

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA - UFSC  
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS - CFM  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Uma Aproximação Relativística para as  
Densidades de Corrente de Transição  
Nuclear no Espalhamento Quasielástico de  
Elétrons por Núcleos

AUTOR: André da Silva Schneider

ORIENTADOR: Prof. Dr. José Ricardo Marinelli

*Dissertação apresentada ao Programa do  
Curso de Pós-Graduação em Física da  
Universidade Federal de Santa Catarina  
(UFSC), como parte dos requisitos para  
obtenção do título de Mestre em Física.*

UFSC - Florianópolis  
novembro de 2006

Uma Aproximação Relativística para as  
Densidades de Corrente de Transição  
Nuclear no Espalhamento Quasielástico de  
Elétrons por Núcleos

# Agradecimentos

Agradeço

à minha família, em especial aos meus pais, Márcio e Rita, e meus irmãos, Alexandre e Mariana.

Ao Professor José Ricardo Marinelli pela orientação e pelas discussões desde a iniciação científica.

Aos meus professores da graduação, pós-graduação, aos meus colegas e todos aqueles que colaboraram na minha formação.

Aos meus amigos, principalmente ao Chiko, Renato, Ana Paula e João, pelo convívio e pelas conversas que, salvo raras exceções, nunca eram sobre física.

À CAPES pelo suporte financeiro.

# Resumo

O espalhamento de elétrons de altas energias é uma das maiores fontes de informação e compreensão sobre a estrutura nuclear. No limite de altas energias e momentum transferido alto o espalhamento é dominado pelo espalhamento quasi-elástico (QES). No QES o espalhamento ocorre como se o elétron interagisse com um único nucleon do núcleo, arrancando-o do mesmo, enquanto os outros nucleons se comportam como espectadores. Recentemente, vários trabalhos, tanto teóricos quanto experimentais, têm sido feitos na tentativa de descrever o nucleon espalhado através da reação  $(e, e'p)$  exclusiva. Um dos principais objetivos no estudo desse tipo de reação é entender detalhes da estrutura dos núcleos e propriedades dos nucleons no meio nuclear. Ao aumentar as energias envolvidas no processo se faz necessário um tratamento relativístico para descrever a cinemática do elétron e bem como a dinâmica nuclear. Nesse trabalho implementamos um método para calcular as densidades de carga e corrente nuclear de transição da reação  $(e, e'p)$  para núcleos esféricos e comparamos nossos resultados com dados experimentais disponíveis na literatura.

# Abstract

High energy electron scattering from nuclei has been one of the most important source of information and understanding about the nuclear structure. At high energy and momentum transfer, scattering is dominated by quasielastic scattering (QES). In QES scattering takes place as if the electron interacted elastically with a single nucleon, knocking it out from the nucleus, while the other nucleons behave as spectators. More recently, many theoretical (as well as experimental) efforts have been made in order to describe the ejected proton in the QES using the well known  $(e, e'p)$  exclusive reaction as a tool. One of the main aims in the study of this kind of reaction is the understanding of short range structure of nuclei and properties of the nucleon in the nuclear medium. Also, as the energy range increases in this kind of process, explicit relativistic treatment of the electron kinematics and nuclear dynamics turns out to be important. In this work we implement a method to calculate the nuclear transition current distributions in the  $(e, e'p)$  reaction for spherical nuclei and then compare our results with experimental data available in literature.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>7</b>
1.1	O Espalhamento de Elétrons . . . . .	8
1.1.1	Tipos de Espalhamento . . . . .	9
<b>2</b>	<b>O Espalhamento (<math>e, e'p</math>)</b>	<b>13</b>
2.1	Cinemática do Espalhamento . . . . .	13
2.2	Cálculo da Seção de Choque . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Modelo para as Densidades de Corrente</b>	<b>25</b>
3.1	O Modelo Nuclear e as Funções de Onda dos Estados Ligados . . . . .	26
3.1.1	O Modelo de Walecka . . . . .	27
3.1.2	A Aproximação de Hartree . . . . .	29
3.2	O Nucleon Espalhado . . . . .	34
3.3	As Densidades de Corrente . . . . .	35
3.3.1	O Operador Densidade de Corrente . . . . .	36
3.3.2	$J^\mu(\mathbf{r})$ na Aproximação de Hartree . . . . .	39
3.3.3	Decomposição em Multipolos da Densidade de Corrente . . . . .	40
3.4	Cálculo das Densidades de Carga e Corrente . . . . .	41
3.4.1	Cálculo de $J_0(\mathbf{q})$ . . . . .	41
3.4.2	Cálculo de $J_\pm(\mathbf{q})$ . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Resultados e Conclusões</b>	<b>48</b>
4.1	Resultados para a Aproximação de Hartree . . . . .	48
4.2	Densidades de Corrente e Seção de Choque . . . . .	50
4.2.1	$^{16}\text{O}(e, e'p)^{15}\text{N}$ . . . . .	52
4.2.2	$^{40}\text{Ca}(e, e'p)^{39}\text{K}$ . . . . .	56

	vii
4.3 Conclusões . . . . .	57
<b>A Métrica e Definições</b>	<b>66</b>
A.1 Matrizes de Dirac . . . . .	67
<b>B Harmônicos Esféricos e Funções de Bessel</b>	<b>68</b>
B.1 Harmônicos Esféricos . . . . .	68
B.1.1 Definição . . . . .	68
B.1.2 Derivadas de Harmônicos Esféricos . . . . .	69
B.1.3 Integrais envolvendo Harmônicos Esféricos . . . . .	69
B.2 Funções de Bessel Esféricas . . . . .	70
B.2.1 Definição . . . . .	70
B.2.2 Relações envolvendo Funções de Bessel Esféricas . . . . .	71
B.3 Harmônicos Esféricos e Funções de Bessel Esféricas . . . . .	71
<b>C Obtenção da Seção de Choque</b>	<b>73</b>
C.1 Potencial de Møller . . . . .	73
C.2 Seção de Choque na Aproximação de Ondas Planas . . . . .	74
<b>D Cálculo da função de onda do Nucleon Espalhado</b>	<b>78</b>
D.1 Cálculo dos <i>Phase-Shifts</i> . . . . .	78
D.2 Normalização das Funções de Onda . . . . .	82
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>86</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Uma das questões mais fascinantes para o homem desde os gregos (600 a.C.) é saber do que a matéria é feita. Há mais de 2000 anos Demócritus (460-371 a.C.) formulou a hipótese atômica para a matéria. Segundo ele toda matéria seria feita de átomos, partículas indivisíveis separadas por espaços vazios e que as diferentes combinações desses átomos formariam as coisas à nossa volta. Apesar de sabermos hoje que essa hipótese não está muito longe da realidade, é claro que ela foi baseada unicamente em argumentos filosóficos; tanto que as primeiras evidências concretas da existência dos átomos vieram apenas no século *XIX*.

Hoje sabemos que o átomo não é a partícula fundamental da natureza: sabe-se que ele é composto por um núcleo extremamente compacto (tem raio da ordem de  $10^{-15}\text{m}$ ), carregado positivamente e rodeado por uma distribuição de partículas negativamente carregadas (elétrons) a distâncias relativamente grandes ( $10^{-10}\text{m}$ ). Sabemos também que este núcleo é composto por outras partículas mais fundamentais, os nucleons (prótons e nêutrons). A física nuclear é o estudo desse núcleo e seus objetivos principais são compreender as forças que mantêm o núcleo coeso, determinar sua estrutura e como estes interagem entre si e com outras partículas subatômicas. Fundamentalmente estas questões estão relacionadas entre si e uma teoria completa deve ser capaz de responder essas questões a partir de um único ponto de partida.

Devido ao seu tamanho, o núcleo não pode ser estudado diretamente, e logo, precisamos de meios indiretos para obter informações que nos levem à sua compreensão. A maioria das informações experimentais que temos vêm de três fontes[1]:

1. Espalhamento: bombardeamos um alvo (núcleo a ser estudado) com um feixe de



partículas conhecidas e determinamos alguma(s) propriedade(s) das partículas que emergem, como sua distribuição angular e/ou energética;

2. Decaimentos: consiste em examinar os fragmentos de um núcleo que se desintegra;
3. Estados Ligados: consiste em estudar as propriedades de um objeto composto por dois ou mais nucleons unidos.

Determinar a estrutura nuclear e como os nucleons interagem entre si através desses dados não é nada trivial. O procedimento usual é supor uma forma para as interações entre os nucleons e outras partículas fundamentais e comparar os resultados teóricos para a estrutura, decaimento e espalhamento com os dados experimentais.

## 1.1 O Espalhamento de Elétrons

Mais de quarenta anos de experimentos provaram que o espalhamento de elétrons é uma das melhores ferramentas para o estudo de sistemas hadrônicos, como o núcleo atômico, e seus constituintes[2]. Isso porque o espalhamento de elétrons possui diversas vantagens em relação ao espalhamento de outras partículas. A principal vantagem desse método sobre os demais reside no fato da interação elétron-núcleo ser de natureza eletromagnética[2, 3, 4]. Como esta está muito bem fundamentada pela QED (Eletrodinâmica Quântica) é possível extrair informações quantitativas bastante precisas sobre o núcleo alvo e não apenas informações qualitativas.

Além disso, como a intensidade da interação eletromagnética é muito menor que a intensidade da força nuclear, responsável pela maior parte das propriedades nucleares, pode-se fazer esse tipo de experimento sem causar grandes alterações na estrutura nuclear. Dessa maneira podemos tratar a excitação que o núcleo sofre ao interagir com o elétron apenas como uma perturbação de seu estado inicial. Essa mesma vantagem não é observada no espalhamento de hádrons por núcleos, visto que, devido ao papel que a força forte exerce na reação, não é possível separar de maneira clara o mecanismo responsável pela reação do mecanismo que mantém coesa a estrutura nuclear.

Entretanto, essas duas características não são exclusividade do espalhamento de elétrons. Elas são observadas em qualquer partícula que interaja com o núcleo através da força eletrofraca, como os neutrinos, os fótons e os próprios elétrons.

A vantagem do espalhamento de elétrons em relação ao espalhamento de neutrinos reside no fato da interação neutrino-núcleo ser muito mais fraca e, portanto, seus efeitos são mais difíceis de se medir. A seção de choque medida a partir de espalhamento de neutrinos é várias ordens de grandeza menor que a medida para o espalhamento de elétrons. Além disso no caso dos neutrinos não temos controle total sobre a cinemática.

Também existem vantagens em relação ao espalhamento de fótons (reais), pois estes devem ser *lightlike*, *i.e.*, a relação energia-momentum transferidos na reação com o núcleo é unicamente determinada por  $q_\mu^2 = (\omega/\hbar c)^2 - \mathbf{q}^2 = 0$ . Como o elétron interage com o núcleo através de fótons virtuais e esses são *spacelike*, sua relação energia-momentum é dada por  $q_\mu^2 = (\omega/\hbar c)^2 - \mathbf{q}^2 < 0$ . Esse fato permite variar o momentum  $\hbar\mathbf{q}$  transferido para o núcleo sem variar a energia transferida  $\omega$  e, logo, podemos estudar o comportamento da reação com  $q = |\mathbf{q}|$ . Isto permite, em dada aproximação, obter as transformadas de Fourier das densidades de carga e corrente que interagem com o elétron e, invertendo essas transformadas, analisar a distribuição espacial das mesmas.

### 1.1.1 Tipos de Espalhamento

Existem dois tipos gerais de experimentos de espalhamento que podem ser feitos: o espalhamento do tipo inclusivo e do tipo exclusivo. No espalhamento inclusivo apenas o elétron espalhado é detectado. Esse experimento é o mais fácil de ser realizado e também o mais utilizado para investigar sistemas hadrônicos.

No espalhamento do tipo exclusivo o elétron espalhado é detectado em coincidência com outras partículas que o núcleo pode emitir depois da colisão. Esse tipo de experimento, apesar de suas dificuldades experimentais (ver referência [4]) apresenta algumas vantagens em relação ao experimento do tipo inclusivo. Isso porque no espalhamento exclusivo, ao detectarmos também uma partícula emitida pelo núcleo, obtemos informações adicionais sobre a estrutura deste que não são acessíveis no espalhamento do tipo inclusivo[5].

Como comentado acima, uma das vantagens do espalhamento de elétrons é a possibilidade de variarmos independentemente o momentum transferido pelo elétron espalhado  $\hbar|\mathbf{q}|$  e a energia transferida  $\omega$ . Dessa maneira podemos estudar a resposta do núcleo como função de ambos. Por exemplo, variando a energia transferida para um momentum transferido fixo temos diferentes tipos de resposta para a seção de choque.

Na figura 1.1 podemos identificar cinco tipos de resposta que dependem da faixa de energia transferida.

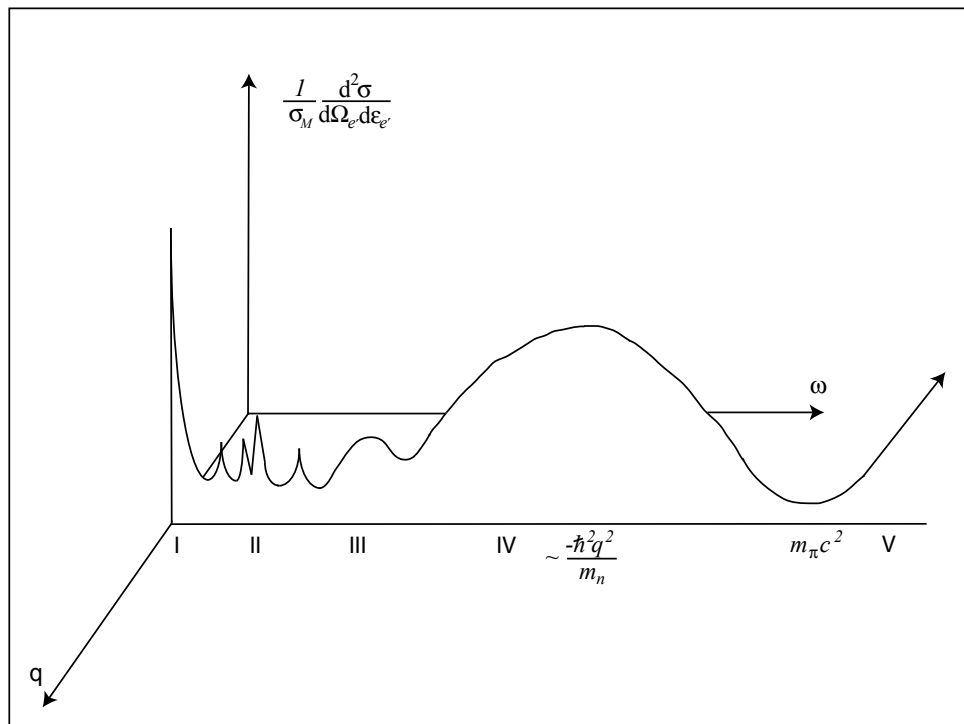


Figura 1.1: Resposta Nuclear como função do momentum transferido e da energia de excitação.

Na região *I* temos a seção de choque devido ao espalhamento elástico. Nessa região não há energia transferida para o núcleo e o comportamento em função de  $|\mathbf{q}|$  nos fornece informações sobre o estado fundamental do mesmo.

Na região *II* temos a excitação de níveis discretos do núcleo: a energia transferida para o núcleo faz um ou mais nucleons irem para estados excitados, estados *partícula-buraco* e *excitações coletivas*, respectivamente. Essa faixa de energia transferida ainda não é suficiente para arrancar nucleons do núcleo.

A região *III* corresponde a estados no contínuo do sistema nuclear (ressonâncias gigantes). Nessa região existe uma probabilidade finita de que um nucleon seja arrancado do núcleo, já que há energia transferida para isso. Mas como a energia transferida não é alta suficiente o que ocorre é que o núcleo vai para um estado excitado e depois decai para outro estado pela emissão de um nucleon. Nesse caso a seção de choque de coincidência (espalhamento exclusivo) depende da estrutura do estado excitado e não

somente da estrutura dos estados inicial e final do sistema nuclear. O estudo do espalhamento exclusivo nessa faixa de energia transferida é complicado pois, ao calcular a seção de choque, devemos levar em conta todos os possíveis estados excitados que o sistema pode ter.

Quando as energias envolvidas são altas (da ordem de  $\hbar^2 q^2 / 2m_n$ ) e o momentum transferido pelo elétron para o núcleo também é, região *IV*, o espalhamento é dominado pelo tipo quasielástico. Neste tipo de espalhamento a reação ocorre como se o elétron interagisse elasticamente com apenas um dos nucleons do núcleo, arrancando-o do mesmo. Os outros nucleons se comportam apenas como espectadores do processo e mantêm seus estados iniciais após a reação. Na prática ocorre o mesmo fenômeno que na região *III*, mas aqui os estados excitados tem uma meia-vida tão curta que não é possível separá-los do estado final. Se o nucleon arrancado for um neutron a reação é conhecida como  $(e, e'N)$  e se for um próton, caso de estudo desse trabalho, ela é conhecida como  $(e, e'p)$ .

Aumentando ainda mais a energia transferida começamos a ter produção de partículas (região *V*). A primeira a surgir, *i.e.*, a que precisa de menos energia para ser criada, é o pion. Assim, para energias transferidas iguais ou maiores que  $m_\pi c^2$ , ao invés de arrancarmos um nucleon do núcleo, podemos ter a criação de partículas.

Tendo apresentado os diferentes tipos de espalhamento de elétrons, passamos à discussão do trabalho feito nesta dissertação.

No capítulo 2 mostramos como obter a seção de choque para o espalhamento no regime quasielástico quando um próton e um elétron são medidos em coincidência. Veremos que essa depende das densidades de carga e corrente nuclear e eletrônica e que, usando a aproximação de ondas planas para os elétrons (PWBA), podemos separar as contribuições de cada uma dessas densidades (do elétron e do núcleo alvo) na obtenção da seção de choque.

Como discutimos acima a seção de choque no regime quasielástico, ou mais fundamentalmente, as densidades de carga e corrente, dependem unicamente dos estados inicial e final do sistema nuclear. No capítulo 3 começamos vendo como obter a função de onda inicial dos nucleons que compõem o núcleo, juntamente com os campos nucleares, numa aproximação de campo médio (MFT). Para obter a função de onda final dos nucleons supomos que o nucleon arrancado interage com os mesmos campos que

interagia quando estava ligado e que os demais mantêm seus estados originais. Essas suposições garantem a conservação da corrente dentro modelo. Mostramos em seguida o cálculo das densidades de carga e corrente nuclear nessa aproximação. Todo o tratamento dado aqui, considera uma dinâmica relativística tanto para descrever os estados ligados, como os estados no contínuo.

O capítulo 4 é dedicado à apresentação de alguns resultados que obtivemos com esse modelo para o espalhamento quasielástico e comparações com dados experimentais disponíveis, juntamente com algumas discussões finais.

# Capítulo 2

## O Espalhamento $(e, e'p)$

Neste capítulo descreveremos em detalhes o espalhamento do tipo  $(e, e'p)$  no regime quasielástico bem como a obtenção da seção de choque de espalhamento quando o elétron é medido em coincidência com o nucleon arrancado do núcleo.

Para fazer os cálculos da seção de choque e das funções de onda dos elétrons utilizaremos algumas aproximações. A principal aproximação está na suposição de que o elétron interage com o núcleo através da troca de um fóton virtual, *i.e.*, na aproximação de Born de ondas planas. O uso dessa aproximação é justificada pelo fato do acoplamento eletromagnético ser relativamente fraco (a constante de acoplamento da interação é dada pela constante de estrutura fina  $\alpha \equiv e^2/\hbar c \simeq 1/137$ ) e, logo, o processo que tem a maior contribuição na interação é o de menor ordem perturbativa. O diagrama de Feynman da aproximação de Born pode ser visto na figura 2.1.

### 2.1 Cinemática do Espalhamento

Para descrever a cinemática do espalhamento  $(e, e'p)$  começamos definindo as variáveis relevantes da reação. Por conveniência adotaremos um referencial centrado no núcleo inicial, o qual se encontra em repouso (referencial do laboratório).

Começamos definindo as variáveis que descrevem a cinemática dos elétrons incidente e espalhado. A massa de repouso e a carga do elétron serão denotadas por  $m_e$  e  $-e$ , respectivamente. Consideramos que o elétron incide sobre o núcleo alvo com quadri-momentum inicial  $k = (\epsilon_e/c, \mathbf{k})$  e é espalhado com quadri-momentum final  $k' = (\epsilon'_e/c, \mathbf{k}')$ . A diferença entre o quadri-momentum inicial e o final do elétron é igual

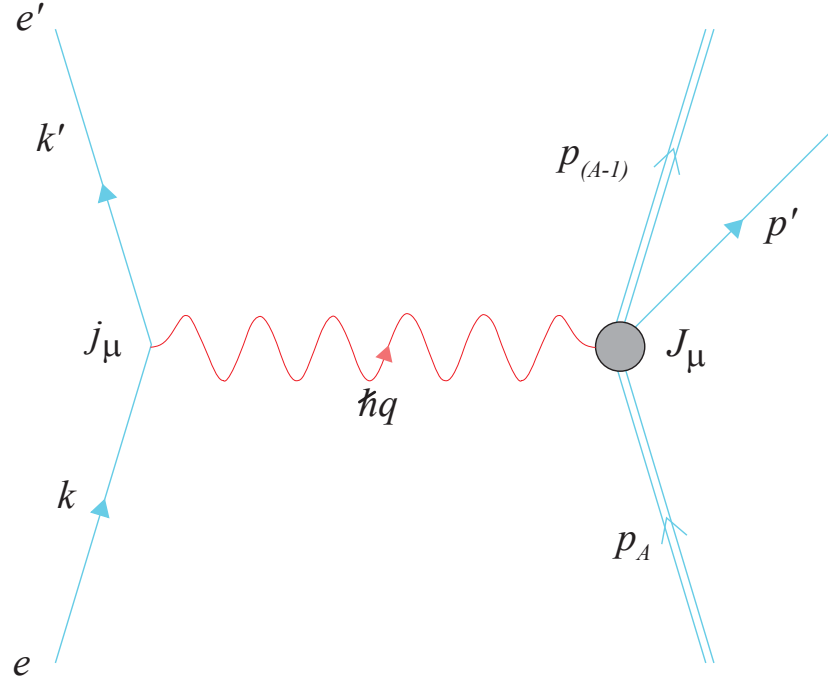


Figura 2.1: Diagrama de Feynman para o espalhamento  $(e, e'p)$  na aproximação de Born

ao quadri-momentum  $\hbar q$  transferido na reação, ou seja,  $\hbar q = (k - k') \equiv (\omega/c, \hbar \mathbf{q})$ , onde  $\omega = \epsilon_e - \epsilon'_e$  e  $\hbar \mathbf{q} = (\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ .

Tendo descrito o elétron passamos para a descrição da cinemática do núcleo e do nucleon espalhado. As variáveis importantes são os quadri-momentum inicial e final do nucleon arrancado,  $p \equiv (\epsilon_p/c, \mathbf{p})$  e  $p' \equiv (\epsilon'_p/c, \mathbf{p}')$ , respectivamente, e os quadri-momentum do núcleo em seus estados inicial, denotado por  $p_A \equiv (\epsilon_A/c, \mathbf{p}_A)$ , e final, denotado por  $p_{A-1} \equiv (\epsilon_{A-1}/c, \mathbf{p}_{A-1})$ . Somando  $p'$  a  $p_{A-1}$  temos o quadri-momentum final  $p_f = p' + p_{A-1} \equiv (\epsilon_f/c, \mathbf{p}_f)$  do sistema nuclear, enquanto o quadri-momentum inicial do sistema nuclear é dado por  $p_i = p_A \equiv (\epsilon_i/c, \mathbf{p}_i)$ . Definimos também a massa de repouso  $m_n$  dos nucleons,  $\epsilon_{A-1}^f$  como a energia de repouso final do núcleo com  $A - 1$  nucleons, e  $T'_n$  e  $T_{A-1}$  como as energias cinéticas do nucleon arrancado e do núcleo em seu estado final, respectivamente. No referencial adotado o momentum inicial do núcleo é nulo,  $\mathbf{p}_A = 0$  e, logo, lembrando que no espalhamento quasielástico toda a energia e momentum transferidos pelo elétron são absorvidos pelo nucleon arrancado, temos que o momentum transferido para o nucleon e o momentum final do núcleo estão relacionados por  $\mathbf{p}_{A-1} = -\mathbf{p}$ . Relacionando essas variáveis com o quadri-momentum

transferido pelo elétron para o núcleo encontramos

$$\hbar q = p_f - p_i = p' + p_{A-1} - p_A, \quad (2.1)$$

ou seja, temos, pela conservação do momentum linear, que

$$\hbar \mathbf{q} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i = \mathbf{p}' + \mathbf{p}_{A-1} - \mathbf{p}_A = \mathbf{p}' - \mathbf{p} \quad (2.2)$$

e, pela conservação da energia,

$$\omega = \epsilon_f - \epsilon_i = \epsilon'_p + \epsilon_{A-1} - \epsilon_A = T'_n + T_{A-1} + (m_n c^2 + \epsilon_{A-1}^f - \epsilon_A). \quad (2.3)$$

Definimos ainda,

$$\epsilon_{ex} = m_n c^2 + \epsilon_{A-1}^f - \epsilon_A. \quad (2.4)$$

Podemos também desprezar a energia cinética  $T_{A-1}$  do núcleo em seu estado final, o que é bastante razoável para os núcleos e as faixas de energia que pretendemos analisar. Logo, obtemos:

$$\omega \simeq T'_N + \epsilon_{ex}. \quad (2.5)$$

Para facilitar os cálculos daqui em diante colocamos os eixos de coordenadas  $xyz$  de maneira que o momentum  $\hbar \mathbf{q}$  transferido para o núcleo esteja na direção do eixo  $z$  e o eixo  $y$  esteja na direção do vetor  $\mathbf{k} \times \mathbf{k}'$ , *i.e.*, os momentum inicial e final do elétron estão no mesmo plano (plano  $xz$ ). Também temos que  $\theta_e$  define o ângulo de espalhamento do elétron (ângulo entre os momentum inicial e final do elétron) enquanto  $\theta_p$  e  $\phi_p$  definem a direção do nucleon espalhado (ver figura 2.2).

## 2.2 Cálculo da Seção de Choque

Podemos derivar a seção de choque da reação  $A + e \rightarrow B + e' + p$  a partir da Regra de Ouro de Fermi. A Regra de Ouro de Fermi é uma maneira aproximada de calcular a probabilidade de transição entre dois auto-estados de um sistema usando a Teoria de Perturbação Dependente do Tempo[1, 6, 7]. Essa probabilidade de transição é dada por:

$$w = |\langle f | \mathcal{H} | i \rangle|^2 \rho_f \quad (2.6)$$

onde  $\rho_f$  é o espaço de fases final do sistema e  $\langle f | \mathcal{H} | i \rangle$  é o elemento de matriz da perturbação  $\mathcal{H}$  entre os estados inicial  $|i\rangle$  e final  $|f\rangle$  do sistema.



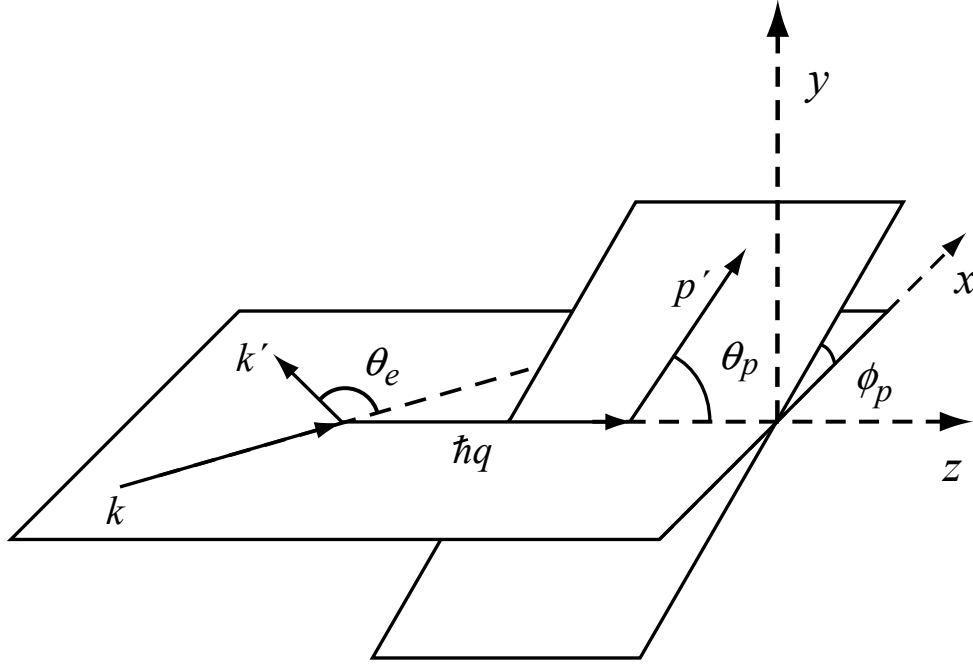


Figura 2.2: Cinemática da Reação  $(e, e'p)$

A partir da probabilidade de transição  $w$  calculamos a seção de choque de espalhamento[6]

$$d\sigma = \frac{1}{j_{inc}} \frac{1}{T} \sum_{if} |\langle f | \mathcal{H} | i \rangle|^2 \rho_f \quad (2.7)$$

onde  $j_{inc}$  é o fluxo de partículas incidentes,  $T$  é o intervalo de tempo de observação da transição e o somatório corresponde a uma média sobre os estados iniciais do sistema e soma sobre os estados finais.

No espalhamento  $(e, e'p)$  temos duas partículas envolvidas no início da reação, o elétron e o núcleo. Como fixamos o referencial no núcleo, o fluxo de partículas incidente  $j_{inc}$  é dado pelo fluxo de elétrons que incide sobre ele:

$$j_{inc} = \frac{\epsilon_e}{m_e c^2} \frac{v_e}{\mathcal{V}} \quad (2.8)$$

onde

$$v_e = \frac{|\mathbf{k}|c^2}{\epsilon_e} \quad (2.9)$$

é a velocidade dos elétrons incidentes (medida no referencial do laboratório) e  $\mathcal{V}$  é o volume de normalização da função de onda do elétron incidente.

O fator  $\epsilon_e/m_e c^2$  na definição do fluxo surge devido ao fato de estarmos trabalhando em cinemática relativística. Este fator aparece porque um elemento de volume  $d\mathcal{V}$  observado de seu referencial de repouso sofre uma contração dada pelo fator de

Lorentz  $\gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$  quando observado de um referencial que se move com velocidade  $v$  em relação a ele. Sendo assim, o volume de normalização  $\mathcal{V}$  da função de onda do elétron incidente quando observado do referencial do laboratório é contraído de um fator  $\epsilon_e/mc^2$ .

Para calcular a probabilidade de transição começamos definindo o espaço de fases final do sistema para o espalhamento  $(e, e'p)$ . Aqui o espaço de fases é dado pela multiplicação do espaço de fases de cada uma das partículas que compõem o sistema em seu estado final <sup>1</sup>:

$$\rho_f = \rho_{e'}\rho_{p'}\rho_{A-1} = \frac{m_e c^2}{\epsilon'_e} \frac{\mathcal{V} d^3 \mathbf{k}'}{(2\pi\hbar)^3} \frac{m_n c^2}{\epsilon'_p} \frac{\mathcal{V} d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^3} \frac{M_{A-1} c^2}{\epsilon_{A-1}} \frac{\mathcal{V} d^3 \mathbf{p}_{A-1}}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (2.10)$$

Ainda precisamos determinar o elemento de matriz  $\langle f|\mathcal{H}|i\rangle$  para calcular a seção de choque. No caso da aproximação de Born para o espalhamento  $(e, e'p)$  o elemento de matriz da transição, desprezando o recuo do núcleo[7], é

$$\langle f|\mathcal{H}|i\rangle = -\frac{1}{\hbar c} \int d^{(4)}x \mathcal{H}(x) \quad (2.11)$$

onde, na aproximação de Born,

$$\mathcal{H}(x) = e\mathcal{A}_\mu(x)J^\mu(x) \quad (2.12)$$

é a densidade Hamiltoniana da interação. Ela é escrita em termos da quadri-corrente de transição hadrônica  $J^\mu(x) \equiv (J^0(x), \mathbf{J}(x))$  do núcleo alvo e do potencial  $\mathcal{A}_\mu(x)$  gerado pela quadri-corrente eletrônica.

