

Aproximação relativística para as densidades de corrente nuclear no espalhamento $(e, e'p)$

AUTOR*

CEZAR AUGUSTO ROMANE JACOB

Orientador :

JOSÉ RICARDO MARINELLI

*Dissertação apresentada à Pós-Graduação
em Física da Universidade Federal de Santa
Catarina, como parte dos requisitos para ob-
tenção do título de Mestre em Física*

UFSC - Florianópolis

Maio de 2005

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES.

Aproximação relativística para as densidades de corrente nuclear no espalhamento $(e, e'p)$

Cezar Augusto Romane Jacob

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de **Mestre em Física**, na área de concentração em Física Nuclear e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação.

Prof. Dr. Marcelo Henrique R. Tragtenberg
Coordenador do Curso

Prof.Dr. José Ricardo Marinelli
(FSC/UFSC-Orientador)

Prof.Dr. Milton Massumi Fujimoto
(DF/UFPR-Externo)

Prof.Dr. Sidney A. dos Santos
(FSC/UFSC)

Prof.Dr. Frederico F. S. Cruz
(FSC/UFSC-Suplente)

Dedicatória

Dedico este trabalho ao meu pai Luiz, minha mãe Iolanda, minhas irmãs, minha namorada Adriana e a todas as pessoas que me ajudaram neste período.

Agradecimentos

Agradeço a todos aqueles que de uma forma ou de outra contribuíram para que este trabalho se tornasse realidade. Minha família, que sempre me apoiou, meus colegas da pós-graduação, que sempre estavam ali presentes em meu dia-a-dia, meu orientador, que com muita paciência conseguiu me conduzir neste trabalho, aos professores, que sempre contribuíram para o aprimoramento de meus conhecimentos e a minha namorada, que sempre esteve presente nos bons e nos maus momentos. Agradeço também a Deus, por ter guiado meus passos até aqui. Agradeço a todos aqueles que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho e que eu não citei. A todos o meu muito obrigado.

Sumário

| | |
|--|-----------|
| Resumo | vii |
| Abstract | viii |
| Introdução | 9 |
| 1 Teoria do Espalhamento | 13 |
| 1.1 Cinemática do espalhamento | 13 |
| 1.1.1 Notação e definições preliminares | 13 |
| 1.1.2 Cinemática do espalhamento de elétrons relativísticos | 19 |
| 1.2 Dinâmica do espalhamento | 22 |
| 1.2.1 Interação eletromagnética com a matéria | 22 |
| 1.2.2 Seção de choque (e, e') | 25 |
| 1.3 Espalhamento $(e, e'p)$ | 27 |
| 1.3.1 Os fatores de forma no espalhamento $(e, e'p)$ | 30 |
| 2 Densidade de Corrente Nuclear | 33 |
| 2.1 Teoria básica | 33 |
| 2.1.1 Modelo de Walecka e aproximação relativística de Hartree | 33 |
| 2.1.2 Densidade de corrente para partículas com uma es- trutura interna | 37 |
| 2.2 Cálculo da componente temporal da densidade de corrente | 40 |
| 2.3 Cálculo da componente espacial da densidade de corrente . | 50 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 3 | Análise dos Resultados Obtidos | 57 |
| 3.1 | Geometria do espalhamento | 57 |
| 3.2 | Resultados | 58 |
| 3.2.1 | Resultados para as componentes da densidade de corrente | 59 |
| | Conclusão | 68 |
| | Apêndice | 70 |
| | Bibliografia | 73 |

Resumo

Neste trabalho, nós nos dedicamos a estudar a estrutura nuclear a partir da obtenção das densidades de corrente de transição de um próton arrancado do núcleo, em um espalhamento $(e, e'p)$. Este espalhamento envolve um elétron com alta energia que interage com um núcleo, tendo como estado final um próton no contínuo e o núcleo residual, sendo que o próton é detectado em coincidência com o elétron espalhado. As densidades são obtidas em uma aproximação relativística para a estrutura nuclear (aproximação relativística de Hartree) e supondo que o próton, após deixar o núcleo, pode ser descrito por uma onda plana. Tais densidades podem ainda ser utilizadas na obtenção da secção de choque de espalhamento para o processo $(e, e'p)$, as quais trazem consigo informações únicas sobre a função de onda do próton ligado. Uma aplicação numérica é feita para o ^{16}O .

Abstract

Using a relativistic model to describe the nuclear structure, based on nucleon and meson degrees of freedom (relativistic Hartree approximation), we calculate the transition current densities appropriate to describe high energy electron scattering by a nucleus, in which a proton is emitted and detected in coincidence with the scattered electron, the so-called $(e, e'p)$ process in the quasielastic regime. The current calculations are suitable to obtaining the $(e, e'p)$ cross section in a approximation in which both the electron and the emitted proton are described by plane waves. A numeric application is presented for the ^{16}O nucleus.

Introdução

Uma das técnicas mais úteis na obtenção de informações envolvendo partículas microscópicas é o espalhamento entre tais partículas, pois esta pode revelar várias características tanto da partícula incidente quanto da partícula alvo, assim como dos produtos da reação (quando houver). A grandeza mais importante neste tipo de processo é a seção de choque de espalhamento (ou de reação). Para que ocorra o espalhamento as partículas interagem entre si, ou mais precisamente, o campo associado a uma partícula interage com o campo da outra, causando um desvio em sua trajetória. É claro que, do ponto de vista quântico, a seção de choque deve depender da distribuição de probabilidade das partículas, ou ainda melhor, da densidade de corrente de probabilidade associada a cada uma delas. Procura-se então formular modelos teóricos que permitam obter estas densidades, cuja validade pode ser testada comparando-se com a seção de choque medida experimentalmente. Outras informações importantes neste tipo de experimento são o ângulo de espalhamento e a energia final das partículas detectadas, bem como seus momentos. Estas quantidades podem ser obtidas por medidas diretas dos produtos do espalhamento e a partir daí inferimos os valores de grandezas que não podemos medir diretamente.

Um tipo de espalhamento importante na obtenção de informações sobre o núcleo atômico, ou de forma mais geral, espalhamento por alvos hadrônicos, é o que utiliza as chamadas pontas de prova eletromagnéticas. Neste caso, a interação entre as partículas é essencialmente eletromagnética. É o caso do espalhamento de elétrons de alta energia (da ordem de algumas centenas de MeV até alguns poucos GeV) pelo núcleo.

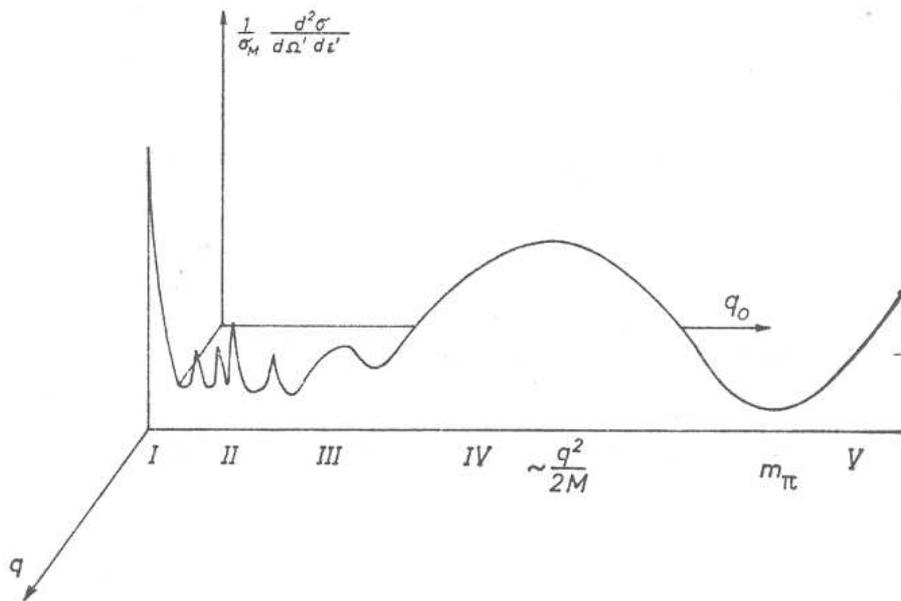


Figura 1: Um esquema da seção de choque diferencial para espalhamento elétron-núcleo (e, e') para um particular momento transferido. Em suas várias regiões, a seção de choque exibe (I) espalhamento elástico, (II) excitação de níveis discretos, (III) nível das ressonâncias gigantes, (IV) o pico quasi-elástico e (V) contribuição da produção de píons.[1]

No gráfico da figura 1, é mostrado um esquema da seção de choque diferencial para o espalhamento de elétrons, ou simplesmente (e, e'), para um determinado momento transferido ao núcleo alvo [1]. Na região (I) nós vemos o pico produzido pelo espalhamento elástico. A região (II) representa a excitação de níveis discretos do alvo, enquanto que a região (III) representa a energia no contínuo do sistema nuclear, onde os efeitos de ressonâncias gigantes são dominantes. O pico quasi-elástico é visto em (IV). Nele, o elétron espalhado interage como se estivesse sendo espalhado por um nucleon livre. Se o nucleon aqui fosse de fato livre, este pico seria fino e ocorreria para uma energia $q^2/2M$, para um momento transferido q e massa nucleônica M . Esta seria a energia recebida pelo nucleon. O efeito da ligação do nucleon arrancado ao núcleo muda a posição do pico para $q^2/2M^*$, onde M^* é definida como a massa efetiva para o nucleon. Esta ligação também alarga o pico devido à distribuição de momentos nos níveis dos nucleons. Finalmente, na região V nós estamos sobre o limiar para produção de píons no núcleo, ou seja, os efeitos mesônicos são explicitos no sistema nuclear.

O chamado espalhamento ($e, e'p$) é a reação na qual a partícula incidente

é um elétron e a partícula alvo é um núcleo, o produto é um elétron espalhado observado em coincidência com um próton arrancado do núcleo por este mesmo elétron. Neste espalhamento o elétron tem alta energia (geralmente de 0,5 a 1 GeV), pois precisa vencer as forças nucleares. Um elétron de tão alta energia pode interagir diretamente com um próton do núcleo, sem sentir o restante deste. Quando isto acontece, dizemos que o espalhamento está na região quasi-elástica. Não é de fato elástica pois o núcleo inicial A passa a ser um núcleo $(A-1)$ após a interação. Neste trabalho, estamos interessados no espalhamento $(e, e'p)$ na região quasi-elástica. Como pretendemos deixar claro ao longo deste trabalho, a seção de choque de espalhamento $(e, e'p)$ depende das densidades de corrente de transição do próton arrancado, as quais podem ser obtidas a partir de uma função de onda calculada a partir de um modelo para a estrutura nuclear. Vamos considerar aqui o chamado modelo de Walecka [2] para o núcleo em sua forma mais simples. Este modelo considera efeitos relativísticos explicitamente na dinâmica dos nucleons, o que se justifica em nosso caso devido à crescente faixa de energia dos feixes de elétrons produzidos nos grandes aceleradores.

Baseando-se na teoria quântica de campos, Walecka propôs um modelo para o estudo da dinâmica das interações entre as partículas que compõem o núcleo. Neste modelo, as interações ocorrem através da troca de mésons. Em sua forma mais simples usada aqui, podemos considerar apenas um méson escalar e um méson vetorial, conhecidos respectivamente por σ e ω . O modelo está baseado em um formalismo lagrangeano onde são descritos todos os graus de liberdade hadrônicos através de campos. A partir desta lagrangeana, podemos obter a hamiltoniana do sistema e finalmente, as funções de onda das partículas nucleares. Este modelo substituiu a forma tradicional do problema de muitos corpos como era tratado o núcleo anteriormente. O problema de muitos corpos, de uma forma ou de outra, gera no entanto dificuldades na obtenção da solução e por isso precisamos recorrer a algum tipo de aproximação para se chegar a resultados.

