

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA APLICADA AO PROJETO
DE MECANISMOS FLEXÍVEIS**

Dissertação submetida à

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

para a obtenção do grau de

MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA

MIGUEL TOBIAS BAHIA

Florianópolis, novembro de 2005

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA APLICADA AO PROJETO DE
MECANISMOS FLEXÍVEIS**

MIGUEL TOBIAS BAHIA

**Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de
MESTRE EM ENGENHARIA**

**ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA
sendo aprovada em sua forma final**

Marcelo Krajnc Alves, Ph. D. – Orientador

João Carlos Arantes Costa Junior, Dr. Eng. – Co-orientador

José Antônio Bellini da Cunha Neto, Dr. – Coordenador do Curso

BANCA EXAMINADORA

Edison da Rosa, Dr. Eng. – Presidente

Clóvis Caesar Gonzaga, Dr.

Raul Guenther, Dr. Sc.

**Aos meus pais José e Olinda e
à minha esposa Hanen.**

Agradecimentos

Ao meu caríssimo orientador Marcelo Krajnc Alves que, com seu conhecimento, disposição e oportuno senso de humor, tornou possível para mim vencer este desafio.

Ao meu co-orientador João Carlos Arantes Costa Jr. que, mesmo estando geograficamente distante, teve um papel importantíssimo na execução deste trabalho.

Aos amigos do GRANTE, em especial ao Antônio e ao Cléber, que compartilharam as dificuldades, os deliciosos almoços do RU, e estiveram sempre disponíveis para ajudar.

Aos amigos do GMAC, em especial à Lindaura, ao Guilherme, ao Hilbert e ao Everaldo, que tornaram esta tarefa bem mais divertida. Um abraço para todos.

Aos amigos de Joinville, a “turma do violão”, que provavelmente nunca lerão este trabalho, mas estavam torcendo bastante por esta vitória.

Aos professores Milton Procópio de Borba e Renato Barbieri, da UDESC, pelas cartas de recomendação.

À UFSC, à CAPES, aos professores do POSMEC, aos membros da banca examinadora e a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste curso de mestrado.

Conteúdo

Simbologia	viii
Resumo	x
Abstract	xi
Apresentação	xii
1 Mecanismos Flexíveis e Otimização Topológica	1
1.1 Mecanismos Flexíveis	1
1.2 Síntese de mecanismos flexíveis	7
1.3 Otimização Topológica	9
1.3.1 Modelos de material	14
1.3.2 Problemas relacionados à otimização topológica	18
1.4 Conclusões	27
2 Princípios Energéticos e Implementação Numérica	28
2.1 Princípios Energéticos	28
2.2 Formulação de Mecanismos	35
2.3 Cargas e molas distribuídas	38
2.4 Discretização por elementos finitos	41
2.5 Interpolação para quantidades vetoriais	45
2.6 Equação constitutiva	51
2.7 Determinação da tensão de Von Mises	52
2.8 Determinação da solução fraca aproximada \vec{u}_o	53
2.8.1 Cargas e molas concentradas	53
2.8.2 Cargas e molas distribuídas	56
2.9 Conclusões	64
3 Projeto Ótimo com Restrição de Material	65
3.1 Formulação do problema - Restrição de Material	65
3.1.1 Definição do problema	65
3.1.2 Formulação do problema discretizado	68

3.1.3	Método do Lagrangeano Aumentado	69
3.1.4	Determinação da função objetivo e das restrições (restrição de material)	71
3.2	Refino h -adaptativo da malha de elementos finitos	76
3.2.1	Estratégia de refino da malha	78
3.2.2	Processo de suavização Laplaciano condicional	79
3.3	Exemplo 1: Mecanismo inversor de deslocamento	80
3.4	Exemplo 2 : Mecanismo de esmagamento	84
3.5	Exemplo 3 : Mecanismo de agarrar	87
3.6	Exemplo 4 : Mecanismo tipo alicata	91
3.7	Conclusões	94
4	Restrições de Fadiga em Mecanismos Flexíveis	96
4.1	Tensão em Otimização Topológica	96
4.2	Um critério de tensão para o modelo SIMP	97
4.3	Aspectos da solução	98
4.3.1	Restrição de tensão local	98
4.3.2	Restrições de tensão integradas	99
4.4	Prevenção de Falha	100
4.4.1	Falha por fadiga	103
4.4.2	Fadiga sob carregamento multiaxial	111
4.5	Definição do modelo material	113
4.5.1	Critério de tensão relaxação- ϵ	114
4.6	Aplicação do carregamento nos mecanismos	115
4.7	Restrições Locais via <i>Patches Nodais</i>	119
4.7.1	<i>Patches</i> nodais interiormente disjuntos	120
4.7.2	Formulação do problema distribuído ϵ -relaxado	125
4.7.3	Restrição de tensão com relaxação- ϵ integrada em <i>patches</i>	127
4.8	Conclusões	128
5	Projeto Ótimo com Restrição de Fadiga	129
5.1	Formulação do Problema -Restrições de Fadiga	129
5.1.1	Descrição do problema	129
5.1.2	Formulação contínua do problema	132
5.1.3	Restrição de tensão local com relaxação- ϵ	132
5.1.4	Formulação do problema discretizado com restrições integradas	133
5.1.5	Método do Lagrangeano Aumentado	134
5.2	Determinação da função objetivo e das restrições	135
5.3	Resultados obtidos - Mecanismos Flexíveis com restrição nas tensões de fadiga	141

5.4	Exemplo 1: Mecanismo inversor de deslocamento	141
5.5	Exemplo 2: Mecanismo de agarrar	144
5.6	Exemplo 3: Mecanismo de esmagamento I	146
5.7	Exemplo 4: Mecanismo de esmagamento II	149
5.8	Conclusões	152
6	Considerações Finais	153
A	Descrição do Procedimento	163
B	Algoritmo de Otimização	169
B.1	O problema de otimização	169
B.2	Método do Lagrangeano Aumentado	171
B.3	Método do Gradiente Projetado	172
B.4	Determinação do operador projeção oblíquo - $[\mathbf{P}_q]$	173
B.5	Aproximação Quase-Newton	174

Lista de Figuras

1.2	Alicate convencional	3
1.1	Mecanismo biela-manivela	3
1.3	Alicate flexível	4
1.4	Tipos de mecanismos: (a) mecanismo de corpo rígido convencional; (b) de flexibilidade distribuída e (c) de flexibilidade concentrada.	4
1.5	Classificação geral dos sistemas mecânicos	5
1.6	Grampeador flexível	6
1.7	Grampeador convencional (esquerda) e grampeador flexível (direita): redução drástica do número de peças	6
1.8	Otimização estrutural: otimização de parâmetros (à esquerda), otimização topológica (à direita) e otimização de forma (abaixo).	10
1.9	Discretização do domínio utilizando barras ou vigas ("ground structure")	12
1.10	Uma possível solução	12
1.11	Otimização estrutural obtida por Michell	12
1.12	Resultado obtido pela otimização topológica para o problema de Michell	13
1.13	Fluxograma geral de otimização topológica de uma estrutura	14
1.14	Microestruturas para o método de homogeneização	16
1.15	Curvas do modelo SIMP	18
1.16	Dependência de malha.	19
1.17	Elemento finito <i>Tri3</i>	21
1.18	Coordenadas do elemento finito <i>Tri3</i>	21
1.19	Condição de simetria no eixo- x	22
1.20	Condição de simetria eixo- y	22
1.21	Topologia apresentando instabilidades de tabuleiro.	24
2.1	Um corpo elástico submetido à um carregamento	29
2.2	Um corpo elástico submetido a um carregamento \vec{t}_1	31
2.3	Um corpo elástico submetido ao carregamento \vec{t}_2	32
2.4	Modelo de mecanismo	36
2.5	Deformação da mola (compressão)	37
2.6	Deformação da mola (tração)	38
2.7	Definição do problema distribuído para $\vec{u}_o(\vec{x})$	39

2.8	Definição do problema distribuído para $\vec{u}_s(\vec{x})$	40
2.9	Elemento bidimensional triangular	42
2.10	Quantidades vetoriais nodais para os elemento: (a) unidimensional, (b) bidimensional e (c) tridimensional.	45
2.11	Elemento <i>Tri3</i>	46
2.12	Mudança de variáveis	48
2.13	Modelo de mecanismo	53
2.14	Definição do problema distribuído para $\vec{u}_o(\vec{x})$	56
2.15	Mola distribuída na face do elemento	57
2.16	Mudança de variável	57
2.17	Número da face do elemento	57
3.1	Modelo de mecanismo	66
3.2	Estratégia de refino para elementos <i>Tri3</i>	77
3.3	Elemento de transição compatibiliza a malha.	77
3.4	Processo de suavização Laplaciano no elemento <i>Tri3</i>	80
3.5	Inversor de deslocamento	80
3.7	Topologia inicial obtida para o inversor	81
3.6	Discretização do domínio de projeto do inversor. 4188 elementos e 2179 nós.	81
3.8	Domínio completo discretizado e refinado com 4486 nós e 8720 elementos.	82
3.9	Topologia obtida no primeiro refino, malha com 8720 elementos	82
3.10	Malha refinada do inversor, com 21510 elementos.	83
3.11	Topologia final do mecanismo inversor de deslocamento	83
3.13	Topologia obtida considerando a restrição de gradientes.	84
3.12	Mecanismo inversor de corpo rígido convencional	84
3.14	Mecanismo de esmagamento	85
3.15	Malha inicial com 4300 elementos e 2249 nós e topologia obtida	85
3.16	Malha refinada com 8312 elementos e 4316 nós e topologia obtida	86
3.17	Malha refinada com 18802 elementos e 9671 nós e topologia final	86
3.18	Topologia do mecanismo com restrição de material de 30%, malha com 11184 elementos e 5766 nós	86
3.19	Mecanismo sem penalização adequada da restrição de material.	87
3.20	Mecanismo de esmagamento feito de corpo rígido convencional	87
3.21	Mecanismo de agarrar	88
3.22	Malha inicial com 4224 elementos e 2203 nós e topologia ótima parcial	88
3.23	Malha final com 9119 elementos e 4690 nós e topologia ótima	89
3.24	Malha e topologia inicial com restrição de material de 30%	90
3.25	Malha refinada com 10174 elementos e 5196 nós e topologia final com restrição de quantidade de material de 30%.	90
3.26	Topologia obtida utilizando outro algoritmo de otimização	91

3.27	Domínio inicial do projeto do alicate flexível	92
3.28	Malha inicial com 4702 elementos e 2452 nós e topologia ótima parcial . . .	92
3.29	Malha refinada com 10830 elementos e 5530 nós e topologia ótima parcial.	93
3.30	Malha refinada com 29530 elementos e 14898 nós e topologia ótima obtida	93
3.31	Topologias ótimas obtidas utilizando outros algoritmos de otimização: o MMA à esquerda e o de região de confiança à direita.	94
4.1	Plano octaédrico	102
4.2	Variação da tensão em um ensaio de flexão rotativa	104
4.3	Diagrama de Wöhler	104
4.4	Diagrama $S - N$ típico para um aço	105
4.5	Gráfico <i>tensão x tempo</i> para um carregamento completamente reverso . . .	107
4.6	Exemplos de condições de carregamento com tensões flutuantes, comuns em mecanismos flexíveis	108
4.7	Estimativa do diagrama $\sigma_a - \sigma_m$	109
4.8	Diagrama de Goodman modificado	109
4.9	Restrições que delimitam a região de segurança no diagrama de Goodman modificado	110
4.10	Carregamento e molas discretas	115
4.11	Carregamento e molas distribuídas	115
4.12	Carregamento com tensões flutuantes aplicadas no mecanismo flexível . . .	116
4.13	Corpo elástico submetido a tensões flutuantes e resistência na saída	117
4.14	Domínio discretizado: 52 elementos e 38 nós	120
4.15	Patch 1	122
4.16	Segundo patch nodal	123
4.17	Terceiro patch nodal	124
4.18	Décimo segundo patch nodal	125
5.1	Diagrama de Goodman modificado	131
5.2	Definição do problema distribuído para $\vec{u}_o(\vec{x})$	131
5.3	Domínio inicial do projeto do mecanismo inversor de deslocamento	142
5.4	Discretização do domínio do projeto: malha com 1900 elementos e 900 nós	142
5.5	Inversor de deslocamento	142
5.6	Função de falha h1	143
5.7	Função de falha h2	143
5.8	Função de falha h3	143
5.9	Domínio inicial do projeto: mecanismo de agarrar	144
5.10	Discretização do domínio: 1900 elementos e 900 nós	144
5.11	Topologia ótima final do mecanismo de agarrar	145
5.12	Função de falha h1	145

5.13	Função de falha h2	146
5.14	Função de falha h3	146
5.15	Domínio inicial do projeto	147
5.16	Discretização do domínio: malha com 1900 elementos e 900 nós	147
5.17	Topologia ótima final	147
5.18	Função de falha h1	148
5.19	Função de falha h2	148
5.20	Função de falha h3	148
5.21	Domínio inicial do projeto	149
5.22	Domínio discretizado: malha com 2122 elementos e 1127 nós	150
5.23	Topologia ótima obtida	150
5.24	Função de falha h1	150
5.25	Função de falha h2	151
5.26	Função de falha h3	151
A.1	Etapas do projeto de mecanismos flexíveis	164
A.2	Fluxograma básico da etapa de processamento	167

Simbologia

Nesta seção apresentam-se os símbolos principais contidos no texto. Os símbolos não incluídos na lista estão definidos ao longo dos capítulos. No capítulo 3 o símbolo p , correspondente ao parâmetro escalar da norma p -média, foi alterado para r , para evitar que o leitor confunda-o com o índice p de Ω_p , referente ao *patch* nodal.

Lista de símbolos

ρ – densidade relativa.

E_{ijkl} – tensor constitutivo do material.

Ω – domínio.

η – fator de penalização do modelo SIMP.

σ – tensor tensão.

σ_{VM} – tensão equivalente de Von Mises.

σ_u – tensão última.

σ_y – tensão de escoamento.

σ^* – tensão efetiva (modelo SIMP).

τ – tensão de cisalhamento.

S_f^N – tensão limite de fadiga.

S_a – tensão equivalente alternada.

S_m – tensão equivalente média.

S_a^* – tensão equivalente alternada efetiva (modelo SIMP).

S_m^* – tensão equivalente média efetiva (modelo SIMP).

Γ_t – região da fronteira com carregamento prescrito.

Γ_u – região da fronteira com deslocamento prescrito.

Γ_s – região da fronteira com molas (região de resposta).

\vec{t} – vetor de tração.

\vec{n} – vetor normal.

\vec{b} – forças de corpo.

\vec{u} – campo de deslocamentos.

ϵ – parâmetro de relaxação da tensão.

p – parâmetro da norma p -média (Capítulo 2).

- \vec{u} – vetor deslocamento de uma partícula.
 $[N_u]$ – matriz de interpolação.
 H – funções de interpolação.
 ε – vetor de deformação.
 $[J]$ – matriz jacobiana.
 χ – função Lagrangeano aumentado.
 \vec{q}_e^F – vetor deslocamento nodal.
 ξ, η – coordenadas paramétricas.
 $[\mathbb{K}_G]$ – matriz de rigidez global.
 $[\mathbb{K}_e]$ – matriz de rigidez elementar.
 $[B]$ – matriz de deformação.
 L_s – medida do arco da fronteira de Γ_t .
 \vec{U} – vetor de deslocamentos global.
 \vec{F}_{in} – vetor de forças nodais.
 Ω_p – região do patch nodal.
 r – parâmetro da norma p -média (Capítulo 3).
 \vec{r} – vetor posição de um ponto.
 ds – medida do arco de Γ_t .
 ϕ – função de aproximação.
 Φ_i, Φ_j, Φ_k – valores nodais.
 H^1 – espaço de Hilbert.
 K_{inu} – conjunto dos deslocamentos admissíveis.
 V_{aru} – conjunto das variações admissíveis.
 ϑ – conjunto dos deslocamentos e variações admissíveis.
 λ, μ – constantes de Lamé.
 ν – coeficiente de Poisson.
 K_s – rigidez da mola.
 Δ_s – deslocamento da extremidade da mola.
 \vec{e}_s – cossenos diretores em Γ_s .
 \vec{e}_{in} – cossenos diretores em Γ_t .
 t_{in}^{\max} – carregamento proporcional máximo.
 t_{in}^{\min} – carregamento proporcional mínimo.

Resumo

O objetivo deste trabalho é desenvolver um procedimento para a determinação de projetos ótimos de mecanismos flexíveis, utilizando o método de otimização topológica (BENDSOE & KIKUCHI, 1995). Os projetos são divididos em dois tipos: projetos com restrição de massa e projetos com critério de falha por fadiga.

Os mecanismos flexíveis, ou *compliant mechanisms*, pertencem a uma nova categoria de mecanismos mecânicos, que obtêm sua mobilidade devido unicamente à deformação elástica (flexibilidade), não possuindo juntas ou pinos. Algumas das características dos mecanismos flexíveis são: podem ser mecanismos do tipo bidimensional, não requerem montagem (são monolíticos), são fáceis de fabricar, requerem menos espaço e são menos complexos, tem menos necessidade de lubrificação, tem menos atrito e desgaste, integram elementos de mola com outros componentes e permitem alta precisão devido à ausência de pinos e juntas.

O método de otimização topológica combina o método de elementos finitos de Galerkin com métodos de otimização, buscando a melhor distribuição de material ao longo do domínio fixo de projeto. O elemento finito utilizado é o Tri3, que interpola não só as componentes do campo de deslocamento quanto o campo de densidade relativa. A microestrutura utilizada para a descrição das propriedades materiais é do tipo SIMP (Solid Isotropic Material with Penalty).

O projeto de mecanismos flexíveis submetidos a restrições de massa emprega o procedimento proposto por COSTA Jr & ALVES (2003), que combina um método de otimização de leiaute com uma estratégia de refino h-adaptativo, o que permite um projeto ótimo com contorno material bem definido.

Este trabalho emprega uma técnica de perturbação relaxação-e (Cheng & Guo, 1997) integrada, que modifica o espaço de soluções e relaxa a condição pontual através da consideração de uma restrição integrada. A imposição das restrições locais utiliza uma nova técnica denominada patches nodais disjuntos. Esta técnica reduz o número de restrições associadas ao problema de otimização, viabilizando computacionalmente o procedimento. As restrições de fadiga devem satisfazer o critério de Goodman modificado para o caso de carregamentos multiaxiais simples (método de Sines).

Palavras-chave: otimização topológica, mecanismos flexíveis, restrições de tensão, fadiga.

Abstract

The task of this work is develop a procedure to determine optimal designs of compliant mechanisms using the topology optimization method (BENDSOE & KIKUCHI, 1995). Designs are divided into two types: designs with volume constraint and designs with fatigue failure criterion.

Compliant mechanisms is a new breed of mechanical mechanisms that gains its mobility from elastic deformation (flexibility), and have no joints or pins. Some of the characteristics of the compliant mechanisms are: can be bidimensional mechanisms; require no assembly (are monolithics); are easy to fabricated; require less space and are less complex; have less need of lubrication; have less wear, friction and backlash; integrate energy storage elements (springs) with the other components; have higher precision because have no pins or joints.

Topology optimization method combine Galerkin finite element method with optimization methods, looking for the best material distribution at the design space. The finite element used is *Tri3*, that interpolate both components of displacement field and relative density field. Microstructured used to described material properties is *SIMP* (Solid Isotropic Material with Penalty).

Design of compliant mechanisms subjected to volume constraint employs a procedure proposed by COSTA Jr & ALVES (2003), which combines a topology optimization method with a strategy of h -adaptive refinement. This procedure ensure a optimal design with well defined contour.

This work employs a perturbation technique called integrated relaxation- ε (Cheng & Guo, 1997), whose modifies the solutions space and relax the pointwise condition using a integrated constraint. Local constraints are imposed using a new strategy called adjoint nodal patches. This technique reduces the number of constraints associated to the problem, increasing the computacional efficiency of the procedure. The fatigue constraints must satisfy the Goodmann modified criterion for simple multiaxial loads (Sine 's method).

Key-words: topology optimization, compliant mechanisms, stress constraints, fatigue.

Apresentação

Este trabalho apresenta um procedimento para o projeto ótimo de mecanismos flexíveis utilizando o método de otimização topológica. Segundo o procedimento, o leiaute do mecanismo é obtido encontrando-se a distribuição ótima de material no interior do domínio prescrito do projeto, dadas a posição e direção das forças aplicadas e de resposta do mecanismo. Foram desenvolvidos dois tipos distintos de projeto:

- projetos com restrição de massa, onde a quantidade de material no mecanismo é restrita;
- projetos com critério de falha por fadiga, onde as tensões no mecanismo devem satisfazer um critério de falha por fadiga (Goodman modificado).

Os métodos de otimização necessitam de uma função a ser extremizada, denominada de função objetivo. Neste trabalho, busca-se maximizar o deslocamento na região de resposta do mecanismo. Portanto, o mecanismo flexível ótimo será aquele que produzir o maior deslocamento em uma determinada posição e direção de resposta. Para simular uma resistência a este deslocamento e possibilitar um controle sobre a força produzida, utilizou-se uma mola com rigidez conhecida na região de resposta. No caso dos projetos com critério de falha por fadiga, ao invés de forças e molas discretas, foram utilizadas forças e molas distribuídas nas regiões de aplicação e de resposta, respectivamente.

Os mecanismos flexíveis pertencem a uma categoria relativamente nova de mecanismos que não possuem pinos ou juntas, e desempenham sua finalidade mecânica (transmissão de força, deslocamento) mediante exclusivamente à sua flexibilidade ou deformação elástica. Esta característica principal dos mecanismos flexíveis permite que eles atuem em áreas onde os mecanismos convencionais de corpo rígido são ineficientes ou até mesmo incapazes de atuar.

Na escala microscópica, submilimétrica ou até micrométrica, a existência de pinos e juntas torna a montagem dos mecanismos praticamente impossível. Além disto, as folgas de montagem inviabilizam a obtenção de tolerâncias estreitas. Portanto, a utilização dos mecanismos flexíveis em situações de pequenas medidas, pequenos deslocamentos e alta precisão é fundamental.

Na escala macroscópica, os mecanismos flexíveis também apresentam vantagens para algumas aplicações. Destacam-se a facilidade de fabricação, ausência de montagem, menor

necessidade de lubrificação, entre outras. Além disto, como os mecanismos flexíveis são monolíticos, ou seja, são constituídos de uma única peça, o que os torna muito úteis em aplicações que necessitem facilidade de esterilização, tal como em instrumentação cirúrgica.

Em contrapartida, o desenvolvimento de um procedimento de projeto genérico de mecanismos flexíveis é extremamente complexo. O objetivo do projeto é encontrar um leiaute de mecanismo, em um domínio prescrito, que, a partir da aplicação de um carregamento e/ou deslocamento em uma região do domínio, gere um deslocamento e/ou força em outra região do domínio. Tendo em vista a complexidade do comportamento elástico dos materiais flexíveis, esta área de projeto não foi tão explorada quanto os mecanismos de corpo rígido, ou então, realizavam-se projetos com métodos de tentativa e erro.

Mais recentemente, alguns trabalhos (Anathasuresh *et al.*, 1994, Frecker *et al.*, 1996, Sigmund, 1997, Nishiwaki *et al.*, 1998) propuseram procedimentos mais sistemáticos para estes projetos. Os trabalhos pioneiros nesta área modelavam o comportamento elástico do mecanismo flexível através da utilização de molas de torção conectadas aos segmentos rígidos. Este procedimento fornece um pseudo corpo rígido que pode então ser analisado com a teoria cinemática de corpos rígidos, que é uma teoria já bastante solidificada. No entanto, mesmo este procedimento não é aplicável a qualquer categoria de mecanismos flexíveis, pois restringe-se aos mecanismos flexíveis com flexibilidade concentrada em alguns pontos, denominados pivôs flexíveis.

Os mecanismos flexíveis com flexibilidade distribuída exigem métodos mais sofisticados. A teoria envolvida é a mecânica do contínuo e os métodos de otimização estrutural podem ser empregados.

Tradicionalmente, a otimização estrutural tem sido utilizada para a obtenção do leiaute que maximiza a rigidez de uma estrutura submetida a algum carregamento externo. No entanto, vários trabalhos, tais como os citados anteriormente, aplicaram com sucesso os métodos de otimização estrutural ao projeto de mecanismos flexíveis. Destaca-se que a função objetivo do mecanismo flexível que será maximizada ou minimizada apresenta requisitos de certa forma conflitantes, pois o leiaute ótimo deve ser:

- flexível o suficiente para satisfazer os requisitos cinemáticos de se deformar e fazer contato com a peça atuada;
- rígido o suficiente para suportar os carregamentos externos e ser capaz de transmitir força.

Várias formulações foram propostas para o problema de síntese topológica de mecanismos flexíveis. Algumas são citadas no Capítulo 2 deste trabalho.

Aqui emprega-se um modelo de molas distribuídas na região de resposta do corpo elástico. Serão incluídas, inicialmente, restrições de quantidade de material e, numa segunda etapa, restrições de fadiga no projeto. A maioria dos trabalhos de síntese topológica de

mecanismos flexíveis utiliza apenas restrições de quantidade de material. No entanto, do ponto de vista prático, a consideração das tensões é imprescindível para a obtenção de um leiaute que não falhe em serviço. A inclusão das restrições de tensões apresenta, porém inúmeras dificuldades. Como destaca Costa Jr. (2003), estas são:

- A necessidade de se considerar um grande número de restrições, necessárias para uma aproximação adequada do critério paramétrico de tensão local. Para assegurar uma aproximação adequada, estas restrições devem ser avaliadas em uma série de pontos discretos, cuja distribuição deve ser densa o suficiente, de modo a minimizar a possibilidade de violação da restrição entre quaisquer dois pontos;
- O comportamento altamente não linear das restrições de tensão, com relação às variáveis de projeto, o que requer a utilização de algoritmos de programação matemática muito robustos.

A consideração de restrições associadas à fadiga do material também são fundamentais para um projeto mais realístico de mecanismos flexíveis. Estes mecanismos, por definição, obtêm sua mobilidade da deflexão dos membros flexíveis. Em geral, a mobilidade é requerida muitas vezes e os requisitos de projeto podem ser muitos milhões de ciclos ou vida infinita. Os carregamentos repetidos geram tensões flutuantes e podem causar falha por fadiga.

A falha por fadiga pode ocorrer com tensões significativamente mais baixas do que aquelas que causam falha estática. Portanto, considerar apenas a falha estática não assegura que o mecanismo flexível não falhe em serviço. Neste trabalho utiliza-se o critério de fadiga de Goodman modificado.

O trabalho foi dividido em seis capítulos:

No Capítulo 1 é feita uma introdução sobre os mecanismos flexíveis e o método de otimização topológica. Em relação aos mecanismos flexíveis, discute-se itens tais como os tipos existentes, as características, vantagens em relação aos mecanismos de corpo rígido convencionais, desafios que envolvem o projeto, entre outros. A otimização topológica é apresentada como uma linha de otimização estrutural que permite uma distribuição de material mais acentuada no interior de um domínio de projeto. Alguns problemas relacionados à otimização topológica são discutidos.

O Capítulo 2 aborda alguns princípios energéticos, os quais são utilizados na formulação do problema de projeto dos mecanismos flexíveis, e a implementação numérica da formulação, mediante o uso do método de elementos finitos de Galerkin.

No Capítulo 3 são apresentados alguns resultados da aplicação do procedimento para o projeto de mecanismos flexíveis com restrição de material. Uma estratégia de refino h -adaptativo da malha é proposta para a obtenção de leiautes com contorno material bem definido.

O Capítulo 4 discute a questão da incorporação de restrições de tensão nos problemas de otimização topológica e propõe a formulação para o problema de projeto com restrições nas tensões de fadiga. Para viabilizar computacionalmente a imposição das restrições locais é proposta uma nova técnica denominada de *patches* nodais adjuntos.

No Capítulo 5 são apresentados alguns exemplos de projetos de mecanismos flexíveis incorporando as restrições nas tensões de fadiga.

No Capítulo 6 são feitas algumas considerações finais relacionadas ao procedimento apresentado e aos resultados obtidos. Os apêndices A e B tratam respectivamente sobre a descrição do procedimento e sobre o algoritmo de otimização empregado.

Capítulo 1

Mecanismos Flexíveis e Otimização Topológica

Este capítulo apresenta uma introdução sobre os mecanismos flexíveis e o método de otimização topológica. Em relação aos mecanismos flexíveis, são abordados suas características, vantagens e os desafios envolvidos no projeto. O método de otimização topológica será empregado neste trabalho. Discutem-se aspectos como os tipos de otimização estrutural, o procedimento utilizado no método e os problemas comumente presentes na sua aplicação.

1.1 Mecanismos Flexíveis

Os projetistas de componentes mecânicos estão tradicionalmente habituados a assumir corpos rígidos e juntas rígidas na realização de seus projetos. A deformação elástica é geralmente relacionada com algo prejudicial ao desempenho de uma máquina. Isto em muitas circunstâncias é verdadeiro, pois a rigidez estrutural pode garantir alta estabilidade sem alteração na forma de uma estrutura. No entanto, há situações em que a deformação elástica pode ser utilizada favoravelmente na obtenção de um melhor desempenho ou na geração de funções adicionais, caso a flexibilidade seja implementada em regiões apropriadas na estrutura, ver Nishiwaki *et al.* (2001).

Segundo Hain (1967):

"Na realidade, nenhum elemento de máquina é completamente rígido, e qualquer deformação, elástica ou plástica, resulta em pequeno movimento adicional. Mais significativa que o movimento adicional em si é a mudança resultante no equilíbrio de forças quando comparado com a hipótese de corpos rígidos. Mas a deformação elástica não precisa ser considerada uma desvantagem. Ela oferece a vantagem de absorver picos de força no mecanismo sem causar dano algum. Entretanto, um tratamento rigoroso destes efeitos ainda não é possível no estágio atual do conhecimento científico, e então, não há nada a fazer além de assumir corpos rígidos e estimar os efeitos elásticos. Em qualquer caso, a

deformação elástica torna possível adicionar graus de liberdade bem vindos para os problemas de projeto cinemático."

Um exemplo de estrutura que pode obter um melhor desempenho mediante o emprego da flexibilidade é a estrutura do corpo automotivo. De acordo com Kamal & Wolf (1981) quatro critérios de projeto devem ser considerados no projeto do corpo automotivo: dirigibilidade, durabilidade, dano mínimo em batidas ("*crashworthiness*") e conforto. A adoção da flexibilidade em regiões apropriadas da estrutura automotiva pode, entre outras coisas, propiciar um ajuste automático no alinhamento do veículo, aliviar concentrações de tensão e absorver eficientemente a energia de impacto no corpo automotivo. Portanto, os critérios de projeto propostos podem ser eficientemente atingidos.

Outro exemplo, alvo do estudo deste trabalho, são os mecanismos flexíveis. Nesta categoria de mecanismos, há direções intencionais para as deformações e estas são prescritas na fase de projeto. As vantagens da utilização dos mecanismos flexíveis, como será visto posteriormente, incluem aspectos como a facilidade de fabricação e montagem, a redução de custos, peso, atrito, ruído e da necessidade de lubrificação

Um mecanismo pode ser definido como um dispositivo mecânico utilizado para transmitir ou transformar força, deslocamento ou energia. Mecanismos de corpo rígido convencionais compreendem cadeias rígidas conectadas através de juntas. O movimento relativo entre as cadeias conectadas é ativado inteiramente por estas juntas. A síntese dos mecanismos tradicionais pode, então, ser dividida em dois tipos: projeto cinemático (projeto para transmissão de movimento) e projeto cinemático-estático. O projeto cinemático envolve a seleção do tipo de mecanismo a ser usado e a determinação das medidas das cadeias relativas para os diferentes membros. O projeto cinemático-estático se preocupa com os parâmetros dos elos individuais para resistir às forças impostas durante a operação do mecanismo. Um mecanismo biela-manivela do motor de combustão interna e um alicate são exemplos familiares de mecanismos de corpo rígido tradicionais, conforme é ilustrado nas Figs. 1.1 e 1.2. No caso da biela-manivela, o mecanismo transforma um movimento linear na entrada em uma saída de rotação, e a força de entrada em um torque. Já o alicate tem a propriedade de amplificar a força aplicada nas hastes em relação a força que é transferida para os mordentes.

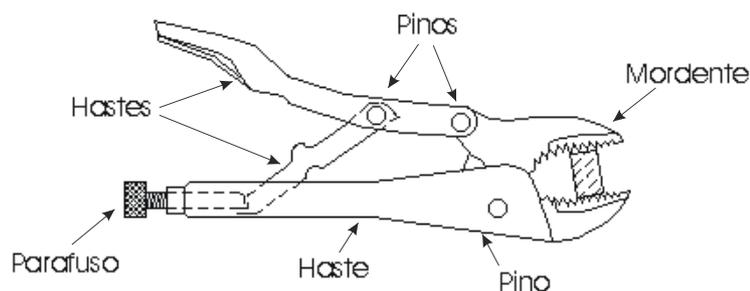


Figura 1.2: Alicates convencional

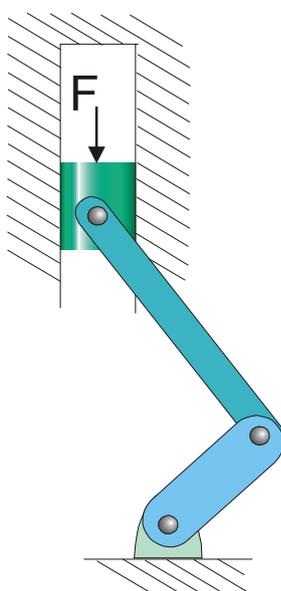


Figura 1.1: Mecanismo biela-manivela

Um mecanismo flexível, ou *compliant mechanism*, como é denominado na literatura técnica internacional, também transmite ou transforma força, movimento ou energia. Entretanto, um mecanismo flexível é um corpo elástico monolítico, ou seja, constituído de uma única peça, e que não possui nenhuma junta. O movimento relativo entre as diferentes partes do mecanismo flexível é ativado inteiramente pela deformação elástica do corpo do mecanismo. A Fig. 1.3 mostra um protótipo de alicate flexível, extraído do trabalho de Howell (2001). A possibilidade de utilizar um mecanismo monolítico e sem juntas apresenta para muitas aplicações vantagens tanto no aspecto do desempenho quanto no aspecto econômico. Além disto, como será visto mais adiante, algumas aplicações apenas são possíveis com este tipo de mecanismo.

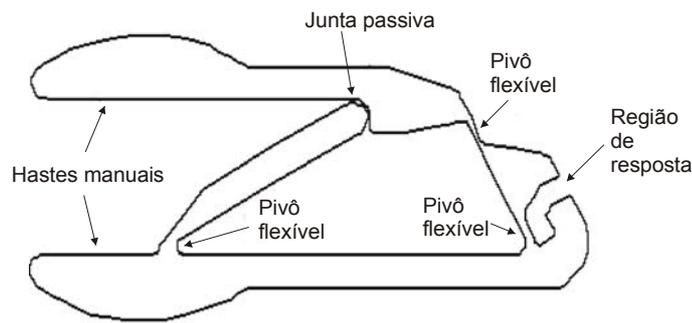


Figura 1.3: Alicate flexível

O corpo de um mecanismo flexível deve ser projetado para transmitir tanto o movimento quanto a força. Observa-se que no comportamento desejado do mecanismo flexível há requisitos conflitantes, pois por um lado, o mecanismo deve ser rígido o suficiente para transmitir a força de entrada e, por outro lado, deve ser flexível o suficiente para defletir e fazer contato com a peça atuada (Sigmund, 1997). Além disto, o movimento ou força transmitida por um mecanismo flexível estão acopladas pela relação constitutiva elástica do material do corpo.

Conforme Ananthasuresh *et al.* (1984), os mecanismos flexíveis podem ser categorizados em duas classes: mecanismos com flexibilidade distribuída e mecanismos com flexibilidade concentrada. Quando sujeitos a aplicação de um carregamento, os mecanismos com flexibilidade distribuída flexionam ao longo de toda a estrutura enquanto os mecanismo com flexibilidade concentrada flexionam apenas em alguns pontos chamados pivôs flexíveis. A Fig. 1.4 compara o mecanismo de corpo rígido convencional com o mecanismo flexível com flexibilidade concentrada e com flexibilidade distribuída.

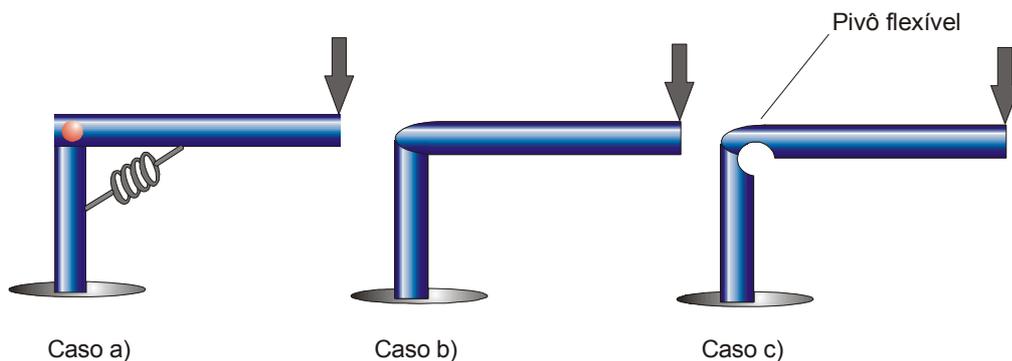


Figura 1.4: Tipos de mecanismos: (a) mecanismo de corpo rígido convencional; (b) de flexibilidade distribuída e (c) de flexibilidade concentrada.

Além destas duas classes de mecanismos flexíveis descritos anteriormente, há ainda os mecanismos parcialmente flexíveis que combinam partes de corpo rígido convencional com alguns membros flexíveis. Neste caso o mecanismo passa a dispor de propriedades

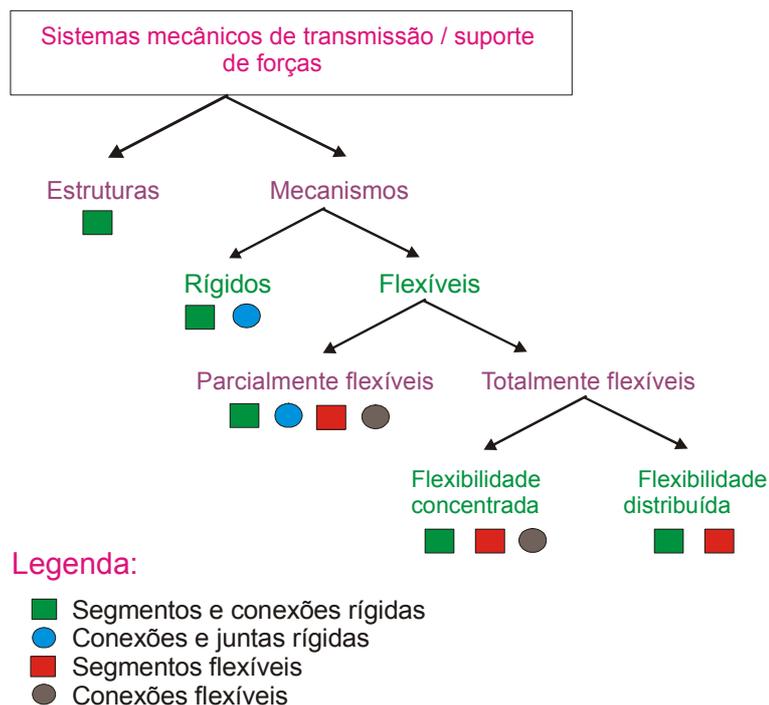


Figura 1.5: Classificação geral dos sistemas mecânicos

importantes como a rigidez e a flexibilidade em determinadas regiões de acordo com a aplicação desejada. Um esquema de classificação geral de sistemas mecânicos é apresentado na Fig. 1.5¹. As estruturas suportam e transmitem cargas. Os mecanismos transferem e/ou transformam movimento e também suportam e transmitem cargas.

Howell (2001) divide as vantagens na utilização dos mecanismos flexíveis em duas categorias: redução de custo (redução do número de peças, redução do tempo de montagem e simplificação do processo de manufatura) e aumento do desempenho (maior precisão, maior confiabilidade, redução do atrito, redução do peso e da manutenção).

Uma das vantagens mais evidentes dos mecanismos flexíveis é a enorme redução no número de peças necessárias no dispositivo para realizar determinada tarefa. Isto pode ser observado nas Figs. 1.6 e 1.7² que mostram um grampeador convencional e um grampeador feito de material flexível. O grampeador convencional do exemplo utiliza aproximadamente vinte peças enquanto que o grampeador "flexível" necessita apenas de três. A corpo principal do grampeador "flexível" é manufaturado por injeção e é constituído por uma única peça. Isto representa uma grande redução no tempo de manufatura, de montagem e do custo em geral em comparação ao mecanismo convencional.

¹ Adaptado do endereço eletrônico <http://www-mtl.mit.edu/~suresh/ctypes.html>, acessado em 20 de janeiro de 2004.

² Extraído do endereço eletrônico <http://research.et.byu.edu/llhwww/>, acessado em 20 de janeiro de 2004.

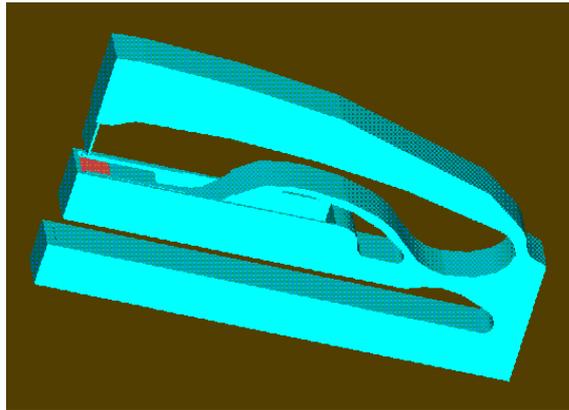


Figura 1.6: Grampeador flexível



Figura 1.7: Grampeador convencional (esquerda) e grampeador flexível (direita): redução drástica do número de peças

Devido ao fato que o mecanismo flexível não utiliza juntas, tais como pinos e rótulas, reduz-se o atrito e a necessidade de lubrificação, e aumenta-se, conseqüentemente a precisão e a confiabilidade do mecanismo. Isto é fundamental em instrumentos de mecânica de precisão ou nos sistemas microeletromecânicos (*Micro Eletro Mechanical Systems*, ou MEMS), onde devido às dimensões submilimétricas, torna-se difícil lidar com os problemas de atrito inerentes aos mecanismos de corpo rígido convencionais.

MEMS integram componentes mecânicos e elétricos, e são construídos em escala milimétrica ou até micrométrica (Petersen, 1982 *apud* Sigmund, 1997). Podem ser fabricados usando métodos similares àqueles utilizados para construir circuitos eletrônicos. Alguns exemplos de aplicações comerciais dos MEMS são os microsensores (por exemplo, sensores de aceleração para *airbags*, sensores de pressão para aplicações biomédicas) e os microatuadores (para o movimento de conjuntos de microespelhos em sistemas de projeção, por exemplo) (Howell, 2001).

A flexibilidade característica dos mecanismos flexíveis também reduz as vibrações de todo o sistema mecânico, propiciando um menor nível de ruído e uma absorção de impactos

na estrutura.

Na engenharia biomédica os mecanismos flexíveis encontram uma importante aplicação na área de instrumentação cirúrgica (Frecker, 2001), principalmente na cirurgia denominada minimamente invasiva (*Minimally Invasive Surgery*, ou MIS). Além do fato que os mecanismos monolíticos facilitam a esterilização, é importante ressaltar a possibilidade destes instrumentos serem multifuncionais, ou seja, que possam combinar no mesmo instrumento, por exemplo, a ação de abrir e de cortar. A troca de instrumentos durante uma cirurgia aumenta o tempo do procedimento e pode aumentar o risco de traumas nos tecidos humanos.

Clements (2000) *apud* Howell (2001) destaca as vantagens dos mecanismos flexíveis no nível micro:

- Podem ser estruturas do tipo bidimensional;
- Não requerem montagem;
- Requerem menos espaço e são menos complexos;
- Tem menos necessidade de lubrificação;
- Tem atrito e desgaste reduzido;
- Tem menos folga devido à inexistência de pinos e juntas, resultando em maior precisão;
- Integram elementos que estocam energia (molas) com outros componentes.

Uma interessante observação é que na natureza a flexibilidade está muito presente no universo dos microorganismos, que possuem dimensões comparáveis às dos MEMS. Aproximadamente 90 % das criaturas vivas são invertebradas e esta porcentagem aumenta à medida que diminuimos as dimensões do nosso campo de estudo. Em pequenas dimensões, as estruturas flexíveis reinam absolutas (Kota *et al.*, 2001).

1.2 Síntese de mecanismos flexíveis

O projeto de mecanismos flexíveis apresenta dificuldades devido à complexidade do comportamento elástico destes. Em um projeto genérico, deseja-se obter força ou deslocamento em algum ponto ou pontos especificados no mecanismo, a partir da aplicação de uma força em outra região. Devido a esta complexidade, este tipo de projeto tem sido tipicamente implementado por métodos de tentativa e erro. No entanto, pesquisas recentes tem buscado a introdução de procedimentos de projeto mais sistemáticos (Ananthasuresh *et al.*, 1994, Frecker *et al.*, 1996, Sigmund, 1997, Nishiwaki *et al.*, 1998). Nestas pesquisas há duas abordagens para o projeto de mecanismos flexíveis: a síntese cinemática e a síntese do contínuo, ver Frecker *et al.* (1996).

- Síntese cinemática:

A síntese de mecanismos rígidos convencionais é realizada usando a abordagem cinemática. Existem teorias bem desenvolvidas para tais mecanismos. Nesta perspectiva, Midha *et al.* (1992) implementaram a abordagem cinemática para a síntese de mecanismos flexíveis. Eles substituíram os pivots flexíveis por molas de torção e a flexibilidade longitudinal por molas lineares. Desta forma, a configuração básica de projeto obtida pela cinemática de corpo rígido tradicional era convertida para mecanismos parcialmente flexíveis ou com flexibilidade concentrada em alguns pontos específicos. Her & Midha (1987) apresentaram uma metodologia para obter todos os possíveis mecanismos flexíveis a partir de uma dada cadeia cinemática de corpo rígido. Murphy *et al.* (1993) estenderam esta metodologia para uma abordagem de síntese topológica usando uma teoria gráfica. Esta abordagem determina o número de segmentos flexíveis, tipo de conexão e inversões cinemáticas. Howell & Midha (1994) desenvolveram um método de análise e síntese para mecanismos com flexibilidade concentrada usando um modelo de pseudo-corpo rígido, composto por barras rígidas e molas. Este modelo foi posteriormente utilizado para projetar mecanismos flexíveis com grandes deslocamentos. Todos estes procedimentos, no entanto, são limitados aos mecanismos com flexibilidade concentrada.

- Síntese do contínuo:

Esta abordagem utiliza o método de otimização topológica e é o procedimento mais genérico e efetivo para o projeto de mecanismos flexíveis, pois permite a determinação da topologia, forma e parâmetros geométricos dos mecanismos. A intenção do projeto aqui, é sintetizar a forma estrutural do corpo deformável de modo que ele se deforme em direções pré-definidas sob a ação de forças especificadas na entrada e na saída. A cinemática do comportamento funcional é capturada em termos de características de força-deflexão de entrada e saída. O método recai inteiramente nos princípios da mecânica do contínuo. O problema de síntese nesta abordagem é transformado em um problema de distribuição de material. Em outras palavras, deseja-se encontrar a forma de um corpo deformável de modo que este comporte-se de uma maneira desejada. A teoria utilizada é baseada nos trabalhos de Bendoe & Kikuchi (1988). O procedimento é similar aos métodos de otimização estrutural tradicionais. A diferença, entretanto, é que na otimização estrutural típica, as estruturas são projetados para serem rígidas e fortes, ver Susuki & Kikuchi (1991). Nesta nova perspectiva, a estrutura é projetada para ser flexível o suficiente para deformar, e rígida e forte o suficiente para resistir aos carregamentos externos. O desafio neste problema é capturar o comportamento cinemático corretamente e então encontrar uma solução ótima que pondere os objetivos conflitantes de ser flexível e ainda rígido e forte.

O trabalho pioneiro foi desenvolvido por Ananthasuresh & Kota (1994) para os mecanismos com flexibilidade distribuída. A função objetivo inicialmente proposta no artigo

de Ananthasuresh & Kota (1994), no entanto, não capturava adequadamente os requisitos conflitantes (cinemático e estrutural) do projeto de mecanismos flexíveis, e as estruturas obtidas resultavam em uma otimização rígida do que uma estrutura do tipo mecanismo. As primeiras propostas de melhoria da função objetivo foram obtidas por Sigmund (1995) e Frecker (1996) para estruturas discretas (tipo treliça), onde se utiliza uma função objetivo que considera os requisitos cinemáticos e estruturais do mecanismo. Para obter maior controle nas relações de entrada e saída, Larsen *et al.*, (1997) introduz uma função objetivo baseada na vantagem mecânica e geométrica e obtém um mecanismo flexível com múltiplos graus de liberdade de entrada e saída (resposta). Frecker *et al.* (1997) e Nishiwaki *et al.* (1998) utilizam uma formulação multi-objetivo, onde se maximiza a energia mútua e se minimiza a flexibilidade média (energia de deformação), e obtém mecanismos flexíveis com flexibilidade distribuída e mecanismos tipo treliça. A mesma formulação foi utilizada no trabalho de Lima (2002) para o projeto de mecanismos flexíveis bidimensionais.

Outras aplicações do método de otimização topológica para o projeto de mecanismos são os mecanismos flexíveis com atuação térmica de Jonsmann *et al.* (1999), os atuadores flexionais piezolétricos de Silva *et al.* (2000) e Carbonari (2003), os atuadores eletrotermomecânicos de Sigmund (1998), Ananthasuresh *et al.* (2002), Mankane *et al.* (2001), e os mecanismos flexíveis de grandes deslocamentos de Pedersen *et al.* (1999).

1.3 Otimização Topológica

A otimização estrutural busca encontrar um projeto (estrutura) com o melhor desempenho e que satisfaça as restrições impostas ao mesmo. Em termos matemáticos, busca-se uma solução pertencente ao espaço de soluções \mathbb{R}^n , que extremize uma função objetivo. A avaliação do desempenho está associado a algum critério, que pode ser: mínima massa, máxima rigidez, mínima frequência natural crítica, máxima carga de flambagem crítica, entre outros.

Tradicionalmente, pode-se distinguir 3 categorias no ramo da otimização estrutural, ver Fig. 1.8:

- Otimização dimensional ("*size optimization*"): onde as variáveis de projeto são parâmetros geométricos do tipo dimensões da seção transversal e espessura de uma viga ou barra, tamanho de um furo, espessura de placas ou cascas. O processo de otimização busca encontrar, por exemplo, a melhor área de seção transversal dos elementos de modo a obter a maximização da rigidez com mínimo volume de material. Este tipo de problema pode ser resolvido utilizando-se técnicas baseadas em critérios de otimalidade, ver Roszvány *et al.* (1995) e Roszvány (1997). Estruturas de materiais compostos laminados, onde as variáveis de projeto são, por exemplo, a espessura do laminado, o ângulo de inclinação das fibras, *etc.*, podem ser resolvidos

utilizando-se técnicas de programação matemática, ver Calixto (1998) ou algoritmos genéticos, ver Gürdal *et al.* (1999) e Soremekun (1997).

- Otimização de forma ("*shape optimization*"): onde a forma do contorno dos segmentos e a posição de furos é modificada para extremizar uma função objetivo. Este tipo de otimização exige maior sofisticação na implementação numérica do que a otimização dimensional. A primeira dificuldade é escolher variáveis de projeto adequadas para parametrizar as formas no espaço de projeto. Pontos de controle de uma curva de interpolação de Bezier ou *Spline*, ou as coordenadas dos nós da malha de elementos finitos são duas alternativas de variáveis de projeto que permitem esta parametrização. Para maiores detalhes recomenda-se o artigo de revisão de Haftka & Grandhi (1986). Este método pode ser adotado no projeto de mecanismos flexíveis, ver Parkinson *et al.* (1997).

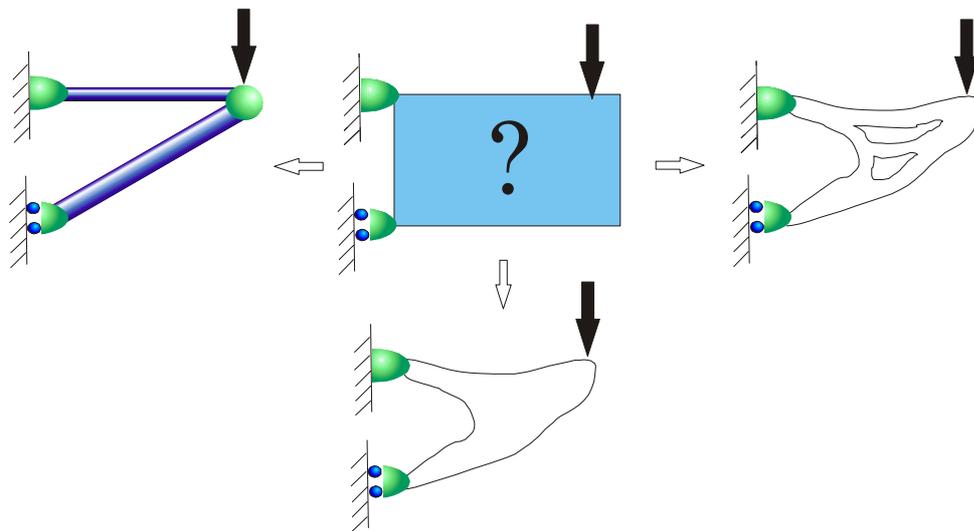


Figura 1.8: Otimização estrutural: otimização de parâmetros (à esquerda), otimização topológica (à direita) e otimização de forma (abaixo).

- Otimização topológica ("*topology optimization*"): busca o projeto ótimo mediante a variação da topologia da estrutura. O termo topologia, neste contexto, refere-se a disposição espacial dos membros estruturais e ao padrão de conectividade entre estes. A otimização topológica é mais genérica do que a otimização de forma, pois permite uma distribuição de material mais acentuada no interior do domínio de projeto e a inclusão de novos "buracos" no domínio. Deste modo, muda-se a conectividade do domínio e conseqüentemente a sua topologia.

A otimização de forma permite a alteração do contorno, no entanto, não possibilita a alteração da topologia da estrutura, ou seja, não é possível incluir novos "furos" no domínio.

A otimização topológica de estruturas pode ser dividida em duas categorias distintas, considerando o tipo de parametrização do domínio do projeto, ver Lima (2002):

1. A otimização topológica a partir de um meio discreto: o domínio contínuo é aproximado por um conjunto de elementos de barra ou viga no domínio do projeto. As dimensões das seções transversais das barras ou vigas são definidas como variáveis de projeto. Quando a área de um elemento tende a zero, este elemento é removido. Segundo Rozvany *et al.* (1995), esta categoria ainda se subdivide em otimização topológica de estruturas de malha contínua e otimização topológica de estruturas discretas. A otimização topológica de estruturas de malha contínua ("*gridlike continua*") trabalha com um número infinito de barras rígidas separadas por um espaço infinitesimal, cuja solução ótima é obtida analiticamente. Michell (1904) é considerado o pioneiro na abordagem teórica para a solução de problemas de otimização de estruturas de malha contínua com mínimo volume de material. A Fig. 1.11 mostra a configuração ótima de uma alavanca obtida por Michell, para o problema de conectar uma área circular de um suporte para uma dada carga vertical, de forma que a estrutura seja tão rígida quanto possível. Conforme observa-se na figura, as linhas de isotensão, obtidas através da teoria da elasticidade, podem ser compostas por uma série de barras rígidas. O trabalho de Michell foi, inicialmente, pouco apreciado por seus contemporâneos, sendo referenciado apenas no final dos anos 50, como no trabalho de Cox (1958). No entanto, só na década de 70, o trabalho de otimização de estruturas de treliças desenvolvido por Michell (1904) foi retomado por Hemp (1973) e por Prager (1974). Já a otimização topológica de estruturas discretas ("*ground structure*") considera um domínio de projeto onde há vários pontos distribuídos e que podem ser possíveis juntas das treliças, conforme mostra a Fig. 1.9. Neste caso, o problema de otimização é resolvido através de métodos numéricos, como por exemplo, a programação linear, o critério de otimalidade ou o SAND ("*Simultaneous Analysis and Design*") (Bendsoe *et al.*, 1994). O projeto ótimo final descreve o número de barras, as posições dos vínculos, as conectividades entre elas e suas propriedades geométricas, ver Fig. 1.10

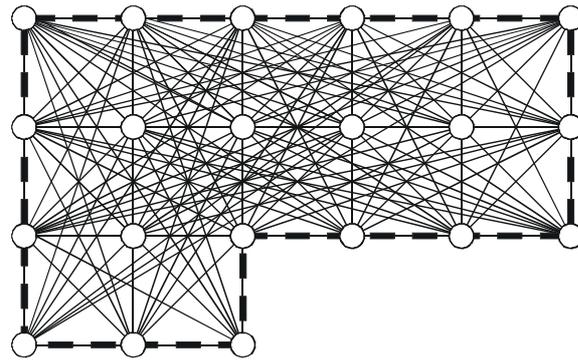


Figura 1.9: Discretização do domínio utilizando barras ou vigas ("ground structure")

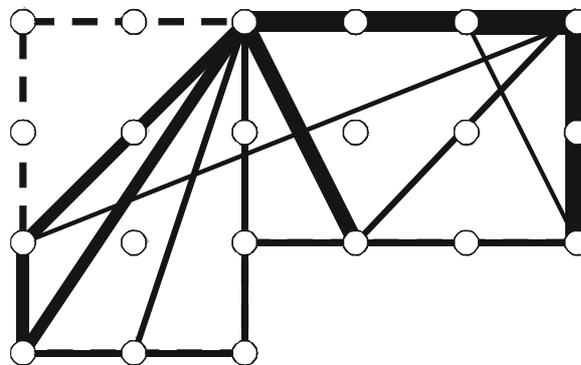


Figura 1.10: Uma possível solução

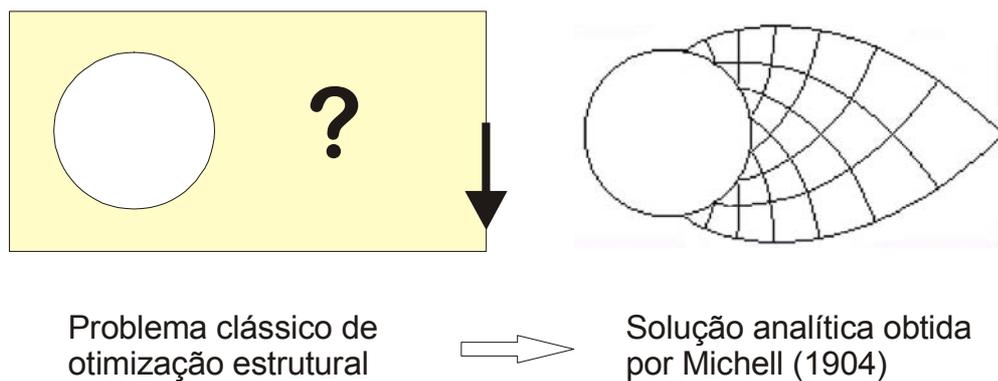


Figura 1.11: Otimização estrutural obtida por Michell

2. A otimização topológica a partir de um meio contínuo consiste na determinação, para cada ponto do espaço de projeto, da presença ou não de material (Bendsoe & Kikuchi, 1988). Em outras palavras, a otimização topológica transforma-se em um problema de determinar a melhor distribuição de material dentro do domínio. As variáveis de projeto (como a densidade, características geométricas da microestrutura etc.) estão envolvidas com a distribuição de material e possuem uma caracterís-

tica de funções distribuídas ao longo do domínio de análise. A Fig. 1.12 apresenta a solução para a estrutura de Michell através da otimização topológica a partir de um meio contínuo. Para problemas com pequena quantidade relativa de material (estruturas finas), a otimização topológica com abordagem de pixel resulta em uma estrutura do tipo treliça.