O potencial  $\mathcal{A}_\mu(x)$  satisfaz a equação de Klein-Gordon cuja fonte é a quadri-corrente eletrônica  $j_\mu(x) \equiv (j_0(x), -\mathbf{j}(x))$ , ou seja,

$$\square \mathcal{A}_\mu(x) = -\frac{4\pi}{c} j_\mu(x) = -\frac{4\pi}{c} [ec\bar{\psi}'_e(x)\gamma_\mu\psi_e(x)] \quad (2.13)$$

onde  $\psi_e(x)$  é a função de onda do elétron e a última igualdade foi obtida devido ao fato do elétron ser uma partícula puntual<sup>2</sup>.

A solução dessa equação é bastante conhecida e é dada em termos da integral da função de Green apropriada  $D(x - x')$  multiplicada pelo termo de fonte[7, 8]

$$\mathcal{A}_\mu(x) = \frac{4\pi}{c} \int d^{(4)}x' D(x - x') j_\mu(x'). \quad (2.14)$$

<sup>1</sup>Os fatores do tipo  $mc^2/E$  aparecem também aqui pelos mesmos motivos que na definição do fluxo.

<sup>2</sup>No próximo capítulo veremos como obter a corrente no caso de uma partícula com estrutura interna.

Logo, temos que o elemento de matriz da transição é dado por

$$\langle f | \mathcal{H} | i \rangle = -\frac{4\pi e}{\hbar c^2} \int d^{(4)}x \int d^{(4)}x' D(x-x') j_\mu(x') J^\mu(x) \quad (2.15)$$

onde a quadri-corrente de transição do alvo  $J_\mu(x)$  é dada pelo elemento de matriz do operador  $\widehat{J}_\mu(x)$  aplicado entre o estado inicial  $|\Psi_i\rangle$ , formado pelo núcleo alvo, e o estado final  $|\Psi_f\rangle$ , formado pelo núcleo com  $A-1$  nucleons e o nucleon espalhado:

$$J_\mu(x) = \langle \Psi_f | \widehat{J}_\mu(x) | \Psi_i \rangle. \quad (2.16)$$

A quadri-corrente eletromagnética hadrônica deve ser um invariante de Lorentz, ou seja, ela deve ser a mesma quando medida em qualquer sistema inercial. Então, podemos reescrever o operador de quadri-corrente hadrônica como  $\widehat{J}_\mu(x) = e^{i\frac{p \cdot x}{\hbar}} \widehat{J}_\mu(0) e^{-i\frac{p \cdot x}{\hbar}}$  e, logo, se assumirmos que as funções de onda do sistema nuclear inicial e final são auto-estados de energia e momentum:

$$J_\mu(x) = e^{i(p_f - p_i) \cdot x / \hbar} \langle \Psi_f | \widehat{J}_\mu(0) | \Psi_i \rangle = e^{i(p' + p_{A-1} - p_A) \cdot x / \hbar} J_\mu(p_i, p_f), \quad (2.17)$$

onde  $J_\mu(p_i, p_f)$  será explicitado adiante. Se tivéssemos escolhido separar apenas a parte temporal da quadri-corrente teríamos

$$J_\mu(x) = e^{i(\epsilon_f - \epsilon_i)t / \hbar} \langle \Psi_f | \widehat{J}_\mu(\mathbf{r}) | \Psi_i \rangle = e^{i(\epsilon'_p + \epsilon_{A-1} - \epsilon_A)t / \hbar} J_\mu(\mathbf{r}). \quad (2.18)$$

Assim, vemos que para determinar a seção de choque do núcleo precisamos das funções de onda inicial e final dos nucleons do núcleo alvo e dos elétrons incidente e espalhado. A obtenção das funções de onda dos nucleons do núcleo alvo está discutida em detalhes no próximo capítulo. As funções de onda dos elétrons são encontradas resolvendo a equação de Dirac para os mesmos, geralmente utilizando alguma aproximação desejada. As aproximações mais usuais são a aproximação de onda plana, conhecida por PWBA (Plane Wave Born Approximation), e a aproximação de ondas distorcidas, conhecida por DWBA (Distorted Wave Born Approximation). Na PWBA as funções de onda dos elétrons são soluções da equação de Dirac para partícula livre, ou seja, as equações de Dirac para os elétrons incidente e espalhado são resolvidas desconsiderando-se os campos gerados pelo núcleo. Já na DWBA as funções de onda dos elétrons são soluções da equação de Dirac cujo potencial é aproximado pelo campo Coulombiano estático do núcleo em seu estado inicial.

Neste trabalho consideraremos o elétron como uma onda plana e, logo, suas funções de onda incidente  $\psi_e(x)$  e espalhada  $\psi'_e(x)$  são soluções da equação de Dirac para a partícula livre. Fizemos a opção pela PWBA pois, como veremos, nela podemos separar as contribuições do elétron e do alvo na análise da seção de choque. Esta é quantitativamente válida para núcleos leves, principalmente para valores baixos do ângulo de espalhamento  $\theta_p$  do próton[7].

Na PWBA a função de onda  $\psi_e$  correspondente à solução de energia positiva do elétron incidente é

$$\psi_e(x) = \sqrt{\frac{1}{\mathcal{V}}} u(k, s) e^{-ik \cdot x / \hbar}. \quad (2.19)$$

Nessa equação os spinores  $u(k, s)$  dependem do quadri-momentum  $k$ , do spin inicial  $s$  e satisfazem

$$(\not{k}c - m_e c^2)u(k, s) = 0 \quad (2.20)$$

onde  $\not{k} = \gamma \cdot k$  é a notação de Feynman para o produto de um quadri-vetor com as matrizes  $\gamma$ . Os spinores são normalizados de maneira que a probabilidade de encontrarmos o elétron num volume  $\mathcal{V}$  seja  $\text{um}^3$ , o que implica que

$$\bar{u}(k, s)u(k, s) = 1 \quad \text{e} \quad u^\dagger(k, s)u(k, s) = \frac{m_e c^2}{\epsilon_e}. \quad (2.21)$$

Se trocarmos  $k$  por  $k'$ ,  $s$  por  $s'$  e  $\epsilon_e$  por  $\epsilon'_e$  temos a solução  $\psi'_e(x)$  para o elétron espalhado.

Usando a aproximação de ondas planas em (2.14) temos que a quadri-corrente eletrônica pode ser escrita de maneira simplificada

$$\begin{aligned} j_\mu(x) &\equiv ec \bar{\psi}'_e(x) \gamma_\mu \psi_e(x) = ec \frac{1}{\mathcal{V}} e^{i(k'-k) \cdot x / \hbar} \bar{u}'(k', s') \gamma_\mu u(k, s) \\ &= j_\mu(k, s; k', s') e^{i(k'-k) \cdot x / \hbar}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

e o potencial  $\mathcal{A}_\mu(x)$  gerado por ela é o potencial de Møller (ver Apêndice C):

$$\mathcal{A}_\mu(x) = -\frac{4\pi}{c} \frac{1}{q_\nu q^\nu} j_\mu(k, s; k', s') e^{-iq \cdot x}. \quad (2.23)$$

No regime ultrarelativístico, ou seja, quando a energia de repouso do elétron é muito pequena se comparada à sua energia total, fazemos as seguintes aproximações

$$\epsilon_e = \sqrt{|\mathbf{k}c|^2 + (m_e c^2)^2} \simeq |\mathbf{k}|c \quad \text{e} \quad \epsilon'_e = \sqrt{|\mathbf{k}'c|^2 + (m_e c^2)^2} \simeq |\mathbf{k}'|c. \quad (2.24)$$

---

<sup>3</sup>A normalização das funções de onda dos elétrons foi escolhida de maneira que o fluxo coincidissem com a equação (2.8)

o que implica que

$$q_\mu^2 = q_\mu q^\mu = \left(\frac{\omega}{\hbar c}\right)^2 - |\mathbf{q}|^2 \simeq -\frac{2}{\hbar^2} k \cdot k' = -\frac{4\epsilon_e \epsilon'_e}{(\hbar c)^2} \sin^2 \frac{\theta_e}{2}. \quad (2.25)$$

Usando (2.17) e (2.23) temos que o elemento de matriz de transição (2.11) na PWBA é dado por

$$\begin{aligned} \langle f | \mathcal{H} | i \rangle &= \frac{4\pi}{\hbar c^2} \frac{e}{q_\nu q^\nu} j_\mu(k, s; k', s') J^\mu(p_i, p_f) \int d^{(4)}x e^{i(p' + p_{A-1} - p_A - \hbar q) \cdot x / \hbar} \\ &= \frac{4\pi}{\hbar c^2} \frac{e}{q_\nu q^\nu} j_\mu(k, s; k', s') J^\mu(p_i, p_f) (2\pi\hbar)^4 \delta^{(4)}(p' + p_{A-1} - p_A - k + k'). \end{aligned} \quad (2.26)$$

De maneira equivalente temos (ver equação 2.18)

$$\begin{aligned} \langle f | \mathcal{H} | i \rangle &= \frac{4\pi}{\hbar c^2} \frac{e}{q_\nu q^\nu} j_\mu(k, s; k', s') \int d^{(4)}x e^{i(\epsilon'_p + \epsilon_{A-1} - \epsilon_A - \omega)t / \hbar} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} J^\mu(\mathbf{r}) \\ &= \frac{4\pi}{\hbar c^2} \frac{e}{q_\nu q^\nu} j_\mu(k, s; k', s') J^\mu(\mathbf{q}) (2\pi\hbar c) \delta(\epsilon'_p + \epsilon_{A-1} - \epsilon_A - \epsilon_e + \epsilon'_e) \end{aligned} \quad (2.27)$$

onde

$$J^\mu(\mathbf{q}) = \int d^3\mathbf{r} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} J^\mu(\mathbf{r}) \quad (2.28)$$

é a densidade de carga e corrente no espaço de momentum transferido.

Como assumimos que as polarizações das partículas incidentes e detectadas não estão sendo medidas devemos tomar o módulo quadrado da matriz de transição e fazer uma média sobre os estados iniciais dessas partículas e somar sobre os possíveis estados finais[6]:

$$|\langle f | \mathcal{H} | i \rangle|^2 = (2\pi\hbar)^4 \delta^{(4)}(p' + p_{A-1} - p_A - k + k') \frac{\mathcal{V}cT}{\hbar^2 c^4} \left(\frac{4\pi e}{q_\nu q^\nu}\right)^2 \overline{\sum_{if} |\mathcal{S}_{fi}|^2} \quad (2.29a)$$

$$= (2\pi\hbar c) \delta(\epsilon'_p + \epsilon_{A-1} - \epsilon_A - \epsilon_e + \epsilon'_e) \frac{cT}{\hbar^2 c^4} \left(\frac{4\pi e}{q_\nu q^\nu}\right)^2 \overline{\sum_{if} |\mathcal{T}_{fi}|^2} \quad (2.29b)$$

onde <sup>4</sup>

$$\mathcal{S}_{fi} = j_\mu(k, s; k', s') J^\mu(p_i, p_f) \quad \text{e} \quad \mathcal{T}_{fi} = j_\mu(k, s; k', s') J^\mu(\mathbf{q}). \quad (2.30)$$

Logo

$$\overline{\sum_{if} |\mathcal{S}_{fi}|^2} = \frac{1}{2} \sum_{ss'} j_\mu^*(k, s; k', s') j_\nu(k, s; k', s') \overline{\sum_{if, N} J^{\mu*}(p_i, p_f) J^\nu(p_i, p_f)}, \quad (2.31a)$$

$$\overline{\sum_{if} |\mathcal{T}_{fi}|^2} = \frac{1}{2} \sum_{ss'} j_\mu^*(k, s; k', s') j_\nu(k, s; k', s') \overline{\sum_{if, N} J^{\mu*}(\mathbf{q}) J^\nu(\mathbf{q})}, \quad (2.31b)$$

---

<sup>4</sup>Acima usamos que  $[(2\pi\hbar)^4 \delta^{(4)}(p' + p_{A-1} - p_A - k + k')]^2 = (2\pi\hbar)^4 \delta^{(4)}(p' + p_{A-1} - p_A - k + k') \mathcal{V}cT$  e  $[(2\pi\hbar c) \delta(\epsilon'_p + \epsilon_{A-1} - \epsilon_A - \epsilon_e + \epsilon'_e)]^2 = (2\pi\hbar c) \delta(\epsilon'_p + \epsilon_{A-1} - \epsilon_A - \epsilon_e + \epsilon'_e) cT$  (páginas 101, 111-112 da referência [6])

onde  $N$  sob a somatória indica que estamos somando apenas sobre os estados inicial e final do núcleo.

Substituindo o elemento de matriz (2.29a) em (2.6) onde a densidade de estados finais  $\rho_f$  é dada por (2.10) temos que a seção de choque do espalhamento  $(e, e'p)$  do tipo exclusivo é

$$\begin{aligned} d\sigma = & (2\pi\hbar)^4 \delta^{(4)}(p' + p_{A-1} - p_A - k + k') \frac{1}{\hbar^2 c^4} \left( \frac{4\pi e}{q_\nu q^\nu} \right)^2 \frac{m_e c^2}{|\mathbf{k}|c} \\ & \times \overline{\sum_{if}} |\mathcal{S}_{fi}|^2 \frac{m_e c^2}{\epsilon'_e} \frac{d^3 \mathbf{k}'}{(2\pi\hbar)^3} \frac{m_n c^2}{\epsilon'_p} \frac{d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^3} \frac{M_{A-1} c^2}{\epsilon_{A-1}} \frac{d^3 \mathbf{p}_{A-1}}{(2\pi\hbar)^3}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Na equação acima, bem como no resto deste capítulo eliminamos as dependências nos volumes de normalização  $\mathcal{V}$  das funções de onda das partículas incidentes e espalhadas, já que a seção de choque não deve ser proporcional ao volume de normalização <sup>5</sup>.

Estamos interessados na situação em que apenas o elétron e o nucleon espalhados são detectados, então, para calcular a seção de choque de espalhamento, devemos fazer uma integração sobre os possíveis momentum de recuo  $\mathbf{p}_{A-1}$  do núcleo em seu estado final:

$$\begin{aligned} d\sigma = & \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{1}{\hbar^3 c^3} \left( \frac{4\pi e}{\hbar^2 q_\nu q^\nu} \right)^2 \frac{M_{A-1} c^2}{\epsilon_{A-1}} \frac{m_n c^2}{\epsilon'_p} \frac{m_e^2 c^4}{\epsilon'_e |\mathbf{k}|c} \\ & \overline{\sum_{if}} |\mathcal{S}_{fi}|^2 |\mathbf{k}'|^2 d|\mathbf{k}'| d\Omega_{e'} |\mathbf{p}'|^2 d|\mathbf{p}'| d\Omega_{p'} \delta(\epsilon'_p + \epsilon_{A-1} - \epsilon_A - \epsilon_e + \epsilon'_e). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Notamos aqui que se tivéssemos utilizado a equação (2.29b) em (2.6) ao invés de (2.29a) ao integrar sobre  $\mathbf{p}_{A-1}$  teríamos obtido o volume  $\mathcal{V}_p$  no espaço de momentum, *i.e.*,

$$\int d^3 \mathbf{p}_{A-1} = \mathcal{V}_p = (2\pi\hbar)^3 \mathcal{V}, \quad (2.34)$$

e, logo, trocando  $\mathcal{S}_{fi}$  por  $\mathcal{T}_{fi}$  em (2.32) também obtemos a seção de choque desejada.

A função delta restante representa a conservação da energia do sistema. Podemos nos livrar dela integrando em  $|\mathbf{p}'|$ . Para tal usamos que

$$\delta(f(p)) = \sum_i \frac{\delta(p - p_i)}{\left| \frac{\partial f}{\partial p} \right|_{p=p_i}} \quad (2.35)$$

---

<sup>5</sup>Podemos ver isso lembrando que a densidade de estados final é proporcional a  $\mathcal{V}^3$  enquanto as funções de onda das partículas incidentes e espalhadas são proporcionais a  $\mathcal{V}^{-1/2}$ . Assim temos que  $|\mathcal{S}_{fi}|^2$  é proporcional a  $\mathcal{V}^{-5}$  e, logo, o elemento de matriz é proporcional a  $\mathcal{V}^{-4}$ . Assim, a taxa de transição  $w$  é proporcional a  $\mathcal{V}^{-1}$  enquanto o inverso da corrente incidente é proporcional a  $\mathcal{V}$ .

onde  $f(p_i) = 0$ . Como o momentum do nucleon pode assumir um único valor em módulo para que haja conservação da energia:

$$\epsilon'_p = \sqrt{|\mathbf{p}'|^2 c^2 + m_n^2 c^4} \quad (2.36)$$

então

$$f(|\mathbf{p}'|) = \sqrt{\mathbf{p}'^2 c^2 + m_n^2 c^4} + \sqrt{(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{p}')^2 c^2 + M_{A-1}^2 c^4} - \epsilon_A - \epsilon_e + \epsilon'_e \quad (2.37)$$

e, logo, a seção de choque para esse tipo de espalhamento é

$$\frac{d^5 \sigma}{d\epsilon'_e d\Omega_{e'} d\Omega_{p'}} = \left( \frac{4\pi e}{\hbar^2 q_\nu q^\nu} \right)^2 \frac{m_n c^2 M_{A-1} c^2 m_e^2 c^4}{(2\pi)^5 \hbar^3 c^9 \epsilon_A} \frac{|\mathbf{p}'| c |\mathbf{k}'| c}{|\mathbf{k}| c} f_{rec}^{-1} \sum_{if} |\mathcal{S}_{fi}|^2. \quad (2.38)$$

Para chegar à equação acima, usamos que

$$\frac{d|\mathbf{k}'|}{d\epsilon'_e} = \frac{\epsilon'_e}{|\mathbf{k}'| c^2} \quad (2.39)$$

e definimos o fator de recuo do núcleo

$$f_{rec} = \frac{\epsilon_{A-1}}{\epsilon_A} \frac{\epsilon'_p}{|\mathbf{p}'| c^2} \left| \frac{\partial f(p)}{\partial p} \right|_{p=|\mathbf{p}'|} = \left| 1 + \frac{\omega |\mathbf{p}'| - \epsilon'_p \hbar |\mathbf{q}| \cos \theta_p}{\epsilon_A |\mathbf{p}'|} \right|. \quad (2.40)$$

Desta forma, para calcular a seção de choque falta apenas avaliar o elemento de matriz  $\mathcal{S}_{fi}$ . Como as cargas do elétron espalhado e do núcleo alvo são conservadas,

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0 \quad \text{e} \quad \partial_\mu J^\mu(x) = 0, \quad (2.41)$$

as quadri-correntes eletrônica  $j_\mu(k, s; k', s')$  e a hadrônica  $J^\mu(p, p')$  satisfazem, respectivamente,

$$q_\mu j^\mu(k, s; k', s') = 0 \quad \text{e} \quad q_\mu J^\mu(p_i, p_f) = 0 \quad (2.42)$$

ou, de maneira equivalente,

$$\omega j_0(k, s; k', s') - \hbar c \mathbf{q} \cdot \mathbf{j}(k, s; k', s') = 0 \quad \text{e} \quad \omega J_0(p, p') - \hbar c \mathbf{q} \cdot \mathbf{J}(p_i, p_f) = 0 \quad (2.43)$$

onde  $j_0(k, s; k', s')$  ( $J_0(p, p')$ ) e  $\mathbf{j}(k, s; k', s')$  ( $\mathbf{J}(p_i, p_f)$ ) são a densidade de carga e de corrente eletrônica (nuclear) no espaço de momentum, respectivamente.

Separando as componentes longitudinais (L) e transversais (T) das quadri-correntes em relação ao momentum transferido  $\mathbf{q}$ ,

$$\mathbf{j}(k, s; k', s') = \mathbf{j}_L(k, s; k', s') + \mathbf{j}_T(k, s; k', s') \quad \text{onde} \quad \mathbf{j}_T(k, s; k', s') \cdot \mathbf{q} = 0 \quad (2.44)$$

e

$$\mathbf{J}(p_i, p_f) = \mathbf{J}_L(p_i, p_f) + \mathbf{J}_T(p_i, p_f), \quad \text{onde} \quad \mathbf{J}_T(p_i, p_f) \cdot \mathbf{q} = 0, \quad (2.45)$$

temos que as componentes longitudinais e de carga estão ligadas por

$$\mathbf{j}_L(k, s; k', s') = \frac{\omega}{\hbar c |\mathbf{q}|} j_0(k, s; k', s') \hat{\mathbf{q}} \quad \text{e} \quad \mathbf{J}_L(p_i, p_f) = \frac{\omega}{\hbar c |\mathbf{q}|} J_0(p_i, p_f) \hat{\mathbf{q}}. \quad (2.46)$$

Então, como apenas três das quatro componentes das quadri-correntes são independentes, o produto  $j_\mu(k, s; k', s') J^\mu(p_i, p_f)$  entre elas pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} j_\mu(k, s; k', s') J^\mu(p_i, p_f) &= j_0(k, s; k', s') J_0(p_i, p_f) - \mathbf{j}(k, s; k', s') \cdot \mathbf{J}(p_i, p_f) \\ &= - \left( \frac{q_\mu^2}{|\mathbf{q}|^2} j_0(k, s; k', s') J^0(p_i, p_f) + \mathbf{j}_T(k, s; k', s') \cdot \mathbf{J}_T(p_i, p_f) \right) \end{aligned} \quad (2.47)$$

com as densidades de carga e corrente eletrônicas dadas por

$$j_0(k, s; k', s') = ec \bar{u}'(k', s') \gamma_0 u(k, s) \quad \text{e} \quad \mathbf{j}(k, s; k', s') = ec \bar{u}'(k', s') \boldsymbol{\gamma} u(k, s), \quad (2.48)$$

respectivamente, e as densidades de carga e corrente nucleares dadas por

$$J_0(p_i, p_f) = \langle \Psi_f | \hat{J}_0 | \Psi_i \rangle \quad \text{e} \quad \mathbf{J}(p_i, p_f) = \langle \Psi_f | \hat{\mathbf{J}} | \Psi_i \rangle, \quad (2.49)$$

as quais são dependentes do modelo para o alvo. No próximo capítulo será discutida a obtenção das densidades de carga e corrente nuclear.

Assim, reescrevemos  $\mathcal{S}_{fi}$  como

$$\mathcal{S}_{fi} = -ec \left( \frac{q_\mu^2}{|\mathbf{q}|^2} \bar{u}'(k', s') \gamma_0 u(k, s) \langle \Psi_f | \hat{J}_0 | \Psi_i \rangle + \bar{u}'(k', s') \boldsymbol{\gamma} u(k, s) \cdot \langle \Psi_f | \hat{\mathbf{J}}_T | \Psi_i \rangle \right) \quad (2.50)$$

ou, de maneira simplificada,

$$\mathcal{S}_{fi} = -ec \bar{u}'(k', s') (V_0 \gamma_0 - \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\gamma}) u(k, s) = -ec \bar{u}'(k', s') \not{V} u(k, s) \quad (2.51)$$

onde  $V_0$  e  $\mathbf{V}$  são identificados por comparação entre (2.51) e (2.50). Tomando a média sobre as projeções dos spins iniciais dos elétrons e somando sobre os spins finais, o módulo quadrado do elemento de matriz  $\mathcal{S}_{fi}$  é então

$$\overline{|\mathcal{S}_{fi}|^2} = e^2 c^2 \frac{1}{2} \sum_{ss'} |\bar{u}'(k', s') \not{V} u(k, s)|^2, \quad (2.52)$$

onde  $\not{V} = \sum_{if} \not{V}$ , sendo agora a média e a soma efetuadas sobre os estados do núcleo apenas.



Conforme mostrado no apêndice **C** temos que a seção de choque final é dada por:

$$\frac{d^5\sigma}{d\epsilon'_e d\Omega_{e'} d\Omega_{p'}} = \frac{\sigma_M |\mathbf{p}'| c \epsilon'_p M_{A-1} c^2}{(2\pi)^3 \hbar c \epsilon_A} f_{rec}^{-1} (v_l w_l + v_t w_t + v_{tl} w_{tl} + v_{tt} w_{tt}). \quad (2.53)$$

Na equação acima  $\sigma_M$  é a seção de choque de Mott

$$\sigma_M = \left( \frac{e^2}{\hbar c} \frac{\cos(\theta_e/2)}{2\epsilon_e \sin^2(\theta_e/2)} \right)^2, \quad (2.54)$$

os fatores  $v$  dependem apenas da cinemática dos elétrons incidente e espalhado

$$v_l = \left( \frac{q_\mu^2}{|\mathbf{q}|^2} \right)^2 \quad (2.55a)$$

$$v_t = \tan^2 \left( \frac{\theta_e}{2} \right) - \frac{1}{2} \frac{q_\mu^2}{|\mathbf{q}|^2} \quad (2.55b)$$

$$v_{tl} = \left( \frac{q_\mu^2}{\sqrt{2} |\mathbf{q}|^2} \right) \sqrt{\tan^2 \left( \frac{\theta_e}{2} \right) - \frac{q_\mu^2}{|\mathbf{q}|^2}} \quad (2.55c)$$

$$v_{tt} = \frac{1}{2} \frac{q_\mu^2}{|\mathbf{q}|^2}, \quad (2.55d)$$

enquanto os fatores  $w$ , que contêm toda informação sobre a estrutura nuclear, são dados por

$$w_l = \overline{\sum_{if,N}} |\langle \Psi_f | \hat{J}_0 | \Psi_i \rangle|^2 \quad (2.56a)$$

$$w_t = \overline{\sum_{if,N}} \left[ |\langle \Psi_f | \hat{J}_+ | \Psi_i \rangle|^2 + |\langle \Psi_f | \hat{J}_- | \Psi_i \rangle|^2 \right] \quad (2.56b)$$

$$w_{tl} = 2\text{Re} \overline{\sum_{if,N}} \left[ \langle \Psi_i | \hat{J}_0^\dagger | \Psi_f \rangle \left( \langle \Psi_f | \hat{J}_- | \Psi_i \rangle - \langle \Psi_f | \hat{J}_+ | \Psi_i \rangle \right) \right] \quad (2.56c)$$

$$w_{tt} = 2\text{Re} \overline{\sum_{if,N}} \left[ \langle \Psi_f | \hat{J}_+^\dagger | \Psi_i \rangle \langle \Psi_f | \hat{J}_- | \Psi_i \rangle \right]. \quad (2.56d)$$

Os fatores  $w$  foram dados acima em termos das componentes transversais  $J_-(\mathbf{q}) = \langle \Psi_f | \hat{J}_- | \Psi_i \rangle$  e  $J_+(\mathbf{q}) = \langle \Psi_f | \hat{J}_+ | \Psi_i \rangle$  da quadri-corrente hadrônica numa base esférica ortonormal[9]. Essa base é definida pelas relações

$$\mathbf{e}_{qz} = \hat{\mathbf{q}} \quad \text{e} \quad \mathbf{e}_{q\pm} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_x \pm \mathbf{e}_y) \quad (2.57)$$

e, logo, suas componentes são dadas por

$$J_\lambda(\mathbf{q}) = \mathbf{e}_{q\lambda} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{q}) \quad \text{onde} \quad \lambda = z, \pm 1. \quad (2.58)$$

## Capítulo 3

# Modelo para as Densidades de Corrente

Nas próximas seções discutiremos a obtenção das funções de onda dos nucleons em seus estados inicial e final e como, a partir delas, calculamos as densidades de corrente necessárias para a obtenção da seção de choque de espalhamento.

As energias envolvidas nos experimentos mais recentes são cada vez mais altas, variando de centenas de MeV a poucos GeV. Essa faixa de energias é a mesma tanto para os elétrons incidente e espalhado, cujas energias de repouso podem ser desprezadas em relação a suas energias cinéticas, quanto para o nucleon arrancado do núcleo, cuja energia cinética é da mesma ordem de grandeza de sua massa de repouso. Por esses motivos nos preocupamos em fazer um tratamento totalmente relativístico para descrever as funções de onda dessas partículas. Assim, para que nossa análise seja consistente, devemos tratar também os nucleons que compõem os núcleos inicial e final, da mesma maneira.

Dito isto, começamos o capítulo falando sobre uma maneira para gerar as funções de onda dos nucleons ligados. Estas são obtidas na Aproximação Relativística de Hartree para o modelo de Walecka juntamente com os potenciais nucleares.

Em seguida obtemos as funções de onda para o nucleon espalhado a partir de uma expansão em ondas esféricas da solução da equação de Dirac no contínuo. Assim temos, como veremos adiante, uma equação de Dirac para cada onda parcial. Neste trabalho os potenciais utilizados na solução dessas equações são os mesmos gerados pelo sistema ligado. Fizemos essa escolha pois esse procedimento tem a vantagem de

garantir a conservação da carga dentro do modelo, mas, como se sabe do espalhamento elástico de prótons por núcleos, não descreve corretamente a função de onda do nucleon espalhado.

O procedimento usual para encontrar a função de onda do nucleon espalhado consiste em resolver as equações de Dirac obtidas utilizando potenciais ópticos, *i.e.*, potenciais que são gerados para ajustar a seção de choque do espalhamento elástico de prótons pelo núcleo em questão. Os potenciais ópticos têm algumas diferenças em relação aos potenciais gerados pelos nucleons em seus estados ligados, na aproximação de Hartree. Enquanto esses últimos são puramente reais e independentes da energia do nucleon, os potenciais ópticos são complexos e levam em conta os efeitos de absorção da função de onda pelo núcleo, sendo dependentes da energia do nucleon no meio, fato este conhecido a partir da investigação da interação nucleon-nucleon[10].

Tendo os estados inicial e final das partículas que compõem o sistema nuclear, mostramos então como calcular as densidades de corrente de transição para uma partícula com estrutura interna.

### 3.1 O Modelo Nuclear e as Funções de Onda dos Estados Ligados

Para obter as funções de onda dos nucleons ligados e o potencial nuclear, precisamos primeiro de um modelo para descrever o núcleo alvo. Nesse trabalho usamos o conhecido modelo de Walecka[11, 12], o qual é baseado na Hadrodinâmica Quântica (QHD) e descreve o núcleo como composto de nucleons que interagem através da troca (auto-consistente) de mésons escalares e vetoriais[13]. Podemos ainda incluir outros tipos de mésons ( $\pi$ ,  $\rho$ , etc) e também o campo dos fótons, caso levemos em conta a interação eletromagnética. Em versões mais sofisticadas do modelo são incluídas também interações entre os próprios campos gerados pelos mésons.

Algumas das vantagens do modelo são o fato de, por ser baseado numa teoria de campo, os graus de liberdade dos mésons poderem ser incluídos logo no início do desenvolvimento do mesmo. Além disso, como o modelo é relativístico, ele incorpora naturalmente o spin e a cinemática e dinâmica relativística das partículas.

A maneira mais apropriada para o estudo do modelo é através de uma formulação

Lagrangiana para o mesmo, pois esta elimina os vínculos existentes nas equações de movimento[14]. Após introduzir a Lagrangiana para o modelo (baseada na Lagrangiana clássica para meios contínuos) devemos quantizar os campos substituindo-os por seus operadores. Antes disso, porém, faremos uma aproximação de campo médio (MFT) para os campos dos mésons e para o campo eletromagnético, sendo que esta produz resultados satisfatórios para várias propriedades médias nucleares. O campo dos nucleons continua a ser tratado como um campo quantizado.

### 3.1.1 O Modelo de Walecka

No modelo de Walecka a densidade Lagrangiana  $\mathcal{L}$  que descreve a dinâmica das partículas que compõem o núcleo é formada pela soma de três tipos de termos:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_N^{livre} + \sum_m (\mathcal{L}_m^{livre} + \mathcal{L}_{NNm}^{inter}) \quad (3.1)$$

onde  $\mathcal{L}_N^{livre}$  é a Lagrangiana livre dos nucleons,  $\mathcal{L}_m^{livre}$  é a Lagrangiana livre do méson  $m$  ou do campo eletromagnético e  $\mathcal{L}_{NNm}^{inter}$  é a Lagrangiana que descreve a interação dos nucleons intermediada pelo méson  $m$  ou pelo campo eletromagnético.