A aproximação relativística de Hartree (que é uma das formas de aproximação de campo médio) consiste em substituir os campos mesônicos (vetorial e escalar) por seus valores esperados. O problema pode então ser resolvido obtendo-se as funções de onda de partícula independente para o

sistema. Usaremos aqui resultados conhecidos na literatura para a aproximação de Hartree a fim de obtermos a dependência das componentes da densidade de corrente do próton arrancado no processo $(e, e'p)$, com o momento do mesmo ainda em estado ligado (momento inicial) no núcleo. Faremos ainda uma aplicação numérica para os diferentes níveis de partícula independente do núcleo de oxigênio (^{16}O). Um teste para a validade da equação da continuidade dentro das hipótese aqui utilizadas, também é apresentado e discutido ao final do trabalho.

Capítulo 1

Teoria do Espalhamento

Vamos neste Capítulo apresentar em linhas gerais a teoria necessária para o estudo do espalhamento de elétrons pelo núcleo atômico, considerando um regime relativístico para o movimento do elétron. Além da cinemática do espalhamento, discutimos ainda a obtenção da secção de choque de espalhamento na conhecida aproximação de Born e apresentamos os principais resultados para o caso em que os elétrons são detetados em coincidência com prótons emitidos pelo núcleo. A relação entre a secção de choque e as densidades de corrente calculadas neste trabalho, também é discutida.

1.1 Cinemática do espalhamento

Nesta seção definiremos a notação a ser usada neste trabalho, assim como a cinemática envolvida no espalhamento de um elétron pelo núcleo.

1.1.1 Notação e definições preliminares

Antes de mais nada, é preciso deixar claro a notação a ser utilizada em nossos cálculos. Definiremos o quadri-vetor x^μ com $\mu = 0, 1, 2, 3$, onde:

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z \quad (1.1)$$

e t, x, y e z são respectivamente as coordenadas de tempo e espaço.

Em termos de x^μ , as transformações de Lorentz assumem a seguinte forma:

$$\begin{cases} x^{0'} = \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ x^{1'} = \gamma(x^1 - \beta x^0) \\ x^{2'} = x^2 \\ x^{3'} = x^3 \end{cases} \quad (1.2)$$

onde $\beta = v/c$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ e v é a velocidade relativa dos referenciais inerciais na direção x .

Introduziremos a métrica $g_{\mu\nu}$ que pode ser escrita como a seguinte matriz:

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Agora definiremos o quadri-vetor covariante (índice baixo), como sendo:

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \quad (1.4)$$

onde usamos a convenção de soma de Einstein. Por outro lado, chamamos o quadri-vetor com índice alto de contravariante.

O invariante I pode ser escrito como $I = x_\mu x^\mu$. Todos os demais quadri-vetores possuem esta propriedade. Assim, dados quaisquer dois quadri-

vetores, a quantidade:

$$a^\mu b_\mu = a_\mu b^\mu = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3 \equiv a \cdot b$$

permanece invariante. Ela é definida como o produto escalar de a e b .

Veremos, a partir de agora, como fica a notação para o momento (p) e energia (E) em termos de quadri-vetores.

Se partirmos da relação momento-energia relativística [3]:

$$[(E)^2 - p^2 c^2] - m^2 c^4 = 0 \quad (1.5)$$

obteremos:

$$p^\mu p_\mu - m^2 c^2 = 0 \quad (1.6)$$

onde $p_0 = E/c, p_1 = -p_x, p_2 = -p_y, p_3 = -p_z$. A quantização do sistema nos leva às relações [3]:

$$p_\mu \rightarrow i\hbar\partial_\mu \quad , \quad \text{onde} \quad \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (1.7)$$

Em termos das coordenadas, o operador ∂^μ pode ser expresso por:

$$\partial_0 = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \quad , \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{e} \quad \partial_3 = \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.8)$$

Substituindo (1.7) e (1.8) em (1.6) e aplicando a uma função de onda Ψ , chegamos à equação de Klein-Gordon para partículas livres:

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + \vec{\nabla}^2 \Psi = \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \Psi \quad (1.9)$$

Esta equação apresentava dificuldades de interpretação devido ao fato de ser de segunda ordem em t . Na verdade, a equação de Klein-Gordon descreve as partículas relativísticas de spin 0. Dirac determinou uma saída para encontrar uma fórmula de momento-energia relativística consistente com (1.5) e ao mesmo tempo de primeira ordem em t [3]:

$$i\hbar\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - mc\Psi = 0 \quad (1.10)$$

onde:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

e as σ^i são as matrizes de Pauli, 1 representa a matriz 2x2 identidade e 0 a matriz 2x2 nula. A função Ψ é, então, uma matriz coluna de quatro elementos:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix}, \quad (1.12)$$

também chamada de "spinor de Dirac". As componentes desse spinor não se transformam como um quadri-vetor, quando se vai de um sistema inercial a outro. Então, como elas se transformam? Se formos para um sistema de velocidade v na direção x , a transformação é:

$$\Psi \rightarrow \Psi' = S\Psi \quad (1.13)$$

onde S é a seguinte matriz 4x4 [3]:

$$S = a_+ + a_- \gamma^0 \gamma^1 = \begin{pmatrix} a_+ & a_- \sigma_1 \\ a_- \sigma_1 & a_+ \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

onde

$$a_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(\gamma \pm 1)} \quad (1.15)$$

e

$$S^\dagger S = S^2 = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c} \sigma_1 \\ -\frac{v}{c} \sigma_1 & 1 \end{pmatrix} \neq 1 \quad (1.16)$$

A soma dos quadrados dos elementos de um quadri-vetor não é invariante de Lorentz; nós precisamos de um sinal de menos para as componentes espaciais. No caso dos spinores, precisaremos de sinais de menos para a terceira e quarta componentes. Definimos, então:

$$\bar{\Psi} \equiv \Psi^\dagger \gamma^0 = (\Psi_1^*, \Psi_2^*, -\Psi_3^*, -\Psi_4^*) \quad (1.17)$$

e a quantidade:

$$\bar{\Psi} \Psi = \Psi^\dagger \gamma^0 \Psi = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 - |\Psi_3|^2 - |\Psi_4|^2 \quad (1.18)$$

é, então, um invariante relativístico, ou seja, $\bar{\Psi}'\Psi' \equiv \bar{\Psi}\Psi$.

Agora, passaremos a analisar a transformação por paridade, definida por [3]:

$$\Psi \rightarrow \Psi' = \gamma^0 \Psi \quad (1.19)$$

Obteremos:

$$(\bar{\Psi}\Psi)' = (\Psi')^\dagger \gamma^0 \Psi' = \Psi^\dagger (\gamma^0)^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \Psi = \Psi^\dagger \gamma^0 \Psi = \bar{\Psi}\Psi \quad (1.20)$$

Logo, $(\bar{\Psi}\Psi)$ é invariante sob paridade, ou seja, um escalar. Ao todo, existem 16 produtos da forma $\Psi_i^* \Psi_j$ (i e j variando de 1 a 4). Estes 16 produtos podem ser somados conjuntamente em várias combinações lineares para construir quantidades com propriedades de transformação por paridade diferentes:

| | | | | |
|-----|------------------------------------|-----------------------|----------------------|--------|
| (1) | $\bar{\Psi}\Psi$ | escalar | (uma componente) | |
| (2) | $\bar{\Psi}\gamma^5\Psi$ | pseudo-escalar | (uma componente) | |
| (3) | $\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$ | vetor | (quatro componentes) | (1.21) |
| (4) | $\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma^5\Psi$ | pseudo-vetor | (quatro componentes) | |
| (5) | $\bar{\Psi}\sigma^{\mu\nu}\Psi$ | tensor anti-simétrico | (seis componentes) | |

onde:

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu) \quad (1.22)$$

e

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

Estes 16 termos são tudo que podemos construir. Qualquer matriz 4x4 pode ser escrita como uma combinação linear destas 16 componentes.

1.1.2 Cinemática do espalhamento de elétrons relativísticos

Agora vamos abordar a cinemática do espalhamento em si. Vamos primeiramente supor que o nosso sistema de referência seja o laboratório. O elétron irá interagir com um núcleo em repouso (fixo em relação ao laboratório). Consideraremos um elétron com massa m_e e carga $-e$, quadri-momento inicial $\hbar k_i \equiv \hbar k_i^\mu = (\frac{E_i}{c}, \hbar \vec{k}_i)$, $\hbar k_f^\mu = (\frac{E_f}{c}, \hbar \vec{k}_f)$ é o quadri-momento final e $\hbar q^\mu$ o quadri-momento transferido para o alvo, onde $q^\mu = (k_i^\mu - k_f^\mu) \equiv (\frac{\omega}{c}, \vec{q})$ com $\omega = \frac{\Delta E}{\hbar}$ e $\vec{q} = (\vec{k}_i - \vec{k}_f)$. Temos ainda que:

$$q_\mu^2 \equiv q_\mu q^\mu \equiv q \cdot q = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - |\vec{q}|^2 \quad (1.24)$$

Para exemplificar, vamos olhar para a figura (1.1). O elétron transfere momento igual a $\hbar \vec{q}$ ao núcleo. Como este espalhamento envolve elétrons relativísticos, as energias envolvidas são muito maiores que a energia de repouso do elétron, que pode, então, ser desprezada. Logo $E_i = |\vec{k}_i| \hbar c$ e $E_f = |\vec{k}_f| \hbar c$ são as energias inicial e final do elétron. Pelo princípio da conservação de energia, temos:

$$E_i = E_f + E_{ex} + E_R \quad (1.25)$$

onde E_{ex} é a energia de excitação do núcleo e E_R é a sua energia de recuo. Iremos supor nesta seção que E_R seja considerado desprezível.

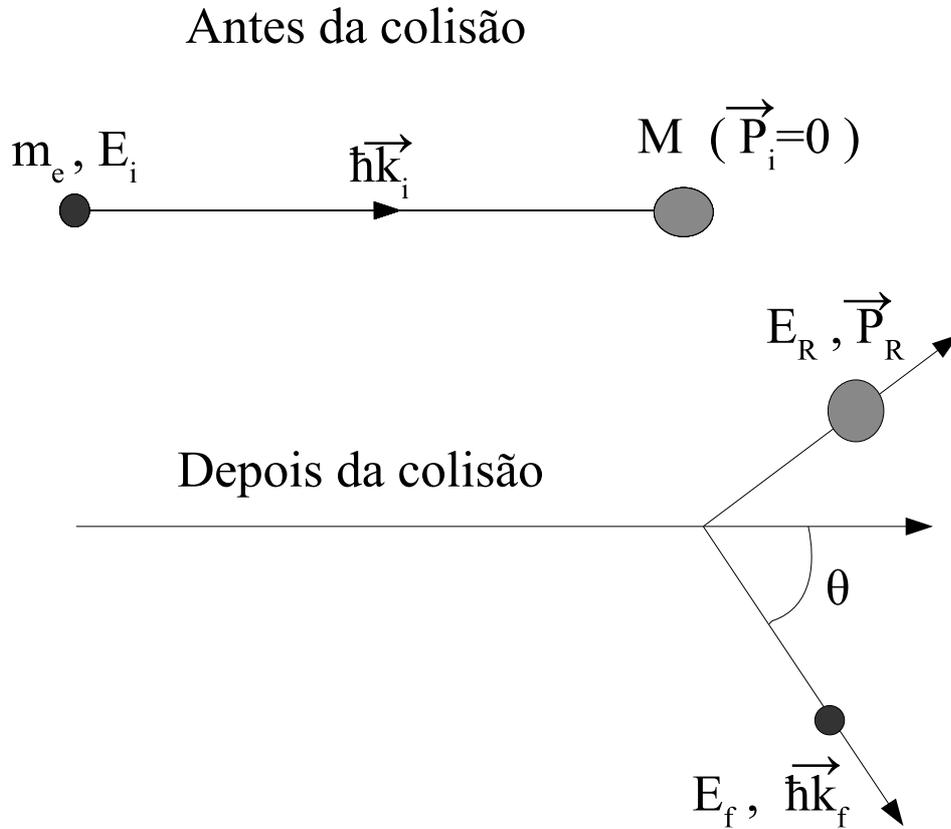


Figura 1.1: Espalhamento entre uma partícula leve (massa m_e) com energia inicial E_i e momento inicial $\hbar\vec{k}_i$ e um núcleo (massa M) em repouso em relação ao referencial do laboratório. Após a interação a partícula leve possui energia final E_f e momento final $\hbar\vec{k}_f$ e a partícula pesada possui energia de recuo E_R e momento \vec{P}_R .

