Serie de compendios para o estudo de mathematicas

PELO

Professor Antonio Trajano

Arithmetica Primaria para meninos e meninas que começám o estudo de Arithmetica nas escolas primarias, contendo todo o ensino exposto em lições perfeitamente graduadas, e acompanhadas de numerosos exercicios, problemas e figuras para tornar o estudo de Arithmetica mais attractivo ás crianças, 79ª edição.. $500

Arithmetica Elementar Illustrada para as classes mais adiantadas das escolas, contendo toda a materia da Arithmetica que deve ser ensinada nas aulas primarias. Obra premiada pelo Jury da Exposição Pedagogica do Rio de Janeiro, 68ª edição approvada e adoptada unanimemente pelo Conselho Superior da Instrucção Publica da Capital Federal, cartonada................. 2$000

Arithmetica Progressiva, curso completo theorico e pratico de Arithmetica para o ensino secundario e superior, contendo todos os esclarecimentos uteis sobre este importante ramo da sciencia, obra adoptada em muitas escolas normaes, lyceus, e outros estabelecimentos de educação superior, 36ª edição refundida, ampliada e completa, cartonada.................................... 5$000

Algebra Elementar, contendo um curso theorico e pratico deste importante ramo das mathematicas, incluindo equações do segundo grau e progressões, exposto por um methodo tão simples e facil que dispensa o auxilio do professor, 5ª edição cartonada..... 5$000

Nova Chave da Arithmetica Progressiva, preparada para a 30ª edição e as mais que se publicarem................ 1$000

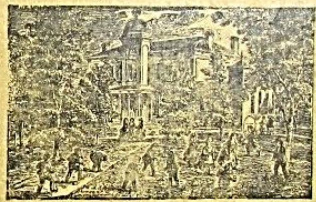
Nova Chave da Algebra Elementar. Esta Chave dá a solução completa de todos os problemas e difficuldades da Algebra Elementar, e é de grande vantagem para o estudo desta disciplina, 2ª edição.. 2$000

TRAJANO

ARITHMETICA ELEMENTAR

ILLUSTRADA

ENSINO THEORICO E PRATICO



68ª EDIÇÃO

Muito ampliada e desenvolvida, approvada e adoptada unanimemente pelo Conselho Superior de Instrucção da Capital Federal, para uso dos alumnos das escolas publicas.

RIO DE JANEIRO
Typ. MARTINS DE ARAUJO & C., Rua S. PEDRO, 216 — RIO

N 178

31/2

João B. Chautard
alumno do Collegio
Renascença

Arithmetica Elementar

ILLUSTRADA

Para uso dos alumnos adiantados das escolas primarias

Obra premiada pelo jury da Exposição Pedagogica do Rio de Janeiro e adoptada pela Instrucção Publica em varios Estados do Brazil.

COMPOSTA PELO PROFESSOR

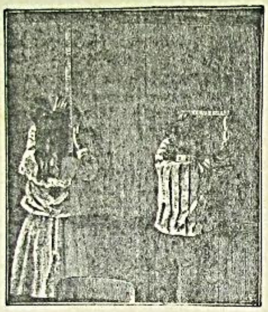
ANTONIO TRAJANO

Auctor da Arithmetica Primaria, Arithmetica Progressiva, Algebra Elementar, Chave da Arithmetica Progressiva e Chave da Algebra

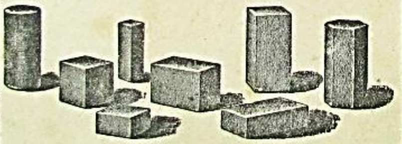
76ª EDIÇÃO

Approvada e adoptada unanimemente pelo Conselho Superior de Instrucção da Capital Federal para uso dos alumnos das escolas primarias

RIO DE JANEIRO
Typ. de Martins de Araujo & C.—Rua S. Pedro, 216—Rio



Medição de áreas



Medição de volumes

Approvação e adopção desta obra

Apresentamos agora a *Arithmetica Elementar Illustrada* na **60ª edição,** mais desenvolvida e ampliada do que nas edições precedentes, e com o aperfeiçoamento methodico que o estudo e a longa pratica do ensino nos teem demonstrado ser mais vantajoso e conducente para adextrar os alumnos no manejo dos numeros e da arte de calcular.

A importancia deste livro póde ser facilmente avaliada pelo acolhimento que elle teve da imprensa, do professorado e até da propria infancia que por elle estudou, logo nas suas primeiras edições. Além deste acolhimento immediato e tão honroso, esta obra foi depois premiada pelo Jury da Exposição Pedagogica do Rio de Janeiro; foi adoptada no ensino em diversos estados do Brazil, e recebida com grande satisfação por muitos estabelecimentos importantes de educação. As cincoenta e nove edições já exgottadas attestam a sua grande utilidade no ensino desta disciplina.

O Conselho Superior de Instrucção da Capital Federal, reconhecendo a grande vantagem da adopção deste livro no ensino das escolas publicas, nomeou uma commissão composta de tres illustres professores, para emittir o seu juizo sobre elle.

Esta commissão apresentou os seguintes pareceres:

«Li a *Arithmetica Elementar* do Sr. Antonio Trajano, e tenho prazer em poder declarar que é ella uma das melhores se não a melhor de todas as que conheço destinadas á instrucção da infancia. Tal foi o parecer do illustre professor, de saudosa memoria, Dr. Benjamin Constant, sobre o livro a que se refere este requerimento. Só me resta, pois, subscrever o parecer daquelle illustre mestre e recommendar o livro para uso das escolas publicas desta Capital. Em 20 de Agosto de 1907.»

ALBERTO GRACIE.

«Estou de pleno accordo com o parecer do meu collega relator.

O trabalho do professor A. Trajano é o que se póde imaginar de melhor no genero, e certamente continuará a prestar á instrucção primaria os mesmos serviços que tem até aqui prestado. Em 22 de Agosto de 1907.»

DR. F. PINHEIRO BITTENCOURT.

«Durante grande parte do meu exercicio de professor primario, tive no livro cuja approvação ora se pede, um valioso auxiliar, que a meu ver, prehenche todas as condições de uma obra didactica. Em 26 de Agosto de 1907.»

ANTONIO CARLOS VELHO DA SILVA.

«A' vista de tão auctorizados pareceres, o Conselho Superior de Instrucção da Capital Federal, em sessão de 30 de Agosto de 1907, approvou unanimemente e adoptou para uso dos alumnos das escolas publicas, a *Arithmetica Elementar Illustrada* do professor Antonio Trajano.»

Os pareceres da commissão e a deliberação do Conselho aqui exarados, foram extrahidos textualmente da acta da sessão do mesmo Conselho.

Entre as numerosas apreciações honrosas feitas a este livro, citaremos sómente as seguintes que, por serem de pessoas de elevada reputação, não devem ficar esquecidas.

O illustrado Dr. Benjamin Constant, auctoridade da maior competencia nesta materia, começou do seguinte modo o seu respeitavel parecer:

«Li a *Arithmetica Elementar* do Sr. Antonio Trajano, e tenho prazer em poder declarar que é ella uma das melhores, se não a melhor de todas as que conheço, destinadas á instrucção da infancia.»

O illustrado Dr. Manoel P. C. de Amarante, lente de mecanica da Escola Militar desta Capital, dando a sua auctorizada opinião sobre esta obra, entre outras cousas, disse o seguinte:

«Exposição clara e simples, difficuldades apresentadas gradualmente e gradualmente vencidas; figuras bem combinadas, que illustram e embellezam o livro; grande numero de exercicios instructivos e de problemas, cujos dados são por vezes com felicidade escolhidos dentre os elementos da economia domestica, da chronologia, historia, etc., etc., nitidez de impressão, tudo contribuiu para tornar interessante e apreciavel o novo compendio, do qual, parece-me, se póde dizer: é um livro util.

Cada um sabe, e muitos de experiencia propria, o desgosto e o desanimo que o estudo da regra de tres, de juros, etc., causa aos principiantes, sobrecarregando-lhes a memoria, e o prazer que ao contrario, lhes dá o methodo analytico, chamado de reducção á unidade, pela facilidade com que o aprendem e applicam.

«E' assim que o Sr. Trajano faz desse methodo com muito acerto largo uso em todo o seu livro, e é a chave de ouro com que o fecha.

Illm. Sr.—Em resposta ao officio de V. S., de 11 do corrente, pedindo o meu parecer sobre a *Arithmetica Elementar Illustrada* de Antonio Trajano, tenho a dizer que acho esse livro de grande valor para o principiante. O processo material que emprega, e que consta das illustrações de que é cheio o livro, torna comprehensiveis e com toda a clareza as diversas questões que, em outros compendios, são tratadas de modo a levar o desanimo ao principiante, que, ou abandona o estudo, ou se vê obrigado a decorar sem comprehender o que lê. E' esta sciencia tão util e no nosso paiz ainda tão mal estudada, por falta de livros como o do Sr. Trajano, cuja adoptação nas nossas escolas será com certeza de grande vantagem para os que vão ensaiar os primeiros passos na sciencia dos numeros, pois estou certo virá fazer desertar os livros que pretendem ensinar os principios, não a quem sabe, mas a quem já deve saber muito. Este util livrinho, que virá tornar o ensino da Arithmetica tão agradavel, deverá sempre substituir esses livros-sphynges, que fazem recuar desanimado o principiante.

Illm. Sr. Dr. Arthur Cesar Guimarães, dignissimo inspector geral da Instrucção Publica de S. Paulo.

DR. AUGUSTO OLAVO RODRIGUES FERREIRA,
Director geral.

DECLARAÇÃO

Antonio Trajano

ARITHMETICA ELEMENTAR

1. Arithmetica é a sciencia elementar dos numeros e a arte de calcular por meio de algarismos.

2. Algarismos são signaes numericos e lettras que abreviadamente representam os numeros. Ha duas especies de algarismos que se denominam: algarismos arabicos e algarismos romanos.

3. Algarismos arabicos são os dez signaes seguintes chamados:

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	0.
um,	dois,	tres,	quatro,	cinco,	seis,	sete,	oito,	nove,	cifra.

Os primeiros nove chamam-se **algarismos significativos,** porque cada um exprime sempre um numero; á cifra dá-se tambem o nome de **zero** que significa nada.

4. Os algarismos romanos constam de sete lettras maiusculas do nosso alphabeto, tendo cada uma dellas um valor convencionado. As sete lettras e seus valores são

I,	V,	X,	L,	C,	D,	M.
um,	cinco,	dez,	cincoenta,	cem,	quinhentos,	mil.

5. Os outros numeros exprimem-se repetindo ou alternando estas sete lettras, pelo modo seguinte:

1º As lettras que se repetem são só I, X, C e M; de sorte que II vale dois; XXX vale trinta; CCC vale trezentos; MM vale dois mil, etc. Estas lettras podem ser repetidas até tres vezes seguidas.

2º Se uma lettra de menor valor estiver antes de outra de maior valor, subtrahe-se a lettra menor da maior; assim IV representa quatro, isto é, cinco menos um; XL representa quarenta, etc. Mas, se a lettra de menor valor estiver depois da de maior valor, sommam-se: assim VI representa seis, isto é, cinco mais um; LX representa sessenta, etc.

3º Um risco horizontal sobre uma ou mais lettras eleva mil vezes o seu valor, assim $\overline{C}$ representa cem mil; $\overline{CC}$ representa duzentos mil; $\overline{CD}$ representa quatrocentos mil, etc.

6. Os diversos numeros escrevem-se do seguinte modo com os algarismos arabicos e romanos:

Um.........	1	I	Vinte	20	XX
Dois	2	II	Trinta.......	30	XXX
Tres	3	III	Quarenta	40	XL
Quatro	4	IV	Cincoenta....	50	L
Cinco	5	V	Sessenta.....	60	LX
Seis.........	6	VI	Setenta......	70	LXX
Sete	7	VII	Oitenta......	80	LXXX
Oito	8	VIII	Noventa.....	90	XC
Nove........	9	IX	Cem........	100	C
Dez.........	10	X	Duzentos....	200	CC
Onze........	11	XI	Trezentos....	300	CCC
Doze........	12	XII	Quatrocentos.	400	CD
Treze.......	13	XIII	Quinhentos...	500	D
Quatorze	14	XIV	Seiscentos ...	600	DC
Quinze......	15	XV	Setecentos ...	700	DCC
Dezeseis.....	16	XVI	Oitocentos ...	800	DCCC
Dezesete	17	XVII	Novecentos...	900	CM
Dezoito	18	XVIII	Mil.........	1000	M
Dezenove....	19	XIX	Milhão	1000000	$\overline{M}$

Do que fica exposto, vemos que de tres modos podemos representar os numeros, a saber:

1° Com palavras escriptas, como: **um, dois, tres, etc.**

2° Com algarismos arabicos, como: **1, 2, 3, etc.**

3° Com algarismos romanos, como: **I, II, III, etc.**

DEFINIÇÕES

7. Antes de entrarmos no estudo da numeração, precisamos primeiro saber o que é unidade, quantidade e numero.

8. Unidade significa uma só cousa, por onde se começam a contar as quantidades. Assim, 25 livros, a unidade é um livro; 18 vintens, a unidade é um vintem; 8 meninos, a unidade é um menino.

Illustração. A palavra unidade vem do latim *unus*, que significa um. Se contarmos grãos de café, a unidade será um grão; se contarmos saccas de café, a unidade será uma sacca; se pesarmos uma sacca, a unidade será um kilogrammo, e se medirmos o tamanho da sacca, a unidade será um metro ou um centimetro, conforme o tamanho da sacca. Em pesos e medidas, as unidades estabelecidas por lei são as do systema metrico das quaes adiante falaremos.

9. Quantidade é uma porção de alguma cousa que se póde pesar, medir ou contar. Uma quantidade de café póde ser pesada; uma quantidade de vinho póde ser medida com o litro; uma quantidade de panno póde ser medida com o metro, e uma quantidade de laranjas póde ser contada.

10. As quantidades podem ser homogeneas ou heterogeneas.

Quantidades homogeneas são as da mesma especie de cousas, e que se podem reunir em um só numero, como: 8 livros, 12 livros e 10 livros, que fazem o numero de 30 livros.

Quantidades heterogeneas são as de especies differentes, e que não se podem reunir em um só numero, como: 8 livros, 12 chapéos e 7 casas.

Illustração. Se sobre uma mesa estiverem duas pilhas de pratos, estas duas quantidades serão homogeneas. Se, em lugar de pratos, estiverem dois montes de pecegos, as quantidades serão tambem homogeneas; mas, se sobre a mesa estiverem uma pilha de pratos e um monte de pecegos, estas duas quantidades serão heterogeneas.

11. Numero é o que exprime quantas unidades contém uma quantidade. Em 38 barricas de farinha, a quantidade é toda aquella farinha; a unidade é uma barrica, e o numero de unidades ou barricas é 38.

Os numeros dividem-se em pares e impares, abstractos e concretos, primos e multiplos, decimaes e complexos.

Numeros pares são os que terminam em 2, 4, 6, 8 ou 0.

Numeros impares são os que terminam em 1, 3, 5, 7 ou 9.

Numeros abstractos são os que não estão unidos a nome algum, como: 5, 20, 35, etc.

Numeros concretos são os que estão unidos ao nome dos objectos para exprimir o seu numero, como: 5 livros, 20 pennas, 35 casas, etc.

Das outras especies de numeros trataremos nos seus respectivos logares.

NUMERAÇÃO

12. Numeração é a parte da Arithmetica que ensina a ler os numeros e a escrevel-os por meio de algarismos, e por isso se divide em numeração falada e numeração escripta.

13. Numeração falada ensina a dar o nome a todos os numeros, com uma limitada quantidade de palavras.

Ha uma infinidade de numeros e, se dessemos um nome differente a cada um, teriamos de guardar na memoria milhões de nomes, o que seria muito difficil e até impossivel. Para remediar este inconveniente, inventou-se um meio facil de dar um nome distincto a cada numero, dispondo e combinando só as seguintes palavras:

Um	**dez**	**cem**	**mil**	milhão
Dois	vinte	duzentos	.	billião
Tres	trinta	tresentos	.	trillião
Quatro	quarenta	quatrocentos	.	quatrillião
Cinco	cincoenta	quinhentos	.	quintillião
Seis	sessenta	seiscentos	.	sextillião
Sete	setenta	setecentos	.	septillião
Oito	oitenta	oitocentos	.	otillião
Nove	noventa	novecentos	.	nonillião

Destas palavras, doze são primitivas, a saber: **um, dois, tres, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez, cem e mil,** e dellas se formam todas as outras pelo accrescimo de uma das terminações **enta, entos, lhão,** ou **lião.** De sorte que com doze palavras primitivas e quatro terminações, podemos exprimir em portuguez todos os numeros imaginaveis. Assim, tendo nós, por exemplo, as palavras tres, trinta e tresentos, podemos enunciar os numeros—*trinta e tres*—*tresentos e tres*—*tresentos e trinta*—*tresentos e trinta e tres.* Tendo mais a palavra mil, podemos exprimir os numeros—*mil e tres*—*mil e trinta*—*mil tresentos e tres*—*mil tresentos e trinta,* e muitissimos outros numeros. Combinando deste modo as outras palavras, podemos dar um nome distincto a todos os numeros necessarios e imaginaveis.

Nota. Desde o numero onze até o numero quinze, a linguagem da numeração não segue a ordem regular das outras dezenas; pois em logar de se dizer dez e um, dez e dois, dez e tres, dez e quatro, dez e cinco, o uso introduziu onze, doze, treze, quatorze e quinze.

Algumas arithmeticas usam dos termos *bilhão, trilhão,* etc.; mas Aulete, Adolpho Coelho, João de Almeida e João de Deus nos seus diccionarios escrevem sempre *billião trillião,* etc., e são estas as fórmas que adoptamos.

14. Numeração escripta ensina a escrever todos os numeros com os dez algarismos arabicos.

Se tivessemos de escrever os numeros como os falamos, seria muito difficil fazer as operações da Arithmetica. Assim, para escrevermos o numero *setenta e seis mil duzentos e oitenta e quatro,* teriamos de empregar trinta e oito lettras; ao passo que com cinco algarismos o exprimimos com toda a clareza, escrevendo 76284.

Para aprendermos a escrever os numeros, precisamos começar este estudo pela formação das diversas unidades.

Formação das diversas unidades

15. Uma só cousa chama-se uma unidade; dez cousas chamam-se dez unidades ou uma dezena; cem cousas chamam-se cem unidades ou uma centena; mil cousas chamam-se mil unidades ou um milhar.

Dez unidades iguaes formam outra unidade immediatamente superior; dez destas formam já outra; assim,

dez unidades simples formam uma dezena;
dez dezenas formam uma centena;
dez centenas formam um milhar;
dez milhares formam uma dezena de milhares;
dez dezenas de milhares formam uma centena de milhares;
dez centenas de milhares formam um milhão, etc.

16. Este systema de numeração chama-se **decimal,** porque a base da formação das diversas unidades é sempre **dez.**

Nota. Ha outros systemas de numeração como **o binario,** em que duas unidades iguaes formam outra unidade immediatamente superior; **o ternario,** em que tres unidades iguaes formam outra immediatamente superior; finalmente, **o quaternario, o quinario, o senario,** etc. Estes diversos systemas de numeração acham-se expostos com clareza na nossa **Arithmetica Progressiva.**

17. Em um numero, cada especie de unidades é representada por um só algarismo, e o logar que este occupa chama-se **ordem.** Começando da direita para a esquerda, as unidades occupam a primeira ordem; as dezenas a segunda; as centenas, a terceira; os milhares, a quarta, e assim por diante, como se vê no exemplo seguinte:

	4ª classe			3ª classe			2ª classe			1ª classe		
13ª	12ª	11ª	10ª	9ª	8ª	7ª	6ª	5ª	4ª	3ª	2ª	1ª
Trilliões........	centenas de billiões ...	dezenas de billiões	Billiões..........	centenas de milhões...	dezenas de milhões....	Milhões	centenas de milhares...	dezenas de milhares...	Milhares...........	centenas..........	dezenas...........	Unidades..........
3,	2	1	0,	9	8	7,	6	5	4,	3	2	1

18. Dividindo o numero acima em classes de tres algarismos, começando pela direita, notamos que cada classe contém unidades, dezenas e centenas. Na primeira classe, as unidades são simples; na segunda, as unidades são os milhares; na terceira, as unidades são os milhões; na quarta, as unidades são os billiões, etc. A ultima classe nem sempre tem dezenas e centenas.

19. Como vimos no numero **17,** as diversas unidades teem tambem o nome da ordem que occupam nos numeros; assim,

as unidades simples são unidades da 1ª ordem, porque occupam o primeiro logar á direita do numero;
as dezenas são unidades da 2ª ordem;
as centenas são unidades da 3ª ordem;
os milhares são unidades da 4ª ordem;
as dezenas de milhares são unidades da 5ª ordem;
as centenas de milhares são unidades da 6ª ordem;
os milhões são unidades da 7ª ordem; etc.

20. O valor das diversas ordens das unidades escreve-se do seguinte modo com algarismos:

Uma unidade (um).	1
Uma dezena (dez)	10
Uma centena (cem).	100
Um milhar (mil).	1.000
Uma dezena de milhares (dez mil). . . .	10.000
Uma centena de milhares (cem mil) . . .	100.000
Um milhão (milhão)	1.000.000

21. A cifra não tem valor algum, serve, porém, para occupar os logares ou ordens que não teem algarismos significativos. Assim, no numero 20, como não ha unidades, o seu logar é occupado por uma cifra, se não, ficaria 2. No numero 3005, como não ha centenas nem dezenas, os seus logares respectivos são occupados por cifras, se não, o numero ficaria 35.

22. Valor absoluto e relativo. Os algarismos teem dois valores, um absoluto e outro relativo. Tem o valor absoluto, quando occupam a ordem das unidades, e tem o valor relativo, quando occupam outra qualquer ordem.

Demonstração. Se escrevermos o algarismo 3 na ordem das unidades, elle representará 3 cousas que é o seu valor absoluto; se o escrevermos na ordem das dezenas, representará 30 cousas; se o escrevermos na ordem das centenas, representará 300 cousas; e assim irá crescendo 10 vezes mais em cada ordem á esquerda, e todos estes valores são relativos. Quando um algarismo está só, tem sempre o valor absoluto, porque occupa a ordem das unidades.

3
3 0
3 0 0

23. Para se tornar qualquer numero dez vezes maior, bastará juntar-lhe uma cifra á direita. O numero 6 com mais uma cifra,

ficará 60, porque a cifra occupará a ordem das unidades, e o algarismo 6 passará para as dezenas. Se juntarmos duas cifras, ficará 600; se juntarmos tres cifras, ficará 6000, e assim por diante.

Para representarmos com algarismos o numero quatrocentos, escreveremos primeiro 4 para exprimir as centenas, e, como neste numero não ha dezenas nem unidades, escreveremos duas cifras nos seus logares, e ficará 400. Para representarmos o numero tres mil quatrocentos e vinte e tres, escreveremos 3 para exprimir os milhares, 4 para exprimir as centenas, 2 as dezenas e 3 as unidades, e o numero em algarismos será 3423.

Para se escrever os numeros com algarismos, ha a seguinte

Regra: *Escreve-se o numero, da esquerda para a direita, exprimindo primeiro as unidades maiores e depois, em ordem, as menores, pondo-se cifras nas ordens que não tiverem valores.*

Leitura dos numeros

24. Se um numero for pequeno, poderemos enuncial-o facilmente sem processo algum; mas se for composto de muitos algarismos, poderemos dividil-o em classes de tres algarismos, e então será muito facil a sua leitura.

Problema. Como se lê o numero 27938456875214?

Solução. Dividindo o numero acima em classes de tres algarismos, vemos que tem cinco classes; e como a primeira classe é das unidades, a segunda dos milhares, a terceira dos milhões, a quarta dos billiões e a quinta dos trilliões, segue-se que o numero contém 27 trilliões, 938 billiões, 456 milhões, 875 milhares e 214 unidades.

Trilliões	Billiões	Milhões	Milhares	Unidades
27,	938,	456,	875,	214

Para se ler um numero, ha a seguinte

Regra: *Dividem-se todos os seus algarismos em classes de tres algarismos, começando pela direita; dá-se a cada clast a sua denominação na seguinte ordem: unidades, milhares, milhões, billiões, etc., e depois, começando pela esquerda, enuncia-se o numero de cada classe com a sua respectiva denominação.*

Exercicio de applicação. Os discipulos enunciarão os numeros seguintes, e depois o professor dictará estes ou outros que elles escreverão na pedra.

(1.)	(2.)	(3.)	(4.)	(5.)
63	875	8080	68765	9865837
90	908	9009	80074	9090909
100	1000	10000	197343	16593207
109	1004	10080	795896	854389300
250	1058	42050	871049	900000000
401	1600	55555	957412	3875873893

Numeração das quantias

25. A palavra **quantia** significa qualquer somma de dinheiro.

Para indicarmos que um numero exprime uma quantia e não uma quantidade de objectos, escreveremos entre as centenas e os milhares um cifrão $.

Assim, 4500 lê-se: quatro mil e quinhentas unidades, e 4$500 lê-se: quatro mil e quinhentos réis.

26. No nosso systema monetario ha 3 unidades que são:

Unidade inferior.....	**Um real**.......	$001
Unidade média	**Mil-réis**	1$000
Unidade superior.....	**Conto de réis**..	1:000$000

O conto de réis é mil vezes maior do que o mil-réis, e o mil-réis é mil vezes maior do que o real.

27. Além das tres unidades fundamentaes da nossa moeda, ha ainda quatro unidades inferiores denominadas **vintem, tostão, pataca** e **cruzado.** Estas unidades são ainda usadas no commercio miudo, e por isso devemos conhecer os seus valores.

Um vintem....................	20 réis	Dezeseis vintens (1 pataca)....	320 réis
Dois vintens..................	40 réis	Dezesete vintens..............	340 réis
Tres vintens..................	60 réis	Dezoito vintens...............	360 réis
Quatro vintens................	80 réis	Dezenove vintens..............	380 réis
Um tostão (cinco vintens)....	100 réis	**Quatro tostões** (1 cruzado)..	400 réis
Seis vintens..................	120 réis	Vinte e um vintens............	420 réis
Sete vintens..................	140 réis	Vinte e dois vintens..........	440 réis
Oito vintens (meia pataca).....	160 réis	Vinte e tres vintens..........	460 réis
Nove vintens..................	180 réis	Vinte e quatro vintens	480 réis
Dois tostões (10 vintens)....	200 réis	**Cinco tostões** (25 vintens)...	500 réis
Onze vintens..................	220 réis	Seis tostões..................	600 réis
Doze vintens..................	240 réis	Sete tostões..................	700 réis
Treze vintens.................	260 réis	Oito tostões (2 cruzados).......	800 réis
Quatorze vintens..............	280 réis	Nove tostões..................	900 réis
Tres tostões (15 vintens)....	300 réis	**Dez tostões** (50 vintens).....	1000 réis

Os tostões contam-se até dez, que formam um mil-réis; e dahi por diante, em logar de onze tostões, doze tostões, treze tostões, etc., diz-se geralmente 1100 réis, 1200 réis, 1300 réis, etc.

28. Nas quantias, além do cifrão, escrevem-se tambem dois pontos (:) entre a ordem dos contos e a das centenas de milhares.

Quando os tres ultimos algarismos das quantias são cifras, podem ser supprimidos por abreviatura, como: 33$ que se lê: 33 mil-réis; 850$ que se lê: 850 mil-réis.

Nas quantias as ordens denominadas milhão, dezenas de milhões, centenas de milhões, billiões, etc., teem os nomes respectivos de contos, dezenas de contos, centenas de contos, milhares de contos, etc. A quantia de 7.425:845$000 lê-se: 7425 contos e 845 mil réis.

Modo de escrever as quantias:

Um real....................	$001
Dez réis......................	$010
Cem réis......................	$100
Mil-réis....................	1$000
Dez mil réis	10$000
Cem mil réis..................	100$000
Um conto..................	1:000$000
Dez contos	10:000$000
Cem contos...................	100:000$000
Mil contos...................	1.000:000$000

Exercicio de applicação. O alumno lerá as seguintes quantias:

(1.)	(2.)	(3.)	(4.)	(5.)
$080	3$335	19$350	108$700	2:550$
$005	4$903	21$900	250$000	12:985$
$105	5$000	54$306	409$750	35:708$
$850	7$500	89$300	654$930	50:875$
1$000	10$650	99$990	998$500	89:207$
1$005	15$900	100$000	1:000$000	153:000$

OPERAÇÕES FUNDAMENTAES

29. As operações fundamentaes da Arithmetica são quatro, que se denominam **Sommar, Diminuir, Multiplicar** e **Dividir.** Chamam-se fundamentaes, porque servem de base para effectuar todas as outras operações dos calculos.

Estas quatro operações resolvem os seguintes casos:

1º Dados dois ou mais numeros, achar a sua somma;
2º Dados dois numeros desiguaes, achar a sua differença;
3º Dados dois factores, achar o seu producto;
4º Dados dois numeros desiguaes, achar quantas vezes o menor está contido no maior.

30. Os signaes arithmeticos que indicam as quatro operações fundamentaes e mostram a relação que ha entre certos numeros, são os seguintes:

O signal de sommar	é $+$	que se lê:	*mais.*
O signal de diminuir	é $-$	que se lê:	*menos.*
O signal de multiplicar	é $\times$	que se lê:	*multiplicado por.*
O signal de dividir	é $\div$	que se lê:	*dividido por.*
O signal de igualdade	é $=$	que se lê:	*igual a.*
O signal de interrogação	é $=?$	que se lê:	*igual a quanto?*
O signal de razão	é $:$	que se lê:	*está para.*
O signal de proporção	é $::$	que se lê:	*assim como.*
O signal de raiz	é $\sqrt{\ }$	que se lê:	*raiz de.*

Todos estes signaes serão devidamente explicados, quando forem empregados nas diversas operações do calculo.

31. Como vamos usar constantemente das palavras problema, solução, regra, demonstração e prova, precisamos saber o que significam estes termos em Arithmetica.

Problema é uma questão que requer uma ou mais quantidades desconhecidas, obtidas por meio de quantidades conhecidas.

Solução é um processo por meio do qual se acha a resposta de um problema.

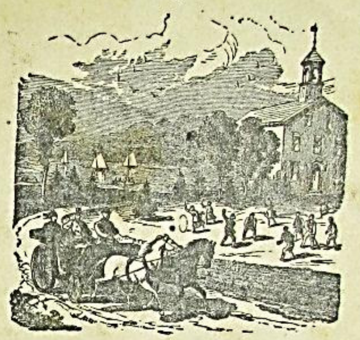
Regra é a direcção geral para resolver todos os problemas que pertencem a uma especie determinada.

Demonstração é um raciocinio desenvolvido para provar que uma regra ou outro qualquer enunciado da Arithmetica é verdadeiro.

Prova é uma segunda operação para se verificar a exactidão da primeira.

Os diversos numeros com que temos de calcular, são a somma ou o conjuncto de duas ou mais unidades simples que se agrupam em um só todo, como vemos nos exemplos seguintes:

								1
							1	1
						1	1	1
					1	1	1	1
				1	1	1	1	1
			1	1	1	1	1	1
		1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1	1
1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9



Taboada de sommar

2 + 1 = 3	3 + 1 = 4	4 + 1 = 5	5 + 1 = 6
2 + 2 = 4	3 + 2 = 5	4 + 2 = 6	5 + 2 = 7
2 + 3 = 5	3 + 3 = 6	4 + 3 = 7	5 + 3 = 8
2 + 4 = 6	3 + 4 = 7	4 + 4 = 8	5 + 4 = 9
2 + 5 = 7	3 + 5 = 8	4 + 5 = 9	5 + 5 = 10
2 + 6 = 8	3 + 6 = 9	4 + 6 = 10	5 + 6 = 11
2 + 7 = 9	3 + 7 = 10	4 + 7 = 11	5 + 7 = 12
2 + 8 = 10	3 + 8 = 11	4 + 8 = 12	5 + 8 = 13
2 + 9 = 11	3 + 9 = 12	4 + 9 = 13	5 + 9 = 14
2 + 10 = 12	3 + 10 = 13	4 + 10 = 14	5 + 10 = 15
6 + 1 = 7	7 + 1 = 8	8 + 1 = 9	9 + 1 = 10
6 + 2 = 8	7 + 2 = 9	8 + 2 = 10	9 + 2 = 11
6 + 3 = 9	7 + 3 = 10	8 + 3 = 11	9 + 3 = 12
6 + 4 = 10	7 + 4 = 11	8 + 4 = 12	9 + 4 = 13
6 + 5 = 11	7 + 5 = 12	8 + 5 = 13	9 + 5 = 14
6 + 6 = 12	7 + 6 = 13	8 + 6 = 14	9 + 6 = 15
6 + 7 = 13	7 + 7 = 14	8 + 7 = 15	9 + 7 = 16
6 + 8 = 14	7 + 8 = 15	8 + 8 = 16	9 + 8 = 17
6 + 9 = 15	7 + 9 = 16	8 + 9 = 17	9 + 9 = 18
6 + 10 = 16	7 + 10 = 17	8 + 10 = 18	9 + 10 = 19

SOMMAR

32. Sommar é reunir o valor de dois ou mais numeros em um numero só. Os numeros que se sommam, chamam-se **parcellas**, e o resultado da operação chama-se **somma.**

O signal $+$, escripto entre dois numeros, mostra que estes numeros se devem sommar; assim, $2+3=5$ lê-se: *2 mais 3 igual a 5.*

33. Na operação de sommar devemos conhecer os dois pontos seguintes:

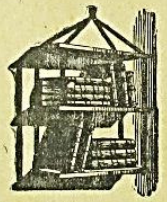
1° Todas as parcellas de uma somma devem ser quantidades homogeneas, isto é, da mesma especie de cousas.

2° Seja qual for a ordem em que escrevermos as diversas parcellas, a somma será sempre a mesma.

Illustração. Não podemos reunir em um só numero quantidades de especies differentes; assim 2 pennas e 3 lapis não são nem 5 pennas, nem 5 lapis; da mesma sorte, 2 unidades e 3 dezenas não são nem 5 unidades, nem 5 dezenas; por isso todas as parcellas de uma somma devem ser quantidades da mesma especie.

Estes dois pontos ficarão claramente illustrados no seguinte problema:

Problema. Uma estante tem duas prateleiras; na de cima, tem 4 livros deitados e 3 em pé; e na de baixo, tem 2 em pé e 3 deitados; quantos livros tem a estante?



Solução. Temos aqui quatro parcellas que sommam

$$4+3+2+3=12 \text{ livros.}$$

Todas estas parcellas são homogeneas, porque são da mesma especie. A ordem em que addicionarmos estas parcellas, não influirá no resultado da operação, pois se começarmos a addição por outro qualquer canto da prateleira, a somma será sempre a mesma.

Problema. Em um cesto estão 232 laranjas, em outro 343 e em outro 122; se reunirmos todas estas laranjas em um só monte, qual será o seu numero?

Solução. Escreveremos as tres parcellas umas debaixo das outras, de sorte que as unidades da mesma ordem fiquem em columna. Debaixo da ultima parcella faremos um traço, e passaremos a sommar a columna das unidades. Então diremos: 2 e 3 são 5, e 2 são 7, que escreveremos debaixo das unidades. Passando ás dezenas, diremos 3 e 4 são 7, e 2 são 9, que escreveremos debaixo das dezenas. Passando ás centenas, continuaremos 2 e 3 são 5, e 1 são 6, que escreveremos debaixo das centenas. O numero das laranjas reunidas será, pois, 697.

Operação
232 laranjas
343 laranjas
122 laranjas
697 laranjas

34. Quando a somma de uma columna excede a 9, formam-se unidades superiores para juntar á columna seguinte; assim, se uma columna somma, por exemplo, 18, escrevem-se 8 debaixo dessa columna, e como as 10 restantes formam 1 unidade immediatamente superior, leva-se essa unidade para a columna seguinte, e deste modo se opera em todas as columnas, só na ultima se escreve a sua somma completa.

Problema. Qual é a somma de 337, 440, 96 e 208?

Solução. A somma da columna das unidades é 21; ora 21 unidades conteem 2 dezenas e 1 unidade; escreveremos 1 debaixo das unidades e levaremos as 2 dezenas para a columna das dezenas que com ellas somma 18 dezenas que conteem 1 centena e 8 dezenas; escreveremos 8 debaixo das dezenas, e levaremos a centena para a columna das centenas que com ella somma 10; ora 10 centenas conteem 1 milhar exacto, e como não ha centena nenhuma, escreveremos uma cifra debaixo das centenas, e levaremos o milhar para a ordem seguinte. A somma das quatro parcellas é 1081.

Milhares	Centenas	Dezenas	Unidades
	3	3	7
	4	4	0
		9	6
	2	0	8
1	0	8	1

35. Prova. Ha varios modos de tirar a prova a uma operação de sommar ensinados nas escolas, mas alguns delles não teem importancia alguma, como a prova dos *noves-fóra* que dá muitas vezes a operação como certa, estando errada. A prova preferivel, pela sua exactidão e por ser ao mesmo tempo analytica, é a seguinte que tem o nome de prova real:

Passa-se um traço debaixo da somma, e repete-se a addição, escrevendo debaixo de cada columna a sua somma completa. A somma da primeira columna é 21 unidades; a somma da segunda é 16 dezenas ou 160 unidades e a somma da terceira é 9 centenas ou 900 unidades. Ora juntando os tres resultados, teremos um total igual á somma das mesmas parcellas.

	3	3	7
	4	4	0
		9	6
	2	0	8
1	0	8	1
		2	1
	1	6	.
	9	.	.
1	0	8	1

Para se effectuar uma addição, ha a seguinte

Regra: *Escrevem-se as diversas parcellas de sorte que as unidades da mesma ordem fiquem umas debaixo das outras em columna.*

Começa-se a addição pela columna das unidades, e, se a somma de uma columna não excede a 9, escreve-se a somma debaixo dessa columna, mas se excede a 9, escrevem-se debaixo dessa columna as unidades que não formam uma unidade immediatamente superior, e as unidades formadas vão para a columna seguinte, e na ultima escreve-se a somma completa dessa columna.

Prova. *Repete-se novamente a addição, pondo debaixo de cada columna a sua somma completa, addicionam-se depois as sommas obtidas, e, se o resultado for igual ao primeiro, a somma estará exacta.*

Exercicio de applicação. Os alumnos devem escrever e sommar os seguintes exercicios:

1. $3+2+1+3+4=13$	6. $8+6+5+7+3+2=?$
2. $5+3+2+4+2=\ ?$	7. $3+6+2+5+2+9=?$
3. $6+4+1+2+5=\ ?$	8. $9+3+7+5+1+5=?$
4. $8+3+5+6+3=\ ?$	9. $3+5+6+4+2+6=?$
5. $7+3+2+1+5=\ ?$	10. $1+2+3+4+5+6=?$

11. $2+3+6+5+3+6+3+5+3+4=?$
12. $3+2+5+6+6+3+5+3+4+3=?$
13. $9+4+5+2+1+6+0+5+3+8=?$
14. $4+9+2+5+6+1+5+0+8+3=?$
15. $8+7+6+3+2+9+3+5+0+9=?$

(16.)	(17.)	(18.)	(19.)	(20.)
19 dias	30 livros	250 folhas	356 telhas	654 nozes
15 dias	43 livros	135 folhas	489 telhas	309 nozes
7 dias	53 livros	205 folhas	595 telhas	720 nozes
9 dias	28 livros	110 folhas	665 telhas	821 nozes
20 dias	85 livros	296 folhas	709 telhas	992 nozes
70 dias	livros	folhas	telhas	nozes

(21.	(22.)	(23.)	(24.)	(25.)
4456	5834	45674	35	32541
3354	8305	56741	242	3265
5432	3056	67410	5427	638
8932	5962	74102	30546	49
5007	4831	41023	6328	220
3258	1750	10234	412	3758
3754	2735	32345	74	46043
34193				

(26.)	(27.)	(28.)	(29.)	(30.)
$560	7$500	15$000	80$900	1:250$
$980	7$950	16$820	95$890	800$
$750	8$100	17$360	99$100	654$
1$220	8$880	25$830	100$500	2:380$
2$340	9$500	29$700	118$000	4:800$
3$580	9$920	30$810	136$900	95$
4$660	10$500	40$500	159$700	158$
4$000	11$200	49$600	180$300	9:000$
5$500	12$040	50$120	225$400	286$
23$590				

Exercicio de applicação. Nestes problemas, os alumnos devem escrever devidamente umas parcellas debaixo das outras, e depois sommal-as.

31. Achar a somma de $15+26+18+91+17$. Resp. ?

32. Qual é a somma de $6798+5832+4761+8765$? Resp. ?

33. Qual é a somma de $135+1875+79+2005+253+7935+101+12350$? Resp. ?

34. Qual é a somma de $25+1594+459+3935+100+19510+1001+2532$? Resp. ?

35. Sommar as seguintes parcellas: 45693, 98732, 98732, 69007, 35987 e 79005. Resp. ?

36. Achar a somma dos seguintes numeros: $458+78952+12583+293+1056+9879$. Resp. ?

37. Sommar $895+75938+90075+79385+65+7525+3205+1059$. Resp. ?

38. Achar a somma das seguintes quantias: 25$960, 23$880, 38$000, 5$750, 25$210 e 12$700. Resp. ?

39. Sommar as seguintes parcellas: 9$750 + 3$210 + 8$900 + 10$520 + $820 + 25$900 + 120$000. Resp. ?

40. Achar a somma de 750$ + 1:250$ + 940$ + 1:720$ + 2:000$ + 3:935$ + 9:730$000. Resp. ?

41. Achar a somma de mil novecentos e vinte, mais trinta mil e seiscentos, mais cento e vinte e sete mil e duzentos, mais trinta e nove mil e duzentos e quarenta e quatro, mais mil e nove. Resp. ?

42. Sommar as seguintes parcellas: dois mil novecentos e trinta, cinco mil seiscentos e quarenta e cinco, vinte mil novecentos e trinta e seis, e nove mil setecentos e doze. Resp. ?