Neste trabalho consideraremos esse modelo na chamada aproximação QHD-II, onde, além dos mésons escalares  $\sigma$  e vetoriais  $\omega$  incluímos o méson isovetorial  $\rho$  e o campo eletromagnético  $A^\mu$ . A seguir, apresentamos a Lagrangiana do sistema na QHD-II. Neste caso as densidades Lagrangeanas livres do sistema se tornam:

$$\mathcal{L}_N^{livre} = \bar{\Psi}(x)(i\hbar c\gamma^\mu \partial_\mu - m_n c^2)\Psi(x) \quad (3.2a)$$

$$\mathcal{L}_\sigma^{livre} = -\frac{1}{2\hbar c} \left[ \frac{m_\sigma^2 c^4}{\hbar^2 c^2} \phi^2(x) - \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) \right] \quad (3.2b)$$

$$\mathcal{L}_\omega^{livre} = -\frac{1}{4\hbar c} \left[ F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) - 2 \frac{m_\omega^2 c^4}{\hbar^2 c^2} V_\mu(x) V^\mu(x) \right] \quad (3.2c)$$

$$\mathcal{L}_\rho^{livre} = -\frac{1}{4\hbar c} \left[ \mathbf{B}_{\mu\nu}(x) \cdot \mathbf{B}^{\mu\nu}(x) - 2 \frac{m_\rho^2 c^4}{\hbar^2 c^2} \mathbf{b}_\mu(x) \cdot \mathbf{b}^\mu(x) \right] \quad (3.2d)$$

$$\mathcal{L}_{A^\mu}^{livre} = -\frac{e^2}{4\hbar c} G_{\mu\nu}(x) G^{\mu\nu}(x) \quad (3.2e)$$

onde  $\Psi$  ( $M$ ),  $\phi$  ( $m_\sigma$ ),  $V_\mu$  ( $m_\omega$ ) e  $\mathbf{b}_\mu$  ( $m_\rho$ ) são os operadores de campo (massas) dos nucleons e dos mésons  $\sigma$ ,  $\omega$  e  $\rho$ , respectivamente. Temos também que  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu(x) - \partial_\nu V_\mu(x)$ ,  $G_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)$  e  $B_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{b}_\nu(x) - \partial_\nu \mathbf{b}_\mu(x)$ .

As densidades Lagrangeanas de interação são:

$$\mathcal{L}_{NN\sigma}^{inter} = g_\sigma \bar{\Psi}(x) \phi(x) \Psi(x) \quad (3.3a)$$

$$\mathcal{L}_{NN\omega}^{inter} = -g_\omega \bar{\Psi}(x) \gamma_\mu V^\mu(x) \Psi(x) \quad (3.3b)$$

$$\mathcal{L}_{NN\rho}^{inter} = -\frac{g_\rho}{2} \bar{\Psi}(x) \gamma_\mu \vec{\tau} \cdot \mathbf{b}^\mu(x) \Psi(x) \quad (3.3c)$$

$$\mathcal{L}_{NNA^\mu}^{inter} = -e \bar{\Psi}(x) \gamma_\mu \frac{(1 + \tau_3)}{2} A^\mu(x) \Psi(x) \quad (3.3d)$$

onde  $g_\sigma$ ,  $g_\omega$  e  $g_\rho$  são constantes de acoplamento dos mésons  $\sigma$ ,  $\omega$  e  $\rho$ , respectivamente, enquanto  $\vec{\tau}$  é a matriz de isospin do nucleon e  $\tau_3 = 1$  ( $-1$ ) se o nucleon for um próton (nêutron). Omitiremos a dependência em  $x$  dos campos de agora em diante, exceto onde explícito.

Tendo a densidade Lagrangeana  $\mathcal{L}$  do modelo para o núcleo podemos encontrar o tensor energia-momentum, dado por

$$T_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \mathcal{L} + \sum_\chi \partial^\nu \chi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \chi} \quad (3.4)$$

e as equações de movimento do sistema a partir das equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \chi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \chi)} = 0 \quad (3.5)$$

onde  $\chi$  são os graus de liberdade do sistema.

As equações de movimento do sistema, escolhendo como graus de liberdade do mesmo os operadores de campo  $\bar{\Psi}$ ,  $\phi$ ,  $V_\mu$ ,  $\mathbf{b}_\mu$  e  $A_\mu$ , são, respectivamente, a equação de Dirac:

$$(i\hbar c \gamma^\mu \partial_\mu - m_n c^2 + g_\sigma \phi - g_\omega \gamma_\mu V^\mu - \frac{g_\rho}{2} \gamma_\mu \vec{\tau} \cdot \mathbf{b}^\mu - e \gamma_\mu \frac{(1 + \tau_3)}{2} A^\mu) \Psi = 0, \quad (3.6a)$$

uma equação do tipo Klein-Gordon com termo de fonte:

$$\frac{1}{\hbar c} \left[ \square + \frac{m_\sigma^2 c^4}{\hbar^2 c^2} \right] \phi(x) = g_\sigma \bar{\Psi}(x) \Psi(x), \quad (3.6b)$$

duas equações de Proca, também com termos de fonte:

$$\frac{1}{\hbar c} \left[ \square + \frac{m_\omega^2 c^4}{\hbar^2 c^2} \right] V^\mu(x) = g_\omega \bar{\Psi}(x) \gamma^\mu \Psi(x) \quad (3.6c)$$

e

$$\frac{1}{\hbar c} \left[ \partial_\nu B^{\nu\mu} + \frac{m_\rho^2 c^4}{\hbar^2 c^2} \mathbf{b}^\mu(x) \right] = g_\rho \bar{\Psi}(x) \gamma^\mu \vec{\tau} \Psi(x), \quad (3.6d)$$

além de uma forma compacta para as equações de Maxwell:

$$\frac{e^2}{\hbar c} \square A^\mu(x) = e \bar{\Psi}(x) \gamma^\mu \frac{(1 + \tau_3)}{2} \Psi(x). \quad (3.6e)$$

Lembramos que o D'Alambertiano  $\square$  presente nas equações acima é definido por  $\square = \partial_\nu \partial^\nu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$  e que para chegar à equação (3.6c) usamos o fato da densidade de corrente bariônica  $B^\mu = \bar{\Psi}(x) \gamma^\mu \Psi(x)$  ser uma quantidade conservada, *i.e.*,  $\partial_\mu [\bar{\Psi}(x) \gamma^\mu \Psi(x)] = 0$ .

Para resolver a equação de Dirac (3.6a) e encontrar os valores para os campos  $\Psi$  dos nucleons precisamos encontrar os valores para os campos mesônicos  $\phi$ ,  $V^\mu$  e  $\mathbf{b}^\mu$  (equações (3.6b) a (3.6d)) e para o campo eletromagnético  $A^\mu$  (equação (3.6e)). Para tal usamos o propagador  $D_\chi(x - x')$  (função de Green) adequado para cada um dos campos. Assim, se  $\mathcal{F}_\chi$  for a fonte do campo  $\chi$  a forma geral para o campo  $\chi(x)$  é dada por:

$$\chi(x) = \int D_\chi(x - x') \mathcal{F}_\chi(x') d^4 x'. \quad (3.7)$$

e, logo, a equação de Dirac para os nucleons se torna:

$$\begin{aligned} (-i\hbar c \gamma^\mu \partial_\mu + m_n c^2) \Psi(x) = & g_\sigma^2 \int D_\sigma(x - x') \bar{\Psi}(x') \Psi(x') d^4 x' \Psi(x) \\ & - g_\omega^2 \int D_\omega(x - x') \bar{\Psi}(x') \gamma^\mu \Psi(x') d^4 x' \gamma^\mu \Psi(x) \\ & - g_\rho^2 \int D_\rho(x - x') \bar{\Psi}(x') \gamma^\mu \vec{\tau} \Psi(x') d^4 x' \gamma_\mu \cdot \vec{\tau} \Psi(x) \\ & - e^2 \int D_{A^\mu}(x - x') \bar{\Psi}(x') \gamma^\mu \frac{(1 + \tau_3)}{2} \Psi(x') d^4 x' \gamma_\mu \frac{(1 + \tau_3)}{2} \Psi(x). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Tendo calculado os campos dos nucleons, dos mésons e dos fótons podemos calcular outras grandezas de interesse a partir do tensor energia momentum  $T_{\mu\nu}$ . Por exemplo, a Hamiltoniana é dada por

$$H = \int d^3 x T_{00}, \quad (3.9)$$

e, a partir daí, a energia total do sistema.

### 3.1.2 A Aproximação de Hartree

Para resolver as equações (3.6a) a (3.6e) faremos algumas aproximações já que estas equações são equações de campo não-lineares e suas soluções são bastante complicadas.

Além disso, como as constantes de acoplamento dos campos são grandes, a solução por métodos perturbativos é inapropriada. Um método para resolver estas equações é usando a aproximação de campo-médio (MFT), ou seja, substituindo os valores dos campos por seus valores esperados. Este procedimento produz seus melhores resultados à medida que as variações em torno desses valores esperados se tornam menos significativas, o que acontece com o aumento da densidade nuclear[13]. O aumento das densidades nucleares implica num aumento dos termos de fonte das equações (3.6b) a (3.6e) e, logo, podemos substituir os operadores de campo dos mésons e dos fótons por seus valores esperados, que são agora campos clássicos. Se impusermos invariância rotacional (simetria esférica) ao sistema temos que os campos dos mésons escalares  $\sigma$  e vetoriais  $\omega$  são aproximados, respectivamente, por

$$\phi \rightarrow \langle \phi \rangle \equiv \phi_0(r) \quad (3.10a)$$

e

$$V_\mu \rightarrow \langle V_\mu \rangle \equiv \delta_{\mu 0} V_0(r), \quad (3.10b)$$

enquanto a componente  $j$  do campo do méson  $\rho$  e o campo eletromagnético se tornam, respectivamente,

$$b_\mu^{(j)} \rightarrow \langle b_\mu^{(j)} \rangle \equiv \delta_{\mu 0} \delta^{j3} b_0(r) \quad (3.10c)$$

e

$$A_\mu \rightarrow \langle A_\mu \rangle \equiv \delta_{\mu 0} A_0(r). \quad (3.10d)$$

A partir de agora omitiremos as dependências em  $r$  dos campos.

Substituindo os valores aproximados para os campos na Lagrangeana original do sistema (equação (3.1)) temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\Psi} \left[ i\hbar c \gamma_\mu \partial^\mu - g_\omega \gamma^0 V_0 - \frac{1}{2} g_\rho \tau_3 \gamma^0 b_0 - e \frac{1}{2} (1 + \tau_3) \gamma^0 A_0 - (m_n c^2 - g_\sigma \phi_0) \right] \Psi \\ & - \frac{1}{2\hbar c} \left[ [(\nabla \phi_0)^2 + \frac{m_s^2 c^4}{\hbar^2 c^2} \phi_0^2] - [(\nabla V_0)^2 + \frac{m_v^2 c^4}{\hbar^2 c^2} V_0^2] - (e \nabla A_0)^2 - [(\nabla b_0)^2 + \frac{m_\rho^2 c^4}{\hbar^2 c^2} b_0^2] \right] \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde os campos mesônicos e eletromagnético, são dados por

$$\frac{1}{\hbar c} \left( \nabla^2 - \frac{m_\sigma^2 c^4}{\hbar^2 c^2} \right) \phi_0(r) = -g_\sigma \varrho_s(r) \equiv -g_\sigma \langle \bar{\Psi} \Psi \rangle \quad (3.12a)$$

$$\frac{1}{\hbar c} \left( \nabla^2 - \frac{m_\omega^2 c^4}{\hbar^2 c^2} \right) V_0(r) = -g_\omega \varrho_B(r) \equiv -g_\omega \langle \bar{\Psi} \gamma_0 \Psi \rangle \quad (3.12b)$$

$$\frac{1}{\hbar c} \left( \nabla^2 - \frac{m_\rho^2 c^4}{\hbar^2 c^2} \right) b_0(r) = -\frac{g_\rho}{2} \rho_3(r) \equiv -\frac{g_\rho}{2} \langle \bar{\Psi} \tau_3 \gamma_0 \Psi \rangle \quad (3.12c)$$

$$\frac{e^2}{\hbar c} \nabla^2 A_0(r) = -e \rho_p(r) \equiv -\frac{e}{2} \langle \bar{\Psi} (1 + \tau_3) \Psi \rangle. \quad (3.12d)$$

Os valores do campo bariônico  $\Psi$  são as soluções da equação de Dirac

$$[i\hbar c \gamma_\mu \partial^\mu - g_\omega \gamma^0 V_0 - \frac{g_\rho}{2} \tau_3 \gamma^0 b_0 - \frac{e}{2} (1 + \tau_3) \gamma^0 A_0 - (m_n c^2 - g_\sigma \phi_0)] \Psi = 0 \quad (3.13)$$

que é resolvida de maneira auto-consistente com as equações dos campos clássicos.

Como queremos resolver a equação para cada nucleon separadamente expandimos o operador para o campo bariônico  $\Psi$  em termos de operadores de criação  $A_\alpha^\dagger$  ( $B_\alpha^\dagger$ ) e aniquilação  $A_\alpha$  ( $B_\alpha$ ) de nucleon (antinucleon) no estado  $\alpha$ , onde o estado  $\alpha$  é especificado pelo conjunto completo de números quânticos que descrevem cada nucleon (antinucleon) do núcleo. Lembrando que a equação de Dirac admite tanto soluções de energia positiva  $\psi$  (nucleons) quanto energia negativa  $\varphi$  (anti-nucleons) e que os campos são estáticos, expandimos o operador  $\Psi$  da seguinte forma:

$$\hat{\Psi}(x) = \sum_\alpha [A_\alpha \psi_\alpha(\mathbf{r}) e^{-i\epsilon_\alpha t/\hbar} + B_\alpha^\dagger \varphi_\alpha(\mathbf{r}) e^{i\epsilon_\alpha t/\hbar}]. \quad (3.14)$$

Desconsideraremos, como de usual, os efeitos das anti-partículas. Logo, se substituirmos essa expansão em (3.13) obtemos que

$$h\psi_\alpha(\mathbf{r}) = \epsilon_\alpha \psi_\alpha(\mathbf{r}) \quad (3.15)$$

onde

$$h \equiv [-i\alpha \cdot \nabla + g_\omega V_0 + \frac{g_\rho}{2} \tau_3 b_0 + \frac{e}{2} (1 + \tau_3) A_0 + \gamma_0 (m_n c^2 - g_\sigma \phi_0)]. \quad (3.16)$$

Como assumimos que o sistema tem simetria esférica (núcleo com camada fechada) e conserva paridade,  $\alpha$  representa os números quânticos principal  $n$  e de momentum angular  $\kappa$  e  $m$  e isospin  $t$ . Usando as propriedades dos operadores de momentum-angular relativístico encontramos que a solução da parte angular da equação (3.15) são harmônicos esféricos spinoriais

$$\mathcal{Y}_{\kappa m}(\theta, \phi) = \sum_{m_s} \langle l m - m_s \frac{1}{2} m_s | j m \rangle Y_{l m - m_s}(\theta, \phi) \chi_{m_s} \quad (3.17)$$

onde

$$j = |\kappa| - \frac{1}{2}, \quad l = \begin{cases} \kappa, & \kappa > 0; \\ -(\kappa + 1), & \kappa < 0. \end{cases},$$



e  $\langle lm - m_s \frac{1}{2} m_s | jm \rangle$  são coeficientes de Clebsch-Gordan,  $Y_{lm-m_s}(\theta, \phi)$  são harmônicos esféricos e  $\chi_{m_s}$  é a função de onda de spin 1/2.

Logo, podemos separar a função de onda  $\psi_\alpha$  em componentes superior e inferior cuja solução da parte angular difere no sinal de  $\kappa$ , *i.e.*,

$$\psi_\alpha(\mathbf{r}) \equiv \psi_{n\kappa m t}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} G_{n\kappa t}(r)/r \mathcal{Y}_{\kappa m}(\hat{r}) \\ iF_{n\kappa t}(r)/r \mathcal{Y}_{-\kappa m}(\hat{r}) \end{pmatrix} \zeta_t. \quad (3.18)$$

onde  $\zeta_t$  são isospinores de duas componentes que definem se a partícula é um próton ou um nêutron. Como  $t = \tau_3/2$  é o autovalor que define a projeção do isospin temos

$$\zeta_{+\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \zeta_{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

A partir da expressão (3.18) e do fato que

$$\sum_{m=-j}^{+j} \mathcal{Y}_{\kappa m}^\dagger \mathcal{Y}_{\kappa' m'} = \left( \frac{2j+1}{4\pi} \right) \delta_{\kappa\kappa'}, \quad (3.20)$$

encontramos as densidades  $\varrho_s$ ,  $\varrho_B$ ,  $\varrho_3$  e  $\varrho_p$  presentes nas equações (3.12a) a (3.12d) em termos das funções  $F_\alpha$  e  $G_\alpha$ . Com esses resultados reescrevemos as equações de campo para os mésons e para os fótons:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hbar c} \left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{\hbar^2 c^2} m_\sigma^2 c^4 \right] \phi_0(r) &= -g_\sigma \varrho_s(r) \\ &\equiv -g_\sigma \sum_{\alpha}^{occ} \left( \frac{2j_\alpha + 1}{4\pi r^2} \right) [|G_\alpha(r)|^2 - |F_\alpha(r)|^2] \end{aligned} \quad (3.21a)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hbar c} \left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{\hbar^2 c^2} m_\omega^2 c^4 \right] V_0(r) &= -g_\omega \varrho_B(r) \\ &\equiv -g_\omega \sum_{\alpha}^{occ} \left( \frac{2j_\alpha + 1}{4\pi r^2} \right) [|G_\alpha(r)|^2 + |F_\alpha(r)|^2] \end{aligned} \quad (3.21b)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hbar c} \left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{\hbar^2 c^2} m_\rho^2 c^4 \right] b_0(r) &= -\frac{1}{2} g_\rho \varrho_3(r) \\ &\equiv -\frac{g_\rho}{2} \sum_{\alpha}^{occ} \left( \frac{2j_\alpha + 1}{4\pi r^2} \right) [|G_\alpha(r)|^2 + |F_\alpha(r)|^2] (-1)^{t_\alpha - 1/2} \end{aligned} \quad (3.21c)$$

$$\begin{aligned} \frac{e^2}{\hbar c} \left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \right] A_0(r) &= -e \varrho_p(r) \\ &\equiv -e \sum_{\alpha}^{occ} \left( \frac{2j_\alpha + 1}{4\pi r^2} \right) [|G_\alpha(r)|^2 + |F_\alpha(r)|^2] (t_\alpha + 1/2). \end{aligned} \quad (3.21d)$$

As soluções dessas equações dependem de 7 parâmetros cujos valores serão discutidos no próximo capítulo: a massa  $m_n$  dos nucleons e as massas e constantes de acoplamento dos mésons.

Substituindo (3.18) em (3.13) encontramos as equações para as funções de onda dos bárions

$$\frac{d}{dr}G_\alpha(r) + \frac{\kappa}{r}G_\alpha(r) - \frac{E_\alpha + M^*(r)c^2 - V_v(r)}{\hbar c}F_\alpha(r) = 0 \quad (3.22a)$$

e

$$\frac{d}{dr}F_\alpha(r) - \frac{\kappa}{r}F_\alpha(r) + \frac{E_\alpha - M^*(r)c^2 - V_v(r)}{\hbar c}G_\alpha(r) = 0. \quad (3.22b)$$

Nestas equações  $M^*(r)c^2 = m_n c^2 - V_s(r)$  onde os potenciais escalar  $V_s(r)$  e vetorial  $V_v(r)$  são dados por:

$$V_s(r) \equiv g_\sigma \phi_0(r)$$

e

$$V_v(r) \equiv g_\omega V_0(r) + g_\rho t_\alpha b_0(r) + eA_0(r)(t_\alpha + \frac{1}{2}).$$

A condição de normalização das funções  $F_\alpha$  e  $G_\alpha$  são encontradas a partir da probabilidade de se encontrar o nucleon numa dada região do espaço. Para todo o espaço ela é dada por:

$$\int_0^\infty dr (|G_\alpha(r)|^2 + |F_\alpha(r)|^2) = 1 \quad (3.23)$$

Essas equações não-lineares acopladas contêm toda informação sobre o estado fundamental do núcleo e são resolvidas iterativamente. O método usado para a resolução das equações está descrito detalhadamente nas referências [11, 15].

Tendo encontrado os valores dos campos a energia total do sistema é dada, de acordo com a equação (3.9), por

$$E = \sum_\alpha^{occ} E_\alpha (2j_\alpha + 1) - \frac{1}{2} \int d^3x \{ -g_\sigma \phi_0(r) \varrho_s(r) + g_\omega V_0(r) \varrho_B(r) + \frac{1}{2} g_\rho b_0(r) \varrho_3(r) + eA_0(r) \varrho_p(r) \}, \quad (3.24)$$

ou seja, ela é a energia somada de todas as partículas que compõem o núcleo, subtraída da metade da energia potencial que surge devido às interações com os campos mesônicos.

## 3.2 O Nucleon Espalhado

No nosso modelo para o espalhamento ( $e, e'p$ ) assumimos que o nucleon arrancado do núcleo interage com os mesmos campos que interagira quando estava no estado ligado. Logo, as funções de onda de todos os nucleons, exceto do nucleon espalhado, são iguais em seus estados final e inicial. Já a função de onda final  $\psi_f(x) = e^{-i\epsilon'_p t/\hbar}\psi_f(\mathbf{r})$  do nucleon espalhado é encontrada resolvendo:

$$h\psi_f(\mathbf{r}) = \epsilon'_p\psi_f(\mathbf{r}) \quad (3.25)$$

onde  $\epsilon'_p$  é a energia do nucleon depois de interagir com o elétron. A Hamiltoniana  $h$  acima é a mesma que descreve o nucleon no estado ligado (equação (3.16)).

A equação acima é resolvida expandindo a função de onda  $\psi_f(\mathbf{r})$  em ondas parciais e resolvendo a equação para cada onda separadamente. Para uma partícula de spin  $m_s$  a expansão na RDWBA (Relativistic Distorted Wave Born Approximation) no espaço de configurações tem a forma

$$\psi_{m_s}(\mathbf{r}) = 4\pi\sqrt{\frac{\epsilon'_p + m_n c^2}{2\mathcal{V}\epsilon'_p}} \sum_{\kappa, m} i^l e^{-i\delta_\kappa^*} \langle l m_l \frac{1}{2} m_s | j m \rangle Y_{l m_l}^*(\hat{p}') \psi_{\kappa m}(\mathbf{r}) \quad (3.26)$$

com  $m_l = m - m_s$  e

$$\psi_{\kappa m}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} g_\kappa(r)/r \mathcal{Y}_{\kappa m}(\hat{r}) \\ i f_\kappa(r)/r \mathcal{Y}_{-\kappa m}(\hat{r}) \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

Logo, para descrever a função de onda do nucleon espalhado basta determinar as funções  $f_\kappa(r)$ ,  $g_\kappa(r)$  e os *phase-shifts*  $\delta_\kappa$ . Substituindo a expansão acima na equação de Dirac (3.25) obtemos as seguintes equações diferenciais acopladas para  $f_\kappa(r)$  e  $g_\kappa(r)$ :

$$\frac{d}{dr} f_\kappa(r) = -\frac{\epsilon'_p - M^*(r)c^2 - V_v(r)}{\hbar c} g_\kappa(r) + \frac{\kappa}{r} f_\kappa(r), \quad (3.28a)$$

$$\frac{d}{dr} g_\kappa(r) = \frac{\epsilon'_p + M^*(r)c^2 - V_v(r)}{\hbar c} f_\kappa(r) - \frac{\kappa}{r} g_\kappa(r). \quad (3.28b)$$

Para obter os *phase-shifts*  $\delta_\kappa$  comparamos os valores obtidos para  $f_\kappa(r)$  e  $g_\kappa(r)$  com as formas assintóticas das soluções para o espalhamento de um nucleon por uma carga pontual[16]. Fazemos isto porque para valores de  $r$  maiores que o raio do núcleo o potencial escalar  $V_s(r)$  é praticamente nulo (tem alcance finito) e o potencial vetorial  $V_v(r)$  pode ser aproximado pelo potencial de uma carga pontual  $Ze$  igual ao número de prótons do núcleo. Como existem soluções regulares (finitas na origem) e irregulares

(divergem na origem) para o espalhamento por uma carga puntual, escrevemos  $f_\kappa(r)$  e  $g_\kappa(r)$  como uma combinação linear dessas soluções[16]. Se  $f_\kappa^R(r)$  e  $g_\kappa^R(r)$  são as soluções regulares e  $f_\kappa^I(r)$  e  $g_\kappa^I(r)$  as irregulares a combinação tem a forma

$$f_\kappa(r) = A_\kappa f_\kappa^R(r) + B_\kappa f_\kappa^I(r) \quad (3.29a)$$

$$g_\kappa(r) = A_\kappa g_\kappa^R(r) + B_\kappa g_\kappa^I(r). \quad (3.29b)$$

onde os coeficientes  $A_\kappa$  e  $B_\kappa$  devem ser determinados. A partir desses coeficientes e dos *phase-shifts*  $\delta_\kappa^R$  e  $\delta_\kappa^I$  para as soluções regulares e irregulares, respectivamente, encontramos os *phase-shifts*  $\delta_\kappa$  para cada onda parcial. Eles são dados por:

$$\delta_\kappa = \delta_\kappa^R + \arctan\left(\frac{\sin\theta_\kappa}{A_\kappa/B_\kappa + \cos\theta_\kappa}\right) \quad (3.30)$$

onde  $\theta_\kappa = \delta_\kappa^I - \delta_\kappa^R$ . Para chegar a essa equação utilizamos as formas assintóticas das soluções para o espalhamento por uma carga puntual. Toda a análise acima foi feita para a QHD-II, ou seja, levando em conta os campos eletromagnéticos, que têm alcance infinito. Se não levarmos em conta esses últimos, as soluções regulares e irregulares para o espalhamento se reduzem a funções de Bessel e Newman esféricas, multiplicadas por uma constante de normalização. As soluções analíticas para o espalhamento do nucleon por uma carga puntual e suas formas assintóticas, bem como os respectivos *phase-shifts*, estão detalhados no Apêndice D.

Na tabela 3.1 temos uma comparação dos *phase-shifts* obtidos nas mesmas condições cinemáticas descritas na figura 4.6. Na primeira coluna temos os *phase-shifts* obtidos na QHD-II e na segunda coluna os mesmos obtidos na QHD-I, ou seja, desconsiderando a interação Coulombiana entre os prótons.

Veremos no próximo capítulo, o que tais diferenças implicam em termos de seção de choque.

### 3.3 As Densidades de Corrente

Como discutimos neste capítulo o núcleo mantém-se coeso devido a troca de mésons e fótons entre os nucleons que o compõem. Nesse modelo podemos descrever os estados inicial e final do núcleo, os quais são os ingredientes necessários para obter-se a densidade de corrente nuclear  $J_\mu(x)$  do alvo hadrônico. Como vimos esta é dada como o

	QHD-II		QHD-I	
$\kappa$	$\delta_\kappa$	$\delta_{-\kappa}$	$\delta_\kappa$	$\delta_{-\kappa}$
1	-1.123532581	-1.051603727	0.2680414379	0.3422451524
2	-1.212174201	-0.9833080751	0.1749464178	0.4088448510
3	-1.272316479	-0.8634929492	0.1072740054	0.5304763570
4	-1.252982866	-0.7387184356	0.1248243185	0.6534498129
5	-1.194476162	-0.6530281546	0.1758039820	0.7344614249
10	-1.246849381	-1.138503583	0.4510904989	0.1625110181
20	-1.199493708	-1.207434947	0.2853214498	0.3806052964
30	-1.139411460	-1.144848581	-0.1279557235	-0.1279568515
40	-1.092089710	-1.093651312	-0.1290033627	-0.1290572721
$\rightarrow \infty$	$\rightarrow \delta_\kappa^R$	$\rightarrow \delta_{-\kappa}^R$	$\rightarrow 0.0$	$\rightarrow 0.0$

Tabela 3.1: Comparação entre os *phase-shifts* obtidos com e sem o campo Coulombiano.

elemento de matriz do operador de quadri-corrente  $\widehat{J}_\mu(x)$  entre os estados inicial  $|\Psi_i\rangle$  e final  $|\Psi_f\rangle$  do núcleo alvo

$$J_\mu(x) = \langle \Psi_f | \widehat{J}_\mu(x) | \Psi_i \rangle = e^{i(p_f - p_i) \cdot x / \hbar} \langle \Psi_f | J_\mu(0) | \Psi_i \rangle = e^{i(p_f - p_i) \cdot x / \hbar} J_\mu(p_i, p_f) \quad (3.31)$$

se considerarmos que a corrente é um invariante de Lorentz do sistema. Aqui  $\widehat{J}_\mu(0)$  significa o operador de corrente transladado em suas coordenadas espaciais e temporais. Discutimos a seguir a forma explícita para esse operador, assim como o cálculo de seu elemento de matriz dentro do modelo acima discutido.

### 3.3.1 O Operador Densidade de Corrente

Como os nucleons são partículas com estrutura interna[2, 17] o operador de quadri-corrente não é dado simplesmente pelas matrizes  $\gamma$  como no caso de partículas pontuais.

Considerando que as correntes dependem somente dos estados de momentum inicial  $p_i$  e final  $p_f$  do sistema escrevemos a quadri-corrente hadrônica  $J_\mu(p_i, p_f)$  de uma forma geral como

$$J_\mu(p_i, p_f) = \overline{\Psi}_f(p_f) \widehat{J}_\mu(p_i, p_f) \Psi_i(p_i). \quad (3.32)$$

Aqui o operador  $\widehat{J}_\mu(p_i, p_f)$ , que determina a corrente de transição quando o núcleo

vai de um estado inicial  $\Psi_i(p_i)$  para um estado final  $\Psi_f(p_f)$ , contém as informações necessárias sobre a estrutura interna da partícula.

O operador  $\widehat{J}_\mu(p_i, p_f)$  é construído a partir dos quadri-vetores de momentum envolvidos e combinações de matrizes  $\gamma$ . A princípio tais combinações, as quais são invariantes por uma transformação de Lorentz, podem ser escritas nas seguintes formas[17]:

1	(escalar)
$\gamma^\mu$	(vetorial)
$\sigma^{\mu\nu}$	(tensorial)
$\gamma^\mu \gamma^5$	(pseudo-vetorial)
$\gamma^5$	(pseudo-escalar).

Como a interação eletromagnética é invariante por inversão de paridade as componentes do operador  $\widehat{J}_\mu(p_i, p_f)$  podem ser apenas vetoriais. Logo,  $J_\mu(p_i, p_f)$  pode ser escrito como

$$J_\mu(p_i, p_f) = \overline{\Psi}_f(p_f) \left[ \gamma_\mu K_1 + i\sigma_{\mu\nu}(p_f - p_i)^\nu K_2 + i\sigma_{\mu\nu}(p_f + p_i)^\nu K_3 + (p_f - p_i)_\mu K_4 + (p_f + p_i)_\mu K_5 \right] \Psi_i(p_i) \quad (3.33)$$

onde, na forma mais geral, os fatores de forma eletromagnéticos  $K_j$  dependem apenas dos escalares  $q^2$ ,  $p_i^2$  e  $p_f^2$ . Essa é a forma necessária para descrever a interação de um nucleon ligado ao alvo com o fóton virtual emitido pelo elétron. Entretanto, como pouco se sabe sobre o comportamento dos fatores de forma dos nucleons quando estão num estado ligado (*off-shell*) costuma-se usar os fatores de forma do nucleon livre (*on-shell*) para calcular a densidade hadrônica de correntes de transição[17]. Nessa aproximação os fatores de forma  $K_j$  são funções apenas de  $q^2$ .