Podemos ainda escrever que [4]:

$$Q_\mu^2 = -q_\mu^2 = 4k_i k_f \sin^2(\theta/2) \quad (1.26)$$

Pela figura (1.1), θ é o ângulo de espalhamento. A seção de choque de espalhamento das partículas em um ângulo sólido $d\Omega$, é dada por [4]:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{S} \frac{dN}{dt} \quad (1.27)$$

onde $\frac{dN}{dt}$ é a probabilidade de transição por unidade de tempo e S é a densidade de corrente incidente (partículas incidentes por tempo por área perpendicular à direção do feixe). Considerando a aproximação de ondas planas para o elétron antes e depois da interação, podemos obter a probabilidade de transição a partir da teoria de perturbação de primeira ordem (ou primeira aproximação de Born [5]). Logo, teremos para dN/dt , a expressão [4]:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{2\pi\rho(E_f)}{\hbar} \sum_{if} |\langle \Phi_f | H' | \Phi_i \rangle|^2 \quad (1.28)$$

onde o somatório acima representa a soma nos estados iniciais e na média dos estados finais, $\rho(E_f)$, que é dado por:

$$\rho(E_f)d\Omega = \frac{d\eta}{dE_f},$$

é a densidade dos estados finais do elétron e $d\eta$ é o número de estados de momento final $\hbar\vec{k}_f$ para o elemento de ângulo sólido $d\Omega$ dentro dos intervalos d^3k_f e dE_f . Por outro lado, H' representa a hamiltoniana de interação elétron-alvo e $\Phi_{i,f}$ os estados inicial e final do sistema respectivamente.

Temos [4]:

$$d\eta = \frac{V_f \hbar^3 k_f^2 dk_f d\Omega}{(2\pi\hbar)^3} \quad (1.29)$$

onde V_f é o volume de normalização para o elétron. Logo, podemos escrever:

$$\rho(E_f) = \frac{V_f \hbar^2 k_f^2}{(2\pi \hbar)^3 c} \quad (1.30)$$

O fluxo incidente pode ser escrito como [4]:

$$S = \frac{c}{V_i}, \quad (1.31)$$

onde V_i é o volume de normalização para os elétrons incidentes. Para a seção de choque diferencial, teremos:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{V_i V_f \hbar^2 k_f^2}{(2\pi \hbar^2 c)^2} \overline{\sum_{if}} |\langle \Phi_i | H' | \Phi_f \rangle|^2 \quad (1.32)$$

onde $\overline{\sum_{if}}$ é uma soma nos estados iniciais e na média dos estados finais.

1.2 Dinâmica do espalhamento

Vamos aqui apresentar os principais resultados para a obtenção da seção de choque de espalhamento, fazendo uma comparação entre o espalhamento (e, e') e o espalhamento em coincidência ($e, e'p$).

1.2.1 Interação eletromagnética com a matéria

A interação eletromagnética é relativamente fraca em relação às forças nucleares. Portanto é suficiente mantermos apenas os termos de ordem mais baixa no campo eletromagnético. Em particular, na chamada aproximação de troca de um fóton (equivalentemente a primeira aproximação de Born) [3] podemos escrever H' como:

$$H' = \int d^4x J^\mu(x) A_\mu(x), \quad (1.33)$$

onde $J^\mu(x)$ representa o operador densidade de corrente do núcleo e $A_\mu(x)$ o potencial de Møller [6] gerado pelo elétron descrito como uma onda plana. Evidentemente, tanto a densidade do elétron como a do núcleo devem obedecer uma equação de continuidade [6]. Neste trabalho, vamos considerar a função de onda ψ_e do elétron como sendo:

$$\psi_e = N^{\frac{1}{2}} u(k, s) e^{-ik \cdot x} \quad (1.34)$$

onde N é a normalização e:

$$\bar{u}(k, s) u(k, s) = 1, \quad (1.35)$$

satisfazendo a equação de Dirac para partícula livre:

$$(\not{k} - mc)u(k, s) = 0 \quad (1.36)$$

onde $\not{k} \equiv \gamma \cdot k$ e s representa o spin eletrônico. O potencial de Møller em (1.33) pode ser escrito na forma de densidade de corrente eletrônica como [6]:

$$A_\mu(x) = \frac{e}{Q_\mu^2} j_\mu(x) \quad (1.37)$$

onde $j_\mu(x) = N e^{i(k_f - k_i) \cdot x} \bar{u}_f \gamma_\mu u_i$.

A corrente do alvo $J^\mu(x)$ é definida como o elemento de matriz do operador densidade de quadri-corrente $\hat{J}^\mu(x)$ entre o estado inicial e final do mesmo, os quais denotaremos de agora em diante por $|\Psi_i\rangle$ e $|\Psi_f\rangle$ respectivamente. Podemos utilizar a invariância de Lorentz para escrever:

$$J^\mu(x) = \langle \Psi_f | \hat{J}^\mu(x) | \Psi_i \rangle = e^{\frac{i}{\hbar}(p_f - p_i) \cdot x} \langle \Psi_f | \hat{J}^\mu(0) | \Psi_i \rangle \equiv e^{\frac{i}{\hbar}(p_f - p_i) \cdot x} J_{if}^\mu \quad (1.38)$$

Para o elemento da matriz de espalhamento, temos [6]:

$$\langle \Phi_f | H' | \Phi_i \rangle = -ieZj_\mu \frac{1}{Q_\mu^2} J^\mu(\vec{q}) 2\pi\delta(E_f - E_i - \hbar\omega), \quad (1.39)$$

sendo Z a carga do núcleo. A densidade de corrente nuclear no espaço dos momentos transferidos $J_\mu(\vec{q})$ é dada por:

$$J^\mu(\vec{q}) = \int d\vec{r} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \langle \Psi_f | \hat{J}^\mu | \Psi_i \rangle \quad (1.40)$$

e, para a amplitude (com m e n iguais a $-1,0$ e $+1$), temos:

$$\overline{\sum_{if}} |\langle \Phi_f | H' | \Phi_i \rangle|^2 = e^2 Z^2 \frac{1}{Q_\mu^2} \sum_{mn} \frac{1}{4E_i E_f} L_{mn} W_{mn} \quad (1.41)$$

onde L_{mn} são as componentes do chamado tensor leptônico e W_{mn} do tensor hadrônico, que, em termos das correntes acima definidas, são dados por:

$$L_{mn} \equiv 4E_i E_f \overline{\sum_{spin} j_m j_n^*} \quad (1.42)$$

e

$$W_{mn} = \overline{\sum_{if} J_m(\vec{q}) J_n^*(\vec{q})} \delta(E_i - E_f - \hbar\omega) \quad (1.43)$$

Nossa escolha de eixos coordenados é tal que o quadrivetor momento transferido é dado por:

$$q^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, 0, 0, \vec{q} \right) \quad (1.44)$$

ou seja, o momento transferido está na direção \hat{z} . Seguem-se as definições:

$$\epsilon_\pm^\mu = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, \pm i, 0) \quad (1.45)$$

e

$$\epsilon_0^\mu = \left(\frac{|\vec{q}|}{Q_\mu}, 0, 0, \frac{\omega/c}{Q_\mu} \right). \quad (1.46)$$

Usando tais definições, expandimos as correntes leptônica e hadrônica, respectivamente como $j_m = j_\mu \epsilon_m^{\mu*}$, $J_m = (-)^m J_\mu \epsilon_m^\mu$ e onde $\epsilon_m^{\mu*} = (-)^m \epsilon_{-m}^\mu$.

1.2.2 Seção de choque (e, e')

A seção de choque de Mott é obtida assumindo-se que o elétron seja espalhado elasticamente por uma partícula de massa $M (M \gg m)$ puntual

e que sua energia de recuo possa ser desprezada. A seção de choque no referencial do laboratório desprezando a energia de repouso do elétron será [3]:

$$\sigma_M = \left(\frac{\alpha \hbar c \cos(\theta/2)}{2E \sin^2(\theta/2)} \right)^2, \quad (1.47)$$

onde α é a constante de estrutura fina. O núcleo atômico não é uma carga puntual simples, pois possui uma estrutura interna complexa. A figura (1.2) mostra o diagrama de Feynman para a troca de um fóton (γ) entre um elétron e um núcleo, ressaltando que o traço duplo representando o núcleo indica que ele possui uma estrutura interna.

Para um espalhamento genérico onde considera-se tal estrutura e observa-se apenas o elétron espalhado, a seção de choque é dada por [6]:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma_M \frac{E_f}{E_i} [L_{00}W_{00} + L_{11}W_{11} + L_{-1-1}W_{-1-1}] \quad (1.48)$$

onde temos para o tensor leptônico [6]:

$$L_{00} = \frac{Q_\mu^2}{|\vec{q}|^2}, \quad (1.49)$$

$$L_{11} = L_{-1-1} = \left[\tan^2 \frac{\theta}{2} + \frac{Q_\mu^2}{2|\vec{q}|^2} \right]. \quad (1.50)$$

Para o tensor hadrônico é necessário calcularmos a densidade de corrente nuclear $J^\mu(q)$. Separando a dependência em θ , podemos reescrever a

expressão (1.48) como:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma_M \frac{E_f}{E_i} [2W_1 \tan^2(\theta/2) + W_2] \quad (1.51)$$

onde W_1 e W_2 são definidos como:

$$W_1 = \frac{1}{2} (W_{11} + W_{-1-1}) \quad (1.52)$$

e

$$W_2 = \frac{Q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} \left[W_{00} + \frac{1}{2} (W_{11} + W_{-1-1}) \right] \quad (1.53)$$

A equação (1.51) é conhecida como "fórmula de Rosenbluth".

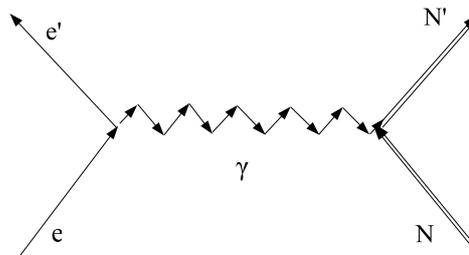


Figura 1.2: Diagrama de Feynman: Troca de um fóton entre um elétron e um núcleo.

1.3 Espalhamento ($e, e'p$)

Espalhamento de elétrons no qual um produto é detectado em coincidência com o elétron espalhado pode ser expresso por $A(e, e'x)B$, onde x denota este produto (que pode ser um próton, um nêutron, um pión, uma partícula alfa e outras), A e B são os núcleos inicial e final respectivamente.

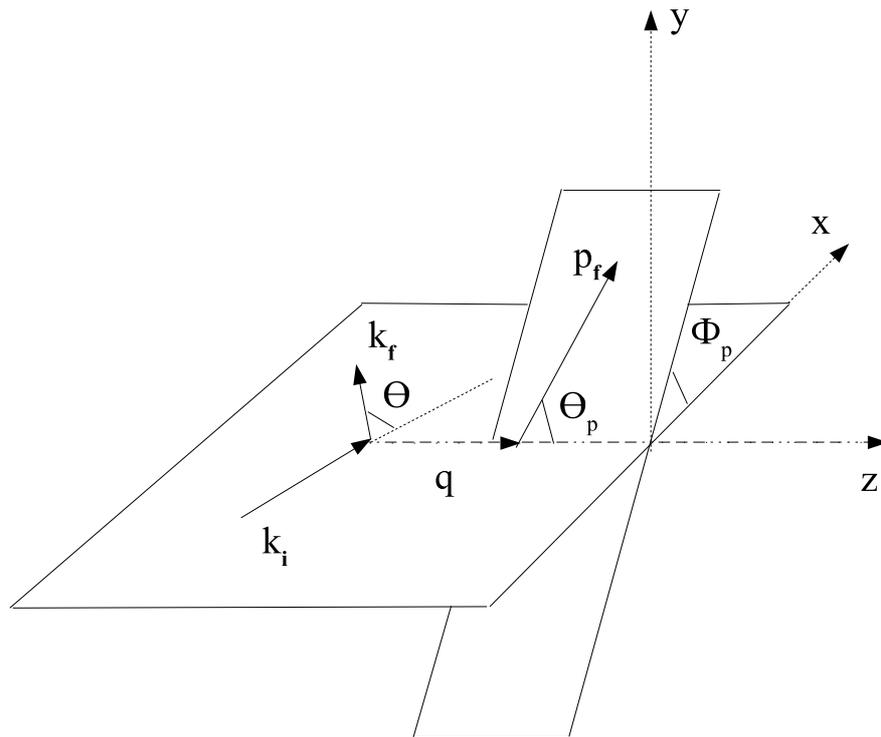


Figura 1.3: Sistema de referência usado em nossos cálculos. Aqui xz define o plano de espalhamento e o plano definido pelo ângulo Φ_p em relação ao plano de espalhamento é o plano de reação.

