º Caso.** — *Consideremos o problema seguinte: calcular o gasto com o consumo de energia elétrica em uma fábrica durante $6^d 5^h 30^m$ de trabalho ininterrupto, sabendo-se que o gasto por hora é £ 1-5-8.*

O problema proposto conduz-nos à multiplicação de dois números complexos.

Como o gasto é dado por hora, reduzamos o intervalo de tempo a horas. — E encontramos

$$6^d\, 5^h\, 30^m = 8970^m = \frac{8970}{60}\,h = \frac{299}{2}\,h.$$

Por outro lado, exprimindo em dinheiros a importância gasta por hora, obtemos

$$£\,1 - 5 - 8 = 308^d.$$

Resulta, portanto,

$$308 \times \frac{299}{2} = \frac{99092}{2}\,d = 49546\ d.$$

Finalmente, exprimindo o resultado obtido em libras, schiling e dinheiros, temos

$$49546^d = £\,206 - 8 - 10.$$

352. **Exercícios e problemas.**

1. Multiplicar £ 18-3-4 por 7 — R. £ 127-3-4
2. Multiplicar $85^\circ 47' 53''$ por 15 — R. $1.286^\circ 58' 15''$
3. Multiplicar $7^d 6^h 18^m 43^s$ por 23 — R. $167^d 1^h 10^m 29^s$
4. Multiplicar $73^\circ 19' 18'',25$ por 16 — R. $1.173^\circ 8' 52''$
5. Multiplicar $12^d 7^h 43^m 12^s,75$ por 8 — R. $98^d 13^h 45^m 42^s$
6. Quanto custam 19 quilogramas de certa mercadoria, cujo preço do quilograma é £. 1-6-7. — R. £ 25-5-1.
7. Para fazer uma revolução sideral, gasta Vênus $224^d 16^h 49^m 9^s,12$; que tempo gastará para efetuar 5 revoluções? — R. $1123^d 12^h 5^m 45,6$
8. Sabendo-se que a Lua demora $27^d 7^h 43^m 11,5$ para percorrer a sua trajetória em-tôrno-da Terra, em que tempo fará revoluções completas? — R. $163^d 22^h 19^m 9^s$
9. Medindo o arco de 1° de certa circunferência 41 metros, qual é o comprimento do arco de $18^\circ 32' 47''$ da mesma circunferência? — R. $760^\circ 24' 7''$.
10. Uma pessoa ganha £ 5-17-11 por mês. Em quanto importa o seu salário de $1^a 6^m 12^d$? (consideram-se meses de 30 dias) — R. £. 108-9-8.

353. **Divisão.** — Consideremos os casos seguintes:

1.º *o dividendo é complexo e o divisor incomplexo.*
2.º *o dividendo é incomplexo e o divisor é complexo.*
3.º *o dividendo e o divisor são complexos.*

354. **1.º Caso.** — Consideremos o problema seguinte: — *Calcular o preço de 1 quilograma de certa mercadoria, sabendo-se que 8 quilogramas custam £. 19-8-7.*

Evidentemente, o problema conduz-nos à divisão de £ 19-8-7 por 8.

$$\begin{array}{r|l} \text{£. } 19-8-7 & 8 \\ \cline{2-2} 3 & \text{£. } 2-8-6\frac{7}{8} \\ \times 20 & \\ \hline 60 & \\ +8 & \\ \hline 68 & \\ 4 & \\ \times 12 & \\ \hline 48 & \\ +7 & \\ \hline 55 & \\ 7 & \end{array}$$

Iniciando a divisão das unidades de cada ordem do dividendo pelo divisor a partir das mais altas, ou seja,

$$\text{£. } 19 : 8,$$

encontramos o quociente 2 e o resto 3, ambos expressos em libras.

Convertendo o resto em schiling, temos

$$\text{£. } 3 = 3 \times 20 = 60^{s}$$

Reunindo, aos 60 s. provenientes do primeiro resto, os 8 s. contidos no dividendo, resulta

$$60\,s + 8\,s = 68\,s.$$

Dividindo o novo dividendo parcial pelo divisor, ou seja,

$$68\,s : 8,$$

obtemos o quociente 8 e o resto 4, ambos expressos em schiling. — Convertendo o resto em dinheiros, vem

$$4\,s = 4 \times 12 = 48\,d.$$

Reunindo, aos 48 d. provenientes do segundo resto, os 7 d contidos no dividendo, encontramos

$$48\,d + 7\,d = 55\,d.$$

Finalmente, dividindo êsse novo dividendo pelo divisor, ou seja,

$$55\,d : 8,$$

encontramos o quociente 6 e o resto 7, ambos expressos em dinheiros. — Segue-se, assim, que

$$\frac{\text{£. } 19-8-7}{8} = \text{£. } 2-8-6\frac{7}{8}.$$

355. **2.º Caso.** — Consideremos o problema seguinte: *um móvel percorreu 43º de certa circunferência em $5^h\,7^m\,30^s$. Qual foi o seu percurso em uma hora?*

Evidentemente, o problema conduz-nos à divisão de 43º por $5^h 7^m 30^s$. — Mas, tendo em vista que

$$5^h 7^m 30^s = \frac{18450}{3600}\,h = \frac{41}{8}\,h$$

resulta que a solução procurada é

$$43^{\circ} : \frac{41}{8} = \frac{43 \times 8}{41} = \frac{344}{41}$$

Efetuando a divisão acima indicada, encontraremos

$$8^{\circ}\,23'\,24''\,\frac{36}{41}.$$

356. **3.º Caso.** — Consideremos o problema seguinte: *Calcular o salário por dia de um operário, sabendo-se que, por $5^d 6^h 30^m$ de serviço recebeu £. 1-17-11.* — Tendo em vista que

$$5^d 6^h 30^m = \frac{7590}{1440}\,h = \frac{253}{48}\,h$$

e que

$$\text{£. } 1\text{-}17\text{-}11 = \frac{455}{240}\,\text{£} = \frac{91}{48}\,\text{£}$$

se reduz o problema à divisão seguinte:

$$\frac{91}{48}\,\text{£} : \frac{253}{48}.$$

Efetuando-a, encontramos

$$\frac{91}{48} : \frac{253}{48} = \frac{91 \times 48}{48 \times 253} = \frac{91}{253}\,\text{£},$$

de onde resulta

$$\frac{91}{253}\,\text{£} = \text{£. } 0\text{-}7\text{-}2\,\frac{82}{253}.$$

357. Exercícios e problemas.

1. Dividir £. 12-6-9 por 5. R. £. 2-9-4 $\frac{1}{5}$
2. Dividir 47°35'17" por 6 R. 7°55'52" $\frac{5}{6}$
3. Dividir £ 18-5-8 por 23 R. £. 0-15-10 $\frac{17}{23}$
4. Dividir 13°7'19" por 35 R. 22'29"
5. Dividir $7^d8^h4^m$ por 3 R. $2^d10^h21^m$
6. Dividir $6^d12^h17^m14^s$ por 25 R. $6^h15^m5^s$
7. Calcular o preço do metro de certa mercadoria, sabendo-se que 13^m custaram £. 4-5-6 R. £. 0-6-6
8. Exprimir em graus, minutos e segundos o comprimento do arco de 1 metro de certa circunferência, sabendo-se que o arco de 48°15'19" mede 16^m. R. 3°0'57".
9. Calcular o salário semanal de um operário, sabendo-se que, por $3^{sm}4^d5^h$ de trabalho recebeu £. 4-5-7 R. £. 1-3-9 $\frac{102}{605}$
10. Uma roda girou 1200°19'14" em $2^h3^m4^s$. Quanto girou em 1 hora? R. 585°31'20".

SISTEMA INGLÊS DE PESOS E MEDIDAS

358. Preliminares. — A situação econômica que a Inglaterra e os Estados Unidos ocupam em face do Mundo, exige dos estudantes o conhecimento do sistema inglês de pesos e medidas, o qual é assaz usado. Adotam-no, além das nações industriais já citadas, as colônias e os protetorados do Império Britânico, a China e a minúscula república Dominicana.

O comércio internacional, em que predomina hoje a língua inglesa, se faz, em regra, sob bases dessas medidas.

Assim é que, mesmo em países, onde se adotou o sistema métrico decimal, muitos artigos, como sejam, peças de maquinária, óleos, combustíveis líquidos, etc., são referidos às unidades inglesas de pesos e medidas.

359. Medidas de comprimento. — A unidade principal é a *jarda* (yard), que corresponde, no sistema métrico decimal a 0,9144. A sua abreviatura é *yd*.

Damos a seguir os múltiplos e submúltiplos da jarda, acompanhados dos nomes ingleses e portugueses, das abreviaturas respectivas e dos valores correspondentes ao *metro*.

Nome português	Nome inglês	Abrevia-thras	Valor	Conversão em metros
Milha	mile	ml	1.760 yd	$1.609^m,3296$
Furlong	furlong	fur	220 yd	$201^m,1662$
Corrente	chain	ch	22 yd	$20^m,1166$
Percha	perch	po	$5\frac{1}{2}$ yd	$5^m,0291$
Braça	fathom	fa	2 yd	$1^m,8287$
Jarda	yard	yd	—	$0^m,9144$
Pé	foot	ft	$\frac{1}{3}$ yd	$0^m,3048$
Polegada	inch	in	$\frac{1}{12}$ ft	$0^m,0254$
Linha	line	l	$\frac{1}{12}$ in	$0^m,0021$

360. Medidas de superfície. — As unidades de superfície correspondem (exceto a *geira*) às superfícies dos quadrados construídos sôbre as unidades de comprimento. As mais usadas são:

Nome português	Nome inglês	Abreviaturas	Valor	Conversão em metros
Milha quad.	square mile	sq. ml.	640 ac.	$2^{Kg}.58993920$
Geira	acre	ac.	4840 sq. yd	$4046^{m^2},78$
Jarda quad.	square yard	sq. yd	9 sq. ft	$0^{m^2},836112$
Pé quad.	square foot	sq. ft	144 sq. in	$0^{m^2},092901$
Polegada q.	square inch	sq. in	—	$0^{m^2},000645$

361. Medidas de volume. — As unidades de volume correspondem aos cubos construídos sôbre as unidades de comprimento. As mais usadas são:

Nome português	Nome inglês	Abreviaturas	Valor	Conversão em metros
jarda cúbica	Cubic yard	c. ft	27 c. ft	$0^{m^3},764554857$
pé cúbico	cubic foot	c. yd	1728 c. in	$0^{m^3},028316084$
polegada cúb.	cubic inch	c. in	—	$0^{m^3},000016387$

362. **Medidas de capacidade.** — A unidade principal é o *galão* (gallon), que corresponde, no sistema métrico decimal, a 4,5436. A sua abreviatura é *gall.*

Damos a seguir os múltiplos e submúltiplos do galão, acompanhados dos nomes ingleses e portugueses, das abreviaturas respectivas e dos valores correspondentes em litros.

Nome português	Nome inglês	Abreviaturas	Valor	Conversão em litros
Quarta	quarter	qr.	640 gall	$290^{l},7892$
Alqueire	bushel	bus.	8 gall	$36^{l},3487$
Selamin	peck	pk.	2 gall	$9^{l},0872$
Galão	gallon	gall.	—	$4^{l},5436$
Quarta	quart	qt.	gall	$1^{l},1359$
Quartilha	pint	pt.	gall	$0^{l},5679$

363. **Medidas de pêso.** — A unidade principal é a *libra avoir du pois*, que corresponde, no sistema métrico decimal, a 453 g,5927. A sua abreviatura é *lb.* Os múltiplos e submúltiplos da unidade principal mais usados são:

Nome português	Nome inglês	Abreviaturas	Valor	Conversão em quilogramas
Tonelada	ton	T.	20 cwt.	$1016^{Kg.},0475$
Quintal	centweight	cwt.	4 qr.	$50^{Kg.},8024$
Quarta	quarter	qr.	28 lb.	$12^{Kg.},7006$
Libra avoir du pois	pound	lb.	—	$0^{Kg.},4535927$
Onça	ounce	oz.	$\frac{1}{6}$ lb.	$0^{Kg.},0283495$
Dracma	dram	dr.	$\frac{1}{16}$ oz.	$0^{Kg.},0017718$

Capítulo XVI

SISTEMA MÉTRICO DECIMAL

364. **Preliminares.** — Ao conjunto de unidades destinadas à medida das grandezas, dá-se a denominação de *sistema de medidas*.

Os sistemas de medidas podem ser: *arbitrários* e *racionais*.

São arbitrários os sistemas cujas unidades empregadas na medida das diferentes grandezas não guardam relação nenhuma entre si.

Como exemplo de sistema arbitrário, citemos o sistema inglês de pesos e medidas.

Com efeito, ao estudá-lo no capítulo anterior, verificámos que a *jarda*, unidade principal de comprimento, nenhuma relação tem com o *galão*, unidade principal de capacidade.

Por outro lado, dizemos que são racionais os sistemas, cujas unidades se encontram ligadas por meio de relações geométricas ou físicas, a um pequeno número delas.

O sistema métrico decimal, como veremos a seguir, é racional, por isso que nele todas as unidades se derivam de duas apenas, a saber, *metro* e *quilogramo-massa*.

365. **Unidades fundamentais e derivadas.** — Damos a denominação de *fundamentais* às unidades que, nos sistemas racionais, são escolhidas como padrões e das quais dependem as demais denominadas unidades *derivadas*.

366. **Histórico.** — Outrora, os sistemas de medidas adotados pelos diversos povos eram arbitrários e distintos entre si.

Essa diversidade trazia enormes embaraços às relações de comércio internacional, não só por exigir dos que o praticavam exatos conhecimentos de grande número de unidades arbitrárias, como também porque algumas delas, embora tivessem a mesma designação, variavam de valor de um país para outro.

Era o que acontecia, por exemplo, com relação ao *palmo*, à *polegada* e ao *pé*, unidades de comprimento, cujos valores não eram os mesmos em todos os paises que as adotavam.

Ainda mais, acontecia que, no mesmo país, certas unidades tinham valor variável em partes diferentes do seu território.

Assim é que, no Brasil, o *alqueire*, unidade agrária, cujo uso era muito generalizado, tinha valores que variavam até de um Estado para outro vizinho. S. Paulo e Minas, por exemplo, nem sempre eram acordes neste ponto. Valia o alqueire paulista 24.200 metros quadrados, e o alqueire mineiro media exatamente o dôbro, ou seja, 48.400 metros quadrados.

E' bem de ver que o progresso das relações internacionais, hoje tão desenvolvidas entre todos os povos do mundo, exigia a uniformização das medidas, com a adoção de um sistema racional que pudesse ser universalmente adotado.

Coube à França a iniciativa de organizá-lo.

Em 1790, depois de fracassadas as negociações com a Inglaterra para colaborar nesse sentido, resolveu a Academia de Ciências de París, a quem a Assembléia Constituinte havia confiado plenos poderes no ano anterior, levar avante os trabalhos e tratar preliminarmente da escolha de uma unidade fundamental.

Depois de muito hesitar, a comissão encarregada pela Academia, da qual faziam parte Borda, Lagrange, Laplace, Monge e Condorcet, decidiu adotar, como unidade fundamental, uma fração do comprimento do meridiano terrestre.

Logo depois, Delambre e Mechain mediram, em toesas, o arco do meridiano compreendido entre Barcelona e Dunquerque. Do resultado obtido, deduziram o comprimento do quadrante do meridiano, encontrando 5.130.740 toesas. A décima-milionésima parte dêsse comprimento chamou-se *metro*, unidade fundamental do novo sistema de medidas.

Fixado o valor do metro, construiu-se um tipo padrão em platina iridiada, com a forma da figura ao lado, e outro padrão também da mesma liga para a unidade de massa, denominado quilogramo, correspondente ao pêso dum decímetro cúbico de água distilada no seu máximo de densidade, no vácuo.

Êstes padrões foram colocados nos Arquivos Nacionais e depois transportados para o pavilhão de Breteuil, em Sèvres, onde se encontram ainda.

Posteriormente à construção dêsses dois tipos padrões, foram efetuadas outras medidas, mais exatas do arco do meridiano, verificando-se, então, não ser o metro exatamente igual à décima milionésima parte do quadrante do meridiano, mas inferior de $0^{mm},187$ àquela medida.

Verificou-se também que, não obstante todo o cuidado com que foi construído o quilogramo-padrão, o seu pêso não é igual ao do decímetro cúbico de água distilada nas condições acima citadas, mas excede de $0^{g},003$ àquela medida.

Entretanto, foram mantidos ambos os padrões, que passaram a ser *medidas convencionais*, cujas definições adiante daremos.

367. **Sistema métrico decimal.** — O novo sistema, que tem como unidades fundamentais, o metro e o quilogramo, recebeu o nome de *sistema métrico decimal*, por serem decimais as relações entre as unidades principais e secundárias de mesma espécie.

368. **Unidades principais.** — Empregam-se, na medida das grandezas, as seguintes:

Unidade de comprimento:	*metro*.
Unidade de superfície:	*metro quadrado*.
Unidade de volume:	*metro cúbico*.
Unidade da massa:	*quilogramo*.
Unidade de capacidade:	*litro*.

369. **Unidades secundárias.** — Derivam-se, das unidades principais acima citadas, as unidades secundárias, que se sucedem, como dissemos, segundo relações decimais.

A sua designação é feita pela anteposição, à unidade principal de cada espécie, dos prefixos que seguem:

quilo,	que significa	1000,
hecto,	que significa	100,
deca,	que significa	10,
deci,	que significa	0,1,
centi,	que significa	0,01,
mili,	que significa	0,001.

370. **Medidas efetivas.** — Empregam-se no comércio várias medidas, denominadas *reais* ou *efetivas*, construídas de ferro, chumbo, madeira, ou qualquer outra matéria, medidas essas de formas reguladas por lei e sujeitas às verificações pelo Govêrno.

MEDIDAS DE COMPRIMENTO

371. A unidade principal de comprimento, como vimos, é o *metro*, definido da maneira seguinte:

Metro é a distância, à temperatura do gêlo fundente, entre os eixos dos dois traços gravados sôbre a barra de platina iridiada, depositada no «Bureau International de Poids e Mesures» e declarada, pela primeira Conferência Geral de Pesos e Medidas, e padrão protótipo do metro (1).

A abreviatura empregada para a designação da unidade principal de comprimento é a letra *m*. — Assim, o número

15 metros,

é representado abreviadamente do modo seguinte:

$$15^{m}.$$

As unidades secundárias de comprimento usadas em o nosso País são as seguintes:

Nome	Abreviatura	Valor em metros
Quilômetro	km	1000
hectômetro	hm	100
decâmetro	dam	10
metro	m	—
decímetro	dm	0,1
centímetro	cm	0,01
milímetro	mm	0,001
mícrom	μ	0,000001

372. **Numeração.** — A relação entre as unidades de comprimento é a seguinte:

(1) Todas as definições do presente capítulo, bem como a nomenclatura das diversas unidades adotadas em o nosso País, a grafia respectiva, etc. foram tiradas do «Projeto de decreto que amplia a execução da lei n. 1.157, de 26 de junho de 1862, cria o Instituto Nacional de Padrões e dá outras providências», publicado pelo Ministério do Trabalho, Indústria e Comércio, em o Diário Oficial de 12 de dezembro de 1933.

Cada unidade de comprimento é dez vezes maior que a imediatamente inferior. — Assim, por exemplo,

$$13^{dam} = 130^{m} \text{ e } 18^{cm} = 180^{mm}.$$

373. **Modo de escrever e de ler as unidades de comprimento.** — Os números que exprimem medidas de comprimento são escritos e lidos do mesmo modo que os números inteiros e decimais. — Assim, o número

3 hectômetros, 4 decâmetros, 6 metros e 6 decímetros,

é escrito abreviadamente

$$346^{m},6.$$

Por outro lado o número

$$12^{m},491$$

é lido da maneira seguinte: doze metros e quatrocentos e noventa e um milímetros.

374. **Mudança de unidade.** — Consideremos o número

$$123,^{dam}213,$$

composto, como sabemos, de 1 quilômetro, 2 hectômetros, 3 decâmetros, 2 metros, 1 decímetro e 3 centímetros.

Evidentemente, se transportarmos a *vírgula uma casa para a direita* e dermos, à parte inteira, a designação da unidade imediatamente seguinte (*metro*), o número resultante

$$1232^{m},13$$

será eqüivalente ao primitivo, uma vez que se comporá também de 1 quilômetro, 2 hectômetros, 3 decâmetros, 2 metros, 1 decímetro e 3 centímetros.

Dessarte, teremos sempre

$$1232^{m},13 = 123^{dam},213 = 12^{hm},3213 = 1^{km},23213$$

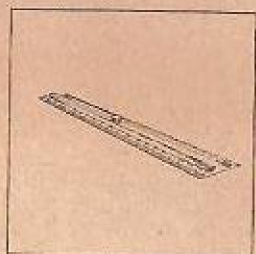
ou $$1232^{m},13 = 12321^{dm},3 = 123213^{cm} = 1232130^{mm}.$$

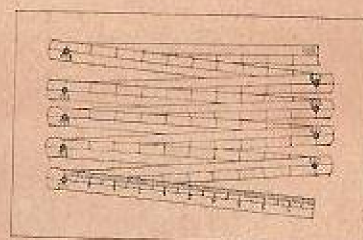
E' bem de ver que a escolha da unidade depende da grandeza que se quer medir. Em geral, a medida das grandes distâncias, como trechos de estradas de rodagem, de ferro, etc., é expressa em quilômetros. As pequenas medidas são freqüentemente expressas em metros e centímetros.

375. **Medidas efetivas.** — Empregam-se constantemente na prática as seguintes:

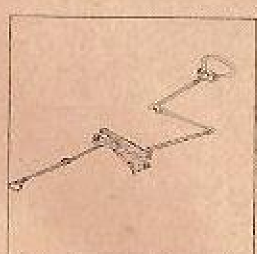
decímetro,
duplo-decímetro,
metro,
duplo-metro,
decâmetro,
duplo-decâmetro.

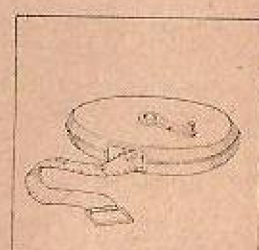
As duas primeiras são muito usadas pelos desenhistas e pelos estudantes. São réguas rijas de metal ou madeira, geralmente graduadas em milímetros.





O metro e o duplo-metro têm enorme aplicação na prática, seja sob a forma de réguas rijas como são as de que se servem os negociantes ou sob a forma de réguas articuladas como as que usam os operários de construção.





Finalmente, as duas últimas, denominadas trenas e correntes, são freqüentemente empregadas pelos agrimensores. As trenas são fitas metálicas ou de pano e as correntes são formadas de pequenas hastes metálicas ligadas por anéis.

MEDIDAS DE SUPERFÍCIE

376. As unidades de superfície são as áreas dos quadrados de lados iguais às unidades de comprimento (1).

A principal é o *metro quadrado*, cuja abreviatura é m^2.

As unidades de superfície usadas em o nosso País são as seguintes:

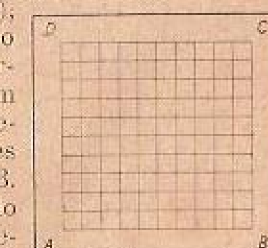
NOME	Abreviatura	Valor em metros quadrados
Quilômetro quadrado	km^2	1000.000
hectômetro quadrado	hm^2	10.000
decâmetro quadrado	dam^2	100
metro quadrado	m^2	—
decímetro quadrado	dm^2	0,01
centímetro quadrado	cm^2	0,0001
milímetro quadrado	mm^2	0,000001

377. **Numeração.** — A relação entre as unidades de superfície é a seguinte:

Cada unidade de superfície é cem vezes maior que a imediatamente inferior. — Assim, dizemos, por exemplo que

$$5^{m2} = 500^{dm2} \quad e \quad 12^{hm2} = 1200^{dam2}$$

Com efeito, voltando a tratar da interpretação geométrica do quadrado de um número (n.º 129), construamos um quadrado de 1 metro de lado. Dividindo o lado AB em 10 partes iguais, tracemos, pelos pontos assim determinados, paralelas ao lado AD. Depois, dividindo o lado AD em 10 partes iguais, tracemos paralelas ao lado AB. Como é fácil de verificar, o quadrado ABCD ficou dividido em 100 quadros menores de um decímetro quadrado de área.



378. **Modo de escrever as unidades de superfície.** — Em conseqüência do que se acaba de expor, segue-se que, para

(1) Em geral empregam-se os termos *área* e *superfície* na mesma acepção. Notemos, porém, que área é uma porção limitada de superfície.

escrever os números que exprimem medidas de superfície, são necessários dois algarismos para cada unidade.

Assim, o número 4 decâmetros quadrados, 13 metros quadrados, 5 decímetros quadrados e 12 centímetros quadrados, é escrito abreviadamente do modo seguinte:

$$413^{m^2},0512.$$

379. **Modo de ler as unidades de superfície.** — Lê-se a parte inteira, com a designação da unidade adotada, e depois a decimal, com a designação da menor unidade contida no número dado. — Assim, o número

$$15^{m^2},091306$$

é lido da maneira seguinte: quinze metros quadrados, noventa e um mil trezentos e seis milímetros quadrados.

380. **Mudança de unidade.** — Consideremos o número

$$12^{dam^2},3809$$

composto, como sabemos, de 12 decâmetros quadrados, 38 metros quadrados e 9 decímetros quadrados.

Evidentemente, se transportarmos a vírgula *duas casas* para a direita e dermos, à parte inteira, a designação da unidade imediatamente seguinte (metro quadrado), o número resultante

$$1238^{m^2},09$$

será eqüivalente ao primitivo, uma vez que se comporá também de 12 decâmetros quadrados, 38 metros quadrados e 9 decímetros quadrados. — Isto posto, teremos sempre

$$0^{hm^2},123809 = 12^{dam^2},3809 = 1238^{m^2},09 = 123809^{dm^2}.$$

A escolha da unidade depende da grandeza que se quer medir. São geralmente usadas as seguintes: milímetro quadrado, para pequenas superfícies, metro quadrado para as médias e quilômetro quadrado para as grandes.

381. **Medidas agrárias.** — São denominadas agrárias as unidades geralmente usadas na medida da superfície de terrenos.

A unidade principal é o *ário*, quadrado de 10 metros de lado, cuja abreviatura é *a*.

As únicas unidades secundárias usadas em o nosso País são as seguintes:

NOME	Abreviatura	Valor em ários	Valor em metros quadrados
Hectário	ha	100	10000
ário	a	—	100
deciário	da	0,01	1

MEDIDAS DE VOLUME

382. As unidades de volume são os volumes dos cubos cujas arestas são iguais às unidades de comprimento.

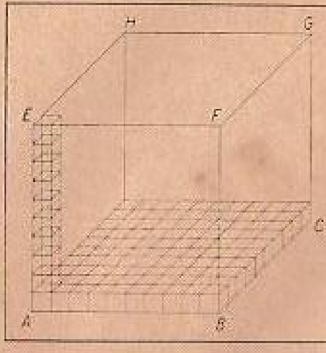
A principal é o *metro cúbico*, cuja abreviatura é m^3

As unidades de volume usadas em o nosso País são as seguintes:

NOME	Abreviatura	Valor em metros cúbicos
Quilômetro cúbico	km³	**1.000.000.000**
hectômetro cúbico	hm³	**1.000.000**
decâmetro cúbico	dam³	**1.000**
metro cúbico	m³	**—**
decímetro cúbico	dm³	**0,001**
centímetro cúbico	cm³	**0,000001**
milímetro cúbico	mm³	**0,000000001**

383. **Numeração.** — A relação entre as unidades de volume é a seguinte:

Cada unidade de volume é mil vezes maior que a imediatamente inferior. — Assim, dizemos que



$$7^{m^3} = 7000^{dm^3} \text{ e } 12^{hm^3} = 12000^{dam^3}$$

Com efeito, voltando a tratar da interpretação geométrica do cubo de um número (n.º 129), consideremos o cubo de 1 metro de aresta. Imaginemos que a base ABCD se encontra dividida em 100 quadrados de 1 decímetro de lado. Se colocarmos, sôbre cada um dêsses quadrados, um cubo de

1 decímetro de aresta, formaremos uma fiada de 100 pequenos cubos. Como é fácil verificar 10 fiadas superpostas completam o volume total do cubo considerado. Resulta, assim, que o volume do metro cúbico é 100 10 ou 1000 decímetros cúbicos.

384. **Modo de escrever as unidades de volume.** — Em conseqüência do que se acaba de expor, segue-se que, para escrever os números que exprimem unidades de volume, são necessários três algarismos para cada unidade.

Assim, o número 8 decâmetros cúbicos, 12 metros cúbicos e 235 decímetros cúbicos é escrito abreviadamente do modo seguinte:

$$8012^{m^3},235.$$

385. **Modo de ler as unidades de comprimento.** — Lê-se a parte inteira com a designação da unidade adotada e depois a decimal, com a designação da menor unidade contida no número dado. — Assim, o número

$$15^{m^3},006140$$

é lido da maneira seguinte: quinze metros cúbicos e seis mil cento e quarenta centímetros cúbicos.

386. **Mudança de unidade.** — Consideremos o número

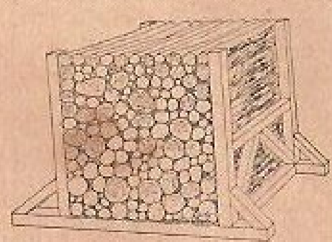
$$13^{dam^3},185032$$

composto, como sabemos, de 13 decâmetros cúbicos, 185 metros cúbicos e 32 decímetros cúbicos.

Evidentemente, se transportarmos a vírgula *três casas* para a direita e dermos, à parte inteira, a designação da unidade imediatamente seguinte (metro cúbico), o número resultante

$$13185^{m^3},032,$$

será eqüivalente ao primitivo, uma vez que se comporá também de 13 decâmetros cúbicos, 185 metros cúbicos e 32 decímetros cúbicos. — Isto posto, teremos sempre



$$13^{dam^3},185032 = 13185^{m^3},032 = = 13185032^{dm^3}.$$

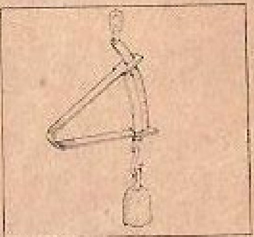
A escolha da unidade depende da grandeza que se quer medir.

387. **Medida efetiva.** — Emprega-se nas medidas de lenha, o estério, cujo volume é 1 metro cúbico. A sua abreviatura é *s* e os seus múltiplos e submúltiplos são decimais.

MEDIDAS DE MASSA

388. Antes de iniciar o estudo das unidades de massa, vejamos qual é a distinção que se faz entre *pêso* de um corpo e *massa* de um corpo.