Podemos incorporar os termos envolvendo  $(p_f + p_i)$  nos outros termos usando as seguintes relações

$$\overline{\Psi}_f(p_f) [(p_f + p_i)_\mu] \Psi_i(p_i) = \overline{\Psi}(p_f) [-i\sigma_{\mu\nu}(p_f - p_i)^\nu + (M_f c + M_i c) \gamma_\mu] \Psi_i(p_i) \quad (3.34)$$

e

$$\overline{\Psi}_f(p_f) [i\sigma_{\mu\nu}(p_f + p_i)^\nu] \Psi_i(p_i) = \overline{\Psi}(p_f) [-(p_f - p_i)_\mu + (M_f c - M_i c) \gamma_\mu] \Psi_i(p). \quad (3.35)$$

Com essas identidades (3.33) se reduz a

$$J_\mu(p_i, p_f) = \bar{\Psi}_f(p') \left[ \gamma_\mu F_1(q^2) + i \left( \frac{\kappa \hbar c}{2m_n c^2} \right) \sigma_{\mu\nu} q^\nu F_2(q^2) + q_\mu F_3(q^2) \right] \Psi_i(p) \quad (3.36)$$

onde

$$F_1(q^2) = K_1(q^2) + (M_f - M_i)cK_3(q^2) + (M_f + M_i)cK_5(q^2), \quad (3.37a)$$

$$F_2(q^2) = \frac{2m_n c^2}{\kappa \hbar c} (K_2(q^2) - K_5(q^2)), \quad (3.37b)$$

$$F_3(q^2) = K_4(q^2) - K_3(q^2), \quad (3.37c)$$

$m_n$  é a massa do nucleon livre e  $\kappa$  é uma constante relacionada ao momentum magnético do nucleon. Para reduzir ainda mais a expressão usamos a conservação da corrente

$$q^\mu J_\mu(p_i, p_f) = \bar{\Psi}_f(p_f) \left[ \not{q} F_1(q^2) + i \left( \frac{\kappa F_2(q^2)}{2m_n c} \right) q^\mu \sigma_{\mu\nu} q^\nu + q^2 F_3(q^2) \right] \Psi_i(p_i) = 0. \quad (3.38)$$

Usando a equação de Dirac livre temos que o primeiro termo é  $(M_f - M_i)F_1(q^2)$ . O segundo termo se anula devido à anti-simetria dos tensores  $\sigma_{\mu\nu}$ . Como estamos considerando espalhamento elástico do nucleon,  $M_i = M_f = m_n$  e, portanto,  $F_3(q^2) = 0$ . Temos assim, para uma partícula com estrutura interna, que o operador  $\hat{J}_\mu(p_i, p_f)$  depende apenas dos fatores de forma de Dirac ( $F_1(q^2)$ ) e de Pauli ( $F_2(q^2)$ ) e tem a forma:

$$\hat{J}^\mu(p_i, p_f) = F_1(q^2)\gamma^\mu + F_2(q^2)\frac{i\kappa\hbar c}{2m_n c^2}\sigma^{\mu\nu}q_\nu. \quad (3.39)$$

Escrevendo o operador dessa forma vemos que ele não depende de  $p_i$  e  $p_f$ , mas sim da diferença  $\hbar q = p_f - p_i$  entre os dois. Sendo assim, a partir de agora escrevemos o operador de densidade de correntes hadrônica como  $\hat{J}^\mu(q) \equiv \hat{J}^\mu(p_i, p_f)$  e a densidade como  $J^\mu(q) \equiv J^\mu(p_i, p_f)$ .

Os fatores de forma  $F_1(q^2)$  e  $F_2(q^2)$  são dados em termos dos fatores de forma eletromagnéticos  $G_E(q^2)$  e  $G_M(q^2)$  diretamente relacionados às densidades de carga e corrente dos nucleons, respectivamente. Esses fatores, conhecidos como fatores de forma de Sachs, estão relacionados a  $F_1(q^2)$  e  $F_2(q^2)$  por[2, 18]

$$F_1(q^2) = \left( 1 + \frac{Q^2}{4m_n^2 c^2} \right)^{-1} \left[ G_E(q^2) + \frac{Q^2}{4m_n^2 c^2} G_M(q^2) \right], \quad (3.40a)$$

$$\kappa F_2(q^2) = \left( 1 + \frac{Q^2}{4m_n^2 c^2} \right)^{-1} [G_M(q^2) - G_E(q^2)]. \quad (3.40b)$$

onde  $Q^2 = -(\hbar q)^2$ .

Os fatores de forma acima podem, em princípio, ser obtidos a partir de um modelo de quarks e glúons para o nucleon. Neste trabalho usaremos, no entanto, uma parametrização obtida a partir de dados experimentais e válido para  $Q^2 \lesssim 1$  (GeV/c)<sup>2</sup>. Nessa faixa de energia o comportamento de  $G_E(q^2)$  e  $G_M(q^2)$  é ajustado pelas curvas

$$\begin{aligned} G_E^p(q^2) &= (1 + Q^2/0.71)^{-2}, & G_M^p(q^2) &= \mu_p G_E^p(q^2), \\ G_M^n(q^2) &= \mu_n G_E^n(q^2), & G_E^n(q^2) &= (Q^2/4m_n^2 c^2)(1 + 5.6Q^2/4m_n^2 c^4)^{-1} |G_M^n(q^2)|, \end{aligned} \quad (3.41)$$

onde os superscritos em  $G_E$  e  $G_M$  determinam se o nucleon é um próton ( $p$ ) ou um nêutron ( $n$ ),  $\mu_p = 1 + \kappa_p = 2.793$  e  $\mu_n = \kappa_n = -1.913$  são seus respectivos momentos magnéticos e  $Q^2$  é dado em (Gev/c)<sup>2</sup>.

### 3.3.2 $J^\mu(\mathbf{r})$ na Aproximação de Hartree

Como discutido anteriormente, em nosso modelo para o núcleo, o mesmo é descrito na aproximação de Hartree, o que significa que sua função de onda inicial (final) é dada pelo produto anti-simetrizado (determinante de Slater) das funções de onda de cada uma das partículas do sistema, ou seja:

$$|\Psi_i\rangle = |\psi_{\alpha_1} \psi_{\alpha_2} \dots \psi_{\alpha_{(A-1)}} \psi_{\alpha_A}\rangle. \quad (3.42)$$

Como no nosso modelo para o espalhamento ( $e, e'p$ ) consideramos que o estado final  $|\Psi_f\rangle$  difere do estado inicial  $|\Psi_i\rangle$  apenas pela função de onda do nucleon espalhado, já que os demais nucleons são apenas espectadores da reação,

$$|\Psi_f\rangle = |\psi_{\alpha_1} \psi_{\alpha_2} \dots \psi_{\alpha_{(A-1)}} \psi_{\alpha'_A}\rangle. \quad (3.43)$$

De forma coerente com essa aproximação, escrevemos o operador corrente para o núcleo como sendo um operador de um corpo, ou seja[19]:

$$\langle \Psi_f | \hat{J}_\mu(\mathbf{r}) | \Psi_i \rangle = \langle \Psi_f | \sum_{i=1}^A \hat{J}_\mu^i(\mathbf{r}) | \Psi_i \rangle = \langle \psi_{\alpha'_A} | \hat{J}_\mu^A(\mathbf{r}) | \psi_{\alpha_A} \rangle, \quad (3.44)$$

onde definimos o operador corrente no espaço de coordenadas como:

$$J_\mu^i(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \hat{J}_\mu(p_i, p_f), \quad (3.45)$$

sendo  $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$ . Como vimos, para obter a seção de choque precisaremos de:

$$J^\mu(\mathbf{q}) = \int d^3\mathbf{r} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \langle \psi_{\alpha'_A} | \hat{J}^\mu(\mathbf{r}) | \psi_{\alpha_A} \rangle = \int d^3r e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} J^\mu(\mathbf{r}), \quad (3.46)$$

onde o índice  $i$  fica subentendido daqui em diante.



### 3.3.3 Decomposição em Multipolos da Densidade de Corrente

Afim de calcular a transformada de Fourier definida na equação 3.46, podemos expandir a onda plana  $e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$  em termos de funções esféricas de Bessel e harmônicos esféricos (ver apêndice B):

$$e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} = 4\pi \sum_{LM} i^L j_L(qr) Y_{LM}^*(\hat{q}) Y_{LM}(\hat{r}) \quad (3.47)$$

chegamos em<sup>1</sup>

$$J^0(\mathbf{q}) = 4\pi \sum_{LM} i^L Y_{LM}^*(\hat{q}) \langle \Psi_f | C_{LM}(q) | \Psi_i \rangle \quad (3.48)$$

onde

$$C_{LM}(q) = \int d\mathbf{r} j_L(qr) Y_{LM}(\hat{r}) J^0(\mathbf{r}) \quad (3.49)$$

é o tensor Coulombiano de ordem  $L$ .

Expandindo agora  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$  em termos de componentes esféricas temos

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \sum_{\lambda=\pm 1,3} J_\lambda(\mathbf{q}) \mathbf{e}_{\mathbf{q}\lambda}^* \quad \text{onde} \quad J_\lambda(\mathbf{q}) = \mathbf{e}_{\mathbf{q}\lambda} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{q}). \quad (3.50)$$

Como discutido no capítulo 2 precisamos calcular apenas as componentes  $J_+$  e  $J_-$ , tais que

$$J_\pm(\mathbf{q}) \equiv \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (J_x(\mathbf{q}) \pm J_y(\mathbf{q})). \quad (3.51)$$

Se substituirmos a transformada de Fourier (3.46) na equação (3.50) para  $J_\lambda$  obtemos que

$$J_\lambda(\mathbf{q}) = \mathbf{e}_{\mathbf{q}\lambda} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{q}) = \int d^3r \mathbf{e}_{\mathbf{q}\lambda} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}). \quad (3.52)$$

Usando a expansão (ver apêndice B)

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{\mathbf{q}\lambda} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} = -\sqrt{2\pi} \sum_{L \geq 1} i^L \sqrt{2L+1} \left\{ \lambda j_L(qr) \mathbf{Y}_{LL}^\lambda(\hat{r}) \right. \\ \left. + \frac{1}{q} \nabla \times [j_J(qr) \mathbf{Y}_{JJ}^\lambda(\hat{r})] \right\}, \end{aligned} \quad (3.53)$$

na equação (3.52) para  $J_\lambda$  obtemos

$$J_\lambda(\mathbf{q}) = -\sqrt{2\pi} \sum_{L \geq 1} i^L \sqrt{2L+1} \langle \Psi_f | [E_{L\lambda}(q) + \lambda M_{L\lambda}(q)] | \Psi_i \rangle, \quad (3.54)$$

onde

$$E_{L\lambda}(q) = \frac{1}{q} \int d\mathbf{r} \nabla \times [j_L(qr) \mathbf{Y}_{LL}^\lambda(\hat{r})] \cdot \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) \quad (3.55)$$

---

<sup>1</sup>Aqui  $q$  e  $r$  são os módulos dos vetores  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{r}$ , respectivamente

e

$$M_{L\lambda}(q) = \int d\mathbf{r} j_L(qr) \mathbf{Y}_{LL}^\lambda(\hat{r}) \cdot \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) \quad (3.56)$$

são chamados multipolos elétricos e magnéticos de ordem  $L$ , respectivamente.

### 3.4 Cálculo das Densidades de Carga e Corrente

Nas próximas seções mostraremos em detalhes o cálculo dessas componentes. Para facilitar os cálculos utilizaremos as seguintes notações para as funções de onda inicial  $|\psi_{\alpha_A}\rangle$  e final  $|\psi_{\alpha'_A}\rangle$  do nucleon:

$$\langle \mathbf{r} | \psi_{\alpha_A} \rangle \equiv \psi_i(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \phi_i \\ \chi_i \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

onde as componentes  $\phi_i$  e  $\chi_i$  são encontradas comparando (3.57) com (3.18) e

$$\langle \mathbf{r} | \psi_{\alpha'_A} \rangle \equiv \psi_f(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \phi_f \\ \chi_f \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

onde as componentes  $\phi_f$  e  $\chi_f$  são encontradas comparando (3.58) com (3.26).

#### 3.4.1 Cálculo de $J_0(\mathbf{q})$

Para o cálculo de  $J_0(\mathbf{q})$  começamos fazendo  $\mu = 0$  em (3.39). Assim temos que

$$\hat{J}^0(\hat{\mathbf{q}}) = F_1(q^2)\gamma^0 + F_2(q^2)\frac{i\kappa\hbar c}{2m_n c^2}\sigma^{0\nu}q_\nu = F_1(q^2)\gamma^0 + F_2(q^2)\frac{\kappa\hbar c}{2m_n c^2}\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{q}} \quad (3.59)$$

se escrevermos  $\sigma^{0\nu}q_\nu$  em termos da matriz  $\boldsymbol{\alpha}$  e do momentum transferido  $\hat{\mathbf{q}}$ . Logo a densidade de corrente  $J^0(\mathbf{r})$  no espaço das coordenadas é

$$J^0(\mathbf{r}) = \langle \psi_f | \hat{J}^0(\mathbf{r}) | \psi_i \rangle = \bar{\psi}_f(\mathbf{r}) \hat{J}^0(\mathbf{r}) \psi_i(\mathbf{r}). \quad (3.60)$$

A partir daqui deixaremos implícita as dependências em  $\mathbf{r}$  das funções de onda. Escrevendo o operador  $\hat{J}^0(\hat{\mathbf{q}})$  em sua forma explícita obtemos que

$$J^0(\mathbf{r}) = F_1(q^2)\psi_f^\dagger\psi_i + F_2(q^2)\frac{\kappa\hbar c}{2m_n c^2}\bar{\psi}_f\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{q}}\psi_i \quad (3.61)$$

e logo, utilizando o fato que  $\hbar\mathbf{q} = i(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i) = i\hbar(\overleftarrow{\nabla} + \overrightarrow{\nabla})$ , o que implica em que

$$\bar{\psi}_f\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{q}}\psi_i = \frac{i}{\hbar} \left[ \bar{\psi}_f\boldsymbol{\alpha} \cdot \overleftarrow{\nabla}\psi_i + \bar{\psi}_f\boldsymbol{\alpha} \cdot \overrightarrow{\nabla}\psi_i \right] = \frac{i}{\hbar} \boldsymbol{\nabla} \cdot (\bar{\psi}_f\boldsymbol{\alpha}\psi_i),$$

temos

$$J^0(\mathbf{r}) = F_1(q^2)\psi_f^\dagger\psi_i + iF_2(q^2)\frac{\kappa c}{2m_n c^2}\nabla \cdot (\bar{\psi}_f\boldsymbol{\alpha}\psi_i). \quad (3.62)$$

Como queremos escrever  $J^0$  no espaço de momentum calculamos a transformada de Fourier de  $J^0(\mathbf{r})$

$$\begin{aligned} J^0(\mathbf{q}) &= \int d^3r e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} J^0(\mathbf{r}) \\ &= F_1(q^2) \int d^3r e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \psi_f^\dagger\psi_i + iF_2(q^2)\frac{\kappa c}{2m_n c^2} \int d^3r e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \nabla \cdot (\bar{\psi}_f\boldsymbol{\alpha}\psi_i) \\ &= F_1(q^2) \int d^3r e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \psi_f^\dagger\psi_i + F_2(q^2)\frac{\kappa\hbar c}{2m_n c^2} \mathbf{q} \cdot \int d^3r e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} (\bar{\psi}_f\boldsymbol{\alpha}\psi_i) \end{aligned} \quad (3.63)$$

onde na última passagem resolvemos a segunda integral através de uma integração por partes.

O primeiro termo em (3.63) pode ser avaliado utilizando (3.57) e (3.58)

$$\begin{aligned} J_1^0(\mathbf{q}) &= F_1(q^2) \int d^3r e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \psi_f^\dagger\psi_i \\ &= 4\pi F_1(q^2) \sum_{LM} i^L Y_{LM}^*(\hat{q}) \int d^3r j_L(qr) Y_{LM}(\hat{r}) [\phi_f^\dagger\phi_i + \chi_f^\dagger\chi_i]. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Aqui, novamente, a escolha de  $\mathbf{q}$  paralelo ao eixo- $z$  ( $\hat{z} \equiv \mathbf{e}_0$ ) faz-se útil, visto que

$$Y_{LM}(\hat{z}) = \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}} \delta_{M0}$$

e logo, se escrevermos a equação (3.64) na sua forma explícita encontramos

$$\begin{aligned} J_1^0(\mathbf{q}) &= (4\pi)^2 F_1(q^2) \sqrt{\frac{\epsilon'_p + m_n c^2}{2\epsilon'_p}} \sum_{\kappa m L} \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}} i^{L-l} e^{-i\delta_\kappa^*} \langle l m_l \frac{1}{2} m_s | j m \rangle Y_{l m_l}^*(\hat{p}') \\ &+ \langle \kappa m | Y_{L0} | \kappa' m' \rangle [\langle g_\kappa | j_L(qr) | g_{\kappa'} \rangle + \langle f_\kappa | j_L(qr) | f_{\kappa'} \rangle], \end{aligned} \quad (3.65)$$

onde usamos explicitamente a expressão (3.26) com  $g_{\kappa'}(r) = G_{n\kappa t}(r)$  e  $f_{\kappa'}(r) = F_{n\kappa t}(r)$  e a expressão (3.18).

Na equação acima, bem como nas equações que se seguem, utilizamos as seguintes notações para as integrais angulares e radiais, respectivamente,

$$\langle \kappa m | A | \kappa' m' \rangle \equiv \int d\Omega_r \mathcal{Y}_{\kappa m}^\dagger(\hat{r}) A(\hat{r}) \mathcal{Y}_{\kappa' m'}(\hat{r}) \quad (3.66)$$

e

$$\langle \phi_\kappa | j_L(qr) | \chi_{\kappa'} \rangle \equiv \int dr j_L(qr) \phi_\kappa(r) \chi_{\kappa'}(r), \quad (3.67)$$

onde  $A(\hat{r})$  é uma função qualquer das coordenadas angulares e  $j_L(qr)$  é a função de Bessel esférica de ordem  $L$ . As integrais angulares possuem solução analítica e suas expressões são encontradas no apêndice **B**.

Para a segunda integral em (3.63), temos

$$\begin{aligned} J_2^0(\mathbf{q}) &= F_2(q^2) \frac{\kappa \hbar c}{2m_n c^2} \int d^3 r (\mathbf{q} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}) \cdot (\bar{\psi}_f \boldsymbol{\alpha} \psi_i) \\ &= F_2(q^2) \frac{\kappa \hbar c}{2m_n c^2} \int d^3 r (\mathbf{q} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}) \cdot [\phi_f^\dagger \boldsymbol{\sigma} \chi_i - \chi_f^\dagger \boldsymbol{\sigma} \phi_i]. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Usando agora a expansão (3.53) obtemos

$$\begin{aligned} J_2^0(\mathbf{q}) &= -F_2(q^2) \frac{\kappa \hbar c}{2m_n c^2} |\mathbf{q}| (4\pi)^2 \sqrt{\frac{\epsilon'_p + m_n c^2}{8\pi \epsilon'_p}} \sum_{\kappa m L} i^{-L} e^{-i\delta_\kappa^*} \langle l m_l \frac{1}{2} m_s | j m \rangle Y_{l m_l}^*(\hat{p}') \\ &\quad \{ \sqrt{L+1} i^{L+1} [i \langle \kappa m | \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Y}_{LL+1}^0 | \kappa' m' \rangle \langle g_\kappa | j_{L+1}(qr) | f_{\kappa'} \rangle \\ &\quad + i \langle -\kappa m | \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Y}_{LL+1}^0 | \kappa' m' \rangle \langle f_\kappa | j_{L+1}(qr) | g_{\kappa'} \rangle] \\ &\quad + \sqrt{L} i^{L+1} [i \langle -\kappa m | \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Y}_{LL-1}^0 | \kappa' m' \rangle \langle g_\kappa | j_{L-1}(qr) | f_{\kappa'} \rangle \\ &\quad + i \langle -\kappa m | \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Y}_{LL-1}^0 | \kappa' m' \rangle \langle f_\kappa | j_{L-1}(qr) | g_{\kappa'} \rangle] \}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Reescrevendo as integrais angulares do tipo  $\langle \kappa m | \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Y}_{JL}^M | \kappa' m' \rangle$  em termos de integrais do tipo  $\langle \kappa m | Y_{LM} | \kappa' m' \rangle$  (apêndice **B**) encontramos que

$$\begin{aligned} J_2^0(\mathbf{q}) &= F_2(q^2) \frac{\kappa \hbar c}{2m_n c^2} |\mathbf{q}| (4\pi)^2 \sqrt{\frac{\epsilon'_p + m_n c^2}{8\pi \epsilon'_p}} \sum_{\kappa m L} i^{L-l} e^{i\delta_\kappa^*} \langle l m_l \frac{1}{2} m_s | j m \rangle Y_{l m_l}^*(\hat{p}') \frac{\langle \kappa m | Y_{L0} | \kappa' m' \rangle}{\sqrt{2L+1}} \\ &\quad \left\{ (\kappa - \kappa' + L + 1) \langle g_\kappa | j_{L+1}(qr) | f_{\kappa'} \rangle + (-\kappa + \kappa' + J + 1) \langle f_\kappa | j_{L+1}(qr) | g_{\kappa'} \rangle \right. \\ &\quad \left. + (\kappa - \kappa' - L) \langle g_\kappa | j_{L-1}(qr) | f_{\kappa'} \rangle + (-\kappa + \kappa' - L) \langle f_\kappa | j_{L-1}(qr) | g_{\kappa'} \rangle \right\}. \end{aligned} \quad (3.70)$$

e, logo, podemos escrever a densidade de carga de transição no espaço de momentum como

$$\begin{aligned} J^0(\mathbf{q}) &= (4\pi)^2 \sqrt{\frac{\epsilon'_p + m_n c^2}{2\epsilon'_p}} \sum_{\kappa m L} \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}} i^{L-l} e^{i\delta_\kappa^*} \langle l m_l \frac{1}{2} m_s | j m \rangle Y_{l m_l}^*(\hat{p}') \\ &\quad + \langle \kappa m | Y_{L0} | \kappa' m' \rangle \left\{ F_1(q^2) [\langle g_\kappa | j_L(qr) | g_{\kappa'} \rangle + \langle f_\kappa | j_L(qr) | f_{\kappa'} \rangle] + F_2(q^2) \frac{\kappa \hbar c}{2m_n M c^2} |\mathbf{q}| \frac{1}{2L+1} \right. \\ &\quad \left[ (\kappa - \kappa' + L + 1) \langle g_\kappa | j_{L+1}(qr) | f_{\kappa'} \rangle + (-\kappa + \kappa' + L + 1) \langle f_\kappa | j_{L+1}(qr) | g_{\kappa'} \rangle \right. \\ &\quad \left. \left. + (\kappa - \kappa' - L) \langle g_\kappa | j_{L-1}(qr) | f_{\kappa'} \rangle + (-\kappa + \kappa' - L) \langle f_\kappa | j_{L-1}(qr) | g_{\kappa'} \rangle \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.71)$$

### 3.4.2 Cálculo de $J_{\pm}(\mathbf{q})$

Nesta seção calculamos as componentes transversais ( $J_{\pm}(\mathbf{q})$ ) da densidade de corrente. Começamos obtendo o operador de corrente  $\hat{\mathbf{J}}(\hat{\mathbf{q}})$ . Usando  $\mu \neq 0$  em (3.39) temos

$$\hat{\mathbf{J}}(\hat{\mathbf{q}}) = F_1(q^2)\boldsymbol{\gamma} + F_2(q^2)\frac{i\kappa\hbar c}{2m_n c^2}\sum_{i=1}^3\sigma^{i\nu}\hat{q}_\nu\mathbf{e}_i \quad (3.72)$$

e logo, se escrevermos as matrizes  $\sigma^{i\nu}$  e o quadri-vetor  $q_\nu$  na sua forma explícita,

$$\hat{\mathbf{J}}(\hat{\mathbf{q}}) = F_1(q^2)\boldsymbol{\gamma} + F_2(q^2)\frac{\kappa q_0\hbar c}{2m_n c^2}\boldsymbol{\alpha} + F_2(q^2)\frac{i\kappa\hbar c}{2m_n c^2}\boldsymbol{\Sigma} \times \hat{\mathbf{q}}. \quad (3.73)$$

Calculando o elemento de matriz usando as funções de onda inicial e final do nucleon espalhado obtemos que

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = F_1(q^2)\bar{\psi}_f\boldsymbol{\gamma}\psi_i + F_2(q^2)\frac{\kappa\hat{q}_0\hbar c}{2m_n c^2}\bar{\psi}_f\boldsymbol{\alpha}\psi_i + F_2(q^2)\frac{i\kappa\hbar c}{2m_n c^2}\bar{\psi}_f\boldsymbol{\Sigma} \times \hat{\mathbf{q}}\psi_i. \quad (3.74)$$

Escrevendo os dois primeiros termos usando (3.57) e (3.58) e as matrizes  $\boldsymbol{\gamma}$  e  $\boldsymbol{\Sigma}$  (ver apêndice A) em termos das matrizes  $\boldsymbol{\sigma}$  de Pauli chegamos em

$$\mathbf{J}_1(\mathbf{r}) = \phi_f^\dagger\boldsymbol{\sigma}\chi_i \left[ F_1(q^2) + F_2(q^2)\frac{\kappa\hbar c q_0}{2Mc^2} \right] + \chi_f^\dagger\boldsymbol{\sigma}\phi_i \left[ F_1(q^2) - F_2(q^2)\frac{\kappa\hbar c q_0}{2Mc^2} \right], \quad (3.75)$$

ou de forma compacta,

$$\mathbf{J}_1(\mathbf{r}) = k_1\phi_f^\dagger\boldsymbol{\sigma}\chi_i + k_2\chi_f^\dagger\boldsymbol{\sigma}\phi_i \quad (3.76)$$

onde  $k_1$  e  $k_2$  são facilmente identificados.

Fazendo o mesmo para o terceiro termo em (3.74), com  $\mathbf{q} = i(\vec{\nabla} + \vec{\nabla}')$ , obtemos

$$\mathbf{J}_2(\mathbf{r}) = k_3\vec{\nabla} \times [\phi_f^\dagger\boldsymbol{\sigma}\phi_i - \chi_f^\dagger\boldsymbol{\sigma}\chi_i], \quad (3.77)$$

onde definimos  $k_3 = F_2(q^2)\frac{\kappa\hbar c}{2m_n c^2}$ .

Tomando a transformada de Fourier de  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$  e fazendo a projeção nas componentes transversais usando (3.52) encontramos as componentes transversas da densidade de correntes no espaço de momentum. Elas são

$$J_\lambda(\mathbf{q}) = \int d^3r \mathbf{e}_{\mathbf{q}\lambda} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) = J_{1\lambda}(\mathbf{q}) + J_{2\lambda}(\mathbf{q}), \quad \text{onde } \lambda = \pm 1 \quad (3.78)$$

e  $J_{1\lambda}(\mathbf{q})$  e  $J_{2\lambda}(\mathbf{q})$  são as projeções em  $\mathbf{e}_{\mathbf{q}\lambda}$  das transformadas de Fourier de  $\mathbf{J}_1(\mathbf{r})$  e  $\mathbf{J}_2(\mathbf{r})$ , respectivamente.

Utilizando algumas propriedades de harmônicos esféricos e funções de Bessel (Apêndice B) a expansão (3.53) para  $\mathbf{e}_{\mathbf{q}\lambda}e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$  se torna

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{\mathbf{q}\lambda}e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} = & -\sqrt{2\pi} \sum_{L \geq 1} i^L \sqrt{2L+1} \left\{ \lambda j_L(qr) \mathbf{Y}_{LL}^\lambda(\hat{r}) \right. \\ & \left. - i \sqrt{\frac{L}{2L+1}} j_{L+1}(qr) \mathbf{Y}_{LL+1}^\lambda(\hat{r}) + i \sqrt{\frac{L+1}{2L+1}} j_{L-1}(qr) \mathbf{Y}_{LL-1}^\lambda(\hat{r}) \right\}. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Assim, para  $J_{1\lambda}(\mathbf{q})$  temos

$$\begin{aligned} J_{1\lambda}(\mathbf{q}) = & -\sqrt{2\pi} \sum_{L \geq 1} i^L \sqrt{2L+1} \left\{ \lambda \left[ k_1 \int d^3r j_L(qr) \phi_f^\dagger \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Y}_{LL}^\lambda \chi_i \right. \right. \\ & + k_2 \int d^3r j_L(qr) \chi_f^\dagger \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Y}_{LL}^\lambda \phi_i \left. \right] - i \sqrt{\frac{L}{2L+1}} \left[ k_1 \int d^3r j_{L+1}(qr) \phi_f^\dagger \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Y}_{LL+1}^\lambda \chi_i \right. \\ & + k_2 \int d^3r j_{L+1}(qr) \chi_f^\dagger \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Y}_{LL+1}^\lambda \phi_i \left. \right] + i \sqrt{\frac{L+1}{2L+1}} \left[ k_1 \int d^3r j_{L-1}(qr) \phi_f^\dagger \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Y}_{LL-1}^\lambda \chi_i \right. \\ & \left. \left. + k_2 \int d^3r j_{L-1}(qr) \chi_f^\dagger \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Y}_{LL-1}^\lambda \phi_i \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.80)$$

e, escrevendo explicitamente as componentes das funções de onda,

$$\begin{aligned} J_{1\lambda}(\mathbf{q}) = & -4\pi \sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{\epsilon'_p + m_n c^2}{2\epsilon'_p}} \sum_{\kappa m, L \geq 1} \sqrt{2L+1} i^{L-l} e^{i\delta_\kappa^*} \langle l m_l \frac{1}{2} m_s | j m \rangle Y_{lm_l}^*(\hat{p}') \\ & \left\{ i\lambda \left[ k_1 \langle g_\kappa | j_L(qr) | f_{\kappa'} \rangle \langle \kappa m | \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Y}_{LL}^\lambda | -\kappa' m' \rangle - k_2 \langle f_\kappa | j_L(qr) | g_{\kappa'} \rangle \langle -\kappa m | \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Y}_{LL}^\lambda | \kappa' m' \rangle \right] \right. \\ & + \sqrt{\frac{L}{2L+1}} \left[ k_1 \langle g_\kappa | j_{L+1}(qr) | f_{\kappa'} \rangle \langle \kappa m | \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Y}_{LL+1}^\lambda | -\kappa' m' \rangle - k_2 \langle f_\kappa | j_{L+1}(qr) | g_{\kappa'} \rangle \right. \\ & \left. \langle -\kappa m | \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Y}_{LL+1}^\lambda | \kappa' m' \rangle \right] + \sqrt{\frac{L+1}{2L+1}} \left[ -k_1 \langle g_\kappa | j_{L-1}(qr) | f_{\kappa'} \rangle \langle \kappa m | \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Y}_{LL-1}^\lambda | -\kappa' m' \rangle \right. \\ & \left. + k_2 \langle f_\kappa | j_{L-1}(qr) | g_{\kappa'} \rangle \langle -\kappa m | \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Y}_{LL-1}^\lambda | \kappa' m' \rangle \right] \left. \right\}, \end{aligned} \quad (3.81)$$

o que implica em

$$\begin{aligned} J_{1\lambda}(\mathbf{q}) = & -4\pi \sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{\epsilon'_p + m_n c^2}{2\epsilon'_p}} \sum_{\kappa m, L \geq 1} \sqrt{\frac{2L+1}{L(L+1)}} i^{L-l} e^{i\delta_\kappa^*} \langle l m_l \frac{1}{2} m_s | j m \rangle Y_{lm_l}^*(\hat{p}') \\ & \left\{ -i\lambda \langle \kappa m | Y_{L\lambda} | -\kappa' m' \rangle \left[ k_1 (\kappa + \kappa') \langle g_\kappa | j_L(qr) | f_{\kappa'} \rangle + k_2 (\kappa + \kappa') \langle f_\kappa | j_L(qr) | g_{\kappa'} \rangle \right] + \langle \kappa m | Y_{L\lambda} | \kappa' m' \rangle \right. \\ & \left[ \frac{L}{2L+1} \left( k_1 (\kappa - \kappa' + L + 1) \langle g_\kappa | j_{L+1}(qr) | f_{\kappa'} \rangle - k_2 (-\kappa + \kappa' + L + 1) \langle f_\kappa | j_{L+1}(qr) | g_{\kappa'} \rangle \right) \right. \\ & \left. \left. + \frac{L+1}{2L+1} \left( -k_1 (\kappa - \kappa' - L) \langle g_\kappa | j_{L-1}(qr) | f_{\kappa'} \rangle + k_2 (-\kappa + \kappa' - L) \langle f_\kappa | j_{L-1}(qr) | g_{\kappa'} \rangle \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Para  $J_{2\lambda}(\mathbf{q})$  temos

$$J_{2\lambda}(\mathbf{q}) = k_3 \int d^3r \mathbf{e}_{\mathbf{q}\lambda} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \cdot \nabla \times [\phi_f^\dagger \boldsymbol{\sigma} \phi_i - \chi_f^\dagger \boldsymbol{\sigma} \chi_i], \quad (3.83)$$

e assim,

$$\begin{aligned} J_{2\lambda}(\mathbf{q}) &= k_3 \int d^3r [\phi_f^\dagger \boldsymbol{\sigma} \phi_i - \chi_f^\dagger \boldsymbol{\sigma} \chi_i] \cdot (\nabla \times (\mathbf{e}_{\mathbf{q}\lambda} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}})) \\ &\quad + k_3 \int d^3r \nabla \cdot ([\phi_f^\dagger \boldsymbol{\sigma} \phi_i - \chi_f^\dagger \boldsymbol{\sigma} \chi_i] \times (\mathbf{e}_{\mathbf{q}\lambda} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}})). \end{aligned} \quad (3.84)$$