43. Qual é a somma de todos os numeros consecutivos desde 987 até 1001, incluindo estes dois numeros? Resp. 14910.

44. Achar a somma de todos os numeros consecutivos desde 3267 até 3281, incluindo estes dois numeros. Resp. 49110

Problemas para resolver

1. Comprei um canivete por 2$400; um chapéo por 6$000; um diccionario por 9$500 e um tinteiro por 3$600; em quanto importaram estes objectos?

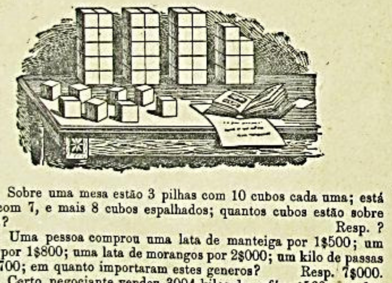
Solução. Sommando as quatro parcellas, acharemos que o importe dos quatro objectos é 21$500.

Canivete.........	2$400
Chapéo	6$000
Diccionario	9$500
Tinteiro	3$600
	21$500

2. Um homem tem mais 15 annos do que sua mulher; e esta tem mais 20 annos do que seu filho, que apenas conta 16 annos; qual é a idade do homem e a da mulher?

Solução. O filho tendo 16 annos, a mãe, tendo mais 20, deve ter 36 annos; e o pai, que tem mais 15 do que a mulher, deve ter 36+15=51 annos.

$16+20=36$, idade da mulher.
$36+15=51$, idade do homem.



3. Sobre uma mesa estão 3 pilhas com 10 cubos cada uma; está outra com 7, e mais 8 cubos espalhados; quantos cubos estão sobre a mesa? Resp. ?

4. Uma pessoa comprou uma lata de manteiga por 1$500; um queijo por 1$800; uma lata de morangos por 2$000; um kilo de passas por 1$700; em quanto importaram estes generos? Resp. 7$000.

5. Certo negociante vendeu 3004 kilos de café a $560; vendeu mais 625 Kg. a $540; vendeu mais 1926 Kg. a $520; quantos kilos vendeu elle? Resp. 5555.

6. Qual é a somma dos valores das sete lettras dos algarismos romanos, I, V, X, L, C, D e M? Resp. 1666.

7. Comprei um cavallo por 150$, por quanto o devo vender para ganhar 40$000? Resp. ?

8. Antonio tem 20 laranjas e João tem 13 mais do que Antonio; quantas laranjas tem João? Resp. ?

9. Um homem tinha 29 annos, quando nasceu seu primeiro filho; quando este chegou á idade de 25 annos, casou-se; qual era então a idade do pai? Resp. ?

10. Uma mulher tem 6 gallinhas pondo ovos, uma já tem 9 no ninho, outra 11, outra 16, outra 4, outra 7, e a ultima 10; quantos ovos póde juntar a mulher? Resp. ?

11. Dois irmãos teem 25 carneiros cada um, e seu pai tem 15 mais do que ambos; quantos carneiros tem o pai? Resp..?

12. Um homem, morrendo, deixou em testamento os seguintes legados: 3:800$ a seu irmão; 1:785$ a cada um de seus dois sobrinhos, e 4:130$ a suas sobrinhas; quanto deixou elle? Resp. 11:500$.

13. Comprei seis livros por 19$000; uma resma de papel por 4$800; cem enveloppes por 1$500 e uma caixa de pennas por 1$700; em quanto importaram estes objectos? Resp. ?

14. Um exercito no primeiro dia de marcha andou 18 kilometros, no segundo andou 30, no terceiro 25, no quarto andou a metade da distancia do primeiro dia, e no quinto andou 18 kilometros; que distancia percorreu elle nos 5 dias? Resp. ?

15. João comprou certo numero de peras, e deu 8 a sua mãe, 6 a sua irmã, 3 a um irmãozinho, e ficou com 7; quantas peras comprou? Resp. ?

16. Uma pessoa que nascera em 1843, em que anno fez as suas 25 primaveras? Resp. ?

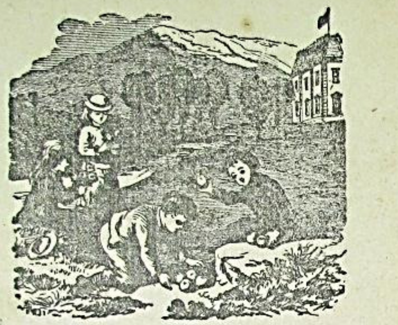
17. Comprei 15 kilos de assucar por 4$500; comprei mais 8 kilos por 2$560; comprei ainda 10 kilos por 3$400; em quanto importaram os 33 kilos de assucar? Resp. ?

18. Achar a somma das seis quantias seguintes: 13$820, 15$720, 8$920, 25$640, 30$200 e 5$700. Resp. ?

19. Tres homens formaram uma sociedade commercial, para a qual, o primeiro entrou com 4:500$; o segundo entrou com 7:500$, e o terceiro, com uma quantia igual á dos dois primeiros socios; qual era o capital da sociedade?. Resp. ?

20. Uma menina quiz saber a somma dos annos de seus irmãos. Nenê tinha 2 annos, Nhonhô tinha 4, Cazuza tinha 8, Sinhá tinha 10 e ella tinha 12; quantos annos sommavam estas idades? Resp. ?

21. Uma pipa tinha 120 litros de vinho, addicionaram-lhe mais 99 litros e depois 171 litros; quantos litros de vinho ficou contendo a pipa? Resp. ?



Taboada de diminuir

2 — 2 = 0	3 — 3 = 0	4 — 4 = 0	5 — 5 = 0
3 — 2 = 1	4 — 3 = 1	5 — 4 = 1	6 — 5 = 1
4 — 2 = 2	5 — 3 = 2	6 — 4 = 2	7 — 5 = 2
5 — 2 = 3	6 — 3 = 3	7 — 4 = 3	8 — 5 = 3
6 — 2 = 4	7 — 3 = 4	8 — 4 = 4	9 — 5 = 4
7 — 2 = 5	8 — 3 = 5	9 — 4 = 5	10 — 5 = 5
8 — 2 = 6	9 — 3 = 6	10 — 4 = 6	11 — 5 = 6
9 — 2 = 7	10 — 3 = 7	11 — 4 = 7	12 — 5 = 7
10 — 2 = 8	11 — 3 = 8	12 — 4 = 8	13 — 5 = 8
11 — 2 = 9	12 — 3 = 9	13 — 4 = 9	14 — 5 = 9
6 — 6 = 0	7 — 7 = 0	8 — 8 = 0	9 — 9 = 0
7 — 6 = 1	8 — 7 = 1	9 — 8 = 1	10 — 9 = 1
8 — 6 = 2	9 — 7 = 2	10 — 8 = 2	11 — 9 = 2
9 — 6 = 3	10 — 7 = 3	11 — 8 = 3	12 — 9 = 3
10 — 6 = 4	11 — 7 = 4	12 — 8 = 4	13 — 9 = 4
11 — 6 = 5	12 — 7 = 5	13 — 8 = 5	14 — 9 = 5
12 — 6 = 6	13 — 7 = 6	14 — 8 = 6	15 — 9 = 6
13 — 6 = 7	14 — 7 = 7	15 — 8 = 7	16 — 9 = 7
14 — 6 = 8	15 — 7 = 8	16 — 8 = 8	17 — 9 = 8
15 — 6 = 9	16 — 7 = 9	17 — 8 = 9	18 — 9 = 9

DIMINUIR

36. Diminuir ou subtrahir é tirar um numero menor de outro maior. O numero maior chama-se **minuendo;** o numero menor chama-se **subtrahendo,** e o resultado da diminuição chama-se **resto.**

O signal — escripto entre dois numeros mostra que o segundo numero se tem de subtrahir do primeiro; assim, 3 — 2 = 1 lê-se: *3 menos 2 igual a 1.*

Problema. Uma laranjeira tinha 15 laranjas, mas uma menina apanhando 6, quantas ficaram na arvore?

Solução. De 15 laranjas tirando 6 restam 9. Neste problema, 15 é o minuendo, 6 é o subtrahendo e 9 é o resto. Sommando o subtrahendo e o resto, obtemos novamente o minuendo.

15 — 6 = 9   6 + 9 = 15

37. A subtracção tem tambem por fim achar a differença entre dois numeros, e neste caso, o resultado da operação chama-se **differença.**

Problema. Arthur tem 28 annos, e sua irmã Laura tem 16; qual é a differença entre as suas idades?

Solução. Escreveremos o numero maior como minuendo, e o menor como subtrahendo; começaremos depois a subtracção pelas unidades, e diremos 8 menos 6 são 2, que escreveremos debaixo das unidades. Nas dezenas, diremos: 2 menos 1 é 1, que escreveremos debaixo das dezenas. A differença das duas idades é 12 annos.

Minuendo	28 annos
Subtrahendo	16 annos
Differença	12 annos

Exercicio de applicação. Nos seguintes exercicios, os algarismos do subtrahendo são menores que os respectivos do minuendo.

(1.)	(2.)	(3.)	(4.)	(5.)	(6.)	(7.)
32	36	548	234	7356	85617	95329
11	15	123	132	6240	72314	24218

38. Quando o minuendo tiver algum algarismo inferior ao correspondente do subtrahendo, opera-se do seguinte modo:

Problema. De 745 subtrahindo 285, quanto resta?

Solução. Nas unidades, subtrahindo 5 de 5, resta zero; escreveremos uma cifra debaixo das unidades. Nas dezenas, como não podemos tirar 8 de 4, tomaremos 1 centena das 7, e como 1 centena tem 10 dezenas, juntaremos as 10 com as 4, e então teremos 14. Agora, de 14 tirando 8, restam 6 que escreveremos debaixo das dezenas. Como já tiramos uma centena das 7, só restam 6; então 6 menos 2 são 4 que escreveremos debaixo das centenas. O resto da subtracção é 460.

Quando se opera, diz-se simplesmente: 5 menos 5 nada; 14 menos 8 seis; 6 menos 2 quatro; e, ao mesmo tempo que se enuncia cada differença, escreve-se debaixo da columna correspondente.

A somma do subtrahendo e do resto deve ser igual ao minuendo; sommando, pois, os dois termos, temos 745, numero igual ao minuendo. Este processo é a prova da subtracção.

(6)	(14)	
7	4	5
2	8	5
4	6	C
2	8	5
4	6	0
7	4	5

Para se effectuar uma subtracção, ha a seguinte

Regra: *Escreve-se o subtrahendo debaixo do minuendo, ficando as unidades da mesma ordem em columna.*

Começa-se a subtracção pela ordem das unidades, e escreve-se o resto em baixo; se alguma ordem do minuendo for inferior á ordem correspondente do subtrahendo, juntam-se 10 ao minuendo, e considera-se a ordem seguinte do minuendo com 1 de menos.

Prova: *Addicionam-se o subtrahendo e o resto, e, se a somma for igual ao minuendo, a subtracção estará exacta.*

Exercicio de applicação. O alumno fará as seguintes operações:

(1.) 8 — 5 + 7 — 6 + 3 — ? — 3 + 9 — 5 + 4 = 10.
(2.) 13 — 8 — 3 + 9 — 4 — 5 + 8 — 7 + 2 — 3 = ?
(3.) 12 — 8 + 5 + 6 — 8 — 4 + 8 + 3 — 7 — 1 = ?
(4.) 7 — 2 + 3 + 5 — 7 + 9 — 8 + 6 — 8 — 4 = ?
(5.) 16 — 9 + 8 — 6 + 8 — 9 — 5 + 4 — 3 + 1 = ?
(6.) 9 — 6 + 10 — 8 + 7 — 9 + 6 — 5 + 12 — 8 = ?
(7.) 8 + 5 + 9 — 15 — 6 — 1 + 3 — 9 + 10 + 3 = ?
(8.) 19 + 3 + 15 + 13 + 7 + 9 + 3 + 8 + 9 + 3 = ?
(9.) 30 + 15 + 17 + 15 + 21 + 16 + 5 + 9 + 5 + 9 = ?
(10.) 27 — 2 — 3 — 5 — 2 — 5 — 2 — 3 — 4 — 1 = 0.

(11.)	(12.)	(13.)	(14.)
496 nozes	1375 telhas	8759 saccas	965566 litros
105 nozes	942 telhas	1281 saccas	709382 litros

Exercicio de applicação. Os discipulos devem escrever devidamente o subtrahendo debaixo do minuendo, nas seguintes subtracções:

11. 279 — 165 = ?		**17.** 448326 — 75435 = ?
12. 9169 — 584 = ?		**18.** 735942 — 36754 = ?
13. 35253 — 795 = ?		**19.** 823542 — 654321 = ?
14. 89750 — 4594 = ?		**20.** 933004 — 823420 = ?
15. 78008 — 6835 = ?		**21.** 700000 — 99 = ?
16. 99875 — 7050 = ?		**22.** 90017 — 103 = ?

Problemas para resolver

1. Caminhavam 5 crianças para uma escola, mas duas adiantaram-se por andarem mais ligeiro; quantas ficaram atraz?

Solução. De 5 tirando 2, restam 3.

2. Um negociante tinha uma peça de seda com 45 metros; vendendo 19; quantos restaram? Resp. ?

3. Dois meninos tinham 29 pecegos, um delles tinha 15; quantos tinha o outro? Resp. ?

4. Um homem comprou um cavallo por 156$ e vendeu-o por 209$; quanto ganhou? Resp. ?

5. Uma senhora tem 36 annos, e sua filha tem 15; quantos annos é ella mais velha do que a filha? Resp. ?

6. Qual é a differença entre 5994 e 4765? Resp. ?

7. Que numero se deve juntar a 5893 para fazer 6000? Resp. ?

8. Um negociante devia 25:875$, e dando por conta 21:384$280, quanto ficou devendo? Resp. ?

9. A independencia do Brazil realizou-se em 1822, e a dos Estados Unidos em 1776; quantos annos decorrêram de uma á outra independencia? Resp. ?

10. O maior de dois numeros é 45, e a differença entre elles é 14; qual é o numero menor? Resp. ?

11. Comprei um par de botinas por 11$500, dei uma nota de 20$ para fazer o pagamento; quanto devo receber de troco? Resp. 8$500.

12. Comprei uma duzia de camisas por 65$000; uma duzia de pares de meias por 9$500, e uma duzia de lenços de linho por 7$500; dando uma nota de 100$000 para fazer o pagamento, quanto recebi de troco? Resp. ?

Formação da Taboa de Pythagoras

LINHA HORIZONTAL

LINHA VERTICAL

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6			:		:			
4	8			:		:			
5	10			:		:			
6	12	..	..	30		:			
7	14					:			
8	16	..	..	..	..	56			
9	18								
10	20								

Por meio da multiplicação podemos achar facilmente o numero de qualquer quadro de uma taboa de Pythagoras. Se tomarmos, por exemplo, na linha vertical o numero 6, e na linha horizontal o numero 5, e corrermos estas linhas até o quadro em que ellas se encontram, ahi escreveremos o producto desses dois numeros, que é $6 \times 5 = 30$. O mesmo se effectuará com outros dois numeros quaesquer.

Taboada de multiplicar

$1 \times 1 = 1$	$2 \times 1 = 2$	$3 \times 1 = 3$	$4 \times 1 = 4$
$1 \times 2 = 2$	$2 \times 2 = 4$	$3 \times 2 = 6$	$4 \times 2 = 8$
$1 \times 3 = 3$	$2 \times 3 = 6$	$3 \times 3 = 9$	$4 \times 3 = 12$
$1 \times 4 = 4$	$2 \times 4 = 8$	$3 \times 4 = 12$	$4 \times 4 = 16$
$1 \times 5 = 5$	$2 \times 5 = 10$	$3 \times 5 = 15$	$4 \times 5 = 20$
$1 \times 6 = 6$	$2 \times 6 = 12$	$3 \times 6 = 18$	$4 \times 6 = 24$
$1 \times 7 = 7$	$2 \times 7 = 14$	$3 \times 7 = 21$	$4 \times 7 = 28$
$1 \times 8 = 8$	$2 \times 8 = 16$	$3 \times 8 = 24$	$4 \times 8 = 32$
$1 \times 9 = 9$	$2 \times 9 = 18$	$3 \times 9 = 27$	$4 \times 9 = 36$
$1 \times 10 = 10$	$2 \times 10 = 20$	$3 \times 10 = 30$	$4 \times 10 = 40$
$5 \times 1 = 5$	$6 \times 1 = 6$	$7 \times 1 = 7$	$8 \times 1 = 8$
$5 \times 2 = 10$	$6 \times 2 = 12$	$7 \times 2 = 14$	$8 \times 2 = 16$
$5 \times 3 = 15$	$6 \times 3 = 18$	$7 \times 3 = 21$	$8 \times 3 = 24$
$5 \times 4 = 20$	$6 \times 4 = 24$	$7 \times 4 = 28$	$8 \times 4 = 32$
$5 \times 5 = 25$	$6 \times 5 = 30$	$7 \times 5 = 35$	$8 \times 5 = 40$
$5 \times 6 = 30$	$6 \times 6 = 36$	$7 \times 6 = 42$	$8 \times 6 = 48$
$5 \times 7 = 35$	$6 \times 7 = 42$	$7 \times 7 = 49$	$8 \times 7 = 56$
$5 \times 8 = 40$	$6 \times 8 = 48$	$7 \times 8 = 56$	$8 \times 8 = 64$
$5 \times 9 = 45$	$6 \times 9 = 54$	$7 \times 9 = 63$	$8 \times 9 = 72$
$5 \times 10 = 50$	$6 \times 10 = 60$	$7 \times 10 = 70$	$8 \times 10 = 80$

$9 \times 1 = 9$	$10 \times 1 = 10$	$11 \times 1 = 11$	$12 \times 1 = 12$
$9 \times 2 = 18$	$10 \times 2 = 20$	$11 \times 2 = 22$	$12 \times 2 = 24$
$9 \times 3 = 27$	$10 \times 3 = 30$	$11 \times 3 = 33$	$12 \times 3 = 36$
$9 \times 4 = 36$	$10 \times 4 = 40$	$11 \times 4 = 44$	$12 \times 4 = 48$
$9 \times 5 = 45$	$10 \times 5 = 50$	$11 \times 5 = 55$	$12 \times 5 = 60$
$9 \times 6 = 54$	$10 \times 6 = 60$	$11 \times 6 = 66$	$12 \times 6 = 72$
$9 \times 7 = 63$	$10 \times 7 = 70$	$11 \times 7 = 77$	$12 \times 7 = 84$
$9 \times 8 = 72$	$10 \times 8 = 80$	$11 \times 8 = 88$	$12 \times 8 = 96$
$9 \times 9 = 81$	$10 \times 9 = 90$	$11 \times 9 = 99$	$12 \times 9 = 108$
$9 \times 10 = 90$	$10 \times 10 = 100$	$11 \times 10 = 110$	$12 \times 10 = 120$

MULTIPLICAR

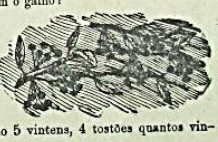
39. Multiplicar numeros inteiros é repetir um numero tantas vezes, quantas são as unidades de outro.

O numero que se multiplica, chama-se **multiplicando;** o numero pelo qual este se multiplica, chama-se **multiplicador;** e o resultado da multiplicação chama-se **producto.**

O multiplicando e o multiplicador chamam-se tambem **factores do producto.**

O signal $\times$ escripto entre dois numeros mostra que estes numeros devem ser multiplicados; assim, $3 \times 2 = 6$ lê-se: *3 multiplicado por 2 igual a 6.*

Problema. Um galho de cerejeira tem 7 cachos, e cada cacho tem 6 cerejas; quantas cerejas tem o galho?



Solução. 1 cacho tem 6 cerejas; 2 cachos teem 2 vezes 6; 3 cachos teem 3 vezes 6; emfim 7 cachos teem 7 vezes 6, que são 42 cerejas. O numero 6 repete-se 7 vezes, e por isso, 6 é o multiplicando, 7 é o multiplicador e 42 é o producto.

$$6 \times 7 = 42$$

Problema. Um tostão são 5 vintens, 4 tostões quantos vintens são?

Solução. Um tostão são 5 vintens, e 4 tostões são 4 vezes 5 vintens. Escreveremos 5 como multiplicando, e debaixo delle escreveremos 4 como multiplicador, e depois diremos: 4 vezes 5 são 20 que escreveremos como producto. Portanto 4 tostões são 20 vintens.

Multiplicando.	5
Multiplicador.	4
Producto.....	20

40. Multiplicar 5 por 4 é o mesmo que sommar o numero 5 quatro vezes, pois 4 vezes 5 é igual a $5+5+5+5=20$. Da mesma sorte, multiplicar 6 por 7 é sommar o numero 6 sete vezes, pois 7 vezes 6 é igual a $6+6+6+6+6+6+6=42$. A multiplicação é tambem um modo abreviado de sommar numeros iguaes.

Quando o multiplicando constar de mais de um algarismo, operaremos do seguinte modo:

Problema. Multiplicar 243 por 5.

Solução. Temos de multiplicar cada um dos algarismos do multiplicando por 5 que é o multiplicador. Começando pelas unidades, temos 5 vezes 3 são 15 unidades que formam 1 dezena e 5 unidades. Escreveremos as 5 unidades debaixo das unidades, e a dezena juntaremos com as dezenas que são 5 vezes 4 são 20 e 1, que vai das unidades, são 21. Ora, 21 dezenas são 2 centenas e 1 dezena, escreveremos 1 debaixo das dezenas e juntaremos as 2 centenas com as centenas, que são 5 vezes 2 são 10, e 2 são 12, que escreveremos debaixo das centenas. O producto é 1215.

	Centenas	Dezenas	Unidades
	2	4	3
			5
1	2	1	5

Exercicio de applicação. Operar as seguintes multiplicações:

	(1.)	(2.)	(3.)	(4.)	(5.)
Multiplicando.........	129	2591	3285	6987	78198
Multiplicador.........	2	2	3	3	4
Producto.........	258				

(6.)	(7.)	(8.)	(9.)	(10.)	(11.)	(12.)
5\$780	6\$380	7\$490	8\$020	9\$260	11\$250	12\$825
4	5	5	6	6	7	7

13. $1816 \times 7 = ?$	18. $87632 \times 7 = ?$	23. 6\$580 $\times 2 = ?$
14. $3061 \times 8 =$	19. $87652 \times 6 =$	24. 7\$750 $\times 3 =$
15. $2203 \times 8 =$	20. $20504 \times 5 =$	25. 8\$330 $\times 4 =$
16. $7213 \times 9 =$	21. $75319 \times 4 =$	26. 9\$180 $\times 5 =$
17. $3545 \times 9 =$	22. $89897 \times 3 =$	27. 9\$910 $\times 6 =$

41. Quando o multiplicador constar de mais de um algarismo, haverá **tantas** multiplicações quantos forem os algarismos do multiplicador; o resultado de cada multiplicação tem o nome de **producto parcial,** e a somma de todos os productos, o de **producto total.**

Problema. Multiplicar 458 por 234.

		(1º)	(2º)
		458	458
		234	234
Producto parcial das unidades	458×4......	1832	1832
Producto parcial das dezenas	458×30.....	13740	1374
Producto parcial das centenas	458×200....	91600	916
Producto total..........................		107172	107172

Solução. Multiplica-se o multiplicando, primeiro pelas unidades do multiplicador, depois pelas dezenas e finalmente pelas centenas, e sommados estes tres productos parciaes, temos 107172 que é o producto total.

Simplifica-se a operação, supprimindo-se as cifras das dezenas, centenas, etc., como se vê no 2º modelo.

Para não haver engano na multiplicação, é necessario ter-se o cuidado de escrever o primeiro algarismo de cada producto debaixo do algarismo com que se está operando. Assim, no exemplo resolvido, 2 que é o primeiro algarismo do producto das unidades, escreve-se debaixo do 4, que é o multiplicador; 4 escreve-se debaixo de 3; 6 debaixo de 2, supprimindo-se as cifras.

Para se effectuar uma multiplicação, ha a seguinte

Regra: *Escreve-se o multiplicador debaixo do multiplicando, de sorte que as unidades da mesma ordem fiquem em columna, e sublinha-se.*

Se o multiplicador constar de um só algarismo, multiplica-se por este termo o multiplicando, e o resultado será o producto. Se o multiplicador constar de mais de um algarismo, multiplica-se o multiplicando por cada um dos algarismos significativos do multiplicador, escrevendo o primeiro algarismo de cada producto parcial debaixo do algarismo multiplicador. A somma de todos os productos parciaes será o producto total ou a resposta.

42. Invertendo-se a ordem dos factores de uma multiplicação, e fazendo-se de novo a operação, o producto será o mesmo que o primeiro; pois multiplicar 10 por 8 é o mesmo que multiplicar 8 por 10, em ambos os casos, o producto é 80; para se verificar, pois, se uma multiplicação está exacta, póde-se usar da seguinte

Prova: *Inverte-se a ordem dos factores, pondo o multiplicando debaixo do multiplicador, e opera-se nova multiplicação, e, se o resultado for igual ao primeiro, o producto estará exacto.*

Exercicio de applicação. Operar as seguintes multiplicações:

	(1.)	(2.)	(3.)	(4.)	(5.)	(6.)	(7.)	(8.)
Multiplicando.......	23	32	45	54	67	76	89	98
Multiplicador.......	11	11	12	12	13	13	14	14
Producto.......								

Verificar a exactidão das seguintes multiplicações:

9. $126 \times 15 = 1890$	17. $123 \times 123 = 15129$
10. $208 \times 16 = 3328$	18. $342 \times 364 = 124488$
11. $235 \times 18 = 4230$	19. $376 \times 526 = 197776$
12. $346 \times 19 = 6574$	20. $476 \times 536 = 255136$
13. $425 \times 29 = 12325$	21. $2187 \times 215 = 470205$
14. $518 \times 34 = 17612$	22. $3489 \times 276 = 962964$
15. $279 \times 37 = 10323$	23. $1646 \times 365 = 600790$
16. $869 \times 49 = 42581$	24. $8432 \times 635 = 5354320$

Abreviações da multiplicação

43. Quando o multiplicador é 10, 100, 1000, etc., accrescentam-se ao multiplicando as cifras que contiver o multiplicador, e estará concluida a multiplicação, como $8\times10=80$; $8\times100=800$; $8\times1000=8000$, etc.

44. Quando um ou ambos os factores terminam em cifras, multiplicam-se só os algarismos significativos, e accrescentam-se ao producto total as cifras que contiverem os dois factores, como se vê no exemplo ao lado

$$\begin{array}{r} 4500 \\ 2500 \\ \hline 225 \\ 90 \\ \hline 11250000 \end{array}$$

Exercicio de applicação.

1. 254 × 10 = ?	6. 8300 × 450 = ?
2. 138 × 100 = ?	7. 1801 × 260 = ?
3. 428 × 1000 = ?	8. 3007 × 1100 = ?
4. 872 × 100 = ?	9. 5038 × 2150 = ?
5. 500 × 100 = ?	10. 8000 × 8000 = ?

45. Quando algum algarismo medial do multiplicador é uma cifra, despreza-se essa cifra, e passa-se a fazer a multiplicação com o algarismo seguinte, escrevendo-se o primeiro algarismo do producto, debaixo do algarismo multiplicador, como se vê no exemplo ao lado.

$$\begin{array}{r} 4562 \\ 3005 \\ \hline 22810 \\ 13686 \\ \hline 13708810 \end{array}$$

Exercicio de applicação.

1. Multiplicar 6538 por 207. Resp. ?
2. Multiplicar 9805 por 1075. » ?
3. Multiplicar 7614 por 6003. » ?
4. Multiplicar 96532 por 504. » ?
5. Multiplicar 86431 por 2030. » ?
6. Multiplicar 90055 por 109. » ?
7. Multiplicar 80570 por 208. » ?
8. Multiplicar 75530 por 2002. » ?
9. Multiplicar 70507 por 2300. » ?
10. Multiplicar 88855 por 9000. » ?

1. Sendo necessarios 8 cravos para pregar uma ferradura, quantos cravos serão necessarios para ferrar um cavallo nos quatro pés?

Solução. Uma ferradura leva 8 cravos; 2 ferraduras levam 2 vezes 8 que são 16 cravos; e 4 ferraduras levam 4 vezes 8 que são 32 cravos.

2. Custando 1 metro de chita 480 réis, quanto devem custar 15 metros? Resp. ?

3. Em quanto importam 12 frangos a 1$200 cada um? Resp. ?

4. Uma hora tem 60 minutos, e 11 horas quantos minutos teem?

5. Multiplicar 2029 por 1007. Resp. 2043203.

6. Um fazendeiro tinha 12 rebanhos, e em cada rebanho havia 97 carneiros; quantos carneiros possuia o fazendeiro? Resp. ?

7. Ganhando um homem 3$000 por dia, quanto ganhará em 49 dias? Resp. ?

8. Se uma familia gasta 125$000 por mez quanto gastará em um anno? Resp. ?

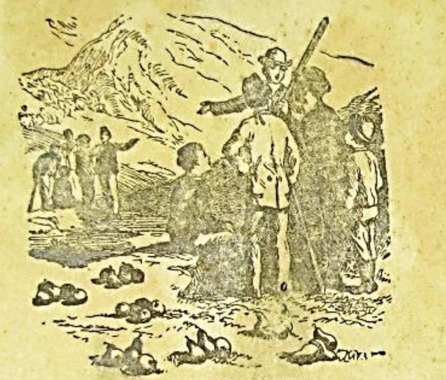
9. Comprei 25 peras a 160 réis cada uma; em quanto importaram? Resp. ?

10. Uma menina, sentada em uma redouça, dá 28 balanços por minuto; em um quarto de hora, quantos balanços dará? Resp. 420.

11. A velocidade do som é de 340 metros por segundo; em 19 segundos, que distancia percorrerá o som? Resp. 6460.

12. Achar os varios productos da nota abaixo e sommal-os:

2 Kilos de manteiga	*a*	*2$200*	*4$400*
8 Ditos de carne secca	*a*	*$640*	*$*
7 Queijos de Minas	*a*	*1$500*	*$*
10 Linguas do Rio Grande	*a*	*$600*	*$*
3 Kilos de chá da India	*a*	*4$000*	*$*
8 Ditos de café moido	*a*	*1$000*	*$*
15 Ditos de toucinho	*a*	*$500*	*$*
7 Ditos de macarrão	*a*	*1$000*	*$*
Somma			*60$520*



Taboada de dividir

2 ÷ 2 = 1	3 ÷ 3 = 1	4 ÷ 4 = 1	5 ÷ 5 = 1
4 ÷ 2 = 2	6 ÷ 3 = 2	8 ÷ 4 = 2	10 ÷ 5 = 2
6 ÷ 2 = 3	9 ÷ 3 = 3	12 ÷ 4 = 3	15 ÷ 5 = 3
8 ÷ 2 = 4	12 ÷ 3 = 4	16 ÷ 4 = 4	20 ÷ 5 = 4
10 ÷ 2 = 5	15 ÷ 3 = 5	20 ÷ 4 = 5	25 ÷ 5 = 5
12 ÷ 2 = 6	18 ÷ 3 = 6	24 ÷ 4 = 6	30 ÷ 5 = 6
14 ÷ 2 = 7	21 ÷ 3 = 7	28 ÷ 4 = 7	35 ÷ 5 = 7
16 ÷ 2 = 8	24 ÷ 3 = 8	32 ÷ 4 = 8	40 ÷ 5 = 8
18 ÷ 2 = 9	27 ÷ 3 = 9	36 ÷ 4 = 9	45 ÷ 5 = 9
20 ÷ 2 = 10	30 ÷ 3 = 10	40 ÷ 4 = 10	50 ÷ 5 = 10
6 ÷ 6 = 1	7 ÷ 7 = 1	8 ÷ 8 = 1	9 ÷ 9 = 1
12 ÷ 6 = 2	14 ÷ 7 = 2	16 ÷ 8 = 2	18 ÷ 9 = 2
18 ÷ 6 = 3	21 ÷ 7 = 3	24 ÷ 8 = 3	27 ÷ 9 = 3
24 ÷ 6 = 4	28 ÷ 7 = 4	32 ÷ 8 = 4	36 ÷ 9 = 4
30 ÷ 6 = 5	35 ÷ 7 = 5	40 ÷ 8 = 5	45 ÷ 9 = 5
36 ÷ 6 = 6	42 ÷ 7 = 6	48 ÷ 8 = 6	54 ÷ 9 = 6
42 ÷ 6 = 7	49 ÷ 7 = 7	56 ÷ 8 = 7	63 ÷ 9 = 7
48 ÷ 6 = 8	56 ÷ 7 = 8	64 ÷ 8 = 8	72 ÷ 9 = 8
54 ÷ 6 = 9	63 ÷ 7 = 9	72 ÷ 8 = 9	81 ÷ 9 = 9
60 ÷ 6 = 10	70 ÷ 7 = 10	80 ÷ 8 = 10	90 ÷ 9 = 10

DIVIDIR

46. Dividir é achar quantas vezes um numero contém outro. O numero que se divide, chama-se **dividendo**; o numero pelo qual este se divide, chama-se **divisor**; o resultado da operação chama-se **quociente**, e a quantidade que em algumas operações fica por dividir, chama-se **resto.**

47. De dois modos podemos indicar uma divisão, a saber:

1° Escrevendo o divisor á direita do dividendo, separado por duas linhas, como: $8 \underline{|\,2}$

2° Empregando o signal da divisão, como: $8\div2=4$, que se lê: *8 dividido por 2 igual a 4.*

Problema. Um grupo de 6 gatos dividido em 2 porções iguaes, quantos gatos terá cada porção?

Solução. Para dividirmos 6 em duas porções iguaes, temos de dividir 6 por 2. Então, 6 dividido por 2 dá 3. Cada porção terá 3 gatos. Nesta operação 6 é o dividendo, 2 o divisor, e 3 o quociente.

$$6\div2=3$$

48. A divisão tem duas applicações diversas que são:

1° Achar quantas vezes um numero contém outro;

2° Dividir um numero em partes iguaes.

49. Primeira applicação. Com 12$000 quantos livros podemos comprar do preço de 3$000 cada um?

Solução. Este problema tem por fim achar quantas vezes 3$000 estão contidos em 12$000. Ora, 2 vezes 3$000 são 6$000; 3 vezes 3$000 são 9$000, e 4 vezes 3 são 12$000; logo, 12$000 conteem 4 vezes 3$000, e por isso com 12$000 podemos comprar 4 livros de 3$000 cada um.

$$\begin{array}{l|l} 12\$ & 3\$ \\ \cline{2-2} 00 & 4 \end{array}$$

Nesta applicação, como o dividendo e o divisor são quantidades da mesma especie, podemos chegar ao mesmo resultado por meio da subtracção.

Illustração. Se escrevermos doze cifras em linha, e depois formos subtrahindo de tres a tres, no fim de quatro subtracções, não restará cifra alguma, porque 12 cifras conteem 4 vezes 3 cifras.

000,000,000,000.

50. Segunda applicação. Dividindo-se 12$000 por 4 pessoas, que quantia receberá cada uma?

Solução. Este problema tem por fim dividir 12$000 em 4 partes iguaes. Ora, dividindo-se um numero por 2, divide-se em duas partes iguaes; dividindo-se por 3, divide-se em 3 partes iguaes; dividindo-se por 4, divide-se em 4 partes iguaes, etc. Logo, dividindo-se 12$000 por 4, teremos uma das 4 partes, que é 3$000.

```
12$ | 4
00    3$
```

Nesta applicação, como o dividendo e o divisor são quantidades heterogeneas, isto é, o dividendo é dinheiro, e o divisor é um numero abstracto, o processo é effectuado sómente por meio da divisão.

Problema. Dividir 8924 por 4.

Solução. Nesta divisão, temos 8 milhares, 9 centenas, 2 dezenas e 4 unidades para dividir por 4. Começaremos a divisão pela primeira ordem da esquerda; então 8 dividido por 4 dá 2, que escreveremos no quociente, e então diremos 2 vezes 4 são 8, para 8 resta nada; escreveremos uma cifra debaixo do 8. Depois, 9 dividido por 4 dá 2, que escreveremos no quociente, e diremos 2 vezes 4 são 8, para 9 resta 1, que escreveremos debaixo do 9. Ora, esta centena de resto são 10 dezenas, juntando mais duas do dividendo fazem 12; então 12 dividido por 4 dá 3; e 4 dividido por 4 dá 1. O quociente é 2231.

Alguns professores preferem ir descendo os algarismos do dividendo, como se vê no 2° modelo ao lado.

```
(1)
Milhares Centenas Dezenas Unidades
8 9 2 4 | 4
0 1 0 0   2 2 3 1

(2)
8 9 2 4 | 4
0 9       2 2 3 1
  1 2
    0 4
      0
```

51. Para sabermos quantas vezes um numero menor está contido em outro maior, buscaremos mentalmente o numero, que, multiplicado pelo menor, produza o maior, e será esse o numero de vezes.

Problema. Em 36 quantas vezes ha 4?

Solução. Ha 9 vezes, porque 9 vezes 4 são 36.

Exercicio oral:

Em 16 quantas vezes ha 4?	Em 50 quantas vezes ha 5?
Em 18 quantas vezes ha 6?	Em 54 quantas vezes ha 6?
Em 20 quantas vezes ha 5?	Em 56 quantas vezes ha 8?
Em 24 quantas vezes ha 6?	Em 60 quantas vezes ha 6?
Em 35 quantas vezes ha 7?	Em 72 quantas vezes ha 8?
Em 40 quantas vezes ha 8?	Em 81 quantas vezes ha 9?
Em 42 quantas vezes ha 7?	Em 90 quantas vezes ha 9?
Em 48 quantas vezes ha 8?	Em 100 quantas vezes ha 10?

Exercicio de applicação. Operar as seguintes divisões:

1.	$124 \div 2 = 62$	9.	$226 \div 2 = ?$	17.	$254328 \div 2 = ?$
2.	$237 \div 3 = 79$	10.	$354 \div 3 =$	18.	$753579 \div 3 =$
3.	$348 \div 4 = 87$	11.	$284 \div 4 =$	19.	$237484 \div 4 =$
4.	$435 \div 5 = 87$	12.	$980 \div 5 =$	20.	$653285 \div 5 =$
5.	$534 \div 6 = 89$	13.	$996 \div 6 =$	21.	$783264 \div 6 =$
6.	$1554 \div 7 = 222$	14.	$1498 \div 7 =$	22.	$863814 \div 7 =$
7.	$2136 \div 8 = 267$	15.	$2560 \div 8 =$	23.	$1536888 \div 8 =$
8.	$3618 \div 9 = 402$	16.	$5526 \div 9 =$	24.	$2532132 \div 9 =$

Divisão com resto

52. Quando o divisor dividir exactamente o dividendo, a divisão ficará completa, mas, quando não o dividir exactamente, ficará sempre um resto na divisão.

Até aqui temos só praticado a divisão exacta, agora passaremos á divisão com resto.

Problema. Dividindo-se 7 maçãs por 2 meninos, quantas maçãs receberá cada um?

Solução. 7 dividido por 2 dá 3, e fica 1 de resto; logo cada menino receberá 3 maçãs, e ficará 1 maçã por dividir.

```
7 | 2
1   3
```

Nada mais podemos adiantar agora sobre o resto sem entrarmos na theoria das fracções, materia que ainda desconhecemos; quando, porém, chegarmos a esse ponto, alli aprenderemos tambem a dividir o resto para completar o quociente.

53. O resto de uma divisão deve ser sempre menor do que o divisor; se for igual ou maior, a operação estará errada.

Exercicio de applicação. Divisões com resto:

(1.)	(2.)	(3.)	(4)
$9 \div 2 = ?$	$51 \div 7 = ?$	$101 \div 4 = ?$	$925 \div 9 = ?$
$14 \div 3 =$	$67 \div 8 =$	$126 \div 5 =$	$1253 \div 2 =$
$22 \div 4 =$	$78 \div 9 =$	$185 \div 6 =$	$4382 \div 3 =$
$37 \div 5 =$	$81 \div 2 =$	$200 \div 7 =$	$5325 \div 4 =$
$40 \div 6 =$	$98 \div 3 =$	$724 \div 8 =$	$6258 \div 5 =$
$41 \div 7 =$	$99 \div 4 =$	$725 \div 4 =$	$6259 \div 4 =$
$44 \div 8 =$	$100 \div 3 =$	$730 \div 7 =$	$6333 \div 5 =$

Divisor com mais de um algarismo

54. Quando o divisor constar de mais de um algarismo, separam-se no dividendo tantos algarismos quantos tiver o divisor, e ainda mais um, se o numero separado no dividendo for inferior ao divisor.

```
(1°)            (2°)                (3°)
4 3 3 | 1 8     1 2 3 4 1 | 2 5     3 6 4 5 6 | 2 5 6 4
```

Illustração. No primeiro exemplo, separam-se dois algarismos, porque são dois os algarismos do divisor; no segundo exemplo, separam-se tres algarismos, porque 12 é menor do que 25; e no terceiro exemplo, separam-se quatro algarismos, porque são quatro os algarismos do divisor.

55. Antes de operarmos uma divisão, já podemos saber quantos algarismos terá o quociente. Para isto, bastará só contar os algarismos do dividendo a partir do ultimo algarismo marcado para a direita, e o numero de algarismos que alli houver, será o numero de algarismos do quociente. Assim, o quociente do primeiro exemplo terá só dois algarismos; o do segundo terá tres, e do terceiro terá dois.

Problema. Dividir 5398 por 13.

Solução. Temos de dividir 5 milhares, 3 centenas, 9 dezenas e 8 unidades por 13, e como não podemos dividir 5 milhares por 13, temos de tomar mais outra ordem, e então temos 53 centenas que já podemos dividir por 13. Em 53 quantas vezes ha 13? Ha 4, escreveremos 4 no quociente, e multiplicando este algarismo pelo divisor, temos $4 \times 13 = 52$ que subtrahido do dividendo, deixa 1 de resto.

Descendo agora o algarismo seguinte, temos 19 para novo dividendo, e procedendo-se como acima, depois de tres divisões continuadas, achamos que o quociente da divisão é 415, e que ficam 3 de resto.

Prova. Multiplicando agora o quociente pelo divisor, e ao producto juntando o resto da divisão, obtemos exactamente o dividendo, pois $(415 \times 13) + 3 = 5398$.

