Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e
Computação Científica

Algumas Aplicações Algébricas da Teoria dos Modelos

Jucavo Savie Rocha
Orientador: Prof. Dr. Newton C. A. da Costa

Florianópolis
Outubro de 2007

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica

Algumas Aplicações Algébricas da Teoria dos Modelos

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Lógica Matemática.

Jucavo Savie Rocha
Florianópolis
Outubro de 2007

Algumas Aplicações Algébricas da Teoria dos Modelos

por

Jucavo Savie Rocha

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de "Mestre", Área de Concentração em Lógica Matemática, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica.

Prof. Dr. Clóvis Caesar Gonzaga
Coordenador

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Newton Carneiro Affonso da Costa (USP-Orientador)

Prof. Dr. Ivan Pontual Costa e Silva (UFSC)

Prof. Dr. Alexandre Augusto Martins Rodrigues (USP)

Prof. Dr. Décio Krause (UFSC)

Prof. Dr. Eliezer Batista (UFSC)

Florianópolis, Outubro de 2007.

Agradecimentos

Em primeiro lugar gostaria de agradecer à Carolina, o grande amor da minha vida, por estar ao meu lado em toda essa etapa da minha vida, por sua dedicação, paciência, alguns empurrões e, claro, muito amor. Obrigado amor, você fez muito mais por mim do que eu poderia sequer imaginar.

Ao professor Newton da Costa por ter me dado a honra de ser meu orientador nesta dissertação e ao longo desse tempo ter me ensinado um modo diferente de ver a matemática.

Ao professor Ivan por todos os seminários que fizemos, os quais garantiram a realização deste trabalho. Professor, obrigado pelo apoio em todo este processo. Obrigado também ao Jonas que nos acompanhou em todos os seminários e ao professor Antônio que nos ajudou muito no começo.

À minha grande amiga Dayana, por sua eterna e sincera amizade. Estando perto, ou não tão perto, você está sempre disposta a ajudar, obrigado minha amiga. Ao Giuliano por me mostrar que é possível ser extremamente inteligente e ter uma humildade maior ainda. Ao meu querido casal de amigos Rodrigo e Grasielli por toda sua ajuda e incentivo.

Obrigado ao professor Eliezer, que me incentivou muito e também por sua participação na banca examinadora. Obrigado também aos professores Décio e Alexandre por aceitarem participar da banca.

À Elisa por sua ajuda e paciência em todo processo. À Capes, por ter me concedido uma bolsa de mestrado, sem a qual não teria conseguido fazer esta dissertação.

À minha família, que mesmo estando distante se preocupava e me incentivava para que eu persistisse naqueles momentos de desânimo.

Por fim, às minhas meninas Alcione, Helena, Matilde e Suzana por toda alegria que elas me trouxeram.

Resumo

Seja K um corpo algebricamente fechado. Dizemos que um subconjunto de K^n, onde n é um número natural positivo, é *construtível* se for uma combinação booleana de conjuntos Zariski fechados.

Na teoria dos modelos, um subconjunto de K^n é dito ser *definível* se todos os elementos desse conjunto, e somente estes, satisfizerem uma determinada propriedade definida por uma fórmula da linguagem de primeira ordem dos anéis.

Um dos nossos principais objetivos será mostrar, na teoria dos corpos algebricamente fechados, a equivalência entre os conjuntos construtíveis e os conjuntos definíveis. Como conseqüência disso vamos demonstrar alguns resultados algébricos, como o Nullstellensatz de Hilbert, utilizando técnicas da teoria dos modelos.

Abstract

Let K be an algebraically closed field. We say that a subset of K^n, where n is a positive natural number, is *constructible* if it is a boolean combination of Zariski closed sets.

In Model Theory, a subset of K^n is said be *definable* if every elements of this set, and only these elements, satisfy a determined property defined by a formula in the first-order language or rings.

One of our main goals will be to show, in algebraically closed field theory, the equivalence between the constructible sets and the definable sets. Finally, we will prove some algebraic results, like the Hilbert's Nullstellensatz, using Model Theory techniques.

Sumário

Introdução **1**

1 Estruturas **3**

1.1 Linguagens 3
1.2 Estruturas 4
1.3 Fórmulas e Sentenças 7
1.4 Imersões e Equivalências 11

2 Teorias **16**

2.1 Teorias e Modelos 16
2.2 Conseqüência Lógica 19
2.3 Conjuntos Definíveis 20

3 Teorema da Compacidade **28**

3.1 Construção de Henkin 28
3.2 Ultrafiltros 35
3.3 Ultraprodutos 38

4 Teorias Completas **45**

4.1 κ-Categoricidade 45
4.2 Teoremas de Löwenheim-Skolem 53
4.3 Teoria Universal 59
4.4 Eliminação de Quantificadores 61

5 Corpos Algebricamente Fechados **74**

5.1 Teoria CAF 74
5.2 Topologia de Zariski 76
5.3 Conjuntos Construtíveis 84
5.4 Nullstellensatz de Hilbert 86
5.5 Decomposição Primária 91

A Extensões Transcendentes **95**
A.1 Extensões Algébricas 95
A.2 Extensões Transcendentes 96

Referências Bibliográficas **105**

Introdução

Esta é uma dissertação expositiva onde apresentaremos alguns resultados importantes da teoria de modelos, entre eles o teorema da Compacidade e o teorema de Löwenheim-Skolem. Também veremos alguns resultados algébricos, como o teorema da Base de Hilbert, Nullstellensatz de Hilbert (Teorema dos Zeros de Hilbert) e o teorema da Decomposição Primária. Porém, para a demonstração de alguns desses resultados algébricos, usaremos a teoria de modelos.

A descoberta que uma teoria matemática pode ter mais que um modelo foi feita no século XIX, quando Riemann e Klein estabeleceram a independência do postulado das paralelas construindo um modelo a partir de outros axiomas da geometria no qual o postulado das paralelas falha. Esse parágrafo foi retirado de [2].5.§8.

Trabalharemos em lógica de primeira ordem (veja mais em [2]) sob a teoria de conjuntos ZF com axioma da escolha, o qual é equivalente ao princípio da boa ordenação e ao lema de Zorn, que usaremos algumas vezes. Veja em [4] maiores detalhes sobre a teoria de conjuntos ZF e tais equivalências. Trabalharmos em lógica de primeira ordem é essencial para obtermos alguns resultados como o teorema da compacidade e o teorema de Löwenheim-Skolem. Estes, em geral, falham em lógica de ordem superior (veja exemplo em [14]).

No primeiro capítulo definiremos o que é uma linguagem e o que é uma estrutura para essa linguagem. As estruturas nas quais trabalharemos mais são grupos, anéis e corpos, e no último capítulo daremos uma ênfase maior em corpos algebricamente fechados. Ainda no primeiro capítulo, veremos o que são termos, fórmulas e sentenças, e como interpretar esses termos e verificar se uma sentença ou uma designação para uma fórmula são verdadeiras numa estrutura. Definiremos também o que são homomorfismos, imersões, isomorfismos e equivalências elementares entre estruturas.

No segundo capítulo veremos a definição de teoria, modelo de uma teoria e satisfatibilidade de uma teoria. Estudaremos as conseqüências lógicas de uma teoria. Dada uma estrutura, veremos o que é um conjunto ser definível nessa estrutura. Mostraremos que o conjunto dos números reais não é definível no conjunto dos números complexos.

No terceiro capítulo usaremos a construção de Henkin para demonstrar o teorema da

Compacidade, o qual diz que uma teoria é satisfatível se, e somente se, qualquer subconjunto finito dessa teoria for uma teoria satisfatível. Veremos também uma demonstração para o teorema da Compacidade através de Ultraprodutos.

No quarto capítulo estudaremos as teorias completas. Uma teoria é completa se, dada uma sentença da linguagem, esta sentença ou a negação dela é conseqüência lógica dessa teoria. Na seção de κ-categoricidade veremos que a teoria dos corpos algebricamente fechados de característica p, onde $p = 0$ ou p é primo, é uma teoria completa. Depois, ainda nesta seção, veremos que toda função polinomial injetora de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^n$ é sobrejetora. Na seção seguinte demonstraremos os teoremas de Löwenheim-Skolem, ascendente e descendente. Por último, estudaremos algumas teorias que tenham eliminação de quantificadores, isto é, dada qualquer fórmula da linguagem, esta fórmula é equivalente, em qualquer modelo dessa teoria, à outra fórmula livre de quantificadores.

No quinto e último capítulo mostraremos que a teoria dos corpos algebricamente fechados tem eliminação de quantificadores. Estudaremos a topologia de Zariski. Veremos que os conjuntos construtíveis (combinação booleana de conjuntos Zariski fechados) são exatamente os conjuntos definíveis nos corpos algebricamente fechados. Por fim, provaremos o teorema da Decomposição Primária, isto é, dado um ideal radical de $K[x_1, \ldots, x_n]$, onde K é um corpo algebricamente fechado, podemos representar esse ideal de forma única por uma intersecção de ideais primos que contenham esse ideal.

Capítulo 1

Estruturas

Intuitivamente uma estrutura é um conjunto equipado com operações, relações e elementos distinguidos. Então escolhemos uma linguagem de primeira ordem onde podemos falar sobre tais operações, relações e elementos. Por exemplo, se queremos estudar a estrutura $(\mathbb{N}, +, 0, 1)$ dos números naturais com adição e elementos distinguidos 0 e 1, a linguagem natural para estudar essa estrutura é a linguagem onde temos um símbolo funcional binário e dois símbolos de constante.

1.1 Linguagens

Definição 1.1.1 *Uma* linguagem $\mathcal{L}$ *é uma tripla* $< \mathcal{F}, \mathcal{P}, \mathcal{C} >$ *onde:*

- $\mathcal{F}$ *é um conjunto de* símbolos funcionais *e para cada* $f \in \mathcal{F}$ *existe um número natural positivo* n_f *que indica a aridade de* f*;*
- $\mathcal{P}$ *é um conjunto de* símbolos de predicados *e para cada* $p \in \mathcal{P}$ *existe um número natural positivo* n_p *que indica a aridade de* p*;*
- $\mathcal{C}$ *é um conjunto de* símbolos de constantes.

Obs.: Qualquer um dos conjuntos $\mathcal{F}$, $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{C}$ pode ser vazio.
Para simplificar a notação, escreveremos

$$\mathcal{L} = \{s; s \in \mathcal{F} \text{ ou } s \in \mathcal{P} \text{ ou } s \in \mathcal{C}\}$$

onde ficará implícito o conjunto de símbolos ao qual s pertence. Veja os exemplos a seguir:

Exemplo 1.1.2 *Linguagem de grupos:* $\mathcal{L}_g = \{\cdot, e\}$
Mais precisamente temos que $\mathcal{L}_g =< \mathcal{F}_g, \mathcal{P}_g, \mathcal{C}_g >$ *com* $\mathcal{F}_g = \{\cdot\}$ *onde* $n_\cdot = 2$*,* $\mathcal{P}_g = \emptyset$ *e* $\mathcal{C}_g = \{e\}$*.*

Exemplo 1.1.3 *Linguagem de anéis ordenados:* $\mathcal{L}_{ao} = \{+, -, \cdot, <, 0, 1\}$
$\mathcal{F}_{ao} = \{+, -, \cdot\}$ *onde* $n_+ = n_\cdot = 2$ *e* $n_- = 1$, $\mathcal{P}_{ao} = \{<\}$ *onde* $n_< = 2$ *e* $\mathcal{C}_{ao} = \{0, 1\}$.

Exemplo 1.1.4 *Linguagem pura de conjuntos:* $\mathcal{L} = \emptyset$

Exemplo 1.1.5 *Linguagem de grafos:* $\mathcal{L} = \{R\}$
Onde R *é um símbolo de predicado binário, ou seja,* $R \in \mathcal{P}$ *e* $n_R = 2$.

1.2 Estruturas

Definição 1.2.1 *Seja* $\mathcal{L}$ *uma linguagem. Uma* $\mathcal{L}$-estrutura $\mathcal{M}$ *é uma quadrupla*

$$\mathcal{M} = (M, \{f^{\mathcal{M}}\}_{f \in \mathcal{F}}, \{p^{\mathcal{M}}\}_{p \in \mathcal{P}}, \{c^{\mathcal{M}}\}_{c \in \mathcal{C}})$$

onde:

- M *é um conjunto, denominado* universo *de* $\mathcal{M}$*;*
- *Para cada* $f \in \mathcal{F}$, $f^{\mathcal{M}} : M^{n_f} \to M$*;*
- *Para cada* $p \in \mathcal{P}$, $p^{\mathcal{M}} \subset M^{n_p}$*;*
- *Para cada* $c \in \mathcal{C}$, $c^{\mathcal{M}} \in M$.

Obs.: $f^{\mathcal{M}}$, $p^{\mathcal{M}}$ e $c^{\mathcal{M}}$ são ditas *interpretações* de f, p e c na $\mathcal{L}$-estrutura $\mathcal{M}$ e a *cardinalidade* de $\mathcal{M}$ é, por definição, a cardinalidade de seu universo M.

Doravante, utilizaremos a mesma letra em tipografias caligráfica e regular para designar uma $\mathcal{L}$-estrutura o seu universo , respectivamente. Por exemplo, $\mathcal{M}$ é uma $\mathcal{L}$-estrutura com universo M.

Exemplo 1.2.2 *Seja* $\mathcal{L}_g = \{\cdot, e\}$ *a linguagem de grupo vista no exemplo 1.1.2.*
Uma $\mathcal{L}_g$*-estrutura* $\mathcal{G} = (G, \cdot^{\mathcal{G}}, e^{\mathcal{G}})$ *é um conjunto* G *equipado com uma função binária* $\cdot^{\mathcal{G}}$ *e um elemento distinguido* $e^{\mathcal{G}}$.
Por exemplo:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{G} = (\mathbb{R}^*, \cdot, 1) & \cdot^{\mathcal{G}} = \cdot & e^{\mathcal{G}} = 1 \\ \mathcal{G}' = (\mathbb{R}, \cdot, 1) & \cdot^{\mathcal{G}'} = \cdot & e^{\mathcal{G}'} = 1 \\ \mathcal{N} = (\mathbb{Z}, +, 0) & \cdot^{\mathcal{N}} = + & e^{\mathcal{N}} = 0 \\ \mathcal{N}' = (\mathbb{N}, +, 0) & \cdot^{\mathcal{N}'} = + & e^{\mathcal{N}'} = 0 \end{array}$$

Note que $\mathcal{G}'$ *e* $\mathcal{N}'$ *não são grupos, porém são* $\mathcal{L}_g$*-estruturas.*

Definição 1.2.3 *Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem. Suponha que $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ são $\mathcal{L}$-estruturas com universos M e N respectivamente.*

- *Um $\mathcal{L}$-*homomorfismo *$\sigma : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ é uma aplicação $\sigma : M \to N$ que preserva a interpretação dos símbolos de $\mathcal{L}$. Mais precisamente:*

  i. $\sigma(f^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_{n_f})) = f^{\mathcal{N}}(\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_{n_f}))$, *para* $f \in \mathcal{F}$ *e* $a_1, \ldots, a_{n_f} \in M$*;*

  ii. $\sigma(p^{\mathcal{M}}) = \{(\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_{n_p})) \in N^{n_p}; (a_1, \ldots, a_{n_p}) \in p^{\mathcal{M}}\} \subset p^{\mathcal{N}}$ *para todo* $p \in \mathcal{P}$*;*

  iii. $\sigma(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{N}}$, *para todo* $c \in \mathcal{C}$.

- *Uma $\mathcal{L}$-*imersão *$\eta : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ é um $\mathcal{L}$-homomorfismo injetor tal que $\eta^{-1}(p^{\mathcal{N}}) = p^{\mathcal{M}}$.*

- *Se $M \subset N$ e a inclusão é uma $\mathcal{L}$-imersão, dizemos que $\mathcal{M}$ é uma $\mathcal{L}$-*sub-estrutura *de $\mathcal{N}$ ou que $\mathcal{N}$ é uma $\mathcal{L}$-*extensão *de $\mathcal{M}$.*

Exemplo 1.2.4 *Seja $\mathcal{L} = \mathcal{L}_g \cup \{p\}$ onde $\mathcal{L}_g$ é linguagem de grupo e $n_p = 1$. Sejam $\mathcal{M} = (\mathbb{Z}, +, 0, \mathbb{Z}_+)$ e $\mathcal{N} = (\mathbb{Z}, +, 0, \mathbb{Z})$ $\mathcal{L}$-estruturas, então $id : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ definida por $id(x) = x$ é um $\mathcal{L}$-homomorfismo.*

i. $id(x + y) = x + y = id(x) + id(y)$

ii. $id(p^{\mathcal{M}}) = id(\mathbb{Z}_+) = \mathbb{Z}_+ \subset \mathbb{Z} = p^{\mathcal{N}}$

iii. $id(0) = 0$

Note que id é injetor, porém não é imersão, pois $id^{-1}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}_+$.

Exemplo 1.2.5 *Seja $\eta : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ definida por $\eta(x) = e^x$, então η é uma $\mathcal{L}_g$-imersão de $(\mathbb{Z}, +, 0)$ em $(\mathbb{R}, \cdot, 1)$.*

i. $\eta(x + y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y = \eta(x) \cdot \eta(y)$

ii. $\mathcal{P}_g = \emptyset$

iii. $\eta(0) = e^0 = 1$

Injetividade: $\eta(x) = \eta(y) \Leftrightarrow e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$

Exemplo 1.2.6 *$(\mathbb{Z}, +, 0)$ é uma $\mathcal{L}_g$-sub-estrutura de $(\mathbb{R}, +, 0)$.*

Proposição 1.2.7 *Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem. Suponha $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ $\mathcal{L}$-estruturas e η uma $\mathcal{L}$-imersão de $\mathcal{M}$ em $\mathcal{N}$. Se η é bijetora então η^{-1} é uma $\mathcal{L}$-imersão de $\mathcal{N}$ em $\mathcal{M}$.*

Demonstração

Sejam M e N os universos de $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$, respectivamente.

i. Sejam $f \in \mathcal{F}$ e $a_1, \ldots, a_{n_f} \in N$
$\eta^{-1}(f^{\mathcal{N}}(a_1, \ldots, a_{n_f})) = \eta^{-1}(f^{\mathcal{N}}(\eta(\eta^{-1}(a_1)), \ldots, \eta(\eta^{-1}(a_{n_f})))) =$
$= \eta^{-1}(\eta(f^{\mathcal{M}}(\eta^{-1}(a_1), \ldots, \eta^{-1}(a_{n_f})))) = f^{\mathcal{M}}(\eta^{-1}(a_1), \ldots, \eta^{-1}(a_{n_f}))$

ii. Sejam $p \in \mathcal{P}$ e $a_1, \ldots, a_{n_p} \in N$
$(a_1, \ldots, a_{n_p}) \in p^{\mathcal{N}} \Leftrightarrow (\eta(\eta^{-1}(a_1)), \ldots, \eta(\eta^{-1}(a_{n_p}))) \in p^{\mathcal{N}} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\eta^{-1}(a_1), \ldots, \eta^{-1}(a_{n_p})) \in p^{\mathcal{M}}$

iii. Seja $c \in \mathcal{C}$
$\eta(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{N}} \Rightarrow c^{\mathcal{M}} = \eta^{-1}(c^{\mathcal{N}})$

Obviamente η^{-1} é injetora e pelo item *ii.* temos que $(\eta^{-1})^{-1}(p^{\mathcal{M}}) = p^{\mathcal{N}}$

■

Definição 1.2.8 *Seja η uma $\mathcal{L}$-imersão. Se η é bijetora, dizemos que η é um $\mathcal{L}$-*isomorfismo*.*

A próxima proposição nos deixará aptos a trabalhar com subestruturas ao invés de imersões, sendo que toda imersão pode ser vista como uma subestrutura.

Proposição 1.2.9 *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{N}$ $\mathcal{L}$-estruturas e $\eta : \mathcal{A} \to \mathcal{N}$ uma $\mathcal{L}$-imersão. Então existe uma $\mathcal{L}$-estrutura $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \simeq \mathcal{N}$ e $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$.*

Demonstração

Vamos definir a $\mathcal{L}$-estrutura $\mathcal{M}$.

Seja $M = A\dot{\cup}(N \setminus \eta(A))$. Defina a função $\sigma : M \to N$ por $\sigma|_A = \eta$ e $\sigma|_{N\setminus\eta(A)} = id_N$. Claramente σ está bem definida e é bijetora. Vejamos agora as interpretações dos símbolos de $\mathcal{L}$.

Se f é um símbolo funcional n-ário de $\mathcal{L}$, então interpretaremos f em $\mathcal{M}$ por

$$\begin{array}{cccc} f^{\mathcal{M}}: & M^n & \longrightarrow & M \\ & (a_1, \ldots, a_n) & \longmapsto & \sigma^{-1}(f^{\mathcal{N}}(\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n))) \end{array}$$

Se p é um símbolo de predicado n-ário de $\mathcal{L}$, então interpretaremos p em $\mathcal{M}$ por

$$p^{\mathcal{M}} = \{(a_1, \ldots, a_n) \in M^n; (\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n)) \in p^{\mathcal{N}}\}$$

Se c é um símbolo de constante de $\mathcal{L}$, então interpretaremos c em $\mathcal{M}$ por

$$c^{\mathcal{M}} = \sigma^{-1}(c^{\mathcal{N}})$$

Portanto $\mathcal{M}$ é uma $\mathcal{L}$-estrutura, $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ e, por construção, $\sigma : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ é um isomorfismo.

■

1.3 Fórmulas e Sentenças

Seja S um conjunto abstrato, cujos elementos são chamados *símbolos*, que suporemos união de cinco subconjuntos disjuntos denotados por:

- variáveis: $v, v_1, v_2, v_3, \ldots$
- igualdade: $=$
- conectivos booleanos: $\wedge, \neg$
- quantificador: $\exists$
- auxiliares: $(, [,),]$

Fórmulas serão seqüências finitas de símbolos construídos através dos símbolos de uma linguagem e símbolos de S. (Veja mais em [2] e [12])

No que segue, a menos de definição explícita, fixamos uma linguagem $\mathcal{L}$ arbitrária.

Definição 1.3.1 *O conjunto de $\mathcal{L}$-termos é o menor conjunto $\mathcal{T}$ tal que:*

i. $c \in \mathcal{T}$ *para todo* $c \in \mathcal{C}$*;*

ii. cada símbolo de variável $v_i \in \mathcal{T}$*, para* $i = 1, 2, \ldots$*;*

iii. se $f \in \mathcal{F}$ *e* $t_1, \ldots, t_{n_f} \in \mathcal{T}$*, então* $ft_1 \ldots t_{n_f} \in \mathcal{T}$*.*

Exemplo 1.3.2 *Seja* $\mathcal{L}_a = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$ *a linguagem de anéis. Exemplos de* $\mathcal{L}_a$*-termos:*

	$\mathcal{L}_a$-termo	Notação
1.	$\cdot v_1 + v_3 - 1$	$v_1(v_3 - 1)$
2.	$\cdot + v_1 v_2 + v_3 1$	$(v_1 + v_2)(v_3 + 1)$
3.	$+1 + 1 + 11$	$1 + (1 + (1 + 1))$

O uso da notação é para facilitar a leitura do termo. No item 1. do exemplo acima temos que 1 é termo pelo item i. da definição e v_1 e v_3 são termos pelo item ii., assim, pelo item iii. temos que -1 é termo, depois que $+v_3-1$ é termo e finalmente que $\cdot v_1+v_3-1$ é termo.
Na $\mathcal{L}_r$-estrutura $(\mathbb{Z},+,-,\cdot,0,1)$ podemos pensar nos termos $+1+1+11$ como nome para o elemento 4 e $\cdot + v_1v_2+v_31$ como nome para a função $(x,y,z)\mapsto (x+y)(z+1)$.

Suponha que $\mathcal{M}$ é uma $\mathcal{L}$-estrutura e que t é um $\mathcal{L}$-termo construído usando símbolos de variáveis de $\overline{v}=(v_1,\ldots,v_m)$, para algum m. Queremos interpretar t como uma função $t^{\mathcal{M}}: M^m\to M$. Para isso, seja $\overline{a}=(a_1,\ldots,a_m)\in M^m$, vamos definir indutivamente $t^{\mathcal{M}}(\overline{a})$ como:

i. Se t é um símbolo de constante c, então $t^{\mathcal{M}}(\overline{a})=c^{\mathcal{M}}$;

ii. Se t é um símbolo de variável v_i, então $t^{\mathcal{M}}(\overline{a})=a_i$;

iii. Se $f\in\mathcal{F}$, $t_1,\ldots,t_{n_f}\in\mathcal{T}$ e t é o termo $ft_1\ldots t_{n_f}$, então $t^{\mathcal{M}}(\overline{a})=f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}(\overline{a}),\ldots,t_{n_f}^{\mathcal{M}}(\overline{a}))$.

Exemplo 1.3.3 *Seja $\mathcal{L}=\{f,g,c\}$, onde c é símbolo de constante e f e g são símbolos funcionais com $n_f=1$ e $n_g=2$. Considere os $\mathcal{L}$-termos:*

$$t_1 = gv_1c$$
$$t_2 = fgcfv_1$$
$$t_3 = gfgv_1v_2gv_1fv_2$$

Seja $\mathcal{M}$ a $\mathcal{L}$-estrutura $(\mathbb{R},\exp,+,1)$, onde $f^{\mathcal{M}}=\exp$, $g^{\mathcal{M}}=+$ e $c^{\mathcal{M}}=1$. Então

$$t_1^{\mathcal{M}}(a_1) = a_1+1$$
$$t_2^{\mathcal{M}}(a_1) = e^{1+e^{a_1}}$$
$$t_3^{\mathcal{M}}(a_1,a_2) = e^{a_1+a_2}+(a_1+e^{a_2})$$

Definição 1.3.4 *Dizemos que φ é uma $\mathcal{L}$-fórmula atômica se φ é:*

i. $t_1=t_2$, onde $t_1,t_2\in\mathcal{T}$; ou

ii. $pt_1\ldots t_{n_p}$, onde $p\in\mathcal{P}$ e $t_1,\ldots,t_{n_p}\in\mathcal{T}$.

O conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas é o menor conjunto $\mathcal{W}$ contendo as $\mathcal{L}$-fórmulas atômicas e tal que:

I. Se $\varphi\in\mathcal{W}$, então $\neg\varphi\in\mathcal{W}$;

II. Se $\varphi,\psi\in\mathcal{W}$, então $\varphi\wedge\psi\in\mathcal{W}$;

III. Se $\varphi \in \mathcal{W}$, então $\exists v\varphi \in \mathcal{W}$.

Obs.: Algumas notações e abreviações:

- $\varphi \vee \psi := \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$
- $\varphi \rightarrow \psi := \neg\varphi \vee \psi$
- $\varphi \leftrightarrow \psi := (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$
- $\forall v\varphi := \neg(\exists v \neg\varphi)$
- $\displaystyle\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i := \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$
- $\displaystyle\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i := \varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n$

Exemplo 1.3.5 *Seja $\mathcal{L}_{ao} = \{+, -, \cdot, <, 0, 1\}$ a linguagem de anéis ordenados, então são exemplos de $\mathcal{L}_{ao}$-fórmulas:*

1. $v_1 = 0 \vee v_1 > 0$

2. $\exists v_2(v_2 \cdot v_2 = v_1)$

3. $\forall v_1(v_1 = 0 \vee \exists v_2(v_1 \cdot v_2 = 1))$

Intuitivamente, o item *1.* do exemplo acima nos diz que $v_1 \geq 0$, já o item *2.* que v_1 é um quadrado e o *3.* que todo número diferente de zero tem um inverso multiplicativo.

Gostaríamos de estabelecer uma relação precisa entre fórmulas e o que elas dizem sobre estruturas, e em particular, definir o que significa para uma fórmula ser verdadeira ou falsa numa estrutura. Enquanto em qualquer $\mathcal{L}_{ao}$-estrutura o item *3.* do exemplo acima é ou verdadeira ou falsa, os itens *1.* e *2.* expressam propriedades que podem ou não serem verdadeiras para algum particular elemento da estrutura. Por exemplo, na $\mathcal{L}_{ao}$-estrutura $(\mathbb{Z}, +, -, \cdot, <, 0, 1)$, *2.* é verdade para $v_1 = 9$, mas não para $v_1 = 8$.

Para isso, definiremos indutivamente o que significa uma variável, ocorrendo numa fórmula, ser livre.

Definição 1.3.6

- *Se ψ é uma fórmula livre de quantificadores, então toda variável ocorrendo em ψ é* livre.
- *Seja φ uma fórmula. Se $\psi = \exists v\varphi$, então toda ocorrência de v em ψ é* limitada *em ψ. Além disso, se w é outra variável ocorrendo em ψ, w é limitada em ψ se, e somente se, w é limitada em φ. Análogo para o caso onde $\psi = \forall v\varphi$.*

- *Dada uma fórmula ψ, dizemos que uma variável v ocorrendo em ψ é* livre *se ela não for limitada em ψ.*

No exemplo anterior temos que v_1 é livre nos itens *1.* e *2.*, e limitada no item *3.*, já v_2 é limitada nos itens *2.* e *3.*. Observe que uma mesma variável pode ser livre e limitada numa mesma fórmula. Veja por exemplo a fórmula

$$\forall v[v = w \wedge \exists w(w = v)] \rightarrow \exists u(v \neq u)$$

As três primeiras ocorrências de v são limitadas e a última é livre, a primeira ocorrência de w é livre e as outras duas são limitadas, e as duas ocorrências de u são limitadas. Então dizemos que uma variável v é *livre* numa fórmula ψ se ela ocorre ao menos uma vez em ψ como variável livre. Logo, no nosso último exemplo, v e w são variáveis livres, porém u não é.

Definição 1.3.7 *Uma $\mathcal{L}$-sentença é uma $\mathcal{L}$-fórmula sem variáveis livres.*

Dada uma $\mathcal{L}$-estrutura $\mathcal{M}$, veremos que cada $\mathcal{L}$-sentença ou é verdadeira ou é falsa em $\mathcal{M}$. Por outro lado, se φ é uma fórmula com variáveis livres entre $v_1, \ldots, v_n$, veremos φ como expressando uma propriedade de elementos de M^n. Escreveremos $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ para deixar explícito quais são as variáveis de φ.
Definiremos o que significa $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ ser *satisfeita* por uma n-upla $(a_1, \ldots, a_n) \in M^n$, dita ser uma *designação* para $v_1, \ldots, v_n$ em $\mathcal{M}$.

Definição 1.3.8 *Seja φ uma fórmula com variáveis livres $\overline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ e seja $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in M^n$. Indutivamente definimos a relação $\mathcal{M} \models \varphi(\overline{a})$, e dizemos que $\mathcal{M}$* satisfaz *$\varphi(\overline{a})$ ou que $\varphi(\overline{a})$ é* verdadeira *em $\mathcal{M}$ da seguinte maneira:*

i. Se φ é $t_1 = t_2$, então $\mathcal{M} \models \varphi(\overline{a})$ sse $t_1^{\mathcal{M}}(\overline{a}) = t_2^{\mathcal{M}}(\overline{a})$;

ii. Se φ é $pt_1 \ldots t_{n_p}$, então $\mathcal{M} \models \varphi(\overline{a})$ sse $(t_1^{\mathcal{M}}(\overline{a}), \ldots, t_{n_p}^{\mathcal{M}}(\overline{a})) \in p^{\mathcal{M}}$;

iii. Se φ é $\neg\psi$, então $\mathcal{M} \models \varphi(\overline{a})$ sse $\mathcal{M} \not\models \psi(\overline{a})$; [1]

iv. Se φ é $\psi \wedge \alpha$, então $\mathcal{M} \models \varphi(\overline{a})$ sse $\mathcal{M} \models \psi(\overline{a})$ e $\mathcal{M} \models \alpha(\overline{a})$;

v. Se φ é $\exists v_j \psi(\overline{v}, v_j)$, então $\mathcal{M} \models \varphi(\overline{a})$ sse existe $b \in M$ tal que $\mathcal{M} \models \psi(\overline{a}, b)$.

Obs.: Se φ é uma sentença, não tem variáveis livres, então não depende de uma designação para verificar sua veracidade, depende apenas da estrutura. Poderíamos ver da seguinte forma: seja ψ a fórmula $(v = v) \wedge \varphi$ e $\mathcal{M}$ uma estrutura, então ψ tem uma

[1] Usaremos o símbolo $\not\models$, de forma óbvia, como a negação da relação $\models$.

variável livre v, porém para todo $a \in M$ temos que $a = a$, logo $\mathcal{M} \models \varphi$ sse $\mathcal{M} \models \psi(a)$ para todo $a \in M$.

É importante notar que os quantificadores ($\exists$ e $\forall$) agem somente sobre os elementos da estrutura. Por exemplo, a propriedade de um corpo ordenado ser completo (todo subconjunto limitado possui supremo) não pode ser expressa como uma fórmula porque não podemos quantificar sobre subconjuntos. O fato de estarmos limitados à quantificação sobre elementos da estrutura é uma característica fundamental da lógica de primeira ordem.

1.4 Imersões e Equivalências

Se uma fórmula possui um quantificador existencial e ela é satisfeita numa determinada estrutura por uma designação, então existe, nesta estrutura, uma testemunha para esse quantificador. Se tomarmos uma subestrutura dessa anterior, nada garante que nesta haverá também uma testemunha para tal quantificador. Veja exemplo 1.4.3. Da mesma forma, se uma fórmula possui um quantificador universal, e é satisfeita numa determinada estrutura, então todo elemento desta estrutura tem que ser uma testemunha para esse quantificador. O que não necessariamente acontece para uma extensão dessa estrutura.

Veremos agora que se uma fórmula sem quantificadores é verdadeira em alguma estrutura, então ela é verdadeira em qualquer extensão desta.

Notação: Se $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ são $\mathcal{L}$-estruturas, $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in M^n$ e η é uma $\mathcal{L}$-imersão de $\mathcal{M}$ em $\mathcal{N}$, notaremos por $\eta(\overline{a})$ a n-upla $(\eta(a_1), \ldots, \eta(a_n)) \in N^n$.

