

Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC
Centro Sócio-Econômico
Departamento de Economia e Relações Internacionais

PAULO VICTOR DA FONSECA

Dinâmicas migratórias em um ambiente complexo e
adaptativo com redes *small-world*

Florianópolis, 2013

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Sócio-Econômico
Departamento de Economia e Relações Internacionais

**Dinâmicas migratórias em um ambiente complexo
e adaptativo com redes *small-world***

Monografia submetida ao Departamento de Economia
e Relações Internacionais da Universidade Federal
de Santa Catarina, como requisito obrigatório para a
obtenção do grau de Bacharelado.

Acadêmico: Paulo Victor da Fonseca

Orientador: Prof. Dr. Jaylson Jair da Silveira

Florianópolis, 2013

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Sócio-Econômico
Departamento de Economia e Relações Internacionais

A banca examinadora resolveu atribuir a nota 10 (dez) ao aluno Paulo Victor da Fonseca na disciplina CNM 5420 - Monografia, do curso de Graduação em Ciências Econômicas da Universidade Federal de Santa Catarina, pela apresentação deste trabalho.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Jaylson Jair da Silveira

Prof. Dr. Eraldo Sérgio Barbosa da Silva

Prof. Dr. Guilherme Valle Moura

Florianópolis, 2013

“Much to learn you still have”

Yoda (Star Wars: Episode II - Attack of the Clones)

Resumo

O modelo Harris-Todaro de migração rural-urbana é interpretado como um processo de aprendizagem social por imitação em um ambiente de racionalidade limitada e implementado como um modelo computacional baseado em agentes. A estrutura de interação dos agentes é representada por uma rede do tipo *small-world* que, segundo [Watts & Strogatz \(1998\)](#), apresenta características mais próximas àquelas observadas em redes empíricas. Os resultados das simulações evidenciam que as características do sistema econômico descritas por [Harris & Todaro \(1970\)](#) são obtidas, também, como propriedades emergentes de inúmeros processos de decisões de agentes interdependentes e não-coordenados. Tais propriedades emergentes são: (i) a partir de uma situação inicial de predominância da população rural, ocorre um contínuo crescimento da população urbana; (ii) o sistema econômico converge para um equilíbrio caracterizado por concentração e desemprego urbanos; e (iii) estabilidade do diferencial dos rendimentos esperados entre os setores rural e urbano. Além disso, estas características mostram-se robustas independentemente da topologia de rede que foi adotada (regular, *small-world* ou aleatória). Quanto ao desempenho do sistema, a convergência sob rede *small-world* foi mais rápida do que a convergência em uma rede regular, adotada por [Espíndola et al. \(2006\)](#), e apresentou aproximadamente o mesmo tempo necessário que o observado em uma rede aleatória.

Palavras-chave: complexidade; jogos evolucionários; migração rural-urbana; modelagem computacional baseada em agentes.

Abstract

The economics Harris-Todaro model of rural-urban migration is interpreted as a process of social learning by imitation in an environment of bounded rationality, and implemented as a computational agent-based model. The structure of interaction of the agents of the model is represented by a small-world network which, following [Watts & Strogatz \(1998\)](#), presents features that are more similar to those observed in empirical networks. The results of the simulations show that the features of the economic system described by [Harris & Todaro \(1970\)](#) can be obtained, also, as emerging properties of the decision process carried out by innumerable interdependent and non-coordinated agents. Those features are: (i) starting with a predominant rural population, a continuous growth of the urban population takes place; (ii) the economic system converges to an equilibrium characterized by urban concentration and urban unemployment; (iii) stabilization of the expected rural-urban wages differential. Moreover, those features have shown to be robust to the network topologies adopted either regular, small-world or random networks. Regarding the performance of the system, the time of convergence of the model under small-world network was faster than the time observed under a regular network, such as that adopted by [Espíndola et al. \(2006\)](#). Besides, that time was approximately the same as that observed for random networks.

Keywords: complexity; evolutionary games; rural-urban migration; agent-based modelling.

Lista de Figuras

2.1	Fixação de salários pelo preço de mercado.	11
2.2	Modelo de Lewis.	14
2.3	Equilíbrio Harris-Todaro com desemprego urbano.	19
2.4	Estabilidade assintótica global do equilíbrio Harris-Todaro com desemprego urbano.	20
3.1	Distância média entre os vértices e coeficiente de <i>cluster</i> para a família de redes religadas aleatoriamente. (Os círculos representam a razão entre as distâncias médias de redes em função de $p \in [10^{-4}, 1]$ e uma rede regular. Os quadrados representam a razão entre os coeficientes de <i>cluster</i> de redes em função de $p \in [10^{-4}, 1]$ e uma rede regular.	34
3.2	Topologias de rede	35
3.3	Fração urbana da população n_u ao longo da simulação para valores de $n_u \in (0.9, 0.8, 0.7, 0.2)$	40
3.4	Desemprego urbano ao longo da simulação para valores de $n_u \in (0.9, 0.8, 0.7, 0.2)$	41
3.5	Diferencial de salários esperados ($w_u^e - w_a$) ao longo da simulação para valores de $n_u \in (0.9, 0.8, 0.7, 0.2)$	42
3.6	Fração urbana da população ao longo da simulação para três conjuntos de parâmetros J e k diferentes. Círculos: ($J > 0, k > 0$); Quadrados: ($J = 0, k > 0$); Cruzes: ($J > 0, k = 0$).	45
3.7	Fração rural da população como função da renda <i>per capita</i> em unidades de bens manufaturados.	45
3.8	Fração urbana da população como função da razão J/k e do tamanho da matriz quadrada de agentes L	46
3.9	Fração urbana da população de equilíbrio em função do parâmetro β	46

4.1	Representação gráfica de uma distribuição inicial dos agentes em uma rede anel, para $n = 30, k = 2$. (Cor branca - trabalhadores rurais, cor verde - trabalhadores urbanos e as arestas vermelhas representam as ligações entre os vértices da rede.)	52
4.2	Matrizes adjacências das topologias de rede - os pontos azuis representam os nós da rede conectados entre si.	53
4.3	Verificação das características descritas por Watts e Strogatz utilizando <i>shortcuts</i> . (A trajetória de pontos em azul representa a razão entre o coeficiente de <i>cluster</i> em função da probabilidade p , $C(p)$ e o coeficiente de <i>cluster</i> de uma rede regular, $C(0)$ e a trajetória de quadrados vermelhos representa a razão entre a distância média entre os nós em função da probabilidade p , $l(p)$, e a distância média entre os vértices de uma rede regular, $l(0)$	57
4.4	Evolução da fração urbana da população para as diferentes topologias de rede. (Rede regular: $p = 0$. Rede <i>small-world</i> : $p = 0,1$. Rede aleatória: $p = 1$.)	57
4.5	Evolução da taxa de desemprego para as diferentes topologias de rede. (Rede regular: $p = 0$. Rede <i>small-world</i> : $p = 0,1$. Rede aleatória: $p = 1$.)	58
4.6	Evolução do diferencial de rendimentos esperados para as diferentes topologias de rede. (Rede regular: $p = 0$. Rede <i>small-world</i> : $p = 0,1$. Rede aleatória: $p = 1$.)	59
4.7	Tempo de convergência e fração urbana da população de equilíbrio em função da topologia da rede.	60

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Tema e problema de pesquisa	1
1.2	Objetivos	3
1.2.1	Objetivo Geral	3
1.2.2	Objetivos Específicos	3
1.3	Justificativa	3
1.4	Metodologia	4
2	Segmentações no mercado de trabalho e dinâmicas migratórias	6
2.1	Segmentações no mercado de trabalho	7
2.1.1	O setor informal	7
2.1.2	O setor formal	10
2.2	Conexões setoriais e fluxos migratórios	12
2.2.1	O modelo de oferta ilimitada de mão de obra de Lewis	12
2.2.2	O modelo Harris-Todaro	15
2.3	A dinâmica migratória vista como um jogo evolucionário	20
3	Elementos de sistemas complexos	24
3.1	Sistemas complexos	24
3.2	Teoria de redes	30
3.2.1	Medidas em teoria de redes	31
3.2.2	Topologias de redes	32
3.3	Modelagem computacional baseada em agentes	34
3.4	Dinâmicas migratórias sob o ponto de vista da complexidade: o modelo Harris-Todaro em uma abordagem baseada em agentes	38
3.4.1	Modelagem baseada em agentes da migração rural-urbana	39
3.4.2	A migração rural-urbana com uma estrutura de interação entre agentes do tipo Ising	42

4	Dinâmicas migratórias sob redes <i>small-world</i>	48
4.1	O modelo proposto	49
4.2	Implementação computacional	51
4.3	Resultados das simulações	56
	Considerações Finais	61
	Referências Bibliográficas	65

Capítulo 1

Introdução

1.1 Tema e problema de pesquisa

A existência de dualidade no mercado de trabalho é uma das características mais importantes de economias em desenvolvimento. Os setores rural e urbano, que dão o caráter dual a estas economias, não são conjuntos estanques deste sistema econômico, uma vez que o setor rural provê o urbano de alimentos e de mão-de-obra que será utilizada no desenvolvimento das firmas industriais e os centros urbanos aglomerados permitem economias de escala para a produção e troca de muitos dos bens necessários ao setor rural (Todaro & Smith 2011, p. 9,10). Um fenômeno que se manifesta nestas economias em desenvolvimento é o enorme fluxo de trabalhadores rurais para o setor urbano. O modelo seminal de Harris & Todaro (1970), que será tomado como referência neste trabalho, assume que estes fluxos são respostas dos migrantes a incentivos econômicos, a saber, o diferencial de rendimentos existente entre os setores e a probabilidade associada à obtenção de empregos tanto no local de origem quanto no de destino. Esta hipótese adotada pelos autores implica que um sistema econômico caracterizado por uma política de salário mínimo no setor urbano conduzirá a economia a uma posição de equilíbrio com concentração e desemprego urbanos.

Recentemente, um grupo de artigos sobre o fenômeno da migração rural-urbana tem tratado este tema sob a abordagem dos sistemas complexos, uma vez que a decisão de migrar ou não migrar é tomada por inúmeros agentes que interagem entre si, e sem a existência de um coordenador central. Os trabalhos

de [Silveira et al. \(2006\)](#) e [Espíndola et al. \(2006\)](#) integram este grupo ao interpretar o fenômeno de migração rural-urbana como um processo de aprendizagem social. Nos trabalhos supracitados, a investigação é feita sob a estrutura de uma rede quadrada e regular, o que mantém a vizinhança de um agente constante ao longo das simulações. No entanto, o trabalho de [Watts & Strogatz \(1998\)](#) apontou para a importância que a topologia da rede tem para o estudo de mais variados sistemas. Estes autores observaram que muitos dos sistemas biológicos, tecnológicos e sociais apresentam uma topologia de rede que se encontra entre uma rede regular (uma rede com uma estrutura constante ao longo do tempo) e uma rede aleatória (uma rede cuja estrutura é alterada constantemente, sendo as conexões da rede estabelecidas de maneira aleatória). A esta outra estrutura de redes dinâmicas, os autores deram o nome de redes *small-world*.

Reconhecendo isto, o presente trabalho tem a proposta de investigar as dinâmicas migratórias num ambiente complexo e adaptativo sob uma topologia de redes do tipo *small-world*, que estabelece as interconexões entre os agentes deste sistema. Além de investigar o desempenho deste sistema sob outras topologias, como redes regulares e redes aleatórias.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo Geral

Investigar propriedades dinâmicas da migração rural-urbana vista como um processo de aprendizagem social em um ambiente de racionalidade limitada e modelada como uma dinâmica evolucionária computacional baseada em agentes adaptativos.

1.2.2 Objetivos Específicos

1. Verificar se os resultados obtidos por Harris e Todaro, com um modelo de equações diferenciais e de diferenças, são replicados como uma propriedade emergente de um sistema complexo e adaptativo com uma rede com características topológicas do tipo *small-world*.
2. Comparar a estabilidade evolucionária e o desempenho das variáveis relevantes sob diferentes topologias de rede, a saber, redes regulares, *small-world* e aleatórias.

1.3 Justificativa

A migração rural-urbana é um fenômeno comum em países em desenvolvimento. Fenômeno este que traz profundas mudanças de bem-estar e estruturais num sistema econômico. Por ser resultado de processos decisórios individuais de inúmeros agentes, sem interferências de um coordenador central, mostra-se um fenômeno propício à modelagem computacional baseada em agentes (ABM, do termo em inglês *Agent-based computational modeling*). A adoção de tal metodologia possibilita uma maior flexibilidade para modelar o comportamento dos agentes econômicos, dotando-os da capacidade de aprendizagem e permitindo algum tipo de interação social. Podendo partir, portanto, de pressuposições mais realistas do que aquelas encontradas no arcabouço tradicional neoclássico. Além de possibilitar ao pesquisador um maior controle sobre o modelo, permitindo que investigue o comportamento do sistema econômico sob diferentes

condições, quase que replicando um laboratório. Além disso, a ABM permite compreender como alguma regularidade particular evolui e persiste de maneira auto-organizada, ([Tsfatsion 2006](#), p. 838).

A estrutura de interação dos agentes é representada no modelo por uma rede. Dada a centralidade da interdependência existente entre os componentes do sistema, a topologia da rede utilizada torna-se relevante. Levando este fato em consideração, redes *small-world* por apresentarem características mais próximas daquelas apresentadas por sistemas empíricos, como observaram [Watts & Strogatz \(1998\)](#), são mais propícias à modelagem do fenômeno da migração rural-urbana.

1.4 Metodologia

A fim de investigar o fenômeno de migração rural-urbana, este trabalho utiliza métodos característicos da abordagem de sistemas complexos. A saber, o fluxo migratório dos trabalhadores de um sistema econômico é visto como uma característica emergente de um processo de aprendizagem social, num ambiente adaptativo. Este processo de aprendizagem social, por ser modelado como um jogo evolucionário e demandar um tipo de modelagem com muitos agentes e que são heterogêneos entre si, torna a simulação computacional necessária.

[Tsfatsion \(2006\)](#) conceitua modelos computacionais baseados em agentes de processos econômicos, como o utilizado neste trabalho, da seguinte maneira:

ACE (Agent-based computational economics) is the computational study of economic processes modeled as dynamic systems of interacting agents. Here “agent” refers broadly to bundled data and behavioral methods representing an entity constituting part of a computationally constructed world ([Tsfatsion 2006](#), p. 835).

Portanto, para alcançar os objetivos propostos, um “mundo virtual” que replique o sistema econômico e as interações entre agentes será criado computacionalmente, e deste processo dinâmico algumas propriedades emergentes podem ser obtidas, sendo que estas não são propriedades encontradas nas partes componentes do sistema.

Tal metodologia adotada permitirá concluir se os fenômenos verificados por [Harris & Todaro \(1970\)](#), numa abordagem de modelos baseados em equações, emergiriam também num ambiente adaptativo de racionalidade limitada de modelos baseados em agentes, no qual a estrutura de interação é caracterizada por uma rede *small-world*.

Capítulo 2

Segmentações no mercado de trabalho e dinâmicas migratórias

O desenvolvimento econômico é um processo que traz profundas mudanças para a estrutura econômica e social dos países, mas, sobretudo, mudanças consideráveis na demografia destas economias. Estas drásticas alterações demográficas são resultados de uma característica comum aos países em desenvolvimento, a existência de um mercado de trabalho segmentado. Para estes países, como observa [Fields \(2009\)](#), a hipótese de um mercado de trabalho homogêneo é irrealista, sendo mais razoável supor que há uma subdivisão em setores deste mercado.

Um mercado de trabalho é dito ser segmentado caso trabalhadores com um mesmo nível dado de habilidade recebem salários diferentes a depender do segmento (ou setor) em que estiverem empregados, [Agénor & Montiel \(2008\)](#). Além disso, pode acontecer de o acesso aos trabalhos mais atrativos ser limitado, de forma que a obtenção destes fique restrita a apenas uma fração da população, cabendo ao restante aceitar um trabalho pior ou permanecer desempregado.

Neste trabalho, será considerado um sistema econômico com dualidade no mercado de trabalho, ou seja, este mercado será composto por dois setores, a saber, o setor formal (urbano) e o setor informal (rural). Cabe ressaltar que, por facilidade analítica, a maioria dos modelos que trata deste tema considera um sistema econômico composto por dois setores¹.

Este capítulo fica, então, dividido da seguinte forma: na primeira seção

¹Ao leitor interessado, o trabalho de [Fields \(2009\)](#) traz alguns *insights* e indicações bibliográficas para possíveis expansões para modelos com n setores no mercado de trabalho.

aborda-se as características e implicações da segmentação no mercado de trabalho, na segunda seção apresenta-se algumas formas de conexão entre os setores da economia de maneira que fique possível a ocorrência dos fluxos migratórios - expondo o modelo de Lewis e o modelo Harris-Todaro, por fim, a seção terceira apresenta o processo migratório visto como uma dinâmica de jogos evolucionários.

2.1 Segmentações no mercado de trabalho

Como já observado, parte-se da hipótese de que o sistema econômico em questão apresenta dualidade no mercado de trabalho. No entanto, na literatura, não há uniformidade quanto à diferenciação entre os setores formal e informal. No Brasil, por exemplo, considera-se que o setor formal seja formado por trabalhadores que possuem carteira de trabalho e, portanto, gozam de alguns benefícios trabalhistas, sendo o setor informal, então, ocupado por aqueles trabalhadores que não possuem tais benefícios. Segundo (Fields 2009, p. 5), há ainda, em outros contextos, a associação do setor formal com firmas com registro governamental e que pague impostos. Em outros casos, ainda, associa-se o setor informal à prostituição e a outras atividades ilegais. Lewis (1958) propõe uma diferenciação dos setores quanto aos salários pagos aos trabalhadores, segundo ele

earnings in the subsistence sector set a floor to wages in the capitalist sector, but in practice wages have to be higher than this, and there is usually a gap of 30% or more between capitalist wages and subsistence earnings (Lewis 1958, p. 410).

