

**Proposições e Aplicações  
Considerando o Método  
de Galerkin Livre de Elementos**

Universidade Federal de Santa Catarina  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

**Proposições e Aplicações Considerando o Método de  
Galerkin Livre de Elementos**

Tese Submetida à Universidade Federal de Santa Catarina como  
parte dos requisitos para a obtenção do grau de Doutor em  
Engenharia Mecânica

Rodrigo Rossi

Florianópolis, Junho de 2005

Universidade Federal de Santa Catarina  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

**Proposições e Aplicações Considerando o Método de Galerkin  
Livre de Elementos**

Rodrigo Rossi

Esta tese foi julgada adequada para a obtenção do título de

**Doutor em Engenharia**

Especialidade Engenharia Mecânica, sendo aprovada em sua forma final

---

Marcelo Krajnc Alves, Ph.D.

Orientador

---

José Antônio Bellini da Cunha Neto, Dr.

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

**Banca Examinadora**

---

Marcelo Krajnc Alves, Ph.D.

Presidente da banca examinadora

---

Heraldo S. Costa Mattos, Dr.

Membro da banca examinadora - Relator

---

José Carlos Pereira, Dr.

Membro da banca examinadora

---

Rubens Sampaio, Ph.D.

Membro da banca examinadora

---

Hazim Ali Al-Qureshi, Ph.D.

Membro da banca examinadora

*"Uma mente que se abre a uma  
nova idéia, jamais retorna ao  
seu tamanho original."  
Albert Einstein*



## Dedicatória

à minha mãe  
e ao meu pai (*in memoriam*)

## Agradecimentos

Ao professor, orientador e grande amigo Marcelo pelo suporte técnico e pelo excelente convívio, sem os quais o sucesso deste trabalho não seria possível;

Ao CNPq pelo apoio financeiro nestes quatro anos de trabalho;

Aos meus colegas e amigos de laboratório João Carlos Jr., Hilbeth, Lindaura, Raimundo, Oscar e Cláudio pelo excelente convívio e camaradagem;

Aos meus irmãos Evandro, Daniel e à minha mãe Deomar pelo incentivo e apoio constante;

E em especial à minha esposa Daniele pelo apoio, carinho e cumplicidade durante esta fase de nossas vidas.

# Conteúdo

<b>Lista de Figuras</b>	<b>xi</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xvi</b>
<b>Nomenclatura</b>	<b>xvii</b>
<b>Resumo</b>	<b>xxv</b>
<b>Abstract</b>	<b>xxvii</b>
<b>Apresentação do trabalho</b>	<b>xxix</b>
<b>1 O método de Galerkin livre de elementos modificado</b>	<b>1</b>
1.1 Introdução . . . . .	1
1.2 Aproximação por Mínimos Quadrados Móveis . . . . .	4
1.2.1 PuFem . . . . .	6
1.2.2 PuFem estendido . . . . .	8
1.3 Método de Galerkin livre de elementos modificado . . . . .	11
1.3.1 Distribuição das partículas EFG . . . . .	12
1.4 Algoritmo de cobertura do domínio . . . . .	14
1.5 Transição das funções de forma EFG para EPF . . . . .	15
1.6 MEFG aplicado para problemas elásticos com pequenas deformações . . . . .	19
1.6.1 Definição do problema . . . . .	19
1.6.2 Discretização espacial . . . . .	20
1.6.3 Medidas de erro . . . . .	22
1.7 Resultados . . . . .	23
1.7.1 Viga cantilever . . . . .	23
1.7.2 Placa infinita com furo . . . . .	24
1.7.3 Perda de precisão na integração . . . . .	28
1.7.4 Outros casos rodados . . . . .	29
1.8 Conclusões parciais . . . . .	30
<b>2 Estimadores de erro e refino aplicados ao MEFG</b>	<b>31</b>
2.1 Introdução . . . . .	31

2.2	Considerações iniciais sobre estimadores de erro . . . . .	32
2.2.1	Determinação do erro . . . . .	33
2.3	Estratégia de refino . . . . .	34
2.3.1	Algoritmo de Refino . . . . .	35
2.4	Estimativa da solução melhorada - 1 <sup>a</sup> estratégia . . . . .	36
2.4.1	Exemplos . . . . .	40
2.5	Estimativa da solução melhorada - 2 <sup>a</sup> estratégia . . . . .	44
2.5.1	Definição das regiões . . . . .	44
2.5.2	Determinação de $\sigma^p$ . . . . .	45
2.5.3	Determinação de $\bar{s}$ . . . . .	46
2.5.4	Exemplos . . . . .	47
2.6	Conclusões parciais . . . . .	50
<b>3</b>	<b>Análise do MEEG sob deformações finitas</b>	<b>52</b>
3.1	Modelos constitutivos elastoplásticos baseados em formulação hiperelástica . . . . .	53
3.1.1	Decomposição multiplicativa do tensor gradiente de deformação . . . . .	53
3.1.2	Pares conjugados de tensão e deformação . . . . .	55
3.1.3	Lei constitutiva hiperelástica, potencial de energia livre e dissipação . . . . .	56
3.2	O problema de valor inicial elastoplástico . . . . .	59
3.2.1	Aproximação pela metodologia <i>operator split</i> . . . . .	60
3.2.2	Predição elástica . . . . .	60
3.2.3	Correção plástica . . . . .	61
3.3	Problema de valor de contorno global . . . . .	62
3.3.1	Formulação forte: Configuração de referência. . . . .	63
3.3.2	Formulação fraca do problema: Configuração de referência . . . . .	64
3.4	Formulação incremental . . . . .	64
3.4.1	Linearização e método de Newton . . . . .	65
3.4.2	Notas sobre a determinação de $\mathbb{A}$ . . . . .	66
3.5	Definição do modelo . . . . .	68
3.5.1	Procedimento local . . . . .	69
3.5.2	Solução do sistema de equações não lineares . . . . .	71
3.6	Aspectos computacionais relacionados ao MEEG . . . . .	75
3.6.1	Particularidades axissimétricas . . . . .	76
3.6.2	Forças internas e externas . . . . .	77
3.7	A equação de equilíbrio MEEG . . . . .	78
3.7.1	Linearização e método de Newton . . . . .	78
3.8	Travamento volumétrico . . . . .	80
3.8.1	Implementação do $\bar{\mathbf{F}}$ . . . . .	81
3.9	Exemplos . . . . .	84
3.9.1	Deformações hiperelásticas . . . . .	84
3.9.2	Casos multiaxiais . . . . .	86
3.10	Conclusões parciais . . . . .	97

<b>4</b>	<b>Contato Unilateral em Grandes Deformações</b>	<b>99</b>
4.1	Definição do problema . . . . .	100
4.1.1	Formulação forte . . . . .	100
4.1.2	Definição da função <i>gap</i> . . . . .	101
4.1.3	Formulação fraca . . . . .	101
4.1.4	Método de Newton . . . . .	103
4.2	Imposição das condições essenciais . . . . .	104
4.2.1	Procedimento de discretização via EFG . . . . .	104
4.3	Imposição dos termos de contato e atrito . . . . .	105
4.3.1	Contato Normal - condição de impenetrabilidade . . . . .	106
4.3.2	Contato Tangencial . . . . .	107
4.4	Algoritmo geral . . . . .	110
4.5	Exemplos . . . . .	112
4.5.1	Deslizamento de um bloco elástico . . . . .	112
4.5.2	Esmagamento de um cilindro . . . . .	113
4.5.3	Esmagamento de uma seção plana . . . . .	116
4.5.4	Forjamento a frio de um componente . . . . .	118
4.6	Conclusões parciais . . . . .	121
<b>5</b>	<b>Compactação de materiais porosos</b>	<b>122</b>
5.1	Modelos constitutivos aplicados na Metalurgia do Pó . . . . .	122
5.2	Aspectos fenomenológicos na compactação na Metalurgia do Pó . . . . .	124
5.3	Visão geral sobre os modelos constitutivos usados na Metalurgia do pó no contexto de materiais granulares . . . . .	125
5.4	Dependência do modelo da densidade relativa . . . . .	128
5.4.1	Implicações da dependência da densidade relativa no algoritmo . . . . .	129
5.5	Modelo de <i>Cap</i> $C^1$ . . . . .	130
5.5.1	Formas básicas e taxas de evolução . . . . .	130
5.5.2	Evolução e atualizações - problema de valor inicial elastoplástico . . . . .	134
5.5.3	Determinação dos módulos tangentes consistentes $\tilde{\mathbb{D}} = \mathbb{D}^{ep}$ . . . . .	141
5.6	Exemplos . . . . .	145
5.6.1	Compactação de uma bucha plana . . . . .	145
5.6.2	Compactação de um flange . . . . .	147
5.6.3	Compactação de um perfil de uma ferramenta de corte . . . . .	153
5.7	Conclusões parciais . . . . .	156
	<b>Conclusão</b>	<b>158</b>
	Sugestões para trabalhos futuros . . . . .	160
<b>A</b>	<b>Efeito do gradiente de dano na teoria de Lemaitre</b>	<b>172</b>
A.1	Introdução . . . . .	172
A.2	Equações constitutivas e leis de evolução . . . . .	172

A.3	Função de escoamento $\mathcal{F}$ . . . . .	174
A.4	Estado de dano crítico . . . . .	175
A.5	Algoritmo . . . . .	175
A.6	Exemplos . . . . .	175
A.6.1	Estado de tensão unidimensional . . . . .	175
A.6.2	Placa com rasgo . . . . .	176
<b>B</b>	<b>Introdução de uma função de peso do tipo bolha</b>	<b>179</b>
B.1	Função de peso tipo bolha . . . . .	179
B.2	Exemplos . . . . .	181
<b>C</b>	<b>Método de Newton</b>	<b>183</b>
<b>D</b>	<b>Funções tensoriais isotrópicas</b>	<b>187</b>
D.1	Funções tensoriais isotópicas de um simples argumento . . . . .	187
D.2	A função exponencial tensorial . . . . .	189
D.2.1	Algumas propriedades da função exponencial tensorial . . . . .	189
D.2.2	Integração via mapeamento exponencial . . . . .	190
<b>E</b>	<b>Mapeamentos de retorno usados no Capítulo 5</b>	<b>192</b>
E.1	Caso 1: mapeamento de retorno para $\mathcal{F}_1$ . . . . .	192
E.1.1	Determinação da matriz tangente local para o caso 1 . . . . .	195
E.2	Caso 2: mapeamento de retorno para $\mathcal{F}_2$ . . . . .	196
E.2.1	Determinação da matriz tangente local para o caso 2 . . . . .	200
E.3	Caso 3: mapeamento de retorno para $\mathcal{F}_3$ . . . . .	201
E.3.1	Determinação da matriz tangente local para o caso 3. . . . .	204

# Lista de Figuras

1.1	Suporte típico de $\Phi_I(\vec{x})$ . . . . .	6
1.2	Suporte típico PuFem para um dado $\vec{x}$ . . . . .	7
1.3	Suporte estendido - EPuFem . . . . .	9
1.4	Funções de forma EPuFe globais. . . . .	9
1.5	Suporte PuFem estendido para uma malha quadrangular. . . . .	10
1.6	Exemplo de uma distribuição de partículas para bases intrínsecas aumentadas: (a) Distribuição; (b) Função peso do tipo bolha. . . . .	10
1.7	Exemplo de cobertura proveniente do MEFG. . . . .	12
1.8	Raio da função de peso EFG. . . . .	13
1.9	Determinação do raio admissível. . . . .	15
1.10	(a) Domínio unidimensional coberto por funções de peso; (b) transição para $k=0$ ; (c) transição para $k=1$ ; (d) transição para $k=2$ . . . . .	16
1.11	Funções de forma globais e região de transição para $k = 1$ . (a) Malha de in- tegração e descrição das partículas; (b)-(i) funções peso; Partição da unidade; (k)-(r) funções de peso resultantes. . . . .	17
1.12	Continuação da Fig. 1.11. . . . .	18
1.13	Modelo do problema da viga cantilever e malhas de integração: (a) malha de integração com 64 células/51 partículas; (b) 256/165; (c) 1024/585 e (d) 4096/2193. . . . .	24
1.14	Exemplo de cobertura usada no problema da viga. (a) Malha de integração; (b) cobertura e (c) representação simplificada. . . . .	24
1.15	Resultados da análise para o problema da viga cantilever. . . . .	25
1.16	Resultado para deslocamento em $y$ , $u_y$ , em $x = 0$ . . . . .	26
1.17	Modelo da placa infinita com furo. . . . .	26
1.18	Exemplo de cobertura usada no problema da placa infinita com furo. (a) Malha de integração; (b) cobertura e (c) representação simplificada. . . . .	27
1.19	Resultados da análise para o problema da placa infinita . . . . .	27
1.20	Modelo uniaxial. . . . .	28
1.21	Malha de integração estruturada e cobertura. . . . .	28
1.22	Resultado para o campo $\sigma_{xx}$ - malha de integração estruturada. . . . .	28
1.23	Malha de integração não estruturada e cobertura. . . . .	29
1.24	Resultado para o campo $\sigma_{xx}$ - malha de integração não estruturada. . . . .	29

2.1	Refino e compatibilidade da malha de integração. . . . .	35
2.2	Procedimento de suavização do tipo Laplace. . . . .	36
2.3	Efeito do parâmetro $\alpha_2$ na tração para $x = 5$ . . . . .	41
2.4	Malha de integração inicial (a) e refinada (b) para $\gamma = 1.5\%$ . . . . .	42
2.5	$\sigma_{xx}^* \times \sigma_{xx}$ para $\phi = 90^\circ$ . . . . .	42
2.6	Análise de convergência . . . . .	43
2.7	Refino de um componente mecânico complexo para $\gamma = 3.0\%$ - (a) malha inicial; (b) malha final. . . . .	43
2.8	Tensão equivalente de von Mises. . . . .	44
2.9	Região tipo partícula $\Omega_p$ . . . . .	45
2.10	Variação de $\sigma_{xx}^*$ com relação a $\bar{s}$ . . . . .	47
2.11	Refino da placa infinita para $\gamma = 1.5\%$ - (a) malha inicial; (b) malha final. . . . .	48
2.12	Detalhes da análise - (a) Comparativo entre as convergências da estratégia 1 e 2; (b) Tensão melhorada para $\phi = 90^\circ$ - estratégia 2. . . . .	48
2.13	Refino de um componente mecânico e sua distribuição de partículas para $\gamma = 2.25\%$ : (a) e (b) Malha inicial e distribuição de partículas; (c) e (e) malhas finais e (d) e (f) distribuição das partículas. . . . .	49
2.14	Convergência para ambos os casos. . . . .	50
2.15	Tensão equivalente de von Mises. . . . .	50
3.1	Modelo cinemático de deformação. . . . .	54
3.2	Configurações de deformações entre o incremento $n$ e $n + 1$ . . . . .	63
3.3	Vetores tração e normais em $\Omega_o$ e $\Omega_t$ . . . . .	64
3.4	Descrição incremental. . . . .	65
3.5	Modelo axissimétrico. . . . .	69
3.6	(a) Modelo uniaxial sobre a hipótese axissimétrica e (b) modelo de cisalhamento puro sobre a hipótese de EPD. . . . .	85
3.7	Resultado analítico e numérico para o problema de tensão-compressão uniaxial. . . . .	85
3.8	Resultado analítico e numérico para o problema de cisalhamento puro. . . . .	86
3.9	Modelo axissimétrico - Malha de integração usada no FEM e distribuição de partículas para o MEFG. . . . .	87
3.10	Comparação entre as deformadas obtidas pelo MEF e MEFG em dois estágios do processo. . . . .	88
3.11	Deformação plástica acumulada para as diferentes implementações. . . . .	88
3.12	Força axial $\times$ deslocamento na parte superior do corpo. . . . .	89
3.13	Discretização usada para o caso de meia simetria. . . . .	90
3.14	Força axial $\times$ deslocamento na parte superior do corpo - 1/2 simetria. . . . .	90
3.15	Malhas de integração utilizadas para a análise de problema de estiramento de um corpo sob EPD. . . . .	91
3.16	Malhas deformadas para a análise de elementos finitos tri6 considerando a orientação O1 e O2. . . . .	92
3.17	Força axial $\times$ deslocamento para a análise de elementos finitos tri6. . . . .	92



3.18	Malhas deformadas para a análise considerando o MEFG tri3 para a orientação O1 e O2. . . . .	93
3.19	Força axial $\times$ deslocamento para a análise por MEFG tri3. . . . .	94
3.20	Modelo para o corpo com duas fissuras. . . . .	95
3.21	Diagrama comparativo entre a força axial $\times$ deslocamento para as diversas propostas. . . . .	95
3.22	Membrana de Cook . . . . .	96
3.23	Deslocamento do ponto superior da membrana de Cook. . . . .	97
4.1	Modelo de contato em grandes deformações - problema de Signorini. . . . .	102
4.2	Força normal $\vec{Q}_\nu^c$ e tangencial $\vec{Q}_T^c$ que surgem no contato. . . . .	103
4.3	Regularização do modelo de Coulomb via penalidade. . . . .	108
4.4	Geometrias indeformadas e deformadas para o problema de deslizamento de um bloco elástico sobre uma superfície rígida: (a)-(b) Malhas de integração; (c)-(d) disposição das partículas. . . . .	112
4.5	Trações de contato na interface para o problema de deslizamento de um bloco elástico. . . . .	113
4.6	Modelo usado para o exemplo esmagamento de um cilindro: (a) Modelo; (b) Malha de integração e (c) distribuição das partículas. . . . .	114
4.7	Saídas deformadas para o problema esmagamento de um cilindro considerando a influência do efeito de travamento. (a)-(d) deformadas sem o uso do $\bar{\mathbf{F}}$ ; (e)-(h) deformadas com o uso do $\bar{\mathbf{F}}$ e (i) superposição das deformadas do caso (c), em vermelho para realçar, e (g). . . . .	115
4.8	Força total desenvolvida na parede do molde. (a) Força Normal; (b) Força Tangencial. . . . .	115
4.9	Saídas deformadas para o problema esmagamento de uma secção plana considerando a influência do efeito de travamento. (a)-(d) deformadas sem o uso do $\bar{\mathbf{F}}$ ; (e)-(h) deformadas com o uso do $\bar{\mathbf{F}}$ e (i) superposição das deformadas do caso (c), em vermelho para realçar, e (g). . . . .	117
4.10	Força total desenvolvida na parede do molde. (a) Força Normal; (b) Força Tangencial. . . . .	117
4.11	Dimensões iniciais da préforma e do molde. . . . .	118
4.12	Deformadas em vários pontos do processo considerando ou não o efeito da metodologia antitravamento. . . . .	119
4.13	Deformação plástica acumulada para o problema de forjamento a frio de um componente. . . . .	120
4.14	Tensão equivalente de von Mises para o problema de forjamento a frio de um componente. . . . .	120
4.15	Força de forjamento. . . . .	121
5.1	Modelos utilizados para materiais granulares e em particular para a compactação na Metalurgia do Pó. . . . .	126

5.2	Variação do módulo de elasticidade com relação a densidade relativa. . . . .	129
5.3	Cap suave composto por três superfícies. . . . .	130
5.4	Casos de carregamento. . . . .	132
5.5	Estratégia para a determinação da superfície ativa caso $\mathcal{F}_1 > 0$ . . . . .	135
5.6	Mapeamento de retorno caso $\mathcal{F}_1 \leq 0$ e $\mathcal{F}_2 > 0$ ou $\mathcal{F}_3 > 0$ . . . . .	135
5.7	Modelo usado na análise da bucha plana: (a) Malha de integração e molde; (b) disposição das partículas EFG. . . . .	145
5.8	Resultados para a compactação da bucha plana. (a) Força $\times$ deslocamento; (b) Variação da porosidade ao longo da altura para a configuração deformada de 10 mm e para um raio de 10.5 mm. . . . .	146
5.9	Compactação da bucha plana. Isofaixas de densidade relativa para várias posições da parede superior do molde. . . . .	147
5.10	Saída de cisalhamento $\sigma_{rz}$ para 11 mm. . . . .	147
5.11	Modelo usado na análise do flange: (a) Malha de integração e molde; (b) disposição das partículas EFG. . . . .	148
5.12	Flange deformada. (a) Malha de integração e (b) distribuição de partículas EFG - Linhas de corte indicando as posições para a leitura da densidade relativa. . . . .	149
5.13	Resultados para a compactação do flange. Variação da densidade relativa para vários cortes. . . . .	150
5.14	Compactação do flange. Isofaixas de densidade relativa para várias posições do molde. . . . .	151
5.15	Comparativo entre as forças normalizadas entre os vários autores e o presente trabalho. . . . .	151
5.16	Flange deformada para o caso de movimento apenas da parede inferior do molde. . . . .	152
5.17	Compactação do flange. Isofaixas de densidade relativa para o caso de movimento apenas da parede inferior do molde. . . . .	152
5.18	Modelo, malha de integração e distribuição de partículas usadas na compactação de um perfil de uma ferramenta de corte. . . . .	153
5.19	Malhas de integração deformadas para as várias configurações de cinemática do molde simuladas. . . . .	154
5.20	Resultados de densidade relativa ao longo de cada linha de corte. . . . .	155
5.21	Forças desenvolvidas sobre a parede superior do molde para cada cinemática do molde. . . . .	155
5.22	Isofaixas de densidade relativa para as diversas cinemáticas do molde. . . . .	156
A.1	Modelo uniaxial. . . . .	176
A.2	Endurecimento analítico $\times$ numérico. . . . .	176
A.3	Modelo da placa com rasgo . . . . .	176
A.4	Malha de integração e cobertura. . . . .	177
A.5	Saída de dano para $k_D = 0$ . . . . .	177
A.6	Saída de dano para $k_D = 300$ . . . . .	178
A.7	Saída de deformação plástica acumulada para $k_D = 0$ . . . . .	178

A.8	Dependência da evolução do dano com relação ao parâmetro $k_D$ . . . . .	178
B.1	Gráfico da função bolha no domínio padrão. . . . .	180
B.2	Célula de integração e suporte estendido para a função peso tipo $w^{Bubble}$ . . . . .	181
B.3	Análise de convergência: (a) Viga cantilever; (b) Placa infinita com furo. . . . .	181
B.4	Distribuição das partículas para uma malha de integração. . . . .	182

# Lista de Tabelas

1.1	Algoritmo de cobertura do domínio . . . . .	14
1.2	Exemplo de perda de condicionamento de $\mathbf{A}$ . . . . .	19
2.1	Análise paramétrica para $\bar{s} = 1.1$ . . . . .	40
2.2	Análise paramétrica para $\bar{s} = 1.5$ . . . . .	41
2.3	Análise paramétrica para $\bar{s} = 2.0$ . . . . .	41
2.4	Análise paramétrica para determinação de $\bar{s}$ . . . . .	46
3.1	Cômputos requeridos em cada ponto . . . . .	70
3.2	Algoritmo de mapeamento de retorno . . . . .	71
3.3	Algoritmo de Newton aplicado ao sistema de equações do algoritmo de mapeamento de retorno . . . . .	73
3.4	Método de Newton para o problema global . . . . .	79
3.5	Determinação do módulo tangente global $\mathbb{A}$ . . . . .	80
4.1	Algoritmo para o modelo de Coulomb regularizado . . . . .	109
4.2	Algoritmo geral . . . . .	111
5.1	Alguns valores dos coeficientes da função de escoamento para materiais porosos . . . . .	128
5.2	Algoritmo de Newton para a determinação de $I_1^c$ . . . . .	134
5.3	Identificação da superfície ativa e mapeamentos de retorno . . . . .	136
5.4	Algoritmo de mapeamento de retorno para o Caso 1 . . . . .	138
5.5	Algoritmo de mapeamento de retorno para o Caso 2 . . . . .	140
5.6	Algoritmo de mapeamento de retorno para o Caso 3 . . . . .	141
E.1	Algoritmo de mapeamento de retorno para o Caso 1 . . . . .	196
E.2	Algoritmo de mapeamento de retorno para o Caso 2 . . . . .	200
E.3	Algoritmo de mapeamento de retorno para o Caso 3 . . . . .	204

# Nomenclatura

- $(\bullet)^D$  parte desviadora de  $\bullet$
- $(\bullet)^e$  parte elástica de  $\bullet$
- $(\bullet)^p$  parte plástica de  $\bullet$
- $(\bullet)^{teste}$  valor avaliado no estado teste
- $(\bullet)_{iso}$  parte isocórica de  $\bullet$
- $(\bullet)_{n+1}, (\bullet)_n$  valor avaliado no instante  $n+1$  e  $n$
- $(\bullet)_v$  parte volumétrica de  $\bullet$
- $\alpha$  variável associada ao endurecimento isotrópico - deformação
- $\alpha, \beta, \gamma$  parâmetros materiais associados ao envelope exponencial de Drucker-Prager
- $\alpha_1, \alpha_2$  constantes
- $\bar{\Phi}_I$  funções de forma globais obtidas com um suporte  $\bar{s}$
- $\bar{\sigma}_y$  tensão de escoamento do modelo de materiais porosos
- $\bar{n}$  número de partículas pertencentes ao suporte de  $\bar{\Phi}_I$
- $\bar{r}_I$  raio que define o suporte da função  $w^{EFG}$  centrada em  $\vec{x}_I$
- $\bar{s}$  suporte das funções de forma utilizadas de  $\bar{\Phi}_I$
- $\chi$  intersecção do *Cap* de compressão com o eixo hidrostático
- $\delta\vec{u}$  campo de deslocamentos virtuais
- $\delta\vec{u}^g$  vetor de deslocamentos virtuais global
- $\delta$  parâmetro material
- $\Delta\lambda$  incremento do multiplicador plástico
- $\delta_{ij}$  delta de kronecker
- $F^c$  trabalho virtual referente a imposição do contato e atrito

$F^u$	trabalho virtual referente a imposição das condições de contorno essenciais
$F$	trabalho virtual do problema de grandes deformações
$F_\nu^c$	trabalho virtual referente a imposição do contato normal
$F_T^c$	trabalho virtual referente a imposição do atrito
$\dot{\gamma}$	multiplicador da lei de atrito
$\dot{\lambda}$	multiplicador plástico
$\epsilon_u$	penalidade associada a imposição das condições de contorno essenciais
$\epsilon$	parâmetro de extensão
$\epsilon_\nu$	penalidade associada a imposição do termo de contato normal
$\epsilon_T$	penalidade associada a imposição do termo de atrito
$\eta_E$	erro relativo com relação a norma de energia
$\eta_{L_2}$	erro relativo com relação a norma de deslocamentos $L_2$
$\eta$	densidade relativa
$\eta_o$	densidade relativa inicial
$\Gamma_c$	fronteira de contato
$\Gamma_E$	contorno com condições essenciais prescritas
$\Gamma_N$	contorno com condições naturais prescritas
$\Gamma_{obs}$	fronteira do obstáculo
$\Gamma_o^c$	contorno inicial com condições de contato prescritas
$\Gamma_o^t$	contorno inicial com condições de trações prescritas
$\Gamma_o^u$	contorno inicial com condições de deslocamentos prescritos
$\Gamma_t$	contorno com condições de trações prescritas
$\Gamma_u$	contorno com condições de deslocamentos prescritos
$\gamma$	valor do erro global estabelecido <i>a priori</i> a ser alcançado ou deformação de cisalhamento
$\kappa$	módulo volumétrico
$\lambda_z$	estiramento na direção de $z$
$\lambda_\nu$	multiplicador de Lagrange a imposição do termo de contato normal

$\lambda_\nu^h$	aproximação para $\lambda_N$
$\lambda_I$	autovalores relacionados a configuração de referência de $\mathbf{C}$
$\langle \bullet \rangle$	operador de Macauley
$\ \bullet\ _E$	norma de energia
$\ \bullet\ _{L_2}$	norma no espaço $L_2$
$\hat{\mathbb{D}}$	tensor de quarta ordem auxiliar
$\tilde{\mathbb{D}}$	tensor de quarta ordem associado relacionado com a parte material de $\mathbb{A}$
$\mathbb{A}$	tensor de quarta ordem associado ao módulo tangente global
$\mathbb{D}$	tensor relação constitutiva elástica de quarta ordem
$\mathbb{D}^{ep}$	tensor de quarta ordem - módulo tangente consistente elastoplástico
$\mathbb{G}, \mathbb{H}$	tensores de quarta ordem relacionadas com a parte geométrica de $\mathbb{A}$
$\mathbb{I}$	tensor identidade de quarta ordem
$\alpha_k$	conjunto de variáveis internas associadas com os mecanismos dissipativos
$\bar{\chi}$	endurecimento cinemático - <i>back stress</i>
$\bar{\tau}$	tensor tensão de Kirchoff rotacionada
$\bar{\mathbb{B}}$	método <i>B-bar</i>
$\bar{\mathbb{D}}$	taxa de deformação modificada-rotacionada
$\bar{\mathbb{F}}$	método <i>F-bar</i>
$\bar{\mathbb{W}}$	taxa de giro modificada-rotacionada
$\beta_k$	forças termodinâmicas
$\Phi^g$	matriz global das funções de forma
$\sigma$	tensor tensão de Cauchy
$\sigma^*$	tensão melhorada
$\sigma^h$	tensão aproximada oriunda do PVC
$\sigma^p$	tensão projetada
$\tau$	tensor tensão de Kirchoff
$\varepsilon$	tensor deformação infinitesimal

<b>A</b>	matriz de momento ou forma matricial de $\mathbb{A}$
<b>B</b>	matriz deslocamento-deformação - derivadas das funções de forma
<b>C</b>	tensor de Cauchy-Green à direita
<b>D</b>	tensor taxa de deformação
<b>E</b>	tensor deformação de Hencky
<b>F</b>	tensor gradiente de deformação
<b>F<sub>m</sub></b>	gradiente de deformação médio
<b>F<sub>r</sub></b>	gradiente de deformação relaxado
<b>F<sub>u</sub></b>	decomposição de deformação - configuração de deformação
<b>G</b>	matriz gradiente da função de forma para o caso axissimétrico
<b>G<sup>g</sup></b>	matriz global dos gradientes das funções de forma para o caso axissimétrico
<b>H, K, M, P, Q</b>	matrizes auxiliares usados na determinação da estratégia de erro
<b>I</b>	tensor identidade de segunda ordem
<b>K</b>	matriz de rigidez
<b>K<sup>u</sup></b>	matriz de rigidez oriunda da imposição das condições de contorno essenciais via Lagrangeano aumentado
<b>K<sub>v</sub><sup>c</sup></b>	matriz de rigidez oriunda da imposição do contato normal
<b>K<sub>T</sub><sup>c</sup></b>	matriz de rigidez oriunda da imposição do termo de atrito
<b>N</b>	derivada de $\mathcal{F}$ cra $\bar{\tau}$
<b>N<sup>g</sup></b>	matriz global das funções de forma oriundas de uma aproximação linear
<b>P</b>	primeiro tensor tensão de Piola-Kirchoff (PK1)
<b>R</b>	matriz de rotação
<b>S</b>	segundo tensor tensão de Piola-Kirchoff (PK2)
<b>U</b>	tensor simétrico positivo definido à direita
<b><math>\dot{\mathcal{W}}</math></b>	taxa de trabalho por unidade de massa
$\varphi, \varphi^*$	potenciais de dissipação
<b><math>\mathcal{D}</math></b>	dissipação mecânica
<b><math>\mathcal{E}</math></b>	espaço das tensões admissíveis



$\mathcal{F}, \mathcal{F}_i$	função de escoamento, função de escoamento $i$
$\mathcal{H}$	espaço das tensões recuperadas admissíveis
$\mathcal{K}$	espaço dos deslocamentos admissíveis
$\mathcal{K}^h, \mathcal{V}^h$	espaços de aproximação
$\mathcal{V}$	espaço dos deslocamentos virtuais
$\mu$	coeficiente de Lamé
$\nu$	coeficiente de Poisson
$\Omega$	domínio
$\Omega_{obs}$	corpo obstáculo
$\Omega_o$	configuração de referência
$\Omega_t$	configuração corrente
$\partial\Omega$	contorno ou fronteira do domínio
$\phi$	ângulo para o problema da placa infinita com furo
$\Phi_I$	função de forma
$\psi$	potencial de energia livre
$\rho$	densidade de massa na configuração corrente
$\rho_m$	densidade de massa do material totalmente denso
$\rho_o$	densidade de massa na configuração de referência
$\sigma_\infty$	tensão de saturação - parâmetro material
$\sigma_y$	tensão de escoamento inicial
$\theta$	índice de efetividade
$\tilde{F}$	trabalho virtual do problema de grandes deformações com contato e atrito
$\Upsilon$	função de escorregamento - <i>slip function</i>
$\vec{b}$	força de corpo prescrita
$\vec{t}$	tração prescrita
$\vec{u}$	deslocamento prescrito
$\vec{\lambda}_u$	multiplicador de Lagrange associado a imposição das condições de contorno essenciais

$\vec{\lambda}_u^g$	vetor global dos multiplicadores de Lagrange associado a imposição das condições de contorno essenciais
$\vec{\lambda}_u^h$	aproximação para $\vec{\lambda}_u$
$\vec{\nu}$	normal externa ao obstáculo
$\vec{\varphi}$	função movimento
$\vec{a}$	vetor de coeficientes a determinar
$\vec{e}_\sigma$	erro no campo de tensões
$\vec{e}_T$	vetor tangente
$\vec{e}_u$	erro no campo de deslocamentos
$\vec{f}^{\lambda_u}, \vec{f}^u$	forças desenvolvidas na imposição das condições de contorno essenciais
$\vec{F}^\sigma, \vec{F}^t, \vec{F}^b, \vec{F}_i$	vetores auxiliares usados na determinação da estratégia de erro
$\vec{f}^{ext}$	vetor de forças externas
$\vec{f}^{int}$	vetor de forças internas
$\vec{f}_\nu^c$	força desenvolvida na imposição do contato normal
$\vec{f}_T^c$	força desenvolvida na imposição do termo de atrito
$\vec{g}$	<i>gap function</i>
$\vec{J}$	erro residual das trações prescritas
$\vec{L}_I$	lista de partículas associadas as partículas $\vec{x}_I$
$\vec{l}_I$	autovetores relacionados a configuração de referência de $\mathbf{C}$
$\vec{n}$	normal externa a $\Gamma_N$
$\vec{p}$	base intrínseca
$\vec{q}$	base de aproximação
$\vec{q}$	vetor fluxo de calor, vetor de variáveis a determinar
$\vec{Q}^c$	força desenvolvida na imposição do contato e atrito
$\vec{Q}^u$	força desenvolvida na imposição das condições de contorno essenciais
$\vec{R}$	erro residual na equação de equilíbrio
$\vec{r}$	vetor resíduo
$\vec{u}$	campo de deslocamentos

$\vec{u}^g$	vetor de deslocamentos global
$\vec{v}$	vetor velocidade
$\vec{X}$	ponto material - vetor posição material
$\vec{x}$	vetor posição espacial
$\vec{X}_I$	partícula
$\vec{x}_I$	partícula
$A, A_e$	Área da célula de integração
$A, B$	escalares usados nos modelos de materiais porosos
$a(\bullet, \bullet)$	forma bilinear
$C$	módulo de endurecimento plástico constante - parâmetro material
$C_1^e, C_2^e$	constantes
$c_f$	coeficiente de fricção
$D$	altura da viga
$E$	módulo de elasticidade longitudinal
$F_c$	função <i>Cap</i> de compressão
$F_e$	função envelope exponencial de Drucker-Prager
$F_t$	função <i>Cap</i> de tensão
$G$	módulo de cisalhamento
$H$	parâmetro material
$H(\bullet)$	função de Heaviside
$h'$	módulo de endurecimento tangente
$H^k, W_p^k$	espaço de Sobolev
$h_e^2, L_e$	valores característicos
$I$	momento de inércia da viga
$I_1$	primeiro invariante do tensor
$J$	determinante de $\mathbf{F}$
$J(\vec{a})$	norma ponderada

$J_2$	segundo invariante do tensor desviador
$J_m$	determinante de $\mathbf{F}_m$
$k$	ordem de consistência ou incremento do algoritmo
$k(\alpha)$	variável associada ao endurecimento isotrópico - tensão
$L$	comprimento da viga
$l$	comprimento de arco
$l(\bullet)$	forma funcional
$n$	número de partículas pertencentes ao suporte da função peso
$n_T$	número total de partículas ou nós
$P$	carregamento transversal da viga
$p$	parte hidrostática da tensão
$Q_\nu^c$	módulo da força desenvolvida na imposição do contato normal
$Q_T^c$	módulo da força desenvolvida na imposição do atrito
$R$	raio do <i>Cap</i> de compressão
$r$	raio parametrizado, entre $[0,1]$ , da função peso $w^{EFG}$
$r_{I_{adm}}$	raio admissível
$r_{I_{max}}$	máximo raio entre as partículas da lista $\vec{L}_I$
$s$	entropia específica
$s$	multiplicador que regula o tamanho do suporte
$T$	intersecção do <i>Cap</i> de tensão com o eixo hidrostático
$T$	temperatura absoluta
$t$	tempo ou espessura da viga
$u^h$	função de aproximação
$u_I$	dados discretos
$w$	função peso
$W, D$	parâmetros materiais associados ao modelo de <i>Cap</i>
$w^{EFG}$	função peso EFG
$w^{EPF}$	função peso EPF
$u_T$	projecção de $\vec{u}$ em $\vec{e}_T$

# Resumo

Neste trabalho são apresentadas algumas propostas e aplicações, dentro da área da *mecânica computacional*, considerando o *método de Galerkin livre de elementos*. Este método pertence a classe de métodos chamados de livres de malha, *mesh-free methods*. De modo resumido, estes métodos consideram a construção de funções de forma, de suporte compacto, que dependem fracamente da distribuição dos pontos de aproximação, nós ou partículas, e também são pouco dependentes da malha de integração utilizada.

Mais especificamente, é proposto o *método de Galerkin livre de elementos modificado*, que considera a construção das funções de forma baseadas na distribuição de diferentes funções peso sobre a malha de integração e apresenta uma contribuição na imposição das condições de contorno essenciais. Estimadores de erro e estratégias de refino da malha de integração são propostos, de forma a encontrar malhas de integração adequadas para problemas lineares, no contexto da mecânica dos sólidos, considerando a hipótese de pequenas deformações. Porém, o fato de possuir a propriedade de imposição das condições de contorno de forma direta, como feito no *método dos elementos finitos*, possibilita a aplicação deste método de aproximação em diversas áreas da engenharia, matemática ou física, principalmente para problemas não lineares. Dentro desta área de problemas não lineares, é apresentada uma investigação do método proposto sob deformações finitas, considerando um material elastoplástico, de fase elástica dada pelo modelo de *Hencky* e com fase plástica dada por um modelo do tipo  $J_2$ , com endurecimento isotrópico não linear. Investigações sob o aparecimento do fenômeno de travamento volumétrico, e de seu controle, também são realizadas considerando problemas axissimétricos e também de estado plano de deformações.

Já o *método de Galerkin livre de elementos* usual é aplicado em problemas de conformação em molde. Problemas de *forjamento* a frio, considerando um material denso, e de *compactação*, dentro do enfoque da Metalurgia do Pó, são investigados. Para a abordagem destes dois problemas é considerada também uma formulação de contato, que considera a hipótese de *Signorini*.

Especial atenção é dada para o problema da simulação do processo de compactação a frio, e em molde, de componentes mecânicos. Este tipo de processo parte de um pó desagregado, que é colocado em uma matriz e é então submetido a altos níveis de deformação. Este tipo de material experimenta redução de volume e, portanto, aumento da densidade. Tais características do processo implicam em uma modelagem do material que leva em consideração uma descrição em deformações finitas e um modelo constitutivo que capture, de forma adequada, as não linearidades envolvidas no processo. O modelo constitutivo adotado para a simulação do processo de compactação faz parte dos chamados modelos do tipo *Cap*. O modelo constitutivo apresentado

neste trabalho é composto por três superfícies de escoamento completamente suaves e leva em consideração o acoplamento de alguns parâmetros com a porosidade relativa. Novamente, são apresentados vários exemplos de modo a averiguar a metodologia proposta.

# Abstract

In this work some propositions and applications of the *element-free Galerkin method* are presented, inside of the *computational mechanics* field. Such method belongs to the class of the so called *mesh-free methods*. In summarized words, these methods consider the construction of shape functions, which has compact support and are weakly dependent on the distribution of the sample points, nodes or particles, and also experiment low dependence of the integration mesh used.

More specifically, the *modified element-free Galerkin method*, proposed in this work, considers the construction of the shape functions based in the distribution of different weight functions on the integration mesh and presents a contribution in the imposition of the essential boundary conditions. Error estimators and h-refinement strategies of the integration mesh are considered, as a way to find adjusted integration meshes for linear problems, in the context of *solid mechanics*, considering the hypothesis of small deformations. However, the fact to possess the direct imposition of the essential boundary conditions property, similar as in the *finite element method*, become possible the application of this method in diverse areas of engineering, mathematics or physics, mainly for non-linear problems. Inside of this area of non-linear problems, an investigation of the proposed method under finite deformations is presented, considering an elasto-plastic material, of elastic phase given by the *Hencky* model and with plastic phase given by a  $J_2$  model, with non-linear isotropic hardening. Analyses concerning the appearance of the *volumetric locking* phenomenon, and its control, are also carried out considering problems under axisymmetric and plain strain state conditions.

The usual *element-free Galerkin method* is applied in problems considering conformation inside a mold. Cold forging problems, taking into consideration a fully dense material and also powder compaction problems, inside of the approach of the Powder Metallurgy, are investigated. It is also taken into account a contact formulation, which considers the *Signorini* hypothesis.

Special attention is given for powder compaction simulation problem of mechanical components. This type of process begins with a disaggregated powder, which it is placed into a mold, and then is submitted to high levels of deformation. These types of materials experiments volume reduction and, therefore, density increasing. Such process characteristics imply in a modeling that take in consideration a description in finite deformations and a constitutive material model that captures, in a correct form, the non-linearity involved in the process. The adopted constitutive material model for the simulation of the powder compaction process belongs to the class of the so called *Cap* models. The constitutive material model presented in this work is composed by three completely smooth yielding surfaces and takes in consideration

the coupling of some material parameters with relation to the relative porosity. Again, some examples are presented in order to assess the proposal methodology.



# Apresentação do trabalho

Ao recordar do início desta tese, por volta de quatro anos atrás, vêm a mente a vontade de trabalhar dentro da área de grandes deformações com ênfase na conformação de componentes mecânicos.

No contexto de produzir algo novo, e então validar o trabalho de doutorado, partiu-se para o estudo de métodos numéricos emergentes, mesh-free e meshless methods, que possuíam vantagens, segundo vários autores, quando aplicados para a simulação em deformações finitas e comparados com os métodos numéricos tradicionais, método dos elementos finitos principalmente.

Durante o estudo destes métodos numéricos vislumbrou-se a possibilidade de propor uma metodologia diferente para a imposição das condições de contorno essenciais dentro do enfoque do *Método de Galerkin Livre de Elementos, Element-Free Galerkin Method*. Esta proposta foi implementada computacionalmente, atribuindo-a o nome de *Método de Galerkin Livre de Elementos Modificado, Modified Element-Free Galerkin Method*, e foi bastante explorada dentro de enfoque de pequenas deformações para problemas elásticos e elastoplásticos acoplados com dano. Também foram propostos estimadores de erro e estratégias de refino da malha de integração considerando-se problemas elásticos sob pequenas deformações.

Ao final do segundo ano, mais tempo foi dedicado ao estudo do tema de deformações finitas com vistas a sua aplicação a conformação de componentes mecânicos em molde. Diferentemente do que acontece na área de pequenas deformações, em grandes deformações existe um número bastante grande de diferentes propostas para a abordagem deste tema. Um período de maturação foi necessário para que fosse feita a escolha da proposta mais adequada para a implementação. Dentre as diferentes propostas foi escolhida uma configuração *Lagrangeana Total* juntamente com um par conjugado de tensão-deformação, que é a tensão rotacionada de *Kirchoff* e da medida logarítmica de deformação, que por sua vez permitiu o uso do chamado mapeamento exponencial. Esta escolha mostrou-se bastante adequada como é demonstrado ao longo do texto. Ao utilizar um modelo elasto-plástico do tipo  $J_2$  juntamente com as hipóteses de estado plano de deformações e de problemas axissimétricos, uma análise do efeito do fenômeno do travamento volumétrico foi também proposta.

Já o último ano do trabalho foi dedicado ao estudo e implementação do problema de contato unilateral com atrito, para a simulação de conformação em molde, e também a modelos constitutivos apropriados para a análise de compactação de materiais porosos dentro do enfoque da Metalurgia do Pó. Este problema em particular recebeu maior atenção neste último ano de trabalho, embora tenham sido apresentados alguns casos de simulação de forjamento a frio para

materiais densos e em molde, devido a quantidade de não-linearidades envolvidas no processo.

A fim de contextualizar este trabalho de uma forma mais ampla a tese foi organizada em cinco capítulos principais e em alguns apêndices. Cada um destes capítulos descreve uma etapa cronológica, como descrito acima. A seguir é apresentado um pequeno resumo de cada um dos capítulos desta tese.

O **Capítulo 1** trata da descrição detalhada do *Método de Galerkin Livre de Elementos Modificado*. Este método caracteriza-se pelo uso de duas funções peso, chamadas de EPUFe e EFG, que são devidamente distribuídas sobre o domínio, de modo a obter a propriedade de kronecker delta na fronteira onde as condições essenciais são prescritas. Assim, tais condições de contorno podem ser impostas diretamente, como feito, por exemplo, no método de elementos finitos. O método usa malha de integração composta de células de integração triangulares. São investigados vários aspectos inerentes ao método proposto, como a perda de regularidade na região de transição EPUFe-EFG, a sensibilidade da solução com relação ao tamanho do suporte de influência e ao parâmetro de extensão e também a sua dependência quanto ao número de pontos de integração utilizado.

No **Capítulo 2** são propostas duas estratégias de estimadores de erro e de refino da malha de integração. Na primeira, é proposto um estimador do tipo recuperação em que a solução melhorada é obtida pela minimização de um funcional que leva em conta o erro quadrático, o erro de equilíbrio e o erro na prescrição das trações prescritas. Já na segunda estratégia, também do tipo recuperação, é proposto que a tensão melhorada seja obtida pela metodologia chamada de recuperação por equilíbrio por regiões. Vários exemplos são apresentados considerando a hipótese de estado plano de tensões de modo a avaliar a convergência de cada estratégia.

Uma proposta de aplicação do *método de Galerkin livre de elementos modificado* dentro do enfoque de grandes deformações é apresentada no **Capítulo 3**. A formulação adotada considera uma descrição *Lagrangiana total*, a decomposição multiplicativa do gradiente de deformação em uma parte plástica e uma parte elástica e o uso do par conjugado da medida logarítmica de deformação e a tensão rotacionada de *Kirchoff*. O uso deste par conjugado torna possível a utilização do chamado mapeamento exponencial que, por sua vez, proporciona o uso dos algoritmos de mapeamento de retorno no mesmo formato do que os encontrados em pequenas deformações. O modelo constitutivo do material elastoplástico considera uma fase elástica, hiperelástica, e outra plástica do tipo  $J_2$ . A isocoriedade do fluxo plástico, juntamente com as hipóteses de estado plano de deformações e de sólidos de revolução, leva ao aparecimento do fenômeno de travamento volumétrico. Assim, uma estratégia de antitravamento é proposta e investigada numericamente através de vários exemplos numéricos, tidos como clássicos na literatura, na averiguação deste tipo de fenômeno. Os resultados obtidos são confrontados com resultados encontrados por outros autores.

No **Capítulo 4** é apresentada a formulação de contato e atrito implementada neste trabalho visando a simulação de processos de conformação em molde. Esta formulação considera que o obstáculo, molde, seja indeformável, hipótese de *Signorini*, e que o molde seja composto apenas pela união de segmentos de reta. A implementação do contato é feita dentro do enfoque de deformações finitas apresentado no **Capítulo 3** e os exemplos levam em consideração

o modelo  $J_2$  já apresentado neste capítulo. Investigações sobre o aparecimento do efeito de travamento volumétrico também são levadas em consideração em alguns exemplos estudados. Embora visando a simulação do problema de *compactação de pós metálicos*, a implementação das condições de contato são colocadas de forma geral de maneira a poder simular problemas de *forjamento a frio* e em molde já neste capítulo.

Por fim, no **Capítulo 5**, é apresentado um modelo constitutivo próprio para a aplicação na compactação de componentes oriundos da *Metalurgia do Pó*. Este modelo leva em consideração a dependência da densidade e pertence a classe chamada na literatura de *Cap models*. O modelo de *Cap* apresentado consiste de três superfícies de escoamento as quais definem uma função de escoamento convexa e suave. Condições de continuidade  $C^0$  e  $C^1$  são exigidas para cada uma das superfícies de escoamento na região de transição de forma que não são necessários procedimentos especiais para a determinação da regra de fluxo plástico, como aquelas baseadas em subgradientes necessárias ao se trabalhar com superfícies não suaves. Resultados são apresentados para problemas considerando a hipótese de estado plano de deformações e de problemas axissimétricos.

Já os apêndices estão reservados para outros detalhes referentes a implementações de outros modelos constitutivos, **Apêndice A**, a pequenas variações feitas na teoria apresentado nos capítulos, como é o caso do **Apêndice B** que trata da adição de uma função peso diferente no modelo proposto no **Capítulo 1**. O **Apêndice C** apresenta em detalhes o método de Newton implementado neste trabalho para a solução das equações não lineares. Alguns detalhes das funções tensoriais isotrópicas mais utilizadas durante o texto são mostrados no **Apêndice D**. Por fim, no **Apêndice E** são apresentados detalhes para a obtenção dos algoritmos de mapeamento de retorno utilizados no Capítulo 5.

# Capítulo 1

## O método de Galerkin livre de elementos modificado

### 1.1 Introdução

Nos últimos anos, desde o trabalho precursor de NAYROLES *et al.* (1992), muita atenção tem sido dada pela comunidade científica, e em especial à área de matemática aplicada e mecânica computacional, aos chamados métodos sem malha, *meshless methods*, e ou aos métodos livres de malha, *mesh-free methods*. Esta nova classe de métodos numéricos tem sido aplicada em problemas de engenharia onde os métodos tradicionais enfrentam algum tipo de problema. Em uma recente revisão sobre os métodos sem malha apresentada por LI & LIU (2002) são comentadas várias áreas onde sua aplicação é promissora. Dentre elas pode-se citar as áreas/problemas de localização, grandes deformações e propagação de trincas.

Contudo, juntamente com o aparecimento e desenvolvimento destes novos métodos surgiram também problemas inerentes a formulação do método, como por exemplo:

- a necessidade do uso de uma integração numérica apropriada;
- desenvolvimento de uma estrutura de dados efetiva e também de procedimentos numéricos para a redução do custo computacional;
- evitar os problemas de condicionamento que acontecem quando se usam procedimentos de enriquecimento hierárquico, *p-adaptatividade*;
- necessidade do uso de procedimentos especiais para a imposição das condições de contorno essenciais.

Neste capítulo será apresentada uma nova metodologia para a aplicação das condições de contorno essenciais dentro do enfoque do *método de Galerkin livre de elementos, element-free Galerkin* (EFG) BELYTSCHKO *et al.* (1994), um dos métodos livres de malha mais utilizados. O conteúdo deste capítulo é uma coleção dos resultados apresentados em ROSSI & ALVES (2002), ALVES & ROSSI (2003) e ROSSI & ALVES (2003). Esta nova maneira de impor as condições de contorno essenciais do problema na forma fraca de Galerkin será desenvolvida

dentro do enfoque da *Aproximação por Mínimos Quadrados Móveis* (AMQM), *Moving Least Square Approximation* (MLSA), LANCASTER & SALKAUSKAS (1981), que é a base de muitos métodos livres de malha. Deste modo, apesar deste procedimento ser apresentado dentro do escopo de EFG, ele pode ser estendido com naturalidade para outros métodos livres de malha.

A necessidade de procedimentos especiais para a imposição das condições de contorno essenciais surge do fato que, geralmente, as funções de forma finais oriundas dos métodos livres de malha não representam uma interpolação do campo desejado, mas sim uma aproximação. Deste modo, as funções de forma resultantes não satisfazem a propriedade de delta de kronecker, propriedade esta vastamente explorada no caso do *Método de Elementos Finitos* (MEF). Na literatura, várias são as abordagens implementadas para superar este problema. Dentre elas pode-se citar o uso de:

- Multiplicadores de Lagrange, BELYTSCHKO *et al.* (1994);
- Métodos de colocação, BELYTSCHKO & TABBARA (1996), MUKHERJEE & MUKHERJEE (1997) e ZHU & ATLURI (1998);
- Princípios variacionais modificados, LU & BELYTSCHKO (1994) e MUKHERJEE & MUKHERJEE (1997);
- Combinação com o MEF, BELYTSCHKO *et al.* (1994), KRONGAUZ & BELYTSCHKO (1996), HEGEN (1996), HUERTA & MÉNDEZ (2000);
- Funções de peso singulares, DUARTE & ODEN (1996) e KALJEVIĆ & SAIGAL (1997);
- Métodos de penalidade, ZHU & ATLURI (1998) e GAVETE *et al.* (2000);
- Outras estratégias e variações das acima apresentadas podem ser encontradas também em GÜNTHER & LIU (1998), PANNACHET & ASKES (2000), ZHANG *et al.* (2001) e VENTURA (2002).

Cada um destes métodos apresenta vantagens e infelizmente desvantagens. Multiplicadores de Lagrange são geralmente usados em procedimentos numéricos e são um modo efetivo para impor restrições em problemas de otimização. Ainda, a sua implementação é muito simples. Não obstante, o seu uso apresenta algumas desvantagens como: o mau condicionamento do sistema de equações algébrico resultante, o aumento no tamanho do problema e, seu uso está principalmente justificado para problemas formulados em termos de condições de ponto de sela. Em um enfoque mais geral, seu uso pode não ser facilmente justificado. Princípios variacionais modificados não impõem, de forma geral, as condições de contorno essenciais com um alto grau de precisão, como mencionado em BELYTSCHKO *et al.* (1995).

Métodos que combinam EFG com MEF fazem uso de uma aproximação/interpolação mista, isto é, a aproximação/interpolação de cada campo é feita com as funções de forma provenientes de cada um dos métodos. Desta forma, o domínio deve ser dividido em duas regiões, uma definida por um conjunto de nós associado com o MEF e o outro definido por um conjunto de partículas associadas com o método livre de malha, EFG por exemplo. Além disso, no

domínio de transição onde os suportes das funções de forma EFG e MEF se sobrepõem, a função de forma resultante é dada por uma soma das funções de forma EFG e MEF. Como resultado, para satisfazer a condição de consistência, isto é, para representar uma base completa de polinômios exatamente até uma determinada ordem, um procedimento especial é requerido neste domínio de transição, como mostrado em HUERTA & FERNADEZ (2000) e HUERTA & FERNADEZ (2002). Embora as funções de forma de elementos finitos possam ser escolhidas de forma a manter as exigências de consistência, sua base não pode ser facilmente ampliada para incorporar informações a priori das soluções de equações diferenciais parciais, como feito, por exemplo, na base MLSA intrínseca no caso de mecânica da fratura, fato bastante explorado por BELYTSCHKO em vários trabalhos, como por exemplo BELYTSCHKO & FLEMING (1999). Porém, informações a priori podem ser consideradas com o uso de um enriquecimento extrínseco considerando o método dos elementos finitos baseados na partição da unidade, *partition of unity finite element method* (PuFem), como sugerido em MELENK & BABUŠKA (1996) ou mais atualmente pelo método dos elementos finitos generalizados, *generalized finite element method* (GFEM), STROUBOULIS *et al.* (2000).

Continuando, a imposição das condições de contorno essenciais podem também ser aplicadas pelo uso de funções pesos singulares, já que a função de forma resultante torna-se realmente um interpolante, como foi mostrado em LANCASTER & SALKAUSKAS (1981) e aplicado por DUARTE & ODEN (1996). Porém, tais funções de forma tornam-se altamente não polinomiais, como descrito em HEGEN (1996), e são responsáveis por uma perda de precisão, se uma quadratura de integração numérica imprópria for empregada. Além disso, a imposição das condições de contorno essenciais só é alcançada no ponto de aplicação da partícula/nó. Pontos afastados dos centros de cada partícula não satisfarão as propriedades de interpolação.

Mais ainda, resultados obtidos pelo método de penalidade são dependentes do parâmetro de penalização. Métodos de colocação não são, em geral, apropriados. Porém, a abordagem utilizada por ZHU & ATLURI (1998) forneceu resultados melhores, entretanto a matriz de rigidez se tornou não simétrica.

Neste trabalho, a imposição das condições de contorno essenciais será realizada pelo uso de uma função de peso derivada, do que foi chamado, método dos elementos finitos baseado na partição da unidade estendida, *extended partition of unity finite element method* (EPuFem). Estas funções pesos EPuFem são dispostas apenas na vizinhança do contorno essencial do problema, como será descrito pelo algoritmo mais adiante. Assim, o domínio restante pode ser coberto através de funções peso EFG tradicionais, como por exemplo as *splines* quárticas. Além disso, como o espaço de aproximação final será construído com base no MLSA usando uma só base intrínseca para todo o domínio, a sobreposição das funções peso EPF (EPuFem) e EFG torna-se natural.

De fato, o método proposto pode ser visto como um método EFG convencional, que contém um conjunto de funções de pesos diferentes, com a habilidade de selecionar para cada partícula o tipo de função de peso adequada. A este método foi dado o nome de *método de Galerkin livre de elementos modificado, modified element-free Galerkin* (MEFG) *method*.

A necessidade do uso de funções de peso EPF surge do fato que é necessário satisfazer

uma condição de consistência que está associada com a base intrínseca adotada. Tal condição não é satisfeita se forem utilizadas funções de peso oriundas do PuFem clássico para uma base intrínseca aumentada, fazendo com que surjam pontos onde a matriz de momento é singular, como será mostrado no decorrer deste capítulo.

Usando o MEFG proposto, as funções de forma resultantes satisfazem, no sentido de limite, as condições de contorno essenciais, possuindo a propriedade de delta de Kronecker sobre tal contorno. Além disso, as funções de forma restantes são construídas de forma que o seu suporte não sobreponha o contorno onde as condições de contorno essenciais são prescritas. Desta forma, as condições de contorno essenciais são impostas da mesma maneira que no MEF.

Para realizar a integração, controlar e administrar o dados, bem como, para definir o suporte para as funções de peso EPF, é utilizada uma malha de integração composta por células/elementos de integração triangulares. O algoritmo que constrói a cobertura apropriada para um domínio genérico será descrito juntamente com suas considerações principais e exemplos.

A fim de atestar a performance do método proposto são feitas algumas aplicações considerando a teoria de elasticidade linear, supondo a hipótese de estado plano de tensões, para alguns problemas clássicos da elasticidade. Análises de sensibilidade com relação ao parâmetro de extensão  $\epsilon$  serão realizadas a fim de determinar seu intervalo de aplicação para os problemas em questão. Como será numericamente demonstrado, o erro na imposição das condições de contorno essenciais devido à extensão do suporte das funções EPF poderá ser desprezível desde que seja utilizado um parâmetro de extensão  $\epsilon$  apropriado. Também, a perda de regularidade devido a sobreposição das funções de peso na região de transição é investigada neste capítulo. As análises serão realizadas considerando uma quadratura de Gauss-Legendre de 7 e 25 pontos de integração de modo a verificar o seu efeito sobre a solução dos problemas.

## 1.2 Aproximação por Mínimos Quadrados Móveis

O método EFG consiste basicamente na construção de um conjunto de funções de forma globais, que definem o espaço de aproximação, que são posteriormente empregadas em um procedimento de aproximação de Galerkin. Tais funções de forma são construídas através do MLSA.

O MLSA foi inicialmente utilizado por LANCASTER & SALKASKAS (1981) na construção de superfícies suaves. Dado um conjunto de dados discretos é possível construir uma função de aproximação  $u^h$  que se ajusta, no sentido mínimos quadrados, a este conjunto de dados discretos. Isto é feito pelo uso de uma aproximação de mínimos quadrados ponderada, onde cada uma das funções peso associadas a cada uma das partículas/nó, dado discreto, possui a propriedade de ter um suporte variável ou móvel.

Mais especificamente, dado um conjunto de dados discretos  $\{u_I, I = 1, 2, \dots, n_T\}$ , onde  $n_T$  é o número total de partículas, em um domínio  $\Omega$ , a função de aproximação  $u^h(\vec{x})$  é definida como

$$u^h(\vec{x}) = \sum_{j=1}^m p_j(\vec{x}) a_j(\vec{x}) = \vec{p}(\vec{x}) \cdot \vec{a}(\vec{x}) \quad (1.1)$$

onde  $\vec{p}(\vec{x})$  representa a base intrínseca empregada no MLSA e  $\vec{a}(\vec{x})$  é o conjunto de coeficientes

a determinar. O MLSA consiste no uso de uma base  $\vec{p}(\vec{x})$  e de uma função peso  $w(\vec{x})$ , a qual determina a influência de quantas partículas serão consideradas para a determinação de  $\vec{a}(\vec{x})$ .

O critério utilizado para a determinação de  $\vec{a}(\vec{x})$  é a minimização de seguinte norma ponderada

$$J(\vec{a}) = \sum_{I=1}^n w(\vec{x} - \vec{x}_I) [\vec{p}(\vec{x}_I) \cdot \vec{a}(\vec{x}) - u_I]^2$$

onde  $n$  é o número de partículas na vizinhança de  $\vec{x}$  para os quais a função peso  $w(\vec{x} - \vec{x}_I) \neq 0$ , ou seja é o número de partículas pertencentes ao suporte da função peso, e  $u_I$  é o dado discreto em  $\vec{x} = \vec{x}_I$ .

Como resultado da minimização de  $J(\vec{a})$  é obtido

$$u^h(\vec{x}) = \sum_{I=1}^n \Phi_I(\vec{x}) u_I \quad (1.2)$$

onde

$$\Phi_I(\vec{x}) = \vec{p}(\vec{x}) \cdot \mathbf{A}(\vec{x})^{-1} \vec{b}_I(\vec{x}) \quad (1.3)$$

sendo

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = \sum_{I=1}^n w(\vec{x} - \vec{x}_I) [\vec{p}(\vec{x}_I) \otimes \vec{p}(\vec{x}_I)] \quad (1.4)$$

e

$$\vec{b}_I(\vec{x}) = w(\vec{x} - \vec{x}_I) \vec{p}(\vec{x}_I).$$

$\Phi_I(\vec{x})$  é a chamada função de forma global e  $\mathbf{A}(\vec{x})$  é comumente chamada de matriz de momento.

Já as derivadas parciais de  $\Phi_I(\vec{x})$  com relação as componentes de  $\vec{x}$  são dadas por

$$\frac{\partial \Phi_I(\vec{x})}{\partial x_i} = \Phi_{I,x_i}(\vec{x}) = \frac{\partial \vec{p}(\vec{x})}{\partial x_i} \cdot \mathbf{A}(\vec{x})^{-1} \vec{b}_I(\vec{x}) + \vec{p}(\vec{x}) \cdot \frac{\partial \mathbf{A}(\vec{x})^{-1}}{\partial x_i} \vec{b}_I(\vec{x}) + \vec{p}(\vec{x}) \cdot \mathbf{A}(\vec{x})^{-1} \frac{\partial \vec{b}_I(\vec{x})}{\partial x_i} \quad (1.5)$$

sendo

$$\frac{\partial \mathbf{A}(\vec{x})^{-1}}{\partial x_i} = -\mathbf{A}(\vec{x})^{-1} \frac{\partial \mathbf{A}(\vec{x})}{\partial x_i} \mathbf{A}(\vec{x})^{-1}. \quad (1.6)$$

A ordem de consistência de uma aproximação é definida como a ordem arbitrária polinomial que pode ser representada exatamente pelo processo de ajuste ou aproximação. Uma das propriedades importantes do MLSA é a de que este método é capaz representar exatamente combinações das funções de base  $\vec{p}(\vec{x})$ . Assim, é possível alcançar uma consistência de ordem  $k$  através do uso de

$$\vec{p}^T(\vec{x}) = [1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots, x^k, \dots, xy^{k-1}, y^k]. \quad (1.7)$$

Deste modo, para satisfazer a consistência linear é necessário apenas utilizar  $\vec{p}^T(\vec{x}) = [1, x, y]$ . Ao se especificar um certo grau de consistência à aproximação são impostas restrições as funções



de forma globais as quais levam, no caso de consistência linear, as seguintes relações

$$\sum_{I=1}^{n_T} \Phi_I(\vec{x}) = 1; \quad (1.8)$$

$$\sum_{I=1}^{n_T} \Phi_I(\vec{x}) x_I = x; \quad (1.9)$$

$$\sum_{I=1}^{n_T} \Phi_I(\vec{x}) y_I = y. \quad (1.10)$$

De acordo com a Eq.(1.8) o conjunto  $\{\Phi_I(\vec{x}), I = 1, 2, \dots, n_T\}$  define uma *partição da unidade*.

Como comentado em BELYTSCHKO *et al.* (1994), as funções de forma oriundas do EFG,  $\Phi_I(\vec{x})$ , não satisfazem, em geral, a condição de delta de kronecker, isto é  $\Phi_I(\vec{x}_J) \neq \delta_{IJ}$ . Isto infelizmente complica a imposição das condições de contorno essenciais já que estas condições não podem ser impostas diretamente pela prescrição dos valores nodais.

Com o objetivo de superar as dificuldades na imposição das condições de contorno essenciais já referidas anteriormente, é proposto um EFG modificado. Este método modificado combina o proposto PuFem estendido com o existente EFG de modo que se torna possível impor, no sentido de limite, as condições de contorno essenciais de forma direta, como feito no MEF.

Uma descrição do método PuFem será dada no próximo item de modo a introduzir as funções PuFem estendidas.

### 1.2.1 PuFem

As funções de forma  $\Phi_I(\vec{x})$  associadas ao PuFem podem ser obtidas como uma particularização do MLSA. Isto é feito considerando apenas o termo constante da base intrínseca, ou seja  $\vec{p} = [1]$  e usando como funções peso as funções tradicionais do método de elementos finitos.

O suporte típico das funções de forma PuFem é ilustrado, para o caso bidimensional, na Fig. 1.1, onde para uma partícula centrada em  $\vec{x}_I$ ,  $\vec{x}_I = (x_I, y_I)$ , a lista de nós/partículas associadas a ela é  $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4, \vec{x}_5\}$ .

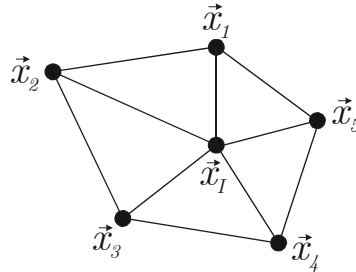


Figura 1.1: Suporte típico de  $\Phi_I(\vec{x})$ .

No caso particular em que a malha de integração utilizada é do tipo triangular, as funções peso são dadas pelas funções lineares tradicionais de elementos finitos triangulares. Tais funções

peso podem ser escritas de forma explícita como

$$w(\vec{x} - \vec{x}_I) = \begin{cases} \frac{1}{2A} [(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) + (y_i - y_{i+1})x + (x_{i+1} - x_i)y], & \vec{x} \in \text{supp}[\Phi_I(\vec{x})] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (1.11)$$

na qual  $(x_i, y_i)$  e  $(x_{i+1}, y_{i+1})$  são as coordenadas dos elementos da lista associada com  $\vec{x}_I$  ordenados no sentido anti-horário e  $A$  é a área de célula de integração, dada por

$$A = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & x_I & y_I \\ 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_{i+1} & y_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (1.12)$$

Na literatura, as funções de forma derivadas considerando  $\vec{p} = [1]$  são conhecidas como funções de *Sheppard*. Repare que neste caso, as funções de forma obtidas reduzem-se as próprias funções de forma de elementos finitos triangulares. Isto é facilmente demonstrado por

$$\vec{p} = [1] \rightarrow \mathbf{A}(\vec{x})^{-1} = \frac{1}{\sum_{I=1}^n w(\vec{x} - \vec{x}_I)} \quad \therefore \quad \vec{b}_I(\vec{x}) = w(\vec{x} - \vec{x}_I) \quad (1.13)$$

e como  $\sum_{I=1}^n w(\vec{x} - \vec{x}_I) = 1$

$$\Phi_I(\vec{x}) = \vec{p}(\vec{x}) \cdot \mathbf{A}(\vec{x})^{-1} \vec{b}_I(\vec{x}) = w(\vec{x} - \vec{x}_I). \quad (1.14)$$

Note que supondo esta condição o MEF tradicional é reproduzido. Entretanto, o MLSA possibilita que o espaço de aproximação seja *aumentado* de modo a reproduzir polinômios de mais alta ordem. Como já comentado anteriormente, isto é feito pela introdução de mais termos, monômios neste caso, na base  $\vec{p}(\vec{x})$ . Infelizmente, o uso de tais bases juntamente com as funções PuFem recém derivadas levam a matriz de momento a ser singular em alguns pontos do suporte de  $\Phi_I(\vec{x})$ . Conseqüentemente, não é possível encontrar a inversa de  $\mathbf{A}(\vec{x})$ , requerida na Eq.(1.3).

Com o objetivo de identificar os pontos que fazem com que  $\mathbf{A}(\vec{x})$  seja singular vai se considerar agora um ponto  $\vec{x}$  que pertença a um conjunto de células de integração que formam o suporte de uma função de forma PuFem, como ilustrado na Fig. 1.2.

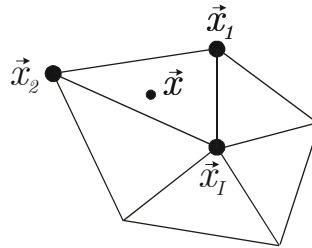


Figura 1.2: Suporte típico PuFem para um dado  $\vec{x}$ .

Considere agora o caso particular onde é utilizado como base intrínseca  $\vec{p}^T(\vec{x}) = [1, x, y]$ .

Para este caso a matriz de momento reduz-se a

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = \sum_{I=1}^n w(\vec{x} - \vec{x}_I) [\vec{p}(\vec{x}_I) \otimes \vec{p}(\vec{x}_I)] = w(\vec{x} - \vec{x}_1) [\vec{p}(\vec{x}_1) \otimes \vec{p}(\vec{x}_1)] \\ + w(\vec{x} - \vec{x}_2) [\vec{p}(\vec{x}_2) \otimes \vec{p}(\vec{x}_2)] + w(\vec{x} - \vec{x}_3) [\vec{p}(\vec{x}_3) \otimes \vec{p}(\vec{x}_3)].$$

Repare agora que, para este caso particular, o posto completo de  $\mathbf{A}(\vec{x})$  é posto  $[\mathbf{A}(\vec{x})] = 3$ . Entretanto, a função peso utilizada pelo PuFem satisfaz a condição de delta de kronecker, isto é  $w_I(\vec{x}_j) = w(\vec{x}_j - \vec{x}_I) = \delta_{Ij}$ , o que leva a

$$\vec{x} = \vec{x}_i \rightarrow \text{posto}[\mathbf{A}(\vec{x})] = 1.$$

Mais ainda, se forem considerados  $\vec{x}_i$  e  $\vec{x}_j$  de modo que o segmento que liga estes pontos seja paralelo aos eixos globais x/y então para

$$\vec{x} \in (1 - \lambda) \vec{x}_i + \lambda \vec{x}_j, \lambda \in [0, 1], \rightarrow \text{posto}[\mathbf{A}(\vec{x})] = 2.$$

De fato, de acordo com as referências LIU *et al.* (1996), BEISSEL e BELYTSCHKO (1996) e HUERTA e MÉNDEZ (2000) a distribuição de partículas deve satisfazer uma condição de estabilidade para que exista a inversa de  $\mathbf{A}(\vec{x})$ . Esta condição de estabilidade pode ser enunciada como

$$\text{card} \{ \vec{x}_i | \Phi_i(\vec{x}) \neq 0 \} \geq \dim[\mathbf{A}(\vec{x})]. \quad (1.15)$$

Além disso, a distribuição de partículas deve ser de tal forma que se  $\vec{x} \in R^n$  então deve existir pelo menos  $n + 1$  partículas cuja os vetores posição formam um elemento simplex não nulo. Assim, para  $\Omega \in R^2$  e  $\vec{p}^T(\vec{x}) = [1, x, y]$  a distribuição de partículas deve ser tal que para todo  $\vec{x} \in \bar{\Omega}$  deva existir o suporte de pelo menos três partículas com uma *densidade* diferente de zero.

### 1.2.2 PuFem estendido

A fim de superar o problema de singularidade de  $\mathbf{A}(\vec{x})$ , satisfazendo as condições de estabilidade recém vistas, é proposto que a função de peso PuFem possa ultrapassar o seu suporte de um certo  $\epsilon$ , como ilustrado na Fig. 1.3.

Os chamados pontos estendidos do suporte EPuFem são determinados através da seguinte relação

$$\vec{x}_i^* = \vec{x}_i + \epsilon(\vec{x}_i - \vec{x}_I). \quad (1.16)$$

Agora perceba que, tomando o limite para  $\epsilon \rightarrow 0$ , é possível determinar uma função de forma global que satisfaz, no limite, a condição de delta de kronecker, isto é

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Phi_i(\vec{x}_j) = \delta_{ij}. \quad (1.17)$$

Isto implica que, se for adotado um valor de  $\epsilon$  suficientemente pequeno, as condições de

contorno essenciais podem ser impostas diretamente, como feito no MEF. Porém, uma pequena violação da condição de contorno permanecerá. Em uma seção adequada deste capítulo uma análise detalhada do efeito de  $\epsilon$  sobre a solução de problemas de valor de contorno é realizada.

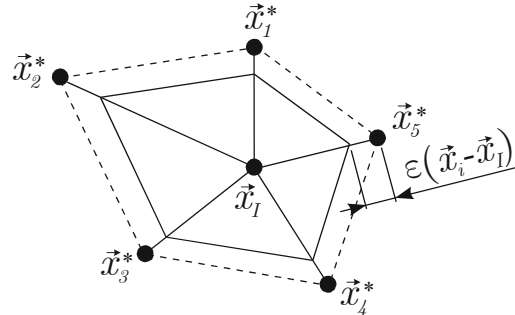


Figura 1.3: Suporte estendido - EPuFem

Na Fig. 1.4 são mostradas algumas funções de forma  $\Phi_I(\vec{x})$  EPuFem para o caso unidimensional. Repare que  $\Phi_2(\vec{x})$  significa que a função de forma está centrada em  $x = 2$ . Além disso, note que a não linearidade que aparece na região dos nós/partículas é devida a sobreposição das funções peso. Neste exemplo ilustrativo, foi utilizado um parâmetro de extensão bastante grande,  $\epsilon = 0.1$ , a fim de amplificar o efeito de tal sobreposição das funções peso nas funções de forma finais.

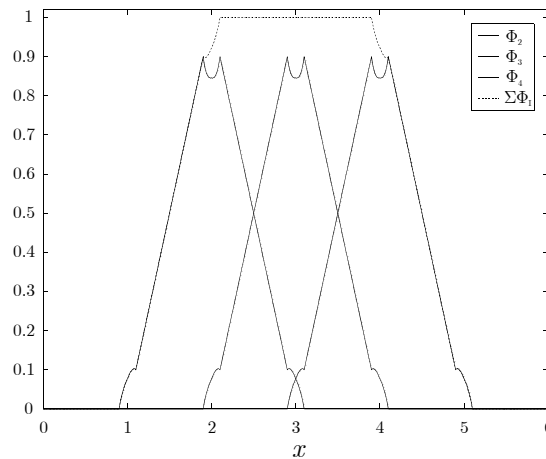


Figura 1.4: Funções de forma EPuFem globais.

Na seção posterior, análises similares a esta serão feitas com o objetivo de avaliar a sobreposição de diferentes funções peso e de seu efeito nas funções de forma globais finais.

**Nota 1.1.** As funções peso EPuFem foram construídas considerando uma malha de integração triangular. Entretanto, tais funções também poderiam ser construídas baseadas em outras topologias de malhas de integração. A Fig. 1.5 mostra o domínio estendido para uma malha do tipo quadrangular. Neste caso a função peso, associada a partícula  $\vec{x}_I$ , também pode ser construída com o uso das funções de elementos finitos sobre o domínio estendido. Entretanto,

serão necessários estruturas de dados e algoritmos um pouco diferentes do que os usados no caso de malha de integração triangular. Do mesmo modo, o método pode ser estendido para casos tridimensionais se forem consideradas malhas de integração baseadas em tetraedros ou hexaedros.

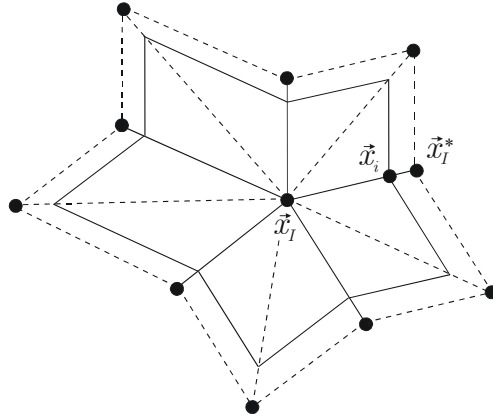


Figura 1.5: Suporte PuFem estendido para uma malha quadrangular.

■

**Nota 1.2.** Um outro ponto importante é a possibilidade de construir funções de forma para uma base intrínseca tal que  $\vec{p}(\vec{x}) \in R^m$ . Neste caso, para todo  $\vec{x} \in \bar{\Omega}$  é preciso, novamente, satisfazer a condição de estabilidade, Eq.(1.15), juntamente com a condição de que as partículas formem um simplex não vazio e de segunda ordem. Uma maneira de satisfazer tais condições é uso de uma distribuição parametrizada de partículas, que levem em consideração não apenas as partículas dos vértices mas também partículas do interior de, por exemplo, cada célula de integração. Para melhor explicar este caso considere o seguinte exemplo. Considere um problema bidimensional onde  $\vec{p}^T(\vec{x}) = [1, x, y, x^2, xy, y^2]$ . Para este caso, pode ser considerado uma distribuição de partículas como a mostrada na Fig. 1.6(a). O procedimento utilizado para as partículas dos vértices é o mesmo já descrito nas seções precedentes. Já as funções peso interiores podem ser construídas como funções do tipo *bolha* como mostrado na Fig. 1.6(b).

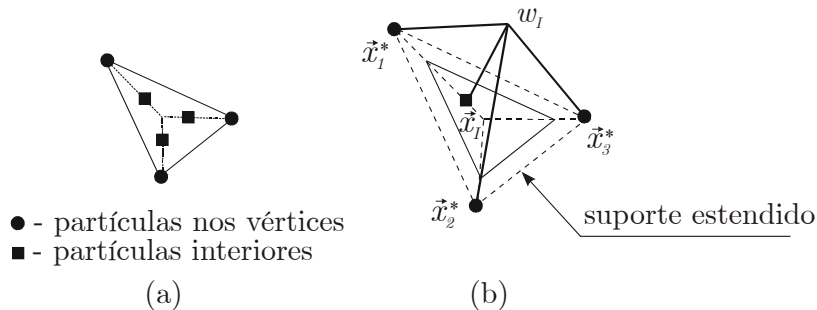


Figura 1.6: Exemplo de uma distribuição de partículas para bases intrínsecas aumentadas: (a) Distribuição; (b) Função peso do tipo bolha.

■

Um exemplo de aplicação deste método pode ser visto em ALVES & ROSSI (2005), onde as funções de forma oriundas do PuFem estendido são enriquecidas através de um procedimento do tipo extrínseco, e então utilizadas para resolver um problema elasto-plástico.

### 1.3 Método de Galerkin livre de elementos modificado

Seja  $\Omega$  um domínio com fronteira  $\partial\Omega$ , sendo  $\partial\Omega$  dividido em uma região  $\Gamma_E$ , onde as condições de contorno essenciais são prescritas e outra  $\Gamma_N$ , onde as condições naturais estejam prescritas e que  $\partial\Omega = \Gamma_E \cup \Gamma_N$  e  $\Gamma_E \cap \Gamma_N = \emptyset$ .

O MEFG tem como idéia básica combinar as funções peso obtidas pelo EPuFem juntamente com as funções peso convencionais já utilizadas por vários autores no EFG. Estas funções peso são utilizadas pelo MLSA para produzir funções de forma globais que permitam a imposição das condições de contorno essenciais, isto é, satisfaçam a condição de delta de kronecker em  $\Gamma_E$ , e que possuam a alta regularidade, proveniente das funções de forma do tipo EFG, em uma região afastada de  $\Gamma_E$ . Isto é obtido pela apropriada especificação de funções peso EPuFem na vizinhança de  $\Gamma_E$  e pelo emprego de funções peso EFG tradicionais nas partículas restantes de uma malha de integração triangular.

A vantagem do uso de funções de peso EFG é que as funções de forma oriundas deste método são fracamente dependentes da malha de integração, quando comparadas com o MEF. Além disso, se a função de peso é contínua com relação as suas  $i$ -ésimas derivas, também as funções de forma serão as suas  $i$ -ésimas derivas, BELYTSCHKO *et al.* (1994).

Entretanto, para poder impor as condições de contorno diretamente é necessário garantir que nenhuma função de peso do tipo EFG ultrapasse qualquer ponto em  $\Gamma_E$ . A fim de alcançar este objetivo é considerada a seguinte estratégia:

1. Partição do domínio em uma malha de integração triangular de modo que cada elemento defina uma célula de integração;
2. Identificação do conjunto de nós/partículas da malha que pertence ao contorno  $\Gamma_E$  juntamente com a especificação de funções peso do tipo EPuFem,  $w^{EPF}$ , centradas em cada um destes nós, e com suporte definido pela lista de partículas adjacentes;
3. Verificação se em cada um dos nós/partículas restantes da malha é possível a utilização de uma função peso do tipo EFG,  $w^{EFG}$ , centrada nestes nós. Caso a função  $w^{EFG}$  teste não possa ser especificada, isto é, seu suporte ultrapasse  $\Gamma_E$ , então ela é trocada por uma função do tipo  $w^{EPF}$ .

Um exemplo genérico de uma cobertura produzida pelo método MEFG proposto é ilustrado na Fig. 1.7. Cada nó/partícula da malha de integração é tido como o centro de uma função peso e sua *forma* depende se ao nó/partícula é especificado uma função peso EPuFem ou EFG.

Repare agora que para um ponto  $\vec{x}_a$ , como o mostrado na Fig. 1.7, onde é imposto  $\vec{u}(\vec{x}) = \vec{u}$

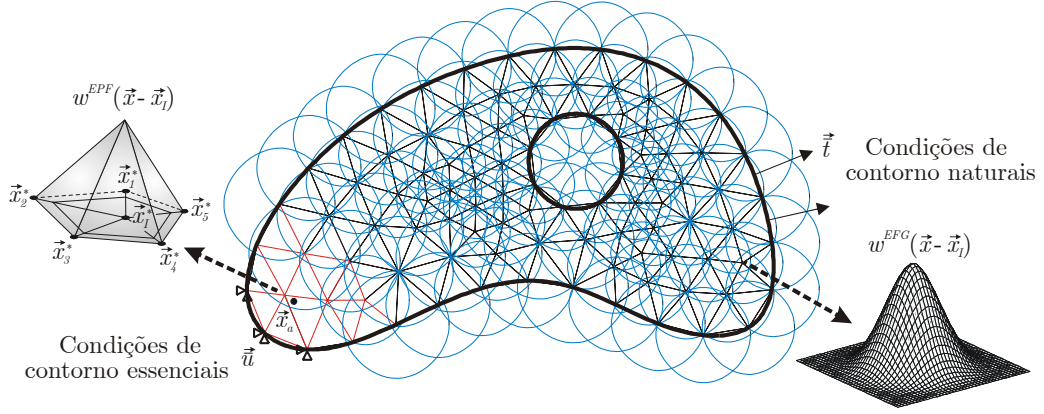


Figura 1.7: Exemplo de cobertura proveniente do MEFG.

em  $\Gamma_E$ , a matriz de momento é escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = \sum_{I=1}^4 w(\vec{x} - \vec{x}_I) [\vec{p}(\vec{x}_I) \otimes \vec{p}(\vec{x}_I)] = w^{EPF}(\vec{x} - \vec{x}_1) [\vec{p}(\vec{x}_1) \otimes \vec{p}(\vec{x}_1)] + w^{EPF}(\vec{x} - \vec{x}_2) [\vec{p}(\vec{x}_2) \otimes \vec{p}(\vec{x}_2)] + w^{EPF}(\vec{x} - \vec{x}_3) [\vec{p}(\vec{x}_3) \otimes \vec{p}(\vec{x}_3)] + w^{EFG}(\vec{x} - \vec{x}_4) [\vec{p}(\vec{x}_4) \otimes \vec{p}(\vec{x}_4)]. \quad (1.18)$$

**Nota 1.3.** Note que a diferença desta abordagem em relação aos trabalhos de BELYTSCHKO *et al.* (1995), KRONGAUZ e BELYTSCHKO (1996), HEGEN (1996) e HUERTA e MÉNDEZ (2000) que combinam o EFG com o MEF está no fato em que neste caso não é necessário a partição do domínio em diferentes regiões. Além disso, no caso do MEFG é possível satisfazer a consistência linear, por exemplo, sobre todo domínio simplesmente adotando  $\vec{p}^T(\vec{x}) = [1, x, y]$ .