Operação

```
5 3 9 8 | 1 3
5 2       4 1 5
  1 9
  1 3
    6 8
    6 5
      3
```

Para se effectuar uma divisão, ha a seguinte

Regra: *Escreve-se o divisor á direita do dividendo, separado por um risco, sublinha-se o divisor, e sob o risco escreve-se o quociente.*

Separam-se no dividendo tantos algarismos, quantos contém o divisor, e mais um ainda, se o numero formado pelos algarismos separados for menor que o divisor.

Acham-se quantas vezes o divisor está contido nos algarismos separados no dividendo, e o resultado escreve-se no quociente.

Multiplica-se o divisor pelo numero achado, o producto subtrahe-se do dividendo, e o resto junto com o algarismo seguinte do dividendo forma um novo dividendo parcial. Assim se continúa até se dividirem todas as ordens do dividendo total.

Prova. *Multiplica-se o divisor pelo quociente; junta-se ao producto o resto, se o houver, e, se o resultado for igual ao dividendo, a divisão estará exacta.*

Nota. Sendo algum dividendo parcial menor que o divisor, escreve-se uma cifra no quociente e desce-se mais um algarismo do dividendo total para o dividendo parcial.

Exercicio de applicação. Operar as seguintes divisões:

1. Dividir 48692 por 14........................ Resp. 3478
2. Dividir 48690 por 15........................ Resp. 3246
3. Dividir 33840 por 16........................ Resp. 2115
4. Dividir 42143 por 17........................ Resp. 2479
5. Dividir 81342 por 18........................ Resp. 4519
6. Dividir 76323 por 19........................ Resp. 4017

7.	$85323 \div 21 = ?$	13.	$236412 \div 132 = ?$
8.	$62582 \div 43 = ?$	14.	$126072 \div 206 = ?$
9.	$23576 \div 56 = ?$	15.	$131976 \div 312 = ?$
10.	$31672 \div 74 = ?$	16.	$7654325 \div 96 = ?$
11.	$10206 \div 81 = ?$	17.	$3755123 \div 234 = ?$
12.	$14630 \div 95 = ?$	18.	$5555696 \div 974 = ?$

56. Para se dividir um numero por 10, 100, 1000, etc., bastará cortar á direita do dividendo tantos algarismos quantas forem as cifras do divisor, e a parte que ficar á esquerda, será o quociente, e a que ficar á direita, será o resto da divisão.

Problema. Dividir 745 por 100.

Solução. Como o divisor tem duas cifras, temos de cortar dois algarismos no dividendo, e então o quociente é 7, e o resto é 45.

$745 \div 100 = 7{,}45$

1. Dividir 4585 por 10................. Resp. 458,5
2. Dividir 5800 por 100................. Resp. 58
3. Dividir 9560 por 10................. Resp. ?
4. Dividir 98000 por 1000................. Resp. ?

57. Quando o dividendo e o divisor terminam em cifras, abrevia-se a operação cancellando igual numero de cifras em ambos os termos.

Problema. Dividir 14400 por 800.

Solução. Cancellando duas cifras no dividendo e duas no divisor, temos de dividir 144 por 8, que dá o quociente 18

```
14400 | 800
60      18
```

Demonstração. Se cancellarmos duas cifras no dividendo, é o mesmo que o dividirmos por 100; se cancellarmos duas cifras no divisor, é o mesmo que o dividirmos por 100. Ora, dividindo-se o dividendo e o divisor por um mesmo numero, estes dois termos conservam entre si a mesma relação, e por isso não se altera o valor do quociente.

Operar as seguintes divisões:

1. 5500 ÷ 500 = Resp. 11
2. 7200 ÷ 480 = Resp. ?
3. 7500 ÷ 150 = Resp. ?
4. 8000 ÷ 20 = Resp. ?
5. 9480 ÷ 120 = Resp. ?
6. 14700 ÷ 700 = Resp. ?
7. 48600 ÷ 500 = Resp. ?
8. 87000 ÷ 150 = Resp. ?

Problemas para resolver

1. Um menino achou 4 ninhos de rolinha, tendo cada um igual numero de ovos; elle contou os ovos dos 4 ninhos, e achou que eram 28; quantos ovos tinha cada ninho?

Solução. Os ovos eram 28, e os ninhos eram 4; então, cada ninho tinha 28 ÷ 4 = 7 ovos.

2. Ha 36 laranjas para dividir por 12 meninas; quantas deve receber cada uma? Resp. ?

3. Comprei 25 metros de fazenda por 100$000, quanto me custou cada metro? Resp. ?

4. Comprei 12 peras por 1$680, quanto me custou cada pera? Resp. ?

5. Uma caixa de agua leva 1240 litros, e um regador leva apenas 20 litros; ora, estando a caixa cheia de agua, quantos regadores poderá encher? Resp. 62.

6. Se um kilo de uvas custa 800 réis, com 12$000 quantos kilos podemos comprar? Resp. 15.

7. Uma senhora dividiu 20$000 por 8 pobres, dando a todos uma esmola igual; quanto recebeu cada pobre? Resp. ?

8. Se um homem sega um campo em 42 dias, 7 homens em quantos dias o segarão? Resp. 6 dias.

9. O dividendo é 4049160, o divisor é 12345; qual o quociente? Resp. 328.

10. Comprei uma peça de renda por 15$000; ora, tendo ella sómente 12 metros, quanto me custou cada metro? Resp. ?

11. Uma serpente de 29 palmos de comprimento, enroscando-se em um tronco, deu 3 voltas completas, e ficaram ainda 2 palmos de cauda por enroscar; qual era a circumferencia ou grossura do tronco?

Solução. Desde que ficaram 2 palmos de cauda por enrolar, as 3 voltas deviam ter só 27 palmos, e uma só volta devia ter 27 ÷ 3, isto é, 9 palmos; o tronco tinha, pois, 9 palmos de grossura.

12. Se uma familia gasta 4$500 por dia, quanto gastará em 30 dias? Resp. 135$000.

13. A somma das idades de dois irmãos é 30 annos, tendo o mais velho 16, qual é a idade do mais moço? Resp. ?

14. O producto de uma multiplicação é 3250, o multiplicando é 50 qual é o multiplicador? Resp. ?

15. Multiplicando-se a somma de 148 e 56 pela differença que ha entre estes dois numeros, e dividindo-se o producto por 23, qual é o quociente? Resp. 816.

16. Dois viajantes partiram do mesmo logar, caminhando em direcções oppostas; um andava 2 kilometros por hora, e o outro andava 3; a que distancia estava um do outro, no fim de 5 horas? Resp. 25 kilometros.

17. Se 6 homens ganham juntos 84$000 em 7 dias, quanto ganha cada um por dia? Resp. ?

Achar uma ou mais partes de uma quantidade

58. Se dividirmos um numero por 2, o quociente será um meio ou metade desse numero; se o dividirmos por 3, o quociente será um terço ou a terça parte desse numero; se o dividirmos por 4, o quociente será um quarto, ou a quarte parte, e assim por diante. De sorte que, para acharmos qualquer parte de uma quantidade, bastará dividil-a pelo numero que dá a parte que queremos obter.

Problema. Quanto é dois terços de 24?

Solução. Dividindo 24 por 3, temos a sua terça parte ou um terço, que é 8; dois terços são, portanto, 8 × 2 = 16.

```
24 | 3
00   8 × 2 = 16
```

Regra. *Divide-se a quantidade pelo divisor que dá a parte, e o quociente multiplica-se pelo numero de partes.*

Exercicio de applicação. Quanto é

1. a metade de 3728?
2. um terço de 147?
3. dois terços de 444?
4. tres quartos de 500?
5. a quinta parte de 505?
6. dois quintos de 100?
7. a sexta parte de 4476?
8. quatro setimos de 2513?
9. dois oitavos de 5992?
10. a nona parte de 8793?

Nota. Os discipulos devem ser perfeitamente exercitados nesta especie de calculos, não só por serem muito necessarios para os negocios triviaes da vida, mas tambem porque os habilitarão a comprehender melhor a theoria das fracções.

Problema. Quanto custam 5 kilos e meio de carne a 440 réis cada kilo?

Solução. Se um kilo custa 440, 5 kilos devem custar 5 vezes 440, que são 2200. Meio kilo deve custar a metade de 440, que é 220; então os 5 kilos e meio devem custar 2$420.

```
              440
                5
Cinco kilos = 2200
Meio  kilo  =  220
              2420
```

1. Em quanto importam 6 kilos e meio de assucar a 420 cada kilo? Resp. ?

2. Ganhando um homem 2$400 por dia, quanto deve receber, trabalhando 18 dias e meio? Resp. ?

3. Quanto é tres quartos de uma duzia? Resp. ?

4. Quanto é dois quintos de um cento? Resp. ?

5. Quanto é a oitava parte de um milheiro? Resp. ?

6. Em quanto importam 5 duzias e 8 ovos a 900 réis cada duzia?

Solução. 5 duzias custam 900 × 5 = 4500. Dividindo 900 por 12, temos o preço de 1 ovo, que é 75 réis, e o preço de 8 ovos é 75 × 8 = 600 réis. As 5 duzias e 8 ovos importam em 5$100.

```
             900
               5
5 duzias = 4500
8 ovos   =  600
            5100
```

7. Ganhando um operario 3$600 por dia, quanto se lhe tem de pagar, trabalhando 12 dias e tres quartos? Resp. ?

8. Dividir o numero 168 em 8 partes iguaes e achar a somma de 7 dessas partes. Resp. 147.

9. Cinco duzias e meia de ovos, quantos ovos são? Resp. ?

10. Tres cestos tinham as seguintes quantidades de laranjas; o primeiro tinha um cento e a quarta parte de um cento; o segundo tinha um cento e quatro quintos de um cento, e o terceiro tinha nove decimos de um cento; quantas laranjas tinham os tres cestos? Resp. 395.

11. Se uma pipa de vinho custa 280$000, quanto devem custar dois quintos da pipa? Resp. ?

João Chantard

IGUALDADE

59. Dá-se o nome de **igualdade** a duas quantidades do mesmo valor separadas pelo signal =, como 4 + 3 = 7, que se lê: *4 mais 3 igual a 7.*

A quantidade que fica á esquerda do signal de igualdade, chama-se **primeiro membro**, e a que fica á direita, chama-se **segundo membro.** Exemplo:

$$\underbrace{7-2+6}_{\text{(1° membro)}} = \underbrace{8+4+6-7}_{\text{(2° membro)}}$$

60. Cada parte de um membro que leva o signal + ou —, chama-se **termo.** O primeiro membro da igualdade acima tem tres termos, e o segundo tem quatro. O primeiro numero de um membro, quando não leva signal, considera-se com o signal +.

Os numeros que levam os signaes × ou ÷ não são termos, mas sim factores ou divisores dos termos.

Problema. Achar o resultado de $4 \times 3 + 7 \times 5 - 9 \times 3 + 18 \div 2 - 3 \times 5 = ?$

Solução. O problema é... $4 \times 3 + 7 \times 5 - 9 \times 3 + 18 \div 2 - 3 \times 5 = ?$
Operando as multiplicações e divisões, temos................ $12 + 35 - 27 + 9 - 15 = ?$
Ordenando os signaes...... $12 + 35 + 9 - 27 - 15 = ?$
Resultado das addições e subtracções.. $56 - 42 = 14.$

Regra. *Para se achar o resultado de uma igualdade, effectuam-se primeiramente as multiplicações e divisões indicadas, e da somma dos numeros que teem o signal +, subtrahe-se a somma dos que teem o signal —.*

1. Operar $2 \times 8 + 8 \times 5 - 9 \times 3 + 16 \div 4 = ?$

Solução.
$2 \times 8 + 8 \times 5 - 9 \times 3 + 16 \div 4 = ?$
$16 + 40 - 27 + 4 = ?$
$60 - 27 = 33.$

2. Operar $5 + 12 \times 3 - 5 \times 4 - 25 \div 5 = ?$ Resp. 16.
3. Operar $68 + 35 - 27 + 56 - 39 + 2 = ?$ Resp. ?
4. Operar $26 \div 2 + 17 - 14 + 8 \times 3 = ?$ Resp. ?
5. Operar $18 \times 21 + 45 \div 9 - 11 \times 15 = ?$ Resp. ?

PROPRIEDADES DOS NUMEROS

61. Os numeros, quanto á sua composição, dividem-se em primos e multiplos.

Numeros primos são os que não podem ser divididos exactamente senão por si ou por 1, como 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, etc.; assim 19, por exemplo, só é divisivel por 19 ou por 1.

Numeros multiplos são os productos de dois ou mais numeros, e por isso podem ser divididos exactamente por esses numeros. Assim, 6 é o producto de 2 vezes 3 ou de 3 vezes 2, e por isso, além de ser divisivel por si e por 1, como os numeros primos, é tambem divisivel por 2 e por 3. O numero 10 é o producto de 2 vezes 5 ou de 5 vezes 2, e por isso é divisivel por 2 e por 5.

62. Dois ou mais numeros são primos entre si, quando não ha nenhum numero que os divida exactamente; assim, 8 e 9 são numeros primos entre si, porque não ha divisor que divida exactamente estes dois numeros. Mas, nem 8, nem 9, separadamente, são primos, porque 8 é divisivel por 2 e por 4; e 9 é divisivel por 3.

Achar os numeros primos

63. Póde-se achar facilmente todos os numeros primos até o numero que se quizer, pelo methodo de crivo, inventado por Eratósthenes, sabio da Alexandria.

Este methodo consiste em escrever uma série de numeros impares e depois cancellar ou riscar estes numeros em uma certa ordem para achar os numeros primos.

Problema. Achar todos os numeros primos até 53.

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53.

Solução. Como todos os numeros pares são multiplos, exceptuando o numero 2, devemos procurar os numeros primos só entre os numeros impares. Para isso escreveremos todos os numeros impares até o numero requerido no problema, que é 53; em seguida cancellaremos todos os numeros de tres em tres, começando depois do numero 3. Ora, depois de 3, o terceiro numero é 9, que se cancella. Depois de 9, o terceiro numero é 15, que se cancella. Depois de 15, o terceiro numero é 21, que se cancella, e assim por diante, até o ultimo numero.

Depois de cancellarmos de tres em tres, passaremos a cancellar de cinco em cinco, começando a contar depois do numero cinco; e depois cancellaremos de sete em sete, começando depois do numero 7

Os numeros cancellados são numeros multiplos de 3, 5, ou 7; e os numeros não cancellados são numeros primos. A este juntaremos mais o numero 2, que, por ser par, não foi escripto acima.

Portanto todos os numeros primos até 53, são 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53.

Para se operar conforme o crivo de Eratósthenes, ha a seguinte

Regra: *Escreve-se em linha a serie de numeros impares até o numero requerido, e depois cancella-se em toda a serie cada terceiro numero depois de 3; cada quinto numero depois de 5; cada setimo numero depois de 7; cada undecimo numero depois de 11, e fazendo o mesmo com os outros numeros primos.*

Os numeros cancellados serão numeros multiplos, e os não cancellados serão numeros primos.

64. Podemos tambem saber se um numero é ou não primo, dividindo-o successivamente pelos numeros primos 2, 3, 5, 7, etc., até que o quociente seja menor do que o divisor; e, se em todas as divisões houver resto, o numero será primo.

Problema. O numero 127 é primo ou multiplo?

Solução. Pelos caractéres da divisibilidade **(66)**, já sabemos de antemão que este numero não é divisivel por nenhum dos numeros primos 2, 3, 5, 7 e 11. Dividindo-o agora por 13, o quociente 9 é menor do que o divisor 13, e ha resto; então o numero 127 é primo, porque não tem nenhum divisor exacto.

$$\begin{array}{r|l} 127 & 13 \\ \cline{2-2} 117 & 9 \\ \cline{1-1} 10 & \end{array}$$

Nota. O professor escolherá na tabella seguinte alguns numeros para os discipulos demonstrarem que são primos.

NUMEROS PRIMOS ATÉ 191

1	7	19	37	53	71	89	107	131	151	173
2	11	23	41	59	73	97	109	137	157	179
3	13	29	43	61	79	101	113	139	163	181
5	17	31	47	67	83	103	127	149	167	191

Divisibilidade dos numeros

65. Quando um numero divide outro exactamente, isto é, sem deixar resto, chama-se **divisor** desse numero. Assim 4 é divisor de 12, porque o divide exactamente.

O divisor de um numero chama-se tambem **factor, submultiplo** e **parte aliquota** desse numero; de sorte que 2, 3, 4 e 6 são divisores, factores, submultiplos e partes aliquotas de 12, porque cada um destes numeros divide exactamente o numero 12.

Os numeros que se prestam a uma divisão exacta, são só os numeros multiplos; os primos, a não ser por si e por 1, são indivisiveis por qualquer outro numero.

66. Para sabermos se um numero é ou não divisivel por 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10 ou 11, não é necessario effectuar a divisão, bastará sómente conhecermos os seguintes caractéres da divisibilidade dos numeros.

Numeros divisiveis por 2.

1° Todo o numero par é divisivel por 2.

Illustração. Os numeros pares terminam em 2, 4, 6, 8 ou 0. Ora, todos os numeros terminados nestes algarismos são ou 2 ou multiplos de 2, e por isso são diviseis por 2. Os numeros impares, divididos por 2, deixam sempre resto.

Por 3.

2° Todo o numero cuja somma dos seus algarismos for divisivel por 3, será tambem divisivel por 3.

Illustração. A somma dos algarismos do numero 147 é $1+4+7=12$. Ora, como 12 é divisivel por 3, o numero 147 tambem o será.

Por 4.

3° Todo o numero cujos dois ultimos algarismos da direita forem divisiveis por 4, será tambem divisivel por 4.

Illustração. O numero 328 compõe-se de $300+28$. Ora, 4 divide 100 sem deixar resto, e se divide 100, divide tambem 200, 300, etc., que são multiplos de 100. Portanto 4, dividindo os dois ultimos algarismos, que são 28, divide o numero inteiro.

Por 5.

4° Todo o numero que terminar em 5 ou 0, será divisivel por 5.

Illustração. Os numeros que terminam em 5 ou 0 são todos multiplos de 5, como 10, 15, 20, 25 e 30, que são divisiveis por 5.

Por 6.

5° Todo o numero que for divisivel por 2 e por 3, será tambem divisivel por 6.

Illustração. Como os numeros 2 e 3 são primos entre si (n. **62**), se um numero for divisivel por 2 e por 3, tambem será pelo producto destes numeros, que é $2 \times 3 = 6$, como se póde verificar em 12, 18, 24, etc.

Nota. Por serem de mais complicada applicação os caractéres da divisibilidade por 7 e por 8, são aqui omittidos e vão só na **Arithmetica Progressiva.**

Por 9.

6° Todo o numero, cuja somma dos seus algarismos for divisivel por 9, será tambem divisivel por 9.

Illustração. A somma dos algarismos do numero 4356 é $4+3+5+6=18$; ora, como 18 é divisivel por 9, o numero 4356 tambem o será.

Por 10.

7° Todo o numero terminado em cifra é divisivel por 10.

Illustração. Os numeros terminados em cifra são 10 e os multiplos de 10; assim, 30, 90, 180 são divisiveis por 10.

Por 11.

8° Um numero será divisivel por 11, quando a somma dos algarismos da ordem par for igual á somma dos algarismos da ordem impar, ou quando a differença for 11 ou multiplos de 11.

Illustração. Começando pela direita de um numero, o primeiro algarismo pertence á ordem impar, o segundo á ordem par, o terceiro á ordem impar, o quarto á ordem par, e assim por diante. No numero 48642, a somma dos algarismos da ordem par é $4+8=12$, e a somma dos da ordem impar é $2+6+4=12$, e como as sommas são iguaes, o numero é divisivel por 11. São tambem divisiveis por 11 os numeros 7084, 82940, 518463, etc.

Exercicio de applicação. Achar os divisores dos seguintes numeros:

	Numeros	Divisores		Numeros	Divisores
1.	75	3, 5	6.	645	?
2.	90	2, 3, 5, 9, 10	7.	975	?
3.	138	2, 3, 6	8.	4576	?
4.	309	3	9.	800	?
5.	3465	3, 5, 9, 11	10.	6666	?

Decomposição dos numeros multiplos

67. Factores de um numero são aquelles numeros que multiplicados entre si, produzem esse numero. Assim,

os factores de 15 são 3 e 5, porque 3×5 são 15;
os factores de 21 são 3 e 7, porque 3×7 são 21;
os factores de 35 são 5 e 7, porque 5×7 são 35.

Os factores de um numero ou são numeros primos, ou são numeros multiplos; o numero 12, por exemplo, tem quatro factores que são 2×6 e 3×4; os factores 2 e 3 são primos, e os factores 4 e 6 são multiplos.

68. Factorar um numero é decompol-o em seus factores primos, isto é, dividil-o por todos os seus factores primos até o quociente ficar 1.

Problema. Decompor o numero 210 em todos os seus factores primos.

Solução. Começa-se a operação, dividindo-se 210 pelos menores numeros primos, que o dividirem exactamente. Dividindo-se 210 por 2, o quociente é 105; dividindo agora 105 por 3, o quociente é 35; dividindo 35 por 5, o quociente é 7, e dividindo 7 por 7, o quociente é 1. Os factores de 210 são 2, 3, 5 e 7. Prova: $2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$.

Processo

210	2
105	3
35	5
7	7
1	.

Para se acharem os factores primos de um numero, ha a seguinte

Regra: *Divide-se o numero dado pelo menor numero primo que o divida exactamente; divide-se o quociente pelo mesmo numero primo ou por outro maior que tambem o divida exactamente; e assim se continúa até o quociente ficar 1. Os varios divisores empregados serão os factores primos do numero dado.*

Exercicio de applicação. Achar os factores primos dos seguintes numeros:

1.	de 12........	2, 2 e 3	5.	de 39..............	?
2.	de 18........	2, 3 e 3	6.	de 66..............	?
3.	de 26........	2 e 13	7.	de 100..............	?
4.	de 38........	2 e 19	8.	de 337..............	?

Divisão por cancellamento

69. Divisão por cancellamento é o methodo de abreviar uma divisão, regeitando os factores communs ao dividendo e ao divisor.

A palavra cancellar em Arithmetica significa passar riscos sobre os algarismos escriptos para os inutilizar, como $\cancel{1}$, $\cancel{2}$, $\cancel{3}$, $\cancel{4}$, $\cancel{5}$, etc.

Como já vimos no n.º **57**, dividindo-se o dividendo e o divisor por um mesmo numero, não se altera o valor do quociente; então decompondo-se mentalmente o dividendo e o divisor em seus factores primos (n.º **68**) e cancellando-se os factores communs aos dois termos, a divisão ficará logo operada.

70. Para se facilitar o cancellamento, escreve-se a divisão em fórma de fracção, escrevendo-se o dividendo em cima, e o divisor em baixo.

Problema. Qual é o quociente de 42 dividido por 7?

Solução. O numero 42 decompõe-se em 7 vezes 6 ou 6 vezes 7; e como o factor 7 é commum a ambos os termos, cancella-se este factor no dividendo e no divisor, e o quociente fica 6.

Processo

$$\frac{42}{7} = \frac{6 \times \cancel{7}}{\cancel{7}} = 6$$

71. Quando um factor do dividendo e outro do divisor são exactamente divisiveis por um mesmo numero, dividem-se por esse numero, cancellam-se e escrevem-se os quocientes nos seus respectivos logares

Problema. Multiplicar 45 por 6, e dividir o producto por 9 multiplicado por 3.

Solução. Podemos dividir 45 e 9 por 9. Então $45 \div 9 = 5$; e $9 \div 9 = 1$. Cancellam-se os dois numeros, e escrevem-se os quocientes 5 e 1 nos seus respectivos logares. Podemos tambem cancellar 6 e 3 dividindo-os por 3. O resultado dos dois factores do dividendo é $5 \times 2 = 10$, e o resultado do divisor é $1 \times 1 = 1$, o quociente é $\frac{10}{1}$ ou 10.

$$\frac{45 \times 6}{9 \times 3} = \frac{\overset{5}{\cancel{45}} \times \overset{2}{\cancel{6}}}{\underset{1}{\cancel{9}} \times \underset{1}{\cancel{3}}} = 10.$$

Problema. Quantas laranjas, custando 40 réis cada uma, devemos dar por 5 maçãs de 160 réis cada uma?

Solução. 5 maçãs a 160 réis importam em 5 vezes 160 réis, e uma laranja custa 40 réis. Dividindo 5 vezes 160 por 40, acharemos o numero das laranjas. Cancellam-se as duas cifras, que é o mesmo que dividir ambos os termos por 10, e então ficam reduzidos a 16 e 4. Dividem-se ainda estes dois termos por 4, e o resultado é $5 \times 4 = 20$ laranjas.

Prova. 5 maçãs a $160 = 800$.
20 laranjas a $40 = 800$.

$$\frac{5 \times \overset{4}{\cancel{160}}}{\underset{1}{\cancel{40}}} = 20.$$

Regra. *Para se effectuar uma divisão por cancellamento, escreve-se o divisor debaixo do dividendo, cancellam-se os factores communs aos dois termos ou dividem-se por um mesmo numero, e o resultado do dividendo dividido pelo resultado do divisor será o quociente.*

Nota. Este methodo tem muita applicação na regra de tres e em outros processos arithmeticos, e por isso os discipulos devem exercital-o convenientemente.

1. Multiplicar 36 por 4, e dividir o producto por 9. Resp. 16.
2. Achar o valor $(24 \times 6) \div (12 \times 3)$. Resp. 4.
3. Achar o valor $\frac{40 \times 9}{8 \times 5 \times 3}$. Resp. 3.
4. Em 37 vezes 15 quantas vezes ha 5? Resp. 111.
5. Multiplicar $21 \times 11 \times 26$, e dividir o producto pelo resultado de $13 \times 7 \times 2$. Resp. 33.
6. Quantas saccas de café, pesando cada uma 60 kilos, podemos dar por 50 saccas, pesando cada uma 42 kilos? Resp. 35.
7. Os factores do dividendo são 16, 4, 9 e 5; e os factores do divisor são 8, 9 e 10; qual é o quociente? Resp. 4.
8. Um fazendeiro comprou 41 porcos a 11$, e fez o pagamento em cavallos ao preço de 41$ cada um, quantos cavallos devia dar para pagar os porcos? Resp. 11.
9. Perguntando-se a uma moça qual era a sua idade, ella respondeu: Se dividirdes o producto de 64 multiplicado por 14 pelo producto de 8 multiplicado por 4, tereis a minha idade. Resp. 28 annos.

Maximo divisor commum

72. Divisor commum é o numero que divide dois ou mais numeros diversos sem deixar resto.

73. Maximo divisor commum é o maior numero que divide dois ou mais numeros diversos sem deixar resto.

Dois numeros podem ter muitos divisores communs; assim, 2, 4 e 8 são os divisores communs de 16 e 24, mas 2 e 4 são divisores communs inferiores, e 8 é o maximo divisor commum daquelles dois numeros.

Nota. Por abreviatura, usaremos das iniciaes **m. d. c.** para indicar maximo divisor commum.

Problema. Qual é o maximo divisor commum de 28 e 40?

Solução. Dividindo-se o numero maior pelo menor, o quociente é 1 e o resto é 12.

Dividindo-se depois o numero menor 28 pelo resto 12, o quociente é 2, e o resto é 4.

Dividindo-se ainda o resto 12 pelo resto 4, o quociente é 3, e o resto é cifra. O divisor que não deixa resto, é 4, e por isso é o m. d. c. de 40 é 28.

Para se facilitar a divisão continuada, escrevem-se os quocientes em cima e os restos em baixo.

Processo

	1	2	3
40	28	12	4
12	4	0	

Regra. *Para se achar o* **m. d. c.** *de dois ou mais numeros, divide-se o numero maior pelo menor, em seguida divide-se este primeiro divisor pelo primeiro resto e depois, o segundo divisor pelo segundo resto, e assim por diante até a divisão não deixar resto. O divisor que não deixar resto, será o* **m. d. c.**

Nota. Se logo na primeira divisão não houver resto, o numero menor será **m. d. c.** Quando os dois numeros são primos entre si, não teem divisor commum, assim 15 e 16 não teem divisor commum (n.º **62**).

Exercicio de applicação. Achar o maximo divisor commum:

1.	de 12 e 16	Resp. 4	6.	de 140 e 210	Resp. ?
2.	de 15 e 20	» 5	7.	de 60 e 90	» ?
3.	de 42 e 54	» 6	8.	de 231 e 273	» ?
4.	de 70 e 110	» 10	9.	de 247 e 323	» ?
5.	de 105 e 165	» 15	10.	de 285 e 465	» ?

Minimo multiplo commum

74. Chama-se **multiplo** de um numero o duplo, triplo, quadruplo, etc., desse numero. Assim:

Os multiplos de 2 são 4, 6, 8, 10, 12, 14, etc.
Os multiplos de 3 são 6, 9, 12, 15, 18, 21, etc.

Os multiplos de 4 são 8, 12, 16, 20, 24, 28, etc., e assim por diante. Nestes exemplos citados, vemos que o menor multiplo de 2 é 4; o menor multiplo de 3 é 6; o menor multiplo de 4 é 8; agora precisamos saber achar o menor multiplo commum de dois ou mais numeros.

75. Minimo multiplo commum de dois ou mais numeros é o menor numero, que se póde dividir por esses numeros sem deixar resto. Assim, 24 é o minimo multiplo commum de 8, 6 e 4, porque não ha outro numero menor que se divida exactamente por estes tres numeros.

Nota. Por abreviatura, usaremos das iniciaes **m. m. c.** para indicarmos minimo multiplo commum

Problema. Qual é o **m. m. c.** de 4, 6, 8 e 12?

Solução. Escrevem-se os numeros, 4, 6, 8 e 12 e sublinham-se. Acha-se depois o menor divisor que divida dois ou mais destes numeros sem deixar resto. Ora, o menor divisor é 2 que póde dividir todos. Escreve-se 2 á direita dos numeros, e dividem-se por elle todos os numeros, pondo debaixo de cada um o seu quociente. Então diz-se 4, dividido por 2, dá 2; 6, dividido por 2, dá 3; 8, dividido por 2, dá 4; e 12, dividido por 2, dá 6. Os quocientes desta primeira divisão são 2, 3, 4 e 6. Passa-se um traço debaixo destes numeros e acha-se outra vez o menor divisor que divida dois ou mais numeros sem deixar resto. Esse divisor é ainda 2, que póde dividir tres dos numeros. Escreve-se 2 á direita dos numeros, e por elle se dividem todos os que forem divisiveis, pondo debaixo de cada um o seu respectivo quociente. O numero 3, como não é divisivel por 2, passa inteiro para baixo, e teremos então os numeros 1, 3, 2 e 3. Como dois dos numeros se podem ainda dividir por 3, escreveremos 3 á direita, como divisor, e por elle dividiremos os numeros; e como 2 não é divisivel por 3, passa para baixo, e temos os numeros 1, 1, 2 e 1. Como resta só 2, escreve-se 2 á direita como divisor, e divide-se por elle, para que todos os quocientes sejam 1. Multiplicando-se agora todos os divisores, obtem-se o producto 24, que é o **m. m. c.** de 4, 6, 8 e 12.

Processo

4,	6,	8,	12	2
2,	3,	4,	6	2
1,	3,	2,	3	3
1,	1,	2,	1	2
1,	1,	1,	1	

$2 \times 2 \times 3 \times 2 = 24$

Regra. *Para se achar o* **m. m. c.** *de dois ou mais numeros, escrevem-se os numeros dados em linha, separados por virgulas e sublinham-se; acha depois o menor divisor que, pelo menos, divida exactamente dois dos numeros; escreve-se esse numero á direita, e dividem-se por elle todos os numeros que forem divisiveis, escrevendo debaixo de cada um o seu respectivo quociente, e os numeros que não forem divisiveis, passam inteiros para a linha debaixo.*

Divide-se a nova linha de numeros pelo menor numero que, pelo menos, divida dois numeros, e assim se procede até que não ha a nos quocientes senão o algarismo 1. O continuado producto de todos os divisores será o **m. m. c.**

Nota. Quando todos os numeros dados são primos entre si, o **m. m. c.** desses numeros é o seu producto continuado. Assim, o **m. m. c.** de 4, 5 e 7 é $4 \times 5 \times 7 = 140$.

Este processo facilita consideravelmente a reducção de fracções ao minimo denominador commum, e por isso deve ser muito exercitado.

Exercicio de applicação. Achar o minimo multiplo commum de

	Respostas		Respostas
1. 15 e 20.	60	**7.** 14, 21, 30 e 35.	?
2. 6, 8 e 9.	72	**8.** 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.	?
3. 6, 15 e 35.	210	**9.** 18, 21, 27 e 36.	?
4. 10, 12 e 15.	60	**10.** 16, 30, 40, 50 e 75.	?
5. 9, 15, 18 e 24.	?	**11.** 8, 28, 20, 24, 32 e 48.	?
6. 8, 15, 12 e 30.	?	**12.** 7, 14, 21, 28 e 35.	?

FRACÇÕES

76. Fracção ou quebrado é uma ou mais partes iguaes de uma unidade.

Na linguagem vulgar, fracção quer dizer um pedaço ou parte de alguma cousa.


Um inteiro,


Dois meios,


Tres terços,


Quatro quartos,


Cinco quintos,


Seis sextos.

Illustração. Uma unidade é uma cousa inteira como, por exemplo, uma maçã. Dividindo esta maçã em duas partes iguaes, cada uma das partes é a metade ou **um meio** da maçã, e se escreve com algarismos $\frac{1}{2}$; as duas partes são dois meios, e se escrevem $\frac{2}{2}$. Dividindo a maçã em tres partes iguaes, cada parte é **um terço** da maçã, e se escreve $\frac{1}{3}$; duas partes são dois terços que se escrevem $\frac{2}{3}$; as tres partes são tres terços ou a maçã inteira, e se escrevem $\frac{3}{3}$. Emfim, dividindo a maçã em quatro partes iguaes, cada parte é **um quarto** que se escreve $\frac{1}{4}$; dividindo-a em cinco partes iguaes, cada parte é **um quinto** que se escreve $\frac{1}{5}$; duas partes são $\frac{2}{5}$; tres partes são $\frac{3}{5}$; quatro partes são $\frac{4}{5}$, e assim por diante.

77. Ha duas especies de fracções que se denominam **fracções ordinarias** e **fracções decimaes.** Aqui trataremos sómente das fracções ordinarias; no capitulo seguinte exporemos as decimaes.

78. A fracção ordinaria compõe-se de dois numeros separados por um traço horizontal, como $\frac{2}{3}$. Estes dois numeros chamam-se termos da fracção. O termo de cima chama-se **numerador,** e o debaixo, **denominador.** O denominador mostra em quantas partes está dividida a unidade, e o numerador mostra o numero de partes que tem a fracção. Assim, $\frac{2}{3}$ quer dizer que a unidade foi dividida em 3 partes iguaes, e se tomaram 2 dessas partes.

$$\begin{array}{ll} \textbf{Numerador} & 2 \\ \hline \textbf{Denominador} & 3 \end{array}$$

79. Quando o denominador excede a 10, lê-se o seu numero juntamente com a palavra **ávos,** como se vê nos seguintes exemplos:

$\frac{1}{2}$ um meio	$\frac{2}{6}$ dois sextos	$\frac{4}{10}$ quatro decimos
$\frac{1}{3}$ um terço	$\frac{3}{7}$ tres setimos	$\frac{8}{11}$ oito onze ávos
$\frac{1}{4}$ um quarto	$\frac{5}{8}$ cinco oitavos	$\frac{9}{30}$ nove trinta ávos
$\frac{1}{5}$ um quinto	$\frac{6}{9}$ seis nonos	$\frac{40}{90}$ quarenta noventa ávos

Nota. No commercio, as fracções ordinarias são escriptas com um traço obliquo como 1/2 um meio, 2/3 dois terços, 3/4 tres quartos, etc.

Regra. *Para se enunciar uma fracção, lê-se primeiro o numerador e depois o denominador com o nome ordinal até o numero 10, e deste numero para cima dá-se-lhe o nome cardinal junto com a palavra ávos.*

Exercicio de applicação. Os discipulos poderão agora lêr sem difficuldade as seguintes fracções:

$\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{2}{11}$, $\frac{9}{15}$, $\frac{16}{28}$, $\frac{5}{36}$, $\frac{40}{90}$.

3/5, 3/6, 1/7, 2/9, 7/10, 15/16, 8/19, 7/25, 5/50, 9/60, 12/100.

80. A medida exacta de uma quantidade exprime-se por meio de numeros inteiros ou mixtos, e a quantidade menor do que a unidade exprime-se por meio de uma fracção.

Numero inteiro é o que consta de uma ou mais unidades completas, como 3 maçãs.

Numero mixto ou fraccionario é o que consta de inteiros e de uma fracção; assim 2 maçãs e dois quartos escrevem-se $2\frac{2}{4}$.

Fracções proprias e improprias

81. As fracções ordinarias podem ser proprias ou improprias.

Fracção propria é a que exprime um valor menor do que a unidade, como $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{7}$, etc.

Fracção impropria é a que exprime um valor igual á unidade ou maior do que ella, como $\frac{3}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{8}{5}$, $\frac{12}{12}$, etc.

82. A relação entre a fracção e a unidade póde ser facilmente comprehendida pelos dois principios seguintes:

1° Quando o numerador é a metade do denominador, a fracção é igual a ***um meio*** *ou* $\frac{1}{2}$.

2° Quando o numerador é igual ao denominador, a fracção é igual a ***um inteiro*** *ou 1.*

Illustração. Por meio da figura que está ao lado, ficarão perfeitamente comprehensiveis os dois principios expostos. Dividindo uma maçã em 4 partes iguaes, cada parte será $\frac{1}{4}$ da maçã; se depois tomarmos 2 destas partes, que são $\frac{2}{4}$, é evidente que tomamos a metade da maçã; logo $\frac{2}{4}$ são iguaes a $\frac{1}{2}$; e, do mesmo modo, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{6}{12}$, etc., são fracções iguaes a $\frac{1}{2}$.

Se, em vez de 2 partes, tomarmos as 4 partes, que são $\frac{4}{4}$, é evidente que tomamos a maçã inteira; logo $\frac{4}{4}$ são iguaes a 1 inteiro; e, do mesmo modo, $\frac{6}{6}$, $\frac{7}{7}$, $\frac{8}{8}$, $\frac{9}{9}$, etc., são fracções iguaes á unidade ou a 1.

83. Quando o numerador é **menor** do que o denominador, o valor da fracção é sempre inferior á unidade; assim, a $\frac{2}{3}$ falta $\frac{1}{3}$ para completar a unidade, porque $1 = \frac{3}{3}$. A $\frac{2}{5}$ faltam $\frac{3}{5}$, porque $1 = \frac{5}{5}$. A $\frac{4}{7}$ faltam $\frac{3}{7}$, porque $1 = \frac{7}{7}$, etc.

Quando o numerador é **maior** do que o denominador, a fracção excede sempre o valor da unidade; assim, a fracção $\frac{3}{2}$ excede o valor da unidade, porque contém $\frac{2}{2}$, que são a unidade, e o excedente $\frac{1}{2}$. A fracção $\frac{7}{4}$ contém $\frac{4}{4}$, que são a unidade, e o excedente $\frac{3}{4}$.

Exercicios oraes de applicação. 1° O alumno dirá quanto falta a cada uma das seguintes fracções para completar a unidade.

1. $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{6}{13}$, $\frac{7}{14}$, $\frac{8}{15}$.

2. $\frac{15}{16}$, $\frac{7}{17}$, $\frac{3}{18}$, $\frac{17}{20}$, $\frac{19}{20}$, $\frac{20}{21}$, $\frac{20}{30}$, $\frac{18}{36}$, $\frac{35}{40}$, $\frac{39}{44}$, $\frac{25}{50}$, $\frac{99}{100}$.

2° O alumno dirá quanto excede á unidade cada uma das seguintes fracções:

3. $\frac{5}{3}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{8}{6}$, $\frac{8}{7}$, $\frac{10}{8}$, $\frac{11}{8}$, $\frac{15}{10}$, $\frac{12}{12}$, $\frac{14}{13}$, $\frac{16}{15}$, $\frac{17}{17}$, $\frac{19}{18}$.

4. $\frac{20}{18}$, $\frac{21}{19}$, $\frac{25}{20}$, $\frac{21}{21}$, $\frac{28}{25}$, $\frac{30}{30}$, $\frac{35}{30}$, $\frac{39}{38}$, $\frac{42}{49}$, $\frac{50}{40}$, $\frac{60}{50}$, $\frac{100}{99}$.

Dividendo menor do que o divisor

84. Uma fracção póde tambem ser considerada como uma divisão, na qual o numerador é o dividendo, o denominador é o divisor, e a fracção é o quociente. Em $\frac{3}{4}$, por exemplo, 3 é o dividendo, 4 é o divisor, e $\frac{3}{4}$ é o quociente; de sorte que $3 \div 4 = \frac{3}{4}$.

Problema. Dividindo-se igualmente 1 maçã por 6 meninos, que fracção da maçã receberá cada um?

Solução. O dividendo é a maçã ou 1, e o divisor é 6. Temos de dividir a maçã em 6 partes iguaes chamadas sextos, e dar $\frac{1}{6}$ a cada um. Portanto $1 \div 6 = \frac{1}{6}$. Do mesmo modo, $2 \div 3 = \frac{2}{3}$; $3 \div 5 = \frac{3}{5}$; $7 \div 9 = \frac{7}{9}$; $9 \div 11 = \frac{9}{11}$, etc.

Regra. *Para se dividir um numero menor por outro maior, escreve-se o dividendo como numerador, e o divisor como denominador, e a fracção resultante será o quociente.*

Exercicio de applicação. Effectuar as seguintes divisões:

1. $1 \div 5 = ?$	**5.** $2 \div 5 = ?$	**9.** $6 \div 7 = ?$	**13.** $10 \div 13 = ?$
2. $1 \div 9 = ?$	**6.** $2 \div 7 = ?$	**10.** $7 \div 10 = ?$	**14.** $15 \div 19 = ?$
3. $1 \div 10 = ?$	**7.** $3 \div 8 = ?$	**11.** $8 \div 13 = ?$	**15.** $18 \div 23 = ?$
4. $1 \div 12 = ?$	**8.** $4 \div 5 = ?$	**12.** $9 \div 10 = ?$	**16.** $99 \div 100 = ?$

	Resp.		Resp.
17. 7 que fracção é de 9?	$\frac{7}{9}$	**19.** 15 que fracção é de 90?	?
18. 5 que fracção é de 12?	?	**20.** 50 que fracção é de 100?	?