Massa de um corpo é a quantidade de matéria nele contida e pêso de um corpo é a resultante das ações da gravidade sôbre suas moléculas.



E, como a intensidade da gravidade não é a mesma em todos os pontos da superfície terrestre, o pêso de um corpo é também variável segundo o lugar em que se encontra. Entretanto, a massa de um corpo, cuja medida é dada pela balança, é sempre a mesma (1).

A unidade principal de massa é, como vimos, o *quilograma*, definido da maneira seguinte:

Quilograma é a massa do cilindro de platina iridiada, depositado no «Bureau International des Poids et Mesures» e declarado, pela primeira conferência Geral de Pesos e Medidas, o padrão protótipo do quilograma.

A abreviatura da unidade principal de massa é *kg.* — Assim, o número

120 quilogramos,

é representado abreviadamente do modo seguinte:

120 kg.

As unidades secundárias de massa legais em o nosso País são as seguintes:

NOME	Abreviatura	Valor	Conversão em gramos
Tonelada	t	1000 kg	1.000.000
quintal métrico	q	100 kg	100.000
quilogramo	kg	—	1.000
hectogramo	hg	100 g.	100
decagramo	dag	10 g.	10
gramo	g	0,001 kg	—
decigramo	dg	0,1 g	0,1
centigramo	cg	0,01 g	0,01
miligramo	mg	0,001 g	0,001
micogramo	γ	0,00001	0,000001

(1) Essas noções são dadas na cadeira de Ciências Físicas e Naturais.

389. **Modo de escrever e de ler as unidades de massa.** — Os números que exprimem unidades de massa são escritos e lidos do mesmo modo que os números que exprimem unidades de comprimento.

Assim, o número 3 quilogramos, 2 hectogramos e 5 decagramos é escrito abreviadamente

$$3.^{kg}25$$

Por outro lado, o número

$$12^{kg},619$$

é lido da maneira seguinte: doze quilogramos e seiscentos e dezenove gramos.

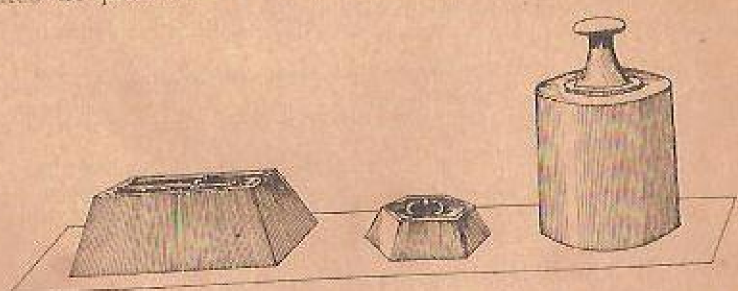
390. **Mudança de unidade.** — Faz-se também do mesmo modo como nas medidas de comprimento. — Exemplo

$$4^{kg},1619 = 41^{hg},619 = 416^{dag},19 = 4161^{g},9 = 41619^{dg}.$$

E' bem de ver que a escolha da unidade depende da grandeza que se quer medir.

391. **Medidas efetivas.** — São usados três grupos de medidas efetivas, de forma e dimensões reguladas por lei.

O 1.º grupo, destinado às *grandes pesadas*, consta de 10 pesos fundidos, providos de anéis, que vão de 50 quilogramos a 50 gramos. Os dois primeiros do grupo têm a forma de tronco de pirâmide de base hexagonal.



O 2.º grupo, empregado nas *pesadas médias*, consta de 13 pesos de cobre ou latão, distribuidos de 10 quilogramos a 1 gramo. Todos êles têm a forma cilíndrica, de altura igual ao diâmetro, e são providos de botões de altura igual à metade da do corpo.

O 3.º grupo, usado geralmente nos laboratórios, para *pesadas de precisão*, consta de 9 pesos, em lâminas de cobre ou alumínio, que vão de 0,5 gramo até o miligramo.

MEDIDAS DE CAPACIDADE

392. A unidade principal de capacidade é o *litro*, definido da maneira seguinte:

litro é o volume de um quilogramo de água pura, privada de ar, na temperatura de 4º e sob a pressão normal (1).

A abreviatura empregada para a designação da unidade principal de capacidade é a letra *l*. — Assim, o número

19 litros

é representado abreviadamente do modo seguinte:

$$19^{l}$$

As unidades secundárias legais em o nosso País são as seguintes:

NOME	Abreviatura	Valor em litros
Quilolitro	kl	1.000
hectolitro	hl	100
decalitro	dal	10
litro	l	—
decilitro	dl	0,1
centilitro	cl	0,01
mililitro	ml	0,001
microlitro	λ	0,000001

393. **Modo de escrever e de ler as unidades de capacidade.** — Os números que exprimem unidades de capacidade são escritos e lidos do mesmo modo que os números que exprimem unidades de comprimento. — Assim, o número

12 litros, 3 decilitros 4 centilitros e 8 mililitros é escrito abreviadamente

$$12^{l},348.$$

(1) *Pressão atmosférica normal* é a pressão exercida por uma coluna de mercúrio de 76 cm. a 0º, nas condições normais de gravidade.

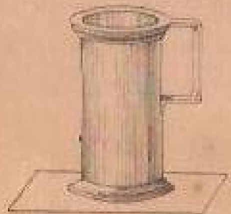
Por outro lado, o número

64^{l},219

é lido da maneira seguinte: sessenta e quatro litros duzentos e dezenove mililitros.

Evidentemente, a escolha da unidade depende da grandeza que se quer medir.

394. **Medidas efetivas.** — Empregam-se constantemente na prática as seguintes:



decilitro,
duplo-decilitro,
meio-litro,
litro,
duplo-litro,
decalitro.

DENSIDADE

395. Sabem os estudantes que volumes iguais de corpos diferentes nem sempre têm o mesmo pêso. Com efeito, se compararmos dois decímetros cúbicos, um de chumbo e outro de cortiça, é bem de ver que o primeiro pesa muito mais que o ... ramo.

... fato conduz-nos à noção de *densidade*. Dizemos, en... chumbo é muito mais *denso* que a cortiça.

... dade de um corpo é o quociente do pêso de um cer-to ... dêsse corpo pelo pêso do mesmo volume de água.

... nando por D a densidade de um corpo, por P o seu pêso ... r P' o pêso de igual volume de água, teremos

D = P : P'.

Emp... do a relação acima, calculemos a densidade do azeite, sabe... -se que 12 litros dêsse líquido pesam 10^{kg},92.

Teremos ... a ... = 10,^{kg}92 : 12^{kg} = 0,91

Devemos ... que a densidade dos corpos é expressa em *números ab...*

396. **Observ...** ... cálculo seguinte, encontram-se os problemas relativo ... s ... na métrico decimal.

CAPÍTULO XVII

DETERMINAÇÃO DE ÁREAS E VOLUMES

397. **Noção de medida indireta.** — A medida direta da extensão se obtém pela comparação direta do comprimento, área ou volume a medir com a unidade adotada em cada caso.

A medida direta oferece, entretanto, dificuldades geralmente insuperáveis na prática. E' fácil conceber a dificuldade que teríamos em medir diretamente a distância entre dois pontos, se o caminho a percorrer entre êles for cheio de obstáculos.

Essas dificuldades persistem ainda na medida direta de segmentos curvilíneos, áreas e volumes, mesmo que os objetos a medir nos sejam fàcilmente acessíveis.

Resulta daí a necessidade de se criarem meios *indi...* para a medida da extensão, isto é, meios de se obter a med... a área de certo comprimento, área ou volume, com auxílio dos c... primentos de segmentos retilíneos fáceis de medir d... bases me... e das *relações* dêles com o comprimento, área ou ... questão.

Assim é que, se quisermos, por exemplo, me... metro de uma circunferência, não o poderemos co... com satisfatória exatidão, pois teremos de justapor a ... sôbre a curva. Demonstra-se, porém, que, seja qual ... rcunferência considerada, o seu perímetro é igual ao c... mento do diâmetro multiplicado por certo número, sem... mesmo. E' claro que, depois de conhecido êsse número ... extraordinàriamente simplificada a medida da circunf... ncia.

O número a que nos referimos é 3,141... Costuma-se representá-lo pela letra grega π (lê-se ...

A-pesar-de π não ser fração peri... em um número infinito de algarismos decimais.

Para melhor escla... sup... medindo o diâmetro de certa circun... a, ... multipli... s 3^{m},48. Para obter o seu perímetro, efetuar ... cálculo:

Circunferência $= 3,14 \times 3^m,48 = 10^m,9272$.

Devemos notar que, se quiséssemos obter resultado mais aproximado, tomaríamos π com maior número de casas decimais.

398. **Área do retângulo.** — *A área do retângulo se obtém multiplicando a base pela altura.*

Representando por b a base e por h a altura, a área do retângulo ABCD será

$$S = bh.$$

Com auxílio da fórmula acima, podemos calcular a área de qualquer retângulo.

Exemplo: calcular a área do retângulo cuja base (ou comprimento) mede $1^m,33$ e cuja altura (ou largura) mede $0^m,38$.

$$S = bh = 1^m,33 \times 0^m,38 = 0^{m2},5054.$$

399. **Área do quadrado.** — Em se tratando de quadrado, já vimos que nele a base é igual à altura; portanto *a área do quadrado é igual ao quadrado do lado.*

Representando por a o lado do quadrado, teremos

$$S = a^2.$$

co. Assim, a área do quadrado de lado igual a $0^m,24$ será

$$S = a^2 = 0^m,24^2 = 0^{m2},0576.$$

400. **Área do paralelogramo.** — *A área do paralelogramo se obtém multiplicando a base pela altura.*

Representando por b a base e por h a altura, a área do paralelogramo ABCD será

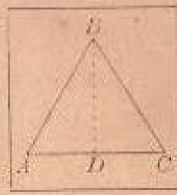
$$S = bh.$$

Com auxílio da fórmula acima, podemos calcular a área de qualquer paralelogramo.

Exemplo: calcular a área do paralelogramo cuja base mede $35^m,25$ e cuja altura mede $9^m,3$.

$$S = bh = 35^m,25 \times 9^m,3 = 327^{m2},8250.$$

401. **Área do triângulo.** — *A área do triângulo se obtém multiplicando a base pela altura e dividindo o resultado por dois.*



Representando por b a base e por h a altura, a área do triângulo ABC será

$$S = \frac{bh}{2}.$$

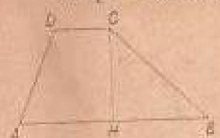
Com auxílio da fórmula acima, podemos calcular a área de qualquer triângulo.

Exemplo: Calcular a área do triângulo cuja base mede 20^m e cuja altura mede $27^m,93$

$$S = \frac{bh}{2} = \frac{20^m \times 27^m,93}{2} = \frac{558^{m2},60}{2} = 279^{m2},30.$$

402. **Área do trapézio.** — *A área do trapézio se obtém multiplicando a metade do produto da soma das bases pela altura.*

Representando por b a base menor, por b' a base maior e por h a altura, a área do trapézio ABCD será



$$S = \frac{b + b'}{2} \times h.$$

Com auxílio da fórmula acima, podemos calcular a área de qualquer trapézio.

Exemplo: Calcular a área do trapézio, cujas bases medem respectivamente 8^m e $4^m,2$ e cuja altura mede $3^m,5$.

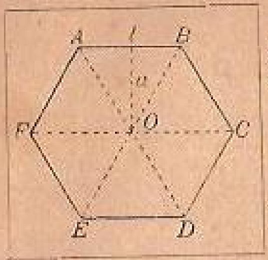
$$S = \frac{b + b'}{2} \times h = \frac{8^m + 4^m,2}{2} \times 3^m,5 = \frac{12^m,2}{2} \ldots =$$

$$= 6^m,1 \times 3^m,5 = 21^{m2},35.$$

403. **Área de um polígono.** — A área de um polígono se obtém decompondo-o em triângulos e somando as áreas dêles.

Assim, a área do polígono ABCDEF se obtém pela soma das áreas dos triângulos ABC, ACD, ADE e AEF.

404. **Área de um polígono regular.** — A área de um polígono regular se obtém multiplicando a metade do seu perímetro pelo apótema. (Apótema é a distância constante do centro do polígono aos lados).



Representando por p a metade do perímetro e por a o apótema, a área do polígono regular ABCDEF será

$$S = pa.$$

Com auxílio da fórmula acima, podemos calcular a área de qualquer polígono regular.

Exemplo: Calcular a área do pentágono regular, cujo lado mede 8^m e cujo apótema mede $2^m,5$.

Como o pentágono é um polígono de 5 lados, o seu perímetro será

$$8^m \times 5 = 40^m.$$

A metade do perímetro sendo

$$40^m : 2 = 20^m,$$

teremos

$$S = pa = 20^m \times 2^m,5 = 50^{m^2}.$$

405. **Área do círculo.** — *A área do círculo se obtém multiplicando o quadrado do raio por π.*

Representando pela letra r o raio do círculo, teremos

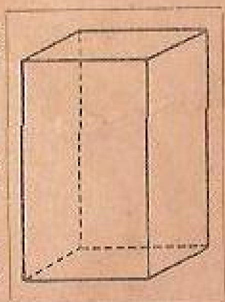
$$S = \pi r^2.$$

Com auxílio da fórmula acima, podemos calcular a área de qualquer círculo.

Exemplo: Calcular a área do círculo cujo raio mede $0^m,37$.

$$S = \pi r^2 = 3,14 \times 0^m,37^2 = 3,14 \times 0,^{m^2}1369 = 0^{m^2},429866.$$

406. **Volume do paralelepípedo retângulo.** — *O volume do paralelepípedo retângulo se obtém multiplicando as suas três dimensões.*



Representando por c o comprimento, por l a largura e por h a altura, o volume do paralelepípedo retângulo será

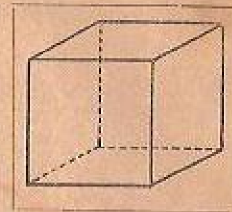
$$V = clh.$$

Com auxílio da fórmula acima, podemos calcular o volume de qualquer paralelepípedo retângulo.

Exemplo: Calcular o volume do paralelepípedo retângulo, cujas três dimensões medem: $2^m,5$; 9^m e $1^m,8$.

$$V = clh = 2^m,5 \times 9^m \times 1^m,8 = 22^{m^2},5 \times 1^m,8 = 40^{m^3},500.$$

407. **Volume do cubo.** — Tendo em vista que o cubo é paralelepípedo retângulo cujas arestas são iguais, segue-se que *o volume do cubo se obtém elevando ao cubo sua aresta.*



Representando por a a aresta, o volume do cubo será

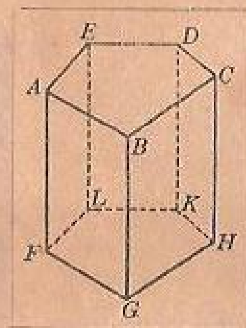
$$V = a^3.$$

Com auxílio da fórmula acima, podemos calcular o volume de qualquer cubo.

Exemplo: Calcular o volume do cubo cuja aresta mede $1^m,4$.

$$V = a^3 = 1^m,4^3 = 2^{m^3},744.$$

408. **Volume do prisma reto.** — *O volume do prisma reto se obtém multiplicando a área da base pela altura.*



Representando por b a área do polígono FGHKL e por h a altura, o volume do prisma será

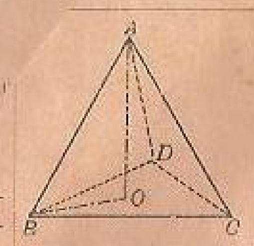
$$V = bh.$$

Com auxílio da fórmula acima, podemos calcular o volume de qualquer prisma reto.

Exemplo: calcular o volume do prisma cuja área da base mede $28^{m^2},38$ e cuja altura mede 12^m.

$$V = bh = 28^{m^2},38 \times 12^m = 340^{m^3},56.$$

409. **Volume da pirâmide.** — *O volume da pirâmide se obtém multiplicando a área da base pela altura e dividindo o resultado por três.*



Representando por b a área da base e por h a altura, o volume da pirâmide será

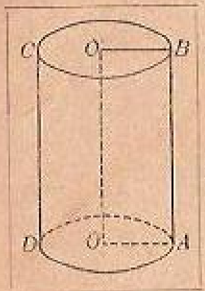
$$V = \frac{bh}{3}.$$

Com auxílio da fórmula acima, podemos calcular o volume de qualquer pirâmide.

Exemplo: Calcular o volume da pirâmide cuja área da base mede $15^{m^2},54$ e cuja altura mede $2^m,7$.

$$V = \frac{bh}{3} = \frac{15^{m^2},54 \times 2^m,7}{3} = \frac{41^{m^3},958}{3} = 13^{m^3},986.$$

410. **Volume do cilindro reto.** — *O volume do cilindro reto se obtém multiplicando a área da base pela altura.*



Representando por b a área da base e por h a altura, o volume do cilindro será

$$V = bh.$$

Mas, tendo em vista que a base é um círculo, ou seja $b = \pi r^2$,

Segue-se que

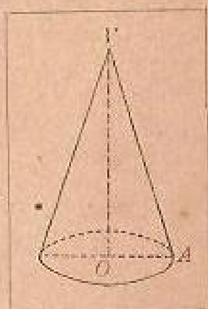
$$V = \pi r^2 h.$$

Com auxílio da fórmula acima, podemos calcular o volume de qualquer cilindro reto.

Exemplo: Calcular o volume do cilindro reto, cujo raio da base mede $2^m,2$ e cuja altura mede $2^m,17$.

$$V = \pi r^2 h = 3,14 \times 2^m,2^2 \times 2^m,17 = 32^{m^3},978792.$$

411. **Volume do cone reto.** — *O volume do cone reto se obtém multiplicando a área da base pela altura e dividindo o resultado por três.*



Representando por b a área da base e por h a altura, o volume do cone será

bh
V = por
h

Mas, tendo em vista que a base é um círculo, ou seja

$$b = \pi r^2$$

Segue-se que

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

Com auxilio da fórmula acima podemos calcular o volume de qualquer cone reto.

Exemplo: Calcular o volume do cone reto, cujo raio da base mede $8^m,1$ e cuja altura mede 1^m.

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{3,14 \times 8^m,1^2 \times 1}{3} = 6^{m^3},867180.$$

412. **Volume da esfera.** — *O volume da esfera se obtém multiplicando o cubo do raio por 4π e dividindo o resultado por três.*

Representando pela letra r o raio, o volume da esfera será

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Com auxílio da fórmula acima podemos calcular o volume de qualquer esfera.

Exemplo: Calcular o volume da esfera cujo raio mede $3^m,7$.

$$V = \frac{4 \times 3,14 \times 3^m,7^3}{3} = 212^{m^3},067220.$$

413. **Exercícios.**

Exprimir *em centímetros* os comprimentos das circunferências:

1. Raio $= 2^m,5$ — R. 1570^{cm}
2. raio $= 0^m,62$ — R. $389^{cm},36$
3. raio $= 3^m,27$ — R. $2053^{cm},56$

Exprimir *em metros quadrados* as áreas dos retângulos:

4. Base $= 0^{dam},37$ e altura $= 0^m,5$ — R. $1^{m^2},85$
5. base $= 0^{hm},8$ e altura $= 120^{dm}$ — R. 960^{m^2}
6. base $= 63^{dm},5$ e altura $= 0^{km},001$ — R. $6^{m^2},35$.

Exprimir *em ários* as áreas dos quadrados:

7. Lado $= 2^m,6$ — R. $0^a,0676$
8. lado $= 61^m,04$ — R. $37^a,258816$
9. lado $= 0^m,3$ — R. $0^a,0009$.

Exprimir *em hectários* as áreas dos seguintes paralelogramos:

10. Base $= 1^{dam},27$ e altura $= 52^m$ — R. $0^{ha},06604$
11. base $= 3^{hm},5$ e altura $= 20^{dam}$ — R. 7^{ha}
12. base $= 7^{km},01$ e altura $= 8^{km}$ — R. 5608^{ha}

Calcular as áreas dos seguintes triângulos:

13. Base $= 14^m$ e altura $= 3^m,4$ — R. $23^{m^2},80$

14. base $= 0^{m},08$ e altura $= 1^{m},5$ — R. $0^{m^2},06$
15. base $= 5^{m},18$ e altura $= 4^{m}$ — R. $10^{m^2},36$.

Calcular as áreas dos seguintes trapézios:

16. Bases $= 8^{m}$ e 3^{m} e altura $= 6^{m}$ — R. 33^{m^2}
17. bases $= 0^{m},57$ e $3^{m},83$ e altura $= 3^{m}$ — R. $6^{m^2},60$
18. bases $= 18^{m}$ e $5^{m},4$ e altura $= 6^{m},1$ — R. $71^{m^2},37$.

Calcular as áreas dos seguintes círculos:

19. Raio $= 1^{m}$ — R. $3^{m^2},14$
20. raio $= 3^{m},75$ — R. $44^{m^2},156.250$
21. raio $= 0^{m},3$ — R. $0^{m^2},2.826$.

Calcular os volumes dos seguintes cubos:

22. Aresta $= 3^{m},1$ — R. $29^{m^3},791$
23. aresta $= 2^{m},5$ — R. $15^{m^3},625$
24. aresta $= 1^{m},03$ — R. $1^{m^3},092.727$.

Calcular os volumes dos seguintes paralelepípedos retângulos:

25. Comprimento $= 3^{m}$, largura $= 5^{m},1$ e altura $= 0^{m},34$ — R. $5^{m^3},202$
26. comprimento $= 6^{m},5$, largura $= 1^{m},3$ e altura $= 1^{m},5$ — R. $12^{m^3},675$
27. comprimento $= 0^{m},7$, largura $= 0^{m},3$ e altura $= 0^{m},8$ — R. $0^{m^3},168$.

Calcular os volumes dos seguintes prismas:

28. Área da base $= 2^{m^2},57$ e altura $= 0^{m},73$ — R. $1^{m^3},876.100$
29. área da base $= 0^{m^2},06$ e altura $= 5^{m},4$ — R. $0^{m^3},324$
30. área da base $= 0^{m^2},32$ e altura $= 0^{m},7$ — R. $0^{m^3},224$.

Calcular os volumes das seguintes pirâmides:

31. Área da base $= 4^{m^2},02$ e altura $= 3^{m},1$ — R. $4^{m^3},154$
32. área da base $= 0^{m^2},84$ e altura $= 1^{m}$ — R. $0^{m^3},280$
33. área da base $= 43^{m^2},12$ e altura $= 18^{m}$ — R. $258^{m^3},720$.

Calcular os volumes dos seguintes cilindros:

34. Raio da base $= 1^{m}$ e altura $= 1^{m}$ — R. $3^{m^3},140$
35. raio da base $= 2^{m},6$ e altura $= 4^{m}$ — R. $84^{m^3},905.600$
36. raio da base $= 5^{m},1$ e altura $= 5^{m}$ — R. $408^{m^3},357$.

Calcular os volumes dos seguintes cones:

37. Raio da base $= 1^{m}$ e altura $= 3^{m}$ — R. $3^{m^3},140$
38. raio da base $= 0^{m},8$ e altura $= 2^{m},7$ — R. $1^{m^3},808.640$
39. raio da base $= 4^{m},3$ e altura $= 1^{m},5$ — R. $29^{m^3},029.300$.

CAPÍTULO XVIII

NÚMEROS RELATIVOS OU QUALIFICADOS

414. **Noções gerais.** — Os números negativos são introduzidos na Matemática como ampliação do campo numérico, designando oposição de sentido.

E essa ampliação é necessária, por isso que há grandezas suscetíveis de avaliação em dois sentidos opostos.

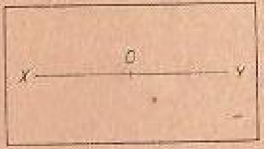
Para as grandezas dessa natureza, tomadas em seu conceito geral nas questões pertencentes ao domínio algébrico, os números naturais, que exprimem a sua medida, são insuficientes para determiná-las.

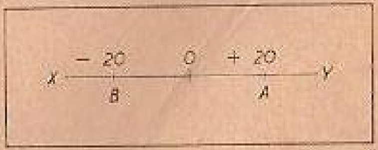
Por êsse motivo, tais números devem ser completados com a indicação do sentido em que são tomados.

E como a Álgebra, em sua tendência de simplificar as questões relativas aos números, emprega símbolos em substituïção à linguagem comum, o sentido em que tais grandezas devem ser avaliadas é indicado pelos sinais, positivo (+) e negativo (—).

Consideremos uma reta indefinida XY, sôbre a qual fixamos um ponto de referência 0.

Procuremos marcar sôbre a reta a posição de um ponto





distante de 20 milímetros do ponto 0. O número 20 mm., que indica essa distância, não é suficiente para a determinação do ponto, pois que podemos tomar dois pontos, um à direita e o outro à esquerda de 0, dêle distantes de 20 mm.

E' preciso, pois, explicar em que sentido deve ser tomada essa medida, não bastando declinar, apenas, o seu valor numérico.

Para isso, basta considerarmos como sendo positivas as distâncias marcadas à direita de 0 e negativas as que o são à sua esquerda.

Adotando essa convenção, diremos que o ponto A está situado a $+20$ mm. e B a -20 mm. do ponto 0.

Outras grandezas muito usuais e de emprêgo freqüente nas questões práticas admitem interpretação em duplo sentido.

As temperaturas, medidas pelos termômetros, podem ser referidas a dois sentidos opostos: abaixo ou acima de zero. Consideramos positivas as que são tomadas acima de zero e negativas as que o são abaixo.

Os intervalos de tempo são contados a partir de certo acontecimento notável, considerando-se positivos os posteriores e negativos os anteriores àquela referência.

Nas transações comerciais, em que podem aparecer *lucros e perdas*, admite-se como positivos os lucros e negativos os prejuizos.

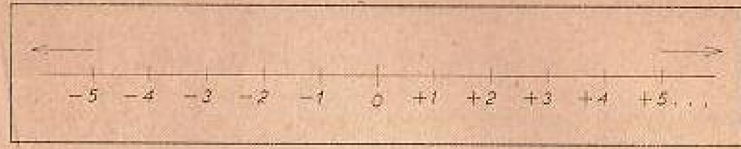
Nos nivelamentos, as quotas são relacionadas com um plano de referência, correspondente à quota 0. Consideram-se positivas as que são contadas acima dêsse plano e negativas as que o são abaixo.

Estando a Terra dividida pelo Equador em 2 hemisférios, Norte e Sul, consideram-se positivas as *latitudes* contadas no hemisfério Norte e negativas as que o são no hemisfério Sul.

As longitudes geográficas podem ser orientais e ocidentais. As orientais, que são contadas à direita do meridiano tomado como principal, são consideradas como positivas, enquanto que as ocidentais, contadas à esquerda daquela referência, são negativas.

Os exemplos precedentes mostram que a determinação completa de uma grandeza que comporta interpretação em duplo sentido exige o emprêgo de novos números — *os números algébricos* ou qualificados — nos quais o sentido em que devem ser tomados vem indicado pelos sinais $+$ ou $-$ que os precedem.

Com a introdução dos números negativos, portanto, fica ampliada a escala numérica, prolongando-se indefinidamente em dois sentidos opostos e simétricos, conforme a representação gráfica que segue:



415. **Definições.** — *Número positivo* é todo o número, diferente de zero, precedido do sinal $+$. — Assim

$$+5, +\frac{2}{3} \text{ e } +4\frac{1}{5}$$

são números positivos.

Número negativo é todo o número, diferente de zero, precedido do sinal $-$. — Assim

$$-3, -\frac{1}{4} \text{ e } -2\frac{3}{5}$$

são números negativos.

Números algébricos são o conjunto de todos os números positivos e negativos, inclusive zero.

Valor absoluto ou módulo de um número algébrico é o número que se obtém suprimindo o sinal.

Números algébricos iguais são os que têm o mesmo valor absoluto e o mesmo sinal.

Números algébricos opostos são os que têm o mesmo valor absoluto e sinais contrários.

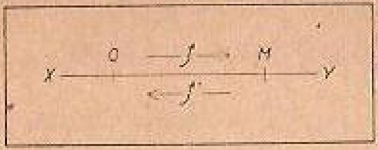
416. **Observação.** — Os sinais $+$ e $-$ que precedem os números algébricos são os mesmos que os empregados na adição e subtração. Entretanto, a sua significação no presente caso é diversa. Êles indicam, apenas, o sentido em que devem ser avaliadas as grandezas a que correspondem.

417. **Segmentos.** — Para maior facilidade do estudo das grandezas de duplo sentido, empregaremos de preferência os segmentos de reta, que aliás constituem um exemplo típico das grandezas dessa natureza.

Segmento, como já dissemos, é uma porção de reta limitada por dois pontos: *origem e extremidade*.

Se considerarmos o segmento como representativo do percurso de um móvel, a origem será o ponto de partida e a extremidade o ponto de chegada.

Para designarmos um segmento, empregamos as letras



correspondentes às extremidades, escritas sob um traço horizontal: OM ou MO, no caso presente.

Os segmentos OM e MO, a-pesar-de corresponderem à mesma porção de reta, são distintos.

E' que, no segmento OM, considera-se o percurso feito no sentido dado por f, isto é, o móvel parte de O e segue até M, enquanto que o segmento MO corresponde ao percurso inverso, isto é, o móvel parte de M e segue até O, no sentido dado por f'.

O símbolo MO, correspondente ao segmento considerado, encerra duas idéias distintas:

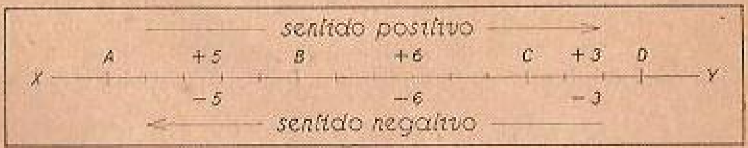
1.º *uma extensão* suscetível de ser traduzida por um número aritmético.

2.º *um sentido* que deve ser representado por um sinal.

418. **Medida algébrica de um segmento.** — Para medirmos aritmèticamente um segmento basta aplicarmos a unidade e verificarmos o número de vezes que nele se contém. Algèbricamente, porém, essa operação não é suficiente, por isso que é preciso indicar o sentido em que deve ser tomado.

Para a representação dos segmentos, empregam-se os números algébricos, em que vêm expressas essas duas indicações.

Assim, as medidas algébricas dos segmentos constantes da figura que segue serão, respectivamente:



$$\overline{AB} = +5, \qquad \overline{BA} = -5,$$
$$\overline{BC} = +6, \qquad \overline{CB} = -6,$$
$$\overline{CD} = +3, \qquad \overline{DC} = -3.$$

A medida algébrica de um segmento, portanto, é um número algébrico, cujo valor absoluto é igual à extensão do segmento, precedido dos sinais + ou —, conforme o sentido em que é tomado.

O número algébrico correspondente a um segmento dado denomina-se eqüivalente algébrico do segmento.