■

### 1.3.1 Distribuição das partículas EFG

Uma vez descrito o procedimento para a construção das funções peso EPuFem resta agora considerar a determinação das funções peso do tipo EFG nas partículas restantes da malha de integração. Como já comentado anteriormente, a atribuição do tipo de função peso a uma certa partícula depende do algoritmo de cobertura a ser adotado. Na literatura, é comum encontrar funções peso  $w^{EFG}$  com suporte retangular ou circular. Neste trabalho irá se considerar apenas funções  $w^{EFG}$  de suporte circular. Assim, a atribuição de uma função  $w^{EFG}$  em uma dada partícula da malha, que não pertence ao contorno essencial, está ligada a determinação de um suporte, parametrizado pelo raio da função peso, que não ultrapasse  $\Gamma_E$ , que assegure uma cobertura do domínio e que satisfaça a condição de estabilidade dada na Eq.(1.15).

A estratégia proposta inicia com a atribuição de uma função peso  $w^{EFG}$  teste a cada partícula que não pertence ao contorno essencial,  $\vec{x}_I \notin \Gamma_E$ . Para cada uma destas partículas é determinado o raio da função teste com base em uma estratégia que depende da lista de partículas vizinhas a  $\vec{x}_I$ . Caso este raio ultrapasse  $\Gamma_E$  este raio é então tomado como não viável e é atribuído a esta

partícula uma função peso  $w^{EPF}$ .

**Nota 1.4.** Repare que a condição de estabilidade é satisfeita mesmo se forem consideradas apenas partículas do tipo EPuFe sobre  $\Omega$ . Deste modo, o algoritmo de cobertura é apenas necessário para a determinação do suporte das funções de peso do tipo EFG. ■

A estratégia de cobertura utilizada neste trabalho para a distribuição das funções peso tipo  $w^{EFG}$  também irá se utilizar da triangularização do domínio, necessária para a determinação das partículas EPuFem. Assim, considere uma partícula genérica tal que  $\vec{x}_I \notin \Gamma_E$  da malha de integração, como ilustrado na Fig. 1.8.

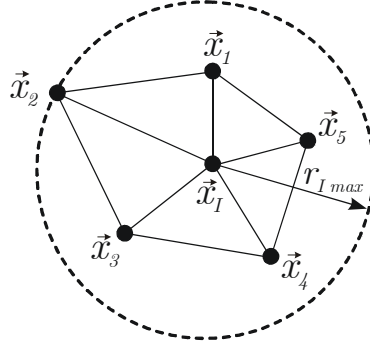


Figura 1.8: Raio da função de peso EFG.

O raio,  $\bar{r}_I$ , que define o suporte da função  $w^{EFG}$  centrada em  $\vec{x}_I$ , é determinado por

$$\bar{r}_I = s \cdot r_{I_{\max}} \quad (1.19)$$

onde  $s > 1$ , com  $s \in R$ , e  $r_{I_{\max}}$  é a máxima distância dentre as partículas que compõem a lista associada com  $\vec{x}_I$ ,  $\vec{L}_I$ , com relação a  $\vec{x}_I$ , isto é,

$$r_{I_{\max}} = \max_i \|\vec{x}_i - \vec{x}_I\|, \quad i \in \vec{L}_I. \quad (1.20)$$

Várias são as funções peso utilizadas na literatura. Como exemplos de funções peso mais utilizadas pode-se citar as seguintes:

- Função peso *spline* cúbica

$$w^{EFG}(r) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4r^2 + 4r^3 & \text{para } r \leq 0.5 \\ \frac{4}{3} - 4r + 4r^2 - \frac{4}{3}r^3 & \text{para } 0.5 < r \leq 1 \\ 0 & \text{para } r > 1 \end{cases}; \quad (1.21)$$

- Função peso *spline* quártica

$$w^{EFG}(r) = \begin{cases} 1 - 6r^2 + 8r^3 - 3r^4 & \text{para } r \leq 1 \\ 0 & \text{para } r > 1 \end{cases}; \quad (1.22)$$



- Função peso gaussiana

$$w^{EFG}(r) = \begin{cases} \frac{e^{-\left(\frac{r\bar{r}_I}{c}\right)^2} - e^{-\left(\frac{\bar{r}_I}{c}\right)^2}}{1 - e^{-\left(\frac{\bar{r}_I}{c}\right)^2}} & \text{para } r \leq 1 \\ 0 & \text{para } r > 1 \end{cases}.$$

Nas equações acima

$$r = \frac{r_I}{\bar{r}_I} \quad (1.23)$$

com

$$r_I = \|\vec{x} - \vec{x}_I\| \quad (1.24)$$

sendo o raio parametrizado, entre  $[0, 1]$ , da função peso  $w^{EFG}$ . O tamanho do fator de influência  $s$  a ser utilizado na análise será objeto de investigação na seção de resultados neste capítulo.

## 1.4 Algoritmo de cobertura do domínio

Nesta seção será descrito o algoritmo utilizado para a cobertura, de um domínio genérico  $\Omega$ , pelas funções peso  $w^{EFG}$  e  $w^{EPF}$ , e conseqüentemente as funções de forma. Uma vez realizada a triangularização do domínio o algoritmo de cobertura pode ser descrito como mostrado na tabela de procedimentos 1.1.

Tabela 1.1: Algoritmo de cobertura do domínio

Para cada partícula/nó $\vec{x}_I$ da malha de integração: <ul style="list-style-type: none"> <li>- Se <math>\vec{x}_I \in \Gamma_E</math> então                         <ul style="list-style-type: none"> <li>o Utilize em <math>\vec{x}_I</math> uma função peso do tipo <math>w^{EPF}</math></li> </ul> </li> <li>- caso contrário                         <ul style="list-style-type: none"> <li>o Determine o suporte da função peso <math>w^{EFG}</math> teste                                 <ul style="list-style-type: none"> <li>· Obtenha a lista <math>\vec{L}_I</math> associada a <math>\vec{x}_I</math></li> <li>· Determine o raio <math>\bar{r}_I</math> pela Eq.(1.19)</li> <li>· Compute o raio admissível, <math>r_{I_{adm}}</math>, para a partícula <math>\vec{x}_I</math> através de:   <ul style="list-style-type: none"> <li>× Determine a menor distância da partícula <math>\vec{x}_I</math> para cada segmento do contorno <math>\Gamma_E</math>, como ilustrado na Fig. 1.9.</li> </ul> </li> <li>· Se <math>\bar{r}_I &lt; r_{I_{adm}}</math> então   <ul style="list-style-type: none"> <li>× Utilize a função <math>w^{EFG}</math> teste em <math>\vec{x}_I</math></li> </ul> </li> <li>· caso contrário   <ul style="list-style-type: none"> <li>× Utilize uma função <math>w^{EPF}</math>.</li> </ul> </li> </ul> </li> </ul> </li> <li>- fim</li> </ul>
--

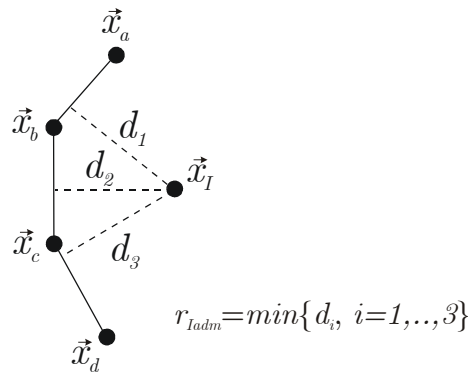


Figura 1.9: Determinação do raio admissível.

## 1.5 Transição das funções de forma EFG para EPF

Com base na Fig. 1.4, pôde-se observar que para pontos interiores do suporte de  $w^{EPF}$  a função de forma global resultante é bastante similar aquela obtida pelo MEF para elementos triangulares lineares. Se agora forem considerados pontos que possuam suporte formado apenas por funções peso do tipo  $w^{EFG}$  a função de forma nestes pontos será suave, de regularidade arbitrária dependendo da regularidade da função peso escolhida, como já comentado. Entretanto, como esperado, para os pontos contidos nos suportes de ambas as funções peso haverá uma perda de regularidade, que será dada pela função peso de menor regularidade, que neste caso é  $w^{EPF}$  que é  $C^0$ . Além disso, tais regiões podem possuir funções de forma muito não polinomiais, o que acarretará certamente em dificuldades de integração, caso não seja utilizada uma integração numérica adequada. Tais problemas de integração podem levar a uma baixa exatidão da solução nestas regiões.

A fim de exemplificar a perda de regularidade nestas regiões de transição são propostos agora dois exemplos onde são mostradas as funções de forma obtidas para um domínio unidimensional e bidimensional.

As ilustrações mostradas na Fig. 1.10 consideram um caso unidimensional onde as partículas da malha de integração são dadas pelo conjunto  $\{0, 1, 2, \dots\}$ . Suponha agora que é aplicada uma condição essencial prescrita na partícula 0. A função peso  $w^{EFG}$  utilizada aqui é a *spline* quártica, Eq.(1.22), com suporte  $\bar{r}_I = 2$ . Já as funções  $w^{EPF}$  são construídas com  $\epsilon = 0.1$ .

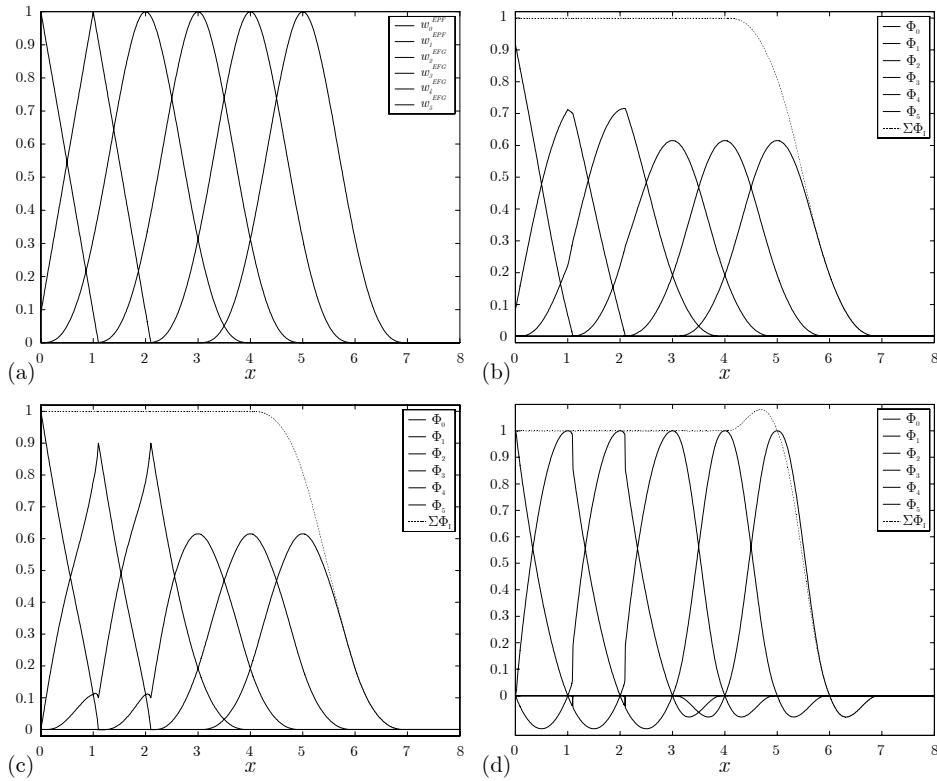


Figura 1.10: (a) Domínio unidimensional coberto por funções de peso; (b) transição para  $k=0$ ; (c) transição para  $k=1$ ; (d) transição para  $k=2$ .

A discretização do domínio juntamente com a distribuição das funções peso são apresentadas na Fig. 1.10(a). Já nas Fig. 1.10(b), Fig. 1.10(c) e Fig. 1.10(d) são apresentadas as funções de forma resultantes para  $k = 0, 1$  e  $2$  respectivamente, onde  $k$  é a ordem do monômio introduzido na base intrínseca, isto é  $\vec{p}^T(\vec{x}) = [1, x, \dots, x^k]$ . Nestas figuras é possível observar claramente, como esperado, a redução da regularidade das funções de forma globais de  $C^1 \rightarrow C^0$  na medida em que se aproxima da região  $\Gamma_E$ .

A fim de avaliar a região de transição para problemas bidimensionais é proposta agora uma análise das funções de forma oriundas da malha de integração mostrada na Fig. 1.11. Esta malha de integração é composta por 6 células e 8 nós/partículas. O tipo de cada função peso associada com cada nó/partícula é também mostrado nesta figura. Novamente, vai se utilizar como parâmetros  $\epsilon = 0.1$  para as funções EPuFem e  $\bar{r}_I = 2$  para as funções peso EFG, que são do tipo *splines* quárticas. No lado esquerdo da Fig. 1.11, Fig. 1.11(b)-(i) estão as funções peso associadas a cada nó  $I$ . Imediatamente ao lado de cada uma das funções peso, Fig. 1.11(k)-(r), estão as funções de forma obtidas para  $k = 1$ .

Observando as ilustrações das Fig. 1.11(k)-(r) é possível notar o efeito da composição de diferentes funções peso na regularidade das funções de forma. Neste resultado é possível perceber também uma interpolação quase-linear que existe entre os nós 1 e 2 da malha de integração.

Com base na construção das funções de forma mostradas na Fig. 1.11 torna-se possível agora exemplificar numericamente a perda de condicionamento da matriz de momento  $\mathbf{A}(\vec{x})$ . Isto é feito considerando medidas de condicionamento em dois pontos particulares pertencentes a  $\Gamma_E$ ,

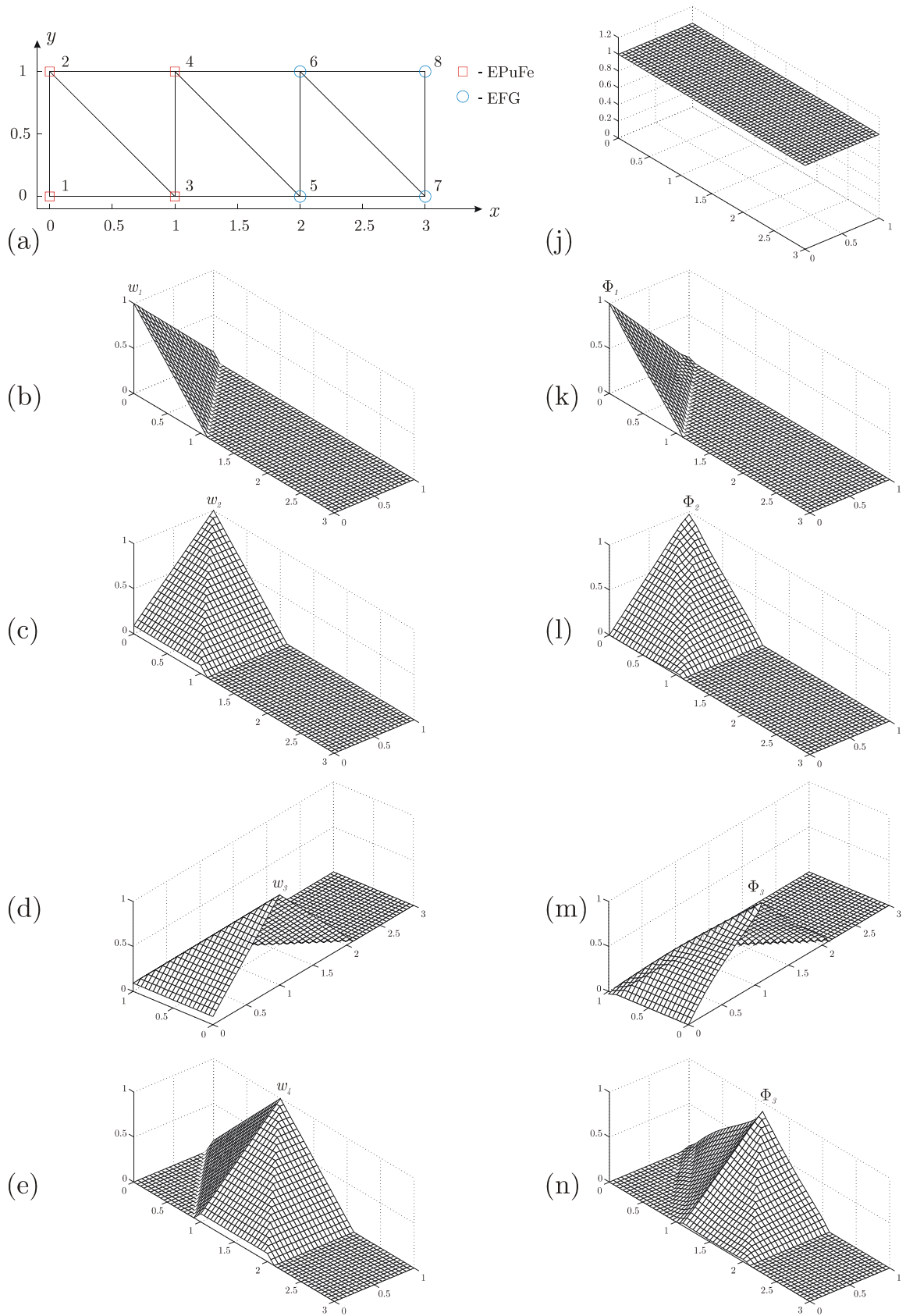


Figura 1.11: Funções de forma globais e região de transição para  $k = 1$ . (a) Malha de integração e descrição das partículas; (b)-(i) funções peso; Partição da unidade; (k)-(r) funções de peso resultantes.

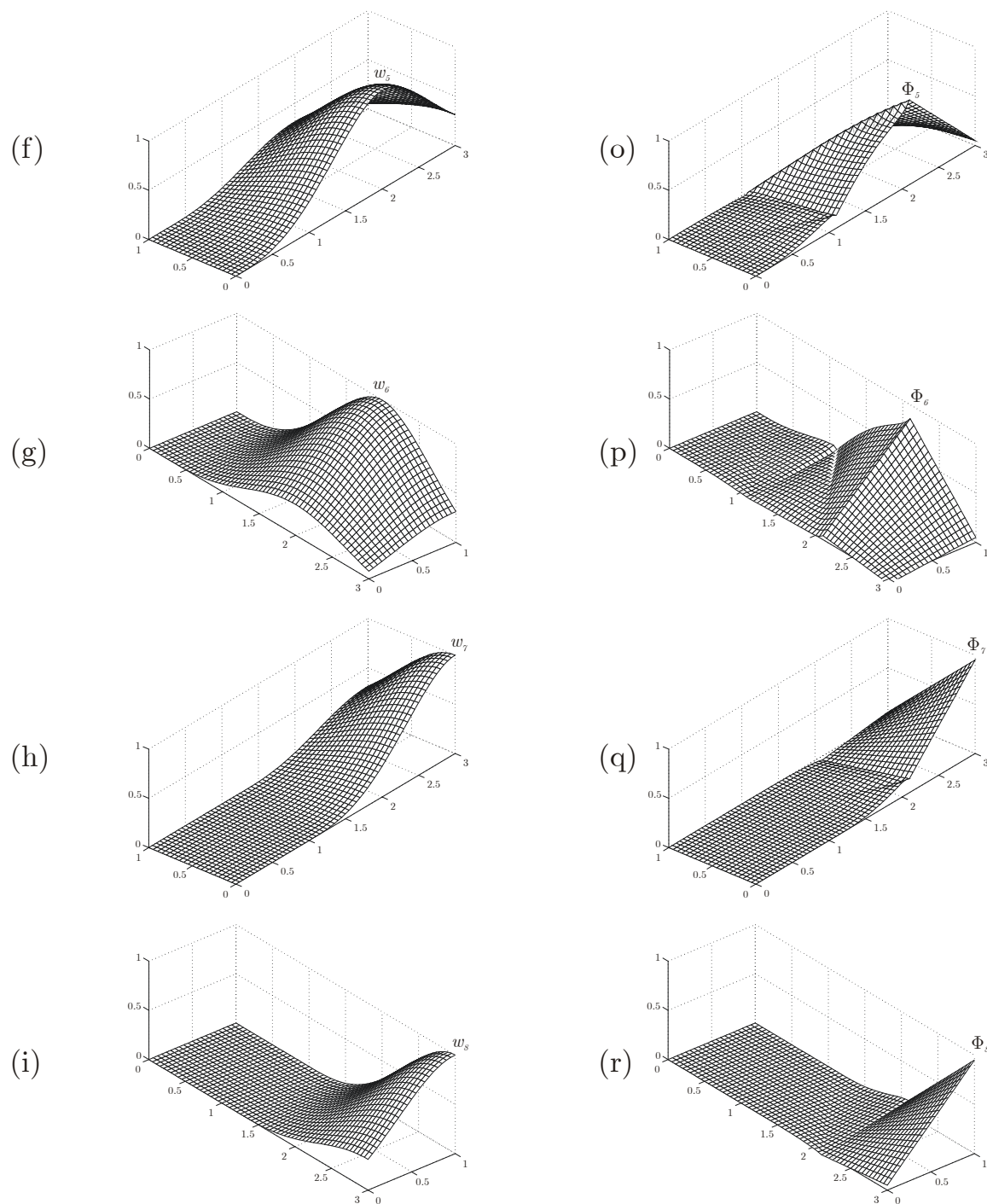


Figura 1.12: Continuação da Fig. 1.11.

Tabela 1.2: Exemplo de perda de condicionamento de  $\mathbf{A}$ .

$\epsilon$	$\det [A(0, 0)]$	$\ A(0, 0)\ _\infty$	$\ A(0, 0)\ _F$	$\det [A(0, 0.5)]$	$\ A(0, 0.5)\ _\infty$	$\ A(0, 0.5)\ _F$
$10^{-1}$	$8.2645 \times 10^{-3}$	$1.9091 \times 10^{+1}$	$2.0656 \times 10^{+1}$	$2.7047 \times 10^{-2}$	$3.0000 \times 10^{+1}$	$2.1602 \times 10^{+1}$
$10^{-2}$	$9.8030 \times 10^{-5}$	$1.0812 \times 10^{+2}$	$1.4717 \times 10^{+2}$	$2.5245 \times 10^{-3}$	$1.6412 \times 10^{+2}$	$1.3864 \times 10^{+2}$
$10^{-3}$	$9.9800 \times 10^{-7}$	$1.0080 \times 10^{+3}$	$1.4199 \times 10^{+3}$	$2.5025 \times 10^{-4}$	$1.5140 \times 10^{+3}$	$1.3290 \times 10^{+3}$
$10^{-4}$	$9.9980 \times 10^{-9}$	$1.0008 \times 10^{+4}$	$1.4148 \times 10^{+4}$	$2.5002 \times 10^{-5}$	$1.5014 \times 10^{+4}$	$1.3235 \times 10^{+4}$
$10^{-5}$	$9.9998 \times 10^{-11}$	$1.0001 \times 10^{+5}$	$1.4143 \times 10^{+5}$	$2.5000 \times 10^{-6}$	$1.5001 \times 10^{+5}$	$1.3229 \times 10^{+5}$
$10^{-6}$	$1.0000 \times 10^{-14}$	$1.0000 \times 10^{+6}$	$1.4142 \times 10^{+6}$	$2.5000 \times 10^{-7}$	$1.5000 \times 10^{+6}$	$1.3229 \times 10^{+6}$
$10^{-7}$	$1.0000 \times 10^{-16}$	$1.0000 \times 10^{+7}$	$1.4142 \times 10^{+7}$	$2.5000 \times 10^{-8}$	$1.5000 \times 10^{+7}$	$1.3229 \times 10^{+7}$

que são  $\vec{x} = (0, 0)$  e  $\vec{x} = (0, 0.5)$ . A Tabela 1.2 mostra esta análise de perda de condicionamento com base na determinação do determinante e do cálculo de números de condição da matriz  $\mathbf{A}$  para tais pontos.

## 1.6 MFG aplicado para problemas elásticos com pequenas deformações

### 1.6.1 Definição do problema

Seja  $\Omega \subset R^2$  um domínio limitado de contorno *Lipschitz*  $\partial\Omega$ , sujeito a uma força de corpo  $\vec{b}$  prescrita em  $\Omega$ , a uma tração prescrita  $\vec{t}$  definida em  $\Gamma_N$  e a um deslocamento prescrito  $\vec{u}$  definido em  $\Gamma_E$ . O problema de valor de contorno clássico associado a elasticidade infinitesimal pode ser enunciado como:

- **Problema 1.1:** Encontre  $\vec{u}$  tal que

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \vec{b} = 0, \quad \forall \vec{x} \in \Omega \quad (1.25)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \vec{n} = \vec{t}, \quad \forall \vec{x} \in \Gamma_N \quad (1.26)$$

$$\vec{u} = \vec{u}, \quad \forall \vec{x} \in \Gamma_E. \quad (1.27)$$

Aqui,  $\vec{n}$  é a normal exterior a  $\Gamma_N$  e  $\boldsymbol{\sigma}$  é o tensor tensão de *Cauchy*, onde

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.28)$$

com

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left[ \nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T \right] \quad (1.29)$$

sendo  $\boldsymbol{\varepsilon}$  o tensor de deformação infinitesimal e  $\mathbb{D}$  é o tensor relação constitutiva elástica de quarta ordem.

A forma fraca do **Problema 1.1** pode ser escrito como:

- **Problema 1.2:** Encontre  $\vec{u} \in \mathcal{K}$  tal que

$$a(\vec{u}, \delta \vec{u}) = l(\delta \vec{u}), \quad \forall \delta \vec{u} \in \mathcal{V} \quad (1.30)$$

onde

$$a(\vec{u}, \delta\vec{u}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\vec{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\delta\vec{u}) \, d\Omega \quad (1.31)$$

e

$$l(\delta\vec{u}) = \int_{\Omega} \vec{b} \cdot \delta\vec{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \vec{t} \cdot \delta\vec{u} \, d\Gamma_N. \quad (1.32)$$

Nas equações acima  $\mathcal{K}$  é o espaço dos deslocamentos admissíveis dado por

$$\mathcal{K} = \{ \vec{u} \mid u_i \in W_2^1(\Omega), \vec{u} = \vec{u} \text{ em } \Gamma_E \} \quad (1.33)$$

e  $\mathcal{V}$  é o espaço dos deslocamentos virtuais dado por

$$\mathcal{V} = \{ \delta\vec{u} \mid \delta u_i \in W_2^1(\Omega), \delta\vec{u} = 0 \text{ em } \Gamma_E \}, \quad (1.34)$$

onde  $W_2^1$  é o espaço de *Sobolev*<sup>1</sup>.

### 1.6.2 Discretização espacial

A fim de obter as equações discretas relativas a forma fraca dada pelo **Problema 1.2**, Eq.(1.30), tanto o campo  $\vec{u}$  quanto  $\delta\vec{u}$  serão construídos com base na aproximação MEFG dada pela Eq.(1.2), ou seja

$$\vec{u}^h(\vec{x}) = \sum_{I=1}^n \Phi_I(\vec{x}) \vec{u}_I \quad (1.35)$$

e

$$\delta\vec{u}^h(\vec{x}) = \sum_{I=1}^n \Phi_I(\vec{x}) \delta\vec{u}_I. \quad (1.36)$$

A fim de estabelecer o problema na forma discreta vai se denotar  $\mathcal{K}^h$  e  $\mathcal{V}^h$  como o *espaço de*

---

<sup>1</sup>Espaço de *Sobolev*:

Seja um conjunto aberto  $\Omega \subset R^n$ , então para  $1 \leq p \leq \infty$ , o espaço de Sobolev  $W_p^k(\Omega)$ , é definido como

$$W_p^k(\Omega) = \{ u \in L_p(\Omega) \mid \partial^\alpha u \in L_p(\Omega), |\alpha| \leq k \}.$$

O espaço  $W_p^k(\Omega)$ , com a norma

$$\|u\|_{W_p^k(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

para  $1 \leq p \leq \infty$ , e com norma

$$\|u\|_{W_\infty^k(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L_\infty(\Omega)},$$

é um espaço de *Banach*. Quando  $p = 2$  também é um espaço de *Hilbert* com o produto interno dado por

$$\langle u, v \rangle_{W_2^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \langle \partial^\alpha u, \partial^\alpha v \rangle_{L_2(\Omega)}, \quad \forall u, v \in W_2^k(\Omega).$$

Neste caso designa-se  $W_2^k(\Omega)$  por  $H^k(\Omega)$ .

Aqui  $L_p$  denota o espaço das funções integráveis com norma

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

aproximação tal que

$$\mathcal{K}^h \subset \mathcal{K} \quad (1.37)$$

de modo que

$$\mathcal{K}^h = \left\{ \bar{u}^h(\vec{x}) = \sum_{I=1}^n \Phi_I(\vec{x}) \bar{u}_I \mid \bar{u}^h(\vec{x}_I) = \bar{u}_I \text{ em } \Gamma_E \right\}. \quad (1.38)$$

De forma análoga,

$$\mathcal{V}^h \subset \mathcal{V} \quad (1.39)$$

com

$$\mathcal{V}^h = \left\{ \delta \bar{u}^h(\vec{x}) = \sum_{I=1}^n \Phi_I(\vec{x}) \delta \bar{u}_I \mid \delta \bar{u}^h(\vec{x}_I) = \vec{0} \text{ em } \Gamma_E \right\}. \quad (1.40)$$

Com base na discretização recém apresentada e supondo agora a hipótese de estado plano de tensões ou deformações, o **Problema 1.2** é agora reescrito na sua forma discreta como:

- **Problema 1.3:** Encontre  $\bar{u}^h \in \mathcal{K}^h$  tal que

$$a(\bar{u}^h, \delta \bar{u}^h) = l(\delta \bar{u}^h), \quad \forall \delta \bar{u}^h \in \mathcal{V}^h \quad (1.41)$$

onde

$$a(\bar{u}^h, \delta \bar{u}^h) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\bar{u}^h) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \bar{u}^h) \, d\Omega \quad (1.42)$$

e

$$l(\delta \bar{u}^h) = \int_{\Omega} \vec{b} \cdot \delta \bar{u}^h \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \vec{t} \cdot \delta \bar{u}^h \, d\Gamma_N. \quad (1.43)$$

Pelo uso das Eq.(1.35) e Eq.(1.36) o **Problema 1.3** pode ser escrito como:

- **Problema 1.4:** Encontre  $\bar{u}^h \in \mathcal{K}^h$  tal que

$$\mathbf{K} \bar{u}^g = \vec{f}^{ext} \quad (1.44)$$

com

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, d\Omega \quad (1.45)$$

e

$$\vec{f}^{ext} = \int_{\Omega} (\Phi^g)^T \vec{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} (\Phi^g)^T \vec{t} \, d\Gamma. \quad (1.46)$$

Onde também,

$$\Phi_I(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \Phi_I(\vec{x}) & 0 \\ 0 & \Phi_I(\vec{x}) \end{bmatrix} \quad (1.47)$$

e na forma global pode-se escrever

$$\bar{u}^{gT} = \left[ u_{1_1} \quad u_{2_1} \mid u_{1_2} \quad u_{2_2} \mid \cdots \mid u_{1_n} \quad u_{2_n} \right] \quad (1.48)$$



com

$$\Phi^g(\vec{x}) = \left[ \Phi_1(\vec{x}) \mid \Phi_2(\vec{x}) \mid \cdots \mid \Phi_n(\vec{x}) \right] \quad (1.49)$$

$$= \left[ \begin{array}{cc|cc|ccc} \Phi_1(\vec{x}) & 0 & \Phi_2(\vec{x}) & 0 & \cdots & \Phi_n(\vec{x}) & 0 \\ 0 & \Phi_1(\vec{x}) & 0 & \Phi_2(\vec{x}) & \cdots & 0 & \Phi_n(\vec{x}) \end{array} \right] \quad (1.50)$$

e também

$$\mathbf{B}^T(\vec{x}) = \left[ \begin{array}{cc|cc|ccc} \Phi_{1,x}(\vec{x}) & 0 & \Phi_{2,x}(\vec{x}) & 0 & \cdots & \Phi_{n,x}(\vec{x}) & 0 \\ 0 & \Phi_{1,y}(\vec{x}) & 0 & \Phi_{2,y}(\vec{x}) & \cdots & 0 & \Phi_{n,y}(\vec{x}) \\ \Phi_{1,x}(\vec{x}) & \Phi_{1,y}(\vec{x}) & \Phi_{2,x}(\vec{x}) & \Phi_{2,y}(\vec{x}) & \cdots & \Phi_{n,x}(\vec{x}) & \Phi_{n,y}(\vec{x}) \end{array} \right]. \quad (1.51)$$

Já a relação constitutiva elástica para o caso de estado plano de tensões fica

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (1.52)$$

onde  $E$  é módulo de elasticidade e  $\nu$  é o coeficiente de Poisson.

### 1.6.3 Medidas de erro

Serão definidas agora algumas medidas de erro que servirão de auxílio para a avaliação da solução obtida para os problemas propostos.

A chamada norma de energia é definida como

$$\|\vec{u}\|_E = [a(\vec{u}, \vec{u})]^{\frac{1}{2}} \quad (1.53)$$

e a norma de deslocamentos  $L_2$  como

$$\|\vec{u}\|_{L_2} = \left( \int_{\Omega} \vec{u} \cdot \vec{u} \, d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.54)$$

Com base nas Eq.(1.53) e Eq.(1.54) pode-se agora definir as seguintes medidas relativas de erro

$$\eta_E = \frac{\|\vec{u} - \vec{u}^h\|_E}{\|\vec{u}\|_E} \quad (1.55)$$

como o erro relativo com relação a norma de energia e

$$\eta_{L_2} = \frac{\|\vec{u} - \vec{u}^h\|_{L_2}}{\|\vec{u}\|_{L_2}}. \quad (1.56)$$

como o erro relativo com relação dos deslocamentos.

## 1.7 Resultados

A fim de investigar a influência do parâmetro  $\epsilon$  e do tamanho do suporte  $s$  na solução de problemas de valor de contorno, **Problema 1.2**, discretizados pelo proposto MEFM é proposta a resolução de dois problemas clássicos, com solução analítica, da elasticidade infinitesimal. Tais problemas são a viga cantilever e o problema da placa infinita com furo. Nestes exemplos é utilizada a hipótese de estado plano de tensões. Em ambos os casos, duas diferentes quadraturas de *Gauss-Legendre* são utilizadas para a integração da forma fraca.

Também serão analisados os efeitos da transição das funções EFG para EPuFem quanto a perda de exatidão na integração numérica da forma fraca do problema para um caso uniaxial.

Em todos os exemplos mostrados neste capítulo, as propriedades materiais são dadas pelo módulo de elasticidade  $E = 210GPa$  e pelo coeficiente de Poisson  $\nu = 0.3$ ., comumente usadas para o aço.

### 1.7.1 Viga cantilever

Neste caso é considerado o problema ilustrado pelo modelo na Fig. 1.13(a) onde estão mostradas, de forma esquemática, as regiões de deslocamento e tração prescrita. As malhas de integração, homoganeamente refinadas, estão também ilustradas nesta figura. Estas malhas estruturadas serão agora utilizadas para a realização de uma análise de sensibilidade quanto ao parâmetro  $\epsilon$  e também para a determinação do valor do tamanho do suporte adequado. Os dados geométricos da viga são: comprimento  $L = 8mm$ , altura  $D = 1mm$  e espessura  $t = 1mm$ . Já a carga transversal  $P$  aplicada é de  $P = 1N$ . A solução analítica para este problema, TIMOSHENKO & GOODIER (1970), é dada por:

$$u_x = \frac{-Py}{6EI} \left[ (6L - 3x)x + (2 + \nu) \left( y^2 - \frac{D^2}{4} \right) \right] \quad (1.57)$$

$$u_y = \frac{-P}{6EI} \left[ 3\nu y^2 (L - x) + (4 + 5\nu) \frac{D^2 x}{4} + (3L - x)x^2 \right] \quad (1.58)$$

para o campo de deslocamentos e

$$\sigma_{xx}(x, y) = \frac{-P(L - x)y}{I} \quad (1.59)$$

$$\sigma_{yy}(x, y) = 0 \quad (1.60)$$

$$\sigma_{xy}(x, y) = \frac{P}{2I} \left( \frac{D^2}{4} - y^2 \right) \quad (1.61)$$

para o campo de tensões. Ainda,

$$I = \frac{tD^3}{12} \quad (1.62)$$

é o momento de inércia da seção transversal.

A fim de apresentar dados sobre a discretização e a cobertura utilizada na análise é apresentada a Fig. 1.14. Nesta figura é apresentada a malha de integração Fig. 1.14(a), referente a malha da Fig. 1.13(b), a Fig. 1.14(b) mostra a cobertura gerada pelo algoritmo proposto na

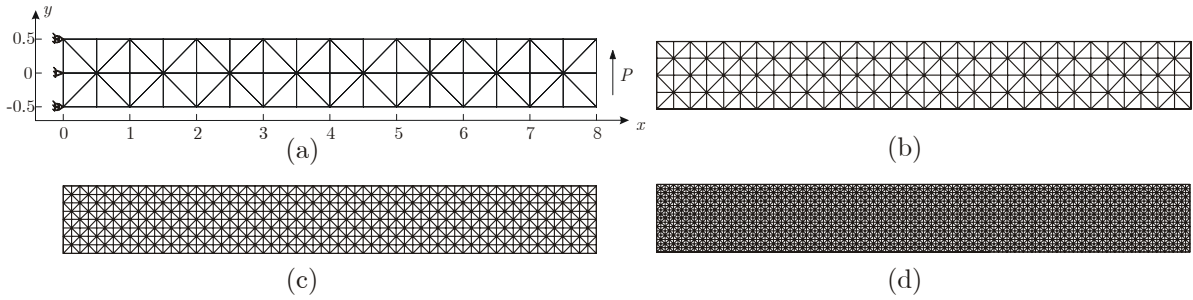


Figura 1.13: Modelo do problema da viga cantilever e malhas de integração: (a) malha de integração com 64 células/51 partículas; (b) 256/165; (c) 1024/585 e (d) 4096/2193.

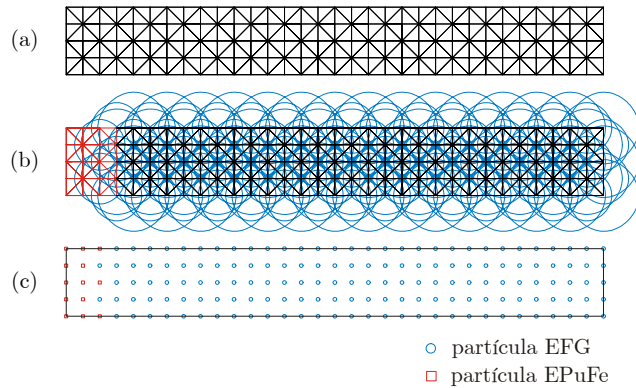


Figura 1.14: Exemplo de cobertura usada no problema da viga. (a) Malha de integração; (b) cobertura e (c) representação simplificada.

página 14, de acordo com  $s = 1.5$ , e na Fig. 1.14(c) sua representação simplificada.

A primeira investigação realizada é quanto ao tamanho do suporte  $s$ . Isto é feito considerando o efeito da mudança de  $s$  em  $\eta_E$  e  $\eta_{L_2}$ . As malhas de integração utilizadas neste exemplo foram as da Fig. 1.13(c) e (d). Os resultados estão ilustrados na Fig. 1.15(a) e (b).

Já os gráficos das Fig. 1.15(c) e (d) mostram a análise de sensibilidade para o parâmetro  $\epsilon$  com relação  $\eta_E$  e  $\eta_{L_2}$ , ainda considerando as malhas de integração da Fig. 1.13(c) e (d) fazendo  $s = 1.5$ . Análises de convergência são mostradas nos gráficos das Fig. 1.15(e)-(h) para  $s = 1.5$  e  $\epsilon = 10^{-4}$ . As legendas mostradas nas Fig. 1.15(a)-(d) indicam o número de partículas e o número de pontos de integração respectivamente. As linhas tracejadas mostradas nas Fig. 1.15(g) e (e) representam a norma de energia e a norma de deslocamento exatas para o problema.

A Fig. 1.16 mostra o resultado do deslocamento em  $y$ ,  $u_y$ , em  $x = 0$  obtidos para as malhas de integração da Fig. 1.13(c) e (d), fazendo  $s = 1.5$  e  $\epsilon = 10^{-4}$ . As Fig. 1.16(b) e (d) são detalhes ampliados de 1.16(a) e (c) respectivamente.

### 1.7.2 Placa infinita com furo

Neste exemplo é considerada uma placa infinita com furo submetida a uma tração unitária. O modelo utilizado para simular este caso está ilustrado na Fig. 1.17(a). Neste modelo são

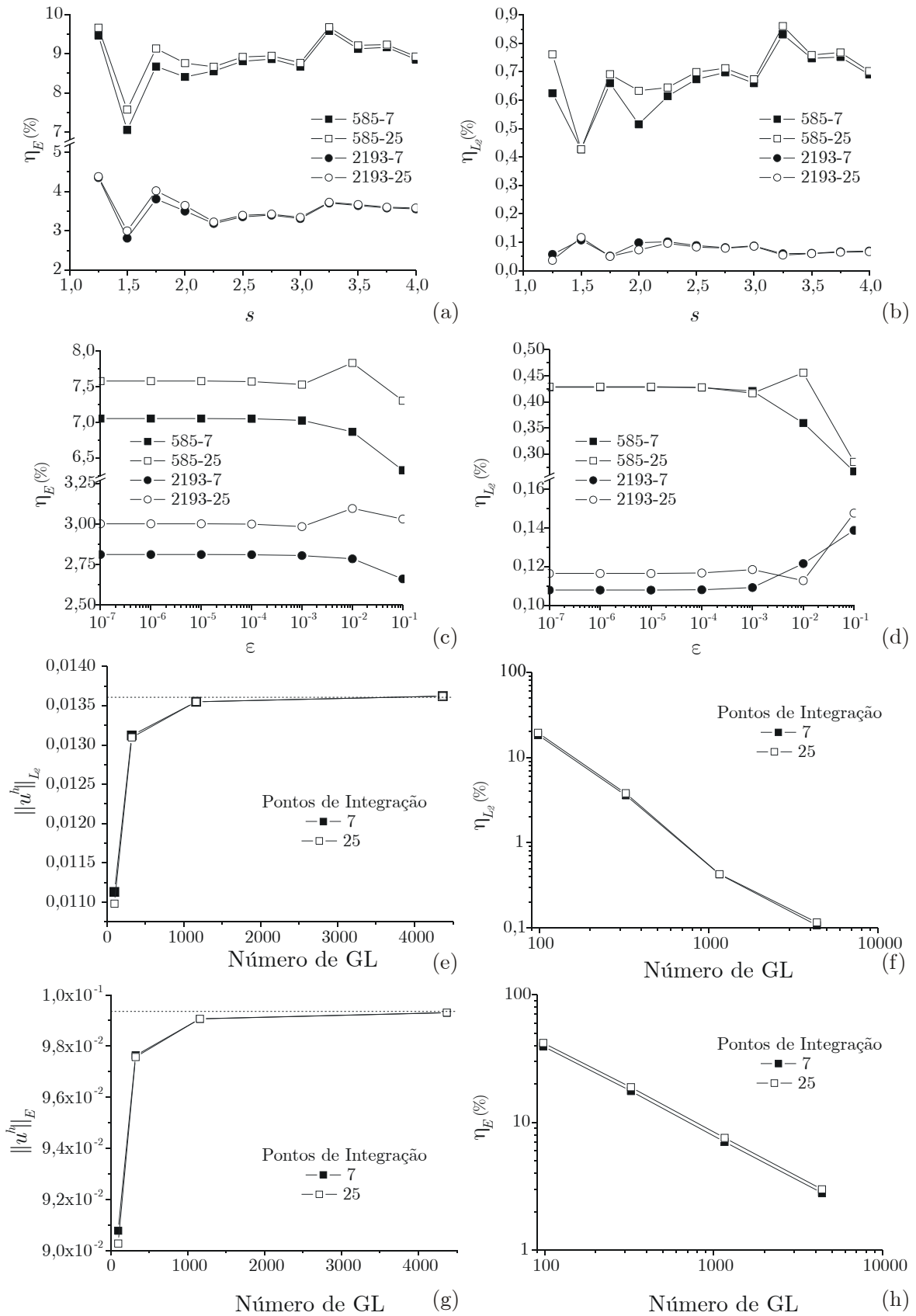


Figura 1.15: Resultados da análise para o problema da viga cantilever.

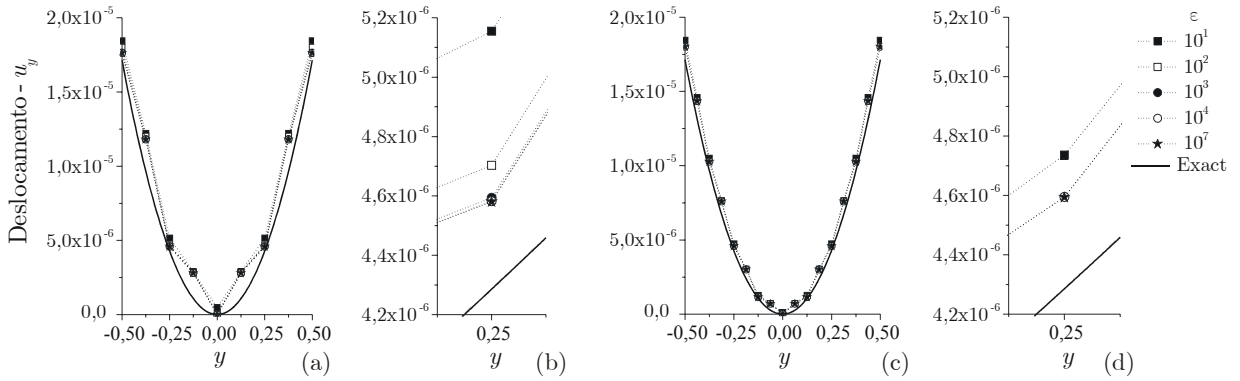


Figura 1.16: Resultado para deslocamento em  $y$ ,  $u_y$ , em  $x = 0$ .

impostas as condições de simetria de modo a modelar apenas 1/4 da placa. Além disso, a tração prescrita na fronteira é aquela obtida pela solução exata do campo de tensões, dado por TIMOSHENKO e GOODIER (1970), que é

$$\sigma_{xx}(x, y) = 1 - \frac{a^2}{r^2} \left[ \frac{3}{2} \cos(2\phi) + \cos(4\phi) \right] + \frac{3a^4}{2r^4} \cos(4\phi) \quad (1.63)$$

$$\sigma_{yy}(x, y) = -\frac{a^2}{r^2} \left[ \frac{1}{2} \cos(2\phi) - \cos(4\phi) \right] - \frac{3a^4}{2r^4} \cos(4\phi) \quad (1.64)$$

$$\sigma_{xy}(x, y) = -\frac{a^2}{r^2} \left[ \frac{1}{2} \sin(2\phi) + \sin(4\phi) \right] + \frac{3a^4}{2r^4} \sin(4\phi). \quad (1.65)$$

Neste exemplo é utilizado  $a = 1$ , que é o raio do furo.

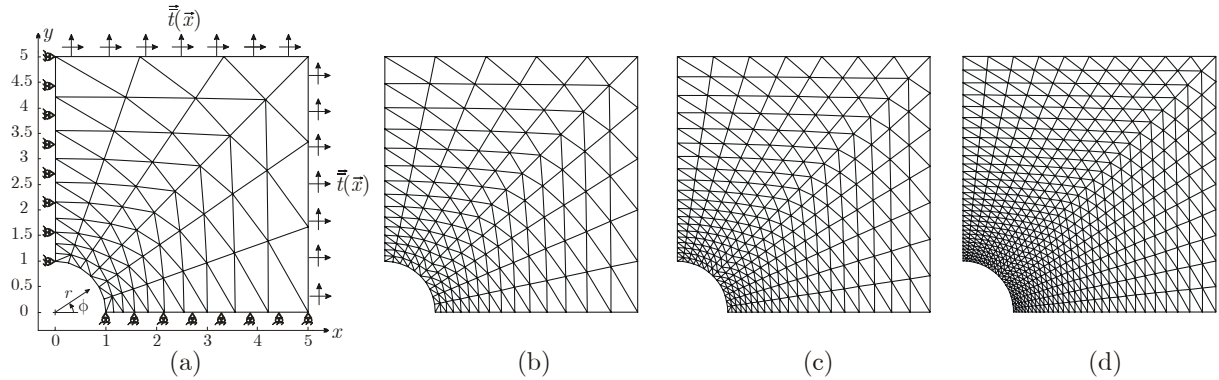


Figura 1.17: Modelo da placa infinita com furo.

Novamente, a fim de apresentar dados sobre a discretização e a cobertura utilizada na análise é apresentada a Fig. 1.18. Nesta figura é apresentada a malha de integração Fig. 1.18(a), referente a malha da Fig. 1.17(b), a cobertura gerada pelo algoritmo proposto na página 14 na Fig. 1.18(b), de acordo com  $s = 1.5$ , e sua representação simplificada, Fig. 1.18(c).

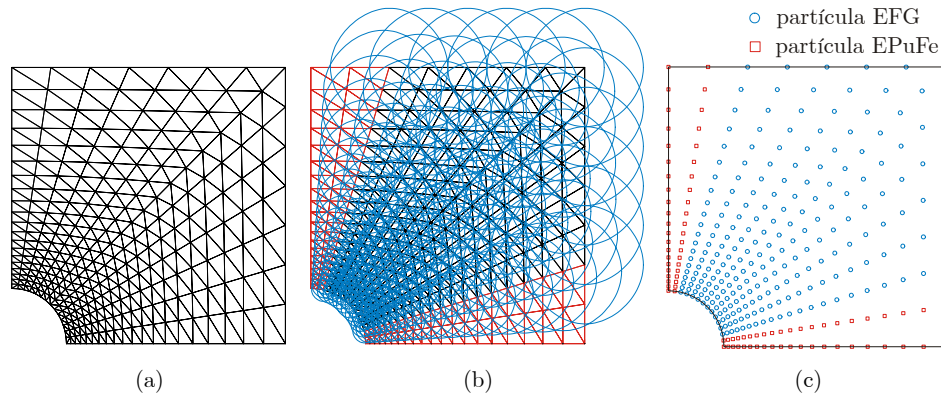


Figura 1.18: Exemplo de cobertura usada no problema da placa infinita com furo. (a) Malha de integração; (b) cobertura e (c) representação simplificada.

A primeira investigação realizada é quanto ao tamanho adequado do suporte  $s$ . Esta análise é realizada considerando o efeito da mudança de  $s$  em  $\eta_E$ . As malhas de integração utilizadas neste exemplo foram as da Fig. 1.17(c) e (d). Os resultados estão ilustrados na Fig. 1.19(a). Já o gráfico Fig. 1.19(b) mostra a análise de sensibilidade para o parâmetro  $\epsilon$  com relação a  $\eta_E$ , ainda considerando as malhas de integração da Fig. 1.17(c) e (d) e fazendo  $s = 1.5$ . Análises de convergência são mostradas nos gráficos da Fig. 1.19(c) e (d).

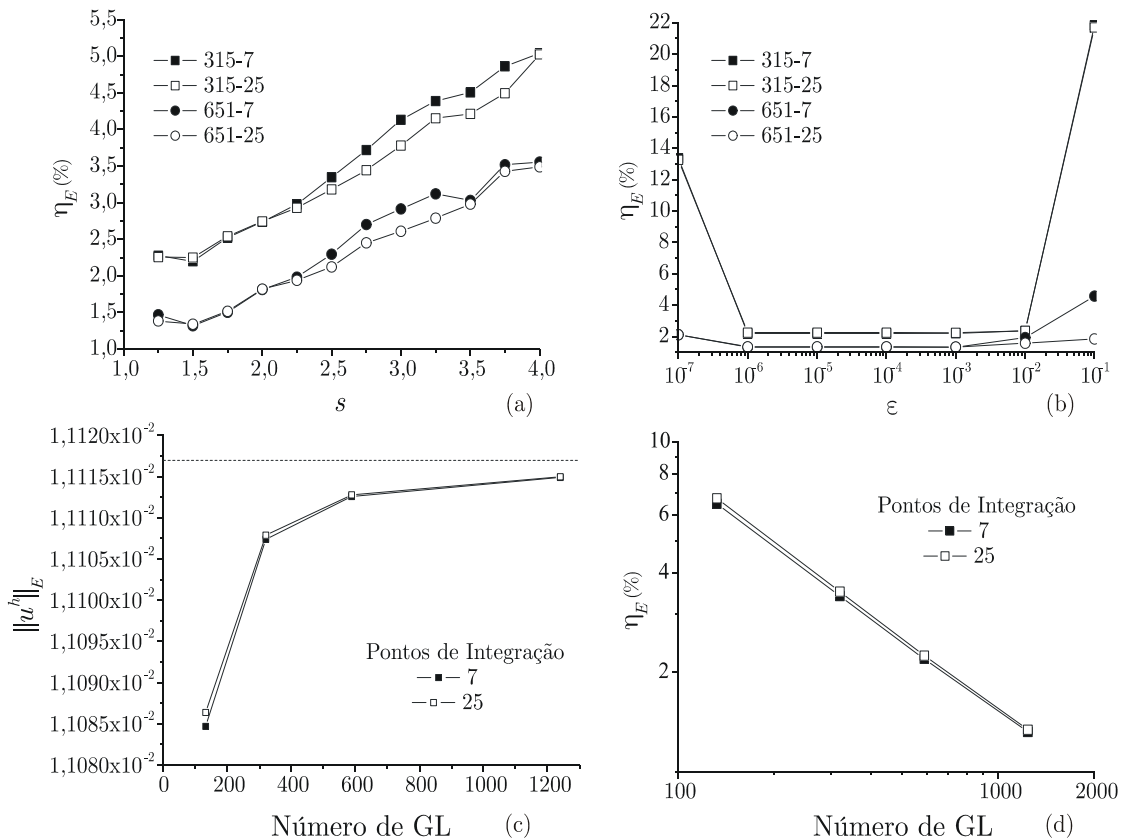


Figura 1.19: Resultados da análise para o problema da placa infinita

### 1.7.3 Perda de precisão na integração

Com o objetivo de ilustrar a perda de precisão relativa a integração numérica, principalmente na região de transição, é proposta a investigação do resultado do campo de tensões  $\sigma_{xx}$  em um exemplo uniaxial, tal como mostrado na Fig. 1.20.

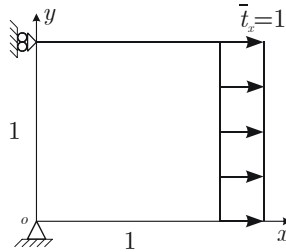


Figura 1.20: Modelo uniaxial.

Para tanto, serão consideradas duas malhas de integração. Uma delas é uma malha estruturada, que proporciona uma cobertura que possui uma certa ordenação, e a outra é uma malha não estruturada. A Fig. 1.21(a) mostra a malha estruturada usada para este exemplo e, na Fig. 1.21(b), é ilustrada a sua cobertura. Em ambos os exemplos, uma regra de integração de Gauss-Legendre de 25 pontos de integração é utilizada.

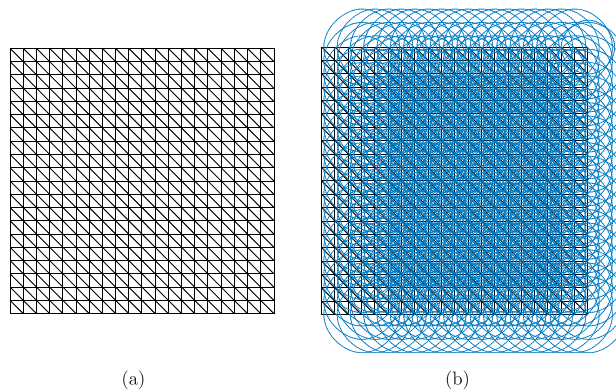


Figura 1.21: Malha de integração estruturada e cobertura.

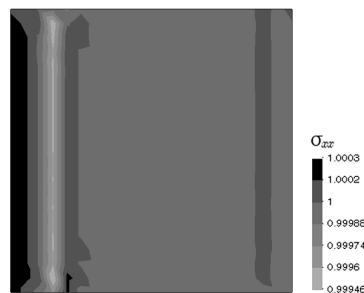


Figura 1.22: Resultado para o campo  $\sigma_{xx}$  - malha de integração estruturada.

Na Fig. 1.22 é mostrado o resultado do pós-processamento para o campo  $\sigma_{xx}$  para a malha de integração estruturada da Fig. 1.21. Já na Fig. 1.23(a) mostra a malha não estruturada usada para o exemplo uniaxial e, na Fig. 1.23(b), é ilustrada a sua cobertura.

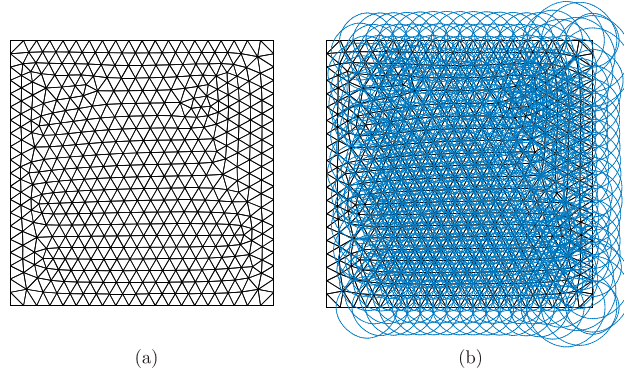


Figura 1.23: Malha de integração não estruturada e cobertura.

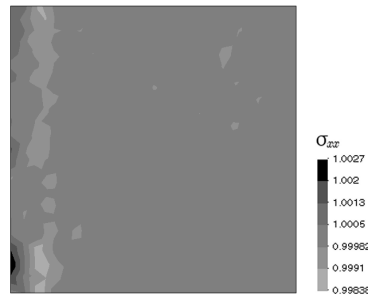


Figura 1.24: Resultado para o campo  $\sigma_{xx}$  - malha de integração não estruturada.

Por fim, na Fig. 1.24 é mostrado o resultado do pós-processamento para o campo  $\sigma_{xx}$  para a malha de integração não estruturada da Fig. 1.23.

Repare que em ambos os casos é possível distinguir a região onde existe a perda de precisão devido a quadratura numérica utilizada. Na Fig. 1.22 esta região é bem evidente, caracterizada por faixas, e na Fig. 1.24 ela é mais difusa. Porém o afastamento da solução exata,  $\sigma_{xx} = 1$ , é bem maior nesta última figura que na primeira. Em termos de erro relativo máximo no campo de tensão é possível facilmente identificar que no primeiro caso ele é de 0,054%, enquanto no segundo é de 0,27%. Note ainda que como é utilizada uma base intrínseca que satisfaz a consistência linear,  $\vec{p}^T = [1, x, y]$ , teoricamente este “*patch test*” deveria ser satisfeito exatamente. Porém, este resultado será verificado apenas quando uma regra de integração numérica adequada for utilizada.

#### 1.7.4 Outros casos rodados

No apêndice A, é mostrada uma análise de dano de *Lemaitre*. O modelo constitutivo incorpora endurecimentos isotrópico e cinemático não lineares, e também um termo de gradiente do dano.



Resultados são apresentados mostrando o efeito do termo de gradiente de dano, sobre a evolução da variável de dano, quando é considerada a presença do termo de gradiente de dano ou não.

## 1.8 Conclusões parciais

Neste capítulo foi apresentado um método de Galerkin livre de elementos modificado que preserva a propriedade da imposição direta das condições de contorno essenciais, como feito no MEF. Foram realizadas investigações numéricas, com base em alguns problemas de valor de contorno, a fim de não só avaliar, validar, o proposto método mas também para determinar valores adequados para o parâmetro de extensão  $\epsilon$  e também para o tamanho do suporte  $s$ .

Dos resultados obtidos é possível concluir que:

- Os resultados para  $\eta_E$  e  $\eta_{L_2}$  são estáveis para  $\epsilon \in [10^{-3}, 10^{-7}]$ ;
- Para  $\epsilon > 10^{-3}$  é verificado um aumento do erro,  $\eta_E$  e  $\eta_{L_2}$ , devido a inapropriada imposição das condições de contorno;
- Já para  $\epsilon < 10^{-7}$  foi verificado problemas de mau condicionamento da matriz de momento  $\mathbf{A}$  quando são processados valores sobre  $\Gamma_E$  ou em  $\Gamma_N$  na vizinhança de  $\Gamma_E$ ;
- As investigações numéricas feitas levam a um valor de  $s = 1.5$  com adequado para o tamanho do suporte;
- É possível verificar uma convergência assintótica quando a malha de integração é refinada, neste caso homogeneamente, e uma nova cobertura é proposta;

Dentro do enfoque dos métodos livres de malha, o método apresentado representa uma forma promissora de impor as condições de contorno essenciais nos mais diversos tipos problemas de valor de contorno encontrados na matemática, física ou engenharia. De fato, o MEFG preserva a forma inicial do problema de valor de contorno, já que não é necessária a utilização de outros métodos para a imposição de tais condições de contorno como, por exemplo, o método dos multiplicadores de Lagrange, da penalidade, etc.

Como uma desvantagem desta metodologia é possível mencionar a perda de regularidade das funções de forma globais na vizinhança da fronteira  $\Gamma_E$  e a maior dependência da malha de integração das funções de forma EPuFem quando comparadas com as funções de forma EFG.

## Capítulo 2

# Estimadores de erro e refino aplicados ao MEEG

### 2.1 Introdução

Com o objetivo de minimizar a perda de precisão quanto a má integração da região de transição, já mencionadas no **Capítulo 1**, e também gerar malhas de integração e coberturas apropriadas, que capturem as regiões de altos gradientes, mais propensas a erros de aproximação, é proposto neste capítulo o refino adaptativo da malha de integração. Duas estratégias para encontrar a solução melhorada *a posteriori* serão apresentadas.

Na primeira, é proposto um estimador do tipo recuperação<sup>1</sup>, na qual a solução melhorada é obtida pela minimização de um funcional que leva em conta o erro quadrático, o erro de equilíbrio e o erro na prescrição das trações prescritas em  $\Gamma_N$ .

Já na segunda estratégia, também do tipo recuperação, é proposto que a tensão melhorada seja obtida pela metodologia chamada de recuperação do equilíbrio por regiões<sup>2</sup>, REP, descrita por ZIENKIEWICZ *et al.* (1999).

Ambas as estratégias usarão o mesmo critério de refino da malha de integração e o mesmo critério de parada, que é o da busca de um erro homogêneo distribuído, BUGEDA (1991). As estratégias apresentadas aqui foram publicadas também em ROSSI & ALVES(2003a), ROSSI & ALVES (2003b), ROSSI & ALVES (2004) e ROSSI & ALVES (2005).

Importantes contribuições sobre estimadores de erro no contexto dos métodos livre ou sem malha foram propostas nos últimos anos. DUARTE & ODEN (1996) apresentaram um estimador de erro do tipo resíduo que foi aplicado ao método chamado de *h-p clouds*. Outras diferentes contribuições, agora para estimadores do tipo recuperação, foram feitas por CHUNG & BELYTSCHKO (1998) e também GAVETE *et al.* (2000) e GAVETE *et al.* (2001). Já no trabalho apresentado por LIU & TU (2002) é proposta uma estratégia de refino da malha de integração que é baseada no erro que surge quando diferentes regras de integração são consideradas.

Resultados para ambas as estratégias propostas e também uma comparação entre elas são apresentadas considerando o problema de elasticidade infinitesimal, já descrito no **Capítulo 1**,

---

<sup>1</sup>do inglês *recovery*.

<sup>2</sup>do inglês *recovery by equilibrium patches*.

sob a hipótese de estado plano de tensões.

## 2.2 Considerações iniciais sobre estimadores de erro

Na literatura especializada, muitas são as propostas de estimadores de erro e de estratégias de refinamento publicadas desde os trabalhos de ZIENKIEWICZ & ZHU (1990) e (1991), sendo que grande parte tem como aplicação o MEF. Neste contexto, revisões relevantes podem ser encontradas em AINSWORTH & ODEN (1997), WIBERG & ABDULWAHAB (1997) e ZIENKIEWICZ *et al.* (1999).

As classes mais relevantes de estimadores de erro *a posteriori* são os baseados no resíduo e os baseados na recuperação ou recuperação de gradientes. Dentre as técnicas mais efetivas de recuperação estão as técnicas chamadas regiões superconvergentes<sup>3</sup>, SPR, e a recuperação de equilíbrio por regiões, REP, ZIENKIEWICZ *et al.* (1999).

Como já brevemente comentado, no contexto de elementos livres de malha e/ou sem malha algumas contribuições já foram feitas. Entretanto, muito do trabalho aplicado ao MEF pode ser estendido para tais métodos e em especial para o MEF proposto no **Capítulo 1**.

Mais detalhadamente DUARTE & ODEN (1996) propuseram um estimador de erro baseado no resíduo, que foi aplicado ao método chamado de *h-p clouds* pelos autores. Devido a alta regularidade das funções de forma globais obtidas por este método não existiram *saltos* na tensão aproximada oriunda da solução do PVC, o que simplifica bastante a implementação do método.

No trabalho publicado por CHUNG & BELYTSCHKO (1998) foi mostrado que as aproximações resultantes do EFG podem sofrer oscilações, principalmente nas regiões de altos gradientes da solução, o que tais autores chamaram de *oscilações espúrias*<sup>4</sup>. Para minimizar este problema os autores propuseram que o campo de tensões oriundo da solução do PVC,  $\sigma^h$ , fosse novamente levado a uma nova aproximação por MLSA, porém agora adotando um suporte menor do que aquele utilizado para a solução do PVC. Este procedimento resultou em um novo campo de tensões, menos suscetível as *oscilações espúrias*, o qual os autores chamaram de solução melhorada  $\sigma^*$ .

Já em GAVETE *et al.* (2000) e GAVETE *et al.* (2001) a solução melhorada foi obtida através do MLSA porém usando uma expansão em série de Taylor apenas na vizinhança de cada partícula, juntamente com um critério de escolha de quais pontos da vizinhança devem ser escolhidos para a determinação de  $\sigma^*$ .

De fato, o sucesso dos estimadores de erro *a posteriori* depende de quão boa é a determinação de  $\sigma^*$ . Os estimadores de erro propostos neste capítulo fazem uso do procedimento proposto por CHUNG & BELYTSCHKO (1998) para obter um campo completamente suave  $\sigma^*$ . Porém, tal pós-processamento não é feito diretamente sobre os valores de  $\sigma^h$  mas sim sobre valores de tensões nodais recuperadas obtidas por procedimentos, onde *espera-se*, que estes valores nodais sejam de fato soluções melhoradas quando comparadas com  $\sigma^h$ .

<sup>3</sup>do inglês *super convergent patch recovery*.

<sup>4</sup>do inglês *spurious oscillations*.

Deste modo, seguindo CHUNG & BELYTSCHKO (1998), a tensão melhora  $\boldsymbol{\sigma}^*$  é obtida considerando que

$$\boldsymbol{\sigma}^*(\vec{x}) = \sum_{I=1}^{\bar{n}} \bar{\Phi}_I(\vec{x}) \boldsymbol{\sigma}^p(\vec{x}_I), \quad (2.1)$$

onde  $\bar{\Phi}_I$  são as funções de forma globais obtidas com um tamanho de suporte  $\bar{s}$  diferente do que o determinado na Eq.(1.19) e  $\bar{n}$  é o número de partículas pertencentes ao suporte de  $\bar{\Phi}_I$ . Diferentemente que no trabalho dos referidos autores, aqui irá se utilizar uma tensão projetada  $\boldsymbol{\sigma}^p$ . Esta tensão projetada é proveniente de uma estratégia da solução melhorada a ser adotada.

### 2.2.1 Determinação do erro

O erro no campo de deslocamentos é dado por

$$\vec{e}_u = \vec{u} - \vec{u}^h. \quad (2.2)$$

Substituindo Eq.(2.2) em Eq.(1.53), norma de energia, é possível determinar o erro na norma de energia como

$$\begin{aligned} \|\vec{e}_u\|_E &= \|\vec{u} - \vec{u}^h\|_E = \left[ a(\vec{u} - \vec{u}^h, \vec{u} - \vec{u}^h) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[ \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\vec{u} - \vec{u}^h) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{u} - \vec{u}^h) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[ \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\vec{u} - \vec{u}^h) \cdot \mathbb{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma}(\vec{u} - \vec{u}^h) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.3)$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \|\vec{e}_u\|_E &= \left[ \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^h) \cdot \mathbb{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^h) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[ \int_{\Omega} (\vec{\sigma} - \vec{\sigma}^h) \cdot \mathbf{D}^{-1} (\vec{\sigma} - \vec{\sigma}^h) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Aqui, por conveniência, será denotado  $\vec{\sigma}$  como vetor tensão de Cauchy, o qual pode ser construído através de um mapeamento adequado do campo tensorial. Muitos autores preferem ainda escrever o erro no campo de tensões como

$$\vec{e}_\sigma = \vec{\sigma} - \vec{\sigma}^h. \quad (2.5)$$

Como já comentado, nos estimadores de erro do tipo recuperação uma solução melhorada  $\vec{\sigma}^*$  é sempre determinada. Em geral, como a solução exata não é conhecida a medida de erro é

então escrita com base em  $\vec{\sigma}^*$ , isto é

$$\|\vec{e}_u\|_E \approx \|\vec{e}_u^*\|_E = \left[ \int_{\Omega} \left( \vec{\sigma}^* - \vec{\sigma}^h \right) \cdot \mathbf{D}^{-1} \left( \vec{\sigma}^* - \vec{\sigma}^h \right) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}}.$$

O chamado índice de efetividade é definido como

$$\theta = \frac{\|\vec{e}_u^*\|_E}{\|\vec{e}_u\|_E}. \quad (2.6)$$

Já os erros relativos foram definidos no **Capítulo 1**, veja Eq.(1.55) e Eq.(1.56). Estas medidas podem ser convenientemente reescritas para obter  $\eta_E^*$  e  $\eta_{L_2}^*$  pela substituição de  $\vec{\sigma}$  por  $\vec{\sigma}^*$ .

### 2.3 Estratégia de refino

Como a estratégia de refino será a mesma para ambas as formas de obter ad soluções melhoradas, ela será apresentada antes das propostas de solução melhorada. O objetivo da estratégia de refino é identificar as células de integração que devem ser refinadas de modo a satisfazer um dado critério global. O critério global mais utilizado é o da prescrição de um limite superior para  $\eta_E$ . Entretanto como  $\sigma$ , tensão de *Cauchy* exata, não é conhecida na grande maioria dos casos e este limite superior é então imposto sobre  $\eta_E^*$ . Em outras palavras o objetivo é buscar uma malha de integração tal que

$$\eta_E \approx \eta_E^* \leq \gamma \quad (2.7)$$

onde  $\gamma$  é o valor do erro global estabelecido *a priori*.

Porém, é necessário também estabelecer um critério local para que seja possível coletar as células de integração a serem refinadas. O critério local utilizado neste trabalho é o da distribuição uniforme do erro, veja BUGEDA (1991). Tal critério estabelece que uma dada célula de integração deve ser refinada se

$$\|\vec{e}_u^*\|_{E_e} \leq \frac{\gamma}{100\sqrt{n_e}} \|\vec{u}^*\|_E. \quad (2.8)$$

Agora, como

$$\|\vec{e}_u\|_E^2 = \|\vec{u}\|_E^2 - \|\vec{u}^h\|_E^2$$

e substituindo  $\vec{u}$  por  $\vec{u}^*$  nesta equação pode-se reescrever a Eq.(2.8) como

$$\|\vec{e}_u^*\|_{E_e} \leq \frac{\gamma}{100\sqrt{n_e}} \sqrt{\|\vec{u}^h\|_E^2 + \|\vec{e}_u^*\|_E^2} \quad (2.9)$$

com

$$\|\vec{e}_u^*\|_{E_e} = \left[ \int_{\Omega_e} \left( \sigma^* - \sigma^h \right) \cdot \mathbb{D}^{-1} \left( \sigma^* - \sigma^h \right) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.10)$$

### 2.3.1 Algoritmo de Refino

1. Dada a estrutura de dados, encontre a solução do PVC -  $\sigma^h$ ;
  - (a) Determina a solução melhorada  $\sigma^*$  de acordo com a estratégia adotada;
  - (b) Calcula  $\eta_E^*$ ;
  - (c) Se  $(\eta_E^* \leq \gamma)$  então;
    - i. Não é necessário refino pois a malha de integração é adequada;  
*Encerra o procedimento de refino.*

Caso contrário

- i. Coleta as células que devem ser refinadas pela Eq.(2.9);
  - ii. Realiza o refino de cada célula de acordo com a Fig. 2.1(a) e (b);
  - iii. Compatibiliza a malha de integração, Fig. 2.1(c) e (d);
  - iv. Realiza a suavização da malha de integração, Fig. 2.2;
  - v. Gera a nova estrutura de dados ou atualiza a estrutura inicial.
2. Retorna ao passo 1.

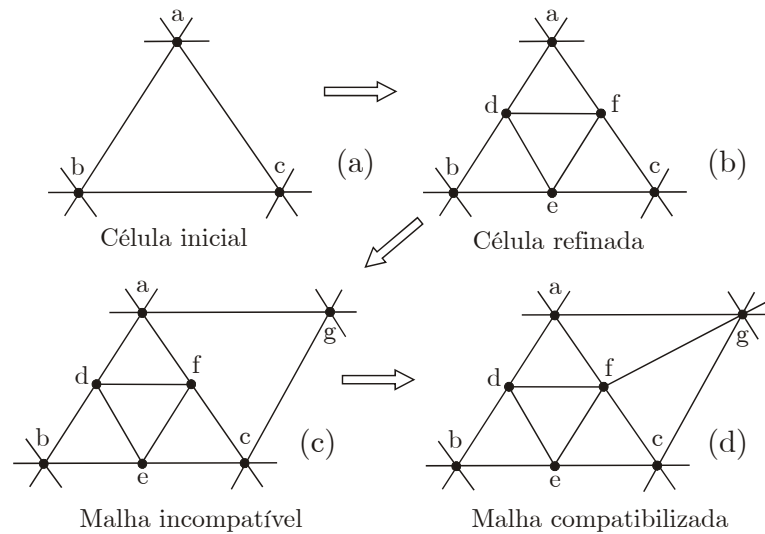


Figura 2.1: Refino e compatibilidade da malha de integração.

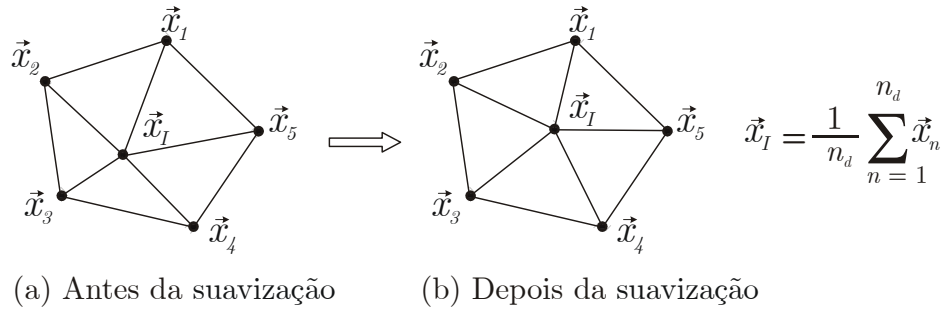


Figura 2.2: Procedimento de suavização do tipo Laplace.

## 2.4 Estimativa da solução melhorada - 1<sup>a</sup> estratégia

A mais famosa e utilizada metodologia para determinação da tensão melhorada  $\sigma^*$  é a proposta por ZIENKIEWICZ & ZHU (1990), também chamada de estimador  $Z^2$ . Esta técnica é ainda hoje vastamente utilizada no contexto de MEF. Estes autores propuseram que o campo  $\sigma^*$  fosse determinado pela interpolação dos valores nodais  $\sigma_I^p$ ,  $\sigma_I^p = \sigma^p(\vec{x}_I)$ , usando a mesmas funções de forma utilizadas para a interpolação de  $\vec{u}$ . A tensão nodal  $\sigma_I^p$ ,  $\{\sigma_I^p, I = 1, 2, \dots, n_T\}$ , foi determinada pela imposição do critério de mínimos quadrados global do erro, que pode ser escrito como a minimização do potencial  $\psi(\sigma^*)$  dado por

$$\psi(\sigma^*) = \int_{\Omega} (\sigma^* - \sigma^h) \cdot (\sigma^* - \sigma^h) d\Omega. \quad (2.11)$$

Embora  $\sigma^*$  seja mais regular que  $\sigma^h$ , não é possível dizer que, em geral,  $\sigma^*$  seja uma estimativa mais exata de  $\sigma$  que  $\sigma^h$ .

Entretanto, em muitos casos importantes, as soluções  $\sigma^h$  pelo MEF apresentam altas ordens de exatidão em certos pontos. Tais pontos especiais são conhecidos como pontos superconvergentes, isto é, altas taxas de convergência são obtidas se estes pontos forem utilizados como amostras em um procedimento de recuperação. A localização de tais pontos, quando eles existirem, já está bastante conhecida, veja ZIENKIEWICZ *et al.* (1999). No caso particular de elementos *Tri3* e *Quad8* tais pontos superconvergentes coincidem com os pontos de *Gauss-Legendre* utilizados na integração numérica. Como resultado, nestes casos particulares, a minimização do potencial  $\psi(\sigma^*)$  Eq.(2.11), é equivalente a minimização de mínimos quadrados ponderada dos pontos discretos de superconvergência. Este procedimento tem mostrado, em geral, boas aproximações para  $\sigma$ , como visto em ZHU & ATLURI (1998) e ZIENKIEWICZ *et al.* (1999). Em WIBERG & ABDULWAHAB (1997) é apresentado uma versão do REP onde foi considerado a incorporação do erro de equilíbrio e das condições de contorno.

Porém, no contexto do EFG, e portanto do MEF, não há como assegurar a existência de tais pontos superconvergentes. Além disso, o uso de funções peso do tipo *splines quárticas* já leva a soluções  $\sigma^h$  suaves quando utilizados métodos como o EFG convencional. No caso do MEF a solução  $\sigma^h$  também será suave a menos da vizinhança de  $\Gamma_E$ . Como resultado, não é

possível assegurar que a minimização de Eq.(2.11) levará a uma solução mais aproximada de  $\boldsymbol{\sigma}$  do que  $\boldsymbol{\sigma}^h$ . Para tentar superar este problema pode-se incorporar, como feito em WIBERG & ABDULWAHAB (1997), o erro devido a imposição das condições de contorno naturais e também o erro devido ao equilíbrio no potencial  $\psi(\boldsymbol{\sigma}^*)$ .

Para tanto, é considerado inicialmente o seguinte problema de minimização:

- **Problema 2.1:** Encontre  $\boldsymbol{\sigma}^* \in W$  tal que seja solução de

$$\min [\psi(\boldsymbol{\sigma}^*)] \quad (2.12)$$

sujeito as restrições

$$\vec{R} = \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^* + \vec{b} = 0 \quad \forall \vec{x} \in \Omega \quad (2.13)$$

$$\vec{J} = \boldsymbol{\sigma}^* \vec{n} - \vec{t} = 0 \quad \forall \vec{x} \in \Gamma_N. \quad (2.14)$$

Aqui,

$$\mathcal{H} = \{ \boldsymbol{\sigma}^* \mid \sigma_{ij}^*(\vec{x}) \in H^1(\Omega) \}$$

é o espaço das tensões recuperadas admissíveis,  $\vec{R}$  representa o erro distribuído residual e  $\vec{J}$  é o erro residual das trações prescritas. Entretanto, o **Problema 2.1** envolve a minimização de um funcional onde as restrições de igualdade, Eq.(2.13) e Eq.(2.14), que devem ser satisfeitas de forma pontual. A fim de superar este problema, as restrições de igualdade serão relaxadas como proposto no **Problema 2.2**, isto é:

- **Problema 2.2:** Encontre  $\boldsymbol{\sigma}^* \in W$  tal que seja solução de

$$\min [\psi(\boldsymbol{\sigma}^*)] \quad (2.15)$$

sujeito as restrições

$$\left( C_1^e \int_{\Omega_e} \vec{R} \cdot \vec{R} d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} = 0 \quad (2.16)$$

$$\left( C_2^e \int_{\Gamma_N \cap \partial\Omega_e} \vec{J} \cdot \vec{J} d\Gamma_N \right)^{\frac{1}{2}} = 0 \quad (2.17)$$

$$\forall e = 1, 2, \dots, n_e.$$

Deste modo as restrições de igualdade são fracamente impostas nas células de integração. Neste trabalho irá se considerar

$$\begin{aligned} C_1^e &= h_e^2 \\ C_2^e &= L_e \end{aligned}$$



com  $h_e = \sqrt{A_e}$ ,  $A_e$  é a área da célula de integração, e  $L_e$  comprimento total dos lados  $\Gamma_N \cap \partial\Omega_e$ .

A fim de resolver o problema de minimização enunciado em **Problema 2.2** é proposto o uso do método da penalidade exterior. Pelo uso deste método o problema de minimização, **Problema 2.2**, reduz-se a solução de uma sequência de problemas sem restrição, o qual pode ser formulado como:

- **Problema 2.3:** Encontre  $\boldsymbol{\sigma}^* \in W$  tal que seja solução de

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \lim_{(\alpha_1, \alpha_2) \rightarrow \infty} \boldsymbol{\sigma}_\alpha^* \quad (2.18)$$

onde  $\boldsymbol{\sigma}_\alpha^*$  é a solução de:

- **Problema 2.4:** Dados  $\alpha_1 > 0$  e  $\alpha_2 > 0$ , determine  $\boldsymbol{\sigma}_\alpha^*$  que seja solução de

$$\min [\psi_\alpha(\boldsymbol{\sigma}^*)] \quad (2.19)$$

tal que

$$\psi_\alpha(\boldsymbol{\sigma}^*) = \psi(\boldsymbol{\sigma}^*) + \sum_{e=1}^{n_e} \left( \alpha_1 C_1^e \int_{\Omega_e} \vec{R} \cdot \vec{R} \, d\Omega + \alpha_2 C_2^e \int_{\Gamma_N \cap \partial\Omega_e} \vec{J} \cdot \vec{J} \, d\Gamma_N \right). \quad (2.20)$$

Na prática, uma solução precisa do **Problema 2.3** pode ser obtida pelo uso de  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  suficientemente grandes. Assim, a solução do **Problema 2.4** pode ser aproximada pelo uso de parâmetros adequados  $\alpha_1 > 0$  e  $\alpha_2 > 0$  fixos. Tais parâmetros serão identificados através de uma análise paramétrica, como será mostrado mais adiante.