Complemento do quociente

85. Quando uma divisão deixa resto, póde-se concluir a operação juntando-se ao numero inteiro do quociente uma fracção que tenha o resto como numerador, e o divisor como denominador. Se o resto for 2, por exemplo, e o divisor 5, juntam-se $\frac{2}{5}$ ao quociente.

Problema. Dividindo-se 5 maçãs por 2 meninos, que porção receberá cada um?

Solução. Dividindo-se 5 por 2, o quociente é 2, e fica 1 de resto. O resto é 1 maçã, que ficou por dividir. Dividindo-se agora 1 maçã por 2, o quociente é um meio, de sorte que cada menino receberá 2 maçãs e um meio de uma maçã.

$$\begin{array}{l|l} 5 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 2\frac{1}{2} \end{array}$$

Regra. *Para se completar o quociente de uma divisão com resto, junta-se ao numero inteiro do quociente uma fracção que tenha o resto como numerador, e o divisor como denominador.*

Exercicio de applicação. Completar o quociente nas seguintes divisões:

1.	$35 \div 6 =$	Resp. $5\frac{5}{6}$	5.	$37 \div 15 =$	Resp. ?
2.	$144 \div 7 =$	» $20\frac{4}{7}$	6.	$86 \div 17 =$	» ?
3.	$155 \div 8 =$	» $19\frac{3}{8}$	7,	$125 \div 18 =$	» ?
4.	$268 \div 9 =$	» $29\frac{7}{9}$	8.	$213 \div 19 =$	» ?

Simplificação das fracções

86. Antes de entrarmos no ensino das quatro operações fundamentaes sobre fracções, precisamos aprender com perfeição os quatro processos seguintes:

1° Simplificar fracções.

2° Transformar fracções improprias em numeros inteiros ou mixtos.

3° Transformar numeros inteiros ou mixtos em fracções improprias.

4° Reduzir fracções ao minimo denominador commum.

Comecemos pela simplificação de fracções.

87. Simplificar uma fracção é exprimil-a em termos menores, mas com o mesmo valor. Assim, a fracção $\frac{12}{24}$ póde ser simplificada ou reduzida a $\frac{6}{12}$, a $\frac{3}{6}$, a $\frac{2}{4}$ ou a $\frac{1}{2}$.

Reduzir uma fracção á expressão mais simples é exprimil-a nos menores numeros em que ella póde ser expressa. Assim, a expressão mais simples de $\frac{12}{24}$ é $\frac{1}{2}$.

Esta reducção é baseada no seguinte principio de Arithmetica:

« *Multiplicando-se ou dividindo-se ambos os termos de uma fracção por um mesmo numero, muda-se-lhe a fórma, mas não se lhe altera o valor.* »

Illustração. Como na reducção das fracções empregamos sómente a divisão dos dois termos, é esta a parte do principio que vamos illustrar.

$$\frac{8 \div 4}{12 \div 4} = \frac{2}{3}$$

Dividindo ambos os termos de $\frac{8}{12}$ por 4, teremos $\frac{2}{3}$. Ora $\frac{2}{3}$, embora tenham uma fórma differente de $\frac{8}{12}$, exprimem o mesmo valor, como vamos demonstrar. Dividindo o numero de $\frac{8}{12}$ por 4, temos $\frac{2}{12}$; nesta divisão, $\frac{8}{12}$ ficam reduzidos á sua quarta parte, porque *2 dozeavos* são um quarto de *8 dozeavos*. Dividindo o denominador de $\frac{2}{12}$ por 4, temos $\frac{2}{3}$; nesta divisão, $\frac{2}{12}$ ficam 4 vezes maior, porque $\frac{2}{3}$ são iguaes a $\frac{8}{12}$, e *32 dozeavos* conteem 4 vezes *8 dozeavos*. Sendo, pois, a diminuição no numerador proporcional ao augmento no denominador, a fracção resultante conservará o valor da fracção primitiva.

88. As fracções são reduziveis ou irreduziveis.

Fracção reduzivel ou reductivel é aquella que póde ser expressa em termos menores, mas com o mesmo valor, como $\frac{4}{8}$ que pódem ser reduzidos a $\frac{2}{4}$ ou $\frac{1}{2}$.

Fracção irreduzivel ou irreductivel é a que não póde ser simplificada, por serem os seus termos numeros primos entre si, como $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{7}{12}$, etc.

89. Ha dois modos de reduzir uma fracção á sua expressão mais simples:

1° *Dividir successivamente ambos os termos da fracção pelos seus divisores communs.*

2° *Dividir ambos os termos pelo seu maximo divisor commum.*

Empregaremos os dois modos na solução do seguinte problema:

Problema. Reduzir $\frac{105}{140}$ á sua expressão mais simples.

Solução. Sendo ambos os termos da fracção divisiveis por 5, dividem-se por este numero, e a fracção resultante será $\frac{21}{28}$. Sendo ambos os termos desta fracção divisiveis por 7, dividem-se por este numero, e a nova fracção será $\frac{3}{4}$. Como os termos de $\frac{3}{4}$ são primos entre si, esta fracção é irreduzivel. Portanto a expressão mais simples de $\frac{105}{140}$ é $\frac{3}{4}$.

O segundo modo de simplificar é o seguinte: Procura-se o maximo divisor commum de 105 e 140, (n. **73**). Este divisor é 35; dividem-se, então, ambos os termos da fracção por 35, e o resultado é $\frac{3}{4}$. Este modo de simplificar tem o inconveniente de ser necessario achar primeiro o maximo divisor commum dos dois termos da fracção, o que augmenta o processo em vez de o resumir.

Divisão successiva

$$\frac{105 \div 5}{140 \div 5} = \frac{21}{28}$$

$$\frac{21 \div 7}{28 \div 7} = \frac{3}{4}$$

Maximo divisor

$$\frac{105 \div 35}{140 \div 35} = \frac{3}{4}$$

Regra. *Para se reduzir uma fracção á sua expressão mais simples, dividem-se successivamente ambos os seus termos pelos seus divisores communs até a fracção ficar irreduzivel.*

Ou

Dividem-se ambos os termos pelo seu maximo divisor commum.

Exercicio de applicação. Reduzir as seguintes fracções á expressão mais simples:

	Resp.		Resp.		Resp.		Resp.
1. $\frac{3}{6}$.	$\frac{1}{2}$	8. $\frac{16}{20}$.	$\frac{4}{5}$	15. $\frac{16}{45}$.	?	22. $\frac{70}{140}$.	?
2. $\frac{2}{8}$.	$\frac{1}{4}$	9. $\frac{24}{18}$.	$1\frac{1}{3}$	16. $\frac{20}{80}$.	?	23. $\frac{50}{150}$.	?
3. [illegible] .	[illegible]	10. $\frac{42}{70}$.	$\frac{3}{5}$	17. $\frac{35}{80}$.	?	24. $\frac{30}{240}$.	?
4. [illegible] .	[illegible]	11. $\frac{6}{18}$.	$\frac{1}{3}$	18. $\frac{16}{48}$.	?	25. $\frac{50}{200}$.	?
5. $\frac{6}{14}$.	$\frac{3}{7}$	12. $\frac{5}{15}$.	$\frac{1}{3}$	19. $\frac{33}{100}$.	?	26. $\frac{60}{300}$.	?
6. $\frac{7}{14}$.	$\frac{1}{2}$	13. $\frac{5}{20}$.	$\frac{1}{4}$	20. $\frac{11}{121}$.	?	27. $\frac{80}{320}$.	?
7. $\frac{10}{12}$.	$\frac{5}{6}$	14. $\frac{6}{24}$.	$\frac{1}{4}$	21. $\frac{44}{88}$.	?	28. $\frac{90}{360}$.	?

Transformar fracções improprias em numeros inteiros

90. Transformar uma fracção impropria em um numero inteiro é exprimil-a com o numero inteiro ou mixto que ella contém.

Problema. Transformar $\frac{12}{4}$ em um numero inteiro.

Solução. Desde que $\frac{4}{4} = 1$, segue-se que $\frac{12}{4}$ são iguaes a $12 \div 4 = 3$ inteiros.

$$\frac{12}{4} = 12 \div 4 = 3$$

Este ponto ficará perfeitamente claro com a illustração dos dois problemas seguintes:

1° Problema. Seis meias peras, quantas peras são?

Solução. 6 meias peras são $\frac{6}{2}$, e como $\frac{2}{2}$ formam 1 pera inteira, $\frac{6}{2}$ formam $6 \div 2 = 3$ peras. Portanto 6 meias peras são 3 peras inteiras.

2° Problema. Sete meias peras, quantas peras são?

Solução. 7 meias peras são $\frac{7}{2}$, e como $\frac{2}{2}$ formam 1 pera inteira, $\frac{7}{2}$ formam $7 \div 2 = 3\frac{1}{2}$ peras, isto é, 3 peras inteiras e meia pera. No 1° problema, temos 3 peras, que formam um numero inteiro; no 2°, temos $3\frac{1}{2}$ peras, que formam um numero mixto.

$$6 \div 2 = 3$$
$$7 \div 2 = 3\frac{1}{2}$$

Regra. *Para se transformar uma fracção impropria em um numero inteiro, divide-se o numerador pelo denominador, e, se a divisão for exacta, o numero será inteiro; mas, se deixar resto, o numero será mixto.*

Exercicio de applicação. Transformar as seguintes fracções improprias em numeros inteiros ou mixtos, segundo o caso:

	Resp.		Resp.		Resp.		Resp.
1. $\frac{6}{3}$.	2	5. $\frac{58}{9}$.	?	9. $\frac{72}{18}$.	?	13. $\frac{200}{20}$	?
2. $\frac{16}{4}$.	4	6. $\frac{44}{11}$.	?	10. $\frac{28}{14}$.	?	14. $\frac{240}{80}$	?
3. $\frac{19}{4}$.	$4\frac{3}{4}$	7. $\frac{54}{11}$.	?	11. $\frac{123}{16}$.	?	15. $\frac{480}{80}$	?
4. $\frac{35}{7}$.	5	8. $\frac{60}{12}$.	?	12. $\frac{149}{21}$.	?	16. $\frac{550}{110}$	?

Transformar numeros inteiros ou mixtos em fracções

91. Transformar um numero inteiro ou mixto em uma fracção é achar a fracção equivalente ao inteiro ou mixto.

Problema. Transformar 5 inteiros em terços.

Solução. Desde que 1 inteiro tem 3 terços, 5 inteiros tem $5 \times 3 = 15$ terços.

Processo

$$\frac{5 \times 3}{3} = \frac{15}{3}$$

Problema. Transformar $6\frac{3}{4}$ em uma fracção.

Solução. Como 1 inteiro tem 4 quartos, 6 inteiros tem $6 \times 4 = 24$ quartos; addicionando mais 3 da fracção, fazem 27 quartos.

Processo

$$6\frac{3}{4} = \frac{6 \times 4 + 3}{4} = \frac{27}{4}$$

Regra. *Para se transformar um numero inteiro em uma fracção, escreve-se o denominador dado como o denominador da fracção, e como numerador escreve-se o producto do inteiro multiplicado pelo denominador.*

Se o numero for mixto, multiplica-se o inteiro pelo denominador, e o producto addicionado com o numerador será o novo numerador da fracção.

Exercicio de applicação. Transformar os seguintes numeros mixtos em fracções improprias:

1. $2\frac{1}{2}$.	Resp. $\frac{5}{2}$	5. $7\frac{2}{3}$.	Resp. $\frac{23}{3}$	9. $3\frac{5}{25}$.	Resp. ?
2. $6\frac{1}{3}$.	» $\frac{19}{3}$	6. $8\frac{1}{5}$.	» $\frac{41}{5}$	10. $19\frac{1}{10}$.	» ?
3. $8\frac{3}{5}$.	» $\frac{43}{5}$	7. $6\frac{5}{12}$.	» $\frac{77}{12}$	11. $18\frac{1}{8}$.	» ?
4. $9\frac{2}{7}$.	» $\frac{65}{7}$	8. $7\frac{2}{7}$.	» $\frac{51}{7}$	12. $30\frac{2}{13}$.	» ?

Reduzir fracções ao minimo denominador commum

92. Reduzir duas ou mais fracções ao minimo denominador commum, é dar a todas um denominador igual sem lhes alterar o valor. Esta reducção, é baseada no seguinte principio de Arithmetica:

Multiplicando-se ambos os termos de uma fracção por um mesmo numero, não se altera o valor da fracção.

Illustração. Se multiplicarmos ambos os termos de $\frac{1}{2}$ por 3, esta fracção ficará $\frac{3}{6}$. Ora, como o numerador da nova fracção é a metade do denominador, a fracção é igual a $\frac{1}{2}$, como já demonstramos no n. **82**, e, deste modo, não ha alteração no seu valor.

Nota. O methodo de reduzir fracções a um denominador commum que vamos apresentar, além de ser muito facil e simples, tem a vantagem de obter o minimo denominador commum, o que simplifica as operações e abrevia consideravelmente os processos do calculo.

Problema. Reduzir $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{12}$ ao minimo denominador commum.

Solução. Acharemos primeiro o minimo multiplo commum dos quatro denominadores 3, 6, 8 e 12. (Vêde n.° **75**). O minimo multiplo commum destes quatro numeros é 24, que será tambem o menor denominador commum destas fracções. Escreveremos depois o numero 24 debaixo de cada fracção, pondo um traço sobre elle, para escrevermos em cima o respectivo numerador, como vemos aqui $\overline{24}$, $\overline{24}$, $\overline{24}$, $\overline{24}$. O numero 24 será agora dividido pelo denominador de cada fracção, e o quociente multiplicado pelo seu respectivo numerador.

Comecemos a reducção pela fracção $\frac{2}{3}$. Dividindo 24 pelo denominador 3, o quociente é 8, isto é, 24 é 8 vezes maior do que 3, e para o numerador 2 ficar tambem 8

Processo

$$\frac{2}{3},\quad \frac{1}{6},\quad \frac{3}{8},\quad \frac{5}{12}$$

$$\frac{16}{24},\quad \frac{4}{24},\quad \frac{9}{24},\quad \frac{10}{24}$$

vezes maior, afim de não alterarmos o valor desta fracção, multiplicaremos o numerador 2, por 8, e teremos $2 \times 8 = 16$, que escreveremos sobre o denominador 24, e o resultado será $\frac{16}{24} = \frac{2}{3}$.

Passemos agora a $\frac{1}{6}$. Dividindo 24 por 6, o quociente é 4, isto é, 24 é 4 vezes maior do que 6, e para o numerador 1 ficar tambem 4 vezes maior, multiplical-o-emos por 4, e teremos $1 \times 4 = 4$, que escreveremos sobre o denominador 24, e o resultado será $\frac{4}{24} = \frac{1}{6}$. Do mesmo modo faremos com $\frac{3}{8}$ e $\frac{11}{12}$, e assim ficarão as quatro fracções reduzidas ao minimo denominador commum.

2° Problema. Reduzir $\frac{5}{20}$, $\frac{8}{12}$ e $\frac{2}{5}$ ao minimo denominador.

Solução. As duas primeiras fracções podem ser simplificadas, porque $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$, e $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$. As tres fracções simplificadas ficam então $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{2}{5}$. Como os denominadores destas fracções são primos entre si, o seu denominador commum é $4 \times 3 \times 5 = 60$. (**75.**) Prosegue-se depois como no problema precedente.

Fracções	$\frac{5}{20}$,	$\frac{8}{12}$,	$\frac{2}{5}$
Simplificadas	$\frac{1}{4}$,	$\frac{2}{3}$,	$\frac{2}{5}$
Com denominador commum	$\frac{15}{60}$,	$\frac{40}{60}$,	$\frac{24}{60}$

Regra. *Para se reduzirem duas ou mais fracções ao minimo denominador commum, simplificam-se as fracções reduziveis; acha-se depois o minimo multiplo commum dos denominadores das fracções, e esse será o minimo denominador commum.*

Divide-se este denominador commum pelo denominador de cada fracção, e o quociente multiplica-se pelo numerador respectivo, e o producto escreve-se sobre o denominador commum.

Exercicio de applicação. Reduzir os seguintes grupos de fracções ao seu minimo denominador commum:

	Respostas.		Respostas.
1. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$.	$\frac{4}{8}, \frac{2}{8}, \frac{1}{8}$	6. $\frac{2}{3}, \frac{5}{9}, \frac{11}{18}$.	$\frac{12}{18}, \frac{10}{18}, \frac{11}{18}$
2. $\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{4}{5}$.	$\frac{20}{40}, \frac{15}{40}, \frac{32}{40}$	7. $\frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{9}{14}$.	?
3. $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}$.	$\frac{35}{70}, \frac{42}{70}, \frac{40}{70}$	8. $\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{5}{8}$.	?
4. $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}$.	$\frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{5}{6}$	9. $\frac{5}{6}, \frac{3}{8}, \frac{3}{4}, \frac{4}{15}$.	?
5. $\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{7}{12}$.	$\frac{4}{12}, \frac{10}{12}, \frac{7}{12}$	10. $\frac{25}{60}, \frac{33}{60}, \frac{18}{30}, \frac{13}{25}$.	?

Sommar fracções

93. Na addição de fracções ha tres casos a considerar:
1° Sommar fracções que teem o mesmo denominador.
2° Sommar fracções que teem denominadores differentes.
3° Sommar fracções e numeros inteiros ou mixtos.

1° Caso. Problema. Qual é a somma de $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ e $\frac{3}{4}$?

Solução. 1 quarto, mais 2 quartos, mais 3 quartos são 6 quartos; e $\frac{6}{4}$, transformados em inteiros, são $1\frac{2}{4}$.

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{6}{4}$$

Regra. *Para se sommarem fracções que teem o mesmo denominador, addicionam-se os numeradores, e a somma escreve-se sobre o denominador commum.*

2° Caso. Problema. Qual é a somma de $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, e $\frac{1}{4}$?

Solução. As fracções $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{4}$, reduzidas ao minimo denominador commum, ficam $\frac{6}{12}$, $\frac{8}{12}$ e $\frac{3}{12}$; e a somma destas fracções é $\frac{17}{12}$ ou $1\frac{5}{12}$.

$$\frac{6}{12} + \frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{17}{12}$$

Regra. *Para se sommarem fracções com denominadores differentes, reduzem-se as fracções a um denominador commum, e depois addicionam-se os numeradores.*

3° Caso. Problema. Qual é a somma de $8\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ e 7?

Solução. A somma dos inteiros é $8 + 7 = 15$. A somma das fracções é $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$. Addicionando as duas parcellas, temos $16\frac{1}{4}$.

Inteiros	$8 + 7 = 15$
Fracções	$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = 1\frac{1}{4}$
Somma	$\ldots\ldots = 16\frac{1}{4}$

Regra. *Para se sommarem numeros inteiros ou mixtos e fracções, addicionam-se os inteiros, depois as fracções, e sommam-se as duas parcellas.*

Exercicio de applicação. Sommar as seguintes fracções:

	Respostas.		Respostas
1. $\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} =$	$1\frac{1}{5}$	8. $5\frac{1}{3} + 2\frac{1}{4} + \frac{5}{12} =$	?
2. $\frac{2}{6} + \frac{1}{6} + \frac{2}{6} =$	$\frac{5}{6}$	9. $\frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{9}{5} =$	?
3. $\frac{7}{20} + \frac{6}{20} + \frac{4}{20} =$	$\frac{17}{20}$	10. $\frac{3}{8} + \frac{1}{2} + \frac{5}{12} =$	?
4. $\frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} =$	$\frac{13}{24}$	11. $\frac{2}{3} + \frac{1}{5} + \frac{5}{8} =$	?
5. $\frac{3}{4} + \frac{3}{6} + \frac{3}{8} =$	$1\frac{5}{8}$	12. $8\frac{1}{3} + \frac{3}{5} + 3 =$	?
6. $\frac{5}{10} + \frac{4}{8} + \frac{7}{14} =$	$1\frac{1}{2}$	13. $\frac{129}{240} + \frac{33}{192} + \frac{77}{308} =$	?
7. $3\frac{1}{2} + 5\frac{1}{4} + 1 =$	$9\frac{3}{4}$	14. $8\frac{1}{2} + 7\frac{1}{4} + 6\frac{1}{3} =$	?

Subtrahir fracções

94. Na subtracção de fracções ha tres casos a considerar:

1° Subtrahir uma fracção de outra, tendo ambas o mesmo denominador.

2° Subtrahir uma fracção de outra, tendo denominadores differentes.

3° Subtrahir uma fracção de um numero inteiro ou mixto.

1° Caso. Problema. De $\frac{3}{4}$ subtrahindo $\frac{2}{4}$ quanto resta?

Solução. De 3 quartos subtrahindo 2 quartos, resta 1 quarto.

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$$

Regra. *Para se subtrahir uma fracção de outra, quando teem o mesmo denominador, acha-se a differença entre os numeradores e escreve-se sobre o denominador commum.*

2° Caso. Problema. De $\frac{1}{2}$ subtrahindo $\frac{1}{4}$, quanto resta?

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = ?$$

Solução. Reduzindo $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ ao minimo denominador commum, temos $\frac{2}{4}$ e $\frac{1}{4}$; ora, de 2 quartos subtrahindo 1 quarto, resta 1 quarto.

$$\frac{2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Regra. *Para se subtrahir uma fracção de outra, quando teem denominadores differentes, reduzem-se ambas ao mesmo denominador, e effectua-se depois a subtracção.*

3° Caso. Problema. De $8\frac{1}{3}$ subtrahindo $3\frac{1}{2}$, quanto resta?

Solução. Reduzindo $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$ ao mesmo denominador, temos $\frac{2}{6}$ e $\frac{3}{6}$. Como não podemos subtrahir $\frac{3}{6}$ de $\frac{2}{6}$; tiramos 1 unidade de 8, e como 1 tem $\frac{6}{6}$, com os $\frac{2}{6}$ fazem $\frac{8}{6}$. Agora, de $\frac{8}{6}$ tirando $\frac{3}{6}$, restam $\frac{5}{6}$; e de 7 tirando 3, resta 4. A resposta é $4\frac{5}{6}$.

$$8\tfrac{1}{3} - 3\tfrac{1}{2} = ?$$
$$8\tfrac{2}{6} - 3\tfrac{3}{6} = ?$$
$$7\tfrac{8}{6} - 3\tfrac{3}{6} = 4\tfrac{5}{6}.$$

Regra. *Para se subtrahir uma fracção ou um numero mixto de outro, reduzem-se as fracções ao mesmo denominador, e se a fracção do minuendo for inferior á do subtrahendo, tira-se uma unidade do inteiro e junta-se com a fracção do minuendo e opera-se a subtracção.*

Nota. Podemos tambem reduzir o numero mixto a uma fracção impropria, e depois operar a subtracção; assim, $2\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{6}{4} - 1\frac{1}{2}$. Este processo só é preferivel, quando o numero mixto não é muito alto.

Exercicio de applicação. Effectuar as seguintes subtracções:

	Resp.		Resp.		Resp.
1. $\frac{8}{9} - \frac{5}{9} =$	$\frac{3}{9}$	5. $8\frac{1}{2} - 4\frac{1}{4} =$	?	9. $8\frac{1}{2} - 7 =$	?
2. $\frac{3}{4} - \frac{1}{3} =$	$\frac{5}{12}$	6. $\frac{8}{9} - \frac{2}{9} =$	?	10. $9\frac{3}{4} - 5\frac{1}{4} =$	?
3. $\frac{3}{5} - \frac{1}{4} =$	$\frac{7}{20}$	7. $\frac{1}{12} - \frac{1}{14} =$	?	11. $5\frac{3}{5} - 1\frac{4}{5} =$	?
4. $7\frac{1}{2} - \frac{3}{4} =$	$6\frac{3}{4}$	8. $\frac{7}{14} - \frac{3}{7} =$	?	12. $10\frac{1}{8} - 3\frac{3}{8} =$	?

Multiplicar fracções

95. Na multiplicação de fracções ha quatro casos a considerar:
1° Multiplicar uma fracção por um numero inteiro.
2° Multiplicar um inteiro por uma fracção.
3° Multiplicar uma fracção por outra fracção.
4° Multiplicar uma fracção por um numero mixto.

1° Caso. Este caso póde ser resolvido de dois modos, ou multiplicando o numerador, ou dividindo o denominador.

Problema. Multiplicar $\frac{3}{4}$ por 4.

Solução. 1° Modo. Multiplicar uma fracção por um numero inteiro é tomar a fracção tantas vezes, quantas são as unidades do inteiro. Assim, $\frac{3}{4} \times 4 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{12}{4} = 3$; pois 4 vezes 3 quartos são 12 quartos, que são 3 inteiros.

2° Modo. Se dividirmos o denominador de $\frac{3}{4}$ por 4, teremos $4 \div 4 = 1$, e o resultado do processo será $\frac{3}{1} = 3$. Esta solução só é praticavel, quando o denominador se divide exactamente pelo inteiro.

Operação

$$\frac{3}{4} \times 4 = \frac{12}{4} = 3$$

$$\frac{3}{4 \div 4} = \frac{3}{1} = 3$$

Regra. *Para se achar o producto de uma fracção e de um numero inteiro, multiplica-se o numerador da fracção pelo inteiro, e escreve-se o producto sobre o denominador.*

Exercicio de applicação. Effectuar as seguintes multiplicações:

1. $\frac{5}{6} \times 3 =$ Resp. $2\frac{1}{2}$	5. $\frac{4}{5} \times 5 =$ Resp. ?	9. $\frac{22}{30} \times 15 =$ Resp. ?
2. $\frac{2}{5} \times 9 =$ » $3\frac{3}{5}$	6. $\frac{11}{12} \times 6 =$ » ?	10. $\frac{28}{35} \times 21 =$ » ?
3. $\frac{1}{3} \times 7 =$ » $2\frac{1}{3}$	7. $\frac{10}{15} \times 12 =$ » ?	11. $\frac{52}{90} \times 30 =$ » ?
4. $\frac{7}{10} \times 8 =$ » $5\frac{3}{5}$	8. $\frac{15}{30} \times 14 =$ » ?	12. $\frac{64}{99} \times 36 =$ » ?

2° Caso. Problema. Multiplicar 6 por $\frac{1}{3}$.

Solução. Multiplicando o inteiro pelo numerador da fracção, temos $6 \times 1 = 6$, que são 6 terços ou 2 inteiros.

$$6 \times \tfrac{1}{3} = \tfrac{6}{3} = 2$$

Exposição. Multiplicando 6 por 1, temos $6 \times 1 = 6$, mas como o multiplicador é $\frac{1}{3}$, isto é, a terça parte de 1, o producto deve ser tambem a terça parte de 6, que é $\frac{6}{3} = 2$. Ainda que a multiplicação de uma fracção por um numero inteiro se opere do mesmo modo que a multiplicação de um inteiro por uma fracção, e dê o mesmo resultado, ha, comtudo, grande differença na analyse das duas operações.

Multiplicar $\frac{1}{3}$ por 6 é repetir um terço 6 vezes, que são 6 terços ou 2 inteiros, e neste caso, o producto é maior do que o multiplicando. Mas multiplicar 6 por $\frac{1}{3}$ é reduzir 6 á sua terça parte, que é $6 \times \frac{1}{3} = \frac{6}{3} = 2$, e neste caso, o producto é menor do que o multiplicando. Para comprehendermos este resultado, notaremos que multiplicar é repetir ou tomar um numero tantas vezes quantas são as unidades do multiplicador. Assim,

Multiplicar 6 por 2 é tomar 6 duas vezes, que são 12.
Multiplicar 6 por 1 é tomar 6 uma vez, que é 6.
Multiplicar 6 por $\frac{1}{2}$ é tomar 6 na sua metade, que é 3.
Multiplicar 6 por $\frac{1}{3}$ é tomar 6 na sua terça parte, que é 2.

Portanto, quando o multiplicador for menor do que a unidade, o producto será sempre inferior ao multiplicando.

3° Caso. Problema. Multiplicar $\frac{2}{3}$ por $\frac{4}{5}$.

Solução. Multiplicando os numeradores, temos $2 \times 4 = 8$; multiplicando depois os denominadores, temos $3 \times 5 = 15$. O producto é $\frac{8}{15}$.

Demonstração. Multiplicando o numerador de $\frac{2}{3}$ por 4, temos $\frac{8}{3}$, isto é, temos 4 vezes 2 terços, que são 8 terços. Mas o multiplicador é a quinta parte de 4 que são $\frac{4}{5}$, e o producto deve ser tambem a quinta parte de $\frac{8}{3}$. Multiplicando agora o denominador de $\frac{8}{3}$ por 5, reduzimos esta fracção á sua quinta parte, e então temos $\frac{8}{15}$, que é o producto da multiplicação.

Operação

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$$

$$\frac{2}{3} \times 4 = \frac{8}{3}$$

$$\frac{8}{3 \times 5} = \frac{8}{15}$$

Regra. *Para se achar o producto de duas ou mais fracções, multiplicam-se entre si os numeradores, e o mesmo se faz com os denominadores, e os dois productos serão os termos respectivos da fracção requerida.*

4° Caso. Quando um ou ambos os factores de uma multiplicação são numeros mixtos, reduzem-se a fracções improprias, e procede-se como na regra precedente; assim, [illegible]

Exercicio de applicação. Effectuar as seguintes multiplicações: [illegible]

13. Um menino estudando $5\frac{1}{2}$ horas por dia, quantas horas estudará em 6 dias? Resp. 33.

14. Um homem andando [illegible] de uma legua por hora, quantas leguas andará em 9 horas? Resp. $6\frac{3}{4}$.

15. Dei $2\frac{1}{2}$ maçãs a cada uma das 6 meninas da minha classe, quantas maçãs lhes dei? Resp. 15.

16. Quanto é sete vezes $6\frac{2}{7}$? Resp. 44.

17. Quanto é dez vezes $5\frac{2}{5}$? Resp. 54.

Multiplicação cancellada

96. A multiplicação de fracções póde ser muito abreviada cancellando-se os numeradores e denominadores iguaes, e dividindo-se os numeradores e denominadores que tiverem um divisor commum. (Vide nº. 60).

Problema. Qual é o producto de [illegible]?

Solução. [illegible]

[illegible]

Problema. Multiplicar [illegible]

Solução. [illegible]

$$\frac{1}{15} \times \frac{1}{14} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{30}$$

[illegible]

Exercicio de applicação. [illegible]

[illegible]

Dividir fracções

97. Na divisão de fracções ha quatro casos a considerar:

1° Dividir uma fracção por um numero inteiro.

2° Dividir um numero inteiro por uma fracção.

3° Dividir uma fracção por outra fracção.

4° Dividir uma fracção por um numero mixto.

1° Caso. Problema. Dividir $\frac{6}{7}$ por 3.

Solução. Esta operação tem por fim dividir 6 sétimos em 3 partes iguaes. Dividindo 6 sétimos por 3 o quociente é [illegible] [illegible]

Processo [illegible]

Regra. [illegible]

Exercicio de applicação. [illegible]

[illegible]

2° Caso. Problema. Qual é o quociente de 6 dividido por $\frac{2}{3}$?

Solução. Dividir 6 por $\frac{2}{3}$ é dividir 6 pela terça parte de 2. Isto se obtem multiplicando 6 por 3 e dividindo o producto por 2; o resultado 9, é o quociente da divisão.

Processo

$$6 \div \frac{2}{3} = \frac{6 \times 3}{2} = 9$$

Exposição. Se dividirmos um numero inteiro por outro inteiro, o quociente será sempre menor do que o dividendo; mas, se o dividirmos por uma fracção, o quociente será sempre maior do que o dividendo, como vemos no problema deste caso. Para comprehendermos este resultado, notaremos que o quociente mostra quantas vezes o dividendo contém o divisor. Se dividirmos 6 por 2, o quociente será 3, porque 6 contém 3 vezes 2; se dividirmos 6 por 1, o quociente será 6, porque 6 contém 6 vezes 1; se dividirmos 6 por $\frac{1}{2}$ o quociente será 12, porque 6 contém 12 meios, etc.

Quando o divisor for menor do que a unidade, o quociente será maior do que o dividendo.

Regra. *Para se dividir um numero inteiro por uma fracção, multiplica-se o inteiro pelo denominador, e divide-se o producto pelo numerador.*

3° Caso. Problema. Dividir $\frac{3}{4}$ por $\frac{2}{5}$?

Solução. Invertendo os termos do divisor, temos $\frac{5}{2}$, multiplicando depois as duas fracções, temos $1\frac{7}{8}$, que é o quociente.

Exposição. Dividir $\frac{3}{4}$ por $\frac{2}{5}$ quer dizer dividir $\frac{3}{4}$ pela quinta parte de 2, o que se obtem dividindo-se $\frac{3}{4}$ por 2, e multiplicando-se o resultado por 5. Ora, multiplicando-se o denominador de $\frac{3}{4}$ por 2, divide-se a fracção por 2; e multiplicando-se o numerador por 5, multiplica-se a fracção por 5, e o resultado é $\frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$. Ora o multiplicador $\frac{5}{2}$ é justamente o divisor $\frac{2}{5}$ invertido.

Processo

$$\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = 7\,\frac{15}{20} / \frac{8}{20} = \frac{15}{8}$$

$$\frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$$

Regra. *Para se dividir uma fracção por outra, invertem-se os termos do divisor, e multiplicam-se as duas fracções, e o resultado obtido será o quociente da divisão.*

4° Caso. Quando um ou ambos os termos da divisão são numeros mixtos, reduzem-se a fracções improprias, e segue-se a regra precedente; assim, $8\frac{1}{4} \div 5\frac{1}{2} = \frac{33}{4} \div \frac{11}{2} = \frac{33}{4} \times \frac{2}{11} = \frac{66}{44} = 1\frac{1}{2}$.

Exercicio de applicação. Effectuar as seguintes divisões:

		Respostas.			Respostas.
1.	$\frac{3}{4}$ por $\frac{1}{4}$.	3	9.	$\frac{4}{5}$ por $\frac{2}{5}$.	?
2.	$\frac{1}{2}$ por $\frac{1}{4}$.	2	10.	$\frac{7}{8}$ por $\frac{1}{8}$.	?
3.	$\frac{5}{6}$ por $\frac{5}{8}$.	$1\frac{1}{3}$	11.	$\frac{3}{14}$ por $\frac{1}{7}$.	?
4.	$\frac{3}{17}$ por $\frac{1}{2}$.	$\frac{6}{17}$	12.	$2\frac{1}{4}$ por $7\frac{1}{2}$.	?
5.	$2\frac{1}{2}$ por $\frac{1}{16}$.	40	13.	$\frac{2}{3}$ por $5\frac{1}{4}$.	?
6.	$4\frac{1}{2}$ por $1\frac{1}{3}$.	$3\frac{3}{8}$	14.	$\frac{7}{9}$ por 8.	?
7.	$4\frac{3}{5}$ por $5\frac{1}{4}$.	$\frac{92}{105}$	15.	$4\frac{2}{3}$ por $2\frac{2}{5}$.	?
8	$\frac{3}{4}$ por $2\frac{1}{2}$.	$\frac{3}{10}$	16.	$8\frac{2}{3}$ por $\frac{1}{3}$.	?

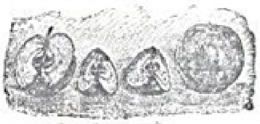
Fracção de fracções

98. Dá-se o nome de fracção de fracções a uma ou mais partes de uma fracção, como $\frac{1}{2}$ de $\frac{2}{3}$, que se lê: um meio de dois terços.

Assim como a unidade póde ser dividida em partes iguaes chamadas fracções, estas partes podem tambem ser subdivididas em outras partes menores, chamadas fracções de fracções.

Illustração. Se dividirmos uma maçã em duas partes iguaes, cada parte será a metade ou $\frac{1}{2}$ da maçã. Se dividirmos depois uma destas metades em duas partes iguaes, cada parte será $\frac{1}{2}$ da metade ou $\frac{1}{4}$ da maçã inteira; logo $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$ é $\frac{1}{4}$ de um inteiro.

Do mesmo modo, $\frac{1}{2}$ de $\frac{2}{3}$ é $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$ de $\frac{3}{4}$ é $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{4}$ de $\frac{4}{5}$ é $\frac{1}{5}$, etc.



Problema. Achar $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$.

Solução. Multiplicando entre si as duas fracções, temos como resultado $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

Operação

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Demonstração. Um terço de $\frac{3}{4}$ é $\frac{1}{4}$, porque um terço de 3 é 1; então, 2 terços de $\frac{3}{4}$ são duas vezes $\frac{1}{4}$ que são $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Regra. *Para se achar uma fracção de outra, multiplicam-se as duas fracções, e o producto será a resposta.*

Nota. Para se achar uma fracção de um numero mixto, reduz-se o numero mixto a uma fracção impropria, e procede-se conforme a regra. Para se achar uma fracção de um numero inteiro, dá-se-lhe o denominador 1, e segue-se a regra; assim, $\frac{3}{4}$ de 8 são $\frac{3}{4} \times \frac{8}{1} = \frac{24}{4} = 6$.

Exercicio de applicação.

		Respostas			Respostas
1.	Achar $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{4}$.	$\frac{1}{12}$	7.	Achar $\frac{1}{4}$ de $\frac{2}{3}$.	?
2.	Achar $\frac{1}{3}$ de $\frac{2}{5}$.	$\frac{2}{15}$	8.	Achar $\frac{1}{5}$ de $\frac{10}{11}$.	?
3.	Achar $\frac{3}{8}$ de 3.	$1\frac{1}{8}$	9.	Achar $\frac{1}{4}$ de 8.	?
4.	Achar $\frac{3}{7}$ de 12.	$5\frac{1}{7}$	10.	Achar $\frac{1}{2}$ de $9\frac{1}{3}$.	?
5.	Achar $\frac{2}{5}$ de $7\frac{1}{2}$.	3	11.	Achar $\frac{1}{4}$ de 20.	?
6.	Achar $\frac{3}{4}$ de $8\frac{1}{3}$.	$2\frac{13}{16}$	12.	Achar $\frac{1}{5}$ de $\frac{1}{4}$.	?

Resolver os seguintes problemas:

1. Dividir a somma de $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{12}$ pela differença entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{5}$. Resp. $14\frac{2}{3}$.

2. Multiplicar 4 nonos por 6 decimos, e dividir o producto por 3 quartos menos 1 sexto. Resp. $\frac{16}{35}$.

3. Dividir $\frac{2}{3}$ por $\frac{1}{2}$, e depois dividir $\frac{3}{4}$ por $\frac{2}{3}$, e sommar os dois quocientes. Resp. $2\frac{1}{10}$.

4. Dividir $\frac{5}{12}$ de $\frac{3}{5}$ por $\frac{3}{4}$. Resp. $\frac{1}{3}$.

5. Qual é a differença entre $\frac{7}{9}$ e $\frac{5}{6}$? Resp. $\frac{1}{18}$.

6. Reduzir a fracção mixta $\frac{4\frac{1}{2}}{8\frac{1}{3}}$ a uma fracção simples.

Solução. O numerador é o dividendo, e o denominador é o divisor; então temos de dividir $4\frac{1}{2}$ por $8\frac{1}{3}$, que dá $\frac{9}{2} \div \frac{25}{3} = \frac{27}{50}$. (Véde n.º **97**).

7. Reduzir a fracção mixta $\frac{5}{7\frac{1}{2}}$ a uma fracção simples. Resp. $\frac{2}{3}$.

8. Dividir $21\frac{1}{3}$ por $18\frac{1}{4}$. Resp. $1\frac{37}{219}$.

9. Multiplicar $\frac{3}{15} \times \frac{3}{16} \times \frac{5}{12} \times \frac{12}{25} \times \frac{7}{9}$. Resp. $\frac{1}{208}$.

10. Multiplicar $13\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times 8\frac{2}{3}$. Resp. $55\frac{1}{5}$.

11. Reduzir $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$ e $\frac{7}{16}$ ao minimo denominador commum. Resp. ?

12. Qual é o resultado da expressão $\frac{5 \times 8 \times 9}{9 \times 10}$? Resp. ?

13. Exprimir $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$ em oitavos. Resp. ?

14. Quanto é $\frac{1}{5}$ de 90$? Resp. ?

15. Quanto é $\frac{4}{5}$ de $8\frac{3}{4}$? Resp. ?

16. Reduzir $\frac{11}{1001}$ e $\frac{13}{1001}$ á sua expressão mais simples. Resp. ?

17. Effectuar a somma dos numeros $8\frac{1}{2}$, $4\frac{3}{4}$ e $9\frac{1}{4}$. Resp. ?

18. De $15\frac{3}{4}$ subtrahir $11\frac{3}{5}$. Resp. ?

19. Quantos inteiros conteem as fracções $\frac{48}{12}$, $\frac{14}{14}$ e $\frac{84}{14}$? Resp. ?

20. Qual é o producto de $7\frac{3}{16} \times 5\frac{4}{15}$? Resp. ?

21. Qual das fracções $\frac{11}{24}$ e $\frac{5}{8}$ é a maior? Resp. ?

22. Achar a differença entre $\frac{13}{27}$ e $\frac{5}{18}$. Resp. ?

23. Quanto sommam $\frac{2}{3}$ de 18, $\frac{3}{4}$ de 32 e $\frac{5}{8}$ de 40? Resp. ?

24. Qual é a differença entre $\frac{5}{6}$ de 60, e $\frac{3}{4}$ de 60? Resp. ?

25. Vinte e seis oitavos quantos quartos são? Resp. ?

26. Dezoito terços quantos sextos são? Resp. ?

27. Dividir $\frac{3}{8} + \frac{5}{8}$ por $\frac{1}{2} - \frac{2}{5}$. Resp. ?

28. Se a $\frac{3}{8}$ for addicionada certa fracção, a somma será $\frac{9}{17}$; qual é essa fracção? Resp. ?

29. Reduzir a inteiros as fracções $\frac{102}{12}$, $\frac{225}{15}$ e $\frac{1825}{25}$. Resp. ?

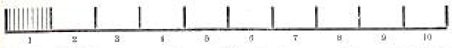
30. De $\frac{3}{5}$ de um mil-réis subtrahindo $\frac{3}{4}$ de um cruzado, quanto resta? Resp. ?