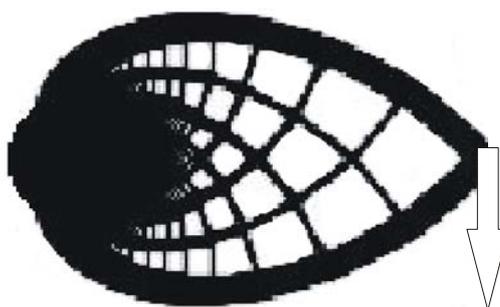


Figura 1.12: Resultado obtido pela otimização topológica para o problema de Michell

No projeto da topologia de uma estrutura, estamos interessados na determinação da distribuição ótima de um material isotrópico no espaço de projeto, que é definido por uma região de projeto, condições de contorno de deslocamento e de forças prescritas. Esta distribuição ótima depende da função objetivo a ser minimizada e das restrições impostas ao projeto. Nesta perspectiva, o domínio do projeto é mantido fixo, limitado pelos pontos de apoio da estrutura e pontos de aplicação de carregamento. Deve-se, então, determinar a distribuição ótima das propriedades do material ao longo do domínio, de forma que os pontos materiais deste domínio possam ser caracterizados como vazio ou cheio. Na implementação numérica, este domínio é discretizado em uma malha de elementos finitos, que permanece inalterada durante o processo de otimização. Portanto a otimização topológica é considerada como um problema pontual material / vazio.

A Fig. 1.13 mostra as etapas de um procedimento típico de otimização topológica. Inicialmente, é feita uma estimativa para as variáveis de projeto que definem o domínio. O domínio é limitado pelas condições de contorno (restrições de deslocamento) e regiões de aplicação dos carregamentos, e, então, discretizado em uma malha de elementos finitos. Faz-se uma análise de elementos finitos para o cálculo dos deslocamentos. Em seguida, calcula-se as sensibilidades (gradientes) das variáveis de projeto e dá-se início ao processo de otimização que irá buscar a melhor distribuição de material no domínio, de forma a extremizar a função objetivo especificada. Havendo convergência no processo de otimização, dentro de uma tolerância especificada, o procedimento é finalizado. Caso contrário, o processo é reiniciado com a atualização das variáveis de projeto, utilizando o passo e a direção de descida do algoritmo de otimização.

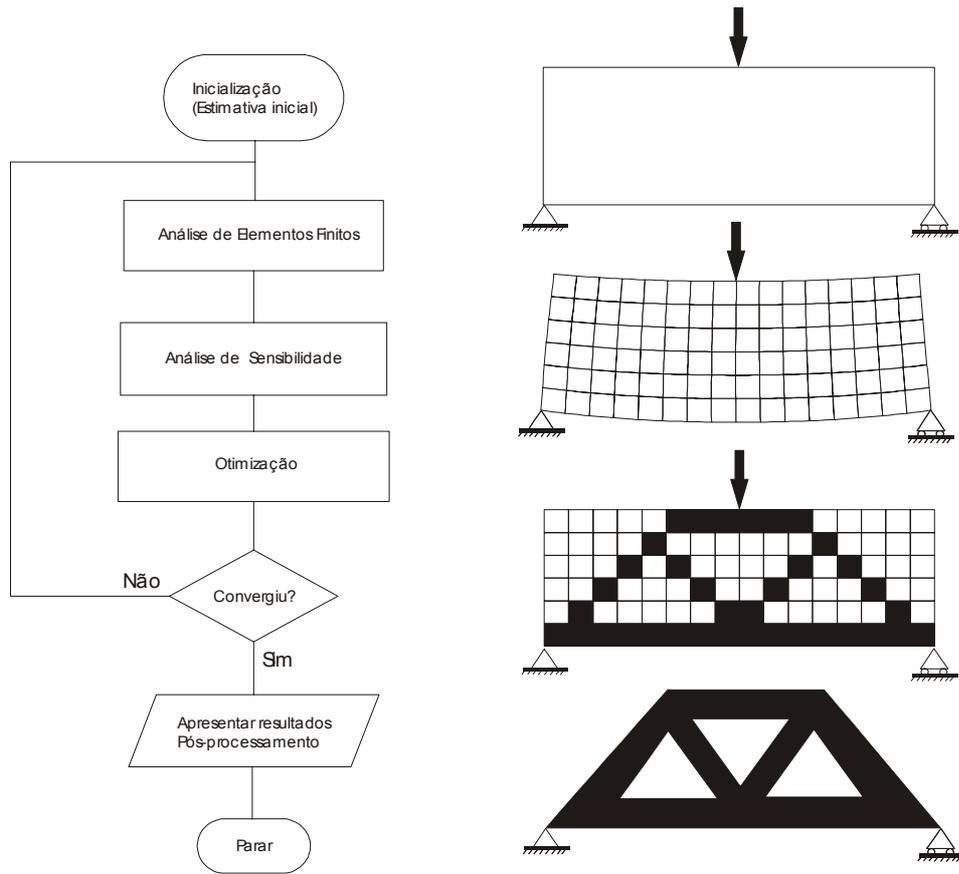


Figura 1.13: Fluxograma geral de otimização topológica de uma estrutura

1.3.1 Modelos de material

Um modelo de material que defina a microestrutura do domínio fixo de projeto é necessário para a caracterização da presença de material (sólido) ou a ausência de material (vazio), e ainda permitir que haja estágios intermediários entre as condições de sólido e vazio, fornecendo consistência física para o problema.

A partir do domínio de referência (Ω) que restringe o espaço de projeto, busca-se determinar um subconjunto ótimo Ω^{mat} de pontos materiais. A topologia a ser otimizada poderia ser representada por um função discretas $1_{\Omega^{mat}}$ definida em cada ponto do domínio (Ω) e, fisicamente, definiria se um ponto $x \in \Omega$ seria sólido ou vazio, não havendo estágios intermediários. Neste enfoque, o conjunto de tensores constitutivos admissíveis E_{adm} poderia ser definido como:

$$E_{ijkl} = 1_{\Omega^{mat}} E_{ijkl}^0, \quad \text{onde } 1_{\Omega^{mat}} = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \Omega^{mat} \\ 0 & \text{se } x \in \Omega \setminus \Omega^{mat} \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\int_{\Omega} 1_{\Omega^{mat}} d\Omega = Vol(\Omega^{mat}) \leq V = Vol(\Omega) \quad (1.2)$$

onde a última integral calcula a quantidade de material disponível, considerando um domínio inicial fixo, V é o volume total do domínio e E_{ijkl}^0 é o tensor constitutivo linear de quarta ordem, que define o material isotrópico de base e $E_{ijkl} \in L^\infty$ (espaço das funções integráveis segundo Lebesgue ³, descartando as funções de medida zero).

Entretanto, a implementação desta abordagem para um problema de otimização 0–1 (material / vazio), requer o uso de algoritmos de otimização discreta, Segundo Bendsoe, tal abordagem pode ser instável, não garantindo a existência de solução. Uma forma de transformar o problema discreto 0-1 em um problema de natureza contínua é definir um modelo de material para substituir a função discreta por uma função contínua (Cheng & Olhoff, 1981; Bendsoe, 1989). Esta abordagem consiste em considerar o material como sendo um material composto constituído por uma microestrutura periódica, a qual é caracterizada por um conjunto de parâmetros. Desta forma, a natureza complexa do problema de otimização de leiaute pode ser convertida em um problema de otimização de parâmetros.

As microestruturas são formadas pela mistura dos materiais homogêneos, formando um meio não-homogêneo. Assume-se então que o material é então formado por uma disposição periódica destas microestruturas, de modo que as propriedades efetivas do meio homogeneizado sejam parametrizadas apenas pelas propriedades geométricas destas microestruturas, conhecidas como células unitárias (Cardoso, 2000). De fato, a idéia de se utilizar um corpo constituído por microestruturas periodicamente distribuídas, remove a natureza 0-1 do problema de escala macroscópica para a escala microscópica, ver Bendsoe (1989). Em termos matemáticos, a introdução de microestruturas corresponde à relaxação do problema variacional que pode ser estabelecida para o problema de otimização, ver Kohn & Strang (1986).

Existem na literatura muitos modelos de microestruturas, que podem ser classificados basicamente em três grupos (Costa Jr, 2003):

- modelos de compósitos laminados tipo *rank*;
- modelos de microcélulas com vazios internos;
- modelos artificiais.

Nos modelos de compósitos laminados tipo *rank*, a microestrutura é composta por camadas de material, onde alterna-se camada de material sólido e camada de "vazios". O parâmetro de otimização é a medida γ , conforme mostra a Fig. 1.14, ver trabalhos de Thomsen (1992) e Olhoff *et al.* (1993).

³ L^∞ denota o espaço de todas as classes equivalentes de funções integráveis segundo Lebesgue sobre um domínio limitado Ω , $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, onde:

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{ess. sup}_\Omega |u(x)|$$

Os modelos de microcélulas com vazios internos são constituídos de células com furos retangulares. Neste caso, os parâmetros de otimização são as medidas a e b das laterais do retângulo e a orientação angular θ , conforme mostra a Fig.1.14. Os trabalhos de Bendsoe & Kikuchi (1988) iniciaram a utilização desta categoria de microestrutura na otimização topológica.

A determinação das propriedades mecânicas macroscópicas destes materiais é feita pela teoria da homogeneização. No caso de materiais do tipo *rank* a equação constitutiva homogeneizada pode ser determinada analiticamente. Entretanto, para os modelos com microcélulas complexas, normalmente as propriedades são determinadas por procedimentos numéricos.

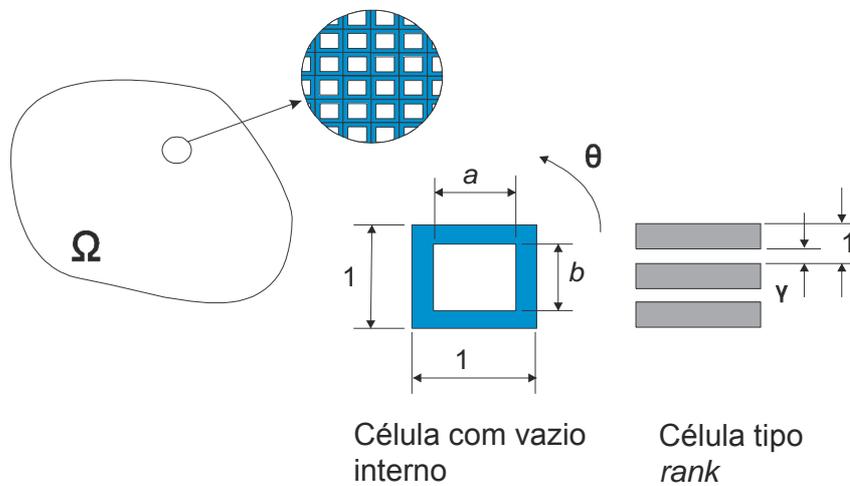


Figura 1.14: Microestruturas para o método de homogeneização

A homogeneização descreve as propriedades efetivas de um material composto formado de um material isotrópico de base, representado pelo tensor E_{ijkl}^0 . Esta parametrização relaxa o domínio da solução, garantindo um espaço de solução mais abrangente e fechado, além de tornar o problema mais tratável computacionalmente (Bendsoe, 1995; Tai & Fenner, 1999). Assim, cada ponto do domínio Ω discretizado por elementos finitos, é constituído por um material composto gerado pela repetição periódica de uma microestrutura com dimensões a , b e θ , no caso de microcélulas com vazio interno, ou γ , no caso dos compostos tipo *rank*. A variação destes parâmetros durante o processo de otimização permite a representação final de pontos com material sólido ($a = b = 0$ ou $\gamma = 0$), pontos com vazio ($a = b = 1$ ou $\gamma = 1$) e pontos com materiais intermediários. Estas regiões com materiais intermediários não tem significado físico para o projetista mas são, no entanto, um importante recurso matemático para relaxar o problema, contornando a natureza discreta 0-1 que gera mal condicionamento numérico devido à alteração brusca do valor das variáveis de projeto.

Infelizmente, a homogeneização insere novas variáveis de projeto ao problema de otimização topológica (os parâmetros a , b e θ , no caso de microcélulas com vazio in-

terno, ou γ , no caso dos compósitos tipo *rank*). Isto torna a implementação numérica mais complexa e aumenta o custo computacional do processo, visto que este último é proporcional ao número de variáveis de projeto. Por este motivo, muitos pesquisadores tem optado por utilizar modelos artificiais, cuja única variável de projeto é a densidade relativa do material $\rho(x)$. Esta utilização justifica-se pelo trabalho de Bendsoe & Kikuchi (1988), que conclui que o parâmetro mais importante é a densidade do material no domínio, ainda que a sua descrição não seja fiel ao comportamento micromecânico. Os tensores constitutivos são, então, parametrizados da seguinte forma:

$$\begin{aligned} E_{ijkl}(x) &= \rho(x)^\eta E_{ijkl}^0, \quad \eta > 1 \\ \int_{\Omega} \rho(x) d\Omega &\leq V, \quad 0 \leq \rho(x) \leq 1, \quad x \in \Omega \end{aligned} \quad (1.3)$$

onde a densidade relativa $\rho(x)$ é a função de projeto e E_{ijkl}^0 representa as propriedades materiais de um dado material isotrópico (Bendsoe, 1989). Esta aproximação é denominada pela sigla SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*) e indica que, em cada ponto do domínio Ω , qualquer material com módulo de elasticidade variando entre zero e o módulo de elasticidade do material base é permitido. Isto significa que se um projeto final tem densidade zero ou um em todos os pontos, este projeto é um projeto de "sólido / vazio" coerente com um modelo físico correto. No SIMP escolhe-se $\eta > 1$ de forma a penalizar o aparecimento de densidades intermediárias no domínio. O valor de $\eta > 1$ faz com que o aparecimento de densidades intermediárias seja desfavorecido no sentido de que a rigidez obtida é pequena comparada ao custo (volume) do material, tornando anti-econômico esta presença no projeto ótimo (Bendsoe & Sigmund, 2003). Conforme já foi citado, o aparecimento de densidades intermediárias é importante sob o ponto de vista matemático para a relaxação do problema, mas não é interessante para o projetista que deverá interpretar o resultado final e construir a estrutura. A topologia final ideal é aquela que apresenta somente regiões com ou sem material, conforme apresentada na parametrização discreta. Valores muito elevados de η , embora desejáveis, fazem com que o problema se aproxime do problema discreto 0-1, onde não garante-se a existência da solução, ver Rosvany *et al.*(1995).

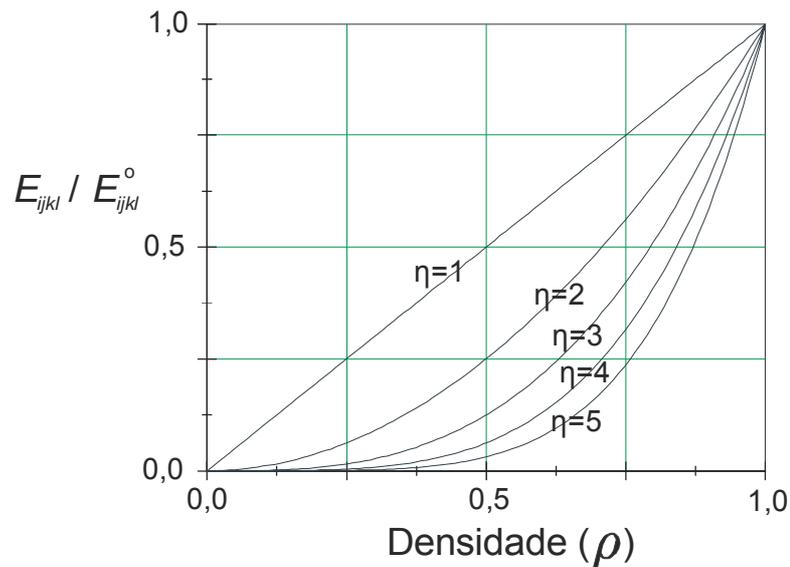


Figura 1.15: Curvas do modelo SIMP

A Fig. 4.1 apresenta algumas curvas do modelo SIMP variando-se o parâmetro de penalização η .

1.3.2 Problemas relacionados à otimização topológica

O método de otimização topológica adquiriu um certo nível de maturidade que tem possibilitado muitas aplicações da indústria, ultrapassando, desta forma, os limites acadêmicos. No entanto, apesar desta maturidade, há dificuldades na aplicação do método relacionadas à instabilidades numéricas, que ainda são alvo de pesquisas. Nesta seção faz-se uma breve discussão sobre os problemas numéricos relacionados à otimização topológica, tendo como base os trabalhos de Bendsoe & Sigmund (2003) e Peterson & Sigmund (1998).

De uma forma geral, pode-se dividir os problemas numéricos comuns na otimização topológica em três categorias:

- Dependência de malha: diferentes discretizações da malha de elementos finitos não geram qualitativamente a mesma solução. O refino da malha de elementos finitos deveria idealmente resultar na mesma topologia obtida pela malha mais pobre, mas com uma melhor definição dos contornos entre as fases materiais. Entretanto, o refino gera uma topologia mais complexa, com mais furos e mais detalhes.
- Instabilidades de tabuleiro: formação de regiões com alternância de elementos vazios e cheios, similares a um tabuleiro de xadrez na "solução ótima". A instabilidade de tabuleiro é dependente da discretização e é indesejável, pois não configura uma distribuição ótima de material.

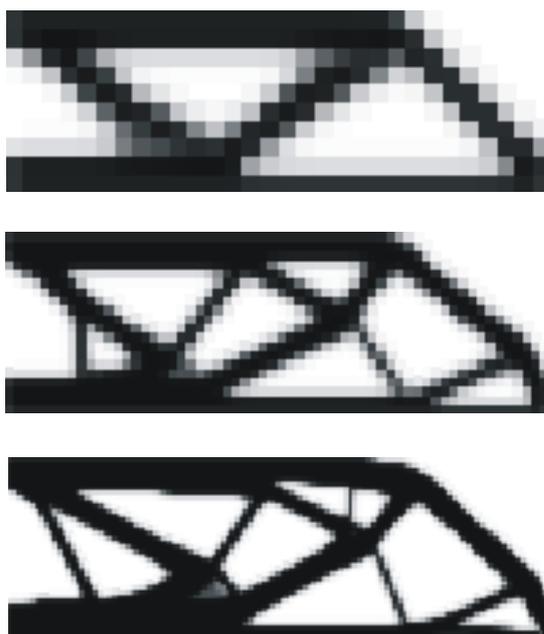


Figura 1.16: Dependência de malha.

- Mínimos locais: refere-se ao problema de obter diferentes soluções para o mesmo problema discretizado quando se escolhem diferentes parâmetros do algoritmo, por exemplo, valores iniciais de densidade e fatores de penalidade.

Dependência de malha

A dependência de malha ocorre devido ao fato que a introdução de mais furos, sem alterar o volume da estrutura, gera, de um modo geral, um aumento da eficiência de uma dada estrutura. Logo, as variações estruturais tendem a uma forma de microestrutura que apresente um melhor aproveitamento de material. Tais microestruturas são tipicamente não isotrópicas e portanto, não podem se encaixar nas descrições de projeto originais de um material isotrópico. Matematicamente, há uma falta de fechamento do conjunto admissível de projetos. O efeito disto, é a formação de mais furos à medida que a malha de elementos finitos é mais refinada.

A Fig. 1.16 mostra três resultados de otimização topológica para um mesmo problema de maximização de rigidez estrutural⁴. O primeiro domínio foi discretizada em 300 elementos, o segundo em 1200 elementos e o último com 4800 elementos. O refinamento da malha de elementos finitos deveria idealmente fornecer a mesma topologia com uma maior definição do contorno. No entanto, a malha mais discretizada resultou em uma estrutura mais complexa, o que cria uma dificuldade do ponto de vista da manufatura.

Atualmente existem procedimentos que ativam a independência de refino da malha. A abordagem utilizada é reduzir o espaço de projetos admissíveis incorporando restrições

⁴Extraído do endereço eletrônico <http://www.topopt.dtu.dk/>, acessado em 30 de junho de 2004.

globais ou locais na variação da densidade, o que impede a geração de microestruturas ou estruturas mais detalhadas. As técnicas que tem sido empregadas recaem em três classes. Duas delas incorporam restrições ao problema de otimização, sendo que uma reduz diretamente o parâmetro do espaço de projetos, e a outra aplica um filtro na implementação da otimização.

Uma terceira alternativa consiste em estender o espaço de projetos de tal forma que sejam aceitos materiais de densidade intermediária entre o vazio e o cheio (compósitos). No entanto, isto não é possível quando o objetivo é a obtenção de projetos 0 – 1, ou seja apenas constituídos por material sólido (densidade 1) ou vazio (densidade 0).

A seguir são descritas brevemente algumas técnicas para a obtenção da independência de malha.

Restrição de gradiente local A introdução de uma restrição de gradiente local foi feita inicialmente por Niordson (1983), na variação da espessura de placas de Kirchhoff, e permitiu resolver o problema de não-unicidade da solução do problema de otimização. A prova de existência, a convergência de elementos finitos e a implementação numérica de um esquema introduzindo restrição de gradiente local foi feita por Peterson & Sigmund (1998). Este esquema é baseado na idéia de impedir variações bruscas da variável de projeto no domínio, garantindo o fechamento do espaço de solução.

A prova da convergência implica que instabilidades de tabuleiro e outras anomalias serão eliminadas, ou pelo menos, podem ser feitas arbitrariamente fracas usando este esquema. A desvantagem deste esquema é o seu alto custo computacional, visto que acrescenta $2 * n_{ume}$ restrições ao problema de otimização, onde n_{ume} representa o número de elementos da malha.

Neste trabalho considera-se a imposição de uma restrição do tipo caixa, aplicada às componentes do gradiente da densidade relativa, conforme proposto por Peterson & Sigmund (1998). Visto que $\nabla\rho$ é constante no interior de cada elemento, impõe-se apenas que:

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)_e^2 \leq (C_x^e)^2 \tag{1.4}$$

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)_e^2 \leq (C_y^e)^2 \tag{1.5}$$

onde $e = 1, ..n_e$, com n_e representando o número total de elementos da malha.

Os limites C_x^e e C_y^e são definidos da seguinte maneira:

Considere um elemento genérico como mostrado na Fig. 1.17 sendo $\mathbf{x}_i = (x, y)$, para $i = 1, ...3$ as coordenadas dos vértices e $\mathbf{x}_m = (x_m, y_m)$ as coordenadas do baricentro do elemento Tri3.

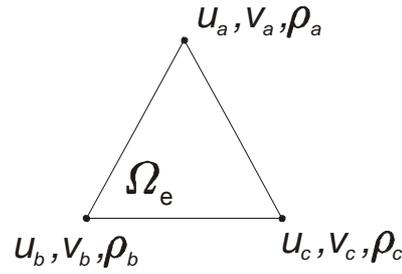


Figura 1.17: Elemento finito *Tri3*

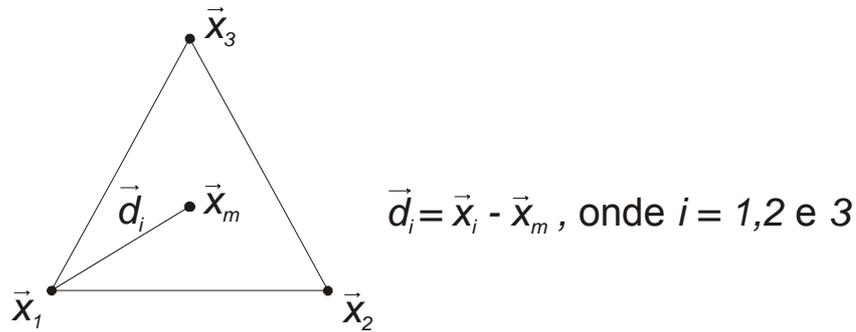


Figura 1.18: Coordenadas do elemento finito *Tri3*

Agora, denotando:

$$d_{\min} = \min_i \|\mathbf{d}_i\|, \quad \text{para } i = 1, \dots, 3 \tag{1.6}$$

é definido que:

$$C_x^e = C_y^e = \frac{1}{d_{\min}} \tag{1.7}$$

Conforme ilustra a Fig. 1.18. Uma modificação dos limites C_x^e e C_y^e deve ser realizada se no mínimo uma das arestas do elemento coincide com algum eixo de simetria. Aqui, considera-se dois casos possíveis, que são:

- Eixo de simetria x

Aqui, considera-se que o lado \overline{ab} do elemento coincide com o eixo- x de simetria. Neste caso, como ilustrado na Figura 1.19, deve-se ter: $v = 0$ e $\left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right) = 0$. Sendo assim, a imposição da última condição é alcançada fazendo $C_y^e = 0$.

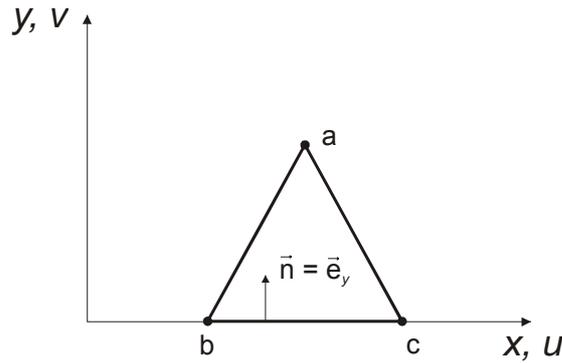


Figura 1.19: Condição de simetria no eixo-x

1. Eixo de simetria - y

Agora, considera-se que o lado \overline{bc} do elemento coincide com o eixo-y de simetria. Neste caso, como ilustrado na Figura 1.20, deve-se ter: $u = 0$ e $\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) = 0$. A imposição da última condição é alcançada denotando $C_x^e = 0$.

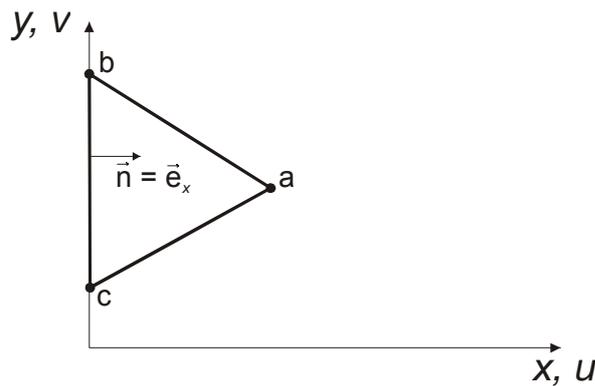


Figura 1.20: Condição de simetria eixo-y

Restrição de gradiente global Por restrição de gradiente global entende-se simplesmente uma norma de energia da função ρ no espaço de Sobolev $H^1(\Omega)$, ou seja:

$$\|\rho\|_{H^1} = \left(\int_{\Omega} (\rho^2 + |\nabla \rho|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq M \tag{1.8}$$

onde o escalar M é o valor limite para esta norma. A prova de existência quando se inclui esta restrição de caixa foi feita por Bendsoe (1995).

Valores elevados de M tornam a restrição de energia inativa, fazendo o problema retornar a formulação original.

Filtros para independência de malha Este filtro, proposto por Sigmund (1994, 1997), é uma extensão dos filtros para instabilidades de tabuleiro. O filtro modifica a

sensibilidade de projeto de um elemento específico baseado em uma média ponderada da sensibilidade dos elementos em uma vizinhança fixa. Deve ser enfatizado que este filtro é puramente heurístico mas produz resultados muito similares aos produzidos pelas restrições de gradiente local (Peterson & Sigmund, 1998), requerem pouco custo computacional e são muito simples de implementar comparados com outras abordagens.

O esquema de independência de malha age modificando as sensibilidades dos elementos como se segue:

$$\frac{\widehat{\partial f}}{\partial \rho_k} = (\rho_k)^{-1} \frac{1}{\sum_{i=1}^N \widehat{H}_i} \sum_{i=1}^N \widehat{H}_i \rho_i \frac{\partial f}{\partial \rho_i} \quad (1.9)$$

O operador convolução (fator peso) H_i é calculado como $H_i = r_{\min} - dist(k, i)$, $\{i \in N \mid dist(k, i) \leq r_{\min}\}$, $k = 1, \dots, N$, onde o operador $dist(k, i)$ é definido como a distância entre o centro do elemento k e o centro do elemento i . O operador convolução para o elemento i decai linearmente com a distância do elemento k .

Isto significa que ao invés de usar a sensibilidade real $(\frac{\partial f}{\partial \rho_k})$, a sensibilidade de filtro é utilizada.

A grande vantagem do esquema de filtragem é que ele não requer restrições extras no problema de otimização. No entanto, baseia-se em heurísticas.

Controle de perímetro O perímetro de Ω_S é, a grosso modo, a soma dos comprimentos/áreas de todas as fronteiras internas e externas. A restrição do perímetro obviamente limita o número de furos que podem aparecer no domínio. A existência de soluções para a otimização topológica com controle de perímetro foi provado por Ambrósio & Buttazzo (1993). A primeira implementação numérica foi feita por Harber *et al.* (1996). O esquema introduz valores de densidades intermediárias com penalização de modo a permitir a utilização de algoritmos tradicionais com cálculo de gradiente. Um limite de caixa superior na variação total é utilizado, $TV(\rho) \leq P^*$. Isto faz sentido desde que a variação total de ρ coincide com o perímetro de Ω_S quando ρ é 1 em Ω_S e zero caso contrário. A diferença, então, é que a variação total é definida ainda quando ρ atinge valores intermediários. No caso da função ρ ser suave,

$$TV(\rho) = \int_{\Omega} |\rho| dx \quad (1.10)$$

Para a densidade discretizada, a variação total está implementação como:

$$P = \sum_{k=1}^K \ell_k \left(\sqrt{(\rho)_k^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon \right) \quad (1.11)$$

onde $(\rho)_k$ é o salto da densidade do material através da interface k do elemento, de medida ℓ_k , $k \approx 2N$ é o número de interfaces de elemento. O parâmetro ε é um número positivo pequeno que garante a diferenciabilidade do perímetro. Esta expressão é exatamente a

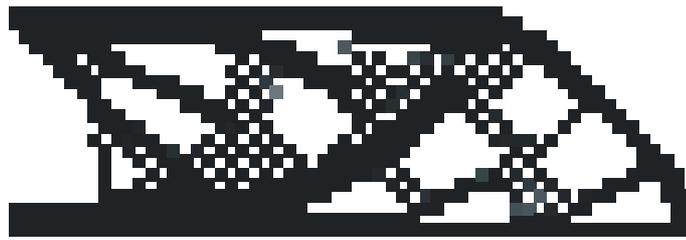


Figura 1.21: Topologia apresentando instabilidades de tabuleiro.

variação total da densidade constante do elemento quando $\varepsilon = 0$.

Na primeira implementação do método do perímetro, Harber *et al.* (1996) usaram um método de penalidade interior para impor a restrição e relataram que alguns experimentos com os parâmetros do algoritmo foram requeridos para fazer o algoritmo convergir para projetos sem dependência de malha. Usando um método de programação matemática para resolver o problema de otimização, Duysinx (1997) constatou que a restrição de perímetro foi difícil de aproximar resultando em flutuações nas variáveis de projeto. Argumentando que o cálculo de perímetro é computacionalmente barato comparado com a solução de elementos finitos, Duysinx (1997) propôs um procedimento com laço interno para uma aproximação do perímetro e relatou um comportamento muito bom de convergência.

Instabilidade de tabuleiro

A instabilidade de tabuleiro ou "*checkerboard*" refere-se ao surgimento de regiões com alternância de elementos sólido e vazio, semelhantes a um tabuleiro de xadrez na solução ótima, conforme mostra a Fig. 1.21⁵. Muitos trabalhos de otimização topológica relatam o surgimento dos tabuleiros. A formação destas regiões também foi observada na distribuição espacial de pressão em algumas análises de elementos finitos para fluidos de Stokes (Oden *et al.*, 1982). Inicialmente, acreditava-se que tais regiões eram microestruturas ótimas no nível do elemento finito. Atualmente é bem compreendido que as instabilidades de tabuleiro estão relacionadas com as características da aproximação de elementos finitos, e mais especificamente devido ao mal modelamento numérico que superestima a rigidez do tabuleiro, ver trabalhos de Díaz & Sigmund (1995) e Jog & Harber (1996). Em outras palavras, o arranjo com alternância de material apresenta uma maior rigidez (artificial) em termos de deformação ao cisalhamento do que o arranjo com distribuição de material igual para todos os elementos.

As instabilidades de tabuleiro podem ser minimizadas ou removidas com o uso das mesmas técnicas descritas anteriormente. A razão disto é que quando faz-se uma restrição geométrica (em termos de medida do contorno ou variação do gradiente) que garante a existência de solução, também obtém-se uma convergência de elementos finitos e as instabilidades não podem estar presentes em uma malha suficientemente fina.

⁵Extraído do endereço eletrônico <http://www.topopt.dtu.dk/>, acessado em 30 de junho de 2004.

O problema de encontrar a topologia ótima através da distribuição de material envolve dois campos: o campo de densidades e o campo de deslocamentos. A análise de elementos finitos para tais problemas pode apresentar dificuldades, sendo instável e tendendo para o desenvolvimento de instabilidades de tabuleiro para um dos campos. Conforme Jog *et al.* (1994), estas instabilidades estão relacionadas com a violação da condição de Babuska-Brezzi ⁶. Os autores também sugerem testar várias combinações de aproximações de elementos finitos para os campos de densidade e de deslocamento visando encontrar funções de interpolação que gerem configurações estáveis sob a condição de Babuska-Brezzi (Jog *et al.*, 1994, Jog & Harber, 1996).

Muitos artigos recomendam o uso de elementos finitos de mais alta ordem, o que significa aumentar o número de nós do elemento para evitar o problema de "checkerboards". Diaz & Sigmund (1995) e Jog & Harber (1996) mostram que a instabilidade é prevenida utilizando-se elementos de 8 ou 9 nós no método de homogeneização. No SIMP a utilização de elementos de 8 ou 9 nós apenas previne o aparecimento das instabilidades se o fator de penalização é pequeno o suficiente. No artigo de Diaz & Sigmund (1995), demonstra-se que não é interessante a utilização destes elementos quando o fator de penalização satisfizer a relação:

$$p > \frac{\log(2(6 - 5\nu))}{\log 2} \quad (1.12)$$

onde ν é o coeficiente de Poisson.

Infelizmente o aumento do número de nós do elemento encarece muito o custo computacional do procedimento, pois a matriz de rigidez global fica maior.

Swan & Kosaka (1997) propuseram um filtro espacial de vizinhança fixa, onde a densidade de cada elemento depende da densidade dos elementos vizinhos. Cardoso & Fonseca (1999) propuseram uma variação espacial do filtro de Swan & Kosaka (1997) com um raio de abrangência variável para torná-lo independente do refino da malha. Lima (2002) utiliza o filtro de Cardoso & Fonseca (1999) no projeto de mecanismos flexíveis.

⁶A condição de Babuska-Brezzi tem sido desenvolvida como um critério que garante que a discretização de elementos finitos resulta em um esquema numérico estável, ver Bathe (1996).

Mínimos locais

A maioria dos problemas de projeto topológico são não convexos⁷, o que acarreta a existência de muitos mínimos locais. Um exemplo típico é o projeto de uma estrutura sujeita à tensão uniaxial. A estrutura constituída por uma única barra é uma solução tão boa quanto várias barras com mesma área de seção transversal total.

A não-convexidade do problema leva a possibilidade de encontrarmos muitos mínimos locais e diferentes soluções para o mesmo problema discretizado quando são utilizados diferentes estimativas iniciais para as variáveis e diferentes parâmetros dos algoritmos de otimização. Isto ocorre porque as provas de convergência dos algoritmos funcionam para programação convexa⁸, enquanto que para programação não convexa apenas garante-se a convergência para pontos estacionários, que não são necessariamente mínimos globais (nem os melhores projetos). Os algoritmos de otimização global disponíveis são, em sua maioria, incapazes de lidar com uma grande quantidade de variáveis de projetos, o que é o caso da otimização topológica. Alguns autores sugerem a utilização de *métodos de continuação* para garantir de certa forma uma convergência estável na direção de bons projetos.

A idéia dos métodos de continuação é mudar gradualmente o problema de otimização de um problema convexo (artificialmente), que permite regiões de densidade intermediária, para o problema de projeto original não-convexo (problema 0–1) em um número de passos.

Allaire & Francfort (1993) e Allaire & Kohn (1993) propuseram um método de continuação permitindo inicialmente que a estrutura otimizada possua regiões cinzas (densidades intermediárias). Após a convergência, o esquema de penalização é introduzido gradualmente para a obtenção de projetos compostos apenas por material ou vazio (projetos 0 – 1).

Outras variações de métodos de continuação foram propostas. Haber *et al.* (1996)

⁷Um conjunto convexo S é uma coleção de pontos \vec{x} tendo a seguinte propriedade: se P_1 e P_2 são quaisquer pontos $\in S$, então o segmento de linha $P_1 - P_2$ está inteiramente em S . Em geral, para o espaço n -dimensional, o segmento de linha entre dois pontos \vec{x}_1 e \vec{x}_2 pode ser escrito como

$$\vec{x} = \alpha \vec{x}_2 + (1 - \alpha) \vec{x}_1, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \tag{1.13}$$

Se o segmento de linha da Eq. 1.13 está inteiramente no conjunto S , então é um conjunto convexo.

Uma função $f(x)$ definida em um conjunto convexo S é convexa se satisfaz a desigualdade:

$$f(\alpha \vec{x}_2 + (1 - \alpha) \vec{x}_1) \leq \alpha f(\vec{x}_2) + (1 - \alpha) f(\vec{x}_1) \tag{1.14}$$

para $0 \leq \alpha \leq 1$ e qualquer ponto \vec{x}_1 e \vec{x}_2 em S .

A importância em lidar com funções

Teorema: Se $f(x^*)$ é um mínimo local para uma função convexa $f(x^*)$ definida em um conjunto convexo S , então é também um mínimo global.

⁸Se todas as funções de restrição de desigualdade para um problema de projeto ótimo são convexas e todas as restrições de igualdade são lineares, então o conjunto das restrições S é convexo. Se a função objetivo é também convexa em S , então o problema é denominado problema de programação convexa. Tais problemas possuem uma propriedade muito útil onde as condições necessárias de otimalidade de Kuhn-Tucker são também suficientes, e qualquer mínimo local é também um mínimo global, ver Martinez (1999), Arora (1989) e Chong & Zak (1996).

sugerem uma penalização gradual para a restrição de perímetro. Sigmund (1997) e Sigmund & Torquato (1997) propõem um decréscimo gradual no raio de abrangência do filtro espacial. Guedes & Taylor (1997) sugerem um método de continuação onde um fator multiplicativo aplicado à restrição de volume é ajustado para aumentar gradualmente o custo dos elementos de densidade intermediária.

1.4 Conclusões

A utilização de mecanismos flexíveis oferece algumas vantagens em relação aos mecanismos de corpo rígido convencionais, para determinadas aplicações. Entre estas vantagens, pode-se citar a facilidade de fabricação, o menor atrito, o menor desgaste, a menor necessidade de lubrificação, a maior precisão devido a ausência de pinos, *etc.* No entanto, a complexidade do comportamento elástico deste tipo de mecanismo torna difícil a determinação de um procedimento de projeto que seja genérico e sistemático.

O método que tem se mostrado mais sistemático e genérico para o projeto de mecanismos flexíveis é o de otimização topológica. A otimização topológica age buscando a distribuição ótima de material no domínio fixo do projeto.

Neste trabalho utiliza-se a microestrutura artificial SIMP, na qual a única variável do projeto é a densidade do material. Outra vantagem desta microestrutura, é que ela permite penalizar a formação de regiões com densidades intermediárias, o que é desejável para uma melhor interpretação do projeto.

A otimização topológica, apesar de bastante difundida, apresenta alguns problemas de caráter numérico que são típicos, tais como a dependência de malha, as instabilidades de tabuleiro e a presença de mínimos locais. Neste capítulo foram apresentadas algumas alternativas para contornar estas dificuldades.

Capítulo 2

Princípios Energéticos e Implementação Numérica

A aplicação do método numérico envolve a discretização do domínio fixo de projeto. Neste trabalho é utilizado o método de Elementos Finitos de Galerkin para a discretização da equação de estado, associada ao problema de otimização.

Neste capítulo apresenta-se todo o processo de discretização por elementos finitos necessário para este trabalho. A solução aproximada do problema é discretizada para o caso de cargas e molas concentradas (projeto de mecanismos com restrição de material) e para o caso de cargas e molas distribuídas (projeto com restrições de fadiga).

Os conceitos principais relacionados com o método de elementos finitos estão apresentados neste capítulo de forma resumida. Maiores detalhes podem ser obtidos em livros especializados tais como, por exemplo, Bathe (1996), Hughes (1987), Cook *et al.* (1988) e Kienkiewicz & Taylor (1989).

2.1 Princípios Energéticos

Considere o problema de elasticidade clássico, ilustrado na Fig. 2.1. Trata-se de um corpo elástico sujeito à ação de um carregamento \vec{t}_p em Γ_t , um deslocamento prescrito \vec{u}_p em Γ_u e forças de corpo \vec{b} . Deseja-se encontrar o campo de deslocamentos \vec{u} resultante desta configuração.

Utilizando as equações de equilíbrio, este problema pode ser estabelecido da seguinte forma:

Encontrar \vec{u} tal que

$$\operatorname{div}(\sigma) + \vec{b} = 0, \quad \text{em } \Omega, \quad (2.1)$$

sujeito às seguintes condições de contorno:

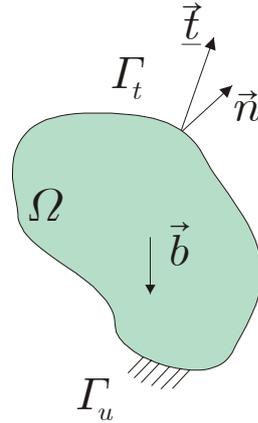


Figura 2.1: Um corpo elástico submetido à um carregamento

$$\vec{u} = \vec{u}_p, \quad \text{em } \Gamma_u, \quad (2.2)$$

$$\sigma \vec{n} = \vec{t}_p, \quad \text{em } \Gamma_t. \quad (2.3)$$

onde σ é o tensor tensão e \vec{n} é o vetor unitário normal à superfície. Esta formulação é denominada formulação forte do problema.

A solução do conjunto de equações anterior, permite a obtenção da solução exata para o problema. No entanto, soluções analíticas utilizando este método apenas são possíveis para um conjunto bastante limitado de estruturas com características particulares de geometria e de carregamento. Estamos interessados em esquemas para obter soluções aproximadas do problema, que sejam aplicáveis à situações muito mais complexas aonde soluções exatas não são possíveis. Estes esquemas exigem uma formulação diferente, denominada formulação fraca ou variacional.

A formulação fraca é conveniente para a aproximação por Elementos Finitos. Do ponto de vista matemático, a aproximação por elementos finitos significa a solução de um sistema de equações algébrico, obtido pela formulação fraca do problema em um subespaço dimensional finito de $H^1(\Omega)$.

Para definir a formulação fraca é necessário caracterizar duas classes de funções, ver Hughes (1987). A primeira é composta pelo conjunto de soluções admissíveis. Estas possíveis soluções devem satisfazer as condições de contorno e, para que certas expressões a serem empregadas façam sentido, devem respeitar a norma:

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} = \left(\sum_{[j] \leq 1} \|D^j u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \quad (2.4)$$

Funções que satisfazem 2.4 são chamadas funções de Hilbert¹ H^1 , e escreve-se $\vec{u} \in$

¹Um espaço de Hilbert é um espaço linear, normado e completo, onde:

$H^1(\Omega)$.

A segunda classe de funções corresponde ao conjunto de variações admissíveis. Este conjunto é muito similar ao primeiro exceto que as funções tomam obrigatoriamente o valor zero em Γ_u . Isto é consequência direta do fato que estas funções são obtidas a partir da diferença entre duas funções arbitrárias do conjunto de soluções admissíveis.

Pode-se, portanto, definir os dois conjuntos como se segue:

Definição: O conjunto dos deslocamentos admissíveis Kin_u é definido por

$$Kin_u = \{ \vec{u} \mid \vec{u} \in H^1(\Omega) , \vec{u} = \vec{u}_p \text{ at } \Gamma_u \}$$

Definição: O conjunto das variações admissíveis Var_u é definido por

$$Var_u = \{ \vec{v} \mid \vec{v} \in H^1(\Omega) , \vec{v} = 0 \text{ at } \Gamma_u \}$$

Por simplicidade, neste trabalho considera-se $\vec{u}_p = 0$, o que implica $Kin_u = Var_u = \vartheta$.

Definição: O conjunto dos deslocamentos e variações admissíveis ϑ é então definido por

$$\vartheta = \{ \vec{u} \mid \vec{u} \in H^1(\Omega) , \vec{u} = 0 \text{ at } \Gamma_u \} \tag{2.5}$$

Formulação fraca do problema

A formulação fraca do problema pode ser estabelecida como:

Encontrar $\vec{u} \in \vartheta$ tal que

$$\int_{\Omega} \sigma(\vec{u}) \cdot \varepsilon(\vec{v}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \vec{b} \cdot \vec{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} \vec{t}_p \cdot \vec{v} \, d\Gamma, \quad \forall \vec{v} \in \vartheta. \tag{2.6}$$

Formulações como a da Eq. 2.6 são geralmente conhecidas como Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) e são muito utilizadas na Mecânica. O PTV pode ser enunciado da seguinte maneira: "*Uma estrutura submetida a ação de forças externas está em equilíbrio quando, ao se imporem deslocamentos arbitrários (virtuais) compatíveis com as condições de contorno, o trabalho realizado pelas forças externas sobre os deslocamentos virtuais é igual ao trabalho que realizam as tensões sobre as deformações produzidas pelos deslocamentos virtuais*". A demonstração da Eq. 2.6 é feita a seguir.

Prova: Multiplicando a Eq. 2.1 por uma função arbitrária \vec{v} e integrando no domínio Ω , obtemos:

$$\int_{\Omega} \text{div}(\sigma) \cdot \vec{v} \, d\Omega + \int_{\Omega} \vec{b} \cdot \vec{v} \, d\Omega = 0, \quad \forall \vec{v} \in \vartheta \tag{2.7}$$

$$H^1(\Omega) = \left\{ \vec{u} \in L^2(\Omega) ; \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, \dots, n \right\}$$

Mas, aplicando o divergente no produto da função tensorial σ pela função vetorial \vec{v} , e sabendo que $\sigma = \sigma^T$, obtemos:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\sigma^T \vec{v}) &= \operatorname{div}(\sigma) \cdot \vec{v} + \sigma \cdot \nabla \vec{v} \\ &= \operatorname{div}(\sigma) \cdot \vec{v} + \sigma \cdot \varepsilon(\vec{v}) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Além disto, pelo Teorema da Divergência podemos transformar uma integral de volume em um integral de fronteira, ou seja:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\sigma^T \vec{v}) \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \sigma \vec{n} \cdot \vec{v} \, d\Gamma = \int_{\Gamma_t} \vec{t}_p \cdot \vec{v} \, d\Gamma \quad (2.9)$$

Logo, substituindo o termo $\operatorname{div}(\sigma) \cdot \vec{v}$ de 2.8 em 2.7 e aplicando o Teorema da Divergência conforme 2.9, obtemos:

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(\vec{v}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \vec{b} \cdot \vec{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} \vec{t}_p \cdot \vec{v} \, d\Gamma, \quad \forall \vec{v} \in \mathcal{V}. \quad (2.10)$$

Teorema de reciprocidade

Problema caso (a) Considere agora o problema ilustrado na Fig. 2.2

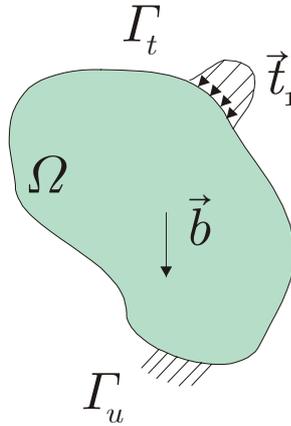


Figura 2.2: Um corpo elástico submetido a um carregamento \vec{t}_1

A formulação forte do problema é dada por:

Encontrar \vec{u} tal que

$$\operatorname{div}(\sigma) + \vec{b} = 0, \quad \text{em } \Omega, \quad (2.11)$$

sujeito às seguintes condições de contorno:

$$\vec{u} = 0, \quad \text{em } \Gamma_u, \quad (2.12)$$

$$\sigma \vec{n} = \vec{t}_1, \text{ em } \Gamma_t. \quad (2.13)$$

A formulação fraca para o caso (a) pode então ser formulada como:

$\vec{u}_1 \in \vartheta$ é a solução do problema caso (a) se:

$$\int_{\Omega} \sigma(\vec{u}_1) \cdot \varepsilon(\vec{v}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \vec{b} \cdot \vec{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} \vec{t}_1 \cdot \vec{v} \, d\Gamma, \quad \forall \vec{v} \in \vartheta. \quad (2.14)$$

Problema caso (b) Considere agora o problema ilustrado na Fig. 2.3:

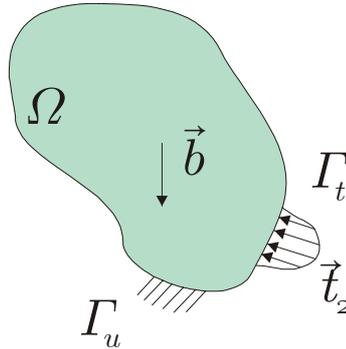


Figura 2.3: Um corpo elástico submetido ao carregamento \vec{t}_2

A formulação forte do problema é dada por:

Encontrar \vec{u} tal que:

$$\text{div}(\sigma) + \vec{b} = 0, \text{ em } \Omega, \quad (2.15)$$

sujeito às seguintes condições de contorno:

$$\vec{u} = 0, \text{ em } \Gamma_u, \quad (2.16)$$

$$\sigma \vec{n} = \vec{t}_2, \text{ em } \Gamma_t. \quad (2.17)$$

A formulação fraca para o caso (b) pode ser formulada como:

$\vec{u}_2 \in \vartheta$ é solução do problema caso (a) se

$$\int_{\Omega} \sigma(\vec{u}_2) \cdot \varepsilon(\vec{v}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \vec{b} \cdot \vec{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} \vec{t}_2 \cdot \vec{v} \, d\Gamma, \quad \forall \vec{v} \in \vartheta. \quad (2.18)$$

Aqui, ambos os casos (a) e (b) consideram a mesma força de corpo \vec{b} e fronteira Γ_t .

Agora, desde que $\vec{u}_2 \in \vartheta$ e 2.14 é satisfeita para todo $\vec{v} \in \vartheta$, então deve ser satisfeita por $\vec{u}_2 \in \vartheta$. Portanto, de 2.14 pode-se concluir que: se $\vec{u}_1 \in \vartheta$ é solução do problema caso (a), então

$$\int_{\Omega} \sigma(\vec{u}_1) \cdot \varepsilon(\vec{u}_2) \, d\Omega = \int_{\Omega} \vec{b} \cdot \vec{u}_2 \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} \vec{t}_1 \cdot \vec{u}_2 \, d\Gamma. \quad (2.19)$$

Além disto, desde que $\vec{u}_1 \in \vartheta$ e 2.18 é satisfeita para todo $\vec{v} \in \vartheta$, então deve ser satisfeita para $\vec{u}_1 \in \vartheta$. Portanto, de 2.18 pode-se concluir que: se $\vec{u}_2 \in \vartheta$ é solução do problema caso (b) então:

$$\int_{\Omega} \sigma(\vec{u}_2) \cdot \varepsilon(\vec{u}_1) \, d\Omega = \int_{\Omega} \vec{b} \cdot \vec{u}_1 \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} \vec{t}_2 \cdot \vec{u}_1 \, d\Gamma. \quad (2.20)$$

Considerando que o material seja linearmente elástico e isotrópico², da lei de Hooke generalizada temos que as tensões se relacionam linearmente com as deformações, ou seja:

$$\sigma(\vec{u}_1) = \mathbb{D}\varepsilon(\vec{u}_1) \quad (2.21)$$

e

$$\sigma(\vec{u}_2) = \mathbb{D}\varepsilon(\vec{u}_2), \quad (2.22)$$

A matriz \mathbb{D} é o tensor constitutivo de 4.^a ordem que contém as propriedades do material. A matriz constitutiva é simétrica, positiva definida e pode ser representada por:

$$\mathbb{D}_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ir} \delta_{js} + \delta_{is} \delta_{jr}). \quad (2.23)$$

onde λ e μ são as constantes de Lamé, obtidas por ensaios experimentais. As constantes de Lamé estão relacionadas com o módulo de Young (E) e o coeficiente de Poisson (ν) pelas seguintes expressões:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (2.24)$$

e

$$\mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (2.25)$$

A constante G representa o módulo de cisalhamento.

A matriz constitutiva também satisfaz as seguintes condições: $\mathbb{D}_{ijkl} = \mathbb{D}_{jikl} = \mathbb{D}_{ijlk} = \mathbb{D}_{klij}$.

Substituindo 2.21 em 2.19 obtemos:

$$\int_{\Omega} \mathbb{D}\varepsilon(\vec{u}_1) \cdot \varepsilon(\vec{u}_2) \, d\Omega = \int_{\Omega} \vec{b} \cdot \vec{u}_2 \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} \vec{t}_1 \cdot \vec{u}_2 \, d\Gamma. \quad (2.26)$$

²Um material é dito linearmente elástico se a tensão é linearmente relacionada com as deformações, e se as deformações retornam imediatamente a zero após o descarregamento, tal como uma simples mola linear. Um material é dito isotrópico se apresenta as mesmas propriedades em todas as direções do sólido (Dowling, 1999).

Da mesma forma, substituindo 2.22 em 2.20 obtemos:

$$\int_{\Omega} \mathbb{D}\varepsilon(\vec{u}_2) \cdot \varepsilon(\vec{u}_1) d\Omega = \int_{\Omega} \vec{b} \cdot \vec{u}_1 d\Omega + \int_{\Gamma_t} \vec{t}_2 \cdot \vec{u}_1 d\Gamma. \quad (2.27)$$

Desde que

$$\begin{aligned} \mathbb{D}\varepsilon(\vec{u}_1) \cdot \varepsilon(\vec{u}_2) &= \mathbb{D}_{ijkl} \varepsilon_{ij}(\vec{u}_1) \varepsilon_{kl}(\vec{u}_2) \\ &= \mathbb{D}_{kl ij} \varepsilon_{kl}(\vec{u}_2) \varepsilon_{ij}(\vec{u}_1) \\ &= \mathbb{D}\varepsilon(\vec{u}_2) \cdot \varepsilon(\vec{u}_1) \end{aligned} \quad (2.28)$$

obtemos, a partir de 2.26 e 2.27 que

$$\int_{\Omega} \vec{b} \cdot \vec{u}_2 d\Omega + \int_{\Gamma_t} \vec{t}_1 \cdot \vec{u}_2 d\Gamma = \int_{\Omega} \vec{b} \cdot \vec{u}_1 d\Omega + \int_{\Gamma_t} \vec{t}_2 \cdot \vec{u}_1 d\Gamma \quad (2.29)$$

Na ausência de forças de corpo ($\vec{b} = 0$), obtemos:

$$\int_{\Gamma_t} \vec{t}_1 \cdot \vec{u}_2 d\Gamma = \int_{\Gamma_t} \vec{t}_2 \cdot \vec{u}_1 d\Gamma \quad (2.30)$$

No caso de forças concentradas, temos:

Se

$$\vec{t}_2 = \vec{P}_2 \delta(\vec{x} - \vec{x}_2) \quad (2.31)$$

e se

$$\vec{t}_1 = \vec{P}_1 \delta(\vec{x} - \vec{x}_1) \quad (2.32)$$

onde $\delta(x - x_2)$ representa a distribuição delta, então

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_t} \vec{t}_1 \cdot \vec{u}_2 d\Gamma &= \int_{\Gamma_t} \vec{P}_1 \delta(\vec{x} - \vec{x}_1) \cdot \vec{u}_2 d\Gamma \\ &= \vec{P}_1 \int_{\Gamma_t} \delta(\vec{x} - \vec{x}_1) \cdot \vec{u}_2 d\Gamma \\ &= \vec{P}_1 \cdot \vec{u}_2(\vec{x}_1) \end{aligned} \quad (2.33)$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_t} \vec{t}_2 \cdot \vec{u}_1 d\Gamma &= \int_{\Gamma_t} \vec{P}_2 \delta(\vec{x} - \vec{x}_2) \cdot \vec{u}_1 d\Gamma \\ &= \vec{P}_2 \int_{\Gamma_t} \delta(\vec{x} - \vec{x}_2) \cdot \vec{u}_1 d\Gamma \\ &= \vec{P}_2 \cdot \vec{u}_1(\vec{x}_2) \end{aligned} \quad (2.34)$$

Substituindo 2.33 e 2.34 em 2.30 finalmente obtemos

$$\vec{P}_1 \cdot \vec{u}_2(\vec{x}_1) = \vec{P}_2 \cdot \vec{u}_1(\vec{x}_2) \quad (2.35)$$

onde \vec{P}_1 representa a carga concentrada aplicada em x_1 e \vec{P}_2 representa a carga concentrada aplicada em x_2 .

A equação anterior é conhecida como teorema de Maxwell (1831-1879) e é um caso particular do teorema de Betti para forças pontuais³. O Teorema de Reciprocidade de Betti estabelece que se um corpo elástico linear está sujeito a dois diferentes conjuntos de forças, o trabalho realizado pelo primeiro sistema de forças ao longo do deslocamento produzido pelo segundo sistema de forças é igual ao trabalho realizado pelo segundo sistema de forças ao longo do deslocamento produzido pelo primeiro sistema de forças. Este Teorema é muito útil quando se deseja determinar o campo de deslocamentos em um ponto conhecendo-se o campo de deslocamentos e a força que atuam em outro ponto do corpo.