Este tipo de experimento pode ser utilizado para estudar reações em várias regiões cinemáticas e para detectar diferentes tipos de partículas. Neste trabalho discutiremos a reação $A(e, e'p)(A - 1)$ na região quasi-elástica. Até agora, vinhamos trabalhando com o espalhamento de elétrons com um alvo pesado (fixo em alguns casos), mas obedecendo a fórmula:



onde A^* representa o núcleo final que pode estar em um estado excitado. O nosso interesse maior aqui é o espalhamento do elétron emitido em coincidência com um próton arrancado da estrutura nuclear.

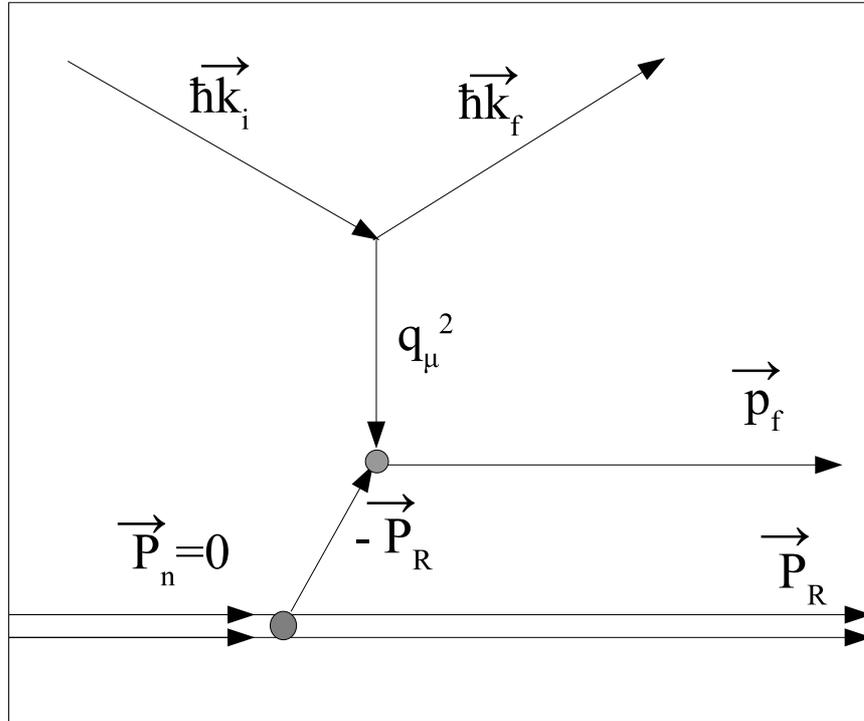
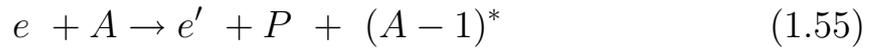


Figura 1.4: Diagrama para troca de um fóton para a reação $(e, e'p)$. Aqui, \vec{P}_n é o momento inicial do núcleo e é igual a zero, \vec{P}_R é o momento de recuo do mesmo após a interação. O momento do próton arrancado é igual a \vec{p}_f . (as setas não indicam a direção dos respectivos momentos)

Neste caso, o elétron interage basicamente com este próton emitido. O comportamento da seção de choque seria facilmente tratado se este próton não tivesse momento dentro do núcleo (\vec{p}_i). Porém, o momento do próton está ligado à dinâmica interna do sistema, podendo ser obtido a partir da cinemática da reação. Em nosso trabalho, estamos particularmente interessados nesta dinâmica. Para isso, usaremos um modelo quasi-elástico para o tratamento do problema como explicado logo abaixo e também no próximo capítulo em mais detalhes. Temos as seguintes relações:

$$\hbar\vec{q} = \vec{p}_f + \vec{P}_R \quad (1.56)$$

onde \vec{P}_R é o momento de recuo do núcleo e:

$$\hbar\omega = T_{p_f} + T_R + E_{ex} \quad (1.57)$$

é a energia transferida, onde T_{p_f} e T_R são as energias cinéticas do próton e do núcleo residual respectivamente e E_{ex} é a energia de excitação do núcleo final. Para que o processo seja quasi-elástico, temos que: $\hbar\omega \gg \langle B \rangle$ e $|\vec{q}| \gg \frac{1}{R}$, onde R representa a dimensão média do núcleo e $\langle B \rangle$ o valor médio da energia de ligação da partícula no sistema nuclear. Neste processo, é como se o elétron interagisse diretamente com o próton sem sentir a ação do restante do núcleo, ou seja, a interação é equivalente a interação elástica de um elétron com um próton. Neste contexto, temos que $\vec{p}_i = -\vec{P}_R$.

1.3.1 Os fatores de forma no espalhamento $(e, e'p)$

Vamos agora discutir os fatores de forma para o espalhamento $(e, e'p)$. Assumimos novamente que o elétron tem função de onda que obedece a equação de Dirac para partículas livres e há assim a troca de somente um fóton entre o elétron e o núcleo. A energia de repouso do elétron pode ainda ser desprezada, quando comparada à sua energia total. Com estas aproximações e seguindo um procedimento semelhante ao que foi utilizado no espalhamento (e, e') , obtemos para a seção de choque diferencial [7]:

$$\frac{d^5\sigma}{dE_f d\Omega_e d\Omega_p} = \frac{\sigma_M}{(2\pi)^3} \frac{(m_p c^2)(p_f c)}{(\hbar c)^3} (v_l w_l + v_t w_t + v_{tl} w_{tl} + v_{tt} w_{tt}) \quad (1.58)$$

Os fatores v provêm do tensor leptônico e dependem apenas de variáveis cinemáticas do elétron espalhado [7]:

$$v_l = \left(\frac{Q_\mu^2}{\vec{q}^2} \right)^2, \quad (1.59)$$

$$v_t = \tan^2 \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \frac{Q_\mu^2}{\vec{q}^2}, \quad (1.60)$$

$$v_{tl} = \frac{q_\mu^2}{\sqrt{2}\vec{q}^2} \left(\tan^2 \frac{\theta}{2} + \frac{Q_\mu^2}{\vec{q}^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.61)$$

$$v_{tt} = \frac{1}{2} \frac{q_\mu^2}{\vec{q}^2}. \quad (1.62)$$

Nós podemos expressar os fatores de forma w em termos das componentes do tensor hadrônico, definido por 1.43 [7]:

$$w_l = W_{00} \quad (1.63)$$

$$w_t = W_{11} + W_{-1-1} \quad (1.64)$$

$$w_{tl} = 2Re(W_{10} + W_{-10}), \quad (1.65)$$

$$w_{tt} = 2Re(W_{1-1}). \quad (1.66)$$

As componentes J_+ e J_- são obtidas fazendo:

$$J_{\pm} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(J_x \pm iJ_y) \quad (1.67)$$

e J^0 é a componente temporal do quadri-vetor J . Note-se que a componente J_z da corrente não aparece, pois assumimos que a corrente hadrônica satisfaz a equação da continuidade, o que permite escrever tal componente em termos de J_0 . Os próximos capítulos serão dedicados exclusivamente ao cálculo das densidades de corrente do próton (J^μ), supondo o mesmo inicialmente ligado ao núcleo através de um potencial médio e uma partícula livre, após ser arrancado do mesmo.

Capítulo 2

Densidade de Corrente Nuclear

2.1 Teoria básica

Nesta seção abordaremos todo o desenvolvimento dos cálculos que iremos utilizar. Primeiramente iremos apresentar, de forma sucinta, o modelo utilizado para descrever a estrutura nuclear, ou seja, os possíveis estados ligados do próton. Depois, a teoria básica que define o operador corrente para o próton é apresentada e, em seguida, o cálculo das componentes da densidade de corrente, J^0 , J_z , J_+ e J_- , serão apresentados dentro do modelo.

2.1.1 Modelo de Walecka e aproximação relativística de Hartree

Neste trabalho, adotamos o enfoque geral de que o sistema nuclear é formado basicamente por prótons, neutrons e mésons. Estes últimos têm o papel de mediadores da interação entre os primeiros, de forma análoga aos fótons, mediadores da interação eletromagnética entre partículas eletricamente carregadas. Atualmente, a teoria que nos permite descrever um sistema de muitos corpos composto por hádrons é a teoria quântica de campos, que se baseia em uma densidade lagrangeana apropriada.

Por analogia à eletrodinâmica quântica (QED), a interação entre hádrons é chamada de hadrodinâmica quântica (QHD). Logo, com base na teoria de campos, foi proposto um modelo [2] (que leva o nome de um dos autores, qual seja, modelo de Walecka) para o estudo da dinâmica das partículas

nucleares e suas interações. Portanto, a lagrangeana deste modelo contém os termos livres de nucleons e mésons, bem como os termos de interações das trocas de mésons entre os nucleons.

A partir desta lagrangeana, podemos encontrar as equações de movimento para os campos e a hamiltoniana do sistema. Com a hamiltoniana, podemos encontrar as funções de onda das partículas e outras grandezas de interesse. Neste trabalho, estamos utilizando a forma simples do modelo de Walecka, ou seja, estamos considerando apenas trocas de mésons escalares (σ) e vetoriais (ω).

A função densidade lagrangeana pode ser escrita como segue:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_N^{livre} + \mathcal{L}_s^{livre} + \mathcal{L}_\omega^{livre} + \mathcal{L}_{NNs}^{inter} + \mathcal{L}_{NN\omega}^{inter} , \quad (2.1)$$

onde \mathcal{L}_N^{livre} é a lagrangeana livre do nucleon, \mathcal{L}_s^{livre} é a lagrangeana livre do méson σ , $\mathcal{L}_\omega^{livre}$ é a lagrangeana livre do méson ω , $\mathcal{L}_{NNs}^{inter}$ é a lagrangeana de interação nucleon-nucleon pela troca do méson σ e $\mathcal{L}_{NN\omega}^{inter}$ é a lagrangeana de interação nucleon-nucleon pela troca do méson ω .

A seguir, mostraremos as densidades lagrangeanas para os campos livres [2]:

$$\mathcal{L}_N^{livre} = \bar{\Psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - M)\Psi(x) , \quad (2.2)$$

$$\mathcal{L}_s^{livre} = -\frac{1}{2} [m_s^2\zeta^2(x) - \partial_\mu\zeta(x)\partial^\mu\zeta(x)] \quad e \quad (2.3)$$

$$\mathcal{L}_\omega^{livre} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_\nu(x)\omega^\nu(x) \quad (2.4)$$

onde M , m_σ e m_ω são as massa de repouso do nucleon, do méson σ e do méson ω respectivamente e $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu\omega_\nu(x) - \partial_\nu\omega_\mu(x)$. Nas equações acima, os operadores dos campos do nucleon, do méson σ e do méson ω são, respectivamente, $\Psi(x)$, $\varsigma(x)$, $\omega(x)$.

Para as densidades lagrangeanas de interação, temos [2]:

$$\mathcal{L}_{NN\sigma}^{inter} = g_s\bar{\Psi}\varsigma(x)\Psi \quad e \quad (2.5)$$

$$\mathcal{L}_{NN\omega}^{inter} = -g_v\bar{\Psi}\omega^\nu(x)\gamma_\nu\Psi \quad , \quad (2.6)$$

onde g_s e g_v são constantes de acoplamento dos mésons σ e ω , respectivamente. Utilizando a equação de Euler-Lagrange $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\chi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\chi]} = 0$, onde χ representa qualquer um dos graus de liberdade do sistema e levando ainda em conta a equação da continuidade para o nucleon, ou seja, $\partial_\mu[\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi] = 0$, podemos obter as equações de movimento do sistema:

$$(-i\gamma^\mu\partial_\mu + M)\Psi(x) = g_s\varsigma(x)\Psi(x) - g_v\omega^\nu(x)\gamma_\nu\Psi(x) \quad , \quad (2.7)$$

$$(\square + m_\sigma^2)\varsigma(x) = g_s\bar{\Psi}(x)\Psi(x) \quad e \quad (2.8)$$

$$(\square + m_\omega^2)\omega_\nu(x) = g_v \bar{\Psi}(x)\gamma_\nu\Psi(x) . \quad (2.9)$$

onde \square é a representação para o operador *d'alembertiano*.