FRACÇÕES DECIMAES

99. Fracções decimaes são partes da unidade dividida em decimos, centesimos, millesimos ou em outras partes ainda menores, na razão décupla.

100. As diversas fracções decimaes dividem-se do seguinte modo:

Uma unidade	divide-se em	10 decimos.
Um decimo..............	» »	10 centesimos.
Um centesimo...........	» »	10 millesimos.
Um millesimo...........	» »	10 decimos millesimos.
Um decimo millesimo	» »	10 centesimos millesimos.
Um centesimo millesimo...	» »	10 millionesimos, etc.



Se dividirmos uma linha em 10 partes iguaes, cada parte será um decimo da linha, e se escreverá 0,1; se dividirmos este decimo em 10 partes iguaes, cada parte será um centesimo da linha, e se escreverá 0,01, e assim por diante.

101. A fracção decimal escreve-se ao lado direito do numero inteiro, separada por uma virgula, que se chama **virgula decimal**, como 2,5 que se lê: *dois inteiros e cinco decimos.*

Se a fracção decimal não está annexa a um numero inteiro, escreve-se uma cifra no logar do numero inteiro, como 0,5 que se lê: *5 decimos*; 0,75, que se lê: *75 centesimos*. Esta cifra serve para mostrar que não ha inteiros, e que o numero que está á sua direita é uma fracção decimal.

102. As fracções decimaes differem em dois pontos das fracções ordinarias:

1º Na fracção ordinaria, a unidade divide-se em 2, 3, 4, 5 ou qualquer numero de partes iguaes, denominadas meios, terços, quartos, quintos, etc.; e na fracção decimal, a unidade divide-se só em 10 partes iguaes ou potencias de 10, denominadas decimos, centesimos, millesimos, etc.

2º A fracção ordinaria tem sempre o denominador expresso, e por isso é representada por dois numeros, exemplo: $\frac{5}{9}$, $\frac{15}{19}$. A fracção decimal tem na escripta o denominador occulto e por isso é representada por um só numero, exemplo: 0,8, que se lê: *8 decimos*; 0,25, que se lê: *25 centesimos.*

103. As fracções decimaes seguem a ordem decrescente da esquerda para a direita, começando desde a virgula decimal. Os decimos occupam a primeira ordem; os centesimos, a segunda; os millesimos, a terceira; os decimos millesimos, a quarta, e assim por diante, como se vê no exemplo seguinte:

Inteiros								Decimaes					
Milhões	Centenas de milhares	Dezenas de milhares	Milhares	Centenas	Dezenas	Unidades	Virgula decimal	Decimos	Centesimos	Millesimos	Decimos millesimos	Centesimos millesimos	Millionesimos
....4	2	3	9	7	6	5	,	7	5	4	3	5	2....

104. De dois modos podemos lêr uma fracção decimal, a saber:

1º Modo: Lê-se a fracção decimal como um numero inteiro, accrescentando o nome da ultima ordem da fracção, como 0,725, que se lê: *725 millesimos.*

2º Modo: Enuncia-se o numero e o nome de cada ordem, como 0,725, que se lê: *7 decimos, 2 centesimos e 5 millesimos.* O primeiro modo é o que se deve praticar.

Exercicio de applicação. Os discipulos devem lêr as seguintes fracções, e depois o professor dictará estas ou outras que elles escreverão na pedra.

1.	0,2 (2 decimos)	**7.**	0,99.	?	**13.**	2,050.	?
2.	0,8 (8 decimos)	**8.**	0,650.	?	**14.**	8,750.	?
3.	0,15 (15 centesimos)	**9.**	0,705.	?	**15.**	4,0055.	?
4.	0,025 (25 millesimos)	**10.**	0,080.	?	**16.**	3,1250.	?
5.	0,508 (508 millesimos)	**11.**	0,0005.	?	**17.**	6,0185.	?
6.	0,56 (56 centesimos)	**12.**	0,3006.	?	**18.**	·2,050.	?

Os discipulos escreverão com algarismos as seguintes fracções:

1.	35 centesimos.	**6.**	158 decimos millesimos.
2.	9 decimos.	**7.**	108 decimos millesimos.
3.	3 centesimos.	**8.**	850 centesimos millesimos.
4.	5 millesimos.	**9.**	1590 centesimos millesimos.
5.	80 millesimos.	**10.**	500 millionesimos.

Reduzir decimaes á mesma denominação

105. Quando duas ou mais fracções decimaes teem igual numero de algarismos, são da mesma denominação; assim, 0,25, 0,50 e 0,08 são da mesma denominação, porque todas ellas são centesimos.

Quando ellas teem numero desigual de algarismos, são de differentes denominações; assim, 0,5, 0,22, e 0,125 são de differentes denominações, porque a primeira é decimos, a segunda centesimos e a terceira millesimos.

Nota. Prefixar um algarismo a um numero é escrever o algarismo á esquerda do numero, e accrescentar-lhe um algarismo é escrevêl-o á direita; de sorte que, se prefixarmos 5 ao numero 9, teremos 59, e se lhe accrescentarmos 5, teremos 95.

106. Antes de entrarmos na reducção das fracções decimaes, devemos conhecer as propriedades seguintes:

1ª Se prefixarmos uma cifra a 0,2 (2 decimos) esta fracção tornar-se-á 0,02 (2 centesimos), que é a sua decima parte, porque o algarismo 2 passa da ordem dos decimos para a dos centesimos; se ainda prefixarmos outra cifra, a fracção tornar-se-á 0,002 (2 millesimos), que é a sua centesima parte.

2ª Se accrescentarmos uma ou mais cifras a uma fracção decimal, não lhe alteraremos o valor, porque estas cifras ainda que lhe mudam a denominação, não lhe alteram o valor; pois, se accrescentarmos uma cifra a 0,2, esta fracção ficará 0,20; se accrescentarmos duas cifras, ficará 0,200, ora dois decimos, vinte centesimos e duzentos millesimos são fracções iguaes.

Inteiros	Decimos	Centesimos	Millesimos
0,	2		
0,	0	2	
0,	0	0	2
0,	2		
0,	2	0	
0,	2	0	0

Problema. Reduzir 0,5, 0,15, 0,04 e 0,125 á mesma denominação.

Solução. Iguala-se em todas as fracções o numero de algarismos decimaes accrescentando-se-lhes cifras, como vemos no processo que está ao lado.

Processo

0,5	=0,500
0,15	=0,150
0,04	=0,040
0,125	=0,125

Regra. *Para se reduzirem fracções decimaes á mesma denominação, iguala-se em todas o numero de algarismos decimaes, accrescentando-se-lhes cifras.*

Alteração no valor dos numeros decimaes

107. Para se tornar um numero decimal 10 vezes maior, muda-se a virgula da ordem onde está para a immediata á direita; para se tornar 100 vezes maior, muda-se para a ordem seguinte, e assim por diante.

Demonstração. Se em 45,005 mudarmos a virgula decimal para a ordem immediata á direita, o numero ficará elevado a 450,05, isto é, 10 vezes maiores, porque a parte inteira, que era 45, passou para 450, e a fracção, que era 5 millesimos, tornou-se 5 centesimos. Se a mudarmos para a segunda ordem, o numero ficará elevado a 4500,5, isto é, 100 vezes maior, etc.

108. Para se reduzir um numero decimal á sua decima parte, bastará mudar a virgula decimal para a ordem immediata á esquerda; para a reduzir á centesima parte, bastará mudal-a para a segunda ordem, e assim por diante.

Demonstração. Se em 200,54 mudarmos a virgula decimal para a ordem que está á esquerda, o numero ficará reduzido a 20,054, isto é, ficará reduzido á sua decima parte, porque a parte inteira, que era 200, ficou reduzida a 20; e a fracção, que era 54 centesimos, passou para 54 millesimos; e assim o numero irá diminuindo o seu valor, em cada ordem que a virgula for sendo mudada para a esquerda.

Regra. *Para se tornar um numero decimal dez, cem, ou mil vezes maior, adianta-se a virgula decimal uma, duas ou tres ordens para a direita; e para a reduzir á sua decima, centesima ou millesima parte, remove-se a virgula decimal uma, duas ou tres ordens para a esquerda.*

Exercicio de applicação. Operar os seguintes exercicios:

	Respostas
1. Tornar o numero 54,375 cem vezes maior.	5437,5.
2. Reduzir o numero 54,375 á sua centesima parte.	0,54375.
3. Reduzir o numero 8540,5 á sua decima parte.	854,05.
4. Tornar a fracção 0,55 cem vezes maior.	55.
5. Reduzir a fracção 0,55 á centesima parte.	0,0055.
6. Reduzir o numero 7,5 á millesima parte.	0,0075.

Transformar fracções decimaes em ordinarias

109. As fracções decimaes podem ser facilmente transformadas em fracções ordinarias, e estas podem igualmente ser transformadas em decimaes.

110. A fracção decimal tem na escripta um denominador occulto, que póde ser expresso por 1 e tantas cifras, quantos forem os algarismos da fracção decimal. Assim, 0,5 é igual a $\frac{5}{10}$; 0,05 é igual a $\frac{05}{100} = \frac{5}{100}$.

Problema. Transformar 0,25 em uma fracção ordinaria.

Solução. Como esta fracção decimal tem dois algarismos, o seu denominador será 100; e a fracção ordinaria será 25 centavos, que simplificada dá um quarto.

$$0,25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

Regra. *Para se transformar uma fracção decimal em uma fracção ordinaria, escreve-se a fracção decimal sem a virgula como numerador, e dá-se-lhe como denominador 1 seguido de tantas cifras*

quantos forem os seus algarismos decimaes, e simplifica-se a fracção resultante, se for reduzivel.

Nota. Chamam-se algarismos decimaes sómente aquelles que constituem a fracção decimal; assim, no numero 18,15 os algarismos decimaes são 15; na fracção 0,024 os algarismos decimaes são 024, etc.

Exercicio. Transformar em fracções ordinarias as seguintes decimaes:

1.	0,75	Resp.	$\frac{3}{4}$	6.	0,50	Resp.	?	11.	0,025	Resp.	?
2.	0,20	»	$\frac{1}{5}$	7.	0,58	»	?	12.	0,016	»	?
3.	0,125	»	$\frac{1}{8}$	8.	0,025	»	?	13.	0,03125	»	?
4.	0,375	»	$\frac{3}{8}$	9.	0,0625	»	?	14.	5,046	»	?
5.	4,050	»	$4\frac{1}{20}$	10.	0,325	»	?	15.	0,0728	»	?

Transformar fracções ordinarias em decimaes

111. Uma fracção ordinaria, transformada em uma decimal, póde produzir, ou uma **decimal exacta**, ou uma **decimal periodica**, como notaremos nos dois exemplos seguintes:

1º Problema. Transformar $\frac{3}{4}$ em uma fracção decimal.

Solução. Accrescentando uma cifra ao numerador, e dividindo-o pelo denominador, ficam 2 de resto; accrescentando outra cifra ao resto e continuando a divisão, não ha mais resto. Então, como se juntaram duas cifras ao numerador, separam-se dois algarismos no quociente, que fica 0,75. Esta fracção é **decimal exacta**, porque não deixou resto na divisão.

```
30 | 4
20   ,75
 0
```

2º Problema. Transformar $\frac{2}{3}$ em uma fracção decimal.

Solução. Accrescentando-se uma cifra ao numerador, e dividindo-o pelo denominador, ficam 2 de resto; accrescentando outra cifra ao resto, e dividindo-o pelo denominador, ficam tambem 2 de resto; continuando a divisão, o quociente será sempre 6, deixando 2 de resto. Como a divisão nunca poderá ficar exacta, a fracção decimal neste caso é **periodica**, e por isso bastará accrescentar sómente tres cifras ao numerador, e apartar tres algarismos no quociente, que ficará 0,666, isto é, 666 millesimos.

```
20 | 3
 20  ,666
  20
   2
```

Regra. *Para se transformar uma fracção ordinaria em uma decimal, accrescentam-se uma ou mais cifras ao numerador, e depois divide-se pelo denominador, e no quociente separam-se com a virgula tantos algarismos decimaes, quantas forem as cifras accrescentadas. Se o quociente não tiver numero sufficiente, prefixam-se-lhe cifras.*

Exercicio. Transformar em decimaes as seguintes fracções ordinarias:

1.	$\frac{4}{5}$	Resp.	0,8	6.	$\frac{1}{4}$	Resp.	?	11.	$\frac{3}{125}$	Resp.	?
2.	$\frac{3}{4}$	»	0,75	7.	$\frac{1}{20}$	»	?	12.	$\frac{13}{40}$	»	?
3.	$\frac{4}{25}$	»	0,16	8.	$\frac{1}{400}$	»	?	13.	$\frac{21}{200}$	»	?
4.	$\frac{3}{40}$	»	0,075	9.	$\frac{3}{250}$	»	?	14.	$\frac{17}{32}$	»	?
5.	$8\frac{7}{50}$	»	8,14	10.	$5\frac{23}{500}$	»	?	15.	$\frac{3}{250}$	»	?

Addição decimal

112. Como a addição de numeros decimaes se opera do mesmo modo que a de numeros inteiros, não é necessario dar mais esclarecimentos além da regra.

Regra. *Para se sommarem fracções decimaes, escrevem-se as differentes parcellas umas debaixo das outras, de sorte que as ordens da mesma denominação fiquem em columna. Sommam-se todas as parcellas como se fossem numeros inteiros, e escreve-se a virgula decimal na somma.*

Exercicio de applicação.

(1.)	(2.)	(3.)	(4.)	(5.)	(6.)
0,9	0,25	0,005	4,55	8,125	10,85
0,5	0,08	0,0015	2,05	2,008	15,09
0,8	0,75	0,1450	1,08	3,25	17,007
0,15	0,155	0,3005	0,80	0,800	18,085
0,12	0,15	0,437	5,125	5,012	29,15
0,01	0,001	0,11	3,02	3,120	47,955
2,48			16,625		

7. Sommar 0,75 + 0,075 + 0,0075 + 0,00075.	Resp. ?
8. Sommar 41,35 + 25,005 + 18,555 + 0,850.	» ?
9. Sommar 58,70 + 19,05 + 75,010 + 0,009.	» ?
10. Sommar 39,750 + 17,005 + 9,705 + 7,150.	» ?

Subtracção decimal

113. Regra. *Para se subtrahir uma fracção decimal de outra, reduzem-se ambas á mesma denominação; escreve-se o subtrahendo debaixo do minuendo, e, depois de se operar como em numeros inteiros, escreve-se a virgula decimal no resto.*

Nota. Se o minuendo for um numero inteiro, accrescentam-se-lhe a virgula decimal e tantas cifras quantos forem os algarismos da fracção do subtrahendo.

Exercicio de applicação. Operar as seguintes subtracções:

	(1.)	(2.)	(3.)	(4.)	(5.)
Minuendo	0,750	15,120	0,005	0,125	0,101
Subtrahendo	0,155	8,750	0,002	0,005	0,081
Resto	0,595				

(6.)	(7.)	(8.)	(9.)	(10.)	(11.)
4,005	25,001	150,010	192,	1,	20,705
2,750	12,008	149,990	165,725	0,0001	4,050

12. De 0,5 subtrahir 0,0024.	Resp. 0,4976.
13. De 3 subtrahir 0,003.	» 2,997.
14. De 13,5 subtrahir 8,037.	» 5,463.
15. De 1000 subtrahir 0,001.	» 999,999.

Multiplicação decimal

114. Regra. *Para se multiplicarem fracções decimaes, escreve-se o multiplicador debaixo do multiplicando, e opera-se a multiplicação como se os dois factores fossem numeros inteiros, e no producto, separam-se com a virgula tantos algarismos, quantos algarismos decimaes tiverem ambos os factores; e, se o producto não tiver numero sufficiente, prefixam-se-lhe cifras até igualar o numero.*

Para facilitar a comprehensão desta regra, vamos resolver alguns casos que podem occorrer na multiplicação decimal.

Solução. No primeiro caso, como ha um algarismo decimal no multiplicando e outro no multiplicador, separam-se dois algarismos no producto, e o resultado será 63 inteiros.

No segundo caso, como ha quatro algarismos decimaes nos dois factores, separam-se quatro algarismos no producto, e o resultado será 0,1875.

No terceiro caso, como os dois factores teem quatro algarismos decimaes, e o producto tem só dois, prefixam-se-lhe duas cifras para igualar o numero, e o resultado será 0,0075. Vide a nota do n.º **110.**

1º	2º	3º
7,5	0,25	0,15
8,4	0,75	0,05
300	125	0,0075
600	175	
63,00	0,1875	

Exercicio de applicação. Operar as seguintes multiplicações

	(1.)	(2.)	(3.)	(4.)	5.)	(6.)
Multiplicando	0,135	0,152	0,756	8,525	45,455	0,755
Multiplicador	0,005	0,089	0,845	0,025	0,805	0,755
Producto	0,000675					

(7.)	(8.)	(9.)	(10.)	(11.)	12.)	(13.)
20,532	25,001	0,0755	0,750	4,25	700,2	0,00024
875,	1,111	0,7500	0,008	3,05	400,7	0,00035

14. Multiplicar 1,035 por 17.	Resp. 17,595.
15. Multiplicar 19 por 0,125.	» 2,375.
16. Multiplicar 4000 por um millionesimo.	» 0,004.

Divisão decimal

115. Na divisão decimal ha dois casos a considerar, que são:

1° Quando o dividendo tem menos algarismos decimaes do que o divisor.

2° Quando tem mais algarismos decimaes do que o divisor.

1° Caso. Problema. Dividir 17,5 por 0,25.

Solução. Se ambos os termos da divisão tivessem igual numero de ordens decimaes, não haveria difficuldade, operava-se como em inteiros; mas, como o dividendo tem menos um algarismo decimal do que o divisor, iguala-se o numero com uma cifra, no que não se altera o valor do dividendo, porque 0,5 = 0,50. Opera-se depois como em numeros inteiros, e o quociente será 70 inteiros.

```
17,50 |_,25
17,5     70
00,0
```

Regra. *Quando o dividendo contém menos algarismos decimaes do que o divisor, iguala-se o numero, accrescentando-se cifras ao dividendo, opera-se como em inteiros, e o quociente será um numero inteiro.*

Operar as seguintes divisões:

1. 22,5 ÷ 0,25 = 90 | 3. 11,2 ÷ 0,14 = ? | 5. 8,25 ÷ 0,5 = ?
2. 5,25 ÷ 0,75 = ? | 4. 8,4 ÷ 2,4 = ? | 6. 2,56 ÷ 0,032 = ?

2° Caso. Problema. Dividir 0,5625 por 0,125.

Solução. Quando o dividendo tem mais algarismos decimaes do que o divisor, iguala-se o numero, separando-se no quociente, com a virgula, os algarismos que faltarem. Ora, o dividendo tem quatro, e o divisor tem tres; separa-se com a virgula um algarismo no quociente, e ficará 4,5 (4 inteiros e 5 decimos).

```
,5625 |_,125
 500     4,5
 625
 625
 000
```

Problema. Dividir 0,0075 por 0,15.

Solução. Effectuada a divisão, o quociente é 5, mas como o dividendo tem quatro algarismos, e o divisor tem só dois, temos de apartar dois algarismos no quociente, e como este tem um algarismo só, prefixar-lhe-emos uma cifra e ficará ,05 (cinco centesimos).

```
,0075 |_,15
  75    ,05
  00
```

Regra. *Quando o dividendo tem mais algarismos decimaes do que o divisor, separam-se no quociente tantos algarismos decimaes quantos houver de differença; e, se o quociente não tiver numero sufficiente, prefixam-se-lhe cifras.*

Exercicio de applicação. Operar as seguintes divisões:

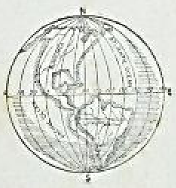
1. 86,075 ÷ 2,75 = ? Resp. 31,3 | 6. 11 ÷ 0,11 = ? Resp. ?
2. 24,73704 ÷ 3,44 = ? » 7,191 | 7. 0,11 ÷ 11 = ? » ?
3. 37,41 ÷ 10 = ? » 3,741 | 8. 7,58 ÷ 200 = ? » ?
4. 9,9 ÷ 0,0225 = ? » 440, | 9. 15,625 ÷ 2,5 = ? » ?
5. 0,000343 ÷ 3,43 = ? » 0,0001 | 10. 17,28 ÷ 0,0144 = ? » ?

Nota. Para mais amplo conhecimento das fracções decimaes, vêde a nossa **Arithmetica Progressiva, 32ª edição.**

SYSTEMA METRICO

116. O systema de pesos e medidas, adoptado no Brazil por lei n. 1157 de 26 de Junho de 1862, e o unico auctorizado entre nós, desde 1 de Julho de 1873, é o **Systema metrico decimal,** organizado em França, no seculo XVII, por uma commissão de homens notaveis pelos seus conhecimentos mathematicos.

Esta commissão tomou como base do novo systema a distancia do Equador ao Polo do Norte, segundo o meridiano de Pariz; calculou esta distancia e achou que tinha 5130740 toesas; dividiu este espaço em 10 milhões de partes iguaes, e tomou o comprimento de uma destas partes para a dimensão do metro. De sorte que o *metro tem a decima millionesima parte da distancia do Equador ao Polo.*



Nota. Na figura ao lado, vê-se representada entre o ponto **E** e o ponto **N** a distancia do Equador ao Polo do Norte.

117. A palavra **metro** vem do grego *metron* que significa medida. Este termo já era usado na composição de outras palavras, como thermometro, chronometro, barometro, etc.

Este systema chama-se metrico, porque todas as suas medidas teem as dimensões tiradas do metro; chama-se tambem decimal, porque todas as suas medidas estão sujeitas á divisão decimal, e vulgarizou-se rapidamente por toda a Europa e America, por ser muito vantajoso, simples e de facil comprehensão.

Medidas metricas

118. As unidades principaes deste systema, que foram auctorizadas por lei no Brazil, são quatro, a saber:

Metro, unidade de comprimento.

Litro, medida de capacidade para liquidos e seccos.

Grammo, unidade de peso.

Aro, medida agraria, isto é, para terrenos de cultura.

Nota. O systema metrico francez tem mais duas unidades principaes que são: o **estereo** medida para lenha e madeiras de construcção, e o **franco** unidade monetaria. Estas duas unidades não foram adeptadas no Brazil.

119. As unidades maiores do que a principal chamam-se **multiplos,** e as menores chamam-se **submultiplos** ou **divisões.**

Para se exprimirem os multiplos das unidades ou medidas principaes, adoptaram-se as seguintes palavras gregas:

Myria, que significa dez mil.............. 10000
Kilo, que significa mil.. 1000
Hecto, que significa cem 100
Deca, que significa dez.................. 10

Para se exprimirem os submultiplos ou divisões, adoptaram-se as seguintes palavras latinas:

Deci, que significa a decima parte......... 0,1
Centi, que significa a centesima parte...... 0,01
Milli, que significa a millesima parte....... 0,001

120. Estas palavras prefixas ao nome de cada medida exprimem todos os seus multiplos e divisões, como se vê na tabella seguinte:

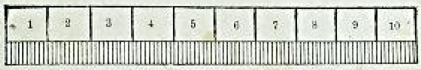
	COMPRIMENTO	PESO	CAPACIDADE	SUPERFICIE	VALORES
Multiplos	Myriâmetro	....	....	....	10000
	Kilómetro	Kilogrâmmo	Kilolitro	....	1000
	Hectómetro	Hectogrâmmo	Hectolitro	Hectâro	100
	Decâmetro	Decagrâmmo	Decalitro	....	10
	Métro	**Grâmmo**	**Litro**	**Aro**	**Unidade**
Divisões	Decimetro	Decigrâmmo	Decilitro	....	0,1
	Centimetro	Centigrâmmo	Centilitro	Centiâro	0,01
	Millimetro	Milligrâmmo	Millilitro	....	0,001

Grandeza e divisões das medidas metricas

121. O **metro** tem o comprimento da decima millionesima parte da distancia do Equador ao Polo, e é a medida fundamental do systema.

O metro divide-se em 10 decimetros;
o decimetro divide-se em 10 centimetros;
o centimetro divide-se em 10 millimetros.

Nota. A escala abaixo mostra o tamanho exacto de um decimetro dividido em 10 centimetros, e cada centimetro dividido em 10 millimetros.

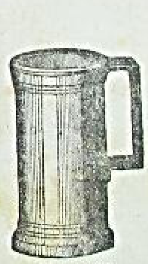


122. Como o decametro (dez metros) e o hectometro (cem metros) são distancias muito curtas para medir estradas, tomou-se o **kilometro** (mil metros) para medida itineraria. De sorte que, a extensão de uma estrada, que mede dois mil metros, diz-se que tem 2 kilometros; a que tem tres mil e quinhentos metros, diz-se que tem 3 kilometros e 500 metros, etc.

123. **O litro** tem a capacidade de um decimetro cubico, isto é, tem um decimetro de comprimento, um decimetro de largura e um decimetro de altura. Para se medir liquido, dá-se ao litro a fórma cylindrica, como se vê na figura ao lado.

O litro divide-se em 10 decilitros; o decilitro divide-se em 10 centilitros; o centilitro divide-se em 10 millilitros.

Os multiplos do litro são o decalitro (dez litros) e o hectolitro (cem litros). O decalitro é inteiramente desusado.



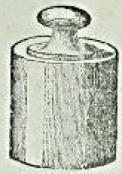
Fórma do litro

124. O **grammo** tem o peso de um centimetro cubico de agua distillada na temperatura de quatro graus centigrados.

O grammo divide-se em 10 decigrammos; o decigrammo divide-se em 10 centigrammos; o centigrammo divide-se em 10 milligrammos.

125. O grammo e os seus multiplos decagrammo e hectogrammo, como são pesos muito pequenos, adoptou-se o **kilogrammo** (mil grammos) para a unidade de peso no commercio. As fracções do kilogrammo são sempre expressas em grammos. Exemplo: 8 kilogrammos e 750 grammos.

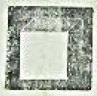
No commercio usa-se quasi sempre da palavra **kilo** por abreviatura de kilogrammo.



Fórma do kilogrammo

126. Para se avaliarem pesos grandes, como carga de navios, quantidades de carvão de pedra, etc., adoptaram-se as duas unidades seguintes:

Quintal metrico que tem cem kilogrammos.
Tonelada metrica que tem mil kilogrammos.



Nota. Dá-se a estas unidades o qualificativo de *metricas*, para as distinguir das unidades antigas que tinham o mesmo nome, mas peso differente. (Vêde n.° **139**).

Podemos avaliar facilmente as tres unidades de peso, notando que

o grammo tem o peso de um centimetro cubico de agua distillada;
o kilogrammo tem o peso de um decimetro cubico de agua distillada;
a tonelada metrica tem o peso de um metro cubico de agua distillada.

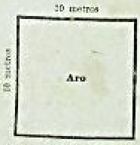
Na figura ao lado, vemos a capacidade de um centimetro cubico.

A palavra grammo não vem do grego *gramma*, que significa lettra, escripta, carta, etc., mas de *grammarion* que significa um terço de uma onça grega; por isso deve chamar-se grammo e não gramma.

127. O peso que uma mercadoria tem conjunctamente com o caixão, capa ou envoltorio em que está acondicionada, chama-se **peso bruto;** o peso da mercadoria sem o envoltorio chama-se **peso liquido,** e o peso do envoltorio chama-se **tára.** Se uma barrica de farinha tem o peso bruto de 88 kilos, e 10 de tára, é claro que o seu peso liquido é 88 — 10 = 78 kilos.

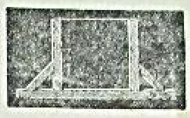
128. Aro é um quadrado que tem 10 metros de comprimento e 10 de largura; tem uma superficie de 100 metros quadrados, e serve para medir mattas e terrenos de cultura.

O multiplo do aro é o **hectaro,** que tem 100 aros; e o submultiplo é o centaro, que tem a centesima parte do aro, e tem um metro quadrado.



Nota. Daremos mais esclarecimentos sobre o aro, quando o empregarmos na medição de terrenos. (N.° **141**).

129. O **estéreo** é a medida para lenha, e consta de dois esteios fincados em um estrado de madeira, tendo cada um a altura de um metro, e havendo tambem entre elles igual distancia.



Estéreo

Corta-se a lenha em achas de um metro de comprimento, collocam-se estas achas em camadas, sobre o estéreo, até chegar á altura dos esteios, e está ahi um estéreo de lenha. Esta medida, ainda que faz parte do Systema metrico francez, não foi adoptada por lei no Brazil. Entre nós, a lenha vende-se ás carradas, ás talhas e aos feixes.

130. O **franco,** unidade monetaria do Systema metrico francez, é uma moeda de prata que pesa 5 grammos, tem o diametro de 23 millimetros e vale $360 de nossa moeda, com o cambio ao par. Esta unidade tambem não foi adoptada no Brazil.

Abreviaturas do systema metrico

131. No systema metrico ha as seguintes abreviaturas:

1ª *O nome de cada medida exprime-se com a sua lettra inicial minuscula no alto do numero.* Assim, 5^{m} lê-se: 5 metros; 4^{g} lê-se: 4 grammos; 2^{l} lê-se: 2 litros, etc.

Como as medidas metricas teem a divisão decimal, as suas fracções ou submultiplos escrevem-se do mesmo modo que as fracções decimaes; sómente as palavras *decimos, centesimos* e *millesimos* se exprimem com *deci, centi* e *milli* juntas com o nome da medida. Assim, cinco decimetros escrevem-se $0^{m},5$; cinco centimetros escrevem-se $0^{m},05$, e cinco millimetros escrevem-se $0^{m},005$.

2ª *Quando as fracções ou submultiplos não estão unidos a inteiros, podem ser tambem representados por duas lettras minusculas, sendo uma a inicial do submultiplo e a outra a inicial da medida.* Assim, 5dm. significa 5 decimetros; 4cm. significa 4 centimetros; 3mg. significa 3 milligrammos; 15 mm. significa 15 millimetros, etc.

3ª *A abreviatura dos multiplos é formada por duas lettras iniciaes, sendo uma maiuscula e outra minuscula.*

Assim, 18 Km. lê-se: 18 kilometros; 15 Kg. 500 lê-se: 15 kilogrammos e 500 grammos; 12 Km. 90 lê-se: 12 kilometros e 90 metros; 18 Hl. lê-se: 18 hectolitros, etc.

Nota. Lettra maiuscula é lettra grande; lettra minuscula é lettra pequena, e lettra inicial é a primeira lettra de um nome

Exercicio de applicação. Lêr as seguintes quantidades metricas:

1.	$50^{m},15$	6.	25cm.	11.	$0^{m},75$	16.	35Hl.
2.	$9^{g},05$	7.	7dl.	12.	$0^{g},015$	17.	15Kg.
3.	$15^{l},08$	8.	9dg.	13.	$0^{m},008$	18.	8Km.250
4.	$8^{g},015$	9.	15mg.	14.	$0^{l},5$	19.	12Kg.750
5.	$6^{m},125$	10.	20mm.	15.	$0^{g},105$	20.	7Km.80

Sommar quantidades metricas

132. As quatro operações sobre as quantidades metricas seguem em tudo as regras das operações sobre decimaes, e resolvem-se do mesmo modo.

Problema. Sommar $15^{m},45 + 8^{m},50 + 16^{m},25$.

Solução. Escrevem-se as tres quantidades em columna, e opera-se como se ellas fossem numeros inteiros, e na somma escrevem-se a virgula decimal e a lettra inicial. A somma das tres quantidades é 40 metros e 20 centimetros. (Vêde n. **112**).

$$\begin{array}{r} 15^{m},45 \\ 8^{m},50 \\ 16^{m},25 \\ \hline 40^{m},20 \end{array}$$

1. Um negociante vendeu de uma peça de panno $8^{m},50$; vendeu mais $7^{m},25$; vendeu depois $4^{m},75$ e ficou um resto de panno com $1^{m}50$; quantos metros tinha a peça? Resp. 22^{m}.

2. Sommar as seguintes quantidades de vinho: $20^{l},5 + 10^{l},8, + 35^{l},7 + 20^{l},2$. Resp. ?

3. Um annel pesava $20^{g},55$; outro pesava $18^{g},08$, e outro pesava $11^{g},37$; qual era o peso dos 3 anneis? Resp. ?

4. Qual é a somma de $20^{m},5 + 15^{m},015 + 32^{m},10 + 19^{m},075$?

5. A estrada de ferro do Rio de Janeiro á Barra do Pirahy tem 108Km.80; da Barra á Cachoeira tem 157Km.198, e da Cachoeira a S. Paulo tem 231Km.20; qual é a distancia do Rio a S. Paulo pela estrada de ferro? Resp. ?

Subtrahir

133. Problema. De $21^{m},15$ tirando $17^{m},75$ quanto **resta?**

Solução. Opera-se a subtracção como se os dois termos fossem numeros inteiros, e no resto escrevem-se a virgula decimal e a lettra inicial. O resto é 3 metros e 40 centimetros. (Vêde n. **113**).

$$\begin{array}{r} 21^{m},15 \\ 17^{m},75 \\ \hline 3^{m},40 \end{array}$$

1. Um garrafão tinha $9^{l},5$ de vinagre, tirando-se delle $5^{l},8$, quanto restou? Resp. $3^{l},7$.

2. De uma barra de prata que pesava $84^{g},15$ cortando um pedaço que pesava $35^{g},75$, quanto restou? Resp. ?

3. De 25 kilos e 400 grammos tirando 17 kilos e 750 grammos, quanto resta? Resp. 7 kilos e 650.

4. Achar a differença entre $29^{m},90$ e $39^{m},80$. Resp. ?

5. A distancia do Rio de Janeiro até S. Paulo, pela estrada de ferro, é de 496 kilometros e 298 metros; quando o trem chega á Cachoeira, já tem percorrido 231 kilometros e 20 metros; que distancia ainda lhe resta percorrer para chegar a S. Paulo? Resp. ?

Multiplicação decimal

134. Problema. Em quanto importam $25^{m},75$ de chita a 500 réis cada metro?

Solução. Opera-se a multiplicação como se fossem numeros inteiros, e como ha dois algarismos decimaes no multiplicando, separam-se dois algarismos decimaes no producto, que ficará 12875 que são 12$875. (Vêde n. **114**).

$$\begin{array}{r} 25,75 \\ 500 \\ \hline 12875,00 \\ 12\$875 \end{array}$$

1. Em quanto importam $15^{m},50$ de flanella a 800 réis o metro? Resp. 12$400

2. Custando um grammo de platina 2$000, quanto devem custar $8^{g},15$? Resp. ?

3. Quantos metros de fazenda teem 9 peças, tendo cada uma $75^{m},25$? Resp. ?

4. Se um litro de azeite custa 1$200, quanto devem custar $8^{l},5$? Resp. ?

Divisão decimal

135. Problema. Dividir $25^{m},75$ em 5 partes iguaes.

Solução. Como no dividendo ha dois algarismos decimaes, separam-se tambem dois no quociente, que ficará 5,15, isto é $5^{m},15$. (Vêde n. **115**).

$$\begin{array}{r|l} 25,75 & 5 \\ \hline 0\ 20 & 5,15 \end{array}$$

1. Comprei $25^{m},75$ de chita por 12$875, quanto me custou cada metro? Resp. $500

2. Comprei $7^{l},5$, de vinho por 4$500, a como me ficou cada litro? Resp. ?

3. Doze colheres iguaes de prata pesaram $194^{g},88$, quanto deverá pesar cada uma? Resp. ?

4. Comprei $25^{m},85$ de nobreza por 103$400, quanto me custou cada metro? Resp. ?

Reducções metricas

136. Para reduzirmos medidas metricas a medidas antigas e vice-versa, é necessario primeiro compararmos umas com as outras, para vermos que relação ha entre ellas. Vamos começar pelas medidas de comprimento.

O **metro** substituiu *a braça, a vara, o covado, o palmo e a pollegada* do antigo systema de medidas. Comparando essas medidas com as do systema metrico, achamos a seguinte relação:

Braça	tem	$2^m,2$	Pé	tem	$0^m,33$
Vara	»	$1^m,1$	Palmo	»	$0^m,22$
Covado	»	$0^m,66$	Pollegada	»	$0^m,027$

Problema. 132 metros quantos covados são?

Solução. Um metro tem 100 centimetros, e 132 metros teem $132 \times 100 = 13200$ centimetros; dividindo estes centimetros por 66, que é o numero de centimetros que tem um covado, temos 200, que é o numero de covados.

$132 \times 100 = 13200$

$13200 \div 66 = 200$

Regra. *Para se reduzirem metros a medidas antigas, reduz-se o numero de metros a centimetros, e estes dividem-se pelo numero de centimetros que tiver a medida antiga.*

Problema. 50 covados quantos metros são?

Solução. Um covado tem 66 centimetros, e 50 covados teem $66 \times 50 = 3300$ centimetros; dividindo agora estes centimetros por 100, que é o numero de centimetros que tem um metro, temos 33 metros exactos.

Para se dividir um numero por 100, bastará cortar dois algarismos na direita desse numero. (Vide n. **56**).

$50 \times 66 = 3300$

$33^m,00$

Regra. *Para se reduzirem medidas antigas de comprimento a metros, multiplica-se o numero de unidades pela quantidade de centimetros que a medida tiver, e divide-se o producto por 100.*

Nota. As reducções das outras unidades metricas operam-se segundo o raciocinio das duas soluções acima, e por isso não as reproduzíremos nas outras medidas.

137. O **metro** e o **kilometro** comparados com as medidas itinerarias antigas teem a seguinte relação:

	Metros
Legua brazileira de sesmaria tem	6600
Legua maritima de 20 ao grau tem	5555
Milha maritima tem	1852
Milha ingleza tem	1609

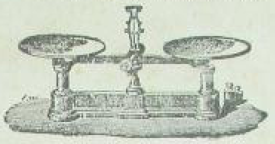
138. O **litro** e o seu multiplo hectolitro (100 litros) **substituiram** *o alqueire, a quarta, o selamim, o almude, a canada e o quartilho* do systema antigo.

Pipa	tem	480 litros	Alqueire	tem	$36^l,27$
Canada	»	$2^l,66$	Quarta	»	$9^l,07$
Quartilho	»	$0^l,66$	Selamim	»	$2^l,27$

Nota. A Junta Commercial do Rio de Janeiro decidiu, em sessão de 21 de Maio de 1885, que, nas transacções mercantis, a capacidade legal das pipas é a de **480 litros.**

139. O **grammo** e o **kilogrammo** substituiram *a tonelada, o quintal, a arroba, a libra, a onça, a oitava e o grão* do systema antigo. Estas unidades correspondem aos seguintes pesos do systema metrico:

A tonelada	tem	793 Kg. 162.
O quintal	»	58 Kg. 750.
A arroba	»	14 Kg. 680.
A libra	tem	459g.05.
A onça	»	28g.68.
A oitava	»	3g.58.



Medição com o aro

140. Para os discipulos poderem fazer applicação do aro na medição de terrenos, é necessario que elles saibam, pelo menos, medir as superficies rectangulares.

141. Superficie é uma grandeza que tem duas dimensões que se chamam comprimento e largura, como as áreas dos jardins, dos pateos, dos recintos, etc.

Se a superficie tem os quatro lados iguaes e os angulos rectos, chama-se **superficie quadrada;** se é mais comprida do que larga, chama-se **superficie rectangular.**

A superficie que tem um metro de comprimento e um metro de largura, diz-se que tem um metro quadrado, e escreve-se abreviadamente: **m²** ou **m. q.** A superficie que tem um centimetro de comprimento e um centimetro de largura, diz-se que tem um centimetro quadrado, e escreve-se **cm²** ou **cm. q.**, etc. A figura ao lado mostra o tamanho exacto de um centimetro quadrado.

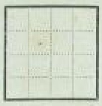
142. Para calcularmos a grandeza de uma superficie, temos de medir o seu comprimento e a sua largura. Faz-se esta medição com uma trena, corda ou corrente estendida sobre o chão.

Trena é uma fita de linho fixa a um eixo de uma caixinha redonda de couro, no qual ella se enrola. Todo o seu comprimento, que varia desde 5 metros

até 50, está dividido por traços que marcam, de um lado, metros divididos em centimetros, e de outro, pollegadas inglezas.

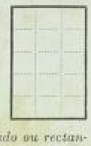
143. Depois de obtermos as duas dimensões exactas de um terreno rectangular, é facil calcular a grandeza da sua superficie.

Problema. Como poderemos saber quantos quadrados pequenos contém o quadrado grande, sem os contarmos um a um?



Solução. Contando os quadrados pequenos da primeira carreira, achamos 4, e contando o numero de carreiras achamos tambem 4, então o quadrado grande tem 4 vezes 4, que são 16 quadrados pequenos. Acha-se pois a quantidade multiplicando-se o numero que ha na largura pelo numero que ha no comprimento. Se cada quadrado pequeno medisse um metro, o quadrado grande teria $4 \times 4 = 16$ metros quadrados.

Problema. Como poderemos saber quantos quadradinhos tem o rectangulo ao lado, sem os contarmos um a um?



Solução. A primeira carreira tem 3, e o numero de carreiras é 5; então, tem 5 vezes 3, que são 15. Se cada um daquelles quadradinhos tivesse um metro quadrado, então o rectangulo, medindo 3 metros de largura e 5 de comprimento, teria uma superficie de $3 \times 5 = 15$ metros quadrados

Regra. *Para se achar a superficie de um quadrado ou rectangulo, multiplica-se a sua largura pelo seu comprimento, e o producto dará a sua superficie.*

Nota. Se a superficie não tiver a fórma rectangular, então é necessario recorrer ás regras especiaes, que se podem achar na nossa **Arithmetica Progressiva.**

1. Qual é a superficie de um largo que tem 35 metros de comprimento e 22 de largura? Resp. 770 m. q.

2. Qual é a área de um armazem que tem 17^m5, de comprimento e $8^m,4$ de largura? Resp. 147 m. q.

3. Quantos metros quadrados tem um jardim que mede 90 metros de comprido e 80 de largo? Resp. ?

144. Para acharmos quantos aros tem um campo ou terreno rectangular, mediremos o seu comprimento e a sua largura, e o producto destas dimensões mostrará o numero de metros quadrados que tem a superficie do campo ou terreno. Ora, como o aro tem 100 metros quadrados, dividiremos o numero de metros quadrados que tiver o campo, por 100, e teremos o numero de aros; dividindo ainda o numero de aros por 100, teremos o numero de hectaros. Assim, 80000 metros quadrados são 800 aros ou 8 hectaros.