Proposição 1.4.1 *Suponha $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ $\mathcal{L}$-estruturas e η uma $\mathcal{L}$-imersão de $\mathcal{M}$ em $\mathcal{N}$. Sejam $\overline{a} \in M^n$ e $\varphi(\overline{v})$ uma fórmula livre de quantificadores. Então $\mathcal{M} \models \varphi(\overline{a})$ se, e somente se, $\mathcal{N} \models \varphi(\eta(\overline{a}))$.*

Demonstração

Primeiro veremos que se $t(\overline{v})$ é um termo e $\overline{b} \in M^n$, então $\eta(t^{\mathcal{M}}(\overline{b})) = t^{\mathcal{N}}(\eta(\overline{b}))$. Isto é provado por indução sobre termos:

i. Se t é um símbolo de constante c, então

$$\eta(t^{\mathcal{M}}(\overline{b})) = \eta(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{N}} = t^{\mathcal{N}}(\eta(\overline{b}))$$

ii. Se t é um símbolo de variável v_i, então

$$\eta(t^{\mathcal{M}}(\overline{b})) = \eta(b_i) = t^{\mathcal{N}}(\eta(\overline{b}))$$

iii. Sejam $f \in \mathcal{F}$ e $t_1, \ldots, t_{n_f} \in \mathcal{T}$ e suponha $\eta(t_i^{\mathcal{M}}(\bar{b})) = t_i^{\mathcal{N}}(\eta(\bar{b}))$ para $i = 1, \ldots, n_f$. Se t é igual a $ft_1 \ldots t_{n_f}$, então

$$\begin{aligned} \eta(t^{\mathcal{M}}(\bar{b})) &= \eta(f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}(\bar{b}), \ldots, t_{n_f}^{\mathcal{M}}(\bar{b}))) = \\ &= f^{\mathcal{N}}(\eta(t_1^{\mathcal{M}}(\bar{b})), \ldots, \eta(t_{n_f}^{\mathcal{M}}(\bar{b}))) = \\ &= f^{\mathcal{N}}(t_1^{\mathcal{N}}(\eta(\bar{b})), \ldots, t_{n_f}^{\mathcal{N}}(\eta(\bar{b}))) = \\ &= t^{\mathcal{N}}(\eta(\bar{b})) \end{aligned}$$

Vamos agora provar a proposição por indução sobre as fórmulas

i. Se φ é $t_1 = t_2$, então

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \models \varphi(\overline{a}) &\Leftrightarrow t_1^{\mathcal{M}}(\overline{a}) = t_2^{\mathcal{M}}(\overline{a}) \Leftrightarrow \eta(t_1^{\mathcal{M}}(\overline{a})) = \eta(t_2^{\mathcal{M}}(\overline{a})) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t_1^{\mathcal{N}}(\eta(\overline{a})) = t_2^{\mathcal{N}}(\eta(\overline{a})) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi(\eta(\overline{a})) \end{aligned}$$

ii. Se φ é $pt_1 \ldots t_{n_p}$, onde $p \in \mathcal{P}$, então

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \models \varphi(\overline{a}) &\Leftrightarrow (t_1^{\mathcal{M}}(\overline{a}), \ldots, t_{n_p}^{\mathcal{M}}(\overline{a})) \in p^{\mathcal{M}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\eta(t_1^{\mathcal{M}}(\overline{a})), \ldots, \eta(t_{n_p}^{\mathcal{M}}(\overline{a}))) \in p^{\mathcal{N}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (t_1^{\mathcal{N}}(\eta(\overline{a})), \ldots, t_{n_p}^{\mathcal{N}}(\eta(\overline{a}))) \in p^{\mathcal{N}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi(\eta(\overline{a})) \end{aligned}$$

Então a proposição é verdadeira para as fórmulas atômicas. Suponha que a proposição seja verdadeira para ψ e que φ é $\neg\psi$, então

$$\mathcal{M} \models \varphi(\overline{a}) \Leftrightarrow \mathcal{M} \not\models \psi(\overline{a}) \Leftrightarrow \mathcal{N} \not\models \psi(\eta(\overline{a})) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi(\eta(\overline{a}))$$

Finalmente, suponha que a proposição seja verdadeira para ψ_1 e ψ_2 e que $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$, então

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \models \varphi(\overline{a}) &\Leftrightarrow \mathcal{M} \models \psi_1(\overline{a}) \text{ e } \mathcal{M} \models \psi_2(\overline{a}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \mathcal{N} \models \psi_1(\eta(\overline{a})) \text{ e } \mathcal{N} \models \psi_2(\eta(\overline{a})) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi(\eta(\overline{a})) \end{aligned}$$

■

Corolário 1.4.2 *Suponha $\mathcal{M}$ subestrutura de $\mathcal{N}$. Sejam $a_1, \ldots, a_n \in M$ e $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ uma fórmula livre de quantificadores. Então $\mathcal{M} \models \varphi(\overline{a})$ se, e somente se, $\mathcal{N} \models \varphi(\overline{a})$.*

Demonstração

Como $\mathcal{M}$ é subestrutura de $\mathcal{N}$, a inclusão de M em N é uma imersão. Tomando η da proposição anterior igual a essa inclusão temos

$$\mathcal{M} \vDash \varphi(\overline{a}) \Leftrightarrow \mathcal{N} \vDash \varphi(\eta(\overline{a})) \Leftrightarrow \mathcal{N} \vDash \varphi(\overline{a})$$

■

Exemplo 1.4.3 *Contra-exemplo com quantificador.*

Sejam $\mathcal{L}_a = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$, $\mathcal{M} = (\mathbb{Z}, +, -, \cdot, 0, 1)$ e $\mathcal{N} = (\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1)$.

Tome

$$\varphi(v) := v \neq 0 \rightarrow \exists x(x \cdot v = 1)$$

e

$$\psi(v) := v \neq 0 \wedge \forall x(x \cdot v \neq 1)$$

Note que $\mathcal{M} \nvDash \varphi(2)$, porém $\mathcal{N} \vDash \varphi(2)$. E como $\psi = \neg\varphi$, $\mathcal{M} \vDash \psi(2)$ e $\mathcal{N} \nvDash \psi(2)$

Observe que nesse exemplo $\mathcal{M}$ é subestrutura de $\mathcal{N}$. Se tomarmos uma extensão $\mathcal{A}$ de $\mathcal{N}$, teremos que $\mathcal{A} \vDash \varphi(2)$. Assim como se tomarmos uma subestrutura $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}$, teremos que $\mathcal{B} \vDash \psi(2)$. Vejamos então um resultado que esclareça melhor essa situação.

A próxima proposição nos diz que se φ é uma fórmula sem quantificador universal satisfeita por uma estrutura $\mathcal{M}$, então qualquer extensão desta satisfaz tal fórmula.

Proposição 1.4.4 *Sejam $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ uma $\mathcal{L}$-fórmula livre de quantificadores e $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ $\mathcal{L}$-estruturas. Então $\mathcal{M} \vDash \exists v_1 \ldots \exists v_n \varphi(v_1, \ldots, v_n)$ implica $\mathcal{N} \vDash \exists v_1 \ldots \exists v_n \varphi(v_1, \ldots, v_n)$.*

Demonstração

Suponha que

$$\mathcal{M} \vDash \exists v_1 \ldots \exists v_n \varphi(v_1, \ldots, v_n)$$

então existe $a_1, \ldots, a_n \in M$ tal que $\mathcal{M} \vDash \varphi(a_1, \ldots, a_n)$. Assim, pelo corolário 1.4.2, $\mathcal{N} \vDash \varphi(a_1, \ldots, a_n)$, portanto

$$\mathcal{N} \vDash \exists v_1 \ldots \exists v_n \varphi(v_1, \ldots, v_n)$$

■

Como corolário temos que se φ é uma fórmula sem quantificador existencial satisfeita por uma estrutura $\mathcal{N}$, então qualquer subestrutura desta satisfaz tal fórmula.

Corolário 1.4.5 *Sejam $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ uma $\mathcal{L}$-fórmula livre de quantificadores e $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ $\mathcal{L}$-estruturas. Então $\mathcal{N} \vDash \forall v_1 \ldots \forall v_n \varphi(v_1, \ldots, v_n)$ implica $\mathcal{M} \vDash \forall v_1 \ldots \forall v_n \varphi(v_1, \ldots, v_n)$.*

Demonstração

Suponha que

$$\mathcal{M} \not\models \forall v_1 \ldots \forall v_n \varphi(v_1, \ldots, v_n)$$

então

$$\mathcal{M} \models \neg\forall v_1 \ldots \forall v_n \varphi(v_1, \ldots, v_n)$$

logo

$$\mathcal{M} \models \exists v_1 \ldots \exists v_n \neg\varphi(v_1, \ldots, v_n)$$

pela proposição anterior,

$$\mathcal{N} \models \exists v_1 \ldots \exists v_n \neg\varphi(v_1, \ldots, v_n)$$

portanto

$$\mathcal{N} \not\models \forall v_1 \ldots \forall v_n \varphi(v_1, \ldots, v_n)$$

$\blacksquare$

Definição 1.4.6 *Dizemos que duas $\mathcal{L}$-estruturas $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ são* elementarmente equivalentes *e escrevemos $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ quando $\mathcal{M} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi$, para toda $\mathcal{L}$-sentença φ.*

O conjunto das $\mathcal{L}$-sentenças φ tais que $\mathcal{M} \models \varphi$, denotado por $Th(\mathcal{M})$ é dito *teoria de* $\mathcal{M}$.

Proposição 1.4.7 *$\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ se, e somente se, $Th(\mathcal{M}) = Th(\mathcal{N})$.*

Demonstração

Suponha primeiramente que $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$, então

$$\varphi \in Th(\mathcal{M}) \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi \Leftrightarrow \varphi \in Th(\mathcal{N})$$

logo $Th(\mathcal{M}) = Th(\mathcal{N})$.
Agora suponha que $Th(\mathcal{M}) = Th(\mathcal{N})$, então

$$\mathcal{M} \models \varphi \Leftrightarrow \varphi \in Th(\mathcal{M}) \Leftrightarrow \varphi \in Th(\mathcal{N}) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi$$

logo $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$.

$\blacksquare$

Proposição 1.4.8 *Suponha $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ $\mathcal{L}$-estruturas isomorfas, e $\eta : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ é um isomorfismo. Sejam $\overline{a} \in M^n$ e $\varphi(\overline{v})$ uma fórmula. Então $\mathcal{M} \models \varphi(\overline{a})$ se, e somente se, $\mathcal{N} \models \varphi(\eta(\overline{a}))$.*

Demonstração

Já vimos que se $\varphi(\overline{v})$ é uma fórmula livre de quantificadores, a proposição é verdadeira, pois η é uma imersão. Basta-nos então, mostrar que também é válida com quantificadores.
Se $\varphi(\overline{v})$ é igual a $\exists w \psi(\overline{v}, w)$ e a proposição é verdadeira para ψ, então

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \models \varphi(\overline{a}) \ &\Leftrightarrow \ \text{existe } b \in M \text{ tal que } \mathcal{M} \models \psi(\overline{a}, b) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ \text{existe } c \in N \text{ tal que } \mathcal{N} \models \psi(\eta(\overline{a}), c) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi(\eta(\overline{a})) \end{aligned}$$

■

Corolário 1.4.9 *Se $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ são isomorfos, então $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$.*

Demonstração

Imediata da proposição anterior.

■

A noção de equivalência elementar, no entanto, é estritamente mais fraca do que a de isomorfismo entre estruturas. No capítulo 4 veremos com o teorema de Löwenheim-Skolem que existem modelos elementarmente equivalentes com cardinalidades distintas, e portanto não isomorfos.

Capítulo 2

Teorias

2.1 Teorias e Modelos

Definição 2.1.1 *Uma* $\mathcal{L}$-teoria T *é simplesmente um conjunto de* $\mathcal{L}$*-sentenças.*

Nos referimos freqüentemente a $\mathcal{L}$-teorias simplesmente como teorias, se não houver perigo de confusão.

Definição 2.1.2 *Dizemos que uma* $\mathcal{L}$*-estrutura* $\mathcal{M}$ *é um* modelo *de uma teoria* T *e denotamos por* $\mathcal{M} \models \mathrm{T}$*, se* $\mathcal{M} \models \varphi$ *para toda sentença* $\varphi \in \mathrm{T}$*.*

Exemplo 2.1.3 *O conjunto* $\mathrm{T} = \{\forall x(x = 0), \exists x(x \neq 0)\}$ *é uma teoria, porém não tem modelo, pois suas sentenças são contraditórias. Isto é, se* $\mathcal{M} \models \forall x(x = 0)$*, então* $\mathcal{M} \not\models \exists x(x \neq 0)$*.*

Definição 2.1.4 *Uma teoria é* satisfatível *se ela tem algum modelo.*

Dizemos que uma classe de $\mathcal{L}$-estruturas K é uma *classe elementar* se existe uma $\mathcal{L}$-teoria T tal que $\mathrm{K} = \{\mathcal{M}; \mathcal{M} \models \mathrm{T}\}$.

Exemplo 2.1.5 *Conjuntos infinitos*

$$\mathrm{T} = \{\underbrace{\exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n \bigwedge_{i<j\leq n} x_i \neq x_j}_{\varphi_n},\ \textit{para todo } n\}$$

Os únicos modelos para T *são estruturas de cardinalidade infinita.*

Exemplo 2.1.6 *Ordem linear* $\qquad \mathcal{L} = \{<\}$

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &:= \forall x \neg(x < x) \\
\varphi_2 &:= \forall x \forall y \forall z((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z) \\
\varphi_3 &:= \forall x \forall y(x < y \vee x = y \vee y < x)
\end{aligned}$$

$$\mathrm{T}_{ol} = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$$

Densidade

$$\varphi_4 := \quad \forall x \forall y (x < y \to \exists z (x < z \wedge z < y))$$

$$\mathrm{T}_{old} = \mathrm{T}_{ol} \cup \{\varphi_4\}$$

Sucessor

$$\varphi_5 := \quad \forall x \exists y (x < y \wedge \forall z (x < z \to (z = y \vee y < z)))$$

$$\mathrm{T}_{ols} = \mathrm{T}_{ol} \cup \{\varphi_5\}$$

Exemplo 2.1.7 *Relação de Equivalência*
$\mathcal{L} = \{E\}$ *onde* E *é símbolo de predicado e* $n_E = 2$

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &:= \quad \forall x E(x, x) \\
\varphi_2 &:= \quad \forall x \forall y (E(x, y) \to E(y, x)) \\
\varphi_3 &:= \quad \forall x \forall y \forall z ((E(x, y) \wedge E(y, z)) \to E(x, z))
\end{aligned}$$

$$\mathrm{T}_e = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$$

Dois elementos por classe

$$\varphi_4 := \quad \forall x \exists y (x \neq y \wedge E(x, y) \wedge \forall z (E(x, z) \to (z = x \vee z = y)))$$

$$\mathrm{T}'_e = \mathrm{T}_e \cup \{\varphi_4\}$$

Duas classes

$$\varphi_5 := \quad \exists x \exists y (\neg E(x, y) \wedge \forall z (E(x, z) \vee E(y, z)))$$

$$\mathrm{T}''_e = \mathrm{T}_e \cup \{\varphi_5\}$$

Exemplo 2.1.8 *Aritmética de Peano*
$\mathcal{L} = \{+, \cdot, s, 0\}$

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &:= \quad \forall x (s(x) \neq 0) \\
\varphi_2 &:= \quad \forall x (x \neq 0 \to \exists y (s(y) = x)) \\
\varphi_3 &:= \quad \forall x (x + 0 = x) \\
\varphi_4 &:= \quad \forall x \forall y (x + s(y) = s(x + y)) \\
\varphi_5 &:= \quad \forall x (x \cdot 0 = 0) \\
\varphi_6 &:= \quad \forall x \forall y (x \cdot s(y) = (x \cdot y) + x) \\
&\qquad \textit{e para cada fórmula } \psi(v, \overline{w}) \textit{ defina a sentença:} \\
\varphi_\psi &:= \quad \forall \overline{w} [(\psi(0, \overline{w}) \wedge \forall v (\psi(v, \overline{w}) \to \psi(s(v), \overline{w}))) \to \forall x \psi(x, \overline{w})]
\end{aligned}$$

$$\mathrm{T} = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6\} \cup \{\varphi_\psi; \psi(v, \overline{w}) \text{ é fórmula}\}$$

Exemplo 2.1.9 *Grupos* $\mathcal{L}_g = \{+, 0\}$

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &:= \forall x(0 + x = x + 0 = x)\\
\varphi_2 &:= \forall x \forall y \forall z((x + y) + z = x + (y + z))\\
\varphi_3 &:= \forall x \exists y(x + y = y + x = 0)
\end{aligned}$$

$$\mathrm{T}_g = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$$

Grupos abelianos

$$\varphi_4 := \forall x \forall y(x + y = y + x)$$

$$\mathrm{T}_{ga} = \mathrm{T}_g \cup \{\varphi_4\}$$

Grupos abelianos ordenados $\mathcal{L}_{go} = \{+, <, 0\}$

$$\varphi_5 := \forall x \forall y \forall z(x < y \rightarrow (x + z < y + z))$$

$$\mathrm{T}_{gao} = \mathrm{T}_{ga} \cup \mathrm{T}_{ol} \cup \{\varphi_5\}$$

Exemplo 2.1.10 *Anéis* $\mathcal{L}_a = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &:= \forall x \forall y \forall z(x - y = z \leftrightarrow x = y + z)\\
\varphi_2 &:= \forall x(x \cdot 0 = 0)\\
\varphi_3 &:= \forall x \forall y \forall z(x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z)\\
\varphi_4 &:= \forall x(x \cdot 1 = 1 \cdot x = x)\\
\varphi_5 &:= \forall x \forall y \forall z(x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z))\\
\varphi_6 &:= \forall x \forall y \forall z((x + y) \cdot z) = (x \cdot z) + (y \cdot z)
\end{aligned}$$

$$\mathrm{T}_a = \mathrm{T}_{ga} \cup \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6\}$$

Anéis comutativos

$$\varphi_7 := \forall x \forall y(x \cdot y = y \cdot x)$$

$$\mathrm{T}_{ac} = \mathrm{T}_a \cup \{\varphi_7\}$$

Domínios de integridade

$$\varphi_8 := \forall x \forall y(x \cdot y = 0 \rightarrow (x = 0) \vee (y = 0))$$

$$\mathrm{T}_d = \mathrm{T}_{ac} \cup \{\varphi_8\}$$

Corpos

$$\varphi_9 := \forall x(x \neq 0 \rightarrow \exists y(x \cdot y = 1))$$

$$\mathrm{T}_c = \mathrm{T}_{ac} \cup \{\varphi_9\}$$

Corpos algebricamente fechados

$$\mu_n := \forall a_0 \ldots \forall a_{n-1} \exists x \left(x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i = 0 \right)$$

$$CAF = \mathrm{T}_c \cup \{\mu_n ; n \in \mathbb{N}^*\}$$

Corpos algebricamente fechados de característica p

$$\psi_p := \forall x \underbrace{x + \ldots + x}_{p \ vezes} = 0$$

Se p é primo

$$CAF_p = CAF \cup \{\psi_p\}$$

Se $p = 0$

$$CAF_0 = CAF \cup \{\neg\psi_p ; p > 0\}$$

Exemplo 2.1.11 *Corpos ordenados* $\quad \mathcal{L}_{ao} = \mathcal{L}_a \cup \{<\}$

$$\begin{aligned} \varphi_1 &:= \forall x \forall y \forall z (x < y \rightarrow x + z < y + z) \\ \varphi_2 &:= \forall x \forall y \forall z ((x < y \wedge 0 < z) \rightarrow x \cdot z < y \cdot z) \end{aligned}$$

$$\mathrm{T}_{co} = \mathrm{T}_{ol} \cup \mathrm{T}_c \cup \{\varphi_1, \varphi_2\}$$

2.2 Conseqüência Lógica

Definição 2.2.1 *Sejam* T *uma* $\mathcal{L}$*-teoria e* φ *uma* $\mathcal{L}$*-sentença. Dizemos que* φ *é* conseqüência lógica *de* T*, e denotamos por* $\mathrm{T} \models \varphi$*, se* $\mathcal{M} \models \varphi$ *sempre que* $\mathcal{M} \models \mathrm{T}$*.*

Exemplo 2.2.2 *Sejam* $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{go}$ *e* $\mathrm{T} = \mathrm{T}_{gao}$*, como no exemplo 2.1.9. Então a sentença* $\varphi := \forall x(x \neq 0 \rightarrow x + x \neq 0)$ *é uma conseqüência lógica de* T*.*

Suponha $\mathcal{M} = (M, +, <, 0)$ um modelo de T, isto é, um grupo abeliano ordenado. Seja $a \in M \setminus \{0\}$, devemos mostrar que $a + a \neq 0$. Bom, temos que $a < 0$ ou $0 < a$. Se $a < 0$ então $a + a < 0 + a = a < 0$, e como $\neg(0 < 0)$, temos $a + a \neq 0$. Se $0 < a$ então $0 < a = 0 + a < a + a$, logo $a + a \neq 0$. Portanto, como tomamos $\mathcal{M}$ um modelo arbitrário de T e a sentença φ é verdadeira em $\mathcal{M}$, temos que φ é conseqüência lógica de T.

Exemplo 2.2.3 *Seja* T *a teoria de grupos onde todo elemento tem ordem* 2, *ou seja,* $\mathrm{T} = \mathrm{T}_g \cup \{\forall x(x + x = 0)\}$. *Então* $\varphi := \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 (x_1 \neq x_2 \wedge x_2 \neq x_3 \wedge x_1 \neq x_3)$ *não é consequencia lógica de* T.

Claramente $\mathbb{Z}_2$ é modelo de T, porém $\mathbb{Z}_2 \nvDash \varphi$.

Definição 2.2.4 *Sejam* T *e* T′ $\mathcal{L}$*-teorias. Dizemos que* T′ *é* conseqüência *de* T *se* $\mathrm{T} \vDash \varphi$ *para toda sentença* $\varphi \in \mathrm{T}'$, *e denotamos por* $\mathrm{T} \vDash \mathrm{T}'$. *Além disso, se* $\mathrm{T}' \vDash \mathrm{T}$, *dizemos que* T′ *é uma axiomatização de* T.

Exemplo 2.2.5 $\mathrm{T}_c \vDash \mathrm{T}_d$

Para isso basta ver que

$$\mathrm{T}_c \vDash \forall x \forall y (x \cdot y = 0 \rightarrow (x = 0) \vee (y = 0))$$

De fato, sejam $\mathcal{M} \vDash \mathrm{T}$ e $a, b \in M$ tais que $a \cdot b = 0$. Suponha que $a \neq 0$, então, como

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M} \vDash \forall x(x \cdot 1 = 1 \cdot x = x)\\
&\mathcal{M} \vDash \forall x(x \neq 0 \rightarrow \exists y(x \cdot y = 1))\\
&\mathcal{M} \vDash \forall x \forall y(x \cdot y = y \cdot x)\\
&\mathcal{M} \vDash \forall x \forall y \forall z(x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z)\\
&\mathcal{M} \vDash \forall x(x \cdot 0 = 0)
\end{aligned}$$

existe $c \in M$ tal que

$$b = 1 \cdot b = (a \cdot c) \cdot b = (c \cdot a) \cdot b = c \cdot (a \cdot b) = c \cdot 0 = 0$$

Logo $\mathcal{M} \vDash \mathrm{T}_d$ e portanto $\mathrm{T}_c \vDash \mathrm{T}_d$

2.3 Conjuntos Definíveis

Definição 2.3.1 *Seja* $\mathcal{M} = (M, \{f^{\mathcal{M}}\}_{f \in \mathcal{F}}, \{p^{\mathcal{M}}\}_{p \in \mathcal{P}}, \{c^{\mathcal{M}}\}_{c \in \mathcal{C}})$ *uma* $\mathcal{L}$*-estrutura. Dizemos que* $X \subset M^n$ *é* definível *se existem uma* $\mathcal{L}$*-fórmula* $\varphi(v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_m)$ *e* $\overline{b} \in M^m$ *tais que* $X = \{\overline{a} \in M^n; \mathcal{M} \vDash \varphi(\overline{a}, \overline{b})\}$. *Neste caso dizemos que* $\varphi(\overline{v}, \overline{b})$ define X. *Também dizemos que* X *é* A-definível *ou* definível por A *se existem uma* $\mathcal{L}$*-fórmula* $\psi(v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_l)$ *e* $\overline{d} \in A^l$, *onde* $A \subset M$, *tais que* $\psi(\overline{v}, \overline{d})$ *define* X.

Exemplo 2.3.2 *Seja $\mathcal{L}_a = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$ linguagem de anéis. Suponha $\mathcal{M} = (R, +, -, \cdot, 0, 1)$ um anel. Seja $p(X) \in R[X]$. Então $Y = \{x \in R; p(x) = 0\}$ é definível.*

Suponha
$$p(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$$
Seja $\varphi(v, w_0, \ldots, w_n)$ a fórmula

$$w_n v^n + \ldots + w_1 v + w_0 = 0$$

Então $\varphi(v, a_0, \ldots, a_n)$ define Y, logo Y é A-definível para qualquer $A \supset \{a_0, \ldots, a_n\}$.

Exemplo 2.3.3 *Suponha $\mathcal{L}_a$ como no exemplo anterior e $\mathcal{M} = (\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1)$ o corpo dos números reais. Então $Or = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2; a < b\}$ é definível.*

Seja $\varphi(x, y)$ a fórmula
$$\exists z (z \neq 0 \wedge y = x + z^2)$$
Então $a < b$ sse $\mathcal{M} \models \varphi(a, b)$, logo Or é $\emptyset$-definível.

Exemplo 2.3.4 *Sejam $\mathcal{L}_{ao}$ a linguagem dos anéis ordenados e $\mathcal{M} = (\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1)$ o corpo ordenado dos números reais. Suponha que $X \subset \mathbb{R}^n$ é A- definível. Então o fecho topológico de X também é A-definível.*

Suponha que $\varphi(\overline{v}, \overline{a})$, para algum $\overline{a} \in A^m$, define X.
Seja $\psi(\overline{v}, \overline{w})$ a fórmula

$$\forall \varepsilon \Big[\varepsilon > 0 \rightarrow \exists y_1 \ldots \exists y_n \Big(\varphi(\overline{y}, \overline{w}) \wedge \sum_{i=1}^{n} (v_i - y_i)^2 < \varepsilon \Big) \Big]$$

Então $\overline{b}$ está no fecho de X sse $\mathcal{M} \models \psi(\overline{b}, \overline{a})$. Portanto $\overline{X}$ é A-definível.

Vejamos agora uma caracterização para a definição de conjuntos definíveis.

Definição 2.3.5 *Seja $\mathcal{M}$ uma $\mathcal{L}$-estrutura. Dizemos que $\mathcal{D} = (D_n \subset \mathbb{P}(M^n); n \geq 1)$ é a menor coleção tal que:*

i. $M^n \in D_n$;

ii. *para todo símbolo funcional f n-ário de $\mathcal{L}$, o gráfico de $f^{\mathcal{M}}$ está em D_{n+1};*

iii. *para todo símbolo de predicado p n-ário de $\mathcal{L}$, $p^{\mathcal{M}} \in D_n$;*

iv. *para todo $i < j \leq n$, $\{(x_1, \ldots, x_n) \in M^n; x_i = x_j\} \in D_n$;*

v. *se $X \in D_n$, então $M \times X \in D_{n+1}$;*

vi. *cada D_n é fechado com relação ao complementar, união e intersecção;*

vii. *se $X \in D_{n+1}$ e $\pi_n : M^{n+1} \to M^n$ é a projeção definida por $\pi_n(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_n)$, então $\pi_n(X) \in D_n$;*

viii. *se $X \in D_{n+m}$ e $b \in M^m$, então $\{a \in M^n; (a, b) \in X\} \in D_n$.*

Lema 2.3.6 *Sejam $X \in D_n$ e $\alpha_n : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ uma bijeção. Então $Y = \big\{(y_1, \ldots, y_n) \in M^n; \exists x_1 \ldots \exists x_n \big(\bigwedge_{i=1}^{n} (y_i = x_{\alpha_n(i)}) \wedge (\overline{x} \in X) \big) \big\} \in D_n$.*

Demonstração

Pelo item *iv.* da definição, temos que

$$A_i = \{(\overline{y}, \overline{x}) \in M^{2n}; y_i = x_{\alpha_n(i)}\} \in D_{2n}$$

Usando o item *v.* n vezes, temos que

$$M^n \times X \in D_{2n}$$

Portanto, pelo item *vi.* e usando o item *vii.* n vezes, temos

$$\begin{aligned} Y &= \big\{(y_1, \ldots, y_n) \in M^n; \exists x_1 \ldots \exists x_n \big(\bigwedge_{i=1}^{n} (y_i = x_{\alpha_n(i)}) \wedge (\overline{x} \in X) \big) \big\} = \\ &= \pi_n \circ \ldots \circ \pi_{2n-1} \big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i \cap (M^n \times X) \big) \in D_n \end{aligned}$$

■

Teorema 2.3.7 *$X \subset M^n$ é definível se, e somente se, $X \in D_n$.*

Demonstração

Primeiro veremos que os conjuntos definíveis satisfazem as propriedades (*i.-viii.*). Como $\mathcal{D}$ é a menor coleção com tais propriedades, cada $X \in D_n$ será definível.

i. Seja $\varphi(\overline{v})$ a fórmula $v_1 = v_1$, então

$$M^n = \{\overline{x} \in M^n; x_1 = x_1\} = \{\overline{x} \in M^n; \mathcal{M} \vDash \varphi(\overline{x})\}$$

é definível;

ii. Sejam f um símbolo funcional n-ário e $\varphi(\overline{v}, w)$ a fórmula $fv_1 \dots v_n = w$, então

$$Graf(f) = \{(\overline{x}, y) \in M^{n+1}; f(\overline{x}) = y\} = \{(\overline{x}, y) \in M^{n+1}; \mathcal{M} \vDash \varphi(\overline{x}, y)\}$$

é definível;

iii. Sejam p um símbolo de predicado n-ário e $\varphi(\overline{v})$ a fórmula $pv_1 \dots v_n$, então

$$p^{\mathcal{M}} = \{\overline{x} \in M^n; \mathcal{M} \vDash \varphi(\overline{x})\}$$

é definível;

iv. Seja $\varphi_{ij}(\overline{v})$ a fórmula $v_i = v_j$, onde $i < j \leq n$, então

$$X_{ij} = \{\overline{x} \in M^n; x_i = x_j\} = \{\overline{x} \in M^n; \mathcal{M} \vDash \varphi_{ij}(\overline{x})\}$$

é definível;

v. Suponha que $X \subset M^n$ é definido pela fórmula $\varphi(v_1, \dots, v_n, \overline{a})$, para algum $\overline{a} \in M^m$, então

$$M \times X \text{ é definido pela fórmula } \psi(v_1, \dots, v_{n+1}, \overline{a}) := \varphi(v_2, \dots, v_{n+1}, \overline{a})$$

vi. Se $X \subset M^n$ é definido por $\varphi(\overline{v}, \overline{a})$ e $Y \in M^n$ é definido por $\psi(\overline{v}, \overline{b})$, então

$$\begin{array}{l} M \setminus X \text{ é definido por } \neg\varphi(\overline{v}, \overline{a}) \\ X \cap Y \text{ é definido por } \varphi(\overline{v}, \overline{a}) \wedge \psi(\overline{v}, \overline{b}) \\ X \cup Y \text{ é definido por } \varphi(\overline{v}, \overline{a}) \vee \psi(\overline{v}, \overline{b}) \end{array}$$

vii. Se $X \subset M^{n+1}$ é definido por $\varphi(v_1, \dots, v_{n+1}, \overline{a})$, então

$$\pi_n(X) \text{ é definido por } \psi(v_1, \dots, v_n, \overline{a}) := \exists v_{n+1} \varphi(v_1, \dots, v_{n+1}, \overline{a})$$

viii. Se $X \subset M^{n+m}$ é definido por $\varphi(v_1, \dots, v_{n+m}, \overline{c})$ e $\overline{b} \in M^m$, então

$$\{\overline{a} \in M^n; (\overline{a}, \overline{b}) \in X\} \text{ é definido por } \varphi(v_1, \dots, v_n, \overline{b}, \overline{c})$$

Então, se $X \in D_n$, X é definível.
Agora mostraremos que se $X \subset M^n$ é definível, então $X \in D_n$.
Primeiro vamos provar por indução sobre termos que se $t(v_1, \ldots, v_n)$ é um termo, então $Y = \{(\overline{x}, y) \in M^{n+1}; t^{\mathcal{M}}(\overline{x}) = y\} \in D_{n+1}$.

- Se t é um símbolo de constante c, então por iv. temos

$$A = \{(x, x) \in M^2\} \in D_2$$

e por $viii$. temos

$$\{c^{\mathcal{M}}\} = \{x \in M; (x, c^{\mathcal{M}}) \in A\} \in D_1$$

Aplicando n vezes v. temos

$$Y = \{(\overline{x}, y) \in M^{n+1}; t^{\mathcal{M}}(\overline{x}) = y\} = \{(\overline{x}, c^{\mathcal{M}}); \overline{x} \in M^n\} \in D_{n+1}$$

- Se t é um símbolo de variável v_j, então por i. temos

$$M^n \in D_n$$

e por iv. temos

$$Y = \{(\overline{x}, y) \in M^{n+1}; t^{\mathcal{M}}(\overline{x}) = y\} = \{(\overline{x}, x_j); \overline{x} \in M^n\} \in D_{n+1}$$

- Seja t o termo $ft_1 \ldots t_m$. Por indução, supomos que $G_i \in D_{n+1}$ onde G_i é o gráfico de $t_i^{\mathcal{M}} : M^n \to M$, $i = 1, \ldots, m$. Seja $G \in D_{m+1}$ o gráfico de $f^{\mathcal{M}}$. Então, para $i = 1, \ldots, m$, por v. temos

$$\begin{aligned} A'_i &= \{(y, z_1, \ldots, z_{i-1}, z_{i+1}, \ldots, z_m, \overline{x}, z_i) \in M^{m+n+1}; (\overline{x}, z_i) \in G_i\} = \\ &= M^m \times G_i \in D_{m+n+1} \end{aligned}$$

e

$$B' = \{(\overline{x}, \overline{z}, y) \in M^{n+m+1}; (\overline{z}, y) \in G\} = M^n \times G \in D_{n+m+1}$$

Logo, pelo lema anterior, temos

$$A_i = \{(\overline{x}, y, \overline{z}) \in M^{m+n+1}; (\overline{x}, z_i) \in G_i\} \in D_{m+n+1}$$

e

$$B \quad = \{(\overline{x}, y, \overline{z}) \in M^{m+n+1}; (\overline{z}, y) \in G\} \in D_{m+n+1}$$

Portanto, por $vi.$ temos

$$\begin{aligned} Y \quad &= \{(\overline{x}, y) \in M^{n+1}; t^{\mathcal{M}}(\overline{x}) = y\} = \\ &= \{(\overline{x}, y) \in M^{n+1}; f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}(\overline{x}), \dots, t_m^{\mathcal{M}}(\overline{x})) = y\} = \\ &= \big\{(\overline{x}, y) \in M^{n+1}; \exists z_1 \dots \exists z_m \big(\bigwedge_{i=1}^{m} (\overline{x}, z_i) \in G_i \wedge (\overline{z}, y) \in G \big) \big\} = \\ &= \pi_{n+1} \circ \dots \circ \pi_{m+n} \big(\bigcap_{i=1}^{m} A_i \cap B \big) \in D_{n+1} \end{aligned}$$

Agora, por indução sobre fórmulas, mostraremos que todo $X \subset M^n$ $\emptyset$-definível está em D_n.