Da condição de estacionaridade do **Problema 2.4** surge

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}^h) \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}^* \, d\Omega + \alpha_1 \sum_{e=1}^{n_e} C_1^e \int_{\Omega_e} (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^* + \vec{b}) \cdot \operatorname{div} \hat{\boldsymbol{\sigma}}^* \, d\Omega + \\ + \alpha_2 \sum_{e=1}^{n_e} C_2^e \int_{\Gamma_N \cap \partial\Omega_e} (\boldsymbol{\sigma}^* \vec{n} - \vec{t}) \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}^* \, d\Gamma_N = 0 \quad \forall \hat{\boldsymbol{\sigma}} \in \mathcal{H}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Para o caso particular de estado plano de tensões, pode-se escrever a Eq.(2.1) em componentes como

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^*(\vec{x}) &= \sum_{J=1}^{\bar{n}} \bar{\Phi}_J(\vec{x}) \sigma_{Jxx}^p \\ \sigma_{yy}^*(\vec{x}) &= \sum_{J=1}^{\bar{n}} \bar{\Phi}_J(\vec{x}) \sigma_{Jyy}^p \\ \sigma_{xy}^*(\vec{x}) &= \sum_{J=1}^{\bar{n}} \bar{\Phi}_J(\vec{x}) \sigma_{Jxy}^p, \end{aligned} \quad (2.22)$$

e definindo o vetor  $\vec{\sigma}_J^p = [\sigma_{J_{xx}}^p, \sigma_{J_{yy}}^p, \sigma_{J_{xy}}^p]$  como o vetor de componentes da tensão projetada, pode-se então reescrever a Eq.(2.22) como

$$\vec{\sigma}^* (\vec{x}) = \sum_{J=1}^{\bar{n}} \bar{\Phi}_J (\vec{x}) \vec{\sigma}_J^p \quad (2.23)$$

onde

$$\bar{\Phi}_J (\vec{x}) = \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_J (\vec{x}) & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\Phi}_J (\vec{x}) & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\Phi}_J (\vec{x}) \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Analogamente, vai se escrever

$$\text{div } \sigma^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{xx}^*}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^*}{\partial y} \\ \frac{\partial \sigma_{xy}^*}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}^*}{\partial y} \end{bmatrix} = \sum_{J=1}^{\bar{n}} \mathbf{H}_J (\vec{x}) \vec{\sigma}_J^p \quad (2.25)$$

onde

$$\mathbf{H}_J (\vec{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\Phi}_J (\vec{x})}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \bar{\Phi}_J (\vec{x})}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial \bar{\Phi}_J (\vec{x})}{\partial y} & \frac{\partial \bar{\Phi}_J (\vec{x})}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

e

$$\sigma^* \vec{n} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^* n_x + \sigma_{xy}^* n_y \\ \sigma_{xy}^* n_x + \sigma_{yy}^* n_y \end{bmatrix} = \sum_{J=1}^{\bar{n}} \mathbf{P}_J (\vec{x}) \vec{\sigma}_J^p \quad (2.27)$$

com

$$\mathbf{P}_J (\vec{x}) = \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_J (\vec{x}) n_x & 0 & \bar{\Phi}_J (\vec{x}) n_y \\ 0 & \bar{\Phi}_J (\vec{x}) n_y & \bar{\Phi}_J (\vec{x}) n_x \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

Agora, substituindo as Eq.(2.23), Eq.(2.25) e Eq.(2.27) em Eq.(2.21) e definindo

$$\mathbf{M}_{IJ} = \int_{\Omega} \bar{\Phi}_I^T (\vec{x}) \bar{\Phi}_J (\vec{x}) d\Omega \quad (2.29)$$

$$\mathbf{K}_{IJ} = \alpha_1 \sum_{e=1}^{n_e} C_1^e \int_{\Omega_e} \mathbf{H}_I^T (\vec{x}) \mathbf{H}_J (\vec{x}) d\Omega \quad (2.30)$$

$$\mathbf{Q}_{IJ} = \alpha_2 \sum_{e=1}^{n_e} C_2^e \int_{\Gamma_N \cap \partial \Omega_e} \mathbf{P}_I^T (\vec{x}) \mathbf{P}_J (\vec{x}) d\Gamma_N \quad (2.31)$$

$$\vec{F}_I^\sigma = \int_{\Omega} \bar{\Phi}_I^T (\vec{x}) \vec{\sigma}^h d\Omega \quad (2.32)$$

$$\vec{F}_I^b = \alpha_1 \sum_{e=1}^{n_e} C_1^e \int_{\Omega_e} \mathbf{H}_I^T (\vec{x}) \vec{b} d\Omega \quad (2.33)$$

$$\vec{F}_I^t = \alpha_2 \sum_{e=1}^{n_e} C_2^e \int_{\Gamma_N \cap \partial \Omega_e} \mathbf{P}_I^T (\vec{x}) \vec{t} d\Gamma_N \quad (2.34)$$

e ainda supondo que  $\vec{\sigma}^*$  seja arbitrário, é possível finalmente definir

$$(\mathbf{M} + \mathbf{K} + \mathbf{Q}) \vec{\sigma}^p = \vec{F}^\sigma + \vec{F}^t - \vec{F}^b. \quad (2.35)$$

Tal sistema de equações deve ser resolvido para  $\vec{\sigma}^p$ .

### 2.4.1 Exemplos

A fim de avaliar a estratégia proposta serão agora analisados alguns problemas. Porém, antes disso é necessário encontrar valores adequados para  $\bar{s}$ ,  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ . Para tanto irá se adotar como problema base a placa infinita com furo Fig. 1.17, já abordada no **Capítulo 1**. Mais especificamente, a análise paramétrica será realizada considerando a malha de integração mostrada na Fig. 1.17(c) onde são utilizadas as mesmas propriedades materiais e uma regra de integração *Gauss-Legendre* de 7 pontos.

#### Análise paramétrica

A análise paramétrica terá como objetivo avaliar o efeito da variação de  $\bar{s}$ ,  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  sobre o índice de efetividade  $\theta$ . Está é uma análise de três parâmetros o que torna difícil avaliar a sua combinação. A fim de simplificar esta análise foi considerado que para cada  $\bar{s}$  fixo,  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  pudessem variar dentro de um grande intervalo. Os resultados destas análises estão mostrados nas tabelas 2.1, 2.2 e 2.3 para  $\bar{s}$  igual a 1.1, 1.5 e 2.0 respectivamente.

Tabela 2.1: Análise paramétrica para  $\bar{s} = 1.1$

$\alpha_1 \backslash \alpha_2$	$10^2$	$10^1$	$10^0$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$
$10^2$	1.4067	1.1117	1.1174	1.1646	1.1757	1.177	1.1771	1.1771	1.1771
$10^1$	1.3640	0.9794	0.9607	0.9612	0.9619	0.9620	0.9620	0.9620	0.9620
$10^0$	1.3666	0.9125	0.8960	0.8935	0.8933	0.8932	0.8932	0.8932	0.8932
$10^{-1}$	1.3813	0.8803	0.8595	0.8547	0.8538	0.8538	0.8538	0.8538	0.8538
$10^{-2}$	1.4026	0.8797	0.8563	0.8509	0.8499	0.8498	0.8498	0.8498	0.8498
$10^{-3}$	1.4065	0.8801	0.8563	0.8507	0.8498	0.8497	0.8497	0.8497	0.8497
$10^{-4}$	1.4069	0.8801	0.8562	0.8507	0.8498	0.8497	0.8497	0.8497	0.8497
$10^{-5}$	1.4070	0.8802	0.8562	0.8507	0.8498	0.8497	0.8497	0.8497	0.8497
$10^{-6}$	1.4070	0.8802	0.8562	0.8507	0.8498	0.8497	0.8497	0.8497	0.8497

Os valores mais adequados para  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são aqueles que levam o índice de efetividade o mais próximo de 1. Analisando os resultados mostrados nas tabelas pode-se reparar que há uma convergência monotônica se for percorrido o sentido de  $\alpha_1 = 10^{-6}$  e  $\alpha_2 = 10^{-6}$  até  $10^1$ . Entretanto pode-se verificar uma degradação da solução para valores maiores que  $10^1$ . Por outro lado, pode-se verificar também que para valores menores que  $10^{-3}$  os valores de  $\theta$  permanecem sem mudanças, isto é, a influência de  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  tende a ser nula, como esperado. Assim mantendo como intervalo de análise  $[10^{-3}, 10^1]$  é possível identificar  $\alpha_1 = 10^1$  e  $\alpha_2 = 10^1$  como valores adequados. Ainda é possível verificar que para este intervalo  $\bar{s} = 1.1$  produz os melhores valores.

Na Fig. 2.3 é ilustrada a influência de  $\alpha_2$  na prescrição da tração em  $\Gamma_N$ . É possível verificar de fato que há uma influência bastante significativa na correção da distribuição da tração, quando

Tabela 2.2: Análise paramétrica para  $\bar{s} = 1.5$

$\alpha_1 \backslash \alpha_2$	$10^2$	$10^1$	$10^0$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$
$10^2$	1.2370	1.0035	0.9911	0.9920	0.9928	0.9928	0.9929	0.9929	0.9929
$10^1$	1.2243	0.9646	0.9523	0.9503	0.9502	0.9502	0.9502	0.9502	0.9502
$10^0$	1.2232	0.9073	0.8919	0.8894	0.8891	0.8891	0.8891	0.8891	0.8891
$10^{-1}$	1.2928	0.8862	0.8569	0.8528	0.8519	0.8519	0.8519	0.8519	0.8519
$10^{-2}$	1.3290	0.8891	0.8540	0.8494	0.8482	0.8481	0.8481	0.8481	0.8481
$10^{-3}$	1.3346	0.8899	0.8539	0.8493	0.8481	0.8480	0.8480	0.8480	0.8480
$10^{-4}$	1.3352	0.8900	0.8539	0.8493	0.8481	0.8480	0.8480	0.8480	0.8480
$10^{-5}$	1.3353	0.8900	0.8539	0.8493	0.8481	0.8480	0.8480	0.8480	0.8480
$10^{-6}$	1.3353	0.8900	0.8539	0.8493	0.8481	0.8480	0.8480	0.8480	0.8480

Tabela 2.3: Análise paramétrica para  $\bar{s} = 2.0$

$\alpha_1 \backslash \alpha_2$	$10^2$	$10^1$	$10^0$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$
$10^2$	1.1320	1.0037	0.9895	0.9883	0.9886	0.9887	0.9887	0.9887	0.9887
$10^1$	1.0887	0.9690	0.9514	0.9489	0.9487	0.9487	0.9487	0.9487	0.9487
$10^0$	1.0300	0.9177	0.8928	0.8896	0.8891	0.8890	0.8890	0.8889	0.8889
$10^{-1}$	1.0052	0.8914	0.8567	0.8511	0.8501	0.8498	0.8498	0.8498	0.8498
$10^{-2}$	1.0095	0.8928	0.8536	0.8467	0.8452	0.8449	0.8448	0.8448	0.8448
$10^{-3}$	1.0108	0.8936	0.8536	0.8465	0.8450	0.8447	0.8447	0.8447	0.8447
$10^{-4}$	1.0109	0.8937	0.8536	0.8465	0.8450	0.8447	0.8447	0.8447	0.8447
$10^{-5}$	1.0109	0.8937	0.8536	0.8465	0.8450	0.8447	0.8447	0.8447	0.8447
$10^{-6}$	1.0109	0.8937	0.8536	0.8465	0.8450	0.8447	0.8447	0.8447	0.8447

comparado com a tração exata, se for considerado  $\alpha_2 = 10$ . Neste exemplo foi utilizado  $\alpha_1 = 0$  de modo a não incorporar este efeito na análise.

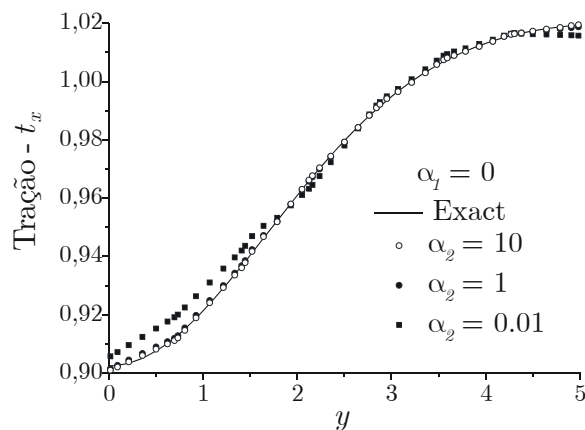


Figura 2.3: Efeito do parâmetro  $\alpha_2$  na tração para  $x = 5$ .

### Refino da placa infinita com furo

Uma vez determinados os valores adequados para  $\bar{s}$ ,  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  é possível agora aplicar a proposta de estratégia de refino. Para tanto, irá se considerar agora o refino da placa infinita com furo

partindo da malha de integração não estruturada de 95 nós como mostrada na Fig. 2.4(a) e tendo como objetivo alcançar uma malha de integração para  $\gamma = 1.5\%$ . Após três níveis de refino a malha de integração de 962 nós, mostrada na Fig. 2.4(b), é obtida com  $\eta_E^* = 1.306\%$ , que é de fato uma boa estimativa do erro exato uma vez que  $\eta_E = 1.314\%$ .

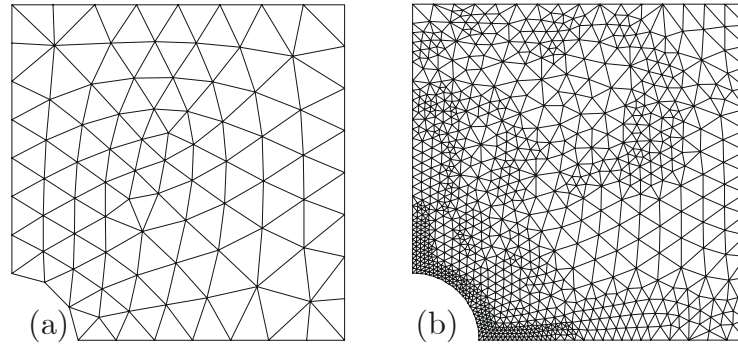


Figura 2.4: Malha de integração inicial (a) e refinada (b) para  $\gamma = 1.5\%$ .

Um comparação entre a tensão exata e a tensão melhorada  $\sigma_{xx}^*$  para  $\phi = 90^\circ$  é apresentada na Fig. 2.5. Já a Fig. 2.6 apresenta a curva característica de convergência.

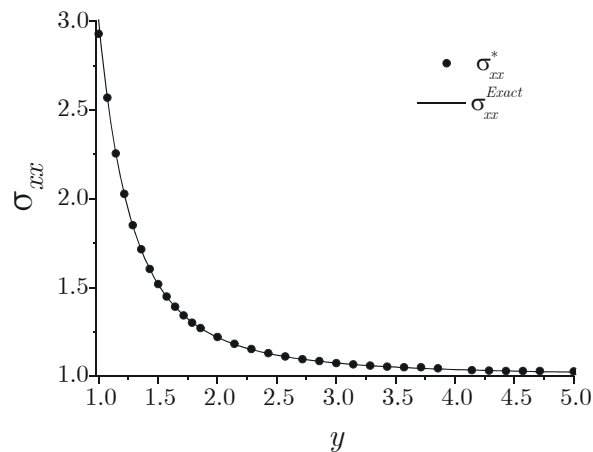


Figura 2.5:  $\sigma_{xx}^* \times \sigma_{xx}$  para  $\phi = 90^\circ$ .

### Refino de um componente mecânico

Vai se considerar agora o refino de um componente mecânico complexo, tal como mostrado na Fig. 2.7. Neste caso o erro admissível prescrito será de  $\gamma = 3\%$ . A malha de integração inicial é dada pela Fig. 2.7(a) e contém 208 nós. Após três níveis de refino a malha de integração da Fig 2.7(b) é alcançada com 3741 nós e com  $\eta_E^* = 2.17\%$ . Já a Fig. 2.8 mostra uma saída de tensão equivalente de von Mises para a malha refinada.

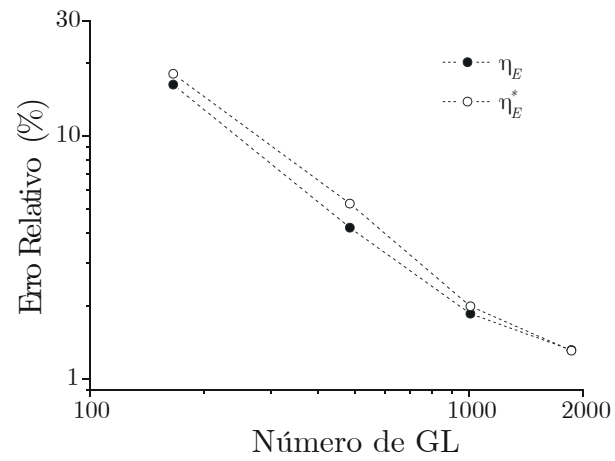
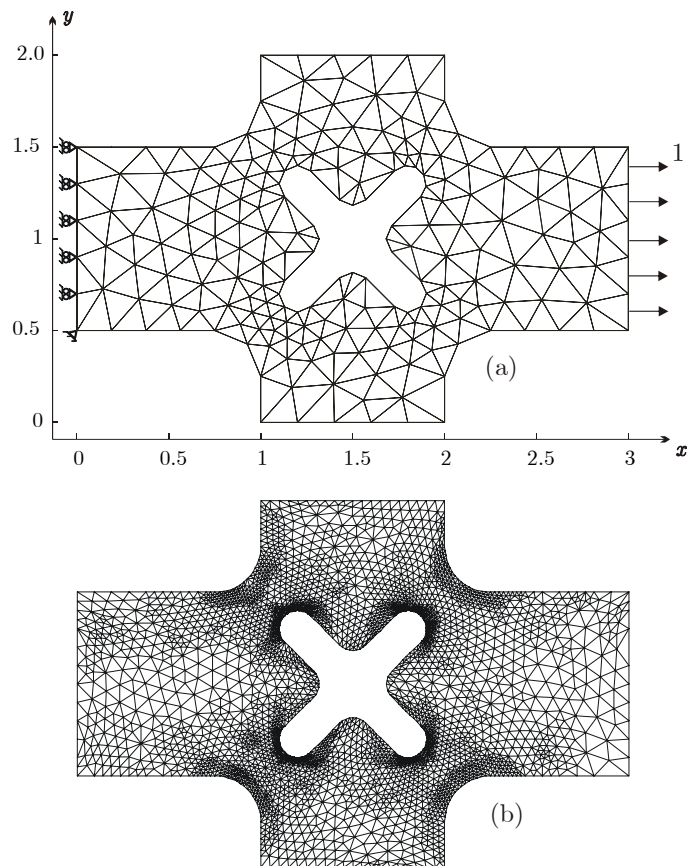


Figura 2.6: Análise de convergência

Figura 2.7: Refino de um componente mecânico complexo para  $\gamma = 3.0\%$  - (a) malha inicial; (b) malha final.

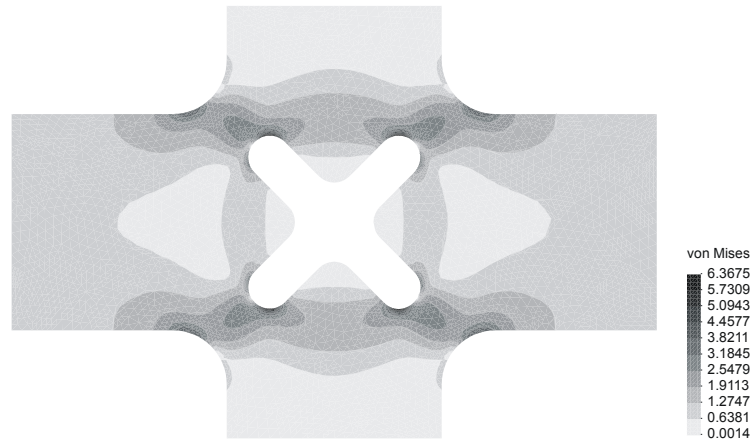


Figura 2.8: Tensão equivalente de von Mises.

## 2.5 Estimativa da solução melhorada - 2<sup>a</sup> estratégia

A segunda estratégia proposta para estimativa da solução melhorada está baseada na metodologia REP. Para a aplicação deste método é preciso estabelecer regiões<sup>5</sup>  $\Omega_p$  sobre as quais é obtida uma tensão recuperada  $\sigma^p$  que é, diferentemente da estratégia 1, suave sobre tal região. Este campo suave é obtido pela imposição da condição de equilíbrio de modo que

$$\int_{\Omega_p} \sigma^h \cdot \varepsilon(\delta \vec{u}^h) \, d\Omega \approx \int_{\Omega_p} \sigma^p \cdot \varepsilon(\delta \vec{u}^h) \, d\Omega \quad \forall \delta \vec{u}^h \in \mathcal{V}^h. \quad (2.36)$$

Porém, como proposto por ZIENKIEWICZ *et al.* (1999), a fim de evitar problemas de singularidade na determinação de  $\sigma^p$  a condição de equilíbrio sobre  $\Omega_p$  é imposta sobre cada componente de  $\sigma^p$ . Mais ainda, no caso de estado plano de tensões pode-se escrever  $\vec{\sigma}^{pT} = [\sigma_{xx}^p, \sigma_{yy}^p, \sigma_{xy}^p]$  e  $\vec{\sigma}^{hT} = [\sigma_{xx}^h, \sigma_{yy}^h, \sigma_{xy}^h]$ . Neste caso o condição de equilíbrio modificada na região  $\Omega_p$  pode ser escrita como

$$\int_{\Omega_p} \vec{\sigma}_i^h \cdot \vec{\varepsilon}(\delta \vec{u}^h) \, d\Omega \approx \int_{\Omega_p} \vec{\sigma}_i^p \cdot \vec{\varepsilon}(\delta \vec{u}^h) \, d\Omega \quad \forall \delta \vec{u}^h \in \mathcal{V}^h, \quad (2.37)$$

onde  $\vec{\sigma}_i^h = (\vec{\sigma}^h \cdot \vec{e}_i) \vec{e}_i$  e  $\vec{\sigma}_i^p = (\vec{\sigma}^p \cdot \vec{e}_i) \vec{e}_i$ .

### 2.5.1 Definição das regiões

Em geral, as regiões  $\Omega_p$  são construídas ou identificadas com base em duas diferentes estratégias, que são:

- Região de elementos circundando uma dada partícula/nó, isto é, uma região tipo partícula/nó;

<sup>5</sup>do inglês *patches*.

- Região definida pelos elementos que circundam um dado elemento/célula, isto é, uma região tipo elemento/célula.

Será considerado neste trabalho uma região do tipo partícula. Como é utilizado neste trabalho uma partição do domínio com base em células de integração triangulares uma típica região do tipo partícula é do tipo como mostrada na Fig. 2.9.

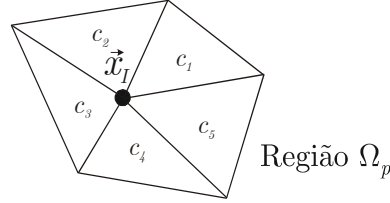


Figura 2.9: Região tipo partícula  $\Omega_p$ .

### 2.5.2 Determinação de $\sigma^p$

Como já comentado, as soluções oriundas do MEFM podem apresentar oscilações espúrias. Ainda, nas regiões vizinhas à  $\Gamma_E$  as funções de forma apresentam uma perda de regularidade. Devido a estes fatos, a tensão  $\sigma^p$  será aproximada com base em  $\sigma^h$  dentro de cada região por uma função polinomial de ordem adequada. Assim,  $\sigma^p$  será não somente contínua mas também livre de oscilações dentro de cada região.

O procedimento para a determinação da tensão melhorada  $\sigma^*$  pode ser descrito como:

1. Aproximar a tensão recuperada  $\bar{\sigma}_i^p$  em cada região tipo partícula por um polinômio de ordem adequada, isto é,

$$\bar{\sigma}_i^p = (\bar{\sigma}^p \cdot \vec{e}_i) \vec{e}_i = \sigma_i^p \vec{e}_i, \quad (2.38)$$

onde

$$\sigma_i^p = \vec{q} \cdot \vec{a}_i \quad (2.39)$$

com  $\vec{q}^T = [1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots]$  e  $\vec{a}_i$  sendo o vetor de coeficientes a determinar. A forma discreta da condição de equilíbrio modificada pode ser escrita como

$$\int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T \bar{\sigma}_i^h d\Omega \approx \int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T \bar{\sigma}_i^p d\Omega \quad (2.40)$$

onde  $\mathbf{B}$  é a matriz deslocamento/deformação, Eq.(1.51), que relaciona as derivadas das funções de forma de cada partícula  $\vec{x}_I$ ;

2. Determinar os coeficientes  $\vec{a}_i$  por mínimos quadrados, isto é, pela minimização de

$$\left\| \int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T \bar{\sigma}_i^h d\Omega - \int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T \bar{\sigma}_i^p d\Omega \right\|^2. \quad (2.41)$$



Definindo agora,

$$\mathbf{H}_i = \int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T \vec{e}_i \otimes \vec{q} \, d\Omega \quad (2.42)$$

e

$$\vec{F}_i = \int_{\Omega_p} (\mathbf{B}^T \vec{e}_i \otimes \vec{e}_i) \vec{\sigma}^h \, d\Omega \quad (2.43)$$

é possível determinar

$$\vec{a}_i = (\mathbf{H}_i^T \mathbf{H}_i) \mathbf{H}_i \vec{F}_i. \quad (2.44)$$

A estratégia utilizada para a determinação da tensão  $\sigma^p$  é o uso de um polinômio quadrático em todas as regiões tipo partícula que possuem uma partícula EFG em  $\vec{x}_I$ . Para aquelas regiões que possuem uma partícula EPUFe em  $\vec{x}_I$ , um polinômio linear teste é inicialmente utilizado. Se a matriz  $\mathbf{H}_i^T \mathbf{H}_i$  resultante for singular, então  $\sigma^p$  será aproximada por um polinômio constante, isto é,  $\vec{q} = [1]$ ;

3. Uma vez que o campo tensão recuperada é determinado, para por exemplo a  $k$ -ésima região tipo partícula, a tensão recuperada é avaliada na partícula que define a região, isto é,  $\vec{\sigma}^p(\vec{x}_k)$ ;
4. Calculadas as tensões em cada uma das partículas da malha de integração, o campo suave global  $\sigma^*$  é construído, pela uso da Eq.(2.1), mediante o uso de um valor de  $\bar{s}$  adequado.

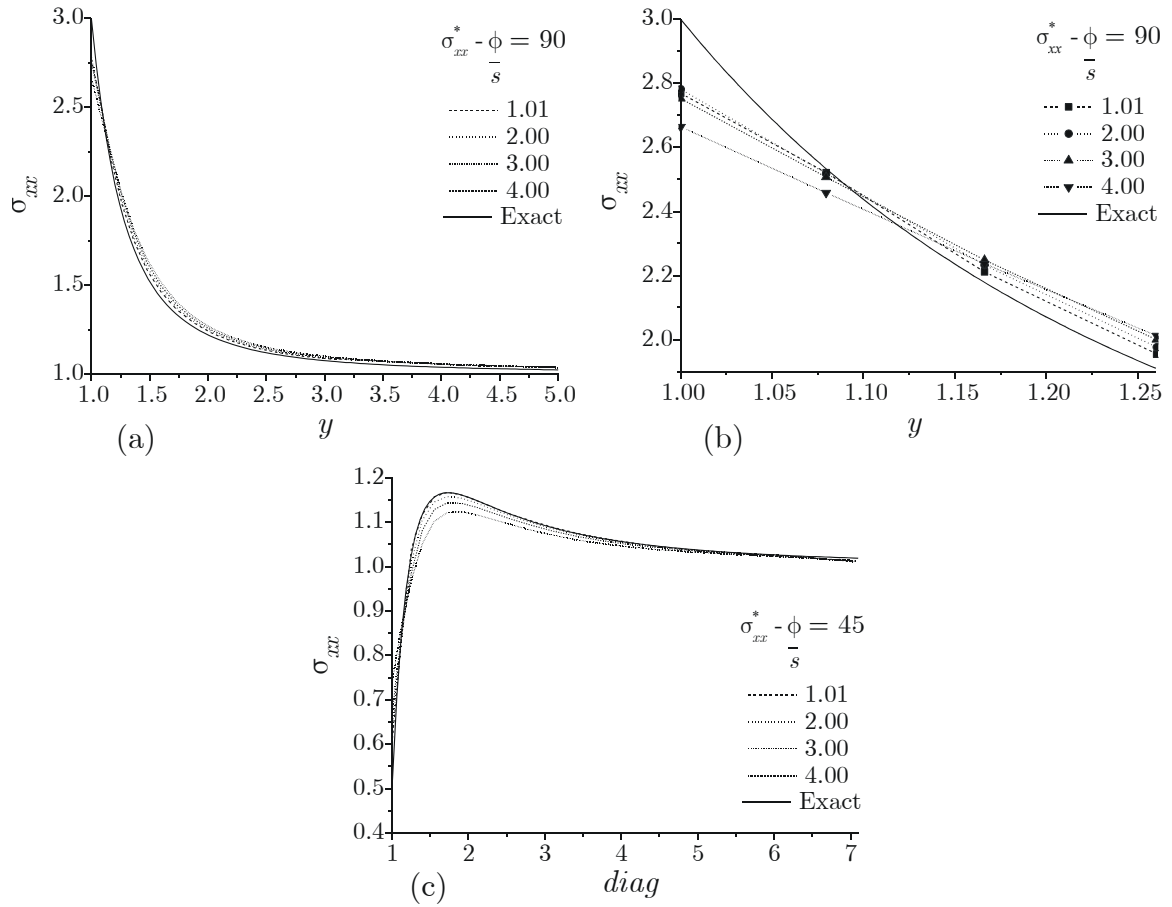
### 2.5.3 Determinação de $\bar{s}$

De forma análoga ao realizado na estratégia 1, neste caso também será necessário realizar uma análise para a determinação de  $\bar{s}$ . Novamente, esta análise será realizada considerando o efeito da mudança de  $\bar{s}$  no índice de efetividade  $\theta$  considerando a malha de integração mostrada na Fig. 1.17(c). Como o tamanho do suporte utilizado na análise tem influência direta na determinação da tensão melhorada pelo REP, esta análise também irá considerar uma variação de  $s$ . Os resultados desta análise paramétrica estão mostrados na tabela 2.4. Desta análise é possível identificar que o valor de  $\theta$  mais próximo da unidade acontece para  $s = 1.5$  e  $\bar{s} = 1.10$ .

Tabela 2.4: Análise paramétrica para determinação de  $\bar{s}$

$s \setminus \bar{s}$	1.01	1.05	1.10	1.25	1.50	2.0	2.50	3.0	3.50	4.0
1.25	1.7150	1.7137	1.7121	1.7119	1.7407	1.8411	1.9134	1.9954	2.1000	2.2452
1.5	1.0423	1.0416	1.0412	1.0425	1.0526	1.1108	1.2110	1.3552	1.5466	1.7858
1.75	1.0711	1.0704	1.0695	1.0673	1.0683	1.1003	1.1662	1.2707	1.4175	1.6082
2.0	1.0516	1.0510	1.0503	1.0475	1.0450	1.0598	1.1063	1.1927	1.3220	1.4942
2.25	1.0500	1.0497	1.0493	1.0479	1.0476	1.0655	1.1093	1.1863	1.3008	1.4543
2.5	1.0546	1.0543	1.0539	1.0525	1.0526	1.0695	1.1056	1.1672	1.2591	1.3843
2.75	1.1092	1.1084	1.1071	1.1040	1.1027	1.1181	1.1464	1.1924	1.2621	1.3595
3.0	1.1003	1.0992	1.0974	1.0920	1.0871	1.0971	1.1215	1.1611	1.2203	1.3026

Na Fig. 2.10 está ilustrado o efeito de  $\bar{s}$  em  $\sigma_{xx}^*$  para  $\phi = 90^\circ$  e  $\phi = 45^\circ$ .


 Figura 2.10: Variação de  $\sigma_{xx}^*$  com relação a  $\bar{s}$ .

### 2.5.4 Exemplos

#### Placa infinita com furo

Uma vez determinado o valor adequado para  $\bar{s}$ , pode-se partir para a aplicação da proposta de refino. Para tanto, vai se considerar agora o refino da placa infinita com furo partindo da malha de integração não estruturada de 95 nós como mostrada na Fig. 2.11(a) e tendo como objetivo alcançar uma malha de integração para  $\gamma = 1.5\%$ , que é o mesmo exemplo já proposto para a primeira estratégia. Após três níveis de refino a malha de integração de 830 nós mostrada na Fig. 2.11(b) é obtida com  $\eta_E^* = 1.225\%$ , que é de fato uma boa estimativa do erro exato, já que  $\eta_E = 1.331\%$ .

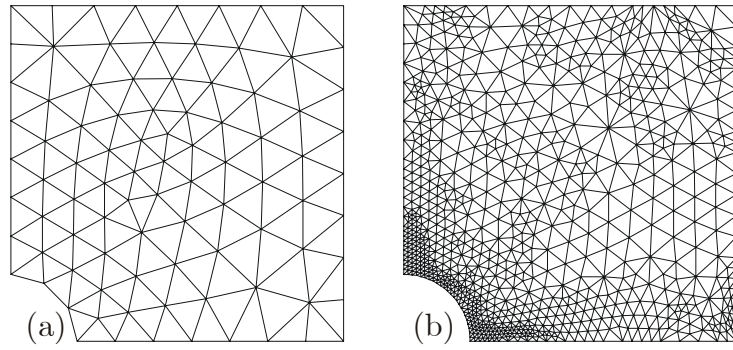


Figura 2.11: Refino da placa infinita para  $\gamma = 1.5\%$  - (a) malha inicial; (b) malha final.

Na Fig. 2.12(a) é mostrado um comparativo entre a convergência,  $\eta_E$  e  $\eta_E^*$ , da estratégia 1 e da estratégia 2. Já na Fig. 2.12(b) é ilustrada a comparação entre a tensão exata e a tensão melhorada para  $\phi = 90^\circ$  na Eq.(1.63).

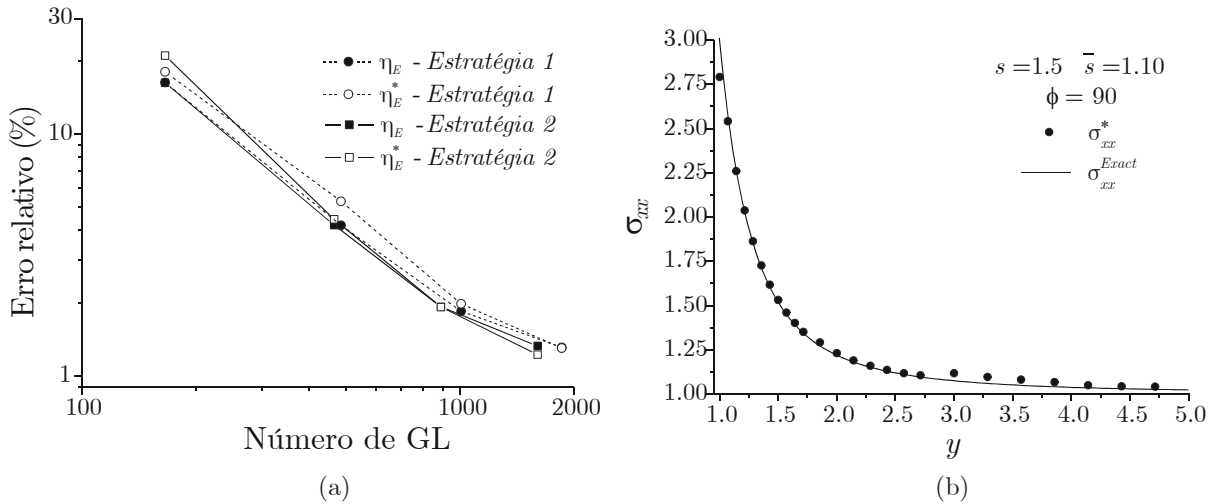


Figura 2.12: Detalhes da análise - (a) Comparativo entre as convergências da estratégia 1 e 2; (b) Tensão melhorada para  $\phi = 90^\circ$  - estratégia 2.

### Refino de um componente mecânico

Considera-se agora o refino de um componente mecânico complexo, tal como mostrado na Fig. 2.13(a). Neste caso o erro admissível prescrito é de  $\gamma = 2.75\%$ . A malha de integração inicial é dada pela Fig. 2.13(a) e contém 362 nós. Após três níveis de refino a malha de integração da Fig. 2.13(c) é alcançada com 2799 nós e com  $\eta_E^* = 2.141\%$ . A mesma análise foi realizada considerando a estratégia 1. Neste caso, a malha de integração final mostrada na Fig. 2.13(e) e obtida após três níveis de refino, porém com 3446 partículas e com  $\eta_E^* = 2.377\%$ . As Fig. 2.13(b), Fig. 2.13(d) e Fig. 2.13(f) mostram também a disposição das partículas para cada malha de integração. Já a Fig. 2.14 mostra a convergência, considerando agora  $\eta_E^*$ , para ambas as estratégias e na Fig. 2.15 mostra a saída para a tensão equivalente de von Mises para a malha

refinada para cada caso. Para ambos os casos mostrados nesta figura a tensão equivalente de von Mises foi calculada considerando as tensões melhoradas de cada caso.

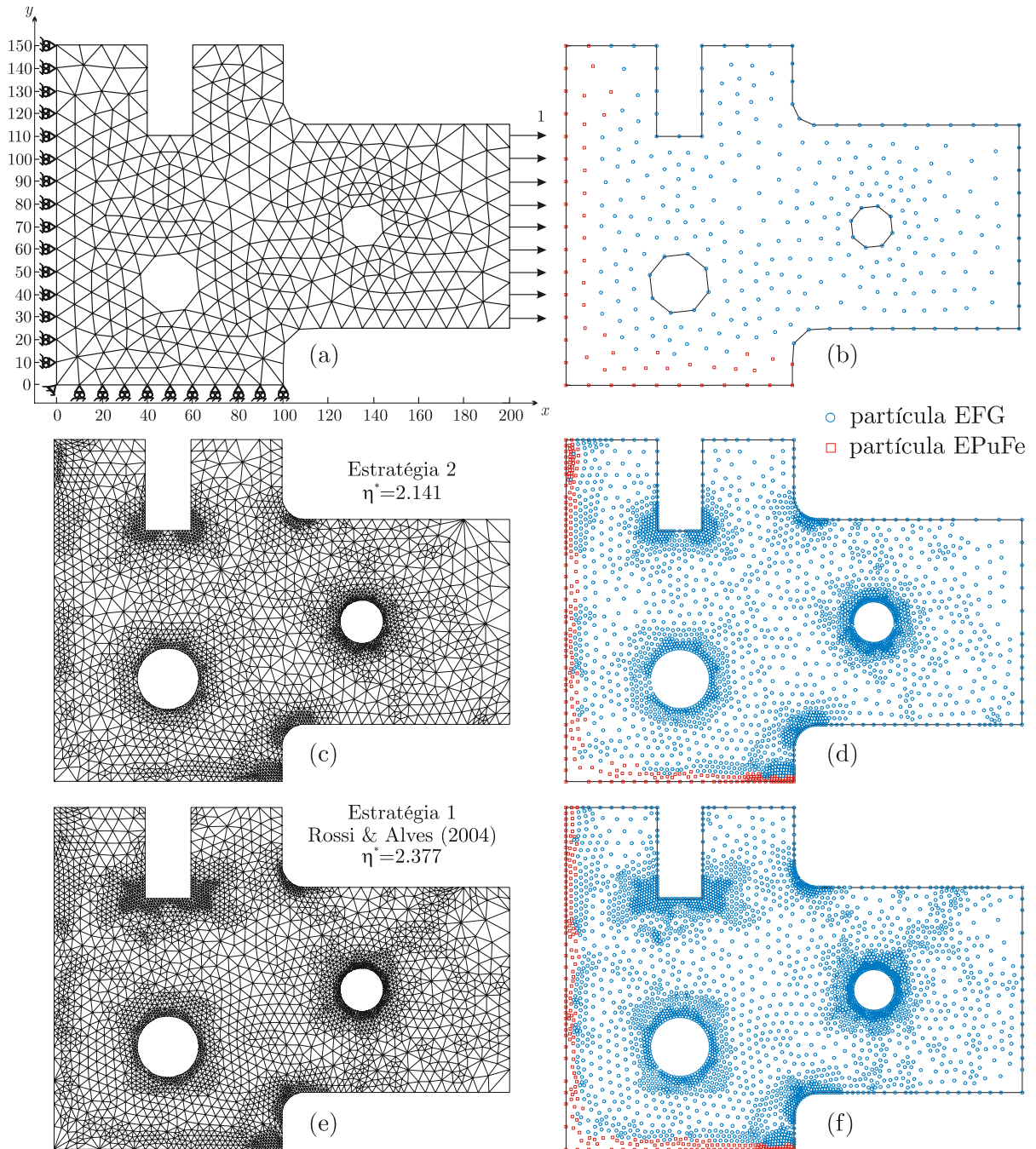


Figura 2.13: Refino de um componente mecânico e sua distribuição de partículas para  $\gamma = 2.25\%$ : (a) e (b) Malha inicial e distribuição de partículas; (c) e (e) malhas finais e (d) e (f) distribuição das partículas.

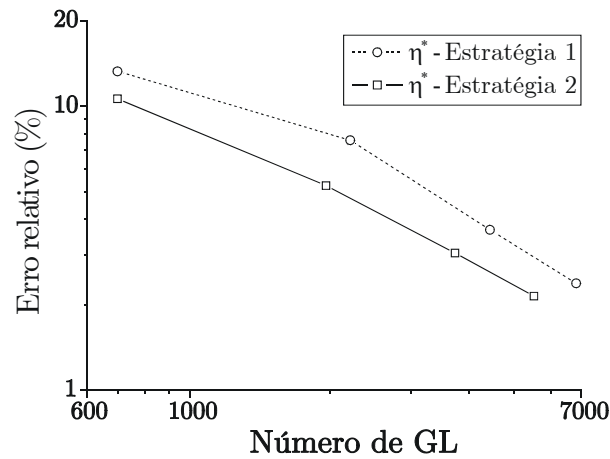


Figura 2.14: Convergência para ambos os casos.

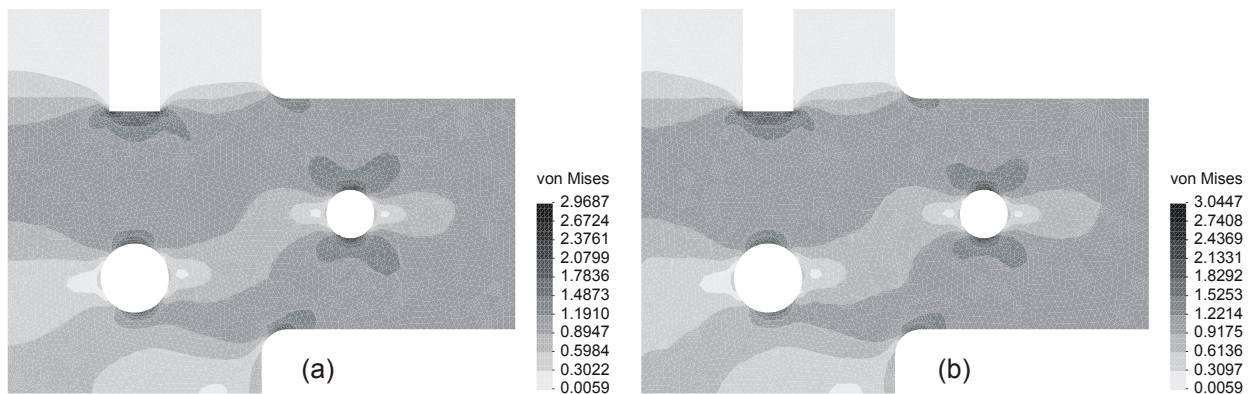


Figura 2.15: Tensão equivalente de von Mises.

## 2.6 Conclusões parciais

Estratégias de geração de malhas de integração adaptativas para o MEFM foram apresentadas neste capítulo. Com base nos resultados apresentados pôde-se verificar que mesmo quando partindo de malhas de integração pobres, as metodologias de refino foram capazes de encontrar malhas de integração suficientemente refinadas, de modo a atingir o objetivo prescrito.

Porém, quando comparadas as duas estratégias, pôde-se concluir que a segunda estratégia leva algumas vantagens sobre a primeira. Estas vantagens podem ser citadas como:

- Maior simplicidade de implementação;
- Requer a introdução de um menor número de parâmetros a determinar;
- Menos graus de liberdade foram necessários para atingir o mesmo nível de erro;
- Sua aplicação para problemas não lineares pode ser feita de forma mais direta.

Para ambas as estratégias apresentadas pôde-se verificar que o fator de influência do suporte  $\bar{s}$ , usado no pós-processamento para obter o campo suave  $\sigma^*$ , Eq. (2.1), foi muito próximo de 1. Isto condiz com os resultados apresentados por CHUNG & BELYTSCHKO (1998) e faz com que a determinação de  $\sigma^*$  seja bastante rápida, pois poucos pontos na vizinhança de  $\bar{x}_I$  são considerados, diminuindo a largura de banda do sistema de equações a ser resolvido.

Por fim, os métodos de refino adaptativos aplicados ao MEFG apresentaram resultados promissores e devem ser mais investigados, considerando a sua aplicação em outros problemas.

## Capítulo 3

# Análise do MEEG sob deformações finitas

Neste capítulo serão apresentados aspectos da formulação adotada para resolver problemas de elastoplasticidade em grandes deformações juntamente com a discretização espacial feita pelo MEEG, já apresentada nos capítulos anteriores.

Mais especificamente, a formulação adotada irá considerar:

- uma descrição *Lagrangiana Total*;
- a decomposição *multiplicativa* do gradiente de deformação em uma parte plástica e uma parte elástica;
- que as equações constitutivas serão dadas em termos da medida logarítmica de deformação e a tensão rotacionada de *Kirchhoff*. O uso deste par conjugado, definido na chamada configuração não tencionada, torna possível a utilização do chamado mapeamento exponencial que, por sua vez, proporciona o uso dos algoritmos de mapeamento de retorno no mesmo formato que os encontrados em pequenas deformações.

Duas são as principais justificativas para a escolha de uma descrição *Lagrangiana Total* neste trabalho. A primeira reside no fato da construção do suporte de influência requerido para a construção das funções de forma do método MEEG ou mesmo do EFG. Através do uso de uma descrição *Lagrangiana Total* as funções de forma, MEEG ou mesmo EFG, juntamente com suas derivadas, podem ser calculadas uma única vez para todo o processo. A outra justificativa provém do uso da simulação da compactação de materiais porosos onde há uma grande variação da porosidade dentro do processo. Em uma descrição *Lagrangiana Total* a conservação da massa pode ser estabelecida localmente de forma fechada sem aumentar o número de equações a serem resolvidas em cada ponto. Já no caso de uma descrição *Euleriana* a conservação da massa deve ser imposta pela equação da continuidade, a qual deve ser resolvida para cada ponto juntamente com as demais equações não lineares.

O uso da medida de tensão rotacionada de *Kirchhoff* e da medida de deformação logarítmica,  $\ln(\mathbf{U})$ , foi primeiro descrita por ETEROVIC & BATHE (1990) e WEBER & ANAND (1990).

Nestes trabalhos os autores fizeram uso da medida logarítmica de deformação juntamente com o mapeamento exponencial para obter o algoritmo de mapeamento de retorno de forma bastante similar aos encontrados em problemas de pequenas deformações. Tal configuração foi também estudada por SIMO (1992), PERIC & OWEN (1992) e BADRINARAYANAN & ZABARAS (1994). Já nos trabalhos apresentados por SOUZA NETO *et al.* (1996) e PERIC & OWEN (1998) é utilizada uma descrição *Euleriana* baseada na tensão de *Kirchhoff* e na medida de deformação logarítmica  $\ln(\mathbf{V})$ .

A fim de avaliar numericamente a aplicação do MEFG quando submetido a deformações finitas será apresentado um modelo de elastoplasticidade sobre a hipótese axissimétrica e de estado plano de deformações. A formulação de elastoplasticidade apresentada é constituída de uma parte elástica, que será levada em consideração através do modelo hiperelástico de *Hencky*, e de uma parte plástica dada por um modelo de plasticidade  $J_2$ . Este modelo de plasticidade conta com uma regra de endurecimento isotrópico não linear tal como a apresentada por SIMO & ARMERO (1992). A consideração deste tipo de modelo de plasticidade leva a incompressibilidade do fluxo plástico e ao conseqüente aparecimento do fenômeno de travamento volumétrico<sup>1</sup> em formulações de elementos finitos de baixa ordem. Tal fenômeno é também evidenciado em formulações do tipo livres de malha como mencionado em ASKES *et al.* (1999) e também em HUERTA & FERNÁNDEZ-MÉNDEZ (2001).

Uma estratégia para prevenir o aparecimento de travamento volumétrico é proposta e investigada. Esta estratégia é baseada na idéia do método F-bar ( $\bar{\mathbf{F}}$ ) apresentado por SOUZA NETO *et al.* (1996), e considera que o gradiente de deformação possa ser decomposto em uma parte volumétrica e outra isocórica, sendo esta última dada por uma média dentro da célula de integração.

### 3.1 Modelos constitutivos elastoplásticos baseados em formulação hiperelástica

#### 3.1.1 Decomposição multiplicativa do tensor gradiente de deformação

A principal hipótese adotada na formulação elastoplástica de grandes deformações apresentada aqui é a decomposição multiplicativa do tensor gradiente de deformação,  $\mathbf{F}$ , em uma contribuição plástica e outra elástica, isto é,

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p \quad (3.1)$$

onde  $\mathbf{F}^e$  e  $\mathbf{F}^p$  são respectivamente a parte elástica e plástica de  $\mathbf{F}$ .

Está hipótese inclui a suposição da existência de um estado local não tensionado, i.e., livre de tensões, definido por  $\mathbf{F}^p$ . A Fig. 3.1 ilustra este estado.

Ainda na Fig. 3.1  $\Omega_o$  representa a configuração de referência e  $\Omega_t$  a configuração corrente. A função movimento  $\vec{\varphi}$  que leva um ponto  $\vec{X} \in \Omega_o$  em um ponto  $\vec{x} \in \Omega_t$  é definida como

$$\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{X}, t) \quad (3.2)$$

---

<sup>1</sup>do ingles *volumetric locking*.



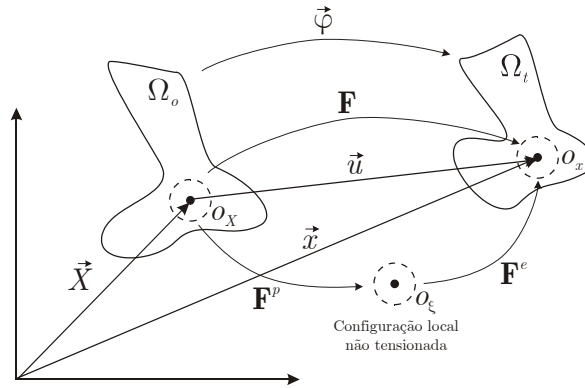


Figura 3.1: Modelo cinemático de deformação.

onde

$$\vec{\varphi}(\vec{X}, t) = \vec{X} + \vec{u}. \quad (3.3)$$

Já o gradiente de deformação é dado por

$$\mathbf{F} = \nabla_{\vec{X}} \vec{\varphi}(\vec{X}, t). \quad (3.4)$$

Da adoção da decomposição multiplicativa de  $\mathbf{F}$  decorrem muitos resultados importantes sobre a cinemática da deformação do corpo. O campo espacial denominado gradiente da velocidade é, por sua vez, escrito como

$$\mathbf{L}(\vec{x}, t) = \nabla_{\vec{x}} \vec{v}(\vec{x}, t)$$

na qual  $\vec{v}(\vec{x}, t)$  é a descrição espacial da velocidade. O tensor gradiente da velocidade pode ainda ser decomposto em uma parte elástica e outra plástica da seguinte forma

$$\mathbf{L}(\vec{\varphi}(\vec{X}, t), t) = \dot{\mathbf{F}}(\vec{X}, t) \mathbf{F}^{-1}(\vec{X}, t) = \mathbf{L}^e + \mathbf{L}^p \quad (3.5)$$

com  $\mathbf{L}^e = \dot{\mathbf{F}}^e (\mathbf{F}^e)^{-1}$  e  $\mathbf{L}^p = \mathbf{F}^e \dot{\mathbf{F}}^p (\mathbf{F}^p)^{-1} (\mathbf{F}^e)^{-1}$ .

O tensor taxa de deformação,  $\mathbf{D}$ , dado pela parte simétrica de  $\mathbf{L}$ , pode ser também decomposto como

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \text{sym}(\mathbf{L}) = \text{sym}(\mathbf{L}^e) + \text{sym}(\mathbf{L}^p) \\ &= \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Uma condição imposta sobre as deformações é que  $\det(\mathbf{F}) > 0^2$ , o que implica em  $\det(\mathbf{F}^p) > 0$  e  $\det(\mathbf{F}^e) > 0$ . Deste modo, cada um dos termos do gradiente da deformação admita decomposição polar, isto é,

$$\mathbf{F}^p = \mathbf{R}^p \mathbf{U}^p \quad \mathbf{F}^e = \mathbf{R}^e \mathbf{U}^e \quad (3.7)$$

onde  $\mathbf{R}^p$  e  $\mathbf{R}^e \in \text{ort}^+$ , isto é,  $\mathbf{R}^p$  e  $\mathbf{R}^e$  são tensores ortogonais próprios e  $\mathbf{U}^p$  e  $\mathbf{U}^e$  são tensores

<sup>2</sup> $\det(\mathbf{F}) = 1$  - deformações isocóricas.

simétricos positivos definidos. De modo geral, pode-se ainda escrever que

$$\mathbf{U}^e = \sqrt{\mathbf{C}^e} \quad (3.8)$$

na qual  $\mathbf{C}$  é o tensor de Cauchy-Green à direita dado por

$$\mathbf{C}^e = \mathbf{F}^{eT} \mathbf{F}^e. \quad (3.9)$$

A medida de deformação adotada é a medida de deformação logarítmica, medida de deformação de Hencky ou ainda  $\mathbf{E}^{e0}$ , dada por<sup>3</sup>

$$\mathbf{E}^{e0} = \ln(\mathbf{U}^e). \quad (3.10)$$

Neste trabalho vai se desprezar o sobrescrito  $\mathbf{E}^{e0}$  optando apenas por  $\mathbf{E}^e$ , quando se fizer referência à deformação logarítmica *Lagrangeana* de modo a não sobrecarregar a notação.

### 3.1.2 Pares conjugados de tensão e deformação

O tensor tensão de *Kirchhoff* é dado por

$$\boldsymbol{\tau} = J \boldsymbol{\sigma} \quad (3.11)$$

com

$$J = \det(\mathbf{F}) \quad (3.12)$$

$$= \frac{\rho_o}{\rho} \quad (3.13)$$

na qual  $\rho_o$  e  $\rho$  são as densidades de massa da configuração de referência e corrente respectivamente.

Entretanto, como colocado por HILL (1978), os pares de tensão-deformação devem ser tais que a taxa de trabalho por unidade de massa  $\dot{\mathcal{W}}$  seja invariante, isto é

$$\dot{\mathcal{W}} = \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{\rho_o} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{\rho_o} \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{F}} = \frac{1}{2\rho_o} \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{C}} = \frac{1}{\rho_o} \bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \dot{\mathbf{E}}, \quad (3.14)$$

onde  $\mathbf{P}$  é o primeiro tensor tensão de *Piola-Kirchhoff* (PK1) e  $\mathbf{S}$  é o segundo tensor tensão de *Piola-Kirchhoff* (PK2).  $\bar{\boldsymbol{\tau}}$  é o tensor tensão rotacionado de *Kirchhoff*, dado por

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = (\mathbf{R}^e)^T \boldsymbol{\tau} \mathbf{R}^e. \quad (3.15)$$

---

<sup>3</sup>É possível definir a chamada família *Lagrangeana* de deformação dada por

$$\mathbf{E}^m = \begin{cases} \frac{1}{m} (\mathbf{U}^m - \mathbf{I}) & \text{para } m \neq 0 \\ \ln(\mathbf{U}) & \text{para } m = 0 \end{cases}$$

O tensor  $\mathbf{C}$  admite *decomposição espectral*, isto é

$$\mathbf{C}^e = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \left( \vec{l}_i \otimes \vec{l}_i \right) \quad (3.16)$$

onde  $\lambda_i$  são os autovalores e  $\vec{l}_i$  são os autovetores de  $\mathbf{C}^e$ . Isto significa que  $\mathbf{U}^e$  possui os mesmos autovalores de  $\mathbf{C}^e$ , isto é,

$$\mathbf{U}^e = \sum_{i=1}^3 \sqrt{\lambda_i} \left( \vec{l}_i \otimes \vec{l}_i \right). \quad (3.17)$$

Como  $\ln(\mathbf{U}^e)$  é uma função tensorial isotrópica, veja **Apêndice D**, temos

$$\mathbf{E}^e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \ln(\lambda_i) \left( \vec{l}_i \otimes \vec{l}_i \right).$$

### 3.1.3 Lei constitutiva hiperelástica, potencial de energia livre e dissipação

Dentro do enfoque da *termodinâmica dos processos irreversíveis*, o potencial de energia livre  $\psi$  é construído de forma a ter a seguinte forma geral

$$\psi = \psi(\mathbf{E}^e, \boldsymbol{\alpha}_k) \quad (3.18)$$

onde  $\boldsymbol{\alpha}$  é um conjunto de variáveis internas associadas com os mecanismos dissipativos envolvidos no processo irreversível.

A inequação fundamental de *Clausius-Duhem* é dada por

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} - \rho \left( \dot{\psi} + s\dot{T} \right) - \vec{q} \cdot \frac{\nabla_{\vec{x}} T}{T} \geq 0 \quad (3.19)$$

na qual  $s$  é a entropia específica,  $T$  é a temperatura absoluta e  $\vec{q}$  é o vetor fluxo de calor. Agora, considerando Eq.(3.6)

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p) - \rho \left( \dot{\psi} + s\dot{T} \right) - \vec{q} \cdot \frac{\nabla_{\vec{x}} T}{T} \geq 0 \quad (3.20)$$

e multiplicando esta última equação por  $J$ , Eq.(3.12),

$$\boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p) - \rho_o \left( \dot{\psi} + s\dot{T} \right) - J\vec{q} \cdot \frac{\nabla_{\vec{x}} T}{T} \geq 0 \quad (3.21)$$

e pela imposição da conservação da taxa de trabalho elástica,

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{D}^e = \bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \dot{\mathbf{E}}^e$$

obtemos então

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \dot{\mathbf{E}}^e + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{D}^p - \rho_o \left( \dot{\psi} + s\dot{T} \right) - J\vec{q} \cdot \frac{\nabla_{\vec{x}} T}{T} \geq 0. \quad (3.22)$$

Tomando agora a taxa  $\dot{\psi}$ , Eq.(3.18), juntamente com a consideração de que o processo seja

isotérmico, a Eq.(3.22) fica

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \dot{\mathbf{E}}^e + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{D}^p - \rho_o \left( \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}^e} \cdot \dot{\mathbf{E}}^e + \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\alpha}_k} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}}_k \right) \geq 0,$$

e coletando os termos

$$\left( \bar{\boldsymbol{\tau}} - \rho_o \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}^e} \right) \cdot \dot{\mathbf{E}}^e + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{D}^p - \rho_o \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\alpha}_k} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}}_k \geq 0. \quad (3.23)$$

Ainda, assumindo que a Eq.(3.23) deva ser satisfeita para todos os processos reais leva a

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \rho_o \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}^e} \quad (3.24)$$

e

$$\boldsymbol{\beta}_k = \rho_o \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\alpha}_k} \quad (3.25)$$

na qual  $\boldsymbol{\beta}_k$  é um conjunto de pares associados às variáveis internas  $\boldsymbol{\alpha}_k$ , chamadas de forças termodinâmicas. Por meio destas definições a Eq.(3.23) fica escrita como

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{D}^p - \boldsymbol{\beta}_k \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}}_k \geq 0. \quad (3.26)$$

### Relação constitutiva hiperelástica

A equação constitutiva hiperelástica é dada por

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\tau}} &= \mathcal{L}(\mathbf{E}^e) \\ &= \mathbb{D} \mathbf{E}^e \end{aligned} \quad (3.27)$$

onde

$$\mathbb{D} = 2\mu \mathbb{I} + \left( \kappa - \frac{2}{3}\mu \right) (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) \quad (3.28)$$

na qual  $\mathbb{D}$  é a equação constitutiva hiperelástica de quarta ordem,  $\mathbb{I}$  é o tensor identidade de quarta ordem,  $\mathbf{I}$  é o tensor identidade de segunda ordem,  $\kappa$  é o módulo volumétrico e  $\mu$  é um dos coeficiente de Lamé ou módulo de cisalhamento,  $\mu = G$ .

### Taxa de deformação plástica modificada

É conveniente introduzir a contribuição plástica modificada para o gradiente da velocidade como

$$\bar{\mathbf{L}}^p = (\mathbf{F}^e)^{-1} \mathbf{L}^p \mathbf{F}^e \quad (3.29)$$

$$= \dot{\mathbf{F}}^p (\mathbf{F}^p)^{-1}. \quad (3.30)$$

$\bar{\mathbf{L}}^p$  é obtida pelo transporte de  $\mathbf{L}^p$  para a configuração local não tencionada. Pode-se ainda decompor  $\bar{\mathbf{L}}^p$  em sua parte simétrica  $\bar{\mathbf{D}}^p$ , associada ao estiramento plástico, e antissimétrica

$\bar{\mathbf{W}}^p$ , associada à rotação plástica, isto é,

$$\bar{\mathbf{L}}^p = \text{sym}(\bar{\mathbf{L}}^p) + \text{skew}(\bar{\mathbf{L}}^p) \quad (3.31)$$

$$= \bar{\mathbf{D}}^p + \bar{\mathbf{W}}^p. \quad (3.32)$$

Agora, como o sólido elastoplástico é considerado isotrópico em cada configuração local não tencionada, o termo de rotação plástica é tomado como nulo, WEBER & ANAND (1992) e SOUZA NETO *et al.* (2002), isto é,

$$\bar{\mathbf{W}}^p = 0. \quad (3.33)$$

Isto implica que a Eq.(3.26) possa ser escrita como

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}^e \bar{\mathbf{D}}^p (\mathbf{F}^e)^{-1} - \boldsymbol{\beta}_k \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}}_k \geq 0 \quad (3.34)$$

ou ainda<sup>4</sup>

$$(\mathbf{F}^e)^T \boldsymbol{\tau} (\mathbf{F}^e)^{-T} \cdot \bar{\mathbf{D}}^p - \boldsymbol{\beta}_k \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}}_k \geq 0 \quad (3.35)$$

e fazendo uso da decomposição polar

$$(\mathbf{R}^e \mathbf{U}^e)^T \boldsymbol{\tau} (\mathbf{R}^e \mathbf{U}^e)^{-T} \cdot \bar{\mathbf{D}}^p - \boldsymbol{\beta}_k \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}}_k \geq 0 \quad (3.36)$$

$$\mathbf{U}^e (\mathbf{R}^e)^T \boldsymbol{\tau} \mathbf{R}^e (\mathbf{U}^e)^{-1} \cdot \bar{\mathbf{D}}^p - \boldsymbol{\beta}_k \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}}_k \geq 0 \quad (3.37)$$

$$\mathbf{U}^e \bar{\boldsymbol{\tau}} (\mathbf{U}^e)^{-1} \cdot \bar{\mathbf{D}}^p - \boldsymbol{\beta}_k \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}}_k \geq 0. \quad (3.38)$$

Agora, como a relação constitutiva, Eq.(3.28), é isotrópica a inequação fundamental de *Clausius-Duhem* reduz-se à

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \bar{\mathbf{D}}^p - \boldsymbol{\beta}_k \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}}_k \geq 0. \quad (3.39)$$

### Função de escoamento

O domínio elástico é definido por uma função de escoamento genérica que tem dependência da tensão rotacionada de *Kirchhoff* e das forças termodinâmicas, isto é,

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \boldsymbol{\beta}_k). \quad (3.40)$$

O chamado conjunto das tensões admissíveis é definido por

$$\mathcal{E} = \{ \bar{\boldsymbol{\tau}} \mid \mathcal{F}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \boldsymbol{\beta}_k) \leq 0 \}. \quad (3.41)$$

### Potencial de dissipação e leis de evolução

A dissipação associada ao problema puramente mecânico é dada por

$$\mathcal{D} = \bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \bar{\mathbf{D}}^p - \boldsymbol{\beta}_k \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}}_k \geq 0. \quad (3.42)$$

---

<sup>4</sup> $\mathbf{R} \cdot \mathbf{S} \mathbf{T} = \mathbf{S}^T \mathbf{R} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{R} \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{S}$

A fim de definir as leis complementares de evolução do processo dissipativo, é postulada a existência de um potencial de dissipação, ou pseudo-potencial de dissipação,

$$\varphi = \varphi(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \boldsymbol{\beta}_k; \boldsymbol{\alpha}_k) \quad (3.43)$$

que é uma função escalar, convexa e nula na origem, com relação às variáveis  $(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \boldsymbol{\beta}_k)$ . É possível mostrar que pelo uso da hipótese de dissipação normal, o processo evolutivo fica definido por

$$\bar{\mathbf{D}}^p = \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \quad (3.44)$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}_k = -\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\beta}_k}. \quad (3.45)$$

No caso do modelo de plasticidade ser considerado associativo, o potencial de dissipação é tomado como sendo a função indicatriz do conjunto  $\mathcal{E}$ . Neste caso, como resultado da aplicação da hipótese de dissipação normal, obtemos  $(\bar{\mathbf{D}}^p, \dot{\boldsymbol{\alpha}}_k) \in \partial \varphi$ , i.e.,  $(\bar{\mathbf{D}}^p, \dot{\boldsymbol{\alpha}}_k)$  pertence ao conjunto dos subgradientes de  $\varphi$  em  $(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \boldsymbol{\beta}_k; \boldsymbol{\alpha}_k)$ . A determinação deste subgradiente nos permite determinar que a evolução da taxa de deformação plástica modificada  $\bar{\mathbf{D}}^p$  fica dada por

$$\bar{\mathbf{D}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \quad (3.46)$$

e que a evolução das forças termodinâmicas ficam determinadas por

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}_k = -\dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\beta}_k}, \quad (3.47)$$

onde  $\dot{\lambda}$ , denominado por multiplicador plástico, satisfaz as condições de *Karush-Kuhn-Tucker* (KKT)

$$\mathcal{F} \leq 0 \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad \dot{\lambda} \mathcal{F} = 0. \quad (3.48)$$

## 3.2 O problema de valor inicial elastoplástico

No presente contexto, as variáveis desconhecidas do problema de valor inicial elastoplástico são o gradiente da deformação plástica  $\mathbf{F}^p$  e o conjunto de variáveis internas  $\boldsymbol{\alpha}$ .

Assim, as condições iniciais são:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^p(t_o) &= \mathbf{F}_o^p, \\ \boldsymbol{\alpha}(t_o) &= \boldsymbol{\alpha}_o. \end{aligned} \quad (3.49)$$

O problema está sujeito a uma história do gradiente de deformação,  $\mathbf{F}(t)$ ,  $t \in [t_o, t_1]$ . O problema de valor inicial consiste em encontrar  $\mathbf{F}^p$  e  $\boldsymbol{\alpha}$  tais que as equações constitutivas dadas pelas Eq.(3.27), Eq.(3.46), Eq.(3.47) e Eq.(3.48) sejam satisfeitas para  $t \in [t_o, t_1]$ .

### 3.2.1 Aproximação pela metodologia *operator split*

O uso da metodologia de aproximação baseada na decomposição de operadores, *operator split method*, resulta em um algoritmo que consiste em duas etapas básicas:

1. Predição elástica: o problema é assumido como puramente elástico entre  $t_n$  e  $t_{n+1}$ .
2. Correção plástica: um sistema de equações discretas considerando
  - a lei da elasticidade;
  - o fluxo plástico;
  - a evolução das variáveis internas;
  - o critério de carregamento/descarregamento;

é resolvido com os resultados do estágio de predição elástico como condições iniciais.

### 3.2.2 Predição elástica

No estágio de predição elástica é assumido que

$$\dot{\mathbf{F}}^p = \mathbf{0} \quad (3.50)$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{0}. \quad (3.51)$$

Supõe-se inicialmente que a solução seja elástica, *estado elástico teste*<sup>5</sup>, dado por

$$\mathbf{F}_{n+1}^{p^{teste}} = \mathbf{F}_n^p \quad (3.52)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{teste} = \boldsymbol{\alpha}_n. \quad (3.53)$$

O correspondente gradiente da deformação elástica teste é determinado por

$$\mathbf{F}_{n+1}^{e^{teste}} = \mathbf{F}_{n+1} (\mathbf{F}_n^p)^{-1}. \quad (3.54)$$

Como a lei elástica é dada em termos de  $\mathbf{E}^e$ , é preciso calcular

$$\mathbf{C}_{n+1}^{e^{teste}} = \left( \mathbf{F}_{n+1}^{e^{teste}} \right)^T \mathbf{F}_{n+1}^{e^{teste}}, \quad (3.55)$$

e então calcular a deformação logarítmica teste como

$$\mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}} = \frac{1}{2} \ln \left( \mathbf{C}_{n+1}^{e^{teste}} \right). \quad (3.56)$$

Uma vez que  $\mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}}$  é calculado, é possível determinar a tensão rotacionada de *Kirchhoff* teste pela Eq.(3.27), ou seja

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^{teste} = 2\mu \mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}} + \left( \kappa - \frac{2}{3}\mu \right) \text{tr} \left( \mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}} \right) \mathbf{I} \quad (3.57)$$

---

<sup>5</sup>do inglês *trial elastic state*.

### 3.2.3 Correção plástica

O procedimento adotado para a correção plástica corresponde à classe dos chamados algoritmos de *mapeamento de retorno*<sup>6</sup>, já extensivamente utilizados por muitos autores, para uma visão mais atualizada veja SIMO & HUGHES (1998) e SOUZA NETO *et al.* (2002).

Entretanto, diferentemente dos trabalhos que envolvem pequenas deformações nos quais é comumente adotado o método de *backward* Euler para a solução do problema elastoplástico inicial, aqui é utilizado a aproximação *backward* exponencial. Pela hipótese da decomposição multiplicativa do gradiente da deformação, do uso da medida de deformação logarítmica juntamente com o uso da aproximação *backward* exponencial, o algoritmo de mapeamento de retorno mantém a forma daqueles vistos em pequenas deformações.

#### Verificação da função de escoamento - critério de escoamento

A correção plástica só deve ser efetuada caso o estado teste proporcione uma tensão que não pertença ao conjunto  $\mathcal{E}$ ,  $\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^{teste} \notin \mathcal{E}$ , em outras palavras se

$$\mathcal{F}(\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^{teste}, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{teste}) > 0.$$

#### Correção plástica - Algoritmo de mapeamento de retorno exponencial

Neste estágio, a regra de fluxo plástico e as leis de evolução das variáveis internas são discretizadas. Para discretizar a regra de fluxo plástico,

$$\dot{\mathbf{F}}^p = \bar{\mathbf{D}}^p \mathbf{F}^p,$$

é utilizada uma abordagem conveniente, proposta por ETEROVIC & BATHE (1990) e WEBER & ANAND (1990), que consiste no emprego de uma aproximação *backward* exponencial.

Com  $\mathbf{F}_n^p$  como condição inicial, a discretização resultante é dada por, veja **Apêndice D**,

$$\mathbf{F}_{n+1}^p = \exp\left(\Delta\lambda \left.\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}}\right|_{n+1}\right) \mathbf{F}_n^p. \quad (3.58)$$

O uso da aproximação *backward* exponencial propicia uma precisão de primeira ordem e preserva a incompressibilidade plástica, no caso do uso de modelos do tipo  $J_2$ .

A discretização das leis de evolução das variáveis internas é feita pelo método clássico de Euler implícito. Assim,

$$\boldsymbol{\alpha}_{k_{n+1}} = \boldsymbol{\alpha}_{k_n} + \Delta\lambda \left.\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\beta}_k}\right|_{n+1} \quad (3.59)$$

e o incremento plástico  $\Delta\lambda$  deve ser estritamente positivo

$$\Delta\lambda > 0. \quad (3.60)$$

---

<sup>6</sup>do inglês *returning mapping*.



### Mapeamento pela integração exponencial

Sobre condições isotrópicas, o procedimento de atualização pode ser escrito no mesmo formato que no caso dos algoritmos clássicos de mapeamento de retorno aplicados a problemas elasto-plásticos em pequenas deformações.

Para tanto, partindo da Eq.(3.58) e após uma manipulação algébrica extensa pode-se chegar à seguinte regra de evolução

$$\mathbf{E}_{n+1}^e = \mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}} - \Delta\lambda \left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \right|_{n+1}. \quad (3.61)$$

### Sistema de equações locais

Como resultado, o algoritmo de mapeamento de retorno consiste na solução do seguinte sistema de equações não lineares,

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{n+1}^e - \mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}} + \Delta\lambda \left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \right|_{n+1} \\ \boldsymbol{\alpha}_{k_{n+1}} - \boldsymbol{\alpha}_{k_n} - \Delta\lambda \left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \beta_k} \right|_{n+1} \\ \mathcal{F}(\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}, \boldsymbol{\alpha}_{k_{n+1}}) \end{cases} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

para  $\Delta\lambda > 0$ .

Ainda como resultado da manipulação algébrica é possível identificar que

$$\mathbf{R}_{n+1}^e = \mathbf{R}_{n+1}^{e^{teste}}. \quad (3.63)$$

A Fig. 3.2 mostra com mais detalhes as configurações de deformação entre o incremento  $n$  e  $n+1$ . Aqui

$$\mathbf{F}_u = \mathbf{F}_{n+1} \mathbf{F}_n^{-1}. \quad (3.64)$$

Repare que como

$$\mathbf{F}_n = \mathbf{F}_n^e \mathbf{F}_n^p \quad (3.65)$$

temos

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{n+1}^{e^{teste}} &= \mathbf{F}_u \mathbf{F}_n^e \\ &= \mathbf{F}_{n+1} \mathbf{F}_n^{-1} \mathbf{F}_n^e \\ &= \mathbf{F}_{n+1} (\mathbf{F}_n^p)^{-1} (\mathbf{F}_n^e)^{-1} \mathbf{F}_n^e \\ &= \mathbf{F}_{n+1} (\mathbf{F}_n^p)^{-1}, \end{aligned} \quad (3.66)$$

o que, de fato, reproduz a Eq.(3.54).

## 3.3 Problema de valor de contorno global

Uma vez definido o modelo constitutivo e a estratégia de atualização das variáveis em  $t_{n+1}$ , o que define o chamado problema local, é possível agora resolver o *problema de valor de contorno*

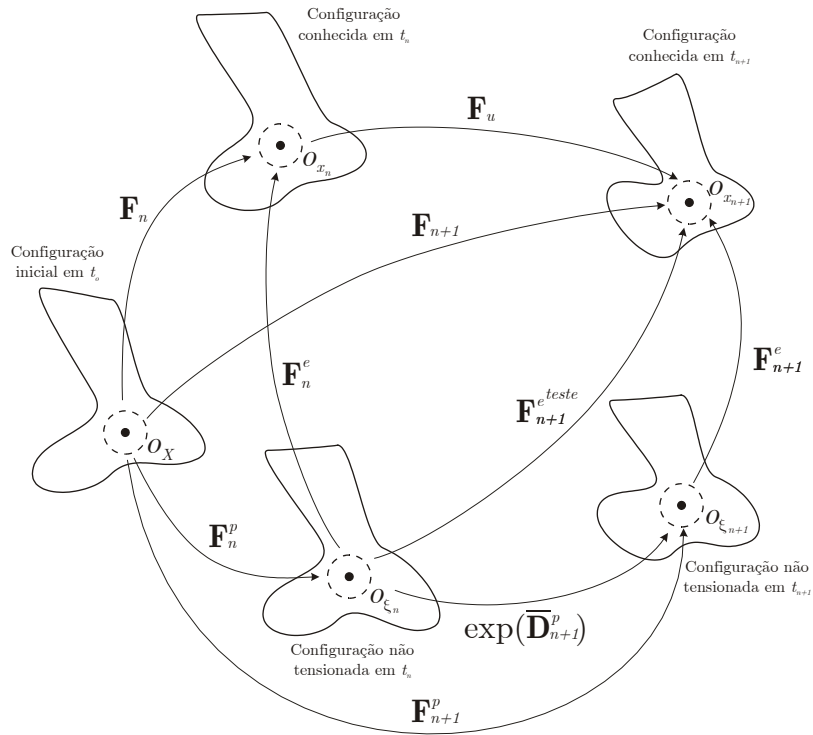


Figura 3.2: Configurações de deformações entre o incremento  $n$  e  $n + 1$ .

*global* associado com o deslocamento  $\vec{u}$ .

A configuração adotada neste trabalho é a chamada *Lagrangiana Total*. Dentro deste enfoque o problema de valor de contorno, *formulação forte*, e a sua equivalente formulação integral, *formulação fraca*, serão discretizados a seguir.

### 3.3.1 Formulação forte: Configuração de referência.

O problema chamado de *formulação forte* pode ser enunciado como:

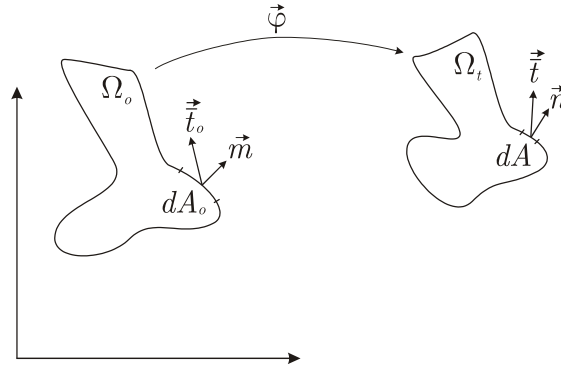
- **Problema 3.1:** Para cada  $t \in [t_o, t_f]$ , determine  $\vec{u}(\vec{X}, t)$  que é solução do seguinte problema de valor de contorno

$$\operatorname{div} \mathbf{P}(\vec{X}, t) - \rho_o(\vec{X}) \vec{b}(\vec{X}, t) = 0 \quad \text{em } \Omega_o \quad (3.67)$$

$$\mathbf{P}(\vec{X}, t) \vec{m}(\vec{X}, t) = \vec{t}(\vec{X}, t) \quad \text{em } \Gamma_o^t \quad (3.68)$$

$$\vec{u}(\vec{X}, t) = \vec{u}(\vec{X}) \quad \text{em } \Gamma_o^u. \quad (3.69)$$

Neste último problema  $\vec{m}$  é a normal externa na configuração de referência, veja Fig. 3.3.


 Figura 3.3: Vetores tração e normais em  $\Omega_o$  e  $\Omega_t$ .

### 3.3.2 Formulação fraca do problema: Configuração de referência

Já a formulação fraca é do tipo:

- **Problema 3.2:** Determine  $\vec{u}(\vec{X}, t) \in \mathcal{K}$ , para cada  $t \in [t_o, t_f]$ , tal que

$$\int_{\Omega_o} \mathbf{P} \cdot \nabla_{\vec{X}} \delta \vec{u} \, d\Omega_o = \int_{\Omega_o} \rho_o \vec{b} \cdot \delta \vec{u} \, d\Omega_o + \int_{\Gamma_o^t} \vec{t} \cdot \delta \vec{u} \, dA_o \quad \forall \delta \vec{u} \in \mathcal{V}. \quad (3.70)$$

Aqui  $\mathcal{K}$  é o espaço dos deslocamentos admissíveis dado por

$$\mathcal{K} = \{ \vec{u} \mid u_i \in W_p^1(\Omega), \vec{u} = \vec{u} \text{ em } \Gamma_o^u \} \quad (3.71)$$

, para  $p$  suficientemente grande, e  $\mathcal{V}$  é o espaço dos deslocamentos virtuais, dado por

$$\mathcal{V} = \{ \delta \vec{u} \mid \delta u_i \in W_p^1(\Omega), \delta \vec{u} = 0 \text{ em } \Gamma_o^u \}. \quad (3.72)$$

Ou denotando, para cada  $t \in [t_o, t_f]$ ,

$$F(\vec{u}; \delta \vec{u}) = \int_{\Omega_o} \mathbf{P} \cdot \nabla_{\vec{X}} \delta \vec{u} \, d\Omega_o - \int_{\Omega_o} \rho_o \vec{b} \cdot \delta \vec{u} \, d\Omega_o - \int_{\Gamma_o^t} \vec{t} \cdot \delta \vec{u} \, dA_o \quad (3.73)$$

o problema pode ser reescrito como:

- **Problema 3.3:** Determine  $\vec{u}(\vec{X}, t) \in \mathcal{K}$  tal que, para cada  $t \in [t_o, t_f]$ ,

$$F(\vec{u}; \delta \vec{u}) = 0 \quad \forall \delta \vec{u} \in \mathcal{V}. \quad (3.74)$$

## 3.4 Formulação incremental

A formulação incremental entre o instante  $t_n$  e  $t_{n+1}$ , veja Fig. 3.4, considera que:

- A configuração e as variáveis de estado sejam conhecidas em  $\Omega_n$ ;

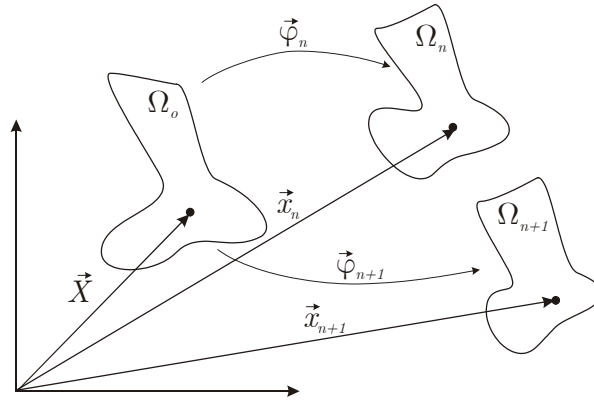


Figura 3.4: Descrição incremental.

- As equações de equilíbrio sejam escritas em  $\Omega_{n+1}$ .

Assim, o campo de deslocamentos será representado por

$$\vec{u}_n = \vec{x}_n - \vec{X} \quad \therefore \quad \vec{u}_n = \vec{u}(\vec{X}, t_n) \quad (3.75)$$

$$\vec{u}_{n+1} = \vec{x}_{n+1} - \vec{X} \quad \therefore \quad \vec{u}_{n+1} = \vec{u}(\vec{X}, t_{n+1}) \quad (3.76)$$

e deste modo

$$\mathbf{F}_{n+1} = \mathbf{I} + \nabla_{\vec{X}} \vec{u}_{n+1} \quad (3.77)$$

$$\mathbf{F}_n = \mathbf{I} + \nabla_{\vec{X}} \vec{u}_n. \quad (3.78)$$

Assim, em  $t_{n+1}$ , a forma fraca do problema pode ser escrita como:

- **Problema 3.4:** Encontre  $\vec{u}_{n+1} \in \mathcal{K}$  tal que

$$F(\vec{u}_{n+1}; \delta \vec{u}) = 0 \quad \forall \delta \vec{u} \in \mathcal{V}, \quad (3.79)$$

onde

$$F(\vec{u}_{n+1}; \delta \vec{u}) = \int_{\Omega_o} \mathbf{P}(\vec{u}_{n+1}) \cdot \nabla_{\vec{X}} \delta \vec{u} \, d\Omega_o - \int_{\Omega_o} \rho_o \vec{b}_{n+1} \cdot \delta \vec{u} \, d\Omega_o - \int_{\Gamma_o^t} \vec{t}_{n+1} \cdot \delta \vec{u} \, dA_o.$$

Como o **Problema 3.4** é não linear com relação a  $\vec{u}_{n+1}$ , é proposto o método de Newton para a sua solução.