O modelo que será proposto e analisado nos próximos capítulos justifica a diferenciação setorial por diferentes processos de determinação salarial e pela tecnologia utilizada por cada um deles.

2.1.1 O setor informal

A falta de consenso não se limita à definição de setores formal ou informal em um sistema econômico. O próprio setor informal pode apresentar diferentes características, a depender da modelagem proposta, por exemplo: (i) em uma classe de modelos, a preferência estrita dos trabalhadores é a obtenção de um

emprego no setor formal, sendo o informal, então, um destino de última escolha para os agentes daquela economia; (ii) em outra classe de modelos, o setor informal da economia é um setor desejável para alguns trabalhadores; (iii) uma outra alternativa é considerar o setor informal como tendo sua própria dualidade, sendo, portanto, uma combinação das duas classes anteriores de modelos. A apresentação a seguir é baseada na realizada por (Fields 2009, p. 15-23).

A hipótese de um trabalho formal estritamente preferido a um emprego informal pode vir acompanhado da hipótese de inexistência de barreiras à entrada no setor informal da economia, ou seja, as firmas do setor informal absorvem toda a oferta de força de trabalho existente. O setor informal, descrito de tal forma, segundo relatório do [International Labour Office \(ILO\) \(1972, p. 6\)](#), apresenta os seguintes critérios definidores: (i) livre acesso; (ii) operação em baixa escala; (iii) trabalhos intensivos em mão de obra; (iv) mercados não regulados e competitivos. Algumas das atividades que compõem o setor informal são, portanto, trabalhos casuais, domésticos, autônomos, etc., como observado por [Lewis \(1958\)](#):

Another large sector to which it applies is the whole range of casual jobs - the workers on the docks, the young men who rush forward asking to carry your bag as you appear, the jobbing gardener, and the like. These occupations usually have a multiple of the number they need, each of them earning very small sums from occasional employment ([Lewis 1958, p. 402](#)).

É razoável que, dada a hipótese de livre acesso ao setor informal, seja proposto um processo de determinação de salários diferente da comumente utilizada pela economia neoclássica via produtividade marginal. Algumas alternativas à hipótese neoclássica podem ser encontradas em [Fields \(2009\)](#) e são aqui apresentadas²:

- Assume-se que a produtividade marginal do trabalho no setor informal é igual a zero, ou seja, há uma quantidade total fixa de renda a ser realizada neste setor que independe da quantidade de trabalhadores empregados. O salário informal é determinado, então, pela divisão entre a quantidade fixa de renda e o número de trabalhadores informais. Ou seja, o salário é igual

²Em [Fields \(2009\)](#) podem ser encontrados, ainda, dois outros tipos de determinação salarial: (i) salários determinados por uma produtividade marginal positiva mas decrescente; (ii) modelar um sistema completo de demanda para trabalhadores, bens agrícolas e bens não-agrícolas.

ao produto médio e, portanto, varia inversamente com a quantidade de trabalhadores empregados. Esta abordagem é encontrada em [Fields \(1975, 1989\)](#) e [Lewis \(1958\)](#).

- Assume-se que a produtividade marginal do trabalho não é nula, mas sim um valor constante. O salário informal é determinado, então, pelo valor constante da produtividade marginal do trabalho. Tal abordagem é utilizada em [Harris & Todaro \(1970\)](#).

As características apresentadas anteriormente excluem a possibilidade de trabalhadores empregados voluntariamente no setor informal. No entanto, tal decisão pode ser tomada por parte dos trabalhadores sem caracterizar comportamento irracional destes agentes econômicos, uma vez que seu comportamento maximizador não se restringe apenas aos salários recebidos, mas, sim, a um pacote completo de outras variáveis relevantes. Por exemplo, um agente pode voluntariamente escolher o trabalho informal pois, como trabalhador autônomo, terá um horário mais flexível de trabalho, coisa que normalmente não acontece com os trabalhos formais, [Maloney \(2004\)](#). Outros fatores que podem influenciar nesta estratégia dos trabalhadores são: possibilidade de ganhos superiores no trabalho informal, não necessidade de submissão hierárquica, possibilidade de trabalhar em ambientes mais cômodos, ou com familiares, entre outros.

Posteriormente, modelar-se-á o setor informal de uma maneira semelhante à primeira classe de modelos aqui apresentada, no entanto, o trabalhador que não conseguir um emprego formal poderá aceitar um emprego informal com salário menor ou então permanecer desempregado. Tal abordagem é a utilizada por Harris e Todaro no artigo seminal "*Migration, unemployment and development: A two-sector analysis*"³.

³Existem ainda modelos que consideram dualismo no próprio setor informal, uma vez que para uma parte da população este setor pode ser visto como desejável enquanto para outros é apenas um último recurso. Ao leitor interessado, consultar [Todaro \(1969\)](#), [Fields \(1975\)](#), [Fields \(2009\)](#).

2.1.2 O setor formal

Basicamente, as análises do setor formal de um sistema econômico passam pela caracterização da determinação de salários neste setor. (Fields 2009, p. 8-15), relaciona as seguintes possibilidades de fixação de salários no setor formal⁴: (i) salários determinados pelo preço de mercado; (ii) salários fixados institucionalmente acima do preço de mercado; (iii) salários fixados acima do preço de mercado por considerações da demanda. Os pressupostos necessários à análise são: firmas e trabalhadores com comportamentos maximizadores de lucro e utilidade, respectivamente.

O modelo de determinação salarial pelo preço de mercado é o já difundido modelo de oferta e demanda por mão de obra convencional. As hipóteses do modelo são aqui enunciadas e expressas na Figura 2.1 abaixo:

- A demanda por trabalho por parte das firmas urbanas é uma função decrescente dos salários reais, *ceteris paribus*. Portanto, tem-se uma curva de demanda negativamente inclinada, dada a produtividade marginal do trabalho decrescente.
- A oferta de trabalho é uma função crescente dos salários reais. A curva de oferta é positivamente inclinada pois salários maiores atraem trabalhadores de outros mercados, e induzem os trabalhadores fora da força de trabalho a adentrarem.
- As flutuações do salário real são ditados apenas pelas interações entre a oferta e a demanda.

Em uma simples análise de estática comparativa, suponha que o processo de crescimento econômico aumente a demanda por trabalho das firmas do setor formal, ou seja, a curva de demanda desloca-se para a direita, como as firmas são livres para agir segundo seu comportamento maximizador de lucro, novos trabalhadores serão contratados para o emprego formal, e como o trabalho é

⁴Uma quarta possibilidade também é encontrada no texto, que são os modelos com determinação de salários acima do salário de mercado. Tal modelagem pode ser encontrada em Bardhan & Rudra (1981), Dréze & Mukherjee (1989), Solow (1990) e Osmani (1991).

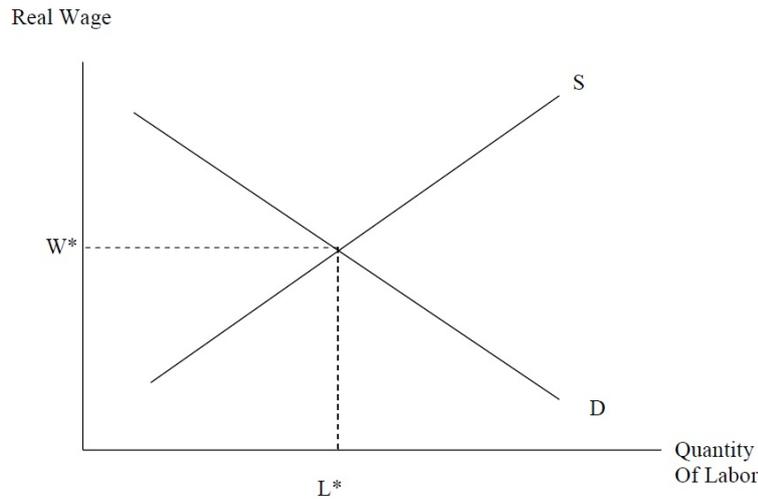


Figura 2.1: Fixação de salários pelo preço de mercado.
Fonte: [Fields \(2009\)](#).

um recurso escasso neste modelo, haverá um deslocamento ao longo da curva de oferta de trabalho pressionando os salários reais a aumentarem de nível.

Em muitas situações, outros fatores diferentes do simples comportamento maximizador das firmas e trabalhadores agem para determinar os salários em um mercado de trabalho. Quando esta situação ocorre, diz-se que os salários são determinados institucionalmente⁵. Formas comuns de fixação salarial por forças institucionais são: a existência de um salário mínimo, sindicatos, leis trabalhistas, políticas de pagamentos do setor público, entre outros. Em um sistema econômico que disponha de um mercado de trabalho com salários fixados institucionalmente acima do salário de mercado, a demanda por trabalho por parte das firmas será incapaz de absorver toda a oferta de mão de obra existente ao dado nível de salário, além disso, a quantidade de trabalhadores empregados será menor do que seria caso o salário fosse igual ao salário de mercado. Como a oferta de trabalho supera a demanda para um dado salário instituído acima do salário de mercado, o desemprego neste sistema econômico irá emergir, a menos que os trabalhadores aceitem empregos no setor informal.

Uma hipótese alternativa para o tipo de determinação salarial no mercado de

⁵Esta forma de determinação salarial é a encontrada em modelos keynesianos, no modelo de Lewis e no modelo Harris-Todaro, ([Fields 2009](#), p. 11).

trabalho é dada pela teoria do salário-eficiência que argumenta que firmas pagarão um salário acima do salário de mercado, de forma a incentivar uma maior produtividade dos trabalhadores, caso a expectativa de ganhos de produtividade supere o custo maior com salários mais altos, tendo então um acréscimo no lucro. Esta estratégia por parte das firmas possibilita uma maior produtividade pois permite selecionar os melhores trabalhadores da força de trabalho, e induz seus trabalhadores a serem mais produtivos com vistas à manter seu emprego. O desemprego, nesta classe de modelos, é também um resultado de equilíbrio resultante de uma estratégia das firmas em manter os salários em um nível superior ao salário de mercado.

2.2 Conexões setoriais e fluxos migratórios

Em um sistema econômico dual, tal qual considerado até agora, os setores componentes do mercado de trabalho não constituem conjuntos estanques. Ao invés disso, como já indicado anteriormente, algum grau de mobilidade do trabalho existe, de forma que os agentes desta economia possam rever suas localizações setoriais e alterar as configurações de cada um dos setores constantemente ao longo do tempo. Considera-se agora algumas das teorias tradicionais acerca das relações setoriais de uma economia com dualidade no mercado de trabalho.

2.2.1 O modelo de oferta ilimitada de mão de obra de Lewis

Em 1954, o economista W. Arthur Lewis publica o artigo "*Economic development with unlimited supplies of labor*", uma das primeiras formulações do processo de transformações estruturais. Segundo [Todaro & Smith \(2011\)](#)

structural-change theory focuses on the mechanism by which underdeveloped economies transform their domestic economic structures from a heavy emphasis on traditional subsistence agriculture to a more modern, more urbanized, and more industrially diverse manufacturing and service economy. It employs the tools of neoclassical price and resource allocation theory. ([Todaro & Smith 2011](#), p. 115).

O modelo de [Lewis \(1958\)](#) considera, então, uma economia em desenvolvimento com dualidade no mercado de trabalho. O setor informal (originalmente,

setor de subsistência) apresenta, por hipótese, excesso de trabalho, de forma que a produtividade marginal do trabalho é nula, ou seja, a saída de um trabalhador rural não influencia alterações na produção deste setor. O salário rural é determinado, então, não pela produtividade marginal do trabalho, mas sim pela produtividade média do trabalho, que é simplesmente a razão entre o produto rural e a quantidade total de trabalhadores informais. O setor formal (originalmente, capitalista), por sua vez, é caracterizado por uma alta produtividade e por atrair gradualmente os trabalhadores rurais.

A Figura 2.2 abaixo resume graficamente o funcionamento do modelo. Na parte direita superior da figura tem-se uma função de produção para o setor rural para um dado nível de capital e tecnologia, que mostra a quantidade produzida de bens agrícolas para cada trabalhador empregado neste setor. Na figura abaixo, a partir da função de produção, são derivadas as curvas de produtividade média e marginal do trabalho rural. Assume-se que a produtividade marginal do trabalho (MP_{LA}) é igual a zero e que o salário rural (W_A) é dado pela produtividade média do trabalho (AP_{LA}). Como a produtividade marginal do trabalho é zero neste setor, tem-se que a função de produção mantém-se horizontal depois do ponto L_A .

A parte esquerda da figura descreve o setor formal desta economia dual. A parte superior da figura representa a função de produção deste setor considerando fixos o estoque de capital e a tecnologia utilizada. Considerando o estágio inicial da economia como a função de produção $TP_M(K_{M1})$, tem-se a relação entre quantidade produzida de bens manufaturados e quantidade de trabalhadores empregados no setor urbano. Na parte inferior da figura, a curva de produtividade marginal do trabalho é derivada da função de produção e, sob hipótese de mercado de trabalho perfeitamente competitivo no setor urbano, igualam-se às curvas de demanda por trabalho. O salário urbano (W_M) é fixado acima de W_A que está fixado em um nível de subsistência. A W_M , a oferta de trabalho rural ao setor urbano é assumida por Lewis (1958) como ilimitada, justificando o formato horizontal da curva $W_M S_L$. Dito de outra forma, os empregadores urbanos podem aumentar a demanda por trabalho sem sofrer pressão de alta sobre os níveis salariais.

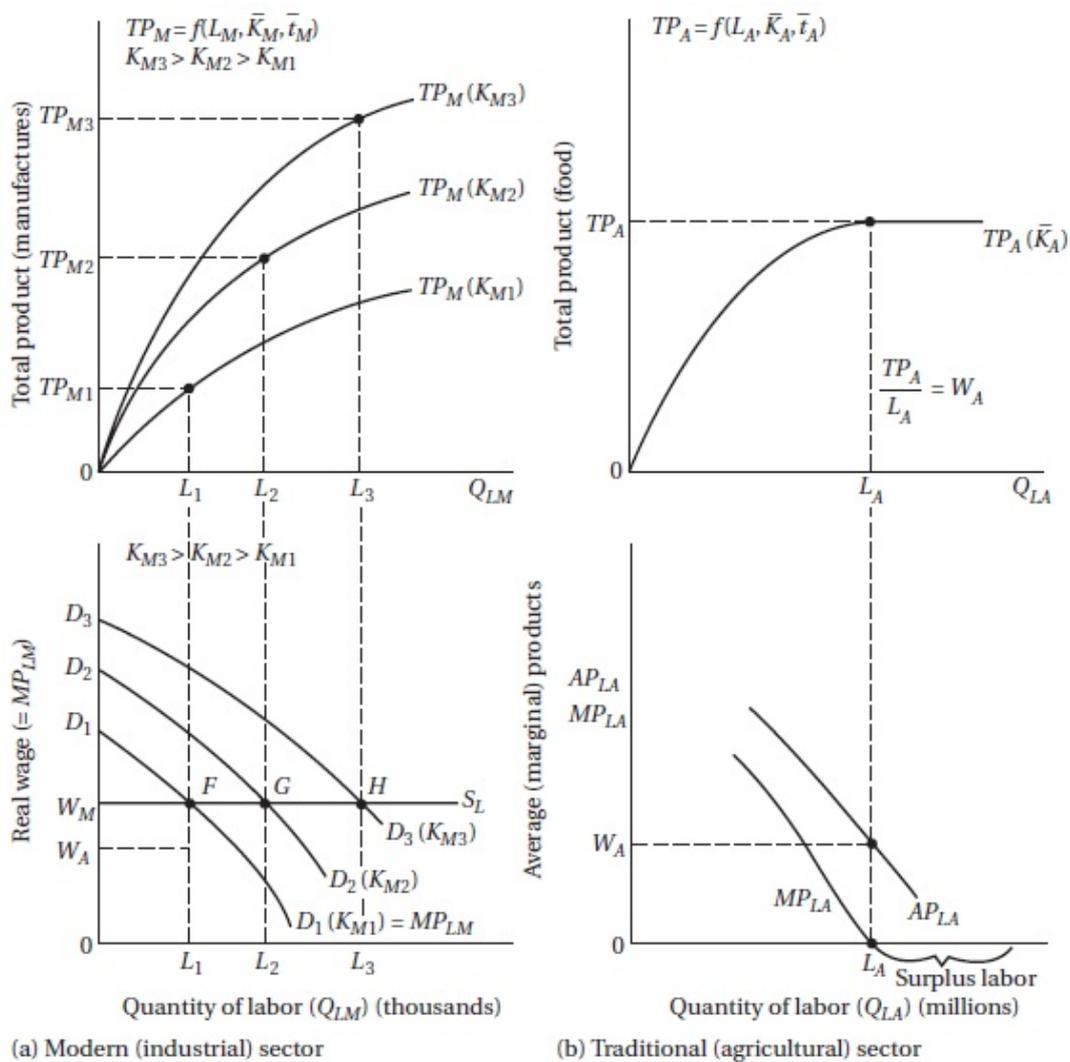


Figura 2.2: Modelo de Lewis.
 Fonte: (Todaro & Smith 2011, p. 116).

A renda total do setor urbano vai ser dada pela área OD_1FL_1 , sendo que esta renda seria distribuída da seguinte forma: a parte OL_1FW_M caberia aos trabalhadores sob a forma de salários, e W_MFD_1 caberia às firmas sob a forma de lucros. Nesta parte, uma outra hipótese do modelo de [Lewis \(1958\)](#) ganha relevância, segundo o autor, os lucros obtidos pelas firmas urbanas são reinvestidos no mesmo setor criando mais capital, permitindo que o mesmo se expanda, e atraindo ainda mais trabalhadores do setor de subsistência. O estoque de capital cresce, então, de K_{M1} para K_{M2} , causando um deslocamento para cima da função de produção, obtendo $TP_M(K_{M2})$. A curva de demanda por trabalho é, então, deslocada para $D_2(K_{M2})$. Neste novo equilíbrio, o nível de salários do setor urbano permanece constante, no entanto, a quantidade de trabalhadores empregados aumenta de L_1 para L_2 . Novamente, os lucros das firmas urbanas no novo equilíbrio, dados pela área delimitada pela nova curva de demanda por trabalho e pelo nível de salário urbano, são reinvestidos em capital, reiniciando o processo de expansão do setor manufatureiro.