Diz-se que dois segmentos são *iguais* quando têm a mesma extensão e o mesmo sentido.

Quando dois segmentos têm a mesma extensão e sentido contrário são opostos ou *simétricos*.

$$\overline{AB} \quad e \quad \overline{AB}$$

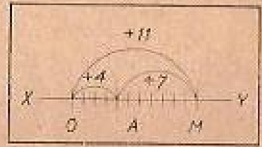
são iguais, enquanto os segmentos

$$\overline{AB} \quad e \quad \overline{BA}$$

são opostos.

419. **Operações.** — Para melhor compreensão das operações sôbre os números algébricos, continuaremos a empregar os segmentos, que têm sempre os seus eqüivalentes algébricos.

420. **Adição.** — *1.º Caso:* Suponhamos que um móvel se encontra inicialmente no ponto de origem O. Posto em movimento, o móvel percorre o segmento $\overline{OA} = +4$ m. e depois o segmento $\overline{AM} = +7$ m. O espaço percorrido pelo móvel será: $\overline{OA} + \overline{AM} = \overline{OM}$; mas, de acôrdo com a figura,

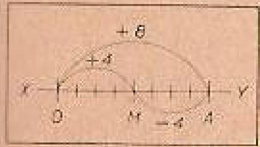


$$\overline{OM} = +11.$$

Substituindo os segmentos pelos seus eqüivalentes algébricos, teremos

$$+4 + 7 = +11.$$

2.º Caso: Imaginemos, agora, que o móvel, partindo do ponto O, percorre o segmento $\overline{OA} = +8$ e depois, saindo de A, percorre o segmento $\overline{AM} = -4$.



No final do percurso, o móvel se encontrará em M, tudo se passando como se tivesse percorrido apenas o segmento $\overline{OM}$.

De acôrdo com a figura vemos que: $\overline{OM} = +4$.

Mas, como o móvel percorreu realmente os dois segmentos, (embora em sentidos contrários) o percurso total corresponderá à *soma* de ambos, isto é:

$$\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{AM}.$$

Substituindo pelos eqüivalentes algébricos, teremos

$$(+8)+(-4)=+4.$$

3.º Caso: O móvel percorre, agora, o segmento OA $=-5$ e depois o segmento AM $=+3$.

No final do percurso, o móvel se encontrará no ponto M, tudo se passando como se tivesse, percorrido, apenas, o segmento OM. — Pela figura, sabemos que

$$\text{OM}=-2.$$

Em verdade, porém, a distância total percorrida pelo móvel, sendo igual à soma dos segmentos, teremos

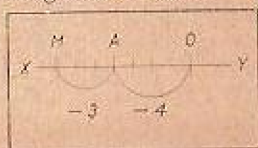
$$\text{MO}=\text{OA}+\text{AM}.$$

Substituindo os segmentos pelos seus eqüivalentes algébricos, encontraremos

$$(-5)+(+3)=-2.$$

4.º Caso: O móvel percorre, agora, o segmento OA $=-4$ e depois AM $=-3$.

No final do percurso, o móvel atingirá o ponto M, e a distância total percorrida será



$$\text{OM}=\text{OA}+\text{AM}.$$

De acôrdo com a figura temos

$$\text{OM}=-7.$$

Substituindo os segmentos pelos seus eqüivalentes algébricos, teremos

$$(-4)+(-3)=-7.$$

Observando os resultados obtidos em relação aos números algébricos nos exemplos dados, podemos estabelecer para a adição as regras seguintes:

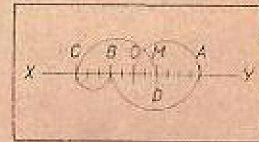
421. **Regras.** — 1.ª A soma de dois números algébricos de mesmo sinal tem para valor absoluto a *soma* dos valores absolutos dos números dados e para sinal o sinal comum.

2.ª A soma de dois números algébricos de sinais contrários tem para valor absoluto a *diferença* dos valores absolutos dos números dados e para sinal o do número de maior valor absoluto.

422. **Soma de vários números algébricos.** — Podem-se somar vários segmentos de acôrdo com o que acima ficou exposto.

Somemos, como exemplo, os segmentos: OA $=+6$, AB $=-8$, BC $=-3$ e CD $=+7$.

Admitindo que um móvel percorra todos os segmentos dados, no final atingirá o ponto M e tudo se passa como se tivesse percorrido, apenas, o segmento OM. — Teremos, então



$$\text{OM}=\text{OA}+\text{AB}+\text{BC}+\text{CD}.$$

Substituindo os segmentos dados pelos eqüivalentes algébricos e notando que, de acôrdo com a figura, OM $=+2$, teremos

$$(+6)+(-8)+(-3)+(+7)=+2.$$

423. **Observação.** — E' evidente que o resultado a que acima chegámos será o mesmo se o móvel percorrer os mesmos segmentos, mas em ordem diversa. — Assim

$$(+6)+(-8)+(-3)+(+7)=+2$$
$$(+6)+(+7)+(-8)+(-3)=+2.$$

Pode-se, pois, alterar a ordem dos têrmos de uma soma de números algébricos sem alterar o seu valor absoluto.

424. **Regra geral.** — A soma de diversos números algébricos de mesmo sinal tem para valor absoluto a soma dos valores absolutos dos números dados e para sinal o que for comum.

A soma de diversos números algébricos de sinais diferentes tem para valor absoluto a diferença dos valores absolutos da soma dos números positivos e da soma dos números negativos e para sinal o da maior soma em valor absoluto.

425. **Resumo dos resultados obtidos.**

$(+5)+(-2)=+5-2=+3$	$(+a)+(-b)=+a-b$
$(+5)+(+2)=+5+2=+7$	$(+a)+(+b)=+a+b$
$(-5)+(-2)=-5-2=-7$	$(-a)+(-b)=-a-b$
$(-5)+(+2)=-5+2=-3$	$(-a)+(+b)=-a+b.$

426. **Subtração.** — *1.º Caso:* Consideremos a subtração indicada:

$$(+6)-(+3).$$

De acôrdo com a definição, deveremos encontrar um número que, somado ao segundo $(+3)$, dê um resultado igual ao primeiro $(+6)$.

Considerando que $(+3)$ e (-3) são dois números opostos, teremos

$$(+3)+(-3)=0.$$

E como somando zero a um número qualquer não se altera o seu valor, podemos escrever

$$(+6)+(+3)+(-3)=+6.$$

Observando a igualdade acima, concluimos que, para obter $+6$ (minuendo), devemos somar a $+3$ (subtraendo) $+6-3$.

Resulta, portanto, que $+6-3$ é a diferença entre os números propostos, isto é:

$$(+6)-(+3)=+6-3=+3.$$

2.º Caso: Consideremos a subtração indicada

$$(+8)-(-5).$$

$(+5)$ e (-5) sendo dois números opostos, teremos

$$(+8)+(-5)+(+5)=+8.$$

De acôrdo com a igualdade acima, para obtermos o minuendo $(+8)$, devemos somar ao subtraendo (-5):

$$+8+5,$$

que é, portanto, a diferença entre os números propostos.

Teremos, pois

$$(+8)-(-5)=+8+5=+13.$$

3.º Caso: Consideremos a diferença indicada

$$(-4)-(+2).$$

Por serem $(+2)$ e (-2) números opostos, teremos

$$(-4)+(+2)+(-2)=-4.$$

Pela igualdade acima, vemos que é preciso somar a $+2$ (subtraendo) $-4-2$ para obtermos -4 (minuendo). $-4-2$ será, portanto, a diferença entre os números propostos, isto é:

$$(-4)-(+2)=-4-2=-6.$$

4.º Caso: Consideremos a diferença indicada

$$(-5)-(-3).$$

Somando a (-5) os dois números opostos (-3) e $(+3)$, teremos

$$(-5)+(-3)+(+3)=-5.$$

Examinando a igualdade acima, constatamos que, para obter o minuendo (-5), devemos somar ao subtraendo (-3)

$$-5+3.$$

$-5+3$ é, portanto, a diferença entre os números propostos, isto é:

$$(-5)-(-3)=-5+3=-2.$$

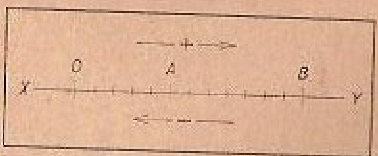
Observando os resultados obtidos nos casos acima considerados, chegamos à seguinte

427. **Regra.** — Para determinar a diferença entre dois números algébricos escreve-se o segundo, *com o sinal trocado*, em seguida ao primeiro.

428. **Resumo dos resultados obtidos.**

$(+5)-(+3)=+5-3=+2$	$(+a)-(+b)=+a-b$
$(+5)-(-3)=+5+3=+8$	$(+a)-(-b)=+a+b$
$(-5)-(+3)=-5-3=-8$	$(-a)-(+b)=-a-b$
$(-5)-(-3)=-5+3=-2$	$(-a)-(-b)=-a+b.$

429. **Segmentos e números algébricos opostos.** — Consideremos os diferentes segmentos constantes da figura que segue:



O segmento OA exprime um percurso no sentido direto adotado na figura, indicando que o móvel parte de O e vai até A. O segmento AO indica, porém, um percurso inverso, no qual se considera o móvel partindo de A e seguindo até O.

Empregando o sinal $\rightleftarrows$ para caraterizar essa oposição de sentido, teremos

$$OA=-AO$$
$$AB=-BA$$

Notemos que os eqüivalentes algébricos dos segmentos considerados são, respectivamente:

$$OA = +5, \quad AO = -5,$$
$$AB = +7, \text{ e } BA = -7.$$

Substituindo os segmentos pelos eqüivalentes algébricos correspondentes, resultará:

$$+5 = -(-5),$$
$$+7 = -(-7).$$

Se invertermos o sentido inicialmente adotado na figura, teremos, pelo mesmo motivo

$$-5 = -(+5),$$
$$-7 = -(+7).$$

Pelo que acima ficou exposto, vemos que o oposto de um segmento pode ser representado pelo próprio segmento precedido do sinal — e que o oposto de um número algébrico pode ser substituido pelo próprio número precedido do sinal —.

430. **Soma algébrica.** — Consideremos as seguintes adições e subtrações a efetuar sôbre os números algébricos:

$$(+5) - (+3) + (-6) - (-4) + (-2).$$

De acôrdo com a indicação dos sinais, deveremos de $(+5)$ subtrair $(+3)$, ao resultado somar (-6), do novo resultado subtrair (-4) e finalmente ao novo resultado somar (-2).

Fazendo por partes essas operações, de acôrdo com as regras relativas à adição e subtração de números algébricos, teremos

$$(+5) - (+3) = +5 - 3,$$
$$(+5 - 3) + (-6) = +5 - 3 - 6,$$
$$(+5 - 3 - 6) - (-4) = +5 - 3 - 6 + 4,$$
$$(+5 - 3 - 6 + 4) + (-2) = +5 - 3 - 6 + 4 - 2.$$

Chegamos, portanto, ao seguinte resultado:

$$+5 - 3 - 6 + 4 - 2.$$

A essa expressão dá-se o nome de soma *algébrica*, por isso que ela pode ser substituída apenas por adições de números algébricos, positivos ou negativos.

Com efeito, de acôrdo com a regra da adição, teremos

$$5 - 3 - 6 + 4 - 2 = (+5) + (-3) + (-6) + (+4) + (-2).$$

431. **Multiplicação.** — Examinaremos, sucessivamente, os 4 casos que se podem apresentar, conforme os sinais que tiverem os fatores.

Continuaremos a empregar os segmentos, aos quais faremos corresponder os percursos de um móvel.

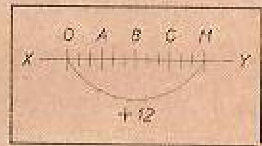
Em todos os casos, consideramos como positivos os percursos feitos da esquerda para a direita e negativos os percursos feitos em sentido inverso, isto é, da direita para a esquerda e como positivos os intervalos de tempo contados no futuro e negativos os contados no passado.

Sabemos que o espaço total percorrido por um móvel em um tempo dado corresponde ao produto da velocidade que anima o móvel pelo tempo gasto no percurso $(e = vt)$.

Assim, se um móvel percorre 3 metros em um segundo em 4 segundos percorrerá 12 metros, pois que

$$3 \times 4 = 12.$$

1.º Caso: Admitamos que um móvel percorra 3 metros no sentido direto (da esquerda para a direita) em 1 segundo e vejamos onde se encontrará no fim de 4 segundos.



Notemos que, de acôrdo com a convenção inicialmente adotada, teremos, no caso presente: velocidade (espaço percorrido na unidade de tempo) $= +3$ e tempo gasto no percurso $= +4$.

Representando o percurso total por OM, teremos, de acôrdo com a solução aritmética

$$OM = (+3) \times (+4).$$

Examinando a figura, vemos que o móvel, percorrendo 3 metros para a direita em cada segundo, no fim de 1 segundo estará no ponto A, em 2 segundos no ponto B, em 3 segundos no ponto C e em 4 segundos no ponto M.

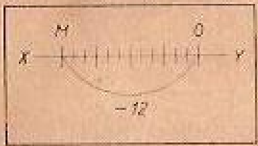
O segmento descrito OM, sendo positivo e medindo 12 metros, o seu eqüivalente algébrico será $(+12)$ e teremos

$$OM = +12.$$

O resultado obtido gráficamente, devendo corresponder à solução aritmética, acima indicada, teremos

$$(+3) \times (+4) = +12.$$

2.º Caso: Consideremos o móvel percorrendo 3 metros em 1 segundo da esquerda para a direita e vejamos onde se encontrará no fim de 4 segundos.



De acôrdo com a convenção adotada, teremos:

$$\text{velocidade} = -3 \text{ e tempo} = +4.$$

Em analogia com a solução aritmética dada para o caso precedente, o espaço percorrido será

$$OM = (-3) \times (+4).$$

Observando a figura, notamos que o móvel parte de O (origem) e que em cada segundo percorre 3 metros para a esquerda (sentido inverso). Decorridos os quatro segundos, o móvel terá atingido o ponto M e realizado o percurso OM. O segmento OM corresponde a 12 metros, mas contados no sentido negativo. — Assim

$$OM = -12.$$

Levando em consideração o resultado obtido com a solução aritmética, teremos:

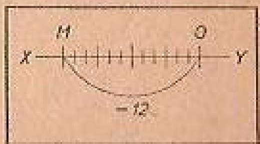
$$(-3) \times (+4) = -12.$$

3.º Caso: Devemos considerar, agora, como sendo negativo o segundo fator (tempo).

E, como os intervalos de tempo negativos devem ser contados no passado, enunciaremos o caso presente da maneira seguinte:

O móvel, que se encontra atualmente na origem (O), tendo percorrido 3 metros por segundo, da esquerda para a direita, a que distância dêsse ponto estaria há 4 segundos?

Em analogia aos casos anteriores e por ser o espaço percorrido pelo móvel igual ao produto da velocidade pelo tempo, teremos:



$$OM = (+3) \times (-4).$$

Examinando a figura e considerando que o móvel marcha da esquerda para a direita, vemos que há 1 segundo deveria estar 3 metros à esquerda de O, há 2 segundos a 6 metros,

há 3 segundos a 9 metros e há 4 segundos a 12 metros. — Teremos, então

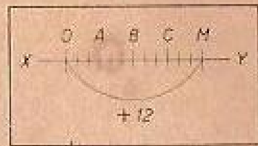
$$OM = -12,$$

de onde concluímos que

$$(+3) \times (-4) = -12.$$

4.º Caso: Sendo negativos ambos os fatores, enunciaremos o 4.º caso como segue:

O móvel, que se encontra atualmente na origem O, tendo percorrido 3 metros por segundo da direita para a esquerda, a que distância dêsse ponto estaria há 4 segundos? — No caso presente, temos



$$v = -3,$$
$$t = -4.$$

Observando a figura, concluímos que há 1 segundo o móvel estaria a 3 metros à direita da origem, por isso que o seu movimento é da direita para a esquerda. Há 4 segundos, o móvel se encontraria em M. — E como $OM = +12$, concluímos que

$$(-3) \times (-4) = +12.$$

Em vista dos resultados obtidos nos 4 casos considerados, podemos estabelecer a regra que segue:

432. **Regra.** — O produto de 2 números algébricos tem para valor absoluto o produto dos valores absolutos dos números dados e será positivo se os fatores tiverem o mesmo sinal e negativo se os fatores tiverem sinais diferentes.

433. **Resumo dos resultados obtidos.**

$(+3) \times (+4) = +12$	$(+a) \times (+b) = +ab$
$(+3) \times (-4) = -12$	$(+a) \times (-b) = -ab$
$(-3) \times (+4) = -12$	$(-a) \times (+b) = -ab$
$(-3) \times (-4) = +12$	$(-a) \times (-b) = +ab.$

434. **Regra dos sinais.** — Por ser de grande importância a regra acima dada, costuma-se enunciá-la abreviadamente da maneira indicada no quadro ao lado.

$$+ \times + = +$$
$$+ \times - = -$$
$$- \times + = -$$
$$- \times - = +$$

Para facilitar a compreensão dessa regra e melhor retê-la, pode-se adotar a seguinte regra mnemônica:

Os amigos (+) de nossos amigos (+) são nossos amigos (+).

Os amigos (+) de nossos inimigos (−) são nossos inimigos (−).
Os inimigos (−) de nossos amigos (+) são nossos inimigos (−).
Os inimigos (−) de nossos inimigos (−) são nossos amigos (+).

435. **Produto de diversos fatores.** — Consideremos a operação seguinte:

$$(+3)\times(-5)\times(+4)\times(-2).$$

Para obtermos o produto dos fatores acima, devemos proceder como em Aritmética, isto é, multiplicar o primeiro fator pelo segundo, depois multiplicar o produto obtido pelo terceiro e assim por diante até o último fator. — Teremos, pois

$$(+3)\times(-5)=-15,$$
$$(-15)\times(+4)=-60,$$
$$(-60)\times(-2)=+120,$$

ou $$(+3)\times(-5)\times(+4)\times(-2)=+120.$$

Observando as operações acima, concluimos que, cada vez que um dos fatores é negativo, há uma inversão no sinal anterior. Conseqüentemente, o sinal do produto final depende apenas do número de fatores negativos.

Assim, o número de fatores negativos sendo nulo ou par, o produto será positivo e, se o número de fatores for ímpar, o produto será negativo.

436. **Observação.** — Vários teoremas se demonstram sôbre o produto de diversos fatores algébricos.

Dêsses teoremas, daremos, apenas, o enunciado, por isso que o método empregado para a demonstração é o mesmo da Aritmética (n.º 85).

1.º Em um produto de fatores algébricos, pode-se inverter a ordem dos fatores. — Exemplo

$$(+3)\times(-5)\times(+4)\times(-2)=+120,$$
$$(+3)\times(+4)\times(-5)\times(-2)=+120,$$
$$(-2)\times(-5)\times(+4)\times(+3)=+120.$$

2.º Em um produto de diversos fatores algébricos, pode-se substituir dois ou mais dêles pelo seu produto efetuado. — Exemplo

$$(+6)\times(+7)\times(+8)\times(-2)=-672,$$
$$(+42)\times(+8)\times(-2)=-672,$$
$$(+42)\times(-16)=-672.$$

3.º O produto de um número algébrico pelo produto de diversos fatores se obtém multiplicando êsse número por um dos fatores do produto. — Exemplo

$$[(+3)\times(-5)\times(+4)]\times(+2)=(+6)\times(-5)\times(+4).$$

4.º O produto de dois produtos de números algébricos se obtém multiplicando todos os fatores que figuram nos produtos considerados. — Exemplo

$$[(+2)\times(-5)\times(+4)]\times[(-3)\times(+6)]=$$
$$=(+2)\times(-5)\times(+4)\times(-3)\times(+6).$$

5.º O produto de uma soma de números algébricos por um número algébrico se obtém multiplicando por êsse número todos os termos da soma e somando todos os produtos parciais. — Exemplo

$$(+3-2+5-4)\times(+6)=+18-12+30-24.$$

6.º O produto de uma soma de números algébricos por outra se obtém multiplicando cada um dos termos da primeira por todos os da segunda e somando todos os produtos parciais. — Exemplo

$$(+2-3+4)\times(-5+6)=-10+12+15-18-20+24.$$

437. **Potências.** — Como em Aritmética, denominamos potência de um número a um produto de fatores iguais a êsse número.

Ao fator que se repete damos a denominação de base e ao número de fatores que constituem a potência denominamos grau (n.º 124).

O grau da potência é indicado pelo expoente. — Assim

$$(-2)^2=(-2)\times(-2)=+4,$$
$$(-3)^3=(-3)\times(-3)\times(-3)=-27,$$
$$(-4)^4=(-4)\times(-4)\times(-4)\times(-4)=+256.$$

Considerando a potência como um produto de fatores iguais, vemos que o sinal de uma potência será positivo se a base o for ou se a base for negativa e o grau for par. — Assim

1.º Toda a potência de um número positivo é positiva. — Exemplo

$$(+3)^2 = +9, \ (+5)^3 = +125 \ \text{e} \ (+9)^5 = +59.049.$$

Toda a potência de grau par de um número negativo é positiva e toda a potência de grau ímpar de um número negativo é negativa. — Exemplo

$$(-3)^2 = +9, \ (-2)^3 = -8.$$

438. **Raízes.** — A enésima raiz de um número algébrico é um número algébrico que, elevado a potência n, reproduz o número dado.

De acôrdo com o que já vimos, sendo sempre positivas as potências de grau par de todos os números algébricos — positivos ou negativos —, concluimos imediatamente que:

1.º As raízes de grau par de todos os números positivos são duplas. — Assim

$$\sqrt{+16} = \pm 4 \ \text{e} \ \sqrt[4]{625} = \pm 5,$$

pois que

$$\left|\begin{array}{l}(+4)^2 = +16,\\(-4)^2 = +16,\end{array}\right. \ \text{e} \ \left|\begin{array}{l}(+5)^4 = +625,\\(-5)^4 = +625.\end{array}\right.$$

2.º Os números negativos não têm raízes de grau par. — Assim, as operações

$$\sqrt{-4} \ \text{e} \ \sqrt[4]{-625}$$

não podem ser efetuadas, por isso que todo o número algébrico — positivo ou negativo — elevado a uma potência de grau par dá um número positivo [1].

3.º Todo o número algébrico, positivo ou negativo, tem sempre uma raiz de grau ímpar. — Assim

$$\sqrt[3]{+125} = +5 \ \text{e} \ \sqrt[3]{-125} = -5.$$

439. **Divisão.** — *1.º Caso:* Efetuemos a operação seguinte:

$$(+15):(+3).$$

De acôrdo com a definição, o quociente deve ser um número tál que, multiplicado pelo divisor, dê um resultado

(1) Vide cálculo dos imaginários, no n.º 3 volume das "Lições de Matemática" do mesmo autor.

igual ao dividendo. O seu valor absoluto, portanto, será obtido pela divisão dos números dados e o sinal será positivo, pois que sòmente um número positivo, multiplicado por outro positivo, poderá produzir um resultado positivo. — Assim

$$(+15):(+3) = +5.$$

2.º Caso: Efetuemos a operação seguinte:

$$(+15):(-3).$$

De acôrdo com o que vimos no 1.º caso, o quociente será (-5), por isso que $(-5)\times(-3) = +15$.

Assim

$$(+15):(-3) = -5.$$

3.º Caso: Efetuemos a operação seguinte:

$$(-15):(+3).$$

Em analogia aos casos anteriores, concluimos que o quociente é (-5), por isso que $(-5)\times(+3) = -15$. — Assim

$$(-15):(+3) = -5.$$

4.º Caso: Efetuemos a operação seguinte:

$$(-15):(-3).$$

Ainda por analogia aos casos anteriores, verificamos que o quociente é $(+5)$, por isso que $(+5)\times(-3) = -15$. — Assim

$$(-15):(-3) = +5.$$

A observação dos resultados obtidos conduz à regra seguinte:

440. **Regra.** — O quociente de dois números algébricos tem, para valor absoluto, o quociente dos valores absolutos dos números dados e é positivo quando êsses números têm o mesmo sinal e negativo em caso contrário.

Resumo dos resultados obtidos.

$(+15):(+3) = +\frac{15}{3}$	$(+a):(+b) = +\frac{a}{b}$
$(+15):(-3) = -\frac{15}{3}$	$(+a):(-b) = -\frac{a}{b}$
$(-15):(+3) = -\frac{15}{3}$	$(-a):(+b) = -\frac{a}{b}$
$(-15):(-3) = +\frac{15}{3}$	$(-a):(-b) = +\frac{a}{b}$.

441. **Regra dos sinais.** — Podemos dar abreviadamente o seguinte enunciado à regra dos sinais para a divisão de números algébricos:

442. **Observação.** — Enunciaremos, a seguir, alguns princípios relativos à divisão de números algébricos. Não daremos as demonstrações respectivas, em vista da analogia existente com as demonstrações dadas em Aritmética (n.º 114).

$$\begin{array}{|c|}\hline + \div + = + \\ + \div - = - \\ - \div + = - \\ - \div - = + \\ \hline\end{array}$$

1.º Para dividir um produto de fatores algébricos por um número algébrico, basta dividir por êsse número um dos fatores do produto. — Exemplo

$$\frac{(+3)\times(-4)\times(+12)}{(+6)}=(+3)\times(-4)\times(+2).$$

2.º Para dividir uma soma algébrica por um número algébrico, basta dividir por êsse número todos os termos da soma e somar os quocientes parciais obtidos.

443. **Frações numéricas algébricas.** — Denomina-se fração algébrica ao quociente indicado de dois números algébricos. Assim, a expressão $\frac{+2}{-5}$ é uma fração algébrica.

Em relação ao sinal, observa-se, nas frações algébricas, a regra dos sinais da divisão. — Assim

$$\frac{+2}{-5}=-\frac{2}{5} \quad \text{e} \quad \frac{-2}{-5}=+\frac{2}{5}$$

Em relação ao valor absoluto, aplicam-se nas frações algébricas as propriedades das frações aritméticas.

Baseados nessas propriedades, deduzimos, como em Aritmética, as regras para a simplificação de frações, redução ao mesmo denominador e operações.

444. **Observação.** — Em virtude da regra dos sinais da divisão, observaremos, nas frações algébricas:

1.º que, invertendo-se o sinal de um dos seus termos, a fração muda de sinal.

2.º que, invertendo-se os sinais de ambos os termos, a fração não muda de sinal. — Assim

$$\frac{-2}{+3}=\frac{+2}{-3}=-\frac{2}{3}.$$

CAPÍTULO XIX

EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

Na resolução das questões algébricas, os números são representados por letras.

Essa representação, além de simplificar o raciocínio, facilita a generalização das soluções obtidas. E' assim que, depois de feitas as transformações correspondentes a uma questão qualquer, obtém-se uma fórmula que dá a solução geral de todos os problemas da mesma natureza, isto é, cujos enunciados diferem, apenas, pelos valores numéricos dos dados.

445. **Expressão algébrica.** — Dá-se essa denominação ao conjunto de letras e números ligados pelos sinais de operação. — Assim

$$a^2+2ab-b; \ \frac{a+b}{a-b}; \ \frac{2a(1+b)}{3(a-b)}$$

são expressões algébricas.

446. **Classificação.** — As expressões algébricas podem ser: *Racionais, irracionais, inteiras* e *fracionárias.*

As expressões são:

Racionais, quando não contêm indicação alguma de extração de raiz sôbre a parte literal.

Irracionais, quando contêm indicação de raiz sôbre a parte literal.

Inteiras, quando não contêm letra alguma em denominador.

Fracionárias, quando contêm alguma letra em denominador. — Assim, as expressões

$$3x^2y^3+5x^4y \quad \text{e} \quad a^3\sqrt{2}+2ab^4$$

são racionais e inteiras;

$$\frac{3(a+b)}{2(a-b)} \quad \text{e} \quad \frac{\sqrt{(8a^2-b^2)}}{3a}$$

são racionais e fracionárias;

$$3\sqrt{ab} \quad 5, +4a^2 - 3\sqrt{C} \quad e \quad \frac{2(a+b)^2}{\sqrt{a+b}}$$

são irracionais (1).

447. **Valor numérico.** — Valor numérico de uma expressão algébrica é o número algébrico que se obtém substituindo as letras que nela figuram pelos números que representam e efetuando as operações indicadas pelos respectivos sinais. — Exemplos

1.º Determinar o valor numérico da expressão

$$3a^2b^2 \text{ para } a=1 \text{ e } b=2.$$

Substituindo, na expressão dada, a e b pelos valores acima designados, teremos

$$3\times 1^2 \times 2^2 = 3\times 1\times 4 = 12.$$

2.º Determinar o valor numérico de 18

$$2a^2b + 4a^2b^2 - 5ab^3 \text{ para } a=3 \text{ e } b=5.$$

Efetuando as substituições, virá:

$$2\times 3^2\times 5 + 4\times 3^2\times 5^2 - 5\times 3\times 5^3 = 2\times 9\times 5 + 4\times 9\times 25 -$$
$$-5\times 3\times 125 = 90 + 900 - 1875 = 990 - 1875 = -885.$$

3.º Determinar o valor numérico de

$$(a^2+ab+b^2)\,(a-b) \text{ para: } a=1 \text{ e } b=\frac{1}{2}.$$

Efetuando as substituições, teremos

$$\left(1^2+1\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{7}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{7}{8}.$$

4.º Determinar o valor numérico de

$$\frac{3(a-b)}{5(a+b)^2} \div \frac{1}{10(a+b)} \text{ para } a=4 \text{ e } b=2.$$

Efetuando as substituições, teremos

$$\frac{3(4-2)}{5(4+2)^2} \div \frac{1}{10(4+2)} = \frac{3\times 2}{5\times 6^2} \div \frac{1}{10\times 6} = \frac{6}{5\times 36} \div$$
$$\div \frac{1}{10\times 6} = \frac{6}{180} \div \frac{1}{60} = \frac{360}{180} = 2.$$

(1) A classificação das expressões algébricas deve ser feita em relação aos fatores literais que encerram. Nestas condições, as expressões que contêm, apenas, indicação de raiz sôbre um fator numérico devem ser consideradas como racionais.