Problema. Quantos aros tem uma roça que tem 200 metros de comprimento e 150 de largura?

Solução. A roça tem 200 metros de comprimento e 150 de largura, então tem $150 \times 200 = 30000$ metros quadrados; e como o aro tem 100 metros quadrados, dividiremos 30000 por 100, e teremos 300 aros que são a superficie ou area da roça.

$$\begin{array}{r} 150 \\ \underline{200} \\ 300,00 \end{array}$$

Regra. *Para se reduzirem metros quadrados a aros, divide-se o numero de metros por 100; e para se reduzirem aros a hectaros divide-se o numero de aros por 100.*

Nota. Esta divisão póde ser operada só com a virgula, separando dois algarismos, para reduzir metros quadrados a aros; e separando quatro, para reduzir metros quadrados a hectaros. (Vide n.° **56**).

1. Quantos aros tem uma matta que mede 168 metros de largura e 242 de comprimento? Resp. 406 aros e 56 metros quadrados.

2. Quantos hectaros tem uma fazenda que mede 1 kilometro e 600 metros de largura e 2 kilometros e 500 metros de comprimento? Resp. 400 hectaros.

3. Contractei uma plantação de milho a razão de $500 por aro; ora, tendo a roça 450 metros de comprimento e 80 de largura, quanto tive de pagar? Resp. 180$000.

Nota. O aro, ain[illegible] que foi adoptado por lei no Brazil, não o tem sido ainda adoptado na pratica, pois prevalece, entre os lavradores, o uso antigo de medir mattas, terrenos, campos, roças, etc., por alqueires de terra.

O alqueire de terra é o espaço necessario para plantar um alqueire de milho, e vari[illegible] de tamanho, conforme o modo de plantar o milho. Em S. Paulo, o alqueire de terra tem [illegible]000 braças quadradas, isto é, 100 braças de comprimento e 50 de largura. Em algumas partes de Minas, o alqueire tem 7,200 braças quadradas, e em outros lugares tem até 10,[illegible] braças quadradas.

[illegible]lqueire de terra divide-se em 4 quartas de terra; a quarta divide-se em 8 pratos; ca[illegible] prato de terra deve ter 600 covas, e cada cova deve levar 5 grãos de milho

Exprimir uma fracção de um metro quadrado em unidades menores

145. Na medição das superficies, nem sempre encontramos um numero exacto de metros quadrados; muitas vezes achamos tambem fracções de um metro quadrado, e para podermos exprimir essas fracções em decimetros quadrados, centimetros quadrados ou millimetros quadrados, é necessario comprehendermos a seguinte divisão das superficies:

146. O metro quadrado tem 10 decimetros de comprimento e 10 de largura, e por isso, tem $10 \times 10 = 100$ decimetros quadrados. Então, um decimetro quadrado é a centesima parte do metro quadrado.

O metro quadrado tem 100 centimetros de comprimento e 100 de largura, e por isso, tem $100 \times 100 = 10000$ centimetros quadrados. Então, um centimetro quadrado é a decima millesima parte do metro quadrado.

O metro quadrado tem 1000 millimetros de comprimento e 1000 de largura, e por isso tem 1000 × 1000 = 1000000 de millimetros quadrados. Então, um millimetro quadrado é a millionesima parte do metro quadrado

Nota. Um decimetro é a decima parte do comprimento do metro, mas um decimetro quadrado não é a decima parte do metro quadrado. Como vimos acima, um metro quadrado tem 100 decimetros quadrados, e um só decimetro quadrado é a centesima parte do metro quadrado, ao passo que um decimo do metro quadrado é 10 decimetros quadrados.

147. As medidas de superficie seguem a divisão centesimal; assim,

um metro quadrado tem 100 decimetros quadrados;
um decimetro quadrado tem 100 centimetros quadrados;
um centimetro quadrado tem 100 millimetros quadrados.

Problema. Como se lê a seguinte quantidade: 4^m. q.^,6?

Solução. Esta quantidade representa 4 metros quadrados e 6 decimos de um metro quadrado. Ora, um metro quadrado tem 100 decimetros quadrados, e um decimo de 100 decimetros quadrados é 10 decimetros quadrados, e 6 decimos são 60 decimetros quadrados. A quantidade acima lê-se: 4 metros quadrados e 60 decimetros quadrados.

Regra. *Para se exprimirem as fracções de um metro quadrado em decimetros, centimetros ou millimetros quadrados, divide-se a fracção do metro em classes de dois algarismos, começando pela virgula, sendo a primeira classe decimetros quadrados, a segunda centimetros quadrados, e a terceira, millimetros quadrados.*

Nota. Desde que as unidades de superficie se formam na ordem centesimal, isto é, de 100 em 100, são precisos dois algarismos para cada ordem, e a que tiver só um algarismo, accrescenta-se-lhe uma cifra.

Exercicio de applicação. Problemas para resolver:

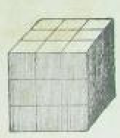
1. Como se lê a seguinte quantidade: 32^m. q.^,292874?

Solução. A fracção desta quantidade, dividida em classes, fica 29, 28, 74; então lê-se: 32 metros quadrados, 29 decimetros quadrados, 28 centimetros quadrados e 74 millimetros quadrados. Ou 32 metros quadrados e 292874 millimetros quadrados.

2. Quanto mede uma superficie que tem 2^m,5 de largura e 3^m,4 de comprimento? Resp. 8 metros q. e 50 decimetros q.
3. Quanto mede uma superficie que tem 4^m,18 de comprimento e 1^m,15 centimetros de largura? Resp. 4 m. q., 80 dm. q. e 70 cm. q.
4. Qual é a superficie de uma mesa que tem 0^m,66 de largura e 1^m,54 centimetros de comprimento? Resp. 1 m. q., 1 dm. q. e 64 cm. q.

Medição cubica

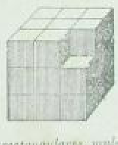
148. Corpo ou solido é o volume que tem as tres dimensões: comprimento, largura e altura, como: caixões, madeiras, fardos, muros, etc.



149. Cubo é um corpo que tem seis faces quadradas e iguaes. Se o cubo mede um metro em todas as seis faces, chama-se metro cubico; se mede um decimetro, chama-se decimetro cubico, etc.

150. Para medirmos uma peça de fita, tomamos só o seu comprimento; para medirmos a superficie de um campo, tomamos o seu comprimento e a sua largura, e para medirmos o volume de um caixão, tomamos o seu comprimento, largura e altura.

Problema. Qual é o volume de um cubo que tem 3 pollegadas de comprimento, 3 de largura e 3 de altura?



Solução. Para resolvermos facilmente este problema, observaremos o primeiro diagramma. Elle representa um solido que, na face de cima, mede 3 pollegadas de comprimento e 3 de largura, e por isso esta face tem uma superficie de 3 × 3 = 9 pollegadas quadradas (n.° **143**). Se este corpo tivesse uma só pollegada de altura, teria o volume de 9 × 1 = 9 pollegadas cubicas; se tivesse 2 pollegadas de altura, teria 9 × 2 = 18 pollegadas cubicas; mas, como tem 3 pollegadas de altura, tem o volume de 9 × 3 = 27 pollegadas cubicas. O segundo diagramma, porque lhe falta uma pollegada cubica, tem só 26.

Regra. *Para se achar o volume dos corpos rectangulares, multiplica-se o seu comprimento pela sua largura, e o producto multiplica-se depois pela sua altura.*

Nota. Para acharmos a capacidade dos vasos e recintos rectangulares, operaremos do mesmo modo

1. Qual é o volume de um caixão que tem 4 metros de comprimento, 3 de largura e 2 de altura? Resp. 24 m. c.
2. Qual é o volume de um muro que tem 20 metros de comprimento, 1^m,50 de largura e 4 de altura? Resp. 120 m. c.
3. Um côrte de uma estrada de ferro mede 45 metros de comprido, 5 de largo e 12 de alto; quantos metros cubicos de terra se tiraram dalli? Resp. 2700 m. c.
4. Quantos litros de agua contém uma caixa que mede 15 decimetros de comprimento, 8 de largura e 10 de altura, sabendo-se que 1 litro de agua occupa o espaço de 1 decimetro cubico? Resp. 1200 litros.

NUMEROS COMPLEXOS

151. Na numeração decimal, a base para a formação das diversas unidades é sempre **dez**, de sorte que 10 unidades inferiores formam a unidade immediatamente superior, como já vimos no n.° **15**. Nos numeros complexos, porém, a formação das diversas unidades é muito irregular e variada. Tomando, por exemplo, as unidades de peso, vemos que 8 oitavas formam uma onça; 16 onças formam uma libra; 32 libras formam uma arroba; 4 arrobas formam um quintal, e 13 $^1/_2$ quintaes formam uma tonelada. Cada uma das outras unidades tem outra formação tambem irregular. Daqui resulta haver a numeração decimal e a numeração complexa.

152. Numeração decimal é aquella que, como já dissemos, tem o numero dez como base para a formação das diversas unidades. Todos os numeros sujeitos a esta numeração chamam-se numeros decimaes.

153. Numeração complexa é a que não tem base determinada e fórma as unidades de um modo irregular e variado. Todos os numeros sujeitos a esta numeração chamam-se numeros complexos.

Nota. O Systema metrico, como tem as suas medidas e pesos sujeitos á divisão decimal, dispensa os calculos sobre complexos; mas, attendendo a que as divisões do tempo, do circulo e de algumas moedas e medidas estrangeiras não estão sujeitas ao systema decimal; attendendo que os livros escriptos antes de ser adoptado o Systema metrico se referem ás nossas medidas antigas, achamos conveniente que se ensinem nas escolas as operações complexas, para instruir os meninos e meninas nesta especie de calculos tão communs em quasi todos os negocios e avaliações do trabalho.
Antes de entrarmos nestas operações, é necessario que os discipulos se familiarisem com a formação das seguintes unidades:

154. Unidades de tempo

Seculo	tem 100 annos.	1° mez, Janeiro		tem 31 dias	
Lustro	» 5 »	2° »	Fevereiro	» 28	»
Anno	» 12 mezes.	3° »	Março	» 31	»
Mez	» 30 ou 31 dias.	4° »	Abril	» 30	
Semana	» 7 dias.	5° »	Maio	» 31	»
Dia	» 24 horas.	6° »	Junho	» 30	»
Hora	» 60 minutos.	7° »	Julho	» 31	»
Minuto	» 60 segundos.	8° »	Agosto	» 31	»
Anno commum	tem 365 dias.	9° »	Setembro	» 30	»
» bissexto	» 366 »	10° »	Outubro	» 31	»
» commercial	» 360 »	11° »	Novembro	» 30	»
Mez commercial	» 30 »	12° »	Dezembro	» 31	»

Nota. No anno commum, o mez de Fevereiro tem 28 dias, e no anno bissexto, tem 29
Todo o anno bissexto é exactamente divisivel por 4; para sabermos se um anno é bissexto, bastará dividil-o por 4, e, se deixar resto, será anno commum; se não deixar resto, será bissexto; assim, os annos de 1872, 1876 e 1880 foram bissextos. Não estão comprehendidos nesta regra os annos centenarios.
Os annos centenarios são os que terminam em duas ou mais cifras, como 1600, 1700 e 1800, etc. Todo o anno centenario que for exactamente divisivel por 400, será bissexto; assim, o anno de 1600 foi bissexto, e os de 1700, 1800 e 1900 foram communs.

Horas

155. As horas são partes do dia ou da noite, marcadas pelo relogio. Quando os dois ponteiros estão juntos no n.° XII, é meio dia ou meia noite em ponto. Dahi por diante, o ponteiro pequeno mostra o numero das horas, e o ponteiro grande mostra o numero dos minutos que excede da hora marcada. Assim, no primeiro relogio é 1 hora e 25 minutos; no segundo, são 11 horas e 15 minutos; no terceiro, 9 horas e 35 minutos, e no quarto, 3 horas e 15 minutos.

Partes alíquotas de um anno e de um mez

156. Quando um numero se divide em partes iguaes sem deixar resto, cada uma destas partes se chama parte **alíquota** desse numero. (Vêde n.° **65**).

O **anno** tem 12 mezes; então,

2 mezes são $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ de um anno; | 4 mezes são $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ de um anno;
3 mezes são $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ de um anno; | 6 mezes são $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ de um anno.

O **mez** tem 30 dias; então,

2 dias são $\frac{2}{30} = \frac{1}{15}$ de um mez; | 6 dias são $\frac{6}{30} = \frac{1}{5}$ de um mez;
3 dias são $\frac{3}{30} = \frac{1}{10}$ de um mez; | 10 dias são $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$ de um mez;
5 dias são $\frac{5}{30} = \frac{1}{6}$ de um mez; | 15 dias são $\frac{15}{30} = \frac{1}{2}$ de um mez.

157. Unidades de peso

Tonelada tem $13\frac{1}{2}$ quintaes. 793Kg238		Libra tem 16 onças. 459g05	
Quintal » 4 arrobas. 58Kg748		Onça » 8 oitavas. 28g688	
Arroba » 32 libras. 14Kg689		Oitava » 72 grãos. 3g586	
		grão » 0g0498	

Nota. A abreviatura da arroba é @, e da de libra é ℔.

158. Unidades de comprimento

Legua	tem 3 milhas.	Passo	tem	5	pés.
Milha	» 1000 passos.	Pé	»	$1\frac{1}{2}$	palmo.
Braça	» 10 palmos.	Palmo	»	8	pollegadas.
Vara	» 5 palmos.	Pollegada	»	12	linhas.
Covado	» 3 palmos.	Linha	»	12	pontos.

159. Unidades de liquidos

Pipa	tem 180 medidas.	Medida	tem 4 quartilhos.
Almude	» 12 medidas.	Quartilho	» 4 martellos.

160. Unidades de seccos

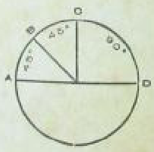
Moio	tem 15 fangas.	Alqueire	tem 4 quartas.
Fanga	» 4 alqueires.	Quarta	» 4 selamins.

161. Unidades numericas

Milheiro	tem 10 centos.	Grosa	tem 12 duzias.
Cento	» 100 cousas.	Duzia	» 12 cousas.

162. Unidades do circulo

A circumferencia de um circulo divide-se em 360 graus; o grau divide-se em 60 minutos, e o minuto em 60 segundos. O signal dos graus é °; o dos minutos é ′, e o dos segundos é ″. De sorte que 5°, 5′, 5″ lê-se: 5 graus, 5 minutos e 5 segundos.



Nota. Na circumferencia do circulo ao lado, a distancia do ponto *A* ao ponto *B* tem 45°; a distancia de *A* a *C* tem 45° + 45° = 90°; e a distancia de *A* a *D*, que é meio circulo, tem 90° + 90° = 180°.

163. Unidades da moeda ingleza

Libra esterlina (Ouro) — Shilling (Prata) — Penny (Cobre)

A libra esterlina tem 20 shillings.		O signal da libra é £.
Shilling » 12 pence.		O signal do shilling é s.
Penny » 4 farthings.		O signal do penny é d.

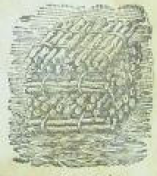
De sorte que £5. 7s. 2d. lê-se: 5 libras, 7 shillings e 2 pence.

Nota. O plural de penny é pence. Os farthings escrevem-se na fórma de uma fracção do penny; assim 1 penny e 1 farthing escrevem-se $1\frac{1}{4}$ d.

A lettra *d* é a inicial de *denario*, mas continuou a significar pence.

164. Unidades diversas

Carro de milho em espigas	tem	12 cargueiros.
Cargueiro	»	2 alqueires.
Alqueire	»	4 mãos.
Mão	»	15 atilhos.
Atilho	»	4 espigas.
Talha de lenha	»	16 feixes.
Geira de terra	»	400 braças quadradas.
Alqueire de terra	»	5000 » »



Talha de lenha

Reducção de unidades superiores a unidades inferiores

165. Problema. Quantos dias são 3 annos e 6 mezes, tendo cada mez 30 dias?

Solução. O anno tem 12 mezes, e 3 annos tem 3 vezes 12 que são 36 mezes, juntando mais os 6 do problema fazem 42.

Como o mez tem 30 dias, multiplicaremos 42 por 30, e teremos 1260 dias. Portanto 3 annos e 6 mezes são 1260 dias.

$$\begin{array}{r} 12 \\ 3 \\ \hline 36 \\ 6 \\ \hline 42 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 42 \text{ mezes} \\ 30 \\ \hline 1260 \text{ dias.} \end{array}$$

Regra. *Para se reduzirem unidades superiores a unidades inferiores, multiplicam-se as unidades superiores pelo numero de unidades inferiores de que são formadas, e ao producto juntam-se as unidades inferiores, se as houver, e assim se opera em todas, até a denominação requerida.*

1. Reduzir 2 annos e 3 mezes a dias.	Resp.	810 dias.
2. Reduzir 2 horas a segundos.	»	7200 segundos.
3. Reduzir 15 annos a mezes.	»	180 mezes.
4. Reduzir 7 dias a minutos.	»	10080 minutos.
5. Quantas libras tem uma tonelada?	»	1728 ℔.
6. Quantas duzias são 5 grosas e 10 duzias?	»	70 duzias.

Reducção de unidades inferiores a unidades superiores

166. Problema. Quantos annos commerciaes são 820 dias?

Solução. Dividindo 820 dias por 30, que é o numero de dias que tem o mez, temos 27 mezes e 10 dias de resto. Dividindo depois 27 mezes por 12, que é o numero de mezes que tem o anno, temos 2 annos e 3 mezes de resto.

Então, 820 dias são 2 annos, 3 mezes e 10 dias.

$$\begin{array}{r|l} 820 & 30 \\ \hline 60 & 27 \\ \hline 220 & \\ 210 & \\ \hline 10 \text{ dias} & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 27 & 12 \\ \hline 24 & 2 \text{ annos.} \\ \hline 3 \text{ mezes} & \end{array}$$

Regra. *Para se reduzirem unidades inferiores a unidades superiores, divide-se o numero dado pelo numero que a unidade immediatamente superior tem de unidades inferiores. Procede-se do mesmo modo com o quociente obtido até se chegar ás unidades requeridas.*

O ultimo quociente junto com os varios restos, se os houver, será a resposta.

Exercicio de applicação. Calcular as seguintes reducções:

1. Reduzir 120 horas a dias.	Resp.	5 dias.
2. Reduzir 10800 segundos a horas.	»	3 horas.
3. Reduzir 110 mezes a annos.	»	9 annos e 2 mezes.
4. Reduzir 4323 minutos a dias.	»	3 dias e 3 minutos.
5. 125 duzias quantas grosas são?	»	10 grosas e 5 duzias.
6. Reduzir 488 pence a libras.	»	£ 2 e 8 pence.

Reducção de numeros complexos a fracções ordinarias

167. Problema. 12 minutos que fracção é de uma hora?

Solução. Tendo a hora 60 minutos, 1 minuto é $\frac{1}{60}$ de uma hora, e 12 minutos são $\frac{12}{60} = \frac{1}{5}$ de uma hora.

$$\frac{12}{60} = \frac{1}{5}$$

Problema. 10 horas e 40 minutos que fracção é de um dia?

Solução. 10 horas e 40 minutos reduzidos a minutos fazem 640 minutos; ora, como o dia tem 1440 minutos, segue-se que 640 minutos são $\frac{640}{1440}$ de um dia. Simplificando-se a fracção, fica $\frac{4}{9}$. Portanto 10 horas e 40 minutos são $\frac{4}{9}$ de um dia.

$$\frac{\text{Minutos } 640}{\text{Minutos } 1440} = \frac{4}{9}$$

Regra. *Para se transformar um numero complexo em uma fracção ordinaria, reduz-se esse numero ás unidades inferiores requeridas, e estas se escrevem como numerador; o numero das mesmas unidades que tiver a unidade superior, escreve-se como denominador, e simplifica-se a fracção resultante, se for reduzivel.*

1. Reduzir 7 horas e 30 minutos á fracção de um dia.	Resp.	$\frac{5}{16}$.
2. Reduzir 18 horas á fracção de um dia.	»	$\frac{3}{4}$.
3. 11 mezes que parte é de um anno?	»	$\frac{11}{12}$.
4. 20 pollegadas que fracção é de uma braça?	»	$\frac{1}{4}$.

Reduzir fracções ordinarias a numeros complexos

168. Problema. Quantas horas são $\frac{2}{5}$ de um dia?

Solução. O dia tem 24 horas, então $\frac{2}{5}$ de 24 horas são 9 horas e $\frac{3}{5}$ de uma hora. (n.º **98.** Nota). A hora tem 60 minutos, então $\frac{3}{5}$ de 60 minutos são 36 minutos. Logo $\frac{2}{5}$ de um dia são 9 horas e 36 minutos.

$$\tfrac{2}{5} \text{ de } 24 = \tfrac{48}{5} = 9\tfrac{3}{5}.$$

$$\tfrac{3}{5} \text{ de } 60 = \tfrac{180}{5} = 36.$$

Regra. *Para se reduzir uma fracção ordinaria a um numero complexo, acham-se quantas unidades immediatamente inferiores contém a unidade da qual se dá a fracção, e multiplica-se esse numero pela fracção; divide-se depois o numerador pelo denominador, e se houver resto, acha-se o seu valor do mesmo modo. Os diversos quocientes serão a resposta.*

Exercicio de applicação. Problemas para resolver:

1. Quantas horas são $\frac{1}{8}$ de um dia?	Resp.	3 horas
2. $\frac{2}{9}$ de um dia que horas e minutos são?	»	5 horas e 20 min.
3. Quantos mezes são $\frac{3}{4}$ de um anno?	»	9 mezes.
4. Que horas e minutos são $\frac{9}{16}$ de um dia?	»	13 horas e 30 min.

Addição de complexos

169. Problema. Quanto sommam os seguintes periodos de tempo: 5 annos, 10 mezes e 8 dias + 3 annos, 11 mezes e 12 dias + 9 annos, 11 mezes e 20 dias?

Solução. Depois de escrevermos as addições em columnas, começaremos a somma pelas unidades menores, que são dias; então temos $8 + 12 + 20 = 40$.

Como 40 dias são 1 mez e 10 dias, escreveremos os 10 dias debaixo dos dias, e levaremos o mez para a columna dos mezes, que somma $1 + 10 + 11 + 11 = 33$. Ora, como o anno tem 12 mezes, dividiremos 33 por 12, e teremos 2 annos e 9 mezes; escreveremos os 9 mezes debaixo da columna dos mezes, e os 2 annos passaram para a columna dos annos, que somma 19. Portanto as 3 parcellas sommam 19 annos, 9 mezes e 10 dias.

Annos,	mezes,	dias,
5	10	8
3	11	12
9	11	20
19	9	10

Regra. *Para se sommarem numeros complexos, escrevem-se todas as parcellas em columna, de sorte que as unidades da mesma denominação fiquem umas debaixo das outras.*

Sommam-se as unidades menores, e divide-se a somma pelo numero que mostra quantas destas unidades contém a unidade immediatamente superior, e escreve-se o resto debaixo da columna sommada, e o quociente addiciona-se com a columna seguinte.

Procede-se do mesmo modo com as outras unidades, e debaixo da ultima columna, escreve-se a sua respectiva somma.

Exercicio de applicação. Operar as seguintes addições:

(1.)

Annos,	mezes,	dias,	horas.
3	7	20	15
2	8	15	9
5	10	0	5
8	10	2	3
21	0	8	8

(2.)

Annos,	mezes,	dias,	horas.
17	3	21	11
0	11	29	3
7	0	15	9
2	7	4	0

(3.)

°	'	''
20	35	49
0	59	0
15	10	30
7	0	50

(4.)

Libras,	shillings,	pence.
7	11	4
2	10	1
3	10	2
2	14	3

(5.)

£.	s.	d.
8	15	$9\frac{1}{4}$
3	5	$10\frac{3}{4}$
5	18	$1\frac{1}{2}$
7	19	$11\frac{1}{4}$
2	3	$2\frac{1}{4}$

(6.)

Grosas,	duzias,	unidades
5	10	8
2	11	11
8	9	1
7	3	9
5	8	10

Nota. As fracções dos pence no problema 5º não offerecem difficuldade alguma notando que $\frac{1}{4} = 1$ farthing, $\frac{3}{4} = 3$ farthings, $\frac{1}{2} = 2$ farthings, etc. Então 8 farthings são $8 \div 4 = 2$ pence que, addicionados com outros, sommam 35

7. Comprei em um bazar uma capa por £1, 13s. e 4d.; um relogio por £7, 12s. e 9d.; um lampeão por £2, 3s. e 9d., e um binoculo por £9 e 8s.; em quanto importaram estes objectos?

Resp. £20, 17s. e 10d.

8. Em uma viagem que fiz ao Norte, demorei-me 2 mezes e 20 dias na Bahia, 1 mez e 25 dias em Pernambuco, 18 dias no Pará, e 2 mezes e 1 dia no Maranhão; que tempo gastei nesta viagem?

Resp. 7 mezes e 4 dias.

Subtracção de complexos

170. Problema. De 4 annos, 6 mezes e 12 dias, subtrahindo 2 annos, 7 mezes e 20 dias, que tempo resta?

Solução. Começa-se a subtracção pelas unidades inferiores, que são os dias.

Como 20 não podem ser subtrahidos de 12, tira-se 1 mez dos 6, e como 1 mez tem 30 dias, sommam-se estes com os 12, e ficam $12 + 30 = 42$ dias.

Subtrahindo agora 20 de 42 restam 22, que se escrevem debaixo da columna dos dias.

Como já se tirou 1 mez dos 6, agora só restam 5, e como não se pode subtrahir 7 de 5, tira-se 1 anno dos 4, e, como o anno tem 12 mezes, juntam-se estes com os 5, e ficam 17 mezes. Agora, subtrahindo 7 de 17, restam 10, que se escrevem debaixo dos mezes.

Como já se tirou 1 anno, só restam 3; subtrahindo 2 de 3 resta 1. Portanto o resto da subtracção é 1 anno, 10 mezes e 22 dias.

Annos,	mezes,	dias
4	6	12
2	7	20
1	10	22

Regra. *Para se subtrahir um numero complexo de outro, escreve-se o subtrahendo debaixo do minuendo. Começa-se a subtracção pelas unidades inferiores e escreve-se o resto debaixo, como em uma subtracção decimal.*

Sendo um dos termos do minuendo menor do que o seu respectivo subtrahendo toma-se uma unidade immediata, reduz-se ás unidades do termo inferior, e com ellas se ajuntam para formar um novo minuendo, e opera-se a subtracção, e o termo de que se tirou uma unidade, será considerado como tendo 1 de menos.

Exercicio de applicação. Operar as seguintes subtracções:

(1.)

Annos,	mezes,	dias.
20	7	15
15	8	7
4	11	8

(2.)

£	s.	d.
25	7	11
15	15	3

(3.)

Horas,	minutos,	segundos.
20	35	45
18	0	50

(4.)

°	'	''
29	54	53
18	54	59

(5.)

Grosas,	duzias,	unidades.
15	3	9
11	2	11

(6.)

Annos,	mezes,	dias.
15	0	15
10	10	14

7. Uma criança nasceu a 14 de Abril de 1835 e morreu a 12 de Fevereiro de 1837, que idade tinha? Resp. 1 anno, 9 mezes e 28 dias.

8. A independencia dos Estados Unidos realizou-se a 4 de Julho de 1776, e a do Brazil a 7 de Setembro de 1822; que tempo decorreu entre estas duas datas? Resp. 46 annos, 2 mezes e 3 dias.

Multiplicação de complexos

171. Problema. Comprei 5 saccos de arroz, tendo cada um 2 alqueires, 3 quartas e 2 selamins; que quantidade comprei de arroz?

Solução. Antes de multiplicarmos cada termo do multiplicando por 5, temos de notar que 4 selamins formam 1 quarta, e 4 quartas formam 1 alqueire. Então $2 \times 5 = 10$ selamins, que, reduzidos a quartas, fazem 2 quartas e 2 selamins. Escreveremos os 2 selamins debaixo dos selamins, e reservaremos as 2 quartas para juntar com as quartas. Passando agora a multiplicar as quartas, temos $3 \times 5 = 15$ e 2, que vão dos selamins, são 17 quartas, que reduzidas a alqueires, fazem 4 alqueires e 1 quarta. Escreveremos 1 quarta debaixo das quartas, e reservaremos os 4 alqueires para juntar com os alqueires. Multiplicando agora os alqueires, temos $2 \times 5 = 10$, e 4, que vão das quartas, são 14 alqueires, que escreveremos debaixo dos alqueires. Portanto os 5 saccos conteem 14 alqueires, 1 quarta e 2 selamins

Alqueires	quartas,	selamins.
2	3	2
		5
14	1	2

Regra. *Para se operar uma multiplicação complexa, escreve-se o multiplicador debaixo do multiplicando, e, começando pela direita, multiplica-se cada um dos termos do multiplicando pelo multiplicador.*

Divide-se cada producto pelo numero que a unidade seguinte tem de unidades immediatamente inferiores, e o quociente junta-se com essas unidades, escrevendo-se o resto debaixo do termo que se multiplicou. A ultima multiplicação será escripta inteira debaixo do termo respectivo.

Exercicio de applicação. Operar as seguintes multiplicações:

(1.)

Annos,	mezes,	dias.
5	4	8
		6
32	1	18

(2.)

Annos,	mezes,	dias.
8	9	5
		7

(3.)

Dias,	horas,	minutos
12	3	3
		9

(4.)

Libras,	shillings,	pence.
8	18	10
		5
44	14	2

(5.)

£	s.	d.
29	19	11
		8

(6.)

°	'	''
8	40	55
		12

7. Qual é o peso de 8 colheres de prata, pesando cada uma 2 onças e 6 oitavas? Resp. 22 onças.

8. Um pedreiro, trabalhando em um muro, fazia cada dia 1 braça, 3 palmos e 2 pollegadas de muro; quanto fez elle em 15 dias?

Resp. 19 br., 8 palm. e 6 pol.

9. Achar as diversas parcellas, em moeda ingleza, na conta seguinte:

			£ shil. pence.
8 metros de veludo lavrado ..	*a*	*8 s. — 7 d.*	3 — 8 — 8
10 metros de chamalóte de seda	*a*	*7 s. — 10 d.*	
9 metros de gorgorão bordado.	*a*	*6 s. — 4 d.*	
6 metros de renda ingleza....	*a*	*4 s. — 5 d.*	
5 metros de damasco azul ...	*a*	*5 s. — 10 d.*	
10 peças de galão...........	*a*	*18 s. — ——*	
30 peças de cadarço.........	*a*	*—— — 11 d.*	
		Somma....	

Divisão de complexos

172. Problema. Achar a terça parte de 8 annos, 5 mezes e 9 dias.

Solução. Para acharmos a terça parte deste numero complexo, teremos de dividil-o por 3. Dividindo 8 annos por 3, temos o quociente 2 e o resto 2. Este resto reduzido a mezes, dá $2 \times 12 = 24$ mezes; juntando a estes mais 5 mezes dados no problema, temos 29 mezes que, divididos por 3, dão o quociente 9 e o resto 2. Este resto, reduzido a dias, dá $2 \times 30 = 60$ dias, juntando mais 9 do problema, temos 69 dias que, divididos por 3, dão o quociente 23 exacto. Portanto a terça parte de 8 annos, 5 mezes e 9 dias é 2 annos, 9 mezes e 23 dias.

8 annos | 3
6
2 — 2 annos

$2 \times 12 + 5 = 29$ mezes | 3
27
2 — 9 mezes

$2 \times 30 + 9 = 69$ dias | 3
69
0 — 23 dias

173. A divisão de complexos tem outras applicações muito importantes, como a divisão de longitudes, conhecer a differença de tempo entre dois logares pela differença de longitude, etc.; mas estes pontos, precisando de algum desenvolvimento, não podem ser expostos em um compendio elementar.

Regra. *Para se effectuar uma divisão complexa, começa-se a divisão pelas unidades superiores, e se houver resto, reduz-se o resto de unidades immediatas, para junto com ellas entrar na divisão do segundo termo, e assim se continúa, até o ultimo termo.*

Exercicio de applicação:

(1.)

Dias,	horas,	minutos.	
9	16	20	2

(2.)

Annos,	mezes,	dias.	
16	9	10	5

(3.)

Dias,	horas,	minutos.	
35	17	59	9

(4.)

Grosas,	duzias,	unidades.	
19	11	9	7

(5.)

£9, 17 s., 8 d. | 4

(6.)

25° 45′ 30″ | 15

7. Dividindo-se igualmente £360, 8 s. 4 d. por 173 pessoas, quanto receberá cada uma? Resp. £ 2, 1 s. 8 d.

Nota. Para outras questões de complexos, vêde a nossa **Arithmetica Progressiva.**

RAZÃO

174. Razão, em Arithmetica, é um numero que indica quantas vezes uma quantidade contém outra da mesma especie, quando ambas são comparadas.

Illustração. Se compararmos uma regua de 50 centimetros de comprimento com outra que tenha só 10 centimetros, acharemos que a primeira tem 5 vezes o comprimento da segunda, porque $50 \div 10 = 5$. Portanto a razão de 50 para 10 é 5.

As duas quantidades comparadas chamam-se termos da comparação. O primeiro termo chama-se **antecedente,** o segundo **consequente,** e o resultado da comparação chama-se **razão** ou **relação.**

175. Indica-se a comparação escrevendo dois pontos (:) entre os dois termos, como $8:4=2$, que se lê: A razão de 8 para 4 é igual a 2. Nesta comparação,

8 é o antecedente ou dividendo;
4 é o consequente ou divisor;
2 é a razão ou quociente.

Nota. Não damos aqui a razão por differença ou equidifferença, porque é uma simples theoria sem applicação pratica na arithmetica elementar.

Problema. Qual é a razão de 24 para 8?

Solução. Dividindo 24 por 8, temos o quociente 3, que é a razão de 24 para 8. $24 \div 8 = 3$

Problema. Qual é a razão de 4 para 12?

Solução. Dividindo 4 por 12, temos um terço, que é a razão de 4 para 12. (Vêde n. **84**). $4 \div 12 = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

Regra. *Para se achar a razão entre dois numeros, divide-se o antecedente pelo consequente, e o quociente será a razão.*

1. Qual é a razão de 88 para 11?	Resp. 8.
2. Qual é a razão de 33 para 99?	» $\frac{1}{3}$.
3. Qual é a razão de 48 para 16?	» 3.
4. Qual é a razão de 16 para 48?	» $\frac{1}{3}$.
5. Qual é a razão de $\frac{4}{5}$ para $\frac{7}{12}$?	» $1\frac{1}{5}$.
6. Qual é a razão de $8\frac{1}{2}$ para $4\frac{1}{4}$?	» 2.

PROPORÇÕES

176. Proporção é uma igualdade entre duas razões.

Assim $12:6=8:4$ é uma proporção que se lê: a razão de 12 para 6 é igual á razão de 8 para 4, isto é, o quociente de 12 dividido por 6 é igual ao quociente de 8 dividido por 4.

O signal de igualdade entre duas razões é quatro pontos (::), como

12 : 6 :: 8 : 4

que se lê: *12 está para 6, assim como 8 está para 4.*

Em toda a proporção ha duas razões expressas em quatro termos. O primeiro e o ultimo chamam-se **extremos,** e os dois termos do meio chamam-se **meios.** Na proporção acima, 12 e 4 são extremos, e 6 e 8 são meios.

Propriedades da proporção

177. Uma proporção tem diversas propriedades, mas as que mais precisamos conhecer, são as seguintes:

1ª. *Em toda a proporção, o producto dos meios é igual ao producto dos extremos.*

Illustração. Multiplicando os dois meios da proporção que está ao lado, temos $6 \times 8 = 48$; multiplicando os dois extremos, temos $12 \times 4 = 48$; os dois productos são iguaes.

Para verificarmos se uma proporção está certa, multiplicaremos os dois meios, e se o producto for igual ao dos extremos, a proporção estará exacta

$$12 : 6 :: 8 : 4$$
$$6 \times 8 = 12 \times 4$$
$$48 = 48$$

2ª *Se dividirmos ou multiplicarmos os dois termos de uma razão, ou os quatro termos de uma proporção por um mesmo numero, não alteraremos o valor da proporção.*

Illustração. Dividindo-se por 3 ambos os termos da primeira razão da proporção ao lado, ficarão dois numeros menores, mas na mesma proporção, o quociente da primeira razão será igual ao quociente da segunda; e o producto dos meios, igual ao dos extremos. Dividindo-se por 2 todos os termos da proporção, ficarão numeros differentes, mas ainda na mesma proporção.

$$12:6::8:4$$
$$4:2::8:4$$
$$6:3::4:2$$

Esta propriedade nos habilita a reduzirmos os termos de uma proporção, quando forem muito altos. Na proporção 144:72::8:4, podemos dividir por 24 ambos os termos da primeira razão, e então teremos 6:3::8:4. Na proporção 88:66::132:99, podemos dividir todos os termos por 11, e então, teremos 8:6::12:9.

Achar qualquer termo de uma proporção

178. Podemos achar facilmente qualquer termo de uma proporção, se nos derem os outros tres. O termo desconhecido é representado na proporção pela lettra x, e chama-se a **incognita** da proporção.

Problema. Achar o valor de x na proporção $9 : 3 :: 18 : x$.

Solução. Como o producto dos dois meios é igual ao producto dos dois extremos, dividindo o producto dos meios por um extremo, teremos o outro extremo. Nesta proporção, o producto dos meios é $3 \times 18 = 54$; dividindo este numero pelo extremo 9, teremos o quociente 6 que é o valor de x. Escrevendo-se os tres termos, como se vê na formula ao lado, e fazendo-se o cancellamento, obtem-se mais rapidamente o mesmo resultado. (Vêde n.º **70**).

$$9 : 3 :: 18 : x$$
$$x = \frac{3 \times \overset{2}{\cancel{18}}}{\underset{1}{\cancel{9}}} = 6$$

Problema. Achar o valor de x na proporção $14 : 7 :: x : 5$.

Solução. O termo requerido é um meio, então multiplicando os dois extremos 14 e 5, e dividindo o producto por 7, teremos $\frac{14 \times 5}{7}$; cancellando agora os numeros 7 e 14, teremos como resultado $2 \times 5 = 10$ que é o valor de x.

$$14 : 7 :: x : 5$$
$$x = \frac{\overset{2}{\cancel{14}} \times 5}{\underset{1}{\cancel{7}}} = 10$$

Regra. *Para se achar um dos extremos, multiplicam-se os meios e divide-se o producto pelo outro extremo.*

E para se achar um dos meios, multiplicam-se os extremos e divide-se o producto pelo outro meio.

Exercicio de applicação. Achar a incognita nas seguintes proporções:

	Respostas.		Respostas.
1. $12:48::16:x$.	$x=64$	9. $7:\frac{1}{2}::x:4$.	$x=56$
2. $18:24::x:40$.	$x=30$	10. $\frac{1}{2}:x::\frac{3}{4}:\frac{1}{2}$.	$x=\frac{2}{15}$
3. $25:x::35:42$.	$x=30$	11. $20\times6:160::252:x$.	$x=336$
4. $x:72::36:40$.	$x=64\frac{4}{5}$	12. $12\times30:24::240:x$.	$x=?$
5. $\frac{1}{2}:\frac{3}{4}::\frac{1}{4}:x$.	$x=\frac{3}{8}$	13. $0,120:0,60::0,50:x$.	$x=?$
6. $2\frac{1}{2}:4\frac{1}{4}::3\frac{1}{2}:x$.	$x=5\frac{4}{5}$	14. $x:6\frac{1}{2}::1\frac{1}{2}:1,9$.	$x=?$
7. $7:x::3:21$.	$x=49$	15. $200:600::800:x$.	$x=?$
8. $4\times2:18::24:x$.	$x=54$	16. $144:x::432:36$.	$x=?$

REGRA DE TRES

179. A regra de tres tem por fim achar a quantidade desconhecida de um problema, sendo dadas tres quantidades conhecidas e proporcionaes. Dos tres termos conhecidos vem o nome de *regra de tres.*

A regra de tres é simples ou composta.

Regra de tres simples é aquella em que ha só tres quantidades para se achar a incognita.

Regra de tres composta é aquella em que ha mais de tres quantidades para se achar a incognita.

Regra de tres simples

180. Na regra de tres simples ha só duas razões; uma dellas tem as duas quantidades conhecidas, ás quaes se dá o nome de **quantidades principaes;** a outra razão tem uma quantidade conhecida e a outra desconhecida, e como ambas estas quantidades teem relação com as principaes, dá-se-lhes o nome de **quantidades relativas.**

181. A regra de tres simples é directa ou inversa.

Regra de tres directa é aquella em que as quantidades relativas augmentam, se as principaes augmentam, e diminuem, se as principaes diminuem.

Regra de tres inversa é aquella em que as quantidades relativas augmentam, se as principaes diminuem, e diminuem, se as principaes augmentam.

Illustração. Dois numeros estão na razão directa, quando augmentando um, augmenta tambem o outro, ou diminuindo um, diminue tambem o outro; e estão na razão inversa, quando augmentando um, diminue o outro, ou diminuindo um, augmenta o outro.

Problema de regra de tres directa. Se 4 kilos de café custam 2$000, quanto devem custar 6 kilos?