### 3.4.1 Linearização e método de Newton

Seja

$$\vec{u}_{n+1}^0 = \vec{u}_n, \quad k = 0 \quad (3.80)$$

onde  $k$  denota a iteração no processo de Newton.  $k = 0$  é o valor inicial convergido da última iteração, isto é,  $\vec{u}_n$ . Deste modo, para a  $k$ -ésima iteração

$$\vec{u}_{n+1}^{k+1} = \vec{u}_{n+1}^k + \Delta \vec{u}_{n+1}^k. \quad (3.81)$$

Com o objetivo de determinar  $\Delta \vec{u}_{n+1}^k$  é imposta a condição

$$F \left( \vec{u}_{n+1}^{k+1}; \delta \vec{u} \right) = 0 \quad \forall \delta \vec{u} \in \mathcal{V}, \quad (3.82)$$

i.e,

$$F \left( \vec{u}_{n+1}^{k+1}; \delta \vec{u} \right) = F \left( \vec{u}_{n+1}^k + \Delta \vec{u}_{n+1}^k; \delta \vec{u} \right) = 0 \quad \forall \delta \vec{u} \in \mathcal{V}. \quad (3.83)$$

Considerando  $F(\cdot, \cdot)$  como sendo suficientemente regular, e expandindo  $F \left( \vec{u}_{n+1}^k + \Delta \vec{u}_{n+1}^k; \delta \vec{u} \right)$  em uma série de *Taylor* em  $\vec{u}_{n+1}^k$ , obtemos, para uma aproximação de primeira ordem,

$$F \left( \vec{u}_{n+1}^k + \Delta \vec{u}_{n+1}^k; \delta \vec{u} \right) = F \left( \vec{u}_{n+1}^k; \delta \vec{u} \right) + DF \left( \vec{u}_{n+1}^k; \delta \vec{u} \right) \left[ \Delta \vec{u}_{n+1}^k \right]. \quad (3.84)$$

Agora, pela Eq.(3.83) é possível escrever

$$DF \left( \vec{u}_{n+1}^k; \delta \vec{u} \right) \left[ \Delta \vec{u}_{n+1}^k \right] = -F \left( \vec{u}_{n+1}^k; \delta \vec{u} \right). \quad (3.85)$$

com

$$DF \left( \vec{u}_{n+1}^k; \delta \vec{u} \right) \left[ \Delta \vec{u}_{n+1}^k \right] = \int_{\Omega_o} \mathbb{A} \left( \vec{u}_{n+1}^k \right) : \nabla_{\vec{X}} \left( \Delta \vec{u}_{n+1}^k \right) : \nabla_{\vec{X}} \delta \vec{u} \, d\Omega_o \quad (3.86)$$

onde  $\mathbb{A}$  é o módulo tangente global, o qual é dado por

$$\left[ \mathbb{A} \left( \vec{u}_{n+1}^k \right) \right]_{ijkl} = \left. \frac{\partial P_{ij}}{\partial F_{kl}} \right|_{\vec{u}_{n+1}^k} \quad (3.87)$$

$$= \frac{\partial \tau_{ip}}{\partial F_{kl}} F_{jp}^{-1} - \tau_{ip} F_{jk}^{-1} F_{lp}^{-1}. \quad (3.88)$$

### 3.4.2 Notas sobre a determinação de $\mathbb{A}$

O computo de  $\mathbb{A}$  requer a determinação da derivada da tensão de *Kirchhoff* com relação ao gradiente da deformação. Porém, da Eq.(3.15) é possível escrever  $\boldsymbol{\tau}$  como função da tensão rotacionada de *Kirchhoff*,  $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ . Desta forma será necessário determinar a derivada de  $\bar{\boldsymbol{\tau}}$  com relação a  $\mathbf{F}_{n+1}$ . Porém como

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1} = \hat{\boldsymbol{\tau}}_{n+1} \left( \mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}}, (\cdot)_n \right),$$

aplicando a regra da cadeia, temos

$$\hat{\mathbb{D}} = \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}}{\partial \mathbf{F}_{n+1}} = \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}}{\partial \mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}}} \frac{\partial \mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}}}{\partial \mathbf{C}_{n+1}^{e^{teste}}} \frac{\partial \mathbf{C}_{n+1}^{e^{teste}}}{\partial \mathbf{F}_{n+1}}. \quad (3.89)$$

Denotando

$$\tilde{\mathbb{D}} = \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}}{\partial \mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}}} \quad (3.90)$$

$$\mathbb{G} = \frac{\partial \mathbf{E}_{n+1}^{teste}}{\partial \mathbf{C}_{n+1}^{teste}} \quad (3.91)$$

e

$$\mathbb{H} = \frac{\partial \mathbf{C}_{n+1}^{teste}}{\partial \mathbf{F}_{n+1}} \quad (3.92)$$

pode-se reescrever a Eq.(3.89) como

$$\hat{\mathbb{D}} = \tilde{\mathbb{D}}\mathbb{G}\mathbb{H}, \quad (3.93)$$

a qual em componentes é dada por

$$\hat{D}_{ijkl} = \tilde{D}_{ijrs} G_{rspq} H_{pqkl}. \quad (3.94)$$

### Determinação de $\mathbb{H}$

Sabe-se que

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{n+1}^{teste} &= \left( \mathbf{F}_{n+1}^{teste} \right)^T \mathbf{F}_{n+1}^{teste} \\ &= \left( \mathbf{F}_n^p \right)^{-T} \mathbf{F}_{n+1}^T \mathbf{F}_{n+1} \left( \mathbf{F}_n^p \right)^{-1} \\ &= \left( \mathbf{F}_n^p \right)^{-T} \mathbf{C}_{n+1} \left( \mathbf{F}_n^p \right)^{-1} \end{aligned} \quad (3.95)$$

ou em componentes

$$C_{ijn+1}^{teste} = \left[ \left( \mathbf{F}_n^p \right)^{-T} \right]_{ri} C_{rsn+1} \left[ \left( \mathbf{F}_n^p \right)^{-1} \right]_{sj}. \quad (3.96)$$

Logo,

$$\frac{\partial C_{ijn+1}^{teste}}{\partial F_{kln+1}} = \left[ \left( \mathbf{F}_n^p \right)^{-T} \right]_{ri} \frac{\partial C_{rsn+1}}{\partial F_{kln+1}} \left[ \left( \mathbf{F}_n^p \right)^{-1} \right]_{sj}. \quad (3.97)$$

Mas

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{rsn+1}}{\partial F_{kln+1}} &= \frac{\partial}{\partial F_{kln+1}} (F_{mr_{n+1}} F_{ms_{n+1}}) \\ &= \delta_{rl} F_{ks_{n+1}} + F_{kr_{n+1}} \delta_{sl}, \end{aligned} \quad (3.98)$$

então substituindo Eq.(3.98) na Eq.(3.96) produz

$$\begin{aligned} H_{ijkl} &= \frac{\partial C_{ijn+1}^{teste}}{\partial F_{kln+1}} \\ &= \left[ \left( \mathbf{F}_n^p \right)^{-1} \right]_{li} F_{kj_{n+1}}^{teste} + F_{ki_{n+1}}^{teste} \left[ \left( \mathbf{F}_n^p \right)^{-1} \right]_{lj}. \end{aligned} \quad (3.99)$$

### Determinação de $\mathbb{G}$

$$\mathbb{G} = \frac{\partial \mathbf{E}_{n+1}^{teste}}{\partial \mathbf{C}_{n+1}^{teste}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}_{n+1}^{teste}} \ln \left( \mathbf{U}_{n+1}^{teste} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}_{n+1}^{teste}} \ln \left( \mathbf{C}_{n+1}^{teste} \right). \quad (3.100)$$

Perceba que a determinação de  $\mathbb{G}$  requer uma derivada do tipo  $\frac{\partial \ln(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}}$ . Este tipo de derivada é uma derivada de uma função isotrópica. Esta classe de derivadas foi investigada em detalhes

por SOUZA NETO *et al.* (1998) e ORTIZ *et al.* (2001). Neste trabalho foi implementada a proposta apresentada por ORTIZ *et al.* (2001).

### Determinação de $\tilde{\mathbb{D}}$

A determinação do tensor de quarta ordem  $\tilde{\mathbb{D}}$  é a única contribuição oriunda da relação constitutiva do material, no módulo tangente consistente  $\mathbb{A}$ . As demais contribuições são todas relacionadas a parte geométrica.

De fato,  $\tilde{\mathbb{D}}$  depende se o estado é elástico ou elastoplástico. Se  $\mathcal{F} \leq 0$ ,  $\tilde{\mathbb{D}}$  é assumido como o módulo elástico  $\mathbb{D}$ , e se  $\mathcal{F} > 0$  então  $\tilde{\mathbb{D}}$  é o módulo tangente consistente elastoplástico  $\mathbb{D}^{ep}$ , que deve ser identificado do sistema de equações por Eq.(3.62).

## 3.5 Definição do modelo

A fim de exemplificar a descrição proposta aqui e proporcionar uma visão mais detalhada, um modelo constitutivo será agora escolhido e aplicado para sólidos de revolução e também para o caso de estado plano de deformações. Como já comentado anteriormente será investigada a performance numérica do método MEEG, considerando o problema elastoplástico sujeito ao fenômeno de travamento volumétrico. Para tanto, e em via de poder estabelecer algumas comparações com trabalhos realizados nesta linha, será considerado um modelo de plasticidade do tipo  $J_2$  o qual já foi investigado por vários autores como SIMO & ARMERO (1992) e também por SOUZA NETTO *et al.* (1996) e SOUZA NETTO *et al.* (2002). Este modelo constitutivo considera uma regra não linear para o endurecimento isótropico. Vários exemplos serão numericamente analisados de modo a poder avaliar a performance do método quando comparado com alguns resultados já apresentados por estes autores, porém dentro do enfoque de elementos finitos de baixa ordem. Em alguns casos também irá se comparar os resultados obtidos com um elemento finito tri6 também desenvolvido neste trabalho.

No desenvolvimento do modelo axissimétrico utiliza-se o sistema de coordenadas cilíndrico. É suposto que as propriedades materiais, o carregamento e as condições de contorno sejam independentes do ângulo de rotação  $\theta$ . A Fig. 3.5 mostra, de forma esquemática, a descrição do modelo axissimétrico. O tensor gradiente de deformação é escrito com relação ao sistema cartesiano como

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{I} + \nabla_{\vec{X}} \vec{u} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

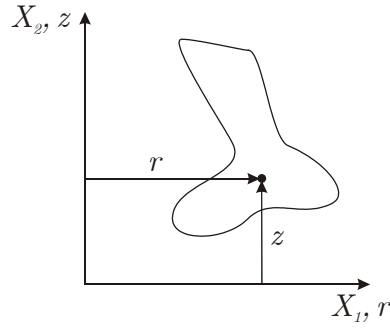


Figura 3.5: Modelo axissimétrico.

Agora, identificando as relações entre o sistema de coordenadas cartesiano e cilíndrico pode-se fazer

$$\begin{aligned} u_1 &\leftrightarrow u_r & u_2 &\leftrightarrow u_z & u_3 &\leftrightarrow u_\theta \\ X_1 &\leftrightarrow r & X_2 &\leftrightarrow z & X_3 &\leftrightarrow \theta. \end{aligned}$$

O gradiente de  $\vec{u}$  em coordenadas cilíndricas é dado por

$$\nabla_{\vec{X}} \vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{\partial u_r}{\partial z} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} & \frac{\partial u_z}{\partial z} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \end{bmatrix}. \quad (3.101)$$

Outra hipótese levada em consideração é que o modelo axissimétrico não possua torção aplicada na direção do eixo  $z$ . Como resultado, os campos de deslocamento, de deformação e de tensão são completamente independentes do ângulo  $\theta$ . Assim, o campo de deslocamento é

$$u_r = u_r(r, z) \quad u_z = u_z(r, z) \quad u_\theta = 0 \quad (3.102)$$

o que implica que

$$\nabla_{\vec{X}} \vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{\partial u_r}{\partial z} & 0 \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} & \frac{\partial u_z}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{u_r}{r} \end{bmatrix}. \quad (3.103)$$

### 3.5.1 Procedimento local

Para cada ponto de integração da forma fraca discretizada, precisam ser feitas uma série de cálculos antes de verificar se este ponto pertence ou não ao domínio elástico. Estes cálculos requeridos para cada ponto de integração estão descritos na tabela de procedimentos 3.1.

#### Algoritmo local

O modelo proposto para a implementação axissimétrica consiste no seguinte:



Tabela 3.1: Cômputos requeridos em cada ponto

(i) Dado $\vec{u}_{n+1}$ compute:
$\mathbf{F}_{n+1} = \mathbf{I} + \nabla_{\vec{X}} \vec{u}_{n+1}.$
(ii) Determine $\mathbf{F}_{n+1}^{e^{teste}}$ por
$\mathbf{F}_{n+1}^{e^{teste}} = \mathbf{F}_{n+1} (\mathbf{F}_n^p)^{-1}.$
(iii) Determine $\mathbf{C}_{n+1}^{e^{teste}}$ .
$\mathbf{C}_{n+1}^{e^{teste}} = \left( \mathbf{F}_{n+1}^{e^{teste}} \right)^T \mathbf{F}_{n+1}^{e^{teste}}$
(iv) Realize a decomposição espectral de $\mathbf{C}_{n+1}^{e^{teste}}$
$\mathbf{C}_{n+1}^{e^{teste}} = \sum \lambda_i \left( \vec{l}_i \otimes \vec{l}_i \right).$
(v) Compute $\mathbf{U}_{n+1}^{e^{teste}}$
$\mathbf{U}_{n+1}^{e^{teste}} = \left( \mathbf{C}_{n+1}^{e^{teste}} \right)^{\frac{1}{2}} = \sum \lambda_i^{\frac{1}{2}} \left( \vec{l}_i \otimes \vec{l}_i \right)$
(vi) Compute as deformações logarítmicas
$\mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}} = \ln \left( \mathbf{U}_{n+1}^{e^{teste}} \right)$
(vii) Tome a inversa de $\left( \mathbf{U}_{n+1}^{e^{teste}} \right)^{-1}$
(viii) Compute
$\mathbf{R}_{n+1}^{e^{teste}} = \mathbf{F}_{n+1}^{e^{teste}} \left( \mathbf{U}_{n+1}^{e^{teste}} \right)^{-1}.$

## 1. A relação constitutiva hiperelástica

$$\begin{aligned}
\bar{\boldsymbol{\tau}} &= \mathbb{D} \mathbf{E}^e \\
&= 2\mu \mathbf{E}^e + \left( \kappa - \frac{2}{3}\mu \right) \text{tr}(\mathbf{E}^e) \mathbf{I} \\
\mathbb{D} &= 2\mu \mathbb{I} + \left( \kappa - \frac{2}{3}\mu \right) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \\
\bar{\boldsymbol{\tau}} &= (\mathbf{R}^e)^T \boldsymbol{\tau} \mathbf{R}^e, \quad \boldsymbol{\tau} = J \boldsymbol{\sigma}, \quad J = \det(\mathbf{F}).
\end{aligned} \tag{3.104}$$

## 2. Função de escoamento

$$\mathcal{F}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, k) = \sqrt{3J_2} - [k(\alpha) + \sigma_y] \tag{3.105}$$

onde  $\sigma_y$  é a tensão de escoamento inicial,  $J_2$  é o segundo invariante do tensor tensão rotacionada deviatórica de *Kirchhoff*, denominado por  $\bar{\boldsymbol{\tau}}^D$ , e

$$J_2 = \frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\tau}}^D \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}^D, \tag{3.106}$$

com

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}^D = \bar{\boldsymbol{\tau}} - \frac{1}{3} \text{tr}(\bar{\boldsymbol{\tau}}) \mathbf{I}. \tag{3.107}$$

Ainda,

$$k(\alpha) = H\alpha + (\sigma_\infty - \sigma_y) \left( 1 - e^{-\delta\alpha} \right) \tag{3.108}$$

Tabela 3.2: Algoritmo de mapeamento de retorno

<p>(i) Dado <math>\mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}}</math> e <math>k_{n+1}^{teste} = k_n</math>, compute:</p> $\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^{teste} = \mathbb{D}\mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}}$ <p>(ii) Teste o estado elástico teste:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Se <math>\mathcal{F}(\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^{teste}, k_{n+1}^{teste}) \leq 0</math> então             <ul style="list-style-type: none"> <li>o estado é elástico: atualize <math>(\cdot)_{n+1} = (\cdot)_{n+1}^{teste}</math></li> </ul> </li> <li>- caso contrário             <ul style="list-style-type: none"> <li>o passo é elastoplástico: resolva o seguinte sistema de equações</li> </ul> </li> </ul> $\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}_{n+1}^e - \mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}} + \Delta\lambda \left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \right _{n+1} \\ \alpha_{n+1} - \alpha_n - \Delta\lambda \\ \mathcal{F}(\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}, k(\alpha_{n+1})) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{0} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$ <p>para <math>\mathbf{E}_{n+1}^e</math>, <math>\alpha_{n+1}</math> e <math>\Delta\lambda</math>.</p> <p>Atualize as variáveis</p> $\mathbf{F}_{n+1}^p = \exp\left(\Delta\lambda \left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \right _{n+1}\right) \mathbf{F}_n^p$ <p>- fim</p>
--

é a relação de encruamento isotrópico. Esta relação foi utilizada inicialmente por SIMO & ARMERO (1992) na validação dos procedimentos numéricos apresentados por estes autores. Vários outros autores, como SOUZA NETO *et al.* (1996) e (2002), tem também utilizado esta regra de endurecimento isotrópico em seus trabalhos.

### 3. Evolução do endurecimento isotrópico

$$\dot{\alpha} = \dot{\lambda}.$$

Tal modelo, no enfoque da termodinâmica dos processos irreversíveis, é oriundo do seguinte potencial de energia livre

$$\rho_o \psi = \frac{1}{2} \mathbb{D}\mathbf{E}^e \cdot \mathbf{E}^e + \frac{1}{2} H \alpha^2 + (\sigma_\infty - \sigma_y) \left[ \alpha + \frac{1}{\delta} e^{-\delta \alpha} \right]. \quad (3.109)$$

Na tabela 3.2 são apresentados os aspectos gerais do algoritmo de mapeamento de retorno.

#### 3.5.2 Solução do sistema de equações não lineares

Neste item será feita uma descrição da solução do sistema de equações locais, discretizado no algoritmo de mapeamento de retorno descrito na tabela 3.2, através do método Newton.

Inicialmente vai se escrever o sistema de equação em uma forma vetorial conveniente como

$$\begin{cases} f_1 = \alpha_{n+1} - \alpha_n - \Delta\lambda & 0 \\ f_2 = \mathcal{F}(\bar{\tau}_{n+1}, k(\alpha_{n+1})) & 0 \\ f_3 = E_{11_{n+1}}^e - E_{11_{n+1}}^{e_{teste}} + \Delta\lambda N_{11_{n+1}} & 0 \\ f_4 = E_{22_{n+1}}^e - E_{22_{n+1}}^{e_{teste}} + \Delta\lambda N_{22_{n+1}} & 0 \\ f_5 = E_{12_{n+1}}^e - E_{12_{n+1}}^{e_{teste}} + \Delta\lambda N_{12_{n+1}} & 0 \\ f_6 = E_{33_{n+1}}^e - E_{33_{n+1}}^{e_{teste}} + \Delta\lambda N_{33_{n+1}} & 0 \end{cases} \quad (3.110)$$

com

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \bar{\tau}} \Big|_{n+1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\bar{\tau}_{n+1}^D}{\|\bar{\tau}_{n+1}^D\|}. \quad (3.111)$$

Assim, o problema consiste em encontrar  $\mathbf{E}_{n+1}^e$ ,  $\alpha_{n+1}$  e  $\Delta\lambda$  que resolve

$$\vec{f}(\vec{q}) = \vec{0}. \quad (3.112)$$

com  $\vec{q}^T = (\Delta\lambda, \alpha_{n+1}, E_{11_{n+1}}^e, E_{22_{n+1}}^e, E_{12_{n+1}}^e, E_{33_{n+1}}^e)$ .

### Método de Newton

O sistema de equações não lineares Eqs.(3.110) é agora resolvido pelo método de Newton. Para tanto considere

$$\vec{q}_{n+1}^0 = \vec{q}_n, \quad i = 0, \quad (3.113)$$

onde  $i$  denota a iteração de Newton. Neste,  $i = 0$  é o valor inicial assumido como o último passo convergido, isto é,  $\vec{q}_n$ . Deste modo a  $i$ -ésima iteração

$$\vec{q}_{n+1}^{i+1} = \vec{q}_{n+1}^i + \Delta\vec{q}_{n+1}^i. \quad (3.114)$$

Para a determinação  $\Delta\vec{q}_{n+1}^i$  impõe-se

$$\vec{f}(\vec{q}_{n+1}^{i+1}) = \vec{f}(\vec{q}_{n+1}^i + \Delta\vec{q}_{n+1}^i) = \vec{0}.$$

Agora, considerando  $\vec{f}$  suficientemente regular pode-se expandir  $\vec{f}(\vec{q}_{n+1}^i + \Delta\vec{q}_{n+1}^i)$  em uma série de *Taylor* em  $\vec{q}_{n+1}^i$ , e mantendo uma aproximação de primeira ordem, temos

$$\vec{f}(\vec{q}_{n+1}^i + \Delta\vec{q}_{n+1}^i) = \vec{f}(\vec{q}_{n+1}^i) + \frac{\partial \vec{f}(\vec{q}_{n+1}^i)}{\partial \vec{q}} [\Delta\vec{q}_{n+1}^i]. \quad (3.115)$$

Desta forma, definindo

$$\mathbf{M} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{q}} \quad (3.116)$$

pode-se obter a seguinte estimativa para  $\Delta\vec{q}_{n+1}^i$ , como solução de

$$\mathbf{M} [\Delta\vec{q}_{n+1}^i] = -\vec{f}(\vec{q}_{n+1}^i). \quad (3.117)$$

Tabela 3.3: Algoritmo de Newton aplicado ao sistema de equações do algoritmo de mapeamento de retorno

(i) Inicialize o contador de iteração: $i \leftarrow 0$ (ii) Inicialize $\vec{q}_{n+1}^0 = \vec{q}_{n+1}$ (iii) Compute o resíduo $\vec{f}^0 = \vec{f}(\vec{q}_{n+1}^0)$ , $erro = \ \vec{f}^0\ $ . (v) Faça enquanto ( $erro > tol$ ou $i < i_{max}$ ) <ol style="list-style-type: none"> <li>(1) Determine a matriz tangente <math>\mathbf{M} = \mathbf{M}(\vec{q}_{n+1}^i)</math></li> <li>(2) Resolva o sistema linear para <math>\Delta\vec{q}_{n+1}^i</math> <math display="block">\Delta\vec{q}_{n+1}^i = \mathbf{M}^{-1}\vec{f}^i</math> </li> <li>(3) Atualize os deslocamentos <math>\vec{q}_{n+1}^{i+1}</math> <math display="block">\vec{q}_{n+1}^{i+1} = \vec{q}_{n+1}^i + \Delta\vec{q}_{n+1}^i</math> </li> <li>(5) Compute <math>erro = \ \vec{f}^{i+1}\ </math></li> <li>(6) Atualize <math>\vec{f}^i \leftarrow \vec{f}^{i+1}</math> e <math>i \leftarrow i + 1</math></li> </ol> fim
--

O algoritmo do Método de Newton está esquematicamente mostrado na tabela de procedimentos 3.3<sup>7</sup>. Detalhes sobre o algoritmo do Método de Newton, utilizado neste trabalho, podem ser vistos no **Apêndice C**.

### Determinação de $\mathbb{D}^{ep}$

A identificação de  $\tilde{\mathbb{D}} = \mathbb{D}^{ep}$  para este modelo pode ser feita de forma explícita através do seguinte sistema de equações, veja SOUZA NETO *et al.* e (2002):

$$\begin{cases} d\mathbf{E}_{n+1}^e + d(\Delta\lambda)\mathbf{N}_{n+1} + \Delta\lambda \frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}}{\partial \bar{\tau}_{n+1}} d\bar{\tau}_{n+1} \\ d\alpha_{n+1} - d(\Delta\lambda) \\ \mathbf{N}_{n+1} \cdot d\bar{\tau}_{n+1} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha_{n+1}} d\alpha_{n+1} \end{cases} = \begin{bmatrix} d\mathbf{E}_{n+1}^{e\,trial} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.118)$$

com

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha_{n+1}} &= \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial k} \frac{\partial k(\alpha_{n+1})}{\partial \alpha_{n+1}} \\ &= - \frac{\partial k(\alpha_{n+1})}{\partial \alpha_{n+1}} \end{aligned} \quad (3.119)$$

da Eq.(3.118.2)

$$d(\Delta\lambda) = d\alpha_{n+1} \quad (3.120)$$

e da Eq.(3.118.3)

$$d\alpha_{n+1} = - \frac{1}{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha_{n+1}}} \mathbf{N}_{n+1} \cdot d\bar{\tau}_{n+1}. \quad (3.121)$$

<sup>7</sup>  $i_{max}$  máximo número de iterações permitido

Agora substituindo Eq.(3.121) em Eq.(3.120) obtêm-se

$$d(\Delta\lambda) = -\frac{1}{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha_{n+1}}} \mathbf{N}_{n+1} \cdot d\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}. \quad (3.122)$$

Substituindo Eq.(3.119) e Eq.(3.122) em Eq.(3.118.1) deriva-se

$$\mathbb{D}^{-1} d\bar{\boldsymbol{\tau}} - \frac{1}{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha_{n+1}}} \mathbf{N}_{n+1} (\mathbf{N}_{n+1} \cdot d\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}) + \Delta\lambda \frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}} d\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1} = d\mathbf{E}_{n+1}^{trial}.$$

Coletando os termos e sabendo que  $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \mathbf{C} = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{A}$

$$\begin{aligned} \left( \mathbb{D}^{-1} + \Delta\lambda \frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}} \right) d\bar{\boldsymbol{\tau}} - \frac{1}{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha_{n+1}}} \mathbf{N}_{n+1} (\mathbf{N}_{n+1} \cdot d\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}) &= d\mathbf{E}_{n+1}^{trial} \\ \left( \mathbb{D}^{-1} + \Delta\lambda \frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}} \right) d\bar{\boldsymbol{\tau}} - \frac{1}{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha_{n+1}}} (\mathbf{N}_{n+1} \otimes \mathbf{N}_{n+1}) d\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1} &= d\mathbf{E}_{n+1}^{trial}. \end{aligned}$$

Denominando agora

$$\mathbb{A} = \mathbb{D}^{-1} + \Delta\lambda \frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}} \quad (3.123)$$

$$\mathbb{B} = -\frac{1}{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha_{n+1}}} \mathbf{N}_{n+1} \otimes \mathbf{N}_{n+1} \quad (3.124)$$

obtêm-se

$$(\mathbb{A} + \mathbb{B}) d\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1} = d\mathbf{E}_{n+1}^{trial} \quad (3.125)$$

o que implica finalmente em

$$\tilde{\mathbb{D}} = \mathbb{D}^{ep} = \frac{d\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}}{d\mathbf{E}_{n+1}^{trial}} = (\mathbb{A} + \mathbb{B})^{-1}, \quad (3.126)$$

ou ainda substituindo as equações Eq.(3.123) e Eq.(3.124) em Eq.(3.126) obtêm-se

$$\mathbb{D}^{ep} = \frac{d\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}}{d\mathbf{E}_{n+1}^{trial}} = \left( \mathbb{D}^{-1} + \Delta\lambda \frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}} - \frac{1}{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha_{n+1}}} \mathbf{N}_{n+1} \otimes \mathbf{N}_{n+1} \right)^{-1}. \quad (3.127)$$

**Determinação de  $\frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}}$**  O único termo que falta determinar é a derivada de  $\mathbf{N}_{n+1}$  com relação a  $\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}$ . Esta pode ser obtida considerando que

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{ij_{n+1}}}{\partial \bar{\tau}_{kl_{n+1}}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{\tau}_{kl_{n+1}}} \left( \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\bar{\tau}_{ij_{n+1}}^D}{\|\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D\|} \right) \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} \left[ \frac{1}{\|\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D\|} \frac{\partial \bar{\tau}_{ij_{n+1}}^D}{\partial \bar{\tau}_{kl_{n+1}}} + \bar{\tau}_{ij_{n+1}}^D \frac{\partial}{\partial \bar{\tau}_{kl_{n+1}}} \left( \frac{1}{\|\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D\|} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.128)$$

Mas

$$\frac{\partial \bar{\tau}_{ij_{n+1}}^D}{\partial \bar{\tau}_{kl_{n+1}}} = \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{kl} \delta_{ij} \quad (3.129)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\tau}_{kl_{n+1}}} \left( \frac{1}{\|\bar{\tau}_{n+1}^D\|} \right) = \frac{-\bar{\tau}_{kl_{n+1}}^D}{\|\bar{\tau}_{n+1}^D\|^3}. \quad (3.130)$$

Substituindo Eq.(3.130) e Eq.(3.129) em Eq.(3.128) produz

$$\frac{\partial N_{ij_{n+1}}}{\partial \bar{\tau}_{kl_{n+1}}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\|\bar{\tau}_{n+1}^D\|} \left[ \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{kl} \delta_{ij} - \frac{\bar{\tau}_{ij_{n+1}}^D \bar{\tau}_{kl_{n+1}}^D}{\|\bar{\tau}_{n+1}^D\|^2} \right], \quad (3.131)$$

ou

$$\frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}}{\partial \bar{\tau}_{n+1}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\|\bar{\tau}_{n+1}^D\|} \left[ \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - \mathbf{N}_{n+1} \otimes \mathbf{N}_{n+1} \right] \quad (3.132)$$

em que

$$\mathbb{I}_{ijkl} = \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (3.133)$$

$$\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} = \delta_{ij} \delta_{kl}. \quad (3.134)$$

### 3.6 Aspectos computacionais relacionados ao MEFG

Nesta seção serão descritos aspectos computacionais relevantes da implementação de problemas axissimétricos de grandes deformações pelo MEFG. Como já comentado no **Capítulo 1**, cada grau de liberdade do campo de deslocamento é aproximado por

$$\vec{u}^h(\vec{X}) = \sum_{I=1}^n \Phi_I(\vec{X}) \vec{u}_I$$

e

$$\delta \vec{u}^h(\vec{X}) = \sum_{I=1}^n \Phi_I(\vec{X}) \delta \vec{u}_I.$$

Partindo do **Problema 3.4** pode-se escrever a forma discreta deste problema pela introdução das funções de forma associadas ao MEFG, descritas acima. Assim, o problema fica reescrito como:

- **Problema 3.5:** Encontre  $\vec{u}_{n+1}^h \in \mathcal{K}^h$  tal que

$$F(\vec{u}_{n+1}^h; \delta \vec{u}^h) = 0 \quad \forall \delta \vec{u}^h \in \mathcal{V}^h, \quad (3.135)$$

onde

$$F(\vec{u}_{n+1}^h; \delta \vec{u}) = \int_{\Omega_o} \mathbf{P}(\vec{u}_{n+1}^h) \cdot \nabla_{\vec{X}} \delta \vec{u} \, d\Omega_o - \int_{\Omega_o} \rho_o \vec{b}_{n+1} \cdot \delta \vec{u} \, d\Omega_o - \int_{\Gamma_o^t} \vec{t}_{n+1} \cdot \delta \vec{u} \, dA_o.$$

Porém a forma discreta oriunda deste problema não é *atraente* para a implementação numérica pois recai na manipulação de tensores de quarta e segunda ordem. A fim de manipular somente com vetores e tensores de segunda ordem um mapeamento será apresentado na seção seguinte. Com base neste mapeamento serão então definidos os vetores *força interna* e *externa*, os quais serão utilizados na iteração de Newton do problema global.

### 3.6.1 Particularidades axissimétricas

Algumas particularidades encontradas na implementação dos problemas axissimétricos serão agora consideradas. O gradiente de  $\vec{u}^h$  em componentes cilíndricas, dada a sua discretização espacial, é escrito como

$$\nabla_{\vec{X}} \vec{u}^h = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r^h}{\partial r} & \frac{\partial u_r^h}{\partial z} & 0 \\ \frac{\partial u_z^h}{\partial r} & \frac{\partial u_z^h}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{u_r^h}{r} \end{bmatrix} = \sum_{I=1}^n \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_I}{\partial r} u_{rI} & \frac{\partial \Phi_I}{\partial z} u_{rI} & 0 \\ \frac{\partial \Phi_I}{\partial r} u_{zI} & \frac{\partial \Phi_I}{\partial z} u_{zI} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} \Phi_I u_{rI} \end{bmatrix}. \quad (3.136)$$

Entretanto, a implementação de tal procedimento é inadequado. Deste modo, é proposto um mapeamento entre a forma matricial de  $\nabla_{\vec{X}} \vec{u}^h$  em forma vetorial adequada onde apenas as componentes diferentes de zero são levadas em consideração. Este mapeamento é tal que

$$\begin{bmatrix} (\nabla_{\vec{X}} \vec{u}^h)_{11} \\ (\nabla_{\vec{X}} \vec{u}^h)_{12} \\ (\nabla_{\vec{X}} \vec{u}^h)_{21} \\ (\nabla_{\vec{X}} \vec{u}^h)_{22} \\ (\nabla_{\vec{X}} \vec{u}^h)_{33} \end{bmatrix} = \sum_{I=1}^n \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_I}{\partial r} & 0 \\ \frac{\partial \Phi_I}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \Phi_I}{\partial r} \\ 0 & \frac{\partial \Phi_I}{\partial z} \\ \frac{1}{r} \Phi_I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{rI} \\ u_{zI} \end{bmatrix}. \quad (3.137)$$

Denotando agora

$$\mathbf{G}_I^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_I}{\partial r} & \frac{\partial \Phi_I}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{1}{r} \Phi_I \\ 0 & 0 & \frac{\partial \Phi_I}{\partial r} & \frac{\partial \Phi_I}{\partial z} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.138)$$

e

$$\vec{I}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.139)$$

é possível escrever o vetor gradiente de deformação como

$$\vec{F}^h = \vec{I} + \vec{G}_u^h \quad (3.140)$$

com

$$\vec{G}_u^h = \sum_{I=1}^n \mathbf{G}_I \vec{u}_I \quad (3.141)$$

ou ainda

$$\vec{G}_u^h = \mathbf{G}^g \vec{u}^g \quad (3.142)$$

com  $\vec{u}^g$  dado pela Eq.(1.48) e

$$\mathbf{G}^g = [\mathbf{G}_1 | \mathbf{G}_2 | \cdots | \mathbf{G}_n].$$

A forma linearizada do vetor gradiente de deformações é tal que

$$\delta \vec{F}(\vec{u}^h) = \delta \vec{I} + \delta \vec{G}_u^h \quad (3.143)$$

$$\begin{aligned} &= \delta \vec{G}_u^h \\ &= \mathbf{G}^g \delta \vec{u}^g. \end{aligned} \quad (3.144)$$

Da mesma forma irá se escrever o vetor PK1 como

$$\vec{P}^T = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{21} & P_{22} & P_{33} \end{bmatrix}. \quad (3.145)$$

### 3.6.2 Forças internas e externas

O princípio do trabalho virtual estabelece que, na ausência de forças inerciais,

$$\delta \mathcal{W}^{int} = \delta \mathcal{W}^{ext}. \quad (3.146)$$

Deste resultado é possível determinar os vetores de força interna e externa. O vetor de esforços internos  $\vec{f}^{int}$  é

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{W}^{int} &= \vec{f}^{int} \cdot \delta \vec{u}^g \\ &= \int_{\Omega_o} \vec{P} \cdot \delta \vec{F} \, d\Omega_o \\ &= \int_{\Omega_o} \vec{P} \cdot \mathbf{G}^g \delta \vec{u}^g \, d\Omega_o \\ &= \int_{\Omega_o} (\mathbf{G}^g)^T \vec{P} \, d\Omega_o \cdot \delta \vec{u}^g. \end{aligned}$$

Assim,

$$\vec{f}^{int} = \int_{\Omega_o} (\mathbf{G}^g)^T \vec{P} \, d\Omega_o. \quad (3.147)$$

De maneira similar, o vetor de forças externas  $\vec{f}^{ext}$  é dado por

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{W}^{ext} &= \vec{f}^{ext} \cdot \delta \vec{u}^g \\ &= \int_{\Omega_o} \rho_o \vec{b}_o \cdot \delta \vec{u} \, d\Omega_o + \int_{\Gamma_o^t} \vec{t}_o \cdot \delta \vec{u} \, dA_o \\ &= \int_{\Omega_o} \rho_o \vec{b}_o \cdot \mathbf{\Phi}^g \delta \vec{u}^g \, d\Omega_o + \int_{\Gamma_o^t} \vec{t}_o \cdot \mathbf{\Phi}^g \delta \vec{u}^g \, dA_o \\ &= \left[ \int_{\Omega_o} \rho_o (\mathbf{\Phi}^g)^T \vec{b}_o \, d\Omega_o + \int_{\Gamma_o^t} (\mathbf{\Phi}^g)^T \vec{t}_o \, dA_o \right] \cdot \delta \vec{u}^g. \end{aligned}$$

Assim,

$$\vec{f}^{ext} = \int_{\Omega_o} \rho_o (\mathbf{\Phi}^g)^T \vec{b}_o \, d\Omega_o + \int_{\Gamma_o^t} (\mathbf{\Phi}^g)^T \vec{t}_o \, dA_o. \quad (3.148)$$



A Eq.(3.146) implica em

$$\vec{f}^{int} = \vec{f}^{ext}.$$

### 3.7 A equação de equilíbrio MEFG

O problema não linear global será agora descrito em termos da equação de equilíbrio residual. Tal equação referencia as forças internas e externas do problema, Eq.(3.147) e Eq.(3.148). Nos problemas estudados aqui será assumido que as forças externas não sejam dependentes da configuração. O problema discreto em termos da equação de equilíbrio residual é posto na seguinte forma.

- **Problema 3.6:** Encontre  $\vec{u}_{n+1}^h$  que satisfaça a equação de equilíbrio residual

$$\vec{r}\left(\vec{u}_{n+1}^h\right) = \vec{f}^{int}\left(\vec{u}_{n+1}^h\right) - \vec{f}_{n+1}^{ext} = 0 \quad (3.149)$$

onde

$$\begin{aligned} \vec{f}^{int}\left(\vec{u}_{n+1}^h\right) &= \int_{\Omega_o} (\mathbf{G}^g)^T \vec{P}\left(\vec{u}_{n+1}^h\right) d\Omega_o \\ \vec{f}_{n+1}^{ext} &= \int_{\Omega_o} \rho_o (\mathbf{\Phi}^g)^T \vec{b}_o d\Omega_o + \int_{\Gamma_o^t} (\mathbf{\Phi}^g)^T \vec{t}_{o_{n+1}} dA_o. \end{aligned}$$

#### 3.7.1 Linearização e método de Newton

Seja

$$\vec{u}_{n+1}^{g^0} = \vec{u}_n^g, \quad k = 0 \quad (3.150)$$

onde  $k$  denota a iteração do processo de Newton, sendo  $k = 0$  o valor inicial assumido como o valor convergido do último passo de  $\vec{u}^g$ , isto é  $\vec{u}_n^g$ . Para a  $k$ -ésima iteração

$$\vec{u}_{n+1}^{g^{k+1}} = \vec{u}_{n+1}^{g^k} + \Delta\vec{u}_{n+1}^{g^k}. \quad (3.151)$$

Para determinar  $\Delta\vec{u}_{n+1}^{g^k}$  é necessário impor

$$\vec{r}\left(\vec{u}_{n+1}^{h^{k+1}}\right) = \vec{0} \quad \therefore \quad \vec{u}_{n+1}^{h^{k+1}} = \mathbf{\Phi}^g \vec{u}_{n+1}^{g^{k+1}}. \quad (3.152)$$

Considerando  $\vec{r}$  suficientemente regular, expandindo  $\vec{r}\left(\vec{u}_{n+1}^{h^k} + \Delta\vec{u}_{n+1}^{h^k}\right)$  em uma série de *Taylor* em  $\vec{u}_{n+1}^{h^k}$  obtêm-se, para a aproximação de primeira ordem,

$$\vec{r}\left(\vec{u}_{n+1}^{h^k} + \Delta\vec{u}_{n+1}^{h^k}\right) = \vec{r}\left(\vec{u}_{n+1}^{h^k}\right) + D\vec{r}\left(\vec{u}_{n+1}^{h^k}\right) \left[\Delta\vec{u}_{n+1}^{h^k}\right] \quad (3.153)$$

o que implica em

$$D\vec{r}\left(\vec{u}_{n+1}^{h^k}\right) \left[\Delta\vec{u}_{n+1}^{h^k}\right] = -\vec{r}\left(\vec{u}_{n+1}^{h^k}\right), \quad (3.154)$$

Tabela 3.4: Método de Newton para o problema global

<p>(i) Inicie o contador: <math>k \leftarrow 0</math></p> <p>(ii) Inicialize <math>\vec{u}_{n+1}^0 = \vec{u}_{n+1}</math></p> <p>(iii) Compute as informações da tabela 3.1</p> <p>(iv) Compute o resíduo <math>\vec{r}^0 = \vec{r}(\vec{u}_{n+1}^{h^0})</math> por <math>\vec{r}^0 = \vec{f}^{int}(\vec{u}_{n+1}^{h^0}) - \vec{f}^{ext}</math> e o erro por <math>erro = \ \vec{r}^0\ </math></p> <p>(v) Faça enquanto (<math>\ \vec{r}^k\  &gt; tol</math> ou <math>k &lt; k_{max}</math>)</p> <p style="padding-left: 2em;">(1) Monte a matriz de rigidez <math>\mathbf{K} = \mathbf{K}(\vec{u}_{n+1}^{h^k})</math></p> <p style="padding-left: 2em;">(2) Resolva o sistema de equações para <math>\Delta\vec{u}_{n+1}^{g^k}</math> <math>\Delta\vec{u}_{n+1}^{g^k} = \mathbf{K}^{-1}\vec{r}^k</math></p> <p style="padding-left: 2em;">(3) Atualize os deslocamentos <math>\vec{u}_{n+1}^{k+1}</math> <math>\vec{u}_{n+1}^{g^{k+1}} = \vec{u}_{n+1}^{g^k} + \Delta\vec{u}_{n+1}^{g^k}</math></p> <p style="padding-left: 2em;">(4) Compute os novos valores da tabela 3.1</p> <p style="padding-left: 2em;">(5) Compute <math>\vec{r}^{k+1}</math> e então <math>erro = \ \vec{r}^{k+1}\ </math></p> <p style="padding-left: 2em;">(6) Atualize <math>\vec{r}^k \leftarrow \vec{r}^{k+1}</math> e <math>k \leftarrow k + 1</math></p> <p>fim</p>
--

em que

$$\begin{aligned}
 D\vec{r}(\vec{u}_{n+1}^k) [\Delta\vec{u}_{n+1}^k] &= \int_{\Omega_o} (\mathbf{G}^g)^T \mathbf{A} \mathbf{G}^g \Delta\vec{u}_{n+1}^{g^k} d\Omega_o \\
 &= \int_{\Omega_o} (\mathbf{G}^g)^T \mathbf{A} \mathbf{G}^g d\Omega_o \Delta\vec{u}_{n+1}^{g^k} \\
 &= \mathbf{K} \Delta\vec{u}_{n+1}^{g^k}
 \end{aligned}$$

onde

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega_o} (\mathbf{G}^g)^T \mathbf{A} \mathbf{G}^g d\Omega_o \quad (3.155)$$

na qual  $\mathbf{A}$  é a forma matricial do tensor de quarta ordem do módulo tangente consistente  $\mathbf{A}$  definido na Eq.(3.88).

Baseado neste resultado o sistema de equações da Eq.(3.154) pode ser escrito como

$$\mathbf{K} \Delta\vec{u}_{n+1}^{g^k} = -\vec{r}(\vec{u}_{n+1}^{h^k}) \quad (3.156)$$

e deve ser resolvido para  $\Delta\vec{u}_{n+1}^{g^k}$ .

O algoritmo global do método de Newton é descrito na tabela de procedimentos 3.4<sup>8</sup>.

A tabela 3.5 mostra uma sequência de procedimentos para a determinação do módulo tangente  $\mathbf{A}$ .

<sup>8</sup> $k_{max}$  é o número de iterações permitidas

Tabela 3.5: Determinação do módulo tangente global  $\mathbb{A}$ 

(i) Compute $\mathbb{G}$ pela Eq.(3.100) (ii) Compute $\mathbb{H}$ pela Eq.(3.92) (iii) Compute $\tilde{\mathbb{D}}$ Se $\mathcal{F}(\bar{\tau}_{n+1}^{trial}, k_{n+1}^{trial}) \leq 0$ então $\tilde{\mathbb{D}} = \mathbb{D}$ pela Eq.(3.104) caso contrário $\tilde{\mathbb{D}} = \mathbb{D}^{ep}$ pela Eq.(3.126) fim (v) Compute $\hat{\mathbb{D}}$ pela Eq.(3.94) (vi) Compute $\mathbb{A}$ pela Eq.(3.88) (vii) Identificar $\mathbf{A}$ $\mathbf{A} \xleftarrow[\text{matricial}]{\text{Forma}} \mathbb{A}$
--

### 3.8 Travamento volumétrico

Como já comentado na introdução deste capítulo o modelo material apresentado nesta seção assume como hipótese a incompressibilidade do fluxo elastoplástico. Tais modelos são conhecidos como modelos de plasticidade  $J_2$  pois consideram apenas a parte desviadora da tensão no modelo constitutivo elastoplástico. Entretanto, tal hipótese leva ao já bem conhecido fenômeno de travamento volumétrico ao se usar, por exemplo, elementos finitos de baixa ordem de aproximação juntamente quando são consideradas as hipóteses de estado plano de deformações ou de modelos axissimétricos. Tal fenômeno também é constatado quando são utilizadas metodologias do tipo livre de elementos ou sem malha como foi constatado por ASKES *et al.* (1999), DOLBOW & BELYTSCHKO (1999) e também por HUERTA & FERNÁNDEZ-MÉNDEZ (2001).

O método *B-bar* ( $\bar{\mathbf{B}}$ ) proposto por HUGHES (1980), o método *enhanced assumed strain* (EAS) proposto por SIMO & RIFAI (1990) e o método conhecido como *F-bar* ( $\bar{\mathbf{F}}$ ) proposto por SOUZA NETO *et al.* (1996) são exemplos de metodologias usadas largamente na literatura para obter aproximações por elementos finitos de baixa ordem livres de travamento volumétrico. Entretanto, estas metodologias são postas de forma geral e podem ser aplicadas sem grandes modificações dentro do enfoque do MEFG, ou mesmo no EFG.

Mais especificamente sobre o travamento volumétrico no MEFG, bem como nos métodos livres de malha em geral, foram também propostos alguns procedimentos. Em WELLS *et al.* (2002) é proposto que seja realizado um enriquecimento extrínseco local, como proposto em DUARTE & ODEN (1996), apenas onde acontece o fluxo plástico. Já em ASKES *et al.* (1999) é numericamente mostrado que para um certo valor de  $s$ , suporte de influência, suficientemente grande não é evidenciado o problema de travamento. Porém, em HUERTA & FERNÁNDEZ-MÉNDEZ (2001) é mostrado que ao aumentar o suporte de influência o problema de travamento é apenas atenuado mas não suprimido da análise. Formulações mistas, onde o campo de deslocamentos e de pressão são aproximadas separadamente, são propostas em DOLBOW

& BELYTSCHKO (1999) e também em CHEN *et al.* (2000) juntamente com estratégias de integração seletiva. Neste caso a condição *inf sup* de *Ladyzhenskaya-Brezi-Babuska* (LBB) deve ser satisfeita.

Neste trabalho será investigada a implementação de uma metodologia similar ao procedimento conhecido como *F-bar* ( $\bar{\mathbf{F}}$ ), proposto por SOUZA NETO *et al.* (1996), e aplicado no MEFG para o problema de deformações finitas mostrado neste capítulo. Tal escolha se deve à simplicidade de implementação do método quando comparado com os outros métodos e pelos bons resultados apresentados por SOUZA NETO *et al.* (1996) e (2002), SRIKANTH & ZABARAS (2001) e ZABARAS *et al.* (2003).

### 3.8.1 Implementação do $\bar{\mathbf{F}}$

Basicamente, a metodologia  $\bar{\mathbf{F}}$  utilizada aqui requer inicialmente que o gradiente da deformação,  $\mathbf{F}$ , seja decomposto na sua parte isocórica,  $\mathbf{F}_{iso}$ , e volumétrica,  $\mathbf{F}_v$ , isto é,

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{iso} \mathbf{F}_v \quad (3.157)$$

onde

$$\mathbf{F}_{iso} = [\det \mathbf{F}]^{-\frac{1}{3}} \mathbf{F} \quad (3.158)$$

e

$$\mathbf{F}_v = [\det \mathbf{F}]^{\frac{1}{3}} \mathbf{I}. \quad (3.159)$$

A implementação do gradiente de deformação  $\bar{\mathbf{F}}$  requer também que seja definido um gradiente de deformação modificado ou médio, chamado aqui de  $\mathbf{F}_m$ , de forma que,

$$\mathbf{F}_m = (\mathbf{F}_m)_{iso} (\mathbf{F}_m)_v.$$

O gradiente da deformação  $\bar{\mathbf{F}}$  é então definido como

$$\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{F}_{iso} (\mathbf{F}_m)_v \quad (3.160)$$

$$= \left[ \frac{\det \mathbf{F}_m}{\det \mathbf{F}} \right]^{\frac{1}{3}} \mathbf{F} = \left[ \frac{J_m}{J} \right]^{\frac{1}{3}} \mathbf{F}. \quad (3.161)$$

Assim, a determinação de  $\bar{\mathbf{F}}$  requer que a parte volumétrica de  $\mathbf{F}_m$ , ou seja  $(\mathbf{F}_m)_v$ , seja calculada de um modo especial dentro do elemento. SOUZA NETO *et al.* (1996) propõe que este valor seja determinado no *centróide* do elemento através de uma interpolação. Neste trabalho vai se supor que  $\det \mathbf{F}_m$  seja determinado por um valor médio, dentro do elemento, através da seguinte expressão para a média

$$J_m = \frac{1}{\Omega_e} \int_{\Omega_e} J \, d\Omega_e. \quad (3.162)$$

Ainda, como proposto por MORAN *et al.* (1990), no contexto do método  $\bar{\mathbf{B}}$ , e utilizado por SRIKANTH & ZABARAS (2001) e também ZABARAS *et al.* (2003) será ainda determinado

um  $\mathbf{F}_r$ , gradiente da deformação relaxado, dado por uma combinação convexa entre  $\mathbf{F}$  e  $\bar{\mathbf{F}}$ , isto é

$$\mathbf{F}_r = \alpha \mathbf{F} + (1 - \alpha) \bar{\mathbf{F}}. \quad (3.163)$$

onde  $\alpha \in [0, 1]$ . SRIKANTH & ZABARAS (2001) utilizaram em suas análises  $\alpha = 10^{-3}$ .

Na implementação do procedimento tipo  $\bar{\mathbf{F}}$ , apenas a resposta relacionada à parte constitutiva é alterada. Conforme SRIKANTH & ZABARAS (2001)

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{P} \circ \phi(\mathbf{F}) \\ \phi(\mathbf{F}) &= \mathbf{F}_r. \end{aligned}$$

Neste caso

$$F^{int} = \int_{\Omega_o} \mathbf{P}(\mathbf{F}_r) \cdot \nabla_{\bar{X}} \delta \bar{u} \, d\Omega_o \quad \forall \delta \bar{u} \in \mathcal{V}. \quad (3.164)$$

### Linearização

Uma vez determinada a forma contínua associada à chamada força interna,  $F^{int}$ , relacionada agora com  $\mathbf{F}_r$ , pode-se proceder com a determinação da matriz tangente utilizada no procedimento de Newton. Da mesma forma feita anteriormente sua determinação é dada pela linearização de  $F^{int}$ .

Por definição

$$DF \left( \bar{u}_{n+1}^{(k)}; \delta \bar{u} \right) \left[ \Delta \bar{u}_{n+1}^{(k)} \right] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F \left( \bar{u}_{n+1}^{(k)} + \epsilon \Delta \bar{u}_{n+1}^{(k)}; \delta \bar{u} \right) - F \left( \bar{u}_{n+1}^{(k)}; \delta \bar{u} \right)}{\epsilon} \quad (3.165)$$

$$= \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \left[ F \left( \bar{u}_{n+1}^{(k)} + \epsilon \Delta \bar{u}_{n+1}^{(k)}; \delta \bar{u} \right) \right]. \quad (3.166)$$

Agora, sabendo que

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \left[ F^{int} \left( \bar{u}_{n+1}^{(k)} + \epsilon \Delta \bar{u}_{n+1}^{(k)}; \delta \bar{u} \right) \right] &= \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \int_{\Omega_o} \mathbf{P} \left( \mathbf{F}_r \left( \bar{u}_{n+1}^{(k)} + \epsilon \Delta \bar{u}_{n+1}^{(k)} \right) \right) \cdot \nabla_{\bar{X}} \delta \bar{u} \, d\Omega_o \\ &= \int_{\Omega_o} \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \mathbf{P} \left( \mathbf{F}_r \left( \bar{u}_{n+1}^{(k)} + \epsilon \Delta \bar{u}_{n+1}^{(k)} \right) \right) \cdot \nabla_{\bar{X}} \delta \bar{u} \, d\Omega_o \end{aligned}$$

e usando a regra da cadeia pode-se escrever que

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \mathbf{P} \left( \mathbf{F}_r \left( \bar{u}_{n+1}^{(k)} + \epsilon \Delta \bar{u}_{n+1}^{(k)} \right) \right) = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{F}_r} \frac{\partial \mathbf{F}_r}{\partial \mathbf{F}} \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \mathbf{F} \left( \bar{u}_{n+1}^{(k)} + \epsilon \Delta \bar{u}_{n+1}^{(k)} \right). \quad (3.167)$$

O termo  $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{F}_r}$  é idêntico ao termo obtido na linearização de  $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{F}}$  sendo apenas avaliado em  $\mathbf{F}_r$ . Em outras palavras

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{F}_r} = \mathbb{A}|_{\mathbf{F}_r}.$$

Já o termo  $\frac{\partial \mathbf{F}_r}{\partial \mathbf{F}}$  é determinado com base na Eq.(3.163), isto é

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{F}_r}{\partial \mathbf{F}} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{F}} [\alpha \mathbf{F} + (1 - \alpha) \bar{\mathbf{F}}] \\ &= \alpha \mathbb{I} + (1 - \alpha) \frac{\partial \bar{\mathbf{F}}}{\partial \mathbf{F}}. \end{aligned} \quad (3.168)$$

Porém, da Eq.(3.161)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\mathbf{F}}}{\partial \mathbf{F}} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{F}} \left[ \left( \frac{J_m}{J} \right)^{\frac{1}{3}} \mathbf{F} \right] \\ &= \frac{1}{3} \left( \frac{J_m}{J} \right)^{-\frac{2}{3}} \mathbf{F} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{F}} \left( \frac{J_m}{J} \right) + \left( \frac{J_m}{J} \right)^{\frac{1}{3}} \mathbb{I} \end{aligned} \quad (3.169)$$

com

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{F}} \left( \frac{J_m}{J} \right) = \frac{\frac{\partial}{\partial \mathbf{F}} (J_m) J - \frac{\partial}{\partial \mathbf{F}} (J) J_m}{J^2}. \quad (3.170)$$

Mas

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{F}} (J) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{F}} (\det \mathbf{F}) \\ &= J \mathbf{F}^{-T} \end{aligned} \quad (3.171)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{F}} (J_m) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{F}} \left( \frac{1}{\Omega_e} \int_{\Omega_e} J \, d\Omega_e \right) \\ &= \frac{1}{\Omega_e} \int_{\Omega_e} \frac{\partial}{\partial \mathbf{F}} (J) \, d\Omega_e \\ &= \frac{1}{\Omega_e} \int_{\Omega_e} J \mathbf{F}^{-T} \, d\Omega_e. \end{aligned} \quad (3.172)$$

Logo, substituindo Eq.(3.171) e Eq.(3.172) em Eq.(3.170) pode-se escrever que

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{F}} \left( \frac{J_m}{J} \right) = \frac{1}{J} \left( \frac{1}{\Omega_e} \int_{\Omega_e} J \mathbf{F}^{-T} \, d\Omega_e - J_m \mathbf{F}^{-T} \right). \quad (3.173)$$

Substituindo Eq.(3.173) em Eq.(3.169) obtêm-se

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{F}}}{\partial \mathbf{F}} = \frac{1}{3} \left( \frac{J_m}{J} \right)^{\frac{1}{3}} \left\{ \mathbf{F} \otimes \left[ \left( \frac{1}{J_m \Omega_e} \int_{\Omega_e} J \mathbf{F}^{-T} \, d\Omega_e \right) - \mathbf{F}^{-T} \right] + 3\mathbb{I} \right\}. \quad (3.174)$$

Finalmente, substituindo Eq.(3.174) em Eq.(3.168) obtêm-se

$$\frac{\partial \mathbf{F}_r}{\partial \mathbf{F}} = \alpha \mathbb{I} + \frac{(1 - \alpha)}{3} \left( \frac{J_m}{J} \right)^{\frac{1}{3}} \left\{ \mathbf{F} \otimes \left[ \left( \frac{1}{J_m \Omega_e} \int_{\Omega_e} J \mathbf{F}^{-T} \, d\Omega_e \right) - \mathbf{F}^{-T} \right] + 3\mathbb{I} \right\}. \quad (3.175)$$

### 3.9 Exemplos

Nesta seção serão apresentados vários resultados numéricos a fim de avaliar alguns aspectos referentes à performance da implementação do MEEG em grandes deformações. Entre os tópicos que serão avaliados estão os seguintes:

- performance da estratégia de solução através da formulação de grandes deformações proposta e também do algoritmo elastoplástico quanto à sua robustez, ou seja, da avaliação da sua estabilidade ao longo das simulações;
- presença de travamento volumétrico e da eficácia da estratégia antitravamento volumétrica apresentada;
- dependência de malha;
- condições da resposta limite e da localização da deformação.

A fim de proporcionar uma base comparativa foram selecionados alguns exemplos tidos como clássicos na literatura da área para a verificação dos aspectos relacionados acima. Ainda, muitas vezes serão apresentados também resultados obtidos pela análise dos exemplos através do MEF considerando um elemento triangular de 6 nós, chamado comumente de tri6, quadrático e isoparamétrico. Este elemento foi escolhido por não apresentar o efeito de travamento volumétrico e por poder ser usado sobre a mesma topologia da malha de integração usada para o MEEG. Contudo, ao se introduzir o elemento tri6 sobre a malha de integração usada pelo MEEG, que por sua vez pode ser vista como uma malha de integração usada para um elemento tri3, deve-se manter em mente que são adicionados vários nós a mais na malha devido aos nós intermediários das arestas dos elementos tri6.

Em todos os exemplos apresentados nesta seção foi utilizado  $\alpha = 0$ , isto é, apenas a proposta original de  $\bar{\mathbf{F}}$  foi considerada.

#### 3.9.1 Deformações hiperelásticas

##### Análise de tensão-compressão unidimensional e cisalhamento puro

Uma análise simples de tensão-compressão unidimensional, Fig. 3.6(a), é realizada agora de forma a validar e ilustrar a relação hiperelástica não linear entre a tensão rotacionada de *Kirchhoff*,  $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ , e a deformação logarítmica  $\mathbf{E}^e$ . É possível mostrar que quando o estado de tensão é unidimensional a relação entre a tensão e a deformação é dada por<sup>9</sup>

$$\bar{\tau}_{zz} = E \ln(\lambda_z) \quad (3.176)$$

onde  $\lambda_z$  é o estiramento na direção de  $z$ .

---

<sup>9</sup>  $E = \frac{9\kappa\mu}{3\kappa+\mu}$

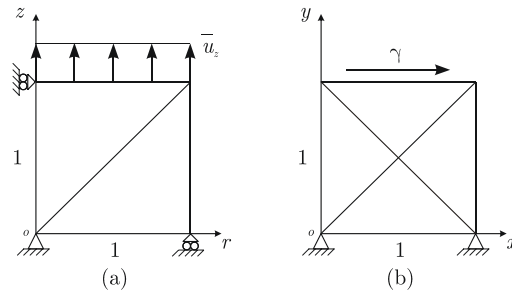


Figura 3.6: (a) Modelo uniaxial sobre a hipótese axissimétrica e (b) modelo de cisalhamento puro sobre a hipótese de EPD.

Na Fig. 3.7 é mostrado o comparativo entre a tensão analítica e o resultado numérico para tal simulação. Neste gráfico é plotada a tensão normalizada ( $\bar{\tau}_{zz}/E$ ) versus o estiramento  $\lambda_z$ . Os parâmetros materiais adotados são os seguintes

$$\kappa = 164206.35 \text{ MPa}$$

$$\mu = 80193.80 \text{ MPa.}$$

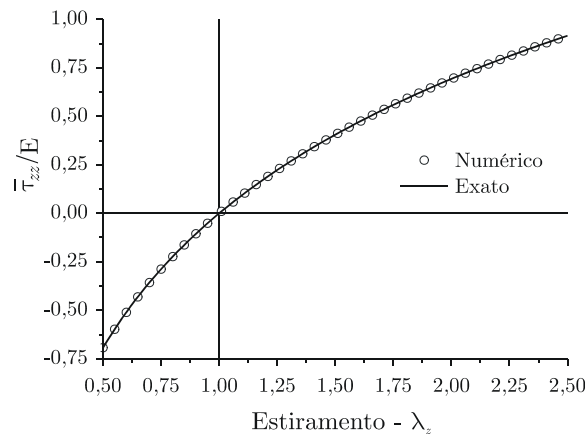


Figura 3.7: Resultado analítico e numérico para o problema de tensão-compressão uniaxial.

Já na Fig. 3.6(b) é mostrado o modelo utilizado para simular um estado de cisalhamento puro considerando a hipótese de estado plano de deformações. Para este caso a solução analítica, veja WEBER & ANAND (1990), é dada por

$$\sigma_{xy} = \mu\gamma \left[ \frac{1}{\gamma\sqrt{1 + \frac{1}{4}\gamma^2}} \ln \left( 1 + \frac{1}{2}\gamma^2 + \gamma\sqrt{1 + \frac{1}{4}\gamma^2} \right) \right] \quad (3.177)$$

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{2}\gamma\sigma_{xy}$$

$$\sigma_{yy} = -\frac{1}{2}\gamma\sigma_{xy} \quad (3.178)$$

Na Fig. 3.8 é apresentado o gráfico da tensão normalizada ( $\sigma_{xy}/\mu$ ) versus o cisalhamento,



obtido analítica e numericamente. Note que, novamente, a tensão obtida coincide com a solução analítica dada por Eq.(3.177).

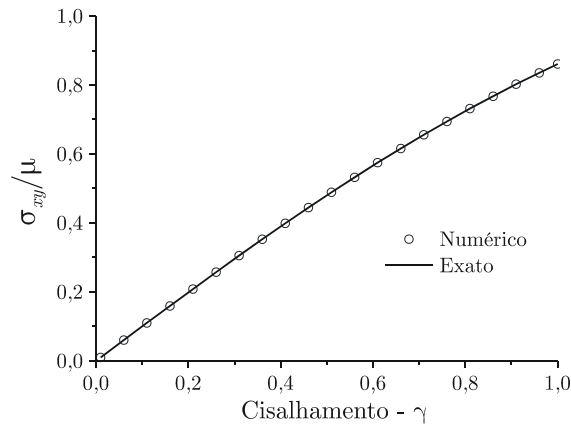


Figura 3.8: Resultado analítico e numérico para o problema de cisalhamento puro.

### 3.9.2 Casos multiaxiais

#### Estricção de um corpo de prova - *Necking*

É proposta agora a análise de um corpo de prova cilíndrico onde deseja-se verificar a "esticção", *necking*, e também problemas relacionados com o chamado travamento volumétrico. Para tanto, é considerado o modelo da Fig. 3.9(a) que consiste em um modelo axissimétrico de 53.334 mm de comprimento por 6.413 mm de raio. Devido às características de simetria, apenas um quarto do modelo é discretizado. O modelo é submetido a um carregamento de deslocamento de  $\bar{u}_z = 7mm$ . Tal carregamento é obtido por uma rampa de carregamento linear onde vários passos de carregamento são considerados.

Para que a estricção seja iniciada, uma pequena imperfeição geométrica é introduzida no modelo. Esta imperfeição consiste em uma variação do raio na região central do modelo de 1%, isto é, o raio da região central é de 6.35 mm. Exemplos similares a este são apresentados nos trabalhos de SIMO & ARMERO (1992) e SOUZA NETO *et al.* (1996) e (2002) na investigação do problema de travamento volumétrico.

Os parâmetros materiais adotados para este exemplo foram os seguintes:

$$\begin{aligned}\kappa &= 164206.35 \text{ MPa} \\ \mu &= 80193.80 \text{ MPa} \\ \sigma_y &= 450.00 \text{ MPa} \\ H &= 129.24 \text{ MPa} \\ \sigma_\infty &= 715 \text{ MPa} \\ \delta &= 16.93.\end{aligned}$$

Ainda na Fig. 3.9 são mostradas a malha de integração e também a distribuição de partículas.

A malha mostrada na Fig. 3.9(a) também será utilizada para a análise considerando um elemento finito tri6. Neste caso o número de nós da malha é de 1379 nós. A distribuição de partículas referentes à malha de integração da Fig. 3.9(a) é mostrada na Fig. 3.9(b). Neste caso são dispostas 364 partículas conforme o algoritmo já apresentado no **Capítulo 1**. A fim de poder comparar as análises com o mesmo número de graus de liberdade é introduzida a distribuição de partículas mostradas na Fig. 3.9(c). Note que esta distribuição é igual a distribuição de nós para a análise com MEF-tri6 apresentada na Fig. 3.9(a).

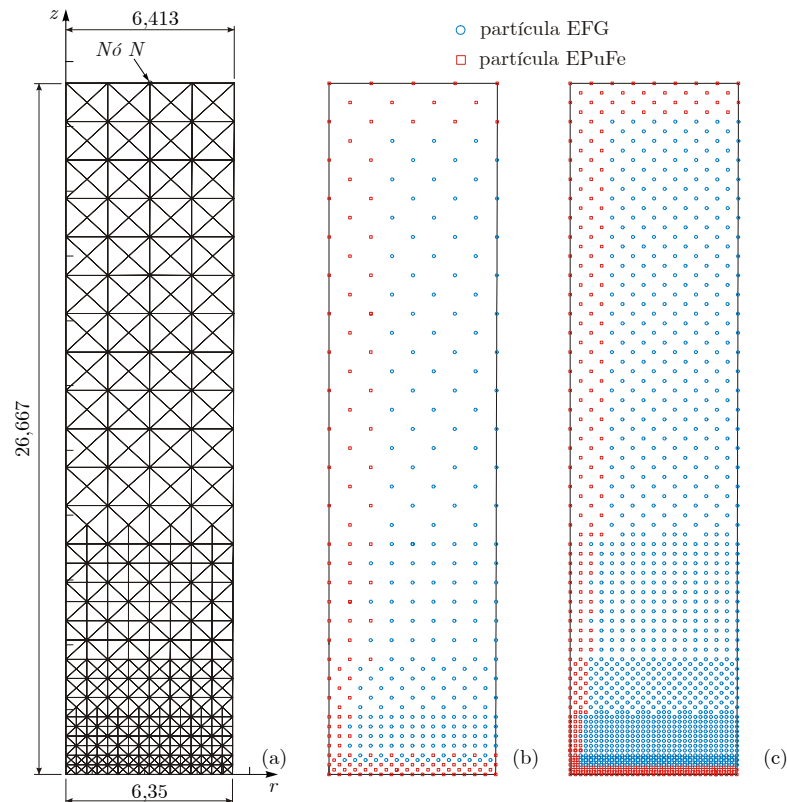


Figura 3.9: Modelo axissimétrico - Malha de integração usada no FEM e distribuição de partículas para o MEFM.

Na Fig. 3.10 é mostrada a comparação entre as configurações deformadas do corpo para 85%, Fig. 3.10(a) e (b), e 100%, Fig. 3.10(c) e (d), do total do deslocamento prescrito, considerando as malhas apresentadas na Fig 3.9(a) e (c) com ou sem a implementação da metodologia  $F\text{-bar}$ .

Fazendo uma análise qualitativa destes resultados é possível notar que não há uma distinção aparente na geometria deformada para o estágio 85% do deslocamento total prescrito. Assim, para este caso as implementações com e sem  $F\text{-bar}$ , 3.10(a) e (b) respectivamente, propiciam saídas semelhantes. Entretanto, quando esta mesma análise é feita para 100% do deslocamento total prescrito é possível verificar diferenças discrepantes na região de estrição quando são comparados os resultados oriundos do MEFM e do MEF. É possível notar ainda que a introdução da metodologia  $F\text{-bar}$ , 3.10(d), proporciona uma sensível mudança quando comparada com a configuração deformada sem  $F\text{-bar}$ , 3.10(c).

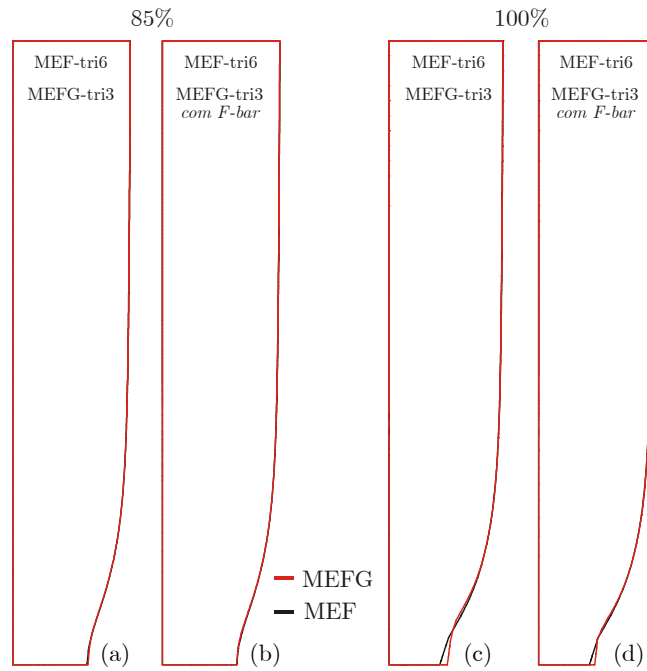


Figura 3.10: Comparação entre as deformadas obtidas pelo MEF e MEFG em dois estágios do processo.

É possível notar também diferenças entre as saídas de deformação plástica acumulada,  $p$ , Fig. 3.11, no final do processo. Novamente, nestas figuras estão as saídas para as malhas mostradas na Fig 3.9(a) e (c) e também levam em consideração a implementação da metodologia  $F\text{-bar}$  no MEFG.

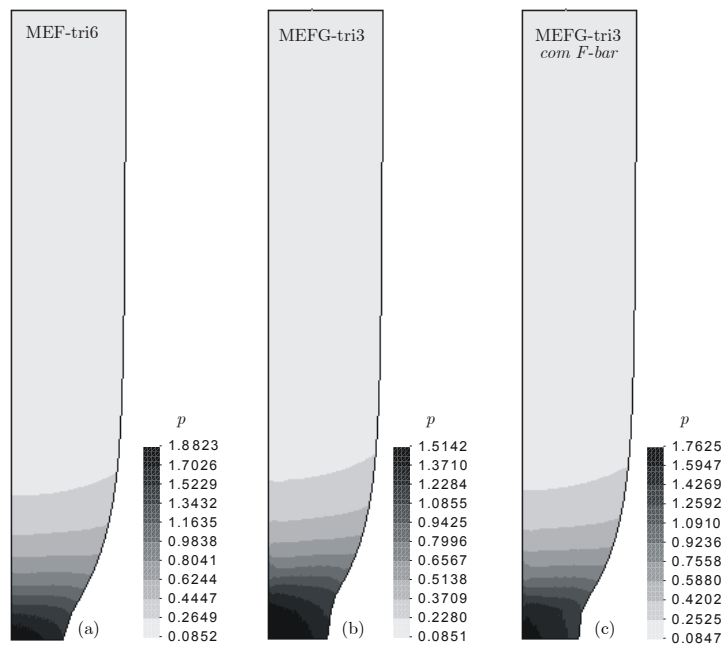


Figura 3.11: Deformação plástica acumulada para as diferentes implementações.

Já a Fig. 3.12 plota as curvas de força na direção  $z$  versus o deslocamento na mesma direção, para a parte superior do corpo. A força foi calculada assumindo que o estado de tensão-deformação na parte superior seja praticamente homogêneo. Com base nesta figura é possível ter uma idéia mais clara das diferenças existentes ao se fazer uso do método de aproximação com e sem a presença de uma metodologia  $F$ -bar. Fica claro que os resultados permanecem próximos durante grande parte do processo, a menos do erro de discretização quando considerada a malha de integração da Fig. 3.9(b). Porém, a partir de um certo ponto, que parece ser um ponto de inflexão no gráfico, e que é um pouco diferente para cada implementação, a solução começa a se afastar daquela obtida pelo método de elementos finitos usando elementos do tipo tri6 na malha da Fig. 3.9(a). É possível perceber também que a implementação da metodologia  $F$ -bar produz uma sensível melhora nos resultados fazendo com que a resposta se aproxime daquela encontrada pelo método dos elementos finitos. Ainda neste gráfico são plotados os resultados obtidos por SIMO & ARMERO (1992) e SOUZA NETO *et al.* (1996).

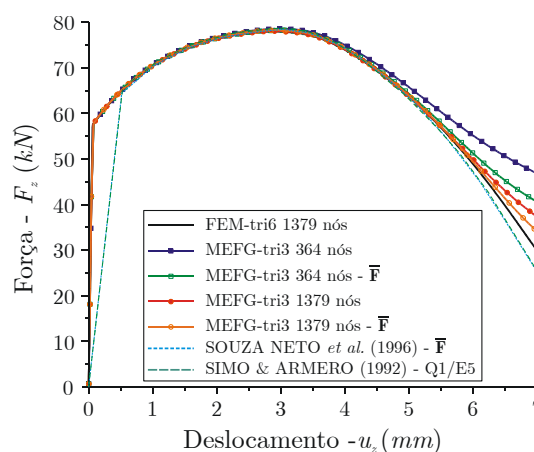


Figura 3.12: Força axial  $\times$  deslocamento na parte superior do corpo.

### Meia simetria

No exemplo anterior o caso de estrição de um corpo de prova foi numericamente investigado. Devido às características de simetria, apenas um quarto do corpo foi espacialmente discretizado. Para este caso, a região de maior sollicitação, definida pela região central do corpo de prova, isto é, região inferior do corpo modelado, é justamente a região de maior presença das funções de peso do tipo EPUFem, decorrente da imposição da condição de simetria. Como já comentado e ilustrado no **Capítulo 1**, as funções de forma finais oriundas apenas da composição de funções de peso do tipo EPUFem reproduzem uma interpolação linear do campo  $u$  e desta forma implicam em uma aproximação constante para  $\mathbf{F}$ , o que torna ineficaz, nestas regiões, a aplicação da metodologia  $F$ -bar.

É proposto agora a simulação de tal problema considerando apenas meia simetria do corpo, ou seja, que seja imposta apenas a simetria ao longo do eixo  $z$  da Fig. 3.9(a). A distribuição de partículas referente a malha de integração Fig. 3.9(c) é apresentada na Fig. 3.13(a). Já a Fig. 3.13(b) apresenta a configuração deformada após todo o processo completado.

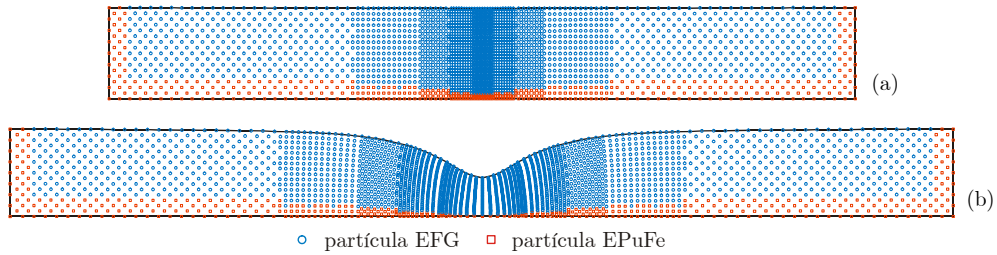


Figura 3.13: Discretização usada para o caso de meia simetria.

Os resultados, novamente considerando de força *versus* deslocamento, na região de aplicação do deslocamento prescrito, estão apresentados na Fig. 3.14. Repare que neste caso os resultados obtidos pelo MEFG foram bem mais próximos aos resultados apresentados com o MEF-tri6. Porém o efeito de travamento volumétrico parece ainda estar presente.

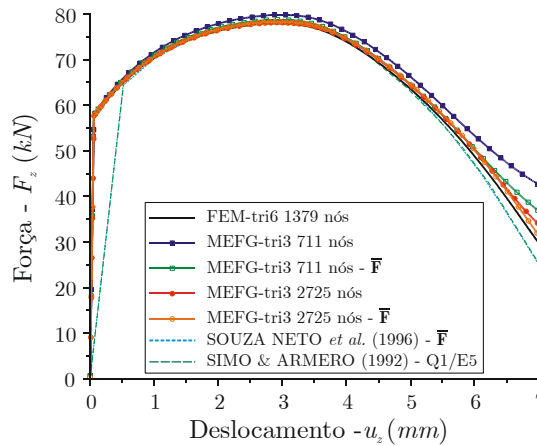


Figura 3.14: Força axial  $\times$  deslocamento na parte superior do corpo - 1/2 simetria.

### Análise de localização e dependência de malha sobre estado plano de deformações

Neste exemplo é apresentado um modelo de tração uniaxial de uma barra de seção retangular sob condição de estado plano de deformações. As dimensões da barra coincidem com aquelas apresentadas no exemplo anterior. Isto é, ao invés de possuir um raio de 6,413 mm esta será a dimensão da metade da base da barra retangular. Novamente, uma pequena imperfeição geométrica é introduzida no modelo. Esta imperfeição consiste em uma variação na base da região central do modelo de 1%, isto é, a distância do centro da barra retangular até a lateral é de 6,35 mm. Esta barra é então submetida a um deslocamento prescrito de  $\bar{u}_z = 5$  mm em ambas as extremidades.

A fim de evitar o efeito das partículas EPUFe será considerada a análise do corpo inteiro, isto é, não serão utilizadas condições de simetria usuais para este tipo de problema. Os parâmetros materiais são os mesmos apresentados no exemplo anterior a menos do parâmetro material associado com a parte linear da regra de endurecimento que é assumido negativo,  $H = -12,924$  MPa, como sugerido em SIMO & ARMERO (1992).

Neste exemplo será investigada se a solução do problema sofre de dependência da malha de integração. Para tanto, são propostas duas malhas de integração com a mesma distribuição e número, 861, de partículas mas com diferentes orientações das células de integração. Estas malhas de integração estão mostradas na Fig. 3.15(a), denominada O1 - de orientação 1, e Fig. 3.15(b), chamada de O2. Na Fig. 3.15(c) é apresentada a distribuição das partículas, que neste caso é a mesma para ambas as malhas. Porém, isto não significa que o suporte das funções de aproximação seja exatamente o mesmo pois lembrando, o algoritmo de determinação do suporte  $s$  das partículas depende da máxima distância entre a partícula e sua lista de partículas adjacentes, que de fato é diferente para cada uma das malhas.

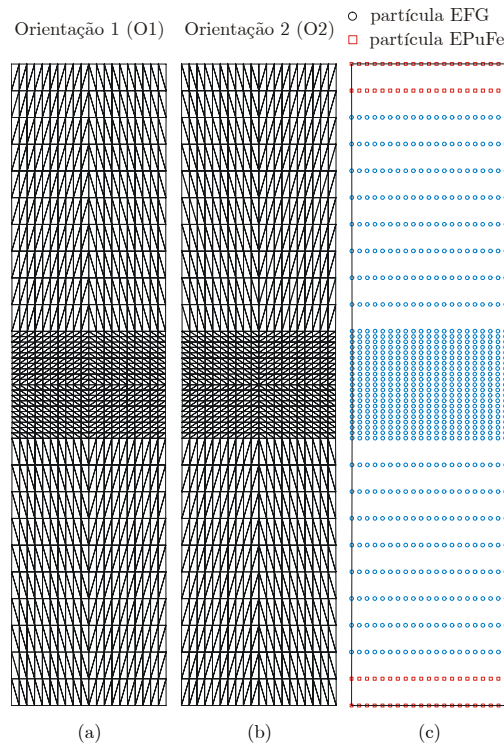


Figura 3.15: Malhas de integração utilizadas para a análise de problema de estiramento de um corpo sob EPD.

Para efeito de comparação serão também efetuadas análises considerando um elemento finito tri6. Para tanto, serão utilizadas as mesmas malhas de integração mostradas nas Fig. 3.15(a) e Fig. 3.15(b). Porém, neste caso o número de graus de liberdade associados às malhas de MEF são bem maiores do que os utilizados na análise por MEFG. O número de nós da malha de MEF tri6 é de 3321.

- Resultados usando Elementos Finitos - Elemento Tri6

Nesta seção serão apresentados e discutidos apenas os resultados obtidos pela análise utilizando um elemento finito do tipo tri6. A Fig. 3.16 mostra as malhas deformadas no final da análise. A Fig. 3.16(a) refere-se à malha com orientação O1 e a 3.16(b) à malha com orientação

O2. As Fig. 3.16(c) e (d) são ampliações da região mais refinada das Fig. 3.16(a) e (b) respectivamente. É visível a diferença entre as deformadas das duas malhas indicando uma forte dependência da solução do problema da malha de discretização por elementos finitos.

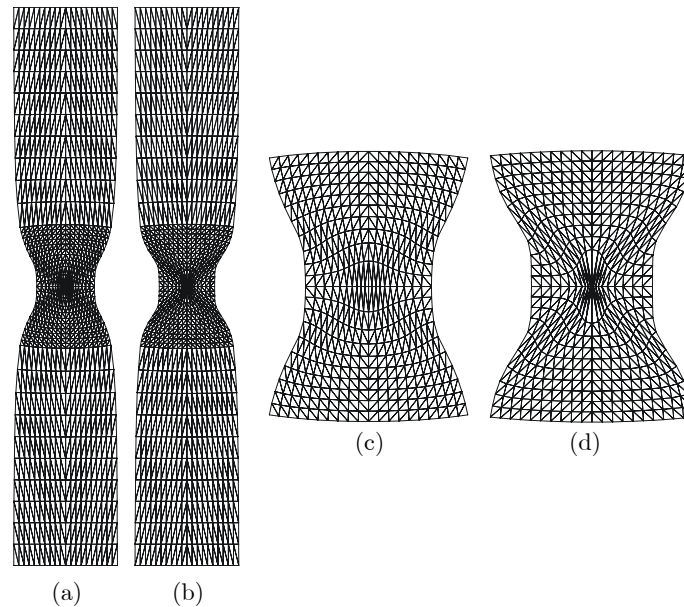


Figura 3.16: Malhas deformadas para a análise de elementos finitos tri6 considerando a orientação O1 e O2.

Esta diferença fica ainda mais evidente ao se plotar as curvas de força *versus* deslocamento obtidas das análises. Este gráfico está mostrado na Fig. 3.17. Repare, novamente, que por boa parte da análise as curvas são idênticas mas a partir de um certo ponto, fase de estrição do corpo, existe uma diferença crescente dos valores entre as duas malhas. Com base na comparação com trabalhos semelhantes apresentados por SIMO & ARMERO (1992) e SOUZA NETO *et al.* (2003) pode-se notar que a malha com orientação O2 possui valores de predição de força *versus* deslocamento mais próximos com os valores apresentados por estes autores.

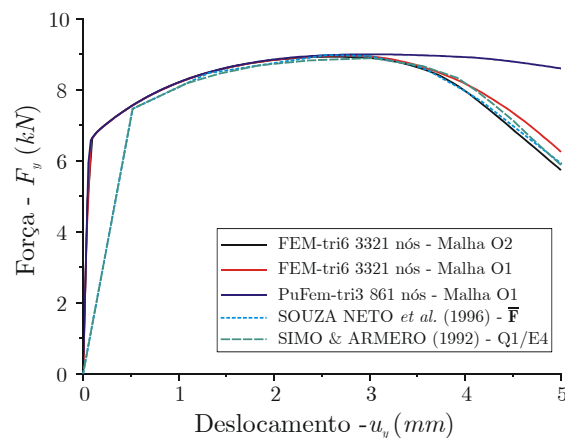


Figura 3.17: Força axial  $\times$  deslocamento para a análise de elementos finitos tri6.