5.º Calcular o valor numérico de

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{3(a^2-b)} \div \frac{a^2+2a+1}{2(a+b)} \text{ para } a=3 \text{ e } b=4.$$

Substituindo os símbolos que figuram na expressão dada pelos valores acima determinados, encontramos, sucessivamente:

$$\frac{3^2+2\times 3\times 4+4^2}{3(3^2-4)} \div \frac{3^2+2\times 3+1}{2(3+4)} = \frac{9+24+16}{3(9-4)} \div$$
$$\div \frac{9+6+1}{2\times 7} = \frac{49}{3\times 5} \div \frac{16}{14} = \frac{686}{240} = \frac{343}{120} = 2\frac{103}{120}.$$

448. **Exercícios.**

Calcular o valor numérico de cada uma das expressões seguintes:

1.	$3a^3 - 2a^2 - a$	para $a=2$	R. 18
2.	$3a^2 - 2ab - b^2$	para $a=3$, $b=2$	R. 11
3.	$ab^2 + 2ab - 3b$	para $a=1$, $b=3$	R. 6
4.	$a^2bd + d$	para $a=3$, $b=4$, $d=0$	R. 0
5.	$4a^2 + 4a^2b + ab^2 + 7b^3$	para $a=10$, $b=-1$	R. 3
6.	$2a + 17 - bc$	para $a=-2$, $b=3$, $c=4$	R. 1
7.	$3a^2b + 7ab^2c - b^3c^2 + 3c^3$	para $a=10$, $b=-1$, $c=3$	R. 0
8.	$3a^2b + a^2b^2 - 4ab^3$	para $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{4}$	R. $\frac{1}{72}$
9.	$5a^2b + 10ab - 4b^2$	para $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{5}$	R. 1,09

10. $x^4 - 3ax^3 + 7a^2x^2 - 4a^3x$ para $\left|\begin{array}{l} a = \frac{1}{2} \\ a = 2 \end{array}\right.$ R. 10

11. $\frac{3}{5}ab^2$ para $\left|\begin{array}{l} a = 5 \\ b = 1 \end{array}\right.$ R. 3

12. $\frac{5a^3b^2}{12}$ para $\left|\begin{array}{l} a = 2 \\ b = 3 \end{array}\right.$ R. 30

13. $a^3b^2 + \frac{a^2 b}{3} - 8a$ para $\left|\begin{array}{l} a = 3 \\ b = 1 \end{array}\right.$ R. 6

14. $\frac{4a^3b + 2a^2b^2 - 5ab^3}{6}$ para $\left|\begin{array}{l} a = 2 \\ b = 3 \end{array}\right.$ R. -17

15. $\frac{2}{3}a^2b - \frac{3}{4}ab^2$ para $\left|\begin{array}{l} a = 4 \\ b = 3 \end{array}\right.$ R. 5

16. $\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b}$ para $\left|\begin{array}{l} a = 5 \\ b = 3 \end{array}\right.$ R. $4\frac{1}{4}$

17. $\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$ para $\left|\begin{array}{l} a = 4 \\ b = 6 \end{array}\right.$ R. $\frac{13}{72}$

18. $\frac{3(a+b)}{2(a-b)}$ para $\left|\begin{array}{l} a = 2 \\ b = -1 \end{array}\right.$ R. $\frac{1}{2}$

19. $\frac{4a^2 + 7ab + 6b^2}{3a}$ para $\left|\begin{array}{l} a = 4 \\ b = -9 \end{array}\right.$ R. $24\frac{5}{6}$

20. $\frac{a+b}{4} - \frac{a-b}{8}$ para $\left|\begin{array}{l} a = 3 \\ b = \frac{1}{3} \end{array}\right.$ R. $\frac{1}{2}$

21. $\frac{a-b}{5a-3b}$ para $\left|\begin{array}{l} a = \frac{2}{3} \\ b = \frac{7}{4} \end{array}\right.$ R. $\frac{5}{9}$

22. $\frac{\left(1 - \frac{1}{x}\right) \left(2 + \frac{1}{y}\right)}{x - \frac{x}{y}}$ para $\left|\begin{array}{l} x = 3 \\ y = 4 \end{array}\right.$ R. $\frac{2}{3}$

23. $\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b-c}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b+c}} - \frac{\frac{1}{b} + \frac{1}{a+c}}{\frac{1}{b} + \frac{1}{a+c}}$ para $\left|\begin{array}{l} a = 2 \\ b = 3 \\ c = 4 \end{array}\right.$ R. $\frac{3}{5}$

24. $\frac{\left(1 - \frac{1}{b}\right) \left(2 + \frac{1}{a}\right)}{a^2 - \frac{a}{b^2}} - (a \cdot b)$ para $\left|\begin{array}{l} a = -1 \\ b = \frac{1}{2} \end{array}\right.$ R. 1,3

25. $\frac{\frac{a+b}{b} + \frac{b}{a+b}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ para $\left|\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 2 \end{array}\right.$ R. $\frac{13}{9}$

449. **Expressões eqüivalentes.** — Duas expressões algébricas são eqüivalentes quando têm sempre o mesmo valor numérico, quaisquer que sejam os valores atribuidos às letras que nelas figuram. — Assim

$$(a-b)^2 \quad \text{e} \quad a^2 - 2ab + b^2,$$

são expressões eqüivalentes. Com efeito, para $a = 4$ e $b = 2$, o valor numérico de ambas será

$$(a-b)^2 = (4-2)^2 = 4 \quad \text{e}$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = 4^2 - 2 \times 4 \times 2 + 2^2 = 4.$$

Para $a = \frac{1}{2}$ e $b = \frac{1}{4}$, o valor numérico das expressões será

$$(a-b)^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} \quad \text{e}$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{1}{16}.$$

450. **Monômios.** — Dá-se a denominação de monômio à expressão algébrica de um único termo, isto é, à expressão que não contém, entre os seus elementos constituintes, sinal de adição ou subtração. — Assim

$$2a^3b \quad \text{e} \quad \frac{1}{3}x^2y^3$$

são monômios inteiros e racionais.

$$\frac{a^2d}{b} \quad \text{e} \quad \frac{a^3\sqrt{2}}{cd}$$

são monômios fracionários e racionais.

$$4a\sqrt{b} \quad \text{e} \quad \frac{\sqrt{ab}}{2}$$

são monômios irracionais (1).

451. **Elementos de um monômio.** — Distinguem-se nos monômios os elementos seguintes: *sinal, coeficiente, parte li-*

(1) Vide a observação do n.º 446.

teral e *expoente*. — Assim, no monômio $-4a^3$, o sinal é $-$, o coeficiente é 4, a parte literal é a e o expoente é 3.

Em relação ao sinal, os monômios podem ser positivos ou negativos. São positivos ou aditivos quando vêm precedidos do sinal $+$ e negativos ou subtrativos quando do sinal $-$. — Assim

$$+2a^2 \quad \text{e} \quad +5b^4$$

são monômios positivos e

$$-a^3 \quad \text{e} \quad -ab^2$$

são monômios negativos.

Costuma-se omitir o sinal $+$ antes do primeiro termo positivo de uma expressão ou nos monômios positivos isolados. — Assim, os monômios

$$4ab \quad \text{e} \quad 5x^2$$

são positivos.

Em geral, denomina-se *coeficiente* de uma quantidade todo o número ou letra que estiver multiplicando essa quantidade. — Assim, no monômio $5a^2x$ o coeficiente é 5.

Entretanto, se quisermos referir o coeficiente a uma determinada letra de um monômio, êsse será constituido pelas demais letras ou números que multiplicam a letra em questão. — Assim, no monômio $3a^2b^3x^2$, o coeficiente de x^2 é $3a^2b^3$ (1).

A parte literal é o conjunto de letras que figuram nos monômios. — Assim, nos monômios $3a^3b^4c$ e $2x^2y$, a^3b^4c e x^2y são, respectivamente, as partes literais.

Em geral, define-se o *expoente* como sendo a quantidade que, colocada à direita e um pouco acima de uma letra, indica uma certa operação a efetuar sôbre essa letra. — Assim, nos monômios $3a^2b^{-3}$, $c^{\sqrt{2}}$ e $d^{\frac{1}{2}}$, as quantidades $2, -3, \sqrt{2}$ e $\frac{1}{2}$ são, respectivamente, os expoentes das letras a, b, c e d.

(1) Muitos autores, nas definições que adotam sôbre os elementos dos monômios, incidem em erros grosseiros, generalizando em falsas definições particularíssimas. E' assim que chegam a dizer que o coeficiente indica o número de vezes que a parte literal de um monômio deve ser repetida como parcela...

E' preciso ter-se uma noção muito acanhada das expressões algébricas para assim definir o coeficiente.

Com efeito, quando os coeficientes são fracionários ou irracionais, absolutamente não representam repetição de parcelas iguais à parte literal.

Estão nesse caso, por exemplo, os monômios $\sqrt{2}a^3$ e $\frac{2}{3}x^2$.

Os coeficientes $\sqrt{2}$ e $\frac{2}{3}$ poderão indicar repetição de parcelas iguais? Certo que não!

Sebastião Alves, em seu ótimo livro «Algebra Elementar», expende brilhante argumentação a respeito das definições de expoente e coeficiente, indicando as únicas verdadeiras.

As definições aceitas pelo eminente patrício são precisamente as que adotámos.

Quando o coeficiente de um monômio não vem expresso, entende-se que é a unidade. — Assim, no monômio a^2b^2, o coeficiente é 1.

Quando, em uma letra, não há indicação de expoente, significa, essa circunstância que o seu expoente é a unidade. — Assim, no monômio $2a$, o expoente de a é 1.

Grau de um monômio inteiro e racional é a soma dos expoentes de suas letras. — Assim, o monômio $4a^5b^3$ é do 8.º grau, por isso que $5 + 3 = 8$.

452. **Polinômios.** — Denominamos polinômios à soma algébrica de monômios.

Os monômios, com os respectivos sinais, são os *termos* do polinômio. — Assim, a expressão

$$2a^4b - 3a^3b^2 + 5ab - 6ab^2$$

é um polinômio, cujos termos são

$$2a^4b, \ -3a^3b^2, \ +5ab \quad \text{e} \quad -6ab^2.$$

Em virtude da classificação dada para as expressões algébricas (n.º 446), os polinômios podem ser racionais, irracionais, inteiros ou fracionários.

Segundo o número de termos que encerram, os polinômios podem tomar as seguintes denominações particulares: *binômio*, quando têm 2 termos e *trinômio*, quando têm 3 termos.

O grau de um polinômio inteiro e racional é o grau do termo de maior grau que nele figura. — Assim

$$5a^4b^2 - 2ab^3$$

é um binômio do 6.º grau,

$$2x^3 - 5x^4 + 4x^5$$

é um trinômio do 5.º grau,

$$2a^4 + 5ab - 6a^5b^2 + 4b^7$$

é um polinômio do 7.º grau.

Muitas vezes, temos necessidade de referir o grau de um polinômio a uma determinada letra que nele se contém. — Assim, o polinômio $3x^2 + 4ax^3 - 3a^2 + b^4$ é do 2.º grau em relação a a, do 3.º em relação a x e do 4.º em relação a b.

Um polinômio pode ter todos os termos com o mesmo grau. Quando isso acontece, diz-se que o polinômio é *homogêneo*. — Assim

$$x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x - a^4$$

é um polinômio homogêneo.

Grau de homogeneidade é o grau comum de todos os termos de um polinômio homogêneo. — Assim, no exemplo anterior, o grau de homogeneidade é 4.

453. **Termos semelhantes.** — Damos essa denominação aos termos que têm as mesmas letras afetas dos mesmos expoentes. — Assim, os termos

$$4a^2b, \quad -5a^2b, \quad +6a^2b$$

são semelhantes.

Sempre que aparecem termos semelhantes em uma expressão algébrica, devem ser reduzidos.

Para maior facilidade do estabelecimento da regra, consideraremos inicialmente o caso em que os termos semelhantes a reduzir são dois apenas.

1.º Sejam os monômios

$$+4ax \quad \text{e} \quad +2ax.$$

Para $a = 5$ e $x = 6$, o valor numérico da parte literal comum é *30*.

Substituindo, nos monômios dados, ax por 30, resultará:

$$+4 \times 30 \quad \text{e} \quad +2 \times 30.$$

Se quisermos somar os números algébricos acima, teremos, notando que 30 é um fator comum

$$+4 \times 30 + 2 \times 30 = (4 + 2) \times 30 = +6 \times 30.$$

Por outro lado, substituindo 30 por ax, virá:

$$+4ax + 2ax = (4 + 2) \times ax = +6ax.$$

Resulta, portanto, que

$$+4ax + 2ax = +6ax.$$

2.º Sejam os monômios

$$-4ax \quad \text{e} \quad -2ax.$$

Pelos motivos acima expostos, teremos

$$-4ax - 2ax = (-4 - 2) \times ax = -6ax \quad \text{ou} \quad -4ax - 2ax = -6ax.$$

3.º Sejam os monômios

$$+4ax \quad \text{e} \quad -2ax.$$

De acôrdo com o que expusemos nos exemplos anteriores, teremos

$$+4ax - 2ax = (4 - 2)ax = +2ax, \quad \text{ou}$$

$$+4ax - 2ax = +2ax.$$

4.º Sejam os monômios

$$-4ax \quad \text{e} \quad +2ax.$$

Em analogia aos exemplos dados, teremos

$$-4ax + 2ax = (-4 + 2)ax = -2ax,$$

ou

$$-4ax + 2ax = -2ax.$$

Observando os resultados obtidos nos 4 exemplos considerados, concluimos que, para reduzir 2 termos semelhantes do mesmo sinal, somam-se os coeficientes e dá-se o sinal comum e que para reduzir 2 termos semelhantes de sinais contrários, subtraem-se os coeficientes e dá-se o sinal do maior.

454. **Exercícios.**

1. $+2b + 3b = +5b$
2. $-3a^2b + 2a^2b = -a^2b$
3. $-5a - 4a = -9a$
4. $-4x^2 + 3x^2 = -x^2$
5. $+\frac{2}{3}x + \frac{3}{4}x = +\frac{17}{12}x$
6. $-\frac{1}{5}x^3 + \frac{1}{4}x^3 = +\frac{1}{20}x^3$
7. $-\frac{5}{12}a^2 - \frac{5}{6}a^2 = -\frac{5}{4}a^2$
8. $+\frac{2}{15}b - \frac{5}{6}b = -\frac{7}{10}b.$

Consideremos, agora, o caso geral em que vários são os termos semelhantes que devem ser reduzidos. — Seja a expressão

$$3ax^2 - 2ax^2 - 4ax^2 + 5ax^2.$$

Por ser o fator ax^2 comum a todos os termos do polinômio, poderemos escrevê-lo sob a forma seguinte:

$$ax^2(3 - 2 - 4 + 5).$$

Efetuando as operações indicadas, virá:

$$ax^2(3 - 2 - 4 + 5) = 2ax^2.$$

De outro lado, as expressões $2ax^2$ e $3ax^2 - 2ax^2 - 4ax + 5ax^2$ são eqüivalentes, por isso que, quaisquer que sejam os valores numéricos atribuidos a a e x, o valor numérico de ambas será o mesmo. — Daí resulta a identidade seguinte:

$$3ax^2 - 2ax^2 - 4ax^2 + 5ax^2 = 2ax^2.$$

Consideremos, ainda, a expressão seguinte:

$$4a^2b + 2a^2b + a^3 - 3a^2b + 2a^3 + 4a^3 - 3a^3.$$

Invertendo a ordem dos termos, virá:

$$(2a^2b - 3a^2b + 4a^2b) + (a^3 + 2a^3 - 3a^3 + 4a^3).$$

Notando que os termos contidos nos parêntesis são semelhantes entre si, poderemos escrever

$$a^2b(2 - 3 + 4) + a^3(1 + 2 - 3 + 4),$$

de onde resulta:

$$3a^2b + 4a^3.$$

O binômio acima obtido, sendo eqüivalente ao polinômio dado, teremos

$$2a^2b + a^3 - 3a^2b + 2a^3 + 4a^2b - 3a^3 + 4a^3 = 3a^2b + 4a^3.$$

455. **Regra.** — Para reduzir um grupo de termos semelhantes de mesmo sinal, somam-se os coeficientes e dá-se o sinal comum.

Para reduzir um grupo de termos semelhantes de sinais diferentes, somam-se os coeficientes positivos e os negativos, subtrai-se a menor soma da maior e dá-se o sinal da maior. — Exemplos

1. Seja o polinómio

$$2a + 3b + 2c - 3a + b - 3c + a + 2b - c + 4a - 5b + 6c.$$

Escrevendo em ordem os respectivos grupos, teremos

$$(2a - 3a + a + 4a) + (3b + b + 2b - 5b) + (2c - 3c - c + 6c).$$

456. **Disposição prática para a redução dos coeficientes.**

1.° grupo			2.° grupo			3.° grupo		
+2	−3	+7	+3	−5	+6	+2	−3	+8
+1		−3	+1		5	+6	−1	−4
+4		+4	+2		+1	+8	−4	+4
+7			+6					

Resultado: $4a + b + 4c$.

2.° Reduzir os termos semelhantes do polinômio seguinte:

$$4d + 3ab + 4bc - 7ab + bc - 8bc - 9ab + 5d - 3d.$$

Depois de ter o estudante adquirido a necessária prática, a disposição acima poderá ser dispensada, fazendo-se a redução dos coeficientes mentalmente.

Para facilitar essa operação, é conveniente assinalar os termos semelhantes de cada grupo. — Assim, teremos

$$4d + 3ab + 4bc - 7ab + bc + 8bc - 9ab + 5d - 3d =$$
$$= 6d - 13ab + 13bc.$$

457. **Exercícios.**

1. $3x - 4x^2 + 5 - 3x^2 + x - 6 - 2x + 7x^2 + 1 = 2x.$
2. $4a^3 - 3a^2x - a^3 - a^2x - 5a^3 + ax - 4a + 2a^3 + 3a^2x - 4a = 0.$
3. $x^2 - y^2 + z^2 - 2y^2 + 2x^2 - 2z^2 + y^2 + 3z^2 - x^2 = 2x^2 + 2z^2.$
4. $2ab^2 - 2abc + 6ab^2 - ab^2 - 3abc + 8ab^2 + 6abc = 15ab^2.$
5. $8xy - 4ab + 2ab - x - 7xy + 2ab - xy + x + 1 = 1.$

458. **Polinômios ordenados.** — Consideremos o polinômio seguinte:

$$3x + 6 - 5x^3 + x^2.$$

Notando que os polinômios, como soma algébrica de monômios que são, permitem a aplicação de todas as transformações relativas às somas algébricas, poderemos dispor os termos do polinômio acima em uma ordem qualquer. — Assim, teremos indiferentemente

$$(1) \quad -5x^3 + x^2 + 3x + 6,$$

ou

$$(2) \quad 6 + 3x + x^2 - 5x^3.$$

Pela disposição dos termos do polinômio (1) vemos que os expoentes de x vão *decrescendo*, termo a termo, a partir do maior (3) no primeiro, até o menor (0) no último. Atribuimos zero ao expoente de x no termo 6, por isso que todo o termo que não encerra parte literal pode ser considerado como contendo uma letra qualquer afeta do expoente 0. — Assim

$$a^0 = b^0 = c^0 = x^0 = 1 \text{ [1]}.$$

Dizemos então, que o polinômio (1) está ordenado segundo as potências decrescentes de x.

[1] Vide expoentes nulos e negativos.

Em relação ao polinômio (2), dá-se precisamente o inverso, isto é, os expoentes de x, vão *crescendo*, termo a termo.
O polinômio (2) está, portanto, ordenado segundo as potências crescentes de x.

459. **Observações.** — 1.ª Quando os polinômios contêm mais de uma letra, costuma-se ordená-los segundo as potências crescentes ou decrescentes de uma determinada letra. — Assim, o polinômio

$$x^4 + 3ax^3 - 2a^2x^2 + 4a^3x + 5a^4$$

está ordenado segundo as potências decrescentes de x e crescentes de a.
A letra que se escolhe para ordenar um polinômio denomina-se letra ordenatriz.

2.ª Há polinômios que encerram mais de uma letra e que contêm a letra ordenatriz com o mesmo expoente em termos que não são semelhantes. — Está nesse caso o polinômio seguinte:

$$ax^2 + 2a^2x^2 + 3bx - 4b^2x + 3a^3x^2 + 5b^3x.$$

Para ordenarmos os polinômios dessa forma, devemos colocar a letra ordenatriz em fator comum nos termos em que figura com o mesmo expoente. Assim, o polinômio acima, deverá tomar a forma seguinte:

$$x^2(a + 2a^2 + 3a^3) + x(3b - 4b^2 + 5b^3),$$

em que os polinômios encerrados nos parêntesis já se acham, por sua vez, ordenados.
Costuma-se, também, dar aos polinômios do presente tipo a forma seguinte:

$$\begin{array}{r|r|l} a & x^2 + 3b & x \\ +2a^2 & -4b^2 & \\ +3a^3 & +5b^3 & \end{array}$$

460. **Polinômios completos.** — Diz-se que um polinômio, inteiro em relação a uma certa letra, é completo quando contém a letra ordenatriz com todos os graus, a partir do mais elevado até zero. — Assim, o polinômio

$$x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$$

é completo, enquanto o polinômio

$$x^5 + x^2 + 1$$

é incompleto.

Capítulo XX

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO ALGÉBRICAS

461. **Adição.** — A adição algébrica tem por fim substituir duas ou mais expressões algébricas por uma única, cujo valor numérico seja igual à soma dos valores numéricos das expressões dadas.
Na adição algébrica, dois casos se apresentam:

1.º *adição de monômios;*

2.º *adição de polinômios.*

462. **Adição de monômios.** — Sejam os monômios

$$+5a^2, \ +4ab \text{ e } -3b^2,$$

cuja soma queremos efetuar.
Atribuindo às letras que neles figuram valores particulares, resultam, para os monômios acima, certos valores numéricos.
E como o valor numérico da soma deve ser igual à soma dos valores numéricos dos monômios considerados, para obtê-la bastará reünir os monômios em uma expressão única, conservando os respectivos sinais. — Teremos, assim

$$S = 5a^2 + 4ab - 3b^2.$$

463. **Regra.** — *Para obter-se a soma de diversos monômios escrevem-se uns em seguida aos outros, conservando-se os sinais e reduzem-se os termos semelhantes, se houver.* — Exemplos

1.º Efetuar a soma dos monômios seguintes:

$$-6a^4, \ -3a^3, \ +4a^2, \ +7a^4, \ +2a^3 \text{ e } -4a^2.$$

Aplicando a regra, teremos

$$S = -6a^4 - 3a^3 + 4a^2 + 7a^4 + 2a^3 - 4a^2.$$

Reduzindo os termos semelhantes, virá:

$$S = a^4 - a^3.$$

2.º Efetuar a soma dos seguintes monômios:

$$+a, \ -3b, \ +2, \ -2a, \ -5, \ +b, \ +a, \ +2b, \ +4.$$

Aplicando a regra, resultará:

$$S = a - 3b + 2 - 2a - 5 + b + a + 2b + 4.$$

Reduzindo os termos semelhantes, virá:

$$S = 1.$$

3.º Somar os seguintes monômios:

$$+3x^2y, \ -2xy^2, \ +5x^3, \ -4x^2y, \ +x^2y, \ -2x^2y, \ -5x^3.$$

Aplicando a regra, virá:

$$S = 3x^2y - 2xy^2 + 5x^3 - 4x^2y - x^2y + 2x^2y - 5x^3.$$

$$S = -2xy^2.$$

464. **Adição de polinômios.** — Consideremos os polinômios

$$(a + b), \ (a^2 + 2ab + b^2) \text{ e } (2a^3 - b^3 - c),$$

cuja soma queremos efetuar.

Indiquemos a operação denominando S a soma.

Atribuindo às letras que constam dos polinômios acima valores particulares, obteremos, para cada um, certo valor numérico.

Somando êsses valores numéricos teremos o valor numérico da soma, que é precisamente o mesmo da expressão que se obtém escrevendo os polinômios, uns em seguida aos outros, com os respectivos sinais. — Teremos, pois

$$S = a + b + a^2 + 2ab + b^2 + 2a^3 - b^3 - c.$$

Em vista do exposto, somos conduzidos à seguinte

465. **Regra.** — *Para somar dois ou mais polinômios, escrevem-se, uns em seguida aos outros, conservando-se os sinais de todos os termos e reduzem-se os termos semelhantes, se houver.* — Exemplos

1.º Somar os polinômios seguintes:

$$(2a + 1), \ (4a - 5), \ (3a + 4b - 3) \text{ e } (2b - 5a + 2).$$

Aplicando a regra, teremos

$$S = 2a + 1 + 4a - 5 + 3a + 4b - 3 + 2b - 5a + 2.$$

Reduzindo os termos semelhantes, virá:

$$S = 4a + 6b - 5.$$

466. **Indicação prática.** — Quando os polinômios contêm termos semelhantes, pode-se facilitar a operação, escrevendo-se uns abaixo dos outros, de maneira que os termos semelhantes se correspondam em coluna vertical. — Exemplo

$$(3x^2 + 4ax - 2a^2) + (2x^2 - 3ax + a^2) + (x^2 + ax + 2a^2).$$

Dispondo os polinômios da maneira indicada, teremos

$$\begin{array}{r}
+3x^2 + 4ax - 2a^2 \\
+2x^2 - 3ax + a^2 \\
+ \ x^2 + \ ax - 2a^2 \\
\hline
+6x^2 + 2ax + \ a^2
\end{array}$$

467. **Subtração.** — A subtração algébrica tem por fim determinar uma expressão cujo valor numérico seja igual à diferença entre os valores numéricos de duas expressões dadas.

Dois casos se distinguem na subtração algébrica:

1.º *Subtração de monômios.*

2.º *Subtração de polinômios.*

468. **Subtração de monômios.** — Seja a subtrair o monômio $-3a^2$ do monômio $+5a^3$.

De acôrdo com a definição, a expressão correspondente à diferença deve ter um valor numérico igual à diferença entre os valores numéricos das expressões dadas.

Atribuindo a a um valor particular, *2* por exemplo, teremos, respectivamente, os valores numéricos seguintes:

$$+5a^3 = +40,$$
$$-3a^2 = -12.$$

O valor numérico do resultado será, portanto

$$D = 40 - (-12).$$

Notando que $+40$ e -12 são dois números algébricos, teremos

$$40 - (-12) = 40 + 12 = +52.$$

Escrevendo, agora, o segundo monômio em seguida ao primeiro, *com o sinal trocado*, teremos a expressão

$$+5a^3+3a^2$$

cujo valor numérico, para $a=2$ é

$$+52.$$

E como *52* é exatamente a diferença entre os valores numéricos dos monômios dados, segue-se que a expressão

$$5a^3+3a^2$$

corresponde exatamente a essa diferença.

Em vista do resultado a que chegámos, podemos estabelecer a seguinte

469. **Regra.** — *Para subtrair um monômio de outro, escreve-se o segundo em seguida ao primeiro com o sinal trocado e reduzem-se os termos semelhantes, se houver.* — Exemplos

1.º Efetuar a operação seguinte:

$$(+3a^2b)-(+5ab^2).$$

Aplicando a regra, teremos

$$(+3a^2b)-(+5ab^2)=3a^2b-5ab.$$

2.º Efetuar a operação seguinte:

$$(-4m^2n)-(+2m^2n).$$

Aplicando a regra, virá:

$$(-4m^2n)-(+2m^2n)=-4m^2n-2m^2n.=-6m^2n.$$

3.º Efetuar a operação seguinte:

$$(-2x^4)-(-3x^3).$$

Aplicando a regra, resultará:

$$(-2x^4)-(-3x^3)=-2x^4+3x^3.$$

470. **Subtração de polinômios.** — Seja a subtrair o polinômio $2x^3-3x^2+5x$ do polinômio a^2-4a-5.

Atribuindo a x e a, respectivamente, os valores *2* e *3*, os polinômios tomarão os valores numéricos seguintes:

$$2x^3-3x^2+5x=14.$$
$$a^2-4a-5=-8,$$

O valor numérico do resultado será, portanto

$$D=(14)-(-8)=14+8=22.$$

Escrevendo o segundo polinômio em seguida ao primeiro e *trocando os sinais de todos os termos do segundo*, teremos

$$2x^3-3x^2+5x-a^2+4a+5.$$

Calculando o valor numérico da expressão acima, para $x=2$ e $a=3$, encontraremos

$$22.$$

Em vista do resultado obtido, concluimos que a expressão corresponde exatamente à diferença entre os polinômios dados e estabelecemos a seguinte

471. **Regra.** — *Para subtrair um polinômio de outro, escreve-se o minuendo, com os sinais respectivos, e, em seguida, o subtraendo, com os sinais trocados de todos os seus termos. Reduzem-se os termos semelhantes, se houver.* — Exemplos

1.º Efetuar a operação seguinte:

$$(x^2+y^2+2xy)-(x^2+y^2-2xy).$$

Aplicando a regra virá:

$$D=x^2+y^2+2xy-x^2-y^2+2xy.$$

Reduzindo os termos semelhantes, teremos

$$D=4xy.$$

2.º Efetuar a operação seguinte:

$$(2a^3b-3b^4+5a^4+a^2b^2-ab^3)-(4a^4-3b^4-2ab^3+4a^3b+$$
$$+a^2b^2).$$

Aplicando a regra, virá:

$$D=2a^3b-3b^4+5a^4+a^2b^2-ab^3-4a^4+3b^4+2ab^3-4a^3b-$$
$$-a^2b^2.$$

Reduzindo os termos semelhantes, teremos

$$D=-2a^3b+a^4+ab^3 \quad \text{ou} \quad D=a^4-2a^3b+ab^3.$$

3.° Efetuar a operação seguinte:

$$\left(\frac{3}{4}a^2+\frac{3}{4}ab+2b^2\right)-\left(a^2-ab+\frac{1}{4}b^2\right).$$

Aplicando a regra resultará:

$$D=\frac{3}{4}a^2+\frac{3}{4}ab+2b^2-a^2+ab-\frac{1}{4}b^2.$$

Reduzindo os termos semelhantes, obteremos

$$D=-\frac{1}{4}a^2+\frac{7}{4}ab+\frac{7}{4}b^2.$$

472. **Indicação prática.** — Quando nos polinômios figuram muitos termos semelhantes, facilita-se a redução, escrevendo-os um sôbre o outro, de maneira que os termos semelhantes se correspondam em coluna vertical. — Exemplo

$$(3a-2b+c+5)-(4a-3b+2c+4).$$

Dispondo a operação da maneira indicada, teremos

$$\begin{array}{r}
P=3a-2b+c+5\\
P'=-4a+3b-2c-4\\
\hline
P-P'=-a+b-c+1
\end{array}$$

473. **Observação.** — Pode-se efetuar simultâneamente diversas adições e subtrações de polinômios, para o que basta aplicar as regras conhecidas. — Exemplifiquemos.