Utilizando o teorema do divergente e o fato que a função de onda inicial é nula a partir de um determinado raio vemos que a segunda integral é nula e, logo, não contribui para  $J_{2\lambda}(\mathbf{q})$ . Aplicando o rotacional na expansão (3.79) temos (para  $\lambda = \pm 1$ )

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{e}_{\mathbf{q}\lambda} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}) &= q\lambda \mathbf{e}_{\mathbf{q}\lambda} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} = -\sqrt{2\pi} \sum_{L \geq 1} i^L \sqrt{2L+1} \left\{ q j_L(qr) \mathbf{Y}_{LL}^\lambda(\hat{r}) \right. \\ &\quad \left. + i\lambda q \left[ -\sqrt{\frac{L}{2L+1}} j_{L+1}(qr) \mathbf{Y}_{LL+1}^\lambda(\hat{r}) + \sqrt{\frac{L+1}{2L+1}} j_{L-1}(qr) \mathbf{Y}_{LL-1}^\lambda(\hat{r}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.85)$$

e, logo,

$$\begin{aligned} J_{2\lambda}(\mathbf{q}) &= -k_3 q \sqrt{2\pi} \sum_{L \geq 1} i^L \sqrt{2L+1} \left\{ \left[ \int d^3r j_L(qr) \phi_f^\dagger \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Y}_{LL}^\lambda \phi_i \right. \right. \\ &\quad \left. - \int d^3r j_L(qr) \chi_f^\dagger \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Y}_{LL}^\lambda \chi_i \right] - i\lambda \sqrt{\frac{L}{2L+1}} \left[ \int d^3r j_{L+1}(qr) \phi_f^\dagger \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Y}_{LL+1}^\lambda \phi_i \right. \\ &\quad \left. - \int d^3r j_{L+1}(qr) \chi_f^\dagger \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Y}_{LL+1}^\lambda \chi_i \right] + i\lambda \sqrt{\frac{L+1}{2L+1}} \left[ \int d^3r j_{L-1}(qr) \phi_f^\dagger \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Y}_{LL-1}^\lambda \phi_i \right. \\ &\quad \left. \left. - \int d^3r j_{L-1}(qr) \chi_f^\dagger \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Y}_{LL-1}^\lambda \chi_i \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Escrevendo as funções de onda explicitamente e separando as integrais radiais e angulares

$$\begin{aligned} J_{2\lambda}(\mathbf{q}) &= -4\pi \sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{\epsilon'_p + m_n c^2}{2\epsilon'_p}} k_3 q \sum_{\kappa m, L \geq 1} \sqrt{2L+1} i^{L-l} e^{i\delta_\kappa^*} \langle l m_l \frac{1}{2} m_s | j m \rangle Y_{lm_l}^*(\hat{p}') \\ &\quad \left\{ \left[ \langle g_\kappa | j_L(qr) | g_{\kappa'} \rangle \langle \kappa m | \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Y}_{LL}^\lambda | \kappa' m' \rangle - \langle f_\kappa | j_L(qr) | f_{\kappa'} \rangle \langle -\kappa m | \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Y}_{LL}^\lambda | -\kappa' m' \rangle \right] \right. \\ &\quad \left. - i\lambda \sqrt{\frac{L}{2L+1}} \left[ \langle g_\kappa | j_{L+1}(qr) | g_{\kappa'} \rangle \langle \kappa m | \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Y}_{LL+1}^\lambda | \kappa' m' \rangle - \langle f_\kappa | j_{L+1}(qr) | f_{\kappa'} \rangle \right. \right. \\ &\quad \left. \langle -\kappa m | \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Y}_{LL+1}^\lambda | -\kappa' m' \rangle \right] + i\lambda \sqrt{\frac{L+1}{2L+1}} \left[ \langle g_\kappa | j_{L-1}(qr) | g_{\kappa'} \rangle \langle \kappa m | \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Y}_{LL-1}^\lambda | \kappa' m' \rangle \right. \\ &\quad \left. \left. - \langle f_\kappa | j_{L-1}(qr) | f_{\kappa'} \rangle \langle -\kappa m | \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Y}_{LL-1}^\lambda | -\kappa' m' \rangle \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.87)$$

o que implica que

$$\begin{aligned}
J_{2\lambda}(\mathbf{q}) = & -4\pi\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{\epsilon'_p + m_n c^2}{2\epsilon'_p}} k_3 q \sum_{\kappa m, L \geq 1} \sqrt{\frac{2L+1}{L(L+1)}} i^{L-l} e^{i\delta_\kappa^*} \langle l m_l \frac{1}{2} m_s | j m \rangle Y_{lm_l}^*(\hat{p}_f) \\
& \left\{ \langle \kappa m | Y_{L\lambda} | \kappa' m' \rangle \left[ (\kappa' - \kappa) \langle g_\kappa | j_L(qr) | g_{\kappa'} \rangle + (\kappa' - \kappa) \langle f_\kappa | j_L(qr) | f_{\kappa'} \rangle \right] - i\lambda \langle \kappa m | Y_{L\lambda} | -\kappa' m' \rangle \right. \\
& \left[ \frac{L}{2L+1} \left( (\kappa + \kappa' + L + 1) \langle g_\kappa | j_{L+1}(qr) | g_{\kappa'} \rangle - (-\kappa - \kappa' + L + 1) \langle f_\kappa | j_{L+1}(qr) | f_{\kappa'} \rangle \right) \right. \\
& \left. \left. \frac{L+1}{2L+1} \left( -(\kappa + \kappa' - L) \langle g_\kappa | j_{L-1}(qr) | g_{\kappa'} \rangle + (-\kappa - \kappa' - L) \langle f_\kappa | j_{L-1}(qr) | f_{\kappa'} \rangle \right) \right] \right\}. \tag{3.88}
\end{aligned}$$

Juntando esse resultado com o resultado para  $J_{1\lambda}(\mathbf{q})$  obtemos as componentes transversas para a densidade de corrente de transiao do nucleo, na aproximaao de Hartree:

$$\begin{aligned}
J_\lambda(\mathbf{q}) = & -4\pi\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{\epsilon'_p + m_n c^2}{2\epsilon'_p}} \sum_{\kappa m, L \geq 1} \sqrt{\frac{2L+1}{L(L+1)}} i^{L-l} e^{i\delta_\kappa^*} \langle l m_l \frac{1}{2} m_s | j m \rangle Y_{lm_l}^*(\hat{p}') \\
& \left\{ -i\lambda \langle \kappa m | Y_{L\lambda} | -\kappa' m' \rangle \left[ [k_1(\kappa + \kappa') \langle g_\kappa | j_L(qr) | f_{\kappa'} \rangle + k_2(\kappa + \kappa') \langle f_\kappa | j_L(qr) | g_{\kappa'} \rangle] \right. \right. \\
& + k_3 q \frac{L}{2L+1} \left( (\kappa + \kappa' + L + 1) \langle g_\kappa | j_{L+1}(qr) | g_{\kappa'} \rangle - (-\kappa - \kappa' + L + 1) \langle f_\kappa | j_{L+1}(qr) | f_{\kappa'} \rangle \right) \\
& + k_3 q \frac{L+1}{2L+1} \left( -(\kappa + \kappa' - L) \langle g_\kappa | j_{L-1}(qr) | g_{\kappa'} \rangle + (-\kappa - \kappa' - L) \langle f_\kappa | j_{L-1}(qr) | f_{\kappa'} \rangle \right) \left. \right] \\
& + \langle \kappa m | Y_{L\lambda} | \kappa' m' \rangle \left[ -k_3 q \left( (\kappa - \kappa') \langle g_\kappa | j_L(qr) | g_{\kappa'} \rangle + (\kappa - \kappa') \langle f_\kappa | j_L(qr) | f_{\kappa'} \rangle \right) \right. \\
& + \frac{L}{2L+1} \left( k_1(\kappa - \kappa' + L + 1) \langle g_\kappa | j_{L+1}(qr) | f_{\kappa'} \rangle - k_2(-\kappa + \kappa' + L + 1) \langle f_\kappa | j_{L+1}(qr) | g_{\kappa'} \rangle \right) \\
& + \left. \left. \frac{L+1}{2L+1} \left( -k_1(\kappa - \kappa' - L) \langle g_\kappa | j_{L-1}(qr) | f_{\kappa'} \rangle + k_2(-\kappa + \kappa' - L) \langle f_\kappa | j_{L-1}(qr) | g_{\kappa'} \rangle \right) \right] \right\}. \tag{3.89}
\end{aligned}$$



# Capítulo 4

## Resultados e Conclusões

Neste capítulo mostramos alguns resultados obtidos com nosso modelo para o espalhamento ( $e, e'p$ ). Começamos comparando os resultados obtidos para algumas grandezas físicas na aproximação de Hartree para o modelo de Walecka, com valores experimentais das mesmas. Isso é feito para testar o grau de confiabilidade do nosso modelo para as funções de onda dos nucleons ligados.

Em seguida, calculamos as densidades de corrente para o espalhamento ( $e, e'p$ ) bem como a seção de choque para dois núcleos de camada fechada ( $^{16}\text{O}$  e  $^{40}\text{Ca}$ ). Fazemos isso em diferentes condições cinemáticas e discutimos os resultados obtidos.

### 4.1 Resultados para a Aproximação de Hartree

Como vimos no capítulo anterior as equações para os campos mesônicos e para as funções de onda dos nucleons do núcleo dependem de sete parâmetros do modelo, a massa dos nucleons e as massas e constantes de acoplamento dos três mésons. Os parâmetros que utilizamos são os mesmos da referência [11].

Três desses parâmetros, a massa  $m_n$  dos nucleons e as massas  $m_\omega$  e  $m_\rho$  dos mésons vetorial  $\omega$  e isovetorial  $\rho$ , são dados por seus respectivos valores experimentais:  $m_n = 939\text{MeV}/c^2$ ,  $m_\omega = 783\text{MeV}/c^2$  e  $m_\rho = 770\text{MeV}/c^2$ .

Os valores das constantes de acoplamento do modelo são dados de maneira a reproduzir algumas propriedades da matéria nuclear. Eles são escolhidos de maneira que, para a densidade de saturação da matéria nuclear, reproduzimos a energia de ligação por nucleon  $a_1 = 15.75\text{MeV}$  e a energia de simetria por nucleon  $a_4 = 35\text{MeV}$ .

Essas duas energias estão bem definidas no limite de infinitos bárions na formula semi-empírica de massa

$$E = -a_1A + a_2A^{2/3} + a_3\frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_4\frac{(N - Z)^2}{A}. \quad (4.1)$$

A massa do méson escalar  $\sigma$  determina o alcance da interação atrativa que mantém o núcleo coeso e afeta principalmente o comportamento da densidade na superfície nuclear e sua espessura. A escolha de  $m_\sigma = 520\text{MeV}/c^2$  é feita de maneira a reproduzir o raio quadrático médio de carga do  $^{40}\text{Ca}$ .

Na tabela 4.1 temos os parâmetros utilizados no modelo e na tabela 4.2 temos algumas comparações dos valores de algumas grandezas físicas obtidas com o modelo e seus valores experimentais.

méson	$massa(\text{MeV}/c^2)$	$g^2$
$\sigma$	520	109.63
$\omega$	783	190.43
$\rho$	770	65.23

Tabela 4.1: Parâmetros utilizados na aproximação de Hartree

Na tabela 4.2 temos uma comparação entre os valores do modelo para o raio quadrático médio (r.m.s.) da distribuição de carga ( $r_{ch}$ ). O r.m.s. da distribuição de cargas foi calculado usando que  $r_{ch} = \sqrt{r_p^2 + 0.8^2}$  onde  $r_p$  é o raio da distribuição de prótons e 0.8 é, aproximadamente, o raio do próton[20]. Nessa mesma tabela temos uma comparação da energia de ligação por nucleon, com valores experimentais.

	Raio da distribuição de Carga $r_{ch} \equiv \langle r_{ch}^2 \rangle^{1/2} (fm)$		Energia de ligação por Nucleon ( $\text{MeV}$ )	
	Aprox. de Hartree	experimental	Aprox. de Hartree	experimental
$^{16}\text{O}$	2.75	2.73	4.89	7.98
$^{40}\text{Ca}$	3.48	3.48	6.30	8.45

Tabela 4.2: Raios Nucleares e Energia de Ligação por Nucleon

Nota-se que, embora existam na literatura parametrizações diferentes ou mesmo sofisticadas do modelo de Walecka que fornecem valores melhores para a energia de ligação por nucleon, os resultados acima são bastante razoáveis e nos dão um mínimo

de confiabilidade para a função de onda do nucleon ligado, o que é suficiente para nossos propósitos aqui.

## 4.2 Densidades de Corrente e Seção de Choque

Ao discutir a obtenção das densidades de corrente e da seção de choque nos capítulos anteriores, vimos que essas grandezas dependem de vários parâmetros cinemáticos da reação. Como temos várias maneiras de montar um experimento para obter essas grandezas, por conveniência, fixamos alguns parâmetros da reação e calculamos as grandezas desejadas em função de alguma outra não fixada.

Nesse trabalho discutiremos as duas maneiras mais comuns de se extrair as densidades de corrente e a seção de choque da reação. Elas são conhecidas por cinemática paralela e cinemática quasi-perpendicular, ou cinemática  $\omega - q$  fixos.

As duas têm em comum o fato de fixarmos as energias inicial  $\epsilon_e$  e final  $\epsilon'_e$  do elétron espalhado e, logo, a energia  $\omega$  transferida para o sistema nuclear. Além disso fixa-se também a energia  $\epsilon'_p$  e, assim, o momentum final do próton arrancado  $|\mathbf{p}'|$ .

Fixando essas quantidades medimos as grandezas desejadas em função do momentum inicial  $\mathbf{p}$  do nucleon arrancado. A escolha poderia ter sido feita para obter a grandeza relevante em função de outro parâmetro, mas fizemos a escolha por  $\mathbf{p}$  pois desta maneira obtemos informações sobre a função de onda do nucleon espalhado em seu estado ligado de maneira mais direta.

A diferença entre as duas cinemáticas está no fato de que na cinemática paralela o momentum  $\hbar\mathbf{q}$  transferido e o momentum final  $\mathbf{p}'$  do nucleon arrancado são paralelos e, logo, podemos obter a seção de choque em função de  $p$  simplesmente variando o módulo do momentum transferido  $\hbar\mathbf{q}$ , tal que  $p = |\mathbf{p}'| - \hbar|\mathbf{q}|$ . Experimentalmente isso é feito variando o ângulo  $\theta_e$  de espalhamento do elétron. Nessa cinemática os ângulos  $\theta_p$  e  $\phi_p$  são fixos em  $0^\circ$  e os termos de interferência das densidades de corrente,  $w_{tl}$  e  $w_{tt}$ , não contribuem para a seção de choque.

Na cinemática quasi-perpendicular, além de  $\epsilon_e$ ,  $\epsilon'_e$  e  $|\mathbf{p}'|$ , fixa-se também  $\mathbf{q}$ . Então, para se obter a seção de choque em função do momentum inicial  $p$  do nucleon arrancado varia-se o ângulo  $\theta_p$  entre o momentum transferido  $\hbar\mathbf{q}$  e o momentum do nucleon arrancado  $\mathbf{p}'$ . Notamos aqui que, como  $\hbar\mathbf{q}$  e  $\mathbf{p}'$  não são paralelos, podemos ter espalhamento do nucleon para fora do plano determinado por  $\mathbf{k}$  e  $\mathbf{k}'$ , *i.e.*,  $\phi_p \neq 0^\circ$ . Isso implica

que, ao especificar as grandezas medidas em função de  $p$ , devemos especificar também o ângulo  $\phi_p$  do espalhamento. Como o espalhamento fora do plano foi pouco estudado até os dias de hoje, temos apenas duas opções para  $\phi_p$ , respectivamente  $\phi_p = 0^\circ$  e  $\phi_p = 180^\circ$ . Aqui seguimos a convenção de [21], ou seja,  $p$  é um número cujo módulo coincide com o módulo de  $\mathbf{p}$  e tal que,  $p < 0$  para  $\phi_p = 0^\circ$  e  $p > 0$  para  $\phi_p = 180^\circ$ . Nas comparações que se seguem usamos também  $|\mathbf{p}'| = \hbar|\mathbf{q}|$ , pois existem mais dados experimentais para espalhamentos satisfazendo essas condições.

Inicialmente mostramos comparações com resultados experimentais para seção de choque obtida para duas energias e momentum transferido diferentes de prótons arrancados de um mesmo nível na cinemática quasi-perpendicular. Cada uma delas é obtida de quatro maneiras diferentes e mostrada em escala linear e logarítmica. Isso é feito para se analisar os efeitos de se incluir ou não o potencial Coulombiano dos prótons, QHD-II e QHD-I, respectivamente e de se utilizar ondas planas (PWIA) ou distorcidas (DWIA) para descrever o próton espalhado.

As comparações foram feitas para prótons arrancados do estado  $1p_{1/2}$  do  $^{16}\text{O}$  para energias cinéticas do próton arrancado de 98 MeV (figura 4.1) e 433 MeV (figura 4.2). Na primeira figura os resultados que obtivemos foram multiplicados por 0.35 a fim de coincidirem quantitativamente com os dados experimentais de *Saclay*[22]. Explicaremos esse fato mais à frente.

Podemos notar pelas figuras 4.1 e 4.2 que não há muita diferença quantitativa ou qualitativa em se utilizar QHD-I ou QHD-II. Esse era um resultado esperado, pois, a inclusão ou não do potencial Coulombiano pouco altera as funções de onda dos núcleons ligados e espalhados. A maior diferença nas seções de choque aparecem quando incluímos os efeitos de distorção na função de onda do próton. Para momentos iniciais mais baixos do próton espalhado ( $p \lesssim 100$  MeV/c) a diferença é apenas quantitativa, quando usamos a PWIA os mínimos de difração são mais acentuados, mas para momentos mais altos ( $p \simeq 400$  MeV/c) temos uma grande diferença qualitativa também para as seções de choque obtidas: além de mínimos mais acentuados o comportamento para momentum transferido alto é bastante diferente nos dois casos. Apesar de quantitativamente o resultado da PWIA para energias altas estar próximo dos dados experimentais e a diferença entre a QHD-I e a QHD-II ser pequena, fizemos os demais cálculos neste trabalho usando QHD-II e ondas distorcidas (DWIA).

### 4.2.1 $^{16}\text{O}(e, e'p)^{15}\text{N}$

Começamos apresentando algumas comparações com dados experimentais para os fatores de forma obtidos na cinemática quasi-perpendicular para prótons arrancados dos níveis  $1p_{1/2}$  e  $1p_{3/2}$  na reação  $^{16}\text{O}(e, e'p)^{15}\text{N}$  (figuras 4.3 e 4.4). Isto é possível uma vez que, usando a dependência cinemática da seção de choque, podemos separar experimentalmente tais fatores de forma de maneira semelhante ao que chamamos no espalhamento inclusivo de elétrons de separação de Rosebluth.

Apesar das duas comparações terem sido feitas para faixas de energias do elétron incidente e do nucleon arrancado bem diferentes, podemos verificar certas similaridades entre as duas.

Nas comparações podemos ver que a única das componentes das densidades de corrente que tem certa concordância quantitativa e qualitativa com o valor experimental é a “longitudinal”,  $w_l + \frac{v_{tt}}{v_l}w_{tt}$ . Aqui falamos também em concordância qualitativa (apesar da escassez de pontos na comparação com os dados de [21]), pois, mesmo modelos bastante diferentes[23, 24] do nosso mostram que o comportamento qualitativo não foge muito do que obtivemos. Aqui as componentes  $w_l$  e  $w_{tt}$  foram adicionadas, pois na cinemática perpendicular não é possível medi-las separadamente. Nos referimos a essa componente como longitudinal, pois, em ambos os casos, a parte longitudinal representa mais de 90% do valor total.

As componentes transversais  $w_T$  e  $w_{TL}$  parecem ter o seu comportamento qualitativo bem descrito pelo modelo, mas seus valores estão superestimados de até um fator 4 em alguns casos. De acordo com a referência [24] o comportamento da componente  $w_{TL}$  é o mais dependente do modelo utilizado para descrever o estado final do nucleon arrancado. Podemos perceber isso olhando nas figuras 4.3 e 4.4 as comparações dos resultados que obtivemos para essa componente com os resultado de *Debruyne*[24] e *Mokhtar*[23].

Com a finalidade de comparar nossos resultados com a maioria dos resultados apresentados na literatura convém nesse ponto definir o que chamamos de seção de choque reduzida. A seção de choque reduzida é definida como

$$\rho = \frac{1}{\sigma_{ep}} \frac{1}{|\mathbf{p}'|c\epsilon'_p} \frac{d^5\sigma}{d\epsilon'_e d\Omega_{e'} d\Omega_{p'}} \quad (4.2)$$

onde  $\sigma_{ep}$  é a seção de choque elétron-próton. Não existe maneira única de definir  $\sigma_{ep}$ ,

então, aqui utilizamos a convenção de *De Forest*[26]:

$$\sigma_{ep}^{cc1} = \sigma_M \left( v_l w_C + v_t w_T - \sqrt{2} v_{tl} w_I \cos \phi + (v_t + v_{tt}(1 - 2 \cos^2 \phi) w_S) \right) \quad (4.3)$$

onde

$$w_C = \frac{1}{4\epsilon'_p \bar{\epsilon}} \left[ (\epsilon'_p + \bar{\epsilon})^2 (F_1^2 + \frac{\bar{Q}^2}{4m_n^2 c^2} \kappa^2 F_2^2) - \mathbf{q}^2 (F_1 + \kappa F_2)^2 \right], \quad (4.4a)$$

$$w_T = \frac{\bar{Q}^2}{2\epsilon'_p \bar{\epsilon}} (F_1 + \kappa F_2)^2, \quad (4.4b)$$

$$w_I = \frac{|\mathbf{p}'|^2 \sin^2 \theta}{\epsilon'_p \bar{\epsilon}} (F_1^2 + \frac{\bar{Q}^2}{4m_n^2 c^2} \kappa^2 F_2^2) \quad (4.4c)$$

$$w_S = -\frac{|\mathbf{p}'| \sin \theta}{\epsilon'_p \bar{\epsilon}} (\epsilon'_p + \bar{\epsilon}) (F_1^2 + \frac{\bar{Q}^2}{4m_n^2 c^2} \kappa^2 F_2^2). \quad (4.4d)$$

Acima definimos  $\bar{\epsilon} = \sqrt{(\mathbf{p}' - \mathbf{q})^2 + m_n^2 c^4}$  e  $\bar{Q}^2 = \mathbf{q}^2 - (\epsilon'_p - \bar{\epsilon})^2$  e lembramos que  $F_1$  e  $F_2$  são os fatores de forma do nucleon definidos na seção 3.3.1.

Como exemplos mostramos nossos resultados para prótons arrancados dos estados  $1p1/2$  e  $1p3/2$  do  $^{16}\text{O}$  na cinemática paralela (figura 4.6) e do estado  $1p1/2$ , também do  $^{16}\text{O}$ , na cinemática quasi-perpendicular (figura 4.5). Comparamos nossos resultados da cinemática paralela com os dados experimentais da referência [27] e da cinemática quasi-perpendicular com os dados da referência [22] e, além disso, comparamos alguns desses resultados com resultados obtidos por outros modelos. Em nossas comparações notamos que os comportamentos que obtivemos para as seções de choque, reduzida ou não, eram bastante parecidos com o comportamento descrito pelos dados experimentais, mas, que suas magnitudes estavam, na maioria dos casos analisados, superestimadas. Os modelos com os quais comparamos nossos resultados também sofrem do mesmo problema. Por esse motivo as seções de choque que mostramos nas figuras estão multiplicadas pelo fator que melhor as ajustam aos dados experimentais. Esses fatores são os números em parênteses ao lado das legendas.

Assumindo que a aproximação de ondas planas para o elétron é válida, podemos fazer duas hipóteses a respeito das diferenças observadas. Uma das maneiras é dizer que esse fato ocorre por estarmos usando os mesmos potenciais gerados pelos nucleons ligados para determinar o estado do nucleon espalhado. Como discutimos no capítulo anterior, esses não são os mais adequados para fazer tal descrição por não levarem em conta os termos de absorção e o fato dos potenciais nucleares serem dependentes da energia do nucleon.

Outra razão possível seria que a probabilidade de ocupação do estado inicial do próton antes de ser espalhado é menor do que 1. Assim, para obter a magnitude correta da seção de choque teríamos que multiplicá-la pela probabilidade de ocupação do estado em questão. Podemos explicar isso melhor se lembrarmos que, ao fazer a aproximação de Hartree para o modelo de Walecka, obtivemos que todos os estados até o nível de Fermi estão ocupados (probabilidade de ocupação 1) e que os demais estados estão vazios (probabilidade de ocupação nula). Desta maneira, poderíamos explicar a discrepância dizendo que existem estados ocupados além do nível de Fermi e que, então, a probabilidade de ocupação dos estados abaixo desse nível é menor que 1, sendo a probabilidade de ocupação do estado dada pelo fator  $N_\alpha$  que multiplicaríamos a seção de choque afim de ajustá-la aos dados experimentais. Uma das hipóteses mais aceitas recentemente é que esses níveis além do nível de Fermi surgem devido a interações de curto alcance (*short-range correlations*) entre os nucleons do núcleo [23, 28]. Portanto, os desvios para a ocupação dos níveis abaixo do nível de Fermi serviriam como uma medida da validade da aproximação de campo médio[28].

A multiplicação da seção de choque pela probabilidade de ocupação do estado é também feita em modelos para o espalhamento ( $e, e'p$ ) que utilizam potenciais ópticos [23, 27, 29], pois esses também superestimam os valores da seção de choque.

Na tabela 4.3 temos uma comparação dos fatores de ocupação que obtivemos com os fatores respectivos das referências [23] e [27]. Os trabalhos com os quais comparamos os resultados não utilizam um único potencial para descrever o nucleon espalhado e, por isso, como o valor obtido para o fator de ocupação depende do potencial utilizado, não temos um valor único para os mesmos. Aqui colocamos apenas o maior e o menor valor obtido para tais fatores.

Estado ( $n l j$ )	Cinemática	Nosso trabalho	Referência [27]	Referência [23]
$1p1/2$	quasi-perpendicular	0.35	*****	0.50 - 0.58
$1p1/2$	paralela	0.40	0.610 - 0.635	0.80
$1p3/2$	paralela	0.40	0.495 - 0.585	*****

Tabela 4.3: Comparação do nosso cálculo para as probabilidades de ocupação  $N_\alpha$  dos estados  $1p1/2$  e  $1p3/2$  do  $^{16}\text{O}$  com os obtidos por *Mokhtar et al.*[23] e *Leuschner et al.*[27].

Podemos notar pelos valores da tabela que os fatores de ocupação para o estado  $1p_{1/2}$  que obtivemos são menores que os obtidos por outros cálculos em ambas as cinemáticas. O fato do fator de ocupação ser dependente da cinemática para o nosso cálculo (assim como para o cálculo da referência [23]) nos leva a crer que as ocupações parciais dos níveis abaixo do nível de Fermi não é o único efeito causando a discrepância entre os resultados e o experimento. Para o estado  $1p_{3/2}$  obtivemos um valor bastante próximo ao obtido por um modelo que utiliza potenciais ópticos, mas a concordância aqui não é tão boa para momentum transferido baixo ( $p \gtrsim 200 \text{ MeV}/c$ ). Nota-se que, se os fatores apresentados na tabela acima representam a ocupação dos estados, estas parecem muito diferentes do que se espera pelo modelo de camadas simples, já que este modelo reproduz bem várias propriedades médias nucleares.

Em seguida fizemos uma comparação para a seção de choque envolvendo energias mais altas para o elétron e para o próton arrancado afim de testar alguns dos limites do modelo. Na figura 4.7 temos uma comparação da seção de choque obtida a partir das densidades de corrente da figura 4.4 com os dados experimentais da referência [21]. Para valores baixos do ângulo  $\theta_p$  ( $|\theta_p| < 10^\circ$  ou  $|p| < 200 \text{ MeV}/c$ ) a seção de choque é da mesma ordem de grandeza da medida. Os resultados de cálculos semelhantes como os apresentados na referência [24] parecem apontar na mesma direção (ver figura 4.7). Para ângulos mais altos ( $|\theta_p| > 10^\circ$ ) nossos cálculos passam a superestimar bastante o valor da seção de choque chegando a ultrapassá-la em até 10 vezes para  $\theta_p \simeq 20^\circ$  ( $|p| \simeq 350 \text{ MeV}/c$ ). Esse efeito parece ser causado principalmente pelo fato de utilizarmos os mesmos potenciais para descrever os nucleons ligados e o nucleon espalhado. Podemos chegar a essa conclusão se olharmos para a região da figura 4.7 em que o módulo do momentum inicial  $p$  é alto ( $|p| > 200 \text{ MeV}/c$ ): ali vemos que nosso cálculo é bastante próximo do cálculo feito por Debruyne[24] usando os potenciais gerados pelo núcleo inicial (sem potencial óptico), o qual não descreve tão bem os dados experimentais quanto o cálculo que utiliza potenciais ópticos. Aqui não utilizamos qualquer fator multiplicativo para acertar quantitativamente os picos da seção de choque que obtivemos com os dados experimentais.



### 4.2.2 $^{40}\text{Ca}(e, e'p)^{39}\text{K}$

Nesta seção fazemos algumas comparações de seções de choque reduzidas para a reação  $^{40}\text{Ca}(e, e'p)^{39}\text{K}$ . Na figura 4.8 vemos nossos resultados para prótons arrancados dos níveis  $1d_{3/2}$  e  $2s_{1/2}$  nas cinemáticas paralela e quasi-perpendicular. Todos os cálculos são comparados com dados experimentais da referência [30].

Assim como no caso do  $^{16}\text{O}$  encontramos valores maiores que os experimentais para a seção de choque (para ambos os níveis e ambas as cinemáticas) e, por isso, a multiplicamos pelos fatores que as ajustam melhor aos dados experimentais. Na tabela 4.4 vemos os valores que obtivemos para os fatores de ocupação comparados com os fatores obtidos a partir de outros cálculos apresentados na literatura.

Estado ( $n l j$ )	cinemática	Nossos Resultados	Referência [29]	Referência [28]
2s1/2	paralela	0.46	0.75	0.44 - 0.51
2s1/2	perpendicular	0.50	0.50	*****
1d3/2	paralela	0.42	0.80	0.61 - 0.76
1d3/2	perpendicular	0.50	0.64	*****

Tabela 4.4: Comparação do nosso cálculo para as probabilidades de ocupação  $N_\alpha$  dos estados  $1d_{3/2}$  e  $2s_{1/2}$  do  $^{40}\text{Ca}$  com os obtidos por *Jin et al.*[29] e *Udias et al.*[28].

Aqui notamos também que para prótons arrancados do nível  $2s_{1/2}$  a seção de choque só é bem reproduzida para valores do momentum inicial  $p \lesssim 100 \text{ MeV}/c$ . A partir do mínimo de difração em  $p = 100 \text{ MeV}/c$  o modelo não reproduz bem os resultados e neste caso podemos inferir que, por se tratar de um núcleo com  $Z$  mais alto, a aproximação de ondas planas para o elétron pode não ser tão confiável.

Novamente os fatores de ocupação dependem da cinemática, o que não é desejável. Aqui também os valores para as ocupações dos níveis são bem menores que o esperado se levarmos em conta que a aproximação de Hartree descreve bem as propriedades médias do  $^{40}\text{Ca}$ .

### 4.3 Conclusões

Após analisar os resultados para as densidades de carga e corrente de transição e para a seção de choque e compará-los com dados experimentais podemos tirar algumas conclusões.