Este processo de expansão do setor urbano e do emprego são mantidos até que a oferta de trabalhos rurais ao setor urbano deixe de ser ilimitada, ou seja, a produtividade marginal do trabalho rural deixe de ser nula:

this is known as the "Lewis turning point". Thus the labor supply curve becomes positively sloped as modern-sector wages and employment continue to grow. The structural transformation of the economy will have taken place, with the balance of economic activity shifting from traditional rural agriculture to modern urban industry. ([Todaro & Smith 2011](#), p. 118).

2.2.2 O modelo Harris-Todaro

Em 1970, John R. Harris e Michael P. Todaro publicaram o artigo *Migration, unemployment and development: A two-sector analysis*. A motivação dos autores para a realização de tal trabalho era a verificação empírica da coexistência entre elevados níveis de desemprego urbano e produtividade marginal positiva na agricultura com um crescente e contínuo fluxo migratório do setor rural para o urbano. Como os próprios autores apontaram,

conventional economic models with their singular dependence on the achievement of a full employment equilibrium through appropriate wage and price adjustments are hard put to provide rational behavioral explanations for these sizable and growing levels of urban unemployment in the absence of absolute labor redundancy in the economy as a whole (Harris & Todaro 1970, p. 126).

O modelo proposto por Harris & Todaro (1970) é, então, o de um sistema econômico com dualidade no mercado de trabalho. Sendo os dois setores, rural e urbano, diferenciados pelo tipo de bem produzido e pela determinação de salários. Assume-se que a população deste sistema econômico (N) é constante e que um trabalhador ao ofertar sua força de trabalho em um setor desta economia exclui, instantaneamente, a possibilidade de ofertá-la no outro setor. A seguinte condição é, então, válida para todos os períodos analisados:

$$N_a + N_u = N, \quad (2.1)$$

onde N_a e N_u são, respectivamente, o número de trabalhadores localizados no setor rural e no setor urbano.

O setor urbano produz bens manufaturados sujeito à seguinte função de produção:

$$X_m = f(N_m, \bar{K}_m), \quad f' > 0, \quad f'' < 0, \quad (2.2)$$

onde X_m é a quantidade de bens manufaturados produzida, N_m é a força de trabalho utilizada na produção deste bem e \bar{K}_m é o estoque de capital, considerado fixo. Observa-se que a produtividade marginal do trabalho no setor urbano é positiva, mas decrescente.

O setor rural, por sua vez, é produtor de bens agrícolas - fundamentais para a sobrevivência no setor urbano - e é caracterizado pela seguinte função de produção:

$$X_a = q(N_a, \bar{L}, \bar{K}_a), \quad q' > 0, \quad q'' < 0, \quad (2.3)$$

onde X_a é a quantidade de bens agrícolas produzida, \bar{L} e \bar{K}_a são, respectivamente, a disponibilidade de terras e o estoque de capital, considerados fixos. Da equação (2.3), podemos observar uma hipótese distinta da utilizada por Lewis

(1958). No modelo Harris-Todaro, a produtividade marginal do trabalho no setor rural é considerada positiva e decrescente, ao invés da hipótese clássica de uma produtividade marginal igual a zero.

O preço do bem manufaturado é tomado pelos autores como numerário, e o preço do bem agrícola em termos de bens manufaturados, (P), é diretamente relacionado à escassez relativa dos dois bens na economia. Em termos mais formais:

$$P = \rho \left(\frac{X_m}{X_a} \right), \quad \rho' > 0. \quad (2.4)$$

O salário no setor rural (W_a) é dado pela produtividade marginal do trabalho na agricultura, ou seja:

$$W_a = Pq'. \quad (2.5)$$

A determinação de salários no setor urbano, por sua vez, diferencia-se do setor rural. Por hipótese, para o salário urbano (W_m) é fixado, institucionalmente, um nível mínimo superior ao salário do setor rural, mas de forma que quando há excesso de demanda o salário urbano seja igual à produtividade marginal do trabalho, caso contrário, igual ao nível mínimo, ou seja:

$$W_m = \begin{cases} f', & N_m \leq N_u, \\ \bar{W}_m, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.6)$$

onde \bar{W}_m é o salário mínimo urbano fixado institucionalmente. Os autores fazem, ainda, uma hipótese adicional de que no sistema econômico analisado não há excesso de demanda por trabalho ao salário mínimo, de forma que tenhamos sempre $f' = \bar{W}_m$.

A hipótese crucial do modelo Harris-Todaro é a de que a decisão de migrar ou não tomada pelos agentes deste sistema econômico depende da diferença na **expectativa** de rendimentos, ao invés da diferença absoluta destas variáveis - como assumem os modelos convencionais anteriores -, o salário urbano esperado (W_u^e) é definido da seguinte maneira:

$$W_u^e = \frac{\bar{W}_m N_m}{N_u}, \quad \frac{N_m}{N_u} \leq 1, \quad (2.7)$$

a proporção da população urbana que de fato é empregada, N_m/N_u , é tomada como uma estimativa da probabilidade de se obter um emprego neste setor.

Da equação (2.7) percebe-se que a expectativa de salários urbanos depende do salário mínimo fixado institucionalmente e da fração da população urbana que está de fato empregada. Como já mencionado anteriormente, um trabalhador frente à decisão de migrar para o outro setor ou permanecer no setor atual irá comparar o diferencial de rendimentos esperados entre os dois setores. Tem-se então que a migração para o setor urbano é uma função diretamente relacionada com o diferencial de rendimentos esperados - ou seja, haverá fluxo migratório para o setor urbano enquanto o salário urbano esperado superar o salário rural -, de maneira formal:

$$\dot{N}_u = \psi \left(\frac{\bar{W}_m N_m}{N_u} - Pq' \right), \quad \psi' > 0, \quad \psi(0) = 0. \quad (2.8)$$

Como fica claro pela equação (2.8), o sistema econômico atingirá um equilíbrio quanto ao fluxo migratório quando a expectativa de salário urbano se igualar ao salário real - tal condição ficou conhecida na literatura como condição Harris-Todaro⁶. Em termos mais formais:

$$W_u^e = W_a. \quad (2.9)$$

A equação (2.8), conhecida como mecanismo de ajustamento, pode ser reescrita em termos das equações anteriores, de modo a obter:

$$\dot{N}_u = \psi \left(\frac{N_m}{N_u} \bar{W}_m - \rho \left(\frac{f(N_m)}{q(N - N_u)} \right) q'(N - N_u) \right). \quad (2.10)$$

⁶A condição Harris-Todaro pode ser generalizada para uma situação em que o diferencial esperado de salários não se anule, mas sim quando converge para um valor constante δ , que pode assumir o valor 0. Portanto, quando este diferencial atinge δ , a migração líquida cessa. Tem-se, então, que:

$$W_u^e - W_a = \delta$$

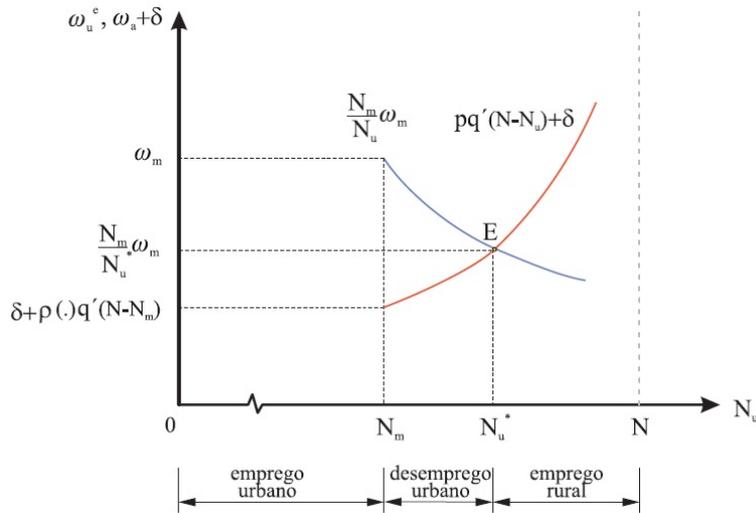


Figura 2.3: Equilíbrio Harris-Todaro com desemprego urbano.

Fonte: (Espíndola 2006, p. 29).

Resolvendo esta equação, é possível obter o nível de população urbana que satisfaz a condição Harris-Todaro, N_u^* . A Figura 2.3 apresenta a solução para a condição Harris-Todaro generalizada, ou seja, a determinação do equilíbrio do fluxo migratório, e evidencia ainda a emergência de desemprego urbano. A estabilidade global do equilíbrio de longo prazo, baseado no mecanismo de ajustamento, pode ser demonstrada derivando (2.10) com relação a N_u . Após alguns cálculos e manipulações algébricas, obtém-se:

$$\frac{\partial \dot{N}_u}{\partial N_u} = \psi'(\cdot) \left\{ -\frac{N_m^* \bar{W}_m}{N_u^2} + \rho(\cdot) q''(\cdot) - \rho'(\cdot) f(\cdot) \left[\frac{q'(\cdot)}{q(\cdot)} \right]^2 \right\} < 0, \quad \text{para } N_m^* \leq N_u \leq 1. \quad (2.11)$$

Como (2.4) é estritamente decrescente, a estabilidade assintótica global com desemprego urbano está assegurada. Tal fato é ilustrado pela Figura 2.4 abaixo.

Como conclusão, o modelo Harris-Todaro consegue explicar os fatos estilizados observados no começo da exposição, a saber, é possível que o sistema econômico atinja um equilíbrio estável quanto ao fluxo migratório mas coexistindo com desemprego urbano. Cabe ressaltar ainda, como apontado pelos autores, que mesmo que um equilíbrio "represents a suboptimum situation for the economy as

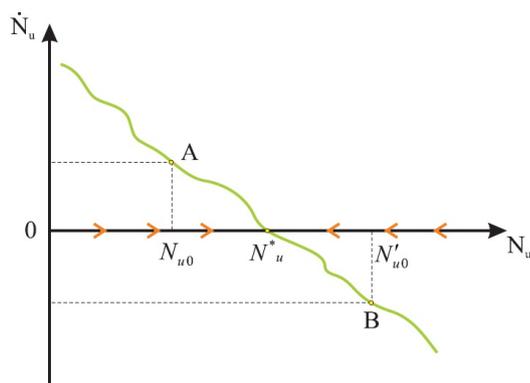


Figura 2.4: Estabilidade assintótica global do equilíbrio Harris-Todaro com desemprego urbano.

Fonte: (Espíndola 2006, p. 31).

a whole, it does represent a rational, utility maximizing choice for individual rural migrants given the level of the minimum wage" (Harris & Todaro 1970, p. 131).

2.3 A dinâmica migratória vista como um jogo evolucionário

Os trabalhos de Todaro (1969) e Harris & Todaro (1970) pressupõem que o horizonte temporal dos agentes é de apenas um período, premissa que Todaro (1969) justifica dizendo que "*this assumption is made necessary by mathematical convenience but is in fact probably a more realistic formulation in terms of actual decision making in less developed nations*" (Todaro 1969, p. 143).

Em desenvolvimentos mais recentes, Silveira & Sanson (2003) reinterpretam o mecanismo de alocação de trabalho desenvolvido por Harris & Todaro (1970) como um jogo evolucionário. Segundo os autores, "*the migratory movement of workers is interpreted as a process of imitation/learning in an environment of bounded rationality*" (Silveira & Sanson 2003, p. 1). Por racionalidade limitada os autores entendem que os agentes deste sistema econômico não dispõem de informação completa (como é suposto nos modelos apresentados anteriormente), mas sim, que os agentes têm acesso à informação a partir de alguns poucos agentes, ou seja, localmente, ao invés de ter acesso global.

Partindo basicamente da mesma estrutura de equilíbrio do modelo Harris-Todaro, [Silveira & Sanson \(2003\)](#) incorporam um jogo evolucionário ao modelo ou, segundo os autores, de maneira mais precisa, uma *dinâmica de replicação*. Esta dinâmica de replicação substitui o processo de ajustamento postulado no modelo Harris-Todaro.

Os pressupostos adotados no modelo proposto por [Silveira & Sanson \(2003\)](#) são aqui listados:

1. a cada período de produção, um trabalhador decide em qual dos setores ofertará sua mão de obra, sendo que as estratégias de localização setorial dos agentes são mutuamente excludentes, isto é, só é admitido que um trabalhador em um determinado instante do tempo ofereça sua força de trabalho em apenas um dos setores da economia;
2. a população de trabalhadores é mantida constante;
3. **a existência de desemprego rural é permitida**, ao contrário do suposto por [Harris & Todaro \(1970\)](#);
4. os agentes dispõem de uma renda autônoma (ϵ_i), onde $i \in \{rural, urbano\}$, independente da oferta de sua força de trabalho, que, por suposição, é constante e exogenamente determinada. Esta renda autônoma, segundo os autores, é importante para o estudo de políticas públicas que influenciem o fenômeno da migração.

O processo de decisão do fluxo migratório por parte dos trabalhadores é feita através da comparação de sua renda com a renda de um outro trabalhador qualquer. Como observam os autores, "*comparison of income among workers from different markets will be taken as a necessary condition, even though not sufficient, for a migration to ensue*" ([Silveira & Sanson 2003](#), p. 5). Já que quando a comparação é feita entre trabalhadores do mesmo setor, a informação acerca da renda no outro setor não fica disponível a este agente e, portanto, não tem informação suficiente para definir sua estratégia quanto à migração, permanecendo no mesmo setor.

Uma outra condição necessária para que a migração ocorra é de que a renda no setor de destino supere a renda do setor atual, por exemplo, para um trabalhador rural que esteja no processo de decisão da localização setorial, esta condição é tal que, ao comparar sua renda com um indivíduo do outro setor, o trabalhador rural observe que $y_u > y_r$, onde y_u é a renda do setor urbano e y_r a renda do setor rural. Tem-se então que, "*the higher is this difference in income the higher is the incentive for the rural worker to look for a new job in the urban sector*" (Silveira & Sanson 2003, p. 6).

Depois de modelados os fluxos migratórios rural-urbano e urbano-rural, o modelo de Silveira & Sanson (2003) colapsa na seguinte dinâmica de replicação:

$$\dot{n}_u = n_u \{ (v_u w_u + \bar{e}_u) - [n_u (v_u w_u + \bar{e}_u) + (1 - n_u) (v_r w_r + \bar{e}_r)] \}, \quad (2.12)$$

onde \dot{n}_u é a mudança na proporção de trabalhadores localizados no setor urbano para um intervalo de tempo infinitesimal, n_u é a fração urbana da população de trabalhadores, v_u e v_r são a quantidade de trabalhadores empregados no setor urbano e rural, respectivamente, w_u , w_r , \bar{e}_u e \bar{e}_r são, respectivamente, os salários pagos no setor urbano e rural e as rendas autônomas no setor urbano e rural.

A equação (2.12) implica que "*the supply of labor to the urban sector tends to expand if and only if the expected income in this market is superior to the average real income of the economy*" (Silveira & Sanson 2003, p. 8). Cabe ressaltar que a dinâmica de replicação obtida por estes autores é um resultado mais geral do que se apresenta em Harris & Todaro (1970), visto que incorpora rendas autônomas e a possibilidade de desemprego rural. No entanto, quando ajustadas as hipóteses do modelo àquelas propostas por Harris e Todaro, a dinâmica de replicação torna-se:

$$\dot{n}_u = n_u (1 - n_u) (w_u^e - w_a). \quad (2.13)$$

A condição Harris-Todaro é, portanto, uma condição de equilíbrio da dinâmica de replicação em (2.13). A diferença fundamental deste trabalho para os apresentados anteriormente é que "*the Harris-Todaro condition comes out as a spontaneous upshot of interaction among heterogeneous wor-*

kers" (Silveira & Sanson 2003, p. 10). Os autores observam, ainda, que o equilíbrio Harris-Todaro com desemprego urbano é um equilíbrio de estratégia mista⁷ e um atrator global.

⁷Equilíbrio com existência de fluxo migratório rural-urbano e urbano-rural (migração inversa) numa intensidade em que tais fluxos se ajustem.

Capítulo 3

Elementos de sistemas complexos

O incrível avanço da computação em períodos recentes transformou profundamente a maneira de pensarmos a ciência. A abordagem de sistemas complexos, largamente impulsionada por estas transformações na capacidade de processamento, armazenamento e velocidade dos computadores, é um fato recente na história da ciência, mas com grandes implicações para os atuais paradigmas científicos, "*the impact of complex systems on science is a recent, ongoing and profound revolution*" (Hooker 2011, p. 3). O uso de conceitos e ferramentas utilizadas pela abordagem de sistemas complexos, que são utilizados neste trabalho, portanto, deve ser acompanhado de uma breve introdução de elementos que compõem tal teoria.

3.1 Sistemas complexos

A abordagem de sistemas complexos caracteriza-se por ser altamente interdisciplinar. Aplicações de complexidade podem ser encontradas em física, biologia, economia, antropologia, ecologia, medicina, etc. O caráter interdisciplinar e recente de tal teoria científica faz com que não exista unicidade quanto à maneira de definir formalmente um sistema complexo. É comum encontrar definições distintas a depender da área de trabalho do pesquisador que a estiver utilizando.

A primeira diferença já aparece no modo como são definidos e abordados os conceitos utilizados. Físicos, matemáticos e cientistas da computação, por exemplo, prezam pela definição precisa e formal dos conceitos utilizados, e pela

estruturação lógica da teoria. Cientistas sociais, por outro lado, preferem definições menos formais e prezam mais pelo uso de metáforas e pelo uso de exemplos para explicitar os conceitos. Tentar-se-á, na medida do possível, escolher um caminho intermediário entre as duas visões. Muitos dos exemplos que serão citados são retirados do curso *Understanding complexity* ministrado por Page (2009).