- Seja φ a fórmula $t_1 = t_2$, onde t_1 e t_2 são termos. Então

$$\begin{aligned} &X = \{\overline{x} \in M^n; t_1^{\mathcal{M}}(\overline{x}) = t_2^{\mathcal{M}}(\overline{x})\} = \\ &= \{\overline{x} \in M^n; \exists y (t_1^{\mathcal{M}}(\overline{x}) = y \wedge t_2^{\mathcal{M}}(\overline{x}) = y)\} = \\ &= \pi_n(\{(\overline{x}, y) \in M^{n+1}; t_1^{\mathcal{M}}(\overline{x}) = y\} \cap \{(\overline{x}, y) \in M^{n+1}; t_2^{\mathcal{M}}(\overline{x}) = y\}) \in D_n \end{aligned}$$

- Seja φ a fórmula $pt_1 \dots t_m$, onde $p \in \mathcal{P}$ e $t_1, \dots, t_m$ são termos. Então, para $i = 1, \dots, m$, temos

$$\begin{aligned} A_i' \quad &= \{(z_1, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_m, \overline{x}, z_i) \in M^{m+n}; (t_i^{\mathcal{M}}(\overline{x}), z_i) \in G_i\} = \\ &= M^{m-1} \times G_i \in D_{m+n} \end{aligned}$$

e

$$B \quad = M^n \times p^{\mathcal{M}} \in D^{n+m}$$

Logo, pelo lema anterior, temos

$$A_i \quad = \{(\overline{x}, \overline{z}) \in M^{m+n}; (t_i^{\mathcal{M}}(\overline{x}), z_i) \in G_i\} \in D_{m+n}$$

Portanto, por $vi.$ temos

$$\begin{aligned} X \quad &= \{\overline{x} \in M^n; (t_1^{\mathcal{M}}(\overline{x}), \dots, t_m^{\mathcal{M}}(\overline{x})) \in p^{\mathcal{M}}\} = \\ &= \big\{\overline{x} \in M^n; \exists z_1 \dots \exists z_m \big(\bigwedge_{i=1}^{m} (t_i^{\mathcal{M}}(\overline{x}), z_i) \in G_i \wedge \overline{z} \in p^{\mathcal{M}} \big) \big\} = \\ &= \pi_n \circ \dots \circ \pi_{m+n-1} \big(\bigcap_{i=1}^{m} A_i \cap B \big) \in D_n \end{aligned}$$

Suponha que $\{\overline{x} \in M^n; \mathcal{M} \vDash \psi(\overline{x})\}, \{\overline{x} \in M^n; \mathcal{M} \vDash \alpha(\overline{x})\} \in D_n$. Então

- Se φ é $\neg\psi$, então

$$\begin{aligned} X &= \{\overline{x} \in M^n; \mathcal{M} \vDash \varphi(\overline{x})\} = \{\overline{x} \in M^n; \mathcal{M} \nvDash \psi(\overline{x})\} = \\ &= M^n \setminus \{\overline{x} \in M^n; \mathcal{M} \vDash \psi(\overline{x})\} \in D_n \end{aligned}$$

- Se φ é $\psi \wedge \alpha$, então

$$\begin{aligned} X &= \{\overline{x} \in M^n; \mathcal{M} \vDash \varphi(\overline{x})\} = \{\overline{x} \in M^n; \mathcal{M} \vDash \psi(\overline{x}) \text{ e } \mathcal{M} \vDash \alpha(\overline{x})\} = \\ &= \{\overline{x} \in M^n; \mathcal{M} \vDash \psi(\overline{x})\} \cap \{\overline{x} \in M^n; \mathcal{M} \vDash \alpha(\overline{x})\} \in D_n \end{aligned}$$

- Se $\varphi(v_1, \ldots, v_{n-1})$ é $\exists v_n \psi(v_1, \ldots, v_n)$, então

$$\begin{aligned} X &= \{\overline{x} \in M^{n-1}; \mathcal{M} \vDash \varphi(\overline{x})\} = \\ &= \{\overline{x} \in M^{n-1}; \text{ existe } y \in M \text{ tal que } \mathcal{M} \vDash \psi(\overline{x}, y)\} = \\ &= \pi_{n-1}(\{(\overline{x}, y) \in M^n; \mathcal{M} \vDash \psi(\overline{x}, y)\}) \in D_{n-1} \end{aligned}$$

Portanto temos que todos os conjuntos $\emptyset$-definíveis estão em $\mathcal{D}$. Agora suponha $X \subset M^n$ definido por $\varphi(\overline{v}, \overline{a})$, onde $\overline{a} \in M^m$. Então, seja $Y \subset M^{n+m}$ definido por $\varphi(\overline{v}, \overline{w})$. Note que Y é $\emptyset$-definível, logo $Y \in D_{n+m}$. Assim, pelo item *viii*.

$$X = \{\overline{x} \in M^n; \mathcal{M} \vDash \varphi(\overline{x}, \overline{a})\} = \{\overline{x} \in M^n; (\overline{x}, \overline{a}) \in Y\} \in D_n$$

■

Proposição 2.3.8 *Seja $\mathcal{M}$ uma $\mathcal{L}$-estrutura. Se $X \subset M^n$ é A-definível, então, para qualquer $\mathcal{L}$-automorfismo σ tal que $\sigma(a) = a$ para todo $a \in A$, $\sigma(X) = X$.*

Demonstração

Suponha que $\psi(\overline{v}, \overline{a})$ define X, onde $\overline{a} \in A^m$. Seja σ um automorfismo de $\mathcal{M}$ tal que $\sigma(\overline{a}) = \overline{a}$ e seja $\overline{b} \in M^n$. Em particular σ é um isomorfismo, então

$$\mathcal{M} \vDash \psi(\overline{b}, \overline{a}) \Leftrightarrow \mathcal{M} \vDash \psi(\sigma(\overline{b}), \sigma(\overline{a})) \Leftrightarrow \mathcal{M} \vDash \psi(\sigma(\overline{b}), \overline{a})$$

Portanto $\overline{b} \in X$ sse $\sigma(\overline{b}) \in X$.

■

Exemplo 2.3.9 *Contra-exemplo da recíproca da proposição anterior.*

Seja $\sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ um automorfismo.

Então devemos ter que $\sigma(0) = 0$ e $\sigma(1) = 1$.

Pelas propriedades de homomorfismo temos que $\sigma(a) = a$ para todo $a \in \mathbb{Z}$, pois se $a > 0$,

$$\sigma(a) = \sigma(\underbrace{1 + \ldots + 1}_{a\times}) = \underbrace{\sigma(1) + \ldots + \sigma(1)}_{a\times} = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{a\times} = a$$

se $a < 0$,

$$\sigma(a) = -\sigma(-a) = -(-a) = a$$

Portanto qualquer automorfismo de $\mathbb{C}$ fixa $\mathbb{Z}$, porém veremos no corolário 5.3.4 que $\mathbb{Z}$ não é definível em $\mathbb{C}$.

Corolário 2.3.10 *O conjunto dos números reais não é definível no corpo dos números complexos.*

Demonstração

Suponha que $\mathbb{R}$ seja definível em $\mathbb{C}$. Então existe um conjunto $A \subset \mathbb{C}$ finito tal que $\mathbb{R}$ seja A-definível. Seja $K_1 = \mathbb{K}[A]$ o corpo gerado por A e seja $\eta_1 : K_1 \to K_1$ igual à identidade. Como A é finito, K_1 e seu fecho algébrico são enumeráveis. Assim, existem $r, s \in \mathbb{C}$ com $r \in \mathbb{R}$ e $s \notin \mathbb{R}$ tais que r e s sejam algebricamente independentes sobre K_1.

Tome $K_2 = K_1(r, s)$. Pelo teorema A.2.3, podemos estender η_1 para um isomorfismo $\eta_2 : K_2 \to K_2$ onde $\eta_2(r) = s$ e $\eta_2(s) = r$. Pelo teorema A.2.12, podemos estender η_2 para um isomorfismo $\eta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Como supomos que $\mathbb{R}$ é A-definível em $\mathbb{C}$ e η fixa todos os pontos de A, pela proposição anterior, temos que $\eta(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, o que é um absurdo, pois $\eta(r) = \eta_2(r) = s \notin \mathbb{R}$. Portanto $\mathbb{R}$ não é definível em $\mathbb{C}$.

■

Capítulo 3

Teorema da Compacidade

Sejam $\mathcal{L}$ uma linguagem e T uma $\mathcal{L}$-teoria. Então T é satisfatível se, e somente se, todo subconjunto finito de T é uma teoria satisfatível. Claramente todo modelo de T é modelo de qualquer subconjunto de T. Veremos agora, duas formas distintas de provar a outra implicação.

3.1 Construção de Henkin

Fixe $\mathcal{L}$ uma linguagem.

Definição 3.1.1 *Seja* T *uma* $\mathcal{L}$*-teoria. Então*

- T *é* finitamente satisfatível *se todo subconjunto finito de* T *é satisfatível.*
- T *tem a* propriedade do testemunho *se, sempre que* $\varphi(v)$ *é uma fórmula com uma variável livre, existe um símbolo de constante* $c \in \mathcal{L}$ *tal que* $\mathrm{T} \models (\exists v \varphi(v)) \rightarrow \varphi(c)$*.*
- T *é* maximal *se para toda fórmula* φ*, ou* $\varphi \in \mathrm{T}$ *ou* $\neg\varphi \in \mathrm{T}$*.*

Lema 3.1.2 *Seja* T *uma* $\mathcal{L}$*-teoria maximal. Então* $\varphi \in \mathrm{T}$ *se, e somente se,* $\mathrm{T} \models \varphi$*.*

Demonstração

Se $\varphi \in \mathrm{T}$, obviamente $\mathrm{T} \models \varphi$.

Agora, suponha que $\mathrm{T} \models \varphi$ e $\varphi \notin \mathrm{T}$, então, pela maximalidade de T, $\neg\varphi \in \mathrm{T}$. Assim, para todo $\mathcal{M} \models \mathrm{T}$, $\mathcal{M} \models \neg\varphi$ o que implica $\mathcal{M} \not\models \varphi$, absurdo, visto que $\mathrm{T} \models \varphi \Rightarrow \mathcal{M} \models \varphi$.

■

Lema 3.1.3 *Seja* T *uma* $\mathcal{L}$*-teoria maximal e finitamente satisfatível. Se* $\Delta \subset \mathrm{T}$ *é finito e* $\Delta \vDash \varphi$ *então* $\varphi \in \mathrm{T}$.

Demonstração

Suponha que $\varphi \notin \mathrm{T}$, como T é maximal, $\neg\varphi \in \mathrm{T}$. Mas então $\Delta \cup \{\neg\varphi\}$ é finito e insatisfatível, pois se $\mathcal{M}$ fosse modelo de $\Delta \cup \{\neg\varphi\}$, também o seria de Δ e logo $\mathcal{M} \vDash \varphi$ o que implica $\mathcal{M} \nvDash \neg\varphi$, absurdo. Portanto $\varphi \in \mathrm{T}$.

■

Lema 3.1.4 *Seja* T *uma* $\mathcal{L}$*-teoria maximal, finitamente satisfatível com a propriedade do testemunho. Então* T *é satisfatível. Além disso, se* κ *é um cardinal e* $\mathcal{L}$ *tem no máximo* κ *símbolos de constante, então existe* $\mathcal{M} \vDash \mathrm{T}$ *com* $|\mathcal{M}| \leq \kappa$.

Demonstração

Seja $\mathcal{C}$ o conjunto de símbolos de constante de $\mathcal{L}$. Dados $c, d \in \mathcal{C}$, dizemos que $c \sim d$ sse $c = d \in \mathrm{T}$.

Note que $\sim$ é uma relação de equivalência. De fato, obviamente $c = c \in \mathrm{T}$, e se $c = d, d = e \in \mathrm{T}$, então, pelo lema 3.1.3, $d = c, c = e \in \mathrm{T}$, visto que $\{c = d\} \vDash d = c$ e $\{c = d \wedge d = e\} \vDash c = e$.

O universo de nosso modelo será $M = \mathcal{C}/\sim$. Claramente $|M| \leq \kappa$.

Denotaremos por c^* a classe de equivalência de c e interpretaremos c pela classe de equivalência, isto é, $c^{\mathcal{M}} = c^*$.

Seja p um símbolo de predicado n-ário de $\mathcal{L}$. Suponha $c_1, \ldots, c_n, d_1, \ldots, d_n \in \mathcal{C}$ e $c_i \sim d_i$ para $i = 1, \ldots, n$, então, como $c_i = d_i \in \mathrm{T}$, pelo lema 3.1.3 temos que

$$pc_1 \ldots c_n \in \mathrm{T} \Rightarrow \left\{ \bigwedge_{i=1}^{n} c_i = d_i, pc_1 \ldots c_n \right\} \vDash pd_1 \ldots d_n \Rightarrow pd_1 \ldots d_n \in \mathrm{T}$$

$$pd_1 \ldots d_n \in \mathrm{T} \Rightarrow \left\{ \bigwedge_{i=1}^{n} c_i = d_i, pd_1 \ldots d_n \right\} \vDash pc_1 \ldots c_n \Rightarrow pc_1 \ldots c_n \in \mathrm{T}$$

Portanto $pc_1 \ldots c_n \in \mathrm{T}$ sse $pd_1 \ldots d_n \in \mathrm{T}$.

Interpretaremos p como

$$p^{\mathcal{M}} = \{(c_1^*, \ldots, c_n^*); pc_1 \ldots c_n \in \mathrm{T}\}$$

Sejam f um símbolo funcional n-ário de $\mathcal{L}$ e $c_1, \ldots c_n \in \mathcal{C}$, como T tem a propriedade do testemunho e $\emptyset \models \exists v f c_1 \ldots c_n = v$, pelo lema 3.1.3, existe $c_{n+1} \in \mathcal{C}$ tal que $f c_1 \ldots c_n = c_{n+1} \in \mathrm{T}$.

$$\mathrm{T} \supset \{\exists v f c_1 \ldots c_n = v \rightarrow f c_1 \ldots c_n = c_{n+1}\} \models f c_1 \ldots c_n = c_{n+1}$$

Como anteriormente, se $d_1, \ldots, d_{n+1} \in \mathcal{C}$ e $c_i = d_i \in \mathrm{T}$, para $i = 1, \ldots, n+1$, então $f d_1 \ldots d_n = d_{n+1} \in \mathrm{T}$. Além disso, por f ser um símbolo funcional, se $e_1, \ldots, e_{n+1} \in \mathcal{C}$, $c_i = e_i \in \mathrm{T}$, para $i = 1, \ldots, n$, e $f e_1 \ldots e_n = e_{n+1} \in \mathrm{T}$, então $c_{n+1} = e_{n+1} \in \mathrm{T}$.

Assim, interpretaremos f como a função $f^{\mathcal{M}} : M^n \rightarrow M$ definida por

$$f^{\mathcal{M}}(c_1^*, \ldots, c_n^*) = d^* \text{ sse } f c_1 \ldots c_n = d \in \mathrm{T}$$

Seja t um termo com n variáveis livres $v_1, \ldots, v_n$. Mostraremos que, se $c_1, \ldots, c_n, d \in \mathcal{C}$, então $t(c_1, \ldots, c_n) = d \in \mathrm{T}$ sse $t^{\mathcal{M}}(c_1^*, \ldots, c_n^*) = d^*$.

Suponha que $t(c_1, \ldots, c_n) = d \in \mathrm{T}$. Veremos por indução sobre termos que $t^{\mathcal{M}}(c_1^*, \ldots, c_n^*) = d^*$.

i. Se t é um símbolo de constante $c \in \mathcal{C}$, então $c = d \in \mathrm{T}$ e $t^{\mathcal{M}}(\bar{c}^*) = c^* = d^*$.

ii. Se t é um símbolo de variável v_i, então $c_i = d \in \mathrm{T}$ e $t^{\mathcal{M}}(\bar{c}^*) = c_i^* = d^*$.

iii. Se t é o termo $f t_1 \ldots t_m$, onde f é um símbolo funcional m-ário de $\mathcal{L}$ e, para $i = 1, \ldots, m$, t_i é um termo tal que, se $c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}, d_i \in \mathcal{C}$, então $t_i(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}) = d_i \in \mathrm{T}$ sse $t_i^{\mathcal{M}}(c_{i_1}^*, \ldots, c_{i_n}^*) = d_i^*$. Então, pela propriedade do testemunho e pelo lema 3.1.3, existem $d_1, \ldots, d_m, e \in \mathcal{C}$ tais que, para $i = 1, \ldots, m$, $t_i(c_1, \ldots, c_n) = d_i \in \mathrm{T}$, $f d_1 \ldots d_m = e \in \mathrm{T}$ e conseqüentemente $f t_1(\bar{c}) \ldots t_m(\bar{c}) = e \in \mathrm{T}$. Assim, pela hipótese de indução, para $i = 1, \ldots, m$, $t_i^{\mathcal{M}}(c_1^*, \ldots, c_n^*) = d_i^*$, $f^{\mathcal{M}}(d_1^*, \ldots, d_m^*) = e^*$ e portanto $t^{\mathcal{M}}(c_1^*, \ldots, c_n^*) = e^*$. Mas $t(c_1, \ldots, c_n) = d \in \mathrm{T}$ e, novamente pelo lema 3.1.3, $d = e \in \mathrm{T}$. Portanto $d^* = e^*$ e $t^{\mathcal{M}}(c_1^*, \ldots, c_n^*) = d^*$.

Agora suponha que $t^{\mathcal{M}}(c_1^*, \ldots, c_n^*) = d^*$. Então, pela propriedade do testemunho e pelo lema 3.1.3, existe $e \in \mathcal{C}$ tal que $t(c_1, \ldots, c_n) = e \in \mathrm{T}$. Pelo que acabamos de mostrar, $t^{\mathcal{M}}(c_1^*, \ldots, c_n^*) = e^*$, logo $d^* = e^*$, conseqüentemente $d = e \in \mathrm{T}$. Portanto, pelo lema 3.1.3, $t(c_1, \ldots, c_n) = d \in \mathrm{T}$.

Sejam $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ uma $\mathcal{L}$-fórmula e $c_1, \ldots, c_n \in \mathcal{C}$. Provaremos por indução sobre fórmulas que $\mathcal{M} \models \varphi(c_1^*, \ldots, c_n^*)$ sse $\varphi(c_1, \ldots, c_n) \in \mathrm{T}$.

i. Se φ é igual à $t_1 = t_2$, onde t_1 e t_2 são termos. Então, pela propriedade do testemunho e pelo lema 3.1.3, existem $d_1, d_2 \in \mathcal{C}$ tais que $t_1(c_1, \ldots, c_n) = d_1 \in \mathrm{T}$ e $t_2(c_1, \ldots, c_n) = d_2 \in \mathrm{T}$, logo $t_1^{\mathcal{M}}(c_1^*, \ldots, c_n^*) = d_1^*$ e $t_2^{\mathcal{M}}(c_1^*, \ldots, c_n^*) = d_2^*$. Assim, pelo lema 3.1.3,

$$\mathcal{M} \vDash \varphi(c_1^*, \ldots, c_n^*) \Leftrightarrow d_1^* = d_2^* \Leftrightarrow d_1 = d_2 \in \mathrm{T} \Leftrightarrow t_1(\overline{c}) = t_2(\overline{c}) \in \mathrm{T}$$

ii. Se φ é igual à $pt_1 \ldots t_m$, onde p é um símbolo de predicado m-ário e $t_1, \ldots, t_m$ são termos. Então pela propriedade do testemunho e pelo lema 3.1.3, existem $d_1, \ldots, d_m \in \mathcal{C}$ tais que, para $i = 1, \ldots, m$, $t_i(\overline{c}) = d_i \in \mathrm{T}$ e portanto $t_i^{\mathcal{M}}(\overline{c}^*) = d_i^*$. Logo

$$\begin{aligned}\mathcal{M} \vDash \varphi(c_1^*, \ldots, c_n^*) \ &\Leftrightarrow (d_1^*, \ldots, d_m^*) \in p^{\mathcal{M}} \Leftrightarrow pd_1 \ldots d_m \in \mathrm{T} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow pt_1(\overline{c}) \ldots t_m(\overline{c}) \in \mathrm{T}\end{aligned}$$

iii. Se $\varphi(\overline{v})$ é igual à $\neg\psi(\overline{v})$, onde dados $d_1, \ldots, d_n \in \mathcal{C}$, $\mathcal{M} \vDash \psi(d_1^*, \ldots, d_n^*)$ sse $\psi(d_1, \ldots, d_n) \in \mathrm{T}$. Então

$$\begin{aligned}\mathcal{M} \vDash \varphi(c_1^*, \ldots c_n^*) \ &\Leftrightarrow \mathcal{M} \vDash \neg\psi(c_1^*, \ldots c_n^*) \Leftrightarrow \mathcal{M} \nvDash \psi(c_1^*, \ldots c_n^*) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \psi(\overline{c}) \notin \mathrm{T} \overset{\dagger}{\Leftrightarrow} \neg\psi(\overline{c}) \in \mathrm{T}\end{aligned}$$

$\dagger(\Rightarrow)$ maximalidade de T.

$\dagger(\Leftarrow)$ T é finitamente satisfatível e $\{\psi(\overline{c}), \neg\psi(\overline{c})\}$ não possui modelo.

iv. Se $\varphi(\overline{v})$ é igual à $\psi_1(\overline{v}) \wedge \psi_2(\overline{v})$, onde dados $d_1, \ldots, d_n \in \mathcal{C}$, para $i = 1, 2$, $\mathcal{M} \vDash \psi_i(d_1^*, \ldots, d_n^*)$ sse $\psi_i(d_1, \ldots, d_n) \in \mathrm{T}$. Então, pelo lema 3.1.3,

$$\begin{aligned}\mathcal{M} \vDash \varphi(c_1^*, \ldots c_n^*) \ &\Leftrightarrow \mathcal{M} \vDash \psi_1(c_1^*, \ldots c_n^*) \text{ e } \mathcal{M} \vDash \psi_2(c_1^*, \ldots c_n^*) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \psi_1(\overline{c}) \in \mathrm{T} \text{ e } \psi_2(\overline{c}) \in \mathrm{T} \Leftrightarrow \psi_1(\overline{c}) \wedge \psi_2(\overline{c}) \in \mathrm{T}\end{aligned}$$

v. Se $\varphi(\overline{v})$ é igual à $\exists w\psi(\overline{v}, w)$, onde dados $d_1, \ldots, d_{n+1} \in \mathcal{C}$, temos que $\mathcal{M} \vDash \psi(d_1^*, \ldots, d_{n+1}^*)$ sse $\psi(d_1, \ldots, d_{n+1}) \in \mathrm{T}$. Então

$$\begin{aligned}\mathcal{M} \vDash \varphi(c_1^*, \ldots c_n^*) \ &\Leftrightarrow \text{existe } d \in \mathcal{C} \text{ tal que } \mathcal{M} \vDash \psi(c_1^*, \ldots c_n^*, d^*) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \text{existe } d \in \mathcal{C} \text{ tal que } \psi(\overline{c}, d) \in \mathrm{T} \overset{\dagger}{\Leftrightarrow} \exists w\psi(\overline{c}, w) \in \mathrm{T}\end{aligned}$$

$\dagger(\Rightarrow)$ lema 3.1.3.

$\dagger(\Leftarrow)$ propriedade do testemunho.

Portanto $\mathcal{M} \vDash \mathrm{T}$.

■

Lema 3.1.5 *Seja* T *uma* $\mathcal{L}$*-teoria finitamente satisfatível. Então existem* $\mathcal{L}^* \supset \mathcal{L}$ *e* $\mathrm{T}^* \supset \mathrm{T}$ *uma* $\mathcal{L}^*$*-teoria finitamente satisfatível tal que qualquer* $\mathcal{L}^*$*-teoria estendendo* T^* *tem a propriedade do testemunho. Pode-se escolher* $\mathcal{L}^*$ *tal que* $|\mathcal{L}^*| = |\mathcal{L}| + \aleph_0$.

Demonstração

Mostraremos primeiro que existem uma linguagem $\mathcal{L}_1 \supset \mathcal{L}$ e uma $\mathcal{L}_1$-teoria finitamente satisfatível $\mathrm{T}_1 \supset \mathrm{T}$ tal que, para qualquer $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(v)$, existe um símbolo de constante $c \in \mathcal{L}_1$ tal que $\mathrm{T}_1 \vDash \exists v\varphi(v) \to \varphi(c)$.

Para cada $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(v)$, seja c_φ um novo símbolo de constante. Defina $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} \cup \{c_\varphi; \varphi(v) \text{ é uma } \mathcal{L}\text{-fórmula}\}$. Para cada $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(v)$, seja θ_φ a $\mathcal{L}_1$-sentença $\exists v\varphi(v) \to \varphi(c_\varphi)$. Defina $\mathrm{T}_1 = \mathrm{T} \cup \{\theta_\varphi; \varphi(v) \text{ é uma } \mathcal{L}\text{-fórmula}\}$.

Vejamos que T_1 é finitamente satisfatível.
Seja $\Delta \subset \mathrm{T}_1$ finito. Então $\Delta = \Delta_0 \cup \{\theta_{\varphi_1}, \ldots, \theta_{\varphi_n}\}$, onde $\Delta_0 \subset \mathrm{T}$ é finito e, para $i = 1, \ldots, n$, $\varphi_i(v)$ é $\mathcal{L}$-fórmula. Como T é finitamente satisfatível, existe uma $\mathcal{L}$-estrutura $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \vDash \Delta_0$. Seja $\mathcal{M}'$ uma $\mathcal{L}_1$-estrutura com o mesmo universo de $\mathcal{M}$ tal que a interpretação dos símbolos de $\mathcal{L}$ em $\mathcal{M}'$ seja a mesma feita em $\mathcal{M}$. Assim, $\mathcal{M}' \vDash \Delta_0$. Para cada $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(v)$, interpretaremos o símbolo $c_\varphi \in \mathcal{L}_1 \setminus \mathcal{L}$ em $\mathcal{M}'$. Se $\mathcal{M} \vDash \exists v\varphi(v)$, escolha um elemento $a \in M$ tal que $\mathcal{M} \vDash \varphi(a)$ e defina $c_\varphi^{\mathcal{M}'} = a$, caso contrário defina $c_\varphi^{\mathcal{M}'}$ um elemento qualquer de M. Então, para $i = 1, \ldots, n$,

$$\mathcal{M}' \vDash \theta_{\varphi_i} \Leftrightarrow \mathcal{M}' \vDash \exists v\varphi_i(v) \to \varphi_i(c_{\varphi_i}) \Leftrightarrow \mathcal{M}' \nvDash \exists v\varphi_i(v) \text{ ou } \mathcal{M}' \vDash \varphi_i(c_{\varphi_i})$$

Logo $\mathcal{M}' \vDash \Delta$ e portanto T_1 é finitamente satisfatível.

Analogamente construímos uma seqüência de linguagens $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_2 \subset \ldots$ e uma seqüência de $\mathcal{L}_i$-teorias $\mathrm{T} \subset \mathrm{T}_1 \subset \mathrm{T}_2 \subset \ldots$ tal que se $\varphi(v)$ é uma $\mathcal{L}_i$-fórmula, então existe um símbolo de constante $c_\varphi \in \mathcal{L}_{i+1}$ tal que $\mathrm{T}_{i+1} \vDash \exists v\varphi(v) \to \varphi(c_\varphi)$.

Seja $\mathcal{L}^* = \cup\mathcal{L}_i$ e $\mathrm{T}^* = \cup\mathrm{T}_i$. Por construção, se $\varphi(v)$ é uma $\mathcal{L}^*$-fórmula, $\varphi(v)$ é uma $\mathcal{L}_i$-fórmula, para algum i, logo $\mathrm{T}_{i+1} \vDash \exists v\varphi(v) \to \varphi(c_\varphi)$ e portanto T^* tem a propriedade do testemunho. Observe que qualquer $\mathcal{L}^*$-teoria estendendo T^* terá a mesma propriedade. Agora, se $\Delta \subset \mathrm{T}^*$ é finito, então $\Delta \subset \mathrm{T}_i$ para algum i. Portanto Δ é satisfatível e T^* é finitamente satisfatível. Finalmente, se $|\mathcal{L}_i|$ é o número de símbolos de $\mathcal{L}_i$, então $\mathcal{L}_i$ possui $|\mathcal{L}_i| + \aleph_0$ $\mathcal{L}_i$-fórmulas, logo, por indução, $|\mathcal{L}^*| = |\mathcal{L}| + \aleph_0$.

■

Lema 3.1.6 *Sejam* T *uma* $\mathcal{L}$*-teoria e* φ *uma* $\mathcal{L}$*-sentença. Então,* $\mathrm{T} \vDash \varphi$ *se, e somente se,* $\mathrm{T} \cup \{\neg\varphi\}$ *não é satisfatível.*

Demonstração

Se $\mathrm{T} \vDash \varphi$, então dado $\mathcal{M} \vDash \mathrm{T}$, $\mathcal{M} \vDash \varphi$. Suponha que existe uma estrutura $\mathcal{N}$ tal que $\mathcal{N} \vDash \mathrm{T} \cup \{\neg\varphi\}$, então $\mathcal{N} \vDash \mathrm{T}$ e $\mathcal{N} \vDash \neg\varphi$, absurdo. Logo $\mathrm{T} \cup \{\neg\varphi\}$ não é satisfatível.

Por outro lado, se $\mathrm{T} \cup \{\neg\varphi\}$ não é satisfatível, então não existe modelo $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \vDash \mathrm{T} \cup \{\neg\varphi\}$, logo dado $\mathcal{N}$ tal que $\mathcal{N} \vDash \mathrm{T}$, $\mathcal{N} \nvDash \neg\varphi$, isto é, dado $\mathcal{N}$ tal que $\mathcal{N} \vDash \mathrm{T}$, $\mathcal{N} \vDash \varphi$. Portanto $\mathrm{T} \vDash \varphi$.

■

Lema 3.1.7 *Sejam* T *uma* $\mathcal{L}$*-teoria finitamente satisfatível e* φ *uma* $\mathcal{L}$*-sentença. Então,* $\mathrm{T} \cup \{\varphi\}$ *ou* $\mathrm{T} \cup \{\neg\varphi\}$ *é finitamente satisfatível.*

Demonstração

Suponha que $\mathrm{T} \cup \{\varphi\}$ não seja finitamente satisfatível. Então existe $\Delta \subset \mathrm{T}$ finito tal que $\Delta \cup \{\varphi\}$ não seja satisfatível, e pelo lema anterior, $\Delta \vDash \neg\varphi$. Seja $\Sigma \subset \mathrm{T}$ finito. Como $\Delta \cup \Sigma$ é satisfatível e $\Delta \cup \Sigma \vDash \neg\varphi$, dado $\mathcal{M}$ um modelo de $\Delta \cup \Sigma$, temos que $\mathcal{M} \vDash \neg\varphi$ e $\mathcal{M} \vDash \Sigma$ o que implica $\mathcal{M} \vDash \Sigma \cup \{\neg\varphi\}$, logo $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ é satisfatível. Portando $\mathrm{T} \cup \{\neg\varphi\}$ é finitamente satisfatível.

■

Corolário 3.1.8 *Seja* T *uma* $\mathcal{L}$*-teoria finitamente satisfatível. Então existe uma* $\mathcal{L}$*-teoria maximal finitamente satisfatível* $\mathrm{T}' \supset \mathrm{T}$.

Demonstração

Seja $\mathcal{X} = \{\Sigma \supset \mathrm{T}; \Sigma \text{ é finitamente satisfatível}\}$. Considere a inclusão como ordem parcial de $\mathcal{X}$. Seja $C \subset \mathcal{X}$ uma cadeia e tome $\mathrm{T}_C = \bigcup_{\Sigma \in C} \Sigma$, se $\Delta \subset \mathrm{T}_C$ é finito, então $\Delta \subset \Sigma$ para algum $\Sigma \in C$, como Σ é finitamente satisfatível, Δ é satisfatível e portanto T_C é finitamente satisfatível. Claramente $\Sigma \subset \mathrm{T}_C$, para todo $\Sigma \in C$, e $\mathrm{T} \subset \mathrm{T}_C$. Então, toda cadeia de $\mathcal{X}$ tem um limitante superior. Pelo lema de Zorn, existe um elemento maximal $\mathrm{T}' \in \mathcal{X}$, com respeito à ordem parcial.

Pelo lema anterior, $T' \cup \{\varphi\}$ ou $T' \cup \{\neg\varphi\}$ é finitamente satisfatível. Como T' é maximal em relação à ordem, $\varphi \in T'$ ou $\neg\varphi \in T'$. Portanto T' é uma teoria maximal.

■

Teorema 3.1.9 (Compacidade) *Sejam* T *uma* $\mathcal{L}$*-teoria finitamente satisfatível e* κ *um cardinal infinito com* $\kappa \geq |\mathcal{L}|$*. Então* T *tem um modelo com cardinalidade no máximo* κ*.*

Demonstração

Pelo lema 3.1.5, existem uma linguagem $\mathcal{L}^* \supset \mathcal{L}$ e $T^* \supset T$ uma $\mathcal{L}^*$-teoria finitamente satisfatível tais que, qualquer $\mathcal{L}^*$-teoria que estenda T^* tem a propriedade do testemunho e a cardinalidade de $\mathcal{L}^*$ é no máximo κ. Pelo corolário 3.1.8, existe uma $\mathcal{L}^*$-teoria $T' \supset T^*$ maximal finitamente satisfatível. Como T' tem a propriedade do testemunho, o lema 3.1.4 implica que existe uma $\mathcal{L}^*$-estrutura $\mathcal{M}'$ tal que $\mathcal{M}' \models T'$ e $|\mathcal{M}'| \leq \kappa$. Mas $T \subset T'$, então $\mathcal{M}' \models T$, e como T só depende dos símbolos de $\mathcal{L}$, podemos tomar $\mathcal{M}$ uma $\mathcal{L}$-estrutura com o mesmo universo de $\mathcal{M}'$ tal que $\mathcal{M} \models T$.