Nosso cálculo consegue reproduzir qualitativamente os dados para essas grandezas quando as energias envolvidas não são muito altas ( $Q^2 < 0.4\text{GeV}^2/c^2$ ), sendo que o resultado é melhor para núcleos mais leves. Para energias e ângulos altos ( $Q^2 > 1\text{GeV}^2/c^2$  e  $\theta_p > 10^\circ$ ) nosso cálculo não consegue descrever nem qualitativamente os dados experimentais. Vimos também que tentando eliminar a discrepância através dos fatores de ocupação dos estados do núcleo também não resolve totalmente o problema, além do que os valores necessários para isto são pouco realistas.

A fim de podermos obter conclusões mais firmes a respeito desta questão, acreditamos que o primeiro passo é melhorar a descrição do nucleon final. Descrições que incluem os efeitos de absorção e da dependência da energia no potencial nucleon-núcleo parecem indicar neste sentido, mas ainda não são totalmente satisfatórias. Evidentemente, se quisermos manter a consistência no tratamento do problema, tais efeitos devem ser levados em conta também na obtenção da função de onda do nucleon ligado. Para isto devemos considerar correções de quarta ordem ou maiores além da aproximação de campo médio para a interação nucleon-nucleon[39].

Antes de adotarmos tal direção na tentativa de resolver o problema, podemos pensar em outra alternativa talvez menos complicada e que não foi aqui abordada. Trata-se de averiguar o efeito que a hipótese de que o núcleo residual permaneça “congelado” após a emissão do próton, tem sobre as correntes de transição. A modificação desta estrutura e a conseqüente modificação no potencial responsável pela interação com o nucleon emitido, podem ter um efeito sobre a seção de choque final que precisa ser estimado.

Finalmente, se quisermos estender a análise aqui feita para núcleos mais pesados, incluindo-se aí o  $^{40}\text{Ca}$ , precisamos acrescentar as distorções na função de onda do elétron devido à sua interação com o potencial eletrostático do núcleo.

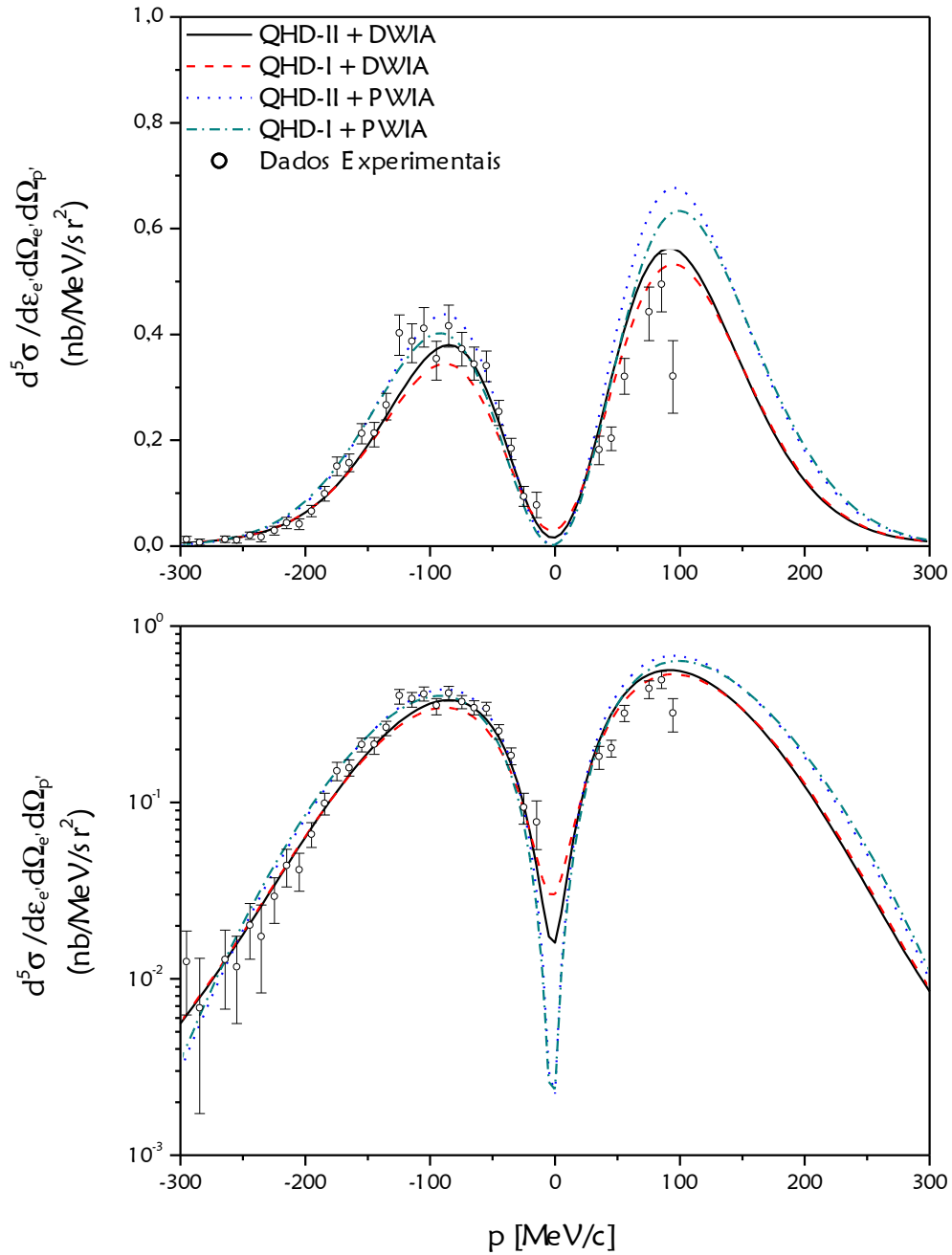


Figura 4.1: Comparação entre as seções de choque obtidas em diferentes aproximações para prótons espalhados do nível  $1p_{1/2}$  do  $^{16}\text{O}$  com  $\epsilon_e = 456$  MeV e  $p' = 440$  MeV/c. Os dados experimentais são de *Saclay*[22]

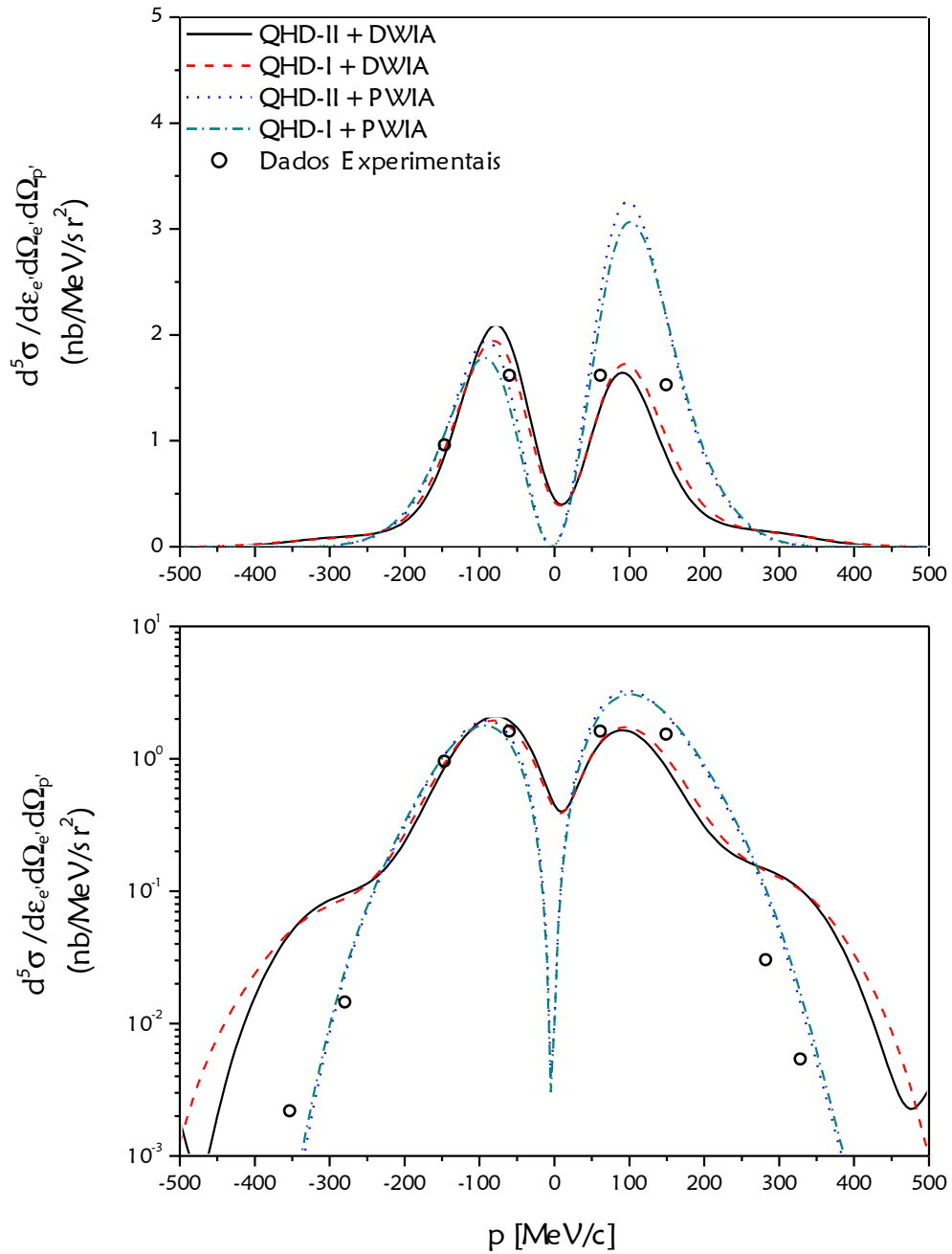


Figura 4.2: Comparação entre as seções de choque obtidas em diferentes aproximações para prótons espalhados do nível  $1p_{1/2}$  do  $^{16}\text{O}$  com  $\epsilon_e = 2440$  MeV e  $p' = 1000$  MeV/c. Os dados experimentais são da referência [21]

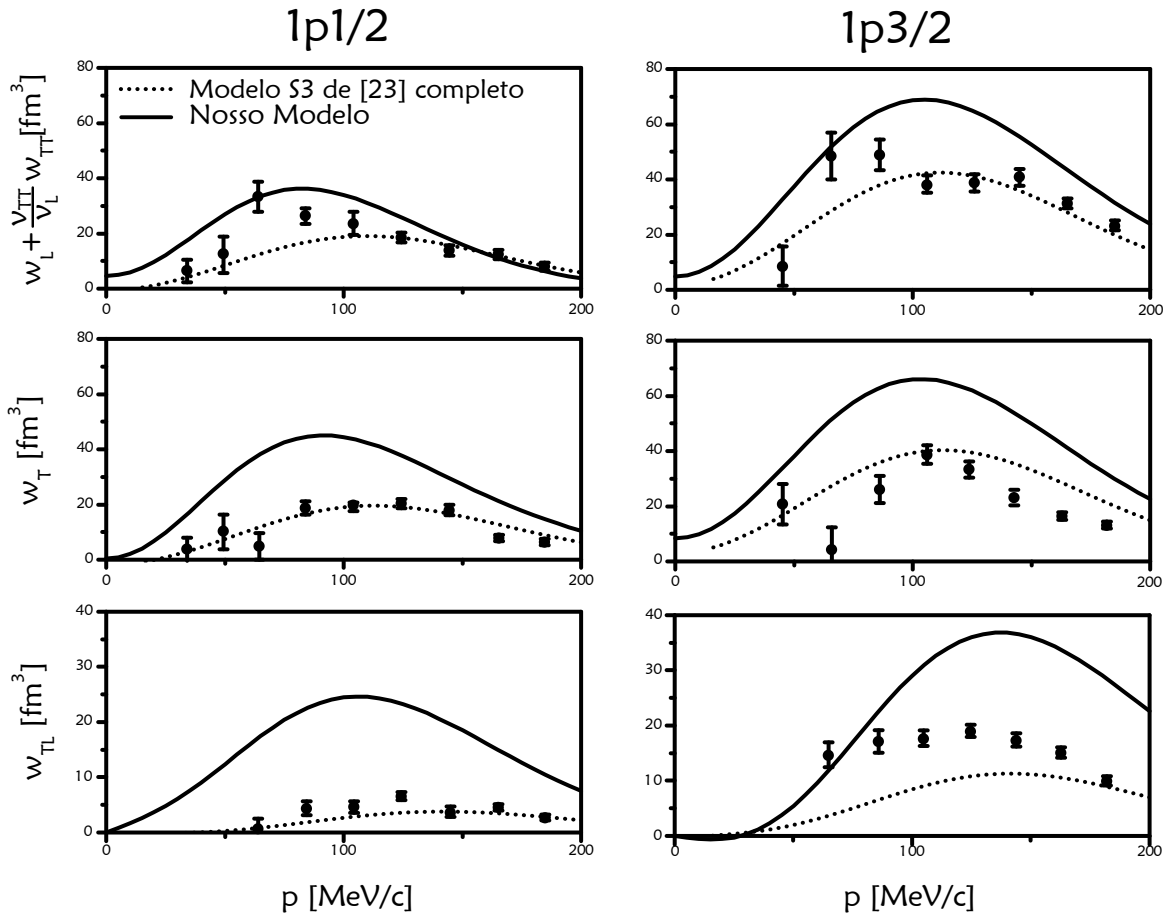


Figura 4.3: Densidades de corrente para o espalhamento  $^{16}\text{O}(e, e'p)^{15}\text{N}$  comparadas com os dados experimentais de [32] e os resultados de [23]. Os dados foram obtidos na cinemática quasi-perpendicular com  $\epsilon_e = 456$  MeV e  $p' = 440$  MeV/c para prótons arrancados dos níveis  $1p_{1/2}$  e  $1p_{3/2}$ .

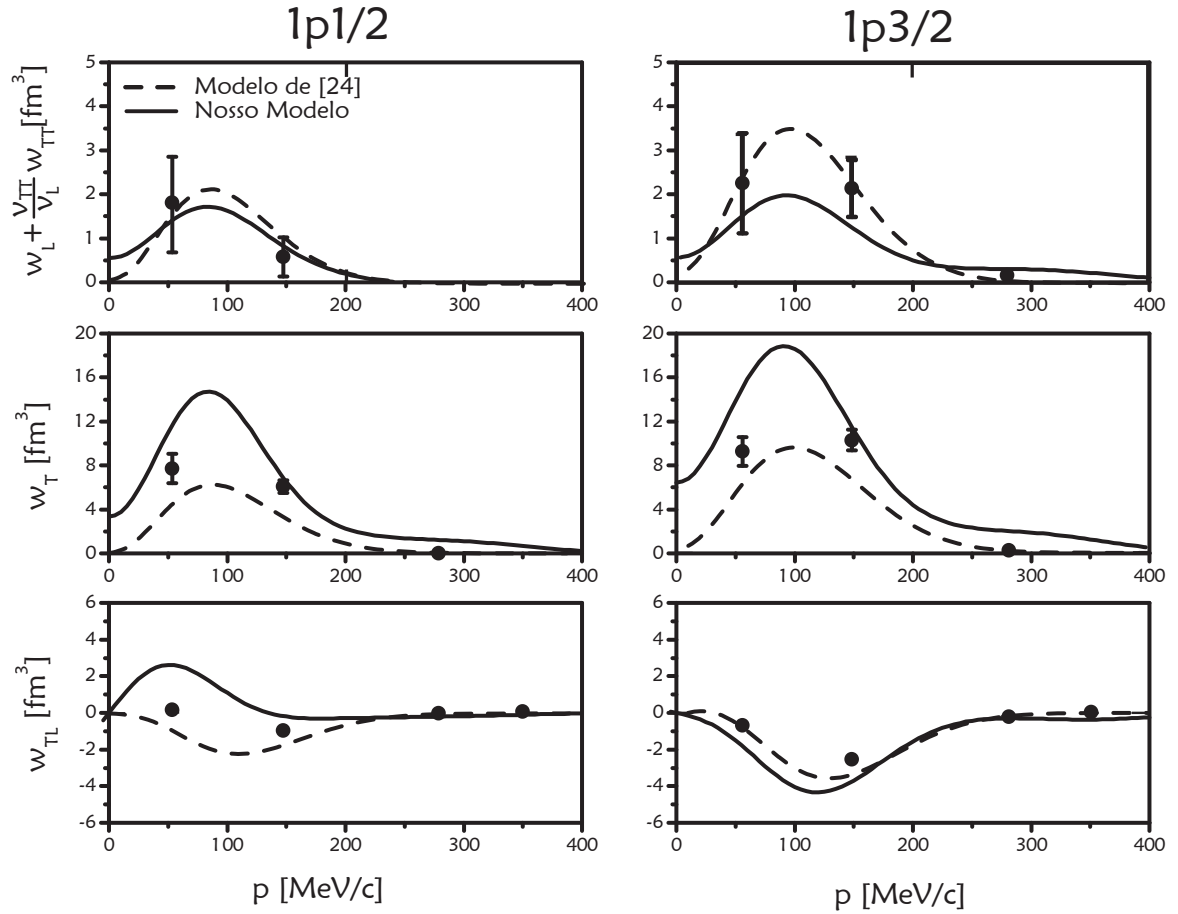


Figura 4.4: Densidades de corrente para o espalhamento  $^{16}\text{O}(e, e'p)^{15}\text{N}$  comparadas com os dados experimentais de [21] e os resultados de [24]. Os dados foram obtidos na cinemática quasi-perpendicular com  $\epsilon_e = 2440$  MeV e  $p' = 1000$  MeV/c para prótons arrancados dos níveis  $1p_{1/2}$  e  $1p_{3/2}$ .

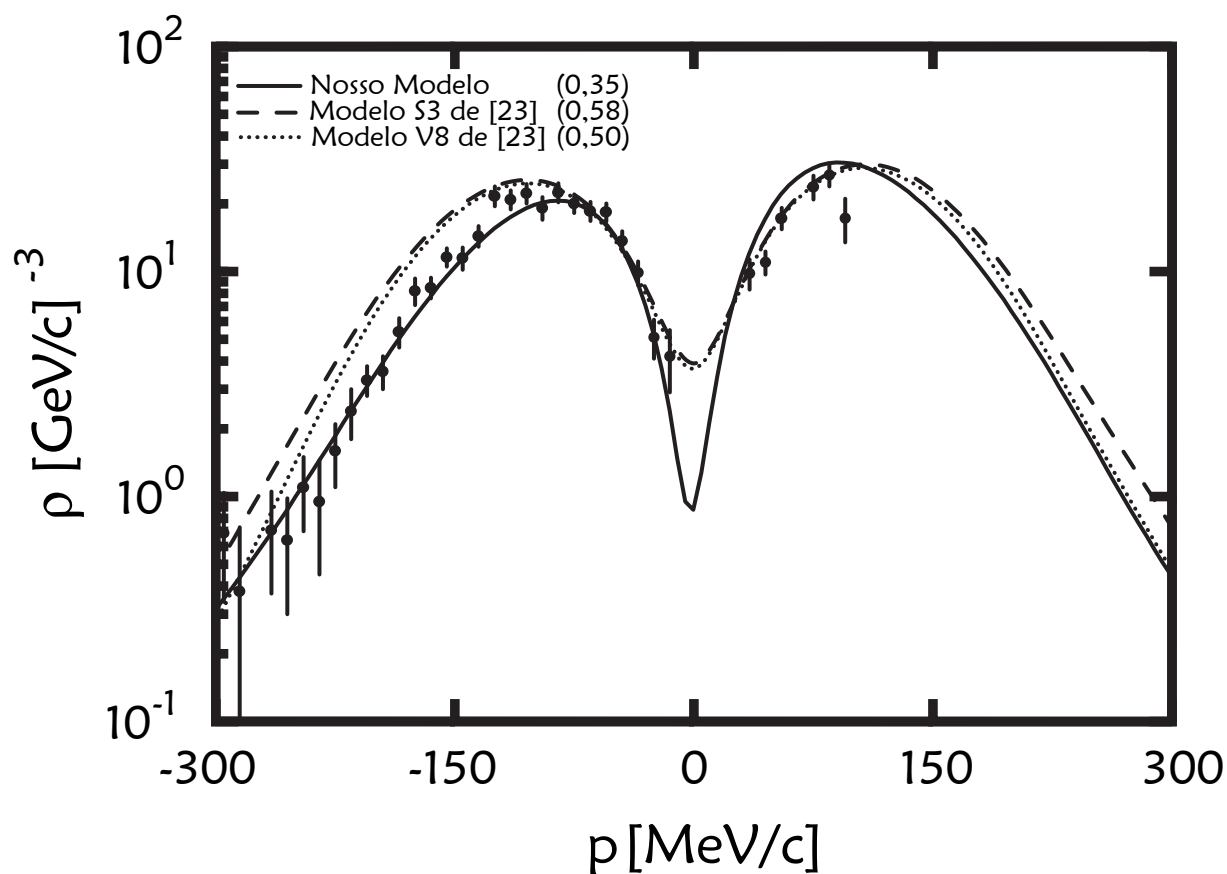


Figura 4.5: Seção de Choque reduzida para prótons espalhados do nível  $1p_{1/2}$  na reação  $^{16}\text{O}(e, e'p)^{15}\text{N}$ . As curvas foram obtidas na cinemática quasi-perpendicular com  $\epsilon_e = 456$  MeV e  $p' = 440$  MeV/c e comparadas com os dados de [22] e os resultados de [23]. Os números entre parênteses na legenda são os fatores de ocupação obtidos em cada um dos modelos.

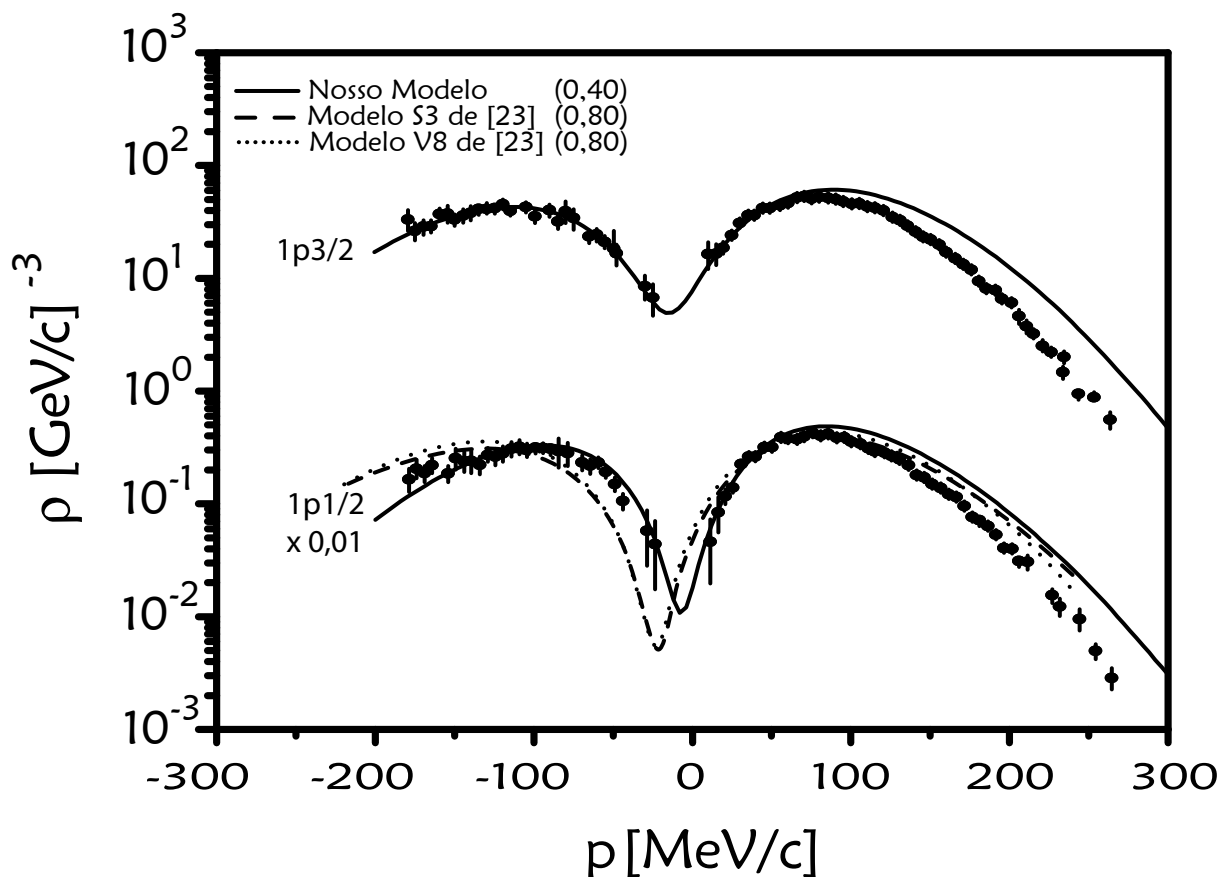


Figura 4.6: Seção de Choque reduzida para prótons espalhados dos níveis  $1p_{1/2}$  e  $1p_{3/2}$  na reação  $^{16}\text{O}(e, e'p)^{15}\text{N}$ . As curvas foram obtidas na cinemática paralela com  $\epsilon_e = 456$  MeV e  $p' = 440$  MeV/c e comparadas com os dados de [27] e os resultados de [23]. Os números entre parênteses na legenda são os fatores de ocupação obtidos em cada um dos modelos para o estado  $1s_{1/2}$ .



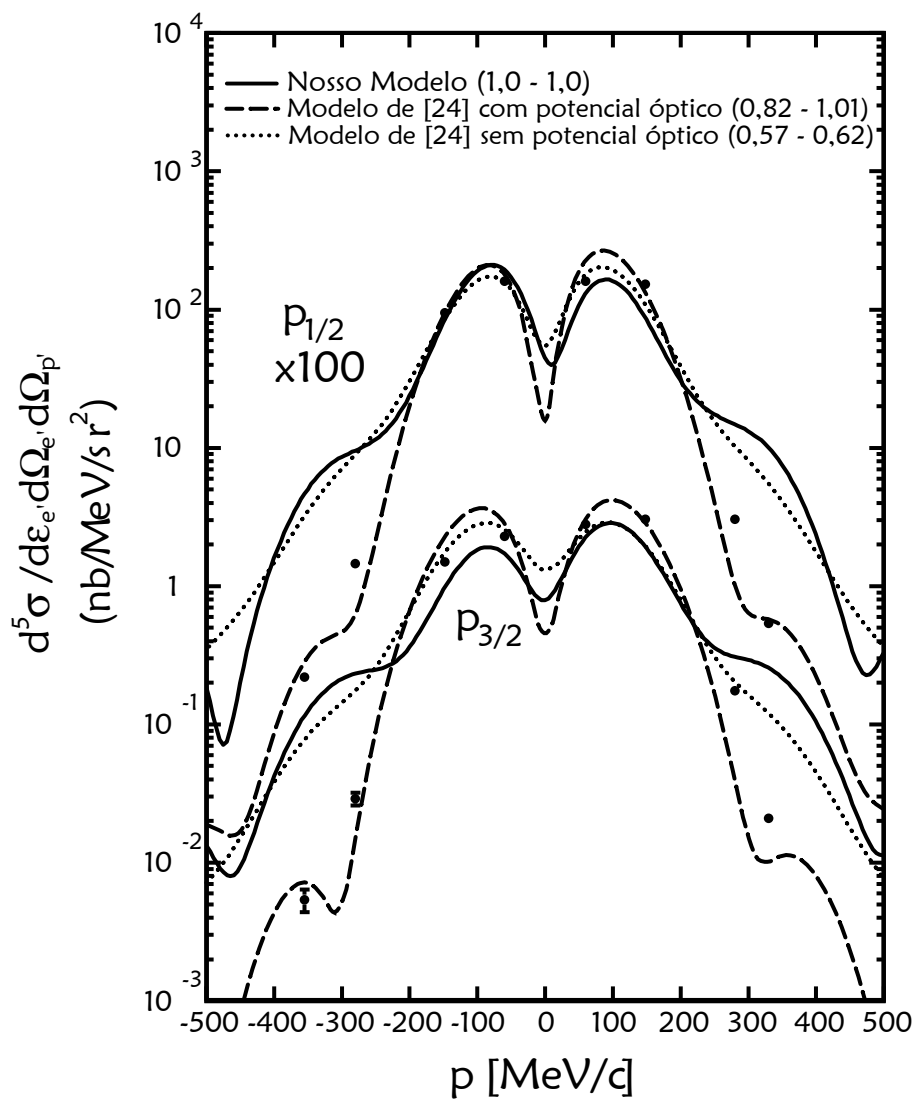


Figura 4.7: Seção de Choque para o espalhamento  $^{16}\text{O}(e, e'p)^{15}\text{N}$  obtida com as densidades de corrente da figura 4.4 e comparadas com os cálculos de [24] e os dados de [21]. Os números entre parênteses na legenda são os fatores de ocupação obtidos em cada um dos modelos para os estados  $1s_{1/2}$  e  $1p_{3/2}$ , respectivamente.

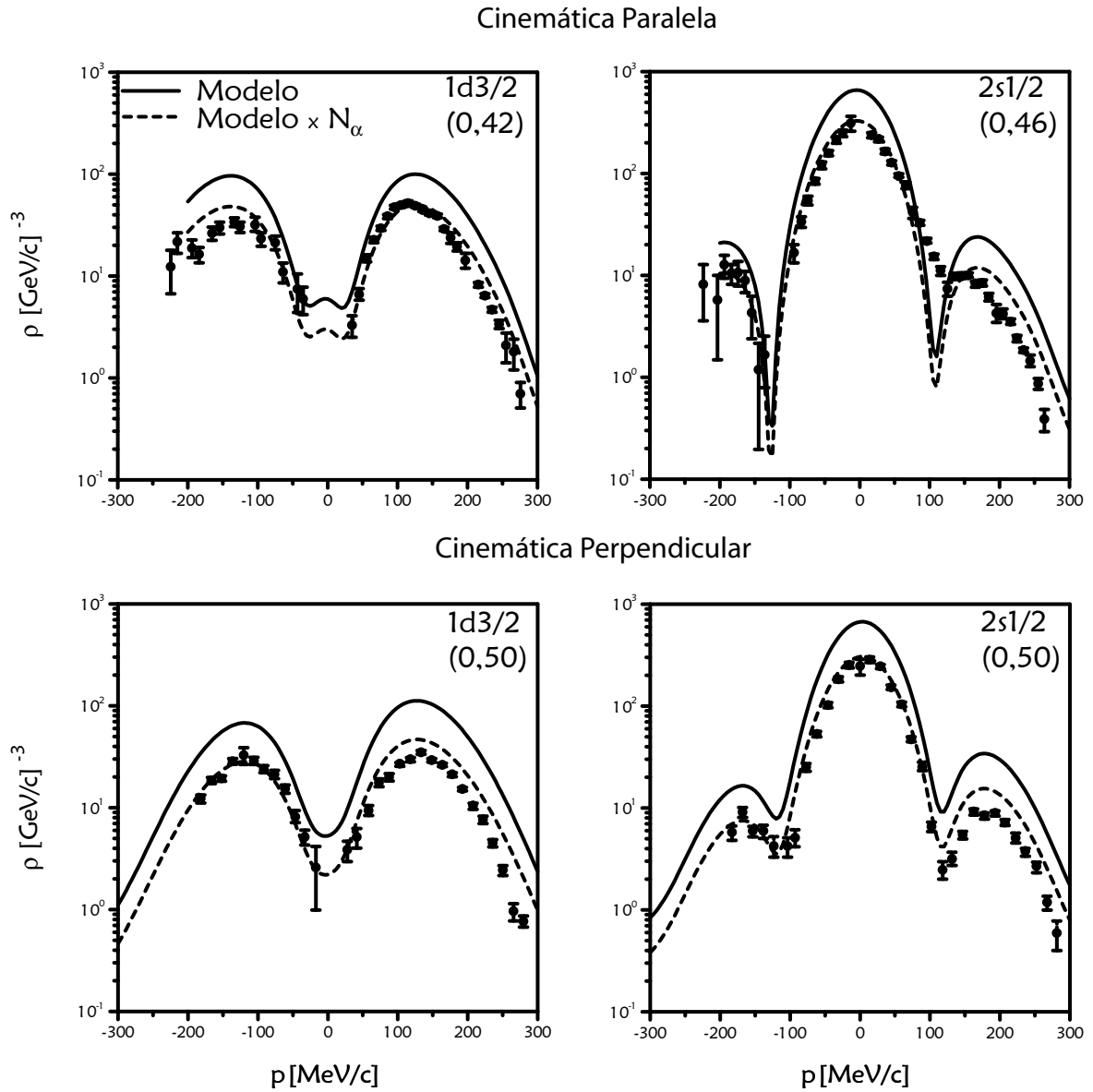


Figura 4.8: Seção de Choque reduzida para prótons espalhados dos níveis  $1d_{3/2}$  e  $2s_{1/2}$  na reação  $^{40}\text{Ca}(e, e'p)^{39}\text{K}$  e comparada com os dados de [30]. Os parâmetros que descrevem a cinemática da reação são  $\epsilon_e = 375$  MeV e  $\epsilon'_e = 275$  MeV na cinemática paralela e  $\epsilon_e = 375$  MeV e  $\theta_e = 83^\circ$  na cinemática quasi-perpendicular. As linhas cheias representam os valores obtidos pelo nosso modelo enquanto as tracejadas são esses valores multiplicados pelo fator de ocupação (número entre parênteses nas legendas da figura) que melhor ajusta o nosso resultado aos dados experimentais.