Um sistema é dito complexo se é caracterizado por dinâmicas determinísticas que apresentem as seguintes propriedades: (1) **diversidade**, (2) **interdependência**, (3) **conectividade** e (4) **agentes adaptativos**¹. Tal definição é uma combinação das definições encontradas em Hooker (2011)² e Page (2009).

Por diversidade entende-se que os vários elementos de um sistema complexo são distintos. Por exemplo, um sistema econômico apresenta diferentes firmas produtoras de diferentes bens, trabalhadores com diferentes níveis de habilidade, etc.

Além disso, um sistema econômico é também conectado, ou seja, existe uma rede entre os elementos componentes deste sistema (agentes). Por exemplo, uma firma produtora de um determinado bem está conectada por esta rede a uma cadeia de fornecedores dos insumos por ela utilizadas, e conecta-se ainda aos trabalhadores que oferecem determinados tipos de trabalhos e aos seus consumidores finais.

Por interdependência entende-se a maneira como as ações, comportamentos, estratégias de um agente influenciam e são influenciados pelos outros agentes do sistema, por exemplo, as estratégias de uma firma condicionam e são condicionadas pelas estratégias adotadas por uma firma competidora. Baranger (2001) exemplifica a interdependência das partes constituintes de um sistema complexo, comparando-o com um sistema não-complexo da seguinte forma:

Consider first a non-complex system with many constituents, say a gas in a container. Take away 10% of its constituents, which are its molecules. What happens? Nothing very dramatic! The pressure

¹Em algumas definições alternativas, como em Chu et al. (2003), por exemplo, sistemas complexos podem ser diferenciados de sistemas complexos adaptativos. Sendo que sistemas complexos são casos mais gerais do que sistemas complexos adaptativos, ou seja, estão envolvidos em maior grau de complexidade.

²O leitor encontrará uma lista muito maior de propriedades em Hooker (2011), mas ressaltamos que, como não há maneira unificada de se definir sistemas complexos, muitas propriedades são válidas em algumas situações específicas, enquanto em outras perdem relevância.

changes a little, or the volume, or the temperature; or all of them. But on the whole, the final gas looks and behaves much like the original gas. Now do the same experiment with a complex system. Take a human body and take away 10%: let's cut off a leg. The result will be rather more spectacular than for the gas. I leave the scenario up to you. And yet, it's not even the head that I proposed to cut off (Baranger 2001, p. 9).

Por fim, a adaptação de um agente é "*its capacity to alter its specific traits in mutually coordinated ways so as to adapt to, that is, satisfy autonomy in, different life-environments*" (Hooker 2011, p. 36). Um exemplo de adaptatividade pode ser encontrado, também, em Hooker:

Humans can run as well as stand still and this enlarges the range of prey they can catch, predators and natural disasters they can evade, and social commerce they can sustain. Shifting from standing still to running involves coordinated changes in physiological processes, sensori-motor feedback/forward foci, etc. The set of coordinated trait variability ranges consistent with autonomy-satisfaction comprises an organisms' adaptive envelope (Hooker 2011, p. 36).

Um sistema complexo é, portanto, um sistema dinâmico composto por inúmeros agentes distintos e conectados que interagem entre si. Esta interação entre os agentes e fatores externos acabam por alterar o ambiente de interação, portanto, a característica de adaptabilidade é fundamental para a sobrevivência do sistema.

Os sistemas complexos têm sido vistos na literatura como o limiar do caos (*the edge of chaos*). Baranger (2001) afirma que o fenômeno da complexidade envolve algum tipo de interação entre o caos e o não-caos.

Um sistema caótico, na dimensão tempo³, tem a característica de apresentar um fenômeno conhecido como sensibilidade às condições iniciais. Tal fenômeno é definido da seguinte maneira, dados dois conjuntos de condições iniciais próximos um ao outro, as duas trajetórias correspondentes no espaço de fase, embora próximas no começo, eventualmente divergirão exponencialmente uma da outra. Um famoso exemplo de sensibilidade às condições iniciais é o verificado por Lorenz (1963), conhecido na literatura como efeito borboleta (*butterfly effect*), pois "*it is*

³Pode-se verificar o caos também na dimensão espaço, um objeto caótico no espaço é chamado fractal (uma figura geométrica que não se torna mais simples quando analisada em partes cada vez menores), Baranger (2001). Alguns exemplos de fractais são: o conjunto de Cantor, triângulo de Sierpinski, conjunto de Mandelbrot.

possible for a butterfly, by flapping its wings on some Caribbean island today, to change completely the weather pattern in Europe a month from now."(Baranger 2001, p. 6).

Sabe-se, no entanto, que sistemas não-lineares (que serão definidos abaixo) são caóticos para alguns valores de parâmetros e não caóticos para outros valores. O que entende-se por limiar do caos, então, é o valor preciso de parâmetro sob o qual a natureza da dinâmica muda, ou seja, é um ponto crítico de transição de fase (Baranger 2001, p. 10-11). O autor ainda observa que

Perhaps complex systems, such as biological systems, manage to modify their environment so as to operate as much as possible at this edge-of-chaos place, which would also be the place where self-organization is most likely to occur. It makes sense to expect self-organization to happen when there are strong long-range correlations (Baranger 2001, p. 11).

A lista de propriedades apresentadas anteriormente é constituída de propriedades que são necessárias para um sistema ser caracterizado como complexo (pela definição aqui utilizada). No entanto, sistemas complexos podem apresentar, ainda, um conjunto adicional de propriedades. Listaremos aqui algumas propriedades relevantes.

- **Robustez:** a robustez de um sistema complexo está associada à capacidade deste sistema de manter sua estabilidade estrutural. É importante observar, entretanto, que tal condição não impõe ao modelo que este seja quantitativamente estável, "*but to possess some complexity characteristics that are invariant under topological transformations, i.e., be topologically equivalent or conjugate*"(Schmidt 2011, p. 243). Page (2009) exemplifica a robustez de um sistema complexo mostrando como este sistema pode manter sua estabilidade estrutural mesmo diante de um evento de grande escala, como o terremoto ocorrido em Northridge em 1994, na cidade de Los Angeles. O fenômeno natural causou efeitos substanciais à economia da cidade de Los Angeles, como a ruptura de estradas vitais. Mas mesmo assim, as entidades componentes deste sistema conseguiram se adaptar à mudança de ambiente ocorrida e, devido a este caráter adaptativo dos agentes, mantiveram o funcionamento do sistema econômico até que a normalidade fosse

restaurada.

- **Emergência:** segundo [Page \(2009\)](#), uma propriedade é dita emergente se o sistema apresenta características que não são encontradas em suas partes, ou seja, as propriedades que emergem em um sistema complexo são mais do que simplesmente uma soma de todas as partes integrantes deste sistema. Esta propriedade tem implicações profundas, pois dela pode-se inferir que um sistema econômico não pode ser estudado de maneira reducionista, se for entendido como complexo, pois ao estudar-se separadamente suas partes, algumas características que correspondem apenas ao nível macro do sistema podem não ser obtidas, características estas não encontradas em nível micro. Como exemplo desta propriedade, pode-se citar a emergência de consciência em seres humanos, a característica de umidade da água (já que uma única molécula de água não é úmida). Cabe ressaltar que estas características emergem em tais sistemas de maneira espontânea, ou seja, há uma auto-organização no sistema, uma vez que são resultados da interação de inúmeras partes componentes do sistema, ao invés de resultar de um planejamento central.
- **Imprevisibilidade:** sistemas complexos compartilham o fenômeno de imprevisibilidade com os fenômenos caóticos, mesmo que em níveis distintos. Como observado anteriormente, a existência de sensibilidade às condições iniciais do sistema dificulta a previsão do comportamento das trajetórias de um sistema, pois:

Even if we know the state of the system very precisely now, we cannot predict the future trajectory forever. We can do it for a little while, but the error grows exponentially and we have to give up at some point ([Baranger 2001](#), p. 7).

Já quanto aos sistemas complexos,

complex orders are frequently held to have a degree of stability, but to be periodically subject to unpredictable developments in which self-organising processes will reformulate the system and its structure [Kemp \(2009\)](#).

- **Não-linearidades:** um sistema é dito não-linear se as variáveis da equa-

ção dinâmica não estão elevadassomente à primeira potência, no caso unidimensional é o mesmo que dizer que os resultados deste sistema não são proporcionais aos seus *inputs*. Fenômenos não-lineares, como observa [Strogatz \(1994\)](#), são problemas difíceis de serem resolvidos analiticamente. No entanto, tais fenômenos são muito mais comuns que aqueles que podem ser descritas por sistemas lineares. Stanislaw Ulam chegou a afirmar que "*using a term like nonlinear science is like referring to the bulk of zoology as the study of nonelephant animals*" ([Campbell et al. 1985](#), p. 374). Muitos problemas não-lineares são impossíveis de serem resolvidos analiticamente, o que causa a complicação da análise de tal fenômeno é que um sistema não-linear não pode ser dividido em partes como um linear, ou seja, não satisfaz o princípio da superposição, ([Strogatz 1994](#), p. 8). A intratabilidade de muitos dos problemas não-lineares torna as ferramentas computacionais úteis na análise e modelagem de tais fenômenos. As características de um sistema complexo evidenciam a necessidade de, muitas vezes, serem modelados como sistemas não-lineares:

Whenever parts of a system interfere, or cooperate, or compete, there are nonlinear interactions going on. Most of everyday life is nonlinear, and the principle of superposition fails spectacularly. If you listen to your two favorite songs at the same time, you won't get double the pleasure! ([Strogatz 1994](#), p. 9).

- **Geração de eventos de larga escala:** como já observado no item anterior, muitos sistemas complexos apresentam características não-lineares, ou ainda, uma não proporcionalidade entre os *inputs* e os *outputs* de tal sistema. Um sistema não-linear pode, então, estar sujeito a algum tipo de sensibilidade às condições iniciais, de forma que uma pequena variação nas condições iniciais pode ter como resultado um evento de larga escala, ou seja, os eventos em um sistema complexo não-linear parecem estar mais próximos de uma lei de potência, *power law*⁴, do que da normalidade, [Page](#)

⁴Segundo [Gabaix \(2008\)](#), uma lei de potência é uma relação da forma $f(x) = Kx^\alpha$, em que $x > 0$, K e α são constantes. Tal relação é relevante pois sob uma distribuição de probabilidades que segue uma lei de potência (também conhecida como distribuição de Pareto ou distribuição livre de escala), à ocorrência de eventos extremos, fato recorrente em muitas áreas da economia,

(2009). O exemplo mais famoso de tal propriedade pode ser encontrado no trabalho de Lorenz (1963) que descreve a sensibilidade de sistemas meteorológicos às condições iniciais, a metáfora do efeito borboleta exemplifica como uma pequena variação nas condições iniciais (o bater de asas de uma borboleta) do sistema pode produzir um evento de larga escala (um furacão do outro lado do mundo)⁵.

3.2 Teoria de redes

Como já destacado anteriormente, o caráter interdependente dos componentes de um sistema complexo implica na importância do modo como os componentes deste sistema se relacionam, "*behind each complex system there is an underlying network*" (Barabási 2007, p. 35). A modelagem tradicional nas diversas ciências, particularmente nas Ciências Econômicas, muitas vezes descarta a importância das redes de interações entre os agentes de um sistema econômico, medida que pode ser justificada pela dificuldade em modelar tais características.

No entanto, a abordagem de sistemas complexos e as ferramentas desenvolvidas recentemente para exploração destes sistemas fornecem o instrumental necessário para o estudo dos fenômenos em análise sem serem desprezadas as redes de interações entre os agentes. Uma rede de um sistema real pode ser representada matematicamente utilizando-se elementos de teoria dos grafos⁶. Algumas definições e medidas relevantes são apresentadas abaixo.

Uma rede⁷ não direcionada é um conjunto $G = (N, A)$ em que N é um conjunto de nós finito e não-vazio e A é um conjunto de arestas cujos elementos são pares não ordenados de nós distintos.

Na definição acima⁸, adaptada de Ahuja et al. (1993), os nós podem ser são atribuídas probabilidades maiores do que sob uma distribuição normal.

⁵O trabalho de Lorenz (1963) é um trabalho de teoria do caos, mas o exemplo utilizado é útil para a compreensão de uma propriedade que também pode ser encontrada em sistemas complexos.

⁶Na apresentação que se segue não será feita distinção entre os dois conceitos.

⁷Consideraremos aqui somente redes não-ponderadas, ou seja, não é dado a nenhuma aresta algum valor numérico, peso, que difira de outras arestas.

⁸Cabe ressaltar que redes podem ser direcionadas, neste caso, os elementos de um conjunto de arestas serão pares ordenados (i, j) . Menos formalmente, podemos dizer que um grafo

entendidos como os agentes do sistema em questão (*e.g.*: pessoas, firmas, trabalhadores rurais ou urbanos, etc.) e as arestas são as conexões entre os distintos agentes deste sistema (*e.g.*: pessoas que vivem em uma mesma região, firmas e trabalhadores que mantêm um contrato de trabalho, etc.).

Dois nós i e j de uma rede G estão **conectados** se existir uma sequência de nós conectados entre si que ligue o nó i ao j . Para um subconjunto qualquer de nós de uma rede podem, *a priori*, existir conexões entre eles ou não. O conjunto de nós conectados por arestas a um nó de referência compõe a **vizinhança** deste último.

Neste trabalho, seguindo a recomendação de [Taylor & Higham \(2009\)](#), representará-se a rede G em análise por uma matriz adjacência $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Sendo que A possui n^2 elementos, com $a_{ij} = a_{ji} = 1$, se os nós i e j são conectados, e $a_{ij} = a_{ji} = 0$ caso contrário. Além disso, $a_{ii} = 0$, ou seja, exclui-se a possibilidade de auto-conexão. Portanto, A é uma matriz simétrica.

3.2.1 Medidas em teoria de redes

Três propriedades estruturais são recorrentemente analisadas em teoria de redes, a saber, o *grau (degree)* de um nó i , a *distância entre dois nós (path length)* e o *coeficiente de cluster, ou agrupamento (clustering coefficient)*.

O grau de um nó i , denotado por k_i , é definido como sendo, simplesmente, o número de vizinhos deste nó, i.e, a quantidade de nós a ele conectados, formalmente:

$$k_i \triangleq \sum_{j=1}^n a_{ij}. \quad (3.1)$$

A distância entre dois nós quaisquer i e j de uma rede G é o número mínimo de arestas a serem percorridas para chegar ao nó j a partir de i . [Taylor & Higham \(2009\)](#) definem esta medida em termos da matriz adjacência, A , da seguinte maneira: a distância entre os nós i e j é o menor $k \geq 1$, tal que $k \in \mathbb{Z}$, com $(A^k)_{ij} \neq 0$. Além disso, se $(A^{n-1})_{ij} = 0$, então não existe um caminho entre os

direcionado *behaves like a one-way street and permits flow only from node i to node j* ([Ahuja et al. 1993](#), p. 25).

vértices, e a distância entre eles deve ser armazenada como infinito. A distância média entre os nós de uma rede, denotada por l , é simplesmente definida como a média aritmética das distâncias entre os nós da rede.

O coeficiente de *cluster* na vizinhança de um nó i , C_i , é, simplesmente, a proporção de nós vizinhos a i que são também vizinhos entre si, ou seja, é igual ao número de vizinhos que estão conectados entre eles, dividido pelo maior número possível de conexões. O coeficiente de *cluster* associado à rede em questão é igual à média aritmética dos coeficientes de *cluster* dos nós pertencentes a esta rede, ou seja, como proposto por [Watts & Strogatz \(1998\)](#):

$$C = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n C_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\text{número de pares de vizinhos conectados}}{\frac{1}{2}k_i(k_i - 1)}. \quad (3.2)$$

Cabe ressaltar ainda que os algoritmos para o cálculo destas medidas utilizados na implementação computacional deste trabalho são os mesmos encontrados em [Taylor & Higham \(2009\)](#).

3.2.2 Topologias de redes

A eficiência e fidedignidade da modelagem de um fenômeno complexo está, muitas vezes, condicionada à escolha apropriada de uma rede que represente a estrutura de interação entre os agentes do sistema. Nesta seção apresentar-se-á, de maneira breve, três topologias comumente encontradas em trabalhos sobre teoria de redes: redes regulares, redes *small world* e redes aleatórias.

Uma rede é dita regular quando todos os nós a ela pertencentes possuem o mesmo número de arestas, além disso, as arestas conectadas a um dado nó i são sempre as mesmas, ou seja, não há qualquer componente de desordem nesta rede. [Watts & Strogatz \(1998\)](#) destacam que as redes regulares são caracterizadas por um alto coeficiente de *cluster* e uma distância média entre os nós (ou vértices) que cresce linearmente com o tamanho (número de nós) da rede.

Redes aleatórias (ou modelo *Erdős-Rényi*), por sua vez, são redes em que as arestas, ou conexões, entre os nós de um grafo são estabelecidas aleatoriamente, a partir de uma dada distribuição de probabilidade. Segundo [Watts & Strogatz](#)

(1998), uma rede aleatória é obtida quando fixa-se a probabilidade de religarmos cada aresta da rede aleatoriamente na unidade, ou seja, $p = 1$. Portanto, ao contrário da rede regular (em que $p = 0$), tem-se um elevado grau de desordem em uma rede aleatória. Redes aleatórias, segundo estes autores, apresentam um baixo coeficiente de *cluster* e são um mundo pequeno, já que a distância média entre os vértices l cresce somente logaritmicamente com o número de nós n .

No entanto, redes sociais empíricas parecem possuir a estranha combinação de um alto coeficiente de *cluster* e uma baixa distância média entre os nós, ou seja, elas parecem estar dispostas em algum lugar entre uma rede regular e uma rede aleatória. Expõe-se a seguir, então, a maneira inovadora que Watts & Strogatz (1998) encontraram para representar uma rede que satisfizesse tais fenômenos, nomeadas redes *small world*.