A equação (2.7) é a equação de Dirac, (2.8) é a equação de Klein-Gordon não homogênea e (2.9) é a equação de Proca com termo de fonte. Uma forma de solução para este problema, usualmente adotada, é a chamada aproximação de Hartree [2]. Nela, os campos mesônicos são substituídos por valores médios, ou campos clássicos, os quais não dependem do tempo. Estes campos são então obtidos de forma autoconsistente, resolvendo-se simultaneamente as equações de Klein-Gordon e de Dirac. Ainda, impondo invariância rotacional, apenas a componente temporal do méson ω não se anula. A função de onda dos nucleons passa então a ser dada pelo determinante de Slater dos A estados de partícula independente de menor energia, os quais são obtidos da condição de autoconsistência. Em nosso caso, supomos ainda que os campos, ou simplesmente potenciais, dos mésons têm simetria esférica. Com todas estas hipóteses implementadas, o conjunto de equações acima se reduzem ao sistema:

$$\frac{d^2}{dr^2}S_0(r) + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}S_0(r) - m_s^2S_0(r) = -g_s\rho_s(r) \quad (2.10)$$

$$\frac{d^2}{dr^2}\omega_0(r) + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}\omega_0(r) - m_v^2\omega_0(r) = -g_v\rho_B(r) \quad (2.11)$$

e

$$\frac{d}{dr}G_\alpha(r) + \frac{\kappa}{r}G_\alpha(r) - [E_\alpha - g_v\omega_0(r) + M - g_sS_0(r)]F_\alpha(r) = 0 , \quad (2.12)$$

$$\frac{d}{dr}F_\alpha(r) - \frac{\kappa}{r}F_\alpha(r) + [E_\alpha - g_v\omega_0(r) - M + g_sS_0(r)]G_\alpha(r) = 0 , \quad (2.13)$$

onde $G(r)$ e $F(r)$ são as duas componentes radiais da função de onda de partícula para o nucleon (no caso estamos desprezando as diferenças entre próton e neutron). Podemos ainda escrever as soluções para os potenciais mesônicos em termos de funções de Green:

$$\varsigma(r) = g_s \int D_\sigma(r, r') \varrho_s(r') r'^2 dr' \quad e \quad (2.14)$$

$$\omega_\nu(r) = g_v \int D_\omega(r, r') \varrho_B(r') r'^2 dr' \quad , \quad (2.15)$$

onde $D_\sigma(r, r')$ e $D_\omega(r, r')$ são as funções de Green [2],

$$\varrho_s(r) = \sum_{\alpha}^{occ} \left(\frac{2j_\alpha + 1}{4\pi r^2} \right) [|G_\alpha(r)|^2 - |F_\alpha(r)|^2] \quad (2.16)$$

e

$$\varrho_B(r) = \sum_{\alpha}^{occ} \left(\frac{2j_\alpha + 1}{4\pi r^2} \right) [|G_\alpha(r)|^2 + |F_\alpha(r)|^2] \quad (2.17)$$

onde j_α é o momento angular total de cada estado e a somatória inclui todos os A estados de energia mais baixa. O esquema apresentado acima foi implementado em nosso caso, utilizando o código computacional TIMORA [8]. O conjunto de parâmetros utilizados será apresentado no Capítulo 3.

2.1.2 Densidade de corrente para partículas com uma estrutura interna

O próton, assim como o nêutron, que compõem a estrutura nuclear interagem entre si basicamente por troca de mésons. A corrente hadrônica

surge, então, destas trocas. A densidade de corrente do próton, dada em termos das matrizes γ , assim como a do elétron vista no capítulo 1, pode ser escrita como:

$$J_\mu = \bar{\Psi}_f \Gamma_\mu \Psi_i . \quad (2.18)$$

Olhando para as equações listadas em (1.21), vemos que existem três formas de se obter quadri-vetores através do produto $(\Psi^* \Psi)$. Sabe-se, por evidências experimentais que a interação eletromagnética é invariante por inversão de paridade, o que implica que as Γ_μ 's podem somente ser vetores e não pseudo-vetores, logo reduzimos para duas formas. Cobrindo todas as possibilidades, podemos escrever a densidade de corrente hadrônica como:

$$J_\mu = \bar{\Psi}_f [\gamma^\mu K_1 + i\sigma_{\mu\nu}(p_f - p_i)^\nu K_2 + i\sigma_{\mu\nu}(p_f + p_i)^\nu K_3 + (p_f - p_i)_\mu K_4 + (p_f + p_i)_\mu K_5] \Psi_i, \quad (2.19)$$

onde Ψ_f e Ψ_i representam o estado final e inicial do próton, respectivamente. Os fatores de forma K_j são funções de $(\hbar q)^2 \equiv (p_f - p_i)^2$ apenas. Os termos envolvendo $(p_f + p_i)$ podem ser incorporados nos demais fatores usando as seguintes propriedades [9]:

$$\bar{\Psi}_f [(p_f + p_i)_\mu] \Psi_i = \bar{\Psi}_f [-i\sigma_{\mu\nu}(p_f - p_i)^\nu + (M_f + M_i)c\gamma_\mu] \Psi_i \quad (2.20)$$

e

$$\bar{\Psi}_f [i\sigma_{\mu\nu}(p_f + p_i)^\nu] \Psi_i = \bar{\Psi}_f [-(p_f - p_i)_\mu + (M_f - M_i)c\gamma_\mu] \Psi_i . \quad (2.21)$$

Com o uso destas equações e fazendo $F_3 = K_4/\hbar$,

$$F_1 = K_1 + 2Mc/(K_3 + K_5)$$

e

$$F_2 = 2Mc/\kappa\hbar(K_2 - K_3 - K_5) ,$$

(2.19) reduz-se a:

$$J_\mu = \bar{\Psi}_f \left[\gamma^\mu F_1(q^2) + i\kappa\hbar \frac{F_2(q^2)}{2M_p c} \sigma_{\mu\nu} q^\nu + \hbar q_\mu F_3(q^2) \right] \Psi_i , \quad (2.22)$$

onde κ é uma constante e representa o momento magnético anômalo e $M_i = M_p$ e M_f são as massas inicial e final do próton. O fator $\kappa\hbar/2M_p c$ é inserido para que o fator $F_2(q^2)$ possa coincidir com a definição convencional de fator de forma eletromagnético. Podemos reduzir ainda mais a expressão acima, impondo a conservação de corrente $q^\mu J_\mu(q) = 0$. Para espalhamento elástico, temos ainda que $M_f = M_i$. Por outro lado, usando a antissimetria do tensor $\sigma_{\mu\nu}$, a conservação da corrente implica que $F_3(q^2) = 0$. Obtemos finalmente para a densidade de corrente a expressão:

$$J^\mu = \bar{\Psi}_f \left[\gamma^\mu F_1(Q^2) + i\sigma^{\mu\nu} q_\nu \frac{\kappa\hbar}{2M_p c} F_2(Q^2) \right] \Psi_i . \quad (2.23)$$

O chamado momento magnético anômalo [9] κ é dado experimentalmente, no caso do próton, por $\kappa \approx 1,79$. A expressão (2.23) será utilizada em nossos cálculos a partir de agora. Antes de iniciar os mesmos, vamos

indicar as aproximações utilizadas para as funções de onda inicial e final.

Para o estado final estamos supondo que o próton seja uma partícula livre e este será então descrito por uma função de onda plana. Sabe-se que o próton ao ser arrancado do núcleo continua a interagir com o mesmo, porém vamos aqui desprezar estes efeitos como discutido no capítulo anterior.

2.2 Cálculo da componente temporal da densidade de corrente

Vamos começar escrevendo J^0 como (2.23):

$$J^0 = F_1 J_a^0 + i \frac{\kappa \hbar}{2M_p c} F_2 J_b^0 \quad (2.24)$$

onde:

$$J_a^0 = \bar{\Psi}_f \gamma^0 \Psi_i \quad e \quad J_b^0 = \bar{\Psi}_f \sigma^{0\nu} q_\nu \Psi_i . \quad (2.25)$$

Temos que $\bar{\Psi}_f = \Psi_f^\dagger \gamma^0$ e $\gamma^0 \gamma^0 = 1$, logo, teremos:

$$J_a^0 = \Psi_f^\dagger \Psi_i . \quad (2.26)$$

Para a função de onda inicial escrevemos de forma genérica :

$$\Psi_i = \begin{pmatrix} \phi_i(\vec{r}) \\ \chi_i(\vec{r}) \end{pmatrix} e^{-iE_i t/\hbar} . \quad (2.27)$$

Para a função de onda final usaremos o spinor livre:

$$\Psi_f = N e^{iE_f t/\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{p}_f \cdot \vec{r}} \begin{pmatrix} \chi_A \\ \chi_B \end{pmatrix} , \quad (2.28)$$

onde N é um fator de normalização e é dado por: $N = \sqrt{\frac{E_f + M_p c^2}{2E_f}}$. A função de onda inicial corresponde ao próton em um estado ligado no núcleo, onde já separamos a parte temporal. Então:

$$J_a^0 = N e^{-it(E_i - E_f)/\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{p}_f \cdot \vec{r}} \left[\chi_A^\dagger \phi_i + \chi_B^\dagger \chi_i \right] , \quad (2.29)$$

onde as funções $\phi_i(\vec{r})$ e $\chi_i(\vec{r})$ do estado ligado são dadas por [10]:

$$\phi_i = g(r) \mathcal{Y}_{j_i l_i}^{m_i} \quad (2.30)$$

e

$$\chi_i = i f(r) \mathcal{Y}_{j_i l_i'}^{m_i} , \quad (2.31)$$

onde $g(r) = \frac{G(r)}{r}$ e $f(r) = \frac{F(r)}{r}$.

Os harmônicos esféricos spinoriais são dados por:

$$\mathcal{Y}_{j l}^m = \sum_{m_l m_s} \langle l m_l 1/2 m_s | j m \rangle Y_{l m_l}(\hat{r}) \chi_{m_s}, \quad (2.32)$$

onde $Y_{l m_l}(\hat{r})$ são os harmônicos esféricos, $\langle l_1 m_1 l_2 m_2 | l_3 m_3 \rangle$ é o símbolo usado aqui para expressar os coeficientes de Clebsh-Gordon e $l' = l \pm 1$ para $j = l \pm 1/2$. Substituindo as expressões (2.31) e (2.30) em (2.29), temos:

$$J_a^0 = N e^{-it(E_i - E_f)/\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{p}_f \cdot \vec{r}} \left[\chi_A^\dagger g(r) \mathcal{Y}_{j_i l_i}^{m_i} + \chi_B^\dagger f(r) \mathcal{Y}_{j_i l_i}^{m_i} \right]. \quad (2.33)$$

Temos ainda as definições:

$$\chi_A = \chi_{m_{s_f}} \quad (2.34)$$

e

$$\chi_B = \frac{c \vec{p}_f \cdot \vec{\sigma}}{(E + M_p c^2)} \chi_{m_{s_f}}, \quad (2.35)$$

onde $\chi_{m_{s_f}}$ é a função de onda de spin. Com isso obtemos a expressão:

$$\begin{aligned}
 J_a^0 = & N e^{-it(E_i - E_f)/\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{p}_f \cdot \vec{r}} \left[\right. \\
 & g(r) \sum_{m_{l_i} m_{s_i}} \langle l_i m_{l_i} 1/2 m_{s_i} | j_i m_i \rangle Y_{l_i m_{l_i}}(\hat{r}) \chi_{m_{s_f}}^\dagger \chi_{m_{s_i}} \\
 & + i f(r) \sum_{m_{l_i} m_{s_i}} \langle l'_i m_{l'_i} 1/2 m_{s_i} | j_i m_i \rangle Y_{l'_i m_{l'_i}}(\hat{r}) \chi_B^\dagger \chi_{m_{s_i}} \left. \right] . \quad (2.36)
 \end{aligned}$$

Como visto no capítulo anterior, precisamos da transformada de Fourier da densidade de corrente, ou seja, da densidade de corrente no espaço dos momentos transferidos. Esta será então dada por:

$$J_a^0(\vec{q}) = 2\pi \delta(E_i - E_f - w\hbar) \int d^3r e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} J_a^0(\vec{r}) , \quad (2.37)$$

onde temos $d^3r = r^2 dr d\Omega$ e $\delta(E_i - E_f - w\hbar) \equiv \delta_E$ garante a conservação de energia. Vamos ainda redefinir a norma tal que $2\pi \delta_E N = \mathcal{N}$.