- Resultados obtidos com o MEF3

Agora, são apresentados e discutidos apenas os resultados obtidos pela análise utilizando o método proposto no **Capítulo 1**. A Fig. 3.18 mostra as malhas deformadas no final da análise. A Fig. 3.18(a) refere-se à malha com orientação O1 e a Fig. 3.18(b) à malha com orientação O2. Novamente, as Fig. 3.18(c) e (d) são ampliações da região mais refinada das Fig. 3.18(a) e (b) respectivamente. Diferentemente do exemplo anterior não é visível a diferença entre as deformadas das duas malhas. Isto indica que não há uma forte dependência da solução do problema da malha de discretização por MEF3.

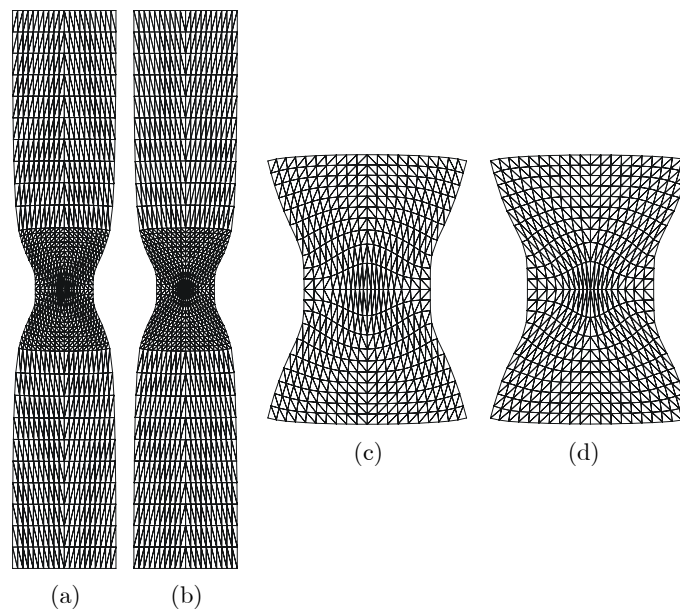


Figura 3.18: Malhas deformadas para a análise considerando o MEF3 tri3 para a orientação O1 e O2.

Também, esta diferença não fica evidente ao se plotar as curvas de força *versus* deslocamento obtidas nas análises. Este gráfico está mostrado na Fig. 3.19. Neste gráfico são apresentados os resultados obtidos para as análises sem a incorporação da metodologia  $\bar{\mathbf{F}}$  e com a metodologia  $\bar{\mathbf{F}}$  para as malhas de integração com orientação O1 e O2 apresentadas na Fig. 3.15(a) e 3.15(b). Repare que as curvas obtidas são praticamente idênticas durante toda a análise. Novamente, para efeito de comparação, são apresentados resultados semelhantes das análises feitas por SIMO & ARMERO (1992) e SOUZA NETO *et al.* (2003).



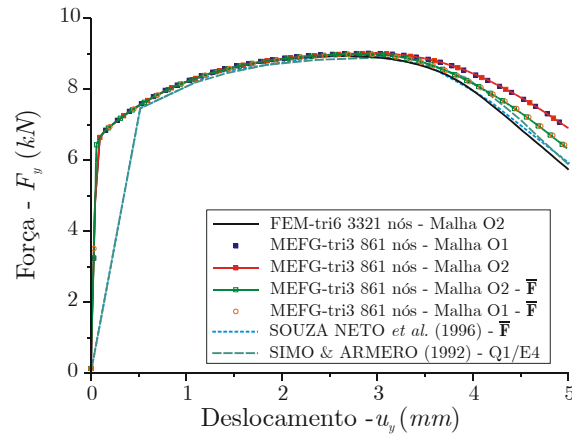


Figura 3.19: Força axial  $\times$  deslocamento para a análise por MEEG tri3.

### Estiramento de um corpo de dupla fissura

Introduzido inicialmente por NAGTEGAAL *et al.* (1974), sob condições geométricas lineares, este exemplo reproduz um estado de alto grau de restrição devido a utilização de um modelo constitutivo  $J_2$  elastoplástico *ideal* juntamente com a hipótese de estado plano de deformações. Os parâmetros materiais utilizados nesta análise são

$$\begin{aligned}\kappa &= 164206.35 \text{ MPa} \\ \mu &= 80193.80 \text{ MPa} \\ \sigma_y &= 450.00 \text{ MPa}.\end{aligned}$$

A análise consiste no estiramento de um corpo com as dimensões mostradas na Fig. 3.20(a). Este estiramento é realizado através da prescrição do deslocamento na região superior e inferior do corpo. Em ambas as regiões é aplicado um deslocamento prescrito de  $\bar{u}_y = 0,3$  mm. A análise é então feita considerando 100 incrementos constantes de deslocamento. Na Fig. 3.20(b) é mostrada a malha de integração usada no MEEG com suporte  $s = 1,5$ . Novamente, a Fig. 3.20(c) mostra a distribuição das partículas. Para efeito de comparação a malha apresentada na Fig. 3.20(b) será também usada para análises considerando um elemento finito tri6 e também um PuFem tri3. Cabe aqui novamente ressaltar que o número de nós usado na análise de elementos finitos tri6 é maior do que os usados na malha baseada em tri3 usada no MEEG e também no PuFem.

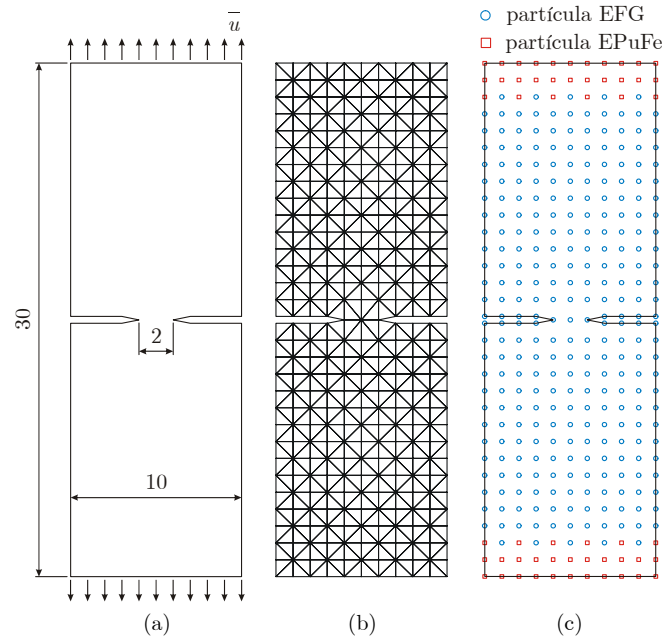


Figura 3.20: Modelo para o corpo com duas fissuras.

Os resultados para força  $\times$  deslocamento, computados na parte superior do corpo, estão mostrados na Fig. 3.21. Repare que fica claro que o uso do MEFG sem nenhuma estratégia de antitravamento volumétrico leva a impossibilidade da representação da carga limite associada a este tipo de problema. Também, os resultados obtidos da análise através do PuFem tri3 e do MEF tri6 se afastam do resultado esperado de forma drástica. Por outro lado, quando é utilizado a estratégia antitravamento apresentada neste capítulo, para dois tamanhos de suportes diferentes, consegue-se uma reprodução da carga limite do problema, como pode-se observar pela comparação com os resultados de SIMO & ARMERO (1992) e SOUZA NETO *et al.* (1996).

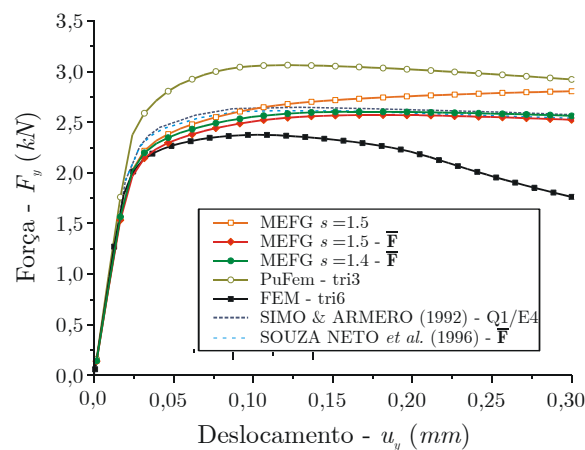


Figura 3.21: Diagrama comparativo entre a força axial  $\times$  deslocamento para as diversas propostas.

**Problema de membrana de Cook**

Neste último exemplo é analisada a performance do método frente a um problema onde os efeitos de flexão são predominantes. Este exemplo, conhecido como membrana de Cook, consiste em um painel trapezoidal, sob hipótese de estado plano de deformações, que é engastado em um lado e submetido a um esforço de cisalhamento de  $V = 5$  kN, como mostrado na Fig. 3.22(a). Esta força cisalhante é distribuída ao longo do comprimento, isto é, a força distribuída aplicada é de  $f = 312,5$  N/mm. As malhas de integração usadas bem como seus respectivos arranjos de partículas são mostrados na Fig. 3.22 para  $s = 1, 5$ .

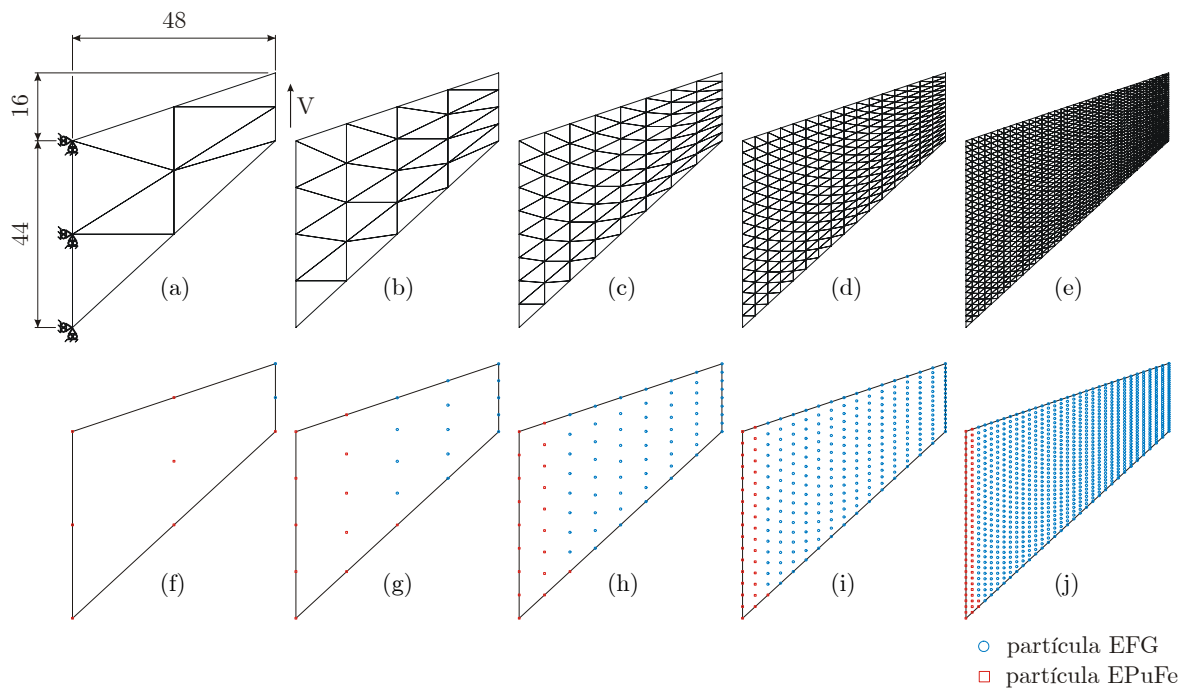


Figura 3.22: Membrana de Cook

Os resultados para deslocamento  $u_y$  do ponto superior direito do painel versus o número de elementos distribuídos no lado do corpo são mostrados na Fig. 3.23. Repare que na medida em que a malha de integração é refinada o resultado tende a solução do problema. Resultados apresentados por SIMO & ARMERO (1992) são também plotados na Fig. 3.23.

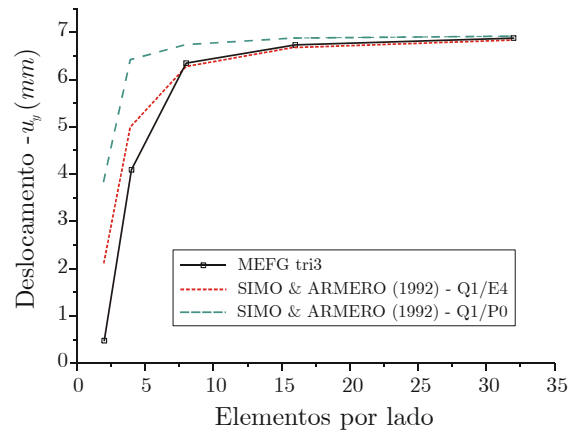


Figura 3.23: Deslocamento do ponto superior da membrana de Cook.

### 3.10 Conclusões parciais

Neste capítulo o método de Galerkin livre de elementos modificado foi numericamente investigado, quando submetido a grandes deformações. Os resultados apresentados evidenciam a presença do fenômeno de travamento volumétrico. Neste contexto uma metodologia do tipo *F-bar* foi implementada e os resultados, provenientes desta análise, mostram-se melhores quando comparados com os resultados sem a presença desta metodologia. Os resultados foram muitas vezes comparados também com aqueles produzidos por um elemento finito tri6. Em alguns casos ficou evidente a melhor performance do método MEFG, evidenciando a sua baixa dependência da malha de integração.

Entretanto, foi verificado também que a presença de partículas EPUFem nas regiões de grande fluxo plástico deterioram a solução, mesmo quando foi utilizada a estratégia antitravamento apresentada. Porém, os resultados indicam também que com uma discretização melhorada na região de alto fluxo plástico, região de estrição do corpo de prova por exemplo, pode levar a resultados onde o problema de travamento volumétrico seja bastante minimizado.

Uma possível causa deste tipo de comportamento é o fato de que as funções de forma globais do tipo EPUFem, ilustradas no **Capítulo 1**, e usadas no exemplo denominado estrição de um corpo de prova para impor as condições de simetria do problema, aproximam  $\mathbf{F}$  de forma constante. O refinamento da malha de integração na região de estrição diminui sensivelmente a região do domínio coberta por estas funções de forma global. Isto sugere que a implementação de um procedimento do tipo *h*-adaptativo, do tipo mostrado no **Capítulo 2**, pode resultar em uma solução livre de travamento volumétrico. Entretanto, esta é uma especulação que deve ser confirmada através de resultados desta implementação.

Os algoritmos propostos nesta seção mostraram-se robustos e embora não tenham sido implementados procedimentos do tipo de controle de deslocamento, como os utilizados por SIMO & ARMERO (1992) e também SOUZA NETO *et al.* (2002) para este mesmo tipo de aplicação, pode-se levar as análises suficientemente longe desde que dado o incremento de deslocamento adequado. Assim como comentado no trabalho de CRISFIELD (1997), também foi evidenciada

a baixa taxa de convergência quando da introdução da metodologia  $F\text{-bar}$ .

## Capítulo 4

# Contato Unilateral em Grandes Deformações

Neste capítulo serão apresentados aspectos gerais com relação ao problema de contato unilateral, dentro do escopo de grandes deformações, e sob a hipótese de *Signorini*, ou seja, que o obstáculo ou corpo alvo seja indeformável.

O problema de contato e atrito é complexo e de grande importância dentro da mecânica do contínuo. Especial atenção deve ser dada a este tipo de fenômeno ao propor uma simulação de processos de conformação em molde, como compactação e também forjamento. Assim, tendo em mente antecipadamente a proposta do próximo capítulo, que é a de simular o processo de compactação de pós metálicos em molde, torna-se imperativo a abordagem deste tópico. Neste tipo de processo o termo de contato e fricção/atrito é um dos fatores principais da análise, como será comentado com mais detalhes no próximo capítulo.

Nos dias de hoje já há bastante literatura disponível sobre esta área de conhecimento. Livros de conteúdo exclusivo sobre este tópico foram recentemente publicados por LAURSEN (2002) e WRIGGERS (2002) onde estão documentados com mais detalhes vários dos trabalhos apresentados por estes autores, como por exemplo WRIGGERS *et al.* (1990) e também SIMO & LAURSEN (1992).

Diferentemente dos capítulos anteriores, onde o MEEG foi amplamente utilizado, neste capítulo e no capítulo subsequente será utilizada uma versão padrão do método livre de malha EFG. Isto se deve ao fato de que os termos relacionados ao contato serem comumente impostos via o método de penalidade ou ainda pelo método do Lagrangeano aumentado. Assim, é proposto que também as condições de contorno essenciais do problema sejam impostas de forma semelhante.

Alguns exemplos numéricos, considerando a hipótese axissimétrica e de estado plano de deformações, serão também apresentados nesta seção para validar e verificar o desempenho da metodologia proposta.

## 4.1 Definição do problema

### 4.1.1 Formulação forte

Seja  $\Omega_o$  a configuração inicial do corpo com contorno  $\partial\Omega_o$ , sujeita a força de corpo  $\vec{b}$  definida em  $\Omega_o$ , a tração  $\vec{t}$  prescrita em  $\Gamma_o^t$ , ao deslocamento prescrito  $\vec{u}$  definido em  $\Gamma_o^u$  e a condição de contato com atrito definida em  $\Gamma_o^c$ . Seja ainda o contorno dado por  $\partial\Omega_o = \Gamma_o^t \cup \Gamma_o^u \cup \Gamma_o^c$  com  $\Gamma_o^t \cap \Gamma_o^u = \emptyset$ ,  $\Gamma_o^t \cap \Gamma_o^c = \emptyset$  e  $\Gamma_o^u \cap \Gamma_o^c = \emptyset$ . A forma forte do problema de contato com atrito quase-estático em grandes deformações pode ser enunciado como:

- **Problema 4.1:** Encontre  $\vec{u}$ , para cada  $t$ , tal que

$$\operatorname{div} \mathbf{P} - \rho_o \vec{b} = 0 \quad \text{em } \Omega_o \quad (4.1)$$

com

$$\mathbf{P}\vec{m} = \vec{t} \quad \text{em } \Gamma_o^t \quad (4.2)$$

$$\vec{u} = \vec{u} \quad \text{em } \Gamma_o^u \quad (4.3)$$

e

$$Q_\nu^c \geq 0, \quad g_\nu \leq 0 \quad \text{e} \quad Q_\nu^c g_\nu = 0 \quad (4.4)$$

sendo

$$\vec{Q}_T^c = \begin{cases} -c_f |Q_\nu^c| \frac{\vec{g}_T}{\|\vec{g}_T\|}, & \text{se } \|\vec{Q}_T^c\| > c_f |Q_\nu^c| \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \text{em } \Gamma_o^c \quad (4.5)$$

Aqui,  $\vec{Q}^c = \mathbf{P}\vec{m}$  é o vetor tração na superfície de  $\Gamma_o^c$  e  $\vec{g}$  é a função vetorial *gap function* a qual será definida na próxima seção. Ainda, os termos  $\vec{Q}^c$  e  $\vec{g}$  são decompostos aditivamente da seguinte forma

$$\vec{Q}^c = \vec{Q}_T^c + Q_\nu^c \vec{\nu} \quad (4.6)$$

na qual

$$Q_\nu^c = \vec{Q}^c \cdot \vec{\nu} \quad (4.7)$$

$$\vec{Q}_T^c = [\mathbf{I} - \vec{\nu} \otimes \vec{\nu}] \vec{Q}^c \quad (4.8)$$

e

$$\vec{g} = \vec{g}_T + g_\nu \vec{\nu} \quad (4.9)$$

sendo

$$g_\nu = \vec{g} \cdot \vec{\nu} \quad (4.10)$$

$$\vec{g}_T = [\mathbf{I} - \vec{\nu} \otimes \vec{\nu}] \vec{g}. \quad (4.11)$$

Nestas últimas equações  $\vec{\nu}$  é a normal externa ao obstáculo no ponto de contato, como visto na Fig. 4.1, e a Eq. 4.5 representa a lei de atrito de Coulomb clássica.

#### 4.1.2 Definição da função *gap*

Suponha que para cada ponto  $\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{X}, t)$ ,  $\vec{X} \in \Gamma_o^c$ , possa ser identificado um ponto correspondente  $\vec{Y} \in \Gamma_{obs}$ , como sendo a projeção mais próxima de  $\Gamma_{obs}$  para  $\vec{x}$  no espaço *Euclidiano*. A parametrização da fronteira  $\Gamma_{obs}$  pelo seu comprimento de arco  $l$ ,  $l \in [0, 1]$ , permite que o problema de encontrar esta projeção mais próxima possa ser formulado da seguinte forma:

- **Problema 4.2:** Encontre  $l^*$  tal que

$$l^* = \arg \min_{l \in [0,1]} \left\| \vec{\varphi}(\vec{X}, t) - \vec{Y}(l) \right\| \quad (4.12)$$

$$= \arg \min_{l \in [0,1]} \left\| \vec{X} + \vec{u}(\vec{X}, t) - \vec{Y}(l) \right\| \quad (4.13)$$

sendo a projeção mais próxima dada então por  $\vec{Y}(\vec{X}, t) = \vec{Y}(l^*(\vec{X}, t))$ .

Aqui é suposta a existência de uma correspondência um-para-um entre os pontos  $\vec{X} \in \Gamma_o^c$  e  $\vec{Y} \in \Gamma_{obs}$ . Assim, em cada instante  $t$ , e para todo  $\vec{X} \in \Gamma_o^c$  é necessário determinar:

- a projeção mais próxima  $\vec{Y}(\vec{X}, t) = \vec{Y}(l^*(\vec{X}, t))$ ;
- a normal  $\vec{\nu}(\vec{X}, t)$  para  $\Gamma_{obs}$  em  $\vec{Y}(\vec{X}, t)$ .

De posse destes resultados é possível definir a função vetorial *gap* da seguinte forma

$$\vec{g} = - \left[ \vec{X} + \vec{u}(\vec{X}, t) - \vec{Y}(\vec{X}, t) \right] \quad (4.14)$$

e sua componente normal,  $g_\nu(\vec{X}, t) : \Gamma_o^c \rightarrow R$ , por

$$g_\nu = - \left[ \vec{X} + \vec{u}(\vec{X}, t) - \vec{Y}(\vec{X}, t) \right] \cdot \vec{\nu}(\vec{X}, t) \quad (4.15)$$

A Fig. 4.1 mostra, de forma esquemática, o problema de contato com relação a um obstáculo fixo, indeformável,  $\Omega_{obs}$  de fronteira  $\Gamma_{obs}$  a qual está parametrizada pelo comprimento de arco  $l$ ,  $l \in [0, 1]$ . A fronteira  $\Gamma_{obs}$  separa o espaço em uma região admissível onde  $g_\nu < 0$ , em uma região de contato para a qual  $g_\nu = 0$  e, por fim, em uma região inadmissível onde  $g_\nu > 0$ .

#### 4.1.3 Formulação fraca

A fim de resolver o problema de contato com atrito de Signorini na descrição *Lagrangeana Total*, na sua forma incremental, é aplicado o método do Lagrangeano Aumentado. Como resultado, a solução do problema de contato com atrito é determinada pela resolução da seguinte sequência de problemas:



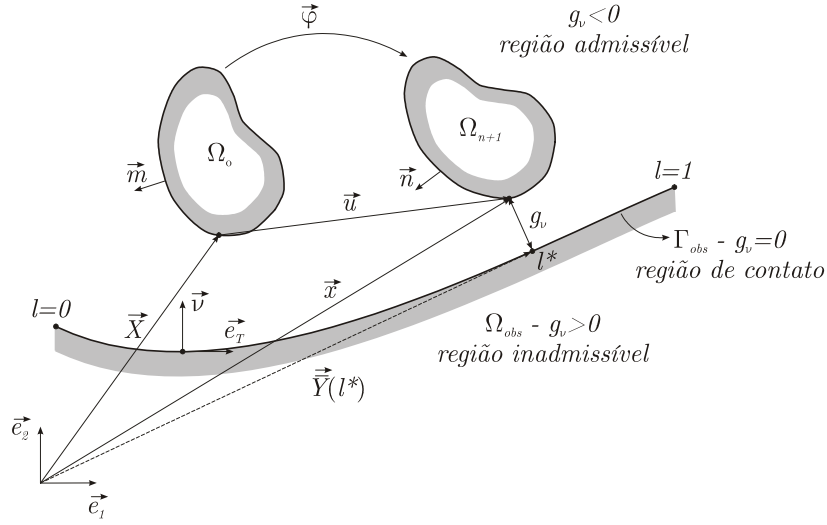


Figura 4.1: Modelo de contato em grandes deformações - problema de Signorini.

- **Problema 4.3:** Dado  $\epsilon_u > 0$ ,  $\bar{\lambda}_{u_{n+1}}^o$ ,  $\epsilon_\nu > 0$  e  $\lambda_{\nu_{n+1}}^o$  encontre  $\vec{u}_{n+1}$  tal que

$$\vec{u}_{n+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{u}_{n+1}^k$$

aonde  $\vec{u}_{n+1}^k$  é a solução de: Encontre  $\vec{u}_{n+1}^k \in \mathcal{K}$  tal que

$$\tilde{F}(\vec{u}_{n+1}^k, \delta \vec{u}) = 0 \quad \forall \delta \vec{u} \in \mathcal{V}, \quad (4.16)$$

onde

$$\tilde{F}(\vec{u}_{n+1}^k, \delta \vec{u}) = F(\vec{u}_{n+1}^k, \delta \vec{u}) + F^u(\vec{u}_{n+1}^k, \delta \vec{u}) + F^c(\vec{u}_{n+1}^k, \delta \vec{u}) \quad (4.17)$$

na qual

$$F(\vec{u}_{n+1}^k, \delta \vec{u}) = \int_{\Omega_o} \mathbf{P}(\vec{u}_{n+1}^k) \cdot \nabla_{\vec{X}} \delta \vec{u} \, d\Omega_o - \int_{\Omega_o} \rho_o \vec{b}_{n+1} \cdot \delta \vec{u} \, d\Omega_o - \int_{\Gamma_o^t} \vec{t}_{n+1} \cdot \delta \vec{u} \, dA_o, \quad (4.18)$$

$$F^u(\vec{u}_{n+1}^k, \delta \vec{u}) = - \int_{\Gamma_o^u} \vec{Q}_{n+1}^u(\vec{u}_{n+1}^k, \epsilon_u, \bar{\lambda}_{u_{n+1}}^k) \cdot \delta \vec{u} \, dA_o \quad (4.19)$$

e

$$F^c(\vec{u}_{n+1}^k, \delta \vec{u}) = - \int_{\Gamma_o^c} \vec{Q}_{n+1}^c(\vec{u}_{n+1}^k, \epsilon_\nu, \lambda_{\nu_{n+1}}^k) \cdot \delta \vec{u} \, dA_o, \quad (4.20)$$

sendo

$$\vec{Q}_{n+1}^u = \mathbf{P}_{n+1} \vec{m} \quad \text{em } \Gamma_o^u \quad (4.21)$$

$$\vec{Q}_{n+1}^c = Q_{\nu_{n+1}}^c \vec{v} + Q_{T_{n+1}}^c \vec{e}_T \quad \text{em } \Gamma_o^c. \quad (4.22)$$

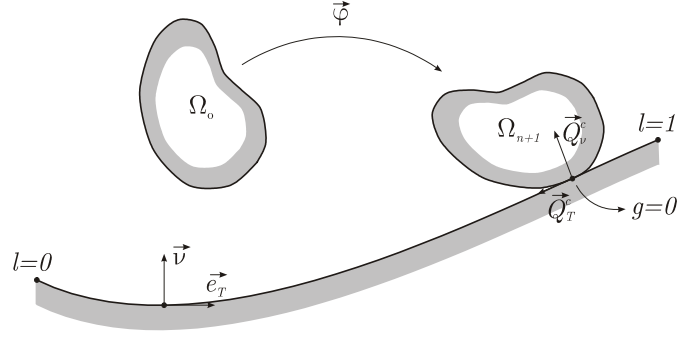


Figura 4.2: Força normal  $\vec{Q}_\nu^c$  e tangencial  $\vec{Q}_T^c$  que surgem no contato.

Neste processo iterativo, os multiplicadores de Lagrange são atualizados através de

$$\vec{\lambda}_{u_{n+1}}^{k+1} = - \left[ \vec{\lambda}_{u_{n+1}}^k + \frac{1}{\epsilon_u} (\vec{u}_{n+1}^k - \vec{u}_{n+1}) \right] \quad (4.23)$$

$$\lambda_{\nu_{n+1}}^{k+1} = \left\langle \lambda_{\nu_{n+1}}^k + \frac{1}{\epsilon_\nu} g_\nu (\vec{u}_{n+1}^k) \right\rangle. \quad (4.24)$$

Aqui,  $\langle \cdot \rangle$  é o operador de Macauley, definido por

$$\langle x \rangle = \frac{1}{2} (x + |x|), \quad (4.25)$$

o qual retorna a parte positiva do argumento  $x$ . Note que,  $\vec{\lambda}_u$  e  $\epsilon_u$  são respectivamente o multiplicador de Lagrange e a *penalidade exterior* associados à imposição da condição de contorno essencial, e  $\lambda_\nu$  e  $\epsilon_\nu$  são respectivamente o multiplicador de *Lagrange* e a *penalidade exterior* associados à imposição do contato normal.

Ao observar o **Problema 4.3** pode-se identificar que foram introduzidas duas novas parcelas,  $F^u$  dada pela Eq.(4.19) e  $F^c$  pela Eq.(4.20), ao **Problema 3.4**, que são, respectivamente, o *trabalho* das forças referentes à imposição das condições de contorno essenciais do problema e o *trabalho* das forças de contato. A parcela  $Q_\nu^c$  é referente à contribuição normal do contato  $Q_T^c$  é referente à contribuição tangencial, i.e., do atrito e dependerá da formulação de atrito adotada, a qual será discutida com maiores detalhes em uma seção deste capítulo. A Fig. 4.2 mostra as forças que surgem no contato.

A inclusão destas duas parcelas agrega novas não linearidades ao problema, o que por sua vez implica no uso de métodos numéricos apropriados para a busca de sua solução.

#### 4.1.4 Método de Newton

A fim de determinar a solução  $\vec{u}_{n+1}^k$  da Eq. (4.16) é utilizado o método de Newton. Dada a solução inicial  $\vec{u}_{n+1}^{k(0)} = \vec{u}_n$ ,  $\vec{u}_n$  denota a solução convergida em  $t_n$ , encontre a estimativa  $\vec{u}_{n+1}^k$ ,

$$\vec{u}_{n+1}^k = \lim_{i \rightarrow \infty} \vec{u}_{n+1}^{k(i)}, \quad (4.26)$$

onde  $\vec{u}_{n+1}^{k(i)}$  é calculado, da iteração anterior, por

$$\vec{u}_{n+1}^{k(i)} = \vec{u}_{n+1}^{k(i-1)} + \Delta \vec{u}_{n+1}^{k(i-1)}. \quad (4.27)$$

O incremento  $\Delta \vec{u}_{n+1}^{k(i-1)}$  é determinado pela solução do seguinte problema linear

$$D\tilde{F} \left( \vec{u}_{n+1}^{k(i-1)}, \delta \vec{u} \right) \left[ \Delta \vec{u}_{n+1}^{k(i-1)} \right] = -\tilde{F} \left( \vec{u}_{n+1}^{k(i-1)}; \delta \vec{u} \right) \quad \forall \delta \vec{u} \in \mathcal{V}, \quad (4.28)$$

na qual  $D\tilde{F}$  pode ser encontrada através da derivada de Gateaux

$$D\tilde{F} \left( \vec{u}_{n+1}^{k(i-1)}, \delta \vec{u} \right) \left[ \Delta \vec{u}_{n+1}^{k(i-1)} \right] = \left. \frac{d}{d\epsilon} \tilde{F} \left( \vec{u}_{n+1}^{k(i-1)} + \epsilon \Delta \vec{u}_{n+1}^{k(i-1)}, \delta \vec{u} \right) \right|_{\epsilon=0}. \quad (4.29)$$

Nas próximas seções cada um destes efeitos será abordado com mais detalhes finalizando com a apresentação do algoritmo utilizado na solução do problema proposto.

## 4.2 Imposição das condições essenciais

No **Capítulo 1** foi apresentada uma extensa discussão sobre a imposição das condições essenciais propostas por vários autores, não só utilizadas para o EFG mas também para a maioria dos métodos livres de malha. É proposto nesta seção que as condições de contorno essenciais sejam impostas através do método do *Lagrangeano Aumentado*. Embora seja uma evolução natural do método dos *multiplicadores de Lagrange* e do *método de penalidade*, métodos estes preferidos por uma grande parte dos autores citados no **Capítulo 1**, o método do *Lagrangeano Aumentado* não foi utilizado por nenhum dos trabalhos citados para a imposição das condições de contorno.

A imposição das condições de contorno essenciais via o método do *Lagrangeano Aumentado* implica em que

$$\vec{Q}_{n+1}^u \left( \vec{u}_{n+1}^{k(i)}, \epsilon_u, \vec{\lambda}_{u_{n+1}}^k \right) = - \left[ \vec{\lambda}_{u_{n+1}}^k + \frac{1}{\epsilon_u} \left( \vec{u}_{n+1}^{k(i)} - \vec{u}_{n+1} \right) \right] \quad em \Gamma_o^u \quad (4.30)$$

onde  $\vec{\lambda}_{u_{n+1}}^k$  é o multiplicador de Lagrange para a  $k$ -ésima iteração, em  $t_{n+1}$ , e  $\epsilon_u$  é o parâmetro de penalidade referente a  $\vec{Q}^u$ . A derivada de Gateaux de  $F^u$  é dada por

$$DF^u \left( \vec{u}_{n+1}^{k(i)}, \delta \vec{u} \right) \left[ \Delta \vec{u}_{n+1}^{k(i)} \right] = -\frac{1}{\epsilon_u} \int_{\Gamma_o^u} \Delta \vec{u}_{n+1}^{k(i)} \cdot \delta \vec{u} \, d\Gamma_o^u. \quad (4.31)$$

### 4.2.1 Procedimento de discretização via EFG

Considerando agora a aproximação por funções do tipo EFG é possível escrever a Eq.(4.30) da seguinte maneira

$$\vec{Q}_{n+1}^u = - \left[ \vec{\lambda}_{u_{n+1}}^{hk} + \frac{1}{\epsilon_u} \left( \vec{u}_{n+1}^{hk(i)} - \vec{u}_{n+1} \right) \right] \quad em \Gamma_o^u. \quad (4.32)$$

Aqui

$$\vec{u}_{n+1}^{hk(i)} = \Phi^g \vec{u}_{n+1}^{gk(i)} \quad (4.33)$$

e também

$$\delta \vec{u}^h = \mathbf{\Phi}^g \delta \vec{u}^g. \quad (4.34)$$

Nas Eq.(4.33) e Eq.(4.34)  $\mathbf{\Phi}^g$  é a matriz das funções de forma globais provenientes do método EFG. Já o termo de aproximação associado com o multiplicador de Lagrange,  $\vec{\lambda}_{u_{n+1}}^{hk}$ , é computado supondo uma interpolação linear, isto é,

$$\vec{\lambda}_{u_{n+1}}^{hk} = \mathbf{N}^g \vec{\lambda}_{u_{n+1}}^{gk}. \quad (4.35)$$

Agora, substituindo Eq.(4.33), Eq.(4.34) e Eq.(4.35) na Eq.(4.32) e esta em Eq.(4.19) produz

$$\begin{aligned} F^u \left( \vec{u}_{n+1}^{hk(i)}, \delta \vec{u}^h \right) &= - \int_{\Gamma_o^u} \vec{Q}_{n+1}^{u^{k(i)}} \cdot \delta \vec{u}^h \, d\Gamma_o^u \\ &= \vec{f}_{n+1}^{\lambda_u^k} \cdot \delta \vec{u}^g + \vec{f}_{n+1}^{u^{k(i)}} \cdot \delta \vec{u}^g \end{aligned} \quad (4.36)$$

com

$$\vec{f}_{n+1}^{\lambda_u^k} = \int_{\Gamma_o^u} (\mathbf{\Phi}^g)^T \mathbf{N}^g \vec{\lambda}_{u_{n+1}}^{gk} \, d\Gamma_o^u \quad (4.37)$$

$$\vec{f}_{n+1}^{u^{k(i)}} = \frac{1}{\epsilon_u} \int_{\Gamma_o^u} (\mathbf{\Phi}^g)^T \mathbf{\Phi}^g \left( \vec{u}_{n+1}^{gk(i)} - \vec{u}^g \right) \, d\Gamma_o^u. \quad (4.38)$$

Ainda, ao substituir as Eq.(4.33) e Eq.(4.34) na Eq.(4.31) produz

$$DF^u \left( \vec{u}_{n+1}^{hk(i)}, \delta \vec{u}^h \right) \left[ \Delta \vec{u}_{n+1}^{hk(i)} \right] = \mathbf{K}_{n+1}^{u^{k(i)}} \Delta \vec{u}_{n+1}^{gk(i)} \cdot \delta \vec{u}^g \quad (4.39)$$

na qual

$$\mathbf{K}_{n+1}^{u^{k(i)}} = -\frac{1}{\epsilon_u} \int_{\Gamma_o^u} (\mathbf{\Phi}^g)^T \mathbf{\Phi}^g \, d\Gamma_o^u. \quad (4.40)$$

### 4.3 Imposição dos termos de contato e atrito

Os termos de imposição de contato,  $\vec{Q}_{n+1}^c$ , são divididos em contato normal,  $Q_{\nu_{n+1}}^c$ , e contato tangencial ou de atrito,  $Q_{T_{n+1}}^c$ , de acordo como mostrado na Fig. 4.2 e são decompostos aditivamente como mostrado na Eq.(4.22), repetida aqui,

$$\vec{Q}_{n+1}^c = Q_{\nu_{n+1}}^c \vec{\nu} + Q_{T_{n+1}}^c \vec{e}_T \quad em \quad \Gamma_o^c. \quad (\text{repetida})$$

A fim de simplificar a derivação de cada termo é ainda feita a seguinte decomposição

$$F^c \left( \vec{u}_{n+1}, \delta \vec{u} \right) = F_{\nu}^c \left( \vec{u}_{n+1}^{k(i)}, \delta \vec{u} \right) + F_T^c \left( \vec{u}_{n+1}^{k(i)}, \delta \vec{u} \right) \quad (4.41)$$

com

$$F_\nu^c(\vec{u}_{n+1}^{k(i)}, \delta\vec{u}) = - \int_{\Gamma_o^c} Q_{\nu_{n+1}}^c(\vec{u}_{n+1}^{k(i)}, \epsilon_\nu, \lambda_{\nu_{n+1}}^k) \vec{\nu}_{n+1}^{k(i)} \cdot \delta\vec{u} \, d\Gamma_o^c \quad (4.42)$$

$$F_T^c(\vec{u}_{n+1}^{k(i)}, \delta\vec{u}) = - \int_{\Gamma_o^c} Q_{T_{n+1}}^c(\vec{u}_{n+1}^{k(i)}, Q_{\nu_{n+1}}^c, \epsilon_T) \vec{e}_{T_{n+1}}^{k(i)} \cdot \delta\vec{u} \, d\Gamma_o^c. \quad (4.43)$$

que são, respectivamente, o trabalho das forças de contato normal e o trabalho das forças de atrito.

### 4.3.1 Contato Normal - condição de impenetrabilidade

Nesta tese é feita a hipótese que as paredes do obstáculo, molde, são compostas apenas por segmentos de retas. Está hipótese implica em que:

- O problema da mínima distância entre o corpo e o obstáculo, dado pela Eq.(??), seja simplificado;
- Os termos referentes à curvatura, que aparecem na linearização do problema, sejam nulos.

Seguindo a proposta apresentada inicialmente em SIMO & LAURSEN (1992), na qual é apresentada uma metodologia baseada no método do *Lagrangeano Aumentado*, o termo de contato normal referente ao processo iterativo é escrito como

$$Q_{\nu_{n+1}}^c(\vec{u}_{n+1}^{k(i)}, \epsilon_\nu, \lambda_{\nu_{n+1}}^k) = \left\langle \lambda_{\nu_{n+1}}^k + \frac{1}{\epsilon_\nu} g(\vec{u}_{n+1}^{k(i)}) \right\rangle \quad (4.44)$$

onde  $\lambda_{\nu_{n+1}}^k$  e  $\epsilon_\nu$  são, respectivamente, o multiplicador de *Lagrange* e a *penalidade* referentes a  $k$ -ésima iteração, para o instante  $t_{n+1}$ . A derivada de Gateaux de  $F_\nu^c$  é dada por

$$DF_\nu^c(\vec{u}_{n+1}^{k(i)}, \delta\vec{u}) [\Delta\vec{u}_{n+1}^{k(i)}] = \frac{1}{\epsilon_\nu} \int_{\Gamma_o^c} H(Q_{\nu_{n+1}}^{c^{k(i)}}) (\vec{\nu}_{n+1}^{k(i)} \otimes \vec{\nu}_{n+1}^{k(i)}) \Delta\vec{u}_{n+1}^{k(i)} \cdot \delta\vec{u} \, d\Gamma_o^c. \quad (4.45)$$

Na Eq.(4.45)  $H(\cdot)$  é a função de Heaviside, a qual é 1 quando o argumento é positivo e 0 caso contrário.

### Procedimento de discretização via EFG

Considerando a aproximação por funções do tipo EFG, é possível escrever a Eq.(4.44) da seguinte maneira

$$Q_{\nu_{n+1}}^{c^{k(i)}} = \left\langle \lambda_{\nu_{n+1}}^{hk} + \frac{1}{\epsilon_\nu} g(\vec{u}_{n+1}^{hk(i)}) \right\rangle. \quad (4.46)$$

Mantendo as Eq.(4.33), Eq.(4.34) em mente e também que o multiplicador de Lagrange,  $\lambda_{N_{n+1}}^{hk}$ , é computado supondo uma interpolação linear, de modo idêntico ao feito anteriormente, então

$$\lambda_{N_{n+1}}^{hk} = \mathbf{N}^g \bar{\lambda}_{N_{n+1}}^{gk}. \quad (4.47)$$

Agora, substituindo as Eq.(4.46), Eq.(4.33), Eq.(4.34) e Eq.(4.47) na Eq.(4.42) produz

$$\begin{aligned} F_{\nu}^c \left( \vec{u}_{n+1}^{h^{k(i)}}, \delta \vec{u}^h \right) &= - \int_{\Gamma_o^c} Q_{\nu_{n+1}}^{c^{k(i)}} \vec{\nu}_{n+1}^{k(i)} \cdot \delta \vec{u}^h \, d\Gamma_o^c \\ &= \vec{f}_{\nu_{n+1}}^{c^{k(i)}} \cdot \delta \vec{u}^g \end{aligned} \quad (4.48)$$

com

$$\vec{f}_{\nu_{n+1}}^{c^{k(i)}} = - \int_{\Gamma_o^c} \left\langle \lambda_{\nu_{n+1}}^{h^k} + \frac{1}{\epsilon_{\nu}} g \left( \vec{u}_{n+1}^{h^{k(i)}} \right) \right\rangle (\Phi^g)^T \vec{\nu}_{n+1}^{k(i)} \, d\Gamma_o^c. \quad (4.49)$$

Ainda, ao substituir as Eq.(4.33) e Eq.(4.34) na Eq.(4.45) produz

$$DF_{\nu}^c \left( \vec{u}_{n+1}^{h^{k(i)}}, \delta \vec{u}^h \right) \left[ \Delta \vec{u}_{n+1}^{h^{k(i)}} \right] = \mathbf{K}_{\nu_{n+1}}^{c^{k(i)}} \Delta \vec{u}_{n+1}^{g^{k(i)}} \cdot \delta \vec{u}^g \quad (4.50)$$

na qual

$$\mathbf{K}_{\nu_{n+1}}^{c^{k(i)}} = \frac{1}{\epsilon_{\nu}} \int_{\Gamma_o^c} H \left( Q_{\nu_{n+1}}^{c^{k(i)}} \right) \left[ (\Phi^g)^T \vec{\nu}_{n+1}^{k(i)} \right] \otimes \left[ (\Phi^g)^T \vec{\nu}_{n+1}^{k(i)} \right] \, d\Gamma_o^c. \quad (4.51)$$

### 4.3.2 Contato Tangencial

A completa determinação do termo de contato tangencial, atrito ou ainda fricção, depende do modelo ou lei utilizada. Várias regras têm sido empregadas para descrever estes efeitos. Dentre as quais pode-se citar as seguintes, BELYTSCSKO *et al.* (2000):

- modelos baseados na lei de atrito de Coulomb, os quais são baseados nas leis clássicas de atrito;
- modelos baseados em equações constitutivas de interface, nas quais as forças tangenciais são derivadas de uma relação constitutiva semelhante às usadas para materiais inelásticos;
- modelos asperecidade-lubrificação, os quais consideram o comportamento físico da interface e são geralmente postos na microescala.

Nesta tese será utilizado um modelo de atrito de Coulomb regularizado. Este tipo de modelo incorpora características das duas primeiras regras apresentadas anteriormente e tem sido amplamente utilizados na literatura como visto em SIMO & LAURSEN (1992) e vários outros.

#### Lei de atrito de Coulomb regularizada - Regularização com uso de penalidade

A fim de superar as dificuldades numéricas associadas à natureza multi-valor da lei de Coulomb apresentada na Eq.(4.5) é proposto o uso de uma lei de atrito de Coulomb regularizada. Esta pode ser obtida através da introdução de um parâmetro de penalidade  $\epsilon_T$ , veja LAURSEN (2002), o qual não é necessariamente igual ao parâmetro  $\epsilon_{\nu}$  introduzido anteriormente na discussão do contato normal, na lei de Coulomb clássica de forma a ter a sua evolução governada pelo seguinte

conjunto de equações simultâneas

$$\Upsilon \left( Q_{T_{n+1}}^{c^{k(i)}}, Q_{\nu_{n+1}}^{c^{k(i)}} \right) = \left| Q_{T_{n+1}}^{c^{k(i)}} \right| - c_f Q_{\nu_{n+1}}^{c^{k(i)}} \quad (4.52)$$

$$\dot{Q}_{T_{n+1}}^{c^{k(i)}} = -\frac{1}{\epsilon_T} \left( \dot{u}_{T_{n+1}}^{k(i)} + \dot{\gamma} \frac{Q_{\nu_{n+1}}^{c^{k(i)}}}{\left| Q_{\nu_{n+1}}^{c^{k(i)}} \right|} \right) \quad (4.53)$$

$$\dot{\gamma} \geq 0 \quad (4.54)$$

$$\dot{\gamma} \Upsilon = 0 \quad (4.55)$$

onde  $\Upsilon$  é a chamada função de escorregamento<sup>1</sup> que faz o papel análogo à função de escoamento no caso de plasticidade,  $c_f$  é o coeficiente de fricção e  $\dot{u}_T$  é a velocidade tangencial dada, no caso bidimensional, por

$$\dot{u}_{T_{n+1}}^{k(i)} = \dot{u}_{n+1}^{k(i)} \cdot \vec{e}_{T_{n+1}}^{k(i)}. \quad (4.56)$$

Uma idéia do modelo de Coulomb regularizado é apresentada na Fig. 4.3.

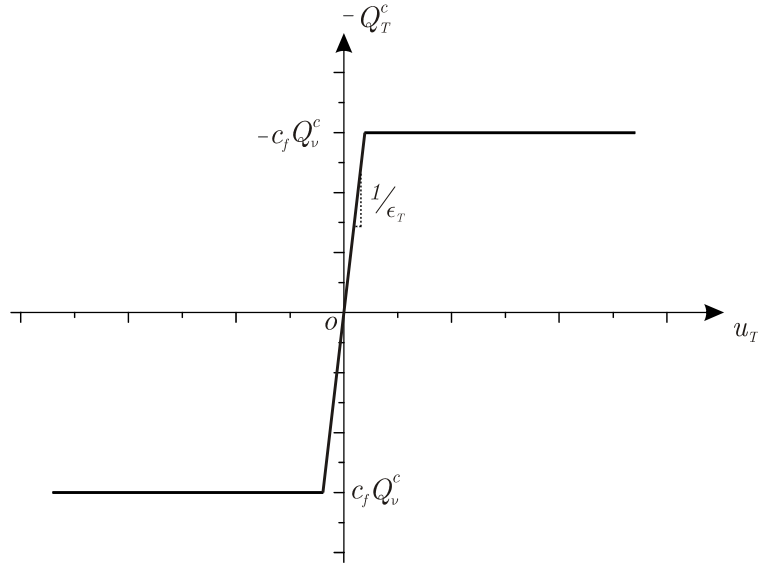


Figura 4.3: Regularização do modelo de Coulomb via penalidade.

A analogia com o modelo de plasticidade fica ainda mais evidenciado ao perceber neste modelo que a função de escorregamento  $\Upsilon$  separa o efeito do atrito em duas fases, que são:

- condição de adesão, *stick condition*, que acontece para  $\Upsilon \leq 0$  e neste caso não existe movimento relativo da região de contato do corpo com relação ao obstáculo;
- condição de escorregamento, *slip condition*, que acontece para  $\Upsilon > 0$  e neste caso há movimento relativo da região de contato do corpo com relação ao obstáculo.

Assim, a integração da Eq.(4.52) produz um estado teste seguido de um mapeamento de retorno. Na tabela 4.1 são apresentados os aspectos gerais do algoritmo utilizado para o modelo

<sup>1</sup>do inglês *slip function*

Tabela 4.1: Algoritmo para o modelo de Coulomb regularizado

(i) Dado $Q_{T_n}^c$ , $Q_{\nu_{n+1}}^{c^{k(i)}}$ , $u_{T_n}$ e $u_{T_{n+1}}^{k(i)}$ , compute: $Q_{T_{n+1}}^{c^{teste^{k(i)}}} = Q_{T_n}^c - \frac{1}{\epsilon_T} \left( u_{T_{n+1}}^{k(i)} - u_{T_n} \right)$
(ii) Teste o estado teste: - Se $\Upsilon \left( Q_{T_{n+1}}^{c^{teste^{k(i)}}}, Q_{\nu_{n+1}}^{c^{k(i)}} \right) \leq 0$ então condição de adesão: $Q_{T_{n+1}}^{c^{k(i)}} = Q_{T_{n+1}}^{c^{teste^{k(i)}}}$ - caso contrário condição de escorregamento: $Q_{T_{n+1}}^{c^{k(i)}} = c_f Q_{\nu_{n+1}}^{c^{k(i)}} \frac{Q_{T_{n+1}}^{c^{teste^{k(i)}}}}{\left  Q_{T_{n+1}}^{c^{teste^{k(i)}}} \right }$ - fim

de Coulomb regularizado apresentado nesta seção.

Uma vez definido o modelo de atrito a ser adotado pode-se partir para a identificação dos termos do funcional  $F_T^c$  quanto a sua discretização e linearização. Como já visto, o trabalho das forças de atrito é dado por

$$F_T^c \left( \vec{u}_{n+1}^{k(i)}, \delta \vec{u} \right) = - \int_{\Gamma_o^c} Q_{T_{n+1}}^{c^{k(i)}} \vec{e}_{T_{n+1}}^{k(i)} \cdot \delta \vec{u} \, dA_o. \quad (\text{repetida})$$

**Procedimento de discretização via EFG** Novamente, através da discretização por funções de forma EFG pode-se escrever que

$$\begin{aligned} F_T^c \left( \vec{u}_{n+1}^{hk(i)}, \delta \vec{u}^h \right) &= - \int_{\Gamma_o^c} Q_{T_{n+1}}^{c^{k(i)}} \vec{e}_{T_{n+1}}^{k(i)} \, d\Gamma_o^c \quad \text{em } \Gamma_o^c \\ &= \vec{f}_{T_{n+1}}^c \cdot \delta \vec{u}^g \end{aligned} \quad (4.57)$$

com as forças de contato referentes ao atrito dadas por

$$\vec{f}_{T_{n+1}}^c = - \int_{\Gamma_o^c} Q_{T_{n+1}}^{c^{k(i)}} (\Phi^g)^T \vec{e}_{T_{n+1}}^{k(i)} \, d\Gamma_o^c. \quad (4.58)$$

A linearização do termo referente à imposição do contato tangencial é dada pela derivada de Gateaux de  $F_T^c$ ,

$$DF_T^c \left( \vec{u}_{n+1}^{hk(i)}, \delta \vec{u}^h \right) \left[ \Delta \vec{u}_{n+1}^{hk(i)} \right] = \frac{d}{d\epsilon} F_T^c \left( \vec{u}_{n+1}^{hk(i)} + \epsilon \Delta \vec{u}_{n+1}^{hk(i)}, \delta \vec{u}^h \right) \Big|_{\epsilon=0}. \quad (4.59)$$

De acordo com o algoritmo, apresentado na de Tabela 4.1, esta linearização considera:



- a condição de adesão:

$$DF_T^c \left( \vec{u}_{n+1}^{hk(i)}, \delta \vec{u}^h \right) \left[ \Delta \vec{u}_{n+1}^{hk(i)} \right] = \mathbf{K}_{T_{n+1}}^{c^{ad^{k(i)}}} \Delta \vec{u}_{n+1}^{g^{k(i)}} \cdot \delta \vec{u}^g \quad (4.60)$$

com

$$\mathbf{K}_{T_{n+1}}^{c^{Ad^{k(i)}}} = \frac{1}{\epsilon_T} \int_{\Gamma_o^c} \left[ (\Phi^g)^T \vec{e}_{T_{n+1}}^{k(i)} \otimes (\Phi^g)^T \vec{e}_{T_{n+1}}^{k(i)} \right] d\Gamma_o^c. \quad (4.61)$$

- a condição de escorregamento:

$$DF_T^c \left( \vec{u}_{n+1}^{hk(i)}, \delta \vec{u}^h \right) \left[ \Delta \vec{u}_{n+1}^{hk(i)} \right] = \mathbf{K}_{T_{n+1}}^{c^{Es^{k(i)}}} \Delta \vec{u}_{n+1}^{g^{k(i)}} \cdot \delta \vec{u}^g \quad (4.62)$$

com

$$\mathbf{K}_{T_{n+1}}^{c^{Es^{k(i)}}} = \frac{c_f}{\epsilon_\nu} \int_{\Gamma_o^c} H \left( Q_{\nu_{n+1}}^{k(i)} \right) \frac{Q_{T_{n+1}}^{c^{teste^{k(i)}}}}{\left| Q_{T_{n+1}}^{c^{teste^{k(i)}}} \right|} \left[ (\Phi^g)^T \vec{e}_{T_{n+1}}^{k(i)} \otimes (\Phi^g)^T \vec{e}_{T_{n+1}}^{k(i)} \right] d\Gamma_o^c. \quad (4.63)$$

## 4.4 Algoritmo geral

Na tabela 4.2 estão apresentados os aspectos gerais do algoritmo utilizado para resolver o problema da imposição das condições de contorno essenciais bem com o problema de contato e atrito descritos nesta seção.

Neste algoritmo é apresentada apenas as iterações externas  $n$  e  $k$ . A iteração  $i$  é realizada ao resolver o problema de valor de contorno não linear.

Tabela 4.2: Algoritmo geral

- (i) Dado o incremento de carregamento para  $t_{n+1}$ , inicialize  $k = 0$  e  $\epsilon_\nu$ ,  $\epsilon_T$  e  $\epsilon_u^2$ ;  
(ii) Inicialize os multiplicadores e o deslocamento com os valores convergidos da última iteração:

$$\lambda_{N_{n+1}}^{g^k} = \lambda_{N_n}^g, \quad \bar{\lambda}_{u_{n+1}}^{g^k} = \bar{\lambda}_{u_n}^g \quad e \quad \bar{u}_{n+1}^g = \bar{u}_n^g;$$

- (iii) Faça enquanto  $\left( \left\| \bar{u}_{n+1}^{h^k} - \bar{u}_{n+1}^h \right\|_\infty > tol_1 \text{ ou } \left\| \left\langle g \left( \bar{u}_{n+1}^{h^k} \right) \right\rangle \right\|_\infty > tol_2 \right) \forall \vec{x} \in \Gamma_u \text{ e } \Gamma_c$

- a. Obtenha a solução  $\bar{u}_{n+1}^{h^k} \in \mathcal{K}^h$  do seguinte problema não linear

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_o} P \left( \bar{u}_{n+1}^{h^k} \right) \cdot \nabla_{\vec{X}} \delta \bar{u}^h \, d\Omega_o &= \int_{\Omega_o} \rho_o \vec{b}_{n+1} \cdot \delta \bar{u}^h \, d\Omega_o + \int_{\Gamma_o^t} \vec{t}_{n+1} \cdot \delta \bar{u}^h \, dA_o + \\ &+ \int_{\Gamma_o^u} \vec{Q}_{n+1}^{u^k} \cdot \delta \bar{u}^h \, dA_o + \int_{\Gamma_o^c} \vec{Q}_{n+1}^{c^k} \cdot \delta \bar{u}^h \, dA_o \quad \forall \delta \bar{u}^h \in \mathcal{V}^h \end{aligned}$$

Este problema não linear é resolvido iterativamente, para a  $k$ -ésima iteração, de modo a fornecer estimas para a configuração do corpo em  $\Omega_{n+1}^k$ . Neste problema

$$\begin{aligned} \vec{Q}_{n+1}^{u^k} &= - \left[ \bar{\lambda}_{u_{n+1}}^{h^k} + \frac{1}{\epsilon_u} \left( \bar{u}_{n+1}^{h^k} - \bar{u}_{n+1}^h \right) \right], \quad Q_{\nu_{n+1}}^{c^k} = \left\langle \lambda_{N_{n+1}}^{h^k} + \frac{1}{\epsilon_\nu} g \left( \bar{u}_{n+1}^{h^k} \right) \right\rangle \\ e \quad Q_{T_{n+1}}^{c^k} &= Q_{T_n}^c - \frac{1}{\epsilon_T} \left( u_{T_{n+1}}^{h^k} - u_{T_n}^h \right) \end{aligned}$$

$$\text{sendo} \quad Q_{T_{n+1}}^{c^k} = \begin{cases} Q_{T_{n+1}}^{c^{teste^k}} & \text{se } \Upsilon \left( Q_{T_{n+1}}^{c^{teste^k}}, Q_{\nu_{n+1}}^{c^k} \right) \leq 0 \\ c_f Q_{\nu_{n+1}}^{c^k} \frac{Q_{T_{n+1}}^{c^{teste^k}}}{|Q_{T_{n+1}}^{c^{teste^k}}|} & \text{se } \Upsilon \left( Q_{T_{n+1}}^{c^{teste^k}}, Q_{\nu_{n+1}}^{c^k} \right) > 0 \end{cases}$$

$$\text{com} \quad \Upsilon \left( Q_{T_{n+1}}^{c^{teste^k}}, Q_{\nu_{n+1}}^{c^k} \right) = \left| Q_{T_{n+1}}^{c^{teste^k}} \right| - c_f Q_{\nu_{n+1}}^{c^k};$$

- b. Uma vez obtida a solução  $\bar{u}_{n+1}^{h^k}$  para o problema em (a) atualize as variáveis:

$$\text{Multiplicadores de Lagrange: } \lambda_{N_{n+1}}^{g^{k+1}} = \left\langle \lambda_{N_{n+1}}^{g^k} + \frac{1}{\epsilon_\nu} g \left( \bar{u}_{n+1}^{h^k} \right) \right\rangle$$

$$\bar{\lambda}_{u_{n+1}}^{g^{k+1}} = - \left[ \bar{\lambda}_{u_{n+1}}^{g^k} + \frac{1}{\epsilon_u} \left( \bar{u}_{n+1}^{h^k} - \bar{u}_{n+1}^h \right) \right]$$

$$\text{Deslocamento global:} \quad \bar{u}_{n+1}^{g^{k+1}} = \bar{u}_{n+1}^{g^k}$$

$$\text{Atualiza a iteração } k: \quad k \leftarrow k + 1;$$

- (iv) Uma vez que a condição para o passo (iii) foi satisfeita atualize todas as variáveis internas referentes ao problema elastoplástico juntamente com

$$\vec{Q}_{n+1}^u \leftarrow \vec{Q}_{n+1}^{u^k} \quad Q_{T_{n+1}}^c \leftarrow Q_{T_{n+1}}^{c^k} \quad Q_{\nu_{n+1}}^c \leftarrow Q_{\nu_{n+1}}^{c^k}$$

$$\vec{Q}_{n+1}^c \leftarrow Q_{\nu_{n+1}}^c \vec{\nu} + Q_{T_{n+1}}^c \vec{e}_T \quad \bar{u}_{n+1}^h \leftarrow \bar{u}_{n+1}^{h^k}$$

- (v) Realize as operações para pós-processamento;

- (vi) Atualiza a iteração  $n$ :  $n \leftarrow n + 1$ ;

- (vii) Proceda ao novo incremento de carregamento e reinicie o algoritmo em (i).

## 4.5 Exemplos

Com o propósito de investigar a implementação do problema de contato unilateral com atrito proposto nesta seção foram escolhidos alguns exemplos representativos considerando o modelo constitutivo do material  $J_2$ , já apresentado no **Capítulo 3**, e também as hipóteses de problemas sob estado plano de deformações e axissimétrico.

### 4.5.1 Deslizamento de um bloco elástico

Este exemplo foi utilizado por vários autores, como por exemplo ODEN & PIRES (1984) e WRIGGERS *et al.* (1990), SIMO & LAURSEN (1992) e também mais recentemente por AKKARAN (2001) para a validação numérica de suas propostas e modelos de contato com atrito. Este problema simples consiste no deslizamento de um bloco elástico sob uma parede fixa rígida conforme mostra a Fig. 4.4(a)-(c). Neste exemplo não há imposição de condições de contorno essenciais por meio do termo Eq.(4.19). O bloco é contido apenas pelo atrito gerado pela parede. Neste exemplo a parede e as partículas inferiores do bloco estão inicialmente em contato. A análise é realizada utilizando 50 passos de carregamento. É considerada a hipótese de estado plano de deformações e é utilizado um suporte de influência de  $s = 1.5$  juntamente com uma regra de integração de *Gauss-Legendre* de 7 pontos de integração. Este exemplo foi discretizado com uma malha de integração contendo  $20 \times 10$  células triangulares e 231 partículas EFG.

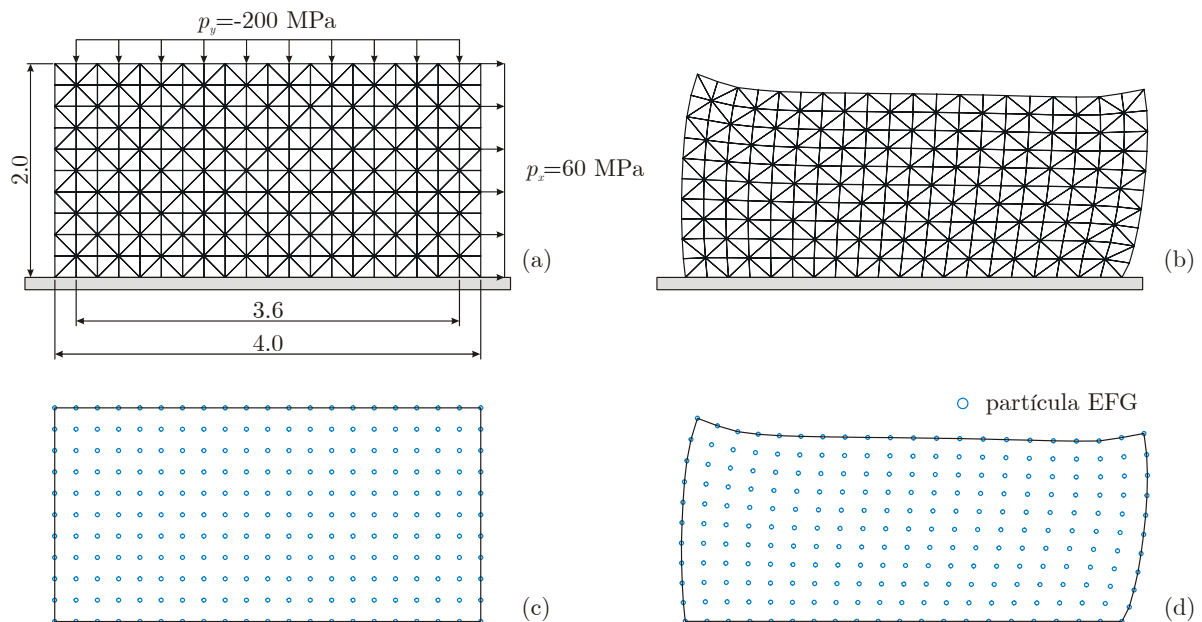


Figura 4.4: Geometrias indeformadas e deformadas para o problema de deslizamento de um bloco elástico sobre uma superfície rígida: (a)-(b) Malhas de integração; (c)-(d) disposição das partículas.

Os parâmetros utilizados nesta análise, para a caracterização do material e também das

constantes usadas na formulação do problema de contato e atrito, foram os seguintes:

$$\begin{aligned} \kappa &= 833.333 \text{ MPa} & \mu &= 384.615 \text{ MPa} \\ c_f &= 0.3 & \epsilon_\nu &= 10^{-6} & \epsilon_T &= 10^{-4} \\ & & \text{tol}_2 &= 10^{-6} \end{aligned}$$

O uso de um coeficiente de atrito da ordem de 0.3 permite que haja regiões de deslizamento e também regiões fixas na região de contato. O gráfico apresentado na Fig. 4.5 mostra as trações normais e tangenciais que surgem na região de contato ao final da análise. Neste gráfico é apresentada também uma comparação com os resultados encontrados por AKKARAM (2001) para elementos finitos Quad4.

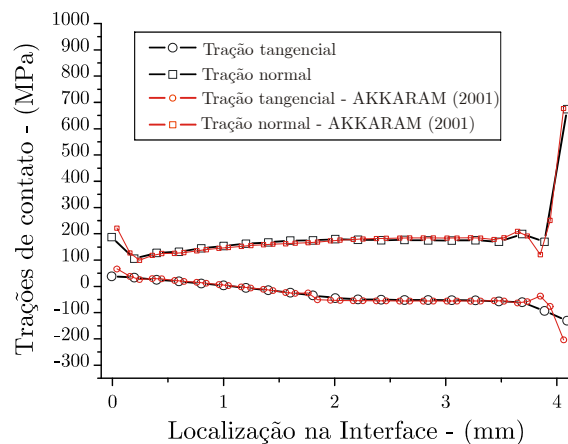


Figura 4.5: Trações de contato na interface para o problema de deslizamento de um bloco elástico.

#### 4.5.2 Esmagamento de um cilindro

Neste exemplo é apresentado o esmagamento de um cilindro de dimensões mostradas na Fig. 4.6(a). Devido à simetria do problema, apenas um quarto do modelo é discretizada com uma malha de integração contendo  $12 \times 16$  células triangulares e 221 partículas EFG, Fig. 4.6(b) e Fig. 4.6(c) respectivamente. Novamente, um suporte de influência de  $s = 1.5$  foi utilizado juntamente com 7 pontos de integração.

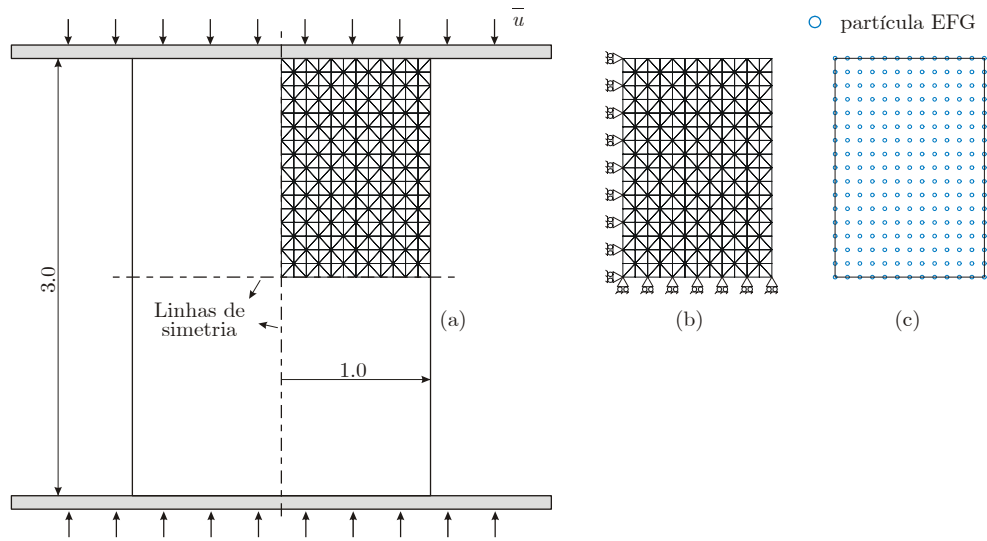


Figura 4.6: Modelo usado para o exemplo esmagamento de um cilindro: (a) Modelo; (b) Malha de integração e (c) distribuição das partículas.

A análise consiste no movimento da parede superior, esmagamento, de  $\bar{u} = 1.2 \text{ mm}$  com relação ao eixo de simetria horizontal. Foram utilizados 400 passos de carga durante a análise. Os dados utilizados nesta análise foram:

$$\begin{aligned}
 \kappa &= 164206.35 \text{ MPa} & \mu &= 80193.80 \text{ MPa} & \sigma_y &= 450.00 \text{ MPa} \\
 H &= 129.24 \text{ MPa} & \sigma_\infty &= 715 \text{ MPa} & \delta &= 16.93 \\
 c_f &= 0.2 & \epsilon_\nu &= 10^{-6} & \epsilon_T &= 10^{-4} \\
 \epsilon_u &= 10^{-9} & tol_1 &= 10^{-5} & tol_2 &= 10^{-6}.
 \end{aligned}$$

Os resultados desta simulação, deformadas, estão mostrados na Fig. 4.7 para uma análise sem e com a metodologia antitravamento volumétrico apresentada no **Capítulo 3**. Mais especificamente, as Fig. 4.7(a)-(d) apresentam a análise sem  $\bar{\mathbf{F}}$  e as Fig. 4.7(e)-(h) apresentam a mesma análise, porém usando a metodologia  $\bar{\mathbf{F}}$ . A fim de possibilitar uma comparação, as deformadas foram tomadas para o mesmo passo de carregamento. Já na Fig. 4.7(i) é mostrada a superposição das deformadas, em uma escala maior, dos casos Fig. 4.7(c), representada em vermelho para fim de melhor visualização, e Fig. 4.7(g). Repare que existe uma sensível diferença entre as deformadas dos dois casos, principalmente na região de contato. Nesta região, canto superior direito e esquerdo da Fig. 4.7(i), houve um descolamento de certos pontos no caso da simulação sem a metodologia  $\bar{\mathbf{F}}$ . O mesmo não acontece para a simulação que leva em conta o antitravamento volumétrico. Na parte superior da Fig. 4.7(i) é possível ainda identificar a chamada *dead zone*, região em forma de cone neste exemplo, a qual é caracterizada por uma região onde existem apenas pequenas deformações envolvidas durante o processo de esmagamento, e que é causada devido ao efeito do atrito do corpo com a parede do molde.

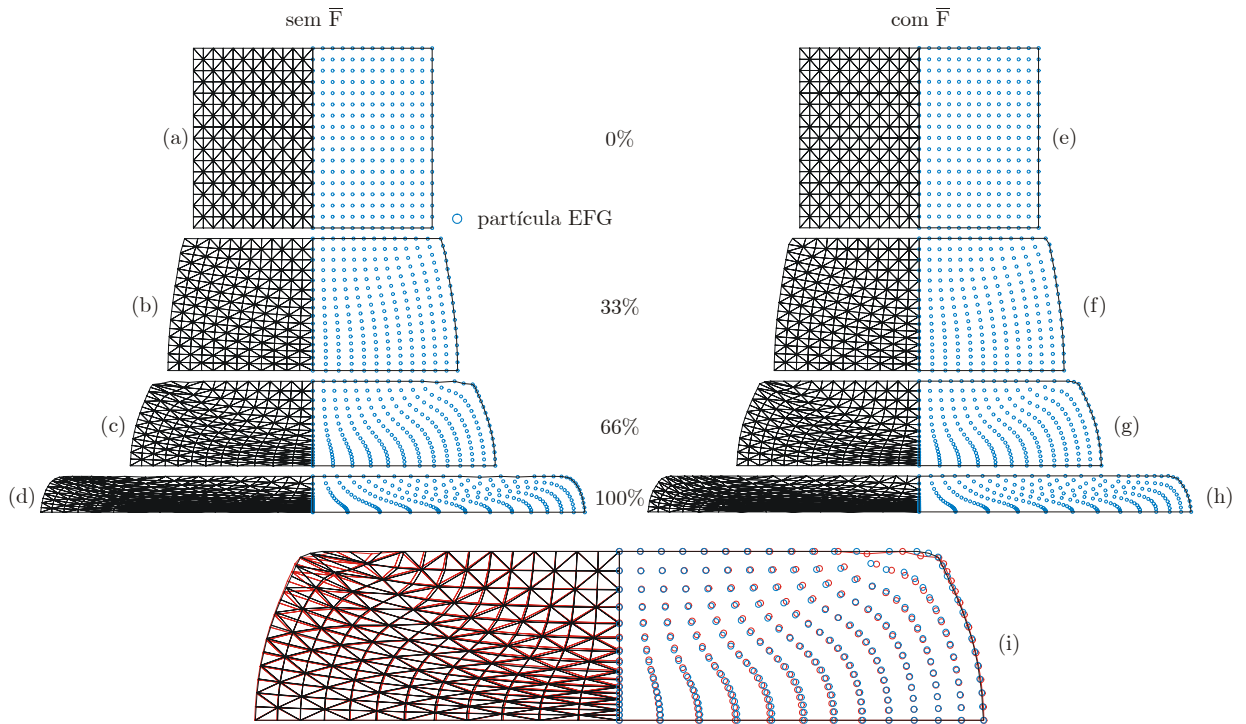


Figura 4.7: Saídas deformadas para o problema esmagamento de um cilindro considerando a influência do efeito de travamento. (a)-(d) deformadas sem o uso do  $\bar{\mathbf{F}}$ ; (e)-(h) deformadas com o uso do  $\bar{\mathbf{F}}$  e (i) superposição das deformadas do caso (c), em vermelho para realçar, e (g).

As forças totais desenvolvidas durante o processo de conformação, na parede superior de contato, estão mostradas na Fig. 4.8, também considerando a simulação com e sem  $\bar{\mathbf{F}}$ . Na Fig. 4.8(a) é mostrada a evolução da força normal em função do deslocamento da parede e na Fig. 4.8(b) é mostrada a evolução da força tangencial também em função do deslocamento da parede. Repare que neste caso as diferenças são bem mais sutis. Porém em ambos os casos a predição da força total foi ligeiramente inferior para as simulações usando a estratégia antitravamento volumétrico.

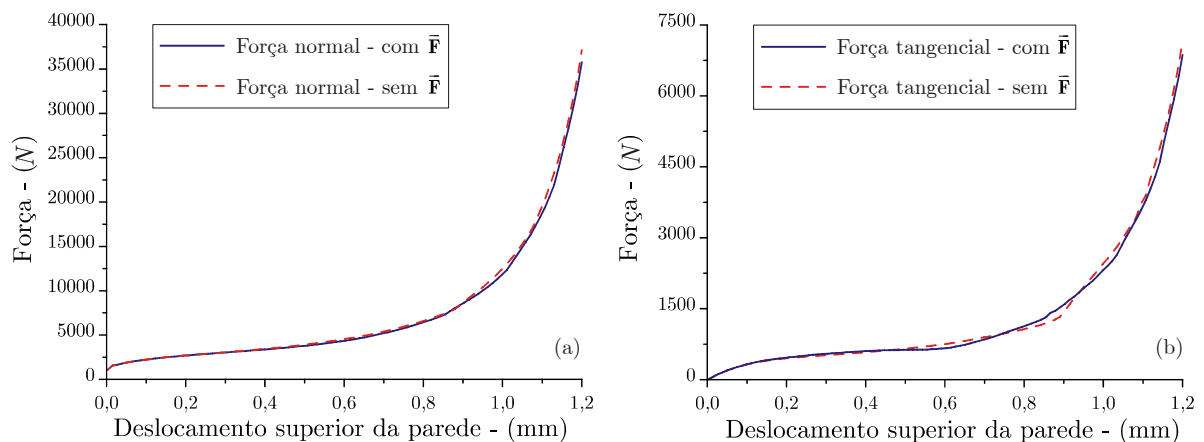


Figura 4.8: Força total desenvolvida na parede do molde. (a) Força Normal; (b) Força Tangencial.

### 4.5.3 Esmagamento de uma seção plana

Neste exemplo é apresentado o esmagamento de uma seção plana que possui as mesmas dimensões apresentadas no exemplo anterior, Fig. 4.6, e desta forma a mesma discretização foi utilizada. Porém, a simulação ocorre agora sob hipótese de estado plano de deformação. A análise consiste do movimento da parede superior, esmagamento, de  $\bar{u} = 1.0 \text{ mm}$  com relação ao eixo de simetria horizontal. Foram utilizados os mesmos 400 passos de carga durante a análise. Os dados utilizados nesta análise são:

$$\begin{aligned} \kappa &= 164206.35 \text{ MPa} & \mu &= 80193.80 \text{ MPa} & \sigma_y &= 450.00 \text{ MPa} \\ H &= -12.924 \text{ MPa} & \sigma_\infty &= 715 \text{ MPa} & \delta &= 16.93 \\ c_f &= 0.2 & \epsilon_\nu &= 10^{-6} & \epsilon_T &= 10^{-4} \\ \epsilon_u &= 10^{-9} & tol_1 &= 10^{-6} & tol_2 &= 10^{-6}. \end{aligned}$$

As saídas deformadas estão mostradas na Fig. 4.9 para uma análise sem e com a metodologia antitravamento volumétrico. Novamente, as Fig. 4.9(a)-(d) apresentam a análise sem  $\bar{\mathbf{F}}$  e as Fig. 4.9(e)-(h) apresentam a mesma análise, porém usando a metodologia  $\bar{\mathbf{F}}$ . Já na Fig. 4.9(i) é mostrada a superposição das deformadas, em uma escala maior, dos casos Fig. 4.9(c), representada em vermelho para fim de melhor visualização, e Fig. 4.9(g). Novamente, repare que neste caso também existe um sensível diferença entre as deformadas dos dois casos, principalmente na região de contato. Analogamente ao exemplo anterior também houve um descolamento de certos pontos no caso da simulação sem a metodologia  $\bar{\mathbf{F}}$ . O mesmo não acontece para a simulação que leva em conta o antitravamento volumétrico.

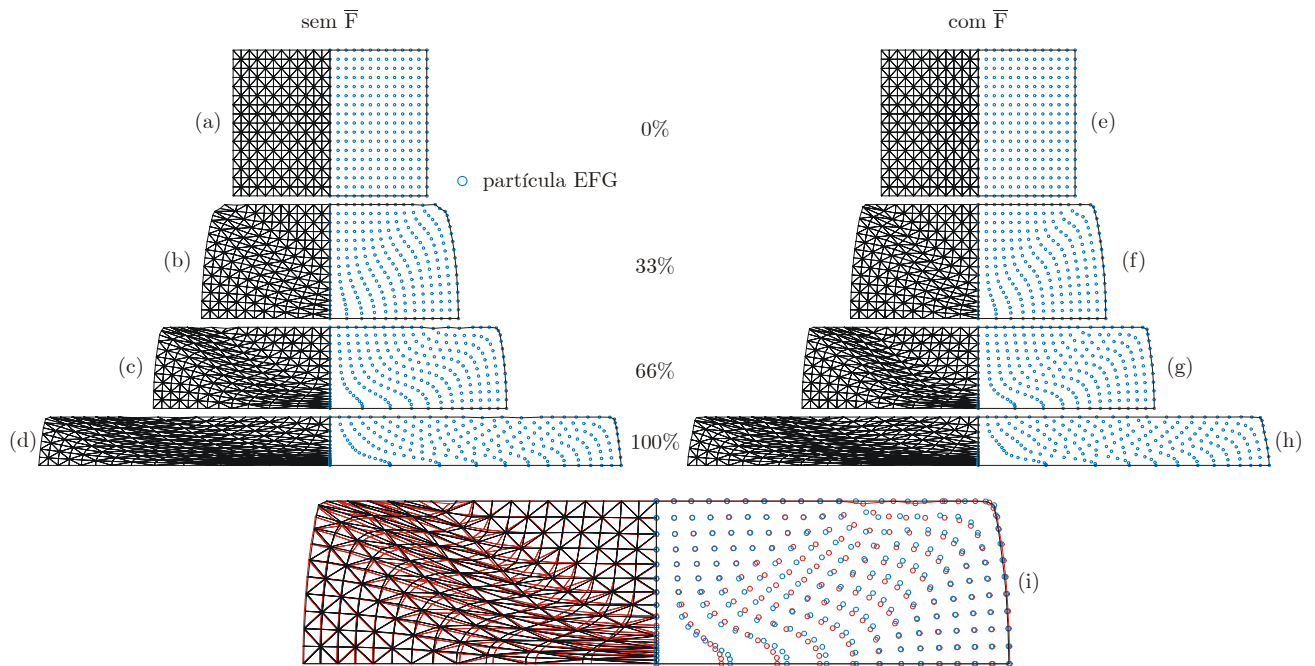


Figura 4.9: Saídas deformadas para o problema esmagamento de uma secção plana considerando a influência do efeito de travamento. (a)-(d) deformadas sem o uso do  $\bar{F}$ ; (e)-(h) deformadas com o uso do  $\bar{F}$  e (i) superposição das deformadas do caso (c), em vermelho para realçar, e (g).

Na Fig. 4.10 estão mostradas as forças totais na parede superior do molde desenvolvidas durante o processo de conformação, considerando a simulação com e sem  $\bar{F}$ . Na Fig. 4.10(a) é mostrada a evolução da força normal em função do deslocamento da parede e na Fig. 4.10(b) é mostrada a evolução da força tangencial também em função do deslocamento da parede. Repare que neste caso as diferenças não são muito evidentes.

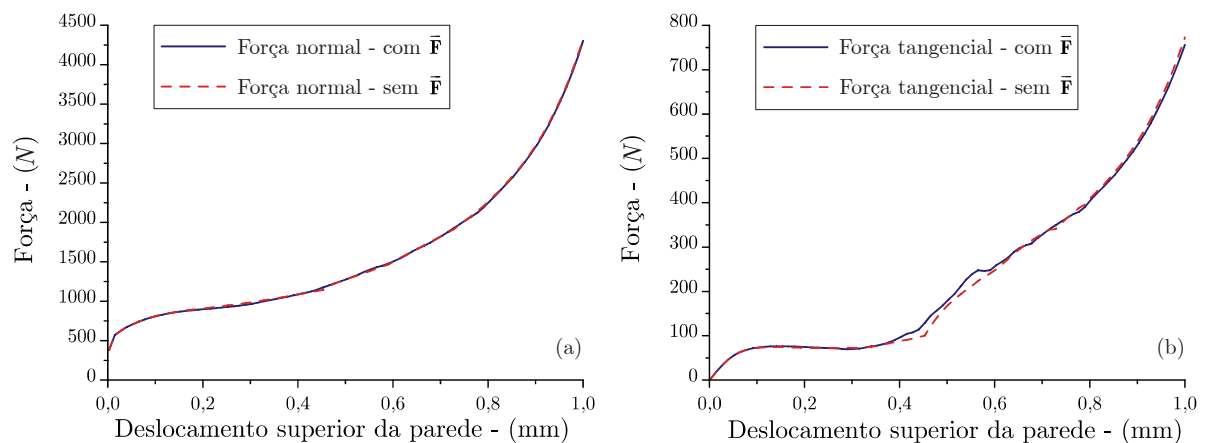


Figura 4.10: Força total desenvolvida na parede do molde. (a) Força Normal; (b) Força Tangencial.