2.2 Formulação de Mecanismos

Várias formulações foram propostas para o problema de síntese topológica de mecanismos flexíveis. De uma forma geral, pode-se distinguir três modelos: modelo de força-deflexão, modelo de mola e modelo multi-objetivo.

O modelo de força-deflexão resulta em uma formulação muito similar ao projeto de estrutura via otimização estrutural. Neste modelo, dada uma força de entrada, o mecanismo flexível é projetado para um deslocamento prescrito com ou sem requisitos de força. O problema pode ser considerado como um problema de minimização de flexibilidade com condições de contorno de deslocamento prescrito ou um problema de peso mínimo com restrição de deslocamento. No entanto, estas formulações não modelam adequadamente o comportamento elástico do mecanismo flexível, resultando em uma estrutura com rigidez otimizada. Portanto, este modelo não tem sido adotado em trabalhos recentes.

O modelo de mola surgiu visando capturar o comportamento de interação entre a peça atuada (que é comprimida ou esticada) e a região de saída do mecanismo flexível. A força e a deflexão da mola na região de saída representariam, respectivamente, a resistência e a deflexão do mecanismo flexível na região de saída. Este modelo foi inicialmente utilizado com a minimização de flexibilidade sem obter muito sucesso. Sigmund (1997) adotou este modelo com a maximização da vantagem mecânica sujeita a restrição de volume e deslocamento. Saxena & Ananthasuresh (1998) empregam o modelo de mola juntamente com uma formulação multi-objetivo.

O modelo multi-objetivo permite ponderar os requisitos cinemáticos e estruturais do

³Uma observação interessante é que o Teorema de Maxwell foi estabelecido em 1864 enquanto que o Teorema de Betti foi estabelecido alguns anos mais tarde em 1872.

mecanismo flexível. O deslocamento na saída pode ser quantificado pela energia potencial mútua (mutual potential energy, MPE) e a flexibilidade é quantificada pela energia de deformação (strain energy, SE). A formulação pode ser expressa em termos da soma ponderada da MPE e da SE , fração de MPE sobre SE , ou fração de MPE e SE elevados a potências escalares, ou seja, MPE^m/SE^n .

Neste trabalho empregaremos um modelo de molas concentradas e distribuídas, que serão adotadas de acordo com o problema de otimização. No caso do problema de projeto ótimo com restrição de quantidade de material utilizaremos cargas e molas concentradas. Já para o projeto ótimo com restrição de fadiga empregaremos cargas e molas distribuídas, o que previne a criação de campos de tensão singulares. A determinação da formulação fraca do problema de mecanismos é feita através do Princípio da Mínima Energia Potencial Total, ver Shames & Dym (1985).

Inicialmente, definimos o funcional $\pi(\vec{u})$, denominado energia potencial total, como sendo a energia do sistema após a deformação. Esta energia é composta pela energia elástica acumulada menos o trabalho das forças externas.

Considerando o problema ilustrado na Fig. 2.4.

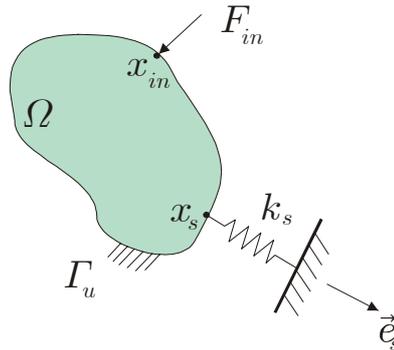


Figura 2.4: Modelo de mecanismo

Para este problema, com a carga proporcional a ser definida na próxima seção, a energia potencial total pode ser expressa por:

$$\pi(\vec{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbb{D}\varepsilon(\vec{u}) \cdot \varepsilon(\vec{u}) \, d\Omega + \frac{1}{2} k_s \langle \vec{u}(\vec{x}_s), \vec{e}_s(\vec{x}_s) \rangle^2 - \vec{e}_{in} \cdot \vec{u}(\vec{x}_{in}) \quad (2.36)$$

Os termos do funcional $\pi(\vec{u})$ são, respectivamente: a energia de deformação do corpo, a energia de deformação da mola e o trabalho realizado pela força externa aplicada.

Conforme o Princípio da Mínima Energia Potencial Total, o deslocamento \vec{u}_o que minimiza a energia potencial $\pi(\vec{u})$ coincide com o deslocamento solução do problema de equilíbrio. Portanto, a formulação variacional para o problema pode ser estabelecida da seguinte maneira:

Encontrar $\vec{u}_o \in \mathcal{V}$ tal que

$$\vec{u}_o = \arg \min_{\vec{u} \in \vartheta} \pi(\vec{u}) \quad (2.37)$$

A condição necessária de otimalidade, para que \vec{u}_o seja um mínimo local de $\pi(\vec{u})$ é:

$$\left. \frac{d}{d\alpha} \{ \pi(\vec{u}_o + \alpha \vec{v}) \} \right|_{\alpha=0} = 0, \quad \forall \vec{v} \in \vartheta \quad (2.38)$$

que se interpreta como a variação da energia $\pi(\vec{u}_o)$ devido a uma perturbação da variável \vec{u}_o na direção de \vec{v} .

Resolvendo 2.38, obtemos:

$$\int_{\Omega} \mathbb{D}\varepsilon(\vec{u}_o) \cdot \varepsilon(\vec{v}) \, d\Omega + k_s \langle \vec{u}_o(\vec{x}_s), e_s(\vec{x}_s) \rangle \langle \vec{v}(\vec{x}_s), e_s(\vec{x}_s) \rangle - \vec{e}_{in} \cdot \vec{v}(\vec{x}_{in}) = 0, \quad \forall \vec{v} \in \vartheta. \quad (2.39)$$

ou seja:

$$\int_{\Omega} \mathbb{D}\varepsilon(\vec{u}_o) \cdot \varepsilon(\vec{v}) \, d\Omega + k_s [e_s \otimes e_s] \vec{u}_o(\vec{x}_s) \cdot \vec{v}(\vec{x}_s) - \vec{e}_{in} \cdot \vec{v}(\vec{x}_{in}) = 0, \quad \forall \vec{v} \in \vartheta. \quad (2.40)$$

Aqui, destaca-se que:

$$\Delta_s = \langle \vec{u}_o(\vec{x}_s), e_s(\vec{x}_s) \rangle \quad (2.41)$$

representa o deslocamento da extremidade da mola. Além disto, como $e_s(\vec{x}_s)$ aponta para fora do domínio Ω temos:

- Se $\Delta_s \geq 0$, a mola é comprimida;
- Se $\Delta_s < 0$, então a mola é alongada.

Estas observações podem ser vistas nas Figuras 2.5 e 2.6.

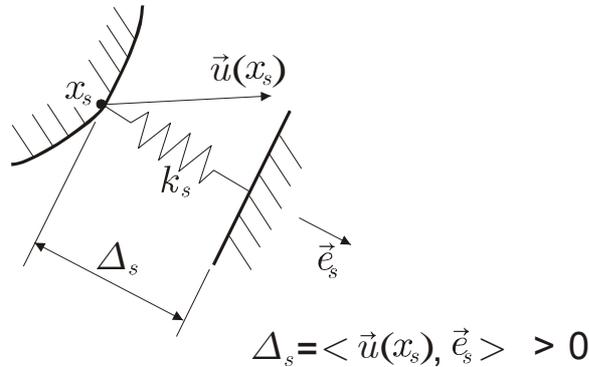


Figura 2.5: Deformação da mola (compressão)

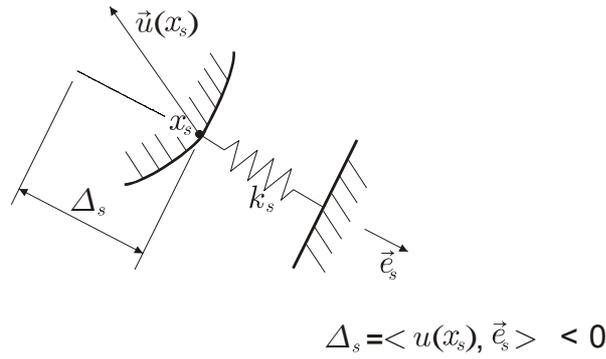


Figura 2.6: Deformação da mola (tração)

Neste trabalho, consideraremos que o objetivo do projeto de mecanismo flexível ótimo será maximizar Δ_s , ou seja, maximizar a componente do deslocamento na direção do vetor unitário \vec{e}_s , como é mostrado a seguir:

$$\max \{ \Delta_s \} \tag{2.42}$$

Nota-se que, se o movimento do mecanismo ocorre na direção oposta, em relação a \vec{e}_s , o alongamento da mola será $\Delta_s < 0$. Por outro lado, se o deslocamento é realizado na direção de \vec{e}_s , então $\Delta_s \geq 0$. Portanto, a direção do movimento é fundamental para a caracterização do mecanismo ótimo. É importante observar que a maximização da energia da mola é incapaz de distinguir entre o modo de compressão da mola e o modo de tração, pois para os mesmos alongamentos $\delta = |\Delta_s|$. Isto mostra que a maximização da energia de deformação da mola não é uma função objetivo adequada para o projeto ótimo de mecanismos flexíveis.

A formulação fraca para este problema pode ser escrita como: $\vec{u}_o \in \vartheta$ é a solução do problema, ilustrado na Fig. 2.4, se:

$$\int_{\Omega} \sigma(\vec{u}_o) \cdot \varepsilon(\vec{v}) \, d\Omega + k_s \langle \vec{u}_o(\vec{x}_s), e_s(\vec{x}_s) \rangle \langle \vec{v}(\vec{x}_s), e_s(\vec{x}_s) \rangle = \vec{F}_{in} \cdot \vec{v}(\vec{x}_{in}), \quad \forall \vec{v} \in \vartheta. \tag{2.43}$$

ou

$$\int_{\Omega} \sigma(\vec{u}_o) \cdot \varepsilon(\vec{v}) \, d\Omega + k_s [e_s \otimes e_s] \vec{u}_o(\vec{x}_s) \cdot \vec{v}(\vec{x}_s) = \vec{F}_{in} \cdot \vec{v}(\vec{x}_{in}), \quad \forall \vec{v} \in \vartheta. \tag{2.44}$$

2.3 Cargas e molas distribuídas

Nesta seção considera-se a formulação do problema onde tanto as cargas quanto as molas estão distribuídas na vizinhança local. A formulação de mecanismos flexíveis, neste caso, requer a solução de dois subproblemas, os quais são:

- Determinação de $\vec{u}_o(\vec{x})$

Este subproblema, está ilustrado na Fig. 2.7,

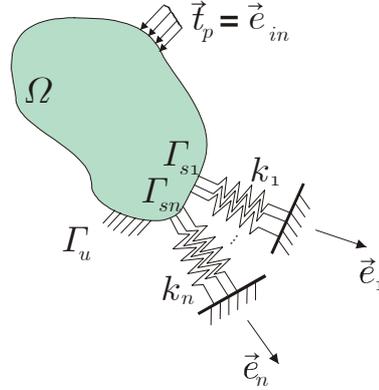


Figura 2.7: Definição do problema distribuído para $\vec{u}_o(\vec{x})$

e pode ser formulado como:

Encontrar $\vec{u}_o(\vec{x}) \in \vartheta$ tal que

$$\vec{u}_o(\vec{x}) = \arg \min_{\forall \vec{u} \in \vartheta} \pi(\vec{u}) \quad (2.45)$$

onde

$$\pi(\vec{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbb{D}\varepsilon(\vec{u}) \cdot \varepsilon(\vec{u}) \, d\Omega + \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{s_j}} k_j \langle \vec{u}, \vec{e}_j \rangle^2 \, d\Gamma - \int_{\Gamma_t} \langle \vec{u}, \vec{e}_{in} \rangle \, d\Gamma. \quad (2.46)$$

Neste trabalho, por simplicidade, trabalharemos com apenas uma região de resposta. Portanto, o segundo termo do funcional $\pi(\vec{u})$, correspondente ao trabalho de deformação da mola, é calculado para apenas uma mola distribuída, ou seja:

$$\pi(\vec{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbb{D}\varepsilon(\vec{u}) \cdot \varepsilon(\vec{u}) \, d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_s} k_s \langle \vec{u}, \vec{e}_s \rangle^2 \, d\Gamma - \int_{\Gamma_t} \langle \vec{u}, \vec{e}_{in} \rangle \, d\Gamma. \quad (2.47)$$

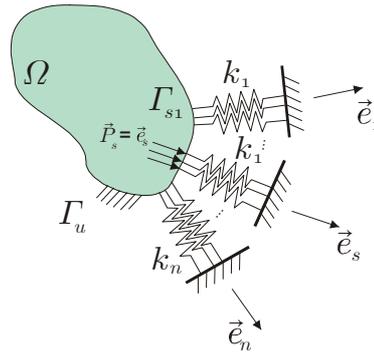
A condição necessária de otimalidade para $\vec{u}_o(\vec{x})$ é:

$$\left. \frac{d}{d\alpha} \{ \pi(\vec{u}_o + \alpha \vec{v}) \} \right|_{\alpha=0} = 0, \quad \forall \vec{v} \in \vartheta. \quad (2.48)$$

Resolvendo 2.48, obtemos:

$$\int_{\Omega} \mathbb{D}\varepsilon(\vec{u}_o) \cdot \varepsilon(\vec{v}) \, d\Omega + \int_{\Gamma_s} k_s \langle \vec{u}_o, \vec{e}_s \rangle \langle \vec{v}, \vec{e}_s \rangle \, d\Gamma - \int_{\Gamma_t} \langle \vec{v}, \vec{e}_{in} \rangle \, d\Gamma = 0, \quad \forall \vec{v} \in \vartheta \quad (2.49)$$

o que implica


 Figura 2.8: Definição do problema distribuído para $\vec{u}_s(\vec{x})$

$$\int_{\Omega} \sigma(\vec{u}_o) \cdot \varepsilon(\vec{v}) \, d\Omega + \int_{\Gamma_s} k_s \langle \vec{u}_o, \vec{e}_s \rangle \langle \vec{v}, \vec{e}_s \rangle \, d\Gamma = \int_{\Gamma_t} \langle \vec{v}, \vec{e}_{in} \rangle \, d\Gamma, \quad \forall \vec{v} \in \vartheta \quad (2.50)$$

E finalmente,

$$\int_{\Omega} \sigma(\vec{u}_o) \cdot \varepsilon(\vec{v}) \, d\Omega + \int_{\Gamma_s} k_s [\vec{e}_s \otimes \vec{e}_s] \vec{u}_o \cdot \vec{v} \, d\Gamma = \int_{\Gamma_t} \langle \vec{v}, \vec{e}_{in} \rangle \, d\Gamma, \quad \forall \vec{v} \in \vartheta \quad (2.51)$$

- Determinação de $\vec{u}_s(\vec{x})$.

Este subproblema, está ilustrado na Fig. 2.8,

e pode ser formulado como:

Encontrar $\vec{u}_s \in \vartheta$ tal que

$$\vec{u}_s(\vec{x}) = \arg \min_{\forall \vec{u} \in \vartheta} \pi(\vec{u}) \quad (2.52)$$

onde

$$\pi(\vec{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbb{D}\varepsilon(\vec{u}) \cdot \varepsilon(\vec{u}) \, d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_s} k_s \langle \vec{u}, \vec{e}_s \rangle^2 \, d\Gamma - \int_{\Gamma_{ss}} \langle \vec{u}, \vec{e}_s \rangle \, d\Gamma. \quad (2.53)$$

- A condição necessária de otimalidade para $\vec{u}_s(\vec{x})$ é:

$$\frac{d}{d\alpha} \left\{ \pi(\vec{u}_s + \alpha \vec{v}) \right\} \Big|_{\alpha=0} = 0, \quad \forall \vec{v} \in \vartheta \quad (2.54)$$

ou seja,

$$\int_{\Omega} \sigma(\vec{u}_s) \cdot \varepsilon(\vec{v}) \, d\Omega + \int_{\Gamma_s} k_s \langle \vec{u}_s, \vec{e}_s \rangle \langle \vec{v}, \vec{e}_s \rangle \, d\Gamma = \int_{\Gamma_t} \langle \vec{v}, \vec{e}_s \rangle \, d\Gamma, \quad \forall \vec{v} \in \vartheta \quad (2.55)$$

o que implica:

$$\int_{\Omega} \sigma(\vec{u}_s) \cdot \varepsilon(\vec{v}) \, d\Omega + \int_{\Gamma_s} k_s [\vec{e}_s \otimes \vec{e}_s] \vec{u}_s \cdot \vec{v} \, d\Gamma = \int_{\Gamma_t} \langle \vec{v}, \vec{e}_s \rangle \, d\Gamma, \quad \forall \vec{v} \in \vartheta \quad (2.56)$$

Aqui, novamente é válida a relação:

$$\int_{\Gamma_s} \langle \vec{u}_o, \vec{e}_s \rangle \, d\Gamma = \int_{\Gamma_t} \langle \vec{u}_s, \vec{e}_{in} \rangle \, d\Gamma \quad (2.57)$$

que corresponde ao Teorema de Reciprocidade de Betti.

2.4 Discretização por elementos finitos

O conceito fundamental do método de elementos finitos é que qualquer quantidade contínua, tal como temperatura, pressão, ou deslocamentos, pode ser aproximada por um modelo discreto composto por um conjunto de funções contínuas definidas sobre um número finito de subdomínios.

Uma função de aproximação ϕ é formada pela conexão de funções simples, cada uma definida sobre uma pequena região (elemento). Um elemento finito é uma região no espaço onde uma função é interpolada pelos valores nodais de ϕ na fronteira da região, de um modo tal que a continuidade de ϕ entre os elementos seja mantida na montagem.

Mediante um procedimento sistemático, o método de elementos finitos fornece uma solução numérica aproximada de um problema de valor de contorno descrito por uma equação diferencial, mediante a solução de um sistema de equações algébrico.

Segundo Cook *et al.* (1988), uma análise de elementos finitos típica (análise de tensões) envolve basicamente os seguintes passos:

1. Discretizar o domínio; definindo os nós e os elementos.
2. Formular as propriedades de cada elemento.
3. Montar os elementos de modo a obter um modelo de elementos finitos da estrutura.
4. Aplicar os carregamentos prescritos.
5. Especificar deslocamentos prescritos.
6. Resolver um sistema de equações algébrico para determinar os deslocamentos nodais.
7. Calcular as deformações a partir dos deslocamentos.
8. Calcular as tensões.

Nesta seção e nas seguintes são desenvolvidos alguns conceitos importantes para a aplicação do método, tais como a determinação das funções de interpolação, elementos isoparamétricos e mudança de variáveis.

O elemento bidimensional triangular, que será adotado neste trabalho, é mostrado na Fig. 2.9. Este elemento tem lados retos e três nós, um em cada vértice. Os valores nodais da quantidade escalar ϕ são denotados por Φ_{i_1} , Φ_{i_2} e Φ_{i_3} , e as coordenadas dos três nós são (x_{i_1}, y_{i_1}) , (x_{i_2}, y_{i_2}) e (x_{i_3}, y_{i_3}) .

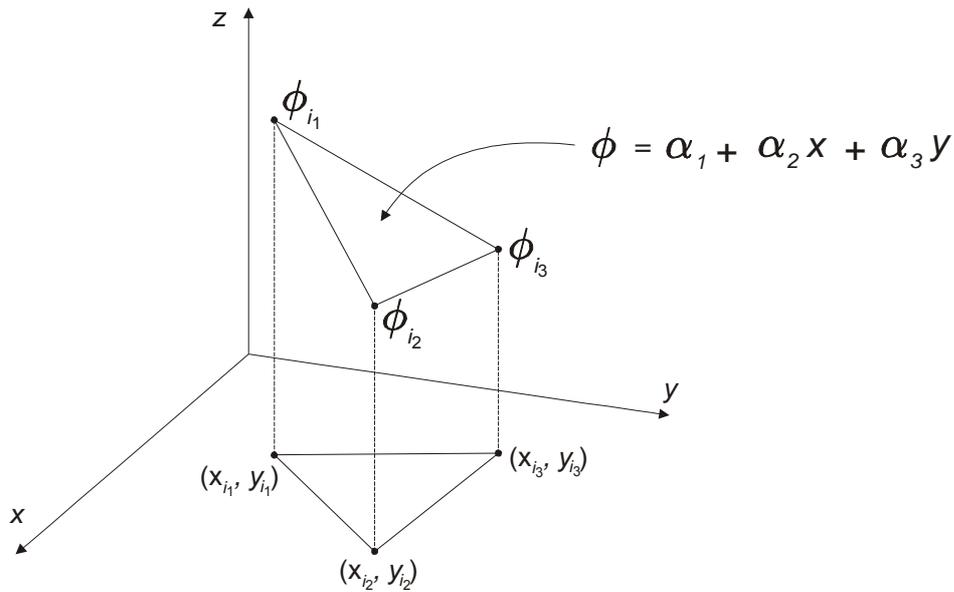


Figura 2.9: Elemento bidimensional triangular

O polinômio de interpolação é:

$$\phi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \tag{2.58}$$

com as condições nodais

$$\phi = \Phi_{i_1} \text{ em } x = x_{i_1}, y = y_{i_1} \tag{2.59}$$

$$\phi = \Phi_{i_2} \text{ em } x = x_{i_2}, y = y_{i_2} \tag{2.60}$$

$$\phi = \Phi_{i_3} \text{ em } x = x_{i_3}, y = y_{i_3} \tag{2.61}$$

Substituindo estes termos na equação 2.58 obtém-se o sistema de equações:

$$\begin{aligned}\Phi_{i_1} &= \alpha_1 + \alpha_2 x_{i_1} + \alpha_3 y_{i_1} \\ \Phi_{i_2} &= \alpha_1 + \alpha_2 x_{i_2} + \alpha_3 y_{i_2} \\ \Phi_{i_3} &= \alpha_1 + \alpha_2 x_{i_3} + \alpha_3 y_{i_3}\end{aligned}\tag{2.62}$$

que fornece:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{1}{2\Omega_e} [(x_{i_2}y_{i_3} - x_{i_3}y_{i_2}) \Phi_{i_1} + (x_{i_3}y_{i_1} - x_{i_1}y_{i_3}) \Phi_{i_2} + (x_{i_1}y_{i_2} - x_{i_2}y_{i_1}) \Phi_{i_3}] \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2\Omega_e} [(y_{i_2} - y_{i_3}) \Phi_{i_1} + (y_{i_3} - y_{i_1}) \Phi_{i_2} + (y_{i_1} - y_{i_2}) \Phi_{i_3}] \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2\Omega_e} [(x_{i_3} - x_{i_2}) \Phi_{i_1} + (x_{i_1} - x_{i_3}) \Phi_{i_2} + (x_{i_2} - x_{i_1}) \Phi_{i_3}]\end{aligned}\tag{2.63}$$

A valor Ω_e corresponde a área do triângulo, e é obtido pelo determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_{i_1} & y_{i_1} \\ 1 & x_{i_2} & y_{i_2} \\ 1 & x_{i_3} & y_{i_3} \end{vmatrix} = 2\Omega_e\tag{2.64}$$

Substituindo os valores de α_1 , α_2 e α_3 em 2.58 e rearranjando a expressão, produz-se a seguinte equação:

$$\phi = H_1\Phi_{i_1} + H_2\Phi_{i_2} + H_3\Phi_{i_3}\tag{2.65}$$

onde

$$H_1 = \frac{1}{2\Omega_e} (a_1 + b_1x + c_1y) \quad e \quad \begin{cases} a_1 = x_{i_2}y_{i_3} - x_{i_3}y_{i_2} \\ b_1 = y_{i_2} - y_{i_3} \\ c_1 = x_{i_3} - x_{i_2} \end{cases}\tag{2.66}$$

$$H_2 = \frac{1}{2\Omega_e} (a_2 + b_2x + c_2y) \quad e \quad \begin{cases} a_2 = x_{i_3}y_{i_1} - x_{i_1}y_{i_3} \\ b_2 = y_{i_3} - y_{i_1} \\ c_2 = x_{i_1} - x_{i_3} \end{cases}\tag{2.67}$$

$$H_3 = \frac{1}{2\Omega_e} (a_3 + b_3x + c_3y) \quad e \quad \begin{cases} a_3 = x_{i_1}y_{i_2} - x_{i_2}y_{i_1} \\ b_3 = y_{i_1} - y_{i_2} \\ c_3 = x_{i_2} - x_{i_1} \end{cases}\tag{2.68}$$

As funções H são chamadas funções de interpolação ou funções de forma. A Eq. 2.65 pode ser escrita usando a notação matricial:

$$\phi = H_1\Phi_{i_1} + H_2\Phi_{i_2} + H_3\Phi_{i_3} = [H] \{\Phi\}\tag{2.69}$$

onde $[H] = \begin{bmatrix} H_i & H_j & H_k \end{bmatrix}$ é uma matriz linha e $\{\Phi\} = \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \Phi_k \end{Bmatrix}$ é um vetor coluna.

O cálculo de H_1 no nó i_1 produz:

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{2\Omega_e} (a_1 + b_1 x_{i_1} + c_1 y_{i_1}) \\ &= \frac{1}{2\Omega_e} (x_{i_2} y_{i_3} - x_{i_3} y_{i_2} + x_{i_1} y_{i_2} - x_{i_1} y_{i_3} + x_{i_3} y_{i_1} - x_{i_2} y_{i_1}) \end{aligned} \quad (2.70)$$

Os termos dentro do parênteses correspondem ao valor do determinante em 2.64, portanto:

$$H_i = \frac{1}{2\Omega_e} (2\Omega_e) = 1 \quad (2.71)$$

no nó i_1 . Pode ser mostrado que N_{i_1} é zero nos nós dois e três. Da mesma forma, N_{i_2} é zero no nó i_1 e no nó i_3 e tem o valor um no nó i_2 . Estes resultados são característicos das funções de forma. Elas tem o valor um em um dos nós do elemento e zero nos nós restantes.

A quantidade escalar ϕ é uma função de um conjunto de funções de forma as quais são lineares em x e y . Isto significa que o gradiente em ambas as direções x e y serão constantes. O gradiente na direção x é:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial H_1}{\partial x} \Phi_{i_1} + \frac{\partial H_2}{\partial x} \Phi_{i_2} + \frac{\partial H_3}{\partial x} \Phi_{i_3} \quad (2.72)$$

mas

$$\frac{\partial H_\beta}{\partial x} = \frac{b_\beta}{2\Omega_e}, \quad \beta = 1, 2, 3 \quad (2.73)$$

logo,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{2\Omega_e} (b_1 \Phi_{i_1} + b_2 \Phi_{i_2} + b_3 \Phi_{i_3}) \quad (2.74)$$

Como b_1 , b_2 e b_3 são constantes (são fixos uma vez que as coordenadas dos nós são especificadas) e Φ_{i_1} , Φ_{i_2} e Φ_{i_3} são independentes do espaço de coordenadas, a derivada tem um valor constante. Um gradiente constante dentro de um elemento significa que muitos pequenos elementos tem que ser usados para aproximar uma rápida mudança no valor de ϕ .

2.5 Interpolação para quantidades vetoriais

Uma quantidade vetorial, tal como o deslocamento, tem tanto magnitude quanto direção. Logo, há mais de um grau de liberdade desconhecido por nó. O procedimento usual é resolver o vetor e tratar as componentes do vetor como as quantidades desconhecidas. O nó tem uma, duas ou três incógnitas (referentes aos graus de liberdade de deslocamento), conforme o problema ser uni, bi ou tridimensional.

A definição das componentes vetoriais está ilustrada na Figura 2.10. As letras minúsculas u , v e w são utilizadas para representar os deslocamentos nas direções x , y e z , respectivamente. Os índices i_1 , i_2 , i_3 , e i_4 associados aos deslocamentos u , v e w informam o nó do elemento.

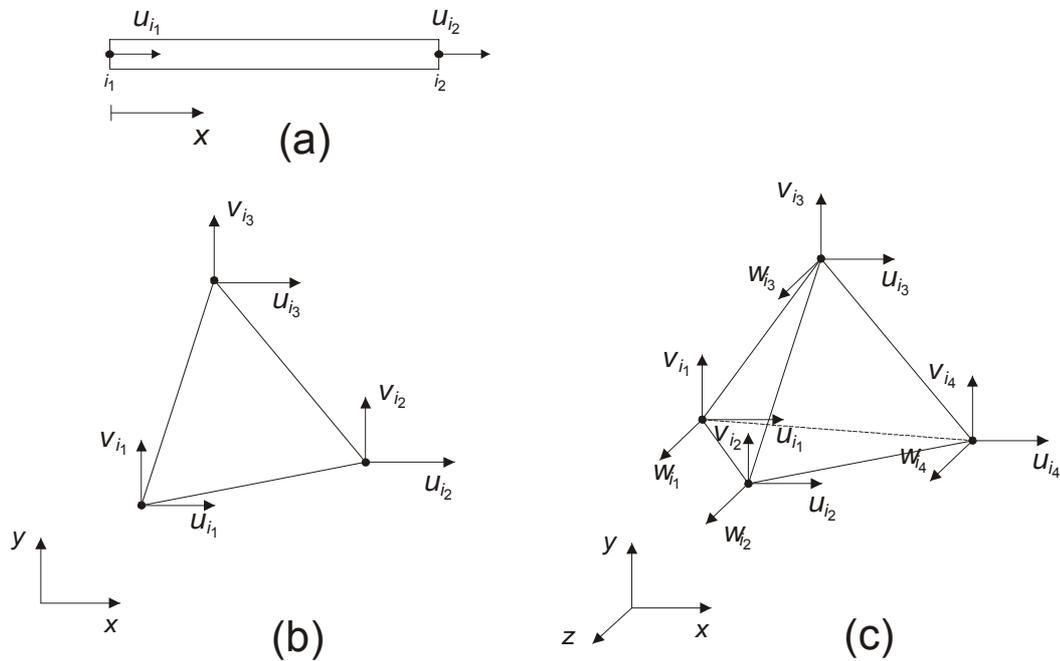


Figura 2.10: Quantidades vetoriais nodais para os elemento: (a) unidimensional, (b) bidimensional e (c) tridimensional.

No elemento triangular, o deslocamento horizontal u é aproximado utilizando:

$$u = H_1 u_{i_1} + H_2 u_{i_2} + H_3 u_{i_3} \tag{2.75}$$

enquanto a componente vertical, v , é representada por:

$$v = H_1 v_{i_1} + H_2 v_{i_2} + H_3 v_{i_3} \tag{2.76}$$

Estas duas equações podem ser escritas em termos de todos os valores nodais, obtendo:

$$\begin{aligned} u &= H_1 u_{i_1} + 0v_{i_1} + H_2 u_{i_2} + 0v_{i_2} + H_3 u_{i_3} + 0v_{i_3} \\ v &= 0u_{i_1} + H_1 v_{i_1} + 0u_{i_2} + H_2 v_{i_2} + 0u_{i_3} + H_3 v_{i_3} \end{aligned} \quad (2.77)$$

Utilizando notação matricial:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 & 0 & H_2 & 0 & H_3 & 0 \\ 0 & H_1 & 0 & H_2 & 0 & H_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{i_1} \\ v_{i_1} \\ u_{i_2} \\ v_{i_2} \\ u_{i_3} \\ v_{i_3} \end{Bmatrix} \quad (2.78)$$

As funções de forma são idênticas aquelas dadas em 2.65.

A discretização do problema de mecanismos será realizada aplicando o método dos elementos finitos de Galerkin, utilizando o elemento *Tri3*, que interpola a densidade relativa e as componentes do deslocamento, conforme ilustra a Fig. 2.11.

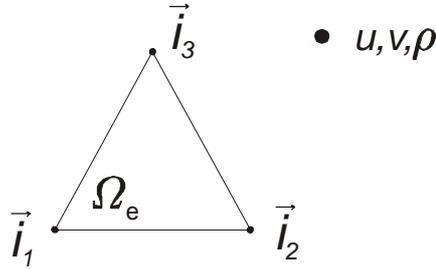


Figura 2.11: Elemento *Tri3*.

A interpolação do campo de densidade relativa é dada por

$$\rho(x, y) = H_1(x, y)\rho_{i_1} + H_2(x, y)\rho_{i_2} + H_3(x, y)\rho_{i_3} \quad (2.79)$$

e as componentes do deslocamento:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= H_1(x, y)u_{i_1} + H_2(x, y)u_{i_2} + H_3(x, y)u_{i_3} \\ v(x, y) &= H_1(x, y)v_{i_1} + H_2(x, y)v_{i_2} + H_3(x, y)v_{i_3} \end{aligned} \quad (2.80)$$

onde H_i são as funções de interpolação vistas anteriormente, ou seja:

$$\begin{aligned} H_1(x, y) &= \frac{1}{2\Omega_e} [(x_{i_2}y_{i_3} - x_{i_3}y_{i_2}) + (y_{i_2} - y_{i_3})x + (x_{i_3} - x_{i_2})y] \\ H_2(x, y) &= \frac{1}{2\Omega_e} [(x_{i_3}y_{i_1} - x_{i_1}y_{i_3}) + (y_{i_3} - y_{i_1})x + (x_{i_1} - x_{i_3})y] \\ H_3(x, y) &= \frac{1}{2\Omega_e} [(x_{i_1}y_{i_2} - x_{i_2}y_{i_1}) + (y_{i_1} - y_{i_2})x + (x_{i_2} - x_{i_1})y] \end{aligned} \quad (2.81)$$

e Ω_e é a área do elemento triangular, que pode ser determinada por:

$$\Omega_e = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & x_{i_1} & y_{i_1} \\ 1 & x_{i_2} & y_{i_2} \\ 1 & x_{i_3} & y_{i_3} \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

A construção das matrizes de rigidez dos elementos envolve a definição das funções de interpolação, cuja expressão depende das características polinomiais das mesmas e das coordenadas que definem o elemento. A identificação da equação que define a função de interpolação de um elemento qualquer da malha é uma tarefa custosa. Para superar esta dificuldade costuma-se utilizar uma operação de mapeamento das funções de interpolação definidas num domínio elementar padrão, ver Fig. 2.12.

As funções de interpolação de um elemento triangular são:

$$\begin{aligned} H_1(\xi, \eta) &= 1 - \xi - \eta \\ H_2(\xi, \eta) &= \xi \\ H_3(\xi, \eta) &= \eta \end{aligned} \quad (2.83)$$

Então, é possível mapear todo ponto do triângulo padrão, para o triângulo no domínio real (x, y) , mediante a seguinte operação:

$$x(\zeta, \eta) = H_1(\zeta, \eta)x_{i_1} + H_2(\zeta, \eta)x_{i_2} + H_3(\zeta, \eta)x_{i_3} \quad (2.84)$$

e

$$y(\zeta, \eta) = H_1(\zeta, \eta)y_{i_1} + H_2(\zeta, \eta)y_{i_2} + H_3(\zeta, \eta)y_{i_3} \quad (2.85)$$

onde x_i e y_i são as coordenadas do elemento.

Por outro lado, os deslocamentos de um ponto arbitrário do elemento são dados por:

$$\begin{aligned} u(x(\zeta, \eta), y(\zeta, \eta)) &= H_1(\zeta, \eta)u_{i_1} + H_2(\zeta, \eta)u_{i_2} + H_3(\zeta, \eta)u_{i_3} \\ v(x(\zeta, \eta), y(\zeta, \eta)) &= H_1(\zeta, \eta)v_{i_1} + H_2(\zeta, \eta)v_{i_2} + H_3(\zeta, \eta)v_{i_3} \end{aligned} \quad (2.86)$$

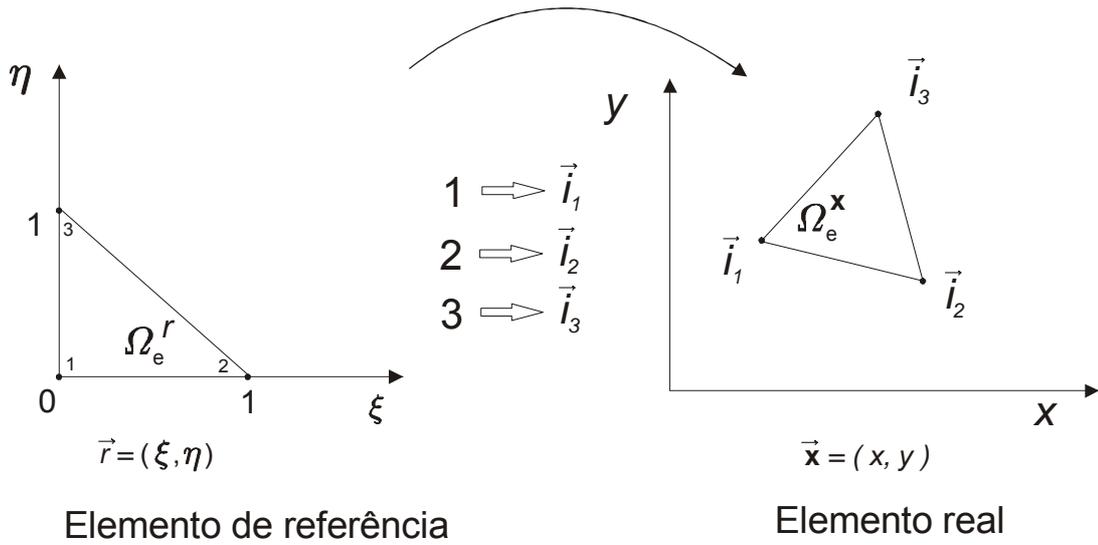


Figura 2.12: Mudança de variáveis

Neste caso, as mesmas funções de interpolação para mapear o elemento foram utilizadas para interpolar as variáveis de interesse. Os elementos que possuem esta propriedade são chamados elementos isoparamétricos.

O objetivo deste tipo de mapeamento é estabelecer um único conjunto de funções de interpolação para cada tipo de elemento e efetuar a integração das matrizes de rigidez e termo de carga na configuração padrão do elemento através de uma simples mudança de variáveis de integração, conforme ilustra a Fig. 2.12.

Considere a matriz de rigidez do elemento linear:

$$[\mathbb{K}_e] = \int_{\Omega_e} [B_u]^T [\bar{\mathbb{D}}(\rho)] \cdot [B_u] d\Omega \tag{2.87}$$

Neste caso, a matriz $\overset{e}{\mathbf{B}}$ contém as derivadas parciais das funções H_i em relação as variáveis (x, y) . Como as funções de interpolação agora estão em função de (ξ, η) , deve-se utilizar a regra da cadeia para obter $H_{i,x}$ e $H_{i,y}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x}(\xi(x, y), \eta(x, y)) &= \frac{\partial H}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial H}{\partial y}(\xi(x, y), \eta(x, y)) &= \frac{\partial H}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{aligned} \tag{2.88}$$

Em forma matricial,

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial H_i}{\partial x} \\ \frac{\partial H_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial H_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial H_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \nabla H \tag{2.89}$$

onde J é a chamada matriz Jacobiana. Prova-se que este operador sempre possui inversa

se o mapeamento é bi-unívoco, isto é, se cada ponto (ξ, η) corresponde a um único ponto (x, y) e vice-versa.

Na última expressão temos $H_{,\eta}$ e $H_{,\xi}$, mas não conhecemos a matriz J^{-1} . Em geral, é difícil obter explicitamente a função inversa de 2.84 e 2.85, ou seja, as funções $\xi(x, y)$ e $\eta(x, y)$ necessárias para as diferenciações em 2.89. Esta matriz é obtida por meio de um artifício, que é mostrado a seguir.

Suponha que as funções inversas $\xi(x, y)$ e $\eta(x, y)$ são conhecidas. Utilizando a regra da cadeia, pode-se escrever:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial H_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial H_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial H_i}{\partial x} \\ \frac{\partial H_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.90)$$

Os vetores são os mesmos das Eqs. 2.84 e 2.85. Considerando que a inversa de uma matriz, se existir, é única, nota-se que a matriz desta equação é a inversa da anterior, ou seja, é a matriz Jacobiana J . Então obtemos:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial H}{\partial \xi} \\ \frac{\partial H}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial H}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.91)$$

O procedimento de cálculo consiste, então, em usar as Eqs. 2.84 e 2.85 para determinar J e, em seguida, fazer a sua inversão. Deste modo pode-se obter $H_{,x}$ e $H_{,y}$. Estas derivadas são, então, utilizadas nos cálculos de $\overset{e}{\mathbf{B}}$ na matriz de rigidez do elemento.

A inversa da matriz Jacobiana J é obtida usando a conhecida regra de Cramer para inversão de matrizes:

$$J^{-1} = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial x}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (2.92)$$

Finalmente, é possível mostrar que o elemento diferencial de área $d\Omega = dx dy$ pode ser escrito em termos de elementos diferenciais de comprimento $d\xi$ e $d\eta$ da seguinte forma:

$$d\Omega = dx dy = \det[\mathbf{J}] d\xi d\eta \quad (2.93)$$

isto é, o determinante do Jacobiano fornece a relação de áreas diferenciais entre um ponto no domínio padrão e o ponto correspondente no domínio real do elemento.

Ordenando estes resultados, a integral 2.87 pode, então, ser efetuada no domínio do elemento finito padrão com as devidas mudanças de variáveis:

$$[\mathbb{K}_e] = \int_{\eta=0}^1 \int_{\xi=0}^{1-\xi} [B_u]^T [\bar{\mathbb{D}}(\rho)] \cdot [B_u] \det[J] d\xi d\eta \quad (2.94)$$

Conforme visto anteriormente, a interpolação da geometria pode ser dada por:

$$x = \sum_{j=1}^3 H_j(\zeta, \eta) x_{ij} \quad (2.95)$$

$$y = \sum_{j=1}^3 H_j(\zeta, \eta) y_{i_j} \quad (2.96)$$

Então, a matriz Jacobiana para o elemento triangular é dada por:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_{i_2} - x_{i_1}) & (y_{i_2} - y_{i_1}) \\ (x_{i_3} - x_{i_1}) & (y_{i_3} - y_{i_1}) \end{bmatrix} \quad (2.97)$$

o que permite calcular o determinante:

$$\det [J] = (x_{i_2} - x_{i_1})(y_{i_3} - y_{i_1}) - (x_{i_3} - x_{i_1})(y_{i_2} - y_{i_1}) \quad (2.98)$$

A interpolação da geometria é derivada das funções de forma:

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial H_i}{\partial x} \\ \frac{\partial H_i}{\partial y} \end{array} \right\} = [J]^{-1} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial H_i}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial H_i}{\partial \eta} \end{array} \right\} \quad (2.99)$$

E as expressões integrais são:

$$\int_{\Omega_e} f(x, y) d\Omega = \int_0^1 \int_0^{1-\zeta} \tilde{f}(\zeta, \eta) \det [J] d\zeta d\eta \quad (2.100)$$

onde denota-se $\tilde{f}(\zeta, \eta) = f(x(\zeta, \eta), y(\zeta, \eta))$. Destaca-se que:

$$\Omega_e = \int_{\Omega_e} 1 d\Omega = \int_0^1 \int_0^{1-\zeta} 1 \det [J] d\zeta d\eta \quad (2.101)$$

Entretanto, no caso do elemento *Tri3*, $\det [J] = cte$, logo, obtem-se:

$$\Omega_e = \det [J] \int_0^1 \int_0^{1-\zeta} 1 d\zeta d\eta = \frac{1}{2} \det [J] \quad (2.102)$$

e

$$\det [J] = 2\Omega_e \quad (2.103)$$

Consequentemente, para o elemento *Tri3*, temos a seguinte expressão particular:

$$\int_{\Omega_e} f(x, y) d\Omega = 2\Omega_e \int_0^1 \int_0^{1-\zeta} \tilde{f}(\zeta, \eta) d\zeta d\eta \quad (2.104)$$

A densidade relativa, em termos das variáveis locais, é dada por:

$$\rho(x(\zeta, \eta), y(\zeta, \eta)) = H_1(\zeta, \eta)\rho_{i_1} + H_2(\zeta, \eta)\rho_{i_2} + H_3(\zeta, \eta)\rho_{i_3} \quad (2.105)$$

Além disto, as componentes dos deslocamentos são dadas por:

$$\begin{aligned} u(x(\zeta, \eta), y(\zeta, \eta)) &= H_1(\zeta, \eta)u_{i_1} + H_2(\zeta, \eta)u_{i_2} + H_3(\zeta, \eta)u_{i_3} \\ v(x(\zeta, \eta), y(\zeta, \eta)) &= H_1(\zeta, \eta)v_{i_1} + H_2(\zeta, \eta)v_{i_2} + H_3(\zeta, \eta)v_{i_3} \end{aligned} \quad (2.106)$$

Estas relações podem ser expressas em uma forma matricial, como:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [N_u] \bar{q}^e \quad (2.107)$$

onde $\bar{q}^{eT} = \{u_{i_1}, v_{i_1}, u_{i_2}, v_{i_2}, u_{i_3}, v_{i_3}\}$ é o vetor de deslocamento nodal e $[N_u]$ é a matriz de interpolação, dada por:

$$[N_u] = \begin{bmatrix} H_1 & 0 & H_2 & 0 & H_3 & 0 \\ 0 & H_1 & 0 & H_2 & 0 & H_3 \end{bmatrix} \quad (2.108)$$

O vetor deformação é calculado como

$$\vec{\varepsilon}_o = \vec{\varepsilon}(\vec{u}_o) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{oxx} \\ \varepsilon_{oyy} \\ 2\varepsilon_{oxy} \end{Bmatrix} = [B_u] \bar{q}^e \quad (2.109)$$

onde $[B_u]$ é uma matriz de derivação, que opera sobre o vetor de deslocamento nodal fornecendo as componentes de deformação, ou seja:

$$[B_u] = \begin{bmatrix} H_{1,x} & 0 & H_{2,x} & 0 & H_{3,x} & 0 \\ 0 & H_{1,y} & 0 & H_{2,y} & 0 & H_{3,y} \\ H_{1,y} & H_{1,x} & H_{2,y} & H_{2,x} & H_{3,y} & H_{3,x} \end{bmatrix} \quad (2.110)$$

$$[B_u] = \frac{1}{2\Omega_e} \begin{bmatrix} (y_{i_2} - y_{i_3}) & 0 & (y_{i_3} - y_{i_1}) \\ 0 & (x_{i_3} - x_{i_2}) & 0 \\ (x_{i_3} - x_{i_2}) & (y_{i_2} - y_{i_3}) & (x_{i_1} - x_{i_3}) \\ 0 & (y_{i_1} - y_{i_2}) & 0 \\ (x_{i_1} - x_{i_3}) & 0 & (x_{i_2} - x_{i_1}) \\ (y_{i_3} - y_{i_1}) & (x_{i_2} - x_{i_1}) & (y_{i_1} - y_{i_2}) \end{bmatrix} \quad (2.111)$$

2.6 Equação constitutiva

A modelagem das propriedades materiais em elementos com densidades intermediárias é baseada no modelo SIMP, ver Bendsoe & Sigmund (1999), Duysinx & Sigmund (1998) e Duysinx & Bendsoe (1998). Nesta abordagem, o módulo de Young efetivo para um dado

elemento com densidade ρ é fornecido por:

$$E(\rho) = \rho^\eta E_o \quad (2.112)$$

onde η é um fator de penalização maior do que 1 e E_o é o módulo de Young do material base.

Esta relação permite escrever a equação constitutiva como:

$$\mathbb{D}(\rho) = \rho^\eta \mathbb{D}_o \quad (2.113)$$

onde \mathbb{D}_o é a matriz que contém os parâmetros de elasticidade do elemento. Considerando os estados plano de tensão e o plano de deformação, essa matriz é dada por:

- Estado plano de tensões

$$\mathbb{D}_o = \frac{E_o}{(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (2.114)$$

- Estado plano de deformações

$$\mathbb{D}_o = \frac{E_o(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (2.115)$$

Então, o vetor de tensão nominal $\vec{\sigma}(\vec{u}_o) = \{\sigma_{oxx}, \sigma_{oyy}, \sigma_{oxy}\}$ é determinado pela relação:

$$\vec{\sigma}_o = \mathbb{D}(\rho)\vec{\varepsilon}_o \quad (2.116)$$

2.7 Determinação da tensão de Von Mises

Considerando o caso particular dos problemas de estado plano de tensões, temos:

$$\sigma_{o_{eq}}^{vm} = \{\sigma_{oxx}^2 + \sigma_{oyy}^2 - \sigma_{oxx}\sigma_{oyy} + 3\sigma_{oxy}^2\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.117)$$

então,

$$\left(\sigma_{o_{eq}}^{vm}\right)^2 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \vec{\sigma}_o \cdot \vec{\sigma}_o = [H] \vec{\sigma}_o \cdot \vec{\sigma}_o \quad (2.118)$$

onde

$$[H] = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (2.119)$$

2.8 Determinação da solução fraca aproximada \vec{u}_o

2.8.1 Cargas e molas concentradas

Considerando o problema ilustrado na Fig. 3.1.

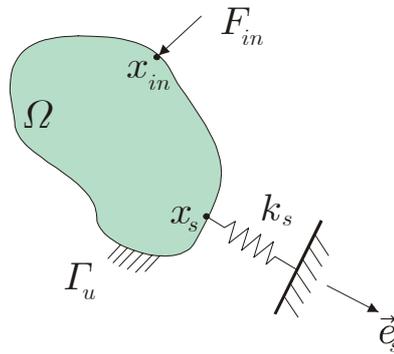


Figura 2.13: Modelo de mecanismo

A formulação fraca do problema consiste na determinação de $\vec{u}_o \in \vartheta$, tal que:

$$\int_{\Omega} \sigma(\vec{u}_o) \cdot \varepsilon(\vec{v}) \, d\Omega + k_s [\vec{e}_s \otimes \vec{e}_s] \vec{u}_o(x_s) \cdot \vec{v}(x_s) = F_{in} \cdot \vec{v}(x_{in}), \quad \forall \vec{v} \in \vartheta$$

Trataremos, agora, cada termo da expressão acima isoladamente.

Assim sendo, temos:

- Primeiro termo:

Realizando a partição do domínio Ω , em elementos, Ω_e , onde $\Omega = \bigcup_{e=1}^{n_e} \{\Omega_e\}$, obtemos:

$$\int_{\Omega} \sigma(\vec{u}_o) \cdot \varepsilon(\vec{v}) \, d\Omega = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \sigma(\vec{u}_o) \cdot \varepsilon(\vec{v}) \, d\Omega_e \quad (2.120)$$

onde a contribuição do e – ésimo elemento é dada por:

$$\int_{\Omega_e} \sigma(\vec{u}_o) \cdot \varepsilon(\vec{v}) d\Omega_e = \int_{\Omega_e} [\bar{\mathbb{D}}(\rho)] \varepsilon_o(\vec{u}_o) \cdot \varepsilon(\vec{v}) d\Omega_e \quad (2.121)$$

$$= \int_{\Omega_e} [\bar{\mathbb{D}}(\rho)] [B_u] \vec{q}^e \cdot [B_u] \vec{\hat{q}}^e d\Omega_e \quad (2.122)$$

$$= \left\{ \int_{\Omega_e} [B_u]^T [\bar{\mathbb{D}}(\rho)] [B_u] d\Omega_e \right\} \vec{q}^e \cdot \vec{\hat{q}}^e \quad (2.123)$$

$$= [\mathbb{K}_e] \vec{q}^e \cdot \vec{\hat{q}}^e \quad (2.124)$$

onde $[\mathbb{K}_e] = \int_{\Omega_e} [B_u]^T [\bar{\mathbb{D}}(\rho)] [B_u] d\Omega_e$.

Como a matriz $[B_u]$ é constante e $[\bar{\mathbb{D}}(\rho)] = \rho^n [\bar{\mathbb{D}}_o]$, no qual $[\bar{\mathbb{D}}_o]$ também é constante, obtemos:

$$[\mathbb{K}_e] = \int_{\Omega_e} \rho^n [B_u]^T [\bar{\mathbb{D}}_o] [B_u] d\Omega_e = \int_{\Omega_e} \rho^n d\Omega_e [B_u]^T [\bar{\mathbb{D}}_o] [B_u] \quad (2.125)$$

Denotando $[\mathbb{K}_e^o] = [B_u]^T [\bar{\mathbb{D}}_o] [B_u]$, a expressão se reduz para:

$$[\mathbb{K}_e] = \int_{\Omega_e} \rho^n d\Omega_e [\mathbb{K}_e^o] \quad (2.126)$$

Falta apenas calcular o termo escalar $\int_{\Omega_e} \rho^n d\Omega_e$, o que pode ser feito numericamente. Neste caso, temos:

$$\int_{\Omega_e} \rho^n d\Omega_e = \int_0^1 \int_0^{1-\zeta} [\rho(\zeta, \eta)]^n \det[J] d\zeta d\eta \quad (2.127)$$

onde, conforme visto anteriormente:

$$\rho(\zeta, \eta) = H_1(\zeta, \eta) \rho_{i_1} + H_2(\zeta, \eta) \rho_{i_2} + H_3(\zeta, \eta) \rho_{i_3} \quad (2.128)$$

- Segundo termo:

O objetivo agora é calcular o termo

$$k_s [\vec{e}_s \otimes \vec{e}_s] \vec{u}_o(x_s) \cdot \vec{v}(x_s) \quad (2.129)$$

Definindo $\vec{e}_s = (c, s)$ e denotando

$$\vec{q}_s = \left\{ \begin{array}{l} U_o(i_1) \\ U_o(i_2) \end{array} \right\} \quad (2.130)$$

onde $i_1 = id(1, s)$ e $i_2 = id(2, s)$ com s denotando o número do nó e $id(:, s)$ indicando

os graus de liberdade do nó s , obtém-se:

$$k_s [\vec{e}_s \otimes \vec{e}_s] \vec{q}_s \cdot \hat{q}_s = k_s \begin{bmatrix} c^2 & cs \\ cs & s^2 \end{bmatrix} \vec{q}_s \cdot \hat{q}_s = [K_S] \vec{q}_s \cdot \hat{q}_s \quad (2.131)$$

Então

$$[K_S] = k_s \begin{bmatrix} c^2 & cs \\ cs & s^2 \end{bmatrix} \quad (2.132)$$

com o vetor de conectividade $lm(:, s)$, associado com a mola localizada no nó s , dado por

$$lm(:, s) = \left\{ \begin{array}{l} id(1, s) \\ id(2, s) \end{array} \right\}$$

- Terceiro termo

Agora, deseja-se calcular o termo

$$\left\langle \vec{v}(x_{in}), \vec{F}_{in} \right\rangle \quad (2.133)$$

Denotando

$$\vec{q}_{in} = \left\{ \begin{array}{l} U_o(i_1) \\ U_o(i_2) \end{array} \right\} \quad (2.134)$$

com $i_1 = id(1, in)$ e $i_2 = id(2, in)$ onde in é o número do nó e $id(:, in)$ indica o grau de liberdade do nó in , obtém-se:

$$\left\langle \vec{q}_{in}, \vec{F}_{in} \right\rangle \quad (2.135)$$

O vetor de carga nodal global \vec{F} é dado fazendo-se inicialmente:

$$\vec{F}(:) = 0 \quad (2.136)$$

e inserindo as contribuições não nulas do carregamento de entrada, \vec{F}_{in} , no vetor de carga nodal global, $\vec{F}(:)$. Então:

$$\vec{F}_{in} = (F_{in}(1), F_{in}(2)) \quad (2.137)$$

$$\begin{aligned} \vec{F}(id(1, in)) &= F_{in}(1) \\ \vec{F}(id(2, in)) &= F_{in}(2) \end{aligned} \quad (2.138)$$

- O sistema de equações discreto global pode ser obtido por

$$[\mathbb{K}_G] \vec{U}_o = \vec{F} \quad (2.139)$$

onde o vetor de deslocamentos nodais \vec{U} é dado por

$$\vec{U}_o = \bigcup_{e=1,..,n} \{\vec{q}^e\} \quad (2.140)$$

A matriz de rigidez global $[\mathbb{K}_G]$ é obtida através da seguinte operação

$$[\mathbb{K}_G] = \mathbf{A}_{e=1}^n ([\mathbb{K}_e]) + \mathbf{A}_{s=1} [\mathbb{K}^S]$$

O vetor de forças nodais é dado conforme mostrado anteriormente.

O símbolo $\mathbf{A}_{e=1}^n (\bullet)$ representa um operador de montagem, utilizado aqui para inserir as matrizes de rigidez elementares na matriz de rigidez global via conectividade do elemento. O operador $\mathbf{A}_{s=1}$ realiza a montagem relativa à rigidez de mola de cada elemento.

2.8.2 Cargas e molas distribuídas

Considere o problema ilustrado na Fig. 5.2.

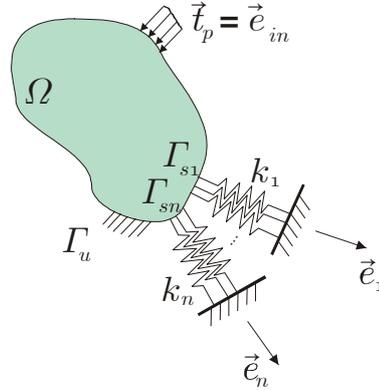


Figura 2.14: Definição do problema distribuído para $\vec{u}_o(\vec{x})$

No caso de cargas distribuídas, que serão utilizadas no problema de otimização com restrição de fadiga, a formulação fraca vista anteriormente, é modificada para:

$$\int_{\Omega} \sigma(\vec{u}_o) \cdot \varepsilon(\vec{v}) d\Omega + \int_{\Gamma_s} k_j [\vec{e}_j \otimes \vec{e}_j] \vec{u}_o \cdot \vec{v} d\Gamma = \int_{\Gamma_t} \langle \vec{v}, \vec{e}_{in} \rangle d\Gamma, \quad \forall \vec{v} \in \vartheta$$

O segundo termo da formulação fraca, agora é integrado em Γ_s , ou seja:

$$\int_{\Gamma_{s_j}} k_j [e_j \otimes e_j] \vec{u}_o \cdot \vec{v} d\Gamma = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\partial\Omega_e \cap \Gamma_{s_j}} k_j [\vec{e}_j \otimes \vec{e}_j] \vec{u}_o \cdot \vec{v} d\Gamma_e \quad (2.141)$$

A Fig. 2.15 mostra um caso onde $\partial\Omega_e \cap \Gamma_{s_j} \neq \emptyset$, o qual requer a contribuição do $e - \acute{e}simo$ elemento para a rigidez global da mola. Considera-se que a mola é distribuída na face 1 do elemento.

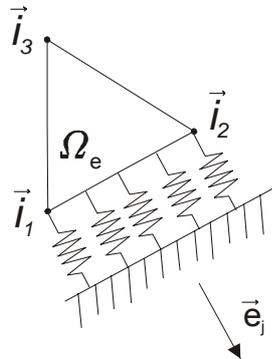


Figura 2.15: Mola distribuída na face do elemento

Para realizar este cálculo introduz-se uma mudança de variável, conforme mostra a Fig. 2.16.