1.° Sendo dados os polinômios

$$\begin{aligned}
P&=4x^3+3x^2y-2xy^2-4y^3\\
P'&=5x^3+2x^2y-3xy^2-6y^3\\
P''&=8x^3+4x^2y-6xy^2-11y^3
\end{aligned}$$

formar o polinômio

$$P+P'-P''.$$

Indicando as operações, teremos

$$(4x^3+3x^2y-2xy^2-4y^3)+(5x^3+2x^2y-3xy^2-6y^3)-$$
$$-(8x^3+4x^2y-6xy^2-11y^3).$$

Aplicando as regras acima estabelecidas, resultará:

$$4x^3+3x^2y-2xy^2-4y^3+5x^3+2x^2y-3xy^2-6y^3-$$
$$-8x^3-4x^2y+6xy^2+11y^3.$$

Reduzindo os termos semelhantes, virá:

$$P+P'-P''=x^3+x^2y+xy^2+y^3.$$

O presente caso comporta, ainda, a disposição prática acima indicada. — Aplicando-a, teremos

$$\begin{array}{r}
P=4x^3+3x^2y-2xy^2-4y^3\\
+P'=5x^3+2x^2y-3xy^2-6y^3\\
-P''=-8x^3-4x^2y+6xy^2+11y^3\\
\hline
P+P'-P''=x^3+x^2y+xy^2+y^3
\end{array}$$

474. **Uso dos parêntesis.** — Conforme vimos no exemplo anterior, para indicar diversas somas e subtrações de polinômios, devemos colocá-los entre parêntesis.

O emprêgo dos parêntesis, nesse caso, é regulado da maneira seguinte:

1.° Quando os parêntesis vêm precedidos do sinal + pode-se suprimí-los, *conservando-se* os sinais de todos os termos neles contidos.

2.° Quando os parêntesis vêm precedidos do sinal — pode-se suprimí-los, *trocando-se* os sinais de todos os termos neles contidos.

475. **Exercícios.**

1.	$(+3ab)+(-3ab)$	R. 0
2.	$(+5xy)+(-2xy)$	R. $+3xy$
3.	$(-3xy)+(+3xy)$	R. 0
4.	$(+4a^2b)+(+3a^2b)$	R. $+7a^2b$
5.	$(+3ab^2)-(+2ab^2)$	R. $+ab^2$
6.	$(+7bx)-(-3bx)$	R. $+10bx$
7.	$(-x^2)-(+10x^2)$	R. $-11x^2$
8.	$(-6c^3)-(-6c^3)$	R. 0
9.	$(+5a)+(-2b)+(-4a)+(+3b)$	R. $a+b$
10.	$(+ab)+(-bc)+(+2ab)+(+bc)$	R. $3ab$
11.	$(+3x^2)+(-2x)+(-2x^2)-(-3x)$	R. x^2-x
12.	$(+3a)-(+2b)+(+3b)+(-2a)$	R. $a+b$
13.	$(+7ax^2)-(-ax^3)-(+6ax^2)+(-2ax^3)$	R. ax^2-ax^3
14.	$(+9a^2)+(+5b^2)-(+7a^2)-(-b^2)$	R. $2a^2+6b^2$
15.	$(5x+3y+z)+(2x-2y-2z)$	R. $7x+y-z$
16.	$(3a-4b+c)+(a+2b-c)$	R. $4a-2b$
17.	$(x^3-3x^2+4x-3)+(2x^3+3x^2-6x+5)$	R. $3x^3-2x+2$

18. $(a^3 + 3ab^2 - 3a^2b - b^3) + (2a^3 - 5ab^2 + a^2b + b^3)$ R. $3a^3 - 2ab^2 - 2a^2b$

19. $(3xy - 4x - 2y + 5) + (-xy + 4x - y - 5)$ R. $2xy - 3y$

20. $(a^2 - 2ab + c^2 - 3b^2) - (2a^2 - 2ab + 3b^2)$ R. $-a^2 + c^2 - 6b^2$

21. $(2x - y - 3xy + 2) - (x - y - xy + 2)$ R. $x - 2xy$

22. $(3a^2b^2 + 4ab^3 - 5b^4 + 6) - (3ab^3 - 6b^4 + 3a^2b^2 + 5)$ R. $ab^3 + b^4 + 1$

23. $(4x^2 + 5x - 3y + 4y^2) - (3x^2 + 2x - 3y + 4y^2)$ R. $x^2 + 3x$

24. $(ax + bx + by + cy) - (ax - bx - by + cy)$ R. $2bx + 2by$

25. $\left(\frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{5}a - 10\right) + \left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{10}a + 20\right)$ R. $\frac{5}{4}a^2 + \frac{1}{10}a + 10$

26. $\left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{5}z^2\right) - \left(\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{3}y^2 - \frac{1}{4}z^2\right)$ R. $\frac{2}{15}x^2 - \frac{1}{12}y^2 + \frac{1}{20}z^2$

27. $(a^2 - b^2 + c^2) + (b^2 + c^2 + d^2) - (c^2 + d^2 + a^2)$ R. c^2

28. $(2a - b + 3c) + (-a - b - 4c) - (3a - 2b - c)$ R. $-2a$

29. $3x - \{-2x - [4a - (a + x) - x] + x\}$ R. $2x + 3a$

30. $a - [3x + \{3b - 2a - (a + x)\} + 2a - (3x + a + b)]$ R. $3a - 2b + x$.

Capítulo XXI

EQUAÇÕES DO 1.º GRAU

176. **Noção de equação.** — Consideremos os problemas seguintes:

1.º *Qual é o número que se deve somar a 7 para se obter o total 12?*

Se representarmos o número dado por x, teremos evidentemente

$$7 + x = 12.$$

Procuremos o valor de x, isto é, o número que, colocado no lugar de x, torna $7 + x$ igual a 12.

Ora, de acôrdo com a definição de subtração, dada no capítulo III, resulta

$$x = 12 - 7.$$

Em conseqüência, temos

$$x = 5.$$

Verificação: $7 + 5 = 12.$

2.º *Multiplicando certo número por 5 e do resultado subtraindo 7, obtém-se 13. Qual é o número?*

Representando por x o número procurado e por $5x$ o produto dêsse número por 5, obtemos

$$5x - 7 = 13.$$

Em analogia à transformação feita no problema anterior, podemos escrever

$$5x = 13 + 7.$$

Efetuando a soma indicada no 2.º membro, vem

$$5x = 20.$$

Conforme a definição de divisão, encontramos finalmente

$$x=\frac{20}{5}=4.$$

Verificação: $5\times 4-7=13,$

ou $20-7=13.$

Notemos que, depois de ter representado por x a incógnita nos problemas que acabámos de considerar, estabelecemos as igualdades

$$7+x=12$$

e

$$5x-7=13,$$

em que se encontram expressas, por-meio-dos sinais correspondentes às operações fundamentais, as relações que ligam a incógnita às quantidades conhecidas.

Tais igualdades são denominadas *equações*.

Por assim dizer, *equação é a tradução algébrica das condições do enunciado de um problema* (1).

Estabelecida a equação de certo problema, procura-se, efetuando uma série de transformações mais ou menos complexas, exprimir o valor da incógnita com auxílio das quantidades conhecidas, ou seja, *resolver a equação*.

O valor obtido para a incógnita é chamado *raiz da equação*.

477. **Equações eqüivalentes.** — Duas equações são eqüivalentes quando admitem as mesmas raizes. — Assim, dizemos que

$$x+2=15,$$
$$x-7=6$$

são equações eqüivalentes porque 13 é a raiz comum de ambas.

478. **Resolução das equações do 1.º grau de 1 incógnita.** — As transformações que se devem efetuar na resolução das equações fundam-se nos princípios seguintes:

1.º *Somando ou subtraindo aos dois membros de uma equação a mesma quantidade, forma-se uma equação eqüivalente à primitiva.* — Assim é que se somarmos, por exemplo, 7 a ambos os membros da equação

(1) Na 3.ª série de nossas «Lições de Matemática», completaremos o estudo elementar das equações algébricas.

$$2x+1=9,$$

a equação resultante

$$2x+1+7=9+7,$$

é eqüivalente à primitiva.

Com efeito, substituindo, em ambas, a incógnita pelo seu valor, encontramos

$$8+1=9 \quad \text{e} \quad 8+1+7=9+7.$$

Do mesmo modo, a equação

$$x+12=15$$

é eqüivalente à equação

$$x+12-3=15-3.$$

2.º *Multiplicando ou dividindo os dois membros de uma equação pela mesma quantidade, que não seja nula nem contenha incógnita, forma-se uma equação eqüivalente à primitiva.* — Assim é que, se multiplicarmos por 5 ambos os membros da equação

$$x+7=12,$$

a equação resultante

$$5x+35=60$$

é eqüivalente à primitiva.

Com efeito, substituindo em ambas a incógnita pelo seu valor, encontramos

$$5+7=12 \quad \text{e} \quad 25+35=60.$$

Do mesmo modo a equação

$$6x+18=24$$

é eqüivalente à equação

$$x+3=4.$$

Resolvamos algumas equações simples do 1.º grau de 1 incógnita.

1.º Seja a equação

$$3x+7=19.$$

Subtraindo 7 de ambos os membros, vem

$$3x=19-7.$$

Efetuando a diferença indicada no 2.º membro, resulta

$$3x=12.$$

Dividindo ambos os membros por 3 (coeficiente da incógnita), segue-se

$$x=\frac{12}{3}=4.$$

Verificação:

$$3\times 4+7=19 \quad \text{ou} \quad 12+7=19.$$

2.º Seja a equação

$$6x-9=27.$$

Somando 9 a ambos os membros, vem

$$6x=27+9.$$

Efetuando a soma indicada no 2.º membro resulta

$$6x=36.$$

Dividindo ambos os membros por 6 (coeficiente da incógnita), segue-se

$$x=\frac{36}{6}=6.$$

Verificação:

$$6\times 6-9=27 \quad \text{ou} \quad 36-9=27.$$

3.º Seja a equação

$$5x+40=x+112.$$

Subtraindo x de ambos os membros, vem

$$5x-x+40=112.$$

Subtraindo 40 de ambos os membros, resulta

$$5x-x=112-40.$$

Reduzindo os termos semelhantes, encontramos

$$4x=72.$$

Dividindo ambos os membros por 4 (coeficiente da incógnita) segue-se

$$x=\frac{72}{4}=18.$$

Verificação:

$$5\times 18+40=18+112 \quad \text{ou} \quad 90+40=18+112.$$

4.º Seja a equação

$$\frac{x}{2}+5=7.$$

Multiplicando ambos os membros por 2, vem

$$\frac{x\times 2}{2}+5\times 2=7\times 2,$$

ou

$$x+10=14.$$

Subtraindo 10 de ambos os membros, resulta

$$x=14-10.$$

Efetuando a subtração indicada no 2.º membro, obtemos

$$x=4.$$

Verificação:

$$\frac{4}{2}+5=7 \quad \text{ou} \quad 2+5=7.$$

5.º Seja a equação

$$5(3x-4)=x+8.$$

Efetuando o produto indicado no 1.º membro, vem

$$15x-20=x+8.$$

Subtraindo x de ambos os membros, resulta

$$15x-x-20=8.$$

Somando 20 a ambos os membros, temos

$$15x-x=8+20.$$

Reduzindo os termos semelhantes, encontramos

$$14x=28.$$

Dividindo ambos os membros por 14 (coeficiente da incógnita) resulta

$$x = \frac{28}{14} = 2.$$

Verificação:

$$5(3 \times 2 - 4) = 2 + 8 \quad \text{ou} \quad 10 = 2 + 8.$$

479. Exercícios.

Resolver as equações seguintes:

1. $x + 5 = 9$ — R. 4
2. $x - 8 = 2$ — R. 10
3. $2x + 3 = 7$ — R. 2
4. $3x + 5 = 24$ — R. 7
5. $7x - 5 = 16$ — R. 3
6. $3x - 1 = 23$ — R. 8
7. $2x + 1 = 6 + x$ — R. 5
8. $3x + 2 = 2x + 11$ — R. 9
9. $4x - 3 = 3x + 1$ — R. 4
10. $4x - 2 = x + 1$ — R. 1
11. $5(x + 1) = 20$ — R. 3
12. $7(x - 1) = 63$ — R. 10
13. $3(x + 2) = 2x + 13$ — R. 7
14. $6(x - 2) = 5x - 4$ — R. 8
15. $\frac{x}{2} + 1 = 3$ — R. 4
16. $\frac{x}{3} + 5 = 8$ — R. 9
17. $\frac{x}{5} - 1 = 2$ — R. 15
18. $\frac{2x}{3} + 2 = x + 1$ — R. 3
19. $\frac{3x}{4} - 8 = x - 11$ — R. 12
20. $\frac{4x}{5} - 7 = 2x - 31$ — R. 20

480. Aplicação à resolução de problemas.

1.º — *Dividir o número 34 em três partes, de maneira que a primeira exceda a segunda de 3 e que a segunda exceda a terceira de 5.*

Representemos, respectivamente, por

x . . . . a 3.ª parte
$x + 5$ . . . . a 2.ª parte
$(x + 5) + 3$ ou $x + 8$ . . . . . a 1.ª parte

Devendo a soma delas ser 34, teremos

$$x + x + 5 + x + 8 = 34$$

Resolvendo a equação acima, encontraremos sucessivamente

$$x + x + x = 34 - 5 - 8$$

ou

$$3x = 21,$$

de onde resulta

$$x = 7.$$

Como x representa a 3.ª parte, segue-se

3.ª parte . . . $= 7$
2.ª parte . . . $7 + 5 = 12$
1.ª parte . . . $12 + 3 = 15$

2.º — *Em um terreno há coelhos e galinhas, ao todo 12 cabeças e 40 pernas. Quantos são os coelhos e quantas são as galinhas?*

Sejam x o número de coelhos,
$12 - x$ o número de galinhas

o número de pernas será, respectivamente, de

$4x$ para coelhos,
$2(12 - x)$ para as galinhas.

Considerando que o total de pernas é 40, obteremos a equação seguinte:

$$4x + 2(12 - x) = 40$$

Resolvendo-a, encontraremos

$$4x + 24 - 2x = 40$$
$$4x - 2x = 40 - 24$$
$$2x = 16$$
$$x = 8.$$

Como x representa o número de coelhos, a solução será a seguinte:

8 coelhos
4 galinhas

3.º — *Determinar o número de alunos matriculados em uma das classes de certo ginásio, sabendo-se que, quando faltam 5, o número de presentes corresponde a 7/8 do número de matriculados.*

Sejam

x o número de matriculados
$x - 5$ o número de presentes

Notando que o número de presentes corresponde a 7/8 do número de matriculados, estabelecemos a equação seguinte:

$$x - 5 = \frac{7x}{8}$$

Resolvendo-a, teremos

$$8x - 40 = 7x$$
$$8x - 7x = 40$$
$$x = 40.$$

481. Problemas.

1. Quais os dois números consecutivos cuja soma é 49? R. 24 e 25.
2. Quais os três números consecutivos cuja soma é 96? R. 31, 32 e 33.
3. Quais os três números ímpares consecutivos cuja soma é 39? R. 11, 13 e 15.
4. Determinar três números cuja soma é 60, sabendo-se que o segundo excede o primeiro de 7 e é inferior ao terceiro de 7. R. 13, 20 e 27.
5. A soma de dois números é 120 e a sua diferença é 2/3 do menor. Quais são êsses números? R. 75 e 45.
6. Determinar dois números, sabendo-se que a sua soma é 58, que o quociente do maior pelo menor é 4 e que o resto dessa divisão é 3? R. 47 e 11.

7. A diferença entre dois números é 42. Pergunta-se quais são êsses números, sabendo-se que, se somarmos 5 unidades a cada um dêles, o maior ficará sendo igual ao triplo do menor. R. 58 e 16.
8. Procurar três números tais cuja soma seja 129, sabendo-se que o segundo excede o primeiro de 18 e que o terceiro excede o segundo de 12. R. 27, 45 e 57.
9. Um pai tendo atualmente 34 anos e seu filho 6, pergunta-se daquí a quantos anos a sua idade será o triplo da de seu filho. R. 8.
10. Determinar a idade atual de uma pessoa, sabendo-se que daqui a 7 anos será o triplo da que era há 7 anos. R. 14.
11. Se, do dôbro de idade atual de uma pessoa, subtraírmos o triplo da que tinha há 12 anos, teremos a sua idade atual. Qual é essa idade? R. 18.
12. Repartir 210\$ entre duas pessoas de maneira que a parte de uma delas seja 3/4 da parte da outra. R. 90\$ e 120\$.
13. Repartir 870\$ em 4 partes, de maneira que cada uma delas exceda a precedente de 45\$. R. 150\$, 195\$, 240\$ e 285\$.
14. Repartir 80\$ entre três pessoas, de maneira que a primeira receba 3/4 do que receber a segunda e a terceira 1/7 do que receberem as outras duas juntas. R. 30\$, 40\$ e 10\$.
15. Repartir 59 em duas partes de maneira que a diferença entre elas seja 17. R. 38 e 21.
16. A distância entre Santos e Paranaguá é de 142 milhas. Um vapor parte de Paranaguá, com destino a Santos, com a velocidade média de 12 milhas horárias. Que velocidade deve ter outro vapor saído de Santos à mesma hora, com destino a Paranaguá, para que se cruzem a 75 milhas dêste último pôrto? R. 10,72.
17. Um relógio é acertado no primeiro dia do mês e adianta 15 minutos por dia. No fim de que tempo marcará êle novamente a hora exata? R. 48 dias.
18. Uma pessoa pretende demorar 6 horas em um passeio de automóvel. Pergunta-se a que distância poderá ir, sabendo-se que a velocidade do automóvel é de 45 km. por hora na ida e 30 na volta. R. 108 km.
19. Determinar o número de alunos matriculados em uma classe, sabendo-se que, quando faltam 8, o número de presentes corresponde a 4/5 do número de matriculados. R. 40.
20. Determinar o número de notas de 5\$ e 10\$ necessário para o pagamento da importância de 275\$, sabendo-se que o número total das notas é 35. R. 15 e 20.

CAPÍTULO XXII

EIXOS COORDENADOS — REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

482. **Preliminares.** — Nas primeiras lições de Geografia aprenderam os estudantes que, dentre as diversas maneiras de representar um ponto sôbre a Terra, era a mais racional a sua designação pelas coordenadas geográficas. Assim receberam a noção precisa de *latitude* e *longitude*.

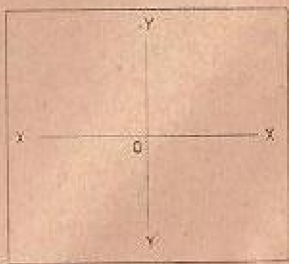
O valor em graus do arco que mede o afastamento de determinado ponto em relação ao Equador, representa, definindo elementarmente, a medida da *latitude*. Do mesmo modo, o arco que mede o afastamento dêsse ponto em relação a determinado meridiano, chamado inicial ou principal, dá o valor da *longitude*.

A representação do ponto por suas coordenadas geográficas foi feito em relação às duas linhas imaginárias: Equador e Meridiano principal.

Essas duas linhas são, a grosso modo, os eixos coordenados, aos quais se referiu o ponto então designado pelas suas coordenadas.

Perfeitamente. Mas agora, sôbre uma porção plana qualquer, podemos representar um ponto pelas suas coordenadas e em relação a dois eixos considerados. Limitemos, porém, os nossos exercícios aos eixos ortogonais, isto é, àqueles que fazem entre si ângulos retos.

483. **Eixos coordenados.** — Suponhamos as duas linhas designadas pelas letras XX' e YY', com que geralmente são marcadas. Elas são perpendiculares entre si e formam os eixos de um sistema de coordenadas: o ortogonal.



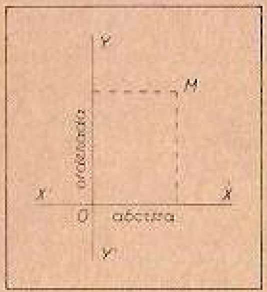
Em relação a êsses eixos, podemos representar um ponto qualquer situado na superfície plana em que êles repousam.

Os números com que o definiremos recebem denominações especiais segundo a medida que representam. Assim, o afastamento em que o ponto considerado se acha do eixo XX', chama-se *abcissa* do ponto; e o afastamento dêsse ponto ao eixo YY', chama-se *ordenada*.

Ao conjunto — *abcissa* e *ordenada* — dá-se o nome de *coordenadas* do ponto considerado.

484. **Coordenadas de um ponto.** — Seja o ponto M o considerado. Baixemos de M uma perpendicular sôbre XX' e outra sôbre YY'.

Se adotarmos uma unidade para a medida dêsses segmentos MN e MP, teremos o valor das coordenadas de M. Suponhamos: MP 8 e MN 13. Diremos, pois, que o ponto M tem por coordenadas: abcissa, 13, e ordenada, 8.



E a posição do ponto será indicada por

$$M\begin{cases} MP \\ MN \end{cases}$$

ou

$$M\begin{cases} x = 13 \\ y = \ \ 8 \end{cases}$$

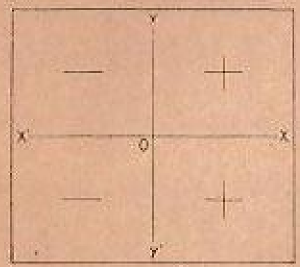
ou, ainda,

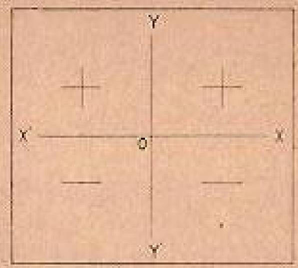
$$M(13;8).$$

ORIGEM

485. **Sinais das coordenadas.** — A-fim-de se manter a relação necessária entre os pontos definidos pelos eixos coordenados, considera-se como origem das contagens dos valores o ponto determinado pela intercepção dos dois eixos. A sua designação faz-se normalmente pela letra O, inicial de *origem*, e suas coordenadas são (O,O).

Em relação à origem é que devem ser referidos os pontos considerados. Mas, desde logo se constata a dificuldade que resultaria de serem apenas tomados os valores absolutos das distâncias entre os pontos considerados e os eixos coordenados. Por isso, consagrou-se, convencionalmente, indicar como *positivos* todos os valores de *abcissas* à direita do eixo YY' e *negativos* todos os valores de *abcissas* à esquerda dêsse eixo.





As ordenadas, por sua vez se distinguem pela situação relativa do ponto em relação ao eixo XX'. Assim, são *positivas* as ordenadas acima do eixo horizontal ou dos XX', e *negativas* as abaixo dêsse eixo.

E' isso que esquemàticamente exprimem as figuras acima.

De posse de tais noções podemos agora representar qualquer ponto, e defini-lo com precisão em relação aos eixos coordenados.

486. **Determinação dum ponto.** — Considerados os eixos coordenados, vejamos como designar um ponto segundo a posição que êle ocupe relativamente aos eixos.

Sejam os pontos M, M', M'' e M'''. O ponto M está no primeiro quadrante. As suas coordenadas são positivas, porque êle está acima do eixo dos XX' e à direita do eixo dos YY'. Medindo a sua distância aos eixos, pela unidade *m*, vemos que êle está a 4 unidades de XX' e a 3 unidades de YY'. E como êsses valores, por convenção são positivos, representámo-lo assim

$$M\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

ou $\qquad M(+4, +3)$

ou, simplesmente $\qquad M(4,3).$

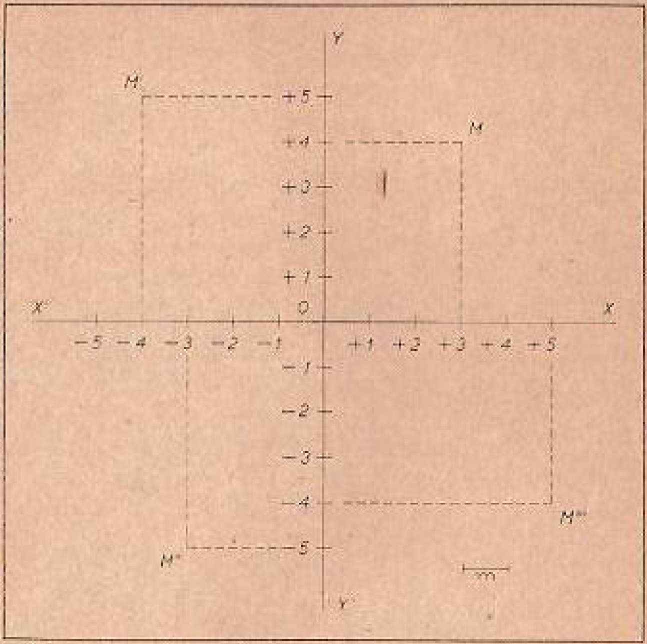
O ponto M' está no 2.º quadrante. A sua abcissa é positiva, a sua ordenada é negativa. Os valores das coordenadas são:

$$x = -4 \quad e \quad y = +5.$$

Representámo-lo $\qquad M'\begin{cases} x = -4 \\ y = +5 \end{cases}$

ou $\qquad M'(-4; +5),$

ou $\qquad M'(-4,5).$



O ponto M'' está no 3.º quadrante. A sua abcissa é negativa e mede três unidades. A sua ordenada é também negativa e mede 5 unidades. — Então

M''(−3, −5).

Finalmente, o ponto M''' está a 4 unidades do eixo dos XX' e a 5 unidades do eixo dos YY'. Nesse quadrante os x são positivos e os y são negativos. — Representamo-lo assim

M'''(+5, −4).

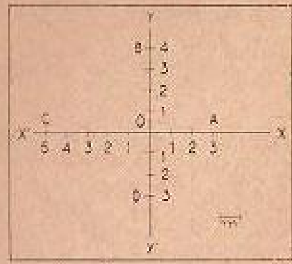
Dêsse modo, estão perfeitamente definidos, em relação aos eixos, os pontos M, M', M'' e M'''.

Generalizando as considerações feitas, podemos assim determinar quaisquer outros pontos.

487. **Pontos especiais.** — Além do ponto de origem, cujas coordenadas sabemos ser $x = 0$ e $y = 0$, outros há que oferecem particularidades.

Tais são os que ficam sôbre os eixos.

E' fácil de compreender que, se um ponto qualquer está sôbre um eixo, uma das coordenadas terá sempre valor nulo, sendo o outro medido pelo afastamento do ponto e sôbre o eixo em que se encontra, a origem. Assim, o ponto A tem por coordenadas: $x = 3$ e $y = 0$. — Então, A(3,0).



O ponto B: $x = 0, y = +4$. Donde: B(0,4).

O ponto C: $x = -5, y = 0$. A sua representação é C(5,0).

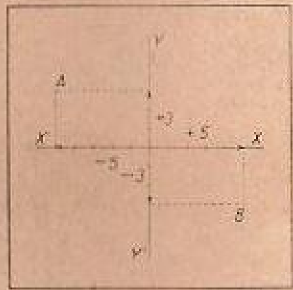
O ponto D: $x = 0, y = -3$. A sua designação é: D(0,3).

488. Exercícios.

1. — *Determinar os pontos A e B, cujas coordenadas são*

A (−5, +3)
B (+5, −3)

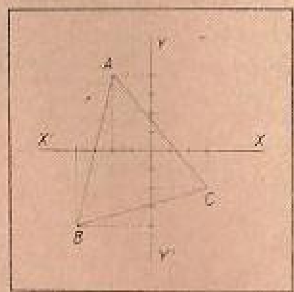
Solução



2. — *Construir o triângulo cujos vértices são*

A (−2, +4), B (−4, −4) e C (+3, −2)

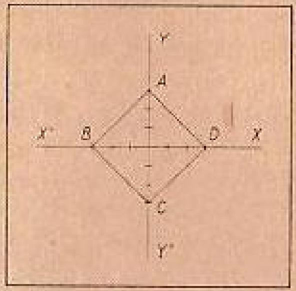
Solução



3. — *Construir o quadrado cujos vértices são*

A $(0, +3)$, B $(-3{,}0)$, C $(0, -3)$ e D $(+3{,}0)$

Solução

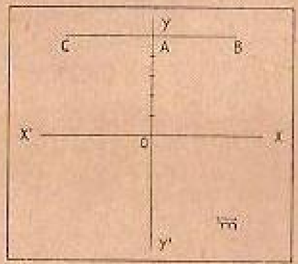


4. — *Traçar uma linha cujas ordenadas sejam eqüidistantes do eixo dos XX'.*

Qualquer paralela ao eixo dos XX' satisfaz a questão. Essa linha se representa, por $y = m$, sendo m um valor qualquer de ordenada.

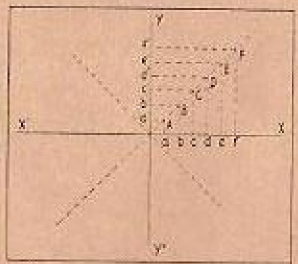
Seja $y = 5$. Tomando-se, a partir do eixo dos XX' sôbre o eixo dos YY', cinco unidades, determina-se o ponto A, em que BC corta YY'. Tracemos BC, pois.

Essa paralela tem o nome especial de *acíntota.*



5. — *Traçar uma linha cujas abcissas sejam iguais às ordenadas, em valor absoluto.*

Considerados os eixos retangulares, igualmente se marcam distâncias iguais sôbre os eixos dos XX' e dos YY', aplicando-se tantas vezes



a unidade quantos forem os pontos que se queiram marcar, num e noutro sentido, a partir da origem.

Das distâncias marcadas (a, b, c, d, e, f, etc.,... a', b', c', d', e', f', etc.), levantam-se perpendiculares, cuja intercepção irá determinando os pontos da reta (A, B, C, D, E, F,...) A ligação dêsses pontos dará a reta procurada AF.

Notemos que, a partir da origem, sòmente quatro retas satisfazem a condição de $x = y$. São, precisamente, as bissetrizes dos ângulos retos: XOY, X'OY; XOY'; e X'OY'.

489. **Gráficos.** — O conhecimento do uso dos eixos coordenados permite-nos fazer por meio de gráficos, a representação de certos fatos ou fenômenos científicos, sociais ou econômicos.

De suas vantagens notáveis se vale a Estatística, que é a ciência de aplicação e regista com dados matemáticos os índices caraterísticos da evolução.

Mas, tal é o emprêgo hoje dos gráficos, que a tendência do ensino moderno é buscar neles recursos para melhor o estudioso fixar na memória os fenômenos mais interessantes.

E' essa, na verdade, uma inteligente maneira de completar os ensinamentos, de que hoje se valem os mestres.

Busca-se, por todos os modos dar, aos que estudam, margem a que façam a aprendizagem de maneira perfeita, e, então, os gráficos se tornam elementos de grande valor, já pelo realce que trazem aos fatos em comparação, já por permitirem outros ensaios à atenção espontânea.

490. **Espécies de gráficos.** — E' de ver que não cabe aos estudantes o penetrarem agora, e tão aprofundadamente, no estudo de questões desta ordem.

Todavia, assentemos que um gráfico representa uma função, pois exprime a correspondência entre os valores de duas quantidades. Uma é a *variável;* outra, a *função.*

A linha que relaciona as variações das duas quantidades consideradas, é a *curva* da função. Essa curva abrange tipos os mais variados e diversos, e permite-se conceba grande número de gráficos.