#### 4.5.4 Forjamento a frio de um componente

Neste exemplo é apresentada a simulação do processo de forjamento a frio de um componente mecânico. As dimensões da préforma bem como as dimensões do molde estão mostradas na Fig. 4.11. O processo consiste no movimento da parte superior do molde de  $\bar{u} = 60 \text{ mm}$  em vários passos, conformando desta forma a préforma no molde. Devido à simetria apenas a metade do componente foi modelada sob a hipótese axissimétrica. Os dados utilizados nesta análise são:

$$\begin{aligned} \kappa &= 164206.35 \text{ MPa} & \mu &= 80193.80 \text{ MPa} & \sigma_y &= 450.00 \text{ MPa} \\ H &= 129.24 \text{ MPa} & \sigma_\infty &= 715 \text{ MPa} & \delta &= 16.93 \\ c_f &= 0.3 & \epsilon_\nu &= 10^{-6} & \epsilon_T &= 10^{-4} \\ \epsilon_u &= 10^{-9} & tol_1 &= 10^{-6} & tol_2 &= 10^{-6}. \end{aligned}$$

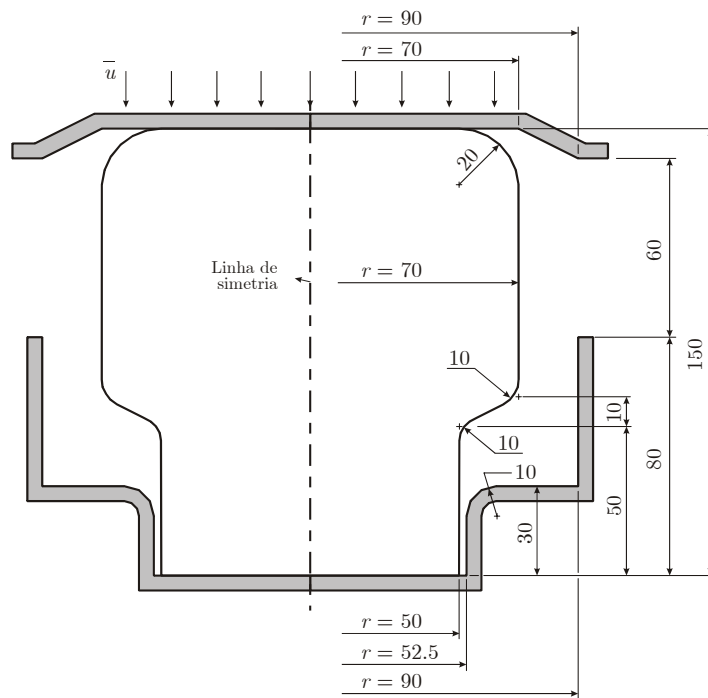


Figura 4.11: Dimensões iniciais da préforma e do molde.

Novamente foram consideradas análises com e sem o efeito da estratégia antitravamento. Na Fig. 4.12(a) é ilustrada a malha de integração inicial, juntamente com a sua correspondente distribuição de partículas. Foram utilizadas 486 partículas em uma malha de integração de 880 elementos triangulares. As saídas mostradas na seqüência Fig. 4.12(a)-(f) correspondem à análise sem  $\bar{\mathbf{F}}$ , e nas Fig. 4.12(g)-(l) estão as saídas levando em consideração a estratégia com  $\bar{\mathbf{F}}$ . A Fig. 4.12(m) corresponde à superposição das Figs. 4.12(f) e (l). Para facilitar a visualização, a saída sem o efeito de  $\bar{\mathbf{F}}$  é mostrada em vermelho nesta última figura.

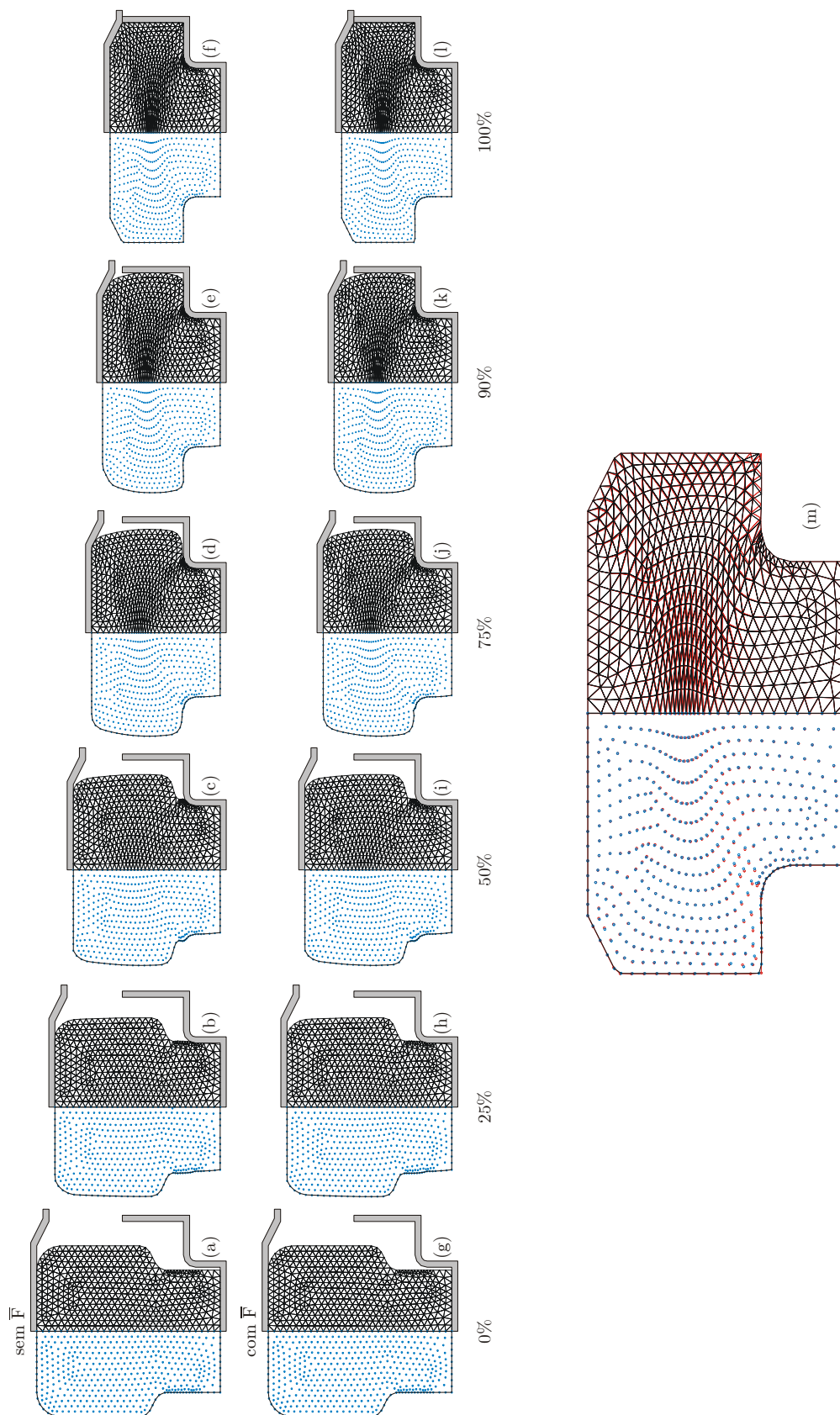


Figura 4.12: Deformadas em vários pontos do processo considerando ou não o efeito da metodologia antitravamento.

Na Fig. 4.13 são apresentados os resultados para a deformação plástica acumulada no final da análise levando em consideração ou não a metodologia antitravamento. Repare que, embora pequena, existe uma diferença entre as duas análises.

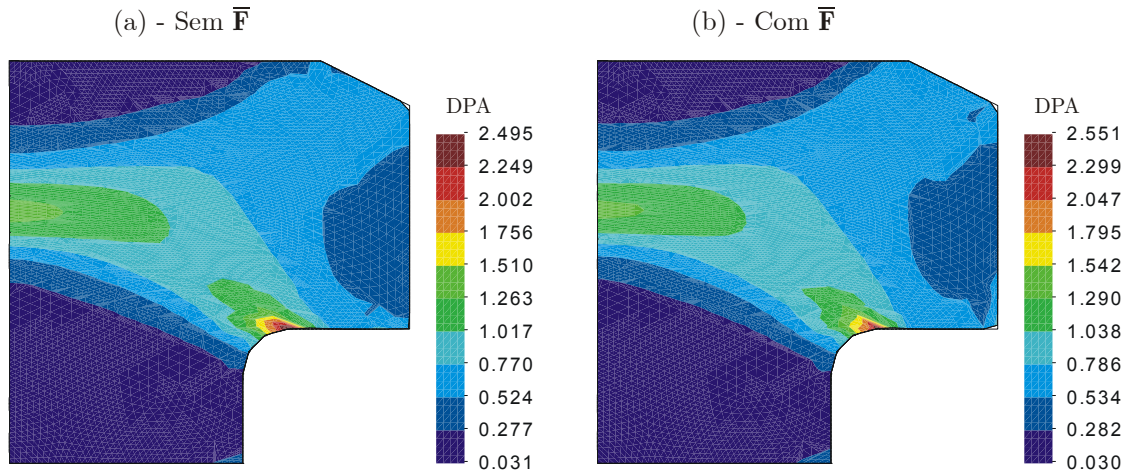


Figura 4.13: Deformação plástica acumulada para o problema de forjamento a frio de um componente.

Esta diferença é notada também quando são analisadas as saídas para a tensão equivalente de von Mises no final da análise, Fig. 4.14.

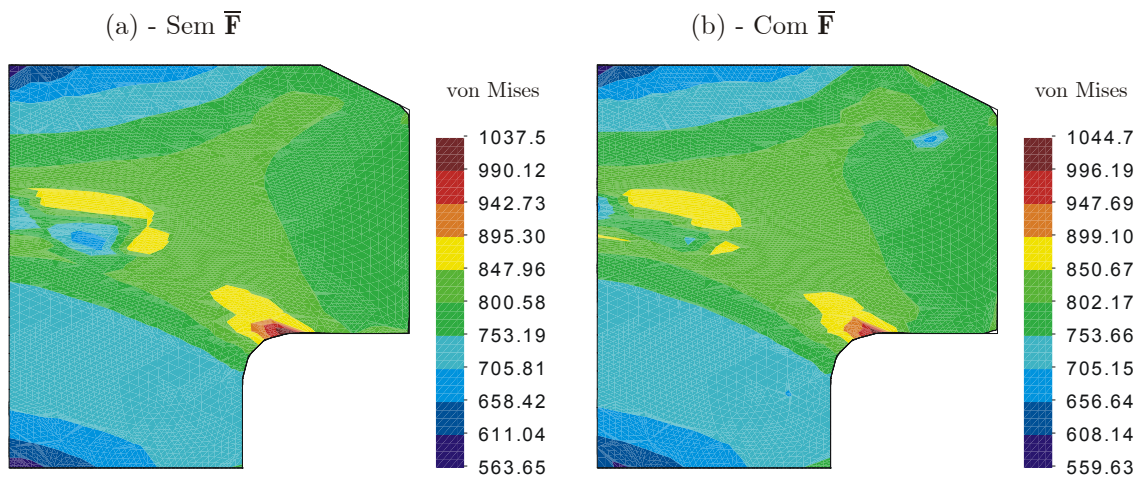


Figura 4.14: Tensão equivalente de von Mises para o problema de forjamento a frio de um componente.

Já na Fig. 4.15 é mostrado o comportamento referente a força necessária para obter o forjamento do componente. Como no caso anterior não há uma expressiva diferença na força de forjamento entre a análise com e sem a presença de  $\bar{F}$ . As forças totais no final do processo de forjamento são  $F_z = 218753,45 \text{ kN}$  para o problema considerando  $\bar{F}$  e  $F_z = 215532,71 \text{ kN}$  para a simulação sem  $\bar{F}$ .

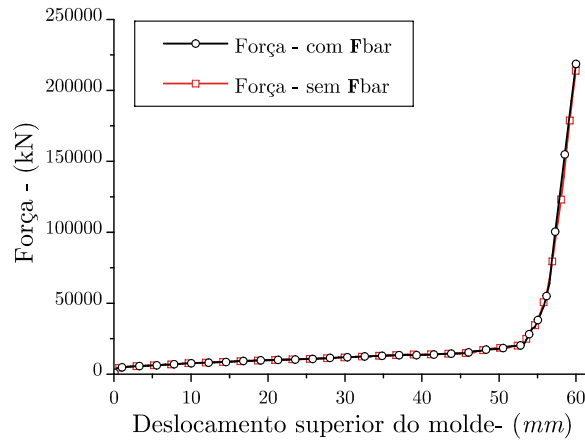


Figura 4.15: Força de forjamento.

## 4.6 Conclusões parciais

Neste capítulo foi apresentada uma proposta de imposição das condições de contorno essenciais baseada no método do *Lagrangeano Aumentado* e também uma proposta de imposição de contato unilateral com atrito baseada no trabalho de SIMO & LAURSEN (1992).

Alguns exemplos foram considerados levando em conta o modelo  $J_2$  apresentado no capítulo anterior. Novamente, pode-se evidenciar a presença de travamento volumétrico nas análises. Porém, diferentemente do capítulo anterior, agora apenas funções de forma do tipo EFG foram consideradas. Em geral, sutil melhora foi percebida ao se utilizar o procedimento *F-bar*.

De um modo geral não houveram maiores problemas na resolução dos problemas apresentados senão aqueles já conhecidos da literatura na abordagem usando o método do *Lagrangeano Aumentado* ou mesmo do método da *Penalidade* que são referentes à escolha dos valores da penalidade adequada para cada problema. Maiores testes são feitos no próximo capítulo de modo a avaliar as condições de contato e atrito considerando um modelo constitutivo mais complexo.

## Capítulo 5

# Compactação de materiais porosos

### 5.1 Modelos constitutivos aplicados na Metalurgia do Pó

O modelo constitutivo usado para modelar o comportamento mecânico do pó sob compactação e/ou forjamento é de fundamental importância no sucesso da simulação. A escolha de um modelo constitutivo apropriado conduz a resultados, tanto quantitativos como qualitativos, satisfatórios quando comparados com o comportamento experimental. Em outras palavras, a simulação da compactação e/ou forjamento depende de um modelo constitutivo elastoplástico ou viscoplástico razoável, capaz de reproduzir o comportamento do material sob condições de carregamento complicadas e também de um algoritmo de integração preciso e estável.

No desenvolvimento de modelos de plasticidade para materiais porosos compressíveis é necessário estabelecer um critério de escoamento e uma regra de fluxo das quais as relações de tensão-deformação possam ser derivadas. Entretanto, o escoamento de materiais porosos é um pouco mais complicado do que em materiais totalmente densos devido ao fato do escoamento ser influenciado não apenas pela parte desviadora da tensão, mas também pela parte hidrostática, DORAIVELU *et al.* (1984).

Vários são os modelos constitutivos propostos na literatura. Sua utilização depende não só do processo, mas também do tipo e forma do pó em questão. Entretanto, duas linhas diferentes de caracterização de modelos constitutivos têm sido mais utilizadas recentemente. A primeira é a chamada de *modelo de material poroso*<sup>1</sup> e a segunda de *modelo de material granular*<sup>2</sup>, veja LEWIS & KHOEI (2001).

O *modelo de material poroso* é também conhecido como uma modificação do critério de von Mises. Ao modelo de von Mises, modelo de plasticidade  $J_2$ , é incorporada a influência da parte hidrostática da tensão na função de escoamento. Esta função é construída de tal forma a satisfazer as condições de convexidade e simetria requeridas na plasticidade. De modo geral estas funções possuem a seguinte forma funcional

$$\mathcal{F} = AJ_2 + BI_1^2 = \bar{\sigma}_y^2,$$

---

<sup>1</sup>do inglês *porous material model*.

<sup>2</sup>do inglês *granular material model*.

onde  $J_2$  é o segundo invariante do tensor tensão desviadora e  $I_1$  é o primeiro invariante do tensor tensão. Já  $A$  e  $B$  são escalares que na maioria dos modelos são função da densidade relativa.  $\bar{\sigma}_y$  é a tensão de escoamento que em geral também é função da densidade relativa.

Já o *modelo de material granular* é naturalmente sensitivo à pressão hidrostática e considera a coesão do metal particulado e também a interfricção entre as partículas do pó. Estes modelos são bastante utilizados no modelamento de solos ou rochas e são conhecidos também como *modelos de Cap*<sup>3</sup>, devido ao formato da superfície que é incorporada em modelos tradicionais como *Mohr-Coulomb* e *Drucker-Prager*.

As aplicações destes modelos dentro da metalurgia do pó ainda geram bastante discussão. O *modelo de material poroso* apresenta melhores resultados quando a densidade relativa,  $\eta$ , é superior a 70 %, DORAIVELU *et al.* (1984) e LEWIS & KHOEI (2001), e não leva em consideração a fricção entre as partículas de pó. Desta forma, segundo estes autores, este tipo de modelo não deve ser aplicado na fase de compactação do pó. Aplicações deste modelo são mais comuns no processo de forjamento de peças sinterizadas como pode ser visto em KUHN & FERGUNSON (1990). Entretanto, PARK *et al.* (1999) e PÉREZ-FOGUET *et al.* (2003) utilizaram este modelo com sucesso, como referido pelos autores, para a compactação. Dentro deste enfoque é ainda possível citar também os trabalhos bastante conhecidos baseados na *fração de volume* publicado originalmente por GURSON (1977) e modificados por TVERGAARD (1981) e TVERGAARD & NEEDLEMAN (1984). Tal modelo é ainda conhecido como modelo de dano *GTN*<sup>4</sup>.

Por outro lado, o *modelo de material granular* tem sido bastante utilizado no processo de compactação. Exemplos recentes de aplicações de tais modelos podem ser vistos em LEWIS & KHOEI (1998), COUBE & RIEDEL (2000), GU *et al.* (2001), LEWIS & KHOEI (2001) e CHTOUROU *et al.* (2002).

Existem também trabalhos publicados sobre compactação de pós-metálicos que utilizam as chamadas formulações endocrônicas na plasticidade<sup>5</sup>. HÄGGBLAD *et al.* (1991) apresenta resultados considerando tal formulação.

Já quanto à descrição cinemática das deformações é também possível encontrar as mais diversas propostas. Como exemplo de trabalhos recentes pode-se citar OLIVER *et al.* (1996) que apresenta uma descrição *Lagrangeana Total* baseada na decomposição multiplicativa do tensor deformação com medida de deformação dada pelo tensor deformação de Almansi. LEWIS & KHOEI (1998) e (2001) apresentam simulações baseadas tanto na chamada descrição *Lagrangeana Total* como na chamada *Lagrangeana Atualizada*. Já PÉREZ-FOGUET *et al.* (2003) mostram um enfoque diferente dado pela chamada descrição *Lagrangeana-Euleriana Arbitrária (ALE)*<sup>6</sup>.

Neste capítulo será apresentado o modelo constitutivo utilizado para simular a compactação em molde utilizando a descrição cinemática *Lagrangeana Total* proposta no **Capítulo 3** e a discretização espacial proposta no **Capítulo 1**. A justificativa do uso da descrição *Lagrangeana Total* provém da grande variação da porosidade dentro do processo de simulação. Como já

---

<sup>3</sup>do inglês *Cap models*.

<sup>4</sup>Gurson-Tvergaard-Needleman

<sup>5</sup>do inglês *endochronic plasticity model*.

<sup>6</sup>ALE - *Arbitrary Lagrangian-Eulerian*

comentado anteriormente, supondo uma descrição *Lagrangeana Total* a conservação da massa pode ser estabelecida localmente de forma fechada sem aumentar o número de equações a serem resolvidas em cada ponto. Isto é, em cada ponto

$$\rho = \frac{\rho_o}{\det(\mathbf{F})}. \quad (5.1)$$

Já no caso de uma descrição *Euleriana* a conservação da massa deve ser imposta pela equação da continuidade, a qual deve ser resolvida para cada ponto juntamente com as demais equações não lineares.

Porém, antes serão apresentados alguns aspectos fenomenológicos envolvidos na compactação e forjamento de pós-metálicos, que dão base à escolha do modelo constitutivo. Também será apresentada uma pequena revisão dos modelos constitutivos aplicados à compactação na *Metalurgia do Pó*.

## 5.2 Aspectos fenomenológicos na compactação na Metalurgia do Pó

A compactação de pós na *Metalurgia do Pó* tem sido descrita qualitativamente por um longo período e está bem estabelecido que o processo possui três mecanismos complexos de densificação. O primeiro acontece em baixa pressão e é dado pelo escorregamento das partículas, o que leva a um grande rearranjo. O segundo estágio envolve deformações elásticas e também plásticas das partículas via o contato de suas áreas levando ao que é chamado de endurecimento geométrico<sup>7</sup>, dado pela deformação plástica e pelo fechamento dos vazios. O último estágio ocorre em altas pressões e neste estágio a resistência ao fluxo aumenta rapidamente devido ao endurecimento da matriz.

Para o sucesso do modelamento do processo de compactação de pós na *Metalurgia do Pó* muitos são os requisitos necessários, dentre eles pode-se citar os seguintes:

- O pó é um material com fricção e compressível, e sua densificação é dependente do estágio da compactação. O modelo do material deve refletir estas características.
- Durante a compactação, o pó exhibe “strain or work hardening”, o volume reduz, o material torna-se mais duro, os vazios de ar se fecham e as partículas endurecem devido à deformação plástica volumétrica. Neste caso a função de escoamento, superfície de escoamento, é considerada como uma superfície móvel a qual é dependente do estado desviador e hidrostático da tensão;
- O processo de compactação envolve, geralmente, reduções de volume muito grandes. A formulação deve ser capaz de representar este processo físico;
- O processo de compactação é realizado em molde. O atrito devido ao contato do pó com as paredes do molde é um dos principais mecanismos de falha no processo. Sua influência

---

<sup>7</sup>do inglês *geometric hardening*.

deve ser considerada através de um modelo condizente.

Muitos pesquisadores da área relatam que a maior fonte de falha, ruptura dúctil ou fadiga, em um componente produzido através da *Metalurgia do Pó* provêm da distribuição não homogênea de densidade da peça compactada e de trincas internas iniciadas em um plano de cisalhamento. A distribuição de densidade é dependente da combinação de muitos fatores tais como a forma geométrica e o tamanho do pó, das suas propriedades mecânicas, do atrito entre as partículas do pó e entre elas e as paredes do molde, dentre outros.

### 5.3 Visão geral sobre os modelos constitutivos usados na Metalurgia do pó no contexto de materiais granulares

Ir-se-á optar por trabalhar com modelos constitutivos da classe de *materiais granulares* devido a sua maior adequação ao tipo de problema proposto, como já discutido. Porém, antes de apresentar o modelo constitutivo em detalhes será feita uma revisão, de cunho mais qualitativo, dos modelos para materiais granulares encontrados na literatura. A Fig. 5.1 mostra os diversos tipos de modelos encontrados na literatura que vêm sendo utilizados para simular a deformação de materiais granulares<sup>8</sup>. Nesta figura,  $J_2$  é o segundo invariante do tensor tensão no espaço desviador e  $p$  é a parte hidrostática da tensão, dados respectivamente por

$$J_2 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^D \cdot \boldsymbol{\sigma}^D \quad (5.2)$$

$$p = \frac{1}{3} I_1 = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}). \quad (5.3)$$

A extensão do modelo de solos para simular a compactação a frio na *Metalurgia do Pó* é direta uma vez que neste tipo de processo o pó, seja ele metálico ou não, é visto como um conjunto de partículas que interagem uma com as outras produzindo fricção. Porém, diferentemente dos modelos de solos neste tipo de processo o pó está completamente seco, isto é, não é necessário levar em consideração o acoplamento com a fração de líquido.

Na análise de compactação de pós, o critério de *Mohr-Coulomb* e o critério de *Drucker-Prager* sofrem de duas deficiências. A primeira é que eles supõem a existência de uma regra de fluxo associativa que leva a uma excessiva dilatação. A outra deficiência é que este modelo pode suportar ilimitada compressão hidrostática. Estas deficiências são eliminadas pelo uso de uma regra não associativa de plasticidade para esta região e por uma superfície esférica ou elíptica, chamada de *Cap* que limita o carregamento hidrostático.

O modelo do tipo *Cap* é um modelo de plasticidade definido por uma superfície de escoamento convexa, muitas vezes não suave, e por uma regra associativa ou não associativa de plasticidade. A superfície de escoamento deste modelo elastoplástico tem um *Cap* móvel que intersecta o eixo hidrostático. A posição onde esta interseção acontece depende do fator de endurecimento proposto em cada teoria e da forma funcional do *Cap*. As principais características dos modelos do tipo *Cap* aplicados à compactação na metalurgia do pó incluem uma superfície de falha,

<sup>8</sup>É comum em modelos de solos tomarem como positiva as tensões compressivas.



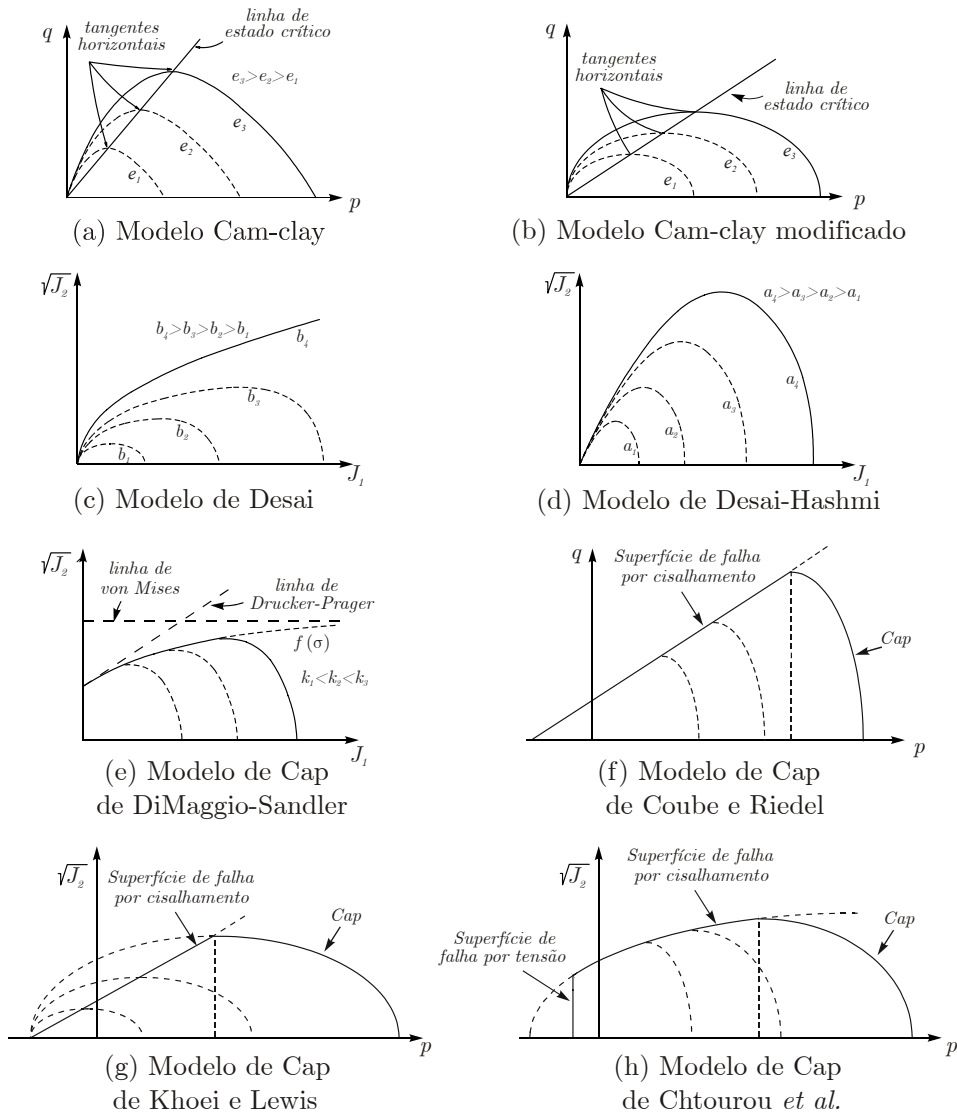


Figura 5.1: Modelos utilizados para materiais granulares e em particular para a compactação na Metalurgia do Pó.

geralmente definida pela superfície de *Drucker-Prager* ou *Mohr-Coulomb*, e de um *Cap* do tipo elíptico ou esférico, o qual fecha, isto é limita, o espaço aberto entre a superfície de falha e o eixo hidrostático. A superfície de escoamento expande no espaço das tensões de acordo com a regra de encruamento adotada. As formas funcionais tanto para a superfície de falha quanto para a superfície *Cap* devem ser as mais gerais possíveis, de forma a permitir seu ajuste, para uma variada faixa de propriedades materiais.

Aparentemente, DRUCKER *et al.* (1957) foram os primeiros a sugerir tal tipo de superfície de escoamento. Eles propuseram que sucessivas superfícies de escoamento poderiam ser estendidas na forma de cones de *Drucker-Prager* com *Caps* esféricos. Na medida em que o material endurece ou amolece, ambas as superfícies poderiam expandir, sendo a posição e o tamanho de cada superfície dependente da deformação hidrostática. Com a introdução deste modelo duas são as inovações introduzidas. A primeira é a idéia de um *Cap* esférico limitando o cone.

A segunda foi à idéia do uso da densidade, volume específico ou fração de volume, como um parâmetro de endurecimento para determinar as sucessivas superfícies de escoamento.

Desde então, um número extenso de critérios de escoamento foram desenvolvidos e testados para descrever o comportamento granular com relação ao escoamento e à densificação. As funções de escoamento mais implementadas para simular compactação na metalurgia do pó são os modelos baseados na linha crítica, modelo *Cam-clay*, formulado por SCHOFIELD & ROSCOE (1968) e modelo *Cam-clay* modificado, Fig. 5.1(a) e (b).

De acordo com DESAI (1984) existem várias diferenças entre o modelo *Cam-clay* e o modelo de *Cap*. Nos modelos do tipo *Cam-clay* a superfície móvel desempenha o papel mais importante na definição do escoamento e a superfície fixa, linha crítica, é utilizada apenas para definir o estado crítico. Por outro lado, nos modelos do tipo *Cap* tanto a linha fixa quanto a móvel são utilizadas para definir o escoamento do material. LEWIS & KHOEI (2001) comentam ainda que os modelos do tipo *Cam-clay*, ou *Cam-clay* modificados, Fig. 5.1(a) e (b), foram desenvolvidos e extensamente testados em situações de carregamento de construções geotécnicas de material geológico, tal como argila, as quais possuem altas tensões de coesão. Deste modo, não são apropriados para simular a compactação de pós-metálicos, principalmente no início do processo quando o material granular está completamente solto. Alternativamente aos modelos do tipo *Cam-clay* estão os modelos de DESAI (1980) e DESAI & HASHMI (1989), Fig. 5.1(c) e (d) respectivamente. A aplicação destes modelos é bastante difundida para o comportamento de solos, mas pouco se comenta sobre a sua aplicação para a compactação de pós metálicos.

DIMAGGIO & SANDLER (1971) e SANDLER *et al.* (1976) propuseram um modelo do tipo *Cap* generalizado, Fig. 5.1(e). Este modelo é muito utilizado por vários pesquisadores na simulação de solos e é normalmente encontrado em vários softwares comerciais.

Mais recentemente, e também especificamente para a simulação da compactação de pós metálicos, vários modelos surgiram. LEWIS & KHOEI (1998) e (2001) apresentam um modelo baseado em uma superfície de falha de *Mohr-Coulomb* combinada com um modelo de *Cap* elíptico denominado MCEC<sup>9</sup>, Fig. 5.1(g). Neste modelo o movimento do *Cap* é controlado pelo aumento ou decréscimo da deformação plástica volumétrica. Este modelo convexo, não suave, consiste em um cone de falha, tal como *Mohr-Coulomb*, e em uma superfície de escoamento elíptica, onde o parâmetro de endurecimento é então função da deformação plástica volumétrica.

Já COUBE & RIEDEL (2000), Fig. 5.1(f), modificaram um modelo de *Cap* implementado no software comercial ABAQUS. O software ABAQUS tem sido muito utilizado nos últimos anos para fazer análises complexas na engenharia. Seu bom desempenho e robustez o tornaram uma ferramenta bastante difundida tanto no meio acadêmico quanto, e principalmente, na indústria. Entretanto, grande parte das equações constitutivas implementadas estão baseadas em modelos clássicos da literatura ou em pequenas variações destes modelos. O modelo de *Cap* implementado no ABAQUS, que tem como base um cone formado pelo critério de *Drucker-Prager* é dirigido para análises geológicas tais como análise do comportamento de solos. Com base em dados experimentais COUBE & RIEDEL (2000) propuseram modificações nas constantes do modelo de *Cap* implementado no ABAQUS para tentar adequá-lo ao processo de compactação de pós-

---

<sup>9</sup>MCEC - *Mohr-Coulomb Elliptical Cap*

Tabela 5.1: Alguns valores dos coeficientes da função de escoamento para materiais porosos

Autores	$A$	$B$	$\delta$
KUHN & DOWNEY (1971)	$2 + \eta^2$	$\frac{1-\eta^2}{3}$	1
SHIMA <i>et al.</i> (1976)	3	$\frac{1}{9a^2(1-\eta)^{2m}}$	$\eta^{2n}$
GURSON (1977)	$\frac{12}{5+\eta}$	$\frac{1-\eta}{5-\eta}$	$\frac{4\eta^2}{5-\eta}$
DORAIVELU <i>et al.</i> (1984)	$2 + \eta^2$	$\frac{1-\eta^2}{3}$	$\frac{\eta^2 - \eta_C^2}{1 - \eta_C^2}$
LEE <i>et al.</i> (1992)	$2 + \eta^2$	$\frac{1-\eta^2}{3}$	$\left(\frac{\eta - \eta_C}{1 - \eta_C}\right)^2$
PARK <i>et al.</i> (1999)	$2 + \eta^2$	$\frac{1-\eta^2}{3}$	$\left(\frac{\eta - \eta_{PC}}{1 - \eta_{PC}}\right)^m$
PÉREZ-FOGUET <i>et al.</i> (2003)	2	$\frac{1}{3} \begin{cases} \left(\frac{1-\eta^2}{2+\eta^2}\right)^{n_1} & \eta < 1 \\ 0 & \eta > 1 \end{cases}$	$\frac{2}{3} \begin{cases} \left(\frac{0.02\eta_o}{1-0.98\eta_o}\right)^{n_2} & \eta \leq \eta_o \\ \left(\frac{\eta-0.98\eta_o}{1-0.98\eta_o}\right)^{n_2} & \eta > \eta_o \end{cases}$

metálicos.

No trabalho de CHTOUROU *et al.* (2002a) e (2002b), é apresentado um modelo de *Cap* composto por 3 superfícies de escoamento não suaves. Tal modelo é uma variação do modelo de DIMAGGIO & SANDLER (1971) o qual foi estudado também por vários outros autores, dentre eles pode-se citar HOFSTETTER *et al.* (1989). Além do *Cap*, da superfície de falha por cisalhamento é também introduzida uma superfície de falha por tensão. A Fig. 5.1(h) mostra esquematicamente o modelo proposto pelos autores. Outra diferença deste modelo com os modelos anteriores é que a superfície de falha por cisalhamento não é mais dada pelo cone formado pelas superfícies lineares de *Mohr-Coulomb* ou *Drucker-Prager*, mas sim pelo envelope exponencial de *Drucker-Prager*.

## 5.4 Dependência do modelo da densidade relativa

Vários autores relatam a importância do modelo constitutivo em refletir a dependência da densidade relativa ao longo de toda a simulação. De fato, isto se torna importante devido a grande redução de volume experimentada neste tipo de processo. Em termos de densidade relativa  $\eta$ ,

$$\eta = \frac{\rho}{\rho_m} \quad (5.4)$$

na qual  $\rho_m$  é a densidade do material totalmente denso, é comum trabalhar com densidades iniciais homogêneas de  $\eta \approx 0.4$  e chegar a densidades relativas finais em torno de  $\eta \approx 1$  em certos pontos do componente, dependendo da geometria final do molde. A introdução da dependência do modelo constitutivo da densidade relativa é apresentada de várias formas na literatura. Para os *modelos de materiais porosos* é comum encontrar os coeficientes  $A$  e  $B$  e também o parâmetro  $\bar{\sigma}_y = \delta\sigma_y$  como função da densidade relativa. A tabela 5.1 mostra alguns destes valores.

Já os *modelos de materiais granulares* costumam apresentar parâmetros materiais do modelo, como a coesão e o coeficiente de fricção no caso de superfícies do tipo *Drucker-Prager* ou *Mohr-Coulomb*, função da densidade relativa, bem como parâmetros elásticos como o módulo de elasticidade. Exemplos deste tipo de dependência podem ser visto no trabalho de GU *et al.*

(2001) e também de CHTOUROU *et al.* (2002a).

Neste trabalho vai se adotar a dependência dos parâmetros elásticos da densidade relativa de modo que

$$\mathbb{D}(\eta) = 2\mu(\eta)\mathbb{I} + \left(\kappa(\eta) - \frac{2}{3}\mu(\eta)\right)(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}). \quad (5.5)$$

Explicitamente, esta dependência será dada pela relação que foi apresentada por GETHIN *et al.* (1995) e é oriunda de um ajuste de dados experimentais obtidos para um pó de aço, conforme visto na Fig. 5.2. Esta relação é dada por<sup>10</sup>

$$E(\eta) = 3640\eta^{3.9}. \quad (5.6)$$

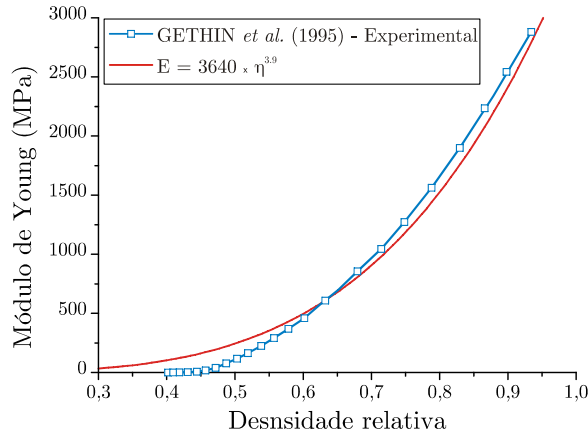


Figura 5.2: Variação do módulo de elasticidade com relação a densidade relativa.

Já o coeficiente de *Poisson* é mantido constante durante a análise conforme observações experimentais feitas por estes autores.

#### 5.4.1 Implicações da dependência da densidade relativa no algoritmo

Devido à descrição *Lagrangeana Total* adotada, não há maiores mudanças a serem feitas no algoritmo de mapeamento de retorno, além do computo da densidade relativa  $\eta$  juntamente com os demais valores já citados na tabela 3.1. Isto acontece pois esta fase de mapeamento de retorno acontece para um  $\vec{u}$  fixo e, portanto, para um gradiente de deformação  $\mathbf{F}$  fixo em cada ponto.

Porém, o mesmo não acontece para a determinação dos módulos tangentes consistentes do problema. Aqui, a dependência da porosidade deverá ser levada em consideração de modo a assegurar uma boa taxa de convergência do algoritmo resultante da aplicação do método de Newton. A derivação dos módulos tangentes será abordada em uma seção específica deste trabalho onde será descrito o procedimento para que esta correção seja considerada.

<sup>10</sup>  $\kappa = \frac{E}{3(1-2\nu)}$  e  $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$

## 5.5 Modelo de *Cap* $C^1$

Irá se apresentar agora o modelo constitutivo escolhido para simular a compacta o de p s metálicos. Trata-se de um modelo de *Cap* composto por três superfícies de escoamento completamente suaves. A idéia deste modelo de *Cap* foi proposta originalmente por SWAN & SEO (a ser publicado) e SWAN & SEO (2000) e   modificada neste trabalho para incorporar a descri o de deforma es finitas, já detalhada no capítulo anterior, e também para a inclusão da dependência da densidade relativa. Este modelo   esquematicamente mostrado na Fig. 5.3.

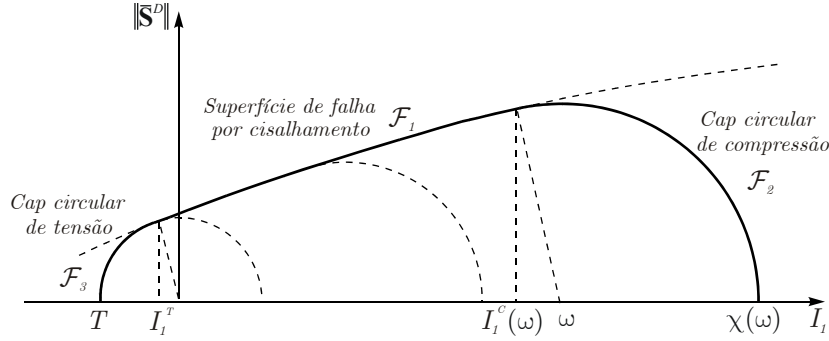


Figura 5.3: Cap suave composto por três superfícies.

### 5.5.1 Formas básicas e taxas de evolu o

Este modelo de *Cap* considera as seguintes fun es de escoamento, sobre as quais   imposta uma condi o de intersec o suave:

$$\mathcal{F}_1(\bar{\tau}, \bar{\chi}^D) = \|\bar{\mathbf{S}}^D\| - F_e(I_1) \leq 0 \quad (5.7)$$

$$\mathcal{F}_2(\bar{\tau}, \bar{\chi}^D, \omega) = \|\bar{\mathbf{S}}^D\|^2 - F_c(I_1, \omega) \leq 0 \quad (5.8)$$

$$\mathcal{F}_3(\bar{\tau}, \bar{\chi}^D) = \|\bar{\mathbf{S}}^D\|^2 - F_t(I_1) \leq 0. \quad (5.9)$$

Estas fun es de escoamento,  $\mathcal{F}_j$ ,  $j = 1 \dots 3$ , são especificadas em termos das fun es  $F_e$ ,  $F_c$  e  $F_t$  as quais são chamadas respectivamente de fun o *envelope exponencial de Drucker-Prager*, fun o *Cap* de compressão e fun o *Cap* de tensão. Aqui,

$$\bar{\mathbf{S}}^D = \bar{\boldsymbol{\tau}}^D - \bar{\boldsymbol{\chi}}^D, \quad (5.10)$$

$$\|\bar{\mathbf{S}}^D\| = \sqrt{\bar{\mathbf{S}}^D \cdot \bar{\mathbf{S}}^D}, \quad (5.11)$$

e

$$I_1 = \text{tr}(\bar{\boldsymbol{\tau}}).$$

$\bar{\boldsymbol{\tau}}^D$  denota a parte desviadora da tensão e  $\bar{\boldsymbol{\chi}}^D$    a chamada de parte desviadora do *back stress*, o qual está associado ao endurecimento cinemático. Mais especificamente as formas de  $F_e$ ,  $F_c$  e  $F_t$  são definidas como

$$F_e(I_1) = \alpha + \gamma \left[ 1 - e^{\beta I_1} \right], \quad \text{com } I_1^c(\omega) \leq I_1 \leq I_1^T \quad (5.12)$$

$$F_c(I_1, \omega) = R^2(\omega) - (I_1 - \omega)^2, \quad \text{com } I_1 \leq I_1^c(\omega) \quad (5.13)$$

$$F_t(I_1) = R_T^2 - I_1^2, \quad \text{com } I_1 \geq I_1^T. \quad (5.14)$$

Nestas equações  $\alpha$ ,  $\gamma$  e  $\beta$  são parâmetros materiais, enquanto  $I_1^T$  e  $I_1^c(\omega)$  denotam, respectivamente, o ponto que delimita o *Cap* de tensão e o *envelope de Drucker-Prager*, e o ponto móvel que delimita o *envelope de Drucker-Prager* e o *Cap* de compressão. No modelo apresentado aqui o ponto  $I_1^T$  é considerado fixo.

A regra de fluxo para este modelo é associativa quanto a evolução de  $\bar{\mathbf{D}}^p$ , isto é:

$$\bar{\mathbf{D}}^p = \sum_j \dot{\lambda}_j \frac{\partial \mathcal{F}_j}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \quad (5.15)$$

As condições de *Karush-Kuhn-Tucker* (KKT) de carregamento e descarregamento são:

$$\mathcal{F}_j \leq 0, \quad \dot{\lambda}_j \geq 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{F}_j \dot{\lambda}_j = 0, \quad \text{para } j = 1...3. \quad (5.16)$$

E a condição de consistência plástica para este modelo fica

$$\dot{\mathcal{F}}_j \dot{\lambda}_j = 0, \quad \text{para } j = 1...3. \quad (5.17)$$

Deste modo, de acordo com as condições de KKT, este modelo elastoplástico possui seis condições de carregamento que devem ser observadas, que são:

1. O ponto de tensão  $\bar{\boldsymbol{\tau}}$  está dentro da região da função de escoamento e  $\mathcal{F}_j < 0$ ,  $j = 1...3$ . Neste caso a resposta do material é elástica, ou seja hiperelástica;
2. Carregamento está ocorrendo sobre a superfície 1, tal que,  $\mathcal{F}_1 = 0$  e  $\dot{\lambda}_1 > 0$ ;
3. Carregamento está ocorrendo sobre a superfície 2, tal que,  $\mathcal{F}_2 = 0$  e  $\dot{\lambda}_2 > 0$ ;
4. Carregamento está ocorrendo sobre a superfície 3, tal que,  $\mathcal{F}_3 = 0$  e  $\dot{\lambda}_3 > 0$ ;
5. As superfícies 1 e 2 estão simultaneamente ativas, isto é,  $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = 0$  e  $\dot{\lambda}_1 > 0$  e  $\dot{\lambda}_2 > 0$ ;
6. As superfícies 1 e 3 estão simultaneamente ativas, isto é,  $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_3 = 0$  e  $\dot{\lambda}_1 > 0$  e  $\dot{\lambda}_3 > 0$ .

Em essência, este modelo considera cinco subcasos elastoplásticos. A Fig. 5.4 mostra esquematicamente cada um destes casos.

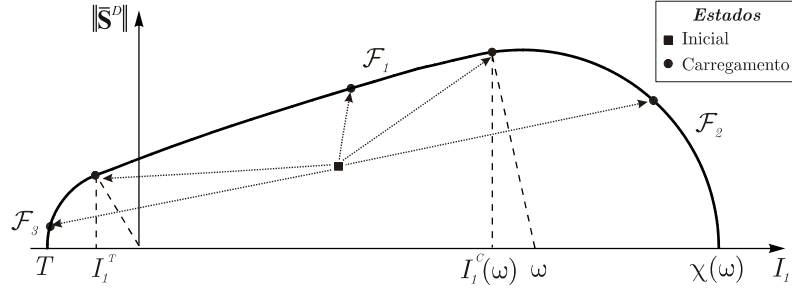


Figura 5.4: Casos de carregamento.

A evolução da variável relacionada com o endurecimento do *Cap* de compressão é tal que:

$$\dot{\omega} = h'(\omega) \operatorname{tr}(\bar{\mathbf{D}}^p) \quad (5.18)$$

onde  $h'(\omega)$  é o módulo de endurecimento tangente o qual é dado por

$$h'(\omega) = \frac{e^{-D\chi(\omega)}}{WD\chi'(\omega)}, \quad (5.19)$$

$D$  e  $W$  são parâmetros materiais, sendo

$$h' \equiv \frac{dh(\omega)}{d\omega}.$$

O valor máximo que o parâmetro  $\omega$  pode assumir é limitado a zero, isto é  $\omega \in (-\infty, 0]$ . O parâmetro  $\chi(\omega)$  define a intersecção do *Cap* com o eixo hidrostático das abcissas como função do parâmetro de endurecimento  $\omega$ , uma vez que

$$\chi(\omega) = \omega - R(\omega). \quad (5.20)$$

Perceba que como  $\omega < 0$  implica em  $R(\omega) > 0$  pois  $\chi(\omega) = \omega - R(\omega) < 0$ .

É considerada também uma regra de endurecimento cinemático linear, situada completamente no espaço desviador, a qual possui a seguinte forma

$$\dot{\hat{\chi}}^D = C\mathbb{I}^D\bar{\mathbf{D}}^p, \quad (5.21)$$

onde  $C$  é o módulo de endurecimento plástico constante. A fim de não sobrecarregar demasiadamente a notação com sobrescritos é introduzido o operador de quarta ordem  $\mathbb{I}^D$ , o qual aplicado em um tensor de segunda ordem produz a sua parte desviadora. Tal operador é construído por

$$\mathbb{I}^D = \mathbb{I} - \frac{1}{3}[\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}]. \quad (5.22)$$

### Definição do *Cap* de compressão

Neste modelo o *Cap* circular de compressão é determinado impondo duas condições, que são:

1. que o *Cap* esteja centrado em  $(I_1 = \omega, \|\bar{\mathbf{S}}^D\| = 0)$ ;

2. que sua intersecção com o envelope exponencial de Drucker-Prager seja suave.

O algoritmo para a determinação do raio  $R(\omega)$ , que satisfaça estas duas condições, consiste em dado  $\omega$  encontrar a mínima distância do ponto  $(\omega, 0)$  à curva envelope exponencial de Drucker-Prager. Isto pode ser escrito como encontrar a mínima distância quadrática,

$$d^*(I_1, \omega) = F_e^2(I_1) + (I_1 - \omega)^2, \quad (5.23)$$

de  $(\omega, 0)$  para a superfície  $\mathcal{F}_1 = 0$ . Da condição necessária de optimalidade

$$\left. \frac{\partial d^*(I_1, \omega)}{\partial I_1} \right|_{I_1^c} = 0. \quad (5.24)$$

Então, o objetivo é encontrar o valor  $I_1^* = I_1^c(\omega)$  para o qual a Eq.(5.24) é satisfeita. Uma vez encontrado este valor,  $R(\omega)$  fica determinado por

$$R(\omega) = \sqrt{d^*(I_1^c, \omega)}. \quad (5.25)$$

Da condição de optimalidade, Eq.(5.24):

$$\left\{ 2(I_1 - \omega) + 2F_e(I_1)F_e'(I_1) \right\} \Big|_{I_1^c} = 0. \quad (5.26)$$

sendo

$$F_e'(I_1) \equiv \frac{dF_e(I_1)}{dI_1}$$

O problema pode então ser enunciado como:

- **Problema 5.1:** Encontre  $I_1$  que resolve o seguinte problema não linear:

$$g(I_1) = 0 \quad (5.27)$$

com

$$g(I_1) = 2F_e(I_1)F_e'(I_1) + 2(I_1 - \omega) \quad (5.28)$$

sendo

$$F_e(I_1) = \alpha + \lambda[1 - \exp(\beta I_1)], \text{ para } I_1^c(\omega) \leq I_1 \leq I_1^T.$$

Para tanto, vai ser aplicar o método de Newton. O algoritmo para determinação de  $I_1$  é descrito na tabela de procedimentos 5.2. Para este método é ainda necessário encontrar

$$F_e'(I_1) = -\lambda\beta \exp(\beta I_1) \quad (5.29)$$

$$F_e''(I_1) = -\lambda\beta^2 \exp(\beta I_1) \quad (5.30)$$

em que

$$F_e''(I_1) = \frac{d^2 F_e(I_1)}{dI_1^2},$$



Tabela 5.2: Algoritmo de Newton para a determinação de  $I_1^c$ 

(i) Inicialize o contador de iteração: $i \leftarrow 0$ (ii) Inicialize $I_1^0 = \omega$ (iii) Determine $g(I_1^0)$ (v) Faça enquanto ( $ g(I_1^i)  > tol$ ou $i < i_{max}$ ) <ol style="list-style-type: none"> <li>(1) Determine <math>\Delta I_1^i</math> <math display="block">\Delta I_1^i = -\frac{g(I_1^i)}{g'(I_1^i)}</math> </li> <li>(2) Atualiza <math>I_1^{i+1}</math> <math display="block">I_1^{i+1} = I_1^i + \Delta I_1^i</math> </li> <li>(3) Compute <math>g(I_1^{i+1})</math></li> <li>(4) Atualize <math>i \leftarrow i + 1</math></li> </ol> fim
--

e desta forma

$$g'(I_1) = 2(F_e'(I_1)F_e'(I_1) + F_e(I_1)F_e''(I_1) - 1). \quad (5.31)$$

**Nota 5.1.** Repare que para o *Cap* de tensão de tração é necessário encontrar a abscissa  $I_1^T$ , a qual serve para delimitar os pontos entre o *Cap* e o *envelope exponencial de Drucker-Prager*, para posterior definição de  $R^T$ . O algoritmo mostrado na tabela 5.2 pode ser utilizado para a determinação de  $I_1^T$ . Para tanto o valor de  $\omega = 0$  deve ser fornecido. ■

### 5.5.2 Evolução e atualizações - problema de valor inicial elastoplástico

O problema de evolução das variáveis internas do problema relacionadas ao *Cap* vai ser agora analisado com base no procedimento descrito no **Capítulo 3**. Aqui, diferentemente daquela formulação, três são as superfícies de escoamento consideradas. Também, a evolução de algumas variáveis internas é dada de forma não associativa. De forma geral, o problema de valor inicial elastoplástico para o problema de *Cap* proposto aqui é muito parecido com aquele já apresentado no **Capítulo 3**, mais especificamente na página 59, que usa o procedimento de predição elástica e de uma correção plástica. Entretanto há algumas particularidades que devem ser levadas em consideração.

Por exemplo, a determinação de qual superfície está ativa, ou seja por onde está se dando o carregamento, é um tanto mais complicada do que a estratégia mostrada no **Capítulo 3**. De fato, para cada ponto que define o estado teste,  $(\bar{\tau}_{n+1}^{teste}, \bar{\chi}_{n+1}^{D^{teste}}, \omega_{n+1}^{teste})$ , será necessário um procedimento especial para identificar qual é a superfície que está ativa, ou se o ponto permanecerá no estado elástico. Este procedimento especial surge devido ao fato que não é possível *a priori* determinar qual é a superfície que está ativa. Como o *envelope exponencial de Drucker-Prager* limita os *Caps* de tensão e compressão, quando ele é violado necessariamente os outros dois também serão violados. Assim, quando  $\mathcal{F}_1(\bullet_{n+1}^{teste}) > 0$  qualquer uma das três superfícies pode estar ativa.

Uma vez posta esta dificuldade para a determinação de qual é a superfície que está realmente ativa para um estado teste  $(\bar{\tau}_{n+1}^{teste}, \bar{\chi}_{n+1}^{D^{teste}}, \omega_{n+1}^{teste})$  que produz  $\mathcal{F}_1(\bullet_{n+1}^{teste}) > 0$ , um critério é proposto para a sua determinação. Este critério consiste no uso do mapeamento de retorno, da classe da projeção do mais próximo ponto<sup>11</sup>, do estado teste,  $(\bar{\tau}_{n+1}^{teste}, \bar{\chi}_{n+1}^{D^{teste}}, \omega_{n+1}^{teste})$ , para a superfície do *envelope exponencial de Drucker-Prager*, o que levará a um novo ponto chamado aqui de  $\omega_{n+1}^{caso1}$ . Se a o novo ponto estiver sobre o domínio da superfície de *Drucker-Prager* então este será realmente o modo ativado. Porém, se o novo ponto estiver sobre o domínio ou do *Cap* de compressão ou de tração então estas deverão ser consideradas como superfícies ativas. Estas idéias estão ilustradas na Fig. 5.5. Caso  $I_{1_{n+1}}^{caso1} > I_{1_{n+1}}^T$  então o ponto pertence ao domínio do *Cap* de tensão e deve-se efetuar agora o mapeamento de retorno considerando esta superfície. Da mesma forma, se  $I_{1_{n+1}}^{caso1} < I_{1_{n+1}}^{caso1}$  então o *Cap* ativo é o de compressão e o mapeamento de retorno para este *Cap* deve ser considerado.

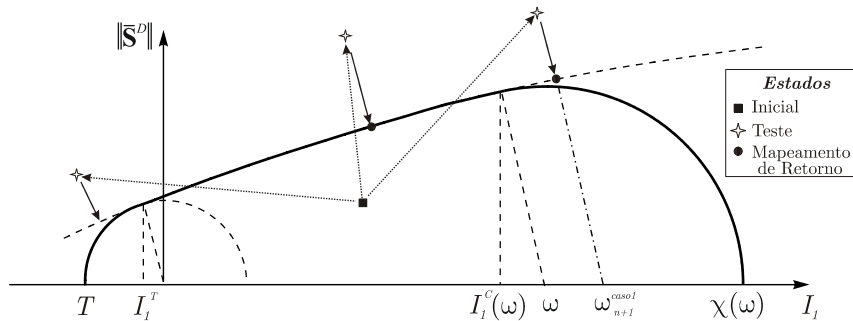


Figura 5.5: Estratégia para a determinação da superfície ativa caso  $\mathcal{F}_1 > 0$ .

Note ainda que, o estado teste pode ainda violar  $\mathcal{F}_2$  ou  $\mathcal{F}_3$  sem no entanto violar  $\mathcal{F}_1$ , veja Fig. 5.6. Neste caso deve ser determinado qual é a superfície ativa e proceder com o mapeamento de retorno condizente a esta superfície.

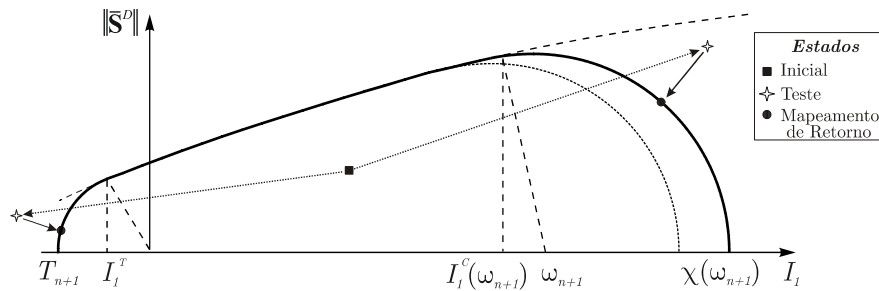


Figura 5.6: Mapeamento de retorno caso  $\mathcal{F}_1 \leq 0$  e  $\mathcal{F}_2 > 0$  ou  $\mathcal{F}_3 > 0$ .

A tabela de procedimentos 5.3 mostra o algoritmo utilizado para checar qual superfície está ativa.

<sup>11</sup>do inglês *closest point projection*.

Tabela 5.3: Identificação da superfície ativa e mapeamentos de retorno

<p>(i) Determine <math>\mathcal{F}_i(\bullet_{n+1}^{teste})</math> com base em <math>(\bar{\tau}_{n+1}^{teste}, \bar{\chi}_{n+1}^{D^{teste}}, \omega_{n+1}^{teste})</math></p> <p>(ii) Se <math>(\mathcal{F}_1(\bullet_{n+1}^{teste}) &gt; 0)</math> então                  resolva o problema do mapeamento de retorno para <math>\mathcal{F}_1</math>                  compute <math>\omega_{n+1}^{casol}</math> e <math>(I_1)_{n+1}^{casol}</math>;                  Se <math>\{(I_1)_{n+1}^{casol} &lt; (I_1^c)_{n+1}^{casol}\}</math> então                  A superfície ativa é <math>\mathcal{F}_2</math>: Mapeamento de retorno para <math>\mathcal{F}_2</math>                  Se <math>\{(I_1)_{n+1}^{casol} &gt; (I_1^T)_{n+1}\}</math> então                  A superfície ativa é <math>\mathcal{F}_3</math>: Mapeamento de retorno para <math>\mathcal{F}_3</math>                  Caso contrário                  A superfície ativa é <math>\mathcal{F}_1</math>.                  fim</p> <p>Caso contrário                  Se <math>\{\mathcal{F}_2(\bullet_{n+1}^{teste}) &gt; 0 \text{ e } I_1^{teste} &lt; I_1^c(\omega_{n+1}^{teste})\}</math> então                  A superfície ativa é <math>\mathcal{F}_2</math>: Mapeamento de retorno para <math>\mathcal{F}_2</math>                  Se <math>\{\mathcal{F}_3(\bullet_{n+1}^{teste}) &gt; 0 \text{ e } I_1^{teste} &gt; I_1^T\}</math> então                  A superfície ativa é <math>\mathcal{F}_3</math>: Mapeamento de retorno para <math>\mathcal{F}_3</math>                  Caso contrário                  Incremento elástico                  fim                  fim</p>
--

### Caso 1: mapeamento de retorno para $\mathcal{F}_1$

Quando o algoritmo mostrado na tabela 5.3 indicar que o carregamento estiver ocorrendo para a superfície  $\mathcal{F}_1$ , a determinação do estado deve ser realizada de acordo com o seguinte modelo constitutivo:

1. A relação constitutiva hiperelástica

$$\begin{aligned}
 \bar{\tau} &= \mathbb{D}(\eta) \mathbf{E}^e \\
 &= 2\mu(\eta) \mathbf{E}^e + \left( \kappa(\eta) - \frac{2}{3}\mu(\eta) \right) \text{tr}(\mathbf{E}^e) \mathbf{I} \\
 \mathbb{D}(\eta) &= 2\mu(\eta) \mathbb{I} + \left( \kappa(\eta) - \frac{2}{3}\mu(\eta) \right) (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})
 \end{aligned}$$

2. Função de escoamento

$$\mathcal{F}_1(\bar{\tau}, \bar{\chi}^D) = \|\bar{\mathbf{S}}^D\| - F_e(I_1) \tag{5.32}$$

em que

$$F_e(I_1) = \alpha + \gamma \left[ 1 - e^{\beta I_1} \right], \quad \text{para } I_1^c(\omega) \leq I_1 \leq I_1^T.$$

3. Evolução do endurecimento cinemático

$$\dot{\bar{\chi}}^D = C \mathbf{I}^D \bar{\mathbf{D}}^p$$

com  $C$  sendo um parâmetro material constante. Aqui

$$\bar{\mathbf{D}}^p = \Delta\lambda_1 \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \quad (5.33)$$

Em uma primeira análise, o mapeamento de retorno associado a este caso consiste em encontrar  $\mathbf{E}_{n+1}^e$ ,  $\bar{\boldsymbol{\chi}}_{n+1}^D$  e  $\Delta\lambda_1$  que satisfaçam o seguinte sistema de equações não lineares

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{n+1}^e - \mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}} + \Delta\lambda_1 \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \Big|_{n+1} \\ \bar{\boldsymbol{\chi}}_{n+1}^D - \bar{\boldsymbol{\chi}}_n^D - \Delta\lambda_1 C \mathbb{I}^D \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \Big|_{n+1} \\ \mathcal{F}_1(\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}, \bar{\boldsymbol{\chi}}_{n+1}^D) \end{cases} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

com  $\Delta\lambda_1 > 0$ . Uma vez determinadas estas variáveis os outros parâmetros do modelo podem então ser atualizados.

Porém, é possível escrever o sistema de equações, Eq.(5.34), de forma mais reduzida após algumas manipulações algébricas. O **Apêndice E** apresenta esta derivação de uma forma mais detalhada. O problema referente ao sistema de equações, Eq.(5.34), após esta manipulação algébrica pode ser escrito como: Encontre  $\Delta\lambda_1$  e  $I_{1_{n+1}}$  que resolvam

$$\begin{cases} \left| \left| \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{D^{teste}} \right| - (2\mu + C) \Delta\lambda_1 \right| - \left[ \alpha + \gamma \left( 1 - e^{\beta I_{1_{n+1}}} \right) \right] \\ I_{1_{n+1}} - I_{1_{n+1}}^{teste} + 9\Delta\lambda_1 \kappa \gamma \beta e^{\beta I_{1_{n+1}}} \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.35)$$

Uma vez determinados  $\Delta\lambda_1$  e  $I_{1_{n+1}}$  é possível atualizar as seguintes variáveis

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D &= \left[ 1 - \frac{\Delta\lambda_1 (2\mu + C)}{\left| \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{D^{teste}} \right|} \right] \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{D^{teste}} \\ \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D &= \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^{D^{teste}} - 2\mu \Delta\lambda_1 \mathbf{N}_{n+1} \\ \bar{\boldsymbol{\chi}}_{n+1}^D &= \bar{\boldsymbol{\chi}}_n^D + \Delta\lambda_1 C \mathbf{N}_{n+1} \end{aligned}$$

e então calcular

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1} = \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D + \frac{1}{3} I_{1_{n+1}} \mathbf{I}.$$

Na tabela 5.4 é apresentado um resumo que compreende o algoritmo de mapeamento de retorno para o caso de  $\mathcal{F}_1$  ativo.

**Atualização de  $\omega$**  Uma vez determinados  $I_{1_{n+1}}$  e  $\Delta\lambda_1$  pode-se atualizar o parâmetro  $\omega_{n+1}$  utilizado para a determinação das variáveis associadas ao *Cap*. Entretanto, a atualização de  $\omega_{n+1}$  envolve também a solução de um conjunto de equações não lineares dado por

$$\omega_{n+1} = \omega - 3\Delta\lambda_1 h'(\omega_{n+1}) F_e'(I_{1_{n+1}})$$

Tabela 5.4: Algoritmo de mapeamento de retorno para o Caso 1

<p>(i) Uma vez determinada que <math>\mathcal{F}_1</math> está ativa resolva:</p> $\begin{cases} \left\  \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{D^{teste}} \right\  - (2\mu + C) \Delta\lambda_1 - \left[ \alpha + \gamma \left( 1 - e^{\beta I_{n+1}} \right) \right] \\ I_{n+1} - I_{n+1}^{teste} + 9\Delta\lambda_1 \kappa \gamma \beta e^{\beta I_{n+1}} \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ <p>para <math>I_{n+1}</math> e <math>\Delta\lambda_1</math>.</p> <p>(ii) Atualize as variáveis</p> $\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D = \left[ 1 - \frac{\Delta\lambda_1(2\mu+C)}{\left\  \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{D^{teste}} \right\ } \right] \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{D^{teste}}$ $\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D = \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^{D^{teste}} - 2\mu\Delta\lambda_1 \mathbf{N}_{n+1}$ $\bar{\boldsymbol{\chi}}_{n+1}^D = \bar{\boldsymbol{\chi}}_n^D + \Delta\lambda_1 C \mathbf{N}_{n+1}$ $\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1} = \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D + \frac{1}{3} I_{n+1} \mathbf{I}$ $\mathbf{F}_{n+1}^p = \exp \left( \Delta\lambda_1 \left. \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \right _{n+1} \right) \mathbf{F}_n^p$
---

em que

$$\begin{aligned} h'(\omega_{n+1}) &= \frac{e^{-D\chi(\omega_{n+1})}}{WD\chi'(\omega_{n+1})} \\ \chi'(\omega_{n+1}) &= 1 - R'(\omega_{n+1}) \\ F_e'(I_{n+1}) &= -\gamma\beta e^{\beta I_{n+1}}. \end{aligned}$$

### Caso 2: mapeamento de retorno para $\mathcal{F}_2$

Quando o algoritmo mostrado na tabela 5.3 indicar que o carregamento estiver ocorrendo para a superfície  $\mathcal{F}_2$ , a determinação do novo estado deve ser realizada de acordo com o seguinte modelo constitutivo:

1. A relação constitutiva hiperelástica

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\tau}} &= \mathbb{D}(\eta) \mathbf{E}^e \\ &= 2\mu(\eta) \mathbf{E}^e + \left( \kappa(\eta) - \frac{2}{3}\mu(\eta) \right) \text{tr}(\mathbf{E}^e) \mathbf{I} \\ \mathbb{D}(\eta) &= 2\mu(\eta) \mathbb{I} + \left( \kappa(\eta) - \frac{2}{3}\mu(\eta) \right) (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) \end{aligned}$$

2. Função de escoamento

$$\mathcal{F}_2(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\boldsymbol{\chi}}^D, \omega) = \left\| \bar{\mathbf{S}}^D \right\|^2 - F_c(I_1, \omega) \leq 0 \quad (5.36)$$

em que

$$F_c(I_1, \omega) = R^2(\omega) - (I_1 - \omega)^2, \quad \text{para } I_1 \leq I_1^c(\omega).$$

3. Evolução do endurecimento do  $Cap$ 

$$\dot{\omega} = h'(\omega) \operatorname{tr}(\bar{\mathbf{D}}^p)$$

## 4. Evolução do endurecimento cinemático

$$\dot{\bar{\chi}}^D = C\mathbb{T}^D \bar{\mathbf{D}}^p.$$

Aqui

$$\bar{\mathbf{D}}^p = \Delta\lambda_2 \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}}. \quad (5.37)$$

Novamente, em uma primeira análise o mapeamento de retorno associado a este caso consiste em encontrar  $\mathbf{E}_{n+1}^e$ ,  $\bar{\boldsymbol{\chi}}_{n+1}^D$ ,  $\omega_{n+1}$  e  $\Delta\lambda_2$  que satisfaçam o seguinte sistema de equações não lineares

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}_{n+1}^e - \mathbf{E}_{n+1}^{e\text{teste}} + \Delta\lambda_2 \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \Big|_{n+1} \\ \bar{\boldsymbol{\chi}}_{n+1}^D - \bar{\boldsymbol{\chi}}_n^D - \Delta\lambda_2 C\mathbb{T}^D \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \Big|_{n+1} \\ \omega_{n+1} - \omega_n - \Delta\lambda_2 h'(\omega) \Big|_{n+1} \operatorname{tr} \left( \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \Big|_{n+1} \right) \\ \mathcal{F}_2(\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}, \bar{\boldsymbol{\chi}}_{n+1}^D, \omega_{n+1}) \end{array} \right. = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

com  $\Delta\lambda_2 > 0$ . Porém, é possível escrever o sistema de equações, Eq.(5.38), de forma mais reduzida. Para tanto, pode-se proceder de forma análoga ao caso 1, isto é, a solução pode ser dada pela imposição do seguinte sistema de equações escalares, veja o **Apêndice E**,

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{1n+1} - I_{1n+1}^{e\text{teste}} + 18\kappa (I_{1n+1} - \omega_{n+1}) \Delta\lambda_2 \\ \omega_{n+1} - \omega_n - 6 h'(\omega) \Big|_{n+1} (I_{1n+1} - \omega_{n+1}) \Delta\lambda_2 \\ \frac{\|\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{D\text{teste}}\|^2}{(1+2(2\mu-C)\Delta\lambda_2)^2} - F_c(I_{1n+1}, \omega_{n+1}) \end{array} \right. = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

para  $I_{1n+1}$ ,  $\omega_{n+1}$  e  $\Delta\lambda_2$ .

Na tabela 5.5 é apresentado um resumo que compreende o algoritmo de mapeamento de retorno para o caso de  $\mathcal{F}_2$  ativo.

**Caso 3: mapeamento de retorno para  $\mathcal{F}_3$** 

Quando o algoritmo mostrado na tabela 5.3 indicar que o carregamento estiver ocorrendo na superfície  $\mathcal{F}_3$ , a determinação do novo estado deve ser realizada de acordo com o seguinte modelo constitutivo:

Tabela 5.5: Algoritmo de mapeamento de retorno para o Caso 2

<p>(i) Uma vez determinada que <math>\mathcal{F}_2</math> está ativa resolva:</p> $\begin{cases} I_{1_{n+1}} - I_{1_{n+1}}^{teste} + 18\kappa (I_{1_{n+1}} - \omega_{n+1}) \Delta\lambda_2 \\ \omega_{n+1} - \omega_n - 6 h'(\omega) _{n+1} (I_{1_{n+1}} - \omega_{n+1}) \Delta\lambda_2 \\ \frac{\ \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{D^{teste}}\ ^2}{(1+2(2\mu-C)\Delta\lambda_2)^2} - F_c(I_{1_{n+1}}, \omega_{n+1}) \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ <p>para <math>I_{1_{n+1}}</math>, <math>\omega_{n+1}</math> e <math>\Delta\lambda_2</math>.</p> <p>(ii) Atualize as variáveis</p> $\begin{aligned} \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D &= \frac{\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{D^{teste}}}{[1+2(2\mu-C)\Delta\lambda_2]} \\ \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D &= \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^{D^{teste}} - 4\mu\Delta\lambda_2\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D \\ \bar{\boldsymbol{\chi}}_{n+1}^D &= \bar{\boldsymbol{\chi}}_n^D + 2\Delta\lambda_2 C \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D \\ \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1} &= \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D + \frac{1}{3}I_{1_{n+1}}\mathbf{I} \\ \mathbf{F}_{n+1}^p &= \exp\left(\Delta\lambda_2 \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}}\bigg _{n+1}\right) \mathbf{F}_n^p \end{aligned}$
---

1. A relação constitutiva hiperelástica

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\tau}} &= \mathbb{D}(\eta) \mathbf{E}^e \\ &= 2\mu(\eta) \mathbf{E}^e + \left(\kappa(\eta) - \frac{2}{3}\mu(\eta)\right) \text{tr}(\mathbf{E}^e) \mathbf{I} \\ \mathbb{D}(\eta) &= 2\mu(\eta) \mathbb{I} + \left(\kappa(\eta) - \frac{2}{3}\mu(\eta)\right) (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}); \end{aligned}$$

2. Função de escoamento

$$\mathcal{F}_3(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\boldsymbol{\chi}}^D) = \|\bar{\mathbf{S}}^D\|^2 - F_t(I_1) \leq 0 \quad (5.40)$$

em que

$$F_t(I_1) = R_T^2 - I_1^2, \quad \text{com } I_1 \geq I_1^T.$$

3. Evolução do endurecimento do *Cap*

$$\dot{\omega} = h'(\omega) \text{tr}(\bar{\mathbf{D}}^p);$$

4. Evolução do endurecimento cinemático

$$\dot{\boldsymbol{\chi}}^D = C\mathbb{I}^D \bar{\mathbf{D}}^p;$$

Aqui

$$\bar{\mathbf{D}}^p = \Delta\lambda_3 \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}}. \quad (5.41)$$

Tabela 5.6: Algoritmo de mapeamento de retorno para o Caso 3

<p>(i) Uma vez determinada que <math>\mathcal{F}_3</math> está ativa resolva:</p> $\frac{\ \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{Dteste}\ ^2}{[1+2(2\mu+C)\Delta\lambda_3]^2} - R_T^2 + \frac{(I_{1_{n+1}}^{teste})^2}{(1+18\kappa\Delta\lambda_3)^2} = 0$ <p>para <math>\Delta\lambda_3</math>.</p> <p>(ii) Atualize as variáveis</p> $\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D = \frac{\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{Dteste}}{[1+2(2\mu+C)\Delta\lambda_3]}$ $\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D = \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^{Dteste} - 4\mu\Delta\lambda_3\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D$ $\bar{\boldsymbol{\chi}}_{n+1}^D = \bar{\boldsymbol{\chi}}_n^D + 2\Delta\lambda_3 C \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D$ $I_{1_{n+1}} = \frac{I_{1_{n+1}}^{teste}}{1+18\kappa\Delta\lambda_3}$ $\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1} = \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D + \frac{1}{3}I_{1_{n+1}}\mathbf{I}$ $\mathbf{F}_{n+1}^p = \exp\left(\Delta\lambda_3 \left. \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \right _{n+1}\right) \mathbf{F}_n^p$
--

O mapeamento de retorno associado a este caso consiste em encontrar  $\mathbf{E}_{n+1}^e$ ,  $\bar{\boldsymbol{\chi}}_{n+1}^D$ ,  $\omega_{n+1}$  e  $\Delta\lambda_3$  que satisfaçam o seguinte sistema de equações não lineares

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}_{n+1}^e - \mathbf{E}_{n+1}^{e teste} + \Delta\lambda_3 \left. \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \right|_{n+1} \\ \bar{\boldsymbol{\chi}}_{n+1}^D - \bar{\boldsymbol{\chi}}_n^D - \Delta\lambda_3 C \mathbb{I}^D \left. \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \right|_{n+1} \\ \omega_{n+1} - \omega_n - \Delta\lambda_3 h'(\omega)|_{n+1} \text{tr} \left( \left. \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \right|_{n+1} \right) \\ \mathcal{F}_3(\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}, \bar{\boldsymbol{\chi}}_{n+1}^D) \end{array} \right. = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

com  $\Delta\lambda_2 > 0$ . Porém, como feito nos casos anteriores, aqui também é possível escrever o sistema de equações acima, Eq.(5.42), de forma mais reduzida. Neste caso é possível reduzir o sistema para apenas uma equação, veja **Apêndice E** para uma descrição mais detalhada,

$$\frac{\|\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{Dteste}\|^2}{[1+2(2\mu+C)\Delta\lambda_3]^2} - R_T^2 + \frac{(I_{1_{n+1}}^{teste})^2}{(1+18\kappa\Delta\lambda_3)^2} = 0 \quad (5.43)$$

a qual deve ser resolvida para  $\Delta\lambda_3$ .

Na tabela 5.6 é apresentado um resumo que compreende o algoritmo de mapeamento de retorno para o caso de  $\mathcal{F}_3$  ativo.

### 5.5.3 Determinação dos módulos tangentes consistentes $\tilde{\mathbb{D}} = \mathbb{D}^{ep}$

Uma vez determinadas as estratégias de atualização locais para cada caso de carregamento é possível agora determinar os chamados módulos tangentes consistentes. Como estes módulos são dependentes da solução local obtida, cada módulo deverá ser determinado com base nesta solução. Assim vão existir três módulos tangentes para o modelo constitutivo proposto, conforme a tabela 5.3.



Ainda, como já comentado no início deste capítulo, o modelo constitutivo é dependente da densidade relativa  $\eta$ . Como na determinação do módulo tangente consistente é feita uma linearização do sistema local de equações, proveniente do mapeamento de retorno, este módulo resulta independente da densidade relativa.

Entretanto, na linearização, perturbações na deformação implicam em perturbações na densidade e vice-versa. A fim de levar em conta esta dependência será introduzida no sistema de equações uma relação oriunda do algoritmo de estado teste já comentado no **Capítulo 3**, relação esta também usada em PÉREZ-FOGUET *et al.* (2003), de modo a identificar a relação entre  $\eta$  e  $\mathbf{F}_{n+1}^{e^{teste}}$  ou ainda  $\mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}}$ . Esta relação é apresentada a seguir.

### Relação entre a $\eta$ e $\mathbf{F}_{n+1}^{e^{teste}}$ e $\mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}}$

No algoritmo de predição elástica:

$$\mathbf{F}_{n+1}^{e^{teste}} = \mathbf{F}_{n+1} (\mathbf{F}_n^p)^{-1} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{F}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1}^{e^{teste}} \mathbf{F}_n^p.$$

Com base neste algoritmo a densidade relativa pode ser escrita como

$$\eta_{n+1} = \frac{\eta_o}{\det(\mathbf{F}_{n+1})} = \frac{\eta_o}{\det(\mathbf{F}_{n+1}^{e^{teste}}) \det(\mathbf{F}_n^p)} \quad (5.44)$$

Agora veja que

$$\mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}} = \frac{1}{2} \ln \left( \mathbf{C}_{n+1}^{e^{teste}} \right)$$

ou

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{n+1}^{e^{teste}} &= \exp \left( 2\mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}} \right) \\ \left( \mathbf{F}_{n+1}^{e^{teste}} \right)^T \mathbf{F}_{n+1}^{e^{teste}} &= \exp \left( 2\mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}} \right) \end{aligned}$$

e tomando o determinante em ambos os lados

$$\begin{aligned} \det \left[ \left( \mathbf{F}_{n+1}^{e^{teste}} \right)^T \right] \det \left( \mathbf{F}_{n+1}^{e^{teste}} \right) &= \det \left[ \exp \left( 2\mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}} \right) \right] \\ \left[ \det \left( \mathbf{F}_{n+1}^{e^{teste}} \right) \right]^2 &= \exp \left[ 2 \operatorname{tr} \left( \mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}} \right) \right] \\ \det \left( \mathbf{F}_{n+1}^{e^{teste}} \right) &= \exp \left[ \operatorname{tr} \left( \mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}} \right) \right] \\ \det \left( \mathbf{F}_{n+1}^{e^{teste}} \right) &= \exp \left( E_{v_{n+1}}^{e^{teste}} \right) \end{aligned} \quad (5.45)$$

em que

$$E_{v_{n+1}}^{e^{teste}} = \operatorname{tr} \left( \mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}} \right). \quad (5.46)$$

Logo, substituindo a Eq.(5.45) em Eq.(5.44) produz

$$\begin{aligned}\eta_{n+1} &= \frac{\eta_o}{\exp\left(E_{v_{n+1}}^{e^{teste}}\right) \det(\mathbf{F}_n^p)} \\ &= \frac{\eta_o}{\det(\mathbf{F}_n^p)} \exp\left(-E_{v_{n+1}}^{e^{teste}}\right).\end{aligned}\quad (5.47)$$

Tendo em mente esta relação pode-se agora determinar os módulos tangentes para cada um dos casos de carregamento. Os módulos tangentes usados neste trabalho são apresentados a seguir.

### Módulo tangente para o caso 1

O sistema de equações local referente ao caso 1, onde não é levado em consideração o endurecimento cinemático,  $\bar{\chi}^D = 0$ , é

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{n+1}^e - \mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}} + \Delta\lambda_1 \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \bar{\tau}_{n+1}} \\ \mathcal{F}_1(\bar{\tau}_{n+1}, \eta_{n+1}) \\ \eta_{n+1} - \hat{\eta} \exp\left(-E_v^{e^{teste}}\right) \end{cases} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

onde foi introduzida a relação Eq.(5.47).

A linearização do sistema Eq.(5.48) é dada por

$$\begin{cases} d\mathbf{E}_{n+1}^e + d(\Delta\lambda_1) \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \bar{\tau}_{n+1}} + \Delta\lambda_1 d\left(\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \bar{\tau}_{n+1}}\right) \\ d\mathcal{F}_1(\bar{\tau}_{n+1}, \eta_{n+1}) \\ d\eta_{n+1} + \hat{\eta} \exp\left(-E_v^{e^{teste}}\right) dE_v^{e^{teste}} \end{cases} = \begin{bmatrix} d\mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.49)$$

após uma extensiva manipulação, temos

$$\mathbb{D}_{c1}^{ep} = \frac{d\bar{\tau}_{n+1}}{d\mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}}} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{B} \quad (5.50)$$

em que

$$\mathbb{A} = \mathbb{D}^{-1} + \Delta\lambda_1 \left( \|\bar{\tau}_{n+1}^D\|^{-1} \mathbb{I}^D - \mathbf{N}_{n+1} \otimes \mathbf{N}_{n+1} \right) + \gamma\beta e^{\beta I_{n+1}} (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) \quad (5.51)$$

e

$$\mathbb{B} = \mathbb{I} - \eta_{n+1} \mathbb{D}^{-1} \frac{\partial \mathbb{D}}{\partial \eta_{n+1}} \mathbf{E}_{n+1}^e \otimes \mathbf{I}. \quad (5.52)$$

### Módulo tangente para o caso 2

Procedendo de forma análoga ao apresentado para o caso 1 pode-se chegar a

$$\mathbb{D}_{c2}^{ep} = \frac{d\bar{\tau}_{n+1}}{d\mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}}} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{B} \quad (5.53)$$

em que

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= \mathbb{D}^{-1} + 2\Delta\lambda_2 [\mathbb{I}^D + \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}] - C_1 \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}} \otimes \mathbf{I} - \frac{1}{\frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \omega_{n+1}}} \left( C_2 \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}} - 2\Delta\lambda_2 \mathbf{I} \right) \otimes \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}} \\ \mathbb{B} &= -\eta_{n+1} \left[ \mathbb{D}^{-1} \frac{\partial \mathbb{D}}{\partial \eta_{n+1}} \mathbf{E}_{n+1}^e \otimes \mathbf{I} + \frac{1}{\frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \omega_{n+1}}} \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \eta_{n+1}} \left( C_2 \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}} - 2\Delta\lambda_2 \mathbf{I} \right) \otimes \mathbf{I} \right] + \mathbb{I} \end{aligned}$$

e

$$C_1 = \frac{\Delta\lambda_2}{I_{1_{n+1}} - \omega_{n+1}} \quad (5.54)$$

$$C_2 = \frac{1 + 6\Delta\lambda_2 h'_{n+1}}{6h'_{n+1} (I_{1_{n+1}} - \omega_{n+1})}. \quad (5.55)$$

### Módulo tangente para o caso 3

Novamente seguindo a mesma idéia apresentada no caso 1, pode-se chegar ao seguinte módulo tangente para o caso 3

$$\mathbb{D}_{c3}^{ep} = \frac{d\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}}{d\mathbf{E}_{n+1}^{e\text{teste}}} = \left\{ \mathbb{D}^{-1} + 2\Delta\lambda_3 [\mathbb{I}^D + \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}] \right\}^{-1} \left( \mathbb{I} - \eta_{n+1} \mathbb{D}^{-1} \frac{\partial \mathbb{D}}{\partial \eta_{n+1}} \mathbf{E}_{n+1}^e \otimes \mathbf{I} \right). \quad (5.56)$$

## 5.6 Exemplos

Nesta seção serão apresentados alguns exemplos de compactação de componentes, em molde, utilizando o modelo material proposto neste capítulo juntamente com a estratégia de contato e atrito apresentada no **Capítulo 4**. A fim de poder estabelecer uma comparação com outros modelos materiais e também estratégias de solução apresentados na literatura para abordar o problema de compactação de pós metálicos, foram selecionados alguns exemplos já estudados por outros autores, alguns inclusive com resultados experimentais. Os exemplos apresentados nesta seção consideram a hipótese axissimétrica e de estado plano de deformações. Em todos os exemplos um suporte de influência de  $s = 1.5$  foi utilizado juntamente com uma quadratura de *Gauss-Legendre* de 7 pontos de integração.