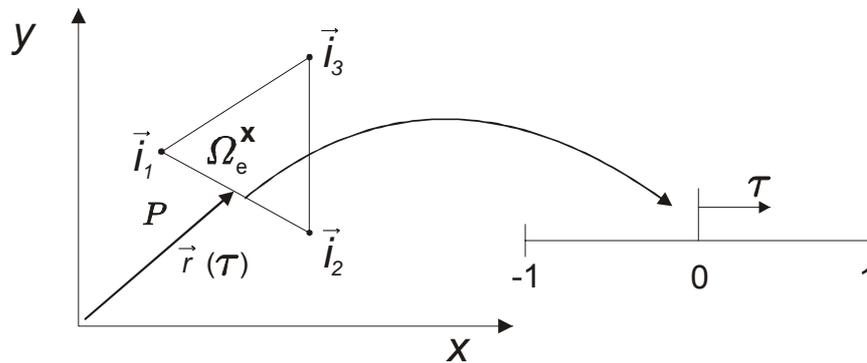


Figura 2.16: Mudança de variável

A definição no número da face é feita de acordo com o esquema apresentado na Fig. 2.17.

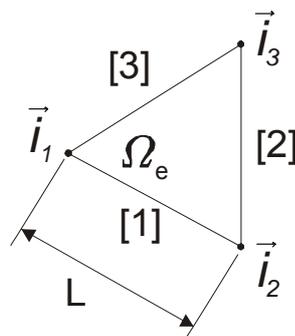


Figura 2.17: Número da face do elemento

Para a face 1 de Ω_e , temos:

$$\begin{aligned} x(\tau) &= \phi_1(\tau)x_{i_1} + \phi_2(\tau)x_{i_2} \\ y(\tau) &= \phi_1(\tau)y_{i_1} + \phi_2(\tau)y_{i_2} \end{aligned} \quad (2.142)$$

onde:

$$\begin{aligned} \phi_1(\tau) &= \frac{1-\tau}{2} \\ \phi_2(\tau) &= \frac{1+\tau}{2} \end{aligned} \quad (2.143)$$

O vetor posição de um ponto p da face 1, é dado por:

$$\vec{r}(\tau) = x(\tau)\vec{e}_x + y(\tau)\vec{e}_y \quad (2.144)$$

A medida do arco ds corresponde a norma do vetor $d\vec{r}$, ou seja:

$$ds = \|d\vec{r}\| = \sqrt{d\vec{r} \cdot d\vec{r}} \quad (2.145)$$

onde:

$$d\vec{r} = \left\{ \frac{dx}{d\tau}\vec{e}_x + \frac{dy}{d\tau}\vec{e}_y \right\} d\tau \quad (2.146)$$

Então,

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2} d\tau \quad (2.147)$$

Mas, as derivadas de x e y em relação a τ são, respectivamente:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \frac{x_{i_2} - x_{i_1}}{2} \\ \frac{dy}{d\tau} &= \frac{y_{i_2} - y_{i_1}}{2} \end{aligned} \quad (2.148)$$

Consequentemente, a medida de arco ds fica:

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{\left(\frac{x_{i_2} - x_{i_1}}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_{i_2} - y_{i_1}}{2}\right)^2} d\tau \\ &= \frac{L}{2} d\tau \end{aligned} \quad (2.149)$$

onde L corresponde ao comprimento da face do elemento.

Então, procedendo a troca de variáveis, obtemos:

$$\int_{\partial\Omega_e \cap \Gamma_{s_j}} k_j [\vec{e}_j \otimes \vec{e}_j] \vec{u}_o \cdot \vec{v} d\Gamma_e = \int_{-1}^1 k_j [\vec{e}_j \otimes \vec{e}_j] \vec{u}_o(\tau) \cdot \vec{v}(\tau) \frac{L}{2} d\tau \quad (2.150)$$

Agora é necessário expressar os deslocamento em função de τ . Para a face 1, as componente de deslocamento $\vec{u}_o = (u_o, v_o)$ podem ser expressas por:

$$\begin{aligned} u_o(\tau) &= \phi_1(\tau) u_{oi1} + \phi_2(\tau) u_{oi2} \\ v_o(\tau) &= \phi_1(\tau) v_{oi1} + \phi_2(\tau) v_{oi2} \end{aligned} \quad (2.151)$$

O sistema anterior pode ser representado na forma matricial, logo:

$$\begin{Bmatrix} u_o \\ v_o \end{Bmatrix} = [P(\tau)] \vec{q}^e \quad (2.152)$$

onde:

$$[P(\tau)] = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.153)$$

e \vec{q}^e é o vetor deslocamento nodal do elemento.

De forma análoga, podemos representar na forma matricial as componentes de $\vec{v} = (\hat{u}, \hat{v})$, ou seja:

$$\begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{Bmatrix} = [P(\tau)] \widehat{\vec{q}}^e \quad (2.154)$$

A partir destes resultados, temos:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 k_j [\vec{e}_j \otimes \vec{e}_j] \vec{u}_o(\tau) \cdot \vec{v}(\tau) \frac{L}{2} d\tau \\ &= \int_{-1}^1 k_j [\vec{e}_j \otimes \vec{e}_j] [P(\tau)] \vec{q}^e \cdot [P(\tau)] \widehat{\vec{q}}^e \frac{L}{2} d\tau \\ &= \left\{ \int_{-1}^1 k_j [P(\tau)]^T [\vec{e}_j \otimes \vec{e}_j] [P(\tau)] \frac{L}{2} d\tau \right\} \vec{q}^e \cdot \widehat{\vec{q}}^e \\ &= [\mathbb{K}_{j_e}^S] \vec{q}^e \cdot \widehat{\vec{q}}^e \end{aligned} \quad (2.155)$$

Portanto, a matriz de rigidez da mola é dada por:

$$[\mathbb{K}_{j_e}^S] = \int_{-1}^1 k_j [P(\tau)]^T [\vec{e}_j \otimes \vec{e}_j] [P(\tau)] \frac{L}{2} d\tau \quad (2.156)$$

Utilizando propriedades de álgebra tensorial, esta expressão pode ser simplificada consideravelmente.

Propriedade : Seja $[P]$ uma matriz, então:

$$[P]^T [\vec{e}_j \otimes \vec{e}_j] [P] = [P]^T \vec{e}_j \otimes [P]^T \vec{e}_j \quad (2.157)$$

Prova: Seja \vec{w} um vetor arbitrário. Denotando também $\vec{y} = [P]\vec{w}$. Então,

$$\begin{aligned} [P]^T [\vec{e}_j \otimes \vec{e}_j] [P] \vec{w} &= [P]^T [\vec{e}_j \otimes \vec{e}_j] \vec{y} \\ &= \langle \vec{e}_j, \vec{y} \rangle [P]^T \vec{e}_j \\ &= \langle \vec{e}_j, [P] \vec{w} \rangle [P]^T \vec{e}_j \\ &= \langle [P]^T \vec{e}_j, \vec{w} \rangle [P]^T \vec{e}_j \\ &= [[P]^T \vec{e}_j \otimes [P]^T \vec{e}_j] \vec{w} \end{aligned} \quad (2.158)$$

Como \vec{w} é arbitrário, pode-se concluir que:

$$[P]^T [\vec{e}_j \otimes \vec{e}_j] [P] = [P]^T \vec{e}_j \otimes [P]^T \vec{e}_j$$

Com este resultado, a matriz de rigidez da mola pode ser escrita como:

$$[\mathbb{K}_{je}^S] = \int_{-1}^1 k_j [[P]^T \vec{e}_j \otimes [P]^T \vec{e}_j] \frac{L}{2} d\tau \quad (2.159)$$

Denotando as componentes $\vec{e}_j = (n_x^j, n_y^j)$, temos:

$$[P]^T \vec{e}_j = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 \\ 0 & \phi_1 \\ \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x^j \\ n_y^j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x^j \phi_1 \\ n_y^j \phi_1 \\ n_x^j \phi_2 \\ n_y^j \phi_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.160)$$

Consequentemente, $[P]^T \vec{e}_j \otimes [P]^T \vec{e}_j =$

$$= \begin{bmatrix} n_x^j n_x^j \phi_1 \phi_1 & n_x^j n_y^j \phi_1 \phi_1 & n_x^j n_x^j \phi_1 \phi_2 & n_x^j n_y^j \phi_1 \phi_2 & 0 & 0 \\ n_y^j n_x^j \phi_1 \phi_1 & n_y^j n_y^j \phi_1 \phi_1 & n_y^j n_x^j \phi_1 \phi_2 & n_y^j n_y^j \phi_1 \phi_2 & 0 & 0 \\ n_x^j n_x^j \phi_2 \phi_1 & n_x^j n_y^j \phi_2 \phi_1 & n_x^j n_x^j \phi_2 \phi_2 & n_x^j n_y^j \phi_2 \phi_2 & 0 & 0 \\ n_y^j n_x^j \phi_2 \phi_1 & n_y^j n_y^j \phi_2 \phi_1 & n_y^j n_x^j \phi_2 \phi_2 & n_y^j n_y^j \phi_2 \phi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.161)$$

Entretando,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 [\phi_1(\tau)]^2 d\tau &= \frac{2}{3} \\ \int_{-1}^1 \phi_1(\tau) \phi_2(\tau) d\tau &= \frac{1}{3} \\ \int_{-1}^1 [\phi_2(\tau)]^2 d\tau &= \frac{2}{3} \end{aligned} \quad (2.162)$$

- conseqüentemente

$$[\mathbb{K}_{j_e}^S] = \frac{k_j L_{[1]}}{6} \begin{bmatrix} 2n_x^j n_x^j & 2n_x^j n_y^j & n_x^j n_x^j & n_x^j n_y^j & 0 & 0 \\ 2n_y^j n_x^j & 2n_y^j n_y^j & n_y^j n_x^j & n_y^j n_y^j & 0 & 0 \\ n_x^j n_x^j & n_x^j n_y^j & 2n_x^j n_x^j & 2n_x^j n_y^j & 0 & 0 \\ n_y^j n_x^j & n_y^j n_y^j & 2n_y^j n_x^j & 2n_y^j n_y^j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.163)$$

Para o caso da face/lado [2], emprega-se:

$$[P(\tau)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \phi_1(\tau) & 0 & \phi_2(\tau) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \phi_1(\tau) & 0 & \phi_2(\tau) \end{bmatrix} \quad (2.164)$$

Então,

$$[P]^T \vec{e}_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \phi_1 & 0 \\ 0 & \phi_1 \\ \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_2 \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} n_x^j \\ n_y^j \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ n_x^j \phi_1 \\ n_y^j \phi_1 \\ n_x^j \phi_2 \\ n_y^j \phi_2 \end{matrix} \right\} \quad (2.165)$$

- Através de procedimento análogo ao anterior, obtemos:

$$[\mathbb{K}_{j_e}^S] = \frac{k_j L_{[2]}}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2n_x^j n_x^j & 2n_x^j n_y^j & n_x^j n_x^j & n_x^j n_y^j \\ 0 & 0 & 2n_y^j n_x^j & 2n_y^j n_y^j & n_y^j n_x^j & n_y^j n_y^j \\ 0 & 0 & n_x^j n_x^j & n_x^j n_y^j & 2n_x^j n_x^j & 2n_x^j n_y^j \\ 0 & 0 & n_y^j n_x^j & n_y^j n_y^j & 2n_y^j n_x^j & 2n_y^j n_y^j \end{bmatrix} \quad (2.166)$$

Finalmente, para o caso da face [3], temos:

$$[P(\tau)] = \begin{bmatrix} \phi_2(\tau) & 0 & 0 & 0 & \phi_1(\tau) & 0 \\ 0 & \phi_2(\tau) & 0 & 0 & 0 & \phi_1(\tau) \end{bmatrix} \quad (2.167)$$

então,

$$[P]^T \vec{e}_j = \begin{bmatrix} \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \phi_1 & 0 \\ 0 & \phi_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x^j \\ n_y^j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n_x^j \phi_2 \\ n_y^j \phi_2 \\ 0 \\ 0 \\ n_x^j \phi_1 \\ n_y^j \phi_1 \end{Bmatrix} \quad (2.168)$$

- A matriz de rigidez da mola para a face [3] fica sendo:

$$[\mathbb{K}_{je}^S] = \frac{k_j L_{[3]}}{6} \begin{bmatrix} n_x^j n_x^j \phi_2 \phi_2 & n_x^j n_y^j \phi_2 \phi_2 & 0 & 0 & n_x^j n_x^j \phi_1 \phi_2 & n_x^j n_y^j \phi_1 \phi_2 \\ n_y^j n_x^j \phi_2 \phi_2 & n_y^j n_y^j \phi_2 \phi_2 & 0 & 0 & n_y^j n_x^j \phi_1 \phi_2 & n_y^j n_y^j \phi_1 \phi_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n_x^j n_x^j \phi_2 \phi_1 & n_x^j n_y^j \phi_2 \phi_1 & 0 & 0 & n_x^j n_x^j \phi_1 \phi_1 & n_x^j n_y^j \phi_1 \phi_1 \\ n_y^j n_x^j \phi_2 \phi_1 & n_y^j n_y^j \phi_2 \phi_1 & 0 & 0 & n_y^j n_x^j \phi_1 \phi_1 & n_y^j n_y^j \phi_1 \phi_1 \end{bmatrix} \quad (2.169)$$

- Terceiro termo:

No caso de cargas distribuídas, o terceiro termo da formulação fraca é agora integrado em Γ_t , ou seja:

$$\int_{\Gamma_t} \langle \vec{v}, \vec{e}_{in} \rangle d\Gamma = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\partial\Omega_e \cap \Gamma_t} \vec{e}_{in} \cdot \vec{v} d\Gamma_e \quad (2.170)$$

onde a contribuição elementar é determinada como:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_e \cap \Gamma_t} \vec{e}_{in} \cdot \vec{v} d\Gamma_e &= \int_{-1}^1 \vec{e}_{in} \cdot \vec{v} \frac{L}{2} d\tau \\ &= \int_{-1}^1 \vec{e}_{in} \cdot [P(\tau)] \widehat{\vec{q}}^e \frac{L}{2} d\tau \\ &= \left\{ \int_{-1}^1 [P(\tau)]^T \vec{e}_{in} \frac{L}{2} d\tau \right\} \cdot \widehat{\vec{q}}^e \\ &= \vec{F}_{in}^e \cdot \widehat{\vec{q}}^e \end{aligned} \quad (2.171)$$

onde denota-se:

$$\vec{F}_{in}^e = \int_{-1}^1 [P(\tau)]^T \vec{e}_{in} \frac{L}{2} d\tau \quad (2.172)$$

Para o caso da face 1, definindo $\vec{e}_{in} = (n_x^{in}, n_y^{in})$, temos:

$$\vec{F}_{in}^e = \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 \\ 0 & \phi_1 \\ \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x^{in} \\ n_y^{in} \end{Bmatrix} \frac{L}{2} d\tau = \frac{L}{2} \int_{-1}^1 \begin{Bmatrix} n_x^j \phi_1 \\ n_y^j \phi_1 \\ n_x^j \phi_2 \\ n_y^j \phi_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} d\tau \quad (2.173)$$

Como $\int_{-1}^1 \phi_1 d\tau = 1$ e $\int_{-1}^1 \phi_2 d\tau = 1$, então obtemos para a face 1:

$$\vec{F}_{in}^e = \frac{L[1]}{2} \begin{bmatrix} n_x^{in} \\ n_y^{in} \\ n_x^{in} \\ n_y^{in} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.174)$$

Para o caso da face 2, por analogia,

$$\vec{F}_{in}^e = \frac{L[2]}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ n_x^{in} \\ n_y^{in} \\ n_x^{in} \\ n_y^{in} \end{bmatrix} \quad (2.175)$$

Para o caso da face 3, por analogia:

$$\vec{F}_{in}^e = \frac{L[3]}{2} \begin{bmatrix} n_x^{in} \\ n_y^{in} \\ 0 \\ 0 \\ n_x^{in} \\ n_y^{in} \end{bmatrix} \quad (2.176)$$

O sistema discreto global de equações pode ser obtido por:

$$[\mathbb{K}_T] \vec{U} = \vec{F}_{in} \quad (2.177)$$

onde o vetor de deslocamento nodal \vec{U} é dado por:

$$\vec{U} = \bigcup_{e=1,..n} \{\vec{q}^e\} \quad (2.178)$$

A matriz de rigidez global $[\mathbb{K}_G]$ é obtida como:

$$[\mathbb{K}_G] = \mathbf{A}_{e=1}^n \left([\mathbb{K}_e] + \sum_{j=1}^n [\mathbb{K}_{j_e}^S] \right) \quad (2.179)$$

e o vetor de forças nodais é dado por:

$$\vec{F}_{in} = \mathbf{A}_{e=1}^n \vec{F}_{in}^e. \quad (2.180)$$

Aqui, $\mathbf{A}_{e=1}^n (\bullet)$ representa um operador de montagem das forças nodais elementares via conectividade do elemento.

2.9 Conclusões

A formulação para o problema de projeto de mecanismos flexíveis faz uso do Princípio da Mínima Energia Potencial Total. Os princípios energéticos para o problema clássico de elasticidade foram apresentados e aplicados ao problema dos mecanismos. A formulação obtida é consistente e permite comprovar o Teorema da Reciprocidade de Betti.

O problema de otimização topológica utiliza o método de elementos finitos de Galerkin para a análise estrutural. A análise de elementos finitos fornece os deslocamentos nodais da malha discretizada, o que permite a determinação dos campos de deformações e tensões.

A solução aproximada para o problema do mecanismo flexível foi discretizada para dois casos distintos: cargas e molas concentradas, que é utilizada no projeto com restrição de material, e cargas e molas distribuídas, para o projeto com restrição no critério de fadiga.

Capítulo 3

Projeto Ótimo com Restrição de Material

Nesta seção são apresentados alguns exemplos de projetos de mecanismos flexíveis sujeitos a restrição de material, visando demonstrar a aplicação do procedimento proposto. Os exemplos escolhidos são: um mecanismo inversor de deslocamento, um mecanismo de esmagamento, um mecanismo do tipo pinça e um mecanismo do tipo alicate.

O elemento finito utilizado na discretização é o elemento isoparamétrico triangular de três nós *Tri3*, que interpola tanto as componentes do campo de deslocamento quanto o campo de densidade relativa. O modelo de microestrutura material utilizado é o SIMP (*Simple Isotropic Material with Penalization*), com parâmetro de penalidade igual a 3, conforme sugerido por Bendsoe (1995).

3.1 Formulação do problema - Restrição de Material

3.1.1 Definição do problema

Deseja-se, encontrar um leiaute ótimo de mecanismo definido em um domínio fixo de projeto que, a partir da aplicação de um carregamento / deslocamento em Γ_t , gere um deslocamento / força em Γ_s .

A função objetivo do mecanismo flexível que será maximizada ou minimizada apresenta requisitos de certa forma conflitantes, pois o leiaute ótimo deve ser:

- flexível o suficiente para satisfazer os requisitos cinemáticos de se deformar e fazer contato com a peça atuada;
- rígido o suficiente para suportar os carregamentos externos e ser capaz de transmitir força.

Várias formulações foram propostas para o problema de síntese topológica de mecanismos flexíveis.

Empregaremos um modelo de mola na região de resposta do corpo elástico. O projeto inclui uma restrição da quantidade de material que será distribuído no domínio.

Considerando o problema ilustrado na Fig. 3.1.

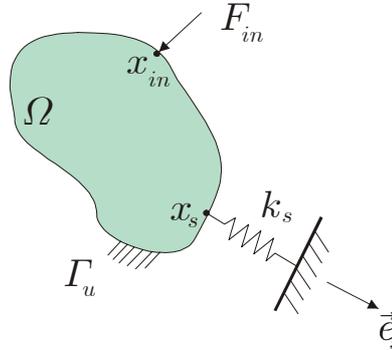


Figura 3.1: Modelo de mecanismo

Neste trabalho, consideramos que o objetivo do projeto de mecanismo flexível ótimo será maximizar Δ_s , ou seja, maximizar a componente do deslocamento na direção do vetor unitário \vec{e}_s , como é mostrado a seguir:

$$\max \{ \Delta_s \} \tag{3.1}$$

Aqui, destaca-se que:

$$\Delta_s = \langle \vec{u}_o(\vec{x}_s), e_s(\vec{x}_s) \rangle \tag{3.2}$$

representa o deslocamento da extremidade da mola. Além disto, como $e_s(\vec{x}_s)$ aponta para fora do domínio Ω temos:

- Se $\Delta_s \geq 0$, a mola é comprimida;
- Se $\Delta_s < 0$, então a mola é alongada.

Nota-se que, se o movimento do mecanismo ocorre na direção oposta, em relação a \vec{e}_s , o alongamento da mola será $\Delta_s < 0$. Por outro lado, se o deslocamento é realizado na direção de \vec{e}_s , então $\Delta_s \geq 0$. Portanto, a direção do movimento é fundamental para a caracterização do mecanismo ótimo. É importante observar que a maximização da energia da mola é incapaz de distinguir entre o modo de compressão da mola e o modo de tração, pois para os mesmos alongamentos $\delta = |\Delta_s|$. Isto mostra que a maximização da energia de deformação da mola não é uma função objetivo adequada para o projeto ótimo de mecanismos flexíveis.

A formulação fraca para este problema pode ser escrita como: $\vec{u}_o \in \vartheta$ é a solução do problema, ilustrado na Fig. 3.1, se:

$$\int_{\Omega} \sigma(\vec{u}_o) \cdot \varepsilon(\vec{v}) \, d\Omega + k_s \langle \vec{u}_o(\vec{x}_s), e_s(\vec{x}_s) \rangle \langle \vec{v}(\vec{x}_s), e_s(\vec{x}_s) \rangle = \vec{F}_{in} \cdot \vec{v}(\vec{x}_{in}), \quad \forall \vec{v} \in \mathcal{V}. \quad (3.3)$$

ou

$$\int_{\Omega} \sigma(\vec{u}_o) \cdot \varepsilon(\vec{v}) \, d\Omega + k_s [e_s \otimes e_s] \vec{u}_o(\vec{x}_s) \cdot \vec{v}(\vec{x}_s) = \vec{F}_{in} \cdot \vec{v}(\vec{x}_{in}), \quad \forall \vec{v} \in \mathcal{V}. \quad (3.4)$$

Portanto, o problema de otimização de layout de mecanismos flexíveis sujeitos à restrição de material pode ser formulado como:

Determinar a densidade relativa $\vec{\rho} \in W^{1,\infty}(\Omega)$, solução de:

$$\max \{ \Delta_s \} \quad (3.5)$$

onde $\Delta_s = \langle \vec{u}_o(\vec{\rho}), e_s \rangle$, sujeito a:

- Restrição de volume efetivo:

$$\int_{\Omega} \rho \, d\Omega = \alpha \Omega \quad (3.6)$$

sendo α uma fração de volume prescrita;

- Restrições de limites laterais:

$$0 \leq \rho \leq 1 \quad (3.7)$$

onde as densidades $\rho = 0$ e $\rho = 1$ correspondem, respectivamente, a um elemento vazio e a um elemento material (sólido);

- Restrições de estabilidade:

Conforme proposto por Peterson & Sigmund (1998), considera-se que:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 \leq (C_x)^2 \quad (3.8)$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right)^2 \leq (C_y)^2 \quad (3.9)$$

onde as constantes C_x e C_y impõem um limite superior às componentes do gradiente da densidade relativa, ver Capítulo 1.

- Restrição de carga da mola:

$$k_s \langle \vec{u}_o(\vec{\rho}), \vec{e}_s \rangle \leq F_{adm}. \quad (3.10)$$

O campo de deslocamentos $\vec{u}_o(\vec{\rho}) \in \vartheta$ é a solução do problema, ilustrado na Fig. 3.1, se:

$$\int_{\Omega} \sigma(\vec{u}_o) \cdot \varepsilon(\vec{v}) d\Omega + k_s [e_s \otimes e_s] \vec{u}_o(\vec{x}_s) \cdot \vec{v}(\vec{x}_s) = \vec{F}_{in} \cdot \vec{v}(\vec{x}_{in}), \quad \forall \vec{v} \in \vartheta. \quad (3.11)$$

3.1.2 Formulação do problema discretizado

A formulação discretizada da otimização de leiaute de mecanismos flexíveis pode ser estabelecida como se segue:

Determinar $\vec{\rho} \in X$, $X = \{\vec{\rho} \in \mathbb{R}^n \mid \rho_i^{\inf} \leq \rho_i \leq \rho_i^{\sup}\}$ que resolve

$$\min f(\vec{\rho}) = \min \left\{ -p(\vec{\rho}, \vec{U}_o(\vec{\rho})) \right\} \quad (3.12)$$

onde

$$p(\vec{\rho}, \vec{U}_o(\vec{\rho})) = \frac{1}{\varphi_o} \left\langle \vec{U}_o(\vec{\rho}), \vec{e}_s \right\rangle \quad (3.13)$$

A constante φ_o é dada por

$$\varphi_o = \left\langle \vec{U}_o(\vec{\rho}_o), \vec{e}_s \right\rangle \quad (3.14)$$

que é calculada para a densidade nodal relativa inicial $\vec{\rho}_o$.

O problema de otimização é sujeito às seguintes restrições:

- Restrição de material (Volume/massa)

$$h(\vec{\rho}) = \int_{\Omega} \rho d\Omega = \alpha \Omega \quad (3.15)$$

A constante α representa a fração prescrita de material. A restrição de igualdade pode ser reescrita como:

$$h(\vec{\rho}) = \int_{\Omega} \rho d\Omega = \alpha \int_{\Omega} 1 d\Omega \quad (3.16)$$

$$h(\vec{\rho}) = \int_{\Omega} (\rho - \alpha) d\Omega = 0 \quad (3.17)$$

De modo a tornar a restrição adimensional, utilizamos a expressão:

$$h(\vec{\rho}, \vec{U}_o(\vec{\rho})) = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} (\rho - \alpha) d\Omega = 0 \quad (3.18)$$

- Restrições de gradiente

$$g_{2e-1}(\vec{\rho}, \vec{U}_o(\vec{\rho})) = \frac{1}{\theta_o} \left\{ \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_e^2 - (C_x^e)^2 \right\} \leq 0, \quad (3.19)$$

e

$$g_{2e}(\vec{\rho}, \vec{U}_o(\vec{\rho})) = \frac{1}{\theta_o} \left\{ \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right)_e^2 - (C_y^e)^2 \right\} \leq 0. \quad (3.20)$$

Neste caso, temos $e = 1, ..n_e$ e $\theta_o = \frac{1}{d_{\max}}$, com $d_{\max} = \max_{i=1..3} \|\vec{d}_i\|$.

- Restrição de carga da mola

$$k_s \langle \vec{U}_o(\vec{\rho}), \vec{e}_s \rangle \leq F_{adm}. \quad (3.21)$$

Esta restrição pode ser expressa por:

$$l((\vec{\rho}, \vec{U}_o(\vec{\rho}))) = \frac{k_s \langle \vec{U}_o(\vec{\rho}), \vec{e}_s \rangle}{F_{adm}} - 1 \leq 0 \quad (3.22)$$

3.1.3 Método do Lagrangeano Aumentado

O problema de otimização discreto é resolvido aplicando o Método do Lagrangeano Aumentado, ver Apêndice B, que reduz o problema para a solução de uma seqüência de problemas de minimização de caixas. Os problemas com restrição de caixas são resolvidos empregando-se um método Quase-Newton projetado sem memória, ver Apêndice B.

O procedimento geral pode ser sumarizado como:

- Inicializando $k = 0$, $\lambda_l^k = 0$, $\bar{\lambda}_g^k = 0$, $\bar{\mu}^k = 0$, $error = 1.0$, ϵ^k e tol .

- Enquanto $error > tol$

(i) Resolver o problema de minimização com restrição em caixas

$$\min \chi(\vec{\rho}, \bar{\lambda}_l^k, \bar{\lambda}_g^k, \bar{\mu}^k, \epsilon^k), \quad \forall (\vec{\rho}) \in X.$$

onde

$$\begin{aligned} \chi(\vec{\rho}, \bar{\lambda}_l^k, \bar{\lambda}_g^k, \bar{\mu}^k, \epsilon^k) &= f(\vec{\rho}, \vec{U}_o(\vec{\rho}_o)) + \frac{1}{2\epsilon^k} \Psi^l(\ell(\vec{\rho}, \vec{U}_o(\vec{\rho})), \lambda_l^k, \epsilon^k) \\ &+ \frac{1}{2\epsilon^k} \sum_{j=1}^{2n_e} \Psi_j^g(g_j(\vec{\rho}, \vec{U}_o(\vec{\rho})), \lambda_{g_j}^k, \epsilon^k) \\ &+ \frac{1}{2\epsilon^k} \Phi(h(\vec{\rho}, \vec{U}_o(\vec{\rho})), \mu^k, \epsilon^k) \end{aligned}$$

com

$$\Psi^l(\ell(\vec{\rho}, \vec{U}_o(\vec{\rho})), \lambda_l^k, \epsilon^k) = \begin{cases} \ell[\ell + 2\epsilon^k \lambda_l^k], & \text{se } \ell(\vec{\rho}, \vec{U}_o(\vec{\rho})) \geq -\epsilon^k \lambda_l^k \\ -(\epsilon^k \lambda_l^k)^2, & \text{se } \ell(\vec{\rho}, \vec{U}_o(\vec{\rho})) < -\epsilon^k \lambda_l^k \end{cases}$$

$$\Psi_j^g \left(g_j \left(\vec{\rho}, \vec{U}_o(\vec{\rho}) \right), \lambda_{g_j}^k, \epsilon^k \right) = \begin{cases} g_j \left[g_j + 2\epsilon^k \lambda_{g_j}^k \right], & \text{se } g_j \left(\vec{\rho}, \vec{U}_o(\vec{\rho}) \right) \geq -\epsilon^k \lambda_{g_j}^k \\ - \left(\epsilon^k \lambda_{g_j}^k \right)^2, & \text{se } g_j \left(\vec{\rho}, \vec{U}_o(\vec{\rho}) \right) < -\epsilon^k \lambda_{g_j}^k \end{cases}$$

e

$$\Phi \left(h \left(\vec{\rho}, \vec{U}_o(\vec{\rho}) \right), \mu^k, \epsilon^k \right) = h \left[h + 2\epsilon^k \mu^k \right]$$

Denotando a solução por $\vec{\rho}^k$.

(ii) Atualizar os multiplicadores de Lagrange

$$\lambda_l^{k+1} = \max \left\{ 0, \lambda_l^k + \frac{1}{\epsilon^k} \ell \left(\vec{\rho}, \vec{U}_o(\vec{\rho}) \right) \right\}$$

$$\lambda_{g_j}^{k+1} = \max \left\{ 0, \lambda_{g_j}^k + \frac{1}{\epsilon^k} g_j \left(\vec{\rho} \right) \right\}$$

e

$$\mu^{k+1} = \mu^k + \frac{1}{\epsilon^k} h \left(\vec{\rho}, \vec{U}_o(\vec{\rho}) \right)$$

(iii) Calcular o erro

$$e_1 = \left\{ \frac{|\lambda_l^{k+1} - \lambda_l^k|}{\max \{1, \lambda_l^{k+1}\}} \right\}$$

$$e_2 = \max_j \left\{ \frac{|\lambda_{g_j}^{k+1} - \lambda_{g_j}^k|}{\max \{1, \lambda_{g_j}^{k+1}\}} \right\}$$

$$e_3 = \left\{ \frac{|\mu^{k+1} - \mu^k|}{\max \{1, |\mu^{k+1}|\}} \right\}$$

onde

$$error = \max \{e_1, e_2, e_3\}$$

(iv) atualizar o parâmetro de penalidade

$$\epsilon^{k+1} = \begin{cases} \gamma \epsilon^k, & \text{se } \epsilon^k < \epsilon_{crit}, \text{ para algum } \gamma \in (0, 1) \\ \epsilon_{crit}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

• Fim

3.1.4 Determinação da função objetivo e das restrições (restrição de material)

Neste momento, faz-se necessário computar os termos:

- $p(\vec{\rho}, \vec{U}_o(\vec{\rho}))$

O objetivo é determinar a função objetivo:

$$p(\vec{\rho}, \vec{U}_o(\vec{\rho})) = \frac{1}{\varphi_o} \langle \vec{u}_o(x_s), \vec{e}_s \rangle \quad (3.23)$$

Para isto é necessário, então, calcular

$$\langle \vec{u}_o(x_s), \vec{e}_s \rangle \quad (3.24)$$

Definindo $\vec{e}_s = (c, s)$ e denotando

$$\vec{q}_s = \begin{Bmatrix} U_o(i_1) \\ U_o(i_2) \end{Bmatrix} \quad (3.25)$$

obtém-se

$$\langle \vec{u}_o(x_s), \vec{e}_s \rangle = \langle \vec{q}_s(\vec{U}_o(\vec{\rho})), \vec{e}_s \rangle \quad (3.26)$$

onde $i_1 = id(1, s)$ e $i_2 = id(2, s)$, representando os graus de liberdade do nó s . Com os resultados acima, obtemos:

$$p(\vec{\rho}, \vec{U}_o(\vec{\rho})) = \frac{1}{\varphi_o} \langle \vec{q}_s(\vec{U}_o(\vec{\rho})), \vec{e}_s \rangle \quad (3.27)$$

A constante φ_o torna a função objetivo adimensional e corresponde ao valor inicial $\langle \vec{q}_s(\vec{U}_o(\vec{\rho}_o)), \vec{e}_s \rangle$, onde $\vec{\rho}_o$ é a densidade inicial.

- Determinação do gradiente $\frac{Dp}{D\rho_k}$

$$\frac{Dp}{D\rho_k} = \frac{\partial p}{\partial \rho_k} + \sum_{s=1}^{2n_{nodes}} \frac{\partial p}{\partial U_{os}} \frac{\partial U_{os}}{\partial \rho_k} \quad (3.28)$$

O segundo termo corresponde a um produto interno, ou seja:

$$\frac{Dp}{D\rho_k} = \frac{\partial p}{\partial \rho_k} + \left\langle \{\nabla_{Uo} p\}, \frac{\partial}{\partial \rho_k} \{\vec{U}_o\} \right\rangle \quad (3.29)$$

Das equações do sistema de equilíbrio global:

$$[\mathbb{K}_T] \vec{U}_o = \vec{F}_{in} \quad (3.30)$$

Derivando a equação de estado em relação a ρ_k , obtemos:

$$[\mathbb{K}_T] \frac{\partial}{\partial \rho_k} \{ \vec{U}_o \} + \left[\frac{\partial}{\partial \rho_k} [\mathbb{K}_T] \right] \{ \vec{U}_o \} = \frac{\partial}{\partial \rho_k} \{ \vec{F}_{in} \}. \quad (3.31)$$

Denotando o primeiro termo por \vec{R}^k :

$$[\mathbb{K}_T] \frac{\partial}{\partial \rho_k} \{ \vec{U}_o \} = \vec{R}^k \quad (3.32)$$

onde

$$\vec{R}^k = \frac{\partial}{\partial \rho_k} \{ \vec{F}_{in} \} - \left[\frac{\partial}{\partial \rho_k} [\mathbb{K}_T] \right] \{ \vec{U}_o \} \quad (3.33)$$

Considerando que o vetor de forças nodais \vec{F}_{in} é constante, ou seja:

$$\frac{\partial}{\partial \rho_k} \{ \vec{F}_{in} \} = 0$$

Portanto, o vetor \vec{R}^k reduz-se para:

$$\vec{R}^k = - \left[\frac{\partial}{\partial \rho_k} [\mathbb{K}_T] \right] \{ \vec{U}_o \} \quad (3.34)$$

Isolando $\frac{\partial}{\partial \rho_k} \{ \vec{U}_o \}$ na Eq. 3.32,

$$\frac{\partial}{\partial \rho_k} \{ \vec{U}_o \} = [\mathbb{K}_T]^{-1} \vec{R}^k \quad (3.35)$$

Substituindo a expressão 3.35 na Eq. 3.29, obtemos:

$$\frac{Dp}{D\rho_k} = \frac{\partial p}{\partial \rho_k} + \left\langle \{ \nabla_{UP} \}, [\mathbb{K}_T]^{-1} \vec{R}^k \right\rangle \quad (3.36)$$

Entretanto, a matriz $[\mathbb{K}_T]^{-1}$ é simétrica, ou seja, $[\mathbb{K}_T]^{-1} = ([\mathbb{K}_T]^{-1})^T$, logo:

$$\frac{Dp}{D\rho_k} = \frac{\partial p}{\partial \rho_k} + \left\langle [\mathbb{K}_T]^{-1} \{ \nabla_{UP} \}, \vec{R}^k \right\rangle$$

Denotando

$$\vec{z} = [\mathbb{K}_T]^{-1} \{ \nabla_{UP} \} \quad (3.37)$$

finalmente obtemos:

$$\frac{Dp}{D\rho_k} = \frac{\partial p}{\partial \rho_k} + \left\langle \vec{z}, \vec{R}^k \right\rangle \quad (3.38)$$

onde \vec{z} é a solução de

$$[\mathbb{K}_T] \vec{z} = \{ \nabla_{UP} \} \quad (3.39)$$

- Determinação da restrição de material $h(\vec{\rho}, \vec{U}_o(\vec{\rho}))$

O objetivo agora é determinar:

$$h(\vec{\rho}, \vec{U}_o(\vec{\rho})) = \frac{1}{\Omega} \sum_{e=1}^n \int_{\Omega_e} (\rho - \alpha) d\Omega = 0 \quad (3.40)$$

O procedimento de integração numérica fornece:

$$\int_{\Omega_e} (\rho - \alpha) d\Omega = \sum_{i=1}^{n_{pt}} \{2\Omega_e w_i [\rho(\zeta_i, \eta_i) - \alpha]\} \quad (3.41)$$

onde (ζ_i, η_i) , $i = 1, \dots, n_{pt}$ são os pontos de integração, e w_i , $i = 1, \dots, n_{pt}$ são os respectivos pesos.

A densidade é interpolada através da relação

$$\rho(\zeta, \eta) = H_1(\zeta, \eta)\rho_{i_1} + H_2(\zeta, \eta)\rho_{i_2} + H_3(\zeta, \eta)\rho_{i_3} \quad (3.42)$$

- Determinação do gradiente de $h(\vec{\rho}, \vec{U}_o(\vec{\rho}))$ em relação a ρ_k

Considerando que $h(\vec{\rho}, \vec{U}_o(\vec{\rho}))$ não depende de \vec{U}_o , ou seja, $h(\vec{\rho}, \vec{U}_o(\vec{\rho})) = h(\vec{\rho})$, temos:

$$\frac{Dh(\vec{\rho}, \vec{U}_o(\vec{\rho}))}{D\vec{\rho}} = \frac{\partial h(\vec{\rho})}{\partial \vec{\rho}} = \frac{1}{\Omega} \sum_{e=1}^n \left\{ \int_{\Omega_e} \frac{\partial \rho(\vec{\rho})}{\partial \vec{\rho}} d\Omega \right\} \quad (3.43)$$

Entretanto, como o campo de densidade relativa no $e - th$ elemento é dado por:

$$\rho(\zeta, \eta) = H_1(\zeta, \eta)\rho_{i_1} + H_2(\zeta, \eta)\rho_{i_2} + H_3(\zeta, \eta)\rho_{i_3}$$

vemos que a única contribuição para o vetor gradiente do $e - th$ elemento é relativa as componente (i_1, i_2, i_3) . então, denotando

$$\tilde{h}^e = \int_{\Omega_e} \rho(\vec{\rho}) d\Omega \quad (3.44)$$

obtemos o vetor local:

$$\frac{\partial}{\partial \vec{\rho}} \nabla_{\vec{\rho}} \tilde{h}^e(1:3) = \int_{\Omega_e} \left\{ \begin{array}{c} H_1(\zeta, \eta) \\ H_2(\zeta, \eta) \\ H_3(\zeta, \eta) \end{array} \right\} d\Omega \quad (3.45)$$

A determinação numérica deste termo é obtida por:

$$\nabla_{\vec{\rho}} \tilde{h}^e(1:3) = \sum_{i=1}^{n_{pt}} \left\{ 2\Omega_e w_i \left\{ \begin{array}{c} H_1(\zeta_i, \eta_i) \\ H_2(\zeta_i, \eta_i) \\ H_3(\zeta_i, \eta_i) \end{array} \right\} \right\} \quad (3.46)$$

- Determinação dos termos $g_{2e-1}(\vec{\rho}, \beta)$ e $g_{2e}(\vec{\rho}, \beta)$ para $s = 1..n_e$

Observa-se, inicialmente, que como ρ é linear dentro de cada elemento, as derivadas parciais em relação a x e y são constantes e dadas por:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)_e = \frac{\partial H_1}{\partial x}(x, y)\rho_{i_1} + \frac{\partial H_2}{\partial x}(x, y)\rho_{i_2} + \frac{\partial H_3}{\partial x}(x, y)\rho_{i_3} \quad (3.47)$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)_e = \frac{\partial H_1}{\partial y}(x, y)\rho_{i_1} + \frac{\partial H_2}{\partial y}(x, y)\rho_{i_2} + \frac{\partial H_3}{\partial y}(x, y)\rho_{i_3} \quad (3.48)$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_1}{\partial x} &= \frac{1}{2\Omega_e} [y_{i_2} - y_{i_3}] \\ \frac{\partial H_2}{\partial x} &= \frac{1}{2\Omega_e} [y_{i_3} - y_{i_1}] \\ \frac{\partial H_3}{\partial x} &= \frac{1}{2\Omega_e} [y_{i_1} - y_{i_2}] \end{aligned} \quad (3.49)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_1}{\partial y} &= \frac{1}{2\Omega_e} [x_{i_3} - x_{i_2}] \\ \frac{\partial H_2}{\partial y} &= \frac{1}{2\Omega_e} [x_{i_1} - x_{i_3}] \\ \frac{\partial H_3}{\partial y} &= \frac{1}{2\Omega_e} [x_{i_2} - x_{i_1}] \end{aligned} \quad (3.50)$$

Para calcular a distância dos vértices ao baricentro, \vec{d}_i , temos:

$$\vec{d}_i = (\vec{x}_i - \vec{x}_m) \quad (3.51)$$

onde, $\vec{x}_i = (x_i, y_i)$, $i = 1..3$ são as coordenadas dos vértices e $\vec{x}_m = (x_m, y_m)$ é a coordenada do baricentro do elemento *Tri3*, ou seja:

$$\begin{aligned} x_m &= \frac{1}{3} (x_{i_1} + x_{i_2} + x_{i_3}) \\ y_m &= \frac{1}{3} (y_{i_1} + y_{i_2} + y_{i_3}) \end{aligned} \quad (3.52)$$

Calcularemos o valor mínimo de \vec{d}_i , ou seja:

$$d_{\min} = \min_{i=1,..,3} \|\vec{d}_i\| \quad (3.53)$$

Então, define-se:

$$C_x^e = C_y^e = \frac{1}{d_{\min}} \quad (3.54)$$

Além disto, temos:

$$\vartheta = \frac{1}{d_{\max}}, \quad \text{with } d_{\max} = \max_{i=1,3} \|\vec{d}_i\|. \quad (3.55)$$

A partir do cálculo das expressões acima, pode-se determinar $g_{2e-1}(\rho)$ e $g_{2e}(\rho)$ por:

$$g_{2e-1}(\rho) = \frac{1}{\vartheta^2} \left\{ \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_e^2 - (C_x^e)^2 \right\} \quad (3.56)$$

e

$$g_{2e}(\rho) = \frac{1}{\vartheta^2} \left\{ \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right)_e^2 - (C_y^e)^2 \right\} \quad (3.57)$$

- Determinação da derivada $\frac{\partial g_j(\vec{\rho})}{\partial \rho_k}$:

Utilizando a regra da cadeia, deriva-se as expressões $g_{2e-1}(\rho)$ e $g_{2e}(\rho)$, onde obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{2e-1}(\rho)}{\partial \rho_k} &= \frac{2}{\vartheta^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_e \frac{\partial}{\partial \rho_k} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_e \\ &= \frac{2}{\vartheta^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_e \frac{\partial}{\partial \rho_k} \left\{ \frac{\partial H_1}{\partial x} \rho_{i_1} + \frac{\partial H_2}{\partial x} \rho_{i_2} + \frac{\partial H_3}{\partial x} \rho_{i_3} \right\} \end{aligned} \quad (3.58)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{2e}(\rho)}{\partial \rho_k} &= \frac{2}{\vartheta^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right)_e \frac{\partial}{\partial \rho_k} \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right)_e \\ &= \frac{2}{\vartheta^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right)_e \frac{\partial}{\partial \rho_k} \left\{ \frac{\partial H_1}{\partial y} \rho_{i_1} + \frac{\partial H_2}{\partial y} \rho_{i_2} + \frac{\partial H_3}{\partial y} \rho_{i_3} \right\} \end{aligned} \quad (3.59)$$

- Determinação da restrição de carga da mola $\ell(\vec{\rho}, \vec{U}_o(\vec{\rho}))$

A restrição de carga da mola é dada por

$$\ell(\vec{\rho}, \vec{U}_o(\vec{\rho})) = \frac{k_s \langle \vec{u}_o(x_s), \vec{e}_s \rangle}{F_{adm}} - 1 \leq 0 \quad (3.60)$$

Definindo $\vec{e}_s = (c, s)$ e denotando

$$\vec{q}_s = \left\{ \begin{array}{l} U_o(i_1) \\ U_o(i_2) \end{array} \right\} \quad (3.61)$$

o produto interno pode ser expresso por:

$$\langle \vec{u}_o(x_s), \vec{e}_s \rangle = \langle \vec{q}_s(\vec{U}_o(\vec{\rho})), \vec{e}_s \rangle \quad (3.62)$$

Portanto, pode ser obtido:

$$\ell(\vec{\rho}, \vec{U}_o(\vec{\rho})) = \frac{k_s}{F_{adm}} \langle \vec{q}_s(\vec{U}_o(\vec{\rho})), \vec{e}_s \rangle - 1 \leq 0 \quad (3.63)$$

3.2 Refino h -adaptativo da malha de elementos finitos

A maioria dos problemas de otimização de leiaute é baseada na abordagem de pixel, na qual utiliza-se uma malha refinada homogênea de elementos retangulares. Conseqüentemente, para obter uma interface material/vazio que propicie um leiaute ótimo com uma resolução refinada, é necessário empregar um elemento de pequena dimensão, definindo desta forma o tamanho do pixel. A utilização de pixel de tamanho reduzido aumenta significativamente o número de variáveis de projeto, tornando inviável o problema de otimização. Diferentes métodos foram propostos com a intenção de reduzir o tamanho do problema, para uma determinada resolução final da interface material/vazio. Entre estes métodos estão os métodos de otimização estrutural evolutivos, ver Christie *et al.* (1998), Chu *et al.* (1997), Querin *et al.* (2000a,b), Rong *et al.* (2000) e Reynolds *et al.* (1999). A desvantagem destes métodos é a utilização de uma estratégia heurística para a adição e remoção de elementos, a qual não pode ser determinada de maneira efetiva.

Uma diferente abordagem empregada com o objetivo de gerar uma interface material/vazio de alta qualidade, é a solução de um problema de otimização de leiaute seguido por um processo de otimização de forma, ver Bendsoe & Rodrigues (1991). Outro método, proposto por Schwarz *et al.* (2001), considera a solução de uma seqüência de otimização de leiaute seguido por um processo de “remalhamento”. O “remalhamento” é realizado uma vez que o domínio, definido pela interface material/vazio, do leiaute ótimo é determinado, e o seu contorno aproximado por curvas do tipo spline. Em ambos os métodos as dificuldades podem ocorrer no processo de identificação da interface material/vazio do leiaute ótimo resultante. No trabalho de Costa Jr. & Alves (2003) é proposta uma nova abordagem que combina otimização de leiaute com uma técnica de refino h -adaptativo.

A seguir é descrito o processo de refino h -adaptativo da malha utilizado neste trabalho para o projeto de mecanismos flexíveis sujeitos a restrição de material. O procedimento é realizado de acordo com a proposta de Costa Jr. (2003).

A estratégia consiste basicamente na identificação de um conjunto de elementos a serem refinados, de acordo com a ilustração nas Figs. 3.2(a,b). Em seguida, o processo de refino é complementado pela introdução dos necessários elementos de transição, como

mostrado nas Figs. 3.3(a,b), para manter a compatibilidade da malha, ver George & Borouchaki (1997) e Carey (1997).

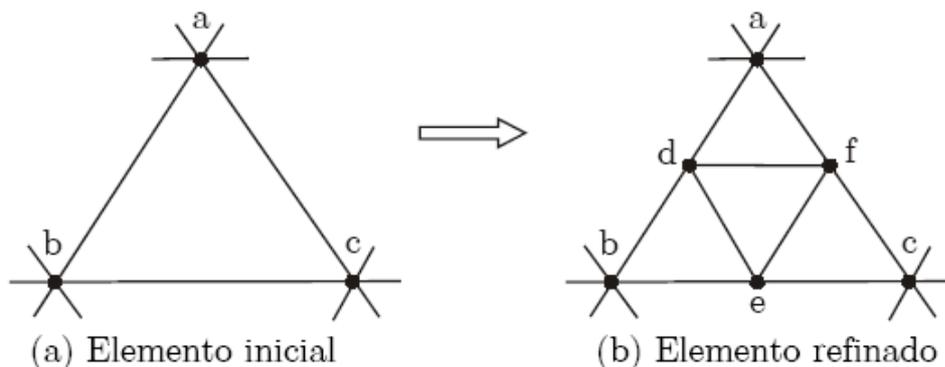


Figura 3.2: Estratégia de refinamento para elementos *Tri3*

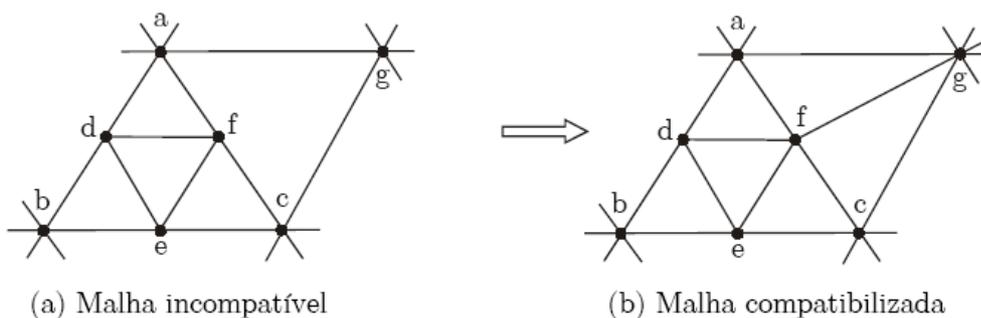


Figura 3.3: Elemento de transição compatibiliza a malha.

As principais vantagens do processo de refinamento *h*-adaptativo são:

- maior definição do contorno material;
- redução do número de variáveis de projeto;
- diminuição do erro da solução da equação de estado.

Segundo Costa Jr. (2003), a estratégia de refinamento da malha consiste basicamente em incluir um novo laço no algoritmo de otimização de leiaute, no qual a cada solução ótima do problema de otimização, a malha é refinada e o processo de otimização é reiniciado visando melhorar a definição do contorno material do mecanismo. Em outras palavras, a determinação do leiaute ótimo consiste na solução de uma seqüência de problemas, onde cada um consiste na otimização do leiaute seguido por um esquema de refinamento *h*-adaptativo.

Uma descrição geral do algoritmo é dada a seguir.

1. Ler os dados da malha de elementos finitos e gerar a estrutura de dados inicial.

2. Ler o valor inicial das variáveis de projeto.
3. Para cada nível de refino, fazer:
 - 3.1. Resolver o problema de otimização de leiaute.
 - 3.2. Aplicar o processo de refino h -adaptativo à malha:
 - 3.2.1. Ler a estrutura de dados da malha.
 - 3.2.2. Efetuar o refino h -adaptativo da malha:
 - 3.2.2.1. Identificar o conjunto dos elementos a serem refinados.
 - 3.2.2.2. Efetuar o refino destes elementos e introduzir os elementos de transição necessários para assegurar a compatibilidade da malha.
 - 3.2.2.3. Aplicar o processo de suavização Laplaciano condicional para melhorar a qualidade da malha.
 - 3.2.3. Otimizar a incidência nodal do elemento de acordo com o esquema de armazenamento do algoritmo de solução do sistema linear utilizado.
 - 3.2.4. Atualizar a malha e a estrutura de dados dos elementos finitos.

3.2.1 Estratégia de refino da malha

A identificação do conjunto de elementos a serem refinados (passo 3.2.2.1), e a introdução dos elementos de transição (passo 3.2.2.2), depende da estratégia adotada para o problema. Para facilitar a descrição do processo, são apresentadas as seguintes definições:

- Elemento Material: elemento cuja densidade relativa ρ é tal que $0,5 \leq \rho \leq \rho^{\text{sup}}$. Caso ρ pertença ao intervalo $\rho^{\text{inf}} \leq \rho < 0,5$, o elemento é definido como sendo vazio.
- Contorno Material: contorno formado pelas arestas que são comuns a um elemento material e um elemento vazio.

Um ponteiro de vetor $P_{ref}(e)$, $e = 1, \dots, \text{nume}$, onde nume representa o número total de elementos da malha, é introduzido para identificar o conjunto de elementos a serem refinados, definido por J_r . Quando $P_{ref}(e) = 1$, então o e -ésimo elemento deverá ser refinado, ou seja, $r \in J_r$. Caso contrário, se $P_{ref}(e) = 0$, então o elemento não será refinado, o que implica $r \notin J_r$.

A estratégia para identificar os elementos pertencentes ao conjunto J_r é apresentada a seguir:

1. Iniciar ponteiro $P_{ref}(e) = 0$, $e = 1, \dots, \text{nume}$.
2. Para cada elemento, $e = 1, \dots, \text{nume}$, verificar:

Se $0,5 \leq \rho \leq \rho^{\text{sup}}$, então denotar $P_{ref}(e) = 1$, assim, o elemento material pertence ao conjunto J_r , i.e., o elemento será refinado. Agora, se $\rho^{\text{inf}} \leq \rho < 0,5$, o elemento

é um elemento vazio, então é verificado se o elemento tem pelo menos um nó pertencente ao contorno material. Caso afirmativo, o valor do ponteiro é redefinido de modo que $P_{ref}(e) = 1$. Daí, este elemento vazio também será refinado, ou seja, será um elemento do conjunto J_r .

O objetivo aqui é evitar ter um dado elemento vazio com dois ou mais vizinhos que são elementos materiais. Isto pode conduzir a geração de extremidades pontiagudas no contorno material ou pode conduzir a geração de regiões vazias no interior, proporcionando uma baixa qualidade na definição do contorno material.

3. Determinar a medida de qualidade $Q(e)$ de cada elemento, $e = 1, \dots, nume$, a qual é definida por:

$$Q(e) = \frac{6A_e}{\sqrt{3}L_{\max}^e P_e} \quad (3.64)$$

onde A_e é a área do elemento triangular,

P_e é a metade do perímetro do elemento triangular,

$L_{\max}^e = \max\{ab, ac, bc\}$ é o comprimento da maior aresta do triângulo.

Logo, se $Q(e) \leq 0,55$, redefine-se o valor do ponteiro para $P_{ref}(e) = 1$. Assim, todos os elementos distorcidos são refinados.

Agora, uma vez que todos os passos acima foram realizados, é obtida uma primeira estimativa do conjunto J_r . O conjunto J_r pode ser aumentado com a aplicação de um critério adicional de refino para suavização.

Neste trabalho optou-se por refinar todos os elementos-materiais e todos os elementos-vazios que tem pelo menos um nó pertencente ao contorno material. Para pequenas frações de volume prescrito, o aumento do número de variáveis de projeto não é relevante. No entanto, para grandes frações de volume, esta decisão resulta num grande aumento das variáveis de projeto. Neste caso, deve-se substituir a estratégia do passo 2 por algum outro critério.

3.2.2 Processo de suavização Laplaciano condicional

Após o passo de refino emprega-se um processo de suavização denominado por Laplaciano condicional visando melhorar a qualidade da malha. A Fig. 3.4 ilustra o processo, sendo que n_v denota o número de nós dos vértices adjacentes associado ao nó \mathbf{x}_n . O processo de suavização é aplicado, em ordem crescente, a todos os nós dos vértices que estão no interior da malha. Os nós do contorno são mantidos fixos.

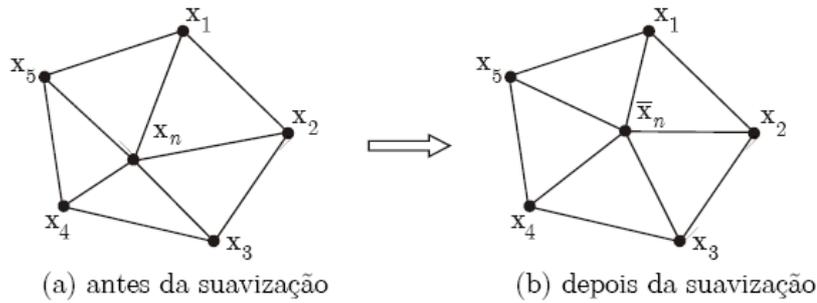


Figura 3.4: Processo de suavização Laplaciano no elemento *Tri3*

O processo Laplaciano é condicional, portanto, somente será aplicado se a qualidade da malha do conjunto de elementos melhorar. A qualidade de um conjunto de elementos é definida como sendo a qualidade do pior elemento do conjunto. A medida da qualidade do elemento é dada pela Eq. 3.64. Ao aplicar o processo de suavização Laplaciano, uma nova posição *teste* do nó \mathbf{x}_n é determinada, a qual é denotada por $\bar{\mathbf{x}}_n$, no qual $\bar{\mathbf{x}}_n = \frac{1}{n_v} \sum_{i=1}^{n_v} \mathbf{x}_i$. No entanto, o nó \mathbf{x}_n só será movido para a nova posição *teste* se a qualidade da malha não diminuir.

3.3 Exemplo 1: Mecanismo inversor de deslocamento

Há atuadores eletrostáticos que produzem unicamente forças de contração. Nestes casos, para determinadas aplicações, pode ser necessário converter uma força de contração em uma força de expansão. O seguinte exemplo demonstra um atuador simples que inverte uma força aplicada em uma direção, produzindo um deslocamento em uma direção contrária, conforme mostra a Fig. 3.5. O mecanismo apresenta simetria em relação a direção horizontal.