Neste estudo consideraremos os gráficos *empíricos* e os *matemáticos.*

491. **Gráficos empíricos.** — Variadíssimos são os tipos de gráficos empíricos. Vão desde as simples tabelas às barras ou figuras, e podem ser *comerciais, medicais, meteorológicos,* etc.

Os trabalhos de Estatística constituem fonte de vasto ensinamento aos estudantes.

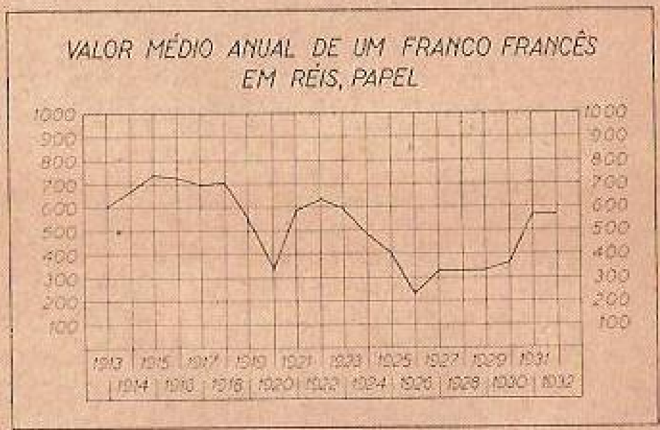
Em certos anuários de propaganda, encontram-se exemplos interessantes, que bem revelam o progresso no uso dos gráficos e que são complemento necessário ao conhecimento dos resultados oferecidos pelos recenseamentos.

O emprêgo de figuras as mais diversas, guardando sempre uma correlação com a realidade, serve ao esclarecimento de inúmeros fenômenos.

Por meio de cubos, círculos, quadrados, caricaturas, etc. consegue-se dar ao estudante uma idéia precisa de variação ou diferenciação entre os elementos considerados.

492. **Exemplos.** — 1.º Vejamos, agora, como se representa, com os eixos coordenados, uma variação qualquer.

A-fim-de facilitar o trabalho, tomemos um papel quadriculado e consideremos como unidade cada uma de suas divisões, o que nos permite medir com mais rapidez as frações da unidade. Sejam os valores médios anuais de um franco francês em réis, papel:



1913 - \$600; 1914 - \$668; 1915 - \$737; 1916 - \$723;
1917 - \$694; 1918 - \$703; 1919 - \$555; 1920 - \$335;
1921 - \$588; 1922 - \$632; 1923 - \$597; 1924 - \$483;
1925 - \$402; 1926 - \$229; 1927 - \$332; 1928 - \$332;
1929 - \$332; 1930 - \$363; 1931 - \$565; 1932 - \$569.

E com isso vamos compor o gráfico.

A função tempo exprimamos pelas abcissas. Marquemos, para tal efeito, ao pé das linhas verticais do papel quadriculado, os pontos *1913, 1914, 1915...*, considerando cada divisão igual a uma unidade *ano*.

A partir da linha horizontal referência, representemos a variação em réis pelas ordenadas, correspondendo cada divisão a 100 réis. Ficam, assim marcadas com 100, 200, 300, 400..., as horizontais do quadriculado, as quais são os valores das ordenadas, que medem o afastamento entre as horizontais e a origem.

Agora, para determinar os pontos da curva que indica a variação, ou o gráfico simplesmente, tomemos o primeiro valor. Em 1913 o franco valia \$600. Marquemos, pois, sôbre a primeira vertical, 1913, seis divisões ou seis unidades. E temos no encontro da horizontal 600 com a vertical 1913, o primeiro ponto da curva.

Vamos determinar o 2.º ponto. O valor do franco em 1914 era de \$668. Sôbre a vertical 1914, marquemos a ordenada correspondente a êsse valor. São 6,68 unidades que vamos marcar. A partir da horizontal, eixo das abcissas, contemos as divisões 100, 200, 300... até 600. E da divisão entre 600 e 700 tomemos 0,68. Temos, assim, o 2.º ponto da curva.

O terceiro ponto estará sôbre a vertical 1915 e corresponderá à ordenada 757.

E, assim, continuaríamos marcando sôbre as verticais as ordenadas correspondentes aos valores do franco, para determinação dos pontos da curva.

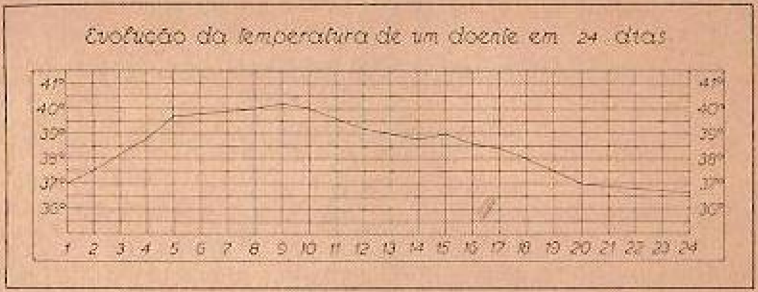
Ligando-os depois por linha cheia, esta, tal como a do gráfico, dá a idéia precisa da correspondência entre o franco e o réis papel, de 1913 a 1932.

2.º Os gráficos auxiliam muito o diagnóstico dos médicos. Em regra, para certos casos difíceis de diagnosticar, um dos recursos de que se lança mão, é o gráfico das variações de temperatura. Sucede que, sendo normalmente impossível ao clínico permanecer junto ao enfêrmo, êle atribue a qualquer pessoa assistente a tomada de temperatura e o seu registo, para o gráfico.

O tempo entre uma e outra tomada é variável: pode ser feita de hora em hora, ou uma, duas, três ou mais vezes ao dia.

Com os dados da temperatura pela manhã, tomada diàriamente, façamos o gráfico da febre de um tifoso.

Sejam as temperaturas por dia de moléstia: 37°; 37°,5; 38°,2; 38°,8; 39°,7; 39°,8; 39°,9; 40°; 40°,2; 40°; 39°,6; 39°,2;



39°; 38°,8; 39°; 38°,6; 38°,4; 38°; 37°,5; 37°; 36°,9; 36°,8; 36°,7; 36°,6.

Sôbre o papel quadriculado marquemos, como abcissas, os dias, e, como ordenadas, a partir da horizontal, que será a linha de referência 36°, marquemos cada divisão com 0°,5 registando apenas os números inteiros de graus 37°, 38°, 39°, 40° e 41°.

Correspondendo a cada dia, tomemos o número de divisões eqüivalentes aos graus da febre e frações dêles para que se determinem os pontos da curva. Ligados êstes, temos a curva da febre do doente, tomada a temperatura sempre pela manhã.

Poderíamos não só fazer um gráfico mais complexo com as temperaturas de 6 e 18 horas de cada dia, assim também o da temperatura média diária do doente, aplicando o termômetro quatro vezes ao dia, para a determinação da média de cada dia, etc.

3.° Onde, porém, os gráficos têm tido notável emprêgo é no registo dos fenômenos meteorológicos. E' bem regular o número de aparelhos que servem à feitura de gráficos por processos mecânicos. Assim, há barômetros registadores, pluviômetros totalizadores, mareógrafos, sismógrafos, etc.

Além disso, com o recurso de dados colhidos não só na observação da fôrça dos ventos, como na de temperaturas diárias, humidade do ar, quantidade de chuva, etc., são feitos pelas repartições de serviços meteorológicos gráficos interessantes, que orientam o público nos *processus* pelos quais decorrem os fenômenos meteorológicos, servindo à agricultura, à aviação, aos transportes em geral, etc.

Vamos compor um gráfico de temperatura, para a cidade de Belo Horizonte, abrangendo de 1914 a 1921, com as medi-

das das máximas obtidas: janeiro, 27°; fevereiro, 27°,4; março, 27°,4; abril, 26°,7; maio, 25°,2; junho, 24°,2; julho, 24°,8; agôsto, 25°,2; setembro, 26°,1; outubro, 26°,5; novembro, 26°,7; dezembro, 26°,7.

Para isso, tomemos, no papel quadriculado, o eixo das abcissas para o das unidades mensais; e o das ordenadas para as marcações das médias. Como *linha de referência* consideremos a horizontal eqüivalente a 23° de temperatura.

Assinalemos as divisões horizontais de 0,2 em 0,2 graus, sòmente anotando os números inteiros.

A seguir, sôbre as verticais a cujos pés estejam os meses designados, tomemos os valores correspondentes às médias, por mês. Obtemos, assim, uma série de pontos, que, uma vez ligados, fornecerão a curva das médias das temperaturas máximas diárias, por mês.

Eis aí. Como fàcilmente se depreenderá, com os ensinamentos para o traçado de gráficos e com o emprêgo de eixos coordenados, os princípios que orientam trabalhos dessa natureza, não podem deixar de ter generalizado uso na expressão dos valores por meio de recursos gráficos.

A guisa de prova ao nosso assêrto, expomos, a seguir, certas variedades de gráficos empíricos, que evidenciarão até onde se podem aproveitar os referidos princípios na representação dos números índices de fatos ou fenômenos científicos, sociais ou econômicos.

Dentre os gráficos empíricos são os mais elementares os de barras e os de figuras.

Nos de barras, a disposição dos elementos significativos pode ser em forma vertical, em forma horizontal ou outra qualquer.

A estimativa da *produção de café*, em milhões de sacas, na safra 1933-1934, pode ser indicada com o gráfico seguinte, em que cada barra mede a produção provável por Estado cafeeiro, adotando-se uma unidade para a correspondência precisa com os números prováveis.

Como fàcilmente se compreenderá, o gráfico tem as barras correspondentes aos números: 20.500.000 sacas, para S. Paulo; 5.500.000 sacas para Minas Gerais; 1.800.000 sacas para o Espírito Santo; 1.200.000 sacas para o Estado do Rio de Janeiro; 500.000 sacas para o Paraná; e 380.000 sacas para os outros Estados produtores.

O gráfico permite, à simples inspeção, verificar que S. Paulo produzirá mais de metade da safra; que Minas produzirá pouco mais de um quarto de S. Paulo, etc.

A *erva-mate* é a principal produção do Estado do Paraná. Mas, Santa Catarina, Rio Grande do Sul e Mato Grosso

também exportam a preciosa ilecina. O seu consumo maior se faz na Argentina, e depois sucessivamente no Uruguai, no Paraguai, no Chile e no Brasil. Outras nações, porém, começam a importar do Brasil êsse artigo utilíssimo.

Com o conhecimento das quantidades importadas pelos consumidores em 1932, movimento que alcançou os valores de 95.000 tons. na Argentina; 18550 tons. no Uruguai; 11.000 tons. no Paraguai; 7.200 tons. no Chile; 6.000 tons. no Brasil; e 1.500 tons. em outros paises, podemos fazer o gráfico ao lado.

Um e outro dêstes gráficos de barras, como se vêem, guardam relação constante entre o tamanho das figuras e o número de unidades que elas representam.

Os gráficos *com figuras*, como já dissemos, são os mais diversos. Em relação à extensão quilométrica da rede ferroviária, nos quatro Estados brasileiros em que há maior quilometragem, o gráfico com figuras de locomotivas dá uma idéia clara dêsse desenvolvimento. Êle indica, para o ano de 1932, os totais de 7.946 km. para Minas Gerais; 7.144 km. para São Paulo; 3.138 km. para o Rio Grande do Sul; e 2.723 km. para o Estado do Rio de Janeiro.

No conjunto de suas proporções, as figuras representam, segundo a unidade gráfica adotada, a quilometragem correspondente a cada um dos Estados considerados, segundo é fácil verificar.

Um gráfico de forma circular, como o que segue, poderá permitir, a um simples lance de vista, a compreensão nítida da situação da lavoura de café, quanto ao número de cafeeiros existentes no Brasil em 1929.

Uma tabela de convenções, correspondendo ao nome de cada Estado produtor, indica a quantidade gráfica que a êste corresponde como setor no círculo.

A análise do gráfico mostra-nos que S. Paulo tem mais de

metade do número total de pés de café do Brasil, Minas tem mais de um sexto e assim por diante. As áreas dos setores revelam, de modo claro, a diferença existente entre as lavouras consideradas.

Outro tipo de gráfico, de interessante efeito, é o que segue, no qual se representa o valor da exportação brasileira em milhões de contos de réis. A unidade tomada é de *meio milhão de contos*. Faz-se a variação segundo o raio dos círculos concêntricos, aumentando-se o raio dos círculos de meia unidade, que é o segmento correspondente a *meio milhão de contos*.

E conhecidos os dados numéricos, obtém-se o valor da exportação por ano servindo-se da marcação feita sôbre os

raios correspondentes aos anos e relativa ao segmento eqüivalente ao valor numérico da exportação atinente àquele espaço de tempo.

A inspeção do gráfico, aos que não tenham a tabela dos valores, mostrará que

1.º nos 24 anos considerados, em 1909 atingimos pela 1.ª vez à cifra de um milhão de contos;

2.º o valor da exportação caiu em 1910 e 1911, para ultrapassar de um milhão em 1912;

3.º o valor caiu de 1912 até 1915, período em que voltou a um milhão de contos;

4.º de 1915 a 1919 manteve-se acima de um milhão, tendo ultrapassado *dois milhões* em 1919;

5.º em 1920 e 1921 manteve-se abaixo de 2 milhões e acima de um e meio milhões;

6.º de 1921 progride a mais de 2 milhões em 1922; a mais de 3 milhões em 1923; a mais de 3 e meio milhões em 1924; e a 4 milhões em 1925;

7.º de 1925 a 1926 decresce até cêrca de 3 milhões;

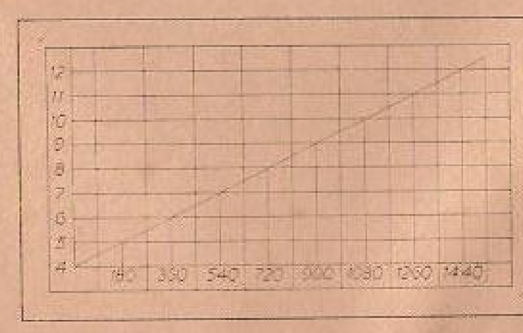
8.º de 26 a 28 progride até alcançar, neste ano, a cifra de 4 milhões;

9.º finalmente, decai em 1929, a menos de 4 milhões.

493. **Gráficos matemáticos.** — Os gráficos matemáticos exigem para sua aplicação um maior desenvolvimento do que o dado aos estudantes do primeiro ano.

Todavia, sendo os princípios os mesmos até agora postos em evidência, componhamos um gráfico dessa classe.

Seja um avião que, em serviço comercial, desenvolve uma velocidade de 180 km. a hora. Vamos representar gràficamente o percurso feito, considerando que êle partiu às 4 horas da manhã e pousou às 12 horas.



Para isso, sôbre papel quadriculado marquemos as divisões verticais com os múltiplos de 180, em ordem sucessiva e crescente da esquerda para a direita. No eixo das ordenadas, segundo as divisões horizontais, marquemos as horas, de uma em uma.

Isto posto, levantemos, perpendiculares aos números que marcam as distâncias, as quais, no ponto de encontro com as horizontais que têm por ordenadas as horas, marcam os pontos do gráfico indicador do percurso.

Podemos agora, pelo gráfico feito, dispor de uma verdadeira tábua, que nos dará o percurso vencido em qualquer hora de marcha.

De forma idêntica poderíamos representar gràficamente a variação das áreas de quadrados, segundo o aumento dos lados; de áreas de círculos, segundo a variação dos raios, etc.

Com esta orientação preliminar encerramos êste capítulo tocante a gráficos matemáticos, assunto que será retomado oportunamente, em outros anos do curso de matemática, conforme exigem os programas.

Capítulo XXIII

MULTIPLICAÇÃO ALGÉBRICA

493. O produto de duas ou mais expressões algébricas é uma expressão cujo valor numérico é igual ao produto dos valores numéricos das expressões dadas.

Na multiplicação algébrica, três casos se apresentam:

1.º *Multiplicação de monômios.*

2.º *Multiplicação de um polinômio por um monômio.*

3.º *Multiplicação de polinômios.*

494. 1.º **Caso.** — Consideremos os monômios

$$(+3a^3) \quad e \quad (+2a^2),$$

cujo produto queremos obter.

Notemos que um monômio representa um produto de números algébricos e que, como tal, goza das propriedades de um produto aritmético, desde que se leve em consideração os sinais.

Nestas condições, poderemos escrever

$$(3a^3) \times (2a^2) = (+3) \times a^3 \times (+2)a^2 = (+3) \times (+2) \times a \times a \times a \times$$
$$\times a \times a \times = +6a^5.$$

Consideremos, ainda, os monômios

$$(+3ab) \quad e \quad (-4a^5).$$

Pelos motivos expostos, teremos

$$(+3ab) \times (-4a^5) = (+3) \times (-4) \times a \times b \times a \times a \times a \times a \times a = -$$
$$-12a^6b.$$

Observando os resultados acima obtidos, concluimos que:

a) O sinal do produto se obtém de acôrdo com a regra dos sinais;

b) O coeficiente do produto corresponde ao produto dos coeficientes dos fatores;

c) A parte literal do produto se obtém somando os expoentes das letras comuns e conservando os das letras não comuns.

495. **Regra.** — *Para multiplicar um monômio por outro observa-se a regra dos sinais, multiplicam-se os coeficientes, somam-se os expoentes das letras comuns e conservam-se os das não comuns.* — Exemplos

$$(+5a)\times(-2a)=-10a^2,$$
$$(-3mn)\times(-4m)=+12m^2n,$$
$$(-5mx)\times(+3mx^3)=-15m^2x^4.$$

496. **2.º Caso.** — Consideremos a operação seguinte:

$$(2a-3b^2-5ab)\times(+4a).$$

Em analogia ao caso, já estudado, da multiplicação de uma soma por um número algébrico, teremos

$$(2a-3b^2-5ab)\times(+4a)=8a^2-12ab^2-20a^2b.$$

Em geral, teremos sempre

$$M(A+B+C+D)=AM+BM+CM+DM.$$

497. **Regra.** — *Para multiplicar um polinômio por um monômio, multiplicam-se, sucessivamente, todos os termos do polinômio multiplicando pelo monômio multiplicador.* — Exemplos

$$(3x^2-4xy+5y^2)\times 2xy=6x^3y-8x^2y^2+10xy^3,$$
$$(-3+2ab+a^2b^2)\times(-ab)=3ab-2a^2b^2-a^3b^3,$$
$$(a^2+b^2-c^2+2ab-2bc-5)\times(-3c)=-3a^2c-$$
$$-3b^2c+3c^3-6bc+6bc^2+15c.$$

498. **3.º Caso.** — Consideremos o produto seguinte:

$$(A+B+C)\ \ (M+N+S).$$

Estabelecendo, para o polinômio multiplicador, um valor particular, P por exemplo, teremos

$$M+N+S=P.$$

Substituindo, no produto acima indicado, o polinômio multiplicador por êsse valor, virá:

$$(A+B+C)P.$$

De acôrdo com o caso anterior, resultará:

$$AP+BP+CP.$$

Substituindo, agora, P pelo seu valor, teremos

$$A(M+N+S)+B(M+N+S)+C(M+N+S).$$

Notando que os produtos parciais acima estão igualmente enquadrados no 2.º caso, virá:

$$AM+AN+AS+BM+BN+BS+CM+CN+CS.$$

Resulta, portanto, que

$$(A+B+C)\ (M+N+S)=AM+AN+AS+BM+BN+$$
$$+BS+CM+CN+CS.$$

499. **Regra.** — *Para multiplicar um polinômio por outro, multiplica-se cada um dos termos de um dêles por todos os do outro, somando-se algèbricamente os produtos parciais obtidos.* — Exemplo

$$(2a+3b)\ (3a-2b)=6a^2-4ab+9ab-6b^2=6a^2+5ab-6b^2.$$

500. **Indicação prática.** — A-fim-de facilitar a multiplicação de polinômios, deve-se sempre ordená-los prèviamente, segundo as potências crescentes ou decrescentes de uma mesma letra, e dispor a operação na ordem seguinte:

(1)
$$\begin{array}{r}
3a^2+4ab-5b^2 \\
2a-3b \\
\hline
6a^3+8a^2b-10ab^2 \\
-9a^2b-12ab^2+15b^3 \\
\hline
6a^3-a^2b-22ab^2+15b^3,
\end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{l}
2+3x+4x^2-5x^3 \\
\quad 3-4x-6x^2 \\
\hline
6+9x+12x^2-15x^3 \\
\quad -8x-12x^2-16x^3+20x^4 \\
\qquad -12x^2-18x^3-24x^4+30x^5 \\
\hline
6+x-12x^2-49x^3-4x^4+30x^5.
\end{array}$$

(3)
$$\begin{array}{l}
 2a^3 - 3a^2b + 4ab^2 - 5b^3 \\
 2a^2 + 3ab + 4b^2 \\
\hline
4a^5 - 6a^4b + 8a^3b^2 - 10a^2b^3 \\
 + 6a^4b - 9a^3b^2 + 12a^2b^3 - 15ab^4 \\
 + 8a^3b^2 - 12a^2b^3 + 16ab^4 - 20b^5 \\
\hline
4a^5 + 7a^3b^2 - 10a^2b^3 + ab^4 - 20b^5.
\end{array}$$

501. **Observações.** — 1.ª Quando os coeficientes dos termos de um polinômio são também polinômios, como acontece quando a letra ordenatriz figura com o mesmo expoente em termos não semelhantes, devemos adotar a disposição seguinte:

$$\begin{array}{r|r|l|l}
a & x^2 + a & x + 5 & \\
+b & -b & & \\
 & a & x - 6 & \\
 & +b & & \\
\hline
a^2 & x^3 + a^2 & x^2 + 5a & x \\
+ab & -ab & +5b & \\
+ab & +ab & & \\
+b^2 & -b^2 & & \\
\hline
 & -6a & -6a & \\
 & -6b & +6b & -30 \\
\hline
a^2 & x^3 + a^2 & x^2 - a & x - 30 \\
+2ab & -b^2 & +11b & \\
+b^2 & -6a & & \\
 & -6b & &
\end{array}$$

2.ª O produto de 2 polinômios inteiros e homogêneos é um polinômio homogêneo, cujo grau de homogeneidade corresponde à soma dos graus de homogeneidade dos fatores. — Com efeito, sejam os polinômios

$$(a^2 + ab + b^2)\ (a - b) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3,$$

homogêneos, respectivamente, de graus 2 e 1.

Todos os termos do multiplicando sendo grau 2 e todos os termos do multiplicador sendo de grau 1, um termo qualquer do produto, obtido pela multiplicação de um dos monômios do primeiro polinômio por um dos monômios do segundo, será de grau 3.

Em geral, denominando m o grau do polinômio inteiro e homogêneo A e n o grau do polinômio inteiro e homogêneo B, o grau do produto P será $m + n$.

3.ª O termo de grau mais elevado, em relação à letra ordenatriz, de um produto de dois polinômios inteiros reduzidos, se obtém, sem redução, pelo produto dos dois termos de maior grau dos fatores e o termo de menor grau do produto se obtém pelo produto dos dois termos de menor grau dos fatores. — Consideremos o produto seguinte:

$$(x^3 + x^2 + x + 1)\ (x^2 + 1) = x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1.$$

De acôrdo com a regra, o produto se forma multiplicando-se cada um dos termos do primeiro polinômio por todos os do segundo. Assim, haverá no produto, um termo formado pelo produto dos termos de maior grau do multiplicando e do multiplicador (x^3 por x^2, no presente caso).

Evidentemente, o grau dêsse termo do produto não poderá ser excedido, por isso que o seu expoente corresponde à soma dos maiores expoentes que figuram nos fatores.

De outro lado, o termo de menor grau do produto deve corresponder ao produto dos termos de menor grau dos fatores, pois que o expoente mínimo do produto só poderá ser obtido pela soma dos mínimos expoentes que figuram nos fatores (1 por 1, no nosso caso).

4.ª O produto de dois polinômios tem sempre, pelo menos, dois termos.

Realmente, haverá dois termos no produto que não poderão ser reduzidos, como vimos, por isso que o grau de um dêles excede ao de todos os demais e o grau de um outro é menor que o de todos os demais. — E' o que se vê, no exemplo que segue

$$\begin{array}{l}
 a^4 + a^3 + a^2 + a + 1 \\
 a - 1 \\
\hline
a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a \\
 - a^4 - a^3 - a^2 - a - 1 \\
\hline
a^5 - 1
\end{array}$$

5.ª O grau do produto de dois polinômios inteiros, em relação à letra ordenatriz, corresponde à soma dos graus dos polinômios dados.

Com efeito, o grau de um polinômio em relação a uma letra, sendo igual ao maior expoente com que ela nele figura, o grau do produto será o do termo cujo expoente se formou pela soma dos maiores expoentes que figuram nos fatores. — Assim, o produto

$$(2x^3+3x^2-4x)\ (x-1)=2x^4+x^3-7x^2+4x$$

é do 4.º grau.

502. **Produtos notáveis.** — 1.º Quadrado da soma de 2 termos:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

O quadrado da soma de 2 termos é igual ao quadrado do 1.º, mais o dôbro do produto do 1.º pelo 2.º, mais o quadrado do 2.º. — Exemplos

$$(2a+b)^2=4a^2+4ab+b^2,$$
$$(3x+2y)^2=9x^2+12xy+4y^2,$$
$$(5m+1)^2=25m^2+10m+1.$$

2.º Quadrado da diferença de 2 termos:

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

O quadrado da diferença de 2 termos é igual ao quadrado do 1.º, menos 2 vezes o produto do 1.º pelo segundo, mais o quadrado do 2.º. — Exemplos

$$(3a-1)^2=9a^2-6a+1,$$
$$(2x-3y)^2=4x^2-12xy+9y^2,$$
$$(4m-n)^2=16m^2-8mn+n^2.$$

3.º Produto da soma de dois termos pela sua diferença.

$$(a+b)\ (a-b)=a^2-b^2.$$

O produto da soma de dois termos pela sua diferença é igual à diferença dos quadros dêsses 2 termos. — Exemplos

$$(2a+1)\ (2a-1)=4a^2-1,$$
$$(3m+2n)\ (3m-2n)=9m^2-4n^2,$$
$$(x+3y)\ (x-3y)=x^2-9y^2.$$

4.º Cubo da soma de 2 termos:

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

O cubo da soma de 2 termos é igual ao cubo do 1.º, mais 3 vezes o produto do quadrado do 1.º pelo segundo, mais 3 vezes o produto do 1.º pelo quadrado do 2.º, mais o cubo do 2.º. — Exemplos

$$(2x+1)^3=8x^3+12x^2+6x+1,$$
$$(2a+3b)^3=8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3,$$
$$(4m+n)^3=64m^3+48m^2n+12mn^2+n^3.$$

5.º Cubo da diferença de 2 termos:

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$$

O cubo da diferença de 2 termos é igual ao cubo do 1.º, menos 3 vezes o quadrado do 1.º pelo segundo, mais 3 vezes o primeiro peló quadrado do 2.º, menos o cubo do 2.º. — Exemplos

$$(2a^2-1)^3=8a^6-12a^4+6a^2-1,$$
$$(3m^2-n)^3=27m^6-27m^4n+9m^2n^2-n^3,$$
$$(2x-3y)^3=8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3.$$

503. **Exercícios.**

Efetuar as operações seguintes:

1.	$(+6a)\times(-3ab)$	R. $-18a^2b$
2.	$(-4mn)\times(+2n)$	R. $-8mn^2$
3.	$(-2ab)\times(-3bc)$	R. $+6ab^2c$
4.	$(+3a^m)\times(+2a^m)$	R. $+6a^{2m}$
5.	$(+5x^m\times(-3x^n)$	R. $-15x^{m+n}$
6.	$(+3ax)\times(-2bx)\times(-4cx)$	R. $+24abcx^3$
7.	$(+7ab^2)\times(+3b^2c)\times(-ac^2)$	R. $-21a^2b^4c^3$
8.	$(+px)\times(-qx)\times(+xy)$	R. $-pqx^3y$
9.	$\left(-\frac{a}{3}\right)\times\left(-\frac{a^2}{2}\right)\times\left(-\frac{a^3}{4}\right)\times\left(+\frac{a^4}{5}\right)$	R. $-\frac{a^{10}}{120}$
10.	$\left(-\frac{1}{2}x^2y\right)\times\left(+\frac{1}{3}xy^2\right)\times\left(-\frac{1}{4}y^3\right)$	R. $+\frac{1}{24}x^3y^6$
11.	$(2x^2-3y)\times 5xy$	R. $10x^3y-15xy^2$
12.	$(4a^2-5ab)\times 3a^2$	R. $12a^4-15a^3b$
13.	$(3a^2-4b^2+5c^2)\times 2abc$	R. $6a^3bc-8ab^3c+$ $+10abc^3$
14.	$(-2+3ab+4c)\times(-ab)$	R. $2ab-3a^2b^2-4abc$
15.	$(5x^3-2ax^2+3a^2x-4a^3)\times(-2a)$	R. $-10ax^3+4a^2x^2-$ $-6a^3x+8a^4$
16.	$(ab^m-ab^{m+1}+ab^{m-1})\times ab^m$	R. $a^2b^{2m}-a^2b^{2m+1}+$ $+a^2b^{2m-1}$

17. $\left(\frac{xm}{2} - \frac{ym}{2} + \frac{zm}{2}\right) \times 2m$ R. $xm^2 - ym^2 + zm^2$

18. $(4a + 1)(a - 3)$ R. $4a^2 - 11a - 3$

19. $(a - 5)(a + 7)$ R. $a^2 + 2a - 35$

20. $(m + 3)(m + 5)$ R. $m^2 + 8m + 15$

21. $(x - 5)(x - 1)$ R. $x^2 - 6x + 5$

22. $(a^2 + ab + b^2)(a - b)$ R. $a^3 - b^3$

23. $(a^2 - ab + b^2)(a + b)$ R. $a^3 + b^3$

24. $(x^2 + x + 1)(x - 1)$ R. $x^3 - 1$

25. $(m^2 + mn + n^2)(m^2 - mn + n^2)$ R. $m^4 + m^2n^2 + n^4$

26. $(a^2 + ab - b^2)(a^2 - ab + b^2)$ R. $a^4 - a^2b^2 + 2ab^3 - b^4$

27. $(3a^3 + 7a^2 - 5a + 1)(2a^2 - 3a + 2)$ R. $6a^5 + 5a^4 - 25a^3 + 31a^2 - 13a + 2$

28. $(m^3 + 3m^2 - m - 3)(m^3 + m^2 - 5m + 3)$ R. $m^6 + 4m^5 - 3m^4 - 16m^3 + 11m^2 + 12m - 9$

29. $\left(a^2 - \frac{3a}{4} + 1\right)\left(a^2 - \frac{a}{2}\right)$ R. $a^4 - \frac{5a^3}{4} + \frac{11a^2}{8} - \frac{a}{2}$

30. $\left(\frac{3x^2}{8} - \frac{x}{4} - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{8}{3}\right)$

R. $\frac{9x^4}{16} - \frac{3x^3}{4} - \frac{7x^2}{4} + \frac{4x}{3} + \frac{16}{9}$

31. $(a + 6)(a - 6)$ R. $a^2 - 36$

32. $(2x + 1)(2x - 1)$ R. $4x^2 - 1$

33. $\left(a + \frac{b}{2}\right)\left(a - \frac{b}{2}\right)$ R. $a^2 - \frac{b^2}{4}$

34. $\left(\frac{x}{2} - 3\right)\left(\frac{x}{2} + 3\right)$ R. $\frac{x^2}{4} - 9$

35. $\left(\frac{2b}{3} + 1\right)\left(\frac{2b}{3} - 1\right)$ R. $\frac{4b^2}{9} - 1$

36. $(x + 7)^2$ R. $x^2 + 14x + 49$

37. $(1 + 2x)^2$ R. $1 + 4x + 4x^2$

38. $(2a + 1)^2$ R. $4a^2 + 4a + 1$

39. $(3m + 5n)^2$ R. $9m^2 + 30mn + 25n^2$

40. $\left(a + \frac{b}{5}\right)^2$ R. $a^2 + \frac{2ab}{5} + \frac{b^2}{25}$

41. $\left(\frac{2x}{3} + \frac{3y}{2}\right)^2$ R. $\frac{4x^2}{9} + 2xy + \frac{9y^2}{4}$

42. $(x - 3)^2$ R. $x^2 - 6x + 9$

43. $(3a - 1)^2$ R. $9a^2 - 6a + 1$

44. $(4m - 3n)^2$ R. $16m^2 - 24mn + 9n^2$

45. $\left(3x - \frac{1}{2}\right)^2$ R. $9x^2 - 3x + \frac{1}{4}$

46. $\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2$ R. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab} + \frac{y^2}{b^2}$

47. $\left(\frac{2a}{3} - \frac{3b}{2}\right)^2$ R. $\frac{4a^2}{9} - 2ab + \frac{9b^2}{4}$

48. $\left(a + \frac{b}{2}\right)^3$ R. $a^3 + \frac{3a^2b}{2} + \frac{3ab^2}{4} + \frac{b^3}{8}$

49. $(x - 2)^3$ R. $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

50 $\left(\frac{x}{2} - 5\right)^3$ R. $\frac{x^3}{8} - \frac{15x^2}{4} + \frac{75x}{2} - 125.$

CAPÍTULO XXIV

RAIZ QUADRADA

504. **Noção de raiz.** — Como sabemos, dá-se a denominação de potência de um número ao produto de vários fatores iguais a êsse número (n.º 124). — Assim, dizemos que 16 é a quarta potência de 2, por isso que

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16.$$

Inversamente, ao número 2, cuja quarta potência é 16, chama-se *raiz* quarta de 16.