### 5.6.1 Compactação de uma bucha plana

O primeiro exemplo investigado é a compactação de uma bucha plana. Resultados numéricos e experimentais para este exemplo são apresentados por GETHIN & LEWIS (1994). Outros resultados numéricos para este exemplo também são apresentados em LEWIS & KHOEI (1998) e (2001), CANTE *et al.* (1998) e PÉREZ-FOGUET *et al.* (2003).

Na Fig. 5.7 é apresentada, de forma esquemática, o modelo axissimétrico proposto para análise. Repare que as regiões mostradas em cinza na Fig. 5.7(a) representam o molde. Nesta mesma figura é mostrada a malha de integração utilizada bem como a disposição das partículas EFG. Neste exemplo foram utilizadas 217 partículas e 360 elementos de integração.

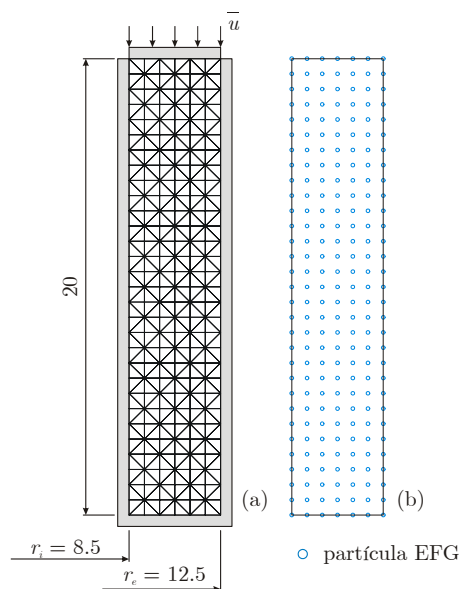


Figura 5.7: Modelo usado na análise da bucha plana: (a) Malha de integração e molde; (b) disposição das partículas EFG.

A simulação consiste do movimento da parede superior, esmagamento, de  $\bar{u} = 12 \text{ mm}$  com relação à parte superior do molde. Foram utilizados inicialmente 200 passos de carga, porém

devido a alta compactação alcançada no estágio final do processo, um refino sucessivo de passos foi realizado chegando a 800 passos de carga no final da análise.

As propriedades materiais, bem como os parâmetros utilizados para a imposição das condições de contorno essenciais e de contato e atrito, foram os seguintes

$$\begin{aligned}
 E &= E(\eta) & \nu &= 0.35 \\
 W &= 1 & D &= 7 \times 10^{-3} \text{ MPa}^{-1} & \omega_o &= -0.2 \text{ MPa} \\
 \alpha &= 5.883 \text{ MPa} & \beta &= 10^{-3} & \lambda &= 226.455 \\
 c_f &= 0.15 & \epsilon_N &= 10^{-6} & \epsilon_T &= 10^{-4} \\
 \epsilon_u &= 10^{-9} & tol_1 &= 10^{-6} & tol_2 &= 10^{-6}.
 \end{aligned}$$

Na Fig. 5.8(a) é mostrado um comparativo entre a força de compactação partindo de duas densidades relativas iniciais diferentes que são  $\eta_o = 0.40$ , como usado no trabalho apresentado por LEWIS & KHOEI (1998), e  $\eta_o = 0.41$  como proposto por PÉREZ-FOGUET *et al.* (2003). Já na Fig. 5.8(b) é apresentado um comparativo entre o perfil de densidade relativa obtida com a proposta apresentada neste trabalho com aquela obtida por vários outros autores. Este perfil é para um raio de 10.5 mm e para um movimento da parede superior do molde de  $\bar{u} = 10 \text{ mm}$ . Diferentemente dos trabalhos apresentados por LEWIS & KHOEI (1998) e PÉREZ-FOGUET *et al.* (2003) neste trabalho é considerado o efeito do atrito em todas as paredes do molde e não somente nas paredes laterais, como usado nos trabalhos destes autores. Repare que há uma boa concordância entre os resultados apresentados aqui e os alcançados por outros autores.

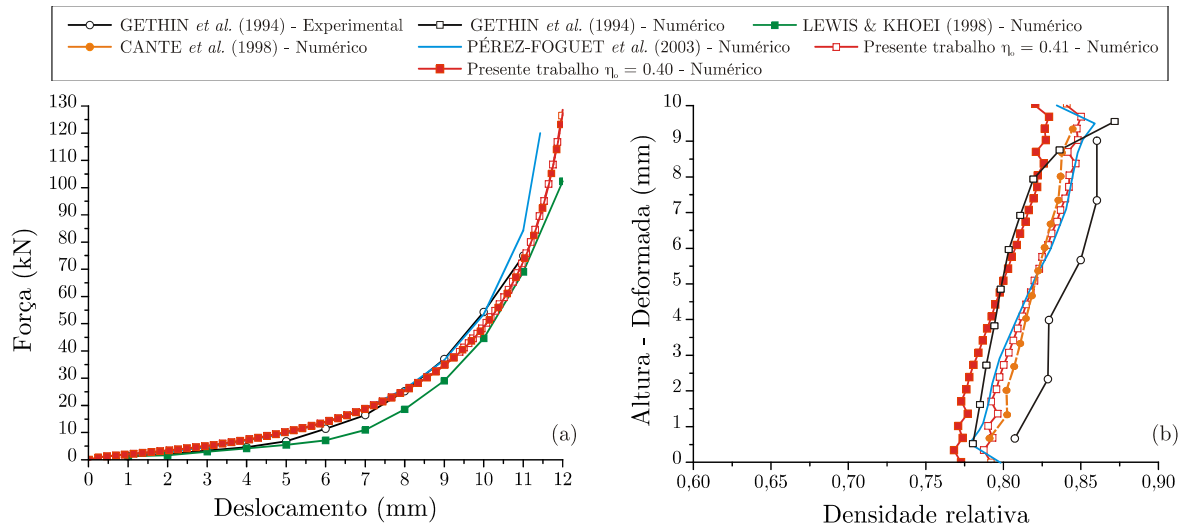


Figura 5.8: Resultados para a compactação da bucha plana. (a) Força  $\times$  deslocamento; (b) Variação da porosidade ao longo da altura para a configuração deformada de 10 mm e para um raio de 10.5 mm.

Na Fig. 5.9 são mostradas as saídas em isofaixas para a densidade relativa, para vários movimentos da parede superior do molde. Como esperado, há uma maior compactação no

sentido de baixo para cima no componente. Ainda, é possível notar um efeito de localização em todos os cantos do anel. Qualitativamente este efeito pode ser evidenciado nos trabalhos dos outros autores citados acima.

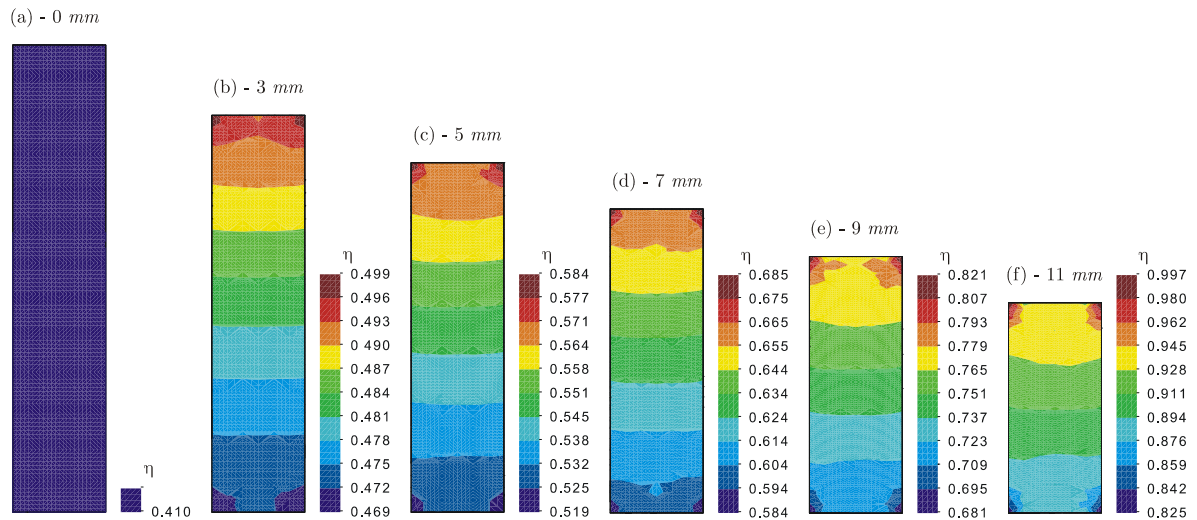


Figura 5.9: Compactação da bucha plana. Isofaixas de densidade relativa para várias posições da parede superior do molde.

Outro resultado bastante interessante está mostrado na Fig. 5.10 a qual apresenta a tensão de cisalhamento para um deslocamento de 11 mm da parede superior do molde. A partir da análise desta figura fica evidente o efeito do atrito sobre o pó compactado.

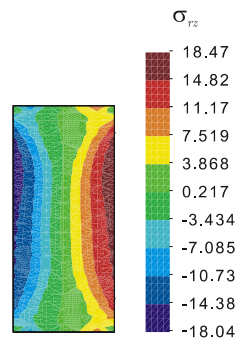


Figura 5.10: Saída de cisalhamento  $\sigma_{rz}$  para 11 mm.

### 5.6.2 Compactação de um flange

Neste exemplo é mostrada a compactação de um flange, o qual é modelado usando a hipótese de axisimetria. As dimensões do flange, bem como a disposição das paredes do molde, estão apresentadas na Fig. 5.11. Nesta figura também é apresentada a disposição da malha de integração e das partículas EFG. Neste exemplo foram utilizadas 310 partículas e 540 elementos de integração.

A análise consiste no movimento relativo da parede superior e inferior do molde de  $\bar{u}_1 =$

6.06 mm e  $\bar{u}_2 = 7.70$  mm respectivamente. Este movimento é feito de forma simultânea. Foram usados 400 passos de carregamento durante esta análise. Os parâmetros materiais usados neste exemplo são os mesmos calibrados pelo exemplo anterior, a menos do coeficiente de atrito, que neste caso é de  $c_f = 0.08$ .

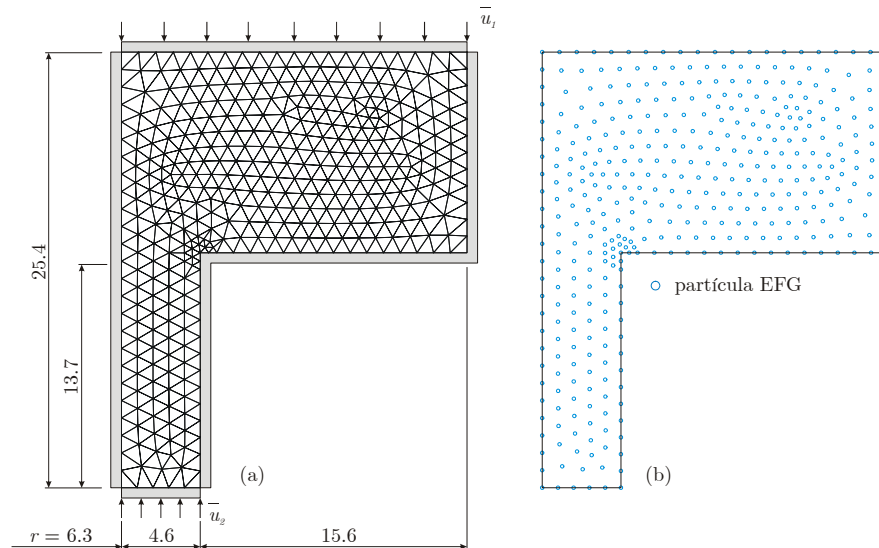


Figura 5.11: Modelo usado na análise do flange: (a) Malha de integração e molde; (b) disposição das partículas EFG.

Na Fig. 5.12 é mostrada a configuração deformada no final da análise. Este exemplo também foi investigado por LEWIS & KHOEI (1998) e PÉREZ-FOGUET *et al.* (2003). Novamente, há uma diferença entre as condições de contorno usadas por estes autores e as usadas neste trabalho. Aqui, há contato efetivo entre o pó e todas as paredes do molde. Já no trabalho dos autores citados, os nós que pertencem às paredes que possuem movimento relativo são presos radialmente. Ainda, outros nós têm o movimento restringido em outras paredes do molde, como por exemplo os nós das paredes que formam a região do canto do flange, região do detalhe mostrado na Fig. 5.12(b). Para maiores informações da condição de contorno usada por este autor veja KHOEI & LEWIS (2002).

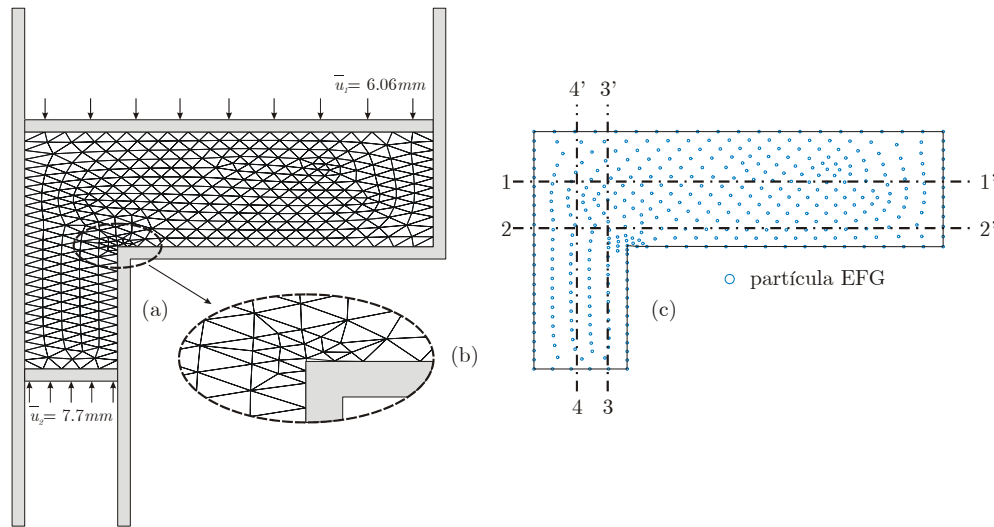


Figura 5.12: Flange deformada. (a) Malha de integração e (b) distribuição de partículas EFG - Linhas de corte indicando as posições para a leitura da densidade relativa..

De fato, estas regiões de reentrâncias possuem um comportamento bastante complexo, podendo aparecer nestas regiões efeitos localizados de redução de volume em um lado da parede e de aumento de volume na parede seguinte, dependendo do sentido do movimento do fluxo de compactação. Entretanto, como já comentado, no exemplo apresentado neste trabalho é permitido que o pó esteja livre para assumir qualquer tipo de movimento. Na Fig. 5.12(b) é mostrado em um detalhe, a ampliação da deformada obtida perto da reentrância. Repare que há um pequeno descolamento do material da parede do molde.

O fato de haver regiões localizadas, com aumento ou redução de volume, durante o processo de compactação torna-se um problema mais relevante justamente quando o material é modelado com formulações constitutivas do tipo *Cap*, onde o efeito de compressão e de tração são tratados de forma bastante diferentes. De fato, para este tipo de material, os locais onde há um grande aumento de volume serão bastante propícios à falhas, como a nucleação de vazios ou ainda a nucleação de microtrincas. Este efeito será melhor explorado em um outro exemplo, onde apenas uma das paredes do molde é considerada móvel.

Na Fig. 5.12(c) são mostradas as linhas onde serão levantados os perfis de densidade. Estas linhas, cortes ou seções, são 1 - 1' a  $z = 17.17 mm$ , 2 - 2' a  $z = 15 mm$ , 3 - 3' para um  $r = 9.37 mm$  e 4 - 4' a  $r = 8.77 mm$ . Os perfis de densidade sobre estas linhas estão mostrados na Fig. 5.13, onde também são mostrados os perfis obtidos por vários outros autores. Da análise desta figura pode-se verificar uma boa concordância entre os resultados.



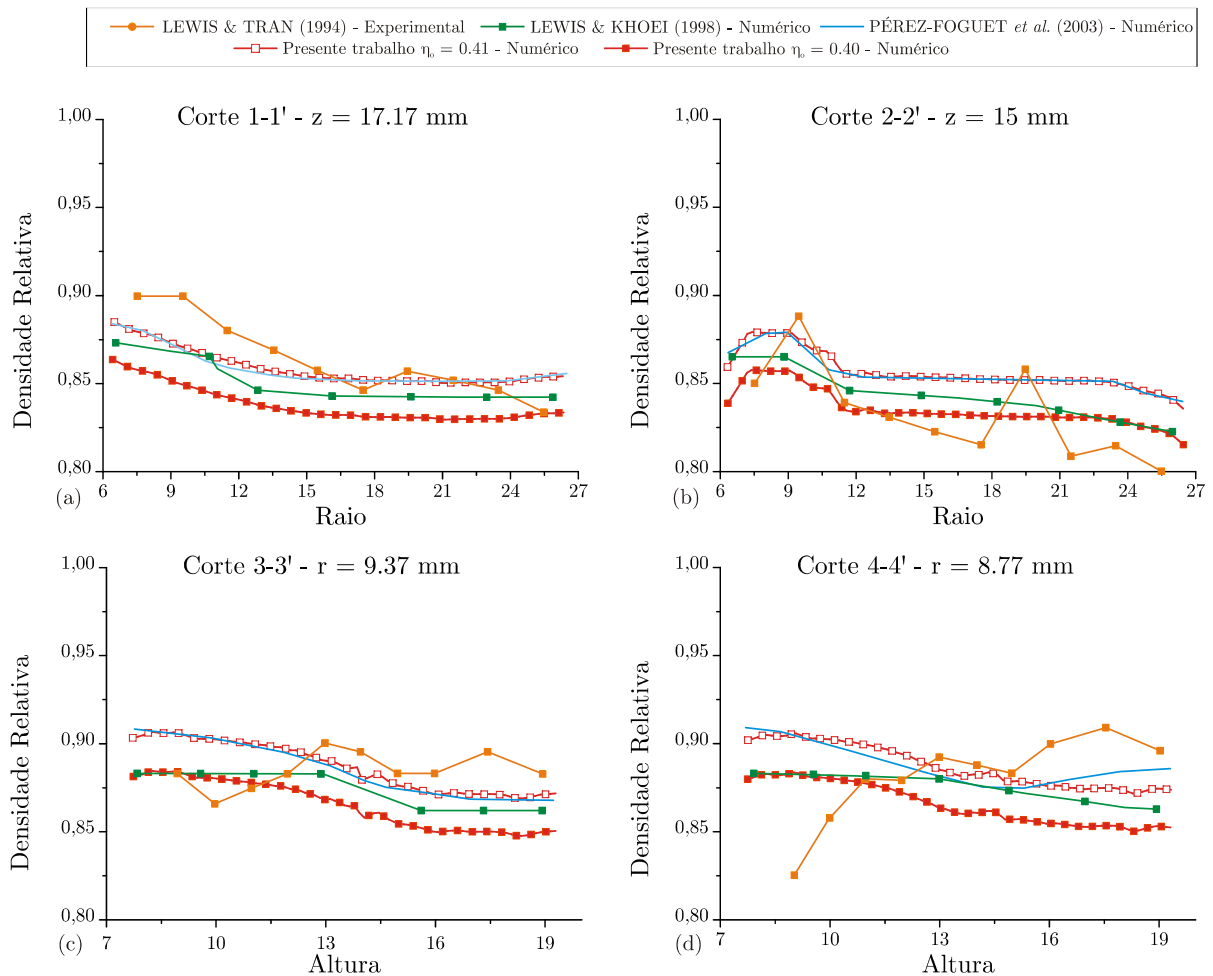


Figura 5.13: Resultados para a compactação do flange. Variação da densidade relativa para vários cortes.

Já na Fig. 5.14 são apresentadas as saídas para a densidade relativa para alguns passos de carregamento da análise. Repare que o perfil de densidade durante a análise, e particularmente no final da mesma, é bastante heterogêneo.

Por fim, é apresentado na Fig. 5.15 o gráfico de força de compactação para as duas paredes móveis. Entretanto, como comentado em PÉREZ-FOGUET *et al.* (2003), há uma grande diferença com os resultados apresentados por LEWIS & KHOEI (1998) para este exemplo. A força total na parede superior apresentada no trabalho de LEWIS & KHOEI (1998) é de  $1550$  kN, enquanto que, no trabalho de PÉREZ-FOGUET *et al.* (2003) é de  $392$  kN. Já neste trabalho esta força é de  $384$  kN. Ainda, conforme PÉREZ-FOGUET *et al.* (2003), esta variação é devido à diferença no módulo de elasticidade usado pelos autores e também pelo fato que no trabalho de LEWIS & KHOEI (1998) é considerada uma análise dinâmica.

Contudo, os resultados apresentados aqui estão bastante próximos daqueles apresentados por PÉREZ-FOGUET *et al.* (2003). Para efeito comparativo, no gráfico da Fig. 5.15 é considerada uma força normalizada ou adimensionalizada. Note, mais uma vez, a boa concordância entre as curvas de força apresentadas.

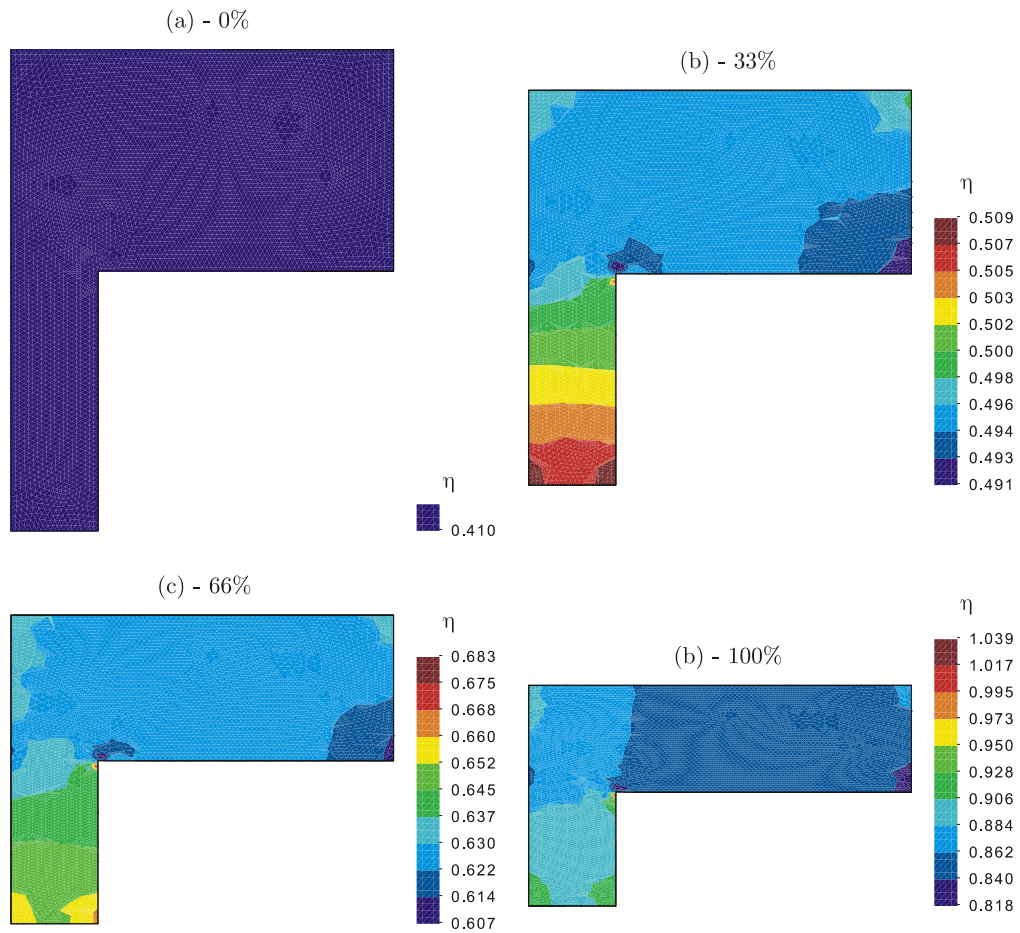


Figura 5.14: Compactação do flange. Isofaixas de densidade relativa para várias posições do molde.

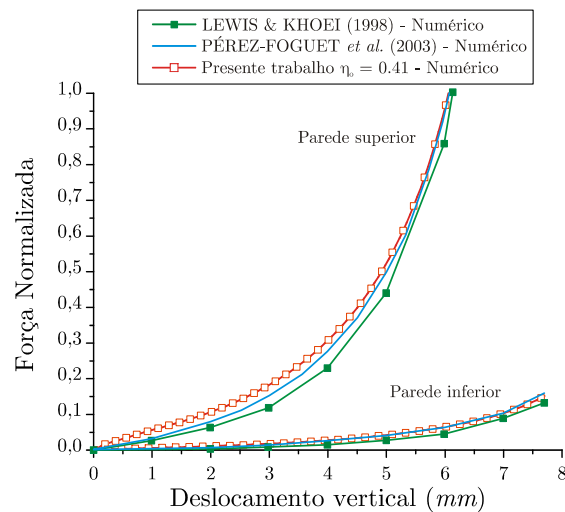


Figura 5.15: Comparativo entre as forças normalizadas entre os vários autores e o presente trabalho.

**Outro caso**

A fim de melhor analisar a resposta deste tipo de material em torno de reentrâncias do molde, é proposto que o problema de compactação do flange seja novamente estudado, porém considerando agora apenas o movimento relativo da parede inferior do molde. A deformada para este caso está mostrada na Fig. 5.16. Repare que existe um descolamento de uma grande região em torno da reentrância do molde.

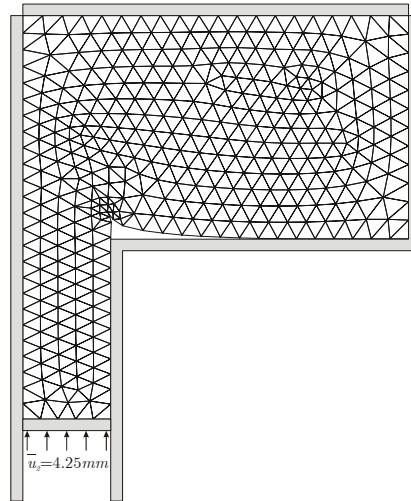


Figura 5.16: Flange deformada para o caso de movimento apenas da parede inferior do molde.

O resultado para isoformas de densidade relativa para este caso está mostrado na Fig. 5.17. Note que, devido ao efeito de canto há um gradiente elevado de densidade relativa. Verifica-se a existência de uma região com alto valor de compactação logo à esquerda do canto e também uma região com aumento de volume logo à sua direita.

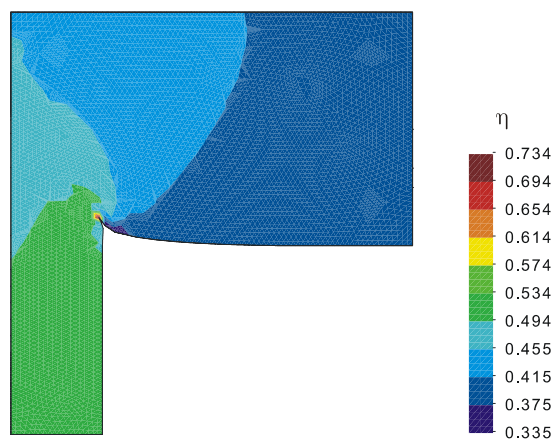


Figura 5.17: Compactação do flange. Isoformas de densidade relativa para o caso de movimento apenas da parede inferior do molde.

### 5.6.3 Compactação de um perfil de uma ferramenta de corte

Neste exemplo final é mostrada a compactação de um componente com um perfil de uma ferramenta de corte. Diferentemente dos outros exemplos, neste caso é suposto que o componente possa ser modelado através da hipótese de estado plano de deformações. O modelo usado neste exemplo está descrito na Fig. 5.18, onde também é mostrada a malha de integração e sua distribuição de partículas EFG correspondente. Na Fig. 5.18(b) também são indicadas as seções onde irá se avaliar a densidade relativa no final do processo de compactação. As posições destas linhas são: 1 – 1' na metade do componente, 2 – 2' a  $x = 2 \text{ mm}$  da parede esquerda, 3 – 3' para um  $x = 15 \text{ mm}$  afastado da parede esquerda e 4 – 4' a  $x = 28 \text{ mm}$  também da parede esquerda. Os parâmetros materiais usados neste exemplo são os mesmos calibrados no primeiro exemplo deste capítulo, a menos do coeficiente de atrito, que neste caso é de  $c_f = 0.08$ . Neste exemplo a densidade relativa inicial é de  $\eta_o = 0.4$  e foram utilizados 399 partículas e 702 elementos de integração. Um exemplo bastante similar a este também foi considerado por LEWIS & KHOEI (1998), porém estes autores restringiram o movimento dos nós em contato com as parede superiores e inferiores do molde.

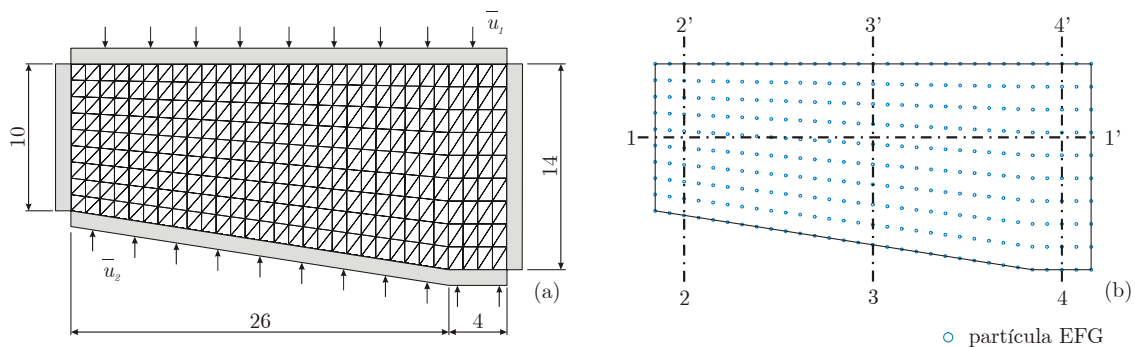


Figura 5.18: Modelo, malha de integração e distribuição de partículas usadas na compactação de um perfil de uma ferramenta de corte.

Neste exemplo será investigada a importância da cinemática da ferramenta no processo de compactação de pós na metalurgia do pó. Para tanto, são realizadas várias análises onde é permitido que a parede superior e inferior se movam, ou que uma delas permaneça fixa. As análises realizadas foram as seguintes:

- Movimento apenas da parede superior de  $u_1 = 6 \text{ mm}$  para baixo;
- Movimento apenas da parede inferior de  $u_2 = 6 \text{ mm}$  para cima;
- Movimento da parede superior de  $u_1 = 3 \text{ mm}$  para baixo seguido do movimento da parede inferior de  $u_2 = 3 \text{ mm}$  para cima;
- Movimento da parede inferior de  $u_2 = 3 \text{ mm}$  para cima seguido do movimento da parede superior de  $u_1 = 3 \text{ mm}$  para baixo;
- Movimento de ambas as paredes simultaneamente, isto é parede superior de  $u_1 = 3 \text{ mm}$  para baixo e parede inferior de  $u_2 = 3 \text{ mm}$  para cima;

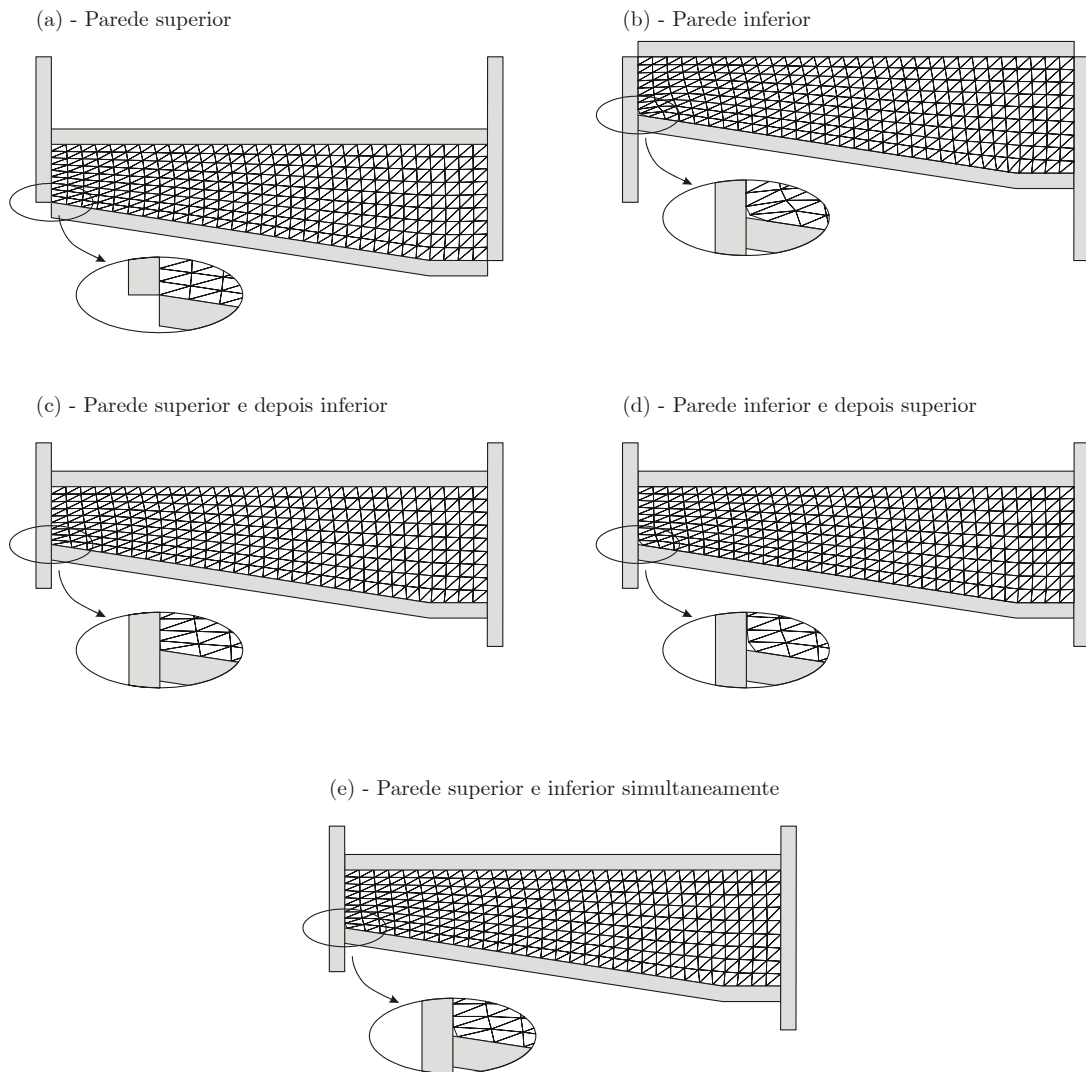


Figura 5.19: Malhas de integração deformadas para as várias configurações de cinemática do molde simuladas.

As deformadas para cada uma das análises acima estão mostradas na Fig. 5.19. Inicialmente, repare que há um pequeno descolamento do material compactado com relação à parede do molde no canto inferior esquerdo, regiões mostradas em detalhe nesta figura e com escala de ampliação de duas vezes em relação à região original, dependendo da cinemática do molde escolhido para a compactação do componente. Como será visto mais adiante, esta região onde há este descolamento sofre um alto processo de compactação, apresentando um gradiente de densidade bastante elevado quando comparado com valores em sua vizinhança.

Na Fig. 5.20 estão mostrados os resultados obtidos para a predição da densidade relativa para cada seção de corte mostrada na Fig. 5.18(b). Repare que pode existir uma variação bastante expressiva da densidade relativa dependendo da cinemática do molde adotada.

Já na Fig. 5.21 é plotado o gráfico da força pelo deslocamento total. Este gráfico é construído com base na força total produzida na parede superior do molde.

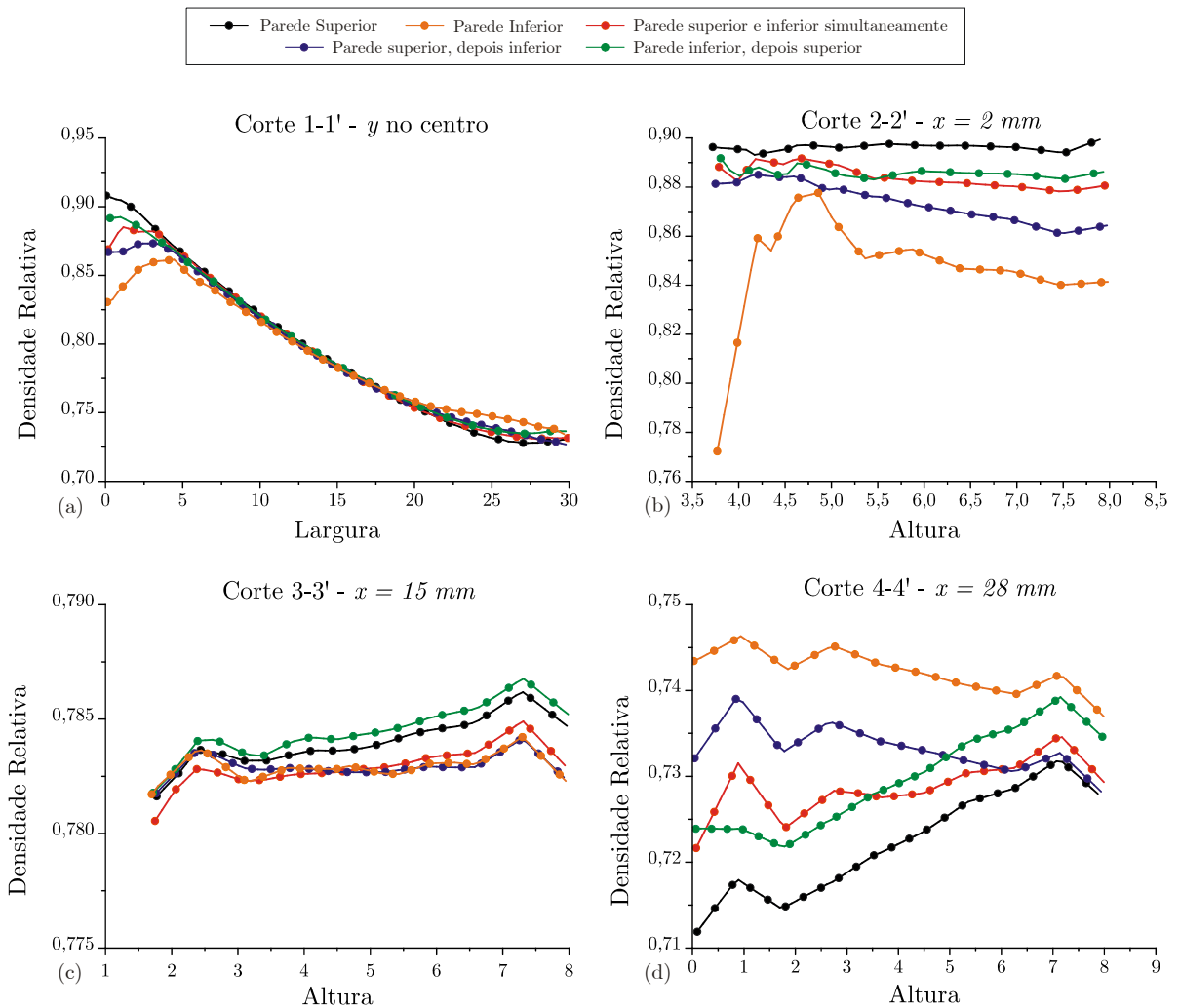


Figura 5.20: Resultados de densidade relativa ao longo de cada linha de corte.

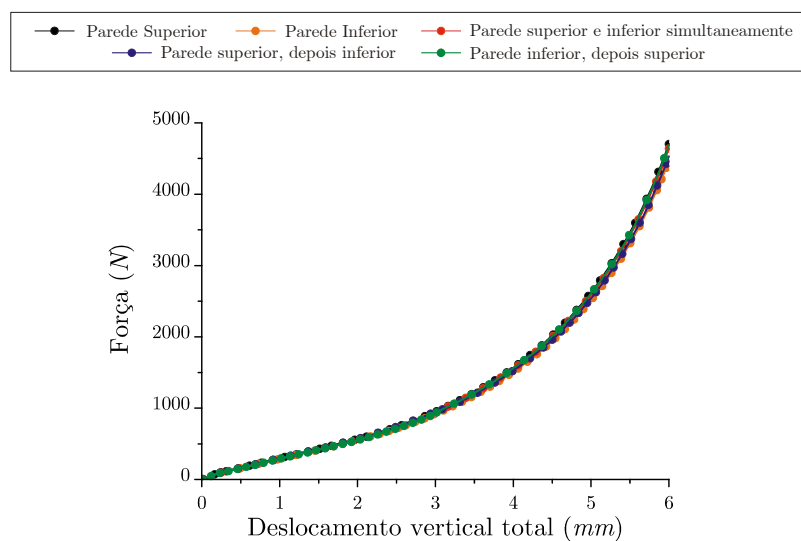


Figura 5.21: Forças desenvolvidas sobre a parede superior do molde para cada cinemática do molde.



Por fim, na Fig. 5.22 são mostradas as saídas em isofaixas para a densidade relativa, para cada caso de cinemática especificado acima.

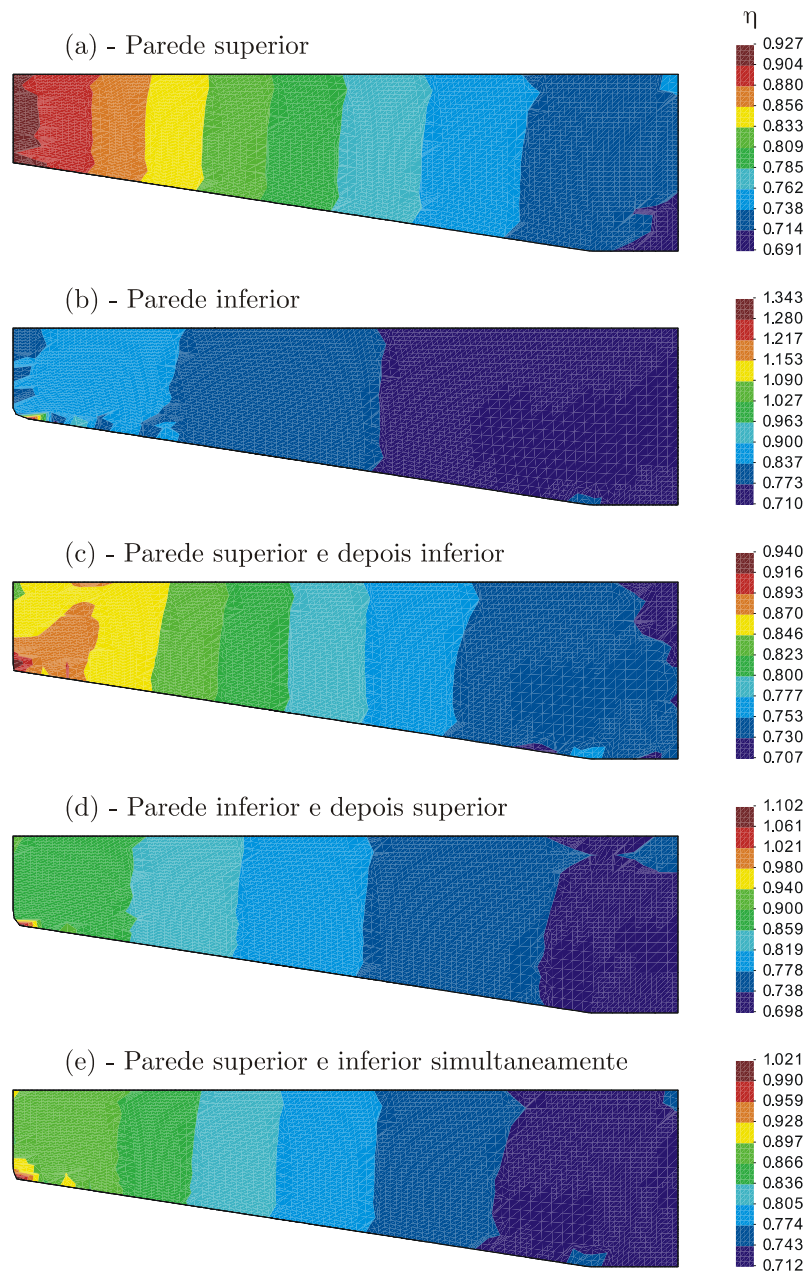


Figura 5.22: Isofaixas de densidade relativa para as diversas cinemáticas do molde.

## 5.7 Conclusões parciais

Neste capítulo foi estudado o processo de compactação de pós metálicos em molde dentro do contexto da Metalurgia do Pó. Um modelo constitutivo do tipo *Cap*, baseado no trabalho de SWAN & SEO (a ser publicado) e SWAN & SEO (2000) foi modificado, implementado, testado, calibrado e comparado pela realização de alguns exemplos que levam em consideração também a

proposta de deformações finitas apresentada no **Capítulo 3** e a proposta de contato unilateral com atrito e de discretização espacial apresentada no **Capítulo 4**. Os parâmetros elásticos do modelo hiperelástico foram tomados como dependentes da variação da densidade relativa e esta dependência implicou em correções nos módulos tangentes.

De maneira geral, a metodologia proposta apresentou-se bastante eficiente, como foi mostrado pelos exemplos apresentados neste capítulo. Foi dada uma ênfase em exemplos já apresentados na literatura para que se pudesse fazer um comparativo entre o modelo proposto neste capítulo e os demais modelos vistos na literatura. Os resultados destas comparações mostraram uma boa concordância entre os resultados, tanto qualitativa como quantitativamente.



# Conclusão

De um modo geral, este trabalho pode ser dividido em duas partes. A primeira trata da apresentação do método de Galerkin livre de elementos modificado e de análise mediante a aplicação em alguns problemas de valor de contorno em engenharia. Este método possui como principal característica a propriedade de gerar funções de forma que possuem a propriedade de delta de kronecker sobre o contorno essencial, propiciando desta forma, a imposição direta das condições de contorno essenciais. A simplicidade de implementação do método e a sua vasta aplicabilidade em problemas da matemática, física e engenharia são as principais vantagens do método proposto. Por outro lado a perda de regularidade na região de transição, próxima do contorno essencial, faz com que erros de integração surjam nesta região o que pode dificultar a sua aplicação em problemas como choque, por exemplo.

Estimadores de erro e refino foram propostos, sob o contexto do método de Galerkin livre de elementos modificado, para a obtenção de malhas de integração e coberturas adequadas para o problema de elasticidade sob pequenas deformações. Dois estimadores de erro foram propostos e implementados com sucesso. A primeira metodologia é baseada na incorporação de termos de erro de resíduo e de contorno, tração prescrita, ao termo de erro quadrático médio proposto por ZIENKIEWICZ & ZHU (1990). Já a segunda estratégia consiste na aplicação da metodologia conhecida como *REP*, onde o equilíbrio é imposto em regiões da malha de integração. Ambas as abordagens produziram bons resultados porém, a abordagem baseada no *REP* leva algumas vantagens quando comparada com a outra. Além de necessitar de um número menor de células de integração para alcançar a meta de erro global estabelecida a priori, a abordagem baseada no *REP* pode ser estendida facilmente para problemas não lineares.

O método de Galerkin livre de elementos modificado foi submetido também a uma análise de grandes deformações, na qual um modelo constitutivo elasto-plástico  $J_2$  foi utilizado. O uso de uma descrição *Lagrangeana Total* juntamente com o uso do par conjugado de tensão rotacionada de *Kirchoff* e da medida de deformação logarítmica e também do mapeamento exponencial produziu algoritmos de fácil e rápida implementação numérica e de boa robustez. Análises numéricas foram feitas considerando a hipótese de estado plano de deformações e também para problemas axissimétricos onde foi evidenciado o fenômeno de travamento volumétrico. Uma estratégia anti-travamento foi proposta, implementada, testada e comparada com estratégias propostas por outros autores, principalmente no contexto do método de elementos finitos, com base em uma gama de exemplos usados na literatura de modo a mostrar a eficiência da metodologia anti-travamento proposta. Entretanto, devido a interpolação linear produzida por uma cobertura exclusivamente dada por funções do tipo EPuFe o efeito de travamento volumétrico permaneceu

presente, embora com um efeito minimizado, em alguns exemplos. Porém, uma estratégia de refino da malha de integração pode reduzir a existência destas regiões fazendo com que este efeito seja bastante pequeno.

A segunda parte do trabalho trata do problema de conformação em molde. Aqui uma discretização EFG mais usual foi utilizada, na qual a imposição das condições de contorno essenciais é dada pelo método do Lagrangeano Aumentado. O molde é assumido como sendo rígido, hipótese de *Signorini*, e formado apenas por segmentos de retas. Uma formulação de contato com atrito foi implementada onde o contato normal é também imposto pelo método do Lagrangeano Aumentado e o termo de atrito é imposto pelo método da penalidade. Exemplos foram realizados simulando alguns casos mais clássicos e também uma simulação de um forjamento a frio de um componente mais complicado onde também é analisado o efeito de travamento volumétrico sobre a cinemática da deformação dos componentes. O algoritmo apresentado mostrou-se bastante robusto para uma região bastante ampla do efeito de atrito.

Por fim, foi simulado o processo de compactação de pós metálicos em molde, dentro do enfoque da *Metalurgia do Pó*. Um modelo constitutivo do tipo *Cap*, baseado no trabalho de SWAN & SEO (a ser publicado) e SWAN & SEO (2000) foi modificado, implementado, testado, calibrado e comparado com propostas apresentadas por outros autores. De maneira geral, a metodologia proposta apresentou-se bastante eficiente, como foi mostrado pelos exemplos apresentados. Foi dada uma ênfase em exemplos já apresentados na literatura para que se pudesse fazer um comparativo entre o modelo proposto e os demais modelos vistos na literatura. Os resultados destas comparações mostraram uma boa concordância entre os resultados, tanto qualitativa quanto quantitativamente.

## Sugestões para trabalhos futuros

- Aplicação de metodologias adaptativas, estimadores de erro e refino, para problemas não lineares com grandes deformações;
- Implementação de uma metodologia de controle de carregamento, load displacement control;
- Uso de uma base intrínseca que propicie uma ordem mais alta de aproximação;
- Descrição do molde através de splines e inclusão dos termos de curvatura no problema de contato.

# Bibliografia

- [1] AINSWORTH, M., ODEN, J.T., A posteriori error estimation in finite element analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 142, p. 1-88, 1997.
- [2] AKKARAM, S., A continuum sensitivity analysis of large deformations with applications to metal forming process design, Tese, Faculty of Graduate School of Cornell University, Cornell University, USA, 2001.
- [3] ALVES, M.K., ROSSI, R., A modified element-free Galerkin method with essential boundary conditions, enforced by an extended partition of unity finite element weight function, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 57, p. 1523-1552, 2003.
- [4] ALVES, M.K., ROSSI, R., An extension of the partition of unity finite element method, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, v. 3, p. 209-216, 2005.
- [5] ASKES, H., DE BORST, R., HEERES, O., Conditions for locking-free elasto-plastic analyses in the Element-Free Galerkin method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*; v. 173, p. 99-109, 1999.
- [6] BADRINARAYANAN S., ZABARAS, N., A sensitivity analysis for the optimal design of metal-forming processes, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 129, p. 319-348, 1996.
- [7] BATHE, K. J., *Finite Elements Procedures in Engineering Analysis*, New Jersey, Prentice-Hall, p. xiii + 735, 1982.
- [8] BEISSEL, S., BELYTSCHKO, T., Nodal integration of the element-free Galerkin method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 139, p. 49-74, 1996.
- [9] BELYTSCHKO, T., KRONGAUZ, Y., ORGAN, D., FLEMING, M., KRYSL, P., Meshless methods: An overview and recent developments, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 139, p. 3-47, 1996.
- [10] BELYTSCHKO, T., FLEMING, M., Smoothing, enrichment and contact in the element-free Galerkin method, v. 71, p. 173-195, 1999.
- [11] BELYTSCHKO, T., LIU, W.K., MORAN, B., *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*, John Wiley & Sons, England, p. xvi+650, 2000.

- [12] BELYTSCHKO, T., LIU, W.K., SINGER, M., On Adaptivity and Error Criteria for Meshfree methods, *New Advances in Adaptive Computational Methods in Mechanics*, edited by P. Ladeveze and J.T. Oden, 1998.
- [13] BELYTSCHKO, T., LU, Y.Y., GU, L., Element free Galerkin methods, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 37, p. 229-256, 1994.
- [14] BELYTSCHKO, T., ORGAN, D., KRONGAUZ, Y., A coupled finite element-element-free Galerkin method, *Computational Mechanics*, v. 17, p. 186-195, 1995.
- [15] BELYTSCHKO, T., TABBARA, M., Dynamic fracture using element-free Galerkin methods, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 39, p. 923-938, 1996.
- [16] BENALLAL, A., BILLARDON, R., DOGHRI, I., An integration algorithm and the corresponding consistent tangent operator for fully coupled elastoplastic and damage equations, *Communications in Applied Numerical Methods*, v. 4, p.731-740, 1988.
- [17] BENALLAL, A., COMI, C., LEMAITRE, J., Critical Damage States at Crack Initiation, *Damage Mechanics Localization - ASME*, AMD-v. 142/MD-v.34, p. 13-23, 1992.
- [18] BONET, J., WOOD, R.D., *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*, Cambridge University Press, USA, p. xvii + 248, 1997.
- [19] BUGEDA, G., Estimación y corrección del error en el análisis estructural por MEF, *CIMNE Monograph n° 9*, CIMNE, Barcelona, Spain, 1991.
- [20] CANTE, J.C., OLIVER, J., OLLER, S., Simulación numérica de procesos de compactación de pulvimateriales. Parte 2: Validación y aplicaciones industriales, *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, v. 14, p. 101-116, 1998.
- [21] CHEN J-S., YOON S., WANG, H-P., LIU, W.K., An improved reproducing kernel particle method for nearly incompressible finite elasticity, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 181, p. 117-187, 2000.
- [22] CHTOUROU, H., GUILLOT, M., GAKWAYA, A., Modeling of the metal powder compactation process using cap model. Part I. Experimental material characterization and validation, *International Journal of Solid and Structures*, v. 39, p. 1059-1075, 2002a.
- [23] CHTOUROU, H., GUILLOT, M., GAKWAYA, A., Modeling of the metal powder compactation process using cap model. Part II. Numerical implementation and practical applications, *International Journal of Solid and Structures*, v. 39, p. 1077-1096, 2002b.
- [24] CHUNG, H.J., BELYTSCHKO, T., An error estimate in the EFG method, *Computational Mechanics*, v. 21, p. 91-100, 1998.
- [25] COCKS, A.C.F., Constitutive modeling of powder compactation and sintering, *Progress in Materials Science*, v. 46, p. 201-229, 2001.

- [26] COUBE, O., RIEDEL, H., Numerical simulation of metal powder die compaction with special consideration of cracking, *Powder Metallurgy*, v. 43, p. 123-131, 2000.
- [27] CRIESFIELD, M.A., *Non-linear finite element analysis of solid and structures*, v. 2, England, Wiley, p. xiv + 494, 1997.
- [28] DESAI, C.S., A general basis for yield failure and potential functions in plasticity, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, v. 4, p. 361-375, 1980.
- [29] DESAI, C. S., *Constitutive laws for engineering materials with emphasis on geologic materials*, New Jersey, Prentice-Hall, p. 468, 1984.
- [30] DESAI, C.S., HASHMI, Q.S.E., Analysis, evaluation and implementation of a nonassociative model for geologic materials, *International Journal of Plasticity*, v. 5, p. 397-420, 1989.
- [31] DE DEUS, H.P., Um procedimento para a otimização de forma aplicado a escoamento de fluidos, *Dissertação de Mestrado*, Universidade Federal de Santa Catarina, 2002.
- [32] DIMAGGIO, F.L., SANDLER, L.S., Material models for granular soils, *Journal of Engineering Mechanics*, v. 97, p. 935-950, 1971.
- [33] DOLBOW, J., BELYTSCHKO, T., Volumetric locking in the element free Galerkin method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 46, p. 925-942, 1999.
- [34] DORAIVELU, A.M., GEGEL, H.L., GUNASEKERA, J.S., MALAS, J.C., MORGAN, J.T., A new yield function for compressible P/M materials, *International Journal of Mechanical Sciences*, v. 9/10, p. 527-535, 1984.
- [35] DUARTE, A.C., ODEN, J.T., An h-p adaptive method using clouds, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 139, p. 237-262, 1996.
- [36] DRUCKER, D.C., GIBSON, R.E., HENKEL, D.J., Soil mechanics and work-hardening theories of plasticity, *Proceedings, ASCE*, v. 81, p. 1-14, 1955.
- [37] ETEROVIC A. L., BATHE K. J., A hyperelastic-based large strain elasto-plastic constitutive formulation with combined isotropic-kinematic hardening using the logarithmic stress and strain measures, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 30, p. 1099-1114, 1990.
- [38] GABRIEL G., BATHE K. J., Some computational issues in large strain elasto-plastic analysis, *Computers & Structures*, v. 56, p. 249-267, 1995.
- [39] GANGHOFFER, J.F., BRILLARD, A., SCHULTZ, J., A model of damaged adhesives, *European Journal of Mechanics – A/Solids*, v. 16, p. 19-52, 1997.

- [40] GAVETE, L., BENITO, J.J., FALCÓN, S., RUIZ, A., Penalty functions in constrained variational principles for element free Galerkin method, *European Journal of Mechanics - A/Solids*, v. 19, p. 699-720, 2000.
- [41] GAVETE, L., CUESTA, J.L., RUIZ, A., A procedure of approximation of the error in the EFG method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 53, p. 677-690, 2002.
- [42] GETHIN, D.T., LEWIS, R.W., Finite element modelling of powder compaction and its experimental validation, *Powder Metallurgy 94*, World Congress, Paris, p. 689-692, 1994.
- [43] GETHIN, D.T., LEWIS, R.W., ARIFFIN, A.K., Modelling compaction and ejection processes in the generation of green powder compacts, *ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, San Francisco, ADM-216, pp, 27-45, 1995.
- [44] GU, C., KIM, M., ANAND, L., Constitutive equations for metal powders: application to powder forming processes, *International Journal of Plasticity*, v. 17, p.147-209, 2001.
- [45] GU, Y.T., LIU, G.R., A coupled element free Galerkin/boundary element method for stress analysis of two-dimension solid, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, p. 4405-4419, 2001.
- [46] GÜNTHER, F.C., LIU, W.K., Implementation of boundary conditions for meshless methods, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 163, p. 205-230, 1998.
- [47] GURSON, A.L., Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I - Yield criteria and flow rules for porous ductile media, *Journal of Engineering Materials and Technology*, v. 99, p. 2-15, 1977.
- [48] GURTIN, M. E., *An Introduction to Continuum Mechanics*, New York, Academic Press, p. 264, 1981.
- [49] HÄGGBLAD, H-Å., Constitutive models for powder materials, *Powder Technology*, v. 67, p. 127-136, 1991.
- [50] HILL, R., Aspects of invariance in solid mechanics, *Advances in Applied Mechanics*, v. 18, p. 1-75, 1978.
- [51] HOFSTETTER, G., SIMO, J.C., TAYLOR, R.L., A modified cap model: closest point solution algorithms, *International Journal of Computer & Structures*, v. 46, p. 203-214, 1993.
- [52] HUERTA, A., MÉNDEZ, S.F., Enrichment and coupling of the finite element and meshless methods, *International Journal for Numerical Methods In Engineering*, v. 48, p. 1615-1636, 2000.

- [53] HUERTA, A., MÉNDEZ, S.F., Locking in the incompressible limit for the element-free Galerkin method, *International Journal for Numerical Methods In Engineering*, v. 51, p. 1361-1383, 2001.
- [54] HUERTA, A., FERNÁNDEZ-MÉNDEZ, S., DÍEZ, P., Enrichment of the finite element interpolation with mesh-free methods, *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, v. 36, p. 1027-1042, 2002.
- [55] HUGHES, T. J. R., Generalization of selective integration procedures to anisotropic and nonlinear media, *International Journal for Numerical Methods In Engineering*, v. 15, p. 1413-1418, 1980.
- [56] JÄGERING, S., DE BOER, R., BREUER, S., Elastoplastic compactation of metallic powders, *International Journal of Mechanical Sciences*, v. 43, p. 1563-1578, 2001.
- [57] JINKA, A.G.K., BELLET, M., FOURMENT, L., A new three-dimensional finite element model for the simulation of powder forging processes: Application to hot forming of P/M connecting rod, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 40, p. 3955-3978, 1997.
- [58] KALJEVIĆ, I., SAIGAL, S., An improved element free Galerkin formulation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 40, p. 2953-2974, 1997.
- [59] KHOEI, A.R., Finite element modeling and adaptive remeshing in static and dynamic analysis of metal powder forming processes, PhD dissertation, Department of Civil Engineering, University of Wales Swansea, 1998.
- [60] KHOEI, A.R., Numerical simulation of powder compaction processes using an inelastic finite element analysis, *Materials and Design*, v. 23, p. 523-529, 2002.
- [61] KUHN, H. A., DOWNEY, C.L., Deformations characteristics and plasticity theory for sintered powders materials, *International Journal of Powder Metallurgy*, v. 7, p. 15-30, 1971.
- [62] KUHN, H. A., FERGUNSON, B.L., Powder forging, Metal Powder Industries Federation, USA, 1990.
- [63] KRAJČINOVIC, D., LEMAITRE, J., Continuum Damage Mechanics - Theory and Applications, Courses and Lectures, New York, Springer - Verlag, No. 295, p. 294, 1971.
- [64] KRONGAUZ, Y., BELYTSCHKO, T., Enforcement of essential boundary conditions in meshless approximations using finite elements, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 131, p. 133-145, 1996.
- [65] LANCASTER, P., SALKAUSKAS, K., Surfaces generated by moving least squares methods, *Mathematical of Computational*; v. 37, p. 141-158, 1981.
- [66] LAURSEN, T.A., Computational contact and impact mechanics, Springer, 2002.



- [67] LEMAITRE, J., A continuous damage mechanics model for ductile fracture, Art. Trans. ASME, Journal of Engineering Materials and Technology, v. 107, 1985.
- [68] LEMAITRE, J., Micro-mechanics of crack initiation, International Journal of Fracture, v. 42, p.87-99, 1990.
- [69] LEMAITRE, J., A Course on Damage Mechanics, Germany, Springer-Verlag, p. 209, 1992.
- [70] LEMAITRE, J., CHABOCHE, J. L., Mechanics of Solid Materials, First paperback edition, Cambridge University Press, p. xxv + 556, 1994.
- [71] LEWIS, R.W., TRAN, D.V., Finite element approach to problems in particulate media with special reference to powder metal forming, Bulletin Technical, University of Istanbul, v. 47, p. 295-310, 1994.
- [72] LEWIS, R.W., KHOEI, A.R., Numerical modeling of large deformation in metal powder forming, Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 159, p. 291-328, 1998.
- [73] LEWIS, R.W., KHOEI, A.R., A plasticity model for metal powder forming processes, International Journal of Plasticity, v. 17, p. 1659-1692, 2001.
- [74] LI, S., LIU, W.K., Meshfree and particle methods and their applications, Applied Mechanics Review, v. 55, p. 1-34, 2002.
- [75] LIU, G.R., TU, Z.H., An adaptive procedure based on background cells for meshless methods, Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 191, p. 1923-1943, 2002.
- [76] LIU, W-K., LI, S., BELYTSCHKO, T., Moving least-square reproducing kernel methods (I) Methodology and convergence, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 147, p. 113-154, 1997.
- [77] LU, Y.Y., BELYTSCHKO, T., GU, L., A new implementation of the element free Galerkin method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 113, p. 455-471, 1994.
- [78] NAYROLES, B., TOUZOT, G., VILLON, P., Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements, Computational Mechanics, v. 10, p. 307-318, 1992.
- [79] MATEGAAL J.C., PARKS, D.M., RICE, J.R., On the numerically accurate finite element solutions in the fully plastic range, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 4, p. 153-178, 1974.
- [80] MALVERN, L. E., Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium, Prentice Hall, p. xiv + 713, 1969.

- [81] MELENK, J.M., BABUŠKA, I., The partition of unity finite element method: basic theory and applications, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 39, p. 289-314, 1996.
- [82] MUKHERJEE, Y.X., MUKHERJEE, S., On boundary conditions in the element-free Galerkin method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 19, p. 229-256, 1997.
- [83] NEEDLEMAN, A., Material rate dependent and mesh sensitivity in localization problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 67, p. 68-85, 1988.
- [84] OLIVER, J., OLLER, S., CANTE, J.C., A plasticity model for simulation of industrial powder compaction processes, *International Journal of Solids and Structures*, v. 33, p. 3161-3178, 1996.
- [85] ORTIZ, M., RADOVITZKY, R.A., REPETO, E.A., The computation of exponential and logarithmic mappings and their first and second linearizations, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 52, p. 1431-1441, 2001.
- [86] ODEN, J.T., PIRES, B., Algorithms and numerical results for finite element approximations of contact problems with non-classical friction laws, *Computers & Structures*, v. 19, p. 137-147, 1984.
- [87] PANNACHET, T., ASKES, H., Some observations on the enforcement of constraint equations in the EFG method, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, v. 16, p. 819-930, 2000.
- [88] PARK, S-J., HAN, H.N., OH, H.K., LEE, N.D., Model for compactation of metal powders, *International Journal of Mechanical Sciences*, v. 41, p. 121-141, 1999.
- [89] PARK, J-O., KIM, K-J., KANG D-Y., LEE Y-S., KIM Y-H., An experimental study on the optimization of powder process parameters for aluminum-alloy piston, *Journal of Materials Processing Technology*, v. 113, p. 486-492, 2001.
- [90] PÉREZ-FOGUET, A., RODRÍGUEZ-FERRAN, A., HUERTA, A., Efficient and accurate approach for powder compaction problems, *Computational Mechanics*, v. 30, p. 220-234, 2003.
- [91] PERIC, D., On consistent stress rates in solids mechanics: Computational implications, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 33, p. 799-817, 1992.
- [92] PERIC D., OWEN D. R. J., Honnor M. E., A model for finite strain elasto-plasticity based on logarithmic strains: Computational issues, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.94, p. 35-61, 1992.
- [93] PERIC D., OWEN D. R. J., Finite-element applications to the nonlinear mechanics of solids, *Reports on Progress in Physics*, v. 61, p. 1495-1574, 1998.

- [94] PRESS W.H., FLANNERY B.P., TEUKOLSKY S.A., VETTERLING W.T., Numerical Recipes in Fortran 77: The art of scientific computing, Cambridge University Press, 1992.
- [95] RANSING, R.S., GETHIN, D.T., KHOEI, A.R., MOBASH, P., LEWIS, R.W., Powder compactation modelling via the discrete and finite element method, Materials and Design, v. 21, p. 263-269, 2000.
- [96] ROBOTNOV, Y.N., Creep rupture, International Congress Applied Mechanics, Springer, Berlin, 1969.
- [97] ROSCOE, K.H., BURLAND, J.B., On the generalized stress-strain behavior of wet clay, Engineering Plasticity, p. 535-609, 1968.
- [98] ROSSI, R., ALVES, M.K., An EFG method used to solve elastoplastic models by direct imposition of essential boundary conditions, Third Joint Conference of Italian Group of Computational Mechanics and Ibero-Latin American Association of Computational Methods in Engineering, Giulianova, Italy, 2002.
- [99] ROSSI, R., ALVES, M.K., A new methodology to apply essential boundary conditions in mesh-free methods, 17<sup>o</sup> Cobem, São Paulo, 2003.
- [100] ROSSI, R., ALVES, M.K., A modified EFG method with adaptive refinement, Proceedings of ADMOS 2003, Gotenborb, Suécia, 2003a.
- [101] ROSSI, R., ALVES, M.K., A coupled damage porosity theory for analysis of low cycle fatigue in porous materials, Recent developments in the modeling of rupture in solids, Proceedings of the international symposium, Edited by A. Benallal and S.P.B. Proença, Fóz do Iguaçu, Brazil, 2003b.
- [102] ROSSI, R., ALVES, M.K., Recovery based error estimation and adaptivity applied to a modified element-free Galerkin method, Computational Mechanics, v. 33, p 194-204, 2004.
- [103] ROSSI, R., ALVES, M.K., An h-adaptive modified element-free Galerkin method, European Journal of Mechanics - A/Solids, aceito para publicação, 2005.
- [104] SANDLER, I.S., DIMAGGIO, F.L., BALADI, G.Y., Generalized Cap model for geological materials, Journal of Geotechnical and Engineering, ASCE, v. 102, p. 683-697, 1976.
- [105] SCHOFIELD, A., WROTH, C.P., Critical state soil mechanics. McGraw-Hill, London, 1968.
- [106] SIMO, J.C., Algorithms for static and dynamic multiplicative plasticity that preserve the classical return mapping schemes of infinitesimal theory, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 99, p. 61-112, 1992.
- [107] SIMO, J. C., ARMERO, F., Geometrically non-linear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 33, p. 1413-1449, 1992.

- [108] SIMO, J.C., HUGHES, T.J.R., Computational Inelasticity, Interdisciplinary Applied Mathematics, v. 7 Springer, New York, p. 392, 1998.
- [109] SIMO, J.C., JU, J.W., Strain- and stress-based continuous damage model - Part I and II, International Journal Solids Structures, v. 23, p. 821-869, 1987.
- [110] SIMO, J.C., LAURSEN, T.A., An augmented Lagrangian treatment of contact problems involving friction, Computers and Structures, v. 42, p. 97-116, 1992.
- [111] SIMO, J.C., RIFAI, S., A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 29, p. 1595-1638, 1990.
- [112] SIMO, J.C., TAYLOR, R.L., A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 31, p. 649-670, 1986.
- [113] SOUZA NETO, E.A., PERIC, D., DUTKO, M., OWEN, D.R.J., Design of simple low order finite elements for large strain analysis of nearly incompressible solids, International Journal of Solids and Structures, v. 33, p. 3277-3296, 1996.
- [114] SOUZA NETO, E.A., PERIC, D., OWEN, D.R.J., Continuum modeling and numerical simulation of material damage at finite strains, Archives of Computational Methods in Engineering, v. 5, p. 311-384, 1998.
- [115] SOUZA NETO, E.A., PERIC, D., OWEN, D.R.J., Computational Plasticity: Small and Large Strain Finite Element Analysis of Elastic and Inelastic Solids, Classroom Notes, University College of Swansea, Wales, 2002.
- [116] SRIKANTH, A., ZABARAS, N., An updated Lagrangian finite element sensitivity analysis of large deformations using quadrilateral elements, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 52, p. 1131-1163, 2001.
- [117] ZABARAS, N., GANAPATHYSUBRAMANIAN, S., LI, Q., A continuum sensitivity method for the design of multi-stage metal forming processes, International Journal of Mechanical Sciences, v. 45, p. 325-358, 2003.
- [118] STROUBOULIS, T., BABUSKA, I., COPPS, K., The design and analysis of the generalized Finite element method, Computer Methods Applied Mechanical Engineering, v. 81, p. 43-69, 2000.
- [119] SWAN, C.C., SEO, Y.K., A smooth three-surface elasto-plastic cap model: rate formulation, integration algorithm and consistent tangent operator, página pessoal [www.css.engineering.uiowa.edu/~swan/geomech/geomech\\_papers/capmod](http://www.css.engineering.uiowa.edu/~swan/geomech/geomech_papers/capmod), a ser publicado.
- [120] SWAN, C.C., SEO, Y.K., A smooth cap plasticity model for soils: Integration algorithm, parameter estimation and applications. Tech. Rep. No. 2000-043, Ctr. for Comp. Aided Des., University of Iowa, Iowa, 2000.

- [121] SZABÓ, B., BABUSKA, I., Finite Element Analysis, New York, John Wiley & Sons, p. 368, 1991.
- [122] Taylor, R.L., Zienkiewicz O.C., Oñate E., A hierarchical finite element method based on the partition of unity, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v.152, p.73–84, 1998.
- [123] TIMOSHENKO, S.P., GOODIER, J.N., Theory of Elasticity, 3<sup>a</sup> ed., McGraw-Hill, New York, 1970.
- [124] TVERGAARD, V., Influence of voids on shear band instabilities under plane strain conditions, International Journal of Fracture, v. 17, p. 389–407, 1981.
- [125] TVERGAARD, V., NEEDLEMAN, A., Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar, Acta Metallurgica, v. 32, p. 157–169, 1984.
- [126] TRASSORAS K.J., TONY, M., FERGUSON, B.L., Modelling of powder compaction using the e finite element method, Proceedings of Powder Metallurgy Conference Exhibition VI, p. 85-104, 1989.
- [127] VENTURA, G., An augmented Lagrangian approach to essential boundary conditions in meshless methods, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 53, 825-842, 2002.
- [128] WEBER, G., ANAND, L., Finite deformation constitutive equations and a time integration procedure for isotropic, hyperelastic-viscoplastic solids, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 79, p. 173-202, 1990.
- [129] WELLS, G.N., SLUYS, L.J., DE BORST, R., A p-adaptive scheme for overcoming volumetric locking during plastic flow, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 191, p. 3153-3164, 2002.
- [130] WIBERG, N.E., ABDULWAHAB, F., Error estimation with postprocessed finite element solutions, Computers and Structures, v. 64, p. 113-137, 1997.
- [131] WRIGGERS, P., Computational contact mechanics, John Wiley & Sons, 2002.
- [132] WRIGGERS, P., Finite element methods for contact problems with friction, Tribology International, v. 29, p. 651-658, 1996.
- [133] WRIGGERS, P., VU, V.T., STEIN, E., Finite element formulation of large formulation impact-contact problems with friction, Computers & Structures, v. 37, p. 319-331, 1990.
- [134] ZHANG, X., LIU, X., SONG, K.Z., LU, M.W., Imposition of essential boundary conditions by displacement constraint equations in meshless methods, Communications in Numerical Methods in Engineering, v. 17, p. 165-178, 2001.

- [135] ZHDANOVICH, G.M., Theory of compaction of metal powder, translated from Teorize Pressovaniya Metzllichaskikli Poroshkov, 1969, p. 1-262, by the Foreign Technology Division, Wright-Patterson Air Force Base, OH, 1971.
- [136] ZHU, T., ATLURI, N., Modified collocation method and a penalty function for enforcing the essential boundary conditions in the element free Galerkin method, Computational Mechanics, v. 21, p. 211-222, 1998.
- [137] ZIENKIEWICZ, O.C., The Finite Element Method, 4rd edition, v. 1, New York, McGraw-Hill, p. xx + 648,1977.
- [138] ZIENKIEWICZ, O.C., BORROMAND, B., ZHU, J.Z., Recovery procedures in error estimation and adaptivity Part I: Adaptivity in linear problems, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 176, p. 111-125, 1999.
- [139] ZIENKIEWICZ, O.C., ZHU, J.Z., The three R's of engineering analysis and error estimation and adaptivity, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 82, p. 95-113, 1990.
- [140] ZIENKIEWICZ, O.C., ZHU, J.Z., Adaptivity and mesh generation, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 32, p. 783-810, 1991.

# Apêndice A

## Efeito do gradiente de dano na teoria de Lemaitre

### A.1 Introdução

O dano, na mesoescala, pode ser interpretado como o crescimento e a coalescência de microtrincas ou microvazios. A interpretação física da variável de dano isotrópico, em um elemento de volume representativo, é dado pelo quociente entre a área destas microtrincas e a área total da seção deste elemento de volume representativo. A variável de dano,  $D$ , é introduzida dentro das equações clássicas da mecânica do contínuo através do conceito de tensão efetiva, ROBOTNOV (1969), dado por

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - D} \quad (\text{A.1})$$

e pelo conceito de deformação equivalente definido por KRAJGINOVIC & LEMAITRE (1971).

### A.2 Equações constitutivas e leis de evolução

As equações constitutivas e as leis de evolução do problema são determinadas com base em dois potenciais, que são o potencial de energia livre de Helmholtz,  $\psi$ , e no pseudo-potencial de dissipação,  $\mathcal{D}$ .

Aqui, é postulado a existência de ambos os potenciais. Assume-se ainda que o potencial de energia livre de Helmholtz seja dependente de um conjunto de variáveis de estado, i.e.,

$$\psi = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\alpha}, r, D, \vec{\nabla}D) \quad (\text{A.2})$$

na qual,  $\boldsymbol{\alpha}$  é o tensor chamado back strain,  $r$  é a deformação relativa ao endurecimento isotrópico e  $\vec{\nabla}D$  é o gradiente do dano. Ainda, é assumida a condição de deformações infinitesimais onde a decomposição aditiva do campo de deformações em uma parte elástica e outra plástica é convenientemente utilizada, i.e.,  $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$ . Agora, da inequação de Clausius-Duhem e do

método do estado local é possível derivar as seguintes equações de estado

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e}, \quad \boldsymbol{\chi}^D = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\alpha}}, \quad R = \rho \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad Y = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial D} \quad e \quad \vec{\Xi} = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \vec{\nabla} D} \quad (\text{A.3})$$

na qual  $\boldsymbol{\chi}^D$  é o tensor endurecimento cinemático, também conhecido como *back stress*,  $R$  é o endurecimento isotrópico,  $Y$  taxa de desidade de energia de deformação liberada e  $\vec{\Xi}$  é a variável dual associada com  $\vec{\nabla} D$ . É considerado o potencial de energia livre proposto por LEMAITRE (1992) no qual é adicionado o termo relativo ao gradiente de dano, termo de estabilização. Este potencial é dado por

$$\rho \psi = \frac{1}{2} \mathbb{D} \boldsymbol{\varepsilon}^e \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^e (1 - D) + R_\infty \left( r + \frac{1}{b} e^{-br} \right) + \frac{\chi_\infty \gamma}{3} \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha} + k_D \left( \frac{D^2}{2} - DD_c \right) \vec{\nabla} D \cdot \vec{\nabla} D \quad (\text{A.4})$$

na qual  $R_\infty$ ,  $b$ ,  $\chi_\infty$ ,  $\gamma$  e  $k_D$  são parâmetros materiais e  $D_c$  é o dano crítico. Agora de Eq.(A.3) em Eq.(A.4) é possível determinar as seguintes equações de estado

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{D} \boldsymbol{\varepsilon}^e (1 - D) \quad (\text{A.5})$$

para a relação entre tensão e deformação,

$$\boldsymbol{\chi}^D = \frac{2}{3} \chi_\infty \gamma \boldsymbol{\alpha} \quad (\text{A.6})$$

para o endurecimento cinemático,

$$R = R_\infty \left( 1 - e^{-br} \right) \quad (\text{A.7})$$

para o endurecimento isotrópico,

$$Y = \frac{1}{2} \mathbb{D} \boldsymbol{\varepsilon}^e \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^e (1 - D) + k_D (D_c - D) \quad (\text{A.8})$$

para a taxa de desidade de energia de deformação liberada e

$$\vec{\Xi} = 2k_D \left( DD_c - \frac{D^2}{2} \right) \quad (\text{A.9})$$

para a variável dual associada com  $\vec{\nabla} D$ .

Já as equações de evolução são derivadas de um potencial de dissipação tal que

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\chi}^D, R, Y; \boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\alpha}, r, D). \quad (\text{A.10})$$

Tais equações de evolução complementares são determinadas considerando a hipótese de dissipação normal sobre a Eq.(A.10), isto é, as equações de evolução são dadas por

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \dot{\boldsymbol{\alpha}} = -\dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \boldsymbol{\chi}^D}, \quad \dot{r} = -\dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial R} \quad e \quad \dot{D} = \dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial Y}. \quad (\text{A.11})$$



Note que, é assumido também que o gradiente do dano está associado com a parte reversível do processo e portando não produz dissipação.

### A.3 Função de escoamento $\mathcal{F}$

Será definida agora a função de escoamento  $\mathcal{F}$  utilizada neste modelo. É considerada a seguinte função de escoamento

$$\mathcal{F} = (\tilde{\sigma}^D - \chi^D)_{eq} - R - \sigma_y = 0 \quad (\text{A.12})$$

onde

$$(\tilde{\sigma}^D - \chi^D)_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}} (\tilde{\sigma}^D - \chi^D) \cdot (\tilde{\sigma}^D - \chi^D) \quad (\text{A.13})$$

e  $\sigma_y$  denota a tensão de escoamento inicial.

Uma vez definida a função de escoamento é possível definir a forma explícita do pseudo-potencial de dissipação  $\mathcal{D}$ . Ela é dada por

$$\mathcal{D} = (\tilde{\sigma}^D - \chi^D)_{eq} - R - \sigma_y + \frac{3}{4\chi^D \cdot \chi^D} + \frac{Y}{2S(1-D)} H(p - p_D) \quad (\text{A.14})$$

onde  $S$  é um parâmetro material e  $H$  é a função de Heaviside. A taxa de deformação plástica acumulada é definida como

$$\dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}^p \cdot \dot{\epsilon}^p}. \quad (\text{A.15})$$

Agora, com base nas equações Eq.(A.11) e Eq.(A.14) é possível escrever as leis de evolução como

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{3}{2} \dot{\lambda} \frac{(\tilde{\sigma}^D - \chi^D)}{(\tilde{\sigma}^D - \chi^D)_{eq}} \quad (\text{A.16})$$

para a evolução da deformação plástica,

$$\dot{r} = \dot{\lambda} \quad (\text{A.17})$$

para a evolução da deformação associada ao endurecimento isotrópico,

$$\dot{\alpha} = \frac{3}{2} \dot{\lambda} \left[ \frac{(\tilde{\sigma}^D - \chi^D)}{(\tilde{\sigma}^D - \chi^D)_{eq}} - \frac{\chi^D}{\chi_\infty} \right] \quad (\text{A.18})$$

para a evolução do *back strain* e

$$\dot{D} = \frac{Y\dot{p}}{S} H(p - p_D). \quad (\text{A.19})$$

Entretando é mais conveniente expressar as Eq.(A.17) e Eq.(A.18) em termos de  $\dot{R}$  e  $\dot{\chi}^D$ . Para isso, basta substituir as equações Eq.(A.17) e Eq.(A.18) na forma de taxa das equações Eq.(A.6) e Eq.(A.7) para encontrar

$$R = \dot{\lambda} b (R_\infty - R) \quad (\text{A.20})$$

para a evolução do endurecimento isotrópico e

$$\dot{\chi}^D = \dot{\lambda} \chi_\infty \gamma \left[ \frac{(\bar{\sigma}^D - \chi^D)}{(\bar{\sigma}^D - \chi^D)_{eq}} - \frac{\chi^D}{\chi_\infty} \right] \quad (\text{A.21})$$

para a evolução do endurecimento cinemático.

## A.4 Estado de dano crítico

Neste trabalho será utilizado como critério de parada o estado de dano crítico. De acordo com BENALLAL *et al.* (1988) e LEMAITRE (1992) o dano evolui até um limite superior representado pelo dano crítico,  $D_c$ . Em geral, este limite superior é dependente do material e do tipo da condição do carregamento. No caso particular de um ensaio de tração unidimensional, para materiais dúcteis, este valor pode ser aproximado como  $D_c = 0.15$ .