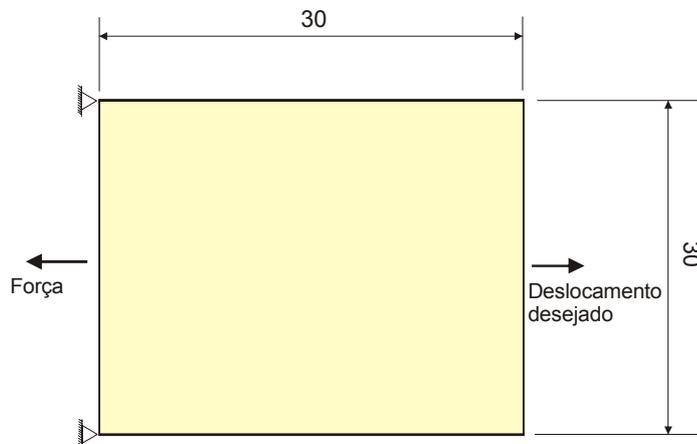


Figura 3.5: Inversor de deslocamento

Somente a metade do domínio de projeto foi discretizada devido à simetria. A malha

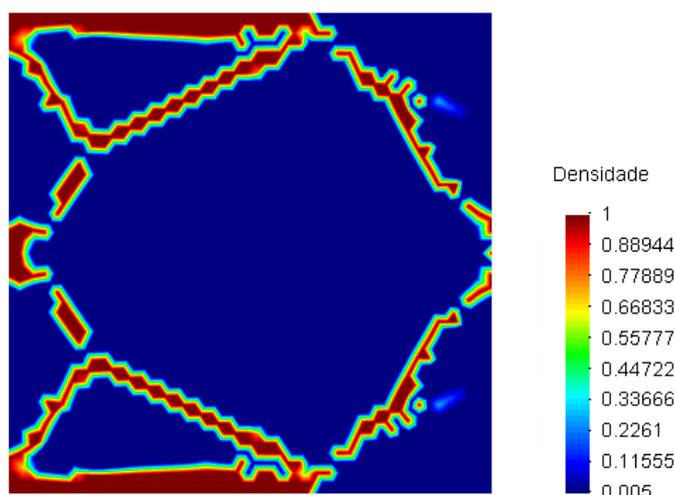


Figura 3.7: Topologia inicial obtida para o inversor

de elementos finitos foi discretizada com 1111 nós e 2094 elementos. O módulo de Young e o coeficiente de Poisson do material são, respectivamente, 210 GPa (210000 N/mm^2) e 0,3. A quantidade de material foi restrita em 15%. A Fig. 3.6 mostra o domínio completo com $2 \cdot 2094 = 4188$ elementos e 2179 nós.

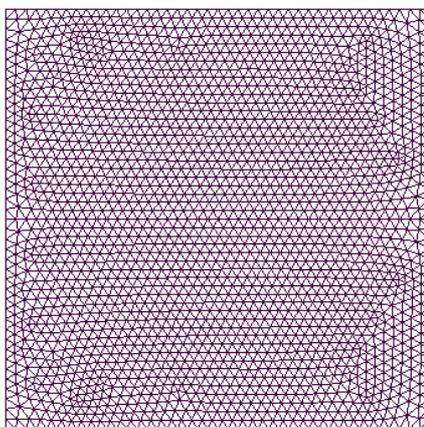


Figura 3.6: Discretização do domínio de projeto do inversor. 4188 elementos e 2179 nós.

A topologia ótima inicial obtida no procedimento é apresentada na Fig. 3.7. O parâmetro de penalidade utilizado na função Lagrangeano aumentado foi de $1/4 \cdot 10^5$.

A seguir é aplicada uma estratégia de refino h -adaptativo da malha. A Fig. 3.8 apresenta o domínio completo da malha no primeiro refino, com um total de 4486 nós e 8720 elementos. A Fig. 3.9 apresenta a topologia do mecanismo inversor no primeiro refino. As Figs. 3.10 e 3.11 mostram respectivamente, a malha do segundo refino com 21510 elementos e 10955 nós e a topologia final do mecanismo.

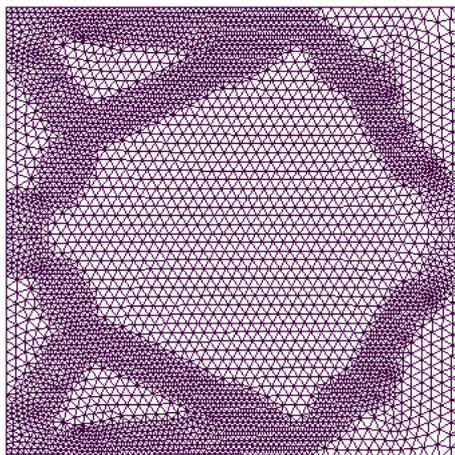


Figura 3.8: Domínio completo discretizado e refinado com 4486 nós e 8720 elementos.

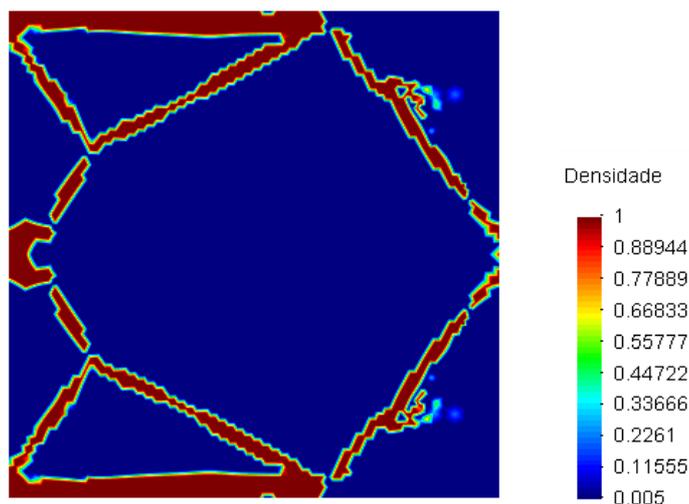


Figura 3.9: Topologia obtida no primeiro refino, malha com 8720 elementos

Observou-se nos testes realizados que este problema de otimização topológica apresenta vários mínimos locais e o procedimento converge para topologias distintas conforme a estimativa inicial das densidades e dos parâmetros de penalização da função Lagrangeano aumentado e do modelo SIMP. Aumentando-se a discretização da malha obtém-se diferentes mecanismos, ou seja, há uma certa dependência da malha inicial para a obtenção da topologia ótima. Ressalta-se que a presença de mínimos locais e a dependência de malha são fenômenos bastante comuns nos procedimentos de otimização topológica de estruturas. As topologias ótimas obtidas são similares às topologias obtidas por NISHIWAKI *et al.* (1998).

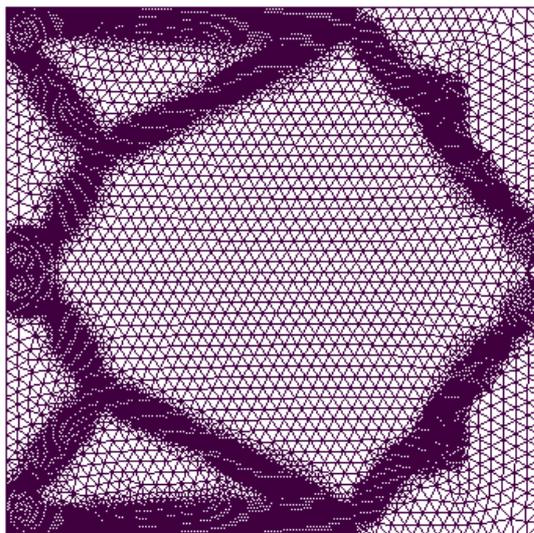


Figura 3.10: Malha refinada do inversor, com 21510 elementos.

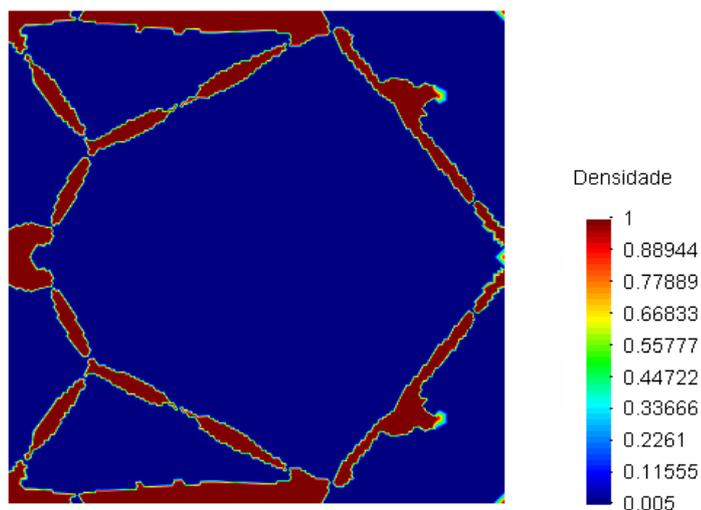


Figura 3.11: Topologia final do mecanismo inversor de deslocamento

A Fig. 3.12 ilustra como poderia ser um mecanismo de corpo rígido convencional análogo ao obtido neste exemplo. Isto demonstra outra que este procedimento de projeto topológico de mecanismos flexíveis pode também auxiliar o projetista na síntese de mecanismos de corpo rígido convencionais.

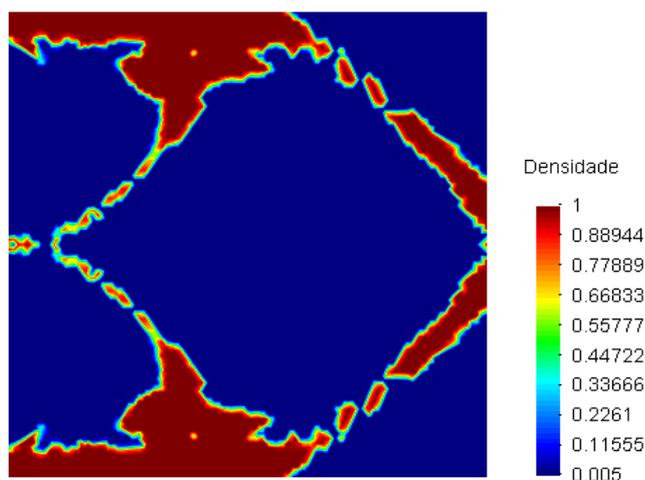


Figura 3.13: Topologia obtida considerando a restrição de gradientes.



Figura 3.12: Mecanismo inversor de corpo rígido convencional

Durante os teste para determinação dos parâmetros de penalidade verificou-se que a restrição de gradientes, apesar de proporcionar benefícios como a independência de malha e evitar instabilidades de tabuleiro, conforme descrito anteriormente, estava aumentando a quantidade de regiões com densidade intermediária nas topologias obtidas e dificultando a calibração dos parâmetros. Por estas razões optou-se por retirar estas restrições. A Fig. 3.13 mostra uma topologia de mecanismo inversor obtida considerando a restrição de gradientes. Nos exemplos anteriores e nos demais, a restrição de gradientes foi desativada.

3.4 Exemplo 2 : Mecanismo de esmagamento

O mecanismo de esmagamento proposto é similar ao mecanismo de SIGMUND (1997). Neste mecanismo, a aplicação de uma força no canto superior direito produz um deslocamento no ponto central esquerdo, numa direção perpendicular à direção de aplicação da força, conforme ilustra a Fig. 5.21.

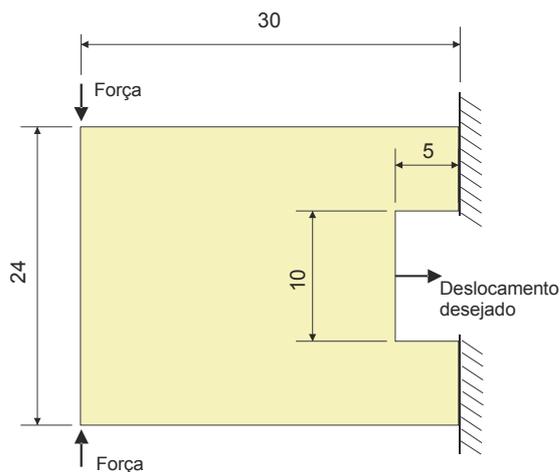


Figura 3.14: Mecanismo de esmagamento

A sequência de topologias ótimas parciais resultantes do problema com estratégia de refino h -adaptativo estão ilustradas nas Figs. 3.15, 3.16 e 3.17. A restrição de quantidade de material foi de 20 %. A malha inicial com 4300 elementos e 2249 nós e a topologia ótima é apresentada na Fig. 3.15. A malha do primeiro nível de refino com 8312 elementos e 4316 nós e a topologia ótima estão ilustradas na Fig. 3.16. A Fig. 3.17 apresenta a última malha refinada, com 18802 elementos e 9671 nós e a topologia ótima final para o mecanismo de esmagamento.

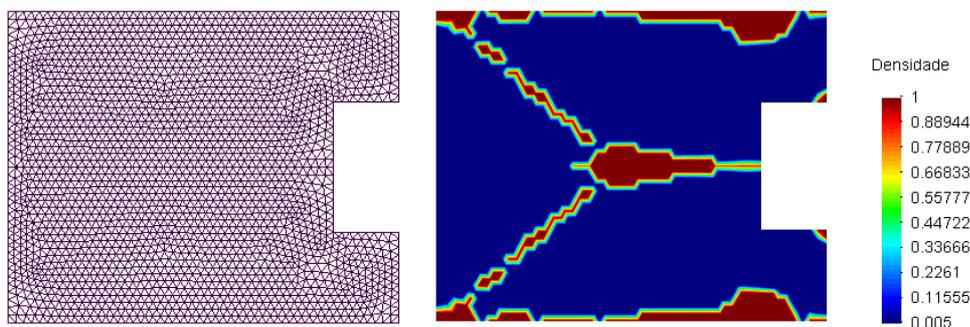


Figura 3.15: Malha inicial com 4300 elementos e 2249 nós e topologia obtida

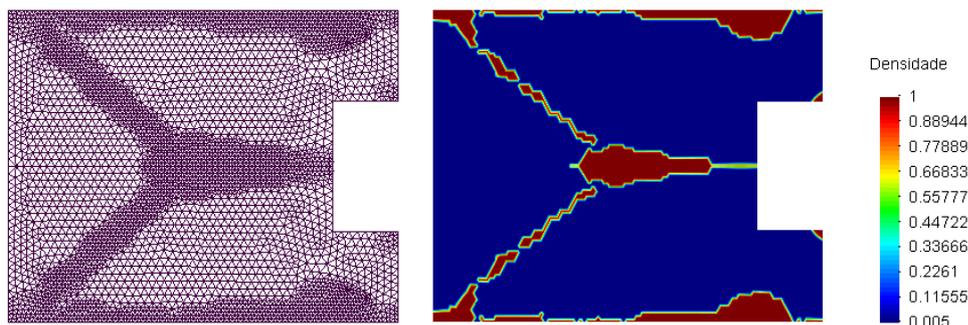


Figura 3.16: Malha refinada com 8312 elementos e 4316 nós e topologia obtida

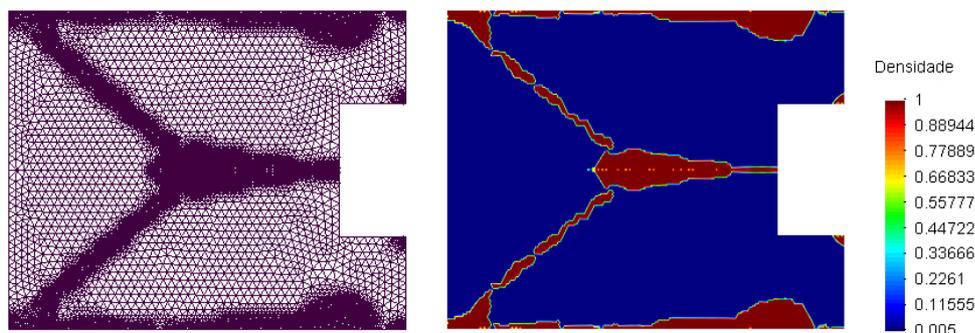


Figura 3.17: Malha refinada com 18802 elementos e 9671 nós e topologia final

A Fig. 3.18 apresenta a topologia ótima do mecanismo de esmagamento fixando a quantidade de material em 30 %. A malha refinada possui 11184 elementos e 5766 nós.

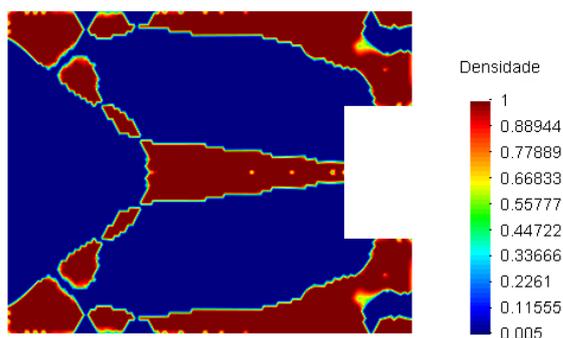


Figura 3.18: Topologia do mecanismo com restrição de material de 30%, malha com 11184 elementos e 5766 nós

A escolha inadequada do parâmetro de penalidade da função Lagrangiana aumentada pode resultar na violação da restrição da quantidade de material. Como, neste trabalho, o objetivo geral dos mecanismos é maximizar o deslocamento em um ponto específico, se a restrição de quantidade de material não for respeitada, o mecanismo tende a ficar com membros cada vez mais finos a cada nível de refino e se aproximar da espessura de um

fio de cabelo. Esta situação está ilustrada na Fig. 3.19. A quantidade de material foi restrita em 30 %, no entanto, observa-se que esta restrição é violada devido a uma escolha inadequada do parâmetro de penalidade.

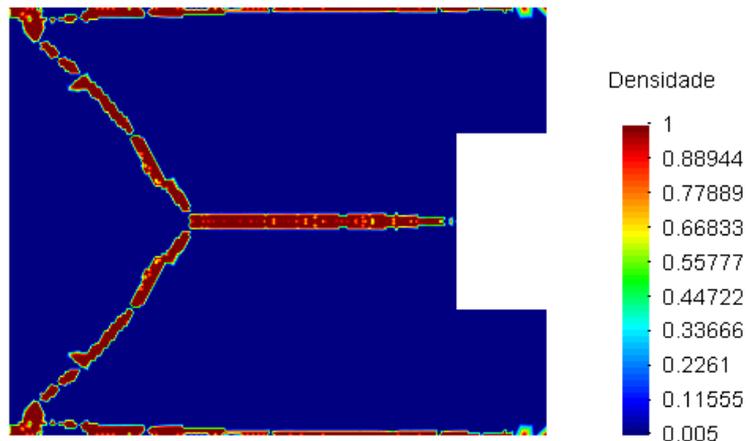


Figura 3.19: Mecanismo sem penalização adequada da restrição de material.

A Fig. 3.20 ilustra um mecanismo de corpo rígido com a mesma finalidade deste exemplo.

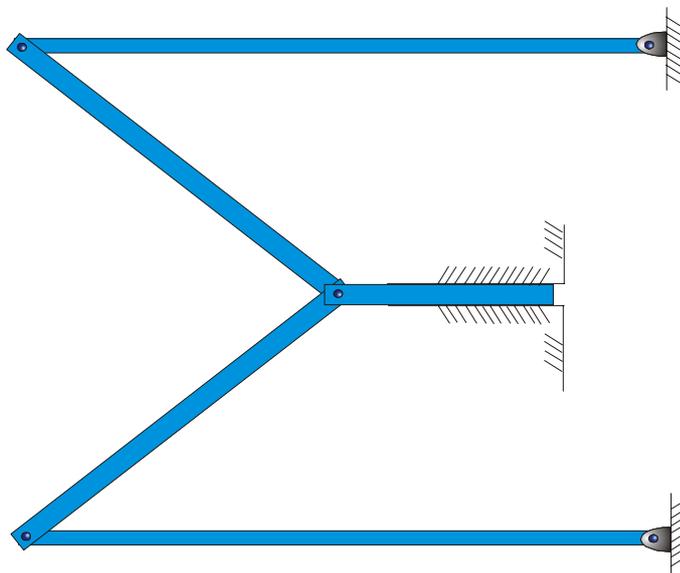


Figura 3.20: Mecanismo de esmagamento feito de corpo rígido convencional

3.5 Exemplo 3 : Mecanismo de agarrar

O problema proposto está ilustrado na Fig. 3.21. A aplicação de uma força na direção horizontal produz uma força na direção perpendicular em outro ponto do domínio, simulando agarrar uma peça. O mecanismo é simétrico e apenas metade do domínio foi

discretizado.

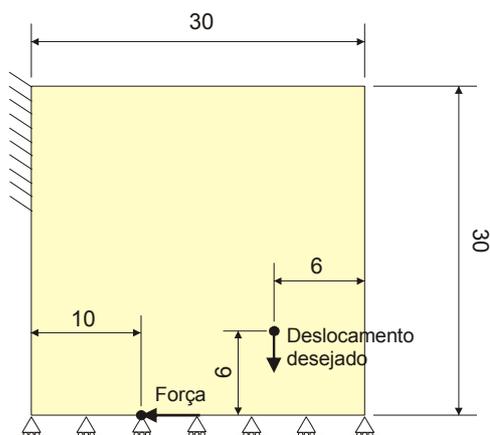


Figura 3.21: Mecanismo de agarrar

As Figs. 3.22 e 3.23 apresentam a discretização do domínio e as topologias ótimas obtidas. A Fig. 3.22 ilustra a malha inicial com 4224 elementos e 2203 nós e a topologia ótima parcial. Na Fig. 3.23 a malha é refinada com 9190 elementos e 4690 nós. A quantidade de material foi fixada em 20 %.

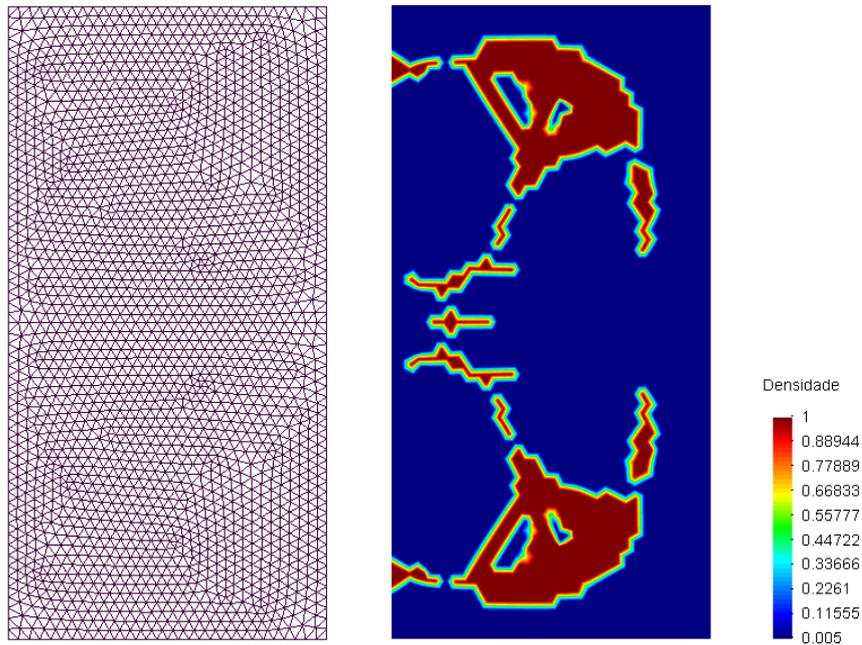


Figura 3.22: Malha inicial com 4224 elementos e 2203 nós e topologia ótima parcial

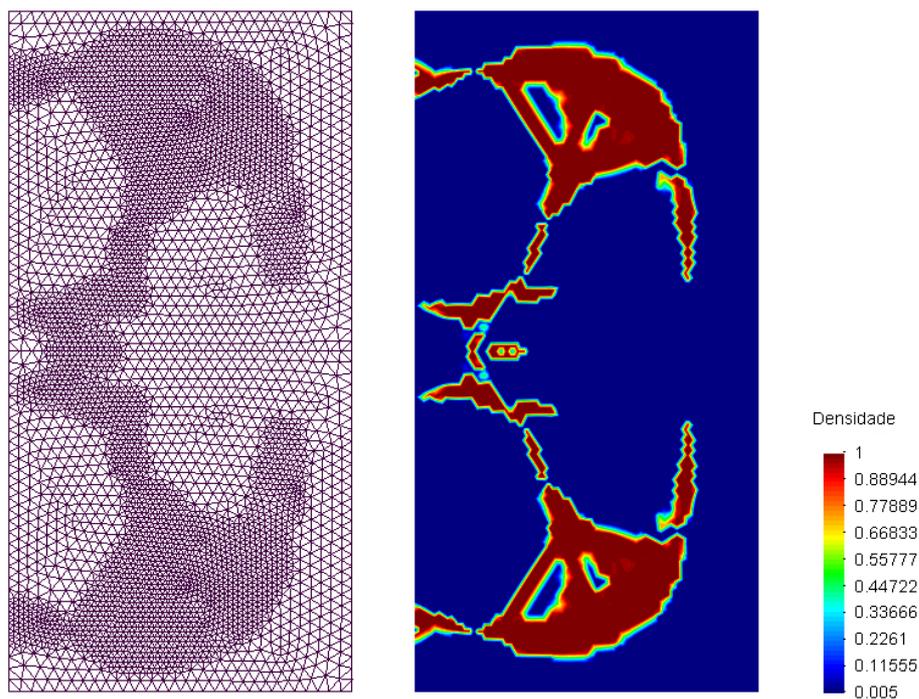


Figura 3.23: Malha final com 9119 elementos e 4690 nós e topologia ótima

As Figs. 3.24 e 3.25 apresentam as topologias ótimas para o problema restringindo a quantidade de material em 30 %. A Fig. 3.24 corresponde a malha inicial 4224 elementos e 2203 nós e a Fig. 3.25 corresponde a malha refinada com 10174 elementos e 5196 nós e a topologia ótima final.

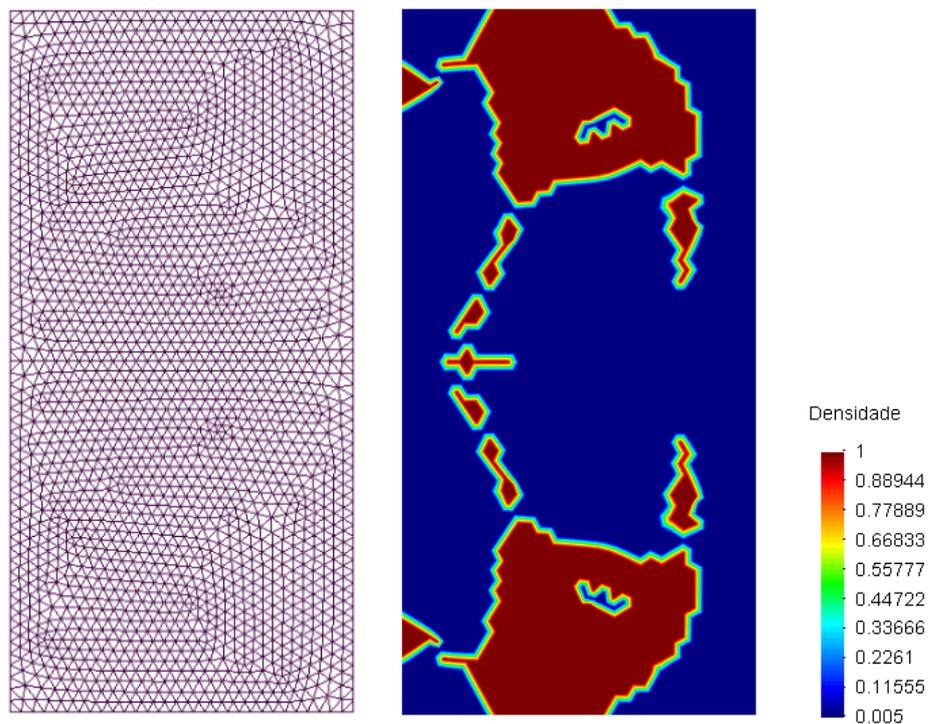


Figura 3.24: Malha e topologia inicial com restrição de material de 30%

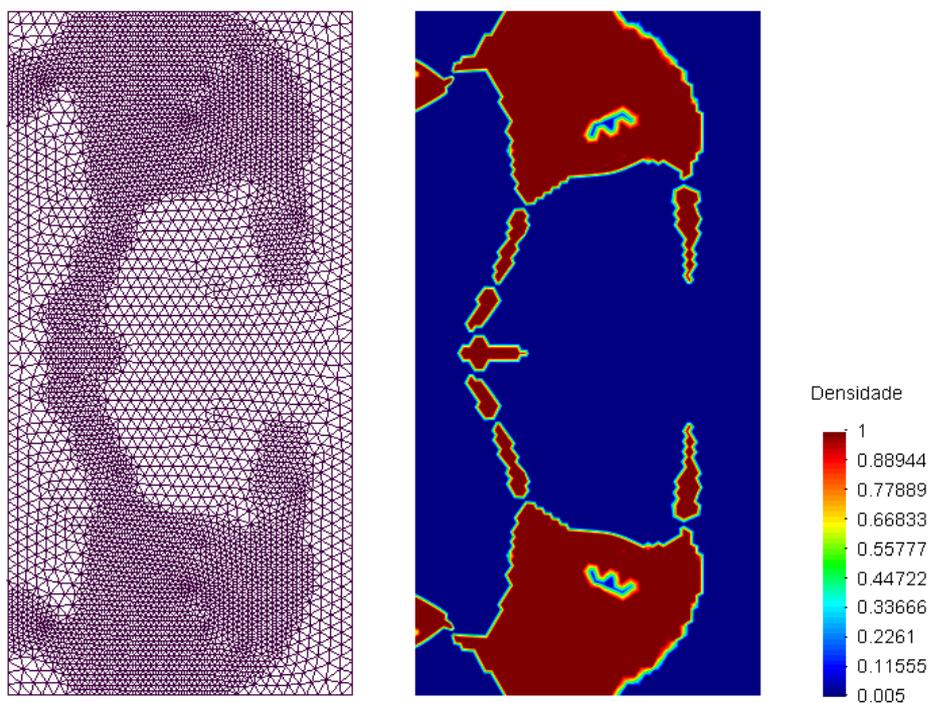


Figura 3.25: Malha refinada com 10174 elementos e 5196 nós e topologia final com restrição de quantidade de material de 30 %.

A utilização de outro algoritmo de otimização permite encontrar uma topologia diferente para este mecanismo. Isto ocorre porque cada algoritmo de otimização possui uma

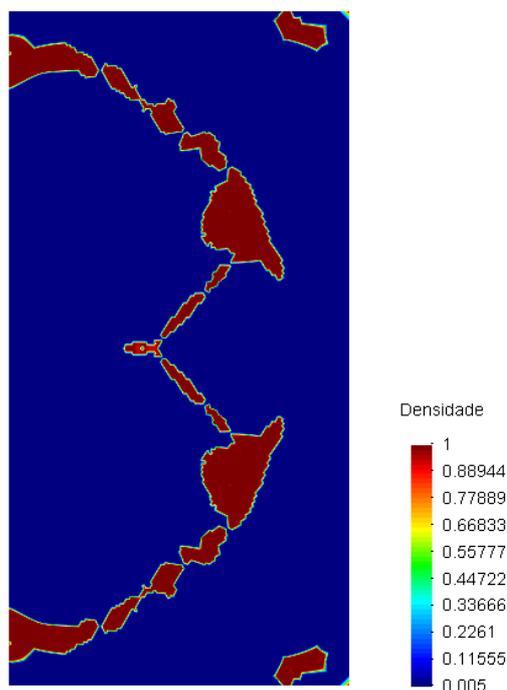


Figura 3.26: Topologia obtida utilizando outro algoritmo de otimização

direção de descida diferente e como este tipo de problema possui muitos mínimos locais, a solução pode convergir para diferentes soluções. Na Fig. 3.26 é apresentada outra topologia ótima para o mecanismo proposto, agora utilizando o algoritmo de otimização de regiões de confiança de Martinez (2002). A restrição de material foi de 20 %. No resultado observa-se uma distribuição indesejada de material nos cantos à direita do domínio de projeto. Este fato talvez tenha ocorrido devido à uma convergência prematura do algoritmo de otimização. Os algoritmos de otimização, em geral, também possuem alguns parâmetros que precisam ser adequadamente calibrados. Neste trabalho, no entanto, não foi dada ênfase a este item, pois isto exigiria um estudo mais profundo de cada algoritmo.

3.6 Exemplo 4 : Mecanismo tipo alicate

O problema proposto é similar ao exemplo de SIGMUND (1997). A Fig. 3.27 apresenta o domínio inicial do projeto de um alicate flexível. Como o mecanismo proposto é simétrico, apenas metade do domínio é discretizada. A quantidade de material é fixada em 20 %.

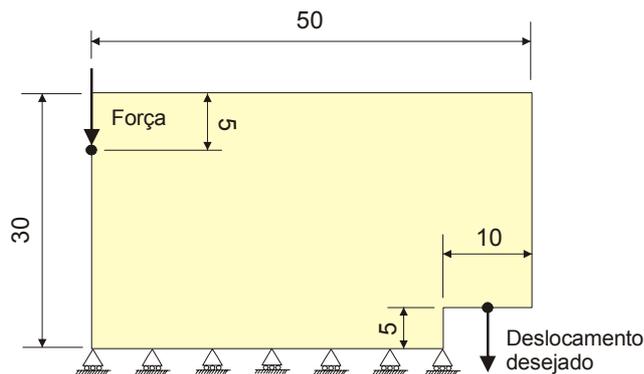


Figura 3.27: Domínio inicial do projeto do alicate flexível

As Figs. 3.28, 3.29 e 3.30 apresentam a sequência de malhas e as topologias ótimas associadas ao problema proposto na Fig. 3.27. A malha inicial, com 4702 elementos e 2452 nós, e a topologia ótima associada estão ilustradas na Fig. 3.28. A malha refinada, referente ao primeiro nível de refino, com 10830 elementos e 5530 nós e a topologia ótima obtida estão ilustradas na Fig. 3.29. A malha refinada final, correspondente ao segundo nível de refino, com 29530 elementos e 14898 nós, e a topologia ótima final estão ilustradas na Fig. 3.30. Observa-se na Fig. 3.30 que não houve convergência no processo de otimização e a topologia obtida ainda apresenta regiões com densidade intermediária. Isto ocorreu porque houve falta de memória virtual do computador e o processo de otimização teve que ser interrompido prematuramente.

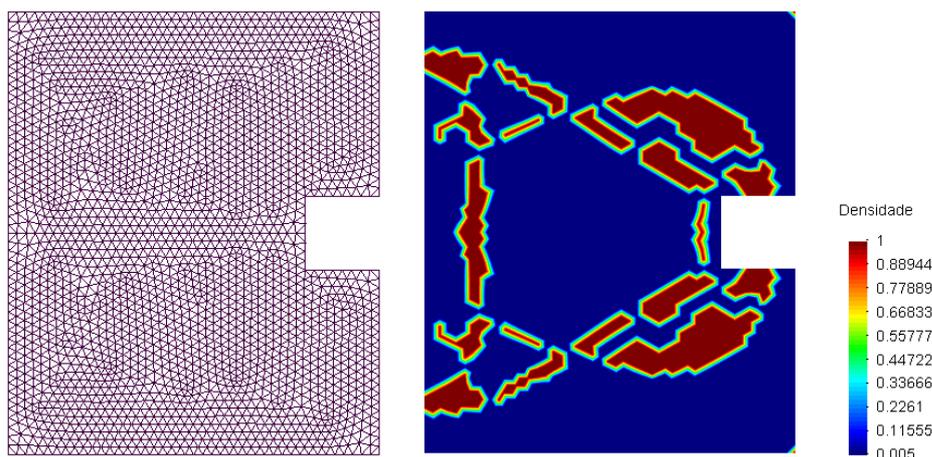


Figura 3.28: Malha inicial com 4702 elementos e 2452 nós e topologia ótima parcial

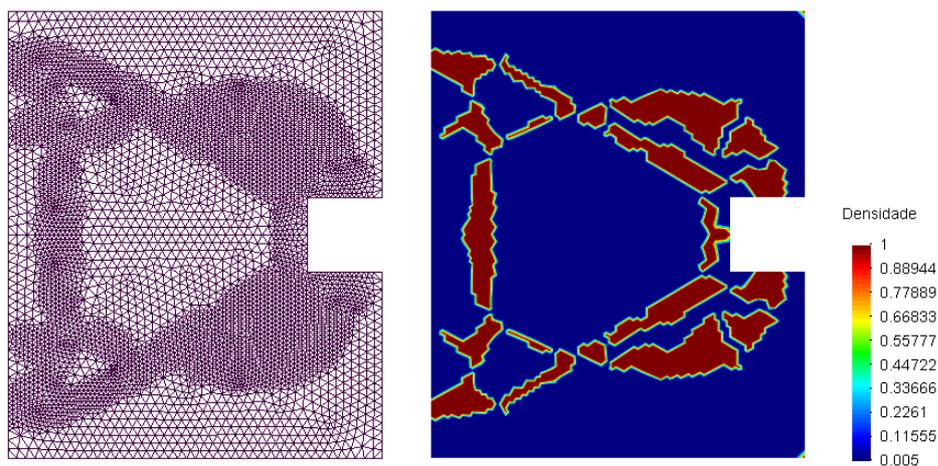


Figura 3.29: Malha refinada com 10830 elementos e 5530 nós e topologia ótima parcial.

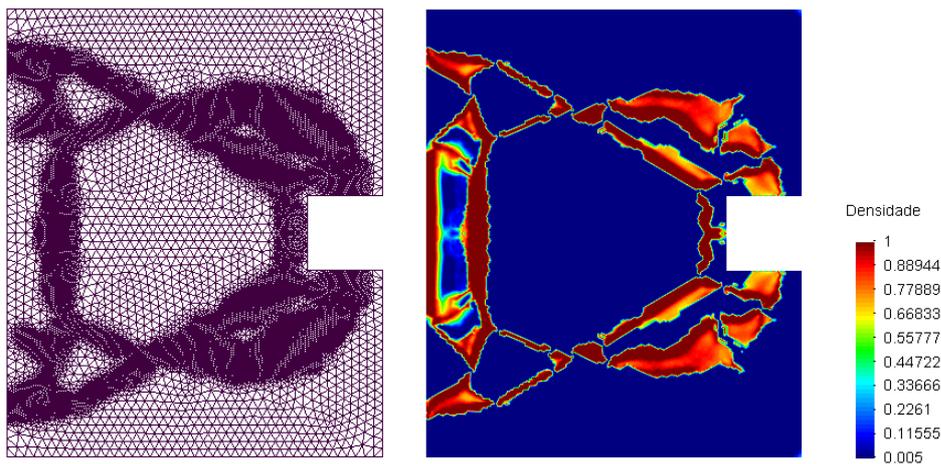


Figura 3.30: Malha refinada com 29530 elementos e 14898 nós e topologia ótima obtida

A Fig. 3.31 apresenta outras possibilidades de solução para o problema, utilizando diferentes algoritmos de otimização. Na Fig. 3.31 à esquerda mostra-se uma topologia obtida com o algoritmo de Assíntotas Móveis, ver Svanberg (1987), e à direita, a topologia obtida com o algoritmo de regiões de confiança, ver Martínez (1995). O ponto de aplicação da força foi alterado para o canto superior esquerdo.

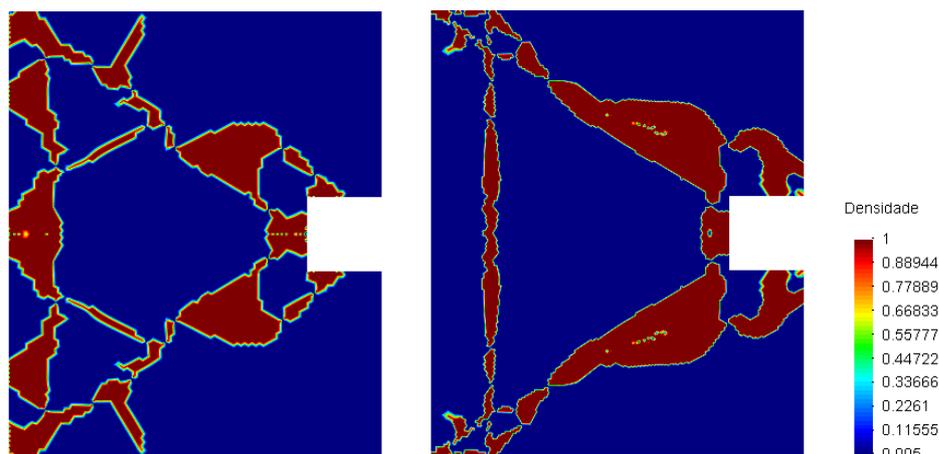


Figura 3.31: Topologias ótimas obtidas utilizando outros algoritmos de otimização: o MMA à esquerda e o de região de confiança à direita.

A Tabela 5.1 mostra os dados obtidos nos quatro exemplos de mecanismos. Em todos os exemplos, foram empregados os valores de força aplicada $F_{in} = 8000\text{ N}$ e de rigidez de mola $k_s = 100\text{ N/mm}$. O valor da força de resposta F_s é obtido multiplicando-se o deslocamento $|\Delta_S|$ pela rigidez da mola.

Tabela 5.1

Dados obtidos nos exemplos de mecanismos

Mecanismos	F_s [N]	$ \Delta_{in} $ [mm]	$ \Delta_S $ [mm]	$ \Delta_{in} : \Delta_S $
Inversor	20	0,16	0,20	4 : 5
Esmague (20%)	37	0,45	0,37	9 : 7
Esmague (30%)	27	0,33	0,27	1 : 1
Agarre (20%)	21	0,82	0,21	8 : 2
Agarre (30%)	22	0,79	0,22	8 : 2
Alicate	8	0,42	0,08	5 : 1

3.7 Conclusões

Uma estratégia de refino h -adaptativo da malha foi empregada a cada solução ótima de leiaute do problema de otimização, refinando os elementos materiais, com densidade ρ satisfazendo $0,5 \leq \rho \leq \rho^{\text{sup}}$, e elementos vazios que possuem pelo menos um nó pertencente ao contorno material.

As principais vantagens do refino h -adaptativo da malha são: obtenção de uma maior definição do contorno material, redução do número de variáveis de projeto e a diminuição do erro da solução da equação de estado.

A formulação adotada para o projeto de mecanismos flexíveis sujeitos a restrições de quantidade de material possibilitou a geração de leiautes ótimos consistentes com os projetos desejados. Os testes realizados indicam que o problema de otimização apresenta muitos mínimos locais, o que significa que as topologias ótimas podem variar de acordo com as estimativas iniciais das variáveis de projeto.

O algoritmo foi mais bem comportado em termos de convergência quando as restrições de gradiente foram desativadas. Os leiautes ótimos com restrição de gradientes apresentaram de um modo geral, muitas regiões de densidades intermediárias e dificuldades de convergência.

As soluções obtidas mostraram uma certa sensibilidade na variação do parâmetro de penalidade da função Lagrangeano Aumentado. Os testes demonstraram que a inclusão de restrições adicionais à formulação pode ser benéfica para a robustez do procedimento. A formulação que incorpora restrições locais de tensões de fadiga, como será visto no próximo capítulo, mostrou-se mais robusta em termos de variações das estimativas iniciais das variáveis de projeto e do parâmetro de penalidade.

A otimização topológica de mecanismos flexíveis combinada com uma estratégia de refino h -adaptativo indica uma direção promissora de pesquisa, capaz de resolver os problemas de otimização topológica de um modo efetivo e gerar topologias com um contorno bem definido.

Capítulo 4

Restrições de Fadiga em Mecanismos Flexíveis

Neste capítulo estuda-se a incorporação de restrições locais de tensão no problema de otimização topológica. Alguns conceitos básicos de fadiga são tratados. O capítulo também aborda como será realizada a incorporação de restrições de fadiga no problema de projeto de mecanismos flexíveis. O critério de falha por fadiga adotado neste trabalho utiliza o diagrama de Goodman Modificado.

De modo a impor adequadamente as restrições locais, propõe-se uma técnica denominada de *patches* nodais adjuntos, na qual as regiões onde a tensão é avaliada são compostas por conjuntos de elementos adjuntos aos nós. O emprego desta técnica reduz consideravelmente o número de restrições do problema de otimização, viabilizando computacionalmente o procedimento.

4.1 Tensão em Otimização Topológica

A imposição de restrições de tensão nos projetos de otimização topológica é um tópico bastante importante na perspectiva da engenharia. Basicamente, esta questão envolve duas dificuldades principais, conforme Yang & Chen (1996):

- a tensão é uma quantidade local e, portanto, um grande número de restrições deve ser considerado. Para assegurar uma aproximação adequada, estas restrições devem ser avaliadas em uma série de pontos discretos, cuja distribuição precisa ser densa o suficiente, de forma a minimizar a possibilidade de violação da restrição entre quaisquer dois pontos avaliados;
- a tensão é altamente não-linear com respeito às variáveis de projeto. Isto significa que devem ser utilizados algoritmos de programação matemática muito robustos.

Com o aumento da complexidade do algoritmo de otimização e da análise de sensibilidade, o custo computacional para a aplicação do método de otimização topológica, que

já envolve um número elevado de variáveis de projeto, é aumentado significativamente.

4.2 Um critério de tensão para o modelo SIMP

Para a formulação 0-1 do problema de projeto topológico, uma restrição de tensão é bem definida, mas quando um material de densidade intermediária é introduzido a forma da restrição de tensão não é dada a priori.

Na abordagem SIMP, a parametrização da rigidez é da forma:

$$E(\rho) = \rho^\eta E^0 \quad (4.1)$$

onde ρ é um parâmetro de densidade e η é um expoente dado maior do que 1. Interpretando ρ como uma densidade, o volume é calculado como $\int \rho d\Omega$. Esta abordagem visa atingir um projeto que consista apenas de sólidos e vazios no nível macroscópico. Para que isto ocorra, a Eq. 4.1 penaliza a rigidez nas densidades intermediárias, tornando "antieconômico" a presença de densidades intermediárias e forçando o algoritmo de otimização a gerar apenas projetos constituídos de branco-preto, onde as propriedades do material são propriamente modeladas.

Um critério de tensão para o modelo SIMP deve ser tão simples quanto o possível, tal como a relação entre a densidade e a rigidez, de forma a simplificar a implementação numérica. A isotropia das propriedades de rigidez devem ser extendidas para o modelo de tensão. Além disto, o critério deve ter considerações microestruturais consistentes para assegurar uma coerência física. Isto leva a aplicar uma restrição de tensão para o modelo SIMP que é expressa como uma restrição da tensão equivalente de Von Mises σ_{VM} :

$$\sigma_{VM} \leq \rho^\eta \sigma_1 \text{ se } \rho > 0 \quad (4.2)$$

Esta restrição reflete a atenuação de força de um meio poroso que surge quando uma tensão média está distribuída na microestrutura local, o que significa que as tensões locais permanecem finitas e não nulas para as densidades zero. Isto resulta na redução do domínio de força por um fator ρ^η . Note que os mesmos expoentes são utilizados para a interpolação de rigidez e a restrição de tensão. Escolher outro expoente não é fisicamente consistente e usando um expoente menor que η pode, por exemplo, levar para uma remoção artificial de material (Duysinx & Bendsoe, 1998).

O problema de otimização com restrição de tensão clássico consiste em encontrar a estrutura de peso mínimo que satisfaça a restrição de tensão e que esteja em equilíbrio elástico com as forças externas, ou seja:

$$\begin{aligned} & \min_{\rho} \sum_{e=1}^N v_e \rho_e \\ \text{sujeito a:} \quad & \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}, \\ & (\sigma_e)_{VM} \leq \rho_e^\eta \sigma_1 \text{ se } \rho > 0, \quad 0 < \rho_{\min} \leq \rho_e \leq 1, \quad e = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde a tensão é, por exemplo, calculada no nó central dos elementos individuais da malha de FEM.

4.3 Aspectos da solução

4.3.1 Restrição de tensão local

A otimização topológica com restrição de tensão está sujeita ao fenômeno de "singularidade", ver Kirsch (1990). Este fenômeno foi identificado em problemas de treliças e surge de uma degeneração ou irregularidade do espaço de projeto. A região factível do espaço de projeto contém apêndices degenerados onde o algoritmo de otimização não consegue atingir o ótimo sem violar a restrição de tensão. A origem do fenômeno foi discutida por Cheng e Jiang (1992). Regiões de baixa densidade permanecem às vezes altamente deformadas. Quando a densidade decresce para zero nestas regiões, o limite do estado de tensão na microestrutura tende para um valor não nulo e permanece exatamente maior que o limite de tensão. Portanto, o procedimento de otimização não consegue remover o material nesta região sem violar a restrição de tensão. O paradoxo é que se o material fosse totalmente removido, a restrição de tensão obviamente não estaria ativa.

Uma abordagem para contornar esta dificuldade é reformular o problema como uma sequência de problemas com propriedades mais atraentes, cujas soluções possam convergir para o projeto real. Primeiro, destaca-se que em um problema de projeto topológico, a restrição de tensão pode apenas ser imposta se o material está presente. Para eliminar a condição $\rho > 0$ da restrição, pode-se considerar uma formulação modificada:

$$\rho \left(\frac{\sigma_{VM}}{\rho^\eta \sigma_1} - 1 \right) \leq 0 \quad (4.4)$$

Para barras em uma treliça, isto seria equivalente a considerar forças ao invés de tensões. Infelizmente, esta reformulação não altera os problemas com respeito a qualificação da restrição. Uma possibilidade é usar uma técnica de perturbação das restrições de tensão, denominada relaxação- ϵ (Cheng & Guo, 1997), que resulta em uma relaxação dos limites de tensão nas regiões de baixa densidade.

$$\rho \left(\frac{\sigma_{VM}}{\rho^\eta \sigma_1} - 1 \right) \leq \epsilon(1 - \rho), \quad \epsilon^2 = \rho_{\min} \leq \rho \quad (4.5)$$

onde ϵ é dado. Para cada $\epsilon > 0$, o problema ϵ -relaxado com as restrições é caracterizado por um espaço de projeto não tanto degenerado, e o fator $(1 - \rho)$ em ϵ garante que a restrição de tensão real está imposta para $\rho = 1$. Desta forma, torna-se possível atingir um ótimo local com algoritmos de otimização baseados nas condições de Karush-Kuhn-Tucker. Se é possível encontrar o ótimo global ρ_ϵ^* , então para $\epsilon \rightarrow 0$, a sequência de domínios viáveis e suas soluções ótimas $\{\rho_\epsilon^*\}$ converge continuamente em direção ao problema degenerado original e sua solução ótima associada.

O procedimento de solução consiste agora em resolver uma seqüência de problemas de otimização, com valores decrescentes do parâmetro ϵ , de forma similar ao que é feito com as funções penalidade e barreira. Stolpe & Svanberg (2001) mostraram que o procedimento pode falhar se o problema apresenta muitos mínimos locais para os problemas relaxados.

4.3.2 Restrições de tensão integradas

Em Duysinx & Bendsoe (1998) a tensão é tratada como uma restrição global, isto é, para cada elemento finito. Esta formulação oferece um controle robusto do estado de tensão, mas também aumenta drasticamente o tamanho do problema de otimização e, conseqüentemente, o seu custo computacional.

Uma das soluções para contornar este problema é transformar primeiramente as tensões locais para uma função de tensão global. Desta forma, a medida de tensão global é então tratada como uma única restrição no processo de otimização. Este procedimento permite a redução do custo computacional para calcular as sensibilidades das tensões dos elementos, o que é importante devido ao grande número de variáveis de projeto e restrições. A desvantagem é que é difícil encontrar uma função geral e robusta que pode ser aplicada em todos os casos para redução de tensão.

Yang & Chen (1996) investigam duas funções de tensão global propostas: a função de Kreisselmeier-Steinhauser e a função de Park e Kikuchi (Park, 1995). Em Duysinx & Sigmund (1998) são analisadas as medidas de média- p e de norma- p . Observa-se que outra desvantagem de se utilizar uma medida global é o controle fraco do critério de tensão local.

No problema de otimização descrito na seção anterior, a restrição de tensão efetiva com relaxação, definida pela Eq. 4.5, deve ser satisfeita para todo $x \in \Omega$, o que representa uma restrição paramétrica. Um método efetivo de trabalhar com restrições paramétricas consiste na relaxação da condição pontual (critério local) através da consideração de uma restrição integrada, i.e. da utilização de um critério global. A proposta de Costa Jr & Alves (2003) para o critério global é:

$$\left\{ \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \left\langle \rho \left(\frac{\sigma_{(eq)}^*(\rho)}{\sigma_y} - 1 \right) - \epsilon(1 - \rho) \right\rangle^p d\Omega \right\}^{\frac{1}{p}} \leq 0 \quad (4.6)$$

onde é definido que $\langle f(\mathbf{x}) \rangle = \max\{0, f(\mathbf{x})\}$, representando a parte positiva de $f(\mathbf{x})$. A

tensão $\sigma_{(eq)}^*(\rho)$ é a tensão efetiva no modelo SIMP, e será definida no próximo capítulo.

A medida global definida em 4.6 é denominada média- p integral. No caso de $p \rightarrow \infty$, a restrição média- p aproxima, no limite, a restrição pontual. Entretanto, quando $p \rightarrow \infty$ o problema torna-se mal condicionado, fazendo com que o critério de falha integral tenda a ser influenciado por apenas um valor de pico do campo de tensão, enquanto em outros pontos a tensão é ignorada. Isto pode ocasionar um comportamento oscilatório do algoritmo de otimização, possibilitando a falha da convergência do processo de otimização. Daí, a escolha de p deve resultar de um compromisso de resultados numéricos.

4.4 Prevenção de Falha

Um dos mais críticos aspectos do projeto de mecanismos flexíveis é garantir que o mecanismo atue da maneira especificada e sem a ocorrência de falhas. Falha estática e falha por fadiga são as falhas mais comuns que ocorrem em mecanismos flexíveis. Neste trabalho lidamos com o projeto de mecanismos flexíveis sujeitos a carregamento proporcional. O objetivo da prevenção de falha é evitar modos de falha por fadiga. A seguir faremos uma breve revisão de alguns conceitos relacionados à teorias de falha e fadiga. Para maiores detalhes recomenda-se a consulta de livros especializados como Dowling (1999), Collins (1981) ou Rosa (2002).

Diferentes teorias de falha são utilizadas dependendo do tipo de carregamento (estático ou flutuante), o tipo de material (dúctil ou frágil) e a precisão desejada (estimativa conservativa ou uma média de falha). As duas teorias de falha mais comuns para materiais dúcteis sob carregamento estático são a *teoria da máxima tensão de cisalhamento* (critério de Tresca) e a *teoria da máxima energia de distorção* (critério de von Mises).

A *teoria da máxima tensão de cisalhamento* estabelece que um elemento estrutural é considerado seguro enquanto a tensão máxima de cisalhamento não exceder a tensão de cisalhamento correspondente a um corpo de prova do mesmo material, que escoar em ensaio de tração. As tensões máximas de cisalhamento são dadas pelas diferenças entre as tensões principais¹. De acordo com este critério, a falha não ocorre para:

$$\sigma_{eq}^{tresca} < \sigma_Y \quad (4.7)$$

onde $\sigma_{eq}^{tresca} = \max \{ |\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3| \}$ e σ_Y é a tensão de escoamento.

A *teoria da máxima energia de distorção* utiliza uma tensão efetiva para determinar a falha. Este critério é mais adequado para materiais dúcteis e estabelece que o material iniciará o escoamento devido a plastificação quando a energia de deformação associada à distorção do elemento de volume atingir um valor limite. A tensão efetiva, é denominada

¹A magnitude das tensões em um ponto de algum componente variam conforme a direção e são maiores em certos planos. As maiores tensões em um dado local são denominadas tensões principais, e os planos onde estas tensões agem são denominados planos principais (Dowling, 1987).

tensão de von Mises. Na condição do estado plano de tensão bidimensional, a medida da tensão de von Mises efetiva é dada por:

$$\sigma_{eq}^{vm} = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + 3\sigma_{xy}^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)^{\frac{1}{2}} \quad (4.8)$$

onde σ_i , $i = 1..2$, denotam as tensões principais. Observa-se que $\sigma_3 = 0$.

Para o caso tridimensional, temos:

$$\sigma_{eq}^{vm} = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (4.9)$$

Se σ representa o tensor tensão, então:

$$\begin{aligned} I_\sigma &= tr[\sigma] \\ II_\sigma &= \frac{1}{2} (\sigma \cdot \sigma - I_\sigma^2) \\ III_\sigma &= \det(\sigma) \end{aligned} \quad (4.10)$$

representam os invariantes de tensão. Além disto, por definição σ^D denota o tensor tensão deviatórico, dado por:

$$\sigma^D = \sigma - \frac{1}{3} tr[\sigma] I \quad (4.11)$$

Pode-se definir a medida de tensão equivalente de von Mises por:

$$\sigma_{eq}^{vm} = \sqrt{3II_{\sigma^D}} \quad (4.12)$$

com II_{σ^D} denotando o segundo invariante do tensor tensão deviatórico, ou seja:

$$II_{\sigma^D} = \frac{1}{2} (\sigma^D \cdot \sigma^D - I_{\sigma^D}^2) \quad (4.13)$$

No entanto, como, por definição, $I_{\sigma^D} = 0$, temos:

$$II_{\sigma^D} = \frac{1}{2} \sigma^D \cdot \sigma^D \quad (4.14)$$

Outras medidas de tensão podem ser definidas. Considere, por exemplo, o plano octaédrico, definido como o plano cuja normal forma ângulos iguais com as direções das três tensões principais, como mostra a Fig. 4.1.

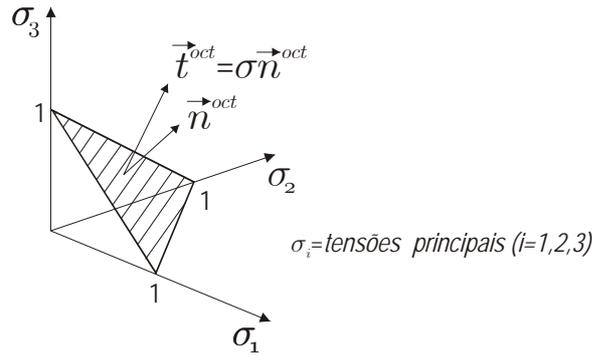


Figura 4.1: Plano octaédrico

Neste plano é possível definir:

- A tensão normal octaédrica:

$$\sigma_n^{oct} = \vec{t}^{oct} \cdot \vec{n}^{oct} \quad (4.15)$$

onde \vec{n}^{oct} denota a normal ao plano octaédrico e \vec{t}^{oct} o vetor tração no ponto,

$$\vec{t}^{oct} = \sigma \vec{n}^{oct}. \quad (4.16)$$

Então, σ_n^{oct} é a componente normal do vetor tração no plano octaédrico. A tensão normal octaédrica é dada por:

$$\sigma_n^{oct} = \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma) \quad (4.17)$$

- A tensão de cisalhamento octaédrica:

$$\tau^{oct} = \left\| \vec{t}^{oct} - \sigma_n^{oct} \vec{n}^{oct} \right\|. \quad (4.18)$$

Então, τ^{oct} representa o módulo da componente tangencial do vetor tração octaédrico no plano octaédrico. A tensão de cisalhamento octaédrica pode ser expressa como $\tau^{oct} = \sqrt{\frac{2}{3} II_{\sigma^D}}$.