Parte-se de uma rede em anel (*ring network*), de tamanho n , geometricamente, um círculo com n nós equidistantes entre si. Cada um destes nós está ligado, inicialmente, a k vizinhos no sentido horário e k vizinhos no sentido anti-horário, ou seja, parte-se de uma rede regular. Em seguida, com probabilidade p , elimina-se a aresta entre um nó i e um de seus vizinhos e reestabelece-se uma nova conexão, ainda não existente, entre o nó i e outro nó qualquer da rede - a esta operação dá-se o nome de religação (*rewiring*). Os autores executam o procedimento com a probabilidade p variando no intervalo $p \in [0,1]$, de modo que a rede varie entre a regularidade e a desordem.

O resultado de tal experimento encontra-se apresentado na Figura 3.1. Observa-se que existe um intervalo de p em torno de 0,1 em que a distância média entre os vértices $l(p)$ é tão baixa quanto a distância média entre os vértices de uma rede aleatória, mas com um coeficiente de *cluster* superior. Portanto, para valores de p próximos a 0,1 temos as redes com características de *small world* como definidas por Watts & Strogatz (1998), ou seja, redes em que a distância média entre os vértices l é comparável com a respectiva distância de uma rede aleatória l_{rn} , ou seja, $\frac{l}{l_{rn}} \sim 1$, e com um coeficiente de *cluster* C estritamente superior ao coeficiente de *cluster* de uma rede aleatória C_{rn} , ou seja, $\frac{C}{C_{rn}} \gg 1$.

Portanto, redes *small world* são redes que apresentam características desejáveis para alguns tipos de redes empíricas, sendo, então, apropriadas para representá-las. Como Watts & Strogatz (1998) observam, "*many biological, te-*

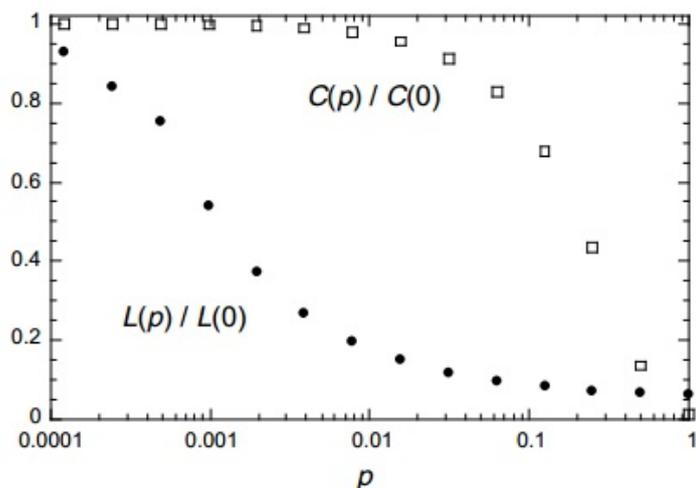


Figura 3.1: Distância média entre os vértices e coeficiente de *cluster* para a família de redes religadas aleatoriamente. (Os círculos representam a razão entre as distâncias médias de redes em função de $p \in [10^{-4}, 1]$ e uma rede regular. Os quadrados representam a razão entre os coeficientes de *cluster* de redes em função de $p \in [10^{-4}, 1]$ e uma rede regular.

Fonte: (Watts & Strogatz 1998, p. 441).

chnological and social networks lie somewhere between these two extremes"(redes regulares e aleatórias). As redes aqui descritas são representadas no diagrama da Figura 3.2.

3.3 Modelagem computacional baseada em agentes

Como já observado, a abordagem de sistemas complexos foi amplamente impulsionada pelos avanços de performance computacional verificados em um período recente. A modelagem computacional baseada em agentes (ABM - *agent-based modeling*) é uma ferramenta relativamente nova que permite explorar em algum detalhe as propriedades e características de um sistema complexo. Este tipo de modelagem difere largamente da modelagem tradicional baseada em equações.

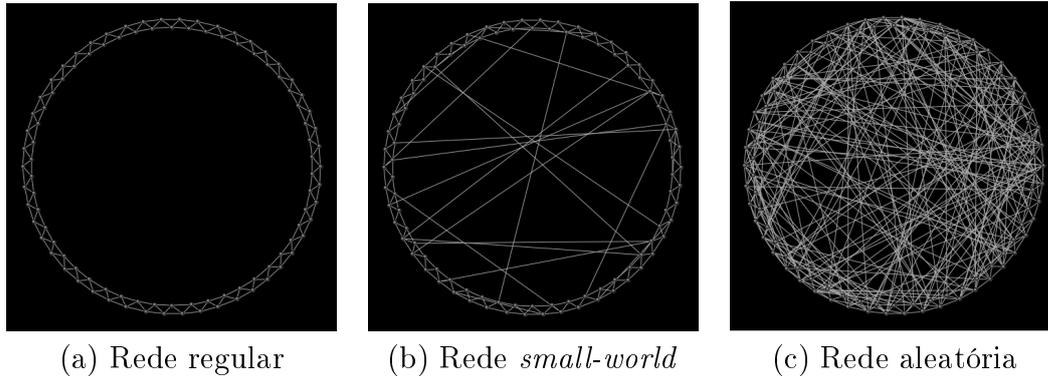


Figura 3.2: Topologias de rede
 Fonte: Watts Strogatz *small-world* model in NetLogo.

Macal & North (2010) apontam que a modelagem computacional baseada em agentes é uma abordagem organizada para determinar os resultados a nível de um sistema das inúmeras escolhas individuais de um conjunto de agentes com comportamento interdependente. Segundo os autores, "*agents have behaviours, often described by simple rules, and interactions with other agents, which in turn influence their behaviours*" (Macal & North 2010, p. 151). Ou seja, diferentemente de grande parte das modelagens tradicionais, em uma modelagem baseada em agentes, as propriedades verificadas no sistema emergem da interação entre os agentes componentes deste sistema, ao invés de serem determinadas por algum tipo de planejamento central.

Ou seja, a abordagem de ABM mostra-se, de fato, um enfoque apropriado para a modelagem de sistemas complexos, já que:

- *By modelling agents individually, the full effects of the diversity that exists among agents in their attributes and behaviours can be observed as it gives rise to the behaviour of the system as a whole.*
- *By modelling systems from the 'ground up' - agent by agent and interaction by interaction - self-organization can often be observed in such models. Patterns, structures, and behaviours emerge that were not explicitly programmed into the models, but arise through the agent interaction. (Macal & North 2010, p. 152).*

A estrutura de um modelo computacional baseado em agentes consiste de:

- Um conjunto de *agentes* interdependentes, seus atributos e comportamentos - os agentes são as partes componentes de um sistema, por exemplo, se o sistema em questão é uma economia, os agentes podem ser as firmas e consumidores participantes deste sistema econômico. Estes agentes possuem um conjunto de regras ou comportamentos que podem ser fixas ou adaptativas. As tomadas de decisões dos agentes componentes deste sistema são decisões discretas, permitindo, quando necessário, assumir que as regras de comportamento destes agentes sejam do tipo limiar (*threshold*), ou seja, o comportamento de um agente permanece o mesmo até que algum *threshold* seja atingido.
- Uma especificação do modo de interação entre os agentes - "*an underlying topology of connectedness defines how and with whom agents interact* (Macal & North 2010, p. 152)". Aqui justifica-se a afirmação feita na seção anterior de que por trás de cada sistema complexo, há uma rede que define a maneira como as partes componentes deste sistema interagem.
- O ambiente de interação, ou espaço, dos agentes deste sistema.

Um agente goza de algumas características essenciais⁹, segundo Macal & North (2010), a saber: (i) um agente deve ser um indivíduo unicamente identificável - "*one can easily determine whether something is part of an agent, is not part of an agent, or is a shared attribute.*" (Macal & North 2010, p. 153); (ii) um agente é *autônomo* e possui *regras de comportamento* - um agente pode ter funcionalidades que independem do seu ambiente e das interações com outros agentes, além disso, possui regras de comportamento que relaciona as informações por ele obtidas com suas decisões e ações. Um agente obtém informações localmente através de interações com os outros agentes a ele conectados na rede; (iii) um agente possui um *estado* que varia ao longo da simulação - este estado representa as variáveis essenciais associadas à situação atual do agente, por exemplo, no modelo de migração proposto neste trabalho, o estado de um agente pode ser:

⁹Macal & North (2010) apresentam ainda uma lista de características que podem ser úteis quando consideramos os agentes de um sistema, por exemplo: *adaptabilidade, orientados a um objetivo, heterogêneos.*

rural ou urbano; (iv) o agente é um agente *social* - possui interações dinâmicas com outros agentes do sistema que influenciam seu comportamento.

Uma diferença crucial da modelagem baseada em agentes para os modelos baseados em equações, frequentemente encontrados em teoria econômica (inclusive no modelo Harris-Todaro analisado no capítulo anterior), é de que em ABM um agente não tem acesso global à informação, ou seja, pode obter informação apenas localmente, através de seus vizinhos, e, portanto, possui racionalidade limitada. Tal característica justifica a centralidade da topologia das redes na especificação de um modelo.

Pode-se ainda, de maneira mais específica, definir a modelagem computacional baseada em agentes de processos econômicos:

Agent-based computational economics (ACE) is the computational study of economic processes modeled as dynamic systems of interacting agents. Here "agents" refers broadly to bundled data and behavioral methods representing an entity constituting part of a computationally constructed world ([Teshatsion 2006](#), p. 835).

Modelos computacionais baseados em agentes são ferramentas úteis não só para exploração detalhada de sistemas complexos, mas também para que se possa fazer previsões passíveis de serem testadas empiricamente. Permitem modelar um sistema multi-agente, característica difícil de modelar em sistemas baseados em equações (cuja solução analítica do modelo é dificultada com o crescimento da heterogeneidade dos agentes, recorrendo-se, então, à hipótese de um agente representativo). Além disso, pode-se realizar simulações com estes modelos sob diferentes condições iniciais e explorar os resultados obtidos, sendo, portanto, uma ferramenta valiosa para a proposição de políticas (como, por exemplo, modelos computacionais baseados em agentes que simulem a propagação de uma doença infecciosa são ferramentas importantes para uma política que combata seu espalhamento).

3.4 Dinâmicas migratórias sob o ponto de vista da complexidade: o modelo Harris-Todaro em uma abordagem baseada em agentes

Trabalhos recentes analisam o fenômeno de migração rural-urbana em sistemas econômicos duais utilizando a modelagem computacional baseada em agentes. Isto permite que se possa levar em conta a influência da vizinhança social sobre as decisões de migração individuais. Ao invés de apenas incluir os incentivos econômicos levados em consideração pelos agentes na hora de decidir suas estratégias - como é feito no trabalho original de [Harris & Todaro \(1970\)](#).

Os trabalhos de [Silveira et al. \(2006\)](#) e [Espíndola et al. \(2006\)](#) representam o processo de migração rural-urbana como uma propriedade emergente de um sistema complexo. Nestes trabalhos, incorpora-se o fato de que "*networks may enhance information available to potential migrants and reduce the risk associated with the urban prospect*" ([Lucas 1993](#), p. 743) e, portanto, as interações sociais devem ser consideradas determinantes da decisão dos agentes de migrarem ou não.

O objetivo dos trabalhos mencionados era o de verificar se a estabilidade verificada no modelo seminal de [Harris & Todaro \(1970\)](#), via modelagem com equações diferenciais e de diferenças, é também uma propriedade emergente de dinâmicas computacionais baseadas em agentes, utilizando hipóteses relacionadas ao sistema econômico semelhantes às adotadas por [Harris & Todaro \(1970\)](#). Para tal verificação, os autores propuseram uma modelagem computacional baseada em agentes, na qual os trabalhadores constantemente buscam a melhor localização setorial.

Nesta seção apresenta-se, portanto, os dois trabalhos supracitados. Cabe ressaltar que as hipóteses acerca do sistema econômico são as mesmas já apresentadas na seção [2.2.2](#), salvo dito o contrário.

3.4.1 Modelagem baseada em agentes da migração rural-urbana

No trabalho de [Espíndola et al. \(2006\)](#), adota-se uma estrutura de sistema econômico similar ao proposto originalmente por [Harris & Todaro \(1970\)](#), incorporando o efeito vizinhança como determinante nas decisões de migração dos agentes componentes deste sistema. No modelo proposto pelos autores, considera-se uma população de $N = 2500$ agentes dispostos aleatoriamente em uma rede quadrada de ordem $L = 500$ de característica regular, ou seja, uma rede estática, sendo que a localização do agente na rede não se refere à localização geográfica do agente no sistema econômico. Portanto, a informação que a rede traz é somente a localização setorial de cada agente (se é urbano ou rural) e não a distribuição espacial desta população. Além disso, considera-se também que a fração urbana da população n_u - razão entre a população urbana N_u e a população total N - no início da simulação é tal que $n_u = 0.2$, condizente com o valor observado empiricamente desta variável para países em fase inicial de industrialização.

Com os valores do vetor de constantes paramétricas do modelo fixados pelos autores, é possível calcular o vetor que caracteriza o equilíbrio temporário do sistema econômico. No primeiro passo da simulação, ao ser calculado o vetor de equilíbrio temporário, o nível de emprego urbano é obtido, cabe ressaltar que caso a população urbana seja menor ou igual ao nível de emprego urbano, então, toda população urbana estará empregada e recebendo um salário determinado pela produtividade marginal do trabalho, caso contrário, haverá uma fração da população urbana empregada recebendo um salário mínimo w_m fixado institucionalmente (os autores fixam o valor da constante paramétrica $w_m = 0.8$) e o restante da população urbana desempregada, sem receber salário algum.

A cada passo da simulação, cada trabalhador do sistema econômico será selecionado com uma probabilidade a para rever sua localização setorial, ou seja, apenas uma fração da população tornar-se-á potencial migrante. O nível de satisfação de um potencial migrante i é determinado pelo processo de comparação entre seu rendimento e os rendimentos auferidos pelos seus vizinhos. Mais precisamente, a cada processo de comparação o agente i inicia com um nível de utilidade $u_i = 0$. Caso seu salário seja maior que o salário de seu vizinho $j \in n_i$,

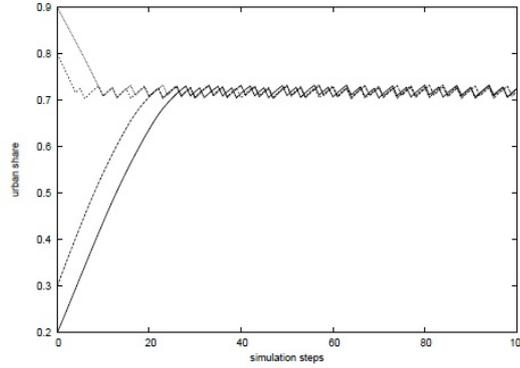


Figura 3.3: Fração urbana da população n_u ao longo da simulação para valores de $n_u \in (0.9, 0.8, 0.7, 0.2)$

Fonte: (Espíndola et al. 2006, p. 606).

sendo n_i o conjunto de vizinhos do agente i , sua utilidade aumenta em uma unidade; caso seja igual, seu nível de utilidade mantém-se inalterado; e, caso seja menor, seu nível de utilidade diminui em uma unidade. Formalmente:

$$u_i = \sum_{j \in n_i} \text{sgn}(w_i - w_j), \quad (3.3)$$

sendo

$$\text{sgn}(w_i - w_j) = \begin{cases} -1, & \text{se } w_i - w_j < 0, \\ 0, & \text{se } w_i - w_j = 0, \\ 1, & \text{se } w_i - w_j > 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Após todos os migrantes potenciais terem revisto suas localizações setoriais, uma nova distribuição setorial da população é estabelecida, alcança-se, então, um novo valor da fração urbana da população reiniciando um novo passo da simulação.

Os resultados das simulações realizadas pelos autores podem ser, resumidamente, expostas da seguinte maneira:

- Para uma baixa fração urbana da população inicial, há um fluxo migratório positivo em direção ao setor urbano, concomitantemente, há uma redução do diferencial de salários esperados, o que diminui o fluxo até que um equilíbrio seja atingido. Para valores mais altos da fração urbana da população,

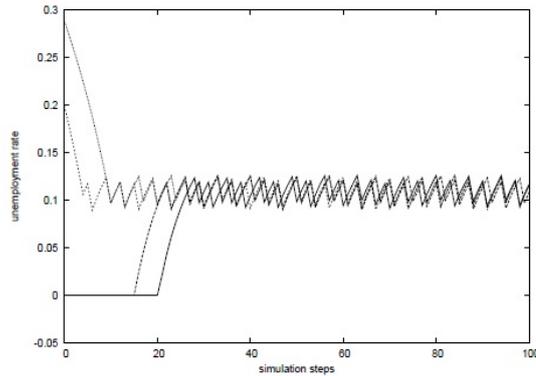


Figura 3.4: Desemprego urbano ao longo da simulação para valores de $n_u \in (0.9, 0.8, 0.7, 0.2)$.

Fonte: (Espíndola et al. 2006, p. 606).

há um fluxo migratório em direção ao setor rural. Além disso, após a fração da população urbana ter atingido um valor médio de equilíbrio, há ainda variações em torno desta média. Ou seja, o modelo apresenta, no equilíbrio de longo prazo, uma migração reversa, fenômeno não observado no modelo seminal de Harris & Todaro (1970). Tais características encontram-se representadas graficamente pela Figura 3.3.

- A Figura 3.4 mostra a emergência de equilíbrio urbano para os distintos valores iniciais da fração urbana da população. O desemprego urbano emerge para valores baixos da fração urbana da população inicial com o fluxo crescente da população em direção ao setor urbano, fazendo com que o setor passe de uma situação de pleno emprego para uma com desemprego. No outro caso, em que os valores iniciais de n_u são altos, o desemprego urbano reduz em função do fluxo migratório em direção ao setor rural.
- Na Figura 3.5 observa-se a equalização do diferencial de salários esperados, ou emergência da condição Harris-Todaro.