## A.5 Algoritmo

A fim de resolver o problema elastoplástico acoplado com dano é utilizado o algoritmo de mapeamento de retorno, já descrito nos capítulos anteriores. A única particularidade que deve ser ressaltada aqui é que devido a hipótese de pequenas deformações utilizada nesta seção, algumas alterações são necessárias quanto a forma fraca do problema. Entretanto, este tipo de problema é bastante explorado na literatura e maiores detalhes podem ser consultados em vários livros de plasticidade infinitesimal.

## A.6 Exemplos

### A.6.1 Estado de tensão unidimensional

No caso particular de um estado de tensão-deformação unidimensional é possível determinar exatamente o endurecimento isotrópico e cinemático como função da deformação plástica, isto é,

$$R = R_\infty \left( 1 - e^{-b\varepsilon^p} \right) \quad (\text{A.22})$$

$$\chi = \chi_\infty \left( 1 - e^{-\gamma\varepsilon^p} \right). \quad (\text{A.23})$$

Simulando este caso unidimensional, através da aplicação do estado plano de tensões, Fig.A.1, e acompanhando a evolução das variáveis em um ponto de integração e assumindo que não exista a presença de dano, i.e.  $p < p_D$ , é possível verificar, baseado nas equações Eq.(A.22) e Eq.(A.23), se o algoritmo implementado está realmente produzindo os resultados esperados. A Fig. A.2 mostra os resultados analíticos versus os numéricos obtidos nesta simulação. Os parâmetros materiais utilizados nesta seção foram de  $\sigma_y = 520MPa$ ,  $\chi_\infty = 200MPa$ ,  $R_\infty = 4305MPa$ ,  $b = 0.2$ ,  $\gamma = 20$ ,  $E = 210000MPa$ ,  $\nu = 0.3$  e  $k_D = 0$ . Foi também utilizado  $\theta = 0.5$  para a regra

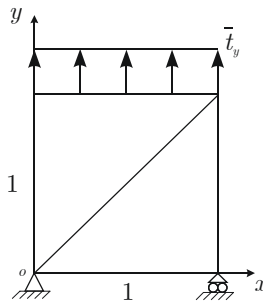


Figura A.1: Modelo uniaxial.

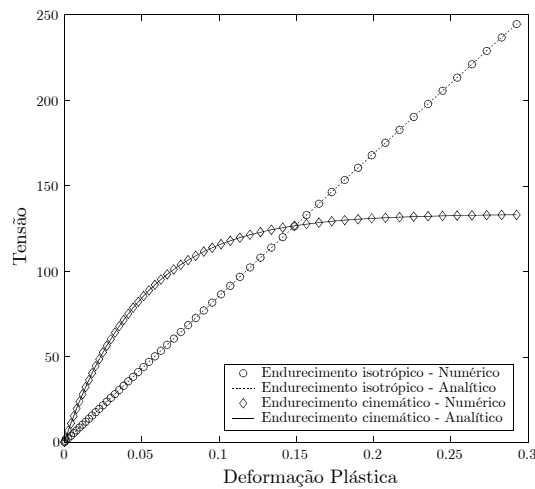


Figura A.2: Endurecimento analítico  $\times$  numérico.

de integração, que neste caso é baseada na regra do ponto médio geral<sup>1</sup>.

### A.6.2 Placa com rasgo

Agora irá se considerar o problema ilustrado na Fig. A.3. Neste caso uma placa com rasgo é submetida a um carregamento uniaxial monotônico  $\bar{t}$ .

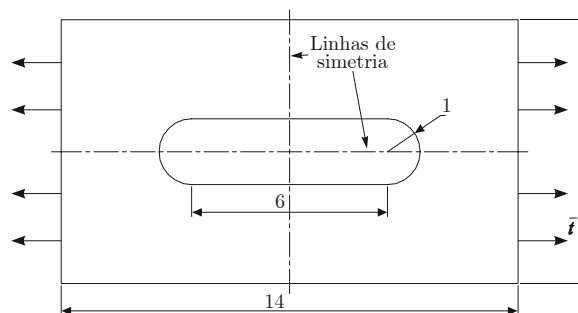


Figura A.3: Modelo da placa com rasgo

<sup>1</sup>do inglês *generalized midpoint rule*.

Serão considerados os mesmos parâmetros materiais do caso anterior, porém aqui  $D_c = 0.15$  e  $p_D = 0.1$ . Ainda, será permitido que o parâmetro  $k_D$  possa variar dentro de certo intervalo para que se torne possível verificar a sua influência na evolução da variável de dano.

A discretização do modelo apresentado na Fig. A.3 será feita com base nos seu eixos de simetria e a malha de integração é mostrada na Fig. A.4(a). Já a Fig. A.4(b) mostra a cobertura para um tamanho do suporte de influência de  $s = 2.01$ . Aqui, 13 pontos de integração foram utilizados para uma quadratura do tipo Gauss-Legendre. Ainda, o parâmetro de extensão utilizado foi de  $\epsilon = 10^{-6}$ .

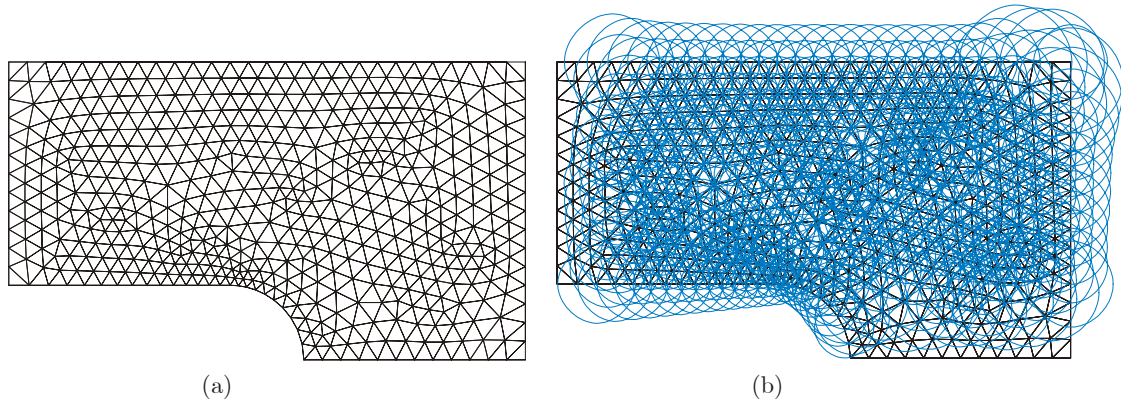


Figura A.4: Malha de integração e cobertura.

Nas figuras Fig. A.5 e Fig. A.6 são mostradas dois resultados para o campo de dano obtidos, para o mesmo tempo, incremento de carregamento, considerando  $k_D = 0$  e  $k_D = 300$ .

Analisando as saídas apresentadas na Fig. A.5 e na Fig. A.6, é possível notar que a introdução do termo do gradiente de dano na formulação implica em uma evolução do dano diferente. Já a Fig. A.7 mostra a deformação plástica acumulada,  $p$ , relativa a saída mostrada em Fig. A.5.

De uma forma mais geral, o efeito do termo estabilização,  $\vec{\nabla}D$ , pode ser melhor vista ao considerar um intervalo maior de variação do parâmetro  $k_D$ , o qual regula a influência do termo de gradiente de dano na evolução da variável de dano propriamente dita. O gráfico mostrado na Fig. A.8 mostra o efeito deste termo para diferentes valores de  $k_D$ , para um mesmo nível de

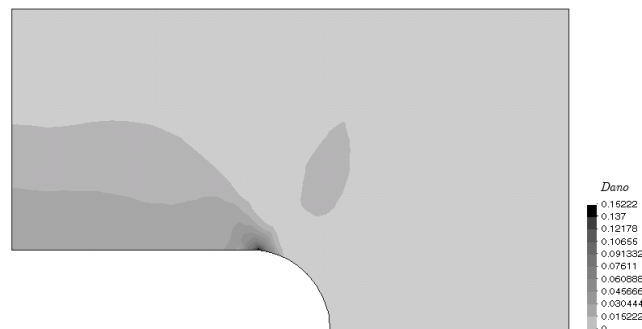


Figura A.5: Saída de dano para  $k_D = 0$ .

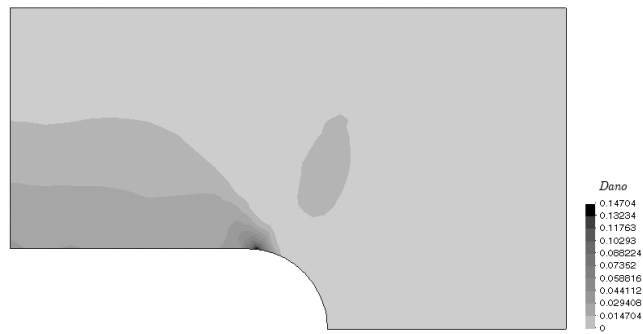


Figura A.6: Saída de dano para  $k_D = 300$ .



Figura A.7: Saída de deformação plástica acumulada para  $k_D = 0$ .

solicitação sobre o dano máximo encontrado. Repare que quanto maior é o termo  $k_D$ , menor é o valo de dano crítico. Isto é, dentro desta formulação, o efeito da vizinhança introduzido pelo gradiente do dano leva a uma taxa de evolução da variável de dano menor. Por outro lado, a ausência deste termo, para este problema, leva a um resultado mais conservativo.

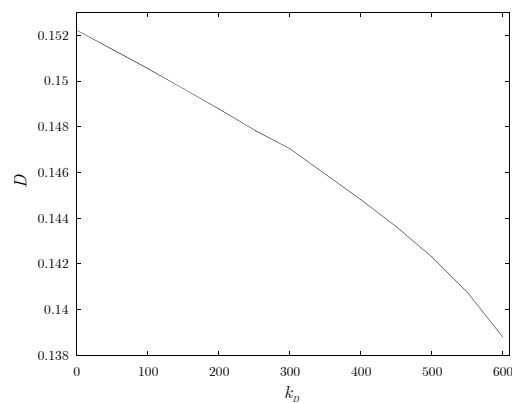


Figura A.8: Dependência da evolução do dano com relação ao parâmetro  $k_D$ .

## Apêndice B

# Introdução de uma função de peso do tipo bolha

Nesta seção será introduzida uma nova função de peso dentro da formulação do método de Galerkin livre de elementos modificado apresentado no **Capítulo 1**. Esta nova função peso, chamada aqui de  $w^{Bubble}$ , atuará na região de fronteira onde as funções do tipo  $w^{EPF}$  estão dispostas. A idéia é que com a introdução deste tipo de função peso se elimine o problema de obter fluxos constantes nessas regiões, devido as funções do tipo  $w^{EPF}$  originarem funções de forma lineares no interior das células de integração, como já foi mostrado no **Capítulo 1**.

Assim, problemas do tipo *travamento volumétrico*<sup>1</sup> poderiam ser abordados através de procedimentos conhecidos como por exemplo o *F-Bar* ( $\bar{\mathbf{F}}$ ) ou mesmo o *B-Bar* ( $\bar{\mathbf{B}}$ ). Entretanto, a discussão sobre o aparecimento, ou não, do *travamento volumétrico* dentro do MEEG não será discutido nesta seção sendo objeto de do **Capítulo 3** deste trabalho.

Como a apresentação do método de Galerkin livre de elementos modificado já foi feita no **Capítulo 1**, aqui serão apresentados apenas informações sobre a introdução da função de peso do tipo bolha. Será apresentada também uma comparação do efeito de sua introdução na convergência quando comparado com o método original.

### B.1 Função de peso tipo bolha

Nesta seção o MEEG será composto por três funções de peso diferentes. Duas delas são as funções de peso já introduzidas na versão apresentada no **Capítulo 1**, sendo elas a  $w^{EPF}$  e a  $w^{EFG}$ . A terceira, e nova função, é a chamada função de peso bolha<sup>2</sup>  $w^{Bubble}$ . Muitas formas funcionais podem ser escolhidas para a função bolha, dentre elas pode ser introduzida uma função do tipo linear semelhante a  $w^{EPF}$  porém com centro no interior da célula de integração, como alias já comentado no **Capítulo 1**. Entretanto, a função de bolha introduzida aqui advém da função de forma do tipo Hermite para elemento triangular *tri4*. A sua escolha foi feita considerando que esta é uma função  $C^\infty$  dentro da célula de integração.

---

<sup>1</sup>do inglês *volumetric locking*.

<sup>2</sup>do inglês *bubble function*.

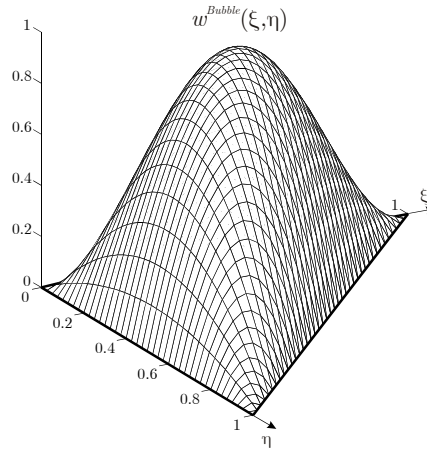


Figura B.1: Gráfico da função bolha no domínio padrão.

A sua forma funcional original é dada nas coordenadas  $(\xi, \eta)$  do elemento finito padrão como

$$w^{Bubble}(\xi, \eta) = 27\xi\eta(1 - \xi - \eta) \quad (\text{B.1})$$

cujo o seu gráfico é dado na Fig.B.1.

Porém, é uma característica dos métodos *mesh-free* expressar as funções de peso em termos das coordenadas globais  $(x, y)$ . Como o domínio será discretizado por uma malha de integração do tipo triangular, também será possível expressar as funções de peso do tipo  $w^{Bubble}$  em termos das coordenadas globais. Isto pode ser feito se as coordenadas  $(\xi, \eta)$  forem escritas em termos de  $(x, y)$ .

Para a disposição dos nós 1-2-3 dada na Fig. B.2 estas relações são dadas por

$$\xi(x, y) = \frac{1}{2A} [(x_3y_1 - x_1y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y] \quad (\text{B.2})$$

$$\eta(x, y) = \frac{1}{2A} [(x_1y_2 - x_2y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y] \quad (\text{B.3})$$

e suas respectivas derivadas são

$$\frac{\partial w^{Bubble}}{\partial x} = \frac{\partial w^{Bubble}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial w^{Bubble}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{\partial w^{Bubble}}{\partial y} = \frac{\partial w^{Bubble}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial w^{Bubble}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (\text{B.5})$$

A extensão do suporte é feita da mesma forma que já apresentado anteriormente a menos que a partícula  $w^{Bubble}(\vec{x}_I)$  está posicionada no baricentro da célula de integração. Além disso, poucas modificações sobre o algoritmo de distribuição das partículas apresentado no **Capítulo 1** são necessárias. Mais especificamente, é necessário apenas adicionar mais um *loop* sobre as partículas internas das células de integração para verificar a possibilidade da utilização de uma  $w^{EFG}$ , caso o contrário deve-se utilizar uma  $w^{Bubble}$ .

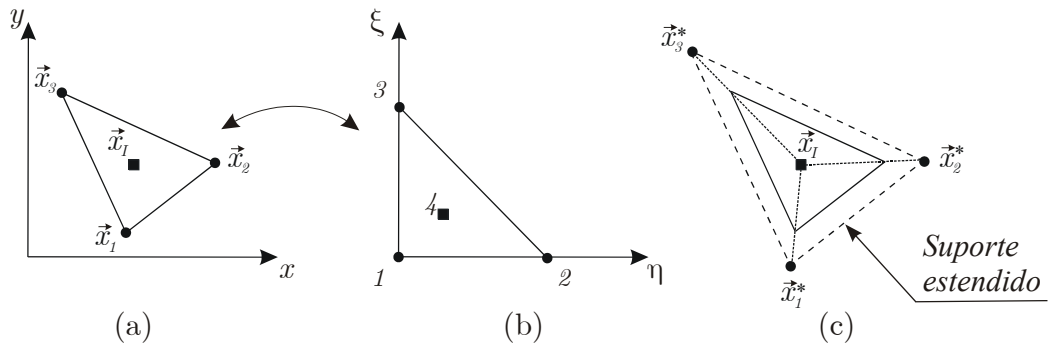


Figura B.2: Célula de integração e suporte estendido para a função peso tipo  $w^{Bubble}$ .

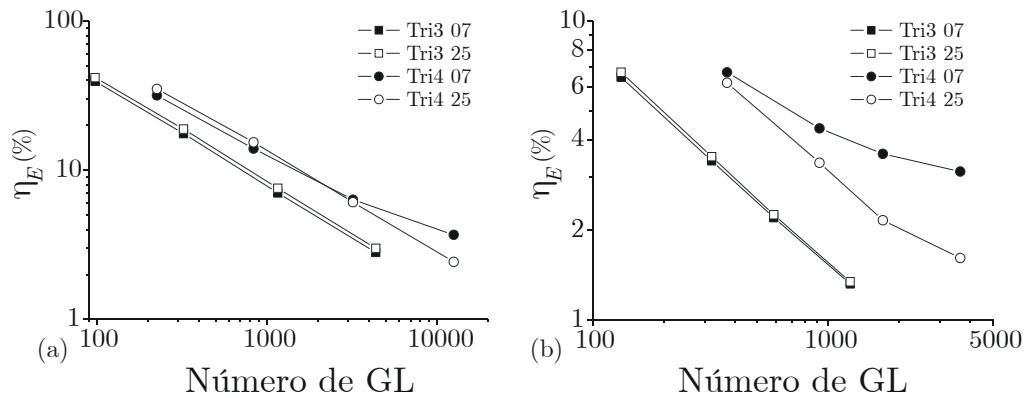


Figura B.3: Análise de convergência: (a) Viga cantilever; (b) Placa infinita com furo.

## B.2 Exemplos

Novamente, vão ser considerados como exemplos os mesmos problemas já formulados e apresentados no **Capítulo 1**, isto é, a viga cantilever e a placa com furo infinita. As mesmas regras de integração são usadas com os mesmos parâmetros de influência  $s$  para as partículas posicionadas nos vértices de cada célula de integração. Porém, o multiplicador de influência utilizado para as partículas posicionadas no baricentro da célula de integração foi de  $s = 1.01$ .

Os gráficos destas análises estão mostrados na Fig. B.3. A Fig. B.3(a) mostra a análise de convergência para a viga cantilever, Fig. 1.13, enquanto a Fig. B.3(b) mostra a análise de convergência para a placa infinita com furo, Fig. 1.17.

Já a Fig. B.4 mostra, de forma esquemática, a distribuição de partículas para uma malha de integração da placa infinita com furo.



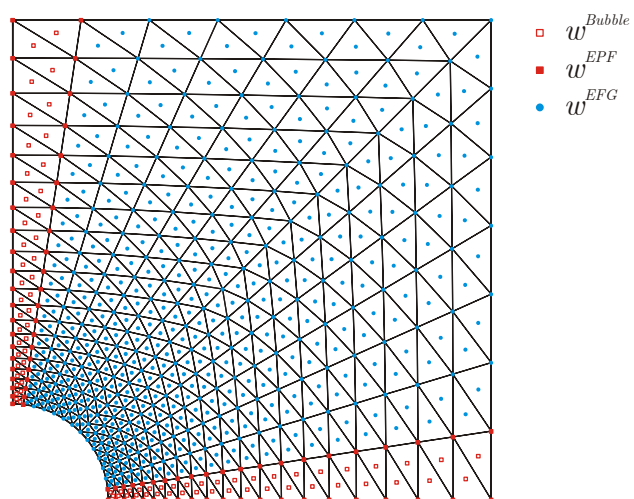


Figura B.4: Distribuição das partículas para uma malha de integração.

# Apêndice C

## Método de Newton

Será descrito neste apêndice o algoritmo de Newton utilizado na solução das equações não lineares envolvidas neste trabalho. A descrição apresentada aqui toma como base o procedimento apresentado em PRESS *et al.* (2002) e também em DE DEUS (2002).

O método de Newton puro utilizado na solução de sistemas de equações não lineares tem um inconveniente, que é a tendência de não convergir caso o ponto inicial não seja suficientemente próximo da solução. Um método global é aquele que para todo ponto inicial converge para a solução. O essencial da idéia apresentada neste apêndice, é o de combinar a rápida convergência local do método de Newton com a estratégia de convergência quase global, a qual garantirá que o processo siga para a solução em cada interação.

O passo de Newton para o conjunto de equações não lineares pode ser descrito como procurar  $\vec{x}_{novo}$  tal que

$$\vec{F}(\vec{x}_{novo}) = \vec{0}, \quad (\text{C.1})$$

com  $\vec{x}_{novo} \in R^n$  e  $\vec{F} : R^n \rightarrow R^n$ . Supondo que  $\vec{F}$  seja suficientemente regular pode-se expandi-la em uma série de Taylor da seguinte maneira

$$\vec{F}(\vec{x}_{ant} + \delta\vec{x}) = \vec{F}(\vec{x}_{ant}) + \left. \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{x}} \right|_{\vec{x}=\vec{x}_{ant}} \delta\vec{x} + o^2(\delta\vec{x}). \quad (\text{C.2})$$

Nesta equação a matriz oriunda das derivadas de  $\vec{F}$  com relação a  $\vec{x}$  é conhecida como matriz Jacobiana, isto é,

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{x}} \quad (\text{C.3})$$

$$J_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}. \quad (\text{C.4})$$

Então, pode-se reescrever a expansão em Taylor vista na Eq.(C.2) como

$$\vec{F}(\vec{x}_{ant} + \delta\vec{x}) = \vec{F}(\vec{x}_{ant}) + \mathbf{J}|_{\vec{x}=\vec{x}_{ant}} \delta\vec{x} + o^2(\delta\vec{x}). \quad (\text{C.5})$$

Desprezando o termo de ordem superior  $o^2(\delta\vec{x})$  em Eq.(C.5) e impondo que  $\vec{F}(\vec{x}_{ant} + \delta\vec{x}) =$

0, obtêm-se o conjunto de equações lineares que serão responsáveis pela atualização de  $\vec{x}_{novo}$ , isto é o sistema é resolvido para  $\delta\vec{x}$ . A Eq.(C.5) fica então

$$\mathbf{J}\delta\vec{x} = -\vec{F}, \quad (\text{C.6})$$

onde o sistema de equações lineares algébricas acima é resolvido por decomposição  $\mathbf{LU}$ , produzindo

$$\mathbf{LU}\delta\vec{x} = -\vec{F} \quad (\text{C.7})$$

$$\mathbf{L}\delta\vec{y} = -\vec{F} \quad (\text{C.8})$$

$$\mathbf{U}\delta\vec{x} = \delta\vec{y}. \quad (\text{C.9})$$

A atualização do vetor solução é então realizada fazendo

$$\vec{x}_{novo} = \vec{x}_{ant} + \delta\vec{x}. \quad (\text{C.10})$$

Uma forma alternativa para chegar à solução mostrada na Eq.(C.6) é requerer a minimização da seguinte função

$$f = \frac{1}{2}\vec{F} \cdot \vec{F}. \quad (\text{C.11})$$

Porém, pode haver um mínimo local de  $f$  que não seja solução de  $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{0}$ . Deste modo, a minimização de  $f$  pelo passo de Newton puro pode causar problemas no processo de solução.

Antes de apresentar uma estratégia melhor para a minimização de  $f$ , repare que o passo de Newton é sempre uma direção de descida, uma vez que

$$\vec{\nabla}f \cdot \delta\vec{x} = (\mathbf{J}^T \vec{F}) \cdot (-\mathbf{J}^{-1} \vec{F}) = -\vec{F} \cdot \vec{F} < 0. \quad (\text{C.12})$$

Então, a estratégia será a seguinte: Sempre se tentará primeiro o passo de Newton puro, porque uma vez próximo o suficiente da solução, tem-se garantida a convergência quadrática, sob certas condições. Desta forma, é checado a cada interação se o passo de Newton puro reduz  $f$ , caso contrário faz-se uma busca linear, *backtracking*, sobre a direção do passo de Newton puro, até que se tenha um passo aceitável. Devido ao fato de que a direção do passo de Newton puro é uma direção de descida para  $f$ , tem-se então, a garantia de se encontrar um passo aceitável pelo *backtracking*.

Perceba ainda que este método minimiza  $f$  por tomar passos de Newton que levam  $\vec{F}$  para zero, o que não equivale a minimizar  $f$  com passos de Newton que levem o  $\vec{\nabla}f$  para zero.

Tomando o passo de Newton puro como  $\vec{d} = \delta\vec{x}$  pode-se escrever a atualização vista na Eq.(C.10) como

$$\vec{x}_{novo} = \vec{x}_{ant} + \lambda\vec{d}, \quad 0 < \lambda \leq 1. \quad (\text{C.13})$$

O procedimento busca encontrar  $\lambda$ , tal que faça  $f(\vec{x}_{ant} + \lambda\vec{d})$  decrescer o suficiente. Para assegurar que este passo seja aceitável são impostas as chamadas condições de Wolfe, que são:

1. Armijo:  $f(\vec{x}_{novo}) \leq f(\vec{x}_{ant}) + C_1\lambda\vec{\nabla}f \cdot (\vec{x}_{novo} - \vec{x}_{ant})$ ;

$$2. \text{ Curvatura: } \vec{\nabla} f(\vec{x}_{novo}) \cdot \vec{d} \geq C_2 \vec{\nabla} f(\vec{x}_{ant}) \cdot \vec{d}, \quad 0 < C_1 < C_2 < 1.$$

Todavia a segunda condição de Wolfe, curvatura, na prática não foi imposta. A busca linear aqui utilizada foi baseada em interpolações de funções conhecidas e suas derivadas, as quais fortalecerão a condição de Armijo. Tais funções serão melhor descritas mais adiante. Seguindo recomendações da literatura utilizou-se  $C_1 \simeq 10^{-4}$ . A estratégia prática para o *backtracking* é a seguinte

$$g(\lambda) = f(\vec{x}_{ant} + \lambda \vec{d}) \quad (\text{C.14})$$

logo

$$g'(\lambda) = \lambda \vec{\nabla} f(\vec{x}_{ant}) \cdot \vec{d}, \quad (\text{C.15})$$

onde é necessário encontrar  $\lambda$ , o qual minimiza o modelo que será construído a seguir. São conhecidos os valores de  $g(0)$  e  $g'(0)$ , e como o primeiro passo é o passo de Newton puro, então tem-se também  $g(\lambda_o = 1)$ . Inicialmente será considerado  $\lambda_o = 1$ , para o qual será avaliada a condição de Armijo. Caso esta condição não seja satisfeita é construído então um modelo quadrático de  $g(\lambda)$ :

$$g(\lambda) \simeq \left[ \frac{g(\lambda_o) - g(0) - \lambda_o g'(0)}{\lambda_o^2} \right] \lambda^2 + g'(0) \lambda + g(0). \quad (\text{C.16})$$

donde se determina o seguinte mínimo:

$$\lambda = -\frac{\lambda_o^2 g'(0)}{2[g(\lambda_o) - g(0) - \lambda_o g'(0)]}. \quad (\text{C.17})$$

Em um segundo e subseqüentes *backtracks*, caso sejam necessários, utiliza-se uma aproximação cúbica para  $g$ , usando o valor prévio de  $g(\lambda_o)$  e um segundo mais recente  $g(\lambda_1)$ . Esta aproximação é dada por

$$g(\lambda) = a\lambda^3 + b\lambda^2 + g'(0)\lambda + g(0). \quad (\text{C.18})$$

- **Nota:** Dado um intervalo  $[c, q]$  conhecido, para o presente caso  $[0, 1; 0, 5]$ , que contenha os comprimentos dos passos aceitáveis, tem-se que esta função cúbica sempre existe e é única.

Determina-se assim  $a$  e  $b$ , bem como  $\lambda_2$ , e deste modo o processo se repete até que a condição de Armijo seja satisfeita. Caso  $\lambda_k$  seja muito próximo de  $\lambda_{k-1}$ , ou muito menor que este, impõe-se então que

$$\lambda_k = \frac{\lambda_{k-1}}{2}. \quad (\text{C.19})$$

Tem-se então para a minimização da cúbica

$$\lambda_{k-1} = \lambda_k - (\lambda_k - \lambda_{k-1}) \left[ \frac{g'(\lambda_k) + s_2 - s_1}{g'(\lambda_k) - g'(\lambda_{k-1}) + 2s_2} \right], \quad (\text{C.20})$$

onde

$$s_1 = g'(\lambda_{k-1}) + g'(\lambda_k) - 3 \frac{g'(\lambda_{k-1}) - g'(\lambda_k)}{\lambda_{k-1} - \lambda_k} \quad (\text{C.21})$$

e

$$s_2 = [s_1^2 - g'(\lambda_{k-1})g'(\lambda_k)]^2. \quad (\text{C.22})$$

A interpolação cúbica é uma estratégia poderosa, já que pode produzir uma taxa de convergência quadrática na iteração descrita acima, para o processo de minimização de  $\lambda$ .

## Apêndice D

# Funções tensoriais isotrópicas

O objetivo deste apêndice é o de apresentar algumas características e propriedades das funções tensoriais isotrópicas. A fim de manter a objetividade do texto, esta apresentação se limitará às funções tensoriais isotrópicas, de um tensor simétrico, mais utilizadas durante o texto tais como a raiz quadrada  $\sqrt{\mathbf{X}}$ , o logaritmo de um tensor simétrico  $\ln(\mathbf{X})$  e da chamada função exponencial tensorial  $\exp(\mathbf{X})$ . Mais detalhes podem ser encontradas em GURTIN (1981) e SOUZA NETO (2002).

As funções tensoriais isotrópicas comentadas anteriormente são do tipo

$$\mathbf{Y}(\mathbf{X}) : \text{Sim}(V^n) \rightarrow \text{Sim}(V^n) \quad (\text{D.1})$$

com

$$\mathbf{QY}(\mathbf{X})\mathbf{Q}^T = \mathbf{Y}(\mathbf{QXQ}^T), \quad \forall \mathbf{Q} \in \text{Ort}. \quad (\text{D.2})$$

### D.1 Funções tensoriais isotrópicas de um simples argumento

Considere  $y$  como uma função de um único argumento  $x$ . Dada  $y : R \rightarrow R$ , uma classe de funções tensoriais isotrópicas de um tensor simétrico  $\mathbf{X}$  pode ser construída como:

$$\mathbf{Y}(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^p y(x_i) \mathbf{E}_i \quad (\text{D.3})$$

onde  $y(x_i)$  são os autovalores de  $\mathbf{Y}(\mathbf{X})$  e  $\mathbf{E}_i$  são os tensores simétricos definidos como autoprojeções de  $\mathbf{X}$ , dados por

$$\mathbf{E}_i = \vec{e}_i \otimes \vec{e}_i, \quad (\text{D.4})$$

sendo  $\vec{e}_i$  os autovetores ortonormais de  $\mathbf{X}$ .

Como exemplos desta classe de funções tensoriais pode-se citar  $\sqrt{\mathbf{X}}$ ,  $\ln(\mathbf{X})$  e  $\exp(\mathbf{X})$  onde

temos respectivamente

$$y(x_i) = \sqrt{x_i} \quad (\text{D.5})$$

$$y(x_i) = \ln(x_i) \quad (\text{D.6})$$

$$y(x_i) = \exp(x_i). \quad (\text{D.7})$$

A determinação prática dos autovalores e dos respectivos autovetores de  $\mathbf{X}$  depende do procedimento de *decomposição espectral* adotado. Uma vez determinados os valores de  $x_i$  e  $\mathbf{E}_i$  os valores de  $\mathbf{Y}(\mathbf{X})$  são calculados por:

- Duas dimensões:

$$\mathbf{Y}(\mathbf{X}) = \begin{cases} \sum_{i=1}^2 y(x_i) \mathbf{E}_i & \text{para } x_1 \neq x_2 \\ y(x_1) \mathbf{I} & \text{para } x_1 = x_2 \end{cases}; \quad (\text{D.8})$$

- Três dimensões:

$$\mathbf{Y}(\mathbf{X}) = \begin{cases} \sum_{i=1}^3 y(x_i) \mathbf{E}_i & \text{para } x_1 \neq x_2 \neq x_3 \\ y(x_a) \mathbf{E}_a + y(x_b) (\mathbf{I} - \mathbf{E}_a) & \text{para } x_a \neq x_b = x_c \\ y(x_1) \mathbf{I} & \text{para } x_1 = x_2 = x_3 \end{cases}. \quad (\text{D.9})$$

Os valores das derivadas,

$$\mathbf{D}(\mathbf{X}) = \frac{d\mathbf{Y}(\mathbf{X})}{d\mathbf{X}}, \quad (\text{D.10})$$

também são necessárias em vários momentos do texto. Os valores das derivadas das funções tensoriais isotrópicas de um tensor simétrico podem ser determinadas por:

- Duas dimensões:

$$\mathbf{D}(\mathbf{X}) = \begin{cases} \frac{y(x_1) - y(x_2)}{x_1 - x_2} (\mathbf{I} - \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2) + \sum_{i=1}^2 y'(x_i) \mathbf{E}_i \otimes \mathbf{E}_i & \text{para } x_1 \neq x_2 \\ y'(x_1) \mathbf{I} & \text{para } x_1 = x_2 \end{cases}; \quad (\text{D.11})$$

- Três dimensões:

$$\mathbf{D}(\mathbf{X}) = \begin{cases} \sum_{a=1}^3 \left\{ \frac{y(x_a)}{(x_a - x_b)(x_a - x_c)} \left[ \frac{d\mathbf{X}^2}{d\mathbf{X}} - (x_b + x_c) \mathbf{I} - \right. \right. \\ \quad \left. \left. - [(x_a - x_b) + (x_a - x_c)] \mathbf{E}_a \otimes \mathbf{E}_a - (x_b - x_c) (\mathbf{E}_b \otimes \mathbf{E}_b - \mathbf{E}_c \otimes \mathbf{E}_c) \right] + \right. \\ \quad \left. + y'(x_a) \mathbf{E}_a \otimes \mathbf{E}_a \right\} & \text{para } x_1 \neq x_2 \neq x_3 \\ s_1 \frac{d\mathbf{X}^2}{d\mathbf{X}} - s_2 \mathbf{I} - s_3 \mathbf{X} \otimes \mathbf{X} + s_4 \mathbf{X} \otimes \mathbf{I} + s_5 \mathbf{I} \otimes \mathbf{X} - s_5 \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} & \text{para } x_a \neq x_b = x_c \\ y'(x_1) \mathbf{I} & \text{para } x_1 = x_2 = x_3 \end{cases} \quad (\text{D.12})$$

nestes resultados os índices  $(a, b, c)$  são as permutações cíclicas de  $(1, 2, 3)$ ,  $y'(x) = \frac{dy(x)}{dx}$  e

$$\begin{aligned}
 s_1 &= \frac{y(x_a) - y(x_c)}{(x_a - x_c)^2} - \frac{y'(x_c)}{x_a - x_c} \\
 s_2 &= 2x_c \frac{y(x_a) - y(x_c)}{(x_a - x_c)^2} - \frac{x_a + x_c}{x_a - x_c} y'(x_c) \\
 s_2 &= 2 \frac{y(x_a) - y(x_c)}{(x_a - x_c)^3} - \frac{y'(x_a) + y'(x_c)}{(x_a - x_c)^2} \\
 s_4 &= s_5 = x_c s_3 \\
 s_6 &= x_c^2 s_3.
 \end{aligned} \tag{D.13}$$

## D.2 A função exponencial tensorial

A função exponencial tensorial tem um importante papel na determinação dos algoritmos utilizados no **Capítulo 3** deste trabalho. No contexto de plasticidade em deformações finitas, o seu uso, juntamente com a medida de deformação  $\ln(\cdot)$ , permite que os algoritmos de mapeamento de retorno sejam escritos da mesma forma daqueles encontrados no contexto de pequenas deformações.

Nesta seção deste apêndice, é apresentada a definição da função exponencial tensorial juntamente com algumas de suas propriedades mais importantes.

Considere o problema de valor inicial definido pela equação diferencial ordinária tensorial:

$$\dot{\mathbf{Y}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{Y}(t) \tag{D.14}$$

com

$$\mathbf{Y}(t_o) = \mathbf{Y}_o, \tag{D.15}$$

na qual  $\dot{\mathbf{Y}} = \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t}$ ,  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{Y}$  são tensores constantes, em geral não simétricos. A função exponencial tensorial, também conhecida como mapeamento exponencial,  $\exp(\cdot)$ , é a única solução para o problema da Eq.(D.14), a qual é dada por

$$\mathbf{Y}(t) = \exp[(t - t_o)\mathbf{A}]\mathbf{Y}_o. \tag{D.16}$$

Explicitamente, a função exponencial tensorial pode ser dada em termos da seguinte representação em série

$$\exp(\mathbf{X}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathbf{X}^n \tag{D.17}$$

na qual  $\mathbf{X}$  é um tensor qualquer.

### D.2.1 Algumas propriedades da função exponencial tensorial

1. O determinante da função exponencial tensorial satisfaz

$$\det[\exp(\mathbf{X})] = \exp[\text{tr}(\mathbf{X})]. \tag{D.18}$$



2. Pelo uso da Eq.(D.17) pode-se chegar a

$$\exp(\mathbf{D}\mathbf{X}\mathbf{D}^{-1}) = \mathbf{D} \exp(\mathbf{X}) \mathbf{D}^{-1}, \quad (\text{D.19})$$

isto implica que para qualquer tensor ortogonal  $\mathbf{Q}$

$$\exp(\mathbf{Q}\mathbf{X}\mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q} \exp(\mathbf{X}) \mathbf{Q}^T, \quad (\text{D.20})$$

isto é, a função exponencial tensorial é isotrópica.

3. Para qualquer tensor  $\mathbf{X}$

$$\exp(-\mathbf{X}) = [\exp(\mathbf{X})]^{-1}. \quad (\text{D.21})$$

4. Se  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{D}$  comutam, isto é, se  $\mathbf{CD} = \mathbf{DC}$ , então

$$\exp(\mathbf{C} + \mathbf{D}) = \exp(\mathbf{C}) \exp(\mathbf{D}) = \exp(\mathbf{D}) \exp(\mathbf{C}). \quad (\text{D.22})$$

Esta propriedade implica que para qualquer tensor  $\mathbf{X}$  e inteiro  $n$  temos

$$\exp(n\mathbf{X}) = [\exp(\mathbf{X})]^n. \quad (\text{D.23})$$

5. Seja  $\mathbf{X}$  um tensor anti-simétrico,  $\mathbf{X} = -\mathbf{X}^T$ , então

$$\mathbf{Q} = \exp(\mathbf{X}) \quad (\text{D.24})$$

é um tensor ortogonal, ou seja uma rotação.

6. As componentes cartesianas da derivada da função exponencial tensorial, com relação ao argumento, têm a seguinte representação em série:

$$[D \exp(\mathbf{X})]_{ijkl} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{m=1}^n [\mathbf{X}^{m-1}]_{ik} [\mathbf{X}^{n-m}]_{lj}. \quad (\text{D.25})$$

## D.2.2 Integração via mapeamento exponencial

A integração numérica do problema de valor inicial apresentado na Eq.(D.14), pode ser feita utilizando a regra clássica de integração de *Euler*, ou mesmo pelo uso de uma regra baseada na chamada regra do ponto intermediário, *midpoint rule*.

Seja um intervalo  $[t_n, t_{n+1}]$ . Basicamente, o algoritmo que aproxima  $\mathbf{Y}_{n+1}$  da solução é dado por

$$\mathbf{Y}_{n+1} = \exp[\Delta t \mathbf{A}(t_{n+\theta})] \mathbf{Y}_n \quad (\text{D.26})$$

com

$$\Delta t = t_{n+1} - t_n \quad (\text{D.27})$$

$$t_{n+\theta} = t_n + \theta \Delta t \quad (\text{D.28})$$

e  $\mathbf{A}(t_{n+\theta})$  sendo constante dentro do intervalo  $[t_n, t_{n+1}]$ . O parâmetro  $\theta$  satisfaz

$$0 \leq \theta \leq 1. \quad (\text{D.29})$$

A escolha de  $\theta = 0$  produz uma integração *explícita*. Com a escolha de  $\theta = \frac{1}{2}$  e  $\theta = 1$  temos respectivamente a integração baseada no ponto médio e a integração *implícita*. O algoritmo apresenta precisão de segunda ordem para  $\theta = \frac{1}{2}$  e precisão de primeira ordem para  $\theta = 1$ .

# Apêndice E

## Mapeamentos de retorno usados no Capítulo 5

### E.1 Caso 1: mapeamento de retorno para $\mathcal{F}_1$

Quando o algoritmo mostrado na tabela 5.3 indicar que o carregamento estiver ocorrendo para a superfície  $\mathcal{F}_1$ , a determinação do estado deve ser realizada de acordo com o seguinte modelo constitutivo:

1. A relação constitutiva hiperelástica

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{\tau}} &= \mathbb{D}(\eta) \mathbf{E}^e \\ &= 2\mu(\eta) \mathbf{E}^e + \left( \kappa(\eta) - \frac{2}{3}\mu(\eta) \right) \text{tr}(\mathbf{E}^e) \mathbf{I} \\ \mathbb{D}(\eta) &= 2\mu(\eta) \mathbb{I} + \left( \kappa(\eta) - \frac{2}{3}\mu(\eta) \right) (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})\end{aligned}$$

2. Função de escoamento

$$\mathcal{F}_1(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\boldsymbol{\chi}}^D) = \|\bar{\mathbf{S}}^D\| - F_e(I_1) \quad (\text{E.1})$$

em que

$$F_e(I_1) = \alpha + \gamma \left[ 1 - e^{\beta I_1} \right], \quad \text{para } I_1^c(\omega) \leq I_1 \leq I_1^T.$$

3. Evolução do endurecimento cinemático

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\chi}}}^D = C \mathbb{I}^D \bar{\mathbf{D}}^p$$

com  $C$  sendo um parâmetro material constante. Aqui

$$\bar{\mathbf{D}}^p = \Delta \lambda_1 \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}}. \quad (\text{E.2})$$

Em uma primeira análise, o mapeamento de retorno associado a este caso consiste em encontrar  $\mathbf{E}_{n+1}^e$ ,  $\bar{\chi}_{n+1}^D$  e  $\Delta\lambda_1$  que satisfaçam o seguinte sistema de equações não lineares

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{n+1}^e - \mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}} + \Delta\lambda_1 \left. \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \bar{\tau}} \right|_{n+1} \\ \bar{\chi}_{n+1}^D - \bar{\chi}_n^D - \Delta\lambda_1 C \mathbb{I}^D \left. \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \bar{\tau}} \right|_{n+1} \\ \mathcal{F}_1(\bar{\tau}_{n+1}, \bar{\chi}_{n+1}^D) \end{cases} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E.3})$$

com  $\Delta\lambda_1 > 0$ . Uma vez determinadas estas variáveis os outros parâmetros do modelo podem então ser atualizados.

Porém, é possível escrever o sistema de equações, Eq.(E.3), de forma mais reduzida. Para tanto, observe que

$$\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \bar{\tau}} = \mathbf{N} - F'_e(I_1) \mathbf{I} \quad (\text{E.4})$$

com

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \|\bar{\mathbf{S}}^D\|}{\partial \bar{\tau}} = \frac{\bar{\mathbf{S}}^D}{\|\bar{\mathbf{S}}^D\|}, \quad (\text{E.5})$$

$$F'_e(I_1) = \frac{\partial F_e(I_1)}{\partial I_1} = -\gamma\beta e^{\beta I_1}, \quad (\text{E.6})$$

e

$$\frac{\partial I_1}{\partial \bar{\tau}} = \mathbf{I}. \quad (\text{E.7})$$

Agora, multiplicando a Eq.(E.3.1) por  $\mathbb{D}$  e usando a Eq.(E.4) pode-se escrever que

$$\mathbb{D} \left( \mathbf{E}_{n+1}^e - \mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}} + \Delta\lambda_1 \left. \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \bar{\tau}} \right|_{n+1} \right) = \mathbb{D} \left[ \mathbf{E}_{n+1}^e - \mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}} + \Delta\lambda_1 (\mathbf{N}_{n+1} - F'_e(I_{1_{n+1}}) \mathbf{I}) \right] \quad (\text{E.8})$$

$$= \bar{\tau}_{n+1} - \bar{\tau}_{n+1}^{teste} + \Delta\lambda_1 (\mathbb{D}\mathbf{N}_{n+1} - F'_e(I_{1_{n+1}}) \mathbb{D}\mathbf{I}). \quad (\text{E.9})$$

Mas como

$$\mathbb{D}\mathbf{N}_{n+1} = 2\mu\mathbf{N}_{n+1} \quad (\text{E.10})$$

e

$$\mathbb{D}\mathbf{I} = 3\kappa\mathbf{I}, \quad (\text{E.11})$$

a Eq.(E.8) fica

$$\mathbb{D} \left( \mathbf{E}_{n+1}^e - \mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}} + \Delta\lambda_1 \left. \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \bar{\tau}} \right|_{n+1} \right) = \bar{\tau}_{n+1} - \bar{\tau}_{n+1}^{teste} + \Delta\lambda_1 (2\mu\mathbf{N}_{n+1} - F'_e(I_{1_{n+1}}) 3\kappa\mathbf{I}) = 0 \quad (\text{E.12})$$

ou

$$\bar{\tau}_{n+1} = \bar{\tau}_{n+1}^{teste} - \Delta\lambda_1 (2\mu\mathbf{N}_{n+1} - 3\kappa F'_e(I_{1_{n+1}}) \mathbf{I}). \quad (\text{E.13})$$

Tomando o seu traço produz

$$I_{1_{n+1}} = I_{1_{n+1}}^{teste} + 9\kappa F'_e(I_{1_{n+1}}) \Delta\lambda_1. \quad (\text{E.14})$$

Porém como

$$\bar{\tau}_{n+1} = \bar{\tau}_{n+1}^D + \frac{1}{3} I_{1_{n+1}} \mathbf{I}.$$

determina-se

$$\bar{\tau}_{n+1}^D = \bar{\tau}_{n+1}^{D^{teste}} - 2\mu\Delta\lambda_1 \mathbf{N}_{n+1}. \quad (\text{E.15})$$

Da mesma forma, partindo da Eq.(E.3.2) e fazendo uso da a Eq.(E.4) e Eq.(5.22) pode-se escrever

$$\begin{aligned} \bar{\chi}_{n+1}^D - \bar{\chi}_n^D - \Delta\lambda_1 C \mathbb{I}^D \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \bar{\tau}} \Big|_{n+1} &= \bar{\chi}_{n+1}^D - \bar{\chi}_n^D - \Delta\lambda_1 C \mathbb{I}^D (\mathbf{N}_{n+1} - F'_e(I_{1_{n+1}}) \mathbf{I}) \\ &= \bar{\chi}_{n+1}^D - \bar{\chi}_n^D - \Delta\lambda_1 C \mathbf{N}_{n+1} \end{aligned} \quad (\text{E.16})$$

ou ainda

$$\bar{\chi}_{n+1}^D = \bar{\chi}_n^D + \Delta\lambda_1 C \mathbf{N}_{n+1}. \quad (\text{E.17})$$

Entretanto, por definição

$$\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D = \bar{\tau}_{n+1}^D - \bar{\chi}_{n+1}^D \quad (\text{E.18})$$

e substituindo a Eq.(E.15) e a Eq.(E.17) na Eq.(E.18)

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D &= \bar{\tau}_{n+1}^D - \bar{\chi}_{n+1}^D \\ &= \bar{\tau}_{n+1}^{D^{teste}} - 2\mu\Delta\lambda_1 \mathbf{N}_{n+1} - \bar{\chi}_n^D - \Delta\lambda_1 C \mathbf{N}_{n+1}. \end{aligned} \quad (\text{E.19})$$

Mas

$$\bar{\chi}_n^{D^{teste}} = \bar{\chi}_n^D, \quad (\text{E.20})$$

então

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D &= \bar{\tau}_{n+1}^{D^{teste}} - \bar{\chi}_n^{D^{teste}} - \Delta\lambda_1 (2\mu + C) \mathbf{N}_{n+1} \\ &= \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{D^{teste}} - \Delta\lambda_1 (2\mu + C) \mathbf{N}_{n+1}. \end{aligned} \quad (\text{E.21})$$

Como

$$\mathbf{N}_{n+1} = \frac{\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D}{\|\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D\|} \quad (\text{E.22})$$

tem-se

$$\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D = \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{D^{teste}} - \Delta\lambda_1 (2\mu + C) \frac{\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D}{\|\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D\|} \quad (\text{E.23})$$

e

$$\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{D^{teste}} = \left[ 1 + \frac{\Delta\lambda_1 (2\mu + C)}{\|\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D\|} \right] \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D. \quad (\text{E.24})$$

Esta última equação mostra que os tensores  $\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D$  e  $\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{D^{teste}}$  são múltiplos. Isto implica em que

$$\frac{\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D}{\|\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D\|} = \frac{\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{D^{teste}}}{\|\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{D^{teste}}\|} = \mathbf{N}_{n+1}. \quad (\text{E.25})$$

Como resultado

$$\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D = \left[ 1 - \frac{\Delta\lambda_1 (2\mu + C)}{\|\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{Dteste}\|} \right] \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{Dteste}. \quad (\text{E.26})$$

Esta última equação, Eq.(E.26), mostra que  $\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D$  pode ser considerada como dependente apenas de  $\Delta\lambda_1$ . Finalmente, tomando a norma em ambos os lados da Eq.(E.26) produz

$$\|\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D\| = \left| \|\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{Dteste}\| - (2\mu + C) \Delta\lambda_1 \right|. \quad (\text{E.27})$$

Esta equação pode ser substituída na Eq.(E.3.3) que produz

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(\bar{\tau}, \bar{\chi}^D) &= \|\bar{\mathbf{S}}^D\| - F_e(I_1) \\ &= \left| \|\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{Dteste}\| - (2\mu + C) \Delta\lambda_1 \right| - F_e(I_1) \\ &= \left| \|\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{Dteste}\| - (2\mu + C) \Delta\lambda_1 \right| - \left[ \alpha + \gamma \left( 1 - e^{\beta I_1} \right) \right], \text{ com } I_1^c(\omega) \leq I_1 \leq I_1^T. \end{aligned}$$

O problema referente ao sistema de equações, Eq.(E.3), pode agora ser escrito como: Encontre  $\Delta\lambda_1$  e  $I_{1_{n+1}}$  que resolvam

$$\begin{cases} \left| \|\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{Dteste}\| - (2\mu + C) \Delta\lambda_1 \right| - \left[ \alpha + \gamma \left( 1 - e^{\beta I_{1_{n+1}}} \right) \right] \\ I_{1_{n+1}} - I_{1_{n+1}}^{teste} + 9\Delta\lambda_1 \kappa \gamma \beta e^{\beta I_{1_{n+1}}} \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{E.28})$$

Uma vez determinados  $\Delta\lambda_1$  e  $I_{1_{n+1}}$  é possível atualizar as seguintes variáveis

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D &= \left[ 1 - \frac{\Delta\lambda_1 (2\mu + C)}{\|\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{Dteste}\|} \right] \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{Dteste} \\ \bar{\tau}_{n+1}^D &= \bar{\tau}_{n+1}^{Dteste} - 2\mu \Delta\lambda_1 \mathbf{N}_{n+1} \\ \bar{\chi}_{n+1}^D &= \bar{\chi}_n^D + \Delta\lambda_1 C \mathbf{N}_{n+1} \end{aligned}$$

e então calcular

$$\bar{\tau}_{n+1} = \bar{\tau}_{n+1}^D + \frac{1}{3} I_{1_{n+1}} \mathbf{I}.$$

Na tabela E.1 é apresentado um resumo que compreende o algoritmo de mapeamento de retorno para o caso de  $\mathcal{F}_1$  ativo.

### E.1.1 Determinação da matriz tangente local para o caso 1

Seja  $\bar{q}^{c1} = [I_{1_{n+1}}, \Delta\lambda_1]$  o vetor das variáveis a determinar e

$$f_1^{c1} = \left| \|\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{Dteste}\| - (2\mu + C) \Delta\lambda_1 \right| - \left[ \alpha + \gamma \left( 1 - e^{\beta I_{1_{n+1}}} \right) \right] \quad (\text{E.29})$$

$$f_2^{c1} = I_{1_{n+1}} - I_{1_{n+1}}^{teste} + 9\Delta\lambda_1 \kappa \gamma \beta e^{\beta I_{1_{n+1}}}. \quad (\text{E.30})$$

Então, a matriz tangente local  $\mathbf{M}^{c1}$  fica da seguinte forma  $[M^{c1}]_{ij} = \frac{\partial f_i^{c1}}{\partial q_j^{c1}}$ , assim

Tabela E.1: Algoritmo de mapeamento de retorno para o Caso 1

<p>(i) Uma vez determinada que <math>\mathcal{F}_1</math> está ativa resolva:</p> $\begin{cases} \left\  \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{D^{teste}} \right\  - (2\mu + C) \Delta\lambda_1 \\ I_{1_{n+1}} - I_{1_{n+1}}^{teste} + 9\Delta\lambda_1 \kappa \gamma \beta e^{\beta I_{1_{n+1}}} \end{cases} - \left[ \alpha + \gamma \left( 1 - e^{\beta I_{1_{n+1}}} \right) \right] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ <p>para <math>I_{1_{n+1}}</math> e <math>\Delta\lambda_1</math>.</p> <p>(ii) Atualize as variáveis</p> $\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D = \left[ 1 - \frac{\Delta\lambda_1 (2\mu + C)}{\left\  \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{D^{teste}} \right\ } \right] \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{D^{teste}}$ $\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D = \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^{D^{teste}} - 2\mu \Delta\lambda_1 \mathbf{N}_{n+1}$ $\bar{\boldsymbol{\chi}}_{n+1}^D = \bar{\boldsymbol{\chi}}_n^D + \Delta\lambda_1 C \mathbf{N}_{n+1}$ $\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1} = \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D + \frac{1}{3} I_{1_{n+1}} \mathbf{I}$ $\mathbf{F}_{n+1}^p = \exp \left( \Delta\lambda_1 \left. \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \right _{n+1} \right) \mathbf{F}_n^p$
---

$$[M^{c1}]_{11} = \frac{\partial f_1^{c1}}{\partial q_1^{c1}} = \frac{\partial f_1^{c1}}{\partial \Delta\lambda_1} = \begin{cases} 2\mu + C, & \text{if } \left\| \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{D^{teste}} \right\| - (2\mu + C) \Delta\lambda_1 > 0 \\ -(2\mu + C), & \text{if } \left\| \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{D^{teste}} \right\| - (2\mu + C) \Delta\lambda_1 \leq 0 \end{cases} \quad (\text{E.31})$$

$$[M^{c1}]_{12} = \frac{\partial f_1^{c1}}{\partial q_2^{c1}} = \frac{\partial f_1^{c1}}{\partial I_1} = -\gamma \beta e^{\beta I_1} \quad (\text{E.32})$$

$$[M^{c1}]_{21} = \frac{\partial f_2^{c1}}{\partial q_1^{c1}} = \frac{\partial f_2^{c1}}{\partial \Delta\lambda_1} = 9\kappa \beta \gamma e^{\beta I_1} \quad (\text{E.33})$$

$$[M^{c1}]_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial q_2^{c1}} = \frac{\partial f_2^{c1}}{\partial I_1} = 1 + 9\kappa \beta^2 \gamma e^{\beta I_1} \Delta\lambda_1. \quad (\text{E.34})$$

## E.2 Caso 2: mapeamento de retorno para $\mathcal{F}_2$

Quando o algoritmo mostrado na tabela 5.3 indicar que o carregamento estiver ocorrendo para a superfície  $\mathcal{F}_2$ , a determinação do novo estado deve ser realizada de acordo com o seguinte modelo constitutivo:

1. A relação constitutiva hiperelástica

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\tau}} &= \mathbb{D}(\eta) \mathbf{E}^e \\ &= 2\mu(\eta) \mathbf{E}^e + \left( \kappa(\eta) - \frac{2}{3} \mu(\eta) \right) \text{tr}(\mathbf{E}^e) \mathbf{I} \\ \mathbb{D}(\eta) &= 2\mu(\eta) \mathbb{I} + \left( \kappa(\eta) - \frac{2}{3} \mu(\eta) \right) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \end{aligned}$$

## 2. Função de escoamento

$$\mathcal{F}_2(\bar{\tau}, \bar{\chi}^D, \omega) = \|\bar{\mathbf{S}}^D\|^2 - F_c(I_1, \omega) \leq 0 \quad (\text{E.35})$$

em que

$$F_c(I_1, \omega) = R^2(\omega) - (I_1 - \omega)^2, \quad \text{para } I_1 \leq I_1^c(\omega).$$

 3. Evolução do endurecimento do *Cap*

$$\dot{\omega} = h'(\omega) \text{tr}(\bar{\mathbf{D}}^p)$$

## 4. Evolução do endurecimento cinemático

$$\dot{\bar{\chi}}^D = C\mathbb{I}^D \bar{\mathbf{D}}^p.$$

Aqui

$$\bar{\mathbf{D}}^p = \Delta\lambda_2 \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \bar{\tau}} \quad (\text{E.36})$$

Novamente, em uma primeira análise o mapeamento de retorno associado a este caso consiste em encontrar  $\mathbf{E}_{n+1}^e$ ,  $\bar{\chi}_{n+1}^D$ ,  $\omega_{n+1}$  e  $\Delta\lambda_2$  que satisfaçam o seguinte sistema de equações não lineares

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}_{n+1}^e - \mathbf{E}_{n+1}^{e\text{teste}} + \Delta\lambda_2 \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \bar{\tau}} \Big|_{n+1} \\ \bar{\chi}_{n+1}^D - \bar{\chi}_n^D - \Delta\lambda_2 C\mathbb{I}^D \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \bar{\tau}} \Big|_{n+1} \\ \omega_{n+1} - \omega_n - \Delta\lambda_2 h'(\omega) \Big|_{n+1} \text{tr} \left( \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \bar{\tau}} \Big|_{n+1} \right) \\ \mathcal{F}_2(\bar{\tau}_{n+1}, \bar{\chi}_{n+1}^D, \omega_{n+1}) \end{array} \right. = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E.37})$$

com  $\Delta\lambda_2 > 0$ . Porém, é possível escrever o sistema de equações, Eq.(E.37), de forma mais reduzida. Para tanto, pode-se proceder de forma análoga ao caso 1, isto é, considere

$$\frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \bar{\tau}} = 2\|\bar{\mathbf{S}}^D\| \frac{\partial \|\bar{\mathbf{S}}^D\|}{\partial \bar{\tau}} - \frac{\partial F_c(I_1, \omega)}{\partial \bar{\tau}} \quad (\text{E.38})$$

mas como

$$\frac{\partial F_c(I_1, \omega)}{\partial \bar{\tau}} = \frac{\partial F_c(I_1, \omega)}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \bar{\tau}} \quad (\text{E.39})$$

e utilizando Eq.(E.5) juntamente com a Eq.(E.7) permite que a Eq.(E.38) possa ser reescrita como

$$\frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \bar{\tau}} = 2\bar{\mathbf{S}}^D - \frac{\partial F_c(I_1, \omega)}{\partial I_1} \mathbf{I}. \quad (\text{E.40})$$



Agora, multiplicando a Eq.(E.37.1) por  $\mathbb{D}$ , pela esquerda, e usando a Eq.(E.38) juntamente com as Eq.(E.10) e Eq.(E.11) pode-se escrever que

$$\begin{aligned} \mathbb{D} \left( \mathbf{E}_{n+1}^e - \mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}} + \Delta\lambda_2 \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \Big|_{n+1} \right) &= \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1} - \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^{teste} + 2\Delta\lambda_2 \mathbb{D} \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D - \Delta\lambda_2 \frac{\partial F_c(I_1, \omega)}{\partial I_1} \Big|_{n+1} \mathbb{D} \mathbf{I} \\ &= \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1} - \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^{teste} + \left( 4\mu \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D - 3\kappa \frac{\partial F_c(I_1, \omega)}{\partial I_1} \Big|_{n+1} \mathbf{I} \right) \Delta\lambda_2 \end{aligned}$$

ou

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1} = \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^{teste} + 3\Delta\lambda_2 \kappa \frac{\partial F_c(I_1, \omega)}{\partial I_1} \Big|_{n+1} \mathbf{I} - 4\mu \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D \Delta\lambda_2. \quad (\text{E.41})$$

Decompondo agora a Eq.(E.41) em sua parte desviadora e hidrostática pode-se escrever que

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D + \frac{1}{3} I_{1_{n+1}} \mathbf{I} = \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^{D^{teste}} + \frac{1}{3} I_{1_{n+1}}^{teste} \mathbf{I} + 3\Delta\lambda_2 \kappa \frac{\partial F_c(I_1, \omega)}{\partial I_1} \Big|_{n+1} \mathbf{I} - 4\mu \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D \Delta\lambda_2 \quad (\text{E.42})$$

e tomando o seu traço,

$$I_{1_{n+1}} = I_{1_{n+1}}^{teste} + 9\kappa \Delta\lambda_2 \frac{\partial F_c(I_1, \omega)}{\partial I_1} \Big|_{n+1}. \quad (\text{E.43})$$

Então a atualização da tensão fica

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D = \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^{D^{teste}} - 4\mu \Delta\lambda_2 \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D. \quad (\text{E.44})$$

Da forma análoga, partindo da Eq.(E.37.2) e fazendo uso da a Eq.(E.38) e Eq.(5.22) pode-se escrever

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\chi}}_{n+1}^D - \bar{\boldsymbol{\chi}}_n^D - \Delta\lambda_2 C \mathbb{I}^D \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \Big|_{n+1} &= \bar{\boldsymbol{\chi}}_{n+1}^D - \bar{\boldsymbol{\chi}}_n^D - \Delta\lambda_2 C \mathbb{I}^D \left[ 2\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D - \frac{\partial F_c(I_1, \omega)}{\partial I_1} \Big|_{n+1} \mathbf{I} \right] \\ &= \bar{\boldsymbol{\chi}}_{n+1}^D - \bar{\boldsymbol{\chi}}_n^D - 2\Delta\lambda_2 C \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D \end{aligned}$$

ou

$$\bar{\boldsymbol{\chi}}_{n+1}^D = \bar{\boldsymbol{\chi}}_n^D + 2\Delta\lambda_2 C \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D. \quad (\text{E.45})$$

Já partindo da Eq.(E.37.3) e considerando que

$$\begin{aligned} \text{tr} \left( \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \Big|_{n+1} \right) &= \text{tr} \left( 2\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D - \frac{\partial F_c(I_1, \omega)}{\partial I_1} \Big|_{n+1} \mathbf{I} \right) \\ &= -3 \frac{\partial F_c(I_1, \omega)}{\partial I_1} \Big|_{n+1} \end{aligned} \quad (\text{E.46})$$

pode-se escrever que

$$\omega_{n+1} = \omega_n - 3\Delta\lambda_2 h'(\omega) \Big|_{n+1} \frac{\partial F_c(I_1, \omega)}{\partial I_1} \Big|_{n+1}. \quad (\text{E.47})$$

Tomando agora

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D &= \bar{\tau}_{n+1}^D - \bar{\chi}_{n+1}^D \\ &= \bar{\tau}_{n+1}^{D^{teste}} - 4\mu\Delta\lambda_2\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D - \bar{\chi}_n^D - 2H\Delta\lambda_2\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D\end{aligned}\quad (\text{E.48})$$

,e tendo em mente que

$$\bar{\chi}_{n+1}^{D^{teste}} = \bar{\chi}_n^D, \quad (\text{E.49})$$

então

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D &= \left( \bar{\tau}_{n+1}^{D^{teste}} - \bar{\chi}_{n+1}^{D^{teste}} \right) - (4\mu - 2H) \Delta\lambda_2 \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D \\ &= \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{D^{teste}} - (4\mu - 2H) \Delta\lambda_2 \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D\end{aligned}\quad (\text{E.50})$$

o que leva a

$$\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{D^{teste}} = \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D [1 + 2(2\mu - C) \Delta\lambda_2] \quad (\text{E.51})$$

logo

$$\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D = \frac{\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{D^{teste}}}{[1 + 2(2\mu - C) \Delta\lambda_2]}. \quad (\text{E.52})$$

Tomando a norma em ambos os lados da Eq.(E.52)

$$\|\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D\| = \frac{\|\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{D^{teste}}\|}{|1 + 2(2\mu - C) \Delta\lambda_2|}. \quad (\text{E.53})$$

Perceba também que

$$\left. \frac{\partial F_c(I_1, \omega)}{\partial I_1} \right|_{n+1} = -2(I_{1_{n+1}} - \omega_{n+1}). \quad (\text{E.54})$$

O objetivo então torna-se em encontrar  $I_{1_{n+1}}$ ,  $\omega_{n+1}$  e  $\Delta\lambda_2$  que resolvam o seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned}f_1^{c2} &= I_{1_{n+1}} - I_{1_{n+1}}^{teste} - 9\kappa\Delta\lambda_2 \left. \frac{\partial F_c(I_1, \omega)}{\partial I_1} \right|_{n+1} \\ &= I_{1_{n+1}} - I_{1_{n+1}}^{teste} + 18\kappa(I_{1_{n+1}} - \omega_{n+1}) \Delta\lambda_2\end{aligned}\quad (\text{E.55})$$

e

$$\begin{aligned}f_2^{c2} &= \omega_{n+1} - \omega_n + 3\Delta\lambda_2 h'(\omega) \Big|_{n+1} \left. \frac{\partial F_c(I_1, \omega)}{\partial I_1} \right|_{n+1} \\ &= \omega_{n+1} - \omega_n - 6 h'(\omega) \Big|_{n+1} (I_{1_{n+1}} - \omega_{n+1}) \Delta\lambda_2\end{aligned}\quad (\text{E.56})$$

com

$$h'(\omega_{n+1}) = \frac{e^{-D\chi(\omega_{n+1})}}{WD\chi'(\omega_{n+1})} \quad (\text{E.57})$$

$$\chi'(\omega_{n+1}) = 1 - R'(\omega_{n+1}) \quad (\text{E.58})$$

Tabela E.2: Algoritmo de mapeamento de retorno para o Caso 2

<p>(i) Uma vez determinada que <math>\mathcal{F}_2</math> está ativa resolva:</p> $\begin{cases} I_{1_{n+1}} - I_{1_{n+1}}^{teste} + 18\kappa (I_{1_{n+1}} - \omega_{n+1}) \Delta\lambda_2 \\ \omega_{n+1} - \omega_n - 6 h'(\omega) _{n+1} (I_{1_{n+1}} - \omega_{n+1}) \Delta\lambda_2 \\ \frac{\ \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{D^{teste}}\ ^2}{(1+2(2\mu-C)\Delta\lambda_2)^2} - F_c(I_{1_{n+1}}, \omega_{n+1}) \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ <p>para <math>I_{1_{n+1}}</math>, <math>\omega_{n+1}</math> e <math>\Delta\lambda_2</math>.</p> <p>(ii) Atualize as variáveis</p> $\begin{aligned} \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D &= \frac{\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{D^{teste}}}{[1+2(2\mu-C)\Delta\lambda_2]} \\ \bar{\tau}_{n+1}^D &= \bar{\tau}_{n+1}^{D^{teste}} - 4\mu\Delta\lambda_2\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D \\ \bar{\chi}_{n+1}^D &= \bar{\chi}_n^D + 2\Delta\lambda_2 C \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D \\ \bar{\tau}_{n+1} &= \bar{\tau}_{n+1}^D + \frac{1}{3}I_{1_{n+1}} \mathbf{I} \\ \mathbf{F}_{n+1}^p &= \exp\left(\Delta\lambda_2 \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \bar{\tau}} \Big _{n+1}\right) \mathbf{F}_n^p \end{aligned}$
---

e também da Eq.(E.37.4) e de Eq.(E.53)

$$f_3^{c2} = \frac{\|\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{D^{teste}}\|^2}{(1+2(2\mu-C)\Delta\lambda_2)^2} - F_c(I_{1_{n+1}}, \omega_{n+1}). \quad (\text{E.59})$$

Na tabela E.2 é apresentado um resumo que compreende o algoritmo de mapeamento de retorno para o caso de  $\mathcal{F}_2$  ativo.

### E.2.1 Determinação da matriz tangente local para o caso 2

Seja  $\bar{q}^{c2} = [I_{1_{n+1}}, \omega_{n+1}, \Delta\lambda_2]$  o vetor das variáveis a determinar. Então a matriz tangente local  $\mathbf{M}^{caso2}$  fica da seguinte forma

$$[M^{c2}]_{11} = \frac{\partial f_1^{c2}}{\partial q_1^{c2}} = \frac{\partial f_1^{c2}}{\partial I_{1_{n+1}}} = 1 + 18\kappa\Delta\lambda_2 \quad (\text{E.60})$$

$$[M^{c2}]_{12} = \frac{\partial f_1^{c2}}{\partial q_2^{c2}} = \frac{\partial f_1^{c2}}{\partial \omega_{n+1}} = -18\kappa\Delta\lambda_2 \quad (\text{E.61})$$

$$[M^{c2}]_{13} = \frac{\partial f_1^{c2}}{\partial q_3^{c2}} = \frac{\partial f_1^{c2}}{\partial \Delta\lambda_2} = 18\kappa (I_{1_{n+1}} - \omega_{n+1}) \quad (\text{E.62})$$

Agora como  $F_c = R(\omega_{n+1})^2 - (I_{1_{n+1}} - \omega_{n+1})^2$  então

$$\frac{\partial F_c}{\partial \omega_{n+1}} = 2R(\omega_{n+1}) R'(\omega_{n+1}) + 2(I_{1_{n+1}} - \omega_{n+1}) \quad (\text{E.63})$$

e

$$\frac{\partial F_c}{\partial I_{1_{n+1}}} = -2(I_{1_{n+1}} - \omega_{n+1}). \quad (\text{E.64})$$

Então

$$[M^{c2}]_{21} = \frac{\partial f_2^{c2}}{\partial q_1^{c2}} = \frac{\partial f_2^{c2}}{\partial I_{1_{n+1}}} = -6h'(\omega_{n+1}) \Delta\lambda_2 \quad (\text{E.65})$$

$$\begin{aligned} [M^{c2}]_{22} &= \frac{\partial f_2}{\partial q_2} = \frac{\partial f_2}{\partial \omega_{n+1}} \\ &= 1 + 6h'(\omega_{n+1}) \Delta\lambda_2 - 6h''(\omega_{n+1}) \Delta\lambda_2 (I_{1_{n+1}} - \omega_{n+1}) \end{aligned} \quad (\text{E.66})$$

$$[M^{c2}]_{23} = \frac{\partial f_2^{c2}}{\partial q_3^{c2}} = \frac{\partial f_2^{c2}}{\partial \Delta\lambda_2} = -6h'(\omega_{n+1}) (I_{1_{n+1}} - \omega_{n+1}) \quad (\text{E.67})$$

com

$$h''(\omega_{n+1}) = -\frac{e^{-D\chi(\omega_{n+1})}}{W} - \frac{e^{-D\chi(\omega_{n+1})}}{WD} \frac{\chi''(\omega_{n+1})}{[\chi'(\omega_{n+1})]^2}. \quad (\text{E.68})$$

Finalmente,

$$[M^{c2}]_{31} = \frac{\partial f_3^{c2}}{\partial q_1} = \frac{\partial f_3^{c2}}{\partial I_{1_{n+1}}} = -\frac{\partial F_c}{\partial I_{1_{n+1}}} \quad (\text{E.69})$$

$$[M^{c2}]_{32} = \frac{\partial f_3^{c2}}{\partial q_2^{c2}} = \frac{\partial f_3^{c2}}{\partial \omega_{n+1}} = -\frac{\partial F_c}{\partial \omega_{n+1}} \quad (\text{E.70})$$

$$\begin{aligned} [M^{c2}]_{33} &= \frac{\partial f_3^{c2}}{\partial q_3^{c2}} = \frac{\partial f_3}{\partial \Delta\lambda_2} \\ &= -4 \frac{[2\mu + C] \|\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{D^{teste}}\|^2}{(1 + 2[2\mu + C] \Delta\lambda_2)^3} \end{aligned} \quad (\text{E.71})$$

### E.3 Caso 3: mapeamento de retorno para $\mathcal{F}_3$

Quando o algoritmo mostrado na tabela 5.3 indicar que o carregamento estiver ocorrendo na superfície  $\mathcal{F}_3$ , a determinação do novo estado deve ser realizada de acordo com o seguinte modelo constitutivo:

1. A relação constitutiva hiperelástica

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\tau}} &= \mathbb{D}(\eta) \mathbf{E}^e \\ &= 2\mu(\eta) \mathbf{E}^e + \left( \kappa(\eta) - \frac{2}{3}\mu(\eta) \right) \text{tr}(\mathbf{E}^e) \mathbf{I} \\ \mathbb{D}(\eta) &= 2\mu(\eta) \mathbb{I} + \left( \kappa(\eta) - \frac{2}{3}\mu(\eta) \right) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}; \end{aligned}$$

2. Função de escoamento

$$\mathcal{F}_3(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\boldsymbol{\chi}}^D) = \|\bar{\mathbf{S}}^D\|^2 - F_t(I_1) \leq 0 \quad (\text{E.72})$$

com

$$F_t(I_1) = R_T^2 - I_1^2, \quad \text{com } I_1 \geq I_1^T.$$

3. Evolução do endurecimento do *Cap*

$$\dot{\omega} = h'(\omega) \operatorname{tr}(\bar{\mathbf{D}}^p);$$

## 4. Evolução do endurecimento cinemático

$$\dot{\bar{\chi}}^D = C\mathbb{T}^D \bar{\mathbf{D}}^p;$$

Aqui

$$\bar{\mathbf{D}}^p = \Delta\lambda_3 \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial \bar{\tau}}. \quad (\text{E.73})$$

O mapeamento de retorno associado a este caso consiste em encontrar  $\mathbf{E}_{n+1}^e$ ,  $\bar{\chi}_{n+1}^D$ ,  $\omega_{n+1}$  e  $\Delta\lambda_3$  que satisfaçam o seguinte sistema de equações não lineares

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{n+1}^e - \mathbf{E}_{n+1}^{e\text{teste}} + \Delta\lambda_3 \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial \bar{\tau}} \Big|_{n+1} \\ \bar{\chi}_{n+1}^D - \bar{\chi}_n^D - \Delta\lambda_3 C\mathbb{T}^D \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial \bar{\tau}} \Big|_{n+1} \\ \omega_{n+1} - \omega_n - \Delta\lambda_3 h'(\omega) \Big|_{n+1} \operatorname{tr} \left( \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial \bar{\tau}} \Big|_{n+1} \right) \\ \mathcal{F}_3(\bar{\tau}_{n+1}, \bar{\chi}_{n+1}^D) \end{cases} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E.74})$$

com  $\Delta\lambda_2 > 0$ . Porém, como feito nos casos anteriores, aqui também é possível escrever o sistema de equações acima, Eq.(E.37), de forma mais reduzida. Para isso, permita que

$$\frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial \bar{\tau}} = 2 \|\bar{\mathbf{S}}^D\| \frac{\partial \|\bar{\mathbf{S}}^D\|}{\partial \bar{\tau}} - \frac{\partial F_t(I_1)}{\partial \bar{\tau}} \quad (\text{E.75})$$

com

$$\frac{\partial F_t(I_1)}{\partial \bar{\tau}} = -2I_1 \mathbf{I} \quad (\text{E.76})$$

$$= \frac{\partial F_t(I_1)}{\partial I_1} \mathbf{I} \quad (\text{E.77})$$

e utilizando Eq.(E.5) com a Eq.(E.75) pode ser escrita como

$$\frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial \bar{\tau}} = 2\bar{\mathbf{S}}^D - \frac{\partial F_t(I_1)}{\partial I_1} \mathbf{I}.$$

Agora, multiplicando a Eq.(E.74.1) por  $\mathbb{D}$ , pela esquerda, e usando a Eq.(E.38) juntamente com as Eq.(E.10) e Eq.(E.11) pode-se escrever que

$$\begin{aligned} \mathbb{D} \left( \mathbf{E}_{n+1}^e - \mathbf{E}_{n+1}^{e\text{teste}} + \Delta\lambda_3 \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial \bar{\tau}} \Big|_{n+1} \right) &= \bar{\tau}_{n+1} - \bar{\tau}_{n+1}^{\text{teste}} + 2\Delta\lambda_3 \mathbb{D} \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D - \Delta\lambda_3 \frac{\partial F_t(I_1)}{\partial I_1} \Big|_{n+1} \mathbb{D} \mathbf{I} \\ &= \bar{\tau}_{n+1} - \bar{\tau}_{n+1}^{\text{teste}} + \left( 4\mu \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D - 3\kappa \frac{\partial F_t(I_1)}{\partial I_1} \Big|_{n+1} \mathbf{I} \right) \Delta\lambda_3 \end{aligned}$$

ou

$$\bar{\tau}_{n+1} = \bar{\tau}_{n+1}^{teste} - \left( 4\mu \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D - 3\kappa \frac{\partial F_t(I_1)}{\partial I_1} \Big|_{n+1} \mathbf{I} \right) \Delta\lambda_3. \quad (\text{E.78})$$

Decompondo agora a Eq.(E.78) em sua parte desviadora e hidrostática pode-se escrever que

$$\bar{\tau}_{n+1}^D + \frac{1}{3} I_{1_{n+1}} \mathbf{I} = \bar{\tau}_{n+1}^{Dteste} + \frac{1}{3} I_{1_{n+1}}^{teste} \mathbf{I} - \left( 4\mu \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D - 3\kappa \frac{\partial F_t(I_1)}{\partial I_1} \Big|_{n+1} \mathbf{I} \right) \Delta\lambda_3 \quad (\text{E.79})$$

e tomando o seu traço

$$I_{1_{n+1}} = I_{1_{n+1}}^{teste} - 18\kappa I_{1_{n+1}} \Delta\lambda_3 \quad (\text{E.80})$$

e substituindo na equação anterior permite que a atualização da tensão possa ser dada pela seguinte relação

$$\bar{\tau}_{n+1}^D = \bar{\tau}_{n+1}^{Dteste} - 4\mu \Delta\lambda_3 \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D. \quad (\text{E.81})$$

De forma análoga, da Eq.(E.74.2) vem

$$\begin{aligned} \bar{\chi}_{n+1}^D - \bar{\chi}_n^D - \Delta\lambda_3 C \mathbb{I}^D \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial \bar{\tau}} \Big|_{n+1} &= \bar{\chi}_{n+1}^D - \bar{\chi}_n^D - \Delta\lambda_3 C \mathbb{I}^D \left[ 2\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D - \frac{\partial F_t(I_1)}{\partial I_1} \Big|_{n+1} \mathbf{I} \right] \\ &= \bar{\chi}_{n+1}^D - \bar{\chi}_n^D - 2\Delta\lambda_3 C \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D \end{aligned}$$

ou

$$\bar{\chi}_{n+1}^D = \bar{\chi}_n^D + 2\Delta\lambda_3 C \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D. \quad (\text{E.82})$$

Sabendo ainda que

$$\begin{aligned} \text{tr} \left( \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial \bar{\tau}} \Big|_{n+1} \right) &= \text{tr} \left( 2\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D - \frac{\partial F_t(I_1)}{\partial I_1} \Big|_{n+1} \mathbf{I} \right) \\ &= -3 \frac{\partial F_t(I_1)}{\partial I_1} \Big|_{n+1} \end{aligned} \quad (\text{E.83})$$

pode-se escrever a Eq.(E.74.3) como

$$\omega_{n+1} = \omega_n - 3\Delta\lambda_3 h'(\omega) \Big|_{n+1} \frac{\partial F_t(I_1)}{\partial I_1} \Big|_{n+1}. \quad (\text{E.84})$$

Tomando agora a diferença entre as Eq.(E.81) e Eq.(E.82) e sabendo que  $\bar{\chi}_{n+1}^{Dteste} = \bar{\chi}_n^D$

$$\bar{\tau}_{n+1}^D - \bar{\chi}_{n+1}^D = \bar{\tau}_{n+1}^{Dteste} - \bar{\chi}_{n+1}^{Dteste} - 4\mu \Delta\lambda_3 \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D - 2\Delta\lambda_3 C \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D \quad (\text{E.85})$$

assim

$$\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D = \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{Dteste} - 2(2\mu + C) \Delta\lambda_3 \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D \quad (\text{E.86})$$

ou

$$\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{Dteste} = \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D [1 + 2(2\mu + C) \Delta\lambda_3] \quad (\text{E.87})$$

Tabela E.3: Algoritmo de mapeamento de retorno para o Caso 3

<p>(i) Uma vez determinada que <math>\mathcal{F}_3</math> está ativa resolva:</p> $\frac{\ \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{D^{teste}}\ ^2}{[1+2(2\mu+C)\Delta\lambda_3]^2} - R_T^2 + \frac{(I_{1_{n+1}}^{teste})^2}{(1+18\kappa\Delta\lambda_3)^2} = 0$ <p>para <math>\Delta\lambda_3</math>.</p> <p>(ii) Atualize as variáveis</p> $\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D = \frac{\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{D^{teste}}}{[1+2(2\mu+C)\Delta\lambda_3]}$ $\bar{\tau}_{n+1}^D = \bar{\tau}_{n+1}^{D^{teste}} - 4\mu\Delta\lambda_3\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D$ $\bar{\chi}_{n+1}^D = \bar{\chi}_n^D + 2\Delta\lambda_3 C \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D$ $I_{1_{n+1}} = \frac{I_{1_{n+1}}^{teste}}{1+18\kappa\Delta\lambda_3}$ $\bar{\tau}_{n+1} = \bar{\tau}_{n+1}^D + \frac{1}{3}I_{1_{n+1}}\mathbf{I}$ $\mathbf{F}_{n+1}^p = \exp\left(\Delta\lambda_3 \left. \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial \bar{\tau}} \right _{n+1}\right) \mathbf{F}_n^p$
--

e deste modo

$$\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D = \frac{\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{D^{teste}}}{[1 + 2(2\mu + C)\Delta\lambda_3]}. \quad (\text{E.88})$$

Agora da Eq.(E.80)

$$I_{1_{n+1}} = \frac{I_{1_{n+1}}^{teste}}{1 + 18\kappa\Delta\lambda_3}. \quad (\text{E.89})$$

Para este caso particular todas as equações de evolução, Eq.(E.81), Eq.(E.82), Eq.(E.84) e também Eq.(E.89), ficam dependentes apenas de  $\Delta\lambda_3$ . Assim, a única equação a ser imposta é a Eq.(E.74.4) que por sua vez pode ser escrita como

$$\begin{aligned} f_1^{c3} &= \|\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^D\|^2 - F_t(I_{1_{n+1}}) \\ &= \frac{\|\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{D^{teste}}\|^2}{[1 + 2(2\mu + C)\Delta\lambda_3]^2} - R_T^2 + \frac{(I_{1_{n+1}}^{teste})^2}{(1 + 18\kappa\Delta\lambda_3)^2}. \end{aligned} \quad (\text{E.90})$$

Na tabela E.3 é apresentado um resumo que compreende o algoritmo de mapeamento de retorno para o caso de  $\mathcal{F}_3$  ativo.

Resta ainda determinar o parâmetro  $\omega_{n+1}$ . Sua atualização é feita iterativamente pela Eq.(E.84).

### E.3.1 Determinação da matriz tangente local para o caso 3.

A matriz tangente local para o caso 3,  $\mathbf{M}^{c3}$ , é bastante simples uma vez que ela é tem apenas uma entrada. Neste caso  $\bar{q}^{c3} = [\Delta\lambda_3]$  é a variável a determinar. Então

$$\begin{aligned}
[M^{c3}]_{11} &= \frac{\partial f_1^{c3}}{\partial q_1^{c3}} = \frac{\partial f_1^{c3}}{\partial \Delta \lambda_3} \\
&= -\frac{4(2\mu + C) \left\| \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^{D^{teste}} \right\|^2}{[1 + 2(2\mu + C) \Delta \lambda_3]^3} - \frac{36\kappa \left( I_{1_{n+1}}^{teste} \right)^2}{(1 + 18\kappa \Delta \lambda_3)^3}.
\end{aligned} \tag{E.91}$$