Agora, calcularemos a transformada de Fourier do primeiro termo de 2.36, o qual chamaremos de $J_a^0(g)$:

$$\begin{aligned}
 J_a^0(g) = & \mathcal{N} \int r^2 dr d\Omega e^{i(\vec{q} - \vec{p}_f/\hbar) \cdot \vec{r}} g(r) * \\
 & \sum_{m_{l_i} m_{s_i}} \langle l_i m_{l_i} 1/2 m_{s_i} | j_i m_i \rangle Y_{l_i m_{l_i}}(\hat{r}) \chi_{m_{s_f}}^\dagger \chi_{m_{s_i}} . \quad (2.38)
 \end{aligned}$$

No capítulo (1), vimos que o momento transferido ao próton é:

$$\hbar\vec{q} = \vec{p}_f + \vec{P}_R . \quad (2.39)$$

Podemos ainda relacionar o momento de recuo do núcleo com o momento inicial (\vec{p}_i) do próton arrancado, ou seja,:

$$\vec{P}_R = -\vec{p}_i \quad (2.40)$$

e, portanto:

$$\hbar\vec{q} = \vec{p}_f - \vec{p}_i . \quad (2.41)$$

Voltando à equação (2.38) e usando o resultado acima, obtemos:

$$J_a^0(g) = \mathcal{N} \int r^2 dr d\Omega e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}_i \cdot \vec{r}} g(r) \sum_{m_{l_i} m_{s_i}} \langle l_i m_{l_i} 1/2 m_{s_i} | j_i m_i \rangle Y_{l_i m_{l_i}}(\hat{r}) \chi_{m_{s_f}}^\dagger \chi_{m_{s_i}} . \quad (2.42)$$

Como podemos ver na equação acima, toda a dependência em relação ao momento transferido (\vec{q}) passa a ser agora em termos do momento inicial do próton ligado (\vec{p}_i).

Para prosseguirmos em nossos cálculos, vamos utilizar a conhecida expansão da onda plana em termos das funções de Bessel esféricas $j_L(x)$:

$$e^{-i\vec{p}_i \cdot \vec{r}} = 4\pi \sum_{LM} (-i)^L j_L(p_i r) Y_{LM}(\hat{p}_i) Y_{LM}^*(\hat{r}) \quad (2.43)$$

e substituí-la em (2.42) para obter o resultado:

$$J_a^0(g) = 4\pi \mathcal{N} \sum_{LM} \sum_{m_l m_{s_i}} (-i)^L Y_{LM}(\hat{p}_i) \langle l_i m_l \ 1/2 m_{s_i} | j_i m_i \rangle \chi_{m_{s_f}}^\dagger \chi_{m_{s_i}} \int r^2 g(r) j_L(p_i r) dr \int Y_{LM}^*(\hat{r}) Y_{l_i m_l}(\hat{r}) d\Omega . \quad (2.44)$$

Usando a ortonormalidade dos esféricos harmônicos [12], obtemos então:

$$J_a^0(g) = 4\pi \mathcal{N} \sum_{m_l} (-i)^{l_i} Y_{l_i m_l}(\hat{p}_i) \langle l_i m_l \ 1/2 m_{s_f} | j_i m_i \rangle \int r^2 g(r) j_{l_i}(p_i r) dr . \quad (2.45)$$

Agora, passaremos a calcular o valor de $J_a^0(f)$ para terminarmos esta primeira parte. Esta é dada por:

$$J_a^0(f) = \mathcal{N} \int r^2 dr d\Omega e^{-i\vec{p}_i \cdot \vec{r}} i f(r) \sum_{m_{l'_i} m_{s_i}} \langle l'_i m_{l'_i} \ 1/2 m_{s_i} | j_i m_i \rangle Y_{l'_i m_{l'_i}}(\hat{r}) \chi_B^\dagger \chi_{m_{s_i}} . \quad (2.46)$$

Realizando os mesmos procedimentos feitos no cálculo de $J_a^0(g)$, chegamos à seguinte expressão:

$$J_a^0(f) = 4\pi\mathcal{N} \sum_{m'_i m_{s_i}} (-i)^{l'_i-1} Y_{l'_i m'_i}(\hat{p}_i) \langle l'_i m'_i 1/2 m_{s_i} | j_i m_i \rangle \chi_B^\dagger \chi_{m_{s_i}} \int r^2 f(r) j_{l'_i}(p_i r) dr . \quad (2.47)$$

Usando a forma explícita das matrizes de Pauli dadas no Apêndice, chegamos ao resultado:

$$\chi_B = \frac{cp_f}{(E_f + M_p c^2)} \left[\sin \theta_p \cos \phi_p \chi_{-m_{s_f}} + i \sin \theta_p \sin \phi_p \frac{m_{s_f}}{|m_{s_f}|} \chi_{-m_{s_f}} + \cos \theta_p \frac{m_{s_f}}{|m_{s_f}|} \chi_{m_{s_f}} \right] . \quad (2.48)$$

Fazendo agora o produto escalar $\chi_B^\dagger \chi_{m_{s_i}}$ e substituindo em (2.47), teremos:

$$J_a^0(f) = \frac{4\pi\mathcal{N} cp_f}{(E_f + M_p c^2)} \sum_{m'_i} (-i)^{l'_i-1} Y_{l'_i m'_i}(\hat{p}_i) \langle l'_i m'_i 1/2 m_{s_i} | j_i m_i \rangle \left[(\sin \theta_p e^{-i\phi_p} - \cos \theta_p) \delta_{m_{s_i}-1/2} + (\sin \theta_p e^{i\phi_p} + \cos \theta_p) \delta_{m_{s_i}1/2} \right] \int r^2 f(r) j_{l'_i}(p_i r) dr . \quad (2.49)$$

A primeira parte do termo de J^0 pode, então, ser escrita como:

$$\begin{aligned}
 J_a^0(p_i) &= 4\pi \mathcal{N} \left\{ \sum_{m_{l_i}} (-i)^{l_i} Y_{l_i m_{l_i}}(\hat{p}_i) \langle l_i \ m_{l_i} \ 1/2 \ m_{s_f} | j_i \ m_i \rangle \right. \\
 &\quad \int r^2 g(r) j_{l_i}(p_i r) dr \\
 &+ \frac{cp_f}{(E_f + M_p c^2)} \sum_{m_{l'_i}} (-i)^{l'_i-1} Y_{l'_i m_{l'_i}}(\hat{p}_i) \langle l'_i \ m_{l'_i} \ 1/2 \ m_{s_i} | j_i \ m_i \rangle \\
 &\quad \left[(\sin \theta_p e^{-i\phi_p} - \cos \theta_p) \delta_{m_{s_i}-1/2} + (\sin \theta_p e^{i\phi_p} + \cos \theta_p) \delta_{m_{s_i}1/2} \right] \\
 &\quad \left. \int r^2 f(r) j_{l'_i}(p_i r) dr \right\} . \tag{2.50}
 \end{aligned}$$

Para a segunda parte, J_b^0 , vamos ver como se comporta o termo $\sigma^{0\nu} q_\nu$:

$$\sigma^{0\nu} q_\nu = -i\gamma^5 \vec{\sigma} \cdot (\hat{p}_f - \hat{p}_i) . \tag{2.51}$$

Os operadores de momento \hat{p}_i e \hat{p}_f atuam, respectivamente, nas funções Ψ_i e Ψ_f . Logo, o termo de J_b^0 dado em (2.25) fica:

$$J_b^0 = -i\Psi_f^\dagger \gamma^0 \gamma^5 \vec{\sigma} \cdot (i\hbar \overleftarrow{\nabla} + i\hbar \overrightarrow{\nabla}) \Psi_i = \hbar \Psi_f^\dagger \gamma^0 \gamma^5 \vec{\sigma} \cdot (\overleftarrow{\nabla} + \overrightarrow{\nabla}) \Psi_i . \tag{2.52}$$

Substituindo as funções de onda final e inicial e multiplicando as matrizes γ^0 e γ^5 , temos:

$$J_b^0 = \hbar N e^{\frac{i}{\hbar}(E_f - E_i)t} e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}_f \cdot \vec{r}} (\chi_{m_{sf}}^\dagger \quad \chi_B^\dagger) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot (\overleftarrow{\nabla} + \overrightarrow{\nabla}) \begin{pmatrix} g(r) \mathcal{Y}_{j_i l_i}^{m_i} \\ i f(r) \mathcal{Y}_{j_i l_i}^{m_i} \end{pmatrix}. \quad (2.53)$$

Tomando novamente a transformada de Fourier da expressão acima, efetuando uma integração por partes e usando propriedades das funções de Bessel esféricas, dadas no Apêndice, podemos obter o resultado desejado. Mostraremos aqui apenas o resultado final para J_b^0 obtido assim já no espaço dos momentos transferidos:

$$\begin{aligned} J_b^0(p_i) = & 4\pi\hbar\mathcal{N} \left\{ \sum_{m_{l_i}, m_{s_i}} \langle l_i' m_{l_i}' 1/2 m_{s_i} | j_i m_i \rangle \right. \\ & \left[\frac{p_f}{\hbar} (-i)^{l_i'} Y_{l_i', m_{l_i}'}(\hat{p}_i) \mathcal{F}_1(\theta_p, \phi_p) \int j_{l_i}'(p_i r) f(r) r^2 dr \right. \\ & + \sum_{\sigma_1, \sigma_2} I_f^{(\sigma_1, \sigma_2)} \left(-\sqrt{2} \delta_{m_{sf}, 1/2} \delta_{m_{s_i}, -1/2} \delta_{\sigma_2, 1} \right. \\ & + \left. \left. \sqrt{2} \delta_{m_{sf}, -1/2} \delta_{m_{s_i}, 1/2} \delta_{\sigma_2, -1} + \frac{m_{s_i}}{|m_{s_i}|} \delta_{m_{s_i}, m_{sf}} \delta_{\sigma_2, 0} \right) \right] \\ & + \frac{c p_f}{E_f + M_p c^2} \sum_{m_{l_i}, m_{s_i}} \langle l_i m_{l_i} 1/2 m_{s_i} | j_i m_i \rangle \\ & \left[\frac{p_f}{\hbar} (-i)^{l_i-1} Y_{l_i, m_{l_i}}(\hat{p}_i) \int r^2 j_{l_i}(p_i r) g(r) dr \right. \\ & \left. \left. - \sum_{\sigma_1, \sigma_2} I_g^{(\sigma_1, \sigma_2)} \mathcal{F}_2(\theta_p, \phi_p) \right] \right\} \quad (2.54) \end{aligned}$$

onde $\mathcal{F}_1(\theta_p, \phi_p)$ e $\mathcal{F}_2(\theta_p, \phi_p)$ são funções dadas, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(\theta_p, \phi_p) = & (\sin \theta_p e^{-i\phi_p} - \cos \theta_p) \delta_{m_{s_i}-1/2} \delta_{m_{s_f}1/2} + \\ & (\sin \theta_p e^{i\phi_p} + \cos \theta_p) \delta_{m_{s_i}1/2} \delta_{m_{s_f}-1/2} \end{aligned} \quad (2.55)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2(\theta_p, \phi_p) = & \sqrt{2}(\sin \theta_p e^{-i\phi_p} \delta_{m_{s_f}1/2} - \cos \theta_p \delta_{m_{s_f}-1/2}) \delta_{m_{s_i}1/2} \delta_{\sigma_2-1} \\ & - \sqrt{2}(\sin \theta_p e^{i\phi_p} \delta_{m_{s_f}-1/2} + \cos \theta_p \delta_{m_{s_f}1/2}) \delta_{m_{s_i}-1/2} \delta_{\sigma_21} \\ & + [(\sin \theta_p e^{-i\phi_p} \delta_{m_{s_f}1/2} - \cos \theta_p \delta_{m_{s_f}-1/2}) \delta_{m_{s_i}-1/2} \\ & - (\sin \theta_p e^{i\phi_p} \delta_{m_{s_f}-1/2} - \cos \theta_p \delta_{m_{s_f}1/2}) \delta_{m_{s_i}1/2}] \delta_{\sigma_20} \end{aligned} \quad (2.56)$$