■

Corolário 3.1.10 *Sejam* T *uma* $\mathcal{L}$*-teoria e* φ *uma* $\mathcal{L}$*-sentença tais que* $T \models \varphi$*. Então existe* $\Delta \subset T$ *finito tal que* $\Delta \models \varphi$*.*

Demonstração

Se $T \models \varphi$, então, pelo lema 3.1.6, $T \cup \{\neg\varphi\}$ não é satisfatível. Logo, pelo teorema anterior, $T \cup \{\neg\varphi\}$ não é finitamente satisfatível. Portanto existe $\Delta \subset T$ finito tal que $\Delta \cup \{\neg\varphi\}$ não é satisfatível, e novamente pelo lema 3.1.6, $\Delta \models \varphi$.

■

Observe que o corolário anterior é equivalente ao teorema da compacidade. Vimos que o teorema implica no corolário. Agora se T não é satisfatível, então $T \models \forall v(v \neq v)$, mas pelo corolário, existe $\Delta \subset T$ finito tal que $\Delta \models \forall v(v \neq v)$ e portando Δ não é satisfatível, conseqüentemente T não é finitamente satisfatível.

Proposição 3.1.11 *Seja* T *uma teoria com modelos finitos arbitrariamente grandes. Então* T *tem modelo infinito.*

Demonstração

Para $n \geq 2$, seja φ_n a sentença

$$\exists v_1 \ldots \exists v_n \bigwedge_{i<j} v_i \neq v_j$$

Tome

$$\mathrm{T}^* = \mathrm{T} \cup \{\varphi_n; n = 2, 3, \ldots\}$$

Observe que todo modelo de T^*, se existir, é necessariamente infinito.

Seja $\Delta \subset \mathrm{T}^*$ finito, então

$$\Delta \subset \mathrm{T} \cup \{\varphi_2, \ldots, \varphi_m\}$$

Como T tem modelos finitos arbitrariamente grandes, basta tomar um destes com cardinalidade maior que m. Assim Δ é satisfatível e portanto T^* é finitamente satisfatível. Logo, pelo teorema da compacidade, T^* é satisfatível. Assim, como $\mathrm{T} \subset \mathrm{T}^*$, T tem modelo com cardinalidade infinita.

■

3.2 Ultrafiltros

Definição 3.2.1 *Seja I um conjunto. Um* filtro *sobre I é uma coleção $D \subset \mathbb{P}(I)$ tal que:*

i. $I \in D$ e $\emptyset \notin D$;

ii. se $A, B \in D$, então $A \cap B \in D$;

iii. se $A \in D$ e $A \subset B \subset I$, então $B \in D$.

Proposição 3.2.2 *Sejam κ um cardinal infinito e I um conjunto com $|I| \geq \kappa$. Então $D = \{X \subset I; |I \setminus X| < \kappa\}$ é um filtro. Se $\kappa = \aleph_0$, dizemos que D é um* filtro de Frechet.

Demonstração

i. $|I \setminus I| = 0 < \kappa$, logo $I \in D$
$|I \setminus \emptyset| = |I| \geq \kappa$, logo $\emptyset \notin D$

ii. Sejam $A, B \in D$, então $|I \setminus A| < \kappa$ e $|I \setminus B| < \kappa$. Como κ é um cardinal infinito, $|I \setminus A \cup I \setminus B| < \kappa$, logo $|I \setminus (A \cap B)| < \kappa$ e portanto $A \cap B \in D$.

iii. Sejam $A \in D$ e $A \subset B \subset I$, então $I \setminus B \subset I \setminus A$, logo $|I \setminus B| \leq |I \setminus A| < \kappa$ e portanto $B \in D$.

$\blacksquare$

Lema 3.2.3 *Sejam I um conjunto e $x \in I$. Então $D = \{X \subset I; x \in X\}$ é um filtro, e o denotamos por* filtro principal.

Demonstração

i. $x \in I$, logo $I \in D$
   $x \notin \emptyset$, logo $\emptyset \notin D$

ii. Sejam $A, B \in D$, então $x \in A$ e $x \in B$, logo $x \in A \cap B$ e portanto $A \cap B \in D$.

iii. Sejam $A \in D$ e $A \subset B \subset I$, então $x \in A \subset B$ e portanto $B \in D$.

$\blacksquare$

Lema 3.2.4 *Suponha I um conjunto, D um filtro sobre I e $X \subset I$ tal que $X \notin D$. Seja $E = \{Y \subset I; Z \setminus X \subset Y$ para algum $Z \in D\}$. Então E é filtro, $D \subset E$ e $I \setminus X \in E$.*

Demonstração

Vejamos primeiramente que E é um filtro.

i. $I \in D$ e $I \setminus X \subset I$, logo $I \in E$.
   Suponha $Z \subset I$ tal que $Z \setminus X \subset \emptyset$, então $Z \setminus X = \emptyset$ o que implica $Z \subset X$, logo $Z \notin D$, pois caso contrário teriamos que $X \in D$. Portanto $\emptyset \notin E$.

ii. Sejam $A, B \in E$, então existem $Z_1, Z_2 \in D$ tais que

$$Z_1 \setminus X \subset A \text{ e } Z_2 \setminus X \subset B$$

Observe que $Z_1 \cap Z_2 \in D$ e

$$(Z_1 \cap Z_2) \setminus X = Z_1 \setminus X \cap Z_2 \setminus X \subset A \cap B$$

Logo $A \cap B \in E$.

iii. Sejam $A \in E$ e $A \subset B \subset I$, então existe $Z \in D$ tal que

$$Z \setminus X \subset A \subset B$$

Logo $B \in E$.

Agora, se $Y \in D$, então $Y \setminus X \subset Y$ o que implica $Y \in E$, logo $D \subset E$. Claramente $I \in D$ e $I \setminus X \subset I \setminus X$, portanto $I \setminus X \in E$.

■

Definição 3.2.5 *Sejam I um conjunto e D um filtro sobre I. Dizemos que D é um* ultrafiltro *se, para todo $X \subset I$, $X \in D$ ou $I \setminus X \in D$.*

Lema 3.2.6 *Todo filtro principal é um ultrafiltro.*

Demonstração

Sejam I um conjunto, $x \in I$ e $D = \{X \subset I; x \in X\}$. Suponha $Y \subset I$ tal que $Y \notin D$, então $x \notin Y$ o que implica $x \in I \setminus Y$, logo $I \setminus Y \in D$. Portanto D é ultrafiltro.

■

Lema 3.2.7 *Sejam I um conjunto e D um filtro sobre I. Então existe um ultrafiltro U sobre I tal que $D \subset U$.*

Demonstração

Seja $\mathcal{X} = \{F \subset \mathbb{P}(I); D \subset F \text{ e } F \text{ é filtro}\}$. Considere a inclusão como ordem parcial de $\mathcal{X}$. Seja $C \subset \mathcal{X}$ uma cadeia e tome $F_C = \bigcup_{F \in C} F$. Obviamente $D \subset F_C$. Vejamos que F_C é um filtro.

i. $I \in F$ para todo $F \in C$, logo $I \in F_C$.
$\emptyset \notin F$ para todo $F \in C$, logo $\emptyset \notin F_C$.

ii. Sejam $A, B \in F_C$, então existe $F \in C$ tal que $A, B \in F$, o que implica $A \cap B \in F \subset F_C$.

iii. Sejam $A \in F_C$ e $A \subset B \subset I$, então existe $F \in C$ tal que $A \in F$, logo $B \in F \subset F_C$.

Então, pelo lema de Zorn, existe um elemento maximal $U \in \mathcal{X}$.

Vejamos agora que U é ultrafiltro. Suponha $X \subset I$ tal que $X \notin U$ e tome $E = \{Y \subset I; Z \setminus X \subset Y$ para algum $Z \in U\}$. Pelo lema 3.2.4 temos que E é filtro, $U \subset E$ e $I \setminus X \in E$. Observe que $D \subset E$, visto que $D \subset U$. Então $E \in \mathcal{X}$ e como U é elemento maximal de $\mathcal{X}$, $U = E$. Logo $I \setminus X \in U$ e portanto U é ultrafiltro.

■

Corolário 3.2.8 *Se D é um filtro de Frechet sobre I, então U é um ultrafiltro não principal.*

Demonstração

Seja $x \in I$, como D é um filtro de Frechet, $I \setminus \{x\} \in D \subset U$. Portanto U é não principal.

■

3.3 Ultraprodutos

Sejam I um conjunto infinito, D um ultrafiltro sobre I e $\mathcal{L}$ uma linguagem. Suponha que, para cada $i \in I$, $\mathcal{M}_i$ é uma $\mathcal{L}$-estrutura. Definiremos uma nova $\mathcal{L}$-estrutura $\mathcal{M} = \prod \mathcal{M}_i/D$, a qual chamaremos de *ultraproduto* de $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$ sobre D.

Seja
$$W = \prod_{i\in I} \mathcal{M}_i = \left\{ h : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} M_i ; h(i) \in M_i \text{ para todo } i \in I \right\}$$
Defina a relação $\sim$ sobre W por

$$h \sim g \text{ sse } \{i \in I; h(i) = g(i)\} \in D$$

Lema 3.3.1 *$\sim$ é uma relação de equivalência.*

Demonstração

Sejam $h, g, k \in W$, então

i. $\{i \in I; h(i) = h(i)\} = I \in D$, logo $h \sim h$.

ii. Se $h \sim g$, então

$$\{i \in I; g(i) = h(i)\} = \{i \in I; h(i) = g(i)\} \in D$$

Logo $g \sim h$.

iii. Se $h \sim g$ e $g \sim k$, então

$$A = \{i \in I; h(i) = g(i)\} \in D \text{ e } B = \{i \in I; g(i) = k(i)\} \in D$$

Logo
$$\{i \in I; h(i) = g(i) = k(i)\} = A \cap B \in D$$

Mas
$$\{i \in I; h(i) = g(i) = k(i)\} \subset \{i \in I; h(i) = k(i)\}$$

Então
$$\{i \in I; h(i) = k(i)\} \in D$$

Portanto $h \sim k$.

■

Definimos o universo de $\mathcal{M}$ como $M = W/\sim$. Dado $h \in W$, denotaremos sua classe por $\widehat{h}$. Agora devemos mostrar como interpretar $\mathcal{M}$ como uma $\mathcal{L}$-estrutura.

- Seja c um símbolo de constante de $\mathcal{L}$, interpretaremos $c^{\mathcal{M}}$ como a classe de $h_c \in W$ onde $h_c(i) = c^{\mathcal{M}_i}$, para todo $i \in I$.

- Seja f um símbolo funcional n-ário de $\mathcal{L}$, interpretaremos f em $\mathcal{M}$ por

$$\begin{array}{rccc} f^{\mathcal{M}}: & M^n & \longrightarrow & M \\ & (\widehat{h}_1, \ldots, \widehat{h}_n) & \longmapsto & \widehat{h}_{n+1} \end{array}$$

onde h_{n+1} é definida, para cada $i \in I$, por

$$h_{n+1}(i) = f^{\mathcal{M}_i}(h_1(i), \ldots, h_n(i))$$

Vejamos que $f^{\mathcal{M}}$ está bem definida. Para isto, sejam $g_1, \ldots, g_{n+1} \in W$ tais que $f^{\mathcal{M}}(\widehat{g}_1, \ldots, \widehat{g}_n) = \widehat{g}_{n+1}$ e, para $j = 1, \ldots, n$, $g_j \sim h_j$. Queremos provar que $g_{n+1} \sim h_{n+1}$. Assim, para $j = 1, \ldots, n$, temos que

$$A_j = \{i \in I; g_j(i) = h_j(i)\} \in D$$

Logo

$$A = \bigcap_{j=1}^{n} A_j \in D$$

Mas

$$A \subset B = \{i \in I; f^{\mathcal{M}_i}(g_1(i), \ldots, g_n(i)) = f^{\mathcal{M}_i}(h_1(i), \ldots, h_n(i))\}$$

Então

$$\{i \in I; g_{n+1}(i) = h_{n+1}(i)\} = B \in D$$

Portanto $g_{n+1} \sim h_{n+1}$.

- Seja p um símbolo de predicado n-ário de $\mathcal{L}$, interpretaremos

$$p^{\mathcal{M}} = \{(\widehat{h}_1, \ldots, \widehat{h}_n) \in M^n; \{i \in I; (h_1(i), \ldots, h_n(i)) \in p^{\mathcal{M}_i}\} \in D\}$$

Vejamos que a definição de $p^{\mathcal{M}}$ independe de representante de classe. Para isto, sejam $h_1, \ldots, h_n, g_1, \ldots, g_n \in W$ tais que, para $j = 1, \ldots, n$, $h_j \sim g_j$. Então, como já visto,

$$A = \bigcap_{j=1}^{n} \{i \in I; h_j(i) = g_j(i)\} \in D$$

Sejam

$$B_h = \{i \in I; (h_1(i), \ldots, h_n(i)) \in p^{\mathcal{M}_i}\}$$

$$B_g = \{i \in I; (g_1(i), \ldots, g_n(i)) \in p^{\mathcal{M}_i}\}$$

Suponha que $(\widehat{h}_1, \ldots, \widehat{h}_n) \in p^{\mathcal{M}}$, então $B_h \in D$, logo $B_h \cap A \in D$, mas $B_h \cap A \subset B_g$ o que implica $B_g \in D$, portanto $(\widehat{g}_1, \ldots, \widehat{g}_n) \in p^{\mathcal{M}}$. Analogamente temos que, se $(\widehat{g}_1, \ldots, \widehat{g}_n) \in p^{\mathcal{M}}$, então $(\widehat{h}_1, \ldots, \widehat{h}_n) \in p^{\mathcal{M}}$.

Lema 3.3.2 ***(Teorema de Łós)*** *Sejam $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ uma $\mathcal{L}$-fórmula e $h_1, \ldots, h_n \in W$. Então $\mathcal{M} \vDash \varphi(\widehat{h}_1, \ldots, \widehat{h}_n)$ se, e somente se, $\{i \in I; \mathcal{M}_i \vDash \varphi(h_1(i), \ldots, h_n(i))\} \in D$.*

Demonstração

Provaremos primeiro que se t é um termo com n variáveis livres $v_1, \ldots, v_n$ e $h_1, \ldots, h_n, g \in W$, então

$$t^{\mathcal{M}}(\widehat{h}_1, \ldots, \widehat{h}_n) = \widehat{g} \Leftrightarrow \{i \in I; t^{\mathcal{M}_i}(h_1(i), \ldots, h_n(i)) = g(i)\} \in D$$

Para isto, usaremos indução sobre termos.

i. Se t é um símbolo de constante $c \in \mathcal{L}$, então

$$\begin{aligned} t^{\mathcal{M}}(\widehat{h}_1, \ldots, \widehat{h}_n) = \widehat{g} \ &\Leftrightarrow \widehat{h}_c = c^{\mathcal{M}} = \widehat{g} \Leftrightarrow h_c \sim g \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \{i \in I; c^{\mathcal{M}_i} = h_c(i) = g(i)\} \in D \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \{i \in I; t^{\mathcal{M}_i}(h_1(i), \ldots, h_n(i)) = g(i)\} \in D \end{aligned}$$

ii. Se t é um símbolo de variável v_j, então

$$\begin{aligned} t^{\mathcal{M}}(\widehat{h}_1, \ldots, \widehat{h}_n) = \widehat{g} \ &\Leftrightarrow \widehat{h}_j = \widehat{g} \Leftrightarrow h_j \sim g \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \{i \in I; h_j(i) = g(i)\} \in D \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \{i \in I; t^{\mathcal{M}_i}(h_1(i), \ldots, h_n(i)) = g(i)\} \in D \end{aligned}$$

iii. Seja t é o termo $ft_1 \ldots t_m$, onde f é um símbolo funcional m-ário de $\mathcal{L}$ e, para $j = 1, \ldots, m$, t_j é um termo tal que, se $k_{j1}, \ldots, k_{jn}, l_j \in W$, então

$$t_j^{\mathcal{M}}(\widehat{k}_{j1}, \ldots, \widehat{k}_{jn}) = \widehat{l_j} \text{ sse } \{i \in I; t_j^{\mathcal{M}_i}(k_{j1}(i), \ldots, k_{jn}(i)) = l_j(i)\} \in D$$

Tome $g_1, \ldots, g_m \in W$ tais que $t_j^{\mathcal{M}}(\widehat{h}_1, \ldots, \widehat{h}_n) = \widehat{g}_j$, para $j = 1, \ldots, m$. Assim,

$$A_j = \{i \in I; t_j^{\mathcal{M}_i}(h_1(i), \ldots, h_n(i)) = g_j(i)\} \in D$$

Conseqüentemente

$$A = \bigcap_{j=1}^{m} A_j \in D$$

Logo

$$\begin{aligned} t^{\mathcal{M}}(\widehat{h}_1, \ldots, \widehat{h}_n) = \widehat{g} &\Leftrightarrow f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}(\widehat{h}_1, \ldots, \widehat{h}_n), \ldots, t_m^{\mathcal{M}}(\widehat{h}_1, \ldots, \widehat{h}_n)) = \widehat{g} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f^{\mathcal{M}}(\widehat{g}_1, \ldots, \widehat{g}_m) = \widehat{g} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow B = \{i \in I; f^{\mathcal{M}_i}(g_1(i), \ldots, g_m(i)) = g(i)\} \in D \overset{\dagger}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow C = \{i \in I; f^{\mathcal{M}_i}(t_1^{\mathcal{M}_i}(\overline{h(i)}), \ldots, t_m^{\mathcal{M}_i}(\overline{h(i)})) = g(i)\} \in D \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \{i \in I; t^{\mathcal{M}_i}(h_1(i), \ldots, h_n(i)) = g(i)\} \in D \end{aligned}$$

$\dagger(\Rightarrow)$ $A \cap B \subset C$ e $A \cap B \in D$, logo $C \in D$.
$\dagger(\Leftarrow)$ $A \cap C \subset B$ e $A \cap C \in D$, logo $B \in D$.

Vejamos, por indução sobre fórmulas, que se $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ é uma $\mathcal{L}$-fórmula e $h_1, \ldots, h_n \in W$, então

$$\mathcal{M} \vDash \varphi(\widehat{h}_1, \ldots, \widehat{h}_n) \Leftrightarrow \{i \in I; \mathcal{M}_i \vDash \varphi(h_1(i), \ldots, h_n(i))\} \in D$$

i. Se φ é igual à $t_1 = t_2$, onde t_1 e t_2 são termos, então existem $g_1, g_2 \in W$ tais que, para $j = 1, 2$,

$$t_j^{\mathcal{M}}(\widehat{h}_1, \ldots, \widehat{h}_n) = \widehat{g}_j$$

Assim,

$$A_j = \{i \in I; t_j^{\mathcal{M}_i}(h_1(i), \ldots, h_n(i)) = g_j(i)\} \in D$$

e

$$A = A_1 \cap A_2 \in D$$

Logo

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} \vDash \varphi(\widehat{h}_1, \ldots, \widehat{h}_n) &\Leftrightarrow t_1^{\mathcal{M}}(\widehat{h}_1, \ldots, \widehat{h}_n) = t_2^{\mathcal{M}}(\widehat{h}_1, \ldots, \widehat{h}_n) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \widehat{g}_1 = \widehat{g}_2 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow B = \{i \in I; g_1(i) = g_2(i)\} \in D \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow A \cap B = A \cap C \in D \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow C = \{i \in I; t_1^{\mathcal{M}_i}(\overline{h(i)}) = t_2^{\mathcal{M}_i}(\overline{h(i)})\} \in D \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \{i \in I; \mathcal{M}_i \vDash \varphi(h_1(i), \ldots, h_n(i))\} \in D
\end{aligned}$$

ii. Se φ é igual à $pt_1 \ldots t_m$, onde p é um símbolo de predicado m-ário de $\mathcal{L}$ e, para $j = 1, \ldots, m$, t_j é termo, então existem $g_1, \ldots, g_m \in W$ tais que, para $j = 1, \ldots, m$,

$$t_j^{\mathcal{M}}(\widehat{h}_1, \ldots, \widehat{h}_n) = \widehat{g}_j$$

Assim,

$$A_j = \{i \in I; t_j^{\mathcal{M}_i}(h_1(i), \ldots, h_n(i)) = g_j(i)\} \in D$$

e

$$A = \bigcap_{j=1}^{m} A_j \in D$$

Logo

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} \vDash \varphi(\widehat{h}_1, \ldots, \widehat{h}_n) &\Leftrightarrow (t_1^{\mathcal{M}}(\widehat{h}_1, \ldots, \widehat{h}_n), \ldots, t_m^{\mathcal{M}}(\widehat{h}_1, \ldots, \widehat{h}_n)) \in p^{\mathcal{M}} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (\widehat{g}_1, \ldots, \widehat{g}_m) \in p^{\mathcal{M}} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow B = \{i \in I; (g_1(i), \ldots, g_m(i)) \in p^{\mathcal{M}_i}\} \in D \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow A \cap B = A \cap C \in D \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow C = \{i \in I; (t_1^{\mathcal{M}_i}(\overline{h(i)}), \ldots, t_m^{\mathcal{M}_i}(\overline{h(i)})) \in p^{\mathcal{M}_i}\} \in D \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \{i \in I; \mathcal{M}_i \vDash \varphi(h_1(i), \ldots, h_n(i))\} \in D
\end{aligned}$$

iii. Seja φ igual à $\neg\psi$, onde para $g_1, \ldots, g_n \in W$, $\mathcal{M} \vDash \psi(\widehat{g}_1, \ldots, \widehat{g}_n)$ sse $\{i \in I; \mathcal{M}_i \vDash \psi(g_1(i), \ldots, g_n(i))\} \in D$. Então

$$\begin{aligned}\mathcal{M} \vDash \varphi(\widehat{h}_1, \ldots, \widehat{h}_n) &\Leftrightarrow \mathcal{M} \nvDash \psi(\widehat{h}_1, \ldots, \widehat{h}_n) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \{i \in I; \mathcal{M}_i \vDash \psi(h_1(i), \ldots, h_n(i))\} \notin D \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \{i \in I; \mathcal{M}_i \nvDash \psi(h_1(i), \ldots, h_n(i))\} \in D \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \{i \in I; \mathcal{M}_i \vDash \varphi(h_1(i), \ldots, h_n(i))\} \in D\end{aligned}$$

iv. Seja φ igual à $\psi_1 \wedge \psi_2$, onde para $g_1, \ldots, g_n \in W$, e para $j = 1, 2$, $\mathcal{M} \vDash \psi_j(\widehat{g}_1, \ldots, \widehat{g}_n)$ sse $\{i \in I; \mathcal{M}_i \vDash \psi_j(g_1(i), \ldots, g_n(i))\} \in D$. Então

$$\begin{aligned}\mathcal{M} \vDash \varphi(\widehat{h}_1, \ldots, \widehat{h}_n) &\Leftrightarrow \mathcal{M} \vDash \psi_1(\widehat{h}_1, \ldots, \widehat{h}_n) \text{ e } \mathcal{M} \vDash \psi_2(\widehat{h}_1, \ldots, \widehat{h}_n) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \{i \in I; \mathcal{M}_i \vDash \psi_1(\overline{h(i)})\} \cap \{i \in I; \mathcal{M}_i \vDash \psi_2(\overline{h(i)})\} \in D \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \{i \in I; \mathcal{M}_i \vDash \psi_1(\overline{h(i)}) \text{ e } \mathcal{M}_i \vDash \psi_2(\overline{h(i)})\} \in D \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \{i \in I; \mathcal{M}_i \vDash \varphi(h_1(i), \ldots, h_n(i))\} \in D\end{aligned}$$

v. Seja $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ igual à $\exists w \psi(v_1, \ldots, v_n, w)$, onde para $g_1, \ldots, g_{n+1} \in W$, $\mathcal{M} \vDash \psi(\widehat{g}_1, \ldots, \widehat{g}_{n+1})$ sse $\{i \in I; \mathcal{M}_i \vDash \psi(g_1(i), \ldots, g_{n+1}(i))\} \in D$. Então

$$\begin{aligned}\mathcal{M} \vDash \varphi(\widehat{h}_1, \ldots, \widehat{h}_n) &\Leftrightarrow \text{existe } g \in W \text{ tal que } \mathcal{M} \vDash \psi(\widehat{h}_1, \ldots, \widehat{h}_n, \widehat{g}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \text{existe } g \in W \text{ tal que } A_g = \{i \in I; \mathcal{M}_i \vDash \psi(\overline{h(i)}, g(i))\} \in D \overset{\dagger}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow B = \{i \in I; \text{existe } b_i \in M_i \text{ tal que } \mathcal{M}_i \vDash \psi(\overline{h(i)}, b_i)\} \in D \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \{i \in I; \mathcal{M}_i \vDash \varphi(h_1(i), \ldots, h_n(i))\} \in D\end{aligned}$$

†($\Rightarrow$) $A_g \subset B$, logo $B \in D$.
†($\Leftarrow$) Tome $g \in W$ tal que, para todo $i \in B$, $g(i) = b_i$, onde b_i é tal que $\mathcal{M}_i \vDash \psi(\overline{h(i)}, b_i)$. Então, para esse g, temos que $A_g = B$. Logo existe $g \in W$ tal que $A_g \in D$.

■

Teorema 3.3.3 (Compacidade via Ultrafiltros) *Seja* T *uma* $\mathcal{L}$*-teoria finitamente satisfatível. Então* T *é satisfatível.*

Demonstração

Se T é uma teoria finita, o resultado é imediato. Suponha T uma teoria infinita.

Seja

$$I = \{\Delta \subset \mathrm{T}; \Delta \text{ é finito}\}$$

Defina, para cada $\Theta \in I$,

$$X_\Theta = \{\Delta \in I; \Theta \subset \Delta\}$$

Observação: se φ é uma sentença de T, denotaremos $X_{\{\varphi\}}$ por X_φ.

Seja

$$D = \{Y \subset I; X_\Theta \subset Y \text{ para algum } \Theta \in I\}$$

Vejamos que D é um filtro sobre I.

i. $X_\Theta \subset I$ para todo $\Theta \in I$, logo $I \in D$.
Para todo $\Theta \in I$, $X_\Theta \neq \emptyset$, visto que $\Theta \in X_\Theta$, logo $\emptyset \notin D$.

ii. Sejam $A, B \in D$, então existem $\Delta, \Theta \in I$ tais que $X_\Delta \in A$ e $X_\Theta \in B$.
Observe que $X_{\Delta\cup\Theta} = X_\Delta \cap X_\Theta$.

$$\begin{aligned} \Sigma \in X_{\Delta\cup\Theta} \quad &\Leftrightarrow \Delta \cup \Theta \subset \Sigma \Leftrightarrow \Delta \subset \Sigma \text{ e } \Theta \subset \Sigma \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \Sigma \in X_\Delta \text{ e } \Sigma \in X_\Theta \Leftrightarrow \Sigma \in X_\Delta \cap X_\Theta \end{aligned}$$

Assim, $X_{\Delta\cup\Theta} \subset A \cap B$, logo $A \cap B \in D$.

iii. Sejam $A \in D$ e $A \subset B \subset I$, então existe $\Delta \in I$ tal que

$$X_\Delta \subset A \subset B$$

Logo $B \in D$.

Agora seja U um ultrafiltro sobre I contendo D, e para cada $\Delta \in I$, seja $\mathcal{M}_\Delta$ um modelo de Δ.

Defina

$$\mathcal{M} = \left(\prod_{\Delta\in I} \mathcal{M}_\Delta\right) / U$$

Seja $\varphi \in$ T, então

$$X_\varphi = \{\Delta \in I; \varphi \in \Delta\} \in D$$

Como $X_\varphi \subset \{\Delta \in I; \mathcal{M}_\Delta \vDash \varphi\}$,

$$\{\Delta \in I; \mathcal{M}_\Delta \vDash \varphi\} \in D \subset U$$

Logo $\mathcal{M} \vDash \varphi$ e portanto $\mathcal{M} \vDash$ T.

■

Capítulo 4

Teorias Completas

Uma $\mathcal{L}$-teoria T é dita *completa* se para qualquer $\mathcal{L}$-sentença φ, $\mathrm{T} \vDash \varphi$ ou $\mathrm{T} \vDash \neg\varphi$. Por exemplo, $Th(\mathcal{M})$, onde $\mathcal{M}$ é uma $\mathcal{L}$-estrutura, é completa. Teorias maximais são obviamente completas. Um exemplo de teoria não completa é a teoria de corpos . Pois $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$ são corpos, porém $\mathbb{R} \vDash \forall x(x > 0 \rightarrow \exists y(y^2 = x))$ e $\mathbb{Q} \nvDash \forall x(x > 0 \rightarrow \exists y(y^2 = x))$.

4.1 κ-Categoricidade

Proposição 4.1.1 *Seja* T *uma $\mathcal{L}$-teoria com modelos infinitos. Se κ é um cardinal infinito e $|\mathcal{L}| \leq \kappa$, então existe um modelo de* T *com cardinalidade κ.*

Demonstração

Sejam I um conjunto de índices com cardinalidade κ, $\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \cup \{c_\alpha; \alpha \in I\}$ e T^* a $\mathcal{L}^*$-teoria $T \cup \{c_\alpha \neq c_\beta; \alpha, \beta \in I \text{ e } \alpha \neq \beta\}$.

Claramente se $\mathcal{M} \vDash \mathrm{T}^*$, então $\mathcal{M} \vDash \mathrm{T}$ e $\mathcal{M}$ tem cardinalidade pelo menos igual à κ.

Seja $\Delta \subset \mathrm{T}^*$ finito, então

$$\Delta \subset \mathrm{T} \cup \{c_\alpha \neq c_\beta; \alpha, \beta \in I_0 \text{ e } \alpha \neq \beta\}$$

onde $I_0 \subset I$ é finito. Seja $\mathcal{N}$ um modelo infinito de T. Podemos interpretar os símbolos $\{c_\alpha; \alpha \in I_0\}$ como $|I_0|$ elementos distintos de N. Assim $\mathcal{N}$ é modelo de Δ, logo T^* é finitamente satisfatível e portanto, pelo teorema da compacidade, T^* possui um modelo $\mathcal{M}$ com $|\mathcal{M}| \leq \kappa$, visto que $|\mathcal{L}^*| = \kappa$.

■

Definição 4.1.2 *Sejam κ um cardinal infinito e T uma teoria com modelos de cardinalidade κ. Dizemos que T é κ-categórica se quaisquer dois modelos de T com cardinalidade κ são isomorfos.*

Exemplo 4.1.3 *Seja $\mathcal{L} = \emptyset$. Então a teoria de conjuntos infinitos é κ-categórica para todo cardinal κ infinito.*

$$\mathrm{T} = \{\exists x_1 \ldots \exists x_n \bigwedge_{i<j\leq n} x_i \neq x_j; n = 2, 3, \ldots\}$$

Exemplo 4.1.4 *Sejam $\mathcal{L} = \{E\}$, onde E é um símbolo de predicado binário, e T a teoria da relação de equivalência com exatamente duas classes, com infinitos elementos cada classe. Veja o exemplo 2.1.7, então*

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}_e'' \cup \left\{ \forall x \exists x_1 \ldots \exists x_n \left(\bigwedge_{i<j\leq n} x_i \neq x_j \right) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{n} E(x, x_i) \right); n = 2, 3, \ldots \right\}$$

Logo T é $\aleph_0$-categórica, pois cada classe de um modelo de T terá exatamente $\aleph_0$ elementos. Porém T não é κ-categórica para $\kappa > \aleph_0$, pois poderiam existir modelos com κ elementos em cada classe e outros com κ elementos em uma e $\aleph_0$ elementos na outra classe.

Sejam $\mathcal{L} = \{<\}$ e OLD a $\mathcal{L}$-teoria da ordem linear densa sem extremos (veja exemplo 2.1.6) então,

$$OLD = \mathrm{T}_{old} \cup \{\forall x \exists y \exists z (y < x \wedge x < z)\}$$

Proposição 4.1.5 *OLD é $\aleph_0$-categórica.*

Demonstração

Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ dois modelos enumeráveis de OLD. Assim, podemos supor $A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ e $B = \{b_0, b_1, b_2, \ldots\}$.

Construiremos uma seqüência de bijeções

$$f_n : A_n \to B_n$$

onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, A_n e B_n são finitos, $A_n \subset A_{n+1} \subset A$, $B_n \subset B_{n+1} \subset B$, $f_{n+1}|_{A_n} = f_n$ e se $x, y \in A_n$ com $x < y$, então $f_n(x) < f_n(y)$. Faremos isso de forma que $A = \bigcup A_n$, $B = \bigcup B_n$ e existe uma bijeção $f : A \to B$ tal que, para $n \in \mathbb{N}$, $f|_{A_n} = f_n$.

Construiremos tais seqüências indutivamente. Dividiremos a construção em etapas ímpares, nas quais garantiremos que $A = \bigcup A_n$, e etapas pares, nas quais garantiremos que $B = \bigcup B_n$.

Etapa 0

Tome $A_0 = B_0 = f_0 = \emptyset$.

Etapa $n + 1 = 2m + 1$

Vamos garantir que $a_m \in A_{n+1}$.

Se $a_m \in A_n$ então tome $A_{n+1} = A_n$, $B_{n+1} = B_n$ e $f_{n+1} = f_n$. Suponha que $a_m \notin A_n$. Para adicionarmos a_m em A_{n+1} precisamos achar um $b \in B \setminus B_n$ tal que

$$\alpha < a_m \Leftrightarrow f_n(\alpha) < b$$

para todo $\alpha \in A_n$.