A relação entre a tensão de cisalhamento octaédrica e a tensão de von Mises é dada por:

$$\frac{\sigma_{eq}^{vm}}{\sqrt{3}} = \sqrt{II_{\sigma^D}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \tau^{oct} \quad (4.19)$$

ou seja:

$$\sigma_{eq}^{vm} = \frac{3\tau^{oct}}{\sqrt{2}} \quad (4.20)$$

ou

$$\tau^{oct} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_{eq}^{vm}. \quad (4.21)$$

4.4.1 Falha por fadiga

Para algumas estruturas flexíveis o movimento desejado ocorre somente uma vez e a falha estática pode ser suficiente para análise. De um modo geral, deseja-se que o mecanismo seja capaz de realizar o movimento muitas vezes e os requisitos de projeto podem ser, portanto, muitos milhões de ciclos ou vida infinita. Este carregamento repetido causa tensões flutuantes nos membros e pode resultar em falha por fadiga.

A fadiga dos materiais é um processo de acúmulo de dano e posterior falha devido à carregamentos cíclicos. O material sofre uma redução gradual, mas não prontamente observável, da capacidade de resistir à tensão, mesmo com tensões atuantes na estrutura inferiores ao limite de resistência do material. No nível microscópico, ocorre uma ruptura lenta do material que é consequência do avanço quase infinitesimal de fissuras que se formam em seu interior. Este dano microscópico dá origem à trincas ou outro dano macroscópico que levam a falha do componente. A ruptura final é, em geral, brusca e apresenta características macroscópicas de uma fratura frágil.

A fadiga tem sido objeto de estudo em vários países, principalmente a partir da metade do Século XIX, como uma resposta a falha repentina de componentes tais como eixos de vagões das estradas de ferro, arreios, vigas e barotes de pontes. Destacam-se os trabalhos pioneiros do alemão August Wöehler, a partir de 1850, que desenvolveu estratégias para evitar a falha por fadiga, e testou o comportamento de vários materiais sujeitos à carregamento axial, de flexão e de torção.

Há basicamente três abordagens de análise e projeto para fadiga. Uma abordagem bastante tradicional baseia-se na análise de tensões nominais nas regiões críticas dos componentes mecânicos em estudo ("*stress-based approach*"). A tensão nominal que pode suportar um carregamento cíclico é determinada considerando tensões médias e posteriormente fazendo-se ajustes devido a fatores tais como concentração de tensões, acabamento superficial, temperatura, etc. Outra abordagem faz uso das deformações e envolve uma análise mais detalhada dos escoamentos localizados que podem ocorrer durante o carregamento cíclico ("*strain-based approach*"). Finalmente, uma terceira abordagem trata especificamente do crescimento de trincas utilizando métodos de mecânica da fratura ("*fracture mechanics approach*").

Quando um componente mecânico ou um corpo de prova está sujeito a um carregamento cíclico suficientemente severo, uma trinca de fadiga ou outro dano tende a se desenvolver levando a uma posterior falha do material em um determinado número de ciclos. A medida que o valor do carregamento cíclico é aumentado, a falha do componente irá ocorrer em um número de ciclos menor. Esta idéia é utilizada para pesquisar a resistência a carregamentos cíclicos dos materiais. Os primeiros ensaios de fadiga foram

feitos com corpos de prova de seção circular, submetidos a esforços de flexão e postos a girar. O número de rotações do corpo de prova até a ruptura fornece, então, ao número de ciclos correspondente a cada nível de tensão cíclica atuante. A tensão varia senoidalmente com o tempo devido a rotação do corpo de prova, embora a carga seja constante, ver Fig. 4.2. Os ensaios são repetidos para vários corpos de prova sujeitos a diferentes níveis de carregamento cíclico e os dados podem ser convenientemente plotadas em uma *curva vida-tensão* de Wöhler, ou curva $S - N$, onde a tensão alternada ou nominal, σ_a ou S_a , é comumente plotada versus o número de ciclos até a falha, N , como ilustra a Fig. 4.3. O número de ciclos é usualmente plotado em escala logarítmica, pois a ordem de magnitude de N muda muito conforme o nível de tensão.

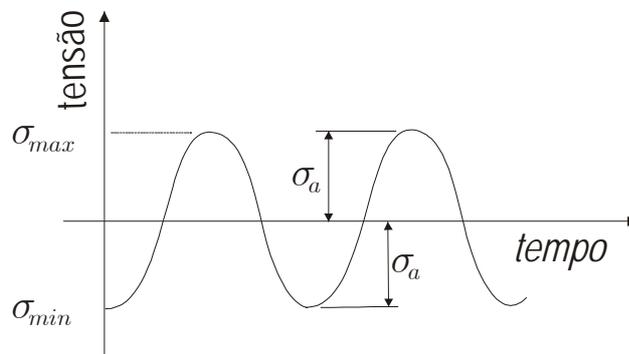


Figura 4.2: Variação da tensão em um ensaio de flexão rotativa

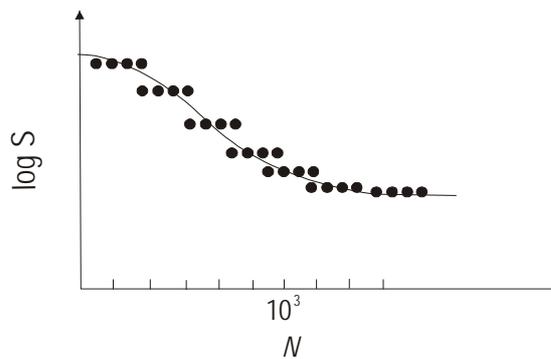


Figura 4.3: Diagrama de Wöhler

Os materiais podem apresentar, de um modo geral, dois tipos de comportamento:

- Materiais tipo I, onde a tensão decresce continuamente com a vida. Neste caso, a vida de fadiga é sempre finita, ou seja, a falha sempre irá ocorrer, embora isto possa acontecer em um número de ciclos elevado.
- Materiais tipo II, os quais a tensão diminui até um certo valor, permanecendo constante dentro de um patamar, para vidas superiores a 10^6 ou 10^7 ciclos.

No caso dos materiais do tipo II, como ilustra a Fig. 4.3, se a tensão está abaixo de um certo nível, a falha não irá ocorrer qualquer que seja o número de ciclos. Este ponto é chamado tensão limite de fadiga do material. Incluem-se neste grupo, por exemplo, as ligas ferrosas e as ligas de titânio. Nos materiais do tipo I, como por exemplo, ligas de alumínio e magnésio, teremos sempre uma vida finita. Portanto, para estes materiais não se define uma tensão limite de fadiga, mas sim pode-se determinar a tensão alternante correspondente a um determinado número de ciclos, denominada, tensão de resistência à fadiga, S_f .

O modelo $S - N$ de tensão-vida é o mais direto e mais comumente utilizado no projeto de componentes mecânicos. A teoria é mais apropriada para casos onde os componentes em análise estão submetidas à tensões flutuantes conhecidas e consistentes. Muitos componentes de máquinas se encaixam nesta categoria porque seu movimento e carregamento são definidos pela cinemática do mecanismo. Pela mesma razão, as tensões nos mecanismos flexíveis são também consistentes e conhecidas.

Para os materiais do tipo II o diagrama $S - N$ é usualmente aproximado, em uma escala $\log - \log$ por linhas retas conforme mostra a Fig. 4.4, para um aço típico.

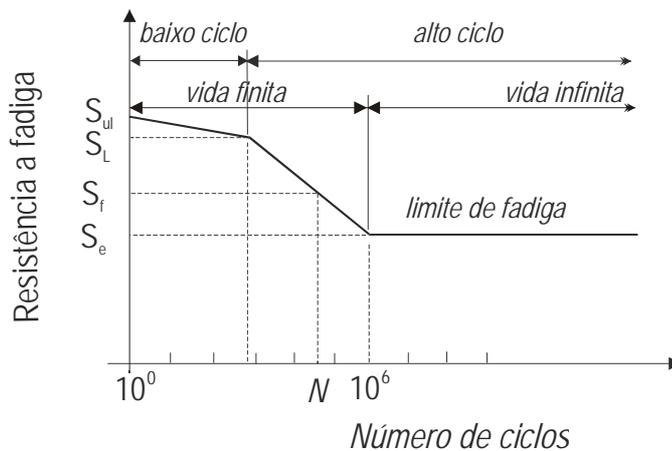


Figura 4.4: Diagrama $S - N$ típico para um aço

A resistência a fadiga, S_f , é a máxima tensão totalmente reversa que um corpo de prova pode suportar para uma vida útil de N ciclos. Há um Joelho no diagrama $S - N$ para muitos materiais na transição entre baixo e alto ciclo de fadiga, próximo a 10^3 ciclos. Alguns materiais, tais como vários aços carbono e aços liga, alguns aços inox, ferro, ligas de molibdênio, ligas de titânio e alguns polímeros, tem um segundo Joelho, correspondente a tensão limite de fadiga, S_e . Se a tensão atuante é mantida abaixo da tensão limite de fadiga, a falha por fadiga não irá ocorrer qualquer que seja o número de ciclos, e o componente terá vida infinita.

O valor de S_L na Fig. 4.4 pode ser aproximado por

$$S_L = c_f \sigma_u \tag{4.22}$$

onde σ_u é a tensão última e

$$c_f = \begin{cases} 0.9, \text{ flexão} \\ 0.75, \text{ carregamento axial} \end{cases} \quad (4.23)$$

Neste trabalho, será considerado $c_f \simeq 0.8$ para todos os casos.

A natureza da região da fadiga de alto ciclo do diagrama $S - N$ depende se o material apresenta ou não uma tensão limite de fadiga. Aqui, novamente, considera-se a categoria dos materiais que apresentam este valor de tensão limite. Neste caso, a porção finita da região de fadiga de alto ciclo é então aproximada na escala log-log do diagrama $S - N$ como uma linha reta do joelho anterior em $(10^3, S_L)$ ao segundo joelho no limite de resistência de $(10^6, S_e)$.

A porção finita da região de alto ciclo é representada por:

$$S_f = a_f N^{b_f} \quad (4.24)$$

onde a_f e b_f são parâmetros da curva correspondentes ao material particular ou componente, que precisam ser encontrados. Estes parâmetros podem ser estimados como:

$$b_f = -\frac{1}{3} \log \left(\frac{c_f \sigma_u}{S_e} \right) \quad (4.25)$$

$$a_f = \frac{(c_f \sigma_u)^2}{S_e} \quad (4.26)$$

Estimando o limite de resistência e a resistência à fadiga

A tensão limite de fadiga é um parâmetro crítico para a estimativa de vida para fadiga. Para alguns materiais esta informação é obtida através de testes desenvolvidos em pequenas amostras polidas submetidas a flexão completamente reversa ou carregamento alternado. Dados obtidos nestes testes com amostras são conhecidos como limite de resistência não corrigido, S'_e , ou resistência a fadiga não corrigido, $S_{f'}$. Na maioria dos casos, estes dados não estão disponíveis e são utilizadas algumas relações empíricas que permitem uma estimativa para os cálculos de projeto. As seguintes aproximações iniciais podem ser utilizadas:

$$\begin{aligned}
 \text{Aços:} \quad S_{e'} &\approx \begin{cases} 0.5S_{ut} & \text{para } S_{ut} < 1400 \text{ MPa} \\ 700 \text{ MPa} & \text{para } S_{ut} \geq 1400 \text{ MPa} \end{cases} \\
 \text{Ferro:} \quad S_{e'} &\approx \begin{cases} 0.4S_{ut} & \text{para } S_{ut} < 400 \text{ MPa} \\ 160 \text{ MPa} & \text{para } S_{ut} \geq 400 \text{ MPa} \end{cases} \\
 \text{Alumínio:} \quad S_{f'5x10^8} &\approx \begin{cases} 0.4S_{ut} & \text{para } S_{ut} < 330 \text{ MPa} \\ 130 \text{ MPa} & \text{para } S_{ut} \geq 330 \text{ MPa} \end{cases} \\
 \text{Ligas de cobre:} \quad S_{f'5x10^8} &\approx \begin{cases} 0.4S_{ut} & \text{para } S_{ut} < 280 \text{ MPa} \\ 100 \text{ MPa} & \text{para } S_{ut} \geq 280 \text{ MPa} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Estes resultados são válidos apenas para os corpos de prova, pois existem vários fatores que alteram a resistência a fadiga do componente real, tais como o acabamento superficial, a concentração de tensões, o tamanho, a temperatura, a geometria, a presença de tensões residuais, entre outros. Estas diferenças entre o corpo de prova e o componente real são corrigidas através do uso de vários fatores obtidos experimentalmente. Neste trabalho, por simplicidade, considera-se $S_e \simeq S'_e$ e $S_{ut} \equiv \sigma_u$ é a tensão última.

Carregamento completamente reverso

A maioria dos dados de fadiga disponíveis são baseados em carregamento completamente reverso. Neste tipo de carregamento assume-se que a tensão alterna-se entre tração e compressão e que o valor da tensão máxima de tração e a tensão máxima de compressão são iguais, como mostra a Fig 4.5.

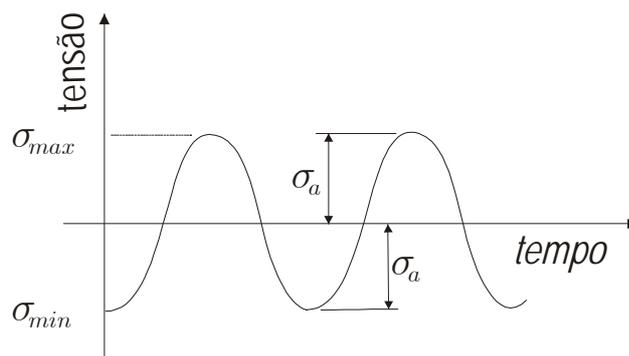


Figura 4.5: Gráfico *tensão* x *tempo* para um carregamento completamente reverso

Tensões flutuantes

Tensões flutuantes que não são completamente reversas são as mais gerais e, de um modo geral, as mais comuns condições de carregamento em mecanismos flexíveis. A Fig. 4.6 mostra duas condições de carregamento que são típicas dadas as restrições mecânicas e

os movimentos os quais os membros flexíveis estão expostos. Estas podem ser expressas em termos de uma tensão média, σ_m , e uma tensão alternada, σ_a . Estas tensões podem ser escritas em termos da tensão máxima σ_{max} , e da tensão mínima, σ_{min} , como:

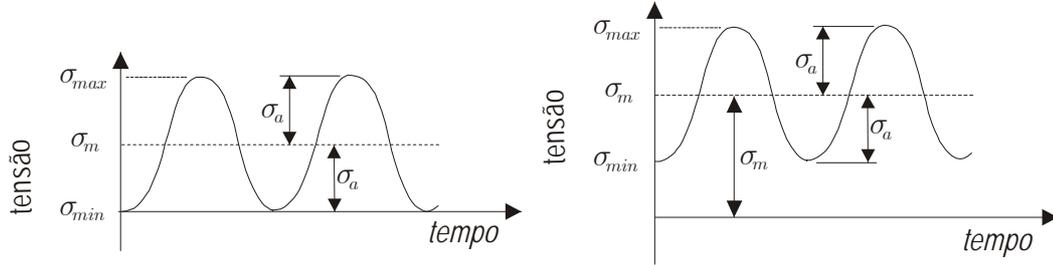


Figura 4.6: Exemplos de condições de carregamento com tensões flutuantes, comuns em mecanismos flexíveis

$$\sigma_m = \frac{1}{2}(\sigma_{max} + \sigma_{min}) \tag{4.28}$$

$$\sigma_a = \frac{1}{2}(\sigma_{max} - \sigma_{min}) \tag{4.29}$$

A presença de uma tensão média, não nula, atuando juntamente com a tensão alternada produz um efeito significativo na diminuição da resistência à fadiga do material. Há vários tipos de diagramas utilizados para representar o efeito das solicitações médias na resistência à fadiga. Um diagrama bastante utilizado devido a sua praticidade é o diagrama $\sigma_a - \sigma_m$, o qual consiste na representação no sistema cartesiano da redução da tensão alternada σ_a com o aumento da tensão média σ_m , para diferentes números de ciclos. Idealmente, todos os dados necessários para a construção do diagrama $\sigma_a - \sigma_m$ devem ser obtidos experimentalmente e seguir a construção das curvas $\sigma - N$ do material e $\sigma - N$ da peça. No entanto, isto geralmente não acontece e são feitas estimativas tanto para as curvas $\sigma - N$ quanto para o diagrama $\sigma_a - \sigma_m$.

A construção do diagrama $\sigma_a - \sigma_m$ envolve inicialmente a determinação de dois pontos extremos. Um ponto é o valor de σ_a que leva a falha para $\sigma_m = 0$, em um dado número N de ciclos, ou seja, é o ponto $(0, \sigma_N)$. Outro ponto é um limite para a tensão média, no qual a componente alternante do carregamento é zero. Neste caso a tensão média corresponde ao valor de tensão máxima para carregamento estático. Este valor limite para a tensão média pode ser a tensão de escoamento do material, a tensão última ou mesmo a tensão real de fratura, dependendo do critério a ser utilizado, ver Fig. 4.7. Em seguida, faz-se uma interpolação, em geral linear, entre estes dois pontos.

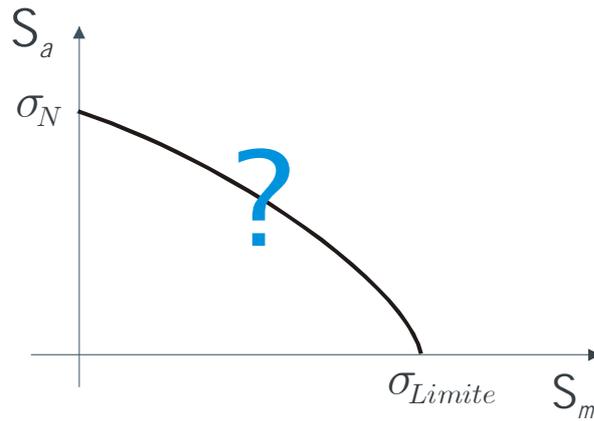


Figura 4.7: Estimativa do diagrama $\sigma_a - \sigma_m$

Várias abordagens estão disponíveis para prever a fadiga em carregamentos flutuantes não completamente reversos. Uma abordagem mais conservativa e comum é o emprego da teoria de Goodman modificada. Nesta abordagem, a tensão equivalente média, S_m , e a tensão equivalente alternada, S_a , satisfazem:

$$\frac{1}{SF} = \begin{cases} \frac{S_a}{S_f} + \frac{S_m}{\sigma_u}, & \text{para } S_m \geq 0 \\ \frac{S_a}{S_f}, & \text{para } S_m < 0 \end{cases} \quad (4.30)$$

onde SF denota o fator de segurança.

Quando S_m é compressiva, assume-se que a falha não ocorre para tensão alternada menor que o limite de resistência e tensão máxima menor que o limite de escoamento. Isto ocorre porque as tensões compressivas tendem a fechar as trincas de fadiga.

A região de segurança, para uma vida de N ciclos, com S_f^N representando o limite de fadiga, corresponde à área colorida da Fig. 4.8.

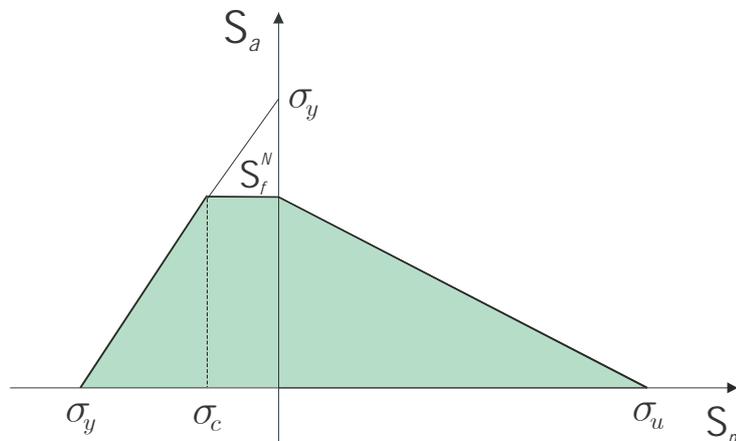


Figura 4.8: Diagrama de Goodman modificado

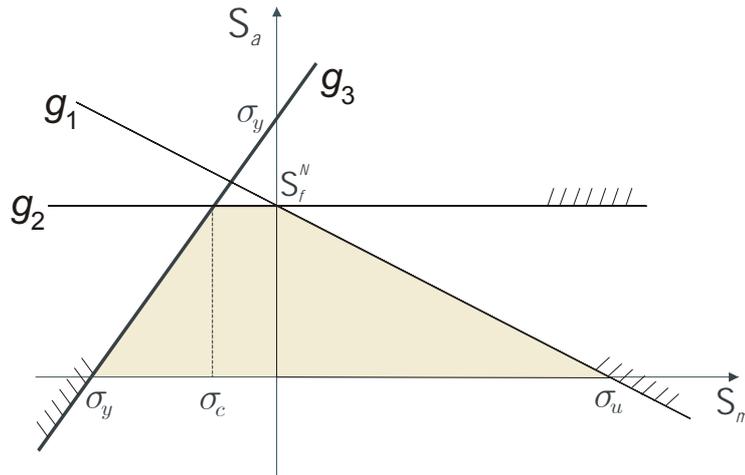


Figura 4.9: Restrições que delimitam a região de segurança no diagrama de Goodman modificado

Aqui, σ_y é a tensão de escoamento e σ_u é a tensão última. A região de segurança pode ser definida pela imposição de três restrições de fadiga, conforme mostra a Fig. 4.9. A tensão alternada equivalente, S_a , apresenta sempre valores positivos, pois corresponde a tensão de Von Mises (método de Sines). As restrições de fadiga g_1 , g_2 e g_3 podem, então, ser escritas como:

$$g_1(S_a, S_m) = \frac{S_a}{S_f^N} + \frac{S_m}{\sigma_u} \leq 1 \quad (4.31)$$

$$g_2(S_a, S_m) = \frac{S_a}{S_f^N} \leq 1 \quad (4.32)$$

$$g_3(S_a, S_m) = \frac{S_a}{\sigma_y} - \frac{S_m}{\sigma_y} \leq 1 \quad (4.33)$$

O valor de σ_c pode ser determinado com a interseção de $g_2(S_a, S_m)$ com $g_3(S_a, S_m)$. Então, equacionando estes termos, obtemos, para $(S_a, S_m) \equiv (S_f^N, \sigma_c)$ que:

$$g_2(S_f^N, \sigma_c) = g_3(\sigma_c, S_f^N) \quad (4.34)$$

ou seja,

$$\frac{S_f^N}{S_f^N} = \frac{S_f^N}{\sigma_y} - \frac{\sigma_c}{\sigma_y} \quad (4.35)$$

Portanto, o valor da tensão σ_c é:

$$\sigma_c = S_f^N - \sigma_y \quad (4.36)$$

4.4.2 Fadiga sob carregamento multiaxial

Os carregamentos cíclicos que causam estados de tensão complexos são comuns em componentes mecânicos e estruturais. Como exemplo, pode-se citar a combinação de torção e flexão em vigas, flexão de placas ou cascas em mais de um eixo, pressão cíclica em tubos e dutos. Cargas constantes que causam tensões médias podem também serem combinadas com cargas cíclicas. Além disto, a complexidade do problema é aumentada quando a aplicação dos carregamentos pode diferir em fase ou frequência ou em ambos. O caso de interesse neste trabalho é o das tensões multiaxiais simples, que ocorre quando as tensões alternantes principais não mudam suas direções relativas às partes tensionadas. Quando as direções mudam, as tensões são denominadas tensões multiaxiais complexas.

Para carregamentos simples duas teorias são comumente utilizadas para fadiga de vida longa e podem ser extendidas para fadiga de baixo ciclo com deformação controlada:

- Método de Sines: fácil implementação;
- Método de Langer: utilizado em alguns códigos.

Neste trabalho será utilizado o método de Sines, ver Dowling (1987) ou Sines (1959).

Método de Sines

O método de Sines (1959) utiliza a tensão cisalhante octaedral alternada, que pode ser representada por:

$$\tau_a^{oct} + kH_m^{oct} \leq C_f^N \quad (4.37)$$

onde C_f^N representa um critério de fadiga, τ_a^{oct} é a tensão cisalhante octaédrica alternada, k é um parâmetro empírico, e H_m^{oct} é a tensão normal octaédrica, a qual é também a tensão hidrostática.

O método de Sines também pode ser aplicado utilizando-se das tensões uniaxiais equivalentes, que são mais práticas e evitam o uso de fatores empíricos. A amplitude das tensões principais, σ_{1a} , σ_{2a} e σ_{3a} , pode ser então utilizada para calcular uma tensão alternada equivalente. Para o estado plano de tensão ($\sigma_3 = 0$) temos:

$$S_a = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_{1a}^2 - \sigma_{1a}\sigma_{2a} + \sigma_{2a}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (4.38)$$

Para a presença de carregamentos constantes (não-cíclicos) assume-se que a variável tensão média de controle é o valor constante da tensão hidrostática. Portanto, a tensão média equivalente pode ser calculada a partir das direções principais. Para o estado plano de tensão, temos:

$$S_m = \sigma_{1m} + \sigma_{2m} \quad (4.39)$$

Estas tensões equivalentes podem ser calculadas para qualquer eixo de coordenadas conveniente, ou seja:

$$S_m = tr(\sigma_m) \quad (4.40)$$

$$S_a = \sigma_{aeq}^{vm} \quad (4.41)$$

onde

$$\sigma_m = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} + \sigma_{\min}) \quad (4.42)$$

é o tensor tensão média e

$$\sigma_a = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) \quad (4.43)$$

é o tensor tensão alternada.

Empregando o diagrama de Goodman modificado, temos:

$$\frac{S_a}{S_f^N} + \frac{S_m}{\sigma_u} \leq 1 \quad (4.44)$$

para $S_m \geq 0$. Neste caso:

$$\frac{\sigma_{aeq}^{vm}}{S_f^N} + \frac{tr(\sigma_m)}{\sigma_u} \leq 1 \quad (4.45)$$

Esta inequação também pode ser reescrita como:

$$\sigma_{aeq}^{vm} + \frac{S_f^N}{\sigma_u} tr(\sigma_m) \leq S_f^N \quad (4.46)$$

ou

$$\sigma_{aeq}^{vm} + m tr(\sigma_m) \leq S_f^N \quad (4.47)$$

onde $m = \frac{S_f^N}{\sigma_u}$ é a inclinação da linha $S_a - S_m$ do diagrama de Goodman. Em termos das tensões principais, temos:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_{a1} - \sigma_{a2})^2 + (\sigma_{a1} - \sigma_{a3})^2 + (\sigma_{a2} - \sigma_{a3})^2]^{\frac{1}{2}} + m(\sigma_{m1} + \sigma_{m2} + \sigma_{m3}) \leq S_f^N \quad (4.48)$$

onde σ_{ai} , $i = 1, 3$ são as tensões principais do tensor tensão alternada, σ_a , e σ_{mi} , $i = 1, 3$ são as tensões principais do tensor tensão média, σ_m .

Da inequação 4.37 obtêm-se:

$$\tau_a^{oct} + k H_m^{oct} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_{aeq}^{vm} + \frac{k}{3} tr(\sigma_m) \leq C_f^N \quad (4.49)$$

ou seja,

$$\sqrt{2}\sigma_{aeq}^{vm} + k \operatorname{tr}(\sigma_m) \leq 3C_f^N \quad (4.50)$$

ou

$$\sigma_{aeq}^{vm} + \frac{k}{\sqrt{2}} \operatorname{tr}(\sigma_m) \leq \frac{3}{\sqrt{2}}C_f^N \quad (4.51)$$

Comparando 4.51 com 4.47 obtemos:

$$k = \sqrt{2}m \quad (4.52)$$

e

$$C_f^N = \frac{\sqrt{2}}{3}S_f^N. \quad (4.53)$$

4.5 Definição do modelo material

Para resolver o problema de otimização topológica utiliza-se a abordagem material, que considera um material poroso caracterizado pela sua densidade relativa. O modelamento das propriedades efetivas do material, nas densidades intermediárias, é baseado no modelo SIMP, veja Bendsoe & Sigmund (1999), Duysinx & Sigmund (1998), Duysinx & Bendsoe (1998). No modelo SIMP, o módulo de Young efetivo é dado, em termos da densidade relativa, pela relação:

$$E(\rho) = \rho^\eta E_o \quad (4.54)$$

onde E_o é o módulo de Young do material base, e η é o parâmetro de penalização. O trabalho considera $\eta = 3$.

A introdução de uma medida de tensão efetiva, que penaliza as regiões de densidade intermediária associadas com o material composto resultante, é necessária para estabelecer um critério de tensão-fadiga para este modelo. Neste trabalho, considera-se a medida de tensão efetiva, proposta por Duysinx & Sigmund (1998) e Duysinx & Bendsoe (1998), a qual é dada por:

$$\sigma^*(\rho) = \frac{\sigma(\rho)}{\rho^\eta} \quad (4.55)$$

A partir da tensão efetiva definida em 4.55, as restrições de tensão-fadiga para o modelo SIMP podem ser expressas como:

$$g_1(S_a^*, S_m^*) = \frac{S_a^*}{S_f^N} + \frac{S_m^*}{\sigma_u} \leq 1 \quad (4.56)$$

$$g_2(S_a^*, S_m^*) = \frac{S_a^*}{S_f^N} \leq 1 \quad (4.57)$$

$$g_3(S_a^*, S_m^*) = \frac{S_a^*}{\sigma_y} - \frac{S_m^*}{\sigma_y} \leq 1 \quad (4.58)$$

com

$$S_m^* = tr[\sigma_m^*(\rho)] \quad (4.59)$$

$$\sigma_m^*(\rho) = \frac{\sigma_m(\rho)}{\rho^\eta} \quad (4.60)$$

$$\sigma_m(\rho) = \frac{1}{2}([\sigma_{\max}](\rho) + [\sigma_{\min}](\rho)) \quad (4.61)$$

onde, no caso $2D$, em termos do sistema de coordenadas cartesiano:

$$S_m^* = tr[\sigma_m^*(\rho)] = \frac{(\sigma_{mxx} + \sigma_{myy})}{\rho^\eta} \quad (4.62)$$

e

$$S_a^* = [\sigma_a^*]_{eq}^{vm}(\rho) \quad (4.63)$$

$$[\sigma_a^*]_{eq}^{vm}(\rho) = \frac{[\sigma_a]_{eq}^{vm}(\rho)}{\rho^\eta} \quad (4.64)$$

Para o caso $3D$, em termos das direções principais σ_{ai} , $i=1..3$, também pode ser expresso como

$$[\sigma_a^*]_{eq}^{vm}(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2}\rho^\eta} [(\sigma_{a1} - \sigma_{a2})^2 + (\sigma_{a1} - \sigma_{a3})^2 + (\sigma_{a2} - \sigma_{a3})^2]^{\frac{1}{2}} \quad (4.65)$$

e, para o caso $2D$, em termos do sistema de coordenadas cartesiano, como:

$$S_a^* = [\sigma_a^*]_{eq}^{vm} = \frac{1}{\rho^\eta} \sqrt{\sigma_{axx}^2 + \sigma_{ayy}^2 - \sigma_{axx}\sigma_{ayy} + 3\sigma_{axy}^2} \quad (4.66)$$

e

$$\sigma_a(\rho) = \frac{1}{2}([\sigma_{\max}](\rho) - [\sigma_{\min}](\rho)). \quad (4.67)$$

4.5.1 Critério de tensão relaxação- ε

A maior dificuldade no projeto de mecanismos flexíveis com restrição de tensão-fadiga é causada pelo fenômeno de singularidade, causado pela degeneração do espaço de projeto. De modo a superar esta dificuldade, aplica-se um método de perturbação denominado técnica de relaxação- ε , ver Cheng & Guo (1997). Nesta estratégia troca-se a solução do

problema "singular" por uma sequência de problemas não-singulares perturbados. Aqui, considera-se o critério de tensão relaxação- ε modificado, dado por:

$$\rho \left(\frac{S_a^*}{S_f^N} + \frac{S_m^*}{\sigma_u} - 1 \right) - \varepsilon (1 - \rho) \leq 0 \tag{4.68}$$

$$\rho \left(\frac{S_a^*}{S_f^N} - 1 \right) - \varepsilon (1 - \rho) \leq 0 \tag{4.69}$$

$$\rho \left(\frac{S_a^*}{\sigma_y} - \frac{S_m^*}{\sigma_y} - 1 \right) - \varepsilon (1 - \rho) \leq 0 \tag{4.70}$$

Esta relaxação abre a parte degenerada do espaço de projeto e permite a criação e remoção de furos sem a violação das restrições de tensão-fadiga.

4.6 Aplicação do carregamento nos mecanismos

A situação de interesse neste trabalho está ilustrada na Fig. 4.10, que emprega a abordagem de mecanismo flexível clássica (Saxena & Ananthasuresh, 2000)

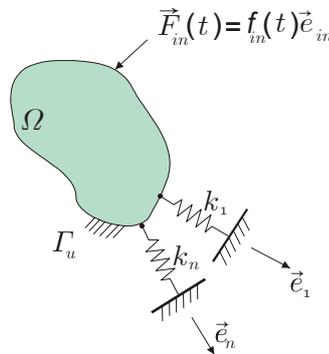


Figura 4.10: Carregamento e molas discretas

A Fig. 4.11 apresenta a abordagem proposta, que incorpora as restrições de fadiga,

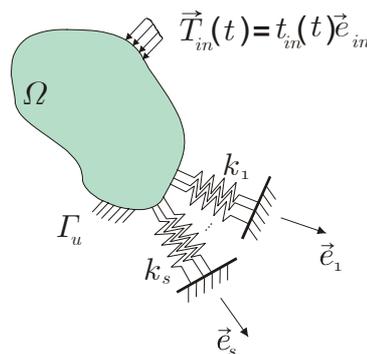


Figura 4.11: Carregamento e molas distribuídas

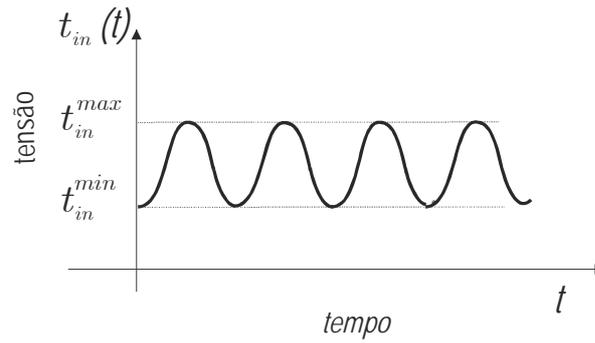


Figura 4.12: Carregamento com tensões flutuantes aplicadas no mecanismo flexível

Neste caso, considera-se que os vetores unitários $\vec{e}_{in}, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ são constantes na região do contorno na qual são aplicados. As constantes de mola k_1, \dots, k_n são também constantes na região onde estão aplicadas. Deve-se ressaltar que, como as restrições de fadiga são de fato restrições do tipo tensão local, não é possível considerar cargas concentradas e molas discretas. Cargas concentradas geram campos de tensão singulares que causam uma violação local da restrição de tensão. De modo a evitar estes campos de tensão singulares, faz-se uso de uma distribuição de tensão constante ao invés de um vetor de carga concentrada, e de uma distribuição de molas ao invés de molas discretas.

O carregamento a ser aplicado no mecanismo será prescrito como mostra a Fig. 4.12

Devido ao fato que a carga a ser considerada é proporcional e o material é linearmente elástico, os campos de tensão máxima e mínima podem ser calculados resolvendo o problema com uma carga de tração unitária prescrita, ou seja,

$$\vec{t}_p = \vec{e}_{in}, \text{ em } \Gamma_t \tag{4.71}$$

cuja solução denota-se por σ_{oin} e permite a determinação de σ_{max} e σ_{min} através das relações:

$$\sigma_{max} = t_{in}^{max} \sigma_{oin} \tag{4.72}$$

$$\sigma_{min} = t_{in}^{min} \sigma_{oin} \tag{4.73}$$

O problema está ilustrado na Fig. 4.13:

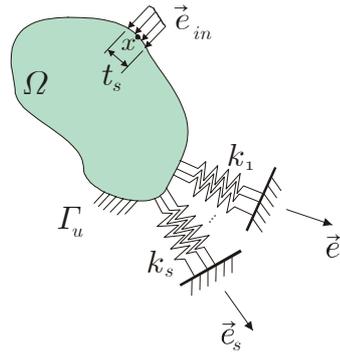


Figura 4.13: Corpo elástico submetido a tensões flutuantes e resistência na saída

Determinação de t_{in}^{max} e t_{in}^{min}

A determinação das amplitudes de carga t_{in}^{max} e t_{in}^{min} são feitas através do procedimento mostrado a seguir.

Considerando L_s a medida do arco da fronteira Γ_t a qual a carga unitária prescrita é aplicada. Desde que em x o tensor tensão, na base local, formada por e_{in} e e_t , e $\langle e_t, e_{in} \rangle = 0$, é dado por

$$\sigma_{o_{in}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.74}$$

e

$$S_m = tr(\sigma_m) = -\frac{(t_{in}^{max} + t_{in}^{min})}{2} < 0 \tag{4.75}$$

e

$$S_a = \sigma_{aeq}^{vm} = \sqrt{\sigma_{axx}^2 + \sigma_{ayy}^2 - \sigma_{axx}\sigma_{ayy} + 3\sigma_{axy}^2} = \frac{(t_{in}^{max} - t_{in}^{min})}{2} \tag{4.76}$$

Critério(1) : Se $S_m \geq \sigma_c$ impõe-se que:

$$\frac{S_a}{S_f^N} = 1 \tag{4.77}$$

ou seja,

$$\frac{(t_{in}^{max} - t_{in}^{min})}{2} = S_f^N. \tag{4.78}$$

No caso particular, em que $t_{in}^{min} = 0$, obtém-se:

$$t_{in}^{max} = 2S_f^N \tag{4.79}$$

Como resultado, para uma força total aplicada $\vec{F}_{in_{max}}^{tot}$ pode-se calcular a medida do arco através da relação:

$$\frac{\vec{F}_{in_{max}}^{tot}}{L_s} = t_{in}^{max} = 2S_f^N \tag{4.80}$$

Logo,

$$L_s = \frac{\vec{F}_{in_{\max}}^{tot}}{2S_f^N} \quad (4.81)$$

Por outro lado, se L_s é prescrita, a força máxima aplicada total será dada por:

$$\vec{F}_{in_{\max}}^{tot} = t_{in}^{\max} L_s = 2S_f^N L_s \quad (4.82)$$

O procedimento impõe a tensão máxima permitida na fronteira Γ_t . Observa-se que se for aplicada uma tração prescrita em Γ_t menor que a tensão admissível, o algoritmo de otimização remove material desta região. Isto faz com que o material tenha uma densidade ótima na proximidade de Γ_t com $\rho < 1$.

Critério(2) : Por outro lado, se $-\sigma_y \leq S_m < \sigma_c$ impõe-se que:

$$\frac{S_a}{\sigma_y} - \frac{S_m}{\sigma_y} = 1 \quad (4.83)$$

Para o caso particular $t_{in}^{\min} = 0$ obtem-se

$$S_m = -\frac{t_{in}^{\max}}{2} \quad (4.84)$$

e

$$S_a = \frac{t_{in}^{\max}}{2} \quad (4.85)$$

logo,

$$\frac{t_{in}^{\max}}{2\sigma_y} + \frac{t_{in}^{\max}}{2\sigma_y} = 1 \quad (4.86)$$

ou seja,

$$t_{in}^{\max} = \sigma_y \quad (4.87)$$

Tais considerações podem ser resumidas a seguir:

- força total prescrita $\vec{F}_{in_{\max}}^{tot}$. Neste caso pode-se calcular a medida do arco através da relação

$$\frac{\vec{F}_{in_{\max}}^{tot}}{L_s} = t_{in}^{\max} = \sigma_y \quad (4.88)$$

ou seja

$$L_s = \frac{\vec{F}_{in_{\max}}^{tot}}{\sigma_y} \quad (4.89)$$

- medida de arco L_s . Neste caso, a força máxima aplicada total será dada por:

$$\vec{F}_{in_{\max}}^{tot} = t_{in}^{\max} L_s = L_s \sigma_y \quad (4.90)$$

4.7 Restrições Locais via *Patches Nodais*

A imposição de restrições locais nos problemas de otimização topológica representa, de um modo geral, um considerável aumento do custo computacional do método, pois envolve um grande número de restrições. Para assegurar uma aproximação adequada, as restrições devem ser avaliadas em uma série de pontos discretos, cuja distribuição deve ser densa o suficiente, de forma a minimizar a possibilidade de violação da restrição entre quaisquer dois pontos.

Para contornar esta dificuldade, neste trabalho é utilizado um novo método para impor as restrições de tensão. O objetivo do método proposto é tornar viável a incorporação de restrições locais, permitindo uma imposição apropriada das restrições de tensão locais.

Ao invés de calcular a restrição local em cada elemento da malha discretizada, a restrição será calculada em regiões contendo os elementos associados a cada nó, que denominaremos de *nodal patches*. Os *nodal patches* são compostos pelos elementos adjuntos a cada nó, ou seja, todos os elementos que possuem este nó como vértice. Para evitar a superposição dos *patches* nodais, é proposto um esquema para selecionar apenas os *patches* nodais interiormente disjuntos.

Segundo o esquema proposto, faz-se inicialmente uma lista com todos os nós da malha. Toda vez que um nó gera um *patch*, todos os nós adjuntos a este serão descartados dos novos *patches*. O nó seguinte, que irá compor o novo *patch*, será o próximo nó da lista que não faz parte da relação de nós adjuntos.

Como veremos a seguir, este procedimento reduz drasticamente o número de restrições locais tornando a imposição de restrições de tensão computacionalmente viável.

Para ilustrar a implementação do procedimento, consideraremos, como exemplo, o domínio discretizado na Fig. 4.14. Foi utilizada uma malha de elementos finitos triangulares composta por 52 elementos e 38 nós.

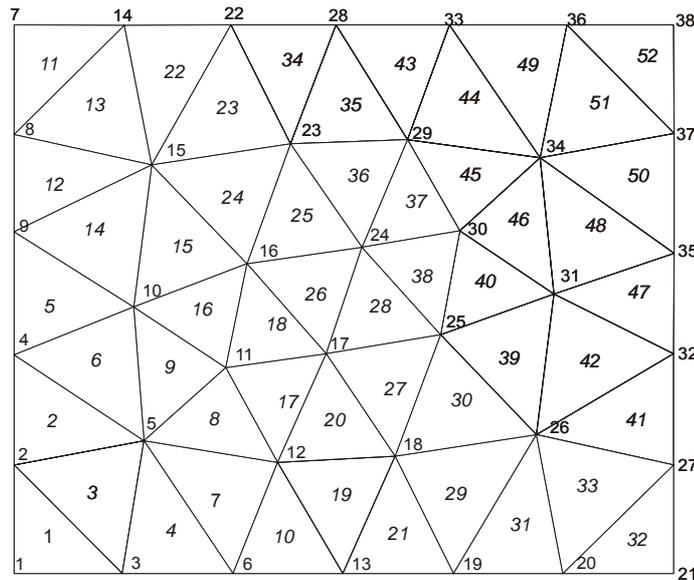


Figura 4.14: Domínio discretizado: 52 elementos e 38 nós

A cobertura do domínio por regiões nodais envolve dois passos básicos:

1. A identificação de um conjunto de regiões nodais disjuntas, ou seja, que possuam uma interseção vazia de suas regiões interiores. A interseção irá se resumir apenas às faces do contorno.
2. A identificação de um conjunto de regiões nodais não disjuntas. Neste conjunto entram todos os elementos que não foram incluídos nos *patches* anteriores.

A união dos dois conjuntos acima assegura, portanto, a cobertura completa do domínio discretizado. O esquema realiza um laço para cada elemento não coberto pelos *patches* nodais interiormente disjuntos, onde um novo *patch* será gerado no nó que possuir um número maior de nós adjacentes.

No exemplo em questão construiremos, inicialmente, a lista de *patches* nodais interiormente disjuntos.

4.7.1 *Patches* nodais interiormente disjuntos

A implementação deste passo envolve a definição de dois vetores:

- Vetor da condição nodal

Este vetor informa a lista dos nós adjacentes, ou seja, os nós candidatos à gerar os *patches*. A dimensão do vetor corresponde ao número de nós da malha. Inicialmente, atribui-se o valor 1 a todos os componentes do vetor. Toda vez que um *patch* é gerado atribui-se o valor zero para os nós adjacentes do *patch*.

Neste caso, temos o vetor $v(i), i = 1, \dots, 38$ ($nunmp = \text{número de nós}$). Inicialmente $v(i) = 1$.

$$v = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & & & & & \end{bmatrix}$$

- Vetor de controle dos elementos

Este vetor registra os elementos que fazem parte dos patches nodais disjuntos, a medida que os patches são definidos. Ao final do processo de definição dos patches nodais, os elementos que não foram incluídos serão considerados para completar a cobertura do domínio. Definimos, então, o vetor $w(k), k = 1, nume$. Inicialmente $w(k) = 1$.

$$w = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & & & & & & & \end{bmatrix}$$

Para o nó $i=1$ obtemos:

Conforme mostra a Fig. 4.15, para o nó 1, os nós adjuntos são os nós {2,3}. Atribuiremos o valor zero para as componentes do vetor $v(\cdot)$ correspondentes a estes nós no vetor. Portanto, obtemos:

$$v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & & & & & \end{bmatrix}$$

O vetor $w(\cdot)$ estoca os elementos que contém o $i - \text{ésimo}$ nó como vértice. São os elementos que compõem o *patch*. Para o exemplo, o elemento 1 compõe o primeiro *patch*. Logo, temos:

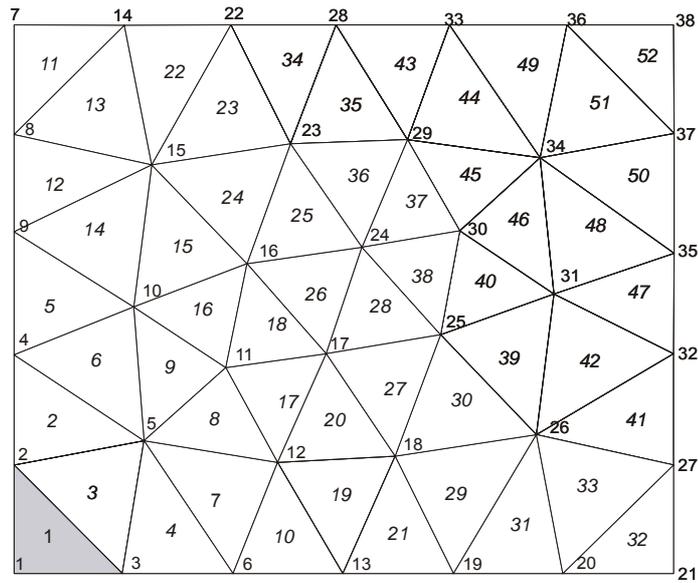


Figura 4.15: Patch 1

$$w = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & & & & & & & \end{bmatrix}$$

O próximo nó apto a gerar o novo *patch* será o nó 4 (Fig. 4.16), pois $v(2)$ e $v(3)$ são nulos. Portanto, para o nó $i=1$ obtemos:

Como os nós adjuntos ao nó 4 são $\{2, 5, 9, 10\}$ o vetor $v(\cdot)$ torna-se:

$$v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & & & & & \end{bmatrix}$$

Os elementos $\{2, 5, 6\}$ compõem o novo *patch*, logo o vetor $w(\cdot)$ torna-se:

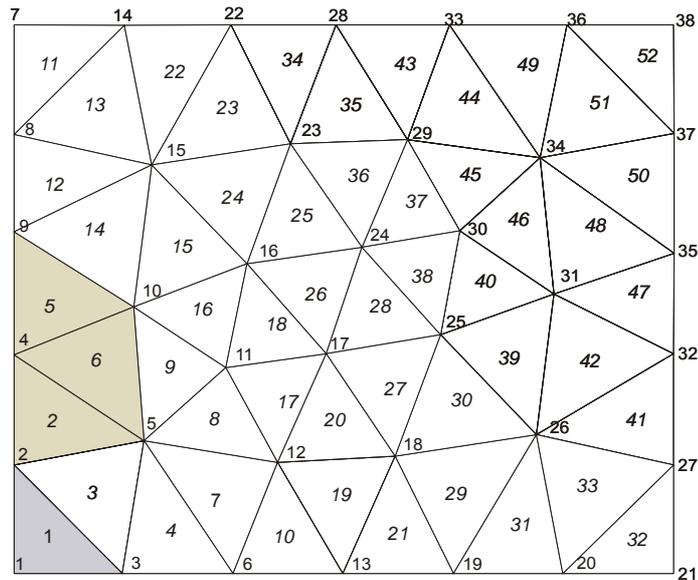


Figura 4.16: Segundo patch nodal

$$w = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & & & & & & \end{bmatrix}$$

O próximo nó apto a gerar o novo *patch* será o nó 6 (Fig. 4.17), pois $v(5)$ é nulo. Portanto, para $i=6$ obtemos:

Os nós adjuntos ao nó 6 são $\{3, 5, 12, 13\}$ o vetor $v(\cdot)$ torna-se:

$$v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & & & & & \end{bmatrix}$$

Os elementos $\{4, 7, 10\}$ compõem o novo *patch*, logo o vetor $w(\cdot)$ torna-se:

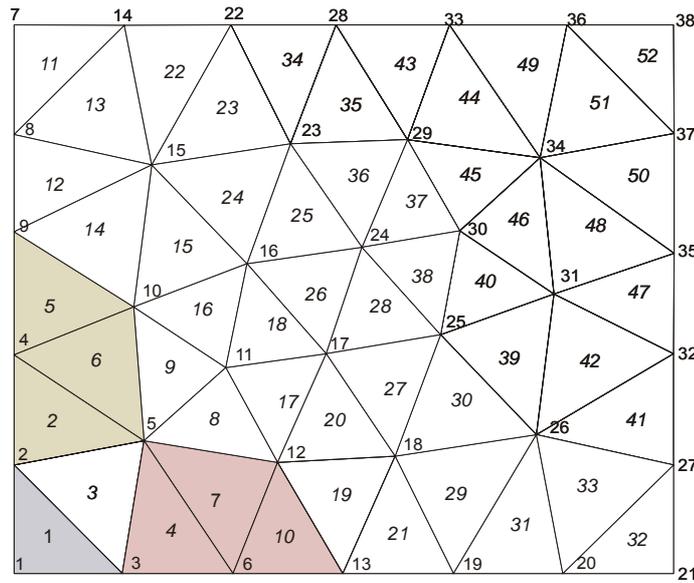


Figura 4.17: Terceiro patch nodal

$$w = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & & & & & & & & \end{bmatrix}$$

Continuando este procedimento, identifica-se, finalmente, os seguintes *patches* nodais:

$$\{ 1 \ 4 \ 6 \ 7 \ 11 \ 15 \ 18 \ 20 \ 24 \ 28 \ 31 \ 36 \}$$

os quais são apresentados na Fig.4.18

O número total de *patches* nodais (nnp) é obtido por $nnp = \text{sum}\{v(\cdot)\}$. Entretanto, o vetor $w(\cdot)$ informa que cinco elementos não foram cobertos pelos *patches* nodais disjuntos interiores. O número total de elementos não incluídos nos *patches* é dado por $nue = \text{sum}\{w(\cdot)\}$. Os elementos descobertos são:

$$\{ 3 \ 41 \ 44 \ 45 \ 50 \}$$

Em cada elemento não incluído nos *patches*, será feita uma avaliação nos nós do elemento para selecionar aqueles nós que possuem o maior número de nós adjacentes. Os nós selecionados serão utilizados para gerar os novos *patches*. Deste modo, faz-se a cobertura completa de todo o domínio discretizado.

Neste exemplo, foram identificados um total de 16 *patches* na malha de 52 elementos triangulares. Se as restrições locais do problema de otimização eram avaliadas em cada

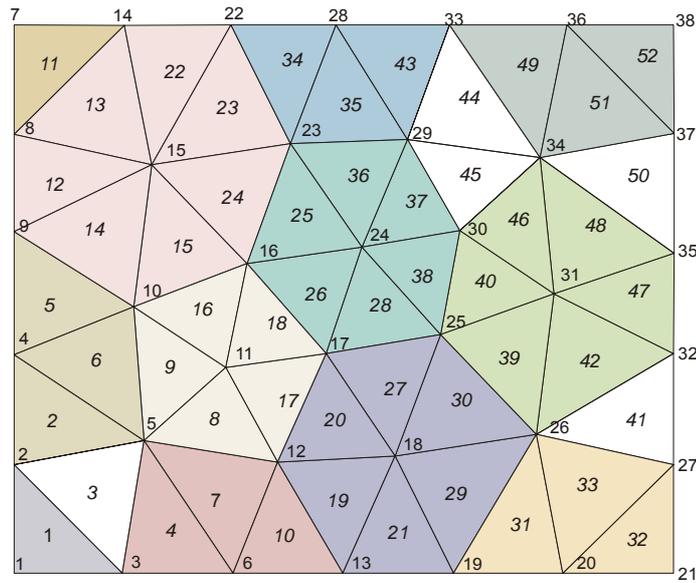


Figura 4.18: Décimo segundo patch nodal

elemento, a utilização dos patches nodais representaria aproximadamente uma redução de 70% no número de restrições. Esta redução é extremamente importante para viabilizar a imposição de restrições locais.

Neste trabalho, o projeto de mecanismos flexíveis está sujeito a restrições nas tensões de fadiga do material. A avaliação da fadiga é feita segundo o critério de Goodmann modificado. No diagrama de Goodmann a região admissível é definida por três restrições. Se a avaliação for feita em cada elemento, teremos um total de $3 \cdot \text{nume}$ restrições no problema de otimização, sendo nume o número de elementos da malha. Por exemplo, em uma malha com 2000 elementos, haveria um total de 6000 restrições para serem avaliadas. Utilizando os *patches* nodais disjuntos, este número seria reduzido para aproximadamente 1800 restrições, o que tornaria o processo computacionalmente viável.

4.7.2 Formulação do problema distribuído ε -relaxado

A formulação do problema com restrição de tensão-fadiga ε -relaxado consiste na determinação do campo de densidade relativa $\rho(\vec{x}) \in W^{1,\infty}$, o qual define a topologia ótima do corpo bidimensional, que resolve:

$$\max \left\{ \int_{\Gamma_s} \langle \vec{u}_o, \vec{e}_s \rangle d\Gamma \right\} \tag{4.91}$$

sujeito às seguintes restrições:

- Restrições de tensão-fadiga:

$$\rho \left(\frac{S_a^*}{S_f^N} + \frac{S_m^*}{\sigma_u} - 1 \right) - \varepsilon (1 - \rho) \leq 0 \quad (4.92)$$

$$\rho \left(\frac{S_a^*}{S_f^N} - 1 \right) - \varepsilon (1 - \rho) \leq 0 \quad (4.93)$$

$$\rho \left(\frac{S_a^*}{\sigma_y} - \frac{S_m^*}{\sigma_y} - 1 \right) - \varepsilon (1 - \rho) \leq 0 \quad (4.94)$$

- Restrições laterais do tipo caixa:

O campo de densidade relativa $\rho(\vec{x})$ é confinado no intervalo $[\rho_{\text{inf}}, 1]$. Um valor típico para o limite inferior é $\rho_{\text{inf}} = 0.001$. Então,

$$\rho_{\text{inf}} \leq \rho(\vec{x}) \leq 1, \quad \forall \vec{x} \in \Omega \quad (4.95)$$

Ressalta-se que o tensor tensão, utilizado para o cálculo das tensões equivalentes S_a^* e S_m^* são computadas através do seguinte procedimento:

- Resolver o subproblema para $\vec{u}_o(\vec{x})$;
- Computar o tensor deformação, $\varepsilon_o = \varepsilon(\vec{u}_o)$, e o tensor tensão, $\sigma_o(\vec{x}) = \mathbb{D}\varepsilon_o(\vec{x})$;
- Computar os tensores tensão: $\sigma_{\text{max}}(\vec{x}) = t_{\text{in}}^{\text{max}} \sigma_o(\vec{x})$ e $\sigma_{\text{min}}(\vec{x}) = t_{\text{in}}^{\text{min}} \sigma_o(\vec{x})$, onde $t_{\text{in}}^{\text{max}}$ e $t_{\text{in}}^{\text{min}}$ são os parâmetros reais das cargas proporcionais máxima e mínima;
- Computar o tensor tensão: $\sigma_m(\vec{x}) = \frac{1}{2} (\sigma_{\text{max}}(\vec{x}) + \sigma_{\text{min}}(\vec{x}))$
- Computar o tensor tensão: $\sigma_a(\vec{x}) = \frac{1}{2} (\sigma_{\text{max}}(\vec{x}) - \sigma_{\text{min}}(\vec{x}))$
- Determinar $\sigma_m^*(\vec{x}) = \frac{\sigma_m(\vec{x})}{\rho^\eta}$
- Determinar $S_m^*(\vec{x}) = \text{tr}[\sigma_m^*(\vec{x})] = \frac{\text{tr}[\sigma_m(\vec{x})]}{\rho^\eta}$, onde, para o caso bidimensional,

$$S_m^* = \text{tr}[\sigma_m^*(\rho)] = \frac{(\sigma_{mxx} + \sigma_{myy})}{\rho^\eta} \quad (4.96)$$

- Determinar $\sigma_a^*(\vec{x}) = \frac{\sigma_a(\vec{x})}{\rho^\eta}$
- Determinar $S_a^* = [\sigma_a^*]_{\text{eq}}^{vm}(\rho) = \frac{[\sigma_a]_{\text{eq}}^{vm}(\rho)}{\rho^\eta}$, onde, para o caso bidimensional,

$$S_a^* = [\sigma_a^*]_{\text{eq}}^{vm} = \frac{1}{\rho^\eta} \sqrt{\sigma_{axx}^2 + \sigma_{ayy}^2 - \sigma_{axx}\sigma_{ayy} + 3\sigma_{axy}^2} \quad (4.97)$$

4.7.3 Restrição de tensão com relaxação- ϵ integrada em *patches*

No problema de otimização anterior, a restrição de tensão efetiva relaxada, dada em 4.92, 4.93 e 4.94, tem que ser satisfeita para todo $\vec{x} \in \Omega$, caracterizando deste modo uma restrição paramétrica. Um método efetivo de lidar com uma restrição paramétrica é relaxar a condição pontual (critério local) através de uma restrição integrada no *patch*. Neste trabalho faz-se uso da seguinte restrição de tensão com relaxação- ϵ integrada:

Fazendo Ω_p definir o *patch* nodal², considera-se:

$$\left\{ \frac{1}{\Omega_p} \int_{\Omega_p} \left\langle \rho \left(\frac{S_a^*}{S_f^N} + \frac{S_m^*}{\sigma_u} - 1 \right) - \varepsilon (1 - \rho) \right\rangle^r d\Omega \right\}^{\frac{1}{r}} = 0 \quad (4.98)$$

$$\left\{ \frac{1}{\Omega_p} \int_{\Omega_p} \left\langle \rho \left(\frac{S_a^*}{S_f^N} - 1 \right) - \varepsilon (1 - \rho) \right\rangle^r d\Omega \right\}^{\frac{1}{r}} = 0, \quad (4.99)$$

$$\left\{ \frac{1}{\Omega_p} \int_{\Omega_p} \left\langle \rho \left(\frac{S_a^*}{\sigma_y} - \frac{S_m^*}{\sigma_y} - 1 \right) - \varepsilon (1 - \rho) \right\rangle^r d\Omega \right\}^{\frac{1}{r}} = 0 \quad (4.100)$$

onde $\langle f(\vec{x}) \rangle$ define a parte positiva de $f(\vec{x})$, ou seja, $\langle f(\vec{x}) \rangle = \max\{0, f(\vec{x})\}$.