Solução. Para formarmos a proporção, temos tres quantidades conhecidas e uma desconhecida representada por x, e cujo valor queremos achar. 4 kilos e 6 kilos são quantidades conhecidas o principaes, e formam a primeira razão; 2$000 e x são quantidades relativas das primeiras e formam a segunda razão. Este problema é da **regra de tres directa,** porque augmentando o numero de kilos, augmentará necessariamente o importe delles; e diminuindo o numero de kilos, diminuirá tambem o seu importe.

4 kilos } 2$000 }
6 kilos } x }

(1º) (2º) (3º) (4º)

$4 : 6 :: 2\$000 : x$

$x = 3\$000$

Para dispormos estes quatro termos em uma proporção, escreveremos x como o quarto termo da proporção, e a quantidade da mesma especie que x, como terceiro termo. Ora, neste problema x representa dinheiro, e a quantidade da mesma especie é 2$000. Depois de escrevermos estes dois termos da proporção, passaremos a escrever os outros dois.

Se x for maior do que 2$000, escreveremos a maior quantidade como o segundo termo; se for menor, escreveremos a menor quantidade como segundo termo.

Pela natureza do problema vemos que x é mais do que 2$000, porque se 4 kilos custam 2$000, 6 kilos devem custar mais de 2$000. Então escreveremos 6 como o segundo termo, e 4 como o primeiro.

Multiplicaremos agora os meios, dividiremos o producto pelo extremo conhecido, e teremos 3$000, que é o importe de 6 kilos.

Problema de regra de tres inversa. Se 15 homens fazem um muro em 40 dias, 30 homens, em quantos dias o farão?

Solução. 15 homens e 30 homens formam a primeira razão; 40 dias e x são quantidades relativas e formam a segunda razão. Este problema é de **regra de tres inversa,** porque augmentando o numero de trabalhadores, diminuem os dias de serviço, pois se 15 homens gastam 40 dias em um trabalho, 30 homens, que é o dobro do pessoal, gastarão a metade do tempo. Os termos se dispõem do mesmo modo que na regra de tres directa. Escreveremos x como o quarto termo, e a quantidade da mesma especie que x, que é 40 dias, como o terceiro termo. Pela natureza do problema vemos que x é menos que 40 dias, porque se 15 homens gastam 40 dias em um serviço, 30 homens devem gastar menos dias. Escreveremos então 15 como o segundo termo, e 30 como primeiro.

15 homens } 40 dias }
30 homens } x dias }

$30 : 15 :: 40 : x$

$x = 20$

O valor de x é 20 dias, tempo que gastam os 40 homens.

Regra geral para a proporção directa e inversa

I. Escreve-se x como o quarto termo da proporção, e como terceiro termo escreve-se a quantidade da mesma especie que x.

II. Se da natureza do problema, x for maior do que o terceiro termo, escreve-se o maior dos dois numeros como segundo termo, e o menor como primeiro. Mas, se x for menor do que o terceiro termo, escreve-se o numero menor, como segundo termo, e o maior como primeiro.

III. Multiplicam-se os dois meios e divide-se o producto pelo extremo conhecido, e o quociente será o valor de x.

1. Se 7 Kg. de camphora custam 28$, quanto devem custar 15 Kg.?

Solução. x é o quarto termo da proporção; a quantidade da mesma especie que x é 28$, que será o terceiro termo. Pela natureza do problema vemos que x ha de ser maior do que 28$, porque 15 Kg. custarão mais do que 7 Kg., e por isso 15 Kg., que é o maior, será o segundo termo, e 7 Kg. será o primeiro.

2. Se 5 Kg. de gomma arabica custam 16$, quanto devem custar 12 Kg.? Resp. 38$400.

3. Se 33 homens fazem 165 metros de muro, que extensão farão 198 homens no mesmo tempo? Resp. 990 metros.

4. Sabe-se que 15 homens fariam certa obra em 18 dias, em quantos dias 10 homens a fariam? Resp. 27.

5. Um engenheiro calculou que seriam necessarios 75 homens para fazer um aterro em 220 dias, mas sendo preciso que o aterro ficasse prompto em 15 dias, quantos trabalhadores deveria empregar para o concluir neste tempo? Resp. 1100 homens.

6. Se $\frac{2}{3}$ de uma obra foram avaliados em 1:100$, qual é o valor de $\frac{3}{11}$ da mesma obra? Resp. 450$000.

7. Vendendo-se $\frac{3}{7}$ de uma pipa de vinho por 165$, por quanto se deve vender o resto da pipa? Resp. 220$.

8. Custando 65 kilos de assucar 18$200, quanto devem custar 13 kilos? Resp. 3$640.

9. Se 12 metros de fazenda custam 7$500, quanto devem custar 8 metros? Resp. 5$000.

10. Quantos homens poderão fazer uma obra em 168 dias, sabendo-se que 108 homens a podem fazer em 266? Resp. 171.

Regra de tres composta

182. A regra de tres composta consta sempre de tres ou mais razões, e offerece sempre mais de tres quantidades para se achar a incognita.

Problema. Se 4 homens serram 20 taboas em 5 dias, quantas taboas serrarão 12 homens em 3 dias?

4 homens } 5 dias }
12 homens } 3 dias }

20 taboas }
x taboas }

(1º) (2º) (3º) (4º)

$4 \times 5 : 12 \times 3 :: 20 : x.$

$20 : 36 :: 20 : x.$

$x = 36.$

Solução. Neste problema temos tres razões que são 4 homens e 12 homens, 5 dias e 3 dias, 20 taboas e x taboas. x é o quarto termo da proporção; a quantidade da mesma especie que x, que é 20 taboas, é o terceiro termo.

Para sabermos collocar os termos das outras razões, devemos empregar o mesmo raciocinio que já fizemos na regra de tres simples.

Se 4 homens serram 20 taboas, 12 serram mais, logo a resposta deve ser mais e por isso, o numero maior da razão, que é 12, pertencerá ao segundo termo da proporção, e 4 pertencerá ao primeiro.

Se em 5 dias serram 20 taboas, em 3 dias serram menos taboas, logo, 3, que é menor, pertencerá ao segundo termo, e 5 pertencerá ao primeiro. Multiplicando entre si os numeros das duas razões, teremos a proporção $20 : 36 :: 20 : x$, e $x = 36$ taboas.

Regra para a proporção composta

Formam-se as diversas razões, escrevendo-se em pares as quantidades da mesma especie.

Escreve-se x como o quarto termo, e a quantidade da mesma especie que x, como terceiro termo.

Dispõem-se os termos de cada uma das outras razões, conforme a regra de tres simples, e acha-se o valor da incognita.

1. Se 2 carros de feno sustentam 3 cavallos durante 4 semanas, durante quantas semanas, 5 carros de feno sustentarão 6 cavallos? Resp. 5 semanas.

2. Se 9 marceneiros, trabalhando 10 horas por dia, podem, em 30 dias, fazer 18 mesas; 50 marceneiros, em 90 dias, trabalhando 8 horas por dia, quantas mesas poderão fazer? Resp. 240.

3. Se 100$000 ganham 6$000 de juros em 12 mezes, quanto ganhará a quantia de 75$000 em 9 mezes? Resp. 3$375.

4. Gastando 6 homens 150$000 em 8 mezes, quanto gastarão 15 homens em 20 mezes? Resp. 937$500.

183. Reducção á unidade. Todos os problemas resolvidos pela regra de tres simples ou composta, podem tambem ser resolvidos pelo processo que os francezes chamam Methodo de reducção á unidade, e que os inglezes chamam analyse arithmetica. Deste processo trataremos largamente no capitulo denominado **Analyse, n. 218.**

FALSA POSIÇÃO

184. A regra da falsa posição é um processo arithmetico, no qual se opera com um numero supposto ou falso, para se achar o verdadeiro.

A falsa posição é uma applicação curiosa da regra de tres.

Problema. Perguntando-se a uma professora qual era o numero de suas alumnas, ella respondeu: Se eu tivesse outras tantas como as que tenho, e mais metade e a quarta parte, teria 88. Qual era o numero das alumnas?

Solução.	Numero falso..........	12
	Outros tantos..........	12
	Mais metade..........	6
	A quarta parte..........	3
	Total falso.......	33

$33 : 88 :: 12 : x$

$x = 32$ alumnas.

Solução. Para resolvermos este problema pela falsa posição, tomaremos qualquer numero para com elle fazermos o calculo, e o chamaremos numero falso. Seja, por exemplo, o numero 12, e juntando a elle outros tantos, mais metade e mais a quarta parte, teremos o total 33, que chamaremos total falso.

Agora, com os dois numeros falsos 12 e 33, e com o numero 88 do problema, temos os tres termos de uma proporção, e podemos facilmente achar o quarto termo, que é o numero requerido. A proporção será então: 33, total falso, está para 88, total verdadeiro, assim como 12 numero falso, está para x, numero verdadeiro e requerido. Achando-se o valor de x, temos 32, que é numero de alumnas que tinha a professora.

Verificação. $32 + 32 + 16 + 8 = 88.$

Regra. *Na falsa posição, toma-se um numero falso, e effectuam-se com elle todas as operações indicadas no problema; depois o total falso está para o total verdadeiro, assim como o numero falso que se tomou, está para o numero requerido.*

1. Disse uma menina a sua mãe: Se a minha gallinha tivesse posto mais metade e um terço dos ovos que já pôz, eu poderia agora juntar 33 óvos. Quantos ovos tinha posto a gallinha? Resp. 18.

2. Uma pessoa comprou certo numero de laranjas, e se a terça, a quarta e sexta parte dellas fossem reunidas, o seu numero seria 54. Quantas laranjas comprou? Resp. 72.

3. Qual é o numero, cuja metade sommada com a terça e quarta parte, dá 52? Resp. 48.

4. Se um quarto, um quinto e um decimo de certo numero fossem reunidos, a somma seria 55. Qual é o numero? Resp. ?

5. Em um arrozal voavam muitas pombas; não eram 100, mas se a ellas se juntassem outras tantas, mais metade e a quarta parte de seu numero e mais uma, seriam 100. Qual era o numero das pombas? Resp. ?

Nota. Na falsa posição, quando, além das partes aliquotas, se juntam tambem quantidades conhecidas como 1, 2, 3, etc., estas se teem de subtrahir do total dado. No problema acima, junta-se 1 pomba para ficar o numero 100 completo, mas nós teremos de operar só com o total 99, que é a somma das partes aliquotas.

PORCENTAGEM

185. Porcentagem, em Arithmetica, quer dizer certo numero que, em cada cento, se tira de uma quantidade ou se junta a ella. Assim, 5 por cento quer dizer 5 cousas em cada 100; 12 por cento, 12 cousas em cada 100. Falando-se em dinheiro, 5 por cento quer dizer 5$000 em cada 100$000.

A porcentagem tem a sua applicação nos problemas de juros, descontos, commissões, etc.

186. Na porcentagem ha 3 dados a considerar, que são o principal, a taxa e a porcentagem.

Principal é o numero sobre que a porcentagem tem de ser calculada.

Taxa é o numero de unidades que se tem de tomar em cada 100.

Porcentagem é a somma de todos os numeros que se tiram em cada cento.

Illustração. 5 por cento de 200 laranjas são 10 laranjas; neste exemplo,
100 laranjas são o principal;
5 por cento são a taxa;
10 laranjas são a porcentagem.

A abreviatura da porcentagem é °/o que se lê: *por cento,* como se vê nos seguintes exemplos

1 °/o	lê-se: um	por cento,	10 °/o	lê-se:	dez por cento,
2 °/o	»	dois por cento,	50 °/o	»	cincoenta por cento,
5 °/o	»	cinco por cento,	100 °/o	»	cento por cento,
$8\frac{1}{2}$ °/o	»	$8\,^1/_2$ por cento,	200 °/o	»	duzentos por cento.
9 °/o	»	nove por cento,	500 °/o	»	quinhentos por cento

Achar a porcentagem

187. Problema. Quanto é 5 °/o de 120?

Solução. Multiplicando o principal pela taxa, teremos 600, e dividindo o producto por 100, teremos o quociente 6. Portanto 5 °/o de 120 são 6. Para se dividir um numero por 100, basta cortar-lhe duas cifras na direita. (Vêde n.° **56**).

$$\begin{array}{r} 120 \\ 5\ °/o \\ \hline 6{,}00 \end{array}$$

Regra. *Para se achar a porcentagem, multiplica-se o principal pela taxa, e divide-se o producto por 100.*

Demonstração. A regra acima é basada na seguinte proporção, por meio da qual se podem resolver todos os problemas de porcentagem:

100 : Principal :: Taxa : Porcentagem
100 : 120 :: 5 : x

Se o principal 100 produz 5, o principal 120 quanto produzirá?
A proporção do problema acima será a seguinte: O principal 100 está para o principal 120, assim como 5, relativo de 100, está para x, relativo de 120. Portanto 100 : 120 :: 5 : x.
Para acharmos o valor de x, temos de multiplicar 120 por 5, e dividir o producto por 100.
Ora, 120 é o principal, e 5 é a taxa, logo *multiplicando o principal pela taxa e dividindo o producto por 100, teremos a porcentagem.* Por meio desta proporção poderemos achar tambem facilmente o principal e a taxa.

Exercicio de applicação. Achar as seguintes porcentagens:

		Respostas			Respostas
1.	6 °/o de 250.	15	6.	9 °/o de 300.	?
2.	8 °/o de 175.	14	7.	10 °/o de 1800.	?
3.	8 °/o de 11.	0,88	8.	6 °/o de 400$.	?
4.	2 °/o de 60.	1,2	9.	12 °/o de 1:800$	?
5.	15 °/o de 360$.	54$	10.	18 °/o de 500$.	?

Achar a taxa

188. Problema. O numero 6 quantos por cento é de 120?

Solução. 6 é a porcentagem, e 120 é o principal; multiplicando a porcentagem por 100 e dividindo o producto por 120, teremos a taxa, que é 5 °/o

$$\frac{6\times100}{120}=5\ °/o$$

Regra. *Para se achar a taxa, multiplica-se a porcentagem por 100, e divide-se o producto pelo principal.*

Demonstração. A proporção é 100 : Principal :: Taxa : Porcentagem
100 : 120 :: x : 6

Nesta proporção, x é a taxa que queremos achar; 120 é o principal, e 6 é a porcentagem; ora, para acharmos o valor de x, temos de *multiplicar a porcentagem por 100, e dividir o producto pelo principal.*

Achar as seguintes taxas:

1. Quantos por cento de 88 são 44? Resp. 50 °/o
2. Quantos por cento de 15 são 3? » 20 °/o
3. Quantos por cento de 5$ são 2$? » 40 °/o
4. Quantos por cento de 950$ são 152$? » 16 °/o
5. Quantos por cento de 100 são 99? » ?

Achar o principal

189. Problema. 6 de que numero é 5 °/o?

Solução. 6 é a porcentagem, e 5 é a taxa; multiplicando a porcentagem por 100, e dividindo o producto pela taxa, que é 5, teremos o principal 120.

$$\frac{6\times100}{5}=120$$

Regra. *Para se achar o principal, multiplica-se a porcentagem por 100, e divide-se o producto pela taxa.*

Demonstração. A proporção é 100 : Principal :: Taxa : Porcentagem
100 : x :: 5 : 6

Nesta proporção x representa o principal requerido no problema. Para acharmos o valor de x, temos de multiplicar 6 por 100, e dividir o producto por 5. Ora 6 é a porcentagem, e 5 é a taxa, logo *multiplicando a porcentagem por 100, e dividindo o producto pela taxa, obteremos o principal.*

Resolver os seguintes problemas:

1. De que numero, 28 são 7 °/o? Resp. 400.
2. De que numero, 45 são 25 °/o? » 180.
3. De que quantia, 67$500 são 15 °/o? » 450$.
4. De que numero, 4 é $\frac{1}{2}$ °/o? » 800.
5. De que quantia, 100$ são $\frac{2}{5}$ °/o? » 25:000$.
6. Um homem deixou a um sobrinho 30$, quantia que era 6 °/o da que deixou a uma sobrinha; quanto deixou a esta? Resp. 500$.

Achar a porcentagem quando a taxa é um numero mixto

190. A taxa de uma porcentagem nem sempre é um numero inteiro, muitas vezes é uma fracção ou numero mixto, como, por exemplo: $\frac{1}{2}$ °/o, $\frac{3}{4}$ °/o, $1\frac{1}{4}$ °/o, $2\frac{1}{2}$ °/o, $5\frac{1}{8}$ °/o, etc.; neste caso, poderemos operar, ou com fracções ordinarias, ou com decimaes.

Exemplifiquemos este caso com fracções ordinarias.

Problema. Quanto é $2\frac{1}{2}$ °/o de 120?

Solução. Multiplicando 120 por 2, temos 240, mas como o multiplicador é 2 vezes e meia 120, temos de juntar mais um meio de 120, que é 60, e então temos 300. Dividido agora este producto por 100 (n°. **187**), obtemos o quociente 3, que é a porcentagem de $2\frac{1}{2}$ °/o de 120. (Vêde o n° **58**).

Processo

$$\begin{array}{rr} & 120 \\ & 2\frac{1}{2} \\ \hline 2 \text{ vezes} = & 240 \\ \frac{1}{2} \text{ vez} = & 60 \\ \hline & 3{,}00 \end{array}$$

Regra. *Quando a taxa é um numero mixto, multiplica-se o numero inteiro, depois a fracção, e a somma das duas parcellas divide-se por 100.*

Nota. As fracções decimaes podem tambem ser empregadas neste processo, para isto bastará transformar a fracção ordinaria em uma decimal, e depois effectuar a operação.

Exercicio de applicação. Achar as seguintes porcentagens:

(1.)	(2.)	(3.)	(4.)	(5.)	(6.)
160	180	250	480	560	880
$2\frac{1}{4}$ °/o	$3\frac{1}{3}$ °/o	$4\frac{1}{2}$ °/o	$4\frac{3}{4}$ °/o	$5\frac{1}{4}$ °/o	$5\frac{1}{8}$ °/o

7.	$\frac{1}{2}$ °/o de 540$.	Resp. 2$700	10.	$2\frac{1}{2}$ °/o de 120$	Resp. ?
8.	$\frac{3}{4}$ °/o de 600$.	» 4$500	11.	$3\frac{1}{3}$ °/o de 321$	» ?
9.	$2\frac{1}{2}$ °/o de 608$.	» 15$200	12.	$12\frac{1}{2}$ °/o de 960$	» ?

JUROS

191. Juros ou premios são o lucro que se recebe pelo dinheiro que se emprestou por um tempo determinado.

Os calculos de juros são da mesma natureza que os de porcentagem; mas, entrando nelles uma nova quantidade chamada tempo, que póde ser maior ou menor do que um anno, a regra de juros fica differindo um pouco da de porcentagem.

192. Em juros temos de notar quatro dados que são: Capital, Taxa, Juros e Tempo.

Capital ou principal é a quantia que se dá ou toma a premio.

Taxa é o numero que indica a quantos por cento, em cada anno ou em cada mez, se empresta o dinheiro. A taxa varia desde 5 °/o até 24 °/o ao anno.

Juros ou premios são a quantia que o capital rende emquanto está emprestado.

Tempo é o prazo a que se empresta o dinheiro.

Nota. E' necessario observar que nos calculos de juros, o anno é considerado como tendo 360 dias, e o mez 30 dias, e nesta supposição se devem fazer as operações. (Vêde n.° **154**).

Achar os juros

193. Problema. Quaes são os juros de 36$000 a 5 °/o ao anno, durante 3 annos?

Solução. 5 °/o de 36$000 são 1800 réis, conforme já aprendemos na porcentagem (**187**). Como os 1800 são os juros de 1 anno, teremos os juros de 3 annos, multiplicando agora estes juros por 3, que são 5$400.

$$\begin{array}{r} 36000 \\ 5\ °/o \\ \hline 1800{,}00 \\ 3 \text{ annos} \\ \hline 5400 \end{array}$$

Regra. *Para se acharem os juros, multiplica-se o capital pela taxa; divide-se o producto por 100, e o resultado multiplica-se pelo tempo.*

Nota. Se o tempo, além de annos completos, tiver ainda fracção de um anno; como mezes e dias, dividiremos o premio de 1 anno por 12, e teremos o premio de 1 mez. Dividiremos depois o premio de 1 mez por 30, e teremos o premio de 1 dia. Multiplicando agora o numero de mezes ou de dias pelo seu respectivo premio, teremos o valor dessa fracção de um anno, que se somma com a dos annos completos.

1. Achar os juros de 31$750, em 1 anno e 4 mezes a 6 °/o ao anno. Resp. 2$540.
2. Quaes são os juros de 197$000, em 5 annos a 9 °/o ao anno? Resp. 88$650.

3. Quaes são os juros de 900$ em 1 anno, 7 mezes e 18 dias, a 7 °/ₒ ao anno? Resp. 102$900.

4. Achar os juros de 700$, em 4 annos, a 6 °/ₒ ao anno? Resp. 168$.

5. Quaes são os juros de 480$, em 8 annos, 6 mezes e 9 dias, a 10 °/ₒ ao anno? Resp. 411$.

6. Achar os juros de 1:500$, em 2 annos e 1 mez, a 6 °/ₒ ao anno. Resp. 187$500.

Nota. Como no tratado de porcentagem já demos o methodo de achar **a taxa e o capital**, aqui bastará só darmos as formulas.

$$\textbf{Juros} = \frac{\text{capital} \times \text{taxa} \times \text{tempo}}{100} \qquad \textbf{Tempo} = \frac{\text{juros} \times 100}{\text{capital} \times \text{taxa}}$$

$$\textbf{Taxa} = \frac{\text{juros} \times 100}{\text{capital} \times \text{tempo}} \qquad \textbf{Capital} = \frac{\text{juros} \times 100}{\text{taxa} \times \text{tempo}}$$

DESCONTO

194. Desconto é o abatimento que se faz em **uma** lettra ou credito que se paga antes do seu vencimento.

Fazem-se tambem descontos no preço dos generos, quando se compra grande quantidade, quando se compra a dinheiro, etc. Assim, quem comprar uma *Arithmetica Progressiva* pagará por ella 5$; mas quem comprar 25 exemplares, terá o desconto de 20 °/ₒ, e quem comprar 100, terá o desconto de 30 °/ₒ.

Problema. Descontando-se 8 °/ₒ em 450$, que quantia ficará restando?

Solução. 8 °/ₒ de 450$000 são 36$000, que é a porcentagem que se tem de descontar.
Ora de 450$ subtrahindo 36$, restam 414$.

450000	450$
8 °/ₒ	36$
36000,00	414$

Regra. *Para se obter o resultado de um desconto, acha-se a porcentagem da quantia mencionada, e desta subtrahe-se a porcentagem achada.*

Resolver os seguintes problemas:

1. Quanto se tem de receber de uma lettra de 850$ que vai ter o desconto de 6 °/ₒ? Resp. 799$.

2. Comprei 750$ de generos, e fazendo logo o pagamento, descontaram-me 12 °/ₒ, quanto paguei? Resp. 660$.

3. Comprei 2 caixões contendo 450 duzias de ovos, mas estando alguns quebrados, fizeram-me um desconto de 14 °/ₒ; quantas duzias paguei? Resp. 387.

4. De 800$ menos 8 °/ₒ subtrahindo 600$ menos 7 °/ₒ, quanto resta? Resp. 178$.

DIVISÃO EM PARTES PROPORCIONAES

195. Uma quantidade póde ser dividida em partes iguaes ou em partes proporcionaes. Como já tratamos no nº. **48**, da divisão em partes iguaes, aqui trataremos sómente da divisão em partes proporcionaes.

Problema. Dividir 140$ em tres partes proporcionaes, na razão de 3, 5 e 6.

Solução. A somma dos numeros proporcionaes é $3 + 5 + 6 = 14$. Então uma das partes é $\frac{3}{14}$ de 140$, a outra é $\frac{5}{14}$, e a outra é $\frac{6}{14}$. Ora $\frac{3}{14}$ de 140$ são 30$, $\frac{5}{14}$ de 140$ são 50$ e $\frac{6}{14}$ de 140$ são 60$. (Vede n.º **98**).

Processo
$\frac{3}{14}$ de 140$ = 30$
$\frac{5}{14}$ de 140$ = 50$
$\frac{6}{14}$ de 140$ = 60$

Regra. *Para se effectuar uma divisão proporcional, formam-se tantas fracções quantas forem as partes proporcionaes, tendo cada fracção a somma dos numeros proporcionaes como denominador, e um desses numeros como numerador.*

Acha-se depois no dividendo a parte correspondente a cada fracção.

1. Dividir o numero 78 em 3 partes na razão de 3, 4 e 6. Resp. 18, 24 e 36.

2. Dividir o numero 200 em 4 partes, na razão de 4, 5, 6 e 10. Resp. 32, 40, 48 e 80.

3. Dividir o numero 130 em 3 partes na razão de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$.

Solução. As fracções $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$, reduzidas ao mesmo denominador commum, são $\frac{6}{12}$, $\frac{4}{12}$ e $\frac{3}{12}$; então, o numero 130 póde ser dividido na razão dos numeradores 6, 4 e 3.

4. João e Pedro fizeram certo negocio e ganharam 210$; ora, tendo João entrado com 60$ e Pedro com 80$, quanto deve receber de lucro cada um?

Solução. Sendo 60$ e 80$ divisiveis por 20$, podem ser reduzidos a 3 e 4, e o lucro dividido na razão de 3 e 4. Então $\frac{3}{7}$ de 210$ = 90$. $\frac{4}{7}$ de 210$ = 120$.

TERMO MÉDIO

196. Termo médio significa o termo que medeia entre os extremos. O termo médio de dois ou mais numeros está sempre comprehendido entre o maior e menor desses numeros, e daqui lhe vem o nome de médio.

Problema. Qual é o termo médio de 4, 9, 12 e 15?

Solução. A somma dos termos é 40, e o numero de termos é 4, dividindo agora a somma dos termos pelo seu numero, teremos $40 \div 4 = 10$. Portanto 10 é o termo médio de 4, 9, 12 e 15.

$$\frac{4 + 9 + 12 + 15}{4} = \frac{40}{4} = 10$$

Regra. *Para se achar o termo médio de duas ou mais quantidades, divide-se a somma dessas quantidades pelo seu numero, e o quociente será o termo médio.*

1. Qual é o termo médio de 4, 6, 10 e 12? Resp. 8.

2. Qual é o termo médio de 45, 50, 54, 60, 62 e 65? » 56.

3. Qual é o termo médio de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{6}$? » $\frac{5}{16}$.

4. Durante o mez passado, o preço do café variou do seguinte modo: 5$200, 5$400, 5$600 e 5$800; qual foi o preço médio do café? Resp. 5$500.

MISTURA E LIGA

197. Mistura é o ajuntamento de generos seccos ou liquidos da mesma especie, mas de preços differentes.

198. Liga é a combinação de diversos metaes por meio da fusão. Os problemas de mistura e liga resolvem-se do mesmo modo.

Problema. Comprei 5 kilos de chá a 4$200 cada kilo; comprei mais 4 kilos a 4$800, e comprei ainda 6 kilos a 4$000; misturando este chá, a como ficou cada kilo da mistura?

Solução. O numero de kilos do chá misturado é 15, e o importe dos 15 kilos é 64$200; dividindo esta quantia por 15, teremos 4$280, preço de cada kilo da mistura.

64$200 ÷ 15 = 4$280

5 kilos a 4$200	21$000
4 kilos a 4$800	19$200
6 kilos a 4$000	24$000
15 kilos custaram	64$200

Regra. *Para se achar o preço de um kilo da mistura, divide-se o importe total da mistura pelo numero de kilos misturados.*

1. Um negociante misturou 50 garrafas de vinho de custo de 800 réis a garrafa, com 30 garrafas de custo de 1$000, a como lhe ficou cada garrafa desta mistura? Resp. $875.

2. Um negociante comprou 20 litros de aguardente por 6$500 e, por ser muito forte, misturou-lhe 5 litros de agua; a que preço ficou cada litro da mistura? Resp. $260.

3. O latão obtem-se ligando 3 kilos de zinco com 7 kilos de cobre. Custando o cobre 1$900 cada kilo, e o zinco 1$800, qual será o preço de cada kilo do latão? Resp. 1$870.

4. Em uma destillação, o primeiro barril de aguardente que sahiu do alambique, tinha 30 graus; o segundo tinha 26; o terceiro, 22, e o quarto, 18. Sendo toda esta aguardente reunida em uma pipa, com quantos graus ficou ella? Resp. 24.

CAMBIO

199. Cambio, em seu sentido lato, quer dizer o modo de fazer pagamentos em logares distantes, por meio de lettras ou ordens.

Cambio, em seu sentido restricto, significa a troca de dinheiro de uma nação por dinheiro de outra nação.

Começaremos este ponto com o cambio sobre a França, por ser o mais facil de calcular.

200. A unidade monetaria na França é o **franco,** que se divide em 100 *centimes* ou centesimos.

Franco
Moeda de prata

O franco está avaliado em 360 réis da nossa moeda, e quando elle corre na praça por este preço, diz-se que o cambio sobre a França está **ao par,** isto é, dá-se pelo franco o seu valor nominal que é 360 réis.

Mas, assim como varia o preço das mercadorias, assim varía tambem o preço das moedas extrangeiras, e em certas occasiões, o preço do franco tem chegado a 1$000 e ainda a mais.

O numero de réis que custa um franco, indica a taxa do cambio; assim, se o cambio sobre a França estiver a 480, isto quer dizer que, por cada franco que quizermos obter em moeda ou em lettras, teremos de pagar 480 réis da nossa moeda.

Problema. Quanto devem custar 125 francos, ao cambio de 360?

Solução. Custando um franco 360 réis, 125 francos devem custar o producto de $360 \times 125 = 45\$000$.

$360 \times 125 = 45\$000$

Problema. Reduzir 45$000 a francos ao cambio de 360.

Solução. Custando um franco 360 réis, dividem-se 45$000 por 360, e obtem-se o numero de francos, que é 125

$45\$000 \div 360 = 125$

Regra. *Para se reduzir francos a moeda brazileira, multiplica-se o valor de um franco pelo numero de francos.*

E para se reduzir moeda brazileira a francos, divide-se a moeda brazileira pelo valor de um franco.

1. Em quanto importam 150 francos, ao cambio de 390? Resp. 58$500.
2. Reduzir 400 francos a moeda brazileira, ao cambio de 420. Resp. 168$.
3. Reduzir 1:000$ a francos, ao cambio de 400. Resp. 2500 francos.
4. Reduzir 1:800$ a francos, ao cambio de 360. Resp. 5000 francos.
5. Quanto valem 185 francos, ao cambio de 750? Resp. ?
6. Reduzir 328$ a francos, ao cambio de 820. Resp. ?

Cambio sobre a Inglaterra

Penny (Cobre) — Shilling (Prata) — Libra esterlina (Ouro)

201. A unidade monetaria ingleza é a Libra esterlina que se indica com o signal £ antes do numero das libras. Assim, £ 45 lê-se: *45 libras.*

202. A libra divide-se em 20 shillings, e o shilling divide-se em 12 pence. O penny, que é o singular de pence, divide-se em 4 farthings. (Vêde n.° **163**).

Está estabelecido que o valor nominal do nosso **mil-réis** é 27 pence da moeda ingleza; mas, por certas circumstancias, o valor do nosso mil-réis não está sempre fixo, e, ora vale mais, ora vale menos de 27 pence. Em 1895 chegou a valer sómente 6 pence!

203. O numero de pence que vale um mil-réis brazileiro, indica a altura ou a taxa do cambio sobre a Inglaterra. Se o cambio estiver a 25, isto quer dizer que o nosso 1$000 vale 25 pence; se estiver a $24\frac{1}{2}$, quer dizer que o nosso 1$000 vale 24 pence e meio, etc.

204. Quando o cambio sobre a Inglaterra está a 27, está **ao par**; quando está a mais de 27, está acima do par; quando está a menos de 27, está abaixo do par e por isso em condições desfavoraveis para o Brazil.

Problema. Reduzir 280$ a moeda ingleza, ao cambio de 15.

Solução. Se um mil-réis brazileiro vale 15 pence, 280 mil-réis valem 280 × 15 = 4200 pence. Ora, reduzindo estes pence a shillings, temos 4200 ÷ 12 = 350 shillings; e reduzindo estes shillings a libras, temos 350 ÷ 20 = 17 libras e 10 shillings que é a moeda ingleza correspondente aos 280$000 brazileiros. (Vêde n.° **166**).

Em logar de 280$000, escrevemos 280 mil-réis para mais facil comprehensão do calculo

$$\begin{array}{r} 280 \text{ mil-réis} \\ 15 \\ \hline 1400 \\ 280 \\ \hline 4200 \end{array} \qquad 4200 \div 12 = 350 \qquad \begin{array}{r|l} 350 & 20 \\ \cline{2-2} 20 & 17 \text{ libras} \\ \hline 150 & \\ 140 & \\ \hline 10 \text{ shillings} & \end{array}$$

Regra. *Para se reduzir moeda brazileira a moeda ingleza, multiplica-se o numero de mil-réis pela taxa do cambio, e reduz-se o producto, que é numero de pence, a shillings e libras.*

[R]eduzir as seguintes quantias a moeda ingleza:

1. 500$000, ao cambio de 24. Resp. £ 50.
2. 1:200$000, ao cambio de 25. » £ 125.
3. 2:600$000, ao cambio de 24. » £ 260.
4. 800$000, ao cambio de 15. » £ 50.
5. 600$000, ao cambio de 12. » £ 30.

205. Passemos agora a reduzir moeda ingleza, isto é, libras, shillings e pence a moeda brazileira.

Problema. Quanto valem no Brazil £ 20, 11 shillings e 9 pence ao cambio de 27?

Solução. 20 libras, 11 shillings e 9 pence reduzidos a pence são 4941 pence. Valendo cada mil-réis 27 pence, divide-se 4941 por 27, e obtem-se o numero de mil-réis, que é 183, isto é, 183$000.

4941 ÷ 27 = 183 mil-réis

Regra. *Para se reduzir moeda ingleza a moeda brazileira, reduz-se a moeda ingleza a pence, e o numero destes dividido pela taxa do cambio, dará o numero de mil-réis requerido.*

1. Reduzir £ 112 e 10 shillings a moeda brazileira, com o cambio ao par. Resp. 1:000$000.
2. Reduzir £ 56 e 8 shillings a moeda brazileira, ao cambio de 24. Resp. 564$000.
3. Reduzir £ 4, 15 shillings e 10 pence a moeda brazileira, ao cambio de 25. Resp. 46$000.

206. O valor da libra esterlina, com o cambio ao par, é 8$888; o governo marcou-lhe o valor de 8$890 para remediar a inconveniencia dos quebrados. Quando, porém, o cambio desce, o valor da libra sobe, na razão inversa da descida da taxa do cambio.

Para acharmos, pois, o valor da libra pela taxa do cambio, dividiremos 240,000 pela taxa corrente, e o quociente será o valor da libra, em nossa moeda, como vemos nos seguintes exemplos:

(1°) $\frac{240,000}{27} = 8\$888$ (2°) $\frac{240,000}{24} = 10\$000$ (3°) $\frac{240,000}{12} = 20\$000$

No primeiro exemplo, sendo a taxa de cambio 27, o valor da libra é 8$888; no segundo, sendo 24, o valor da libra é 10$000; no terceiro, sendo 12, o seu valor é 20$000.

Do mesmo modo podemos achar o valor da libra em outra taxa qualquer.

Cambio sobre Portugal

207. O dinheiro brazileiro e o portuguez tem a mesma denominação e as mesmas unidades que são o real, o mil-réis e o conto de réis; mas como as moedas portuguezas de ouro, prata e cobre teem o dobro do tamanho das moedas brazileiras, teem tambem o dobro do valor. Assim, uma moeda portugueza de ouro, com o cunho de 10$000, é igual ás nossas moedas que teem o cunho de 20$000, e por isso 100$000 em moeda portugueza correspondem exactamente a 200$000 em moeda brazileira. Para se exprimir esta differença, dá-se ao dinheiro portuguez o nome de moeda forte.

A quantia que damos por 100$ fortes, indica a altura do cambio; quando se diz que o cambio sobre Portugal está a 215, isto quer dizer que por 100$ fortes, temos de dar 215$ brazileiros.

Quando o cambio está a 200, está ao par, porque damos 200$ por 100$ fortes.

Nota. Quando o cambio sobre a Inglaterra está acima do par, está alto, e por isso favoravel para o Brazil, e quando o cambio sobre a França e Portugal está acima do par, está alto, mas desfavoravel para o Brazil.

A razão desta differença é a seguinte:

No cambio com a Inglaterra, o Brazil dá sempre o certo, que é o 1$000, e a Inglaterra dá o incerto, que é 12, 20 ou 27 pence pelo mil-réis; e quanto mais alto estiver o cambio, tanto mais bem pago será o nosso mil-réis em moeda ingleza. No cambio com a França e Portugal dá-se o contrario. A França dá sempre o certo, que é o franco, e o Brazil dá o incerto, que é 360, 400 ou 500 réis pelo franco; e quanto mais alto estiver o cambio, tanto mais caro nos custará o franco. O mesmo acontece com Portugal que nos dá sempre o certo que é 100$ fortes.

Problema. Quanto é em nossa moeda 1:280$ fortes, ao cambio de 210?

Solução. Multiplicando a moeda forte que é 1:280$, pela taxa, e dividindo o producto por 100, temos 2:688$, quantia esta correspondente a 1:280$ fortes.

1:280$ × 210 = 268800$

268800$ ÷ 100 = 2:688$

Problema. Reduzir 2:688$ a moeda forte, ao cambio de 210.

Solução. Multiplicando a quantia dada por 100, e dividindo o producto pela taxa, temos 1:280$ fortes.

$\frac{2:688\$ \times 100}{210} = 1:280\$$

Regra. *Para se reduzir moeda forte á nossa moeda, multiplica-se a moeda forte pela taxa, e divide-se o producto por 100.*

E para se reduzir a nossa moeda a moeda forte, multiplica-se a nossa moeda por 100, e divide-se o producto pela taxa.

1. Reduzir 748$ a moeda forte, ao cambio de 220. Resp. 340$.
2. Reduzir 850$ fortes á nossa moeda, ao cambio de 210. Resp. 1:785$.
3. Reduzir 1:200$ fortes á nossa moeda, ao cambio de 240. Resp. ?
4. Tendo de pagar em Lisboa 2:000$ fortes, e estando o cambio a 235, quanto tenho de pagar em nossa moeda para perfazer aquella quantia? Resp. ?
5. Reduzir 1:785$ a moeda portugueza, ao cambio de 210. Resp. ?

Cambio sobre os Estados Unidos

208. O cambio sobre os Estados-Unidos opera-se do mesmo modo que o cambio sobre a França.

A unidade monetaria dos Estados-Unidos é o **dollar** que se divide em 100 *cents.* A palavra dollar pronuncia-se *dóllar*, e o plural é *dóllares.*

Dollar

As grandes fortunas são avaliadas em milhares ou milhões de dollares, como duzentos mil dollares, tres milhões de dollares, etc.

O dollar está avaliado em 1$830 da nossa moeda com o cambio ao par. Para reduzirmos qualquer numero de dollares a moeda brazileira ou vice-versa, seguiremos o mesmo processo que fizemos com o **franco.**

Cent.

Problema. Em quanto importam 250 dollares ao cambio de 1$830?

Solução. Sendo o valor de um dollar 1830 réis, multiplica-se este valor pelo numero de dollares, que é 250, e o producto dá o seu importe, que é 457$500.

Para se reduzir a nossa moeda a dollares, divide-se a nossa moeda pelo valor de um dollar.

$$\begin{array}{r} 1830 \\ 250 \\ \hline 915 \\ 366 \\ \hline 457500 \end{array}$$

1. Em quanto importam 330 dollares, ao cambio de 2900? Resp. 957$.
2. Reduzir 457$500 a dollares, ao cambio de 1830. Resp. ?

Nota. Para mais amplo conhecimento do cambio, vêde a nossa **Arithmetica Progressiva.**

QUADRADOS E CUBOS

209. Quadrado de um numero é o producto desse numero multiplicado por si; assim o quadrado de 2 é 4, porque $2 \times 2 = 4$; o quadrado de 5 é 25, porque $5 \times 5 = 25$; o quadrado de 10 é 100, porque $10 \times 10 = 100$. Um quadrado, em Arithmetica, é o producto de dois factores iguaes.

210. Cubo de um numero é o producto da multiplicação desse numero pelo seu quadrado, ou o producto desse numero tomado tres vezes como factor; assim o cubo de 3 é 27, porque $3 \times 3 \times 3 = 27$; o cubo de 5 é 125, porque $5 \times 5 \times 5 = 125$.

211. Em Arithmetica, o producto de dois ou mais factores iguaes chama-se tambem **potencia;** de sorte que, o quadrado de um numero chama-se tambem segunda potencia desse numero, porque é formado de dois factores iguaes. O cubo chama-se tambem a terceira potencia, porque é formado de tres factores iguaes. A quarta potencia é formada de quatro factores iguaes, e assim por diante.

212. Expoente é o numero que se escreve á direita de outro para mostrar o grau da sua potencia. Assim,

6^2 lê-se: segunda potencia de 6 ou quadrado de 6;

6^3 lê-se: terceira potencia de 6 ou cubo de 6;

6^4 lê-se: quarta potencia de 6;

6^5 lê-se: quinta potencia de 6; etc.

Nestes exemplos, os numeros 2, 3, 4 e 5 são expoentes de 6.

213. Os quadrados e cubos dos 10 primeiros numeros são os seguintes:

Numeros:	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.
Quadrados:	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100.
Cubos:	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729,	1000.

Problema. Qual é o quadrado de 13?

Solução. Multiplicaremos 13 por 13, e teremos 169, que é o quadrado de 13 $13 \times 13 = 169$

Regra. *Para se achar o quadrado de um numero, multiplica-se esse numero por si, e o producto será o seu quadrado.*

Problema. Qual é o cubo de 4?

Solução. Multiplicaremos 4 por 4, e teremos 16, que é o quadrado de 4. Depois multiplicaremos 16 por 4, e teremos 64, que é o cubo ou terceira potencia de 4. $4 \times 4 \times 4 = 64$

Regra. *Para se achar o cubo de um numero, multiplica-se esse numero pelo seu quadrado.*

Exercicio de applicação. Achar os seguintes quadrados:

1. O quadrado de 25. Resp. 625
2. O quadrado de 101. » ?
3. O quadrado de 333. » ?
4. O cubo de 18. » ?
5. O valor de 21^3. » ?
6. O valor de 25^3. Resp. 15625
7. O valor de 36^2. » ?
8. O valor de 42^3. » ?
9. O valor de 56^3. » ?
10. O valor de 85^2 » ?