Portanto, o modelo computacional baseado em agentes proposto por Espíndola et al. (2006) corrobora os resultados obtidos originalmente por Harris & Todaro (1970). A condição de que o fluxo migratório ocorrerá enquanto o salário esperado urbano superar o salário rural é verificada como um padrão emergente

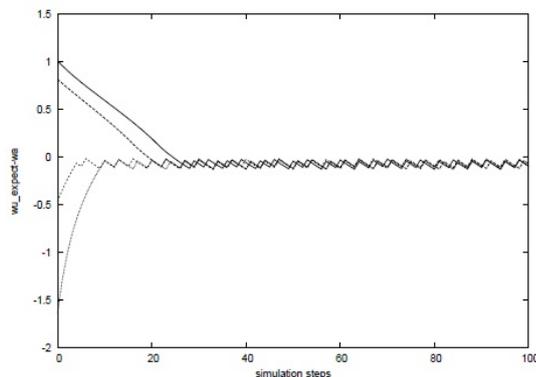


Figura 3.5: Diferencial de salários esperados ($w_u^e - w_a$) ao longo da simulação para valores de $n_u \in (0.9, 0.8, 0.7, 0.2)$.

Fonte: (Espíndola et al. 2006, p. 607).

da decisão de inúmeros agentes adaptativos, de maneira não-coordenada. Além disso, o comportamento dos agentes faz com que o sistema econômico convirja para um equilíbrio de longo prazo com concentração e desemprego urbanos. Por fim, os autores verificam um fenômeno não previsto no modelo Harris-Todaro original

even after the urban share has reached an stable average value, there are small fluctuations around this average. Therefore, differently from the original Harris-Todaro model, our computational model shows in the long run equilibrium the reverse migration. This phenomenon has been observed in several developing countries (Espíndola et al. 2006, p. 606).

3.4.2 A migração rural-urbana com uma estrutura de interação entre agentes do tipo Ising

Em outro trabalho publicado, Silveira et al. (2006) interpretam o mesmo fenômeno da migração rural-urbana através de uma modelagem baseada em agentes mas em que utilizam ferramentas da mecânica estatística para alterar a estrutura de interação dos agentes do sistema econômico por eles considerado. No citado artigo mantém-se as mesmas hipóteses que caracterizam o setor rural desta economia, no entanto, ao invés de considerarem um setor urbano com salários determinados institucionalmente via fixação de um salário mínimo, esta hipótese

é alterada por uma forma de determinação salarial via salário-eficiência, originalmente proposta por [Summers \(1988\)](#) e modificada por [Romer \(1996\)](#) - como apontam os autores.

A ênfase do trabalho está na influência de outros agentes sobre as decisões de um determinado indivíduo, ou seja, um efeito de vizinhança social. Para a análise, os autores representam o fenômeno de migração como um processo resultante de inúmeras escolhas binárias (migrar ou não) com motivações privadas (diferencial de salários), sociais (decisões tomadas pela vizinhança do agente) e idiossincráticas (aleatórias), utilizando uma formalização adaptada do modelo ferromagnético de Ising. Um determinado agente i deste sistema econômico, pode estar localizado no setor urbano ($\sigma_i = +1$) ou no setor rural ($\sigma_i = -1$), sendo estes estados mutuamente excludentes em um dado momento. A utilidade total de um determinado indivíduo quando opta por uma localização setorial ($\sigma_i = \pm 1$) é dada pela soma de sua utilidade determinística (U_i^d) e sua utilidade privada aleatória¹⁰ [$\epsilon_i(\sigma_i)$]. Em suma:

$$U_i^t(\sigma_i) = U_i^d(\sigma_i) + \epsilon_i(\sigma_i). \quad (3.5)$$

Além disso, os autores definem o diferencial entre as utilidades determinísticas de um agente como:

$$H_i(\sigma_i) \equiv U_i^d(\sigma_i) - U_i^d(-\sigma_i), \quad (3.6)$$

ao definirem desta maneira, podem, então, formalizar este diferencial por uma adaptação do modelo ferromagnético de Ising da seguinte forma:

$$H_i(\sigma_i) = k[(1 - u)w_m - w_a]\sigma_i + J \sum_{j \in n_i} \sigma_i \sigma_j. \quad (3.7)$$

O primeiro termo da equação (3.7) é a utilidade privada determinística do agente i , que incorpora os incentivos explícitos levados em consideração na decisão de migração, a saber, o diferencial de rendimentos esperado (tal qual proposto por [Harris & Todaro \(1970\)](#)). A probabilidade de um indivíduo obter trabalho no

¹⁰A utilidade privada aleatória de um agente, $\epsilon_i(\sigma_i)$, incorpora motivações idiossincráticas e não-observáveis.

setor urbano é de $(1 - u)$, sendo u a taxa de desemprego urbano. Portanto, este termo representa o processo de comparação de estratégias que o agente realiza. A tal processo de comparação é dado um peso $k > 0$ na utilidade total do agente.

O segundo termo da equação (3.7) é a utilidade social determinística de i , e mede a influência que os vizinhos deste agente exercem sobre ele. A constante paramétrica $J > 0$ representa uma medida da influência da interação que liga a escolha do trabalhador i à escolha do trabalhador j .

Nesta análise, a decisão de migração de um agente é feita comparando a utilidade total da alternativa σ_i com a alternativa $-\sigma_i$. Caso a utilidade total provida pela atual estratégia do agente supere a utilidade total da alternativa, ou seja, se $U_i^t(\sigma_i) > U_i^t(-\sigma_i)$, um potencial migrante (membro de uma amostra selecionada da população de agentes) opta pela estratégia σ_i - ou seja, não migra -, caso contrário, opta por $-\sigma_i$. Esta condição considerada é equivalente a $H_i(\sigma_i) > \epsilon_i(-\sigma_i) - \epsilon_i(\sigma_i)$. Supondo $\epsilon_i(-\sigma_i) - \epsilon_i(\sigma_i)$ uma variável aleatória logisticamente distribuída, tem-se que a migração de um agente é efetivada com probabilidade Pr_i :

$$Pr_i = \frac{1}{1 + e^{-\beta H_i}}, \quad (3.8)$$

sendo $\beta > 0$ uma constante paramétrica que representa a heterogeneidade dos agentes quanto a disposição à migrar.

Os resultados obtidos nas simulações deste modelo proposto por [Silveira et al. \(2006\)](#) apresentam propriedades emergentes que corroboram os resultados obtidos por [Harris & Todaro \(1970\)](#), a saber: (i) quando a população inicial é predominantemente rural e o salário urbano esperado é superior ao salário rural, há um contínuo crescimento da população urbana durante a dinâmica de transição, evidenciado na Figura 3.6; (ii) a redução da população urbana ocorre simultaneamente a um contínuo aumento da renda *per capita* da economia, como mostrado pela Figura 3.7; (iii) a dinâmica de transição converge para uma situação de equilíbrio, sendo este um equilíbrio sensível aos pesos relativos entre os efeitos privados e sociais e ao grau de heterogeneidade dos agentes deste sistema econômico, Figuras 3.8 e 3.9.

Portanto, como observam os autores:

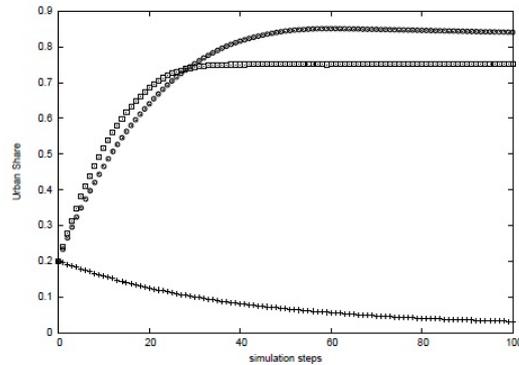


Figura 3.6: Fração urbana da população ao longo da simulação para três conjuntos de parâmetros J e k diferentes. Círculos: ($J > 0, k > 0$); Quadrados: ($J = 0, k > 0$); Cruzes: ($J > 0, k = 0$).

Fonte: (Silveira et al. 2006, p. 450).

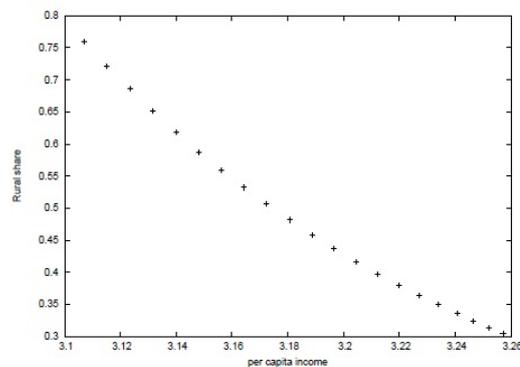


Figura 3.7: Fração rural da população como função da renda *per capita* em unidades de bens manufaturados.

Fonte: (Silveira et al. 2006, p. 451).

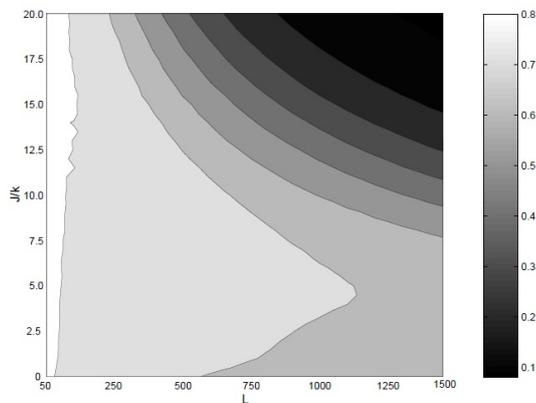


Figura 3.8: Fração urbana da população como função da razão J/k e do tamanho da matriz quadrada de agentes L .

Fonte: (Silveira et al. 2006, p. 454).

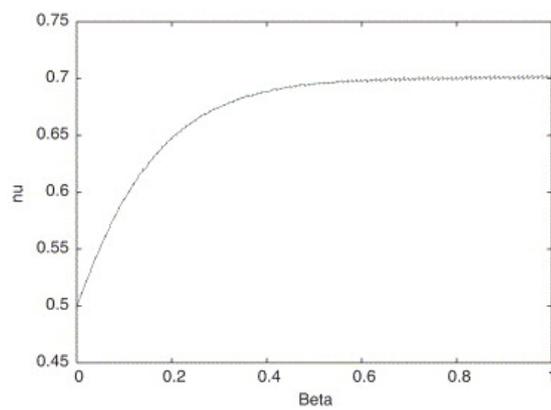


Figura 3.9: Fração urbana da população de equilíbrio em função do parâmetro β .

Fonte: (Silveira et al. 2006, p. 454).

By assuming the sectorial migration decision as discrete choice in a milieu of decentralized and non-coordinated decision-making, the rural-urban migration process was formalized as an Ising like model. The simulations showed aggregate regularities which indicates that decentralized migration decisions can lead to the emergence of equilibrium macrostates with features observed in developing economies ([Silveira et al. 2006](#), p. 455).

Capítulo 4

Dinâmicas migratórias sob redes *small-world*

Os modelos computacionais baseados em agentes apresentados no Capítulo 3 são implementados utilizando uma estrutura de interação regular entre os agentes, ou seja, uma rede regular. Mas como observado por [Watts & Strogatz \(1998\)](#), muitos dos sistemas sociais observados apresentam características que podem ser classificadas como redes *small-world*.

Um trabalho recente de [Fotouhi & Rabbat \(2012\)](#) incorpora a estrutura de interação social da população sob uma rede *small-world* para modelar os processos de decisão de emigração dos agentes, considerando os processos estruturais ativos em países que difunde emigrantes e nos países que atraem imigrantes, além de considerar os determinantes do aumento da mobilidade e das decisões micros dos agentes em emigrar. Dois modelos são propostos pelo autor e o permitem concluir que

as long as the nodes are indistinguishable, i.e. their positions and characteristics in the network are identical, then the average emigration rates are independent of the connection probability in the small-world network ([Fotouhi & Rabbat 2012](#), p. 8).

Neste capítulo, apresentar-se-á uma versão computacional do modelo Harris-Todaro baseada em agentes utilizando uma topologia de rede do tipo *small-world*. Diferentemente do trabalho de [Fotouhi & Rabbat \(2012\)](#), o objetivo aqui é estudar a migração interna como proposta por [Harris & Todaro \(1970\)](#), testar a robustez do equilíbrio Harris-Todaro e o desempenho do sistema econômico com relação às topologias de rede adotadas.

4.1 O modelo proposto

O modelo apresentado neste trabalho apresenta a mesma estrutura do sistema econômico adotado por [Espíndola et al. \(2006\)](#)¹. O modelo proposto parte de um sistema econômico que apresenta um mercado de trabalho dual, formado por dois setores distintos, a saber, os setores *rural* e *urbano*. A diferenciação setorial é justificada pelos diferentes tipos de bens produzidos, as tecnologias de produção utilizadas pelas firmas e pela forma de determinação dos salários.

O setor rural desta economia é, por hipótese, considerado perfeitamente competitivo, com salários flexíveis e determinados unicamente por interações entre oferta e demanda. Conseqüentemente, o setor rural opera sempre em pleno emprego. O setor urbano, por sua vez, tem salários determinados institucionalmente, sob a forma de um salário mínimo.

O setor rural deste sistema econômico produz bens agrícolas utilizando uma tecnologia de produção que pode ser representada por uma função agregada do tipo Cobb-Douglas:

$$Y_a = A_a(N - N_u)^\phi, \quad (4.1)$$

sendo Y_a o nível de produção setorial do bem agrícola, N a população total do sistema econômico - constante ao longo do tempo - e N_u a população urbana. A hipótese de pleno emprego no setor rural implica que a quantidade de trabalhadores empregados neste setor, N_a , é dado por $N - N_u$. Além disso, $A_a > 0$ e $0 < \phi < 1$ são constantes exogenamente determinadas.

De maneira análoga, representa-se o nível agregado de produção do setor urbano por:

$$Y_m = A_m N_m^\alpha, \quad (4.2)$$

sendo Y_m o nível de produção setorial de bens manufaturados, N_m a quantidade de trabalhadores empregados no setor manufaturado, $A_m > 0$ e $0 < \alpha < 1$ constantes exogenamente determinadas.

¹Para uma abordagem mais detalhada das características do sistema econômico consultar o trabalho citado.

Seguindo [Harris & Todaro \(1970\)](#), o preço relativo do bem agrícola em função do bem manufaturado é função direta da escassez relativa entre os dois bens, de maneira mais formal:

$$p = \rho \left(\frac{Y_m}{Y_a} \right)^\gamma, \quad (4.3)$$

sendo $\rho > 0$ e $\gamma > 0$ constantes paramétricas.

No setor urbano, o nível de emprego (N_m), para um dado vetor de constantes paramétricas ($A_a, A_m, \phi, \alpha, \rho, \gamma$), pode ser obtido pela condição de primeira ordem da equação (4.2). O nível de emprego urbano é, portanto, dado por:

$$N_m = \left(\frac{\alpha A_m}{w_m} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \quad (4.4)$$

A determinação de salários, por sua vez, é fixada institucionalmente em um nível mínimo acima do salário real de equilíbrio, (\bar{w}_m), caso a oferta de mão de obra urbana supere a demanda das firmas manufatureiras por mão de obra urbana. Caso contrário, o salário é dado pela produtividade marginal do trabalho urbano, formalmente:

$$w_m = \begin{cases} \alpha A_m N_m^{\alpha-1}, & N_m \leq N_u, \\ \bar{w}_m, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.5)$$

De maneira análoga, o nível de salários no setor rural é dado pela condição de primeira ordem da equação (4.1). Após algumas manipulações algébricas e substituições de variáveis nas equações acima, obtém-se a seguinte equação para o salário rural:

$$w_a = \phi \rho A_a^{1-\gamma} A_m^{\frac{\gamma}{1-\alpha}} \left(\frac{\alpha}{w_m} \right)^{\frac{\alpha\gamma}{1-\alpha}} \frac{1}{(N - Nu)^{1-\phi+\phi\gamma}}. \quad (4.6)$$

Tal qual o modelo original de [Harris & Todaro \(1970\)](#), é permitido aos agentes deste sistema econômico a revisão recorrente de suas localizações setoriais, podendo migrar para um outro setor caso este seja mais atrativo a um potencial migrante. É importante ressaltar que as estratégias de localização setorial dos agentes desta economia são mutuamente excludentes.

Como observam [Espíndola et al. \(2006\)](#), o vetor $(N_m, Y_m, N_a, Y_a, p, w_a)$ configura um equilíbrio temporário deste sistema econômico que pode ser alterado caso ocorra migração de trabalhadores. O processo decisório de migração de um trabalhador qualquer é dado por um processo de aprendizagem por imitação, que será explicado na próxima seção.

4.2 Implementação computacional

Inicialmente, os agentes são distribuídos em uma rede em anel de forma que haja duas ilhas distintas de concentração de trabalhadores urbanos em uma rede predominantemente de trabalhadores rurais. Como observam [Espíndola et al. \(2006\)](#), a predominância inicial de população rural é um fato recorrente em países em desenvolvimento nas suas fases iniciais de industrialização, portanto, o mesmo valor adotado pelos autores citados é tomado para a fração urbana inicial da população de $n_u = 0,2$. Quanto às ilhas de concentração, têm sua existência explicada por [Lewis \(1958\)](#) da seguinte forma:

What we have is not one island of expanding capitalist employment, surrounded by a vast sea of subsistence workers, but rather a number of such tiny islands. This is very typical of countries in their early stages of development. [...] Capital and new ideas are not thinly diffused throughout the economy; they are highly concentrated at a number of points, from which they spread outwards. Though the capitalized sector can be subdivided into islands, it remains a single sector because of the effect of competition in tending to equalize the earnings on capital ([Lewis 1958](#), p. 408).

A Figura 4.1² é um diagrama que representa graficamente o procedimento feito para a distribuição inicial dos agentes. Nesta figura, uma rede de anel é criada pra uma população de 30 agentes, ou seja, 30 nós. Além disso, cada nó conecta-se a dois vizinhos no sentido horário e dois vizinhos no sentido anti-horário (representado pelas arestas em vermelho). Os nós de cor branca representam, neste caso, os trabalhadores rurais deste sistema econômico, enquanto os nós em verde representam os trabalhadores urbanos. Pode-se observar que há

²Esta figura foi gerada utilizando-se o *plugin* livre para Excel para análise exploratória de redes *NodeXL Graph*.