com:

$$\begin{aligned} I_g^{(\sigma_1, \sigma_2)} = & -\sqrt{\frac{l_i+1}{2l_i+1}} (-i)^{l_i+1} Y_{l_i+1, \sigma_1}(\hat{p}_i) \langle l_i + 1 \ \sigma_1 \ 1 \ \sigma_2 | l_i \ m_{l_i} \rangle \\ & \int j_{l_i+1}(p_i r) \left(\frac{d}{dr} - \frac{l_i}{r} \right) r^2 g(r) dr \\ & + \sqrt{\frac{l_i}{2l_i+1}} (-i)^{l_i+1} Y_{l_i-1, \sigma_1}(\hat{p}_i) \langle l_i - 1 \ \sigma_1 \ 1 \ \sigma_2 | l_i \ m_{l_i} \rangle \\ & \int j_{l_i-1}(p_i r) \left(\frac{d}{dr} + \frac{l_i+1}{r} \right) r^2 g(r) dr \end{aligned} \quad (2.57)$$

e

$$\begin{aligned} I_f^{(\sigma_1, \sigma_2)} = & -\sqrt{\frac{l'_i+1}{2l'_i+1}} (-i)^{l'_i} Y_{l'_i+1, \sigma_1}(\hat{p}_i) \langle l'_i + 1 \ \sigma_1 \ 1 \ \sigma_2 | l'_i \ m_{l'_i} \rangle \\ & \int j_{l'_i+1}(p_i r) \left(\frac{d}{dr} - \frac{l'_i}{r} \right) r^2 f(r) dr \\ & + \sqrt{\frac{l'_i}{2l'_i+1}} (-i)^{l'_i} Y_{l'_i-1, \sigma_1}(\hat{p}_i) \langle l'_i - 1 \ \sigma_1 \ 1 \ \sigma_2 | l'_i \ m_{l'_i} \rangle \\ & \int j_{l'_i-1}(p_i r) \left(\frac{d}{dr} + \frac{l'_i+1}{r} \right) r^2 f(r) dr . \end{aligned} \quad (2.58)$$

2.3 Cálculo da componente espacial da densidade de corrente

Agora, vamos calcular a parte espacial da quadricorrente nuclear. Antes vamos analisar os termos envolvidos no cálculo, ou seja, $\bar{\Psi}_f \gamma^\mu \Psi_i$ e $\bar{\Psi}_f \sigma^{\mu\nu} q_\nu \Psi_i$. Como o termo temporal já foi calculado, podemos escrever os demais como vetores. Ou seja:

$$\sum_{i=1}^3 \bar{\Psi}_f \gamma^i \Psi_i \hat{e}_i = \bar{\Psi}_f \vec{\gamma} \Psi_i \quad (2.59)$$

e:

$$\sum_{i=1}^3 \bar{\Psi}_f \sigma^{i\nu} q_\nu \Psi_i \hat{e}_i = \bar{\Psi}_f (\vec{\sigma} \times \vec{q}) \Psi_i. \quad (2.60)$$

A expressão geral fica, então:

$$\vec{J} = F_1(Q^2) \bar{\Psi}_f \vec{\gamma} \Psi_i + \frac{\kappa}{2M_p} F_2(Q^2) i \bar{\Psi}_f (\vec{\sigma} \times \vec{q}) \Psi_i. \quad (2.61)$$

Chamaremos a partir de agora: $\vec{J}_c = \bar{\Psi}_f \vec{\gamma} \Psi_i$ e $\vec{J}_d = \bar{\Psi}_f (\vec{\sigma} \times \vec{q}) \Psi_i$. Para \vec{J}_c , temos:

$$\bar{\Psi}_f \vec{\gamma} \Psi_i = \Psi_f^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \vec{\alpha} \Psi_i = \Psi_f^\dagger \vec{\alpha} \Psi_i \quad (2.62)$$

onde $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$.

Como já vimos no capítulo(1), a seção de choque é dada em função de J_+ , J_- , J_z e J^0 . Escreveremos então o vetor \vec{J} na forma abaixo:

$$\vec{J} = \sum_m (-1)^m J_m \hat{e}_{-m} = -J_+ \hat{e}_- - J_- \hat{e}_+ + J_z \hat{e}_z \quad (2.63)$$

onde $m = -1, 0, +1$ (com $\hat{e}_z = \hat{e}_0$). Utilizando a expansão acima, podemos então, escrever:

$$\vec{J}_c = \left[-\Psi_f^\dagger \alpha_+ \Psi_i \hat{e}_- - \Psi_f^\dagger \alpha_- \Psi_i \hat{e}_+ + \Psi_f^\dagger \alpha_z \Psi_i \hat{e}_z \right]. \quad (2.64)$$

Seguindo agora um desenvolvimento semelhante ao utilizado na obtenção de J_0 e usando propriedades das matrizes de Pauli, definidas no Apêndice , obtemos:

$$\begin{aligned}
J_{c,+}(p_i) = & -4\pi\sqrt{2}\mathcal{N} \left\{ (-i)^{l'_i-1} \sum_{m'_{l'_i}} Y_{l'_i m'_{l'_i}}(\hat{p}_i) \delta_{m_{s_f} 1/2} \right. \\
& \langle l'_i m'_{l'_i} 1/2 - 1/2 | j_i m_i \rangle \int r^2 f(r) j_{l'_i}(p_i r) dr \\
& + \frac{cpf}{(E_f + M_p c^2)} (-i)^{l_i} \sum_{m_{l_i}} Y_{l_i m_{l_i}}(\hat{p}_i) \langle l_i m_{l_i} 1/2 - 1/2 | j_i m_i \rangle \\
& \left. \left[\sin \theta_p e^{i\phi_p} \delta_{m_{s_f} -1/2} + \cos \theta_p \delta_{m_{s_f} 1/2} \right] \int r^2 g(r) j_{l_i}(p_i r) dr \right\} \\
& (2.65)
\end{aligned}$$

e analogamente para a componente $J_{c,-}$:

$$\begin{aligned}
J_{c,-}(p_i) = & 4\pi\sqrt{2}\mathcal{N} \left\{ (-i)^{l'_i-1} \sum_{m'_{l'_i}} Y_{l'_i m'_{l'_i}}(\hat{p}_i) \delta_{m_{s_f} -1/2} \langle l'_i m'_{l'_i} 1/2 1/2 | j_i m_i \rangle \right. \\
& \int r^2 f(r) j_{l'_i}(p_i r) dr + \frac{cpf}{(E_f + M_p c^2)} (-i)^{l_i} \sum_{m_{l_i}} Y_{l_i m_{l_i}}(\hat{p}_i) \langle l_i m_{l_i} 1/2 1/2 | j_i m_i \rangle \\
& \left. \left[\sin \theta_p e^{-i\phi_p} \delta_{m_{s_f} 1/2} - \cos \theta_p \delta_{m_{s_f} -1/2} \right] \int r^2 g(r) j_{l_i}(p_i r) dr \right\} \\
& (2.66)
\end{aligned}$$

Finalmente, para $J_{c,z}$, chegamos à expressão:

$$\begin{aligned}
J_{c,z}(p_i) = 4\pi\mathcal{N} \left\{ (-i)^{l'_i-1} \sum_{m_{l'_i}} \frac{m_{s_f}}{|m_{s_f}|} Y_{l'_i m_{l'_i}}(\hat{p}_i) \langle l'_i m_{l'_i} 1/2 m_{s_f} | j_i m_i \rangle \right. \\
\int r^2 f(r) j_{l'_i}(p_i r) dr + \frac{cp_f}{(E_f + M_p c^2)} (-i)^{l_i} \sum_{m_{l_i}} Y_{l_i m_{l_i}}(\hat{p}_i) \\
\left[\langle l_i m_{l_i} 1/2 1/2 | j_i m_i \rangle \sin \theta_p e^{i\phi_p} \delta_{m_{s_f} - 1/2} - \right. \\
\langle l_i m_{l_i} 1/2 - 1/2 | j_i m_i \rangle \sin \theta_p e^{-i\phi_p} \delta_{m_{s_f} 1/2} + \\
\left. \left. \langle l_i m_{l_i} 1/2 m_{s_f} | j_i m_i \rangle \cos \theta_p \right] \int r^2 g(r) j_{l_i}(p_i r) dr \right\} \quad (2.67)
\end{aligned}$$

O termo \vec{J}_d pode ser colocado, genericamente, como:

$$\vec{J}_d = (\phi_f^\dagger \quad \chi_f^\dagger) \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \times \vec{q} & 0 \\ 0 & -\vec{\sigma} \times \vec{q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_i \\ \chi_i \end{pmatrix} = \phi_f^\dagger [\vec{\sigma} \times \vec{q}] \phi_i - \chi_f^\dagger [\vec{\sigma} \times \vec{q}] \chi_i \quad (2.68)$$

Algumas expressões e definições usadas para obtermos esta expressão, estão dadas no Apêndice. Colocamos a seguir o resultado obtido em termos de $J_{d,+}$, $J_{d,-}$ e em seguida $J_{d,z}$.