Exatamente um dos seguintes casos acontece:

i. $\alpha < a_m$ para todo $\alpha \in A_n$. Neste caso, como B não tem extremos e B_n é finito, existe $b \in B$ tal que $\beta < b$ para todo $\beta \in B_n$, ou seja, $f_n(\alpha) < b$ para todo $\alpha \in A_n$.

ii. $a_m < \alpha$ para todo $\alpha \in A_n$. Neste caso, como B não tem extremos e B_n é finito, existe $b \in B$ tal que $b < \beta$ para todo $\beta \in B_n$, ou seja, $b < f_n(\alpha)$ para todo $\alpha \in A_n$.

iii. Existem $\gamma, \delta \in A_n$ tais que $\gamma < a_m < \delta$ e, para todo $\alpha \in A_n$, $\alpha \leq \gamma$ ou $\delta \leq \alpha$. Por hipótese indutiva, f_n é uma bijeção de A_n em B_n que preserva a ordem. Como B é denso e B_n é finito, existe $b \in B$ tal que $f_n(\gamma) < b < f_n(\delta)$.

Portanto, considerando todos os casos, existe $b \in B \setminus B_n$ tal que

$$\alpha < a_m \Leftrightarrow f_n(\alpha) < b$$

para todo $\alpha \in A_n$.

Assim, tome $A_{n+1} = A_n \cup \{a_m\}$, $B_{n+1} = B_n \cup \{b\}$ e estenda a bijeção f_n para $f_{n+1} : A_{n+1} \to B_{n+1}$ definindo $f_{n+1}(a_m) = b$.

Etapa $n + 1 = 2m + 2$

Vamos garantir que $b_m \in B_{n+1}$.

Se $b_m \in B_n$ então tome $A_{n+1} = A_n$, $B_{n+1} = B_n$ e $f_{n+1} = f_n$. Suponha que $b_m \notin B_n$. Para adicionarmos b_m em B_{n+1} precisamos achar um $a \in A \setminus A_n$ tal que

$$\alpha < a \Leftrightarrow f_n(\alpha) < b_m$$

para todo $\alpha \in A_n$.

Os casos nesta etapa são analogos aos casos da etapa anterior. Assim, tome $A_{n+1} = A_n \cup \{a\}$, $B_{n+1} = B_n \cup \{b_m\}$ e estenda f_n para $f_{n+1} : A_{n+1} \to B_{n+1}$ definindo $f_{n+1}(a) = b_m$.

Claramente, pela construção, temos que $A = \bigcup A_n$ e $B = \bigcup B_n$. Defina $f : A \to B$ por $f(a) = f_n(a)$, onde $a \in A_n$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Observe que f está bem definida, pois dado $a \in A$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a \in A_n$, e se $m \in \mathbb{N}$ é tal que $a \in A_m$, temos que $f_n(a) = f_m(a)$. Defina também $g : B \to A$ por $g(b) = f_n^{-1}(b)$, onde $b \in B_n$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Claramente g está bem definida e g é a inversa de f. Portanto f é bijetora.

Agora sejam $x, y \in A$. Então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x, y \in A_n$, logo

$$x < y \Leftrightarrow f(x) = f_n(x) < f_n(y) = f(y)$$

Portanto f é isomorfismo.

■

Sejam $\mathcal{L} = \{+, 0\}$ a linguagem de grupo e GAD a $\mathcal{L}$-teoria dos grupos abelianos com divisão livres de torção não triviais. Sejam

$$Div = \{\forall x \exists y (\underbrace{y + \ldots + y}_{n \text{ vezes}} = x); n = 1, 2, \ldots\}$$

$$LTor = \{\forall x (x \neq 0 \to \underbrace{x + \ldots + x}_{n \text{ vezes}} \neq 0); n = 1, 2, \ldots\}$$

Veja o exemplo 2.1.9, então

$$GAD = \mathrm{T}_{ga} \cup Div \cup LTor \cup \{\exists x (x \neq 0)\}$$

Proposição 4.1.6 *GAD é κ-categórica para todo $\kappa > \aleph_0$.*

Demonstração

Primeiramente vamos verificar que modelos de GAD são essencialmente espaços vetoriais sobre $\mathbb{Q}$. Claramente todo espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$ é um modelo de GAD. Agora, se $G \vDash GAD$, $g \in G$ e $n \in \mathbb{N}^*$, então, como GAD tem divisão, existe $h \in G$ tal que $nh = \underbrace{h + \ldots + h}_{n \text{ vezes}} = g$, e se $f \in G$ tal que $nf = g$, então $n(h - f) = 0$, logo, como GAD é livre de torção, $h = f$ e portanto existe um único $h \in G$ tal que $nh = g$, denotaremos tal elemento por g/n. Assim, podemos ver G como um espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$ definindo o produto por escalar da seguinte forma:

$$\frac{m}{n} g = m \frac{g}{n}$$

onde $g \in G$ e $\frac{m}{n} = q \in \mathbb{Q}$, com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}^*$.

Sabemos que espaços vetoriais sobre $\mathbb{Q}$ são isomorfos sse têm mesma dimensão. Assim, se G visto como um espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$ tem dimensão λ então $|G| = \lambda + \aleph_0$. Se $\kappa > \aleph_0$ e G tem cardinalidade κ, então G tem dimensão κ. Portanto, para $\kappa > \aleph_0$, GAD é κ-categórica. Note que GAD não é $\aleph_0$-categórica, pois espaços vetoriais de cardinalidade $\aleph_0$ podem ter dimensões $1, 2, \ldots, \aleph_0$.

$\blacksquare$

Proposição 4.1.7 *CAF_p é κ-categórica para todo cardinal κ não enumerável.*

Demonstração

Sejam F e L corpos algebricamente fechados de característica p e cardinalidade κ não enumerável.

Se $p = 0$, então podemos ver $\mathbb{Q}$ como subcorpo de F e de L, logo

$$gtr(F/\mathbb{Q}) = \kappa = gtr(L/\mathbb{Q})$$

Se p é primo, podemos ver $\mathbb{Z}_p$ como subcorpo de F e de L, logo

$$gtr(F/\mathbb{Z}_p) = \kappa = gtr(L/\mathbb{Z}_p)$$

Portanto, pelo teorema A.2.12, F e L são isomorfos.

$\blacksquare$

Lema 4.1.8 *Seja* T *uma $\mathcal{L}$-teoria. Então* T *é completa se, e somente se, para todo $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ modelos de* T*, $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$.*

Demonstração

Suponha T uma teoria completa e φ uma sentença. Sejam $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ modelos de T. Então, se $\mathcal{M} \models \varphi$, necessariamente temos que $T \models \varphi$, pois caso contrário, como T é completa, $T \models \neg\varphi$ o que contradiz o fato de $\mathcal{M}$ ser modelo de T. Logo

$$\mathcal{M} \models \varphi \Leftrightarrow T \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi$$

Portanto $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$.

Agora, suponha que para todo $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ modelos de T, $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$. Seja φ uma sentença. Se $T \not\models \varphi$ então existe um modelo $\mathcal{M}$ de T tal que $\mathcal{M} \not\models \varphi$, ou seja, $\mathcal{M} \models \neg\varphi$. Mas se $\mathcal{N}$ é um outro modelo qualquer de T, $\mathcal{N} \models \neg\varphi$, pois $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$. Logo $T \models \neg\varphi$ e portanto T é completa.

$\blacksquare$

Teorema 4.1.9 (Teste de Vaught) *Seja* T *uma* $\mathcal{L}$*-teoria satisfatível sem modelos finitos que é* κ*-categórica para algum cardinal infinito* $\kappa \geq |\mathcal{L}|$*. Então* T *é completa.*

Demonstração

Suponha que T não é completa. Então existe uma sentença φ tal que $T \not\models \varphi$ e $T \not\models \neg\varphi$. Pelo lema 3.1.6, $T_0 = T \cup \{\varphi\}$ e $T_1 = T \cup \{\neg\varphi\}$ são satisfatíveis. Observe que T_0 e T_1 têm modelos infinitos, pois todos os modelos de T_0 e de T_1 são modelos de T, que não tem modelo finito. Então, pela proposição 4.1.1, existem estruturas $\mathcal{M}_0$ e $\mathcal{M}_1$ de cardinalidade κ tais que $\mathcal{M}_0 \models T_0$ e $\mathcal{M}_1 \models T_1$. Como $\mathcal{M}_0 \models \varphi$ e $\mathcal{M}_1 \models \neg\varphi$, $\mathcal{M}_0$ e $\mathcal{M}_1$ não são elementarmente equivalentes e portanto não isomorfas, o que contradiz a κ-categoricidade de T.

$\blacksquare$

Corolário 4.1.10 *OLD e GAD são completas.*

Demonstração

Todo modelo de *OLD* é denso e sem extremos, logo não é finito. Portando, pela proposição 4.1.5 e pelo teste de Vaught, *OLD* é completa.

Todo modelo de *GAD* é livre de torção e não trivial, logo infinito. Portanto, pela proposição 4.1.6 e pelo teste de Vaught, *GAD* é completa.

$\blacksquare$

Lema 4.1.11 *Todo corpo algebricamente fechado é infinito.*

Demonstração

Seja F um corpo algebricamente fechado. Suponha F finito. Então podemos escrever $F = \{a_1, \ldots, a_n\}$ para algum $n \in \mathbb{N}^*$. Para cada $i = 1, \ldots, n$

$$(x - a_i) \in F[x]$$

logo

$$\prod_{i=1}^{n}(x - a_i) \in F[x]$$

Assim,

$$1 + \prod_{i=1}^{n}(x - a_i) \in F[x]$$

Porém, para qualquer $a \in F$,

$$1 + \prod_{i=1}^{n}(a - a_i) = 1$$

O que contradiz o fato de F ser algebricamente fechado.

■

Corolário 4.1.12 *CAF_p é completa.*

Demonstração

Pela proposição 4.1.7, CAF_p é κ-categórica e, pelo lema anterior, todo modelo de CAF_p é infinito. Logo, pelo teste de Vaught, CAF_p é completa.

■

Veremos agora uma aplicação da completude de CAF_0.

Lema 4.1.13 *Seja φ uma sentença na linguagem dos anéis. São equivalentes:*

i. φ é verdadeira em $\mathbb{C}$.

ii. φ é verdadeira em todo corpo algebricamente fechado de característica 0.

iii. φ é verdadeira em algum corpo algebricamente fechado de característica 0.

iv. Existe p primo arbitrariamente grande tal que φ é verdadeira em algum corpo algebricamente fechado de característica p.

v. Existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo p primo maior que m, φ é verdadeira em todo corpo algebricamente fechado de característica p.

Demonstração

$\mathbb{C}$ é um corpo algebricamente fechado de característica 0. Logo, como CAF_0 é completa, temos a equivalência de $i., ii., iii.$.

$v. \Rightarrow iv.$

Por $v.$ existe tal m, tome $p > m$ primo. Como p é primo, existe um corpo algebricamente fechado de característica p. Novamente por $v.$, φ é verdadeira para todo corpo algebricamente fechado de característica p, portanto $iv.$.

$ii. \Rightarrow v.$

Suponha que $CAF_0 \vDash \varphi$. Pelo corolário 3.1.10, existe $\Delta \subset CAF_0$ finito tal que $\Delta \vDash \varphi$. Então, escolhendo m suficientemente grande, temos que, para $p > m$, $CAF_p \vDash \Delta$. Portanto $CAF_p \vDash \varphi$ para todo $p > m$.

$iv. \Rightarrow ii.$

Suponha que $CAF_0 \nvDash \varphi$. Como CAF_0 é completa, $CAF_0 \vDash \neg\varphi$. Então, pelo argumento anterior, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $p > m$, $CAF_p \vDash \neg\varphi$, o que contradiz $iv.$.

■

Teorema 4.1.14 *Toda função polinomial injetora de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^n$ é sobrejetora.*

Demonstração

Lembrando primeiramente que se S é um corpo finito, então toda função injetora de S^n em S^n é sobrejetora.

Seja F_p um corpo com p elementos, denotaremos por $\overline{F}_p$ o seu fecho algébrico.

Vejamos agora que toda função polinomial injetora $f : \overline{F}_p^n \to \overline{F}_p^n$, onde p é primo, é sobrejetora. Suponha que não. Sejam $b_1, \ldots, b_m \in \overline{F}_p$ os coeficientes de f e $(a_1, \ldots, a_n) \in \overline{F}_p^n \setminus Im(f)$. Seja S o subcorpo gerado por

$a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$. Então $f|_{S^n}$ é uma função polinomial injetora, mas não sobrejetora de S^n em S^n. O que é um absurdo, pois S é um corpo finito, visto que é um corpo de característica p primo gerado por finitos elementos.

Suponha que o teorema seja falso. Seja

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n))$$

um contra-exemplo, onde cada $f_i \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ tem grau no máximo igual à d, para algum $d \in \mathbb{N}$.

Seja $\varphi_{n,d}$ a sentença

$$\begin{aligned}
&\underset{\sum i_j \leq d}{\forall a_{(i_1,\ldots,i_n)_1}} \ldots \underset{\sum i_j \leq d}{\forall a_{(i_1,\ldots,i_n)_n}} \Bigg[\Bigg[\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n \\
&\bigwedge_{k=1}^{n} \left(\sum_{\sum i_j \leq d} a_{(i_1,\ldots,i_n)_k} \prod_{l=1}^{n} x_l^{i_l} = \sum_{\sum i_j \leq d} a_{(i_1,\ldots,i_n)_k} \prod_{l=1}^{n} y_l^{i_l} \right) \rightarrow \left(\bigwedge_{i=1}^{n} (x_i = y_i) \right) \Bigg] \rightarrow \\
&\rightarrow \forall u_1 \ldots \forall u_n \exists x_1 \ldots \exists x_n \bigwedge_{k=1}^{n} \left(\sum_{\sum i_j \leq d} a_{(i_1,\ldots,i_n)_k} \prod_{l=1}^{n} x_l^{i_l} = u_k \right) \Bigg]
\end{aligned}$$

Como vimos anteriormente, $\overline{F}_p \models \varphi_{n,d}$ para todo p primo. Então, pelo lema anterior, $\mathbb{C} \models \varphi_{n,d}$, o que contradiz o fato de f ser um contra-exemplo.

■

4.2 Teoremas de Löwenheim-Skolem

Definição 4.2.1 *Se $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ são $\mathcal{L}$-estruturas, então uma $\mathcal{L}$-imersão $\eta : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ é dita uma $\mathcal{L}$-imersão elementar se*

$$\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi(\eta(a_1), \ldots, \eta(a_n))$$

para toda $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ e quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in M$.
Se $\mathcal{M}$ é uma sub-estrutura de $\mathcal{N}$ e a inclusão é elementar, então $\mathcal{M}$ é dita uma sub-estrutura elementar de $\mathcal{N}$, e denotamos por $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$. Neste caso, $\mathcal{N}$ é dita uma extensão elementar de $\mathcal{M}$.

Definição 4.2.2 *Suponha $\mathcal{M}$ uma $\mathcal{L}$-estrutura. Seja $\mathcal{L}_M = \mathcal{L} \cup M$, onde cada elemento de M é considerado uma nova constante.*

- *O diagrama atômico de $\mathcal{M}$ é*

$$\begin{aligned} Diag(\mathcal{M}) = \ & \{\varphi(a_1, \ldots, a_n); \varphi \text{ é uma } \mathcal{L}\text{-fórmula atômica} \\ & \text{ou negação de uma, e } \mathcal{M} \vDash \varphi(a_1, \ldots, a_n)\} \end{aligned}$$

- *O diagrama elementar de $\mathcal{M}$ é*

$$Diag_{el}(\mathcal{M}) = \{\varphi(a_1, \ldots, a_n); \varphi \text{ é uma } \mathcal{L}\text{-fórmula e } \mathcal{M} \vDash \varphi(a_1, \ldots, a_n)\}$$

Obs.: Toda $\mathcal{L}_M$-estrutura pode ser vista como uma $\mathcal{L}$-estrutura, apenas ignorando a interpretação dos novos símbolos de constante.

Lema 4.2.3 *Sejam $\mathcal{M}$ uma $\mathcal{L}$-estrutura e $\mathcal{N}$ uma $\mathcal{L}_M$-estrutura.*

i. Se $\mathcal{N} \vDash Diag(\mathcal{M})$, então existe uma $\mathcal{L}$-imersão de $\mathcal{M}$ em $\mathcal{N}$.

ii. Se $\mathcal{N} \vDash Diag_{el}(\mathcal{M})$, então existe uma $\mathcal{L}$-imersão elementar de $\mathcal{M}$ em $\mathcal{N}$.

Demonstração

Seja $\eta : M \to N$ definida por $\eta(a) = a^{\mathcal{N}}$.

i. Suponha que $\mathcal{N} \vDash Diag(\mathcal{M})$.

Se $a_1, a_2 \in M$ são distintos, então $a_1 \neq a_2 \in Diag(\mathcal{M})$, logo

$$\eta(a_1) = a_1^{\mathcal{N}} \neq a_2^{\mathcal{N}} = \eta(a_2)$$

portanto η é injetora.

Se f é um símbolo funcional n-ário de $\mathcal{L}$ e $f^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n) = a_{n+1}$, onde $a_1, \ldots, a_{n+1} \in M$, então $fa_1 \ldots a_n = a_{n+1} \in Diag(\mathcal{M})$, logo

$$f^{\mathcal{N}}(\eta(a_1), \ldots, \eta(a_n)) = f^{\mathcal{N}}(a_1^{\mathcal{N}}, \ldots, a_n^{\mathcal{N}}) = a_{n+1}^{\mathcal{N}} = \eta(a_{n+1})$$

Se p é um símbolo de predicado n-ário de $\mathcal{L}$ e $(a_1, \ldots, a_n) \in p^{\mathcal{M}}$, então $pa_1 \ldots a_n \in Diag(\mathcal{M})$, logo

$$(\eta(a_1), \ldots, \eta(a_n)) = (a_1^{\mathcal{N}}, \ldots, a_n^{\mathcal{N}}) \in p^{\mathcal{N}}$$

Reciprocamente, se $(a_1, \ldots, a_n) \notin p^{\mathcal{M}}$, então $\neg pa_1 \ldots a_n \in Diag(\mathcal{M})$, logo

$$(\eta(a_1), \ldots, \eta(a_n)) = (a_1^{\mathcal{N}}, \ldots, a_n^{\mathcal{N}}) \notin p^{\mathcal{N}}$$

Se c é um símbolo de constante de $\mathcal{L}$, então $c = c^{\mathcal{M}} \in Diag(\mathcal{M})$,logo

$$c^{\mathcal{N}} = c^{\mathcal{M}^{\mathcal{N}}} = \eta(c^{\mathcal{M}})$$

Portanto η é uma $\mathcal{L}$-imersão.

ii. Suponha que $\mathcal{N} \models Diag_{el}(\mathcal{M})$.

Como $Diag(\mathcal{M}) \subset Diag_{el}(\mathcal{M})$, $\mathcal{N} \models Diag(\mathcal{M})$, logo, pelo item $i.$, η é uma $\mathcal{L}$-imersão.

Sejam $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ uma $\mathcal{L}$-fórmula e $a_1, \ldots, a_n \in M$, então

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \ &\Rightarrow \varphi(a_1, \ldots, a_n) \in Diag_{el}(\mathcal{M}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathcal{N} \models \varphi(\eta(a_1), \ldots, \eta(a_n)) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \not\models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \ &\Rightarrow \neg\varphi(a_1, \ldots, a_n) \in Diag_{el}(\mathcal{M}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathcal{N} \not\models \varphi(\eta(a_1), \ldots, \eta(a_n)) \end{aligned}$$

Portanto η é uma $\mathcal{L}$-imersão elementar.

■

Podemos ver também a $\mathcal{L}$-estrutura $\mathcal{M}$ como uma $\mathcal{L}_M$-estrutura, interpretando canonicamente os novos símbolos. Assim, o item $ii.$ do lema anterior nos diz que quaisquer modelo de $Diag_{el}(\mathcal{M})$ é elementarmente equivalente à $\mathcal{M}$, logo, pelo lema 4.1.8, $Diag_{el}(\mathcal{M})$ é uma $\mathcal{L}_M$-teoria completa.

Teorema 4.2.4 (Löwenheim-Skolem Ascendente) *Sejam $\mathcal{M}$ uma $\mathcal{L}$-estrutura infinita e um cardinal $\kappa \geq |\mathcal{M}| + |\mathcal{L}|$. Então existem uma $\mathcal{L}$-estrutura $\mathcal{N}$ de cardinalidade κ e uma $\mathcal{L}$-imersão elementar $\eta : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$.*

Demonstração

Como $\mathcal{M}$ é um modelo infinito de $Diag_{el}(\mathcal{M})$, então, pela proposição 4.1.1, existe um modelo $\mathcal{N}$ de $Diag_{el}(\mathcal{M})$ com cardinalidade κ. E pelo lema anterior, existe uma $\mathcal{L}$-imersão elementar $\eta : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$.

■

Em particular, temos o interessante resultado que a Aritmética de Peano possui modelos de todas as cardinalidades $\geq \aleph_0$.

Proposição 4.2.5 (Teste de Tarski-Vaught) *Sejam $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ $\mathcal{L}$-estruturas tais que $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$. Então $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ se, e somente se, para cada $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(v_1, \ldots, v_n, w)$ e $a_1, \ldots, a_n \in M$, se existe $b \in N$ tal que $\mathcal{N} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n, b)$, então existe $c \in M$ tal que $\mathcal{N} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n, c)$.*

Demonstração

Suponha primeiramente que $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$. Sejam $\varphi(v_1, \ldots, v_n, w)$ uma $\mathcal{L}$-fórmula e $a_1, \ldots, a_n \in M$. Então

$$\begin{aligned} \text{existe } b \in N \text{ tal que } \mathcal{N} \models \varphi(\overline{a}, b) &\Rightarrow \mathcal{N} \models \exists w \varphi(\overline{a}, w) \Rightarrow \mathcal{M} \models \exists w \varphi(\overline{a}, w) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \text{existe } c \in M \text{ tal que } \mathcal{M} \models \varphi(\overline{a}, c) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \text{existe } c \in M \text{ tal que } \mathcal{N} \models \varphi(\overline{a}, c) \end{aligned}$$

Agora suponha que para cada $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(v_1, \ldots, v_n, w)$ e $a_1, \ldots, a_n \in M$, se existe $b \in N$ tal que $\mathcal{N} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n, b)$, então existe $c \in M$ tal que $\mathcal{N} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n, c)$. Sejam $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ uma $\mathcal{L}$-fórmula e $a_1, \ldots, a_n \in M$. Pelo corolário 1.4.2 temos que, se φ é livre de quantificadores,

$$\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$$

Suponha então que essa equivalência também seja válida para a $\mathcal{L}$-fórmula $\psi(v_1, \ldots, v_n, w)$, e sejam $\varphi(\overline{v})$ a fórmula $\exists w \psi(\overline{v}, w)$ e $a_1, \ldots, a_n \in M$. Então

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \models \varphi(\overline{a}) &\Leftrightarrow \text{existe } c \in M \text{ tal que } \mathcal{M} \models \psi(\overline{a}, c) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \text{existe } c \in M \text{ tal que } \mathcal{N} \models \psi(\overline{a}, c) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \text{existe } b \in N \text{ tal que } \mathcal{N} \models \psi(\overline{a}, b) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi(\overline{a}) \end{aligned}$$

■

Definição 4.2.6 *Uma $\mathcal{L}$-teoria* T *é dita ter a* propriedade de funções Skolem *se para toda $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(v_1, \ldots, v_n, w)$ existe um símbolo funcional n-ário f de $\mathcal{L}$ tal que*

$$\mathrm{T} \models \forall v_1 \ldots \forall v_n ((\exists w \varphi(v_1, \ldots, v_n, w)) \rightarrow \varphi(v_1, \ldots, v_n, f v_1 \ldots v_n))$$

Obs.: Tal teoria nos diz que existem símbolos funcionais suficientes na linguagem para testemunhar todas as formulações existenciais.

Lema 4.2.7 *Seja* T *uma $\mathcal{L}$-teoria. Então, existem $\mathcal{L}^* \supset \mathcal{L}$, com $|\mathcal{L}^*| = |\mathcal{L}| + \aleph_0$, e* $\mathrm{T}^* \supset \mathrm{T}$ *uma $\mathcal{L}^*$-teoria tal que* T^* *tem a propriedade de funções Skolem, e se $\mathcal{M} \models \mathrm{T}$,* *então pode-se interpretar os novos símbolos de* $\mathcal{L}^*$ *em* $\mathcal{M}$ *tal que* $\mathcal{M} \models \mathrm{T}^*$*. Denotamos* T^* *por skolemização de* T.

Demonstração

Primeiro construiremos uma seqüência de linguagens $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_2 \subset \ldots$ e uma seqüência de teorias $\mathrm{T} = \mathrm{T}_0 \subset \mathrm{T}_1 \subset \mathrm{T}_2 \subset \ldots$, onde cada T_i é uma $\mathcal{L}_i$-teoria.

Defina indutivamente

$$\mathcal{L}_{i+1} = \mathcal{L}_i \cup \{f_\varphi; \varphi(v_1, \ldots, v_n, w) \text{ é uma } \mathcal{L}_i\text{-fórmula}\}$$

onde f^φ é um símbolo funcional n-ário.

Para cada $\mathcal{L}_i$-fórmula $\varphi(v_1, \ldots, v_n, w)$, seja ψ_φ a sentença

$$\forall v_1 \ldots \forall v_n((\exists w \varphi(v_1, \ldots, v_n, w)) \rightarrow \varphi(v_1, \ldots, v_n, f_\varphi v_1 \ldots v_n))$$

Defina

$$\mathrm{T}_{i+1} = \mathrm{T}_i \cup \{\psi_\varphi; \varphi \text{ é uma } \mathcal{L}_i\text{-fórmula}\}$$

Vejamos agora que se $\mathcal{M}$ é uma $\mathcal{L}_i$-estrutura e $\mathcal{M} \models \mathrm{T}_i$, então podemos interpretar os símbolos de $\mathcal{L}_{i+1} \setminus \mathcal{L}_i$ em $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \models \mathrm{T}_{i+1}$.

Sejam $c \in M$ e $\varphi(v_1, \ldots, v_n, w)$ uma $\mathcal{L}_i$-fórmula. Defina uma função $g : M^n \rightarrow M$ tal que, se $a_1, \ldots, a_n \in M$ e $X_{\overline{a}} = \{b \in M; \mathcal{M} \models \varphi(\overline{a}, b)\} \neq \emptyset$, então, $g(\overline{a}) \in X_{\overline{a}}$, senão, se $X_{\overline{a}} = \emptyset$, então $g(\overline{a}) = c$.

Assim, se $\mathcal{M} \models \exists w \varphi(\overline{a}, w)$, então $X_{\overline{a}} \neq \emptyset$, logo $\mathcal{M} \models \varphi(\overline{a}, g(\overline{a}))$. Portanto, interpretando $f_\varphi^{\mathcal{M}} = g$, temos $\mathcal{M} \models \psi_\varphi$.

Sejam $\mathcal{L}^* = \bigcup \mathcal{L}_i$ e $\mathrm{T}^* = \bigcup \mathrm{T}_i$.

Se $\varphi(v_1, \ldots, v_n, w)$ é uma $\mathcal{L}^*$-fórmula, então φ é uma $\mathcal{L}_i$-fórmula para algum $i \in \mathbb{N}$, logo $\psi_\varphi \in \mathrm{T}_{i+1} \subset \mathrm{T}^*$, portanto T^* tem a propriedade de funções Skolem. Já vimos que se $\mathcal{M} \models \mathrm{T}_i$, então podemos interpretar os símbolos de $\mathcal{L}_{i+1} \setminus \mathcal{L}_i$ em $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \models \mathrm{T}_{i+1}$, assim, indutivamente temos que, se $\mathcal{M} \models \mathrm{T}$, então podemos interpretar os símbolos de $\mathcal{L}_i \setminus \mathcal{L}$ em $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \models \mathrm{T}_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Portanto, interpretanto os símbolos de $\mathcal{L}^* \setminus \mathcal{L}$ em $\mathcal{M}$ temos que $\mathcal{M} \models \mathrm{T}^*$. Como adicionamos um símbolo funcional em $\mathcal{L}_{i+1}$ para cada $\mathcal{L}_i$-fórmula, $|\mathcal{L}_{i+1}| = |\mathcal{L}_i| + \aleph_0$, logo $|\mathcal{L}^*| = |\mathcal{L}| + \aleph_0$.

$\blacksquare$

Teorema 4.2.8 (Löwenheim-Skolem Descendente) *Sejam $\mathcal{M}$ uma $\mathcal{L}$-estrutura e $X \subset M$. Então existe $\mathcal{N} \prec \mathcal{M}$ tal que $X \subset N$ e $|\mathcal{N}| \leq |X| + |\mathcal{L}| + \aleph_0$.*

Demonstração

Obviamente $\mathcal{M} \vDash Th(\mathcal{M})$, então, pelo lema anterior, existem uma linguagem $\mathcal{L}^* \supset \mathcal{L}$, com $|\mathcal{L}^*| = |\mathcal{L}| + \aleph_0$, e uma $\mathcal{L}^*$-teoria $\mathrm{T}^* \supset Th(\mathcal{M})$ tais que, T^* tem a propriedade de funções Skolem e interpretando os novos símbolos de $\mathcal{L}^*$ em $\mathcal{M}$ temos que $\mathcal{M} \vDash \mathrm{T}^*$. Observe que, a princípio, $Th(\mathcal{M})$ é uma $\mathcal{L}$-teoria, porém considerando $\mathcal{M}$ como uma $\mathcal{L}^*$-estrutura, temos que $Th(\mathcal{M})$ é uma $\mathcal{L}^*$-teoria, e como $Th(\mathcal{M})$ é maximal, $Th(\mathcal{M}) \supset \mathrm{T}^*$, e portanto $Th(\mathcal{M})$ tem a propriedade de funções Skolem. Observe também que toda $\mathcal{L}$-fórmula é uma $\mathcal{L}^*$-fórmula, assim, se mostrarmos a existência de uma $\mathcal{L}^*$-estrutura $\mathcal{N}$ tal que $\mathcal{N} \prec \mathcal{M}$, claramente ignorando as interpretações dos símbolos de $\mathcal{L}^* \setminus \mathcal{L}$ em $\mathcal{N}$ e $\mathcal{M}$, vendo-os agora como $\mathcal{L}$-estruturas, ainda teremos que $\mathcal{N} \prec \mathcal{M}$.

Seja $X_0 = X$ e defina indutivamente

$$X_{i+1} = X_i \cup \{f^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n); \quad n \in \mathbb{N}^*, \ f \text{ é um símbolo funcional } n\text{-ário de } \mathcal{L}^* \text{ e } a_1, \ldots, a_n \in X_i\}$$

Vamos agora definir uma $\mathcal{L}^*$-estrutura $\mathcal{N}$.

Seja $N = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$, assim $X \subset N$ e $|\mathcal{N}| \leq |X| + |\mathcal{L}^*| + \aleph_0 = |X| + |\mathcal{L}| + \aleph_0$.

Seja f um símbolo funcional n-ário de $\mathcal{L}^*$, interpretaremos f em $\mathcal{N}$ como

$$f^{\mathcal{N}} = f^{\mathcal{M}}|_{N^n}$$

Vejamos que $f^{\mathcal{N}}$ está bem definida. Se $(a_1, \ldots, a_n) \in N^n$, então para algum $i \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n \in X_i$, logo $f^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n) \in X_{i+1} \subset N$.

Seja p um símbolo de predicado n-ário de $\mathcal{L}^*$, interpretaremos p em $\mathcal{N}$ como

$$p^{\mathcal{N}} = p^{\mathcal{M}} \cap N^n$$

Observe que dado $(a_1, \ldots, a_n) \in N^n$, $(a_1, \ldots, a_n) \in p^{\mathcal{N}}$ sse $(a_1, \ldots, a_n) \in p^{\mathcal{M}}$.

Seja c um símbolo de constante de $\mathcal{L}^*$. Então existe uma função Skolem $f_c \in \mathcal{L}^*$ tal que $f_c^{\mathcal{M}}(x) = c^{\mathcal{M}}$ para todo $x \in M$. De fato, se $\varphi(v, w)$ é a fórmula $w = c$, então existe um símbolo funcional $f_c \in \mathcal{L}^*$ tal que

$$Th(\mathcal{M}) \vDash \forall v(\exists w(w = c) \rightarrow f_c(v) = c)$$

Então, dado $x \in X_i$, para qualquer $i \in \mathbb{N}$,

$$c^{\mathcal{M}} = f_c^{\mathcal{M}}(x) \in X_{i+1} \subset N$$

Assim, interpretaremos c em $\mathcal{N}$ como

$$c^{\mathcal{N}} = c^{\mathcal{M}}$$

Portanto $\mathcal{N}$ é sub-estrutura de $\mathcal{M}$.

Agora sejam $\varphi(v_1, \ldots, v_n, w)$ uma $\mathcal{L}^*$-fórmula de $a_1, \ldots, a_n \in N$. Se $b \in M$ e $\mathcal{M} \models \varphi(\overline{a}, b)$, então $\mathcal{M} \models \varphi(\overline{a}, f(\overline{a}))$ para algum símbolo funcional $f \in \mathcal{L}^*$. Por construção $f^{\mathcal{M}}(\overline{a}) \in N$. Logo, pela proposição 4.2.5, $\mathcal{N} \prec \mathcal{M}$.

■

4.3 Teoria Universal

Definição 4.3.1 *Uma* sentença universal *é uma sentença da forma* $\forall v_1 \ldots \forall v_n \varphi(v_1, \ldots, v_n)$, *onde* φ *é uma fórmula livre de quantificadores.*

Definição 4.3.2 *Seja* T *uma* $\mathcal{L}$*-teoria. A* teoria universal *de* T*, denotada por* $\mathrm{T}_\forall$*, é o conjunto de todas as sentenças universais que são conseqüências lógicas de* T*. Isto é,* $\mathrm{T}_\forall = \{\varphi; \varphi$ *é sentença universal e* $\mathrm{T} \models \varphi\}$.

Lema 4.3.3 *Sejam* T *uma* $\mathcal{L}$*-teoria e* $\mathcal{M} \models \mathrm{T}_\forall$*. Então* $\mathrm{T} \cup Diag(\mathcal{M})$ *é uma* $\mathcal{L}_M$*-teoria satisfatível.*

Demonstração

Suponha que $\mathrm{T} \cup Diag(\mathcal{M})$ não seja satisfatível. Então, pelo teorema da compacidade, existe $\Delta = \{\psi_1, \ldots \psi_n\} \subset Diag(\mathcal{M})$ tal que $\mathrm{T} \cup \Delta$ não seja satisfatível. Sejam $c_1, \ldots, c_m \in \mathcal{L}_M \setminus \mathcal{L}$ os símbolos de constante usados em $\psi_1, \ldots, \psi_n$, então, para $i = 1, \ldots, n$, ψ_i é a $\mathcal{L}_M$-sentença $\varphi_i(c_1, \ldots, c_m)$, onde φ_i é uma $\mathcal{L}$-fórmula livre de quantificadores.