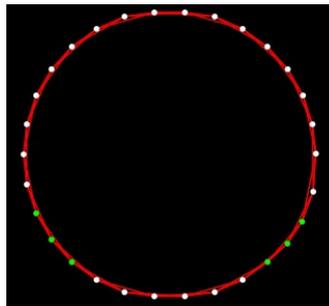


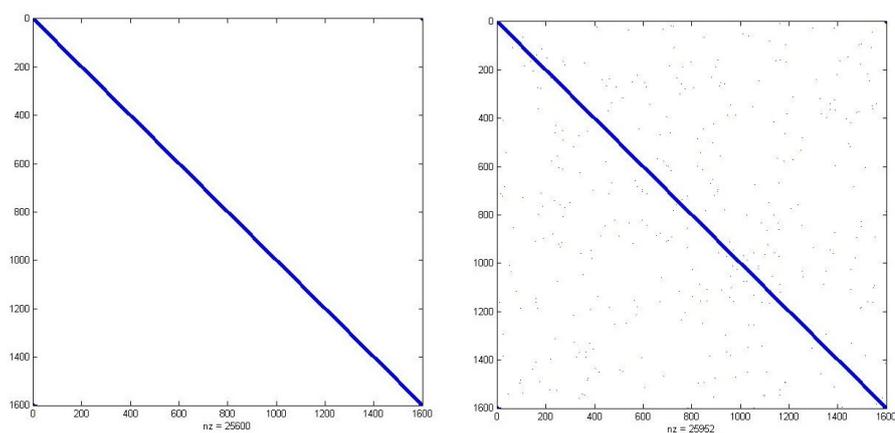
Figura 4.1: Representação gráfica de uma distribuição inicial dos agentes em uma rede anel, para $n = 30, k = 2$. (Cor branca - trabalhadores rurais, cor verde - trabalhadores urbanos e as arestas vermelhas representam as ligações entre os vértices da rede.)

duas ilhas de concentração urbana para esta pequena população, os trabalhadores urbanos encontram-se concentrados em duas pequenas ilhas, tal como proposto por [Lewis \(1958\)](#).

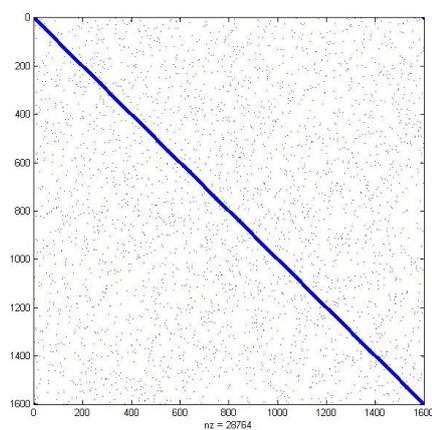
Seguindo [Espíndola et al. \(2006\)](#), adotar-se-á o seguinte vetor de constantes paramétricas nos experimentos: $n = 1600, A_a = 1, A_m = 1, \phi = 0,3, \alpha = 0,7, \rho = 1, \gamma = 1$. Ademais, o salário mínimo urbano de referência será fixado em $\bar{w}_m = 0,8$ e, como já apontado anteriormente, $n_u = 0,2$.

Para a implementação da topologia de rede a ser utilizada, segue-se o mesmo procedimento proposto por [Taylor & Higham \(2009\)](#). Seja n o número de vértices da rede, ou seja, o total de trabalhadores do sistema econômico, define-se uma matriz de adjacência $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ que irá representar os elos entre os vértices deste grafo, de modo que $a_{ij} = a_{ji} = 1$ se os nós i e j estão conectados e $a_{ij} = a_{ji} = 0$ caso contrário, Figura 4.2. Cabe ressaltar que a matriz A é uma matriz simétrica e que $a_{ii} = 0$, ou seja, é descartada a possibilidade de auto-ligação de qualquer vértice.

Para a implementação da topologia de rede desejada, parte-se, então, como já exposto, de uma rede em anel de tamanho n - geometricamente, um círculo com n nós equidistantes entre si - de forma que os agentes i e j estão conectados se, e somente se, a seguinte condição que define a vizinhança, n_i , de um agente i , é satisfeita:



(a) Regular

(b) *Small-world*

(c) Aleatória

Figura 4.2: Matrizes adjacências das topologias de rede - os pontos azuis representam os nós da rede conectados entre si.

$$n_i = \{j \leq n \in \mathbb{N} : |i - j| \leq k, |n - |i - j|| \leq k\}. \quad (4.7)$$

Adota-se um valor de $k = 8$ e uma rede regular é obtida com o procedimento descrito nos parágrafos anteriores. Em seguida, com probabilidade p , adiciona-se um novo elo entre dois nós i e j até então inexistente, ou seja, adiciona-se atalhos à rede. À operação descrita anteriormente dá-se o nome de *shortcut*, procedimento este repetido ao longo da simulação. Originalmente, [Watts & Strogatz \(1998\)](#) utilizaram, ao invés de procedimentos de *shortcuts*, um procedimento de religação entre os nós da rede (*rewire*³), no entanto:

[...]rewiring has the theoretical drawback that it may cause a connected network to become unconnected. Adding *shortcuts* is an alternative procedure that gives very similar topological effects [Newman et al. \(2000\)](#) but does not degrade connectivity ([Taylor & Higham 2009](#), p. 9).

Fixadas estas informações, é possível calcular computacionalmente os valores das variáveis que caracterizam o equilíbrio temporário do sistema econômico do tipo Harris-Todaro descrito na seção anterior. Em cada passo da simulação, cada trabalhador pode ser selecionado com probabilidade a para reavaliar sua localização setorial⁴, tornando-se um migrante potencial. Em outras palavras, em cada passo da simulação, apenas uma fração a da população é selecionada para reavaliar sua decisão locacional.

Adotando a função proposta por [Espíndola et al. \(2006\)](#), o nível de satisfação de um potencial migrante i é determinado pelo processo de comparação entre seu rendimento e os rendimentos auferidos pelos seus vizinhos. Mais precisamente, a cada processo de comparação, o agente i inicia com um nível de utilidade $u_i = 0$. Caso seu salário seja maior que o salário de seu vizinho $j \in n_i$, sua utilidade aumenta em uma unidade; caso seja igual, seu nível de utilidade mantém-se inalterado; e, caso seja menor, seu nível de utilidade diminui em uma unidade. Formalmente:

³O procedimento de *rewire* consiste em desconectar um elo existente entre dois nós i e j com probabilidade p e religá-lo a um outro nó até então sem conexão.

⁴Cabe ressaltar que não há relação no modelo aqui exposto entre a localização setorial e a localização geográfica dos agentes, embora seja relevante considerar a localização geográfica.

$$u_i = \sum_{j \in n_i} \text{sgn}(w_i - w_j), \quad (4.8)$$

sendo:

$$\text{sgn}(w_i - w_j) = \begin{cases} -1, & \text{se } w_i - w_j < 0, \\ 0, & \text{se } w_i - w_j = 0, \\ 1, & \text{se } w_i - w_j > 0. \end{cases} \quad (4.9)$$

Após todos os migrantes potenciais terem revisto suas localizações setoriais, uma nova distribuição setorial da população é estabelecida. Alcança-se, então, um novo valor da fração urbana da população, reiniciando um novo passo da simulação. Os processos dinâmicos de religação de elos da rede e das decisões de localização setorial dão-se de maneira simultânea. Sendo que o valor da probabilidade $p \in [0,1]$ foi aumentado incrementalmente, tomando-se 21 valores equidistantes entre si e em escala logarítmica. Portanto, parte-se de uma rede regular e finaliza-se a simulação com uma rede aleatória, sendo que para valores de p próximos a 0,1 tem-se uma rede *small – world*.

Por fim, sabe-se que uma variável atinge um estado estacionário quando seu valor mantém-se constante ao longo do tempo. Consequência disso, se uma variável encontra-se no estado estacionário, neste caso a variável relevante de equilíbrio é a fração urbana da população n_u^* , a média dos seus valores também convergirá automaticamente para n_u^* .

Propõe-se, então, o seguinte critério de convergência, em termos computacionais. Considera-se que o sistema em questão irá convergir se existe um período T que satisfaça à seguinte condição:

$$\left| \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T n_{u,t} - \frac{1}{T-1} \sum_{t=0}^{T-1} n_{u,t} \right| \leq 10^{-3}, \quad (4.10)$$

sendo $n_{u,t}$ a fração urbana da população no período t .

Uma vez testada a existência de um valor estacionário e a convergência do sistema para este valor, passa a ser interessante a avaliação do número de iterações realizadas para que este equilíbrio seja alcançado - dito de outra maneira, o tempo de convergência. Para isso, calculamos retroativamente as diferenças entre as

médias a partir do ponto de parada T . O tempo de convergência é obtido, então, como a diferença $T - \tau$, sendo τ o valor que satisfaz a condição de divergência retroativa seguinte:

$$\left| \frac{1}{\tau + 2} \sum_{t=1}^{\tau+2} n_{u,T+1-t} - \frac{1}{\tau + 1} \sum_{t=1}^{\tau+1} n_{u,T+1-t} \right| > 10^{-3}. \quad (4.11)$$

4.3 Resultados das simulações

A Figura 4.3 mostra os resultados da distância média entre os nós e o coeficiente de *cluster* da rede resultantes das simulações. Observa-se que as características descritas por Watts & Strogatz (1998) foram obtidas. Há um intervalo amplo de valores da probabilidade p para o qual $l(p)$ é quase tão baixo quanto o valor desta medida na rede aleatória ($p = 1$), ao passo que o coeficiente de *cluster* é muito maior do que o valor deste coeficiente da rede aleatória. Em suma, a rede de interações dos trabalhadores que coevoluiu com a dinâmica migratória de fato apresentou as características estruturais de uma rede *small-world*.

Além disso, as simulações mostraram que as propriedades características do trabalho original de Harris & Todaro (1970) são mantidos independentemente da topologia utilizada para a rede em questão. A Figura 4.4 mostra que há um contínuo crescimento da população urbana do sistema econômico considerado para todas as redes usadas, sendo que depois de algumas iterações um equilíbrio populacional emerge da interação de inúmeros agentes heterogêneos. Além disso, o fenômeno de migração reversa é também verificado, ilustrado pelas oscilações populacionais em torno de um valor de equilíbrio, que age como um centro de gravitação quando o equilíbrio é atingido neste sistema econômico.

Outra propriedade emergente deste sistema complexo é a elevação da taxa de desemprego no setor urbano, que inicialmente é inexistente. Da mesma maneira, a taxa de desemprego emerge e converge para um valor de equilíbrio em torno do qual apresenta oscilações, como evidenciado pela Figura 4.5.

Por fim, como verificação da última condição que corrobore os resultados obtidos pelo modelo Harris-Todaro, observa-se na Figura 4.6 a emergência da condição Harris-Todaro, ou seja, a estabilização do diferencial esperado de ren-

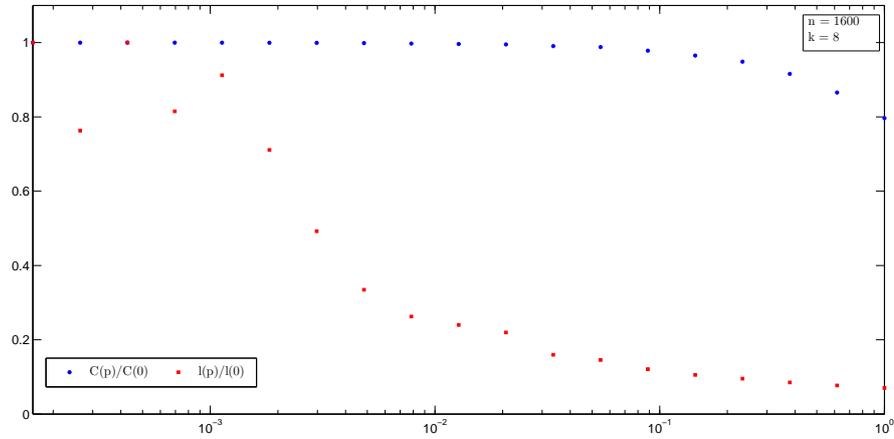


Figura 4.3: Verificação das características descritas por Watts e Strogatz utilizando *shortcuts*. (A trajetória de pontos em azul representa a razão entre o coeficiente de *cluster* em função da probabilidade p , $C(p)$ e o coeficiente de *cluster* de uma rede regular, $C(0)$ e a trajetória de quadrados vermelhos representa a razão entre a distância média entre os nós em função da probabilidade p , $l(p)$, e a distância média entre os vértices de uma rede regular, $l(0)$).

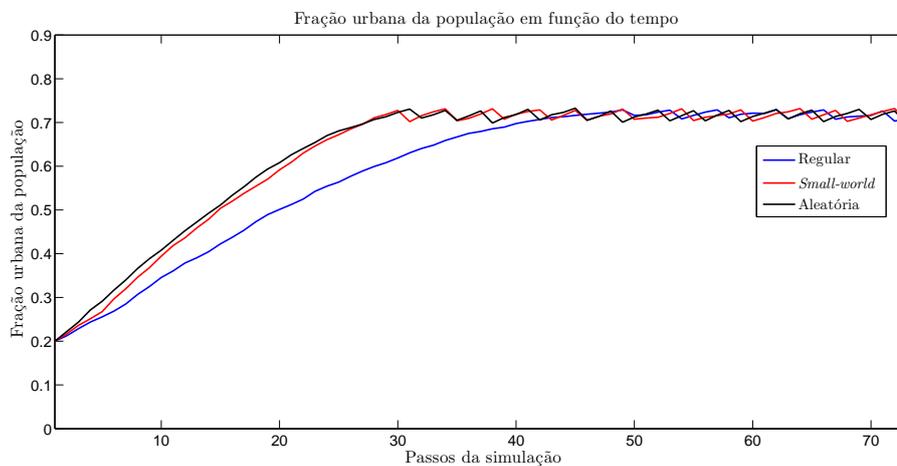


Figura 4.4: Evolução da fração urbana da população para as diferentes topologias de rede. (Rede regular: $p = 0$. Rede *small-world*: $p = 0,1$. Rede aleatória: $p = 1$.)

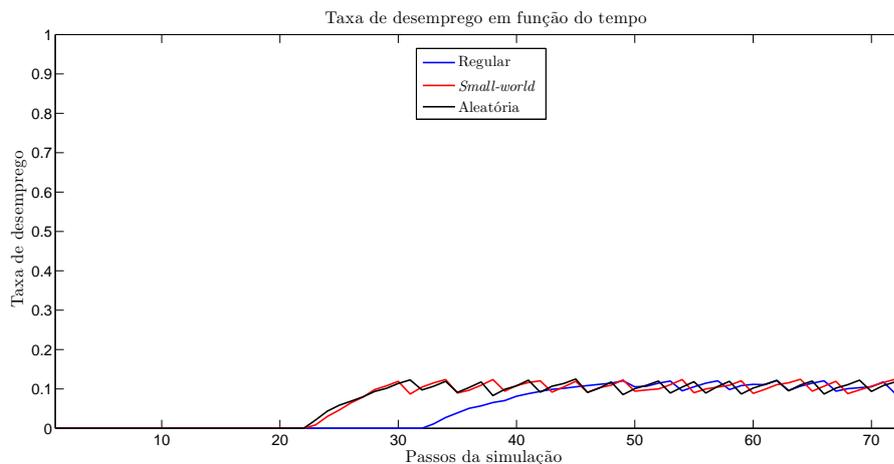


Figura 4.5: Evolução da taxa de desemprego para as diferentes topologias de rede. (Rede regular: $p = 0$. Rede *small-world*: $p = 0,1$. Rede aleatória: $p = 1$.)

dimentos entre os setores rural e urbano. Tal resultado, que é a hipótese crucial do modelo Harris-Todaro, é obtido aqui como uma propriedade que emerge das interações dos inúmeros agentes, e significa que o sistema econômico de fato atingiu um equilíbrio de longo prazo, já que o saldo líquido migratório se estabiliza. De maneira análoga às situações anteriores, tal emergência é verificada em todas as topologias de rede analisadas.

A diferença de desempenho, portanto, quanto à topologia da rede utilizada, se dá quando o tempo despendido pelo sistema econômico para que este atinja o equilíbrio é observado. Como pode-se observar na Figura 4.7, há um claro comportamento descendente do tempo de convergência à medida que o grau de desordem da rede, dado pela probabilidade p , aumenta, até uma rede aleatória ser atingida. Em redes do tipo *small-world*, que segundo [Watts & Strogatz \(1998\)](#) são mais apropriadas para análises empíricas de fenômenos sociais, o sistema econômico converge para um valor de equilíbrio mais rápido do que uma rede de características regulares, no entanto, quando comparada à rede aleatória, não há diferenças consideráveis quanto ao tempo de convergência. Este resultado é intuitivo, uma vez que enquanto a vizinhança dos agentes em uma rede regular mantém-se inalterada ao longo de toda a simulação, a vizinhança dos agentes em redes *small-world* e aleatórias, apresentam diferenças dinâmicas, possibilitando

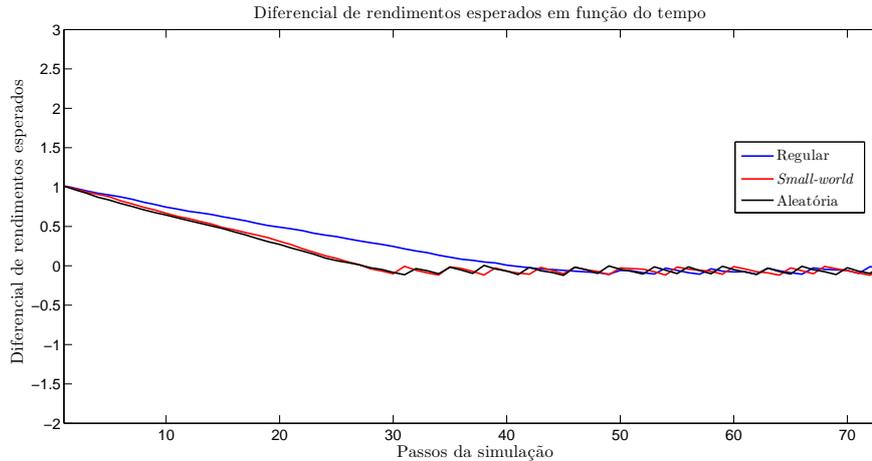


Figura 4.6: Evolução do diferencial de rendimentos esperados para as diferentes topologias de rede. (Rede regular: $p = 0$. Rede *small-world*: $p = 0,1$. Rede aleatória: $p = 1$.)

que os agentes estabeleçam laços com agentes de localizações diversas na rede, aumentando o poder de visão e a informação global da rede para estes agentes.