Extracção da raiz quadrada

214. Raiz quadrada de um numero é o factor que, multiplicado por si, dá esse numero. Assim, a raiz quadrada de 25 é 5, porque $5 \times 5 = 25$; a raiz quadrada de 36 é 6, porque $6 \times 6 = 36$. De sorte que 36 é o quadrado de 6, e 6 é a raiz quadrada de 36; do mesmo modo 25 é o quadrado de 5, e 5 é a raiz quadrada de 25.

215. Signal radical é a figura $\sqrt{}$ que se escreve sobre um numero, para mostrar que se deve extrahir delle a raiz indicada. Assim

$\sqrt[2]{16}$ ou simplesmente $\sqrt{16}$ lê-se: a raiz quadrada de 16.

$\sqrt[3]{27}$ lê-se: a raiz cubica de 27.

$\sqrt[4]{625}$ lê-se: a quarta raiz de 625.

216. Extrahir a raiz quadrada de um numero é achar o factor que, multiplicado por si, produz esse numero.

Nota. O methodo de extrahir a raiz quadrada e cubica, que vamos expôr, ainda que só se preste a extrahir as raizes dos quadrados e cubos perfeitos, é comtudo muito vantajoso e de facil comprehensão, e póde ser usado com grande proveito no ensino primario. O outro methodo usado nos collegios e lyceus, por ser muito difficil, complicado e extenso, não póde ser apresentado em um compendio elementar para as escolas primarias. Aquelles que desejarem estudar esse processo, poderão achal-o convenientemente desenvolvido na nossa **Arithmetica Progressiva.**

Problema. Qual é a raiz quadrada de 576?

Solução. Decompondo o numero 576 em seus factores primos, segundo a regra exposta no n.º **68,** temos os factores 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3 e 3. Escrevendo estes factores em pares iguaes, e fazendo uma multiplicação continuada de um factor de cada par, como vemos abaixo, temos 24, que é a raiz quadrada de 576. A demonstração deste processo acha-se na nossa **Arithmetica Progressiva.**

576	2
288	2
144	2
72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

2, 2, 2, 3.
$2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$

Regra. *Para se achar a raiz quadrada de um quadrado perfeito, decompõe-se esse numero em seus factores primos; dispõem-se esses factores em pares que tenham o mesmo numero, e o producto continuado de um factor de cada par será a raiz quadrada.*

Exercicio de applicação. Extrahir a raiz quadrada dos seguintes numeros:

1. $\sqrt{144}$ Resp. 12
2. $\sqrt{225}$ » 15
3. $\sqrt{324}$ » 18
4. $\sqrt{625}$ » 25
5. $\sqrt{196}$ Resp. ?
6. $\sqrt{256}$ » ?
7. $\sqrt{729}$ » ?
8. $\sqrt{1444}$ » ?

Extracção da raiz cubica dos cubos perfeitos

217. A extracção da raiz cubica, por meio da factoração, opera-se do seguinte modo:

Problema. Qual é a raiz cubica de 1728?

Solução. Decompondo o numero 1728 em seus factores primos, temos nove factores.

Escrevendo esses factores em grupos, havendo tres factores iguaes em cada grupo, e depois multiplicando entre si um factor de cada grupo, temos

1728	2
864	2
432	2
216	2
108	2
54	2
27	3
9	3
3	3
1	.

2, 2, 3.
2, 2, 3.

A raiz cubica de 1728 é $2 \times 2 \times 3 = 12.$

Regra. *Para se extrahir a raiz cubica de um cubo perfeito, decompõe-se esse numero em seus factores primos; dispõem-se esses factores em grupos de tres factores iguaes, e o producto continuado de um factor de cada grupo será a raiz cubica.*

Exercicio de applicação. Extrahir a raiz cubica dos seguintes numeros:

1. $\sqrt[3]{4096}$ Resp. 16
2. $\sqrt[3]{5832}$ » 18
3. $\sqrt[3]{27000}$ » 30
4. $\sqrt[3]{13824}$ » ?
5. $\sqrt[3]{3375}$ » ?
6. $\sqrt[3]{15625}$ Resp. ?
7. $\sqrt[3]{29791}$ » ?
8. $\sqrt[3]{35937}$ » ?
9. $\sqrt[3]{46656}$ » ?
10. $\sqrt[3]{103823}$ » ?

ANALYSE ARITHMETICA

218. Os problemas de Arithmetica podem ser resolvidos por dois modos, a saber: Pela direcção das regras especiaes, que é o que se chama **solução synthetica,** e por analyse, que é o que se chama **solução analytica.**

Resolve-se um problema pelas regras da Arithmetica, quando se segue restrictamente o processo que ellas ensinam, como em geral fizemos no ensino já exposto. Resolve-se por analyse, quando, sem o emprego de regra alguma, se raciocina com os dados do problema para se obter a solução do calculo proposto, e é isto o que agora temos de aprender e exercitar.

Os francezes dão a esta solução o nome de **reducção á unidade;** ora é certo que, em muitos casos, a reducção á unidade é muito vantajosa, porque, conhecido o valor de uma unidade, calcula-se facilmente o valor de qualquer quantidade do mesmo genero. Mas nem todos os problemas da Arithmetica se resolvem analyticamente pela reducção á unidade; a maior parte destas questões do calculo são resolvidas por processos engenhosos, verdadeiros artificios da imaginação, e para estas soluções complicadas, a reducção á unidade não offerece recurso algum. O nome adequado para este systema de calcular é **analyse arithmetica,** dado pelos inglezes, americanos e allemães, e que exprime com precisão a idéa que se deve ter deste methodo de solução. A reducção á unidade é simplesmente uma pequena parte da analyse, como teremos occasião de notar nos problemas que havemos de resolver.

Antigamente a analyse era desconhecida no ensino elementar, hoje, porém, com o progresso da pedagogia e o aperfeiçoamento do methodo de clareza, o ensino da analyse arithmetica está adoptado em todas as escolas onde se ensina esta materia com perfeição, e já tem mostrado os mais vantajosos resultados, no adeantamento dos alumnos.

Observação. Em cada lição que agora apresentamos, damos um problema resolvido por analyse, seguido de outros problemas semelhantes para os alumnos resolverem pelo mesmo systema.

Se algum problema não for da natureza do que está resolvido na lição, será então resolvido conforme a analyse já ensinada em alguma lição precedente

Escreveremos *dois terços, 2 terços,* $\frac{2}{3}$ e $^2/_3$, e o mesmo com outras fracções, para os alumnos se familiarizarem com os diversos modos de exprimir na escripta as partes de uma unidade.

No problema em que houver alguma difficuldade, daremos um auxilio. Entende-se por *auxilio*, a explicação necessaria para remover algum embaraço que difficulte a analyse, deixando ao alumno o resto da solução.

Serie de lições graduadas para o ensino da Analyse Arithmetica

1ª Lição

1° Problema. Custando 4 kilos de café 2$, quanto devem custar 6 kilos?

Analyse. *4 kilos custando 2$, 1 kilo deve custar a quarta parte de 2$, que é 2$ ÷ 4 = 500 réis, e 6 kilos devem custar 6 vezes 500 réis, que são 500 × 6 = 3$.*

2. Quanto deve custar um cento de laranjas, sabendo-se que 18 custam 1$080? Resp. 6$.

3. Custando 7 saccos de farinha 56$, quanto devem custar 3 saccos? Resp. ?

4. Se 7 metros de morim custam 5$600, quanto devem custar 15 metros? Resp. ?

5. Quanto custam 30 kilos de assucar refinado, sabendo-se que 9 kilos custam 7$200? Resp. ?

6. Se um viajante anda 15 kilometros em 3 horas, em 10 horas quantos kilometros andará? Resp. ?

7. Quanto custam 12 garrafas de vinho moscatel, sabendo-se que 5 garrafas custam 17$500? Resp. ?

2ª Lição

8. Se 15 homens fazem um muro em 40 dias, 24 homens em quantos dias o farão?

Analyse. *15 homens fazendo o muro em 40 dias, 1 homem poderá fazel-o em 15 vezes mais tempo, isto é, em 40 × 15 = 600 dias; e 24 homens poderão fazel-o em 600 ÷ 24 = 25 dias.*

9. Se 4 homens fazem um trabalho em 12 dias, 3 homens em quantos dias o farão? Resp. 16.

10. Podendo 12 homens colher o café de uma fazenda em 12 dias, 9 homens em quantos dias o poderão colher? Resp. ?

11. Se 17 homens podem abrir um canal em 25 dias, 10 homens em quantos dias o poderão abrir? Resp. ?

12. Um engenheiro calculou que, em 18 dias, poderia construir uma ponte provisoria, se trabalhassem nella 15 operarios; mas, sendo necessario concluil-a em 10 dias, quantos operarios deveria empregar? Resp. ?

13. Em 15 dias, 3 homens poderam forrar todos os compartimentos de uma casa; se trabalhassem 5 homens, em quantos dias os poderiam forrar? Resp. ?

3ª Lição

14. Se o salario de 3 homens em 5 dias é 30$, quanto deve ser o salario de 4 homens em 7 dias?

Analyse. *Se o salario de 3 homens em 5 dias é 30$, de 1 homem será 30$ ÷ 3 = 10$, em 5 dias, e em 1 dia, será 10$ ÷ 5 = 2$. Então o salario de 1 homem em 7 dias será 2$ × 7 = 14$, e o de 4 homens será 14$ × 4 = 56$.*

15. Se 6 pessoas gastam 72$ em 8 dias, quanto devem gastar 5 pessoas em 12 dias? Resp. 90$.

16. Se 3 homens podem levantar 12 metros de parede em 8 dias, quantos metros poderão levantar 5 homens em 3 dias? Resp. ?

17. Se 6 cavallos comem 360 litros de milho em 10 dias, quantos litros 5 cavallos comerão em 9 dias? Resp. ?

18. Se uma familia de 8 pessoas gasta 2:000$ em 5 mezes, quantó gastará uma familia de 11 pessoas, em 8 mezes? Resp. ?

19. Se 5 bois comem 2 carros de feno em 6 dias, em quantos dias, 12 bois comerão 8 carros? Resp. 10.

20. Se um homem póde viajar 72 kilometros em 6 dias, em quantos dias andará elle 108 kilometros? Resp. ?

21. Se uma locomotiva gasta 12 toneladas de carvão em 20 dias, quantas toneladas gastará em 15 dias? Resp. ?

4ª Lição

22. Dividir 35 pecegos por dois meninos, de sorte que um receba mais 9 do que o outro?

Analyse. *Subtrahindo 9 de 35, restam 35 − 9 = 26, que é a somma de dois numeros iguaes. Dividindo 26 por 2, temos 13. Então um numero é 13, e o outro 13 + 9 = 22.*

Verificação. 13 + 22 = 35.

23. Dividir 31$ por duas pessoas, de modo que uma receba mais 5$ do que a outra? Resp. 13$ e 18$.

24. A somma de dois numeros é 139, e a sua differença é 19; quaes são os numeros? Resp. ?

25. Duas meninas teem 25 amendoas, e uma dellas tendo mais 7 do que a outra, quantas tem cada uma? Resp. ?

26. A somma de dois numeros é 36, e a sua differença é 8; quaes são os numeros? Resp. ?

27. Em uma escola mixta havia 77 crianças; ora, havendo mais 9 meninas do que meninos, qual era o numero de cada sexo? Resp. ?

28. Dois cestos conteem 100 laranjas, e tendo um mais 12 laranjas do que o outro, quantas tem cada cesto? Resp. ?

29. Um menino tem certo numero de pennas, outro tem o dobro, e os dois teem 24; quantas pennas tem cada um? Resp. ?

5ª Lição

30. Dividir o numero 28 em duas parcellas na razão de 3 e 4.

Analyse. *Temos de dividir o numero 28 em duas parcellas, de modo que uma tenha 3 partes, e a outra 4. Como o total das partes é 3 + 4 = 7, dividiremos 28 por 7, e teremos o quociente 4, que é o valor de 1 parte. Tendo uma das parcellas 3 partes, o seu valor é 4 × 3 = 12; tendo a outra 4 partes, o seu valor é 4 × 4 = 16.*

Verificação. 12 + 16 = 28.

31. Dividir 35$ em duas quantias na razão de 2 e 3. Resp. 14$ e 21$.

32. Dividir o numero 120 em tres parcellas na razão de 3, 4 e 5. Resp. ?

33. Dois homens alugaram um pasto por 72$; um poz lá 7 cavallos, e o outro poz 2; quanto deve pagar cada alugador? Resp. ?

34. Dois vaqueiros alugaram um capinzal por 140$; um tinha lá 4 vaccas, e o outro tinha 3; quanto deveria pagar cada um? Resp. ?

35. Dois irmãos compraram de sociedade um cavallo por 240$; um entrou com 100$, e o outro com 140$; venderam-no no mesmo dia por 360$; que parte do lucro deve agora receber cada um? Resp. ?

Auxilio. Como 100$ e 140$ podem ser divididos por 20$, o lucro póde ser dividido na razão de 5 e de 7.

6ª Lição

36. Dividir o numero 15 em duas partes, de sorte que a menor seja $\frac{2}{3}$ da maior.

Analyse. *Se a parte menor é $\frac{2}{3}$ da maior, segue-se que a maior é $\frac{3}{3}$, e as duas partes são $\frac{3}{3} + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$. Ora, se $\frac{5}{3}$ de um numero são iguaes a 15, $\frac{1}{3}$ é igual a 15 ÷ 5 = 3, e $\frac{3}{3}$, que são a parte maior, iguaes a 3 × 3 = 9, e $\frac{2}{3}$ iguaes a 3 × 2 = 6.*

Verificação. 9 + 6 = 15.

37. Dividir o numero 98 em duas partes, de sorte que a menor seja $\frac{2}{5}$ da maior. Resp. 70 e 28.

38. Silvano e Fulgencio teem de pagar 60$; mas tendo Fulgencio de pagar sómente a metade do que pagar Silvano, quanto tem de pagar cada um? Resp. ?

39. Um viajante andou em dois dias 56 kilometros, e, tendo caminhado no segundo dia sómente $\frac{3}{4}$ da distancia que caminhou no primeiro, quanto andou cada dia? Resp. ?

40. Dividir o numero 45 em tres parcellas, de sorte que a segunda seja $\frac{1}{2}$, e a terceira $\frac{1}{4}$ da primeira. Resp. ?

41. Dividir o numero 90 em tres parcellas, de sorte que a segunda seja $\frac{2}{3}$, e a terceira $\frac{2}{3}$ da primeira. Resp. ?

7ª Lição

42. Quanto é $\frac{3}{4}$ de 8?

Analyse. *1 quarto de 8 é 8 ÷ 4 = 2, e 3 quartos são 3 vezes 2, que são 6. Então $\frac{3}{4}$ de 8 são 6.*

43. Quanto é $\frac{4}{5}$ de 10, e $\frac{2}{3}$ de 12? Resp. 8.
44. Quanto sommam $\frac{2}{3}$ de 15 e $\frac{4}{9}$ de 27? Resp. 22.
45. Sommar $\frac{5}{9}$ de 99 com $\frac{4}{10}$ de 100. Resp. 95.
46. De $\frac{11}{12}$ de 144 subtrahir $\frac{10}{11}$ de 121. Resp. 22.
47. Sommar $\frac{1}{4}$ de 28\$, $\frac{1}{3}$ de 27\$ e $\frac{1}{5}$ de 30\$. Resp. ?.
48. Qual é a differença entre $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{4}$ de 264\$? Resp. 22\$.
49. Angelina poz 8\$ em um cofre; no dia seguinte poz mais $\frac{5}{8}$ do que já tinha posto, que quantia ficou no cofre? Resp ?
50. Arlindo tinha 40 laranjas, mas, dando $\frac{4}{5}$ dellas a dois collegas, quantas lhe restaram? Resp. ?
51. Dividir $\frac{7}{8}$ de 48 por $\frac{1}{6}$ de 36. Resp. 7.
52. Quanto é $\frac{3}{5}$ de um milheiro? Resp. ?

8ª Lição

53. Se dois terços de um queijo custam 1\$600, quanto deve custar o queijo inteiro?

Analyse. *Custando 2 terços 1\$600, 1 terço deve custar a metade de 1\$600, que é 800 réis, e 3 terços, que são o queijo inteiro, devem custar 800 × 3 = 2\$400.*

54. Custando $\frac{3}{5}$ de um barril de vinho 45\$, quanto deve custar o barril inteiro? Resp. 75\$
55. Pesando $\frac{3}{4}$ de uma barra de ferro 33 kilos, quando deve pesar a barra inteira? Resp. ?
56. Eu sei que cinco setimos de certo numero são 50, qual é então esse numero? Resp ?
57. De que quantia 8\$ são dois terços? Resp ?
58. Se $\frac{4}{5}$ do ordenado de um jardineiro são 80\$, qual é o seu ordenado? Resp ?
59. Um menino gastou $\frac{3}{5}$ do dinheiro que tinha, e ainda lhe sobraram 4\$; quanto tinha elle? Resp. ?
60. Uma menina deu $\frac{1}{4}$ das amendoas que tinha a uma collega, e restaram-lhe 15; quantas amendoas tinha? Resp. ?
61. Gastei $\frac{3}{5}$ do meu dinheiro e restaram-me sómente 260\$, que quantia possuia eu? Resp. ?
62. Se $\frac{3}{4}$ do soldo de um official são 300\$, qual é o seu soldo inteiro? Resp. ?

9ª Lição

63. Custando $\frac{2}{3}$ de uma pipa de aguardente 96\$, quanto devem custar $\frac{3}{4}$ da mesma pipa?

Analyse. *Custando 2 terços 96\$, 1 terço deve custar a metade de 96\$, que que é 48\$; e 3 terços, que são a pipa inteira, devem custar 48\$ × 3 = 144\$. Ora, custando a pipa 144\$, 1 quarto da pipa deve custar 144\$ ÷ 4 = 36\$, e 3 quartos devem custar 36\$ × 3 = 108\$.*

64. Custando $\frac{2}{5}$ de um sacco de feijão 2\$800, quanto devem custar $\frac{9}{10}$? Resp. 6\$300.
65. Se $\frac{4}{5}$ de uma barra de ferro pesam 40 kilos, quanto devem pesar $\frac{2}{5}$ da mesma barra? Resp. ?
66. Se dois quintos de uma barrica de farinha custam 8\$, quanto devem custar tres decimos da mesma barrica? Resp. ?
67. Custando $\frac{5}{9}$ de uma barra de ouro 850\$, quanto devem custar $\frac{5}{8}$ da mesma barra? Resp. ?
68. Se $\frac{3}{4}$ da extensão de uma avenida medem 1200 metros, quantos metros medirão $\frac{1}{6}$ dessa avenida? Resp. ?
69. Se tres quartos de certo numero são 120, quanto devem ser sete oitavos do mesmo numero? Resp. ?
70. Se $\frac{2}{3}$ de um campo valem 400\$, quanto devem valer $\frac{5}{6}$ do mesmo campo? Resp. ?

10ª Lição

71. Certo numero e a sua terça parte sommam 20, qual é esse numero?

Analyse. *O numero tem $\frac{3}{3}$, juntando mais $\frac{1}{3}$ são $\frac{4}{3}$. Ora, se $\frac{4}{3}$ de um numero são iguaes a 20, $\frac{1}{3}$ é igual a 20 ÷ 4 = 5, e $\frac{3}{3}$ são iguaes a 5 × 3 = 15.*

72. Se juntarmos a certo numero $\frac{3}{4}$ do mesmo numero, teremos 21; qual é esse numero? Resp. 12.
73. Se eu addicionar a certo numero $\frac{4}{5}$ do mesmo numero, terei a somma de 90; qual é o numero? Resp. ?
74. Se eu pozer no meu cofre $\frac{3}{4}$ do dinheiro que já alli guardei, terei então 56\$; que quantia tinha no cofre? Resp. ?
75. Qual é o numero que addicionado a elle $\frac{2}{3}$ de si mesmo, dá a somma de 75\$? Resp. ?
76. Qual é o numero que, se lhe juntarmos $\frac{3}{8}$ de si mesmo, dará a somma de 88? Resp. ?
77. Um cobrador recebeu um dia certa quantia; no dia seguinte recebeu metade do que havia recebido, e ficou então com 13\$500; quanto recebeu no primeiro dia? Resp. ?
78. De certo numero subtrahindo $\frac{3}{7}$ de si mesmo, restam 20; qual é esse numero? Resp. ?

11ª Lição

79. Reduzir $\frac{3}{4}$ a oitavos.

Analyse. *Multiplicando-se ambos os termos de uma fracção por um mesmo numero, não se altera o seu valor; ora multiplicando ambos os termos de $\frac{3}{4}$ por 2, temos o denominador em oitavos. Portanto $\frac{3}{4}$ reduzidos a oitavos são $\frac{6}{8}$. Isto é evidente, porque 1 = $\frac{8}{8}$, $\frac{1}{4}$ = $\frac{2}{8}$, e $\frac{3}{4}$ são iguaes a 3 vezes $\frac{2}{8}$ que são $\frac{6}{8}$.*

80. Reduzir $\frac{2}{3}$ a sextos.	88. Quantos nonos são $\frac{2}{3}$?
81. Reduzir $\frac{1}{3}$ a nonos.	89. Quantos decimos são $\frac{4}{5}$?
82. Reduzir $\frac{2}{5}$ a decimos.	90. Quantos oitavos é $\frac{1}{2}$?
83. Reduzir $\frac{4}{5}$ a trigesimos.	91. Quantos sextos são $\frac{2}{3}$?
84. Reduzir $\frac{2}{3}$ a doze ávos.	92. Quantos quinze ávos são $\frac{4}{5}$?
85. Reduzir $\frac{3}{4}$ a doze ávos.	93. Quantos doze ávos são $\frac{5}{6}$?
86. Reduzir $\frac{4}{7}$ a quatorze ávos.	94. Quantos decimos são $\frac{3}{5}$?
87. Reduzir $\frac{1}{2}$ a decimos.	95. Quantos quatorze ávos são $\frac{4}{7}$?

12ª Lição

96. Qual é a somma de $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$?

Analyse. *Multiplicando ambos os termos de $\frac{2}{3}$ por 4, temos $\frac{8}{12}$; multiplicando ambos os termos de $\frac{3}{4}$ por 3, temos $\frac{9}{12}$, e ficam as duas fracções reduzidas a um denominador commum. Então a somma é $\frac{8}{12} + \frac{9}{12} = \frac{17}{12} = 1\frac{5}{12}$.*

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = ?$$

$$\frac{8}{12} + \frac{9}{12} = \frac{17}{12} = 1\frac{5}{12}$$

97. Qual é a somma de $\frac{3}{5}$ e $\frac{1}{2}$? Resp. $\frac{11}{10}$.
98. Qual é a somma de $\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{3}$? Resp. ?
99. Qual é a somma de $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$? Resp. ?
100. Qual é a somma de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$? Resp. ?

Auxilio. Multiplique os termos da 1ª fracção por 6, os da 2ª por 4, e os da 3ª por 3.

101. Qual é a somma de $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{2}$?
102. De $\frac{3}{4}$ subtrahindo $\frac{1}{2}$, de $\frac{1}{2}$ subtrahir $\frac{1}{3}$, e sommando os dois restos, que fracção ficará? Resp. $\frac{1}{12}$.
103. Achar a somma de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{16}$. Resp. ?
104. Achar a somma de $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{6}$. Resp. ?
105. Achar a somma de $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{5}$. Resp. ?
106. Achar a somma de $\frac{5}{7}$ e $\frac{2}{3}$. Resp. ?
107. De $\frac{1}{2}$ subtrahir $\frac{1}{12}$. Resp. ?
108. De $\frac{7}{8}$ subtrahir $\frac{7}{16}$. Resp. ?

13ª Lição

109. A somma de $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ de certo numero é 28, qual é esse numero?

Analyse. *As duas fracções reduzidas a um denominador commum e sommadas dão $\frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$. Ora, sendo $\frac{7}{12}$ de um numero iguaes a 28, $\frac{1}{12}$ é igual a 28 ÷ 7 = 4, e $\frac{12}{12}$, que formam o numero inteiro, iguaes a 4 × 12 = 48.*

Verificação. *$\frac{1}{4}$ de 48 é 12, $\frac{1}{3}$ de 48 é 16, e a somma das duas parcellas é 12 + 16 = 28.*

110. Uma pessoa comprou uma porção de ovos, e, se a terça e a quarta parte delles fossem reunidas, sommariam 56; quantos ovos comprou? Resp. 96.
111. Em um collegio $\frac{1}{2}$ dos alumnos estuda Grammatica, $\frac{1}{3}$ estuda Arithmetica, e os demais, que são 10, estudam Geographia; quantos alumnos tem este collegio? Resp. ?
112. Se da minha idade subtrahissem $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{5}$ dos meus annos, restariam só 2; quantos annos tenho? Resp. ?
113. Um menino gastou $\frac{3}{5}$ do seu dinheiro, e restaram-lhe 16 tostões; que quantia tinha elle? Resp. ?

14ª Lição

114. Um jornaleiro contratou-se em uma fazenda por 40 dias, nas seguintes condições: receber 2\$ e comida cada dia que trabalhasse, e pagar 1\$ pela comida, cada dia que não trabalhasse. Tendo recebido 50\$ no fim dos 40 dias, deseja-se agora saber quantos dias trabalhou?

Analyse. *Se trabalhasse 40 dias, receberia 40 vezes 2\$ que são 80\$; mas, como recebeu sómente 50\$, perdeu 80\$ — 50\$ = 30\$. Ora, como em cada dia que elle não trabalhou perdeu 3\$, sendo 2\$ do jornal e 1\$ da comida, segue-se que elle deixou de trabalhar tantos dias quantas vezes 3\$ estão contidos em 30\$, que são 30\$ ÷ 3\$ = 10. Portanto deixou de trabalhar 10 dias, e trabalhou 40 — 10 = 30 dias.*

115. Um chacareiro contratou-se por 60 dias nas seguintes condições: receber 1\$500 e comida, cada dia que trabalhasse, e pagar \$500 pela comida, cada dia que deixasse de trabalhar. Recebendo no fim dos 60 dias 68\$, quantos dias trabalhou? Resp. ?
116. Um jardineiro foi cuidar de um jardim, nestas condições: receber 6\$ cada dia que trabalhasse, e nada ganhar e ainda pagar a multa de 4\$, cada dia que deixasse de trabalhar. No fim de 80 dias, recebendo elle 400\$, quantos dias trabalhou? Resp. ?
117. Dois cestos conteem 37 laranjas, em um delles ha mais 17 laranjas do que no outro; quantas laranjas tem cada um? Resp. ?
118. Dois numeros sommam 54, e um é o dobro do outro; quaes são os numeros? Resp. ?

15ª Lição

119. Quanto é 5 por cento de 80?

Analyse. *5 por cento quer dizer 5 em cada 100 ou $\frac{5}{100} = \frac{1}{20}$. Ora $\frac{1}{20}$ de 80 é $\frac{1}{20} \times 80 = \frac{80}{20} = 4$. Portanto 5 por cento de 80 são 4.*

120. Quanto é 6 por cento de 150? Resp. 9.
121. Quanto é 20 por cento de 35? Resp. ?
122. Quanto é 8 por cento de 75$? Resp. ?
123. Quanto é 12 por cento de 50$? Resp. ?
124. Quanto é 40 por cento de 650$? Resp. ?
125. Quanto é 75 por cento de 240$? Resp. ?
126. Quanto é $2\frac{1}{2}$ por cento de 200$? Resp. 5$.

Auxilio. $2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$. Sendo 1 por cento igual a $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{2}$ por cento é igual a $\frac{1}{200}$, $\frac{5}{2} = \frac{5}{200}$ ou $\frac{1}{40}$. Achar agora $\frac{1}{40}$ de 200$.

127. Quanto é $4\frac{1}{2}$ por cento de 240$? Resp. 10$800

16ª Lição

128. Quaes são os juros de 800$ a 4 por cento ao anno durante 5 annos?

Analyse. *4 por cento são $\frac{4}{100} = \frac{1}{25}$. Ora, $\frac{1}{25}$ de 800$ é $\frac{1}{25} \times 800\$ = 32\$$, que são os juros de 1 anno; os juros de 5 annos são $32\$ \times 5 = 160\$$.*

129. Achar os juros de 500$ a 8 por cento ao anno, em 9 annos. Resp. 360$.
130. Quanto sommam os juros e o capital de 750$, em 3 annos, a 8 por cento ao anno? Resp. ?
131. Comprei 12 saccos de feijão por 120$? por quanto os devo vender para ganhar 30 por cento? Resp. ?
132. Um negociante comprou certas mercadorias por 840$, e ganhou nellas 75 por cento; por quanto as vendeu? Resp. ?
133. Eduardo gastou 85 por cento de 120$ em roupa de que precisava; em quanto importou essa roupa? Resp. ?
134. Achar os juros de 250$ a 4 por cento ao anno, em 6 annos. Resp. ?
135. Achar os juros de 2:000$ a 8 por cento ao anno, em tres annos. Resp. ?
136. Achar os juros de 4:000$, em 5 annos, a 6 por cento ao anno. Resp. ?
137. Quaes são os juros de 200 libras esterlinas, a 3 por cento ao anno, em 9 annos? Resp. £ 54.

17ª Lição

138. Comprei um relogio por 50$, e vendi-o por 70$; quantos por cento ganhei?

Analyse. *Ganhei $70\$ - 50\$ = 20\$$. Como 20$ são $\frac{20}{50} = \frac{2}{5}$ do custo, e $\frac{2}{5}$ de 100 são 40, segue-se que ganhei 40 por cento.*

139. Albano comprou um cavallo por 80$, e vendeu-o por 120$; quantos por cento ganhou? Resp. 50.
140. Um livreiro comprou uma obra em doze volumes por 200$, e vendeu-a por 230$; quantos por cento ganhou? Resp. ?
141. Um chale custou 5$, e foi vendido por 8$; quantos por cento deu de lucro? Resp. ?
142. Comprei uma peça de seda por 120$, e vendi-a por 200$; quantos por cento ganhei? Resp. ?
143. Um homem comprou um cavallo por 100$, e vendeu-o por 95$, quantos por cento perdeu? Resp. ?

18ª Lição

144. Um alfaiate póde fazer um terno de roupa em 6 dias, e sua mulher póde fazel-o em 12 dias; trabalhando ambos, em quantos dias o poderão fazer?

Analyse. *O alfaiate fazendo o terno em 6 dias, faz $\frac{1}{6}$ da obra por dia; e sua mulher fazendo-o em 12 dias, faz $\frac{1}{12}$ por dia. Trabalhando ambos, fazem $\frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ da obra por dia. Ora como a obra é um inteiro ou $\frac{1}{1}$, segue-se que, se dividirmos $\frac{1}{1}$ por $\frac{1}{4}$, teremos o numero de dias. $\frac{1}{1} \div \frac{1}{4} = 4$ dias.*

145. Se A póde fazer um serviço em 2 dias, e B póde fazel-o em 3 dias, em quantos dias o poderão fazer, trabalhando ambos? Resp. $1\frac{1}{5}$ dia.
146. Um lavrador póde colher todo o seu arroz em 5 dias, e seu filho póde colhel-o em 7, trabalhando ambos, em quantos dias o poderão colher? Resp. $2\frac{11}{12}$ dias.
147. A póde fazer um serviço em 2 dias, B em 3 dias e C em 6 dias; em que tempo os tres juntos o podem fazer? Resp. 1 dia.
148. Um cavallo póde comer um sacco de milho em 8 dias, uma vacca o póde em 12 dias, e um carneiro em 24 dias; comendo os tres juntos, quantos dias durará o milho? Resp. 4 dias.
149. A e B podem lavrar um campo em 4 dias; podendo B lavral-o sozinho em 12 dias, em quanto tempo poderá A lavral-o sozinho? Resp. ?

Auxilio. A póde lavrar $\frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$ do campo por dia, e por isso póde lavral-o em 6 dias.

19ª Lição

150. Um tanque que leva 1600 litros de agua, tem duas torneiras, uma o enche em 4 horas, e a outra o enche em 5. Abrindo-se as duas torneiras, em quantas horas ficará cheio?

Analyse. *Uma torneira enche o tanque em 4 horas, então em 1 hora lançará dentro delle $1600 \div 4 = 400$ litros de agua. A outra torneira o enche em 5 horas, então em 1 hora lançará $1600 \div 5 = 320$ litros. As duas torneiras juntas lançarão em 1 hora $400 + 320 = 720$ litros. Como o tanque leva 1600 litros, dividiremos 1600 por 720, e teremos o numero de horas que é $1600 \div 720 = 2\frac{2}{9}$ horas.*

151. Uma banheira que leva 480 litros de agua, tem duas torneiras; uma a enche em 6 minutos, e a outra em 4. Abrindo-se as duas torneiras, em quantos minutos ficará cheia? Resp. $2\frac{2}{5}$ minutos.
152. Uma torneira enche uma caixa de agua em 6 minutos, e outra a enche em 8; estando as duas torneiras abertas, em quantos minutos ficará cheia? Resp. $3\frac{3}{7}$ minutos.
153. Um deposito de agua leva 360 litros, e tem duas torneiras, uma o enche em 15 horas, e outra o esvazia em 20 horas; abrindo as duas torneiras, em quantas horas o deposito ficará cheio?

Auxilio. Deitando uma torneira em cada hora 24 litros de agua no deposito e a outra torneira despejando só 18, claro está que, em cada hora, só ficarão 6 litros dentro do deposito. Se 6 litros gastam 1 hora, 360 litros gastarão $360 \div 6 = 60$ horas.

154. Uma caixa de agua leva 900 litros, e uma torneira a enche em 9 horas, e outra a esvazia em 12 horas; em quantas horas ficará cheia, abrindo-se as 2 torneiras? Resp. 36 horas.

20ª Lição

155. A somma de 5 numeros consecutivos é 130; quaes são esses numeros?

Analyse. *O* **primeiro** *numero (consecutivo) é o menor; o* **segundo** *numero tem mais uma unidade ou 1 do que o primeiro; o* **terceiro** *tem mais 2 do que o primeiro; o* **quarto** *tem mais 3; e o* **quinto** *tem mais 4. Estes excedentes sommam $1 + 2 + 3 + 4 = 10$. Subtrahindo 10 de 130, teremos 120 que é agora a somma de 5 numeros iguaes. Um desses numeros é $120 \div 5 = 24$. Portanto 24 é o primeiro numero consecutivo, e os outros são $24 + 1 = 25$, $24 + 2 = 26$, $24 + 3 = 27$, e $24 + 4 = 28$*

Verificação. $24 + 25 + 26 + 27 + 28 = 130$.

156. A somma de 3 numeros consecutivos é 120; quaes são esses numeros? Resp. 39, 40 e 41
157. A somma de 6 numeros consecutivos é 63; quaes são esses numeros? Resp. ?
158. A somma de 2 numeros consecutivos e 979; quaes são esses numeros? Resp. ?
159. A somma de 5 numeros consecutivos é 235; quaes são esses numeros? Resp. ?

21ª Lição

160. Como poderemos achar a somma dos numeros consecutivos 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 e 17 sem os addicionar como parcellas?

Analyse. *Se escrevermos a metade dos termos na ordem crescente, começando pelo primeiro, e depois a outra metade na ordem decrescente, começando pelo ultimo termo, formaremos 5 pares de termos, sommando igualmente 25 cada um, e os 5 pares sommando $25 \times 5 = 125$, que é a somma de todos os termos. Neste processo arithmetico notamos os dois factos:*

8	9	10	11	12
17	16	15	14	13
25	25	25	25	25

$25 \times 5 = 125$

O **primeiro** *é que a somma de cada par é igual á somma do primeiro e do ultimo termo, isto é, do menor e do maior, que são 8 e 17.*

O **segundo** *é que o numero de pares é igual á metade do numero de termos, isto é, á metade de 10. Portanto se multiplicarmos a somma do primeiro e do ultimo termo pela metade do numero de termos, obteremos um producto de todos os termos sem os addicionar; pois $8 + 17 = 25$, e $25 \times 5 = 125$.*

Verificação. $8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 = 125$.

161. Qual é a somma de todos os numeros consecutivos desde 12 até 18? Resp. $(12 + 18) \times 3\frac{1}{2} = 105$.
162. Qual é a somma de todos os numeros inteiros desde 1 até 1000? Resp. 500500.

22ª Lição

163. Natalino, encontrando alguns pobres que lhe pediam uma esmola, quiz soccorrer a todos igualmente; mas notou que, se desse 3 tostões a cada um, sobrariam 12 tostões, e se desse 5 tostões faltariam 8 tostões; qual era o numero de pobres?

Analyse. *Se desse 3 tostões a cada um, sobrariam 12 tostões, mas se desse 5, isto é, mais 2 tostões a cada um, teria de dar os 12 tostões que sobravam e mais os 8 tostões que faltavam, e que sommam $12 + 8 = 20$ tostões. Os pobres eram, pois, tantos quantas vezes o numero 2 está contido em 20, isto é, eram $20 \div 2 = 10$.*

164. Um pai quiz distribuir pelos filhos alguns abacates que lhe mandaram de presente; mas notou que, se desse 2 a cada um, sobrariam 9, e, se desse 4, faltariam 3 para completar a divisão; quantos filhos tinha elle? Resp. 6.
165. Uma menina quiz repartir as suas amendoas pelas suas collegas, e notou que se desse 3 a cada uma, restariam 24; e, se lhes desse 7, daria todas; quantas collegas tinha a menina? Resp. ?
166. Um fazendeiro queria comprar certo numero de ovelhas para a sua fazenda, e notou que, se as comprasse a 2$, restar-lhe-iam 20$; e se as comprasse a 5$, faltar-lhe-iam 40$; quantas ovelhas queria comprar? Resp. ?

23ª Lição

167. Tres irmãs Julia, Sophia e Fausta, tinham as seguintes idades: Julia tinha 8 annos, Sophia tinha a idade de Julia e mais $\frac{1}{4}$ da idade de Fausta, e Fausta tinha tantos annos quantos tinham Julia e Sophia; qual era a idade de Fausta?

Analyse. *Julia tinha 8 annos. Sophia tinha (8 annos) mais (a idade de Fausta). Fausta tinha (8 annos) mais 8 annos, mais ($\frac{1}{4}$ da sua idade), isto e, tinha 16 annos mais $\frac{1}{4}$ da sua idade. Logo, 16 annos são iguaes a $\frac{4}{4}$ de sua idade e 4 annos iguaes a $\frac{1}{4}$; então $\frac{5}{4}$ são iguaes a 20 annos, que era a sua idade.*

168. Um homem comprou um chapéo, um relogio e uma capa; o chapéo custou 6$000; o relogio custou tanto como o chapéo e $\frac{1}{5}$ do preço da capa, e a capa custou tanto como o relogio e o chapéo; quanto custou a capa? Resp. 20$.

169. Tres cidades A, B e C estão situadas em linha recta; a distancia de A a B é 24 kilometros, e $\frac{1}{4}$ desta distancia são iguaes a $\frac{2}{7}$ da distancia de B a C; que distancia ha de A a C? Resp. 73 kilometros.

170. Uma pessoa tinha tres herdeiros A, B e C, e deixou $\frac{2}{7}$ dos seus bens a A; $\frac{1}{3}$ a B, e os remanescentes a C. Havendo entre o legado de A e o de C sómente a differença de 160$, quanto recebeu cada herdeiro? Resp. A=480$, B=560$, C=640$.

171. Se 1 boi vale 8 carneiros, e 3 bois valem 2 cavallos, qual é o preço de 1 cavallo, valendo 1 carneiro 15$? Resp. ?

172. A idade de Sara é $\frac{2}{3}$ da idade de Dalila, e a somma das duas idades é 20 annos; qual é a idade de cada uma?

Resp. Dalila 12 an. Sara 8 an.

24ª Lição

173. Qual é o valor da libra esterlina ao cambio de 15?

Analyse. *A libra esterlina tem 240 pence, que são moedas de cobre inglezas, semelhantes as nossas de 40 réis.* $\frac{240}{15} = 16$ *Como a taxa do cambio mostra o numero de pence que vale o nosso 1$, e que no caso presente é 15, temos de dividir 240 por 15, e o quociente que é 16, mostra que o valor da libra é 16$. Se quizermos saber o valor de 2 ou mais libras, multiplicaremos o numero de libras por 240 e prosegue-se a operação.*

174. Qual é o valor de 5 libras ao cambio de 12? Resp. 100$.
175. Qual é o valor de 10 libras ao cambio de 15? Resp. 160$.
176. Qual é o valor de 1 libra ao cambio de 18? Resp. 13$$\frac{1}{3}$.
177. Qual é o valor de 20 libras ao cambio de 16? Resp. 300$.
178. Em quanto importam 25 francos ao cambio de 580?

Auxilio. Se 1 franco custa 580, 25 francos custam 25 vezes 580.

179. Em quanto importam 350 francos ao cambio de 629? Resp. ?

180. Em quanto importam 40 dollares ao cambio de 3$310? Resp. ?
181. Em quanto importam 60 liras ao cambio de 630? Resp. ?
182. Qual é o valor de mil libras esterlinas ao cambio de 20? Resp. 12:000$.
183. Qual é o valor de um milhão de francos ao cambio de 635? Resp. 635:000$.
184. Qual é o valor de um milhão de dollares ao cambio de 3$290? Resp. 3.290:000$.
185. Qual é o valor de um milhão de libras esterlinas ao cambio de 15? Resp. 16.000:000$.

FIM

Depois de um estudo bem applicado e constante, colhem-se com regozijo as flores e os fructos de tão vantajoso trabalho.

INDICE

OBSERVAÇÃO

Se os Srs. Professores quizerem dar aos seus discipulos mais completos conhecimentos desta sciencia, poderão usar o nosso curso de ARITHMETICA PROGRESSIVA, onde acharão esta materia devidamente desenvolvida para o estudo superior.