Se existisse um modelo para a $\mathcal{L}$-teoria $\mathrm{T} \cup \{\exists v_1 \ldots \exists v_m \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i(v_1, \ldots, v_m)\}$, então poderiamos ver esse modelo como uma $\mathcal{L}_M$-estrutura interpretando $c_1, \ldots, c_m$ como testemunha para a $\mathcal{L}$-fórmula existencial, desta forma $\mathrm{T} \cup \Delta$ seria satisfatível. Logo, pelo lema 3.1.6,

$$\mathrm{T} \models \forall v_1 \ldots \forall v_m \bigvee_{i=1}^{n} \neg\varphi_i(v_1, \ldots, v_m)$$

o que implica

$$\forall v_1 \ldots \forall v_m \bigvee_{i=1}^{n} \neg\varphi_i(v_1, \ldots, v_m) \in \mathrm{T}_\forall$$

contradizendo o fato de $\mathcal{M} \models \mathrm{T}_\forall$, visto que $\mathcal{M} \models \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i(c_1, \ldots, c_m)$.

Portanto $\mathrm{T} \cup Diag(\mathcal{M})$ é satisfatível.

■

Proposição 4.3.4 *Seja* T *uma* $\mathcal{L}$*-teoria. Então* $\mathcal{A} \models \mathrm{T}_\forall$ *se, e somente se, existe* $\mathcal{M} \models \mathrm{T}$ *com* $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$.

Demonstração

Suponha primeiramente que $\mathcal{A} \models \mathrm{T}_\forall$. Então, pelo lema anterior, existe um modelo $\mathcal{N}$ para a $\mathcal{L}_A$-teoria $\mathrm{T} \cup Diag(\mathcal{A})$. Obviamente $\mathcal{N} \models \mathrm{T}$, e pelo lema 4.2.3, existe uma $\mathcal{L}$-imersão $\eta : \mathcal{A} \to \mathcal{N}$. Portanto, pela proposição 1.2.9, existe $\mathcal{M} \models \mathrm{T}$ com $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$.

Agora suponha $\mathcal{M} \models \mathrm{T}$ e seja $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$. Como $\mathrm{T} \models \mathrm{T}_\forall$, $\mathcal{M} \models \mathrm{T}_\forall$. Assim, visto que as sentenças de $\mathrm{T}_\forall$ são da forma $\forall v_1 \ldots \forall v_n \varphi(v_1, \ldots, v_n)$, temos que para qualquer $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$

$$\mathcal{M} \models \forall v_1 \ldots \forall v_n \varphi(v_1, \ldots, v_n) \Rightarrow \mathcal{N} \models \forall v_1 \ldots \forall v_n \varphi(v_1, \ldots, v_n)$$

Logo $\mathcal{N} \models \mathrm{T}_\forall$, em particular $\mathcal{A} \models \mathrm{T}_\forall$.

■

Corolário 4.3.5 *Sejam* T *e* T' $\mathcal{L}$*-teorias. Suponha que* $\mathcal{A} \models \mathrm{T}'$ *se, e somente se, existe* $\mathcal{M} \models \mathrm{T}$ *com* $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$*. Então* T' *é uma axiomatização de* $\mathrm{T}_\forall$.

Demonstração

Segue imediata da proposição anterior.

$$\mathcal{A} \models \mathrm{T}' \Leftrightarrow \text{ existe } \mathcal{M} \models \mathrm{T} \text{ com } \mathcal{A} \subset \mathcal{M} \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \mathrm{T}_\forall$$

■

Definição 4.3.6 *Dizemos que uma $\mathcal{L}$-teoria* T *tem uma* axiomatização universal *se existe um conjunto de $\mathcal{L}$-sentenças universais Γ tal que, para toda $\mathcal{L}$-estrutura $\mathcal{M}$, $\mathcal{M} \models \Gamma$ se, e somente se, $\mathcal{M} \models \mathrm{T}$.*

Teorema 4.3.7 *Seja* T *uma $\mathcal{L}$-teoria. Então* T *tem axiomatização universal se, e somente se, para todo $\mathcal{M} \models \mathrm{T}$, se $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ então $\mathcal{N} \models \mathrm{T}$.*

Demonstração

Suponha que T tem uma axiomatização universal Γ. Assim, pela definição, $\mathrm{T} \models \Gamma$ e $\Gamma \models \mathrm{T}$. Observe que $\Gamma \subset \mathrm{T}_\forall$, logo $\mathrm{T}_\forall \models \mathrm{T}$, e como $\mathrm{T} \models \mathrm{T}_\forall$, $\mathrm{T}_\forall$ também é uma axiomatização universal de T. Sejam $\mathcal{M} \models \mathrm{T}$ e $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$. Então, pela proposição 4.3.4, $\mathcal{N} \models \mathrm{T}_\forall$, o que implica $\mathcal{N} \models \mathrm{T}$.

Suponha agora que para todo $\mathcal{M} \models \mathrm{T}$, se $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ então $\mathcal{N} \models \mathrm{T}$. Seja $\mathcal{A} \models \mathrm{T}_\forall$, então, pela proposição 4.3.4, existe $\mathcal{M} \models \mathrm{T}$ com $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$, logo, por hipótese, $\mathcal{A} \models \mathrm{T}$. Portanto $\mathrm{T}_\forall$ é uma axiomatização universal de T.

■

4.4 Eliminação de Quantificadores

Veremos nesta seção que algumas fórmulas com quantificadores podem ser equivalentes à outras sem quantificadores. Por exemplo, seja $\varphi(a,b,c)$ a fórmula $\exists x(ax^2 + bx + c = 0)$. Então

$$\mathbb{R} \models \forall a \forall b \forall c (\varphi(a,b,c) \leftrightarrow [(a \neq 0 \wedge b^2 - 4ac \geq 0) \vee (a = 0 \wedge (b \neq 0 \vee c = 0))])$$

e

$$\mathbb{C} \models \forall a \forall b \forall c (\varphi(a,b,c) \leftrightarrow (a \neq 0 \vee b \neq 0 \vee c = 0))$$

Em ambos os casos φ é equivalente a uma fórmula livre de quantificadores.
Teorias com eliminação de quantificadores têm conjuntos definíveis relativamente fáceis de caracterizar, e, em exemplos específicos, têm estrutura interessante em aplicações.

Definição 4.4.1 *Seja* T *uma $\mathcal{L}$-teoria. Dizemos que* T *tem* eliminação de quantificadores *se para toda $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ existe uma $\mathcal{L}$-fórmula livre de quantificadores $\psi(v_1, \ldots, v_n)$ tal que*

$$\mathrm{T} \models \forall v_1 \ldots \forall v_n \varphi(v_1, \ldots, v_n) \leftrightarrow \psi(v_1, \ldots, v_n)$$

Mostraremos que OLD tem eliminação de quantificadores. Para isso precisamos de uma variante da proposição 4.1.5.

Lema 4.4.2 *Sejam $(A,<)$ e $(B,<)$ modelos de OLD enumeráveis, $a_1,\ldots,a_n \in A$ e $b_1,\ldots,b_n \in B$ tais que $a_1 < \ldots < a_n$ e $b_1 < \ldots < b_n$. Então existe um isomorfismo $f : A \to B$ tal que $f(a_i) = b_i$, para todo $i = 1,\ldots,n$.*

Demonstração

Modificando a demonstração da proposição 4.1.5, tome $A_0 = \{a_1,\ldots,a_n\}$, $B_0 = \{b_1,\ldots,b_n\}$ e $f_0 : A_0 \to B_0$ onde $f_0(a_i) = b_i$, para $i = 1,\ldots,n$. No que segue, a demonstração é igual.

$\blacksquare$

Teorema 4.4.3 *OLD tem eliminação de quantificadores.*

Demonstração

Observe primeiramente que $\mathbb{Q} \models OLD$, e como OLD é completa, dada uma sentença φ, $OLD \models \varphi$ sse $\mathbb{Q} \models \varphi$.

Agora, se φ é uma sentença e $OLD \models \varphi$, então

$$OLD \models \forall v\varphi \leftrightarrow v = v$$

enquanto, se $OLD \models \neg\varphi$, então

$$OLD \models \forall v\varphi \leftrightarrow v \neq v$$

Suponha que φ é uma fórmula com variáveis livres $v_1,\ldots,v_n$, $n \geq 1$. Mostraremos que existe uma fórmula livre de quantificadores ψ com variáveis entre $v_1,\ldots,v_n$ tal que

$$\mathbb{Q} \models \forall v_1 \ldots \forall v_n \varphi(v_1,\ldots,v_n) \leftrightarrow \psi(v_1,\ldots,v_n)$$

e portanto

$$OLD \models \forall v_1 \ldots \forall v_n \varphi(v_1,\ldots,v_n) \leftrightarrow \psi(v_1,\ldots,v_n)$$

Defina uma função

$$\sigma : \{(i,j); 1 \leq i < j \leq n\} \to \{0,1,2\}$$

Seja $\chi_\sigma(v_1, \ldots, v_n)$ a fórmula

$$\left(\bigwedge_{\sigma(i,j)=0} v_i = v_j \right) \wedge \left(\bigwedge_{\sigma(i,j)=1} v_i < v_j \right) \wedge \left(\bigwedge_{\sigma(i,j)=2} v_j < v_i \right)$$

Dizemos que σ é uma função sinal e que χ_σ é uma condição de sinal.

Observe que se $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}$, então podemos achar uma função sinal σ tal que $\mathbb{Q} \vDash \chi_\sigma(a_1, \ldots, a_n)$. Basta verificar as relações entre a_i e a_j, para $1 \leq i < j \leq n$.

Seja

$$\begin{aligned} \Gamma_\varphi = \{\sigma;\ & \sigma \text{ é uma função sinal e existem } a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Q} \\ & \text{tal que } \mathbb{Q} \vDash \chi_\sigma(a_1, \ldots, a_n) \wedge \varphi(a_1, \ldots, a_n)\} \end{aligned}$$

Caso $\Gamma_\varphi = \emptyset$, temos que

$$\mathbb{Q} \vDash \forall v_1 \ldots \forall v_n \neg\varphi(v_1, \ldots, v_n)$$

assim,

$$\mathbb{Q} \vDash \forall v_1 \ldots \forall v_n \varphi(v_1, \ldots, v_n) \leftrightarrow v_1 \neq v_1$$

Caso $\Gamma_\varphi \neq \emptyset$, defina

$$\psi_\varphi(v_1, \ldots, v_n) := \bigvee_{\sigma \in \Gamma_\varphi} \chi_\sigma(v_1, \ldots, v_n)$$

Note que ψ_φ está bem definida, pois Γ_φ é finito, visto que existem apenas finitas possibilidades para a função sinal σ.

Pela definição de Γ_σ, temos

$$\mathbb{Q} \vDash \forall v_1 \ldots \forall v_n \varphi(v_1, \ldots, v_n) \rightarrow \psi_\varphi(v_1, \ldots, v_n)$$

De fato, se $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q} \vDash \varphi(a_1, \ldots, a_n)$, basta tomar uma função sinal σ tal que $\mathbb{Q} \vDash \chi_\sigma(a_1, \ldots, a_n)$. Claramente $\sigma \in \Gamma_\varphi$.

Agora suponha que $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q} \vDash \psi_\varphi(b_1, \ldots, b_n)$. Seja $\sigma \in \Gamma_\varphi$ tal que $\mathbb{Q} \vDash \chi_\sigma(b_1, \ldots, b_n)$. Então existe $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}$ tal que

$$\mathbb{Q} \vDash \varphi(a_1, \ldots, a_n) \wedge \chi_\sigma(a_1, \ldots, a_n)$$

Pelo lema anterior, existe um automorfismo f de $\mathbb{Q}$ tal que $f(a_i) = b_i$, para $i = 1, \ldots, n$, e pelo teorema 1.4.8, $\mathbb{Q} \vDash \varphi(b_1, \ldots, b_n)$.

Portanto $OLD \models \forall v_1 \ldots \forall v_n \varphi(v_1, \ldots, v_n) \leftrightarrow \psi_\varphi(v_1, \ldots, v_n)$.

$\blacksquare$

Teorema 4.4.4 *Sejam $\mathcal{L}$ uma linguagem contendo um símbolo de constante c,* T *uma $\mathcal{L}$-teoria e $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ uma $\mathcal{L}$-fórmula. São equivalentes:*

i. Existe uma $\mathcal{L}$-fórmula livre de quantificadores $\psi(v_1, \ldots, v_n)$ tal que

$$\mathrm{T} \models \forall v_1 \ldots \forall v_n \varphi(v_1, \ldots, v_n) \leftrightarrow \psi(v_1, \ldots, v_n)$$

ii. Se $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ são modelos de T*, $\mathcal{A}$ é uma $\mathcal{L}$-estrutura contida em $\mathcal{M}$ e em $\mathcal{N}$ e $a_1, \ldots, a_n \in A$, então*

$$\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$$

Demonstração

(*i.* $\Rightarrow$ *ii.*)

Suponha que

$$\mathrm{T} \models \forall v_1 \ldots \forall v_n \varphi(v_1, \ldots, v_n) \leftrightarrow \psi(v_1, \ldots, v_n)$$

onde ψ é livre de quantificadores.

Seja $a_1, \ldots, a_n \in A$, onde $\mathcal{A}$ é uma subestrutura comum de $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$, as quais são modelos de T. Pelo corolário 1.4.2, fórmula livre de quantificadores são preservadas por subestruturas e extensões. Logo

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \quad & \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \psi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \psi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \psi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \end{aligned}$$

(*ii.* $\Rightarrow$ *i.*)

Se $\mathrm{T} \models \forall v_1 \ldots \forall v_n \varphi(v_1, \ldots, v_n)$, $\mathrm{T} \models \forall v_1 \ldots \forall v_n (\varphi(v_1, \ldots, v_n) \leftrightarrow c = c)$, e se $\mathrm{T} \models \forall v_1 \ldots \forall v_n \neg\varphi(v_1, \ldots, v_n)$, $\mathrm{T} \models \forall v_1 \ldots \forall v_n (\varphi(v_1, \ldots, v_n) \leftrightarrow c \neq c)$. Suponha que $\mathrm{T} \cup \{\forall v_1 \ldots \forall v_n \varphi(v_1, \ldots, v_n)\}$ e $\mathrm{T} \cup \{\forall v_1 \ldots \forall v_n \neg\varphi(v_1, \ldots, v_n)\}$ são satisfatíveis. Sejam $d_1, \ldots, d_n$ novos símbolos de constante de $\mathcal{L}$. E seja

$$\Gamma(\underbrace{d_1, \ldots, d_n}_{\overline{d}}) = \{\psi(\overline{d}); \psi \text{ é livre de quantificadores e } \mathrm{T} \models \varphi(\overline{d}) \leftrightarrow \psi(\overline{d})\}$$

Mostraremos que $\mathrm{T} \cup \Gamma(\overline{d}) \vDash \varphi(\overline{d})$, pois sendo assim, pelo teorema da compacidade, existem $\psi_1(\overline{d}), \ldots, \psi_m(\overline{d}) \in \Gamma(\overline{d})$ tais que

$$\mathrm{T} \cup \{\psi_1(\overline{d}), \ldots, \psi_m(\overline{d})\} \vDash \varphi(\overline{d})$$

assim,

$$\mathrm{T} \vDash \bigwedge_{i=1}^{m} \psi_i(\overline{d}) \to \varphi(\overline{d})$$

mas cada $\psi_i(\overline{d}) \in \Gamma(\overline{d})$, logo

$$\mathrm{T} \vDash \varphi(\overline{d}) \leftrightarrow \bigwedge_{i=1}^{m} \psi_i(\overline{d})$$

como os símbolos $d_1, \ldots, d_n$ foram tomados de forma arbitrária, isto é, independentes de interpretação, temos

$$\mathrm{T} \vDash \forall v_1 \ldots \forall v_n \big(\varphi(v_1, \ldots, v_n) \leftrightarrow \bigwedge_{i=1}^{m} \psi_i(v_1, \ldots, v_n)\big)$$

onde $\bigwedge_{i=1}^{m} \psi_i(v_1, \ldots, v_n)$ é livre de quantificadores.

Vejamos então que $\mathrm{T} \cup \Gamma(\overline{d}) \vDash \varphi(\overline{d})$.

Suponha que $\mathrm{T} \cup \Gamma(\overline{d}) \nvDash \varphi(\overline{d})$, então, pelo lema 3.1.6, seja

$$\mathcal{M} \vDash \mathrm{T} \cup \Gamma(\overline{d}) \cup \{\neg\varphi(\overline{d})\}$$

Seja $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ uma subestrutura gerada por $\{d_1^{\mathcal{M}}, \ldots, d_n^{\mathcal{M}}\}$. Tome

$$\Sigma = \mathrm{T} \cup Diag(\mathcal{A}) \cup \{\varphi(\overline{d})\}$$

Suponha que Σ é insatisfatível. Então existem $\psi_1(\overline{d}), \ldots, \psi_m(\overline{d}) \in Diag(\mathcal{A})$ tais que

$$\mathrm{T} \cup \{\psi_1(\overline{d}), \ldots, \psi_m(\overline{d})\} \vDash \neg\varphi(\overline{d})$$

assim,

$$\mathrm{T} \vDash \bigwedge_{i=1}^{m} \psi_i(\overline{d}) \to \neg\varphi(\overline{d})$$

logo

$$T \vDash \varphi(\overline{d}) \to \bigvee_{i=1}^{m} \neg\psi_i(\overline{d})$$

o que implica

$$\underbrace{\bigvee_{i=1}^{m} \neg\psi_i(\overline{d})}_{\psi} \in \Gamma(\overline{d})$$

Como $\mathcal{M} \vDash \Gamma(\overline{d})$, $\mathcal{M} \vDash \psi$, e como ψ é livre de quantificadores, $\mathcal{A} \vDash \psi$, contradizendo o fato de que $\mathcal{A} \vDash \psi_i(\overline{d})$ para todo $i = 1, \ldots, m$. Portanto Σ é satisfatível.

Seja $\mathcal{N} \vDash \Sigma$. Então $\mathcal{N} \vDash \varphi(\overline{d})$, e como $Diag(\mathcal{A}) \subset \Sigma$, pelo lema 4.2.3, $\mathcal{A} \subset \mathcal{N}$. Mas $\mathcal{M} \vDash \neg\varphi(\overline{d})$, então, por *ii.*, $\mathcal{N} \vDash \neg\varphi(\overline{d})$, contradição. Portanto $T \cup \Gamma(\overline{d}) \vDash \varphi(\overline{d})$.

■

Lema 4.4.5 *Seja* T *uma* $\mathcal{L}$*-teoria. Suponha que para qualquer fórmula livre de quantificadores* $\theta(v_1, \ldots, v_n, w)$ *existe uma fórmula* $\psi(v_1, \ldots, v_n)$ *livre de quantificadores tal que*

$$T \vDash \forall v_1 \ldots \forall v_n (\exists w \theta(v_1, \ldots, v_n, w) \leftrightarrow \psi(v_1, \ldots, v_n))$$

Então T *tem eliminação de quantificadores.*

Demonstração

Seja $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ uma $\mathcal{L}$-fórmula. Queremos mostrar que

$$T \vDash \forall v_1 \ldots \forall v_n \big(\varphi(v_1, \ldots, v_n) \leftrightarrow \psi(v_1, \ldots, v_n)\big)$$

para alguma fórmula $\psi(v_1, \ldots, v_n)$ livre de quantificadores.

Mostraremos isso por indução sobre fórmulas. Se $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ é uma fórmula atômica, nada a fazer. Suponha que para $i = 0, 1$

$$T \vDash \forall v_1 \ldots \forall v_n \big(\theta_i(v_1, \ldots, v_n) \leftrightarrow \psi_i(v_1, \ldots, v_n)\big)$$

onde $\psi_i(v_1, \ldots, v_n)$ é livre de quantificadores.

Se φ é igual à $\neg\theta_0$, então

$$T \vDash \forall v_1 \ldots \forall v_n \big(\varphi(v_1, \ldots, v_n) \leftrightarrow \neg\psi_0(v_1, \ldots, v_n)\big)$$

Se φ é igual à $\theta_0 \wedge \theta_1$, então

$$\mathrm{T} \vDash \forall v_1 \ldots \forall v_n \big(\varphi(v_1, \ldots, v_n) \leftrightarrow \psi_0(v_1, \ldots, v_n) \wedge \psi_1(v_1, \ldots, v_n)\big)$$

Agora suponha que

$$\mathrm{T} \vDash \forall v_1 \ldots \forall v_n \forall w \big(\theta(v_1, \ldots, v_n, w) \leftrightarrow \psi_0(v_1, \ldots, v_n, w)\big)$$

onde ψ_0 é livre de quantificadores. Se $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ é igual à $\exists w \theta(v_1, \ldots, v_n, w)$, então

$$\mathrm{T} \vDash \forall v_1 \ldots \forall v_n \big(\varphi(v_1, \ldots, v_n) \leftrightarrow \exists w \psi_0(v_1, \ldots, v_n, w)\big)$$

Por hipótese, existe uma fórmula $\psi(v_1, \ldots, v_n)$ livre de quantificadores tal que

$$\mathrm{T} \vDash \forall v_1 \ldots \forall v_n \big(\exists w \psi_0(v_1, \ldots, v_n, w) \leftrightarrow \psi(v_1, \ldots, v_n)\big)$$

Portanto

$$\mathrm{T} \vDash \forall v_1 \ldots \forall v_n \big(\varphi(v_1, \ldots, v_n) \leftrightarrow \psi(v_1, \ldots, v_n)\big)$$

■

Teorema 4.4.6 *Seja* T *uma* $\mathcal{L}$*-teoria. Suponha que para toda fórmula* $\varphi(v_1, \ldots, v_n, w)$ *livre de quantificadores, se* $\mathcal{M}$ *e* $\mathcal{N}$ *são modelos de* T*,* $\mathcal{A}$ *é uma subestrutura comum de* $\mathcal{M}$ *e* $\mathcal{N}$*,* $a_1, \ldots, a_n \in A$ *e existe* $b \in M$ *tal que* $\mathcal{M} \vDash \varphi(a_1, \ldots, a_n, b)$*, então existe* $c \in N$ *tal que* $\mathcal{N} \vDash \varphi(a_1, \ldots, a_n, c)$*. Então* T *tem eliminação de quantificadores.*

Demonstração

Sejam $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ modelos de T, $\mathcal{A}$ subestrutura comum de $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ e $a_1, \ldots, a_n \in A$. Por hipótese

$$\mathcal{M} \vDash \exists w \varphi(a_1, \ldots, a_n, w) \Rightarrow \mathcal{N} \vDash \exists w \varphi(a_1, \ldots, a_n, w)$$

e

$$\mathcal{N} \vDash \exists w \varphi(a_1, \ldots, a_n, w) \Rightarrow \mathcal{M} \vDash \exists w \varphi(a_1, \ldots, a_n, w)$$

logo

$$\mathcal{M} \vDash \exists w \varphi(a_1, \ldots, a_n, w) \Leftrightarrow \mathcal{N} \vDash \exists w \varphi(a_1, \ldots, a_n, w)$$

Assim, pelo teorema 4.4.4, existe uma fórmula $\psi(v_1, \ldots, v_n)$ livre de quantificadores tal que

$$\mathrm{T} \models \forall v_1 \ldots \forall v_n \big(\exists w \varphi(v_1, \ldots, v_n, w) \leftrightarrow \psi(v_1, \ldots, v_n)\big)$$

Portanto, pelo lema anterior, T tem eliminação de quantificadores.

$\blacksquare$

Definição 4.4.7 *Seja* T *uma $\mathcal{L}$-teoria. Dizemos que* T *tem* modelos algebricamente primos, *se dado $\mathcal{A} \models \mathrm{T}_\forall$, existem $\mathcal{M} \models \mathrm{T}$ e uma imersão $i : \mathcal{A} \to \mathcal{M}$ tais que , para quaisquer $\mathcal{N} \models \mathrm{T}$ e $j : \mathcal{A} \to \mathcal{N}$ imersão, existe uma imersão $h : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ tal que $j = h \circ i$.*

No que segue, vamos considerar GAD, a teoria dos grupos abelianos com divisão livres de torção, vista na linguagem $\mathcal{L}_g = \{+, -, 0\}$ por uma questão de conveniência, pois nesta linguagem uma subestrutura de um grupo é um subgrupo.

Proposição 4.4.8 *GAD tem modelos algebricamente primos.*

Demonstração

Vejamos primeiramente que $GAD_\forall$ é uma axiomatização da teoria dos grupos abelianos livres de torção. Claramente todo subgrupo de um grupo abeliano com divisão livre de torção é um grupo abeliano livre de torção.

Agora, seja G um grupo abeliano livre de torção. Se $G = \{0\}$, então $H = \mathbb{Q}$ é um modelo de GAD contendo G, e como vimos na demonstração da proposição 4.1.6, H está imerso em qualquer outro modelo de GAD. Suponha G um grupo não trivial. Seja

$$X = \{(g, n), g \in G \text{ e } n \in \mathbb{N}^*\}$$

Vamos pensar intuitivamente em (g, n) como g/n. Defina uma relação de equivalência $\sim$ em X por

$$(g, n) \sim (h, m) \Leftrightarrow mg = nh$$

Seja $H = X/\sim$. Para $(g, n) \in X$, denote por $[g, n]$ a $\sim$-classe de (g, n). Defina a operação $+$ em H por

$$[g, n] + [h, m] = [mg + nh, mn]$$

Vejamos que $+$ está bem definida. Suponha $(g_0, n_0) \sim (g, n)$, então $ng_0 = n_0 g$, logo, como G é abeliano,

$$mn_0(mg + nh) = mmn_0 g + mn_0 nh = mmng_0 + mnn_0 h = mn(ng_0 + n_0 h)$$

portanto

$$(mg_0 + n_0 h, mn_0) \sim (mg + nh, mn)$$

e

$$[g, n] + [h, m] = [mg + nh, mn] = [mg_0 + n_0 h, mn_0] = [g_0, n_0] + [h, m]$$

O elemento neutro de H é $[0, 1]$ e o oposto é $\ominus[g, n] = [-g, n]$.

Claramente H é abeliano.

$$[g, n] + [h, m] = [mg + nh, mn] = [nh + mg, nm] = [h, m] + [g, n]$$

Se $[g, m] \in H$ e $n > 0$, é fácil ver por indução que $n[g, m] = [ng, m]$. Se $(ng, m) \sim (0, k)$, então $kng = 0$, como G é livre de torção, $g = 0$. Logo $[g, m] = [0, 1]$ e portanto H é livre de torção.

Suponha novamente $[g, m] \in H$ e $n > 0$, então $n[g, nm] = [ng, nm] = [g, m]$, logo H tem divisão.

Defina uma imersão $i : G \to H$ por $i(g) = [g, 1]$. Claramente $[g, 1] + [h, 1] = [g + h, 1]$ e se $g \neq h$, $[g, 1] \neq [h, 1]$.

Portanto, pelo corolário 4.3.5, $GAD_\forall$ é uma axiomatização para a teoria dos grupos abelianos livres de torção.

Agora suponha $H' \vDash GAD$ e $j : G \to H'$ uma imersão. Seja $k : H \to H'$ definida por

$$k([g, n]) = j(g)/n$$

Vejamos que k está bem definida. Dado $g \in G$ e $n > 0$, como H' tem divisão, existe $h \in H'$ tal que $j(g) = nh$, se $h_0 \in H'$ é tal que $j(g) = nh_0$, então $n(h - h_0) = 0$, o que implica $h = h_0$, pois H' é livre de torção. Agora sejam $(g, n), (h, m) \in X$, então

$$\begin{aligned}(g, n) \sim (h, m) \; &\Leftrightarrow mg = nh \Leftrightarrow j(mg) = j(nh) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow mj(g) = nj(h) \Leftrightarrow \frac{j(g)}{n} = \frac{j(h)}{m}\end{aligned}$$

Portanto k está bem definida e é injetora. Agora vejamos que k preserva a soma.

$$\begin{aligned} k([g,n]+[h,m]) &= k([mg+nh, mn]) = \frac{j(mg+nh)}{mn} = \\ &= \frac{mj(g)+nj(h)}{mn} = \frac{j(g)}{n} + \frac{j(h)}{m} \end{aligned}$$

Logo k é uma imersão e dado $g \in G$

$$k \circ i(g) = k([g,1]) = j(g)/1 = j(g)$$

■

Definição 4.4.9 *Sejam* T *uma* $\mathcal{L}$*-teoria e* $\mathcal{M}, \mathcal{N} \vDash \mathrm{T}$ *com* $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$*. Dizemos que* $\mathcal{M}$ *é simplesmente fechado em* $\mathcal{N}$ *e denotamos por* $\mathcal{M} \prec_s \mathcal{N}$*, se para quaisquer fórmula livre de quantificadores* $\varphi(v_1, \ldots, v_n, w)$ *e* $a_1, \ldots, a_n \in M$*,* $\mathcal{N} \vDash \exists w \varphi(a_1, \ldots, a_n, w)$ *implica* $\mathcal{M} \vDash \exists w \varphi(a_1, \ldots, a_n, w)$*.*

Proposição 4.4.10 *Sejam* $G, H \vDash GAD$ *com* $G \subset H$*. Então* $G \prec_s H$*.*

Demonstração

Seja $\varphi(v_1, \ldots, v_n, w)$ uma fórmula livre de quantificadores, então existem fórmulas $\theta_i(v_1, \ldots, v_n, w)$ atômicas ou negações de atômicas tais que φ é igual à $\bigwedge_{i=1}^{r} \theta_i$.

Observe que, para os modelos de GAD, se $\theta(v_1, \ldots, v_n, w)$ é uma fórmula atômica, então existem $d_1, \ldots, d_n, m \in \mathbb{Z}$ tais que $\theta(v_1, \ldots, v_n, w)$ é equivalente à

$$\sum_{j=1}^{n} d_j v_j + mw = 0$$

Sejam $a_1, \ldots, a_n \in G$, então podemos assumir que $\varphi(a_1, \ldots, a_n, w)$ é igual à

$$\left[\bigwedge_{i=1}^{s}\left(\underbrace{\sum_{j=1}^{n} d_{ij} a_j}_{g_i} + m_i w = 0\right)\right] \wedge \left[\bigwedge_{i=1}^{s'}\left(\underbrace{\sum_{j=1}^{n} d'_{ij} a_j}_{h_i} + m'_i w \neq 0\right)\right]$$

Note que $g_i, h_i \in G$. Suponha $b \in H$ tal que $H \vDash \varphi(a_1, \ldots, a_n, b)$. Se, para algum $i = 1, \ldots, s$, $m_i \neq 0$, então $b = -g_i/m_i \in G$, pois G tem divisão, e portanto $G \vDash \varphi(a_1, \ldots, a_n, b)$. Por outro lado, suponha que $\varphi(a_1, \ldots, a_n, w)$

é igual à $\bigwedge_{i=1}^{s'}(h_i + m'_i w \neq 0)$. Então $\varphi(a_1, \ldots, a_n, w)$ é satisfeita por qualquer elemento de H diferente de $-h_i/m'_i$, onde $i = 1, \ldots, s'$. Como $G \vDash GAD$, G é infinito, logo existe $c \in G$ tal que $G \vDash \varphi(a_1, \ldots, a_n, c)$.

■

Teorema 4.4.11 *Seja* T *uma* $\mathcal{L}$*-teoria tal que*

i. T *tem modelos algebricamente primos;*

ii. $\mathcal{M} \prec_s \mathcal{N}$ *sempre que* $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ *são modelos de* T.

Então T *tem eliminação de quantificadores.*

Demonstração

Sejam $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \vDash$ T, $\mathcal{A}$ subestrutura comum de $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$ e $\varphi(v_1, \ldots, v_n, w)$ uma fórmula livre de quantificadores . Suponha $a_1, \ldots, a_n \in A$ e $b \in M_1$ tais que $\mathcal{M}_1 \vDash \varphi(a_1, \ldots, a_n, b)$. Pela proposição 4.3.4, $\mathcal{A} \vDash \mathrm{T}_\forall$. Por *i.*, existem $\mathcal{N} \vDash$ T e η_1 e η_2 imersões de $\mathcal{N}$ em $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$, respectivamente. Por *ii.*, $\mathcal{N} \vDash \exists w \varphi(a_1, \ldots, a_n, w)$. Logo $\mathcal{M}_2 \vDash \exists w \varphi(a_1, \ldots, a_n, w)$. Portanto, pelo teorema 4.4.6, T tem eliminação de quantificadores.

■

Corolário 4.4.12 *GAD tem eliminação de quantificadores.*

Demonstração

Pela proposição 4.4.8, GAD tem modelos algebricamente primos, e pela proposição 4.4.10, $G \prec_s H$ sempre que $G \subset H$ são modelos de GAD. Portanto, pelo teorema anterior, GAD tem eliminação de quantificadores.

■

Podemos ver exemplos interessantes de conjuntos definíveis em modelos de GAD. Suponha $\varphi(v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_m)$ uma fórmula atômica. Então existem inteiros $k_1, \ldots, k_n, l_1, \ldots, l_m$ tais que φ seja equivalente à

$$\sum_{i=1}^{n} k_i v_i + \sum_{i=1}^{m} l_i w_i = 0$$

Se $G \vDash GAD$ e $b_1, \ldots, b_m \in G$, então $\varphi(v_1, \ldots, v_n, b_1, \ldots, b_m)$ define o conjunto

$$\left\{(g_1, \ldots, g_n) \in G^n; \sum_{i=1}^{n} k_i g_i + \sum_{i=1}^{m} l_i b_i = 0\right\}$$

um hiperplano de G^n. Como em GAD qualquer fórmula é equivalente à uma combinação booleana de fórmulas atômicas, qualquer subconjunto definível em G^n é uma combinação booleana de hiperplanos. Em particular, se $b_1, \ldots, b_m \in G$ e $\varphi(v, b_1, \ldots, b_m)$ define um subconjunto de G. Como hiperplanos de G são apenas pontos, temos que o conjunto $\{g \in G; G \vDash \varphi(g, b_1, \ldots, b_m)\}$ é finito ou cofinito. Lembrando que um conjunto é cofinito se o seu complementar é finito.