# Apêndice A

## Métrica e Definições

Neste apêndice definimos algumas quantidades utilizados durante a dissertação.

Tensor métrico:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Coordenadas contra-variantes:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (ct, \mathbf{x}).$$

Coordenadas covariantes:

$$x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x, -y, -z) = (ct, -\mathbf{x}).$$

Produto Escalar:

$$A_\mu B^\mu = A_\mu g^{\mu\nu} B_\nu = A_0 B_0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}.$$

Derivadas:

$$\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right) \quad \text{e} \quad \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right)$$

onde

$$\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

A quadri-divergência de um quadri vetor:

$$\partial_\mu A^\mu = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A_0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

e o operador D'Alambertiano:

$$\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2.$$

## A.1 Matrizes de Dirac

Convenção de "Bjorken e Drell" (referência [6]) para as matrizes de Dirac.

Sejam  $I$  e  $\mathbf{0}$  as matrizes  $2 \times 2$  identidade e nula, respectivamente, *i.e.*,

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

então as matrizes de Dirac são

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^i \\ -\sigma^i & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \text{ou seja,} \quad \gamma = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

onde  $\sigma^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) são as matrizes de Pauli <sup>1</sup>

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

As matrizes de Dirac obedecem as seguintes regras de anti-comutação

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} I_{4 \times 4}$$

onde  $I_{4 \times 4}$  é a matriz identidade de dimensão 4.

Definimos ainda as matrizes  $\boldsymbol{\alpha}$ ,  $\boldsymbol{\Sigma}$  e o tensor  $\sigma^{\mu\nu}$  em função das matrizes de Dirac.

$$\boldsymbol{\alpha} = \gamma^0 \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \gamma^5 \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}$$

onde

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I \\ I & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

e o tensor anti-simétrico  $\sigma^{\mu\nu}$  é

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu).$$

Notação de Feynman:

$$\not{k} \equiv \gamma_\mu k^\mu = \gamma^0 k^0 - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k}$$

---

<sup>1</sup>como  $\sigma^i$  não é a parte espacial de um quadri-vetor não é preciso distinguir  $\sigma^i$  de  $\sigma_i$

# Apêndice B

## Harmônicos Esféricos e Funções de Bessel

Neste apêndice detalhamos as propriedades envolvendo harmônicos esféricos e funções de Bessel utilizadas no trabalho para a obtenção das densidades de corrente.

### B.1 Harmônicos Esféricos

#### B.1.1 Definição

Os Harmônicos Esféricos são as soluções da parte angular da Equação de Laplace em coordenadas esféricas:

$$\left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + l(l+1) \right] u(\theta, \phi) = 0, \quad (\text{B.1})$$

e tem sua forma geral dada por

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = e^{im\varphi} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \vartheta) \quad (\text{B.2})$$

onde  $l \geq 0$  e  $m = -l, -l+1, \dots, 0, \dots, l-1, l$ .

A partir do Harmônico Esférico e dos coeficientes de Clebsch-Gordan definimos os Harmônicos Esféricos Vetoriais:

$$\mathbf{Y}_{JL}^M(\vartheta, \varphi) = \sum_{m,\sigma} \langle Lm1\sigma | JM \rangle Y_{Lm}(\vartheta, \varphi) \mathbf{e}_\sigma \quad (\text{B.3})$$

onde  $J \geq 0$ ,  $L = J, J \pm 1$  e  $M = -J, -J+1, \dots, 0, \dots, J-1, J$ .

### B.1.2 Derivadas de Harmônicos Esféricos

Gradiente

$$\begin{aligned} \nabla[f(r)Y_{JM}(\vartheta, \varphi)] &= \sqrt{\frac{J}{2J+1}} \left( \frac{d}{dr} + \frac{J+1}{r} \right) f(r) \mathbf{Y}_{JJ-1}^M(\vartheta, \varphi) \\ &\quad - \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} \left( \frac{d}{dr} - \frac{J}{r} \right) f(r) \mathbf{Y}_{JJ+1}^M(\vartheta, \varphi) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Divergente

$$\nabla \cdot [f(r) \mathbf{Y}_{JJ+1}^M(\vartheta, \varphi)] = -\sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} \left( \frac{d}{dr} + \frac{J+2}{r} \right) f(r) Y_{JM}(\vartheta, \varphi) \quad (\text{B.5a})$$

$$\nabla \cdot [f(r) \mathbf{Y}_{JJ}^M(\vartheta, \varphi)] = 0 \quad (\text{B.5b})$$

$$\nabla \cdot [f(r) \mathbf{Y}_{JJ-1}^M(\vartheta, \varphi)] = \sqrt{\frac{J}{2J+1}} \left( \frac{d}{dr} - \frac{J-1}{r} \right) f(r) Y_{JM}(\vartheta, \varphi) \quad (\text{B.5c})$$

Rotacional

$$\nabla \times [f(r) \mathbf{Y}_{JJ+1}^M(\vartheta, \varphi)] = i\sqrt{\frac{J}{2J+1}} \left( \frac{d}{dr} + \frac{J+2}{r} \right) f(r) \mathbf{Y}_{JJ}^M(\vartheta, \varphi) \quad (\text{B.6a})$$

$$\begin{aligned} \nabla \times [f(r) \mathbf{Y}_{JJ}^M(\vartheta, \varphi)] &= i\sqrt{\frac{J}{2J+1}} \left( \frac{d}{dr} - \frac{J}{r} \right) f(r) \mathbf{Y}_{JJ+1}^M(\vartheta, \varphi) \\ &\quad + i\sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} \left( \frac{d}{dr} + \frac{J+1}{r} \right) f(r) \mathbf{Y}_{JJ-1}^M(\vartheta, \varphi) \end{aligned} \quad (\text{B.6b})$$

$$\nabla \times [f(r) \mathbf{Y}_{JJ-1}^M(\vartheta, \varphi)] = i\sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} \left( \frac{d}{dr} - \frac{J-1}{r} \right) f(r) \mathbf{Y}_{JJ}^M(\vartheta, \varphi) \quad (\text{B.6c})$$

### B.1.3 Integrais envolvendo Harmônicos Esféricos

Definindo  $\hat{r} = (\vartheta, \varphi)$  e

$$\int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta$$

temos as seguintes integrais angulares:

$$\int Y_{l_1 m_1}^*(\hat{r}) Y_{l_2 m_2}(\hat{r}) d\Omega = \delta_{l_1 l_2} \delta_{m_1 m_2}, \quad (\text{B.7})$$

$$\int \mathbf{Y}_{J_1 L_1}^{M_1}(\hat{r}) \cdot \mathbf{Y}_{J_2 L_2}^{M_2}(\hat{r}) d\Omega = \delta_{J_1 J_2} \delta_{L_1 L_2} \delta_{M_1 M_2}, \quad (\text{B.8})$$

e

$$\begin{aligned} \int \mathcal{Y}_{\kappa m}^\dagger(\hat{r}) Y_{LM}(\hat{r}) \mathcal{Y}_{\kappa' m'}(\hat{r}) d\Omega &\equiv \langle \kappa m | Y_{LM} | \kappa' m' \rangle = (-1)^{m'+m-1} \frac{1 + (-1)^{L+l'+l}}{2} \\ &\times \sqrt{\frac{(2j+1)(2L+1)}{4\pi(2j'+1)}} \langle j - m | L M | j' - m' \rangle \langle j \frac{1}{2} L 0 | j' \frac{1}{2} \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Utilizando as propriedades de momentum angular e matrizes  $\boldsymbol{\sigma}$

$$\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\sigma} \mathcal{Y}_{\kappa m}(\hat{r}) = -(1 + \kappa) \mathcal{Y}_{\kappa m}(\hat{r}) \quad \text{e} \quad (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{r}) \mathcal{Y}_{\kappa m}(\hat{r}) = -\mathcal{Y}_{-\kappa m}(\hat{r}), \quad (\text{B.10})$$

temos

$$\int \mathcal{Y}_{\kappa m}^\dagger(\hat{r}) \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Y}_{LL-1}^M(\hat{r}) \mathcal{Y}_{\kappa' m'}(\hat{r}) d\Omega = \frac{\kappa + \kappa' - L}{\sqrt{L(2L+1)}} \langle \kappa m | Y_{LM} | -\kappa' m' \rangle, \quad (\text{B.11a})$$

$$\int \mathcal{Y}_{\kappa m}^\dagger(\hat{r}) \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Y}_{LL}^M(\hat{r}) \mathcal{Y}_{\kappa' m'}(\hat{r}) d\Omega = \frac{\kappa' - \kappa}{\sqrt{L(L+1)}} \langle \kappa m | Y_{LM} | \kappa' m' \rangle, \quad (\text{B.11b})$$

$$\int \mathcal{Y}_{\kappa m}^\dagger(\hat{r}) \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Y}_{LL+1}^M(\hat{r}) \mathcal{Y}_{\kappa' m'}(\hat{r}) d\Omega = \frac{\kappa + \kappa' + L + 1}{\sqrt{(L+1)(2L+1)}} \langle \kappa m | Y_{LM} | -\kappa' m' \rangle, \quad (\text{B.11c})$$

onde  $\mathcal{Y}_{\kappa' m'}(\hat{r})$  é o harmônico esférico spinorial definido pela equação (3.17). Observamos que o resultado da segunda das três integrais acima difere dos resultados das referências [16] e [33] por um sinal negativo global.

## B.2 Funções de Bessel Esféricas

### B.2.1 Definição

As funções de bessel esféricas são as soluções da equação diferencial

$$z^2 \frac{d^2}{dz^2} w(z) + 2 \frac{d}{dz} w(z) + (z^2 - n(n+1)) w(z) = 0 \quad (\text{B.12})$$

onde  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

As soluções linearmente independentes, particulares para cada  $n$ , são a função de bessel esférica do primeiro tipo

$$j_n(z) = z^n \left( -\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right) \frac{\sin z}{z} \quad (\text{B.13})$$

e a função de Bessel esférica do segundo tipo (função de Newman)

$$y_n(z) = -z^n \left( -\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right) \frac{\cos z}{z} \quad (\text{B.14})$$

ou as duas funções de Bessel esféricas do terceiro tipo (funções de Hankel dos tipos 1 e 2):

$$h_n^{(1)}(z) = j_n(z) + iy_n(z) \quad \text{e} \quad h_n^{(2)}(z) = j_n(z) - iy_n(z). \quad (\text{B.15})$$

### B.2.2 Relações envolvendo Funções de Bessel Esféricas

Se  $f_n(z)$  é uma das funções de Bessel esféricas ( $j_n(z)$ ,  $y_n(z)$ ,  $h_n^{(1)}(z)$  ou  $h_n^{(2)}(z)$ ), então ela obedece às seguintes relações de recorrência

$$f_{n+1}(z) + f_{n-1}(z) = \frac{2n+1}{z} f_n(z) \quad (\text{B.16a})$$

$$n f_{n-1}(z) - (n+1) f_{n+1}(z) = (2n+1) \frac{d}{dz} f_n(z) \quad (\text{B.16b})$$

$$\left( \frac{n+1}{z} + \frac{d}{dz} \right) f_n(z) = f_{n-1}(z) \quad (\text{B.16c})$$

$$\left( \frac{n}{z} - \frac{d}{dz} \right) f_n(z) = f_{n+1}(z) \quad (\text{B.16d})$$

## B.3 Harmônicos Esféricos e Funções de Bessel Esféricas

Podemos expandir a exponencial  $e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$  em termos de harmônicos esféricos e funções esféricas de Bessel como

$$e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} = 4\pi \sum_{\lambda\mu} i^\lambda j_\lambda(qr) Y_{\lambda\mu}^*(\hat{q}) Y_{\lambda\mu}(\hat{r}) \quad (\text{B.17})$$

e uma onda plana, *i.e.*, o produto de uma função  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{k})$  pela exponencial  $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$  como

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = 4\pi \sum_{JLM} i^L j_L(kr) \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{Y}_{JL}^{M*}(\hat{k}) \right\} \mathbf{Y}_{JL}^M(\hat{r}). \quad (\text{B.18})$$

Para o caso dos vetores  $\mathbf{e}_\lambda$  que definem a base esférica ortonormal temos

$$\mathbf{e}_\lambda e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = 4\pi \sum_{JLM} i^L j_L(kr) \left\{ \langle L(M-\lambda)1\lambda | JM \rangle Y_{LM-\lambda}(\hat{k}) \right\} \mathbf{Y}_{JL}^M(\hat{r})$$



e, se tomarmos  $\mathbf{k}$  paralelo ao eixo- $z$

$$Y_{LM-\lambda}(\hat{\mathbf{k}}) = \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}} \delta_{0,M-\lambda}$$

e, logo,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\lambda e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} &= 4\pi \sum_{JL} i^L j_L(kr) \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}} \langle L01\lambda | J\lambda \rangle \mathbf{Y}_{JL}^\lambda(\hat{\mathbf{r}}) \\ &= 4\pi \sum_J i^{J-1} j_{J-1}(kr) \sqrt{\frac{2J-1}{4\pi}} \langle (J-1)01\lambda | J\lambda \rangle \mathbf{Y}_{JJ-1}^\lambda(\hat{\mathbf{r}}) \\ &\quad + i^J j_J(kr) \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} \langle J01\lambda | J\lambda \rangle \mathbf{Y}_{JJ}^\lambda(\hat{\mathbf{r}}) \\ &\quad + i^{J+1} j_{J+1}(kr) \sqrt{\frac{2J+3}{4\pi}} \langle (J+1)01\lambda | J\lambda \rangle \mathbf{Y}_{JJ+1}^\lambda(\hat{\mathbf{r}}). \end{aligned}$$

Desta forma encontramos; para  $\lambda = 0$

$$\mathbf{e}_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = -\sqrt{4\pi} \sum_J i^J \sqrt{2J+1} \frac{i}{k} \nabla [j_J(kr) Y_{J0}(\hat{\mathbf{r}})], \quad (\text{B.19})$$

e para  $\lambda = \pm 1$

$$\mathbf{e}_{\pm 1} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = -\sqrt{2\pi} \sum_{J \geq 1} i^J \sqrt{2J+1} \left[ \lambda j_J(kr) \mathbf{Y}_{JJ}^\lambda(\hat{\mathbf{r}}) + \frac{1}{k} \nabla \times (j_J(kr) \mathbf{Y}_{JJ}^\lambda(\hat{\mathbf{r}})) \right]. \quad (\text{B.20})$$

# Apêndice C

## Obtenção da Seção de Choque

### C.1 Potencial de Møller

O potencial de Møller satisfaz a equação de Klein-Gordon cuja fonte é a quadri-corrente eletrônica  $j_\mu(x)$ , ou seja:

$$\begin{aligned}\square A_\mu(x) &= -\frac{4\pi}{c}j_\mu(x) = -\frac{4\pi}{c}[ec\bar{\psi}'_e(x)\gamma_\mu\psi_e(x)] \\ &= -\frac{4\pi}{c}j_\mu(k, s; k', s')e^{i(k'-k)\cdot x/\hbar}.\end{aligned}\tag{C.1}$$

A solução é dada em termos da função de Green  $D(x - x')$ , ou seja

$$A_\mu(x) = \frac{4\pi}{c} \int d^{(4)}x' D(x - x') j_\mu(x').\tag{C.2}$$

Atuando com o D'Alambertiano na equação (C.2) e comparando com (C.1) temos que

$$\square D(x - x') = \delta^{(4)}(x - x')\tag{C.3}$$

e, logo, fazendo uma transformada de Fourier para  $D(x - x')$

$$D(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^{(4)}p e^{ip\cdot(x-x')} D(p)\tag{C.4}$$

e aplicando o D'Alambertiano nessa transformada encontramos

$$\square D(x - x') = \delta^{(4)}(x - x') = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^{(4)}p e^{ip\cdot(x-x')} p^2 D(p).\tag{C.5}$$

onde  $p^2 = p_\mu p^\mu$ . Pela definição da Delta de Dirac em quatro dimensões

$$\delta^{(4)}(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^{(4)}p e^{ip\cdot(x-x')}\tag{C.6}$$

vemos que

$$D(p) = -\frac{1}{p^2} = -\frac{1}{p_\mu p^\mu} \quad (\text{C.7})$$

o que implica que o potencial de Møller

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &= \frac{4\pi}{c} \int d^{(4)}x' \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^{(4)}p e^{ip \cdot (x-x')} \left( -\frac{1}{p_\nu p^\nu} \right) j_\mu(x') \\ &= -\frac{4\pi}{c} \frac{\hbar^2}{(k' - k)^2} j_\mu(k, s; k', s') e^{i(k' - k) \cdot x / \hbar}, \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

ou seja,

$$A_\mu(x) = -\frac{4\pi}{c} \frac{1}{q_\nu q^\nu} j_\mu(k, s; k', s') e^{-iq \cdot x / \hbar}. \quad (\text{C.9})$$

## C.2 Seção de Choque na Aproximação de Ondas Planas

Como vimos no capítulo 2 a matriz de transição  $\mathcal{S}_{fi}$  na aproximação de ondas planas é dada por

$$\mathcal{S}_{fi} = -ec \left( \frac{q_\mu^2}{|\mathbf{q}|^2} \bar{u}'(k') \gamma_0 u(k) \langle \Psi_f | \hat{J}_0 | \Psi_i \rangle + \bar{u}'(k') \boldsymbol{\gamma} u(k) \cdot \langle \Psi_f | \hat{\mathbf{J}}_T | \Psi_i \rangle \right) \quad (\text{C.10})$$

ou, de maneira simplificada,

$$\mathcal{S}_{fi} = -ec \bar{u}'(k') (V_0 \gamma_0 - \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\gamma}) u(k) = -ec \bar{u}'(k') \not{V} u(k) \quad (\text{C.11})$$

onde  $V_0$  e  $\mathbf{V}$  são identificados por comparação entre (C.11) e (C.10). Como estamos trabalhando com elétrons não polarizados tiramos a média nos spins iniciais e somamos nos spins finais dos elétrons incidente e espalhado

$$\overline{\sum_{if} |\mathcal{S}_{fi}|^2} = e^2 c^2 \frac{1}{2} \sum_{ss'} |\bar{u}'(k', s') \not{J} u(k, s)|^2 \quad (\text{C.12})$$

onde  $\not{J} = \overline{\sum_{if, N}} \not{V}$  e onde o somatório agora é apenas sobre as projeções dos estados de momentum angular inicial e final do núcleo. Assim, temos que

$$\begin{aligned} \overline{\sum_{if} |\mathcal{S}_{fi}|^2} &= e^2 c^2 \frac{1}{2} \sum_{ss'} |\bar{u}'(k', s') \not{J} u(k, s)|^2 \\ &= e^2 c^2 \frac{1}{2} \sum_{ss'} u'^{\dagger}(k', s') \gamma_0 \not{J} u(k, s) u^{\dagger}(k, s) \not{J}^{\dagger} \gamma_0 u'(k', s') \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

e, usando o *truque de Casimir* [7] para se avaliar esse tipo de soma, temos que:

$$\begin{aligned} \overline{\sum_{if} |\mathcal{S}_{fi}|^2} &= e^2 c^2 \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ \not{J} \frac{\not{k}' c + m_e c^2}{2m_e c^2} \gamma_0 \not{J}^\dagger \gamma_0 \frac{\not{k} c + m_e c^2}{2m_e c^2} \right] \\ &\simeq \frac{e^2 c^4}{2m_e^2 c^4} [(J^\mu k'_\mu)^* (J^\nu k_\nu) + (J^\mu k_\mu)^* (J^\nu k'_\nu) - (J^{\mu*} J_\mu) (k^\nu k'_\nu)] \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

se desprezarmos a massa de repouso do elétron em relação à sua energia total.

Separando as partes escalares e vetoriais dos quadri-momentum  $k_\mu$  e  $k'_\mu = k_\mu + \hbar q_\mu$  e do quadri-vetor  $J_\mu$  temos que

$$\begin{aligned} \overline{\sum_{if} |\mathcal{S}_{fi}|^2} &= e^2 c^2 \frac{c^2}{2m_e^2 c^4} [2\text{Re}[(J^0 k'_0)^* (J^0 k_0)] + 2\text{Re}[(\mathbf{J} \cdot \mathbf{k}')^* (\mathbf{J} \cdot \mathbf{k})] \\ &\quad - 2\text{Re}[(J^0 k_0)^* (\mathbf{J} \cdot \mathbf{k}') + (J^0 k'_0)^* (\mathbf{J} \cdot \mathbf{k})] + (k^0 k'_0 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}') (\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{J} - J^{0*} J_0)] \\ &= \frac{e^2 c^2}{2m_e^2 c^4} [(\epsilon_e \epsilon'_e + c^2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}') |J_0|^2 + 2c^2 |\mathbf{k} \cdot \mathbf{J}|^2 \\ &\quad + (\epsilon_e \epsilon'_e - c^2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}') |\mathbf{J}|^2 - 2c(\epsilon_e + \epsilon'_e) \text{Re}(J^{0*} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{J}))]. \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Logo, escrevendo  $J_0$  e  $\mathbf{J}$  nas suas formas explícitas temos que a seção de choque de espalhamento

$$\frac{d^5 \sigma}{d\epsilon'_e d\Omega_{e'} d\Omega_{p'}} = \left( \frac{4\pi e}{\hbar^2 q_\nu q^\nu} \right)^2 \frac{m_N c^2 M_{A-1} c^2 m_e^2 c^4}{(2\pi)^5 \hbar^3 c^9 \epsilon_A} \frac{|\mathbf{p}'|_c |\mathbf{k}'|_c}{|\mathbf{k}|_c} f_{rec}^{-1} \overline{\sum_{if} |\mathcal{S}_{fi}|^2} \quad (\text{C.16})$$

é equivalente a

$$\begin{aligned} \frac{d^5 \sigma}{d\epsilon'_e d\Omega_{e'} d\Omega_{p'}} &= \left( \frac{e^2}{\hbar c} \frac{4\pi}{\hbar^2 c^2 q_\nu q^\nu} \right)^2 \frac{m_N c^2 M_{A-1} c^2}{(2\pi)^5 \hbar c \epsilon_A} \frac{|\mathbf{p}'|_c |\mathbf{k}'|_c}{|\mathbf{k}|_c} f_{rec}^{-1} \\ &\frac{1}{2} \overline{\sum_{if,N}} \left\{ (\epsilon_e \epsilon'_e + c^2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}') \left( \frac{q_\mu^2}{|\mathbf{q}|^2} \right)^2 |\langle \Psi_f | \hat{J}_0 | \Psi_i \rangle|^2 + (\epsilon_e \epsilon'_e - c^2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}') |\langle \Psi_f | \hat{\mathbf{J}}_T | \Psi_i \rangle|^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 |\mathbf{k} c \cdot \langle \Psi_f | \hat{\mathbf{J}}_T | \Psi_i \rangle|^2 - 2 \left( \frac{q_\mu^2}{|\mathbf{q}|^2} \right) (\epsilon_e + \epsilon'_e) \text{Re} \left[ \langle \Psi_i | \hat{J}_0^\dagger | \Psi_f \rangle \left( \mathbf{k} c \cdot \langle \Psi_f | \hat{\mathbf{J}}_T | \Psi_i \rangle \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

lembrando que os somatórios acima são apenas sobre os estados do alvo.

Podemos escrever a seção de choque de forma mais simplificada se analisarmos separadamente os termos que a compõem, ou seja,

$$(\hbar q_\mu)^2 = (k' - k)^2 = k^2 + k'^2 - 2kk' = \frac{\epsilon_e'^2}{c^2} - |\mathbf{k}|^2 + \frac{\epsilon_e'^2}{c^2} - |\mathbf{k}'|^2 - 2 \left( \frac{\epsilon_e \epsilon'_e}{c^2} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' \right). \quad (\text{C.18})$$

Para elétrons de altas energias (centenas de MeV ou mais)  $\epsilon_e'^2 \simeq |\mathbf{k}|^2 c^2$  e  $\epsilon_e'^2 \simeq |\mathbf{k}'|^2 c^2$  e,

logo,

$$\begin{aligned} (\hbar q_\mu)^2 &\simeq -2\left(\frac{\epsilon_e \epsilon'_e}{c^2} - |\mathbf{k}||\mathbf{k}'| \cos \theta_e\right) \\ &\simeq -2\frac{\epsilon_e \epsilon'_e}{c^2}(1 - \cos \theta_e) = -4\frac{\epsilon_e \epsilon'_e}{c^2} \sin^2\left(\frac{\theta_e}{2}\right). \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

Temos também que

$$\begin{aligned} \epsilon_e \epsilon'_e + c^2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' &= \epsilon_e \epsilon'_e (1 + \cos \theta_e) = 2\epsilon_e \epsilon'_e \cos^2\left(\frac{\theta_e}{2}\right), \\ \epsilon_e \epsilon'_e - c^2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' &= \epsilon_e \epsilon'_e (1 - \cos \theta_e) = 2\epsilon_e \epsilon'_e \sin^2\left(\frac{\theta_e}{2}\right) \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

e, finalmente, usando que  $(\hbar c q_\mu)^2 = (\epsilon_e - \epsilon'_e)^2 - (\hbar c |\mathbf{q}|)^2$  obtemos

$$\begin{aligned} (\epsilon_e + \epsilon'_e)^2 &= (\epsilon_e - \epsilon'_e)^2 + 4\epsilon_e \epsilon'_e \\ &= (\hbar c q_\mu)^2 + (\hbar c |\mathbf{q}|)^2 + 4\epsilon_e \epsilon'_e \\ &\simeq \frac{\hbar^2 c^2 |\mathbf{q}|^2}{\tan^2 \theta_e/2} \left( \tan^2\left(\frac{\theta_e}{2}\right) - \frac{q_\mu^2}{|\mathbf{q}|^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

Assim a seção de choque da reação é

$$\begin{aligned} \frac{d^5 \sigma}{d\epsilon'_e d\Omega_{e'} d\Omega_{p'}} &= \sigma_M \frac{m_N c^2 |\mathbf{p}'| c M_{A-1} c^2}{(2\pi)^3 \hbar c \epsilon_A} f_{rec}^{-1} \sum_{if, N} \left\{ \left( \frac{q_\mu^2}{|\mathbf{q}|^2} \right)^2 |\langle \Psi_f | \hat{J}_0 | \Psi_i \rangle|^2 \right. \\ &+ \tan^2\left(\frac{\theta_e}{2}\right) |\langle \Psi_f | \hat{\mathbf{J}}_T | \Psi_i \rangle|^2 + \frac{1}{\epsilon'_e \epsilon_e \cos^2(\theta_e/2)} |\mathbf{k}c \cdot \langle \Psi_f | \hat{\mathbf{J}}_T | \Psi_i \rangle|^2 \\ &\left. - \left( \frac{q_\mu^2}{|\mathbf{q}|^2} \right) \frac{\hbar c |\mathbf{q}|}{\epsilon_e \epsilon'_e \sin \theta_e/2 \cos \theta_e/2} \sqrt{\tan^2\left(\frac{\theta_e}{2}\right) - \frac{q_\mu^2}{|\mathbf{q}|^2}} \text{Re} \left[ \langle \Psi_i | \hat{J}_0^\dagger | \Psi_f \rangle \left( \mathbf{k}c \cdot \langle \Psi_f | \hat{\mathbf{J}}_T | \Psi_i \rangle \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

onde colocamos em evidência o fator  $\epsilon'_e \epsilon_e \cos^2(\theta_e/2)$  e definimos a seção de choque de Mott como

$$\sigma_M = \left( \frac{e^2 \cos(\theta_e/2)}{\hbar c 2\epsilon_e \sin^2(\theta_e/2)} \right)^2. \quad (\text{C.23})$$

Se escrevermos  $\mathbf{k} = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_z) \mathbf{e}_z + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_x) \mathbf{e}_x$  e como  $\mathbf{q} = |\mathbf{q}| \mathbf{e}_z$  é perpendicular a  $\langle \Psi_f | \hat{\mathbf{J}}_T | \Psi_i \rangle$ , então

$$\begin{aligned} \mathbf{k}c \cdot \langle \Psi_f | \hat{\mathbf{J}}_T | \Psi_i \rangle &= (\mathbf{k}c \cdot \mathbf{e}_x) \mathbf{e}_x \cdot \langle \Psi_f | \hat{\mathbf{J}}_T | \Psi_i \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{k}c \cdot \mathbf{e}_x) (\langle \Psi_f | \hat{J}_- | \Psi_i \rangle - \langle \Psi_f | \hat{J}_+ | \Psi_i \rangle). \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

Reescrevemos ainda

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}c \cdot \mathbf{e}_x &= \mathbf{k}c \cdot [\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_y] = \mathbf{k}c \cdot \left[ \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|} \times \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{k}'}{|\mathbf{k} \times \mathbf{k}'|} \right] \\
&= \frac{c}{|\mathbf{q}| |\mathbf{k}| |\mathbf{k}'| \sin \theta_e} \cdot [\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' (\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}) - \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{q})] \\
&= \frac{-c}{\hbar |\mathbf{q}| |\mathbf{k}| |\mathbf{k}'| \sin \theta_e} [\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' (|\mathbf{k}|^2 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}') - |\mathbf{k}|^2 (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k} - |\mathbf{k}'|^2)] \\
&= \frac{-|\mathbf{k}| |\mathbf{k}'| c}{\hbar |\mathbf{q}| \sin \theta_e} [1 - \cos^2 \theta_e] = \frac{-|\mathbf{k}| c |\mathbf{k}'| c \sin \theta_e}{\hbar c |\mathbf{q}|} \simeq -2 \frac{\epsilon_e \epsilon'_e}{\hbar c |\mathbf{q}|} \sin \left( \frac{\theta_e}{2} \right) \cos \left( \frac{\theta_e}{2} \right).
\end{aligned} \tag{C.25}$$

Juntando esses resultados a (C.22) encontramos

$$\frac{d^5 \sigma}{d\epsilon'_e d\Omega_{e'} d\Omega_{p'}} = \frac{\sigma_M |\mathbf{p}'| c \epsilon'_p M_{A-1} c^2}{(2\pi)^3 \hbar c \epsilon_A} f_{rec}^{-1} (v_l w_l + v_t w_t + v_{tl} w_{tl} + v_{tt} w_{tt}). \tag{C.26}$$

Aqui os fatores  $v$  dependem apenas da cinemática dos elétrons incidente e espalhado

$$v_l = \left( \frac{q_\mu^2}{|\mathbf{q}|^2} \right)^2 \tag{C.27a}$$

$$v_t = \tan^2 \left( \frac{\theta_e}{2} \right) - \frac{1}{2} \frac{q_\mu^2}{|\mathbf{q}|^2} \tag{C.27b}$$

$$v_{tl} = \left( \frac{q_\mu^2}{\sqrt{2} |\mathbf{q}|^2} \right) \sqrt{\tan^2 \left( \frac{\theta_e}{2} \right) - \frac{q_\mu^2}{|\mathbf{q}|^2}} \tag{C.27c}$$

$$v_{tt} = \frac{1}{2} \frac{q_\mu^2}{|\mathbf{q}|^2} \tag{C.27d}$$

e os fatores  $w$  carregam a informação sobre a estrutura nuclear

$$w_l = \overline{\sum_{if,N}} |\langle \Psi_f | \hat{J}_0 | \Psi_i \rangle|^2 \tag{C.28a}$$

$$w_t = \overline{\sum_{if,N}} \left[ |\langle \Psi_f | \hat{J}_+ | \Psi_i \rangle|^2 + |\langle \Psi_f | \hat{J}_- | \Psi_i \rangle|^2 \right] \tag{C.28b}$$

$$w_{tl} = 2 \operatorname{Re} \overline{\sum_{if,N}} \left[ \langle \Psi_i | \hat{J}_0^\dagger | \Psi_f \rangle \left( \langle \Psi_f | \hat{J}_- | \Psi_i \rangle - \langle \Psi_f | \hat{J}_+ | \Psi_i \rangle \right) \right] \tag{C.28c}$$

$$w_{tt} = 2 \operatorname{Re} \overline{\sum_{if,N}} \left[ \langle \Psi_f | \hat{J}_+^\dagger | \Psi_i \rangle \langle \Psi_f | \hat{J}_- | \Psi_i \rangle \right]. \tag{C.28d}$$

# Apêndice D

## Cálculo da função de onda do Nucleon Espalhado

### D.1 Cálculo dos *Phase-Shifts*

O procedimento que utilizamos para calcular os *phase-shifts* é o mesmo encontrado na literatura para os cálculos de espalhamento de elétron por uma distribuição de cargas (referências [35, 37, 38]). Adaptamos o método para incluir, além do potencial vetorial, também o potencial escalar.