A introdução desta medida integrada, denotada por norma r -média, reduz enormemente o custo computacional da utilização de uma forma fraca de restrição de tensão-fadiga efetiva com relaxação- ϵ . Por outro lado, fazendo $r \rightarrow \infty$, a restrição tende no limite para a restrição pontual.

$$\max_{\vec{x} \in \Omega_p} \left\langle \rho \left(\frac{S_a^*}{S_f^N} + \frac{S_m^*}{\sigma_u} - 1 \right) - \varepsilon (1 - \rho) \right\rangle = 0 \quad (4.101)$$

$$\max_{\vec{x} \in \Omega_p} \left\langle \rho \left(\frac{S_a^*}{S_f^N} - 1 \right) - \varepsilon (1 - \rho) \right\rangle = 0 \quad (4.102)$$

$$\max_{\vec{x} \in \Omega_p} \left\langle \rho \left(\frac{S_a^*}{\sigma_y} - \frac{S_m^*}{\sigma_y} - 1 \right) - \varepsilon (1 - \rho) \right\rangle = 0 \quad (4.103)$$

Entretanto, quando $r \rightarrow \infty$ o problema torna-se mal-condicionado e a restrição de tensão com relaxação- ϵ integrada tende a ser influenciada por apenas um valor de pico do critério de falha, enquanto que outras restrições de tensão relaxadas globais são ignoradas. Isto pode levar a um comportamento oscilatório do algoritmo de otimização, levando, possivelmente, à uma falha na convergência do procedimento de otimização. Portanto, a escolha do valor de r deve resultar de uma avaliação de resultados numéricos. Neste trabalho, considera-se $r = 6$. A decomposição do domínio em regiões nodais (*patches*),

²Para evitar a repetição de símbolos, a partir de agora utilizaremos o símbolo r para representar o parâmetro da norma média- p . O índice p em Ω_p indica o *patch* nodal.

quando comparada com uma medida global simples definida no domínio completo, é capaz de reduzir o comportamento oscilatório e tornar o procedimento mais robusto.

4.8 Conclusões

A incorporação de restrições de tensão em problemas de otimização topológica encarece computacionalmente a aplicação do método. Basicamente, isto ocorre devido a dois fatores. Primeiramente, a tensão é uma grandeza local e, portanto, um grande número de restrições locais deve ser avaliado de forma a garantir a não violação do critério de falha. Além disto, a tensão apresenta um fenômeno de singularidade, que impede que algoritmos tradicionais de otimização, baseados nas condições de Karush-Kuhn-Thucker, encontrem o ótimo.

Portanto, neste trabalho é utilizado uma técnica de relaxação da restrição sobre as tensões, denominada relaxação- ε . A condição pontual é relaxada através de uma norma média- p integral.

Os mecanismo flexíveis são submetidos a carregamentos multiaxiais e será feito uma avaliação da falha por fadiga pelo critério de Goodman modificado. As tensões médias e alternadas utilizadas na avaliação são obtidas de acordo com o método de Sines, que utiliza a tensão octaédrica alternada.

Utilizamos o modelo microestrutural SIMP, onde a descrição das propriedades materiais nos pontos com densidade relativa intermediária são baseadas na relação constitutiva para materiais porosos.

Definiu-se uma tensão efetiva para o modelo SIMP, a partir da qual foram definidas as restrições nas tensões de fadiga para este modelo, de acordo com o critério de fadiga de Goodman modificado.

O carregamento com tensões flutuantes é aplicado resolvendo-se, inicialmente, o problema com uma carga de tração unitária. Com este resultado, são calculadas as tensões máximas e mínimas multiplicando-se o resultado das tensões pelos parâmetros proporcionais de carga, definidos pelo usuário. As tensões médias e alternadas, que são utilizadas no critério de falha, são calculadas segundo o método de Sines.

A formulação do problema de mecanismos utiliza um modelo de cargas e molas distribuídas e a imposição das restrições locais de fadiga é feita através de uma nova técnica denominada de *patches* nodais adjuntos. Esta técnica permite uma redução drástica no número de restrições do problema. A condição pontual da restrição de tensão efetiva é relaxada através de uma restrição integrada no *patch*.

Capítulo 5

Projeto Ótimo com Restrição de Fadiga

Neste capítulo são apresentados alguns exemplos de projetos de mecanismos flexíveis incorporando restrições de fadiga, visando demonstrar a aplicação do procedimento proposto. Os exemplos escolhidos são: um mecanismo inversor de deslocamento, um mecanismo de agarrar e dois mecanismos de esmagamento.

O material base adotado para o mecanismo flexível foi o plástico ABS de médio impacto¹, que possui as seguintes propriedades materiais: módulo de Young de 2,4 GPa, coeficiente de Poisson $\nu = 0,35$, tensão de escoamento de 42 MPa e tensão de ruptura de 45 MPa. O comportamento dos plásticos em relação a fadiga é bastante diferente dos metais. Por simplicidade, adotaremos como tensão de limite de fadiga o valor de 22,5 MPa, o que corresponde a metade do valor da tensão de ruptura. O critério de fadiga adotado é o Goodmann modificado.

O elemento finito utilizado na discretização é o elemento isoparamétrico triangular de três nós *Tri3*, que interpola tanto as componentes do campo de deslocamento quanto o campo de densidade relativa. O modelo de microestrutura material utilizado é o SIMP (*Simple Isotropic Material with Penalization*), com parâmetro de penalidade igual a 3, conforme sugerido por Bendsoe (1995).

5.1 Formulação do Problema -Restrições de Fadiga

5.1.1 Descrição do problema

Deseja-se, encontrar um leiaute ótimo de mecanismo definido em um domínio fixo de projeto que, a partir da aplicação de um carregamento / deslocamento em Γ_t , gere um deslocamento / força em Γ_s .

¹As propriedades do material ABS médio impacto foram extraídas de Dowling (1999), p.121 e 178.

A função objetivo do mecanismo flexível que será maximizada ou minimizada apresenta requisitos de certa forma conflitantes, pois o leiaute ótimo deve ser:

- flexível o suficiente para satisfazer os requisitos cinemáticos de se deformar e fazer contato com a peça atuada;
- rígido o suficiente para suportar os carregamentos externos e ser capaz de transmitir força.

Este trabalho emprega um modelo de molas distribuídas na região de resposta do corpo elástico. Serão incluídas restrições de fadiga no projeto. A maioria dos trabalhos de síntese topológica de mecanismos flexíveis utiliza apenas restrições de quantidade de material. No entanto, do ponto de vista prático, a consideração das restrições de fadiga é imprescindível para a obtenção de um leiaute *pronto* para a manufatura. A inclusão das restrições de tensões apresenta, porém, inúmeras dificuldades. Como destaca Costa Jr (2003), estas são:

- A necessidade de se considerar um grande número de restrições, necessárias para uma aproximação adequada do critério paramétrico de tensão local. Para assegurar uma aproximação adequada, estas restrições devem ser avaliadas em uma série de pontos discretos, cuja distribuição deve ser densa o suficiente, de modo a minimizar a possibilidade de violação da restrição entre quaisquer dois pontos;
- O comportamento altamente não linear das restrições de tensão, com relação às variáveis de projeto, o que requer a utilização de algoritmos de programação matemática muito robustos.

Uma das formas de lidar com o problema de tensões locais é transformar as tensões em uma função de tensão global. A restrição de tensão global é então tratada como uma única restrição no processo de otimização. Deste modo, reduz-se consideravelmente o custo computacional e o problema de otimização torna-se similar aos problemas tradicionais de otimização topológica.

A consideração das restrições de fadiga do material também são fundamentais para um projeto mais realístico de mecanismos flexíveis. Estes mecanismos, por definição, obtêm sua mobilidade da deflexão dos membros flexíveis. Em geral, a mobilidade é requerida muitas vezes e os requisitos de projeto podem ser muitos milhões de ciclos ou vida "infinita". Os carregamentos repetidos geram tensões flutuantes e podem causar falha por fadiga.

A falha por fadiga pode ocorrer com tensões significativamente mais baixas do que aquelas que causam falha estática. Portanto, considerar apenas a falha estática não assegura a confiabilidade do mecanismo. Neste trabalho utiliza-se o critério de fadiga de Goodman modificado.

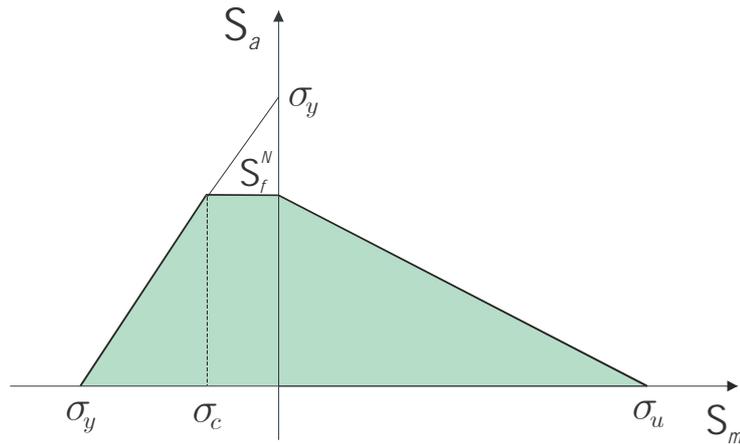


Figura 5.1: Diagrama de Goodman modificado

A região de segurança, para uma vida de N ciclos, com S_f^N representando o limite de fadiga, corresponde às áreas coloridas do diagrama da Fig. 5.1

Aqui, σ_y é a tensão de escoamento e σ_u é a tensão última. A região de segurança pode ser delimitada pelas três restrições de fadiga utilizadas neste trabalho. Estas restrições podem ser definidas por:

$$g_1(S_a, S_m) = \frac{S_a}{S_f^N} + \frac{S_m}{\sigma_u} \leq 1 \tag{5.1}$$

$$g_2(S_a, S_m) = \frac{S_a}{S_f^N} \leq 1 \tag{5.2}$$

$$g_3(S_a, S_m) = \frac{S_a}{\sigma_y} - \frac{S_m}{\sigma_y} \leq 1 \tag{5.3}$$

Considere o problema ilustrado na Fig. 5.2.

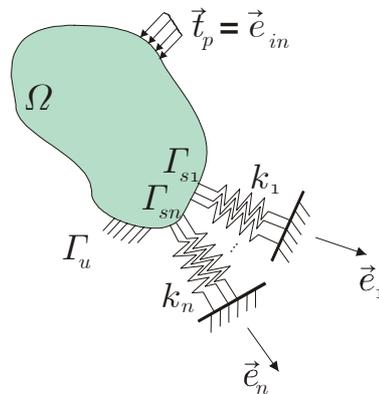


Figura 5.2: Definição do problema distribuído para $\vec{u}_o(\vec{x})$

No caso de cargas distribuídas, que serão empregadas no problema de otimização com restrições de fadiga, a formulação fraca vista nos capítulos anteriores, é modificada para:

$$\int_{\Omega} \sigma(\vec{u}_o) \cdot \varepsilon(\vec{v}) d\Omega + \int_{\Gamma_s} k_j [\vec{e}_j \otimes \vec{e}_j] \vec{u}_o \cdot \vec{v} d\Gamma = \int_{\Gamma_t} \langle \vec{v}, \vec{e}_{in} \rangle d\Gamma, \quad \forall \vec{v} \in \vartheta \quad (5.4)$$

5.1.2 Formulação contínua do problema

O problema de otimização de leiaute de mecanismos flexíveis sujeitos a restrição nas tensões de fadiga pode ser formulado como:

Determinar a densidade relativa $\vec{\rho} \in W^{1,\infty}(\Omega)$, solução de:

$$\max_{\rho} \int_{\Gamma_s} \langle \vec{u}_o(\vec{\rho}), \vec{e}_s \rangle d\Gamma \quad (5.5)$$

onde $\vec{u}_o(\vec{\rho})$ é solução de:

$$\int_{\Omega} \sigma(\vec{u}_o) \cdot \varepsilon(\vec{v}) d\Omega + \int_{\Gamma_s} k_j [\vec{e}_j \otimes \vec{e}_j] \vec{u}_o \cdot \vec{v} d\Gamma = \int_{\Gamma_t} \langle \vec{v}, \vec{e}_{in} \rangle d\Gamma, \quad \forall \vec{v} \in \vartheta \quad (5.6)$$

sujeito às seguintes restrições:

- Restrição de tensão local:

$$g_1(S_a, S_m) = \frac{S_a}{S_f^N} + \frac{S_m}{\sigma_u} \leq 1 \quad (5.7)$$

$$g_2(S_a, S_m) = \frac{S_a}{S_f^N} \leq 1 \quad (5.8)$$

$$g_3(S_a, S_m) = \frac{S_a}{\sigma_y} - \frac{S_m}{\sigma_y} \leq 1 \quad (5.9)$$

- Restrições de limites laterais:

$$0 \leq \rho \leq 1 \quad (5.10)$$

5.1.3 Restrição de tensão local com relaxação- ε

A maior dificuldade no projeto de mecanismos flexíveis com restrição de tensão-fadiga é causada pelo fenômeno de singularidade, causado pela degeneração do espaço de projeto. De modo a superar esta dificuldade, aplica-se um método de perturbação denominado técnica de relaxação- ε , ver Cheng & Guo (1997). Nesta estratégia troca-se a solução do problema "singular" por uma sequência de problemas não-singulares perturbados. Aqui,

considera-se o critério de tensão relaxação- ε modificado, dado por:

$$\rho \left(\frac{S_a^*}{S_f^N} + \frac{S_m^*}{\sigma_u} - 1 \right) - \varepsilon (1 - \rho) \leq 0 \quad (5.11)$$

$$\rho \left(\frac{S_a^*}{S_f^N} - 1 \right) - \varepsilon (1 - \rho) \leq 0 \quad (5.12)$$

$$\rho \left(\frac{S_a^*}{\sigma_y} - \frac{S_m^*}{\sigma_y} - 1 \right) - \varepsilon (1 - \rho) \leq 0 \quad (5.13)$$

Esta relaxação abre a parte degenerada do espaço de projeto e permite a criação e remoção de furos sem a violação das restrições de tensão-fadiga.

5.1.4 Formulação do problema discretizado com restrições integradas

As restrições nas tensões de fadiga relaxadas, dada em 5.11, 5.12 e 5.13, devem ser satisfeitas para todo $\vec{x} \in \Omega$, caracterizando deste modo uma restrição paramétrica. Um método efetivo de lidar com uma restrição paramétrica é relaxar a condição pontual (critério local) através de uma restrição integrada no *patch*. A formulação discreta para o problema de otimização topológica de mecanismos flexíveis sujeitos a restrições nas tensões de fadiga integradas, pode ser estabelecida como:

Determinar o campo de densidades $\vec{\rho} \in X$, $X = \{\vec{\rho} \in \mathbb{R}^n \mid \rho_i^{\text{inf}} \leq \rho_i \leq \rho_i^{\text{sup}}\}$, que resolve:

$$\min f(\vec{\rho}) = \min \left\{ - \frac{1}{\varphi_{so}} \int_{\Gamma_s} \langle \vec{u}_o(\vec{\rho}), \vec{e}_s \rangle d\Gamma \right\} \quad (5.14)$$

onde a constante φ_{so} é dada por:

$$\varphi_{so} = \int_{\Gamma_s} \langle \vec{u}_o(\vec{\rho}_o), \vec{e}_s \rangle d\Gamma \quad (5.15)$$

calculada para densidade nodal relativa inicial $\vec{\rho}_o$, e sujeito às seguintes restrições:

$$h_{3p-2}(\vec{\rho}, \vec{u}_o(\vec{\rho})) = \left\{ \frac{1}{\Omega_p} \int_{\Omega_p} \left\langle \rho \left(\frac{S_a^*}{S_f^N} + \frac{S_m^*}{\sigma_u} - 1 \right) - \varepsilon (1 - \rho) \right\rangle^r d\Omega \right\}^{\frac{1}{r}} = 0, \quad (5.16)$$

$$h_{3p-1}(\vec{\rho}, \vec{u}_o(\vec{\rho})) = \left\{ \frac{1}{\Omega_p} \int_{\Omega_p} \left\langle \rho \left(\frac{S_a^*}{S_f^N} - 1 \right) - \varepsilon (1 - \rho) \right\rangle^r d\Omega \right\}^{\frac{1}{r}} = 0, \quad (5.17)$$

$$h_{3p}(\vec{\rho}, \vec{u}_o(\vec{\rho})) = \left\{ \frac{1}{\Omega_p} \int_{\Omega_p} \left\langle \rho \left(\frac{S_a^*}{\sigma_y} - \frac{S_m^*}{\sigma_y} - 1 \right) - \varepsilon(1 - \rho) \right\rangle^r d\Omega \right\}^{\frac{1}{r}}, \quad (5.18)$$

para $p = 1..n_p$, n_p representando o número total de *patches* nodais.

5.1.5 Método do Lagrangeano Aumentado

O problema de otimização discreto é resolvido empregando-se o método do Lagrangeano Aumentado, que reduz o problema para a solução de uma seqüência de problemas de minimização de caixa. Os problemas com restrições de caixa são resolvidos através de um método Quase-Newton projetado sem memória, ver Apêndice B.

O procedimento geral pode ser sumarizado como:

- Iniciar $k = 0$, $\vec{\mu}^k = 0$, $error = 1.0$, ϵ^k e tol .
- Enquanto $error > tol$
 - (i) Resolver o problema de minimização como restrições de caixa

$$\min \chi(\vec{\rho}, \vec{\mu}^k, \epsilon^k), \quad \forall (\vec{\rho}) \in X. \quad (5.19)$$

– onde

$$\chi(\vec{\rho}, \vec{\mu}^k, \epsilon^k) = f(\vec{\rho}) + \frac{1}{2\epsilon^k} \sum_{j=1}^{3n_p} \Phi_j(h_j(\vec{\rho}, \vec{u}_o(\vec{\rho})), \mu_j^k, \epsilon^k) \quad (5.20)$$

com

$$\Phi_j(h_j(\vec{\rho}, \vec{u}_o(\vec{\rho})), \mu_j^k, \epsilon^k) = h_j [h_j + 2\epsilon^k \mu_j^k] \quad (5.21)$$

Denotando a solução por $(\vec{\rho}^k)$.

- (ii) Atualizar o multiplicadores de Lagrange

$$\mu_j^{k+1} = \mu_j^k + \frac{1}{\epsilon^k} h_j(\vec{\rho}, \vec{u}_o(\vec{\rho})) \quad (5.22)$$

- (iii) Computar o erro

$$error = \max_j \left\{ \frac{|\mu_j^{k+1} - \mu_j^k|}{\max\{1, |\mu_j^{k+1}|\}} \right\} \quad (5.23)$$

- (iv) Atualizar o parâmetro de penalidade

$$\epsilon^{k+1} = \begin{cases} \gamma \epsilon^k, & \text{se } \epsilon^k < \epsilon_{crit}, \text{ para algum } \gamma \in (0, 1) \\ \epsilon_{crit}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5.24)$$

- Fim

5.2 Determinação da função objetivo e das restrições

A função objetivo $f(\vec{\rho}, \vec{u}_o(\vec{\rho}))$ é expressa por:

$$f(\vec{\rho}, \vec{u}_o(\vec{\rho})) = - \frac{1}{\varphi_{so}} \int_{\Gamma_s} \langle \vec{u}_o(\vec{\rho}), \vec{e}_s \rangle d\Gamma \quad (5.25)$$

Portanto, deve-se calcular:

$$\int_{\Gamma_s} \langle \vec{u}_o(\vec{\rho}), \vec{e}_s \rangle d\Gamma = \sum_{e=1}^{n_{e_s}} \int_{\partial\Omega_e \cap \Gamma_s} \vec{e}_s \cdot \vec{u}_o d\Gamma_e \quad (5.26)$$

onde a contribuição elementar é determinada por

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_e \cap \Gamma_s} \vec{e}_s \cdot \vec{u}_o d\Gamma_e &= \int_{-1}^1 \vec{e}_s \cdot \vec{u}_o \frac{L}{2} d\tau \\ &= \int_{-1}^1 \vec{e}_s \cdot [P(\tau)] \vec{q}^e \frac{L}{2} d\tau \\ &= \left\{ \int_{-1}^1 [P(\tau)]^T \vec{e}_s \frac{L}{2} d\tau \right\} \cdot \vec{q}^e \\ &= \vec{F}_s^e \cdot \vec{q}^e \end{aligned} \quad (5.27)$$

O vetor \vec{F}_s^e é dado por:

$$\vec{F}_s^e = \int_{-1}^1 [P(\tau)]^T \vec{e}_s \frac{L}{2} d\tau \quad (5.28)$$

No caso da face [1], definindo $\vec{e}_s = (n_x, n_y)$, obtemos:

$$\vec{F}_s^e = \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 \\ 0 & \phi_1 \\ \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} \frac{L}{2} d\tau = \frac{L}{2} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} n_x \phi_1 \\ n_y \phi_1 \\ n_x \phi_2 \\ n_y \phi_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} d\tau \quad (5.29)$$

Resolvendo a integral:

$$\vec{F}_s^e = \frac{L_{[1]}}{2} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_x \\ n_y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

Para o caso da face [2], por analogia:

$$\vec{F}_s^e = \frac{L_{[2]}}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ n_x \\ n_y \\ n_x \\ n_y \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

Para o caso da face [3], por analogia,

$$\vec{F}_s^e = \frac{L_{[3]}}{2} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \\ 0 \\ n_x \\ n_y \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

Com os resultados acima, pode-se, então, calcular a função objetivo:

$$\begin{aligned} f(\vec{\rho}, \vec{u}_o(\vec{\rho})) &= -\frac{1}{\varphi_{so}} \int_{\Gamma_s} \langle \vec{u}_o(\vec{\rho}), \vec{e}_s \rangle d\Gamma \\ &= -\frac{1}{\varphi_{so}} \sum_{e=1}^{n_{es}} \langle \vec{F}_s^e, \vec{q}^e \rangle \end{aligned} \quad (5.33)$$

Observa-se que o somatório é realizado para $e = 1, \dots, n_{es}$, ou seja, apenas contribuem alguns poucos elementos, os quais satisfazem $\partial\Omega_e \cap \Gamma_s \neq \emptyset$.

- Restrição $h_{3p-2}(\vec{\rho}, \vec{u}_o(\vec{\rho}))$ para $p = 1..n_p$

O objetivo agora é determinar:

$$\left\{ \frac{1}{\Omega_p} \int_{\Omega_p} \left\langle \rho \left(\frac{S_a^*}{S_f^N} + \frac{S_m^*}{\sigma_u} - 1 \right) - \varepsilon(1 - \rho) \right\rangle^r d\Omega \right\}^{\frac{1}{r}} \quad (5.34)$$

Cada *patch* corresponde a uma união de elementos finitos. Utilizaremos uma função auxiliar para a determinação desta restrição, ou seja, definimos a seguinte função:

$$aux = \sum_{e \in J(p)} \left\{ \int_{\Omega_e} \left\langle \rho \left(\frac{S_a^*}{S_f^N} + \frac{S_m^*}{\sigma_u} - 1 \right) - \varepsilon(1 - \rho) \right\rangle^r d\Omega_e \right\} \quad (5.35)$$

e o domínio Ω_p corresponde a:

$$\Omega_p = \sum_{e \in J(p)} \left\{ \int_{\Omega_e} 1 d\Omega_e \right\} \quad (5.36)$$

Então

$$h_{3p-2}(\vec{\rho}, \vec{u}_o(\vec{\rho})) = \left\{ \frac{auu}{\Omega_p} \right\}^{\frac{1}{r}}. \quad (5.37)$$

Calculando o termo entre chaves, temos:

$$\begin{aligned} \{ \cdot \} &= \int_{\Omega_e} \left\langle \rho \left(\frac{S_a^*}{S_f^N} + \frac{S_m^*}{\sigma_u} - 1 \right) - \varepsilon(1 - \rho) \right\rangle^r d\Omega \\ &= 2\Omega_e \int_0^1 \int_0^{1-\zeta} \left\langle \rho \left(\frac{S_a^*}{S_f^N} + \frac{S_m^*}{\sigma_u} - 1 \right) - \varepsilon(1 - \rho) \right\rangle^r d\zeta d\eta. \end{aligned} \quad (5.38)$$

O procedimento de integração numérica fornece:

$$= \sum_{i=1}^{n_{pt}} \left\langle \rho(\zeta_i, \eta_i) \left(\frac{S_a^*(\zeta_i, \eta_i)}{S_f^N} + \frac{S_m^*(\zeta_i, \eta_i)}{\sigma_u} - 1 \right) - \varepsilon(1 - \rho(\zeta_i, \eta_i)) \right\rangle^r 2\Omega_e w_i \quad (5.39)$$

onde (ζ_i, η_i) , $i = 1, \dots, n_{pt}$ são os pontos de integração e w_i , $i = 1, \dots, n_{pt}$ são os pesos correspondentes. Mas, a notação $\langle \cdot \rangle$ significa o maior valor positivo, ou seja:

$$\left\langle \rho \left(\frac{S_a^*}{S_f^N} + \frac{S_m^*}{\sigma_u} - 1 \right) - \varepsilon(1 - \rho) \right\rangle = \max \left\{ 0, \rho \left(\frac{S_a^*}{S_f^N} + \frac{S_m^*}{\sigma_u} - 1 \right) - \varepsilon(1 - \rho) \right\} \quad (5.40)$$

onde a interpolação das densidades nodais é feita por:

$$\rho(\zeta, \eta) = H_1(\zeta, \eta)\rho_{i_1} + H_2(\zeta, \eta)\rho_{i_2} + H_3(\zeta, \eta)\rho_{i_3} \quad (5.41)$$

e o campo de deformações é obtido por:

$$\vec{\varepsilon}_o = \vec{\varepsilon}(\vec{u}_o) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{oxx} \\ \varepsilon_{oyy} \\ 2\varepsilon_{oxy} \end{Bmatrix} = [B_u] \vec{q}^e \quad (5.42)$$

Neste trabalho, lidaremos com o estado plano de tensões. Neste caso, a matriz constitutiva é obtida por:

$$\bar{\mathbb{D}}_o = \frac{E_o}{(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

e $\bar{\mathbb{D}}(\rho) = \rho^\eta \bar{\mathbb{D}}_o$, com $\vec{\sigma}(\vec{u}_o) = \{\sigma_{oxx}, \sigma_{oyy}, \sigma_{oxy}\}$ determinado por

$$\vec{\sigma}_o = \bar{\mathbb{D}}(\rho)\vec{\varepsilon}_o = \rho^\eta \bar{\mathbb{D}}_o \vec{\varepsilon}_o = \rho^\eta \bar{\mathbb{D}}_o [B_u] \vec{q}^e \quad (5.44)$$

A intensidade da tensão máxima, para o carregamento proporcional, é dada por:

$$\vec{\sigma}_{\max}(\vec{x}) = t_{in}^{\max} \vec{\sigma}_o(\vec{x}) \quad (5.45)$$

e a intensidade da tensão mínima por:

$$\vec{\sigma}_{\min}(\vec{x}) = t_{in}^{\min} \vec{\sigma}_o(\vec{x}). \quad (5.46)$$

O vetor de tensão média, $\vec{\sigma}_m(\vec{x})$, é então calculado como:

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_m(\vec{x}) &= \frac{1}{2} (\vec{\sigma}_{\max}(\vec{x}) + \vec{\sigma}_{\min}(\vec{x})) \\ &= \frac{1}{2} (t_{in}^{\max} + t_{in}^{\min}) \vec{\sigma}_o(\vec{x}) \\ &= \frac{\rho^\eta}{2} (t_{in}^{\max} + t_{in}^{\min}) \bar{\mathbb{D}}_o [B_u] \vec{q}^e \end{aligned} \quad (5.47)$$

O vetor de tensão alternada, $\sigma_a(\vec{x})$, como

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_a(\vec{x}) &= \frac{1}{2} (\vec{\sigma}_{\max}(\vec{x}) - \vec{\sigma}_{\min}(\vec{x})) \\ &= \frac{1}{2} (t_{in}^{\max} - t_{in}^{\min}) \vec{\sigma}_o(\vec{x}) \\ &= \frac{\rho^\eta}{2} (t_{in}^{\max} - t_{in}^{\min}) [\bar{\mathbb{D}}_o] [B_u] \vec{q}^e \end{aligned} \quad (5.48)$$

A tensão média efetiva é determinada através do método de Sines, onde, para o caso bidimensional, é dada por:

$$S_m^* = \frac{1}{\rho^\eta} tr[\sigma_m(\rho)] = \frac{(\sigma_{mxx} + \sigma_{myy})}{\rho^\eta} \quad (5.49)$$

Denotando

$$e_{tr} = (1, 1, 0) \quad (5.50)$$

e observando-se, que a matriz constitutiva é simétrica, ou seja, $[\bar{\mathbb{D}}_o] = [\bar{\mathbb{D}}_o]^T$, pode-se escrever:

$$tr[\sigma_m(\rho)] = \sigma_{mxx} + \sigma_{myy} = \langle e_{tr}, \vec{\sigma}_m \rangle \quad (5.51)$$

Então, a tensão média efetiva é determinada por:

$$\begin{aligned}
 S_m^* &= \frac{1}{\rho^\eta} \text{tr} [\sigma_m(\rho)] \\
 &= \frac{1}{\rho^\eta} \langle e_{tr}, \vec{\sigma}_m \rangle \\
 &= \frac{1}{\rho^\eta} \frac{\rho^\eta}{2} (t_{in}^{\max} + t_{in}^{\min}) \langle e_{tr}, [\bar{\mathbb{D}}_o] [B_u] \vec{q}^e \rangle \\
 &= \frac{(t_{in}^{\max} + t_{in}^{\min})}{2} \langle [B_u]^T [\bar{\mathbb{D}}_o] e_{tr}, \vec{q}^e \rangle
 \end{aligned} \tag{5.52}$$

A tensão alternada efetiva, pelo método de Sines para o caso bidimensional, é determinada por:

$$S_a^* = \frac{1}{\rho^\eta} [\sigma_a]_{eq}^{vm} = \frac{1}{\rho^\eta} \sqrt{\sigma_{axx}^2 + \sigma_{ayy}^2 - \sigma_{axx}\sigma_{ayy} + 3\sigma_{axy}^2} \tag{5.53}$$

Aqui, observa-se que a tensão $[\sigma_a]_{eq}^{vm}$ elevada ao quadrado pode ser representada por:

$$\left([\sigma_a]_{eq}^{vm}\right)^2 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \vec{\sigma}_a \cdot \vec{\sigma}_a = [H] \vec{\sigma}_a \cdot \vec{\sigma}_a \tag{5.54}$$

Então, a tensão alternada efetiva é obtida por:

$$\begin{aligned}
 S_a^* &= \frac{1}{\rho^\eta} [\sigma_a]_{eq}^{vm} \\
 &= \frac{1}{\rho^\eta} \sqrt{[H] \vec{\sigma}_a \cdot \vec{\sigma}_a} \\
 &= \frac{1}{\rho^\eta} \frac{\rho^\eta}{2} |t_{in}^{\max} - t_{in}^{\min}| \sqrt{\{[H] [\bar{\mathbb{D}}_o] [B_u] \vec{q}^e \cdot [\bar{\mathbb{D}}_o] [B_u] \vec{q}^e\}} \\
 &= \frac{|t_{in}^{\max} - t_{in}^{\min}|}{2} \sqrt{\{[B_u]^T [\bar{\mathbb{D}}_o] [H] [\bar{\mathbb{D}}_o] [B_u] \vec{q}^e \cdot \vec{q}^e\}} \\
 &= \frac{|t_{in}^{\max} - t_{in}^{\min}|}{2} \sqrt{\{[Q] \vec{q}^e \cdot \vec{q}^e\}}
 \end{aligned} \tag{5.55}$$

onde

$$[Q] = [B_u]^T [\bar{\mathbb{D}}_o] [H] [\bar{\mathbb{D}}_o] [B_u] \tag{5.56}$$

- Restrição $h_{3p-1}(\vec{\rho}, \vec{u}_o(\vec{\rho}))$ para $p = 1..n_p$

O objetivo, agora é determinar a restrição:

$$\left\{ \frac{1}{\Omega_p} \int_{\Omega_p} \left\langle \rho \left(\frac{S_a^*}{S_f^N} - 1 \right) - \varepsilon(1 - \rho) \right\rangle^r d\Omega \right\}^{\frac{1}{r}} \tag{5.57}$$

Cada patch representa uma união de elementos finitos. Utilizando uma função

auxiliar, procederemos da seguinte forma:

$$aux = \sum_{e \in J(p)} \left\{ \int_{\Omega_e} \left\langle \rho \left(\frac{S_a^*}{S_f^N} - 1 \right) - \varepsilon (1 - \rho) \right\rangle^r d\Omega_e \right\} \quad (5.58)$$

e

$$\Omega_p = \sum_{e \in J(p)} \left\{ \int_{\Omega_e} 1 d\Omega_e \right\} \quad (5.59)$$

Então, a restrição é calculada pela expressão:

$$h_{3p-1}(\vec{\rho}, \vec{u}_o(\vec{\rho})) = \left\{ \frac{aux}{\Omega_p} \right\}^{\frac{1}{r}} \quad (5.60)$$

Calculando o termo entre chaves, temos:

$$\begin{aligned} \{\cdot\} &= \int_{\Omega_e} \left\langle \rho \left(\frac{S_a^*}{S_f^N} - 1 \right) - \varepsilon (1 - \rho) \right\rangle^r d\Omega \\ &= 2\Omega_e \int_0^1 \int_0^{1-\zeta} \left\langle \rho \left(\frac{S_a^*}{S_f^N} - 1 \right) - \varepsilon (1 - \rho) \right\rangle^r d\zeta d\eta. \end{aligned} \quad (5.61)$$

O procedimento de integração numérica fornece:

$$= \sum_{i=1}^{n_{pt}} \left\langle \rho(\zeta_i, \eta_i) \left(\frac{S_a^*(\zeta_i, \eta_i)}{S_f^N} - 1 \right) - \varepsilon (1 - \rho(\zeta_i, \eta_i)) \right\rangle^r 2\Omega_e w_i \quad (5.62)$$

Os passos seguintes do procedimento são os mesmos do cálculo anterior.

- Restrição $h_{3p}(\vec{\rho}, \vec{u}_o(\vec{\rho}))$ para $p = 1..n_p$

Deseja-se calcular agora, a restrição

$$\left\{ \frac{1}{\Omega_p} \int_{\Omega_p} \left\langle \rho \left(\frac{S_a^*}{\sigma_y} - \frac{S_m^*}{\sigma_y} - 1 \right) - \varepsilon (1 - \rho) \right\rangle^r d\Omega \right\}^{\frac{1}{r}} \quad (b173)$$

Cada *patch* representa uma união de elementos finitos. Utilizando uma função auxiliar, procederemos da seguinte forma:

$$aux = \sum_{e \in J(p)} \left\{ \int_{\Omega_e} \left\langle \rho \left(\frac{S_a^*}{\sigma_y} - \frac{S_m^*}{\sigma_y} - 1 \right) - \varepsilon (1 - \rho) \right\rangle^r d\Omega_e \right\} \quad (5.63)$$

e

$$\Omega_p = \sum_{e \in J(p)} \left\{ \int_{\Omega_e} 1 d\Omega_e \right\} \quad (5.64)$$

Então, a restrição é calculada pela expressão:

$$h_{3p}(\vec{\rho}, \vec{u}_o(\vec{\rho})) = \left\{ \frac{aux}{\Omega_p} \right\}^{\frac{1}{r}} \quad (5.65)$$

Faz-se necessário, então, determinar:

$$\begin{aligned} \{\cdot\} &= \int_{\Omega_e} \left\langle \rho \left(\frac{S_a^*}{\sigma_y} - \frac{S_m^*}{\sigma_y} - 1 \right) - \varepsilon(1 - \rho) \right\rangle^r d\Omega \\ &= 2\Omega_e \int_0^1 \int_0^{1-\zeta} \left\langle \rho \left(\frac{S_a^*}{\sigma_y} - \frac{S_m^*}{\sigma_y} - 1 \right) - \varepsilon(1 - \rho) \right\rangle^r d\zeta d\eta. \end{aligned} \quad (5.66)$$

O procedimento de integração numérica fornece:

$$= \sum_{i=1}^{n_{pt}} \left\langle \rho(\zeta_i, \eta_i) \left(\frac{S_a^*(\zeta_i, \eta_i)}{\sigma_y} - \frac{S_m^*(\zeta_i, \eta_i)}{\sigma_y} - 1 \right) - \varepsilon(1 - \rho(\zeta_i, \eta_i)) \right\rangle^r 2\Omega_e w_i \quad (5.67)$$

Os passos seguintes do procedimento são os mesmos utilizados no cálculo da primeira restrição de fadiga.

5.3 Resultados obtidos - Mecanismos Flexíveis com restrição nas tensões de fadiga

Nos exemplos apresentados no capítulo anterior, os mecanismos foram projetados considerando apenas uma restrição de quantidade de material. No entanto, do ponto de vista prático, este tipo de critério de projeto não garante a resistência do mecanismo em serviço, pois desconsidera qualquer critério de falha do material, seja falha estática ou falha por fadiga.

5.4 Exemplo 1: Mecanismo inversor de deslocamento

A Fig. 5.3 apresenta o domínio inicial de projeto do mecanismo flexível. Trata-se de um atuador simples que inverte a força aplicada em uma direção, produzindo um deslocamento em uma direção contrária. O mecanismo apresenta simetria em relação a direção horizontal. Para simular esta simetria, o lado inferior do domínio tem os nós restringidos na direção vertical. O domínio é discretizado em uma malha com 1800 elementos e 900 nós, ver Fig. 5.4. A distribuição do critério de falha está ilustrada nas Figs. 5.6, 5.7 e 5.8. Pode-se observar que houve violações nos critérios de falha. Na função de falha h_2 houve uma violação de 2,19 % e em h_3 de 6,28 %.

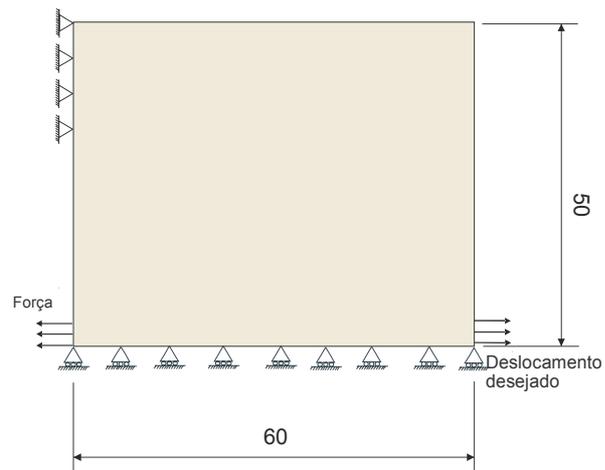


Figura 5.3: Domínio inicial do projeto do mecanismo inversor de deslocamento

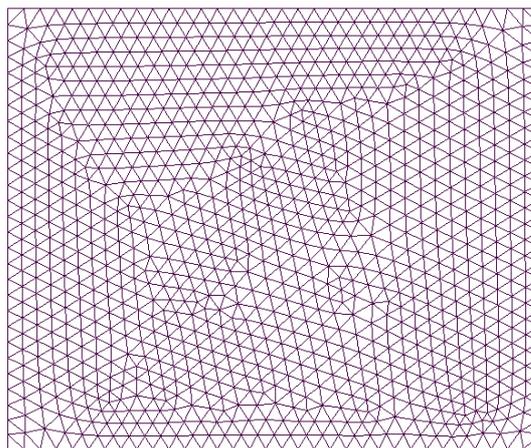


Figura 5.4: Discretização do domínio do projeto: malha com 1900 elementos e 900 nós

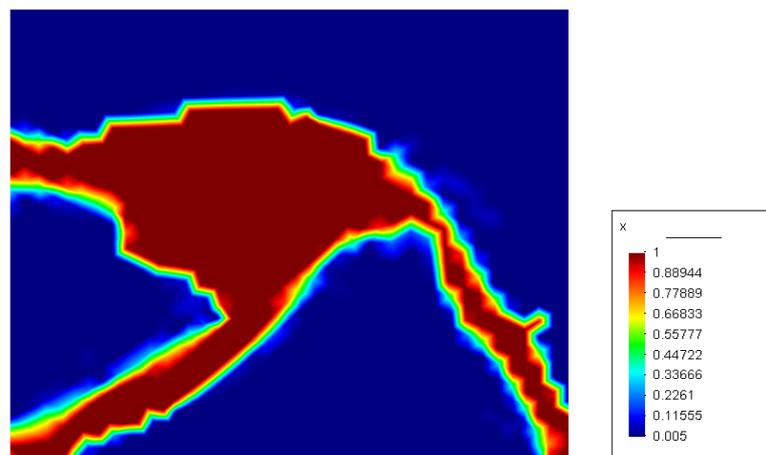


Figura 5.5: Inversor de deslocamento

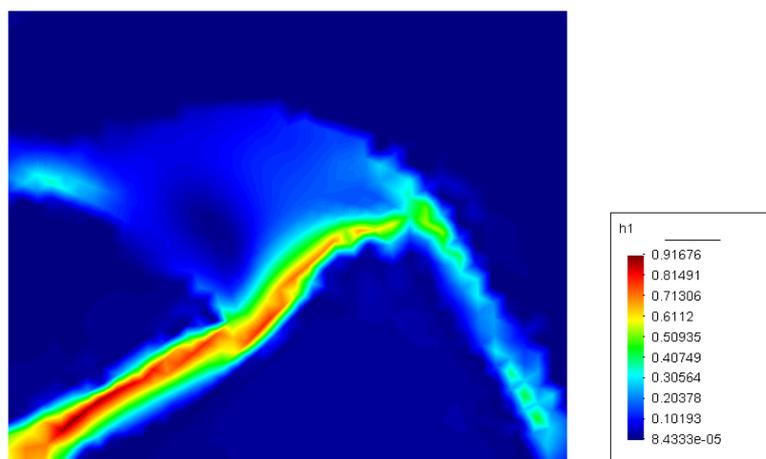


Figura 5.6: Função de falha h_1

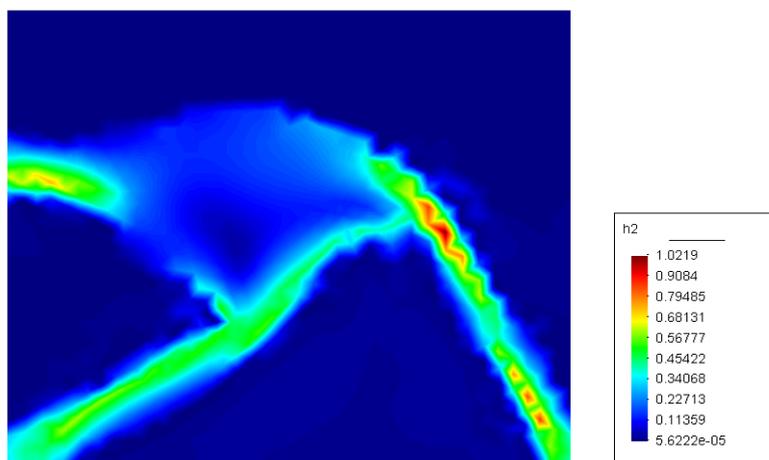


Figura 5.7: Função de falha h_2

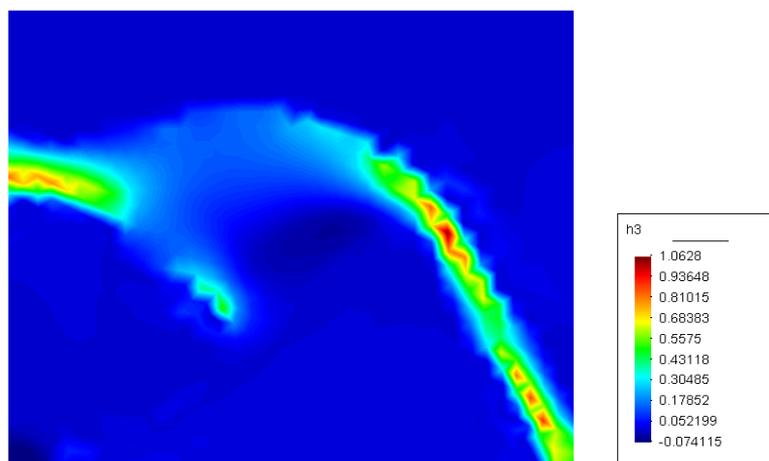


Figura 5.8: Função de falha h_3

5.5 Exemplo 2: Mecanismo de agarrar

A Fig. 5.9 mostra o domínio inicial de projeto de um mecanismo de agarre. Uma força distribuída horizontal para a esquerda aplicada na região inferior do domínio provoca um deslocamento para baixo em outra região, conforme mostra a Fig. 5.9. O domínio foi discretizado em uma malha de 1900 elementos e 900 nós, ver Fig. 5.10. O mecanismo é simétrico e apenas metade do domínio foi discretizado.

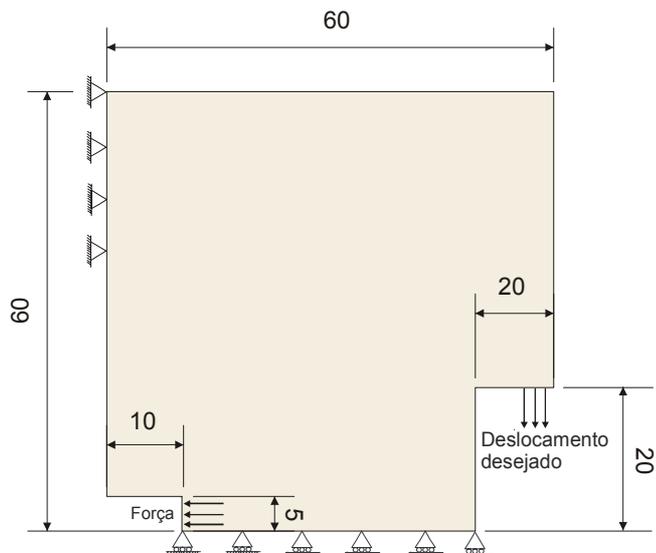


Figura 5.9: Domínio inicial do projeto: mecanismo de agarrar

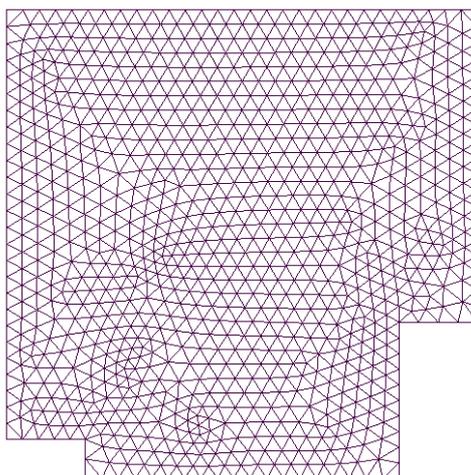


Figura 5.10: Discretização do domínio: 1900 elementos e 900 nós

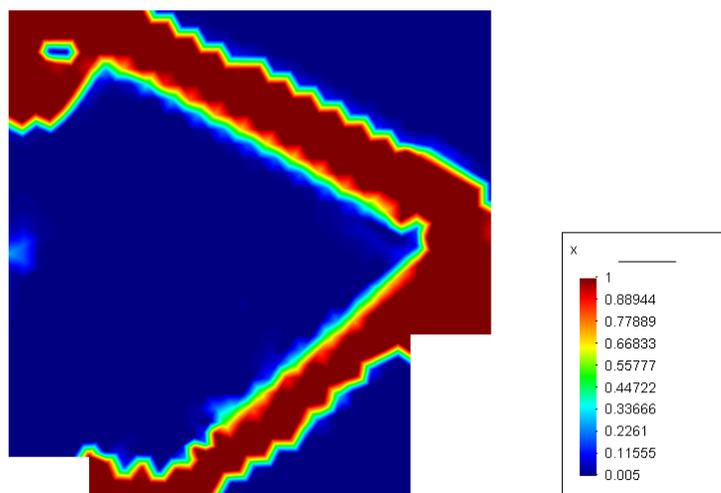


Figura 5.11: Topologia ótima final do mecanismo de agarrar

As Figs. 5.12, 5.13 e 5.14 apresentam a distribuição dos critérios de falha correspondentes às restrições g_1 , g_2 e g_3 . Neste ponto, pode-se verificar a ocorrência de uma violação máxima de 45,14 % na função de falha h_1 . No entanto, as violações ocorreram em poucos elementos, o que indica a necessidade de refinar a malha nas regiões onde ocorreram as violações, de modo a caracterizar melhor o estado de tensões.

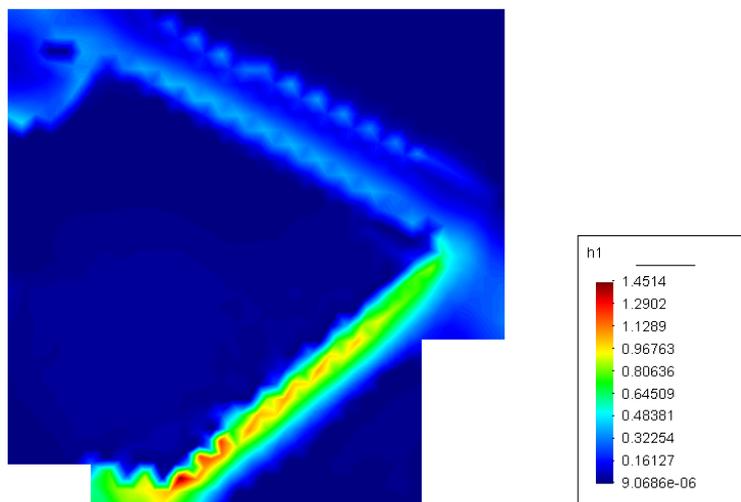


Figura 5.12: Função de falha h_1

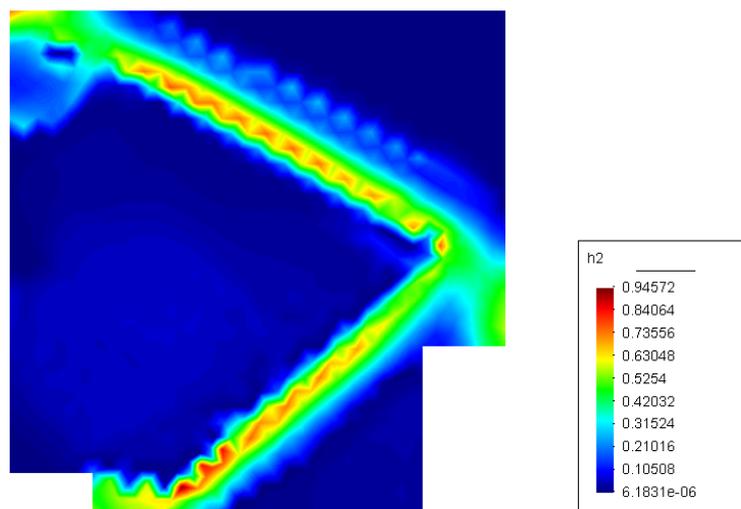


Figura 5.13: Função de falha h2

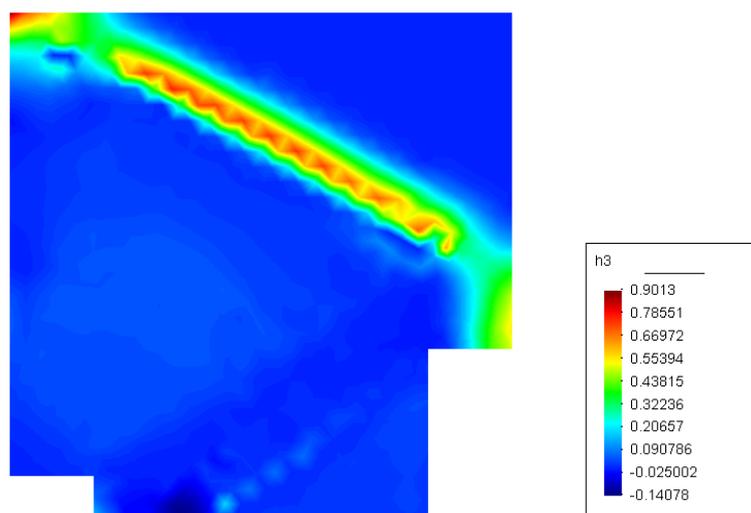


Figura 5.14: Função de falha h3

5.6 Exemplo 3: Mecanismo de esmagamento I

O domínio inicial do projeto está ilustrado na Fig. 5.15. Este exemplo é similar ao mecanismo proposto por Nishiwaki *et al.* (1998). Uma força distribuída na parte superior direita do domínio gera um deslocamento na parte inferior. O domínio foi discretizado numa malha de 1900 elementos e 900 nós, ver Fig. 5.16. A topologia ótima do mecanismo está mostrada na Fig. 5.17. O resultado obtido é similar ao de Nishiwaki *et al.* (1998). A distribuição das funções de falha estão apresentadas nas Figs. 5.18, 5.19 e 5.20. Pode-se observar uma violação pontual máxima de 21,99 % na função de falha h_1 , 13,52 % em h_2 e de 7,88 % em h_3 .

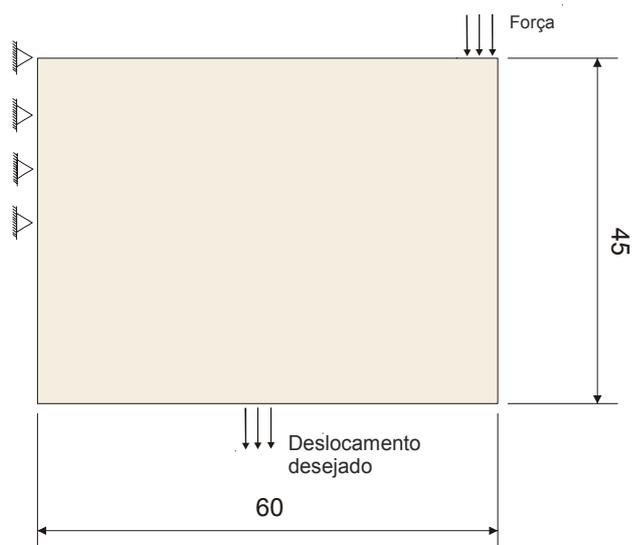


Figura 5.15: Domínio inicial do projeto

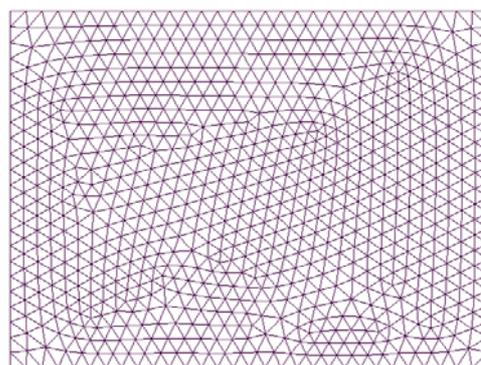


Figura 5.16: Discretização do domínio: malha com 1900 elementos e 900 nós

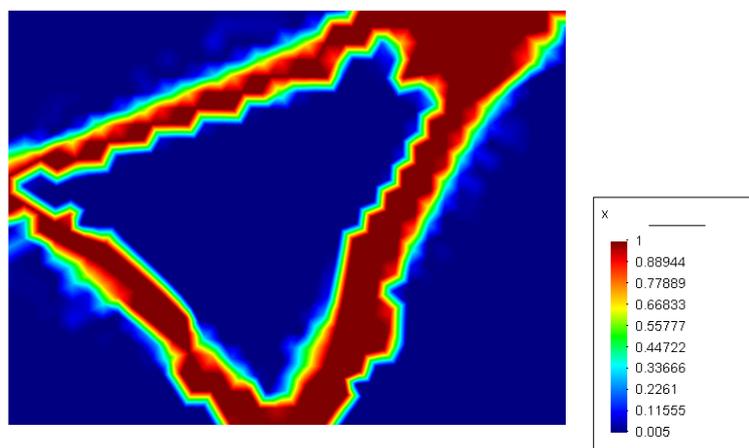


Figura 5.17: Topologia ótima final

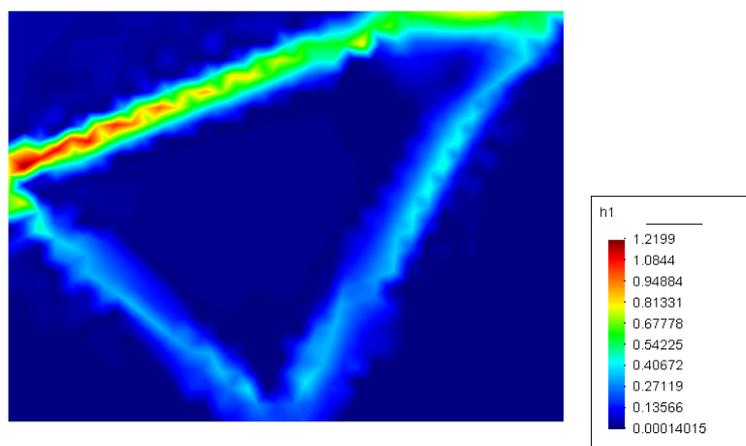


Figura 5.18: Função de falha h1

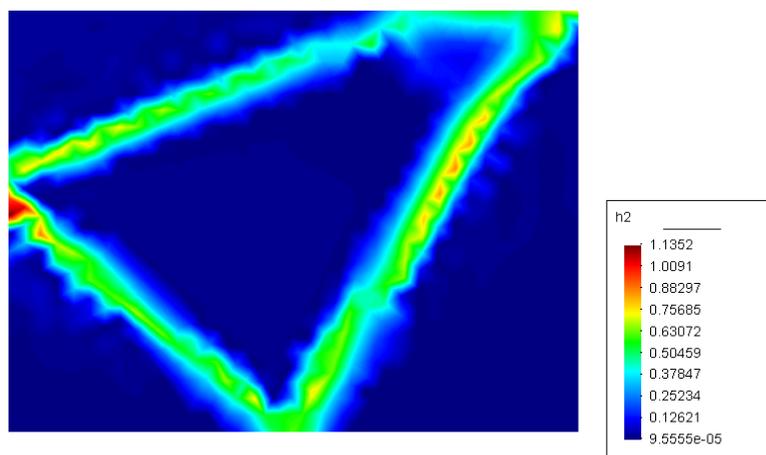


Figura 5.19: Função de falha h2

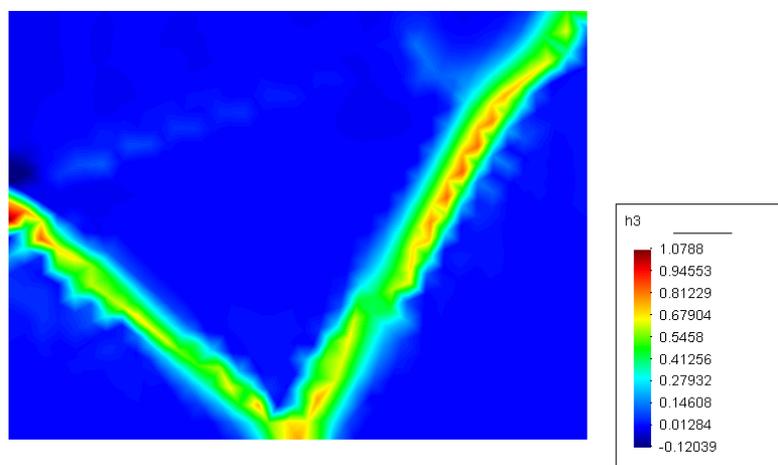


Figura 5.20: Função de falha h3

5.7 Exemplo 4: Mecanismo de esmagamento II

Este exemplo é similar ao projeto proposto por Sigmund (1997). O material base utilizado para este mecanismo é o Nylon 6 seco², que possui módulo de Young $E = 3GPa$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,41$, tensão de escoamento $\sigma_y = 90 MPa$ e tensão de ruptura $\sigma_u = 103 MPa$. Utilizaremos como valor de tensão limite de fadiga $S_f^N = 51,5 MPa$, que corresponde a metade do valor da tensão de ruptura do material. O domínio inicial é apresentado na Fig. 5.21. O domínio foi discretizado com uma malha de 2211 elementos e 1127 nós. Como o mecanismo proposto é simétrico, apenas metade do domínio é discretizada. A topologia ótima do mecanismo está mostrada na Fig. 5.23. O resultado obtido é similar ao obtido por Sigmund (1997). A distribuição das funções de falha estão apresentadas nas Figs. 5.24, 5.25 e 5.26. Este mecanismo apresentou os valores altos de violação do critério de falha. Deve-se ressaltar a necessidade de efetuar o refino da malha nas regiões onde ocorrem as violações. Conforme os resultados apresentados em Costa Jr. (2003), a violação dos critérios de falha é drasticamente reduzida com o emprego da estratégia de refino h -adaptativo.