Definição 4.4.13 *Uma $\mathcal{L}$-teoria* T *é dita* fortemente minimal *se, para qualquer $\mathcal{M} \vDash$* T*, os subconjuntos definíveis de M são finitos ou cofinitos.*

Exemplo 4.4.14 *GAD é fortemente minimal*

Definição 4.4.15 *Seja* T *uma $\mathcal{L}$-teoria. Dizemos que* T *é* modelo-completa *se $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ sempre que $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ são modelos de* T*.*

Teorema 4.4.16 *Seja* T *uma $\mathcal{L}$-teoria. Se* T *tem eliminação de quantificadores, então* T *é modelo-completa.*

Demonstração

Sejam $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ modelos de T e $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ uma $\mathcal{L}$-fórmula. Como T tem eliminação de quantificadores, existe uma fórmula $\psi(v_1, \ldots, v_n)$ livre de quantificadores tal que

$$\mathrm{T} \vDash \forall v_1 \ldots \forall v_n \big(\varphi(v_1, \ldots, v_n) \leftrightarrow \psi(v_1, \ldots, v_n)\big)$$

Sejam $a_1, \ldots, a_n \in M$. Como fórmulas livres de quantificadores são preservadas por subestruturas e extensões,

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \vDash \varphi(a_1, \ldots, a_n) \quad &\Leftrightarrow \mathcal{M} \vDash \psi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \mathcal{N} \vDash \psi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathcal{N} \vDash \varphi(a_1, \ldots, a_n) \end{aligned}$$

Portanto T é modelo-completa.

■

Teorema 4.4.17 *Seja* T *uma teoria modelo-completa. Suponha que existe $\mathcal{M}_0 \vDash$* T *tal que $\mathcal{M}_0$ está imerso em qualquer modelos de* T*. Então* T *é completa.*

Demonstração

Seja $\mathcal{M} \models \mathrm{T}$. A imersão de $\mathcal{M}_0$ em $\mathcal{M}$ é elementar, pois T é modelo-completa. Em particular, $\mathcal{M}_0 \equiv \mathcal{M}$. Então quaisquer dois modelos de T são elementarmente equivalentes. Portanto T é completa.

$\blacksquare$

Obs.: Como $\mathbb{Q}$ está imerso em qualquer modelo de GAD, esta é uma outra prova de que GAD é completa.

Capítulo 5

Corpos Algebricamente Fechados

5.1 Teoria CAF

Seja $\mathcal{L}_a = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$ a linguagem dos anéis. Suponha $\theta(v_1, \ldots, v_n)$ uma fórmula atômica. Como não temos símbolos de predicados em $\mathcal{L}_a$, temos que $\theta(v_1, \ldots, v_n)$ é igual à $t_1(v_1, \ldots, v_n) = t_2(v_1, \ldots, v_n)$, onde t_1 e t_2 são termos. Mas o símbolo funcional "-" está em $\mathcal{L}_a$. Assim, $t_1 - t_2$ também é um termo. Logo, em qualquer $\mathcal{L}_a$-estrutura temos que a fórmula $\theta(v_1, \ldots, v_n)$ é equivalente à $t(v_1, \ldots, v_n) = 0$, onde t é um termo. Agora observe que se t é um termo livre de variáveis, então t é 0, ou t é 1, ou t é um termo envolvendo esses símbolos de constante e os símbolos funcionais $+, -, \cdot$. Ou seja, em qualquer estrutura, t será interpretado como um número inteiro. Se t é um termo dependendo de no máximo uma variável v, então, da mesma forma, temos que t será interpretado como um polinômio em $\mathbb{Z}[v]$. Indutivamente, $t(v_1, \ldots, v_n)$ será interpretado como um polinômio em $\mathbb{Z}[v_1, \ldots, v_n]$.

Lema 5.1.1 *$CAF_\forall$ é uma axiomatização da teoria dos domínios de integridade.*

Demonstração

Se D é um domínio de integridade, então o fecho algébrico do seu corpo de frações é um modelo de CAF.

De acordo com o exemplo 2.2.5, $CAF \vDash \mathrm{T}_d$, onde T_d é a teoria dos domínios de integridade. Mas as sentenças de T_d são todas universais. Logo, pelo corolário 1.4.5, toda subestrutura de CAF é um domínio de integridade.

Portanto, pelo corolário 4.3.5, $CAF_\forall$ é uma axiomatização de T_d.

■

Teorema 5.1.2 *CAF tem eliminação de quantificadores.*

Demonstração

Vamos mostrar que CAF tem modelos algebricamente primos e que se $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ são modelos de CAF, então $\mathcal{M} \prec_s \mathcal{N}$, pois assim teremos que CAF tem eliminação de quantificadores.

Se D é um domínio de integridade, então o fecho algébrico do corpo de frações de D está imerso em qualquer corpo algebricamente fechado contendo D. Assim, CAF tem modelo algebricamente primo.

Agora sejam $F \subset K$ corpos algebricamente fechados, $\varphi(x, y_1, \ldots, y_m)$ uma fórmula livre de quantificadores e $b_1, \ldots, b_m \in F$ tais que $K \models \varphi(a, b_1, \ldots, b_m)$ para algum $a \in K$.

Como φ é livre de quantificadores, podemos assumir que φ é uma conjunção de fórmulas atômicas e de negações de atômicas. Na linguagem dos anéis $\mathcal{L}_a$, fórmulas atômicas $\theta(v_1, \ldots, v_n)$ são equivalentes, em qualquer $\mathcal{L}_a$-estrutura, à $p(v_1, \ldots, v_n) = 0$ onde $p \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$.

Se $p(xy_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{Z}[x, y_1, \ldots, y_m]$, podemos ver $p(x, b_1, \ldots, b_m)$como um polinômio em $F[x]$. Então existem polinômios $p_1, \ldots, p_r, q_1, \ldots, q_s \in F[x]$ tais que $\varphi(v, b_1, \ldots, b_m)$ é equivalente à

$$\left(\bigwedge_{i=1}^{r} p_i(v) = 0 \right) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{s} q_i(v) \neq 0 \right)$$

Se algum p_i for não nulo, então a é algébrico sobre F. Como F é algebricamente fechado, $a \in F$. Suponha então que $\varphi(v, b_1, \ldots, b_m)$ é equivalente à

$$\bigwedge_{i=1}^{s} q_i(v) \neq 0$$

Mas $q_i(v) = 0$ tem apenas uma quantidade finita de soluções para cada $i \leq s$. Então existem apenas finitos elementos de F que não satisfaz φ. Como corpos algebricamente fechados são infinitos, existe $c \in F$ tal que $F \models \varphi(c, b_1, \ldots, b_m)$. Logo $F \prec_s K$.

Portanto CAF tem eliminação de quantificadores.

■

No capítulo anterior, corolário 4.1.12, vimos através do Teste de Vaught que CAF_p é completa. Agora daremos uma outra demonstração para esse mesmo fato.

Corolário 5.1.3 *CAF é modelo-completa e CAF_p é completa, onde $p = 0$ ou p é primo.*

Demonstração

CAF tem eliminação de quantificadores, logo, pelo teorema 4.4.16, CAF é modelo-completa.

Suponha $K, L \vDash CAF_p$ e seja φ uma sentença na linguagem dos anéis.

Como CAF tem eliminação de quantificadores, existe uma sentença ψ livre de quantificadores tal que

$$CAF \vDash \varphi \leftrightarrow \psi$$

Como sentenças livres de quantificadores são preservadas por subestruturas e extensões, temos

$$K \vDash \psi \Leftrightarrow \mathbb{F}_p \vDash \psi \Leftrightarrow L \vDash \psi$$

onde, se p é primo, $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}_p$, que está imerso em qualquer corpo de característica p, e se $p = 0$, $\mathbb{F}_p = \mathbb{Q}$, que está imerso em qualquer corpo de característica 0.

Assim

$$K \vDash \varphi \Leftrightarrow K \vDash \psi \Leftrightarrow L \vDash \psi \Leftrightarrow L \vDash \varphi$$

Logo $K \equiv L$ e portanto CAF_p é completa.

$\blacksquare$

5.2 Topologia de Zariski

Nesta seção introduziremos uma topologia natural em conjuntos de zeros de polinômios.

Definição 5.2.1 *Sejam K um corpo, $n \in \mathbb{N}^*$ e $R \subset K[x_1, \ldots, x_n]$. Defina*

$$\mathcal{V}(R) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in K^n; p(a_1, \ldots, a_n) = 0 \textit{ para todo } p \in R\}$$

Dizemos que $X \subset K^n$ é Zariski fechado *se $X = \mathcal{V}(S)$ para algum $S \subset K[x_1, \ldots, x_n]$.*

No teorema a seguir trataremos de espaço topológico com a topologia de fechados. Para maiores detalhes sobre espaços topológicos consulte [7].

Teorema 5.2.2 *Sejam K um corpo e $n \in \mathbb{N}^*$. Defina*

$$\tau = \{\mathcal{V}(S); S \subset K[x_1, \ldots, x_n]\}$$

Então (K^n, τ) é um espaço topológico.

Demonstração

i. $\emptyset = \mathcal{V}(\{1\})$
$K^n = \mathcal{V}(\{0\})$

ii. Sejam $X = \mathcal{V}(S)$ e $Y = \mathcal{V}(R)$ onde $S, R \subset K[x_1, \ldots, x_n]$. Defina

$$SR = \{s \cdot r; s \in S \text{ e } r \in R\}$$

Claramente $X \cup Y \subset \mathcal{V}(SR)$. Agora seja $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{V}(SR)$ e suponha que $(a_1, \ldots, a_n) \notin Y$. Então existe $r_0 \in R$ tal que

$$r_0(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$$

Mas, para todo $s \in S$,

$$(s \cdot r_0)(a_1, \ldots, a_n) = 0$$

o que implica

$$s(a_1, \ldots, a_n) = 0$$

Portanto $(a_1, \ldots, a_n) \in X$.

iii. Sejam $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ Zariski fechados. Então existem $S_\lambda \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ tais que

$$X_\lambda = \mathcal{V}(S_\lambda)$$

para cada $\lambda \in \Lambda$. Vejamos que

$$\cap X_\lambda = \mathcal{V}(\cup S_\lambda)$$

De fato,

$$(a_1, \ldots, a_n) \in \cap X_\lambda$$

se, e somente se, para todo $\lambda \in \Lambda$,

$$p(a_1, \ldots, a_n) = 0$$

qualquer que seja $p \in S_\lambda$. O que é necessário e suficiente para

$$(a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{V}(\cup S_\lambda)$$

■

Mais tarde veremos que esse espaço topológico é compacto e, em geral, não é Hausdorff. Mas antes observe que $K[x_1, \ldots, x_n]$ é um anel comutativo. Veremos agora alguns resultados relativos a esse anel. Para isso também veremos a definição de anel Noetheriano.
Obs.: Se A é um anel e $S \subset A$, denotaremos por $< S >$ o ideal gerado por S.

Teorema 5.2.3 *Seja A um anel. Então as seguintes condições são equivalentes:*

i. Todo ideal de A é finitamente gerado.

ii. Toda cadeia ascendente de ideais distintos de A é finita.

iii. Todo conjunto não vazio de ideais de A tem um elemento maximal (com respeito à ordem parcial de inclusão).

Nesse caso, se alguma dessas e portanto todas essas condições forem verdadeiras, dizemos que A é um anel Noetheriano*.*

Demonstração

i. $\Rightarrow$ *ii.*

Suponha $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \ldots$ uma cadeia ascendente de ideais de A. Seja J a união desses ideais. Então J é finitamente gerado. Sejam $j_1, \ldots, j_r$ geradores de J, assim cada gerador está em algum I_k. Então existe um índice n tal que

$$j_1, \ldots, j_r \in I_n$$

Logo

$$< j_1, \ldots, j_r > \subset I_n \subset J = < j_1, \ldots, j_r >$$

Portanto vale a igualdade.

ii. $\Rightarrow$ *iii.*

Seja S um conjunto de ideais de A e seja I_0 um elemento de S. Se I_0 não é um elemento maximal, então existe um ideal $I_1 \in S$ contendo propriamente I_0. Se I_1 não é um elemento maximal, então existe um ideal I_2 contendo propriamente I_1. Indutivamente, se temos I_n não maximal, então existe um ideal I_{n+1} contendo propriamente I_n. Dessa maneira poderiamos construir uma cadeia infinita de ideais de A, o que é um absurdo.

$iii. \Rightarrow i.$

Sejam J um ideal de A e $j_0 \in J$. Se $J \neq < j_0 >$, então existe $j_1 \in J$ tal que $j_1 \notin < j_0 >$. Procedendo indutivamente, podemos construir uma cadeia ascendente de subideais de J, a saber

$$< j_0 > \subset < j_0, j_1 > \subset < j_0, j_1, j_2 > \subset \ldots$$

onde cada inclusão é própria. O conjunto desses subideais tem um elemento maximal, digamos $< j_0, \ldots, j_r >$. Claramente esse elemento é igual à J.

■

Teorema 5.2.4 (Base de Hilbert) *Seja A um anel comutativo Noetheriano. Então o anel polinomial $A[x]$ também é Noetheriano.*

Demonstração

Seja $\mathcal{U}$ um ideal de $A[x]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sejam

$$\mathcal{U}_n = \{p \in \mathcal{U}; p \text{ tem grau } n\}$$

$$I_n = \{a_n \in A; a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathcal{U}_n\} \cup \{0\}$$

Vejamos que I_n é ideal de A. Sejam $a, b \in I_n$, então existem $p, q \in \mathcal{U}_n$ tais que os coeficientes de x^n sejam, respectivamente, a e b. Se $a = b$, então $a - b = 0 \in I_n$. Se $a \neq b$, $p - q \in \mathcal{U}_n$, visto que $\mathcal{U}$ é ideal e $p - q$ tem grau n, logo $a - b \in I_n$. Obviamente $0 \cdot a = 0 \in I_n$, agora se $0 \neq c \in A$, então $c \cdot p \in \mathcal{U}_n$, logo $c \cdot a \in I_n$.

Observe que se $p \in \mathcal{U}_n$ para algum n, então $x \cdot p \in \mathcal{U}_{n+1}$, conseqüentemente

$$I_0 \subset I_1 \subset I_2 \subset \ldots$$

Como A é Noetheriano, pelo item $ii.$ do teorema anterior, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $s > r$, $I_s = I_r$. Então, pelo item $i.$ do teorema, para cada $i = 0, \ldots, r$, seja

$$I_i = < a_{i1}, \ldots, a_{in_i} >$$

Agora, para cada $i = 0, \ldots, r$ e $j = 1, \ldots, n_i$, seja $p_{ij} \in \mathcal{U}_i$ onde a_{ij} é o coeficiente de x^i. Mostraremos que os polinômios p_{ij} formam um conjunto de geradores de $\mathcal{U}$.

Seja $q \in \mathcal{U}$ de grau d. Veremos por indução sobre d que q está em um ideal gerado pelos p_{ij}. Suponha $d \geq 0$, se $d > r$, então os coeficientes de x^d dos polinômios

$$x^{d-r}p_{r1}, \ldots, x^{d-r}p_{rn_r}$$

geram I_d. Logo, existem elementos $c_1, \ldots, c_{n_r} \in A$ tais que o polinômio

$$q - c_1x^{d-r}p_{r1} - \ldots - c_{n_r}x^{d-r}p_{rn_r}$$

tem grau menor que d, e claramente esse polinômio pertence a $\mathcal{U}$. Se $d \leq r$, podemos subtrair uma combinação linear para obter o polinômio

$$q - c_1p_{d1} - \ldots - c_{n_d}p_{dn_d}$$

de grau menor que d, também pertencente a $\mathcal{U}$. Observe que o polinômios que subtraímos de q estão no ideal gerado pelos p_{ij}. Por indução, podemos subtrair um polinômio f no ideal gerado pelos p_{ij} tal que $q - f = 0$ e portanto $\mathcal{U}$ é exatamente o ideal gerado pelos p_{ij}.

■

Corolário 5.2.5 *Seja A um anel comutativo Noetheriano. Então o anel polinomial $A[x_1, \ldots, x_n]$ também é Noetheriano.*

Demonstração

Pelo teorema anterior, $A[x_1]$ é Noetheriano, e claramente também é comutativo. Assim, podemos ver indutivamente que

$$A[x_1, \ldots, x_n] = A[x_1, \ldots, x_{n-1}][x_n]$$

é Noetheriano. ■

Sejam A um anel e $I \subset A$ um ideal. Denotaremos por

$$Rad(I) = \{a \in A; a^n \in I \text{ para algum } n \in \mathbb{N}^*\}$$

o *radical* de I.

Definição 5.2.6 *Sejam A um anel e $I \subset A$ um ideal. Dizemos que I é um* ideal radical *se $I = Rad(I)$.*

Definição 5.2.7 *Sejam K um corpo e $Y \subset K^n$. Defina*

$$\mathcal{I}(Y) = \{p \in K[x_1, \ldots, x_n]; p(a_1, \ldots, a_n) = 0 \text{ para todo } (a_1, \ldots, a_n) \in Y\}$$

Lema 5.2.8 *Sejam K um corpo, $R, S \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ e $X, Y \subset K^n$, então*

i. $\mathcal{I}(X)$ *é um ideal radical.*

ii. $S \subset \mathcal{I}(\mathcal{V}(S))$

iii. $X \subset \mathcal{V}(\mathcal{I}(X))$

iv. $X \subset Y \Rightarrow \mathcal{I}(Y) \subset \mathcal{I}(X)$

v. $S \subset R \Rightarrow \mathcal{V}(R) \subset \mathcal{V}(S)$

Demonstração

i. Sejam $p, q \in \mathcal{I}(X)$ e $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$. Se $a \in X$, então

$$p(a) - q(a) = 0 = f(a) \cdot p(a)$$

Logo $\mathcal{I}(X)$ é ideal. Agora se $f^m \in \mathcal{I}(X)$, então $f^m(a) = 0$, logo $f(a) = 0$. Portanto $\mathcal{I}(X)$ é ideal radical.

ii. Sejam $p \in S$ e $a \in \mathcal{V}(S)$, então $p(a) = 0$, logo $p \in \mathcal{I}(\mathcal{V}(S))$.

iii. Sejam $a \in X$ e $p \in \mathcal{I}(X)$, então $p(a) = 0$, logo $a \in \mathcal{V}(\mathcal{I}(X))$.

iv. Seja $p \in \mathcal{I}(Y)$, então $p(a) = 0$ para todo $a \in Y$, em particular para todo $a \in X$, logo $p \in \mathcal{I}(X)$.

v. Seja $a \in \mathcal{V}(R)$, então $p(a) = 0$ para todo $p \in R$, em particular para todo $p \in S$, logo $a \in \mathcal{V}(S)$.

■

Corolário 5.2.9 *Sejam K um corpo e $X \subset K^n$ Zariski fechado. Então $X = \mathcal{V}(\mathcal{I}(X))$.*

Demonstração

Pelo lema anterior, $X \subset \mathcal{V}(\mathcal{I}(X))$. Como X é Zariski fechado, $X = \mathcal{V}(S)$ para algum $S \in K[x_1, \ldots, x_n]$. Mas pelo lema anterior, $S \subset \mathcal{I}(\mathcal{V}(S))$. Logo

$$\mathcal{V}(\mathcal{I}(X)) = \mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{V}(S))) \subset \mathcal{V}(S) = X$$

■

Corolário 5.2.10 *Seja K um corpo e $S \subset K[x_1, \ldots, x_n]$, então $\mathcal{V}(S) = \mathcal{V}(< S >)$.*

Demonstração

Pelo lema 5.2.8, $\mathcal{V}(< S >) \subset \mathcal{V}(S)$. Agora, sejam $a \in \mathcal{V}(S)$ e $p \in < S >$. Então existem $q_1, \ldots, q_m \in S$ e $f_1, \ldots, f_m \in K[x_1, \ldots, x_n]$ tais que

$$p = f_1 q_1 + \ldots + f_m q_m$$

Logo

$$p(a) = f_1(a)q_1(a) + \ldots + f_m(a)q_m(a) = f_1(a)0 + \ldots + f_m(a)0 = 0$$

Portanto $a \in \mathcal{V}(< S >)$.

■

Proposição 5.2.11 *Seja K um corpo algebricamente fechado. Então K não é Hausdorff na topologia de Zariski.*

Demonstração

Sejam $a, b \in K$ distintos.

Suponha $A, B \subset K$ abertos tais que $a \in A$, $b \in B$ e $A \cap B = \emptyset$. Assim $X = K \setminus A$ é Zariski fechado e contém B.

Mas $X = \mathcal{V}(\mathcal{I}(X))$ e $\mathcal{I}(X)$ é um ideal. Como $K[x]$ é Noetheriano, $\mathcal{I}(X)$ é finitamente gerado, digamos por $p_1, \ldots, p_n$. Assim, pelo corolário anterior, $X = \mathcal{V}(\{p_1, \ldots, p_n\})$.

Logo, como K é um corpo algebricamente fechado, X é finito, e portanto A é infinito. Analogamente prova-se que B é infinito, o que é um absurdo, visto que $B \subset X$.

■

Teorema 5.2.12 *i. Toda cadeia descendente de conjuntos Zariski fechados é finita.*

ii. Se X_λ é Zariski fechado para todo $\lambda \in \Lambda$, onde Λ é um conjunto de índices, então existe $\Lambda_0 \subset \Lambda$ finito tal que

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = \bigcap_{\lambda \in \Lambda_0} X_\lambda$$

Demonstração

i. Seja

$$X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \dots$$

uma cadeia descendente de conjuntos Zariski fechados, então

$$\mathcal{I}(X_0) \subset \mathcal{I}(X_1) \subset \mathcal{I}(X_2) \subset \dots$$

é uma cadeia ascendente de ideais radicais. Como $K[x_1, \dots, x_n]$ é Noetheriano, essa cadeia é finita, logo a primeira cadeia também é finita, visto que para todo $i \in \mathbb{N}$, $X_i = \mathcal{V}(\mathcal{I}(X_i))$.

ii. Suponha que não exista tal Λ_0 finito. Então existe uma cópia de $\mathbb{N}$ em Λ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\bigcap_{i=0}^{n+1} X_i \subsetneq \bigcap_{i=0}^{n} X_i$$

Contradizendo o item *i.*.

■

Corolário 5.2.13 *O espaço topológico (K^n, τ), como definido no teorema 5.2.2, é compacto.*

Demonstração

Defina os conjuntos abertos em K^n como sendo os complementares dos conjuntos Zariski fechados.

Seja $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma cobertura de abertos de K^n. Então, pelo teorema anterior, existe $\Lambda_0 \subset \Lambda$ finito tal que

$$K^n \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = K^n \setminus \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} (K^n \setminus A_\lambda) \right) = K^n \setminus \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda_0} (K^n \setminus A_\lambda) \right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_0} A_\lambda$$

■

5.3 Conjuntos Construtíveis

Nesta seção mostraremos como a eliminação de quantificadores de CAF permite uma caracterização particularmente interessante dos conjuntos definíveis.

Lema 5.3.1 *Seja K um corpo. Os subconjuntos de K^n definidos por fórmulas atômicas são exatamente aqueles da forma $\mathcal{V}(\{p\})$ para algum $p \in K[x_1, \ldots, x_n]$. Um subconjunto de K^n é definido por uma fórmula livre de quantificadores se, e somente se, é uma combinação booleana de conjuntos Zariski fechados.*

Demonstração

Se $\varphi(v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_m)$ é uma fórmula atômica, então existe

$$q(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$$

tal que $\varphi(v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_m)$ é equivalente à

$$q(v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_m) = 0$$

Se

$$X = \{(a_1, \ldots, a_n) \in K^n; \varphi(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m)\}$$

então

$$q(x_1, \ldots, x_n, b_1, \ldots, b_m) \in K[x_1, \ldots, x_n]$$

e

$$X = \mathcal{V}(\{q(x_1, \ldots, x_n, b_1, \ldots, b_m)\})$$

Por outro lado, se $p \in K[x_1, \ldots, x_n]$, então existem

$$q \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$$

e $(b_1, \ldots, b_m) \in K^m$ tais que

$$p(x_1, \ldots, x_n) = q(x_1, \ldots, x_n, b_1, \ldots, b_m)$$

Logo $\mathcal{V}(\{p\})$ é definido pela fórmula

$$q(x_1, \ldots, x_n, b_1, \ldots, b_m) = 0$$

Se X é Zariski fechado, então existem $p_1, \ldots, p_r \in K[x_1, \ldots, x_n]$ tais que

$$X = \mathcal{V}(\{p_1, \ldots, p_r\}) = \mathcal{V}(\{p_1\}) \cap \ldots \cap \mathcal{V}(\{p_r\})$$

Como conjuntos definíveis por fórmulas livres de quantificadores são exatamente combinações booleanas de conjuntos definíveis por fórmulas atômicas, eles são exatamente combinações booleanas de conjuntos Zariski fechados.

$\blacksquare$

Considere o corpo $\mathbb{R}$. Seja $p \in \mathbb{R}[x, y]$ um polinomio definido por $p(x, y) = y$. Claramente $\mathcal{V}(\{p\}) = \mathbb{R} \times \{0\}$. Assim $\mathbb{R} \times \{0\}$ é definível em $\mathbb{R}^2$. Como vimos no corolário 2.3.10 que $\mathbb{R}$ não é definível em $\mathbb{C}$, a bijeção canônica de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{C}$ não é um homeomorfismo na topologia de Zariski.

Definição 5.3.2 *Dizemos que $X \subset K^n$ é construtível se X é uma combinação booleana de conjuntos Zariski fechados.*

Teorema 5.3.3 *Seja K um corpo algebricamente fechado.*

i. *$X \subset K^n$ é construtível se, e somente se, é definível.*

ii. (Teorema de Chevalley) *A imagem de um conjunto construtível por uma função polinomial é construtível.*

Demonstração

i. Pelo lema anterior, os conjuntos construtíveis são exatamente os definíveis por fórmulas livres de quantificadores. Como CAF tem eliminação de quantificadores, todo conjunto definível é definível por uma fórmula livre de quantificadores.

ii. Seja $X \subset K^n$ construtível e $p : K^n \to K^m$ uma função polinomial. Então

$$p(X) = \{y \in K^m; \text{existe } \overline{x} \in X \text{ tal que } p(\overline{x}) = y\}$$

Suponha que X seja definível por $\varphi(v_1, \ldots, v_n, c_1, \ldots, c_k)$. Então

$$p(X) = \{y \in K^m; \exists \overline{x}(\varphi(\overline{x}, c_1, \ldots, c_k) \wedge (p(\overline{x}) = y))\}$$

$\blacksquare$

Corolário 5.3.4 *Se $K \models CAF$ e $X \subset K$ é definível, então X ou $K \setminus X$ é finito. Isto é, CAF é fortemente minimal.*

Demonstração

Pela eliminação de quantificadores, X é uma combinação finita de conjuntos da forma $\mathcal{V}(\{p\})$ onde $p \in K[x]$. Mas $\mathcal{V}(\{p\})$ é o conjunto das raízes de p, logo, se $p \neq 0$, $\mathcal{V}(\{p\})$ é finito e se $p = 0$, $\mathcal{V}(\{p\}) = K$.

■

5.4 Nullstellensatz de Hilbert

Definição 5.4.1 *Seja A um anel comutativo. Dizemos que $S \subset A$ não vazio é um subconjunto multiplicativo, se dados $a, b \in S$ então $a \cdot b \in S$.*

Definição 5.4.2 *Sejam A um anel e $P \subset A$ um ideal. Dizemos que P é um ideal primo se $P \neq A$ e dados $a, b \in A$ tais que $a \cdot b \in P$ implica $a \in P$ ou $b \in P$.*

Proposição 5.4.3 *Sejam A um anel e $P \subset A$ um ideal. Então P é um ideal primo se, e somente se, $P \neq A$ e dados $G, H \subset A$ tais que $GH \subset P$ implica $G \subset P$ ou $H \subset P$.*

Demonstração

Suponha primeiramente que P é um ideal primo. Sejam $G, H \subset A$ tais que $GH \subset P$. Se G não está contido em P, então existe $g \in G \backslash P$. Como $GH \subset P$, $gh \in P$ para todo $h \in H$. Mas P é primo e $g \notin P$, logo $h \in P$. Portanto $H \subset P$.

Por outro lado, sejam $a, b \in A$ tais que $ab \in P$. Tome $G =< a >$ e $H =< b >$. Assim, dados $g \in G$ e $h \in H$, existem $r, s \in A$ tais que $g = ra$ e $h = sb$. Logo

$$gh = rsab \in P$$

Conseqüentemente $GH \subset P$. Portanto

$$a \notin P \Rightarrow G \not\subset P \Rightarrow H \subset P \Rightarrow b \in P$$

■

Lema 5.4.4 *Suponha A um anel comutativo. Sejam $S \subset A$ um conjunto multiplicativo e $I \subset A$ um ideal tais que $S \cap I = \emptyset$. Então existe um ideal primo $P \subset A$ tal que $I \subset P$ e $P \cap S = \emptyset$.*

Demonstração

Seja

$$\mathcal{X} = \{J \subset A; J \text{ é ideal, } I \subset J \text{ e } J \cap S = \emptyset\}$$

com a ordem parcial da inclusão. Note que $\mathcal{X} \neq \emptyset$ pois $I \in \mathcal{X}$.

Seja $C \subset \mathcal{X}$ uma cadeia. Claramente

$$\bigcup_{J \in C} J \in \mathcal{X}$$

Logo, pelo lema de Zorn, $\mathcal{X}$ possui um elemento maximal. Seja P um tal elemento.

Como $S \neq \emptyset$, $P \neq A$. Sejam $G, H \subset A$ ideais tais que $GH \subset P$. Suponha que $G \not\subseteq P$ e $H \not\subseteq P$. Assim, cada ideal $P + G$ e $P + H$ contém propriamente P e portanto tem intersecção não vazia com S. Conseqüentemente, existem $p, q \in P$, $g \in G$ e $h \in H$ tais que

$$p + g = s \in S$$

e

$$q + h = r \in S$$

Então

$$sr = pq + ph + gq + gh \in P + GH \subset P$$

O que é uma contradição, pois $sr \in S$ e $S \cap P = \emptyset$. Portanto P é ideal primo.

■

Teorema 5.4.5 *Sejam A um anel comutativo e I um ideal de A. Então I é um ideal radical se, e somente se, $I = \cap\{P \subset A; P$ é ideal primo e $I \subset P\}$*

Demonstração

Seja

$$J = \cap\{P \subset A; P \text{ é ideal primo e } I \subset P\}$$

Vamos mostrar que $I = J$.

Obviamente $I \subset J$. Então suponha que $a \notin I$, como I é ideal radical, $a^n \notin I$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Assim,

$$S = \{a^n + b; n > 0 \text{ e } b \in I\}$$

é claramente um conjunto mutiplicativo e $S \cap I = \emptyset$. Logo, pelo lema anterior, existe um ideal primo $P \subset A$ tal que $I \subset P$ e $P \cap S = \emptyset$. Mas então $a \notin P$. Portanto $a \notin J$.

Suponha agora $I = \cap\{P \subset A; P \text{ é ideal primo e } I \subset P\}$. Seja $a \in A$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que $a^n \in I$, então $a^n \in P$ para todo ideal primo $P \subset A$ com $I \subset P$. Como P é primo, $a \in P$, logo $a \in I$. Portanto I é um ideal radical.

■

Lema 5.4.6 *Sejam K um corpo, $P \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ um ideal primo e $L = K[x_1, \ldots, x_n]/P$. Então existe um monomorfismo $\eta : K \to L$.*

Demonstração

Claramente a "inclusão"

$$\iota : K \to K[x_1, \ldots, x_n]$$

é um monomorfismo. Vamos mostrar que $\eta = \pi \circ \iota$ é monomorfismo, onde

$$\pi : K[x_1, \ldots, x_n] \to K[x_1, \ldots, x_n]/P$$

é a projeção canônica.

Vejamos primeiramente que $\iota(K) \cap P = \{0\}$. Como ι é um monomorfismo, assumiremos $K = \iota(K)$. Suponha que existe $k \in K \cap P$, com $k \neq 0$, então $1 = \frac{1}{k}k \in P$ e portanto $P = K[x_1, \ldots, x_n]$, o que contradiz o fato de P ser um ideal primo.

Como π é homomorfismo, basta mostrar que $\pi|_K$ é injetor. Para isso, seja $a \in K$ tal que $\pi(a) = 0$. Mas $\pi(a) = 0$ sse $a \in P$, logo $a = 0$. Portanto η é monomorfismo.

■

Teorema 5.4.7 *Seja K um corpo algebricamente fechado. Suponha que H e J são ideais radicais de $K[x_1, \ldots, x_n]$ e $K \subsetneq J$. Então $\mathcal{V}(J) \subsetneq \mathcal{V}(H)$. Além disso, $X \mapsto \mathcal{I}(X)$ é uma bijeção entre os conjuntos Zariski fechados e os ideais radicais.*

Demonstração

Seja $q \in J \setminus H$. Pelo teorema 5.4.5, existe um ideal primo $P \supset H$ tal que $q \notin P$. Queremos mostrar que existe $y \in \mathcal{V}(P) \subset \mathcal{V}(H)$ tal que $q(y) \neq 0$.

Como P é ideal primo, $L = K[x_1, \ldots, x_n]/P$ é um domínio. Tome $F = \mathcal{F}_L^{alg}$ o fecho algébrico do corpo de frações de L.

Sejam $p_1, \ldots, p_m \in K[x_1, \ldots, x_n]$ geradores de P, e para $j = 1, \ldots, n$, sejam $a_j = x_j/P \in L \subset F$. Pelo lema anterior, podemos ver K como um subcorpo de F. Assim, temos que

$$p \in P \Leftrightarrow p(x_1, \ldots, x_n)/P = 0 \Leftrightarrow p(a_1, \ldots, a_n) = 0$$

Então

$$F \models \left(\bigwedge_{i=1}^{m} \big(p_i(a_1, \ldots, a_n) = 0\big) \right) \wedge \big(q(a_1, \ldots, a_n) \neq 0\big)$$

Logo

$$F \models \exists v_1 \ldots \exists v_n \left(\bigwedge_{i=1}^{m} \big(p_i(v_1, \ldots, v_n) = 0\big) \right) \wedge \big(q(v_1, \ldots, v_n) \neq 0\big)$$

Como CAF é modelo-completa,

$$K \models \exists v_1 \ldots \exists v_n \left(\bigwedge_{i=1}^{m} \big(p_i(v_1, \ldots, v_n) = 0\big) \right) \wedge \big(q(v_1, \ldots, v_n) \neq 0\big)$$

Assim, existe $(d_1, \ldots, d_n) \in K^n$ tal que, para $i = 1, \ldots, m$, $p_i(d_1, \ldots, d_n) = 0$ e $q(d_1, \ldots, d_n) \neq 0$. Portanto $(d_1, \ldots, d_n) \in \mathcal{V}(P) \setminus \mathcal{V}(J)$.