Por êsse motivo, ao considerar a expressão

$$2^4 = 16,$$

dizemos que 16 é a quarta potência de 2 ou que 2 é a raiz quarta de 16.

505. **Definição.** — *Raiz de certo grau de um número é o número que elevado à potência do mesmo grau reproduz o primeiro.*

506. **Notação.** — Para representar abreviadamente a raiz de um número, emprega-se o sinal $\sqrt{\ }$, denominado *radical*, sob o qual é êle escrito; no vértice do ângulo dêsse símbolo escreve-se o *índice* do radical, que indica o *grau* da raiz, isto é, o número de vezes que a raiz deve ser tomada como fator.

O número cuja raiz é dêsse modo indicada toma então o nome de número *sub-radical*.

Quando o índice é 2, a raiz denomina-se quadrada, cúbica quando é 3, quarta quando é 4, etc. — Temos assim

$\sqrt[2]{2}$ ou $\sqrt{2}$ (raiz quadrada de 2),

$\sqrt[3]{5}$ (raiz cúbica de 5),

$\sqrt[4]{6}$ (raiz quarta de 6).

Notemos ainda que, de acôrdo com a definição e notação adotada, podemos escrever

$$\sqrt{49} = 7 \quad \text{por ser} \quad 7^2 = 49$$
$$\sqrt[3]{27} = 3 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad 3^3 = 27$$
$$\sqrt[4]{16} = 2 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad 2^4 = 16$$
$$\sqrt[n]{1} = 1 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad 1^n = 1$$
$$\sqrt[m]{a^m} = a \quad \text{»} \quad \text{»} \quad a^m = a^m$$
$$\sqrt[n]{P} = B \quad \text{se for} \quad B^n = P.$$

507. **Observação.** — Em conseqüência à extensão do conceito de potência (126), resulta que

$$\sqrt[1]{a} = a,$$

visto como

$$a^1 = a.$$

508. **Radiciação.** — A expressão geral das potências

$$B^m = P$$

dá lugar a duas operações inversas, a saber: potenciação e *radiciação*. A primeira visa o cálculo da potência (P) quando a base (B) e o expoente (m) são conhecidos, enquanto a radiciação diz respeito ao cálculo da base (B) quando a potência (P) e o expoente (m) são conhecidos.

Dizemos, por isso, que a *radiciação se propõe, sendo dada uma potência e o expoente, determinar a base.*

509. **Raiz quadrada.** — Recordemos que *o quadrado de um número inteiro ou fracionário é o produto de dois fatores iguais a êsse número.*

Inversamente, particularizando as noções acima dadas sôbre raízes, dizemos que *raiz quadrada de um número inteiro ou fracionário é outro número inteiro ou fracionário cujo quadrado é igual ao primeiro.* — Assim, dizemos que

$$\sqrt{16} = 4 \quad \text{por ser} \quad 4^2 = 16,$$
$$\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5} \quad \text{por ser} \quad \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$$
$$\sqrt{0{,}25} = 0{,}5 \quad \text{por ser} \quad 0{,}5^2 = 0{,}25$$
$$\sqrt{a^2} = a \quad \text{por ser} \quad (a)^2 = a^2.$$

510. **Raízes quadradas inteiras.** — Se observamos a série dos quadrados dos números inteiros até um limite qualquer (n.º 127) notaremos que sòmente alguns dêles, como 1, 4, 9, 16, 25... são quadrados de números inteiros. A tais números dá-se a denominação de *quadrados perfeitos*.

Chamamos *maior quadrado contido* em um número ao maior quadrado que não excede êsse número. E' claro que, quando certo número é quadrado perfeito, o maior quadrado nele contido é o próprio número. Assim, 36 é o maior quadrado contido em qualquer dos números: 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47 e 48.

Dizemos que dois quadrados perfeitos são *consecutivos* quando suas raízes são números inteiros consecutivos. Assim, 16 e 25 são quadrados perfeitos consecutivos porque suas raízes respectivas, 4 e 5, são números consecutivos; da mesma maneira 121 e 144 são quadrados perfeitos consecutivos.

E' evidente que quando um número não é quadrado perfeito está sempre contido entre dois quadrados perfeitos consecutivos, dos quais o menor é o maior quadrado nele contido.

Um número não sendo quadrado perfeito não poderá, é claro, ter para raiz um número inteiro, e sua raiz será portanto um número fracionário, sendo sua parte inteira a raiz do maior quadrado nele contido.

À parte inteira da raiz quadrada de um número chamaremos abreviadamente *raiz inteira* dêsse número. Assim, quando dizemos simplesmente raiz referimo-nos à *raiz exata*; quando quisermos citar a parte inteira da raiz diremos *raiz inteira*.

E' bem de ver que quando um número é quadrado perfeito a sua raiz exata é ao mesmo tempo raiz inteira.

Chamamos resto, na extração das raízes inteiras de números inteiros, à diferença entre certo número dado e o maior quadrado nele contido.

Assim, dado o número 12, dizemos que

$$12 - 9 \quad \text{ou} \quad 3$$

é o resto que provém da extração da raiz inteira de 12. Evidentemente, quando o número proposto for quadrado perfeito, a sua radiciação conduzirá a um resto nulo.

Por outro lado, das definições de raiz inteira e resto da radiciação, infere-se que todo número é igual ao quadrado da sua raiz inteira mais o resto.

Assim, dado o número 18, cuja raiz inteira é 4 e cujo resto proveniente da radiciação é 2, teremos

$$18 = 4^2 + 2.$$

De maneira geral, representando por a um número qualquer, por b sua raiz e pela letra r o resto, teremos sempre

$$a = b^2 + r.$$

Notemos que *o resto não pode ser maior que o dôbro da raiz inteira.*

Com efeito, designando por a o número dado, por b sua raiz inteira e pela letra r o resto e admitindo que

$$r \geqq 2b + 1,$$

teríamos $$a \geqq b^2 + (2b + 1)$$

ou $$a \geqq b^2 + 2b + 1,$$ 16 = 4² + 2

ou, ainda (n.º 131, VIII)

$$a \geqq (b + 1)^2.$$

Resultaria, assim, que a raiz do número proposto seria pelo menos igual a $b + 1$.

Em conseqüência do que se acaba de expor, toda vez que, na extração da raiz inteira de qualquer número, se chegar a um resto maior que o dôbro da raiz, deve-se considerar errada a operação.

511. **Prática da radiciação.** — Consideremos os casos seguintes:

1.º *O número é menor que 100.*
2.º *O número é maior que 100.*

512. **1.º Caso.** — Sendo 10 a raiz quadrada de 100, segue-se evidentemente que todo número menor que 100 terá sua raiz inteira menor que 10. Isto posto, para determinar as raízes inteiras dos números compreendidos no 1.º caso, basta que se recorra à lista dos quadrados dos números de 1 a 9.

Aliás, como retemos de memória os quadrados de todos êsses números, estamos habilitados a obter imediatamente as raízes quadradas inteiras dos números de 1 a 100.

Assim, dado o número 7, por exemplo, dizemos imediatamente que sua raiz inteira é 2, visto como 7 está compreendido entre os quadrados perfeitos consecutivos 4 e 9, ou seja,

$$4 < 7 < 9 \quad \text{ou} \quad 2 < \sqrt{7} < 3.$$

Do mesmo modo dizemos que a raiz inteira de 87 é 9, por isso que 87 está compreendido entre os quadrados perfeitos consecutivos 81 e 100, isto é,

$$81 < 87 < 100 \quad \text{ou} \quad 9 < \sqrt{87} < 10.$$

513. **2. Caso.** — Sendo maior que 100 o número dado, sua raiz inteira será igual ou maior que 10 e terá portanto dois ou mais algarismos. A sua determinação se fará, pois, pela pesquisa sucessiva dêsses algarismos.

Para maior facilidade, consideremos primeiramente os números compreendidos entre 100 e 10.000.

Tomemos, por exemplo, o número

$$2.308$$

e procuremos determinar sua raiz inteira.

Ora, estando o número dado compreendido entre 100 e 10.000, sua raiz inteira tem dois algarismos, dos quais o primeiro exprime *dezenas* e o segundo *unidades simples*.

Representando, respectivamente, por d e u os algarismos das dezenas e unidades simples, a raiz procurada pode ser expressa do modo seguinte

$$10 \times d + u.$$

Tendo em vista que 2.308 deve conter o quadrado perfeito da raiz inteira procurada mais um resto que pode ser igual ou diferente de 0, segue-se que

$$2.308 = (10d + u)^2 + r.$$

Desenvolvendo a potência indicada no 2.º membro da igualdade acima pelo processo conhecido (n.º 131, VIII), vem

$$2.308 = 100d^2 + 2 \times 10 \times d \times u + u^2 + r.$$

Da igualdade acima, infere-se que o número proposto se compõe de 4 parcelas, a saber:

a) *100 × o quadrado do algarismo das dezenas da raiz;*

b) *2 × 10 × o produto do algarismo das dezenas pelo das unidades;*

c) *o quadrado do algarismo das unidades;*

d) *o resto da operação.*

Por outro lado, sendo o termo $100d^2$ número exato de centenas, deverá estar contido nas 23 centenas do número *2.308*.

Vejamos, agora, que a raiz inteira das 23 centenas do

número proposto dá o número de dezenas da raiz. — Sendo, com efeito,

$$2.300 \geqq 100d^2,$$

segue-se que

$$\sqrt{2.300} \geqq 10d.$$

Mas, sendo *40* a raiz inteira de *2.300*, visto como

$$16 < 23 < 25$$

ou

$$1.600 < 2.300 < 2.500,$$

resulta

$$40 \geqq 10d,$$

ou

$$4 \geqq d.$$

Notemos, ainda, que 4 não pode ser maior que d, uma vez que, se isso acontecesse, o quadrado de d não estaria contido do número proposto. — Concluímos, dêsse modo, que

$$d = 4.$$

Obtido o valor do algarismo das dezenas, para determinar o das unidades, notemos que a diferença

$$2.308 - 1.600 = 708,$$

proveniente da subtração do quadrado das dezenas da raiz sôbre o número dado, deve conter as demais parcelas acima mencionadas, a saber

$$708 = (2 \times 10d \times u) + u^2 + r,$$

ou notando que $d = 4$,

$$708 = (2 \times 10 \times 4 \times u) + u^2 + r,$$

ou

$$708 = (2 \times 40 \times u) + u^2 + r.$$

E, como $2 \times 40 \times u$ é múltiplo de 10, e como tal número exato de dezenas, infere-se que $2 \times 40 \times u$ está contido nas 70 dezenas do número 708. — Portanto

$$700 \geqq 2 \times 40 \times u,$$

ou

$$70 \geqq 2 \times 4 \times u.$$

Dividindo, pois, 70 por 2×4, a parte inteira do quociente será igual ou maior que u, isto é, que o algarismo das unidades da raiz procurada, a saber

$$\frac{70}{2 \times 4} \geqq u,$$

ou

$$8 \geqq u.$$

Para verificar se 8 é maior que u, elevemos a quadrado o número formado pelos algarismos d e u obtidos, ou seja, o número 48. — Encontramos, assim

$$48^2 = 2.304.$$

Como 2.304 não excede 2.308, concluimos que

$$u = 8.$$

Obtida a raiz inteira de 2.308, procuremos determinar o resto. Para isso consideremos a expressão

$$708 = (2 \times 10d \times u) + u^2 + r.$$

Substituindo, na expressão acima, d por 4 e u por 8, encontraremos, sucessivamente,

$$708 = (2 \times 40 \times 8) + 8^2 + r.$$

ou
$$708 = 640 + 64 + r.$$

ou
$$708 = 704 + r.$$

ou
$$708 - 704 = r.$$

ou
$$r = 4.$$

Obtemos, dêsse modo, a raiz inteira *48* e o resto *4*. — Assim, pois,

$$2.308 = 48^2 + 4.$$

514. **Observação.** — A determinação do resto pode ser simplificada, como veremos a seguir. — Com efeito, tendo em vista que

$$708 = (2 \times 10 \times 4 \times u) + u^2 + r.$$

segue-se
$$708 = (2 \times 10 \times 4 + u) \times u + r.$$

ou
$$708 = (80 + u) \times u + r.$$

ou
$$708 = (80 + 8) \times 8 + r.$$

ou
$$708 - (80 + 8) \times 8 = r.$$

ou
$$708 - 704 = r.$$

ou
$$r = 4.$$

Vemos, assim, que o resto também pode ser determinado do modo seguinte: escreve-se o algarismo das unidades à direita do algarismo que representa o dôbro das dezenas e multiplica-se o número, assim formado, pelo algarismo das unidades, subtraindo-se êsse resultado de 708.

515. **Disposição prática.** — Na prática dispõe-se a operação do modo seguinte:

	$\sqrt{2.308}$	48 ...... $10d + u$
$100d^2$	1.600	88×8
	708	704 ... $(2 \times 10d + u)u$
$(2 \times 10d + u)u$	704	
r	4	

Se o número cuja raiz se quer determinar for maior que 10.000, fácil é verificar que sua raiz se comporá também de dezenas e unidades, o que nos permite, com auxílio de considerações análogas às acima expendidas generalizar o processo empregado e estabelecer a seguinte

516. **Regra.** — *Para extrair a raiz inteira de um número qualquer, divide-se êsse número em classes de dois algarismos, à partir da direita; extrai-se a raiz quadrada do maior quadrado contido na 1.ª classe à esquerda: obtém-se, dêsse modo, o 1.º algarismo da raiz; subtrai-se da classe considerada o quadrado dêste algarismo; à direita do resto encontrado, baixa-se a classe seguinte do número proposto: obtém-se, dessarte, o 1.º resto parcial; separa-se o último algarismo da direita dêste resto e divide-se a parte da esquerda pelo dôbro do 1.º algarismo da raiz: escreve-se o quociente obtido à direita do dôbro da raiz e multiplica-se o número, assim formado, por êste quociente; subtrai-se êsse produto do 1.º resto parcial; se a subtração não for possível, diminue-se de uma unidade o algarismo encontrado; repete-se o ensaio até que a subtração seja possível; quando isso se der, escreve-se o algarismo encontrado à direita do 1.º algarismo da raiz: êste é o 2.º algarismo da raiz; à direita do novo resto, baixa-se a classe seguinte do número dado: obtém-se, dêsse modo, o 2.º resto parcial, com o qual se opera como com o anterior; assim prossegue-se até que seja considerada a última classe à direita e que se tenha operado com o último resto parcial obtido. Se qualquer resto parcial não permitir a divisão correspondente, escreve-se zero à direita da raiz e baixa-se a classe seguinte à direita dêste resto.* — Exemplos

$\sqrt{10.69.29}$	327
9	
16,9	$62 \times 2 = 124$
12 4	
4 52,9	$647 \times 7 = 4529$
4 52 9	
0	

$\sqrt{1.52.27.59}$	1234
1	
05,2	$22 \times 2 = 44$
4 4	
82,7	$243 \times 3 = 729$
72 9	
9 85,9	$2464 \times 4 = 9856$
9 85 6	
3	

$\sqrt{28.15.46.97.36}$	53061
25	
3 1,5	$103 \times 3 = 309$
3 0 9	
64,69,7	$10606 \times 6 = 63636$
63 63 6	
1 06 13,6	$106121 \times 1 = 106121$
1 06 12 1	
1 5	

517. **Raízes quadradas fracionárias.** — Conforme sabemos, nem todos os números admitem raízes quadradas exatas.

Com efeito, considerando, por exemplo, o número 40, verificaremos que a sua raiz quadrada está compreendida entre 6 e 7, uma vez que

$$6^2 = 36 \quad \text{e} \quad 7^2 = 49.$$

Dizemos, então, que 6 é a raiz quadrada aproximada de uma unidade por falta e que 7 é a raiz quadrada aproximada de uma unidade por excesso de 40.

Como é fácil imaginar, pode-se obter números decimais compreendidos entre 6 e 7 cujos quadrados se aproximem tanto quanto se queira de 40, embora sem atingí-lo. — Assim é que os números decimais

6,3,

6,32,

6,324,

6,3245,

são raízes aproximadas de 40, por isso que os seus quadrados

39,969,

39,9424,

39,992976,

39,99930025,

cada vez mais se aproximam de 40.

518. **Definição.** — *A raiz quadrada aproximada de* $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10^2}$, $\frac{1}{10^3}$ *. . . etc. por falta de um número qualquer é o maior número de décimos, centésimos, milésimos, etc. cujo quadrado está contido no número dado.*

Antes de estabelecer a regra para a extração das raízes aproximadas, demonstremos os princípios seguintes:

1.º *Todo o número inteiro que não for quadrado de um número inteiro tampouco o será de um número fracionário.*

— Assim, dizemos que, não sendo 23 quadrado perfeito de número inteiro não o será também de número fracionário.

Com efeito, se 23 admitisse como raiz exata um número fracionário teríamos, depois de transformada essa fração em forma ordinária irredutível,

$$23 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}.$$

Mas, se observarmos que a e b são números primos entre si e que a^2 e b^2 também o são, concluiremos que a não pode ser divisível por b e conseqüentemente que

$$\frac{a^2}{b^2}$$

não pode ser eqüivalente a nenhum número inteiro.

2.º *Só admitem raízes exatas os números fracionários, reduzidos à expressão mais simples, cujos têrmos são quadrados perfeitos.* — Assim, dizemos que o número fracionário

$$\frac{47}{18},$$

cujos têrmos não são quadrados perfeitos, não admite raiz quadrada exata.

Com efeito, se a fração $\frac{a}{b}$, reduzida a expressão mais simples, fosse a raiz exata de $\frac{47}{18}$ teríamos

$$\frac{47}{18}=\left(\frac{a}{b}\right)^2$$

ou

$$\frac{47}{18}=\frac{a^2}{b^2}.$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade acima por 18^2, vem

$$\frac{47\times 18^2}{18}=\frac{a^2\times 18^2}{b}$$

ou

$$47\times 18=\left(\frac{a\times 18}{b}\right)^2.$$

E, como 47 e 18 não são quadrados perfeitos, e além disso, são primos entre si, segue-se que 47×18 não será quadrado perfeito e portanto que a igualdade acima não pode ser verdadeira.

519. Extração de raízes aproximadas. — Consideremos o número 5, cuja raiz aproximada de 0,01 por falta queremos determinar.

Conforme a definição, devemos procurar o maior número de centésimos entre cujos quadrados está compreendido o número 5. — Evidentemente, temos

$$\left(\frac{x}{100}\right)^2<5<\left(\frac{x+1}{100}\right)^2,$$

ou

$$\frac{x^2}{100^2}<5<\frac{(x+1)^2}{100^2},$$

ou

$$x^2<5\times 100^2<(x+1)^2$$

ou

$$x^2<50000<(x+1)^2.$$

A expressão acima indica que x é a raiz quadrada inteira de 50000, isto é, do número proposto multiplicado pelo denominador da fração de aproximação.

E, tendo em vista que a raiz inteira de 50000 é 223, segue-se que a raiz aproximada de 0,01 por falta de 5 é

$$223:100=2,23.$$

Aplicando-se a demonstração acima também aos números fracionários e decimais, pode-se estabelecer a seguinte

520. Regra. — *Para extrair a raiz quadrada aproximada de uma unidade decimal por falta de um número qualquer, multiplica-se êsse número pelo quadrado do denominador da fração de aproximação, extrai-se a raiz inteira do produto e depois divide-se o resultado obtido pelo denominador da fração de aproximação.* — Exemplos

1.º Extrair a raiz aproximada de 0,001 por falta do número 17.

$\sqrt{17.00,00,00}$	4123
16	
10.0	$81\times 1=81$
8 1	
1 90,0	$822\times 2=1644$
1 64 4	
25 60,0	$8243\times 3=24729$
24 72 9	
87 1	R. 4,123.

2.º Extrair a raiz aproximada de 0,0001 por falta do número 125.

$\sqrt{1.25.00.00.00.00}$	111803
1	
02.5	$21 \times 1 = 21$
2 1	
4 0.0	$2221 \times 1 = 2221$
2 2 1	
1 7 90.0	$2228 \times 8 = 17824$
1 7 82 4	
7 60.00.0	$223603 \times 3 = 670809$
6 70 80 9	
89 19 1	R. 11,1803.

521. **Radiciação de frações ordinárias.** — Consideremos os casos seguintes:

1.º *Os dois termos são quadrados perfeitos.*

2.º *Sòmente o denominador é quadrado perfeito.*

3.º *O denominador não é quadrado perfeito.*

522. **1.º Caso.** — Tendo em vista que, para formar o quadrado de uma fração ordinária basta elevar ao quadrado os seus termos, segue-se evidentemente que, para extrair a raiz quadrada exata de uma fração cujos termos são quadrados perfeitos, basta formar uma fração cujos termos sejam respectivamente as raizes quadradas exatas dos termos da fração considerada. — Exemplos

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}; \quad \sqrt{\frac{289}{14400}} = \frac{\sqrt{289}}{14400} = \frac{17}{120}.$$

523. **2.º Caso.** — Consideremos a fração

$$\frac{7}{25}$$

cujo denominador é quadrado perfeito.

Se observarmos que a fração proposta

$$\frac{7}{25}$$

está compreendida entre as frações

$$\frac{4}{25} \text{ e } \frac{9}{25},$$

concluiremos que

$$\sqrt{\frac{7}{25}}$$

está compreendida entre

$$\frac{2}{5} \text{ e } \frac{3}{5}.$$

Dizemos, então, que $\frac{2}{5}$ é a raiz aproximada de $\frac{1}{5}$ por falta e $\frac{3}{5}$ é a raiz aproximada de $\frac{1}{5}$ por excesso da fração proposta.

Neste caso, portanto, determina-se a raiz aproximada de uma fração, formando outra, cujo numerador seja a raiz inteira do numerador e cujo denominador seja a raiz exata do denominador da fração dada. — Exemplos

$$\sqrt{\frac{11}{16}} \text{ é aproximadamente igual a } \frac{3}{4}$$

$$\sqrt{\frac{134}{64}} \text{ é aproximadamente igual a } \frac{11}{8}.$$

524. **3.º Caso.** — Consideremos a fração

$$\frac{11}{12}$$

cujo denominador não é quadrado perfeito.

Como, multiplicando ambos os termos de uma fração ordinária pelo mesmo número, ela não muda de valor, é claro que sempre é possivel, dada uma fração, obter outra de igual valor e na qual o denominador seja quadrado perfeito.

Com efeito, multiplicando ambos os termos da fração dada por 3, encontramos

$$\frac{11}{12} = \frac{11 \times 3}{12 \times 3} = \frac{33}{36}.$$

Dêsse modo, segue-se que

$$\sqrt{\frac{11}{12}} = \sqrt{\frac{33}{36}} \text{ é aproximadamente igual a } \frac{5}{6}.$$

Concluimos assim que, para extrair a raiz aproximada de uma fração cujo denominador não é quadrado perfeito, basta multiplicar ambos os termos da fração pelo próprio denominador ou pelo número cujo produto pelo denominador seja quadrado perfeito e proceder de acôrdo com o segundo caso.

Por outro lado, tendo em vista que, quando um número é quadrado perfeito, decomposto em fatores primos, apresenta todos êles com expoentes pares, segue-se que, para transformar certa fração noutra de mesmo valor e cujo denominador seja quadrado perfeito, basta multiplicar ambos os termos da fração dada pelo produto dos fatores que entram no denominador com expoentes ímpares. — Exemplos

$$\sqrt{\frac{11}{7}}=\sqrt{\frac{11\times 7}{7\times 7}}=\sqrt{\frac{77}{7^2}} \text{ aproximadamente igual a } \frac{8}{7}$$

$$\sqrt{\frac{19}{240}}=\sqrt{\frac{19\times 3\times 5}{240\times 3\times 5}}=\frac{\sqrt{285}}{\sqrt{3600}} \text{ aproximadamente igual a } \frac{16}{60}.$$

525. **Radiciação de números decimais.** — Na radiciação de números decimais pode suceder que o número considerado tenha um número par ou então ímpar de algarismos decimais.

No primeiro caso, a fração decimal em que se pode transformar o número decimal dado terá para denominador a unidade seguida de um número par de zeros, isto é, um quadrado perfeito. — Com efeito

$$1{,}85=\frac{185}{100}.$$

No segundo caso, basta acrescentar um zero à direita do número proposto, para se recair no caso anterior. — Com efeito

$$19{,}7=19{,}70=\frac{1970}{100}.$$

Isto posto, consideraremos, na radiciação de números decimais, os casos seguintes:

1.º *O número inteiro que resultar da supressão da vírgula do número dado é quadrado perfeito.*

2.º *O número inteiro que resultar da supressão da vírgula no número dado não é quadrado perfeito.*

526. **1.º Caso.** — Consideremos o número decimal

$$0{,}16$$

cuja raiz quadrada queremos extrair.

Transformando em fração decimal, encontramos

$$\sqrt{0{,}16}=\sqrt{\frac{16}{100}}=\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{100}}=\frac{4}{10}=0{,}4.$$

Verifica-se assim que, neste caso, obtém-se a raiz exata, determinando a raiz do número que resulta da supressão da vírgula no número proposto, e separando no resultado um número de casas decimais igual à metade do número de casas decimais do número dado. — Exemplos

$$\sqrt{1{,}69}=1{,}3;\quad \sqrt{6{,}25}=2{,}5.$$

527. **2.º Caso.** — Consideremos o número decimal

$$2{,}37$$

cuja raiz quadrada queremos determinar.

Transformando em fração decimal, encontramos

$$\sqrt{2{,}37}=\sqrt{\frac{237}{100}}=\frac{\sqrt{237}}{\sqrt{100}}=\frac{\sqrt{237}}{10}=ap.\ \frac{15}{10}=1{,}5.$$

Verifica-se assim que, neste caso, obtém-se uma raiz aproximada, extraindo a raiz inteira do número que resulta da supressão da vírgula no número proposto e separando no resultado a metade do número de casas decimais contidas no número dado. — Exemplos

$$\sqrt{0{,}139}=\sqrt{0{,}1390}=ap.\ 0{,}37$$
$$\sqrt{5{,}382}=\sqrt{5{,}3820}=ap.\ 2{,}31.$$

528. **Observação.** — Na extração da raiz aproximada dos números fracionários, aplica-se a regra geral (n.º 520) que diz respeito à extração de raízes quadradas aproximadas de números quaisquer.

529. Exercícios.

Determinar as raizes quadradas aproximadas de 1 unidade por falta dos números seguintes:

1.	de 609?	R. 24
2.	de 8.320?	R. 91
3.	de 69.845?	R. 264
4.	de 519.847?	R. 721
5.	de 1.234.322?	R. 1.111
6.	de 81.229?	R. 285
7.	de 388.931?	R. 623
8.	de 1.476.728?	R. 1.215
9.	de 11.109.889?	R. 3.333
10.	de 100.512.629?	R. 10.025.

Determinar as raizes quadradas aproximadas de 0.001 por falta dos números seguintes:

11.	de 2?	R. 1,414
12.	de 3?	R. 1,732
13.	de 5?	R. 2,236
14.	de 6?	R. 2,449
15.	de 7?	R. 2,645
16.	de 107.983?	R. 328,607
17.	de 118.421?	R. 344,123
18.	de 123.619?	R. 351,594
19.	de 142.720?	R. 377,783
20.	de 200.317?	R. 447,567.

Determinar as raizes quadradas aproximadas de 0.01 por falta dos números seguintes:

21.	de 0.7?	R. 0,83
22.	de 0.68?	R. 0,82
23.	de 0.132?	R. 0,36
24.	de 0.2458?	R. 0,49
25.	de 0.12345?	R. 0,35
26.	de 0.386?	R. 0,62
27.	de 0.1254?	R. 0,35
28.	de 0.15632?	R. 0,39
29.	de 3.816237?	R. 1,95
30.	de 5.1943283?	R. 2,27.