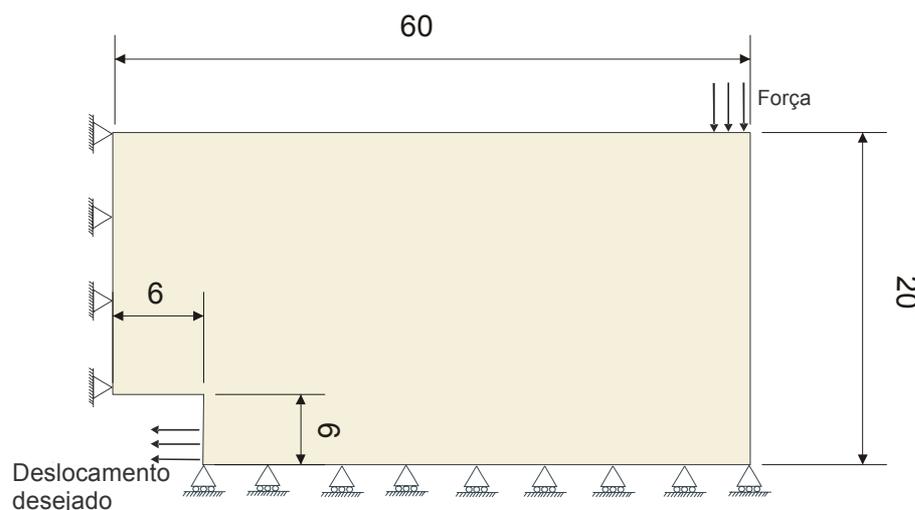


Figura 5.21: Domínio inicial do projeto

²Propriedades do material extraídas de Dowling (1999).

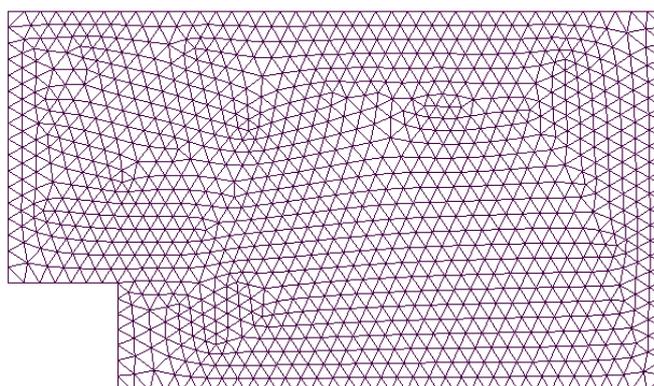


Figura 5.22: Domínio discretizado: malha com 2122 elementos e 1127 nós

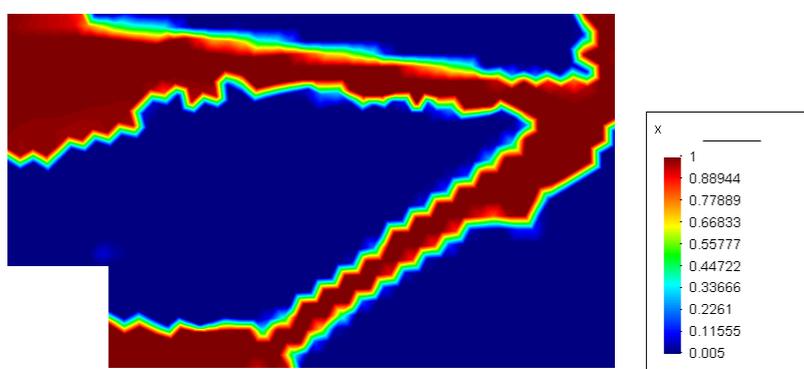


Figura 5.23: Topologia ótima obtida

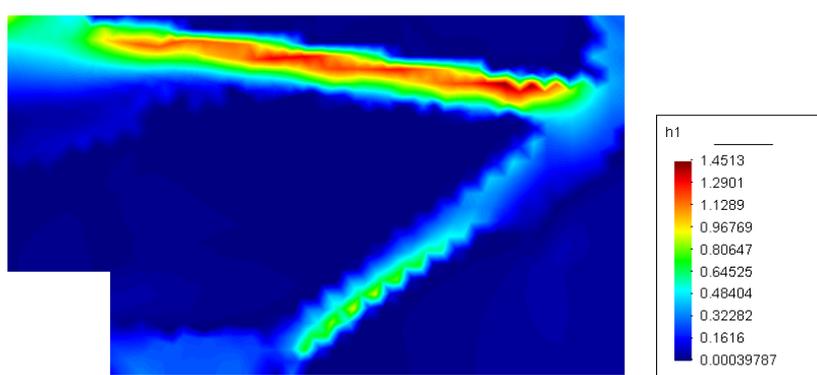


Figura 5.24: Função de falha h1

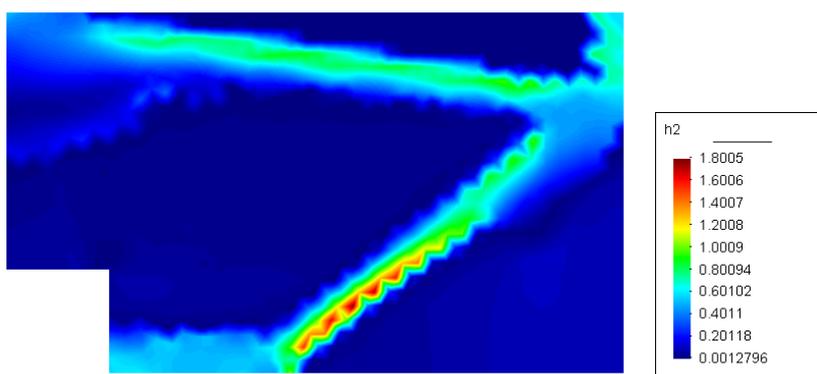


Figura 5.25: Função de falha h2

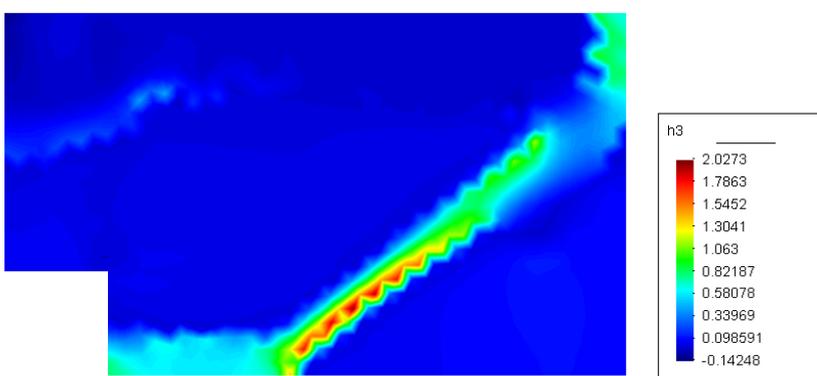


Figura 5.26: Função de falha h3

A Tabela 6.2 mostra os resultados numéricos obtidos nos exemplos propostos. Em todos os mecanismos foi utilizada uma rigidez de mola distribuída de $k_s = 10 \text{ N/mm}$. A força concentrada equivalente F_S (força de resposta) é obtida multiplicando-se o deslocamento na saída $|\Delta_S|$ pela rigidez de mola distribuída.

Tabela 6.1

Dados obtidos nos exemplos de mecanismos

Exemplos	t_{\max} [N/mm]	F_s [N]	$ \Delta_{in} $ [mm]	$ \Delta_S $ [mm]	$ \Delta_{in} : \Delta_S $
Inversor	18	1,3	0,08	0,04	2 : 1
Agarre	15	7,0	0,28	0,14	2 : 1
Esmagamento I	15	7,2	0,46	0,18	5 : 2
Esmagamento II	20	3,1	0,19	0,11	2 : 1

5.8 Conclusões

O procedimento para o projeto de mecanismos flexíveis incorporando restrições de fadiga mostrou-se efetivo e robusto para a obtenção de topologias ótimas. A incorporação de um critério de fadiga torna o projeto muito mais realístico do ponto de vista prático, pois garante a não ocorrência de falha em serviço devido às solicitações oscilantes de carregamento.

A imposição das restrições locais foi viabilizada devido o emprego de uma nova proposta denominada de *patches* nodais. Segundo esta técnica, a violação das restrições locais é avaliada em conjuntos de elementos (*patches*) adjuntos aos nós, o que permite uma redução drástica do número de restrições do problema de otimização.

A violação das funções de falha foi verificada em alguns projetos. No entanto, a violação ocorreu em apenas alguns elementos da malha, o que indica a necessidade de refinar a malha nestas regiões para melhor caracterizar o estado de tensões. No trabalho de Costa Jr. (2003) verificou-se que a violação das restrições locais pode ser drasticamente reduzida mediante a utilização de uma estratégia de refino h -adaptativo.

Deve-se ressaltar que a ocorrência de pequenas violações do critério de falha são esperadas, devido ao fato que o algoritmo de otimização atua com penalização externa. Conforme Martínez (1995), "*a solução de um problema penalizado externamente está, geralmente, fora do conjunto factível, mas se aproxima dele quando o termo de penalização é muito grande*".

O emprego do refino h -adaptativo no projeto topológico de mecanismos flexíveis com restrições de fadiga requer bastante cautela. Observou-se nos resultados parciais, que a topologia do mecanismo muda continuamente no decorrer das iterações do algoritmo de otimização. Isto revela que o refino só deve ser realizado quando a topologia se mantiver "fixa", ou seja, após a convergência no procedimento de otimização. Caso contrário, corre-se o risco de refinar elementos que não contribuirão para melhorar a definição do contorno do mecanismo.

Capítulo 6

Considerações Finais

O procedimento proposto neste trabalho para o projeto de mecanismos flexíveis utilizando o método de otimização topológica mostrou-se eficiente e apto à capturar o complexo comportamento elástico desta categoria de mecanismos. Alguns exemplos de leiautes de mecanismos flexíveis obtidos com o procedimento são similares aos mecanismos encontrados em artigos científicos da área, o que pode validar a formulação empregada.

A otimização topológica ajusta-se bem a este tipo de problema de projeto e se destaca como o método mais genérico e sistemático para a obtenção de leiautes de mecanismos flexíveis com flexibilidade distribuída. O procedimento de otimização aliado à uma estratégia de refino h -adaptativo da malha de elementos finitos proporciona um leiaute definido e sem o alto custo computacional de uma malha muito refinada.

Os resultados apresentados também demonstraram que o procedimento pode ser aplicado à síntese de mecanismos com movimentos complexos ou mesmo, mecanismos que estejam contidos em domínios irregulares. Esta característica é importante, pois em situações práticas, os mecanismos podem ter que dividir espaço com outras peças e, nestas circunstâncias, encontrar a topologia do mecanismo pode ser uma tarefa bastante difícil para o projetista. O projeto em domínios irregulares de um modo geral necessita de um tempo maior para convergir e em muitos casos, conforme o grau de irregularidades, o algoritmo pode vir a falhar. Por este motivo, neste trabalho, optou-se pela utilização de domínios de projeto regulares.

A consideração das tensões é fundamental para o projeto de mecanismos flexíveis que não falhem em serviço e sejam, portanto, viáveis do ponto de vista prático. No entanto, a incorporação de restrições de tensões nos problemas de otimização topológica é um tema delicado, devido ao fenômeno da singularidade nas tensões e ao grande número de restrições que se adicionam ao problema, o que aumenta enormemente o custo computacional do procedimento.

Neste trabalho foram apresentados alguns exemplos de projetos de mecanismos com critério de falha por fadiga. A abordagem de fadiga foi a mesma que tradicionalmente aplica-se para os metais. Deve-se ressaltar que os materiais flexíveis, tais como os plás-

ticos e as borrachas, apresentam características bastante distintas dos metais em relação ao fenômeno de fadiga. Pode-se destacar, por exemplo, o comportamento viscoelástico, a fluência, a relaxação de tensão, a dependência da temperatura, entre outros fatores. A incorporação do critério de fadiga neste trabalho busca mostrar o grande potencial desta ferramenta em futuras implementações que apresentem, então, um modelamento matemático cada vez mais próximo do comportamento real dos materiais flexíveis.

Foram observadas violações no critério de falha por fadiga em alguns dos projetos. Isto ocorreu devido a não realização do refino h -adaptativo da malha para o projeto com restrições de fadiga. As tensões foram avaliadas em conjuntos de elementos adjuntos aos nós, os quais denominamos de *patches* nodais. Esta forma de imposição de restrição reduziu drasticamente o custo computacional do procedimento. Para assegurar a não violação local da restrição é necessário refinar os elementos cujos nós apresentem violação. Tais violações ocorreram em poucos elementos da malha e, portanto, não há a necessidade de empregar um refino rigoroso, o que tornaria a imposição de restrições locais novamente inviável. No trabalho de Costa Jr. (2003), que também abordou restrições locais, verificou-se que a aplicação do refino h -adaptativo reduziu para menos de 3% a violação das restrições locais. Deve ser ressaltado que uma pequena violação sempre irá ocorrer devido ao emprego do método de otimização com penalização externa. Em trabalhos futuros será implementado o refino h -adaptativo para este caso de projeto.

O custo computacional envolvido na otimização topológica que incorpora restrições nas tensões ainda é alto. Talvez este item apenas seja resolvido com inovações significativas na área dos processadores, de modo que estes ofereçam maior velocidade de processamento e possibilitem maior robustez nos algoritmos de otimização para problemas de grande porte.

Algumas possibilidades para trabalhos futuros incluem:

- incorporar a análise não-linear, que é necessária para estudar mecanismos que atuam com grandes deslocamentos, como é o caso do alicate;
- incorporar os efeitos de temperatura, o que é muito importante quando se lida com materiais cujo comportamento dependa deste fator;
- projetar mecanismos com múltiplas entradas e saídas, para permitir o desenvolvimento de mecanismos que executem mais de uma função;
- estudar o comportamento dinâmico dos mecanismos flexíveis;
- projetar mecanismos flexíveis para atuar em conjunto com materiais piezoelétricos, formando os denominados atuadores flexionais.

Além disto, outras formulações para o problema de projeto podem ser testadas e ainda novas restrições podem ser incorporadas para o desenvolvimento de mecanismos com

características especiais. Algumas restrições podem permitir, por exemplo, um controle mais rigoroso sobre as direções de deslocamento, ou então, a obtenção de frequências naturais de vibração mais favoráveis ao desempenho do mecanismo.

Bibliografia

- [1] Ananthasuresh, G. K., Kota, S., Gianchandani, Y., 1994, "**A methodical Approach to the Design of Compliant Mechanisms**", Solid-state Sensor and Actuator Workshop, pp. 189-192.
- [2] Bathe, K. J., 1996, "**Finite Elements Procedures**", Prentice Hall, New Jersey.
- [3] Bazaraa, M. S., Sherali, H. D., Shetty, C. M., 1993, "**Nonlinear Programming**", John Wiley & Sons, New York.
- [4] Bendsoe, M. P., Sigmund, O., 2003, "**Topology Optimization: Theory, Methods and Applications**", Springer, Alemanha.
- [5] Bendsoe, M. P., Sigmund, O., 1999, "**Material Interpolation Schemes in Topology Optimization**", Archive of Applied Mechanics, vol. 69, pp. 635-654.
- [6] Bendsoe, M. P., 1995, "**Optimization of Structural Topology, Shape, and Material**", Springer-Verlag, Germany, Berlin, Heidelberg.
- [7] Bendsoe, M. P., Ben-Tal, A., Zowe, J., 1994, "**Optimization Methods for Truss Geometry and Topology Design**", Structural Optimization, vol. 7, pp. 141-159.
- [8] Bendsoe, M. P., Rodrigues, H. C., 1991, "**Integrated Topology and Boundary Shape Optimization of 2-D Solids**", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 87, pp. 15-34.
- [9] Bendsoe, M. P., 1989, "**Optimization Shape Design as a Material Distribution Problem, Structural Optimization**", v. 1, pp. 193-202.
- [10] Bendsoe, M. P., Kikuchi, N., 1988, "**Generating Optimal Topologies in Structural Design Using Homogenization Method**", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 71, pp. 197-224.
- [11] Calixto, A. K., "**Análise e Otimização de Cascas de Materiais Compostos Laminados**", Dissertação de Mestrado, UFSC, 1998.
- [12] Cardoso, E. L., "**Controle de Complexidade na Otimização Topológica de Estruturas Contínuas**", Dissertação de Mestrado, UFRGS, 2000.

- [13] Carey G. F. "**Computational Grids: Generation, Adaptation, and Solution Strategies**", Washington: Taylor & Francis, 496 p, 1997, .
- [14] Cheng, G. D., Guo, X., " **ϵ -Relaxed Approach in Structural Topology Optimization**", Structural Optimization, vol. 13, pp. 258-266, 1997.
- [15] Cheng, G. D., Jiang, G., "**Study on Topology Optimization with Stress Constraints**", Engineering Optimization, vol. 20, pp. 129-148, 1992.
- [16] Cheng, K. T., Olhoff, N., 1981, "**An investigation concerning optimal design of solid elastic plates**", International Journal of Solids Structures, v. 17, pp. 305-23.
- [17] Chong, E. K. P., Zak, S. H., 1996, "**An Introduction to Optimization**", John Wiley & Sons, New York.
- [18] Christie W. C., Bettess P, Bull J. W., "**Self-designing structures: a practical approach**", Engineering Computations, v. 15, n. 1, p. 35-48, 1998.
- [19] Chu D. N., Xie Y. M., Hira A., Steven G. P., "**On various aspects of evolutionary structural optimization for problems with stiffness constraints**", Finite Elements in Analysis and Design, v. 24, p. 197-212, 1997.
- [20] Clements, D., 2000, "**Implementing compliant mechanisms in micro-electro-mechanical systems (MEMS)**", Tese de Mestrado, Brigham Young University, Provo, UT.
- [21] Collins, J. A., "**Failure of Materials in Mechanical Design**", John Wiley, 1981.
- [22] Cook, R. D.; Malkus, D. S. & Plesha, M. E., "**Concepts and Applications of Finite Element Analysis**", 3rd edition, New York, John Wiley & Sons, 1988.
- [23] Costa Jr, J. C. A., "**Otimização Topológica com Refinos H-adaptativos**", Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2003.
- [24] Costa Jr, J. C. A., Alves, M. K., 2003, "**Layout Optimization with H-adaptivity of Structures**", International Journal of. Numerical Methods in Engineering, vol. 58(1), pp. 83-102.
- [25] Cox, H. L., "**The Theory of Design**", Aeronautics Research Council Rep., No. 19791, 1958.
- [26] Dowling, N. E., 1999, "**Mechanical Behavior of Materials**", 2^o. edição, Prentice Hall, New Jersey.
- [27] Dowling, N. E., 1987, "**A Review of Fatigue Life Prediction Methods**", Durability by Design, SAE Pub. No. SP-730, Soc. of Automotive Engineers, Warrendale, PA, Paper No. 871966.

- [28] Duysinx, P., Bendsoe, M. P., 1998, "**Topology Optimization of Continuum Structures with Local Stress Constraints**", International Journal of Numerical Methods in Engineering, vol. 43, pp. 1453-1478.
- [29] Duysinx, P., Sigmund, O., 1998, "**New Development in Handling Stress Constraints in Optimal Material Distribution**", American Institute of Aeronautics and Astronautics, vol. 98-4906.
- [30] Frecker, M. I., Dzierdzic, R. P., Haluck, R. S., 2001, "**Design of multifunctional compliant mechanisms for minimally invasive surgery**", American Society of Mechanical Engineers Design Engineering Technical Conference, Pittsburgh, Pennsylvania.
- [31] Frecker, M. I., Ananthasuresh, G. K., Nishiwaki, S., Kota, S., 1997, "**Topology Synthesis of Compliant Mechanisms using Multi-criteria Optimization**", Transactions of the ASME, vol. 119, pp. 238-245.
- [32] Frecker, M. I., Kikuchi, N., Kota, S., 1996, "**Optimal Synthesis of Compliant Mechanisms to Satisfy Kinematics and Structural Requirements - Preliminary Results**", Proceedings to ASME Design Engineering of Technical Conferences and Computers in Engineering Conference, California, 96-DETC/DAC-1417.
- [33] George P. L., Borouchaki H. "**Triangulation de Delaunay et Maillage: Application aux Éléments Finis**". Paris: Hermes, 1997, 432 p.
- [34] Gürdal, Z., Haftka, R. T., Hajela, P., 1999, "**Design and Optimization of Laminated Composite Materials**", John Wiley & Sons, New York.
- [35] Haftka, R. T., Grandhi, R. V., 1986, "**Structural Shape Optimization: a Survey**", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 57, pp. 91-106.
- [36] Hain, Kurt., 1967, "**Applied Kinematics**", 8th ed., New York, McGraw-Hill, 1967.
- [37] Hemp, W. S., "**Optimum Structures**", Oxford: Clarendon, 1973.
- [38] Her, I. Midha, A., 1987, "**A Compliance Number concept for Compliant Mechanisms and Type Synthesis**", Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automations in Design, Transaction of the ASME, 109, pp. 348-355.
- [39] Howell, L. L., 2001, "**Compliant Mechanisms**", John Wiley & Sons, New York.
- [40] Howell, L. L., Midha, A., 1996, "**A Loop-closure Theory for the Analysis and Synthesis of Compliant Mechanisms**", Journal of Mechanical Design, Transaction of the ASME, 118, pp. 121-125.

- [41] Howell, L. L., Midha, A., 1994, "**A Method for the Design of Compliant Mechanisms with Small Length Flexural Pivots**", Journal of Mechanical Design, Transaction of the ASME, 116, pp. 280-289.
- [42] Hughes, T. R. H., "**The Finite Element Method**", New Jersey, Prentice Hall International, pp. 797, 1987.
- [43] Jonsmann, J., Sigmund, O., Bouwstra, S., 1999, "**Compliant Thermal Microactuators**", Sensors and Actuators, vol. 76, pp. 463-469.
- [44] Kamal, M. M., Wolf, J. A., "**Modern Automotive Structural Analysis**", Van Nostrand Reinhold, New York, 1981.
- [45] Kirsch, U., 1990, "**On Singular Topologies in Optimum Structural Design**", Structural Optimization, vol. 2, pp. 133-142.
- [46] Kohn, R. V., Strang, G., 1986, "**Optimal Design and Relaxation of Variational Problem**", Comm. Pure. Appl. Math., 39, pp. 1-25, 139-82, 353-77.
- [47] Kota, S., Joo, J., Li, Z., Rodgers, S. M., Sniegowski, J., "**Design of compliant mechanisms: applications to MEMS**", Analog Integrated Circuits and Signal Processing, 29, pp. 7-15, 2001.
- [48] Kwon, Y. W., Bang, H., 1997, "**The Finite Element Method Using Matlab**", CRC Press, Florida.
- [49] Larsen, U. D., Sigmund, O., Bouwstra, S., 1997, "**Design and Fabrication of Compliant Mechanisms and Material Structures with Negative Poisson's Ratio**", Journal of Microelectromechanical Systems (MEMS), vol. 6(2), pp. 99-106.
- [50] Lima, C. R., "**Projeto de Mecanismos Flexíveis usando o Método de Otimização Topológica**", Dissertação de Mestrado, USP, 2002.
- [51] Malvern, L. E., "**Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium**", New Jersey, Prentice-Hall, 1969.
- [52] Mankame, N. D., Ananthasuresh, G. K., 2001, "**Comprehensive Thermal Modelling and Characterization of Electro-thermal-compliant Microactuator**", Journal of Micromechanics and Microengineering, vol. 11, pp. 452-462.
- [53] Martínez, J. M., Santos, S. A., 1995, "**Métodos Computacionais de Otimização**", IMECC-UNICAMP, Campinas.
- [54] Michell, A. G. M., 1904, "**The Limits of Economy of Material in Frame Structures**", Philosophical Magazine, Ser. 6, n. 8, pp.589-597.

- [55] Midha, A., Norton, T. W., Howell, L. L., "**On the Nomenclature and classification of compliant mechanisms: the components of mechanisms**", Proceedings to ASME Design Engineering Technical Conference, Arizona, vol. 47, pp. 13-16, 1992.
- [56] Murphy, M. D., Midha, A., Howell, L. L., "**The Topological Synthesis of Compliant Mechanisms**", Proceedings to 3 National Conference of Applied Mechanics and Robotics, Ohio, vol. 2, artigo n. 99, 1993.
- [57] Nishiwaki, S., Min, S., Yoo, J., Kikuchi, N., 2001, "**Optimal structural design considering flexibility**", Computer methods in applied mechanics and engineering", 190, pp. 4457-4504.
- [58] Nishiwaki, S., Frecker, M. I., Min, S., Kikuchi, N., 1998, "**Topology Optimization of Compliant Mechanisms using the Homogenization Method**", International Journal of Numerical Methods in Engineering, vol. 42, pp. 535-559.
- [59] Park, Y. K., 1995, "**Extensions of Optimal Layout Design using the Homogenization Method**", PhD. Thesis, University of Michigan, Ann Arbor.
- [60] Parkinson, M. B., Howell, L. L., Cox, J.J., 1997, "**A Parametric Approach to the Optimization-Based Design of Compliant Mechanisms**", Proceedings of the 23rd Design Automation Conference, DETC97/DAC-3763.
- [61] Pedersen, C. B. W., Buhl, T., Sigmund, O., 1999, "**Topology Synthesis of Large-displacement Compliant Mechanisms**", Proceedings to ASME Design Engineering Technical Conference, Las Vegas, DETC 99, DAC-855.
- [62] Pereira, J. T., "**Otimização Topológica de Componentes Mecânicos com Restrições sobre o Critério de Falha Material**", Tese de Doutorado, UFSC, 2001.
- [63] Petersen, K. E. "**Silicon as a mechanical material**", Proceedings of IEEE, 70(5), pp. 420-457, 1982.
- [64] Petersson, J., Sigmund, O., 1998, "**Slope Constrained Topology Optimization**", International Journal of Numerical Methods in Engineering, vol. 41, pp. 1417-1434.
- [65] Petersson, J., Sigmund, O., 1998, "**Numerical Instabilities in Topology Optimization: A Survey on Procedures Dealing with Checkerboards, Mesh Dependencies And Local Minima**", Structural Optimization, vol. 16(1), pp. 68-75.
- [66] Prager, W. A., 1974, "**A Note on Discretized Michell Structures**", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 3, n. 3, pp. 349-55.

- [67] Querin O. M., Steven G. P., Xie Y. M., "**Evolutionary structural optimization using Additive Algorithm**", Finite Element Analysis and Design, v. 34, p. 291-308, 2000a.
- [68] Querin O. M., Young V., Steven G. P., Xie Y. M., "**Computational efficiency and validation of bi-directional evolutionary structural optimization**", Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., v. 189, p. 559-73, 2000b.
- [69] Reynolds D., McConnachie J., Bettess P., Christie W. C, Bull J. W., "**Reverse adaptivity – a new evolutionary tool for structural optimization**", International Journal for Numerical Methods in Engineering., v. 45(5), p. 529-52, 1999.
- [70] Rong J. H., Xie Y. M., Yang X. Y, Liang Q. Q., "**Topology optimization of structures under dynamic response constraints**", Journal of Sound and Vibration, v. 234, n. 2: p. 177-89, 2000.
- [71] Rosa, E. da, "**Análise de Resistência Mecânica - Mecânica da Fratura e Fadiga**", GRANTE, UFSC, Florianópolis, 2002.
- [72] Rozvany, G. I. N., Bendsoe, M. P., Kirsch, U., 1995, "**Layout Optimization of Structures**", Applied Mechanics Reviews, vol. 48.2, pp. 41-119.
- [73] Sant'anna, H. M., "**Otimização Topológica de Estruturas Bidimensionais Contínuas Submetidas a Restrições de Flexibilidade e Tensão**", Dissertação de Mestrado, UFRGS, 2002.
- [74] Saxena, A., Ananthasuresh, G. K., 2000, "**On an Optimal Property of Compliant Topologies**", Structural Multidisciplinary Optimization, vol. 19, pp. 36-49.
- [75] Schwarz S., Maute K., Ramm E., "**Topology and Shape Optimization for Elastoplastic Structural Response**", Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., v. 190,p. 2135-55, 2001.
- [76] Segerlind, L. J., 1976, "**Applied Finite Element Analysis**", Jonh Wiley & Sons, New York.
- [77] Shames, I. H., Dym, C. L., "**Energy and Finite Element Methods in Structural Mechanics**", McGraw-Hill, New York, 1985.
- [78] Somerekun, G. A. E., "**Genetic Algorithms for Composite Laminate Design and Optimization**", Dissertação de Mestrado, Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, VA, USA, 1997.
- [79] Sigmund, O., 1998, "**Systematic Design of Electrothermomechanical Actuators Using Topology Optimization**", Modelling and Similation of Microsystems, Semiconductors, Sensors and Actuators, Califórnia, MSM98, pp. 350-355,

- [80] Sigmund, O., 1997, "**On the design of compliant mechanism using topology optimization**", *Mechanics of Structures and Machines*, 25, pp. 495-526.
- [81] Sines, G., 1959, "**Behavior of Metals under Complex Static and Alternating Stresses**", *Metal Fatigue*, McGraw-Hill, New York, pp. 145-169.
- [82] Stolpe, M. e Svanberg, K., "**Modeling Topology Optimization Problems as Mixed Linear 0-1 Programs**", ISRN KTH, Opt. Syst., FR 01/10 SE, Royal Institute of Technology, 2001
- [83] Silva, E. C. N., Nishiwaki, S. Kikuchi, N., 2000, "**Topology Optimization Design of Flexensional Actuators**", *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, vol. 47, pp. 657-671.
- [84] Susuki, K., Kikuchi, N., 1991, "**A Homogenization Method for Shape and Topology Optimization**", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 93, pp. 291-318.
- [85] Thomsen, J., 1992, "**Topology Optimization Composed of One or Two Materials**", *Structural Optimization*, vol. 5, pp. 108-115.
- [86] Olhoff, N., Kog, L., Thomsen, J., 1993, "**Bi-material Topology Optimization**", In: Kerskovites J., editor, *Structural Optimization*, 93, COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro, RJ, Brasil, pp. 327-334.
- [87] Vanderplaats, G. N., 1984, "**Numerical Optimization Technics for Engineering Design**", McGraw-Hill, New York.
- [88] Yang, R. J., Chen, C. J., 1996, "**Stress-Based Topology Optimization**", *Structural Optimization*, vol. 12, pp. 98-105.
- [89] Yin, L., Ananthasuresh, G. K., 2002, "**A Novel Topology Design Scheme for the Multi-physics Problems of Electro-thermally Actuated Compliant Micromechanisms**", *Sensors and Actuators A*, vol. 97-98, pp. 599-609.
- [90] Zienkiewicz, O. C. & Taylor, R. L., "**The Finite Element Method**", Fourth Edition, vol.1 e 2, McGraw-Hill Book Company, ISBN 0-07-084175-6, 1989.

Apêndice A

Descrição do Procedimento

O desenvolvimento de cada projeto de mecanismo flexível pode ser dividido, de forma geral, em três etapas básicas:

- Pré-processamento;
- Processamento;
- Pós processamento.

A etapa de pré-processamento compreende a definição do domínio do projeto, condições de contorno (deslocamento prescrito, carregamento, molas), informações sobre as propriedades do material e da mola, e discretização do domínio em uma malha de elementos finitos. Todas estas informações são geradas através da interface gráfica de um software comercial de pré-processamento escolhido (GID, PATRAN, ANSYS, *etc.*). Munido de todos os dados referentes ao problema, o software gera um arquivo de texto *input.dat*, que será a entrada de dados do programa em Fortran (na etapa de processamento). Neste trabalho foram utilizados dois softwares para o pré-processamento: o GID 7.2 e o PATRAN 2004.

O GID foi utilizado inicialmente devido à sua simplicidade, mas foi substituído posteriormente pelo PATRAN que é muito mais robusto e oferece recursos importantes como a otimização da largura de banda da matriz de rigidez e o refino h -adaptativo da malha de elementos finitos.

Para o PATRAN gerar o arquivo de texto *input.dat* no formato requerido para o processamento foi criado um programa em linguagem PCL (*Patran Command Language*) que é responsável pelo gerenciamento dos dados. Maiores informações sobre a linguagem PCL podem ser obtidas consultando o Manual de Referência do software. As rotinas de programação para o refino h -adaptativo (tanto em linguagem FORTRAN quanto em PCL) foram extraídas e adaptadas do trabalho de COSTA Jr (2003). A Fig. A.1 ilustra o procedimento.

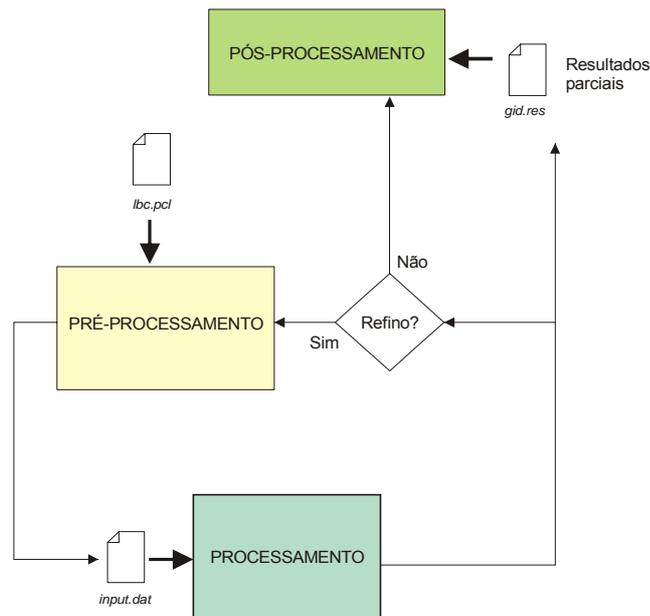


Figura A.1: Etapas do projeto de mecanismos flexíveis

O arquivo *input.dat* contém todas as informações referentes a malha de elementos finitos tais como: número de elementos, número de nós, coordenadas dos nós, conectividades, graus de liberdade dos nós; assim como as condições de contorno (carregamentos) e molas (número de molas, cossenos diretores, rigidez da mola, força admissível). A seguir é apresentado um exemplo de arquivo *input.dat*.

```
%control
```

```
%control.header
```

```
Arquivo gerado pelo PATRAN 2004
```

```
%control.data
```

```
1499 1 1 1 0
```

```
%nodes
```

```
%nodes.data
```

```
1 3.0000000e+001 1.5000000e+001 0.0E+0 0 0 0
2 2.9400000e+001 1.5000000e+001 0.0E+0 0 0 0
3 3.0000000e+001 1.4400000e+001 0.0E+0 0 0 0
4 2.9466987e+001 1.4150000e+001 0.0E+0 1 1 0
5 2.8960770e+001 1.4400000e+001 0.0E+0 1 1 0
6 2.8800000e+001 1.5000000e+001 0.0E+0 0 0 0
7 3.0000000e+001 1.3800000e+001 0.0E+0 1 0 0
```

```
.
```

```
.
```

```

.

%element
%element.num.groups
  15
%element.set.control
  2846   3   2   0   0   0   0   1   5   1   0

%element.set.dof
  1   2
%element.set.data
      1      677      661      636      1      1
      2      636      661      621      1      1
      3      621      661      648      1      1
      4      621      648      608      1      1
      5      608      648      635      1      1
      6      608      635      594      1      1
      7      594      635      623      1      1

.
.
.

%ConcentratedLoadData
  1

%nod,idirn,fload
  1499   1  -500.0d+00

%ConcentratedSpringsData
  1

%nod,Es,Ks,Fadm
  578   1.0d+00  0.0d+00  100.0d+00  50000.0d+00

%material

```

```
%material.group.num_col_data
    2
%material.temperature
    0.0000000
%material.properties
    0.21000E+06    0.30000E+00    0.15000E+00
```

A etapa de processamento é realizada no programa desenvolvido em linguagem Fortran orientada ao objeto. A linguagem orientada ao objeto permitiu a utilização de muitas rotinas já implementadas em trabalhos anteriores, que foram desenvolvidas no grupo de pesquisa, tais como as rotinas de elementos finitos e de otimização.

O Fluxograma A.2 ilustra as atividades básicas do programa.

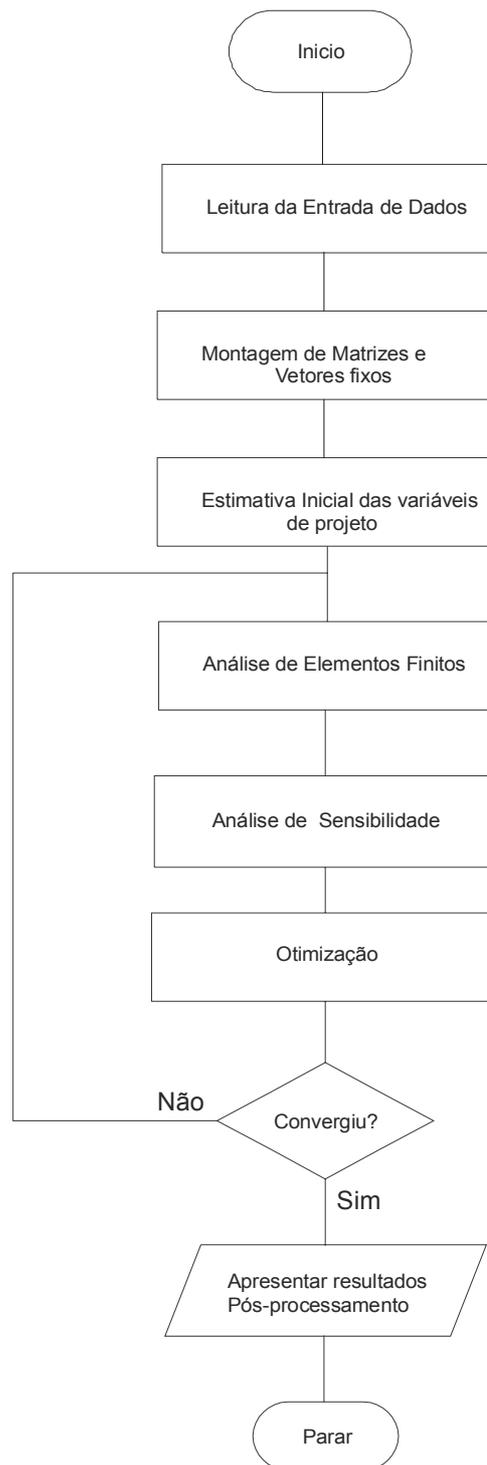


Figura A.2: Fluxograma básico da etapa de processamento

O programa principal denominado *main* utiliza várias classes. Uma *classe* unifica um novo tipo de entidade e suporta dados que representam seu estado com rotinas (funções e subrotinas) que acessam e/ou modificam estes dados. Em outras palavras, cada classe tem o tipo de dado e especificações para definir o objeto e a funcionalidade para efetuar determinada computação.

Inicialmente o *main* seleciona as classes que serão utilizadas e dentro destas classes também são selecionadas quais subrotinas e funções que estão disponibilizadas no programa.

As variáveis de projeto (densidades nodais), limites de caixa, e deslocamento são definidas como ponteiros, o que oferece uma alternativa mais flexível para alocar listas, criar e manipular listas acopladas e outras estruturas de dados dinâmicas.

O programa principal desenvolve basicamente as seguintes ações:

1. Leitura de dados do arquivo *input.dat* para a análise estrutural.
2. Captura a informação de banco de dados associada com os dados do grupo do elemento.
3. Captura a informação de banco de dados associada com os dados de controle global.
4. Inicializa o parâmetro de relaxação de tensão.
5. Captura informações sobre a malha: número total de nós, número de graus de liberdade.
6. Aloca memória para o vetor dos valores iniciais das variáveis de projeto, os vetores dos limites laterais e para o vetor deslocamento.
7. Atribue um valor inicial para as variáveis de projeto (densidades nodais).
8. Fixa uma tolerância para a convergência do *solver* utilizado na otimização.
9. Chama o *solver* usado para a otimização. Foram utilizados os algoritmos de regiões de confiança (Krajnc, 2001; Martinez, 2002), e o do Método de Assíntotas Móveis proposto por Svanberg (1987).
10. Gera a malha de elementos finitos a ser utilizada na etapa de posprocessamento.
11. Determina o campo de deslocamento.

Apêndice B

Algoritmo de Otimização

Com a aplicação do Método do Lagrangeano Aumentado, o problema de otimização de leiaute reduz-se a solução de uma seqüência de problemas de otimização com restrições de caixa, a qual é resolvida por um método de projeção de segunda ordem que usa um método de Quase-Newton sem memória. Aqui se faz alguns comentários sobre o método do Lagrangeano Aumentado e uma descrição da direção de descida adotada no algoritmo de minimização.

B.1 O problema de otimização

O problema de otimização em sua forma geral pode ser expresso da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ \text{sujeito a } h_j(x) &= 0, & j = 1, 2, \dots, n_h \\ g_k(x) &\leq 0, & k = 1, 2, \dots, n_g \end{aligned} \tag{B.1}$$

onde $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ são as variáveis de projeto e n_h e n_g são respectivamente, o número de restrições de igualdade e de restrições de desigualdade.

A primeira abordagem para lidar com este problema é baseada na idéia de uma descida iterativa confinada no conjunto restrição. Dado um ponto viável x_k , uma direção de descida d_k é escolhida de tal forma que satisfaça a condição de descida $\nabla f(x_k)' d_k < 0$ e a condição $x_k + \alpha d_k$: viável para todo passo α positivo e suficientemente pequeno. Uma busca ao longo da linha $\{x_k + \alpha d_k \mid \alpha > 0\}$ produz um novo ponto candidato $x_{k+1} = x_k + \alpha d_k$ que satisfaz $f(x_{k+1}) < f(x_k)$. Há vários métodos de direção viável que seguem esta idéia, tais como Frank-Wolfe, Zoutendijc, Rosen, Goldstein, entre outros. Estes métodos possuem versões mais sofisticadas e são muito populares para problemas com restrições lineares. No entanto, são incapazes de lidar com restrições de igualdade não lineares e inadequados para restrições de desigualdade não lineares.

Uma segunda abordagem baseia-se na possibilidade de resolver um sistema de equações e possivelmente inequações que constituem as condições necessárias de otimalidade para o problema de otimização.

Usando as condições de Kuhn-Tucker pode-se estabelecer um teste a ser aplicado ao ponto candidato para verificar se este trata-se de um mínimo resolvendo um conjunto de equações não-lineares. Para problemas de minimização convexa, as condições necessárias de Kuhn-Tucker são também suficientes e qualquer mínimo local é também global. Para problemas com restrições de igualdade, estas condições são:

$$\nabla_x \mathcal{L}(x, \lambda) = \nabla f(x) + \nabla h(x) \lambda = 0 \quad (\text{B.2})$$

$$\nabla_\lambda \mathcal{L}(x, \lambda) = h(x) = 0 \quad (\text{B.3})$$

onde \mathcal{L} é a função Lagrangeana:

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda' h(x) \quad (\text{B.4})$$

Um característica distinta desta abordagem é que o multiplicador de Lagrange λ é tratado em uma base igual com o vetor x . Iterações são realizadas simultaneamente em x e λ , contrastando com a abordagem de descida onde apenas x é iterado. Algoritmos deste tipo são as vezes denominados métodos Lagrangeanos, ver Bertsekas (1982).

Uma terceira abordagem é baseada na eliminação das restrições através do uso de funções de penalidade. Estas funções permitem que a não satisfação (ou o "risco de não satisfação") de uma restrição é sancionada com o acréscimo da função objetivo, de maneira que a função que define a restrição é eliminada como tal e substituída por um termo introduzido no objetivo.

Na "penalização interna" a função objetivo é modificada adicionando-se um termo funcional que tende a infinito quando o ponto se aproxima da fronteira do conjunto factível. Estes métodos são também conhecidos como métodos de barreira, pois uma espécie de barreira é construída ao redor da região factível.

Na "penalização externa" acrescenta-se um termo funcional na função objetivo no qual o custo aumenta se há uma violação da restrição. A solução do problema penalizado externamente está geralmente, fora do conjunto factível, mas tende a se aproximar deste, a medida que o termo de penalização aumenta.

O inconveniente da penalização é que quando esta atinge valores elevados, o problema torna-se mal comportado em termos de convergência. Além disto, a estrutura do problema é transtornada quando se soma uma restrição à função objetivo modificando a fisionomia deste. Por outro lado, os métodos de penalização são de fácil implementação, se adaptam à problemas de grande porte e tem a capacidade de se enriquecer automaticamente com os progressos na realização do procedimento de otimização de problemas mais simples. Um

estudo mais aprofundado pode ser encontrado em Martinez & Santos (1995), Bertsekas (1982).

B.2 Método do Lagrangeano Aumentado

Neste trabalho, utilizaremos o método do Lagrangeano Aumentado para resolver o problema de otimização. O Lagrangeano Aumentado é baseado nos métodos de penalidade quadrática e no uso dos multiplicadores de Lagrange, os quais visam transformar um problema de otimização restrito em uma seqüência de subproblemas irrestritos por meio de penalizações das violações das restrições. Este método tem por objetivo conciliar dois aspectos: contornar o mal condicionamento proveniente de penalizações elevadas e evitar a perda de estrutura de minimização (Martinez, 1995).

Os métodos do Lagrangeano Aumentado foram sugeridos independentemente por Hestenes (1969) e Powell (1978). São algoritmos do tipo primal-dual, cujas iterações iniciam-se considerando um conjunto de multiplicadores (variáveis duais), os quais são utilizados como pesos sobre as penalizações das restrições. Todo o processo de cálculo computacional é realizado no espaço primal buscando a minimização do funcional objetivo penalizado (Lagrangeano Aumentado).

O procedimento comum para a solução do problema de minimização é usar um processo iterativo onde, a cada iteração, se resolve um subproblema irrestrito, onde os parâmetros de penalização e os multiplicadores de Lagrange permanecem constantes. Os multiplicadores de Lagrange μ^k e o parâmetro de penalização ϵ^k são adequadamente atualizados em cada k - *ésimo* subproblema do processo, até que se alcance a convergência.

O parâmetro de penalidade é atualizado segundo o seguinte esquema:

$$\epsilon^{k+1} = \begin{cases} \gamma \epsilon^k, & \text{se } \epsilon^k < \epsilon_{crit}, \text{ para algum } \gamma \in (0, 1) \\ \epsilon_{crit}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

onde o parâmetro de penalidade inicial ϵ^k e o escalar γ dependem do problema específico e são determinados empiricamente mediante testes computacionais. A escolha inadequada destes parâmetros pode dificultar a convergência do algoritmo.

O esquema de atualização dos multiplicadores de Lagrange utilizado neste trabalho é dado por:

$$\mu_j^{k+1} = \max \left\{ 0; \mu_j^k + \frac{1}{\epsilon^k} h_j(\vec{\rho}, \vec{u}_o(\vec{\rho})) \right\} \quad (\text{B.6})$$

O valor inicial do vetor dos multiplicadores de Lagrange é zero.

B.3 Método do Gradiente Projetado

O método de projeção a ser considerado é caracterizado por iterações cujos movimentos são nas direções de descida, os quais são restringidos a residirem em domínios poliédricos. Conseqüentemente os pontos obtidos ao longo do processo iterativo são factíveis e o valor da função objetivo decresce constantemente.

Para descrever o processo, considera-se o seguinte problema de otimização com restrições do tipo caixa:

$$\min f(\mathbf{x}) \tag{B.7}$$

sujeito a

$$x_i^{\text{inf}} \leq x_i \leq x_i^{\text{sup}}, \quad i = 1, \dots, m \tag{B.8}$$

Seja \mathbf{x}^k um ponto factível, da k -ésima iteração do problema de otimização, o qual tem associado q restrições de desigualdade ativas. Definem-se por restrições ativas, as restrições de desigualdade lateral que satisfazem:

$$\begin{cases} |x_i - x_i^{\text{inf}}| < \text{tol}g \\ \text{ou} \\ |x_i - x_i^{\text{sup}}| < \text{tol}g, i = 1, \dots, m. \end{cases} \tag{B.9}$$

As restrições laterais podem ser expressas como:

$$\begin{aligned} g_{2i-1}(\mathbf{x}) &= x_i^{\text{inf}} - x_i \leq 0 \\ g_{2i}(\mathbf{x}) &= x_i - x_i^{\text{sup}} \leq 0 \end{aligned} \tag{B.10}$$

logo,

$$\frac{\partial g_{2i-1}}{\partial x_i} = -\delta_{ij} \therefore \nabla \mathbf{g}_{2i-1} = -\mathbf{e}_i; \tag{B.11}$$

$$\frac{\partial g_{2i}}{\partial x_i} = \delta_{ij} \therefore \nabla \mathbf{g}_{2i} = \mathbf{e}_i. \tag{B.12}$$

Define-se também a matriz $[\mathbf{N}_q]$ composta pelos gradientes das restrições ativas, i.e.,

$$[\mathbf{N}_q] = [\pm \mathbf{e}_{i1} \quad \dots \quad \pm \mathbf{e}_{iq}] = [\pm \nabla \mathbf{g}_{i1} \quad \dots \quad \pm \nabla \mathbf{g}_{iq}] \tag{B.13}$$

O método do gradiente projetado consiste basicamente em partir de \mathbf{x}^k e determinar \mathbf{x}^{k+1} através de uma iteração do tipo direção de descida:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha^k \mathbf{s}^k \quad (\text{B.14})$$

onde α^k é o comprimento do passo ao longo da direção de descida \mathbf{s}^k , associada à k -ésima iteração. Desta forma, o problema consiste principalmente na determinação de uma direção de descida \mathbf{s} que produz a máxima diminuição em $f(\mathbf{x})$ para um passo unitário, $(\|\mathbf{s}\|_{\mathbf{M}} = \sqrt{\langle \mathbf{s}, [\mathbf{M}] \mathbf{s} \rangle} = 1, \text{ dependente da métrica utilizada})$, no subespaço das restrições ativas, i.e.

$$\min_{\mathbf{s}} \{ \langle \mathbf{s}, \nabla f \rangle + \mu (\langle \mathbf{s}, [\mathbf{M}] \mathbf{s} \rangle - 1) \} \quad (\text{B.15})$$

sendo que $[\mathbf{M}]$ é simétrica e positiva definida. Em adição, como o problema contém restrições, impõe-se que \mathbf{s}^k pertença à interseção dos hiperplanos associados às restrições ativas. Logo,

$$[\mathbf{N}_q]^T \mathbf{s} = \mathbf{0} \quad (\text{B.16})$$

Como resultado, o conjunto de restrições ativas permanece ativo em \mathbf{x}^{k+1} . A direção de descida a que faremos uso será dada por

$$\mathbf{s}^k = -\frac{1}{2\mu} [\mathbf{P}_q] [\mathbf{M}]^{-1} \nabla f(\mathbf{x}^k) \quad (\text{B.17})$$

onde $[\mathbf{P}_q]$ é o operador projeção oblíquo.

B.4 Determinação do operador projeção oblíquo - $[\mathbf{P}_q]$

A função Lagrangiana associada ao problema de minimização com restrição, definido em B.15 e B.16, é dada por:

$$L(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) = \langle \mathbf{s}, \nabla f \rangle + \mu (\langle \mathbf{s}, [\mathbf{M}] \mathbf{s} \rangle - 1) + \langle \boldsymbol{\lambda}, [\mathbf{N}_q]^T \mathbf{s} \rangle \quad (\text{B.18})$$

Aplicando as condições necessárias de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker associadas ao problema obtêm-se:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{s}} = 0 \therefore \mathbf{s} = -\frac{1}{2\mu} [\mathbf{M}]^{-1} \{ \nabla f - [\mathbf{N}_q] \boldsymbol{\lambda} \} \quad (\text{B.19})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = 0 \therefore \langle \mathbf{s}, [\mathbf{M}] \mathbf{s} \rangle = 1 \quad (\text{B.20})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda}_k} = 0 \therefore [\mathbf{N}_q]^T \mathbf{s} = \mathbf{0} \quad (\text{B.21})$$

Agora, de acordo com as Eqs. B.21 e B.19 deriva-se:

$$\boldsymbol{\lambda} = \left\{ [\mathbf{N}_q]^T [\mathbf{M}]^{-1} [\mathbf{N}_q] \right\}^{-1} \left\{ [\mathbf{N}_q]^T [\mathbf{M}]^{-1} \right\} \boldsymbol{\nabla} f \quad (\text{B.22})$$

Além disso, $[\mathbf{M}] \mathbf{s} \cdot \mathbf{s} = 1$, substituindo o valor de \mathbf{s} dado pela eq. (a.13), tem-se que:

$$\mu = \frac{1}{2} \left\langle [\mathbf{M}]^{-1} \{ \boldsymbol{\nabla} f - [\mathbf{N}_q] \boldsymbol{\lambda} \}, \{ \boldsymbol{\nabla} f - [\mathbf{N}_q] \boldsymbol{\lambda} \} \right\rangle^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{B.23})$$

ou ainda,

$$\mu = \frac{1}{2} \left\| \boldsymbol{\nabla} f - [\mathbf{N}_q] \boldsymbol{\lambda} \right\|_{\mathbf{M}^{-1}} \quad (\text{B.24})$$

onde:

$$\|\cdot\|_{\mathbf{M}^{-1}} = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{M}^{-1}}} \quad \text{e} \quad \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_{\mathbf{M}^{-1}} = [\mathbf{M}]^{-1} \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \quad (\text{B.25})$$

Substituindo as Eqs. B.22 e B.24 na definição do vetor \mathbf{s} dado na Eq. B.19, obtém-se:

$$\mathbf{s} = -\frac{1}{2\mu} [\mathbf{P}_q] [\mathbf{M}]^{-1} \boldsymbol{\nabla} f \quad (\text{B.26})$$

onde o operador projeção oblíquo $[\mathbf{P}_q]$, ponderado por $[\mathbf{M}]^{-1}$, é dado por:

$$[\mathbf{P}_q] = [\mathbf{I}] - [\mathbf{M}]^{-1} [\mathbf{N}_q] \left\{ [\mathbf{N}_q]^T [\mathbf{M}]^{-1} [\mathbf{N}_q] \right\}^{-1} [\mathbf{N}_q]^T \quad (\text{B.27})$$

sendo $[\mathbf{I}]$ a matriz identidade.

B.5 Aproximação Quase-Newton

Aqui é considerado que a aproximação da matriz Hessiana é denotada por $[\mathbf{M}]$. A sua respectiva inversa pode ser aproximada por:

$$\begin{aligned} [\mathbf{S}_{k+1}^{BFGS}] &= [\mathbf{S}_k^{BFGS}] + \left\{ 1 + \frac{\langle \mathbf{y}_k, [\mathbf{S}_k^{BFGS}] \mathbf{y}_k \rangle}{\langle \mathbf{d}_k, \mathbf{y}_k \rangle} \right\} \frac{[\mathbf{d}_k \otimes \mathbf{d}_k]}{\langle \mathbf{d}_k, \mathbf{y}_k \rangle} + \\ &\quad - \frac{[\mathbf{d}_k \otimes \mathbf{y}_k] [\mathbf{S}_k^{BFGS}]}{\langle \mathbf{d}_k, \mathbf{y}_k \rangle} - \frac{[\mathbf{S}_k^{BFGS}] [\mathbf{y}_k \otimes \mathbf{d}_k]}{\langle \mathbf{d}_k, \mathbf{y}_k \rangle} \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

se $\langle \mathbf{d}^k, \boldsymbol{\nabla} f^k \rangle \leq -\epsilon^{-\frac{1}{2}} \|\mathbf{d}_k\|_2 \|\boldsymbol{\nabla} f^k\|_2$, caso contrário $[\mathbf{S}_{k+1}^{BFGS}] = [\mathbf{I}]$. Aqui, define-se $\mathbf{y}_k = \boldsymbol{\nabla} f_{k+1} - \boldsymbol{\nabla} f_k$ e $\mathbf{d}_k = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k$.