A Figura 4.7 mostra também que o valor de equilíbrio da fração urbana da população, n_u^* , é independente da probabilidade p . Ou seja, para qualquer uma dessas topologias de rede, o sistema econômico convergirá para o mesmo valor de equilíbrio, o que irá diferir é a velocidade com que este processo ocorrerá.

Portanto, pode-se concluir que a robustez do sistema econômico descrita por [Harris & Todaro \(1970\)](#) não se deve à abordagem de modelos baseados em equações diferenciais que adotaram. A condição Harris-Todaro de estabilização do diferencial esperado de rendimentos e a convergência para um valor de equilíbrio para a fração urbana da população com concentração e desemprego urbanos persistem também em modelos computacionais baseados em agentes, ou seja, estas são propriedades que emergem dos processos de tomada de decisão individual e interdependentes dos agentes do sistema econômico. Então, não é característica exclusiva da estrutura lógica das equações diferenciais que descrevem o processo de decisão de localização setorial.

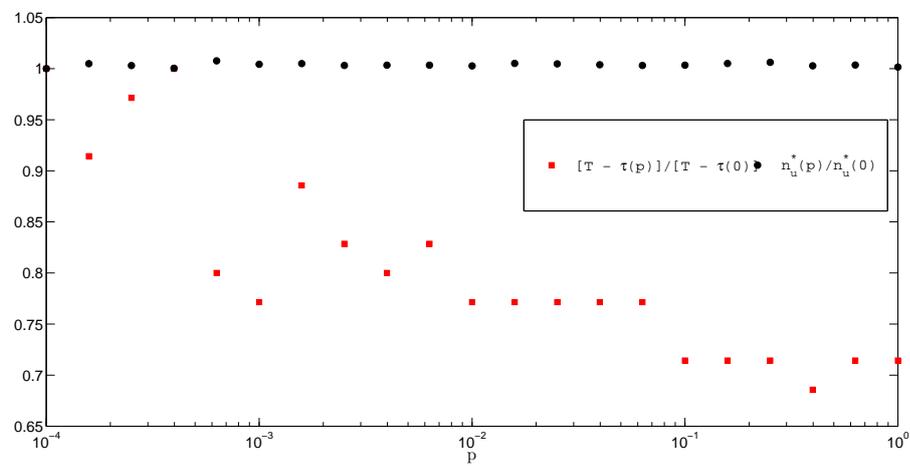


Figura 4.7: Tempo de convergência e fração urbana da população de equilíbrio em função da topologia da rede.

Considerações Finais

A pesquisa aqui apresentada expôs no Capítulo 2 uma discussão sobre mercados de trabalho segmentados e os fluxos migratórios rural-urbano. Na seção 2.1 apresentou-se uma definição de segmentação do mercado de trabalho, um fenômeno comum em economias em desenvolvimento, além da caracterização dos setores formais e informais de uma economia dual e algumas das possibilidades de modelagem deste sistema econômico.

Como os setores de uma economia com mercado de trabalho segmentado não são conjuntos estanques, na seção 2.2 estudou-se as conexões setoriais de uma economia dual. Dois modelos clássicos sobre o tema foram expostos, o modelo de oferta ilimitada de mão de obra de Lewis e o modelo de migração rural-urbana de Harris e Todaro.

Por fim, a seção 2.3 expôs o trabalho de [Silveira & Sanson \(2003\)](#), que reinterpreta o modelo migratório Harris-Todaro sob o ponto de vista de um jogo evolucionário.

Como o objetivo deste trabalho era o de propor um modelo computacional baseado em agentes para o fenômeno de migração rural-urbana, partindo-se do trabalho de [Harris & Todaro \(1970\)](#), era necessário um capítulo que apresentasse os principais conceitos da metodologia que seria utilizada. Encontra-se no Capítulo 3, então, elementos de sistemas complexos, teoria de redes e modelos computacionais baseados em agentes, além de uma breve exposição de aplicações desta metodologia em trabalhos sobre dinâmicas migratórias.

Noções de sistemas complexos foram apresentadas na seção 3.1, como por exemplo: a falta de unicidade na definição de complexidade, as propriedades necessárias que um fenômeno precisa satisfazer para ser considerado complexo e os benefícios que esta nova ciência pode trazer para os mais diversos campos do conhecimento.

A característica de interdependência entre as entidades constituintes de um sistema complexo implica na importância das redes na modelagem de tais fenômenos. A seção 3.2 apresentou conceitos de teorias de redes como, por exemplo, as principais medidas

utilizadas (coeficiente de *cluster* e distância média entre os vértices), além disso, algumas topologias de rede comuns (redes regulares, aleatórias e *small-world*) e suas principais características topológicas.

Munido dos conceitos de complexidade e teoria de redes, a seção 3.3 apresentou uma ferramenta poderosa na modelagem dos fenômenos complexos, a saber, a modelagem computacional baseada em agentes. Ferramenta esta que permite explorar com algum detalhe as propriedades e características dos sistemas complexos. Mostrou-se ainda um potencial imenso de aplicações desta ferramenta ao estudo nas Ciências Econômicas, e em outras áreas, ao permitir que inúmeras hipóteses fortes encontradas na teoria convencional possam ser relaxadas e, portanto, tornem-se mais realistas. Por fim, a seção 3.4 trouxe aplicações dos conceitos discutidos nas seções 3.1, 3.2 e 3.3 às dinâmicas migratórias rural-urbana, apresentando os trabalhos de [Espíndola et al. \(2006\)](#) e [Silveira et al. \(2006\)](#). Os resultados obtidos por estes trabalhos corroboram os de [Harris & Todaro \(1970\)](#) sob uma nova visão, ao invés de utilizarem uma modelagem baseada em equações, os autores obtêm os resultados como propriedades que emergem da interação de inúmeros agentes não-coordenados, através de um modelo computacional baseado em agentes. Portanto, os resultados obtidos por aqueles autores permitem concluir que robustez do sistema econômico por eles descrita não se deve à abordagem de modelos baseados em equações diferenciais que adotaram.

Os trabalhos expostos na seção 3.4, no entanto, adotam uma rede regular como ambiente de interação dos agentes do sistema econômico. Mas [Watts & Strogatz \(1998\)](#) observaram que grande parte das redes observadas, na verdade, combinam características tanto de redes regulares quanto aleatórias, o que chamaram de redes *small-world*. O objetivo do Capítulo 4, portanto, foi propor um modelo computacional baseado em agentes, assumindo as características do sistema econômico propostas por [Harris & Todaro \(1970\)](#), descritas na seção 4.1, e a forma de aprendizagem por imitação utilizada em [Espíndola et al. \(2006\)](#), que tivesse a interação entre os agentes descrita por uma rede *small-world*.

Na seção 4.2, os detalhes da implementação computacional do modelo foram apresentados - os valores de parâmetros utilizados, o procedimento para obtenção de uma rede *small-world* e o processo de aprendizagem por imitação considerada pelos agentes na decisão de migração.

Por fim, na seção 4.3 observou-se que os resultados obtidos com o modelo computacional proposto permite concluir que a robustez do sistema econômico descrita por [Harris & Todaro \(1970\)](#) não se deve à abordagem de modelos baseados em equações

diferenciais que adotaram, como já haviam observado [Espíndola et al. \(2006\)](#) e [Silveira et al. \(2006\)](#). A condição Harris-Todaro de equalização dos diferenciais esperados de rendimentos e o alcance de um valor de equilíbrio pra fração urbana da população com concentração urbana persiste também em modelos computacionais baseados em agentes, ou seja, estas são propriedades que emergem dos processos de tomada de decisão individual e interdependente dos agentes do sistema econômico, portanto, não é característica exclusiva da estrutura lógica das equações diferenciais que descrevem o processo de decisão de localização setorial.

Os resultados obtidos na seção 4.3 podem ser resumidos da seguintes forma: (i) a partir de uma situação inicial de predominância da população rural, ocorre um contínuo crescimento da população urbana; (ii) o sistema econômico converge para um equilíbrio caracterizado por concentração e desemprego urbanos; (iii) equalização dos rendimentos esperados entre os setores rural e urbano (condição Harris-Todaro); e (iv) o tempo requerido de convergência para uma situação de equilíbrio em uma rede *small-world* é inferior ao requerido por uma rede regular, mas quando comparado a uma rede aleatória, é aproximadamente o mesmo. Cabe ressaltar que os resultados de (i) a (iii) são obtidos independentemente da topologia da rede aqui utilizada (regular, *small-world* ou aleatória).

Uma deficiência dos modelos propostos nessa pesquisa é não incorporar a distribuição geográfica dos agentes na rede, ou seja, as redes implementadas nas simulações anteriores representavam apenas a localização setorial dos agentes e as relações de vizinhança entre eles, mas o posicionamento de um agente na rede não condiz necessariamente com sua localização espacial em algum território, portanto, as distâncias entre os agentes da rede nada tinham a ver com as distâncias físicas entre eles. Além disso, o modelo apresentado no Capítulo 4 deste trabalho, em que foi implementado uma rede do tipo *small-world*, apresenta uma outra deficiência, não existe um componente idiosincrático para as decisões dos agentes que implique em um sistema mais heterogêneo, característica existente no modelo proposto por [Silveira et al. \(2006\)](#).

O modelo proposto neste trabalho utiliza uma topologia de rede do tipo *small-world*, esta rede tem a característica de não ser uma rede livre de escala (*scale-free network*), ou seja, aproximadamente todos os nós de uma rede *small-world* têm o mesmo grau de conectividade. No entanto, conjectura-se que muitas redes empíricas, na verdade, apresentam características que se aproximem mais de redes livres de escala, [Clauset et al. \(2007\)](#), i.e., existem nós nestas redes que apresentam um grau de conectividade muito superior à média, a estes nós dá-se o nome de *hubs*, coexistindo com nós que

apresentam um grau de conectividade inferior à média. Em resumo, a distribuição de probabilidades do grau de conectividade dos nós de uma rede livre de escala segue uma lei de potência (*power-law*).

Portanto, como sugestão para trabalhos posteriores, seria interessante testar a robustez das características econômicas do modelo Harris-Todaro quanto a variações na topologia da rede de interação dos agentes com agentes heterogêneos entre si, além disso, seria de interesse maior ainda incorporar a distribuição espacial dos agentes, incluindo custos de deslocamento no território para os agentes que seja proporcional à distância percorrida, quando feita a opção pela migração para um outro setor. A última sugestão para futuros trabalhos é similar à deixada por (Fotouhi & Rabbat 2012, p. 8): "*one must introduce hierarchy or other structural asymmetries in order to study the dependence of the collective behavior on the structural properties of the underlying network*". Sugere-se, então, que o desempenho do modelo e a robustez de suas características econômicas sejam testadas também utilizando-se redes livres de escala.

Referências Bibliográficas

- Agénor, P. & Montiel, P. (2008), *Development Macroeconomics: Third Edition*, Princeton University Press, Princeton University Press.
- Ahuja, R., Magnanti, T. & Orlin, J. (1993), *Network flows: theory, algorithms, and applications*, Prentice Hall.
- Barabási, A.-L. (2007), ‘The architecture of complexity: From network structure to human dynamics’, *IEEE Control Systems Magazine* p. 33.
- Baranger, M. (2001), *Chaos, Complexity, and Entropy: A Physics Talk for Non-physicists*, New England Complex Systems Institute.
- Bardhan, P. & Rudra, A. (1981), ‘Terms and conditions of labour contracts in agriculture: Results of a survey in west bengal, 1979’, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics* **43**(1), 89–111.
- Campbell, D., Farmer, D., Crutchfield, J. & Jen, E. (1985), ‘Experimental mathematics: the role of computation in nonlinear science’, *Commun. ACM* **28**(4), 374–384.
- Chu, D., Strand, R. & Fjelland, R. (2003), ‘Theories of complexity’, *Complexity* **8**(3), 19–30.
- Clauset, A., Shalizi, C. R. & Newman, M. E. J. (2007), ‘Power-law distributions in empirical data’, *SIAM Reviews* .
URL: <http://arxiv.org/abs/0706.1062>
- Dréze, J. & Mukherjee, A. (1989), *The balance between industry and agriculture in economic development*, London: Macmillan, chapter Labour contracts in rural india: theories and evidence.

- Espíndola, A., Silveira, J. & Penna, T. (2006), ‘A harris-todaro agent-based model to rural-urban migration’, *Brazilian Journal of Physics* **36**(3A), 603–609.
- Espíndola, A. (2006), Modelos computacionais baseados em agentes aplicados à migração interna, Tese (doutorado), Programa de pós-graduação em Física, Instituto de Física, Universidade Federal Fluminense, Niterói.
- Fields, G. S. (1975), ‘Rural-urban migration, urban unemployment and underemployment, and job search activity in LDC’s’, *Journal of Development Economics* (2), 165–188.
- Fields, G. S. (1989), ‘On-the-job search in a labor market model: ex-ante choices and ex-post outcomes’, *Journal of Development Economics* (30), 159–178.
- Fields, G. S. (2009), ‘Segmented labor market models in developing countries’, *Articles & Chapters* . Paper 162.
- Fotouhi, B. & Rabbat, M. G. (2012), ‘Migration in a Small World: A Network Approach to Modeling Immigration Processes’, *ArXiv e-prints* .
- Gabaix, X. (2008), ‘Power Laws in Economics and Finance’, *Social Science Research Network Working Paper Series* .
- Harris, J. R. & Todaro, M. P. (1970), ‘Migration, unemployment & development: A two-sector analysis’, *American Economic Review* **60**(1), 126–42.
- Hooker, C. (2011), *Philosophy of Complex Systems*, Handbook of the Philosophy of Science, Elsevier Science, chapter A introduction to philosophy of complex systems, pp. 3–91.
- International Labour Office (ILO) (1972), Employment, incomes, and equality: A strategy for increasing productive employment in kenya, Technical report, Geneva.
- Kemp, S. (2009), ‘Unpredictability and nonlinearity in complexity theory: A critical appraisal’, *Emergence: Complexity and Organization* **11**(1), 84–93. Social and Political Science.
- Lewis, W. A. (1958), *The economics of underdevelopment: a series of articles and papers*, Oxford University Press, New York, chapter Economic development with unlimited supplies of labour, pp. 440–449.

- Lorenz, E. N. (1963), 'Deterministic Nonperiodic Flow', *J. Atmos. Sci.* **20**(2), 130–141.
- Lucas, R. E. (1993), Internal migration in developing countries, *in* M. R. Rosenzweig & O. Stark, eds, 'Handbook of Population and Family Economics', Vol. 1 of *Handbook of Population and Family Economics*, Elsevier, chapter 13, pp. 721–798.
- Macal, C. & North, M. J. (2010), 'Tutorial on agent-based modelling and simulation', *Journal of Simulation* **4**, 151–162.
- Maloney, W. F. (2004), 'Informality revisited', *World Development* **32**(7), 1159–1178.
URL: <http://ideas.repec.org/a/eee/wdevel/v32y2004i7p1159-1178.html>
- Newman, M. E. J., Moore, C. & Watts, D. J. (2000), 'Mean field solution of the small-world network model', *Physical Review Letters* **84**, 3201–3204.
- Osmani, S. (1991), 'Wage determination in rural labour markets: the theory of implicit co-operation', *Journal of Development Economics* (34), 3–23.
- Page, S. (2009), Understanding complexity, Great Courses: business & economics, Teaching Company, Chantilly, VA : The Teaching Company, c2009. DVD.
- Romer, D. (1996), *Advanced macroeconomics*, McGraw-Hill advanced series in economics, McGraw-Hill Companies.
- Schmidt, J. (2011), *Philosophy of Complex Systems*, Handbook of the Philosophy of Science, Elsevier Science, chapter Challenged by instability and complexity, pp. 223–257.
- Silveira, J., Espíndola, A. & Penna, T. (2006), 'Agent-based model to rural-urban migration analysis', *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **364**, 445–456.
- Silveira, J. & Sanson, J. R. (2003), 'The harris-todaro labor allocation mechanism as an evolutionary game', *Anais do VI Encontro de Economia da Região Sul* **1**, 1–15.
- Solow, R. (1990), *The Labor Market As a Social Institution*, The Royer Lectures, John Wiley & Sons Incorporated.
- Strogatz, S. (1994), *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, Studies in Nonlinearity, Westview Press.

- Summers, L. (1988), 'Relative wages, efficiency wages and keynesian unemployment', *American Economic Review* (78).
- Taylor, A. & Higham, D. (2009), 'Contest: a controllable test matrix toolbox for matlab', *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)* **35**(4), 26.
- Tesfatsion, L. (2006), 'Agent-based computational economics: A constructive approach to economic theory', *Handbook of Computational Economics* **2**, 831–880.
- Todaro, M. P. (1969), 'A model for labor migration and urban unemployment in less developed countries', *American Economic Review* **59**(1), 138–48.
- Todaro, M. & Smith, S. (2011), *Economic Development*, Pearson Series in Economics, Prentice Hall.
- Watts, D. & Strogatz, S. (1998), 'Collective dynamics of small-world networks', *Nature* **393**, 440–442.