Determinar as raizes quadradas aproximadas de 0,01 por falta das frações seguintes:

31.	de $\frac{1}{2}$	R. 0,70
32.	de $\frac{1}{3}$	R. 0,57
33.	de $\frac{1}{5}$	R. 0,44
34.	de $\frac{1}{6}$	R. 0,40
35.	de $\frac{1}{7}$	R. 0,37
36.	de $\frac{5}{7}$	R. 0,84
37.	de $\frac{7}{8}$	R. 0,93
38.	de $\frac{11}{12}$	R. 0,95
39.	de $\frac{5}{3}$	R. 1,29
40.	de $\frac{16}{5}$	R. 1,78.

COMP. MELHORAMENTOS DE S. PAULO

EDIÇÕES DA CASA:

Said Ali

Gramática Elementar da Lingua Portuguesa . . . 4$000
» Secundária » » . . . 8$000
Lexeologia do Português Histórico . . . 8$000
Formação de Palavras e Sintaxe do Português Histórico . . . 7$000
Gramática Histórica da Lingua Portuguesa . . . 15$000

Marques da Cruz

Português Prático . . . 10$000
História da Literatura . . . 12$000

Assis Cintra

Questões de Português . . . 6$000

Othoniel Motta

Os Lusiadas . . . 10$000

Arnaldo Oliveira Barreto

Vários Estilos . . . 7$000

H. Serosoppi

Recueil de Morceaux Choisis . . . 10$000

Julien Fauvel

Les Premiers Pas . . . 3$000
Primeiro Ano de Conversação Francesa . . . 4$000
Segundo » » » . . . 5$000
Terceiro » » » (o comerciante) . . . 5$000
Fleurs Choisies de la Littérature Française . . . 8$000

Julio Albino Ferreira

Can you speak English? (Broch. 10$). Cartonado . . . 12$000
Gramática Inglesa . . . 10$000
Comercial English . . . 12$000
Método de Inglês . . . 20$000
Método de Inglês-Espanhol . . . 12$000

O. Nobiling

Primeiro Livro de Inglês . . . 10$000

J. L. Peter

Gramática Latina . . . 5$000

Fernando de Azevedo e Francisco Azzi

Páginas Latinas . . . 20$000

BIBLIOTÉCA DE EDUCAÇÃO

Organizada pelo Dr. Lourenço Filho

Henri Piéron

Psicologia Experimental . . . . 5$000

Ed. Claparède

A Escola e a Psicologia Experimental . . . . 4$000

A. de Sampaio Dória

Educação Moral e Educação Econômica . . . . 4$000

Henrique Geenen

Temperamento e Caráter sob o ponto de vista educativo . . 5$000

Emile Durkheim

Educação e Sociologia . . . . 4$000

Otávio Domingues

A Hereditariedade em face da Educação . . . . 6$000

A. F. de Proença

Como se Ensina Geografia . . . . 4$000

Corinto da Fonseca

A Escola Ativa e os Trabalhos Manuais . . . . 6$000

Ad. Ferrière

A Lei Biogenética e a Escola Ativa . . . . 4$000

Alfred Binet e Th. Simon

Testes para a Medida do Desenvolvimento da Inteligência . . . 6$000

Lourenço Filho

Introdução ao Estudo da Escola Nova . . . . 6$000

Testes A B C para verificação da maturidade necessária ao aprendizado da leitura e escrita . . . . 5$000

John Dewey

Vida e Educação . . . . 6$000

André Crésson

Situação Atual dos Problemas Filosóficos . . . . . . 4$000

Francisco Venancio Filho e Jonathas Serrano

Cinema e Educação . . . . 6$000

Abner de Moura

Os Centros de Interêsse na Escola . . . . 4$000

Estevão Pinto

A Escola e a Formação da Mentalidade Popular do Brasil . . 4$000

O Problema da Formação dos Bem Dotados . . . . . . 5$000

Firmino Costa

Como se Ensina Linguagem . . . . 6$000

William Kilpatrick

Educação para uma Civilização em Mudança . . . . . . 5$000

NÚMEROS PRIMOS COMPREENDIDOS ENT[illegible] 10.000

1	229	541	863	1223	1583	1987	2351	[illegible]	[illegible]		
2	233	547	877	1229	1597	1993	2357	[illegible]	[illegible]	3559	3967
3	239	557	881	1231	1601	1997	2371	2749	[illegible]	3571	3989
5	241	563	883	1237	1607	1999	2377	2753	3191	3581	...
7	251	569	887	1249	1609	....	2381	2767	[illegible]	3583	4001
11	257	571	907	1259	1613	2003	2383	2777	3203	3593	4003
13	263	577	911	1277	1619	2011	2389	2789	3209	3607	4007
17	269	587	919	1279	1621	2017	2393	2791	3217	3613	4013
19	271	593	929	1283	1627	2027	2399	2797	3221	3617	4019
23	277	599	937	1289	1637	2029	2411	2801	3229	3623	4021
29	281	601	941	1291	1657	2039	2417	2803	3253	3631	4027
31	283	607	947	1297	1663	2053	2423	2819	3257	3643	4049
37	293	613	953	1301	1667	2063	2437	2833	3259	3659	4051
41	307	617	967	1303	1669	2069	2441	2837	3271	3671	4057
43	311	619	971	1307	1693	2081	2447	2843	3299	3673	4073
47	313	631	977	1319	1697	2083	2459	2851	3301	3677	4079
53	317	641	983	1321	1699	2087	2467	2857	3307	3691	4093
59	331	643	991	1327	1709	2089	2473	2861	3313	3697	4099
61	337	647	997	1361	1721	2099	2477	2879	3319	3701	4111
67	347	653	1009	1367	1723	2111	2503	2887	3323	3709	4127
71	349	659	1013	1373	1733	2113	2521	2897	3329	3719	4129
73	353	661	1019	1381	1741	2129	2531	2903	3331	3727	4133
79	359	673	1021	1399	1747	2131	2539	2909	3343	3733	4139
83	367	677	1031	1409	1753	2137	2543	2917	3347	3739	4153
89	373	683	1033	1423	1759	2141	2549	2927	3359	3761	4157
97	379	691	1039	1427	1777	2143	2551	2939	3361	3767	4159
101	383	701	1049	1429	1783	2153	2557	2953	3371	3769	4177
103	389	709	1051	1433	1787	2161	2579	2957	3373	3779	4201
107	397	719	1061	1439	1789	2179	2591	2963	3389	3793	4211
109	401	727	1063	1447	1801	2203	2593	2969	3391	3797	4217
113	409	733	1069	1451	1811	2207	2609	2971	3407	3803	4219
127	419	739	1087	1453	1823	2213	2617	2999	3413	3821	4229
131	421	743	1091	1459	1831	2221	2621	3001	3433	3823	4231
137	431	751	1093	1471	1847	2237	2633	3011	3449	3833	4241
139	433	757	1097	1481	1861	2239	2647	3019	3457	3847	4243
149	439	761	1103	1483	1867	2243	2657	3023	3461	3851	4253
151	443	769	1109	1487	1871	2251	2659	3037	3463	3853	4259
157	449	773	1117	1489	1873	2267	2663	3041	3467	3863	4261
163	457	787	1123	1493	1877	2269	2671	3049	3469	3877	4271
167	461	797	1129	1499	1879	2273	2677	3061	3491	3881	4273
173	463	809	1151	1511	1889	2281	2683	3067	3499	3889	4283
179	467	811	1153	1523	1901	2287	2687	3079	3511	3907	4289
181	479	821	1163	1531	1907	2293	2689	3083	3517	3911	4297
191	487	823	1171	1543	1913	2297	2693	3089	3527	3917	4327
193	491	827	1181	1549	1931	2309	2699	3109	3529	3919	4337
197	499	829	1187	1553	1933	2311	2707	3119	3533	3923	4339
[illegible]	503	839	1193	1559	1949	2333	2711	3121	3539	3929	4349
[illegible]1	509	853	1201	1567	1951	2339	2713	3137	3541	3931	4357
[illegible]23	521	857	1213	1571	1973	2341	2719	3163	3547	3943	4363
[illegible]27	523	859	1217	1579	1979	2347	2729	3167	3557	3947	4373

(Continuação números primos)

			[illegible]	6217	6689	7151	7621	8111	8623	9049	9511
4391	4861	5309	[illegible]	6221	6691	7159	7639	8117	8627	9059	9521
4397	4871	5323	[illegible]	6229	6701	7177	7643	8123	8629	9067	9533
4409	4877	5333	[illegible]	6247	6703	7187	7649	8147	8641	9091	9539
4421	4889	[illegible]	5801	6257	6709	7193	7669	8161	8647	9103	9547
4423	4903	[illegible]	5807	6263	6719	7207	7673	8167	8663	9109	9551
4441	4909	[illegible]	5813	6269	6733	7211	7681	8171	8669	9127	9587
4447	4919	[illegible]	5821	6271	6737	7213	7687	8179	8677	9133	9601
4451	4931	5393	5827	6277	6761	7219	7691	8191	8681	9137	9613
4457	4933	5399	5839	6287	6763	7229	7699	8209	8689	9151	9619
4463	4937	5407	5843	6299	6779	7237	7703	8219	8693	9157	9623
4481	4943	5413	5849	6301	6781	7243	7717	8221	8699	9161	9629
4483	4951	5417	5851	6311	6791	7247	7723	8231	8707	9173	9631
4493	4957	5419	5857	6317	6793	7253	7727	8233	8713	9181	9643
4507	4967	5437	5861	6323	6803	7283	7741	8237	8719	9187	9649
4513	4973	5441	5867	6329	6823	7297	7753	8243	8731	9199	9661
4517	4987	5443	5869	6337	6827	7307	7757	8263	8737	9203	9677
4519	4993	5449	5879	6343	6829	7309	7759	8269	8741	9209	9679
4523	4999	5471	5881	6353	6833	7321	7789	8273	8747	9221	9689
4549	5003	5477	5897	6359	6841	7331	7793	8287	8753	9227	9697
4561	5009	5479	5903	6361	6857	7333	7817	8291	8761	9239	9719
4567	5011	5483	5923	6367	6863	7349	7823	8293	8779	9241	9721
4583	5021	5501	5927	6373	6869	7351	7829	8297	8783	9257	9733
4591	5023	5503	5939	6379	6871	7369	7841	8311	8803	9277	9739
4597	5039	5507	5953	6389	6883	7393	7853	8317	8807	9281	9743
4603	5051	5519	5981	6397	6899	7411	7867	8329	8819	9283	9749
4621	5059	5521	5987	6421	6907	7417	7873	8353	8821	9293	9767
4637	5077	5527	....	6427	6911	7433	7877	8363	8831	9311	9769
4639	5081	5531	6007	6449	6917	7451	7879	8369	8837	9319	9781
4643	5087	5557	6011	6451	6947	7457	7883	8377	8839	9323	9787
4649	5099	5563	6029	6469	6949	7459	7901	8387	8849	9337	9791
4651	5101	5569	6037	6473	6959	7477	7907	8389	8861	9341	9803
4657	5107	5573	6043	6481	6961	7481	7919	8419	8863	9343	9811
4663	5113	5581	6047	6491	6967	7487	7927	8423	8867	9349	9817
4673	5119	5591	6053	6521	6971	7489	7933	8429	8887	9371	9829
4679	5147	5623	6067	6529	6977	7499	7937	8431	8893	9377	9833
4691	5153	5639	6073	6547	6983	7507	7949	8443	8923	9391	9839
4703	5167	5641	6079	6551	6991	7517	7951	8447	8929	9397	9851
4721	5171	5647	6089	6553	6997	7523	7963	8461	8933	9403	9857
4723	5179	5651	6091	6563	7001	7529	7993	8467	8941	9413	9859
4729	5189	5653	6101	6569	7013	7537	....	8501	8951	9419	9871
4733	5197	5657	6113	6571	7019	7541	8009	8513	8963	9421	9883
4751	5209	5659	6121	6577	7027	7547	8011	8521	8969	9431	9887
4759	5227	5669	6131	6581	7039	7549	8017	8527	8971	9433	9901
4783	5231	5683	6133	6599	7043	7559	8039	8537	8999	9437	9907
4787	5233	5689	6143	6607	7057	7561	8053	8539	....	9439	9923
4789	5237	5693	6151	6619	7069	7573	8059	8543	9001	9461	9929
4793	5261	5701	6163	6637	7079	7577	8069	8563	9007	9463	9931
4799	5273	5711	6173	6653	7103	7583	8081	8573	9011	9467	9941
4801	5279	5717	6197	6659	7109	7589	8087	8581	9013	9473	9949
4813	5281	5737	6199	6661	7121	7591	8089	8597	9029	9479	[illegible]
4817	5297	5741	6203	6673	7127	7603	8093	8599	9041	9491	[illegible]
4831	5303	5743	6211	6679	7129	7607	8101	8609	9043	9497	....

RAÍZES QUADRADAS DE 1 a 1.000

Númer.	Raizes Quadradas	Númer.	Raizes Quadradas	Númer.	Raizes Quadradas	Númer.	Raizes Quadradas	Númer.	Raizes Quadradas
1	1,00000	51	7,14142	101	10,04987	151	[illegible]	201	14,17744
2	1,41421	52	7,21110	102	10,09950	152	[illegible]	202	14,21267
3	1,73205	53	7,28010	103	10,14889	153	[illegible]	203	14,24780
4	2,00000	54	7,34846	104	10,19803	154	[illegible]	204	14,28285
5	2,23606	55	7,41619	105	10,24695	155	12,44989	205	14,31782
6	2,44948	56	7,48331	106	10,29563	156	12,48999	206	14,35270
7	2,64575	57	7,54983	107	10,34408	157	12,52996	207	14,38749
8	2,82842	58	7,61577	108	10,39230	158	12,56980	208	14,42220
9	3,00000	59	7,68114	109	10,44030	159	12,60952	209	14,45683
10	3,16227	60	7,74596	110	10,48808	160	12,64911	210	14,49137
11	3,31662	61	7,81024	111	10,53565	161	12,68857	211	14,52583
12	3,46410	62	7,87400	112	10,58300	162	12,72792	212	14,56021
13	3,60555	63	7,93725	113	10,63014	163	12,76714	213	14,59451
14	3,74165	64	8,00000	114	10,67707	164	12,80624	214	14,62873
15	3,87298	65	8,06225	115	10,72380	165	12,84523	215	14,66287
16	4,00000	66	8,12403	116	10,77032	166	12,88409	216	14,69693
17	4,12310	67	8,18535	117	10,81665	167	12,92284	217	14,73091
18	4,24264	68	8,24621	118	10,86278	168	12,96148	218	[illegible]
19	4,35889	69	8,30662	119	10,90871	169	13,00000	219	[illegible]
20	4,47213	70	8,36660	120	10,95445	170	13,03840	220	[illegible]
21	4,58257	71	8,42614	121	11,00000	171	13,07669	221	14,86606
22	4,69041	72	8,48528	122	11,04536	172	13,11487	222	14,89966
23	4,79583	73	8,54400	123	11,09053	173	13,15294	223	14,93318
24	4,89897	74	8,60232	124	11,13552	174	13,19090	224	14,96662
25	5,00000	75	8,66025	125	11,18033	175	13,22875	225	15,00000
26	5,09901	76	8,71779	126	11,22497	176	13,26649	226	15,03329
27	5,19615	77	8,77496	127	11,26942	177	13,30413	227	15,06651
28	5,29150	78	8,83176	128	11,31370	178	13,34166	228	15,09966
29	5,38516	79	8,88819	129	11,35781	179	13,37908	229	15,13274
30	5,47722	80	8,94427	130	11,40175	180	13,41640	230	15,16575
31	5,56776	81	9,00000	131	11,44552	181	13,45362	231	15,19868
32	5,65685	82	9,05538	132	11,48912	182	13,49073	232	15,23154
33	5,74456	83	9,11043	133	11,53256	183	13,52774	233	15,26433
34	5,83095	84	9,16515	134	11,57583	184	13,56465	234	15,29705
35	5,91607	85	9,21954	135	11,61895	185	13,60147	235	15,32970
36	6,00000	86	9,27361	136	11,66190	186	13,63818	236	15,36229
37	6,08276	87	9,32737	137	11,70469	187	13,67479	237	15,39480
38	6,16441	88	9,38083	138	11,74734	188	13,71130	238	15,42724
39	6,24499	89	9,43398	139	11,78982	189	13,74772	239	15,45962
40	6,32455	90	9,48683	140	11,83215	190	13,78404	240	15,49193
41	6,40312	91	9,53939	141	11,87434	191	13,82027	241	15,52417
42	6,48074	92	9,59166	142	11,91637	192	13,85640	242	15,55634
43	6,55743	93	9,64365	143	11,95826	193	13,89244	243	15,58845
44	6,63324	94	9,69535	144	12,00000	194	13,92838	244	15,62049
45	6,70820	95	9,74679	145	12,04159	195	13,96424	245	15,65247
46	6,78233	96	9,79795	146	12,08304	196	14,00000	246	15,68438
47	6,85565	97	9,84885	147	12,12435	197	14,03566	247	15,71623
48	6,92820	98	9,89949	148	12,16552	198	14,07124	248	15,74801
49	7,00000	99	9,94987	149	12,20655	199	14,10673	249	15,77973
50	7,07106	100	10,00000	150	12,24744	200	14,14213	250	15,81138

(Continuação raizes quadradas)

Númer.	Raizes Quadradas	Númer.	Raizes Quadradas	Númer.	Raizes Quadradas	Númer.	Raizes Quadradas	Númer.	Raizes Quadradas
251	15,84297	301	17,34935	351	18,73499	401	20,02498	451	21,23676
252	15,87450	302	17,37814	352	18,76166	402	20,04993	452	21,26029
253	15,90597	303	17,40689	353	18,78829	403	20,07485	453	21,28379
254	15,93737	304	17,43559	354	18,81488	404	20,09975	454	21,30727
255	15,96871	305	17,46424	355	18,84144	405	20,12461	455	21,33072
256	16,00000	306	17,49285	356	18,86796	406	20,14944	456	21,35415
257	16,03121	307	17,52141	357	18,89444	407	20,17424	457	21,37755
258	16,06237	308	17,54992	358	18,92088	408	20,19900	458	21,40093
259	16,09347	309	17,57839	359	18,94729	409	20,22374	459	21,42428
260	16,12451	310	17,60681	360	18,97366	410	20,24845	460	21,44761
261	16,15549	311	17,63519	361	19,00000	411	20,27313	461	21,47091
262	16,18641	312	17,66352	362	19,02629	412	20,29778	462	21,49418
263	16,21727	313	17,69180	363	19,05255	413	20,32240	463	21,51743
264	16,24807	314	17,72004	364	19,07878	414	20,34698	464	21,54065
265	16,27882	315	17,74823	365	19,10497	415	20,37154	465	21,56385
266	16,30950	316	17,77638	366	19,13112	416	20,39607	466	21,58703
267	16,34013	317	17,80449	367	19,15724	417	20,42057	467	21,61018
268	16,37070	318	17,83255	368	19,18332	418	20,44504	468	21,63330
269	16,40121	319	17,86057	369	19,20937	419	20,46948	469	21,65640
270	16,43167	320	17,88854	370	19,23538	420	20,49390	470	21,67948
271	16,46207	321	17,91647	371	19,26136	421	20,51828	471	21,70253
272	16,49242	322	17,94435	372	19,28730	422	20,54263	472	21,72556
273	16,52271	323	17,97220	373	19,31320	423	20,56696	473	21,74856
274	16,55294	324	18,00000	374	19,33907	424	20,59126	474	21,77154
275	16,58312	325	18,02775	375	19,36491	425	20,61552	475	21,79449
276	16,61324	326	18,05547	376	19,39071	426	20,63976	476	21,81742
277	16,64331	327	18,08314	377	19,41648	427	20,66397	477	21,84032
278	16,67333	328	18,11077	378	19,44222	428	20,68816	478	21,86321
279	16,70329	329	18,13835	379	19,46792	429	20,71231	479	21,88606
280	16,73320	330	18,16590	380	19,49358	430	20,73644	480	21,90890
281	16,76305	331	18,19340	381	19,51922	431	20,76053	481	21,93171
282	16,79285	332	18,22086	382	19,54482	432	20,78460	482	21,95449
283	16,82260	333	18,24828	383	19,57038	433	20,80865	483	21,97726
284	16,85229	334	18,27566	384	19,59591	434	20,83266	484	22,00000
285	16,88194	335	18,30300	385	19,62141	435	20,85665	485	22,02271
286	16,91153	336	18,33030	386	19,64688	436	20,88061	486	22,04540
287	16,94107	337	18,35755	387	19,67231	437	20,90454	487	22,06807
288	16,97056	338	18,38477	388	19,69771	438	20,92844	488	22,09072
289	17,00000	339	18,41195	389	19,72308	439	20,95232	489	22,11334
290	17,02938	340	18,43908	390	19,74841	440	20,97617	490	22,13594
291	17,05872	341	18,46618	391	19,77371	441	21,00000	491	22,1[illegible]
292	17,08800	342	18,49324	392	19,79898	442	21,02379	492	22,[illegible]
293	17,11724	343	18,52025	393	19,82422	443	21,04756	493	22,20[illegible]
294	17,14642	344	18,54723	394	19,84943	444	21,07130	494	22,[illegible]
295	17,17556	345	18,57417	395	19,87460	445	21,09502	495	22,[illegible]
296	17,20465	346	18,60107	396	19,89974	446	21,11871	496	22,[illegible]
297	17,23368	347	18,62793	397	19,92485	447	21,14237	497	22,[illegible]
298	17,26267	348	18,65475	398	19,94993	448	21,16601	498	22,[illegible]
299	17,29161	349	18,68154	399	19,97498	449	21,18962	499	22,[illegible]
300	17,32050	350	18,70828	400	20,00000	450	21,21320	500	22,[illegible]

(Continuação raizes quadradas)

Númer.	Raizes Quadradas	Númer.	Raizes Quadradas	Númer.	Raizes Quadradas	Númer.	Raizes Quadradas	Númer.	Raizes Quadradas
501	22,38302	551	23,47338	601	24,51530	651	25,5147[illegible]	701	26,47640
502	22,40535	552	23,49468	602	24,53568	652	25,534[illegible]	702	26,49528
503	22,42766	553	23,51595	603	24,55605	653	25,556[illegible]	703	26,51414
504	22,44994	554	23,53720	604	24,57641	654	25,57[illegible]	704	26,53299
505	22,47220	555	23,55843	605	24,59674	655	25,59[illegible]	705	26,55183
506	22,49444	556	23,57965	606	24,61706	656	25,61[illegible]	706	26,57066
507	22,51666	557	23,60084	607	24,63737	657	25,6[illegible]	707	26,58947
508	22,53885	558	23,62202	608	24,65765	658	25,6[illegible]	708	26,60826
509	22,56102	559	23,64318	609	24,67792	659	25,6[illegible]	709	26,62705
510	22,58317	560	23,66431	610	24,69817	660	[illegible]	710	26,64582
511	22,60530	561	23,68543	611	24,71841	661	25,70992	711	26,66458
512	22,62741	562	23,70653	612	24,73863	662	25,72936	712	26,68332
513	22,64950	563	23,72762	613	24,75883	663	25,74878	713	26,70205
514	22,67156	564	23,74868	614	24,77902	664	25,76819	714	26,72077
515	22,69361	565	23,76972	615	24,79919	665	25,78759	715	26,73948
516	22,71563	566	23,79075	616	24,81934	666	25,80697	716	26,75817
517	22,73763	567	23,81176	617	24,83948	667	25,82634	717	26,77685
518	22,75961	568	23,83275	618	24,85960	668	25,84569	718	26,79552
519	22,78157	569	23,85372	619	24,87971	669	25,86503	719	26,81417
520	22,80350	570	23,87467	620	24,89979	670	25,88435	720	26,83281
521	22,82542	571	23,89560	621	24,91987	671	25,90366	721	26,85144
522	22,84731	572	23,91652	622	24,93992	672	25,92296	722	26,87005
523	22,86919	573	23,93741	623	24,95996	673	25,94224	723	26,88865
524	22,89104	574	23,95829	624	24,97999	674	25,96151	724	26,90724
525	22,91287	575	23,97915	625	25,00000	675	25,98076	725	26,92582
526	22,93468	576	24,00000	626	25,01999	676	26,00000	726	26,94438
527	22,95648	577	24,02082	627	25,03996	677	26,01922	727	26,96293
528	22,97825	578	24,04163	628	25,05992	678	26,03843	728	26,98147
529	23,00000	579	24,06241	629	25,07987	679	26,05763	729	27,00000
530	23,02172	580	24,08318	630	25,09980	680	26,07680	730	27,01851
531	23,04343	581	24,10394	631	25,11971	681	26,09597	731	27,03701
532	23,06512	582	24,12467	632	25,13961	682	26,11512	732	27,05549
533	23,08679	583	24,14539	633	25,15949	683	26,13426	733	27,07397
534	23,10844	584	24,16609	634	25,17935	684	26,15339	734	27,09243
535	23,13006	585	24,18677	635	25,19920	685	26,17250	735	27,11088
536	23,15167	586	24,20743	636	25,21904	686	26,19160	736	27,12931
537	23,17326	587	24,22808	637	25,23885	687	26,21068	737	27,14774
538	23,19482	588	24,24871	638	25,25866	688	26,22975	738	27,16615
539	23,21637	589	24,26932	639	25,27844	689	26,24880	739	27,18455
540	23,23790	590	24,28991	640	25,29822	690	26,26785	740	27,20294
541	23,25940	591	24,31049	641	25,31797	691	26,28687	741	27,22131
542	23,28089	592	24,33105	642	25,33771	692	26,30589	742	27,23967
543	23,30236	593	24,35159	643	25,35744	693	26,32489	743	27,25802
544	23,32380	594	24,37211	644	25,37715	694	26,34387	744	27,27636
545	23,34523	595	24,39262	645	25,39685	695	26,36285	745	27,29468
546	23,36664	596	24,41311	646	25,41653	696	26,38181	746	27,31300
547	23,38803	597	24,43358	647	25,43619	697	26,40075	747	27,33130
548	23,40939	598	24,45403	648	25,45584	698	26,41969	748	27,34958
549	23,43074	599	24,47447	649	25,47547	699	26,43860	749	27,36786
550	23,45207	600	24,49489	650	25,49509	700	26,45751	750	27,38612

(Continuação raizes quadrados)

Numer.	Raizes Quadradas	Numer.	Raizes Quadradas	Numer.	Raizes Quadradas	Numer.	Raizes Quadradas	Numer.	Raizes Quadradas
751	27,40437	80[illegible]	28,30194	851	29,17190	901	30,01666	951	30,83828
752	27,4226[illegible]	[illegible]	28,31960	852	29,18903	902	30,03331	952	30,85449
753	27,4408[illegible]	8[illegible]	28,33725	853	29,20616	903	30,04995	953	30,87069
754	27,459[illegible]6	8[illegible]	28,35489	854	29,22327	904	30,06659	954	30,88689
755	27,477[illegible]26	8[illegible]	28,37252	855	29,24038	905	30,08321	955	30,90307
756	27,49[illegible]45	8[illegible]	28,39013	856	29,25747	906	30,09983	956	30,91924
757	27,51[illegible]63	80[illegible]	28,40774	857	29,27456	907	30,11644	957	30,93541
758	27,5[illegible]179	808	28,42534	858	29,29163	908	30,13303	958	30,95157
759	27,54[illegible]5	809	28,44292	859	29,30870	909	30,14962	959	30,96772
760	27,56[illegible]	[illegible]	28,4[illegible]49	860	29,32575	910	30,16620	960	30,98386
761	27,58622	811	28,47[illegible]06	861	29,34280	911	30,18277	961	31,00000
762	27,60434	812	28,495[illegible]1	862	29,35983	912	30,19933	962	31,01612
763	27,62245	813	28,51315	863	29,37686	913	30,21588	963	31,03224
764	27,64054	814	28,53068	864	29,39387	914	30,23243	964	31,04834
765	27,65863	815	28,54820	865	29,41088	915	30,24896	965	31,06444
766	27,67670	816	28,56571	866	29,42787	916	30,26549	966	31,08054
767	27,69476	817	28,58321	867	29,44486	917	30,28200	967	31,09662
768	27,71281	818	28,60069	868	29,46183	918	30,29851	968	31,11269
769	27,73084	819	28,61817	869	29,47880	919	30,31501	969	31,12876
770	27,74887	820	28,63564	870	29,49576	920	30,33150	970	31,14482
771	27,76688	821	28,65309	871	29,51270	921	30,34798	971	31,16087
772	27,78488	822	28,67054	872	29,52964	922	30,36445	972	31,17691
773	27,80287	823	28,68797	873	29,54657	923	30,38091	973	31,19294
774	27,82085	824	28,70540	874	29,56349	924	30,39736	974	31,20897
775	27,83882	825	28,72281	875	29,58039	925	30,41381	975	31,22499
776	27,85677	826	28,74021	876	29,59729	926	30,43024	976	31,24099
777	27,87471	827	28,75760	877	29,61418	927	30,44667	977	31,25699
778	27,89265	828	28,77498	878	29,63106	928	30,46309	978	31,27299
779	27,91057	829	28,79236	879	29,64793	929	30,47950	979	31,28897
780	27,92848	830	28,80972	880	29,66479	930	30,49590	980	31,30495
781	27,94637	831	28,82707	881	29,68164	931	30,51229	981	31,32091
782	27,96426	832	28,84441	882	29,69848	932	30,52867	982	31,33687
783	27,98213	833	28,86173	883	29,71531	933	30,54504	983	31,35283
784	28,00000	834	28,87905	884	29,73213	934	30,56141	984	31,36877
785	28,01785	835	28,89636	885	29,74894	935	30,57776	985	31,38470
786	28,03569	836	28,91366	886	29,76575	936	30,59411	986	31,40063
787	28,05352	837	28,93095	887	29,78254	937	30,61045	987	31,41655
788	28,07133	838	28,94822	888	29,79932	938	30,62678	988	31,43246
789	28,08914	839	28,96549	889	29,81610	939	30,64310	989	31,44837
790	28,10693	840	28,98275	890	29,83286	940	30,65941	990	31,46426
791	28,12472	841	29,00000	891	29,84962	941	30,67572	991	31,[illegible]
792	28,14249	842	29,01723	892	29,86636	942	30,69201	992	[illegible]9603
793	28,16025	843	29,03446	893	29,88310	943	30,70830	993	31,[illegible]190
794	28,17800	844	29,05167	894	29,89983	944	30,72458	994	31,[illegible]776
795	28,19574	845	29,06888	895	29,91655	945	30,74085	995	31,[illegible]362
796	28,21347	846	29,08607	896	29,93325	946	30,75711	996	31,[illegible]946
797	28,23118	847	29,10326	897	29,94995	947	30,77336	997	31,[illegible]530
798	28,24889	848	29,12043	898	29,96664	948	30,78960	998	31,[illegible]113
799	28,26658	849	29,13760	899	29,98332	949	30,80584	999	31,60696
800	28,28427	850	29,15475	900	30,00000	950	30,82207	1000	31,62277