Para encontrar os *phase-shifts*  $\delta_\kappa$ , necessários para determinar as funções de onda do nucleon espalhado, precisamos primeiro resolver as equações da parte radial de cada onda parcial:

$$\frac{d}{dr}g_\kappa(r) = \frac{\epsilon'_p + M^*(r)c^2 - V_v(r)}{\hbar c}f_\kappa(r) - \frac{\kappa}{r}g_\kappa(r). \quad (\text{D.1})$$

e

$$\frac{d}{dr}f_\kappa(r) = -\frac{\epsilon'_p - M^*(r)c^2 - V_v(r)}{\hbar c}g_\kappa(r) + \frac{\kappa}{r}f_\kappa(r) \quad (\text{D.2})$$

Essas equações não possuem soluções analíticas para a maioria dos potenciais realistas[34], e por isso, devemos resolvê-las numericamente. Para obter as soluções numéricas fazemos uma mudança de variáveis que facilita a utilização das condições de contorno na origem[35]:

$$g_\kappa(r) = r^{|\kappa|}G_\kappa(r) \quad \text{e} \quad f_\kappa(r) = r^{|\kappa|}F_\kappa(r). \quad (\text{D.3})$$

Assim, para  $\kappa > 0$ :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr}G_\kappa(r) &= \frac{\epsilon'_p + M^*(r)c^2 - V_v(r)}{\hbar c}F_\kappa(r) - \frac{2|\kappa|}{r}G_\kappa(r) \\ \frac{d}{dr}F_\kappa(r) &= -\frac{\epsilon'_p - M^*(r)c^2 - V_v(r)}{\hbar c}G_\kappa(r)\end{aligned}\quad (\text{D.4})$$

onde as condições de contorno são dadas por

$$\begin{aligned}G_\kappa(0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{d}{dr}G_\kappa(0) &= C \frac{\epsilon'_p + M^*(0)c^2 - V_v(0)}{(2\kappa + 1)\hbar c}, \\ F_\kappa(0) = C, \quad \frac{d}{dr}F_\kappa(0) &= 0.\end{aligned}\quad (\text{D.5})$$

Para  $\kappa < 0$ :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr}G_\kappa(r) &= \frac{\epsilon'_p + M^*(r)c^2 - V_v(r)}{\hbar c}F_\kappa(r) \\ \frac{d}{dr}F_\kappa(r) &= -\frac{\epsilon'_p - M^*(r)c^2 - V_v(r)}{\hbar c}G_\kappa(r) - \frac{2|\kappa|}{r}G_\kappa(r)\end{aligned}\quad (\text{D.6})$$

e as condições de contorno são dadas por

$$\begin{aligned}G_\kappa(0) = C \quad \text{e} \quad \frac{d}{dr}G_\kappa(0) &= 0, \\ F_\kappa(0) = 0, \quad \frac{d}{dr}F_\kappa(0) &= C \frac{\epsilon'_p - M^*(0)c^2 - V_v(0)}{(2|\kappa| + 1)\hbar c}.\end{aligned}\quad (\text{D.7})$$

Nas equações acima  $C$  é uma constante arbitrária, que utilizamos como

$$C = \frac{1}{(2|\kappa| - 1)!!}\quad (\text{D.8})$$

por conveniência. As equações acima são resolvidas utilizando o Método de Runge-Kutta de 5ª-ordem[36].

Os *phase-shifts*  $\delta_\kappa$  são obtidos comparando  $g_\kappa(r)$  e  $f_\kappa(r)$  com as formas assintóticas das soluções para o espalhamento de um nucleon por uma carga puntual[16]. Como existem soluções regulares (finitas na origem) e irregulares (divergentes na origem) para o espalhamento por uma carga puntual, escrevemos  $g_\kappa(r)$  e  $f_\kappa(r)$  como uma combinação linear dessas soluções. Se  $g_\kappa^R(r)$  e  $f_\kappa^R(r)$  são as soluções regulares e  $g_\kappa^I(r)$  e  $f_\kappa^I(r)$  as irregulares, a combinação tem a forma

$$g_\kappa(r) = A_\kappa g_\kappa^R(r) + B_\kappa g_\kappa^I(r).\quad (\text{D.9})$$

$$f_\kappa(r) = A_\kappa f_\kappa^R(r) + B_\kappa f_\kappa^I(r)\quad (\text{D.10})$$



onde os coeficientes  $A_\kappa$  e  $B_\kappa$  devem ser determinados. As soluções normalizadas  $g_\kappa^{R,I}(r)$  e  $f_\kappa^{R,I}(r)$  da equação de Dirac para o potencial Coulombiano são dadas por[35, 37]:

$$\frac{1}{r} \begin{pmatrix} f_\kappa^{R,I}(r) \\ g_\kappa^{R,I}(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{\epsilon'_p - Mc^2}{\epsilon'_p + Mc^2}} \Im(V_{\pm\gamma}(x)) \\ \Re(V_{\pm\gamma}(x)) \end{pmatrix} \quad (\text{D.11})$$

onde os sinais positivo e negativo de  $\gamma$  correspondem às soluções regular e irregular na origem, respectivamente, e  $x = |\mathbf{p}'r/\hbar|$ .

A função  $V_\gamma(x)$  pode ser escrita em termos de funções gama e funções hiper-geométricas confluentes:

$$V_\gamma(x) = 2e^{\pi y/2} \frac{|\Gamma(\gamma + iy)|}{\Gamma(2\gamma + 1)} (2x)^{\gamma-1} (\gamma + iy) e^{i(\eta_\kappa(\gamma) - x)} {}_1F_1(1 + \gamma + iy, 2\gamma + 1, 2ix) \quad (\text{D.12})$$

onde  $y = \alpha Z \epsilon'_p / pc$ ,  $\gamma = \sqrt{\kappa^2 - \alpha^2 Z^2}$  e

$$\eta_\kappa(\gamma) = -\frac{\pi}{2} \left( \frac{1 + S_\kappa}{2} \right) - \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{y(\kappa + \gamma Mc^2 / \epsilon'_p)}{\kappa\gamma - y^2 Mc^2 / \epsilon'_p} \right) \quad (\text{D.13})$$

com  $S_\kappa = |\kappa|/\kappa$ . Para computar essas funções numericamente reescrevemos  $V_\gamma(x)$  utilizando propriedades de funções gama e funções hiper-geométricas:

$$V_\gamma(x) = \frac{e^{\pi y/2} e^{i\eta_\kappa(\gamma)}}{2\gamma x} [(\gamma + iy)U_\gamma(x) + iy|\gamma + iy|U_{\gamma+1}(x)] \quad (\text{D.14})$$

onde

$$U_\gamma(x) = \frac{|\Gamma(\gamma + iy)|}{\Gamma(2\gamma)} (2x)^\gamma e^{ix} {}_1F_1(\gamma + iy, 2\gamma, 2ix). \quad (\text{D.15})$$

Para calcular  $U_\gamma(x)$  usamos uma expansão em torno da origem para  $x \leq 15$  e uma expansão assintótica para  $x > 15$ . A expansão em torno da origem tem a forma

$$U_\gamma(x) = \frac{|\Gamma(\gamma + iy)|}{\Gamma(2\gamma)} (2x)^\gamma \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (\text{D.16})$$

com  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = -y/\gamma$  e

$$a_n = -\frac{2ya_{n-1} + a_{n-2}}{n(n + 2\gamma - 1)}, \quad n \geq 2 \quad (\text{D.17})$$

enquanto a expansão assintótica tem a forma

$$U_\gamma(x) = 2\Re \left( \frac{|\Gamma(\gamma + iy)|}{\Gamma(\gamma + iy)} e^{i(x+y \ln(2x))} e^{-\pi/2(y+i\gamma)} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{-n} \right), \quad (\text{D.18})$$

com  $b_0 = 1$  e

$$b_n = \frac{(\gamma - iy + n - 1)(n - \gamma - iy)}{2in} b_{n-1}, \quad n \geq 1. \quad (\text{D.19})$$

Voltando ao cálculo dos *phase-shifts*, temos que as formas assintóticas das soluções  $f_\kappa^{R,I}(r)$  e  $g_\kappa^{R,I}(r)$  são

$$\frac{1}{r}g_\kappa^{R,I}(r) \rightarrow \frac{\cos(x + y \ln(2x) - (l+1)\pi/2 + \delta_\kappa^{R,I})}{x}, \quad (\text{D.20})$$

e

$$\frac{1}{r}f_\kappa^{R,I}(r) \rightarrow -\sqrt{\frac{\epsilon'_p - Mc^2}{\epsilon'_p + Mc^2}} \frac{\sin(x + y \ln(2x) - (l+1)\pi/2 + \delta_\kappa^{R,I})}{x} \quad (\text{D.21})$$

onde os *phase-shifts*  $\delta_\kappa^R$  e  $\delta_\kappa^I$  também possuem forma analítica:

$$\delta_\kappa^{R,I} = \eta_\kappa(\pm\gamma) \mp \frac{\pi}{2} - \arg \Gamma(\pm\gamma + iy) + (l+1)\frac{\pi}{2}. \quad (\text{D.22})$$

As soluções  $g_\kappa(r)$  e  $f_\kappa(r)$  devem ter a mesma forma assintótica que as soluções regulares e irregulares na origem, então,

$$\frac{1}{r}g_\kappa(r) \rightarrow \frac{\cos(x + y \ln(2x) - (l+1)\pi/2 + \delta_\kappa)}{x}, \quad (\text{D.23})$$

e

$$\frac{1}{r}f_\kappa(r) \rightarrow -\sqrt{\frac{\epsilon'_p - Mc^2}{\epsilon'_p + Mc^2}} \frac{\sin(x + y \ln(2x) - (l+1)\pi/2 + \delta_\kappa)}{x} \quad (\text{D.24})$$

e logo, substituindo as formas assintótica em (D.10) e (D.9) e fazendo uma manipulação algébrica, encontramos que

$$\delta_\kappa = \delta_\kappa^R + \arctan\left(\frac{\sin \theta_\kappa}{A_\kappa/B_\kappa + \cos \theta_\kappa}\right) \quad (\text{D.25})$$

onde  $\theta_\kappa = \delta_\kappa^I - \delta_\kappa^R$ .

Conforme aumentamos  $\kappa$  cada vez mais a função de onda calculada numericamente tende à função de onda regular na origem, ou seja,  $g_\kappa(r) \rightarrow g_\kappa^R(r)$  e  $f_\kappa(r) \rightarrow f_\kappa^R(r)$ , já que as condições de contorno que usamos na origem são as mesmas da solução regular. Assim, para  $\kappa$  grande a razão  $A_\kappa/B_\kappa \rightarrow \infty$ ,  $\delta_\kappa^I \rightarrow \pi/2$  e  $\delta_\kappa^R \rightarrow 0$ . Para evitar problemas numéricos quando  $A_\kappa/B_\kappa \rightarrow \infty$  (*overflow*) fazemos um deslocamento de  $-\pi/2$  na função de onda irregular, de maneira que para  $\kappa$  grande temos  $A_\kappa/B_\kappa \rightarrow 1$ . Isso é feito definindo[16]

$$\eta_\kappa(-\gamma) = \eta_\kappa(\gamma) - \frac{\pi}{2} \quad (\text{D.26})$$

para  $\gamma > 0$ .

## D.2 Normalização das Funções de Onda

Determinar  $f_\kappa(r)$ ,  $g_\kappa(r)$  (a partir de agora chamados de  $g_\kappa^N(r)$ ,  $f_\kappa^N(r)$  por terem sido obtidos numericamente) e os *phase-shifts*  $\delta_\kappa$  com o método descrito acima não é suficiente para obter a função de onda do nucleon espalhado. Isso porque precisamos normalizar separadamente cada onda parcial, já que, se a onda correspondente a cada  $\kappa$  estiver multiplicada por uma constante elas ainda são soluções das equações D.2 e D.1.

A princípio a normalização poderia ser feita simplesmente comparando  $f_\kappa^N(r)$ ,  $g_\kappa^N(r)$  com suas formas assintóticas normalizadas (equações D.24 e D.23). Mas essas formas servem apenas para  $r$  muito grande ( $r \rightarrow \infty$ ) e, por isso, não é possível fazer a normalização dessa maneira. Assim, para normalizar cada onda parcial comparamos  $f_\kappa^N(r)$ ,  $g_\kappa^N(r)$  com soluções assintóticas que também são válidas para  $r$  grande (fora do núcleo). Essas soluções são encontradas resolvendo as equações de Dirac pelo método W.K.B.[35, 38].

Primeiro desacoplamos as equações diferenciais D.2 e D.1, transformando-as em duas equações diferenciais de segunda ordem:

$$\frac{d^2}{dr^2}f_\kappa(r) + \frac{V'_v(r) - V'_s(r)}{\epsilon'_p - M^*(r)c^2 - V_v(r)} \frac{d}{dr}f_\kappa(r) + [Q_0 - Q_2]f_\kappa(r) = 0 \quad (\text{D.27a})$$

e

$$\frac{d^2}{dr^2}g_\kappa(r) + \frac{V'_v(r) + V'_s(r)}{\epsilon'_p + M^*(r)c^2 - V_v(r)} \frac{d}{dr}g_\kappa(r) + [Q_0 + Q_1]g_\kappa(r) = 0 \quad (\text{D.27b})$$

onde  $V'_v(r) = dV_v(r)/dr$ ,  $V'_s(r) = dV_s(r)/dr$  e  $Q_0$ ,  $Q_1$  e  $Q_2$  são dados por

$$Q_0 = \frac{(\epsilon'_p - V_v(r))^2 - (M^*(r)c^2)^2}{\hbar^2 c^2} - \frac{\kappa^2}{r^2}, \quad (\text{D.28a})$$

$$Q_1 = -\frac{\kappa}{r^2} + \frac{\kappa}{r} \frac{V'_v(r) + V'_s(r)}{\epsilon'_p + M^*(r)c^2 - V_v(r)}, \quad (\text{D.28b})$$

$$Q_2 = -\frac{\kappa}{r^2} + \frac{\kappa}{r} \frac{V'_v(r) - V'_s(r)}{\epsilon'_p - M^*(r)c^2 - V_v(r)}. \quad (\text{D.28c})$$

Para resolver as equações D.27a e D.27b pelo método W.K.B. devemos transformá-las em equações do tipo  $W'' + QW = 0$ .

Para fazer isso escrevemos

$$\begin{aligned}
g_\kappa(r) &= (\epsilon'_p + M^*(r)c^2 - V_v(r))^{1/2} W_1(r) \\
\Rightarrow g'_\kappa(r) &= (\epsilon'_p + M^*(r)c^2 - V_v(r))^{1/2} W'_1(r) - \frac{V'_v(r) + V'_s(r)}{2(\epsilon'_p + M^*(r)c^2 - V_v(r))^{1/2}} W_1(r) \\
\Rightarrow g''_\kappa(r) &= (\epsilon'_p + M^*(r)c^2 - V_v(r))^{1/2} W''_1(r) - \frac{V'_v(r) + V'_s(r)}{(\epsilon'_p + M^*(r)c^2 - V_v(r))^{1/2}} W'_1(r) \\
&\quad - \frac{(V''_v(r) + V''_s(r))^2}{4(\epsilon'_p + M^*(r)c^2 - V_v(r))^{3/2}} W_1(r) - \frac{V''_v(r) + V''_s(r)}{2(\epsilon'_p + M^*(r)c^2 - V_v(r))^{1/2}} W_1(r) \quad (\text{D.29})
\end{aligned}$$

e substituímos em D.27b para encontrar

$$W''_1(r) + [Q_0 + Q_1] W_1(r) - \left[ \frac{3(V'_v(r) + V'_s(r))^2}{4(\epsilon'_p + M^*(r)c^2 - V_v(r))^2} + \frac{V''_v(r) + V''_s(r)}{2(\epsilon'_p + M^*(r)c^2 - V_v(r))} \right] W_1(r) = 0. \quad (\text{D.30a})$$

Utilizando o mesmo procedimento para D.27a, chegamos em

$$W''_2(r) + [Q_0 - Q_2] W_2(r) - \left[ \frac{3(V'_v(r) - V'_s(r))^2}{4(\epsilon'_p - M^*(r)c^2 - V_v(r))^2} + \frac{V''_v(r) - V''_s(r)}{2(\epsilon'_p - M^*(r)c^2 - V_v(r))} \right] W_2(r) = 0. \quad (\text{D.30b})$$

A solução para equações da forma  $W'' + QW = 0$  é

$$W \simeq Q^{-1/4} \exp\left(\pm i \int Q^{1/2} dr\right). \quad (\text{D.31})$$

Se considerarmos o caso particular de uma região em que o potencial é dado unicamente pelo potencial Coulombiano, temos

$$V_v(r) = \frac{\alpha Z}{r} \quad \text{e} \quad V_s(r) = 0, \quad (\text{D.32})$$

e, logo, podemos desprezar o último termo de D.30a e D.30b em relação aos dois primeiros. As soluções das equações D.1 e D.2 nessa região são

$$g_\kappa(r) = \left( \frac{\epsilon'_p + M^*(r)c^2 - V_v(r)}{\hbar c(Q_0 + Q_1)^{1/2}} \right)^{1/2} a_\pm \exp\left(\pm i \int (Q_0 + Q_1)^{1/2} dr\right) \quad (\text{D.33a})$$

e

$$f_\kappa(r) = \left( \frac{\epsilon'_p - M^*(r)c^2 - V_v(r)}{\hbar c(Q_0 - Q_2)^{1/2}} \right)^{1/2} b_\pm \exp\left(\pm i \int (Q_0 - Q_2)^{1/2} dr\right) \quad (\text{D.33b})$$

onde as constantes  $a_\pm$  e  $b_\pm$  terão seus valores discutidos a seguir e  $Q_0$ ,  $Q_1$  e  $Q_2$  são dados explicitamente por (substituindo D.32 em D.28a):

$$Q_0 = \frac{\epsilon_p'^2 - M^2 c^4}{\hbar^2 c^2} + \frac{2\alpha Z \epsilon'_p}{\hbar c r} - \frac{\gamma^2}{r^2}, \quad (\text{D.34a})$$

$$Q_1 = \frac{\kappa}{r^2} \left[ \frac{\alpha Z}{r(\epsilon'_p + M c^2)/\hbar c - \alpha Z} - 1 \right], \quad (\text{D.34b})$$

$$Q_2 = \frac{\kappa}{r^2} \left[ \frac{\alpha Z}{r(\epsilon'_p - M c^2)/\hbar c - \alpha Z} - 1 \right], \quad (\text{D.34c})$$

onde  $\gamma^2 = \kappa^2 - \alpha^2 Z^2$ . As integrais em D.33a e D.33b podem ser avaliadas aproximando

$$(Q_0 + Q_1)^{1/2} \simeq Q_0^{1/2} + \frac{Q_1}{2Q_0^{1/2}} \quad (\text{D.35a})$$

e

$$(Q_0 - Q_2)^{1/2} \simeq Q_0^{1/2} - \frac{Q_2}{2Q_0^{1/2}}, \quad (\text{D.35b})$$

o que é razoável para  $r$  grande. Assim,

$$\int (Q_0 + Q_1)^{1/2} dr \simeq Q^{1/2} + \beta \ln(Q^{1/2} + \chi + \beta) - \gamma\theta + \frac{1}{2}S_\kappa\phi(\eta) + D_1, \quad (\text{D.36a})$$

e

$$\int (Q_0 - Q_2)^{1/2} dr \simeq Q^{1/2} + \beta \ln(Q^{1/2} + \chi + \beta) - \gamma\theta - \frac{1}{2}S_\kappa\phi(-\eta) + D_2, \quad (\text{D.36b})$$

onde

$$\chi = \frac{|\mathbf{p}'|r}{\hbar}, \quad (\text{D.37a})$$

$$\beta = \frac{\alpha Z \epsilon'_p}{|\mathbf{p}'|c}, \quad (\text{D.37b})$$

$$\eta = \frac{\alpha Z M c^2}{|\mathbf{p}'|c}, \quad (\text{D.37c})$$

$$\gamma = (\kappa^2 - \alpha^2 Z^2)^{1/2}, \quad (\text{D.37d})$$

$$Q = \chi^2 + 2\beta\chi - \gamma^2 = r^2 Q_0, \quad (\text{D.37e})$$

$$S_\kappa = \frac{|\kappa|}{\kappa}, \quad (\text{D.37f})$$

$$\theta = \arcsin \left( \frac{\beta\chi - \gamma^2}{\chi(\beta^2 + \gamma^2)^{1/2}} \right), \quad (\text{D.37g})$$

$$\phi(\eta) = \arcsin \left( \frac{\kappa^2 - \eta(\chi + \beta - \eta)}{(\chi + \beta - \eta)(\beta^2 + \gamma^2)^{1/2}} \right). \quad (\text{D.37h})$$

As constantes de integração  $D_1$  e  $D_2$  e as constantes  $a_\pm$  e  $b_\pm$  são encontradas comparando as formas assintóticas D.33a e D.33b com as formas assintóticas extremas ( $r \rightarrow \infty$ ) D.24 e D.23. Por exemplo, para  $\kappa > 0$ , devemos ter

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{g_\kappa(r)}{r} \rightarrow & \frac{\cos(\chi + \beta \ln(2\chi) - (\kappa + 1)\pi/2 + \delta_\kappa)}{\chi} = \frac{1}{r} \left( \frac{\epsilon'_p + M c^2}{|\mathbf{p}'|c} \right)^{1/2} \\ & \left\{ a_+ \exp \left[ i \left( \chi - \beta + \beta \ln(2\chi) - \gamma\theta_0 + \frac{1}{2}S_\kappa\phi_0 + D_1 \right) \right] + \right. \\ & \left. a_- \exp \left[ -i \left( \chi - \beta + \beta \ln(2\chi) - \gamma\theta_0 + \frac{1}{2}S_\kappa\phi_0 + D_1 \right) \right] \right\}, \quad (\text{D.38}) \end{aligned}$$

onde

$$\theta_0 = \lim_{r \rightarrow \infty} \theta = \arcsin \left[ \frac{\beta}{(\beta^2 + \gamma^2)^{1/2}} \right] \quad \text{e} \quad (\text{D.39a})$$

$$\phi_0 = \lim_{r \rightarrow \infty} \phi(\eta) = \arcsin \left[ -\frac{\eta}{(\beta^2 + \gamma^2)^{1/2}} \right]. \quad (\text{D.39b})$$

Para que isso aconteça devemos ter  $D_1 = \beta + \gamma\theta_0 - \frac{1}{2}S_\kappa\phi_0(\eta) - (\kappa + 1)\frac{\pi}{2} + \delta_\kappa$  e

$$a_+ = a_- = \frac{\hbar c}{2} \frac{1}{|\mathbf{p}'|c(\epsilon'_p + Mc^2)}.$$

Fazendo o mesmo procedimento para  $f_\kappa(r)$  chegamos em  $D_2 = \beta + \gamma\theta_0 + \frac{1}{2}S_\kappa\phi_0(-\eta) - (\kappa + 1)\frac{\pi}{2} + \delta_\kappa$  e

$$b_+ = -b_- = \frac{\hbar c}{2} \frac{1}{|\mathbf{p}'|c(\epsilon'_p + Mc^2)}.$$

Substituindo esses resultados em D.33a e D.33b temos que as soluções para  $f_\kappa(r)$ ,  $g_\kappa(r)$  no método W.K.B. são

$$\frac{g_\kappa(r)}{r} = \left( \frac{(\beta + \eta)\chi - (\alpha Z)^2}{\alpha Z(Q - \kappa)^{1/2}} \right)^{1/2} \frac{\cos(\Phi + \frac{1}{2}(\phi(\eta) - \phi_0) + \delta_\kappa)}{\chi}, \quad (\text{D.40a})$$

$$\frac{f_\kappa(r)}{r} = \left( \frac{(\beta + \eta)\chi - (\alpha Z)^2}{\alpha Z(Q + \kappa)^{1/2}} \right)^{1/2} \frac{\sin(\Phi - \frac{1}{2}(\phi(-\eta) + \phi_0) + \delta_\kappa)}{\chi}, \quad (\text{D.40b})$$

onde definimos  $\Phi = Q^{1/2} - \beta + \beta \ln(Q^{1/2} + \chi + \beta) - \gamma(\theta - \theta_0) - \frac{\pi}{2}(l + 1)$ . Comparamos essas soluções para um  $r$  grande com a solução obtida numericamente para encontrar as constantes de normalização:

$$g_\kappa(r) \simeq N_\kappa g_\kappa^N(r) \quad (\text{D.41a})$$

$$f_\kappa(r) \simeq N_\kappa f_\kappa^N(r). \quad (\text{D.41b})$$

Olhando as equações D.1 e D.2 vemos que para  $\kappa < 0$

$$g(-\kappa, M^*) = +f(\kappa, -M^*) \quad (\text{D.42a})$$

$$f(-\kappa, M^*) = -g(\kappa, -M^*) \quad (\text{D.42b})$$

e, para esses valores de  $\kappa$ ,

$$g_\kappa(r) \simeq N_\kappa f_\kappa^N(r) \quad (\text{D.43a})$$

$$f_\kappa(r) \simeq -N_\kappa g_\kappa^N(r). \quad (\text{D.43b})$$

# Referências Bibliográficas

- [1] D. Griffiths *Introduction to Elementary Particles* (John Wiley and Sons, Inc., 1987)
- [2] S. Boffi, C. Giusti e F.D. Pacati, *Physics Reports* **226**, 1 (1993).
- [3] C.Ciofi degli Atti *Electron Scattering by Nuclei*, *Prog.Part.Nucl.Phys.*, Vol.3, 163 (1981)
- [4] A.M. Lallena *Electron Scattering from Nuclei*, *International Journal of Modern Physics A***6**, 2213 (1991)
- [5] T.D. DeForest *Nucleon Emission in Electron Scattering*, *Annals of Physics* 45, 305 (1967)
- [6] J.D. Bjorken e S.D. Drell *Relativistic Quantum Mechanics* (McGraw-Hill, New York, 1964).
- [7] J.M. Eisenberg e W.Greiner *Excitation Mechanisms of the Nucleus Vol.2* (North-Holland Publishing Company - Amsterdam London, 1970)
- [8] E. Butkov *Mathematical Physics* (Addison-Wesley Publishing Company, 1968)
- [9] D.A. Varshalovich, A.N. Moskalev e V.K. Khersonkii *Quantum Theory of Angular Momentum* (World Scientific, 1988)
- [10] B.C. Clark, S. Hame e R.L. Mercer *Dirac Phenomenology And The Nuclear Optical Model* (1982) - Published in *AIP Conf.Proc.*97:260-287,1983
- [11] C.J. Horowitz e B.D. Serot, *Nucl. Phys. A***368**, 503 (1981)
- [12] J.D. Wallecka e T. de Forest, *Advances in Physics* **15**, 1 (1966).

- [13] B.D. Serot e J.D. Wallecka, *Advances in Nuclear Physics Volume 16*.
- [14] H. Goldstein *Classical Mechanics 2nd edition (Addison-Wesley Publishing Company, 1980)*
- [15] C.J. Horowitz, D.P. Murdock, B.D. Serot, *Computational Nuclear Physics, Eds. K. Langanke, J.A. Maruhn, S.E. Koonin (Springer, Berlin, 1991)*.
- [16] H. Uberall, *Electron Scattering from Complex Nuclei, Academic Press. New York and London, 886p. (1971)*
- [17] D.C. Cheng e G.K. O'Neill *Elementary Particle Physics: An Introduction (Addison-Wesley Publishing Company, 1979)*
- [18] T.W. Donnelly e R.D. Peccei *Neutral Current Effects in Nuclei (North-Holland Publishing Company - Amsterdam (1979))*
- [19] A.de-Shalit e H.Feshbach *Theoretical Nuclear Physics (John Wiley and Sons, Inc., 1974)*
- [20] Y.K. Gambhir, P. Ringe A.Thimot *Annals of Physics 198, 132 (1990)*
- [21] J. Gao et al. *Phys. Rev Lett. 84, 3265 (2000)*
- [22] M. Bernhein, A. Bussière, J. Mougey, D. Royer, D. Tarnowsky, S. Turk-Chièze, S. Frullani, S. Boffi, C. Giusti, F.D. Pacati, G.P. Capitani, E. De Sanctis e G.W. Wagner, *Nucl. Phys. A375, 381 (1982)*
- [23] S.R. Mokhtar, M.Anguiano, G. Co e A.M. Lallena *Short-range correlations in semi-exclusive electron scattering experiments - arXiv:nucl-th/01050559*
- [24] D. Debruyne, *The Eikonal Approximation in Dirac Base Models for  $A(e, e'p)$  Reactions (2001)*
- [25] A.S. Raskin e T.W. Donnelly *Polarization In Coincidence Electron Scattering From Nuclei - Annals Phys. 191 (1989) 78*
- [26] T.D. DeForest, Jr. *Nucl.Phys. A392, 232 (1983)*



- [27] M. Leuschner, J. Calarco, F.W. Hersman, E. Jans, G.J. Kramer, L.Lávikás, G. van der Steenhoven, P.K. de Witt Hubert, H.P. Blok, N. Kalantar-Nayestanaki e J.Friedrich *Phys. Rev. C***49**, 955 (1994).
- [28] J.M. Udias, P. Sarriguren, E. Moya de Guerra, E. Garrido e J.A. Caballero *Spectroscopic Factors in  $^{40}\text{Ca}$  and  $^{208}\text{Pb}$  from  $(e, e'p)$ : Fully Relativistic Analysis* - *arXiv:nucl-th/9310004*
- [29] Y. Jin, D.S. Onley e L.E. Wright, *Phys. Rev. C***45**, 1311 (1992).
- [30] G.J. Kramer, *Ph.D. Dissertation, University of Amsterdam (1990)*
- [31] G.J. Wagner *Nuclear Structure at High Spin, Excitation and Momentum Transfer* (H. Mann ed., *AIP Conf. Proc. No 142*, (AIP, New York, 1982), pág. 200)
- [32] C.M. Spaltro, H.P. Blok, E. Jans, L. Lávikás, M. van der Schaar, G. van der Steenhoven e P.K.A. de Witt Huberts, *Phys. Rev. C***48**, 2385 (1993)
- [33] J.-K. Zhang e D. S. Onley *Phys. Rev. C***49**, 762 (1994)
- [34] D.S. Onley, *Notes on Electron Scattering and Radiation - Prepared for seminars at IFUSP (1976)*
- [35] J.F. Ziegler, *Technical Report Yale 2726E-49 (1967)*
- [36] P.L. DeVries *A First Course in Computational Physics. Wiley - Ohio (1994)*
- [37] J.F. Prewitt e L.E. Wright *Phys. Rev. C***9**, 2033 (1974)
- [38] S.T. Tuan, L.E. Wright e D.S. Onley *Nucl. Inst. and Methods* 60, 70 (1968).
- [39] G.Q. Li, R. Machleidt, R. Fritz, H. Mütter e Y.Z. Zhuo *Relativistic microscopic description of proton-nucleus scattering at intermediate energy* - *arXiv:nucl-th/9308013*