Agora vejamos que a função definida por $X \mapsto \mathcal{I}(X)$ entre os conjuntos Zariski fechados e os ideais radicais é bijetora.

Claramente tal função é injetora, pois dados X, Y Zariski fechados,

$$\mathcal{I}(X) = \mathcal{I}(Y) \Rightarrow X = \mathcal{V}(\mathcal{I}(X)) = \mathcal{V}(\mathcal{I}(Y)) = Y$$

Para ver a sobrejetividade, seja J um ideal radical, então

$$J \subset \mathcal{I}(\mathcal{V}(J))$$

Logo

$$\mathcal{V}(J) \supset \mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{V}(J)))$$

Mas

$$\mathcal{V}(J) \subset \mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{V}(J)))$$

O que implica

$$\mathcal{V}(J) = \mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{V}(J)))$$

Portanto, pelo resultado provado neste teorema,

$$J = \mathcal{I}(\mathcal{V}(J))$$

■

Corolário 5.4.8 (Nullstellensatz de Hilbert) *Sejam K um corpo algebricamente fechado e $J \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ um ideal. Então $Rad(J) = \mathcal{I}(\mathcal{V}(J))$.*

Demonstração

Claramente

$$\mathcal{I}(\mathcal{V}(J)) \subset \mathcal{I}(\mathcal{V}(Rad(J)))$$

e pelo teorema anterior

$$\mathcal{I}(\mathcal{V}(Rad(J))) = Rad(J)$$

Agora sejam $p \in Rad(J)$ e $a \in \mathcal{V}(J)$. Então $p^n \in J$ para algum $n \in \mathbb{N}^*$. Logo

$$p^n(a) = 0$$

o que implica

$$p(a) = 0$$

Portanto $p \in \mathcal{I}(\mathcal{V}(J))$.

■

5.5 Decomposição Primária

Definição 5.5.1 *Sejam K um corpo e $X \subset K^n$ Zariski fechado. Dizemos que X é* redutível *se $X = Y \cup Z$ onde Y e Z são Zariski fechados, $Y \neq X$ e $Z \neq X$. Caso contrário, dizemos que X é* irredutível.

Proposição 5.5.2 *Sejam K um corpo e $X \subset K^n$ Zariski fechado. Então X é irredutível se, e somente se, $\mathcal{I}(X)$ é um ideal primo.*

Demonstração

Suponha primeiramente que $\mathcal{I}(X)$ não é primo. Então existem $p, q \in K[x_1, \ldots, x_n]$ tais que $p \notin \mathcal{I}(X)$, $q \notin \mathcal{I}(X)$ e $pq \in \mathcal{I}(X)$. Sejam

$$Y = X \cap \mathcal{V}(\{p\})$$

e

$$Z = X \cap \mathcal{V}(\{q\})$$

Claramente $Y \subsetneq X$ e $Z \subsetneq X$, pois $p, q \notin \mathcal{I}(X)$. Vejamos que $X = Y \cup Z$. De fato,

$$\big(X \cap \mathcal{V}(\{p\})\big) \cup \big(X \cap \mathcal{V}(\{q\})\big) = X \cap \big(\mathcal{V}(\{p\}) \cup \mathcal{V}(\{q\})\big) = X \cap \mathcal{V}(\{pq\}) = X$$

Portanto X é redutível.

Agora suponha que X seja redutível. Então existem $Y \subsetneq X$ e $Z \subsetneq X$ Zariski fechados tais que $X = Y \cup Z$. Assim, pelo teorema 5.4.7, temos que

$$\mathcal{I}(X) \subsetneq \mathcal{I}(Y)$$

e

$$\mathcal{I}(X) \subsetneq \mathcal{I}(Z)$$

Logo, existem $p \in \mathcal{I}(Y)$ e $q \in \mathcal{I}(Z)$ tais que $p, q \notin \mathcal{I}(X)$.

Vejamos que $pq \in \mathcal{I}(X)$. Se $(a_1, \ldots, a_n) \in X$, então $(a_1, \ldots, a_n) \in Y$ ou $(a_1, \ldots, a_n) \in Z$, logo $p(a_1, \ldots, a_n) = 0$ ou $q(a_1, \ldots, a_n) = 0$, donde

$$pq(a_1, \ldots, a_n) = 0$$

Portanto $\mathcal{I}(X)$ não é ideal primo.

■

Lema 5.5.3 *Sejam K um corpo algebricamente fechado e $\mathcal{W} \subset \mathbb{P}(K^n)$ uma coleção não vazia de conjuntos Zariski fechados. Então $\mathcal{W}$ possui um elemento minimal.*

Demonstração

Seja
$$\mathcal{S} = \{\mathcal{I}(X); X \in \mathcal{W}\}$$
Pelo teorema 5.2.3, $\mathcal{S}$ possui um elemento maximal. Suponha que $\mathcal{I}(X_0)$ seja um tal elemento maximal. Portanto, pelo lema 5.2.8, X_0 é um elemento minimal de $\mathcal{W}$.

■

Teorema 5.5.4 *Sejam K um corpo algebricamente fechado e $X \subset K^n$ Zariski fechado. Então existem únicos $X_1, \ldots, X_m$ Zariski fechados irredutíveis tais que*

$$X = X_1 \cup \ldots \cup X_m$$

e

$$X_i \not\subseteq \bigcup_{j \neq i} X_j$$

para todo $i = 1, \ldots, m$.

Demonstração

Seja $\mathcal{W} = \{X \subset K^n; X$ é Zariski fechado e não é união finita de conjuntos Zariski fechados irredutíveis$\}$. Provaremos que $\mathcal{W} = \emptyset$.

Se $\mathcal{W} \neq \emptyset$, então, pelo lema anterior, existe $X_0 \in \mathcal{W}$ minimal. Observe que, pela definição de $\mathcal{W}$, X_0 é redutível. Assim, existem $Y \subsetneq X_0$ e $Z \subsetneq X_0$ Zariski fechados tais que $X_0 = Y \cup Z$. Como X_0 é minimal, temos que $Y, Z \notin \mathcal{W}$, portanto Y e Z admitem uma decomposição em número finito de conjuntos Zariski fechados irredutíveis, uma contradição.

Em conseqüência, todo conjunto Zariski fechado admite tal decomposição. Agora, se tivermos
$$X_i \subset \bigcup_{j \neq i} X_j$$

para algum $i = 1, \ldots, n$, então podemos eliminar X_i da decomposição, uma vez que

$$X_i \cup \left(\bigcup_{j \neq i} X_j \right) = \bigcup_{j \neq i} X_j$$

Para provar a unicidade, suponhamos

$$X = X_1 \cup \ldots \cup X_m = Y_1 \cup \ldots \cup Y_r$$

Então, para cada $i = 1, \ldots, m$,

$$X_i = X_i \cap X = X_i \cap (Y_1 \cup \ldots \cup Y_r) = (X_i \cap Y_1) \cup \ldots \cup (X_i \cap Y_r)$$

Como X_i é irredutível, $X_i = X_i \cap Y_s$ para algum $s = 1, \ldots, r$, isto é, $X_i \subset Y_s$. Por outro lado, para esse s, teremos que $Y_s \subset X_k$ para algum k. Portanto, $X_i \subset X_k$, o que implica $i = k$, pois do contrário teríamos $X_i \subset \bigcup_{j \neq i} X_j$.

■

Corolário 5.5.5 (Decomposição Primária) *Sejam K um corpo algebricamente fechado e $J \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ um ideal radical. Então existem únicos ideais primos $P_1, \ldots, P_m$ contendo J tais que*

$$J = P_1 \cap \ldots \cap P_m$$

e

$$P_i \not\supset \bigcap_{j \neq i} P_j$$

para todo $i = 1, \ldots, m$.

Demonstração

Pelo teorema 5.4.7, existe um único $X \subset K^n$ Zariski fechado tal que

$$\mathcal{I}(X) = J$$

E pelo teorema anterior, existem únicos $X_1, \ldots, X_n \subset K^n$ Zariski fechados irredutíveis tais que

$$X = X_1 \cup \ldots \cup X_m$$

e

$$X_i \not\subset \bigcup_{j \neq i} X_j$$

para todo $i = 1, \ldots, n$. Assim, pela proposição 5.5.2, para cada i, $\mathcal{I}(X_i)$ é um ideal primo e

$$J = \mathcal{I}(X_1) \cap \ldots \cap \mathcal{I}(X_m)$$

A unicidade e o fato de

$$\mathcal{I}(X_i) \not\supseteq \bigcap_{j \neq i} \mathcal{I}(X_j)$$

para todo $i = 1, \ldots, m$, são conseqüências imediatas do teorema anterior e do teorema 5.4.7.

■

Apêndice A

Extensões Transcendentes

Mostraremos neste apêndice alguns resultados necessários para o trabalho sobre extensões transcendentes. Para isto, precisamos inicialmente de alguns resultados de extensões algébricas.

A.1 Extensões Algébricas

Veremos nesta seção apenas os enunciados dos teoremas que precisaremos para a próxima seção. As demonstrações destes teoremas podem ser vistas em [6] e [8].

Teorema A.1.1 *Seja R um domínio de integridade considerado como um subanel de seu corpo quociente F. Se E é um corpo e $f : R \to E$ é um monomorfismo, então existe um único monomorfismo de corpos $\overline{f} : F \to E$ tal que $\overline{f}|_R = f$.*

Teorema A.1.2 *Sejam F uma extensão de um corpo K e $u_1, \dots, u_m \in F$. Então o subcorpo $K(u_1, \dots, u_m)$ consiste de todos os elementos da forma*

$$p(u_1, \dots, u_m)/q(u_1, \dots, u_m) = p(u_1, \dots, u_m)q(u_1, \dots, u_m)^{-1}$$

onde $p, q \in K[x_1, \dots, x_m]$ e $q(u_1, \dots, u_m) \neq 0$.

Teorema A.1.3 *Sejam F uma extensão de um corpo K e $X \subset F$. Então o subcorpo $K(X)$ consiste de todos os elementos da forma*

$$p(u_1, \dots, u_n)/q(u_1, \dots, u_n) = p(u_1, \dots, u_n)q(u_1, \dots, u_n)^{-1}$$

onde $n \in \mathbb{N}^*$, $p, q \in K[x_1, \dots, x_n]$, $u_1, \dots, u_n \in X$ e $q(u_1, \dots, u_n) \neq 0$.

Teorema A.1.4 *Sejam F uma extensão de um corpo K e $X \subset F$. Então para cada $u \in K(X)$, existe $X' \subset X$ finito tal que $u \in K(X')$.*

Teorema A.1.5 *Sejam F uma extensão de um corpo K e $X \subset F$ tais que $F = K(X)$ e todo elemento de X é algébrico sobre K. Então F é uma extensão algébrica sobre K.*

Teorema A.1.6 *Se F é uma extensão algébrica sobre E e E é uma extensão algébrica sobre K, então F é uma extensão algébrica sobre K.*

Teorema A.1.7 *Sejam F uma extensão de um corpo K e $u \in F$ algébrico sobre K. Então $K(u) = K[u]$. Além disso $K(u) \cong K[x]/(p)$, onde $p \in K[x]$ é um polinômio mônico irredutível com grau $n \geq 1$ unicamente determinado pela condição que $p(u) = 0$.*

Teorema A.1.8 *Sejam K_1 e K_2 corpos e F_1, F_2 seus respectivos fechos algébricos. Então todo isomorfismo $K_1 \cong K_2$ se estende para um isomorfismo $F_1 \cong F_2$.*

A.2 Extensões Transcendentes

Definição A.2.1 *Sejam F uma extensão de um corpo K e S um subconjunto de F. Dizemos que S é* algebricamente independente *sobre K, se para qualquer polinômio $p \in K[x_1, \ldots, x_n]$ e para quaisquer $s_1, \ldots, s_n \in S$ distintos, $p(s_1, \ldots, s_n) = 0$ implica $p = 0$. Dizemos que S é* algebricamente dependente *sobre K se não for algebricamente independente sobre K.*

Obs.: A expressão "sobre K" pode ser omitida quando o contexto for claro.

Doravante considere K um corpo.

Teorema A.2.2 *Seja $F \supset K$ uma extensão e $\{s_1, \ldots, s_n\}$ um subconjunto de F algebricamente independente sobre K. Então existe um K-isomorfismo*

$$K(s_1, \ldots, s_n) \simeq \mathcal{F}_K(x_1, \ldots, x_n)$$

onde $\mathcal{F}_K(x_1, \ldots, x_n)$ é o corpo de funções racionais com n variáveis sobre K.

Demonstração

Seja

$$\begin{array}{rccc} \eta: & \mathcal{F}_K(x_1, \ldots, x_n) & \to & K(s_1, \ldots, s_n) \\ & \frac{p(x_1,\ldots,x_n)}{q(x_1,\ldots,x_n)} & \mapsto & \frac{p(s_1,\ldots,s_n)}{q(s_1,\ldots,s_n)} \end{array}$$

Claramente η é um homomorfismo.

Agora seja $z \in K(s_1, \ldots, s_n)$, então, pelo teorema A.1.2, podemos escrever

$$z = \frac{f(s_1, \ldots, s_n)}{g(s_1, \ldots, s_n)}$$

onde $f, g \in K[x_1, \ldots, x_n]$ e $g(s_1, \ldots, s_n) \neq 0$, logo η é epimorfismo.

Se $p/q \in \mathcal{F}_K(x_1, \ldots, x_n)$ com $\eta(p/q) = 0$, então

$$\frac{p(s_1, \ldots, s_n)}{q(s_1, \ldots, s_n)} = 0$$

mas $\{s_1, \ldots, s_n\}$ é algebricamente independente sobre K, logo $p/q = 0$.

Portanto η é isomorfismo, e se $p/q = c \in K$ então $\eta(c) = c$.

$\blacksquare$

Teorema A.2.3 *Sejam F_1 e F_2 extensões de K_1 e K_2, respectivamente, e para $i = 1, 2$, seja $S_i \subset F_i$ algebricamente independente sobre K_i. Se $f : S_1 \to S_2$ é uma função injetora e $\sigma : K_1 \to K_2$ é um monomorfismo de corpos, então podemos estender σ para um monomorfismo $\overline{\sigma} : K_1(S_1) \to K_2(S_2)$ tal que $\overline{\sigma}(s) = f(s)$ para todo $s \in S_1$. Além disso, se f for bijetora e σ for isomorfismo, então podemos estender σ para um isomorfismo $\overline{\sigma}$.*

Demonstração

Dado $z \in K_1(S_1)$, pelo teorema A.1.3, podemos escrever

$$z = \frac{p(s_1, \ldots, s_n)}{q(s_1, \ldots, s_n)} \qquad \text{(I)}$$

onde $n \in \mathbb{N}^*$, $p, q \in K_1[x_1, \ldots, x_n]$, $s_1, \ldots, s_n \in S_1$ e $q(s_1, \ldots, s_n) \neq 0$. Podemos assumir que n é tal que para $i = 1, \ldots, n$, z depende de cada s_i e só desses.

Dado $r \in \mathbb{N}^*$, seja $\mu_r : K_1[x_1, \ldots, x_r] \to \mathcal{F}_{K_2}(x_1, \ldots, x_r)$ definida por

$$\mu_r\left(\sum_{i_1,\ldots,i_r \leq m} a_{i_1,\ldots,i_r} \prod_{j=1}^{r} x_j^{i_j}\right) = \sum_{i_1,\ldots,i_r \leq m} \sigma(a_{i_1,\ldots,i_r}) \prod_{j=1}^{r} x_j^{i_j}$$

onde $m \in \mathbb{N}^*$ e cada $a_{i_1,\ldots,i_r} \in K_1$. Claramente μ_r é um monomorfismo de anéis, logo, pelo teorema A.1.1, podemos estender μ_r para um monomorfismo de corpos

$$\overline{\mu}_r : \mathcal{F}_{K_1}(x_1, \ldots, x_r) \to \mathcal{F}_{K_2}(x_1, \ldots, x_r) \qquad \text{(II)}$$

Lembrando que, para $i = 1, 2$, S_i é algebricamente independente sobre K_i e $f : S_1 \to S_2$ é injetora, se $s_1, \ldots, s_k \in S_1$ distintos, então $\{f(s_1), \ldots, f(s_k)\}$ também é algebricamente independente sobre K_2. Logo, pelo teorema anterior, existem isomorfismos

$$\eta_{1_k} : \mathcal{F}_{K_1}(x_1, \ldots, x_k) \to K_1(s_1, \ldots, s_k)$$

$$\eta_{2_k} : \mathcal{F}_{K_2}(x_1, \ldots, x_k) \to K_2(f(s_1), \ldots, f(s_k)) \qquad \text{(III)}$$

Agora defina $\overline{\sigma} : K_1(S_1) \to K_2(S_2)$ por

$$\overline{\sigma}(z) = \eta_{2_n}\overline{\mu}_n\eta_{1_n}^{-1}(z)$$

onde z é da forma descrita em (I).

Vejamos que $\overline{\sigma}$ está bem definida. Suponha, assim como em (I), que também podemos escrever

$$z = \frac{g(b_1, \ldots, b_m)}{h(b_1, \ldots, b_m)}$$

onde $m \in \mathbb{N}^*$, $g, h \in K_1[x_1, \ldots, x_m]$, $b_1, \ldots, b_m \in S_1$ e $h(s_1, \ldots, s_n) \neq 0$.

Como, para $i = 1, \ldots, n$, z depende de s_i e só desses, e como S_1 é algebricamente independente, temos que $m = n$ e $\{s_1, \ldots, s_n\} = \{b_1, \ldots, b_m\}$. Portanto $\overline{\sigma}$ está bem definida, e por (II) e (III), $\overline{\sigma}$ é monomorfismo. Agora, se σ é isomorfismo e $r \in \mathbb{N}$, então $\overline{\mu}_r$ também é isomorfismo, logo $\eta_{2_r}\overline{\mu}_r\eta_{1_r}^{-1}$ é isomorfismo, e se f é bijetora, então $\overline{\sigma}$ é isomorfismo.

$\blacksquare$

Seja F uma extensão de K. Defina o conjunto

$$\mathcal{X} = \{S \subset F; S \text{ é algebricamente independente sobre } K\}$$

Considere a ordem da inclusão em $\mathcal{X}$.
Seja $C \subset \mathcal{X}$ uma cadeia e tome

$$T = \bigcup_{S \in C} S$$

Vejamos que $T \in \mathcal{X}$. Dados $p \in K[x_1, \ldots, x_n]$ e $s_1, \ldots, s_n \in T$, existe $S \in C$ tal que $s_1, \ldots, s_n \in S$. Como S é algebricamente independente sobre K, $p(s_1, \ldots, s_n) = 0$ o que implica $p = 0$. Portanto $T \in \mathcal{X}$.
Pelo lema de Zorn, $\mathcal{X}$ possui um elemento maximal.

Definição A.2.4 *Seja F uma extensão de K. Uma* base de transcendência *de F sobre K é um subconjunto $S \subset F$ algebricamente independente sobre K e maximal no conjunto de todos subconjuntos de F algebricamente independente sobre K.*

Teorema A.2.5 *Sejam $F \supset K$ uma extensão, $S \subset F$ algebricamente independente sobre K e $u \in F \setminus K(S)$. Então $S \cup \{u\}$ é algebricamente independente sobre K se, e somente se, u é transcendente sobre $K(S)$.*

Demonstração

Suponha primeiramente que u é transcendente sobre $K(S)$.

Sejam $s_1, \ldots, s_n \in S$ distintos e $f \in K[x_1, \ldots, x_{n+1}]$ tais que

$$f(s_1, \ldots, s_n, u) = 0$$

então u é uma raiz de $f(s_1, \ldots, s_n, x_{n+1}) \in K(S)[x_{n+1}]$.
Mas $f \in K[x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}] = K[x_1, \ldots, x_n][x_{n+1}]$, assim

$$f = h_r x_{n+1}^r + \ldots + h_1 x_{n+1} + h_0$$

onde $h_i \in K[x_1, \ldots, x_n]$. Como u é transcendente sobre $K(S)$, temos

$$f(s_1, \ldots, s_n, x_{n+1}) = 0$$

logo $h_i(s_1, \ldots, s_n) = 0$ para cada $i = 1, \ldots, r$. Como S é algebricamente independente sobre K, $h_i = 0$ para todo i, logo $f = 0$. Portanto $S \cup \{u\}$ é algebricamente independente sobre K.

Agora suponha que $S \cup \{u\}$ é algebricamente independente sobre K. Seja $f \in K(S)[x]$ tal que $f(u) = 0$. Podemos escrever

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

onde $a_i \in K(S)$. Assim, pelo teorema A.1.3, existem $s_1, \ldots, s_r \in S$ tal que, para $i = 0, \ldots, n$,

$$a_i = \frac{p_i(s_1, \ldots, s_r)}{q_i(s_1, \ldots, s_r)}$$

onde $p_i, q_i \in K[x_1, \ldots, x_r]$ e $q_i(s_1, \ldots, s_r) \neq 0$.

Seja $q = q_0 q_1 \ldots q_n$, e para $i = 0, \ldots, n$, tome $\overline{p}_i = p_i q_0 \ldots q_{i-1} q_{i+1} \ldots q_n$. Observe que $q, \overline{p}_i \in K[x_1, \ldots, x_r]$. Então

$$a_i = \frac{\overline{p}_i(s_1, \ldots, s_r)}{q(s_1, \ldots, s_r)}$$

e

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} \frac{\overline{p}_i(s_1, \ldots, s_r)}{q(s_1, \ldots, s_r)} x^i = \frac{\sum_{i=0}^{n} \overline{p}_i(s_1, \ldots, s_r) x^i}{q(s_1, \ldots, s_r)}$$

Seja

$$h(x_1, \ldots, x_r, x) = \sum_{i=0}^{n} \overline{p}_i(x_1, \ldots, x_r) x^i \in K[x_1, \ldots, x_r, x]$$

Como $f(u) = 0$ e $\dfrac{1}{q(s_1, \ldots, s_r)} \neq 0$, temos que

$$h(s_1, \ldots, s_r, u) = 0$$

A independência algébrica de $S \cup \{u\}$ implica $h = 0$, e conseqüentemente $\overline{p}_i = 0$ para cada i, pois $\{1, x, \ldots, x^n\}$ é linearmente independente. Então cada $a_i = 0$ e $f = 0$. Portanto u é transcendente sobre $K(S)$.

■

Corolário A.2.6 *Sejam $F \supset K$ uma extensão e $S \subset F$ algebricamente independente sobre K. Então S é uma base de transcendência de F sobre K se, e somente se, F é algébrico sobre $K(S)$.*

Demonstração

Suponha que F não é algébrico sobre $K(S)$. Então existe $u \in F$ transcendente sobre $K(S)$. Assim, pelo teorema anterior, $S \cup \{u\}$ é algebricamente independente sobre K, logo S não é base de transcendência sobre K.

Por outro lado, se S não é base. Então, por definição, existe $u \in F$ tal que $S \cup \{u\}$ é algebricamente independente sobre K, e pelo teorema anterior, u é transcendente sobre $K(S)$, portanto F não é algébrico sobre $K(S)$.

■

Corolário A.2.7 *Seja $F \supset K$ uma extensão e suponha F algébrico sobre $K(X)$, onde $X \subset F$. Então X contém uma base de transcendência de F sobre K.*

Demonstração

Seja $S \subset X$ algebricamente independente sobre K maximal. Tal S existe pelo lema de Zorn. Então, pelo teorema A.2.5, se $u \in X \setminus S$, então u é algébrico sobre $K(S)$. Logo, pelo teorema A.1.5, $K(X)$ é algébrico sobre

$K(S)$. Conseqüentemente, pelo teorema A.1.6, F é algébrico sobre $K(S)$. Portanto, pelo corolário anterior, S é uma base de transcendência de F sobre K.

■

Teorema A.2.8 *Seja F uma extensão de K. Se S é uma base de transcendência finita de F sobre K, então qualquer base de transcendência de F sobre K tem o mesmo número de elementos de S.*

Demonstração

Seja $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ e T uma base de transcendência qualquer de F sobre K.

Vamos verificar que existe $t_1 \in T$ transcendente sobre $K(s_2, \ldots, s_n)$.

Suponha que não. Então T é algébrico sobre $K(s_2, \ldots, s_n)$. Logo, pelo teorema A.1.5, $K(s_2, \ldots, s_n)(T)$ é algébrico sobre $K(s_2, \ldots, s_n)$. Como, pelo corolário A.2.6, F é algébrico sobre $K(T)$, F é necessariamente algébrico sobre $K(T)(s_2, \ldots, s_n) = K(s_2, \ldots, s_n)(T)$. Portanto, pelo teorema A.1.6, F é algébrico sobre $K(s_2, \ldots, s_n)$. Em particular s_1 é algébrico sobre $K(s_2, \ldots, s_n)$, o que, pelo teorema A.2.5, é uma contradição, pois $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ é algebricamente independente sobre K.

Logo existe $t_1 \in T$ transcendente sobre $K(s_2, \ldots, s_n)$, e portanto $\{t_1, s_2, \ldots, s_n\}$ é algebricamente independente sobre K.

Agora, se s_1 fosse transcendente sobre $K(t_1, s_2, \ldots, s_n)$, então $\{t_1, s_1, \ldots, s_n\}$ seria algebricamente independente sobre K, o que contradiz o fato de S ser base. Assim, s_1 é algébrico sobre $K(t_1, s_2, \ldots, s_n)$, logo $K(S)(t_1) = K(t_1, s_2, \ldots, s_n)(s_1)$ é algébrico sobre $K(t_1, s_2, \ldots, s_n)$. Então F é algébrico sobre $K(t_1, s_2, \ldots, s_n)$ e portanto $\{t_1, s_2, \ldots, s_n\}$ é base de transcendência de F sobre K.

Analogamente prova-se que existe $t_2 \in T$ transcendente sobre $K(t_1, s_3, \ldots, s_n)$ e que $\{t_1, t_2, s_3, \ldots, s_n\}$ é base de F sobre K. Procedendo indutivamente, obtemos $t_1, \ldots, t_n \in T$ tais que $\{t_1, \ldots, t_n\}$ é base de F sobre K. Claramente, como T é algebricamente independente, devemos ter $T = \{t_1, \ldots, t_n\}$.

■

Teorema A.2.9 *Seja $F \supset K$ uma extensão. Se S é uma base de transcendência infinita de F sobre K, então qualquer base de transcendência de F sobre K tem o mesma cardinalidade de S.*

Demonstração

Seja T uma outra base de transcendência de F sobre K. Claramente, pelo teorema anterior, T é infinito. Se $s \in S$, então s é algébrico sobre $K(T)$, pois caso contrário, $T \cup \{s\}$ seria algebricamente independente sobre K. Assim, pelo teorema A.1.7, $K(T)(s) = K(T)[s]$ e existe $p \in K(T)[x]$ irredutível tal que $p(s) = 0$. Então, pelo teorema A.1.4, os coeficientes de p aparecem todos em $K(T_s)$ para algum $T_s \subset T$ finito. Logo $p \in K(T_s)[x]$ e s é algébrico sobre $K(T_s)$.

Para cada $s \in S$ tome $T_s \subset T$ finito como acima. Note que

$$T^* = \bigcup_{s \in S} T_s \subset T$$

e portanto é algebricamente independente sobre K. Como todo elemento de S é algébrico sobre $K(T^*)$, temos que $K(T^*)(S)$ é algébrico sobre $K(T^*)$. E como $K(S) \subset K(T^*)(S)$, todo elemento de $K(S)$ é algébrico sobre $K(T^*)$. Lembrando que F é algébrico sobre $K(S)$, temos que F é algébrico sobre $K(T^*)$. Logo T^* é uma base de transcendência de F sobre K e portanto $T^* = T$.

Observe que os conjuntos T_s não são necessariamente disjuntos. Como estamos trabalhando em ZFC, podemos dar uma boa ordem à S e denotar o menor elemento por s_0.

Seja $T'_{s_0} = T_{s_0}$ e para cada $s_0 < s \in S$ defina

$$T'_s = T_s \setminus \bigcup_{i<s} T_i$$

Claramente cada T'_s é finito e não tem intersecção com nenhum outro, e

$$\bigcup_{s \in S} T'_s = \bigcup_{s \in S} T_s = T$$

Para cada $s \in S$, escolha uma ordem fixa para os elementos de $T'_s = \{t_1^s, \ldots, t_{k_s}^s\}$.

Defina a função

$$\begin{array}{rccc} h: & \bigcup_{s \in S} T's & \rightarrow & S \times \mathbb{N} \\ & t_i^s & \mapsto & (s, i) \end{array}$$

Claramente essa função é injetora. Logo

$$|T| = \left|\bigcup_{s\in S} T's\right| \leq |S \times \mathbb{N}| = |S||\mathbb{N}| = |S|\aleph_0 = |S|$$

Procedendo desde o início da demonstração de forma análoga, prova-se que $|S| \leq |T|$. Portanto $|T| = |S|$.

■

Definição A.2.10 *Seja F extensão de K. O* grau de transcendência *de F sobre K (denotado por $gtr(F/K)$) é a cardinalidade $|S|$, onde S é base de transcendência de F sobre K.*

Teorema A.2.11 *Se F é uma extensão de E e E é uma extensão de K, então*

$$gtr(F/K) = gtr(F/E) + gtr(E/K)$$

Demonstração

Sejam S base de E/K e T base de F/E. Como $S \subset E$ e T é algebricamente independente sobre E, temos $S \cap T = \emptyset$.

Então é suficiente mostrar que $S \cup T$ é base de F/K, pois neste caso

$$gtr(F/K) = |S \cup T| = |T| + |S| = gtr(F/E) + gtr(E/K)$$

Primeiro note que todo elemento de E é algébrico sobre $K(S)$, e portanto sobre $K(S \cup T)$. Então, pelo teorema A.1.5, $K(S \cup T)(E)$ é algébrico sobre $K(S \cup T)$. Como

$$K(S \cup T) = K(S)(T) \subset E(T) \subset K(S \cup T)(E)$$

então $E(T)$ é algébrico sobre $K(S \cup T)$. Mas F é algébrico sobre $E(T)$ e portanto sobre $K(S \cup T)$.

Agora basta mostrar que $S \cup T$ é algebricamente independente sobre K.

Seja $p \in K[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$ tal que

$$p(s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_m) = 0$$

para distintos $s_1, \ldots, s_n \in S$ e $t_1, \ldots, t_m \in T$. Seja

$$q(y_1, \ldots, y_m) = p(s_1, \ldots, s_n, y_1, \ldots, y_m) \in K(S)[y_1, \ldots, y_m] \subset E[y_1, \ldots, y_m]$$

Como $q(t_1, \ldots, t_m) = 0$, a independência algébrica de T sobre E implica $q = 0$. Agora escreva

$$p(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = \sum_{i=1}^{r} f_i(x_1, \ldots, x_n) g_i(y_1, \ldots, y_m)$$

onde $f_i \in K[x_1, \ldots, x_n]$ e $g_i \in K[y_1, \ldots, y_m]$. Como

$$p(s_1, \ldots, s_n, y_1, \ldots, y_m) = q(y_1, \ldots, y_m) = 0$$

temos que $f_i(s_1, \ldots, s_n) = 0$ para cada i. A independência algébrica de S sobre K implica $f_i = 0$ para todo i. Logo $p = 0$ e portanto $S \cup T$ é algebricamente independente sobre K.

$\blacksquare$

Teorema A.2.12 *Sejam F_1 e F_2 respectivas extensões algebricamente fechados dos corpos K_1 e K_2. Se $gtr(F_1/K_1) = gtr(F_2/K_2)$, então todo isomorfismo $K_1 \cong K_2$ se estende para um isomorfismo $F_1 \cong F_2$.*

Demonstração

Suponha $\sigma : K_1 \to K_2$ um isomorfismo. Para $i = 1, 2$, seja S_i a base de transcendência de F_i/K_i. Como $|S_1| = |S_2|$, pelo teorema A.2.3, podemos estender σ para $\overline{\sigma} : K_1(S_1) \to K_2(S_2)$. Cada F_i é algebricamente fechado e algébrico sobre $K_i(S_i)$. Portanto, pelo teorema A.1.8, $\overline{\sigma}$ se estende para um isomorfismo $F_1 \cong F_2$.

$\blacksquare$

Referências Bibliográficas

[1] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald. *Introduction to Commutative Algebra.* Addison-Wesley Publishing Company, Inc., London, 1969.

[2] J. L. Bell and M. Machover. *A Course in Mathematical Logic.* Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, third impression: 1993 edition, 1977.

[3] C. C. Chang and H. J. Keisler. *Model Theory.* North-Holland, Amsterdam, 1990.

[4] A. A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel, and A. Lévy. *Foundations of set theory.* North-Holland, Amsterdam, 1984.

[5] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry.* Springer-Verlag, New York, 1977.

[6] T. W. Hungerford. *Algebra.* Springer-Verlag, New York, 1974.

[7] J. L. Kelley. *General Topology.* Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[8] S. Lang. *Algebra.* Springer-Verlag, New York, revised third edition, 2002.

[9] D. Marker. *Model Theory: An Introduction.* Springer-Verlag, New York, 2002.

[10] D. Marker, M. Messmer, and A. Pillay. Model theory of fields. *Springer Lecture Notes in Logic 5*, 1996.

[11] J. D. Monk. *Mathematical Logic.* Springer-Verlag, New York, 1976.

[12] J. R. Shoenfield. *Mathematical Logic.* Addison-Wesley Publishing Company, Inc., London, 1967.

[13] A. Tarski and R. L. Vaught. Arithmetical extensions of relational systems. *Compositio Mathematica*, 13:81–102, 1956-1958.

[14] J. Väänänen. Second-order logic and foundations of mathematics. *The Bulletin of Symbolic Logic*, 7(4):504–520, 2001.