$$\begin{aligned}
J_{d,+} = i\hbar 4\pi \mathcal{N} & \left\{ \sum_{m_{l_i}} \langle l_i \ m_{l_i} \ 1/2 \ m_{s_f} | j_i \ m_i \rangle W^+[g(r), 0, 0, 1, l_i, m_{l_i}] \right. \\
& \frac{m_{s_i}}{|m_{s_i}|} \delta_{m_{s_i}, m_{s_f}} + \langle l_i \ m_{l_i} \ 1/2 \ 1/2 | j_i \ m_i \rangle W^+[g(r), 0, 1, 0, l_i, m_{l_i}] \sqrt{2} \delta_{m_{s_f}, -1/2} \\
& + \sum_{m_{l'_i}} (-i) \frac{cp_f}{E_f + M_p c^2} \langle l'_i \ m_{l'_i} \ 1/2 \ m_{s_i} | j_i \ m_i \rangle W^+[f(r), 0, 0, 1, l'_i, m_{l'_i}] \\
& (-\sin \theta_p e^{-i\phi_p} \delta_{m_{s_i}, -1/2} \delta_{m_{s_f}, 1/2} + \sin \theta_p e^{i\phi_p} \delta_{m_{s_i}, 1/2} \delta_{m_{s_f}, -1/2} + \cos \theta_p \delta_{m_{s_i}, m_{s_f}}) \\
& + i \frac{cp_f}{E_f + M_p c^2} \langle l'_i \ m_{l'_i} \ 1/2 \ m_{s_i} | j_i \ m_i \rangle W^+[f(r), 0, 1, 0, l'_i, m_{l'_i}] \\
& \left. \sqrt{2} (\sin \theta_p e^{-i\phi_p} \delta_{m_{s_i}, 1/2} \delta_{m_{s_f}, 1/2} - \cos \theta_p \delta_{m_{s_i}, 1/2} \delta_{m_{s_f}, -1/2}) \right\} , \quad (2.69)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{d,-} = -i\hbar 4\pi \mathcal{N} & \left\{ \sum_{m_{l_i}} \langle l_i \ m_{l_i} \ 1/2 \ m_{s_f} | j_i \ m_i \rangle W^-[g(r), 0, 0, 1, l_i, m_{l_i}] \right. \\
& \frac{m_{s_i}}{|m_{s_i}|} \delta_{m_{s_i}, m_{s_f}} + \langle l_i \ m_{l_i} \ 1/2 \ 1/2 | j_i \ m_i \rangle W^-[g(r), 0, 1, 0, l_i, m_{l_i}] \sqrt{2} \delta_{m_{s_f}, -1/2} \\
& + \sum_{m_{l'_i}} (-i) \frac{cp_f}{E_f + M_p c^2} \langle l'_i \ m_{l'_i} \ 1/2 \ m_{s_i} | j_i \ m_i \rangle W^-[f(r), 0, 0, 1, l'_i, m_{l'_i}] \\
& (-\sin \theta_p e^{-i\phi_p} \delta_{m_{s_i}, -1/2} \delta_{m_{s_f}, 1/2} + \sin \theta_p e^{i\phi_p} \delta_{m_{s_i}, 1/2} \delta_{m_{s_f}, -1/2} + \cos \theta_p \delta_{m_{s_i}, m_{s_f}}) \\
& + i \frac{cp_f}{E_f + M_p c^2} \langle l'_i \ m_{l'_i} \ 1/2 \ m_{s_i} | j_i \ m_i \rangle W^-[f(r), 0, 1, 0, l'_i, m_{l'_i}] \\
& \left. \sqrt{2} (\sin \theta_p e^{-i\phi_p} \delta_{m_{s_i}, 1/2} \delta_{m_{s_f}, 1/2} - \cos \theta_p \delta_{m_{s_i}, 1/2} \delta_{m_{s_f}, -1/2}) \right\} \quad (2.70)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
J_{d,z} = i\hbar 4\pi \mathcal{N} & \left\{ \sum_{m_i} [\langle l_i \ m_i \ 1/2 \ -1/2 | j_i \ m_i \rangle \right. \\
& \sqrt{2} W^- [g(r), 1, 0, 1, l_i, m_i] \delta_{m_{sf}, 1/2} \\
& + \langle l_i \ m_i \ 1/2 \ 1/2 | j_i \ m_i \rangle \sqrt{2} W^+ [g(r), 1, 0, 1, l_i, m_i] \delta_{m_{sf}, -1/2}] \\
& - \frac{cp_f}{E_f + M_p c^2} \sum_{m'_i} [\langle l'_i \ m'_i \ 1/2 \ -1/2 | j_i \ m_i \rangle \sqrt{2} W^- [f(r), 1, 0, 1, l'_i, m'_i] \\
& (\sin \theta_p e^{i\phi_p} \delta_{m_{sf}, -1/2} + \cos \theta_p \delta_{m_{sf}, 1/2}) + \\
& \langle l'_i \ m'_i \ 1/2 \ 1/2 | j_i \ m_i \rangle W^+ [f(r), 1, 0, 1, l'_i, m'_i] \\
& \left. \sqrt{2} (-\sin \theta_p e^{-i\phi_p} \delta_{m_{sf}, 1/2} + \delta_{m_{sf}, -1/2}) \right\} \quad (2.71)
\end{aligned}$$

onde, temos para a função W :

$$\begin{aligned}
W^\pm[\varphi(r), k, m, n, l, m_l] = & \\
& (-i)^l (\pm 1)^k Y_{l, m_l}(\hat{p}_i) \frac{(\mp p_f / \hbar)}{(\sqrt{2})^n} \cos^m \theta_p \sin^n \theta_p e^{\pm i n \phi} \int j_l(p_i r) r^2 \varphi(r) dr \\
& + (-i)^l Y_{l+1, m_l \pm n}(\hat{p}_i) \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} \langle (l+1) \ 1 \ (m_l \pm n) \ \mp n | l \ m_l \rangle \\
& \int j_{l+1}(p_i r) r^2 \left(\frac{d}{dr} - \frac{l}{r} \right) \varphi(r) dr + (-i)^l Y_{l-1, m_l \pm n}(\hat{p}_i) \sqrt{\frac{l}{2l+1}} \\
& \langle (l-1) \ 1 \ (m_l \pm n) \ \mp n | l \ m_l \rangle \int j_{l-1}(p_i r) r^2 \left(\frac{d}{dr} + \frac{l+1}{r} \right) \varphi(r) dr \quad (2.72)
\end{aligned}$$

onde k , m e n podem valer 0 ou 1. Com isso, concluímos o cálculo das

expressões que descrevem o comportamento da densidade de corrente no núcleo, no modelo aqui utilizado, para o espalhamento $(e, e'p)$. Apresentaremos, no próximo capítulo, a geometria utilizada para determinar explicitamente as correntes acima obtidas e faremos uma discussão dos resultados.

Capítulo 3

Análise dos Resultados Obtidos

Apresentaremos neste capítulo alguns resultados numéricos baseados nas expressões obtidas no capítulo anterior. Começaremos discutindo a geometria utilizada em nossos cálculos. A seguir, valores numéricos para as densidades de corrente são apresentados na forma de gráficos, para uma determinada geometria de detecção do próton e um núcleo em particular. Finalmente, discutiremos a validade da equação da continuidade para a corrente hadrônica dentro das aproximações utilizadas .

3.1 Geometria do espalhamento

Quando falamos em geometria do espalhamento, estamos nos referindo a uma disposição espacial do aparato montado para a medição. Ele é montado de diferentes formas, dependendo do interesse do pesquisador. Duas das geometrias mais utilizadas em processos do tipo $(e, e'p)$ são, as assim chamadas, geometrias paralela e perpendicular, sendo utilizadas em observações experimentais. Em ambos os casos, tanto a energia inicial do elétron como a magnitude do momento final do próton emitido (ou mais propriamente, sua energia cinética) são fixados pelo observador. Vamos discutir um pouco essas duas geometrias.

Na geometria perpendicular o valor do momento transferido $\hbar\vec{q}$ é mantido fixo e a densidade de corrente varia com o ângulo θ_p para valores fixos do ângulo azimutal ϕ_p (ver figura 1.3). Isso acarreta uma dependência indireta da densidade de corrente com o momento inicial do próton. Na

geometria paralela o momento transferido está na mesma direção do momento final, o que implica que $\theta_p = 0$, logo, teremos uma dependência direta entre a densidade de corrente e o momento inicial do próton p_i , para qualquer valor de ϕ_p . Essa condição de dependência direta nos levou a escolher esta última geometria neste trabalho. Por outro lado, esta escolha torna os dois últimos termos da seção de choque (1.58) nulos [7]. No entanto, para nossos propósitos neste trabalho esta é uma escolha suficiente.

3.2 Resultados

Antes de apresentarmos os resultados, precisamos fixar os parâmetros que definem a estrutura do núcleo no modelo aqui usado, como descrito no início do capítulo anterior. Como dito anteriormente, aplicaremos os resultados para o núcleo de ^{16}O , para o qual temos o conjunto de parâmetros dados na tabela 3.1 [8]. Assim, apresentaremos resultados numéricos supondo que o próton arrancado no processo seja proveniente de um estado $1s_{1/2}$, $1p_{3/2}$ ou $1p_{1/2}$, correspondentes aos três estados de partícula independente no estado fundamental do ^{16}O .

| $M_p c^2$ (MeV) | $m_s c^2$ (MeV) | $m_w c^2$ (MeV) | g_s | g_v |
|-----------------|-----------------|-----------------|-------|-------|
| 938 | 520 | 783 | 10,47 | 13,80 |

Tabela 3.1: Conjunto de parâmetros para o núcleo ^{16}O

Outro ponto a definirmos é a escolha dos fatores de forma para o nucleon, ou seja, $F_1(Q^2)$ e $F_2(Q^2)$. Adotaremos aqui um procedimento comumente usado na literatura, o qual consiste em supor que os dois fatores de forma do nucleon têm a mesma dependência em Q [11]. Desta forma, se quisermos utilizar nossos resultados para uma comparação com dados experimentais de espalhamento ($e, e'p$), basta multiplicar as densidades $J_\mu(q)$ obtidas segundo nossas expressões do Capítulo 2, por $F_1(Q^2) \equiv F_2(Q^2)$. O fator de forma do nucleon pode então ser determinado fenomenologicamente ou segundo um modelo apropriado.

3.2.1 Resultados para as componentes da densidade de corrente

Apresentamos a seguir nossos resultados para as densidades $J_\mu(q)$ na cinemática paralela. Para isto escolhemos um valor fixo para $p_f = 450 \text{ MeV}/c$, que é um valor típico obtido em medidas experimentais recentes [7].

Na obtenção da secção de choque em termos das densidades, a componente $J_z(q)$ é sempre eliminada em favor de $J_0(q)$ devido à hipótese de que a equação da continuidade seja satisfeita. Esta última, em termos do momento transferido, pode ser escrita como:

$$J^0(q) - \frac{qc}{\omega} J_z(q) = 0 .$$

Em nosso caso, o valor de $\hbar\omega$ pode ser obtido a partir das energias de partícula independente calculadas na aproximação relativística de Hartree com o código TIMORA. Com isto podemos efetuar um teste numérico para a validade da equação da continuidade dentro das aproximações utilizadas.

Assim, separamos os resultados em três grupos contendo quatro gráficos cada. Esses três grupos são definidos pelo valor do momento angular orbital l e pelo valor do momento angular total j do próton ligado.

Primeiro grupo : $l = 0$ e $j = 1/2$

Segundo grupo : $l = 1$ e $j = 3/2$

Terceiro grupo : $l = 1$ e $j = 1/2$

Dentro de cada grupo são então apresentados os gráficos de:

$$\left\{ \begin{array}{l} J^0 \times p_i \\ J_- \times p_i \\ J_+ \times p_i \\ \frac{\omega J^0}{q J_z} \times p_i \end{array} \right. \quad (3.1)$$

onde p_i é dado em unidades de $\left\{ \frac{\text{MeV}}{c} \right\}$ e $J_\mu(p_i)$ é dado em $\{fm^{3/2}\}$. Vamos começar, então, discutindo os gráficos.

Primeiro grupo: ($l=0$ e $j=1/2$)

O gráfico da figura 3.1 mostra o comportamento da componente temporal da corrente $J_0(p_i)$. Nele incluímos ainda a curva quando desprezamos a influência do termo J_b^0 (2.54). Como podemos ver, não se trata de um termo desprezível, dada a diferença entre as curvas especialmente na região do pico. As curvas são as mesmas para spin final do próton igual a $\pm 1/2$.

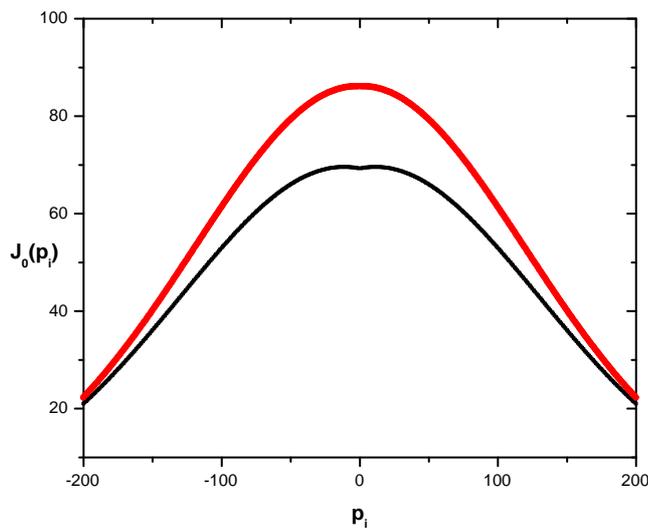


Figura 3.1: Gráfico de J_0 para $l = 0$, $j = 1/2$ e $m_{s_f} = \pm 1/2$. A curva mais grossa não contém o termo J_b^0 .

O gráfico da figura 3.2 mostra que $J_-(p_i)$ alcança valores mais altos conforme p_i vai se aproximando de zero, apresentando uma leve queda nos pontos que se avizinham de $p_i = 0$. Todos os valores para $m_{s_f} = 1/2$ são nulos, ou seja, segundo a teoria aqui usada e na cinemática paralela, nenhum próton com spin final igual a $+1/2$ poderia ser detectado em uma possível observação experimental de $J_-(p_i)$.

O gráfico da figura 3.3, nos mostra o comportamento para $J_-(p_i)$ para prótons detectados com spin $m_{s_f} = +1/2$. De forma análoga ao gráfico da figura 3.2, não deveria ser observado nenhum próton com spin final igual a $-1/2$ neste caso.

O gráfico da figura 3.4 (último do primeiro grupo) apresenta um teste de

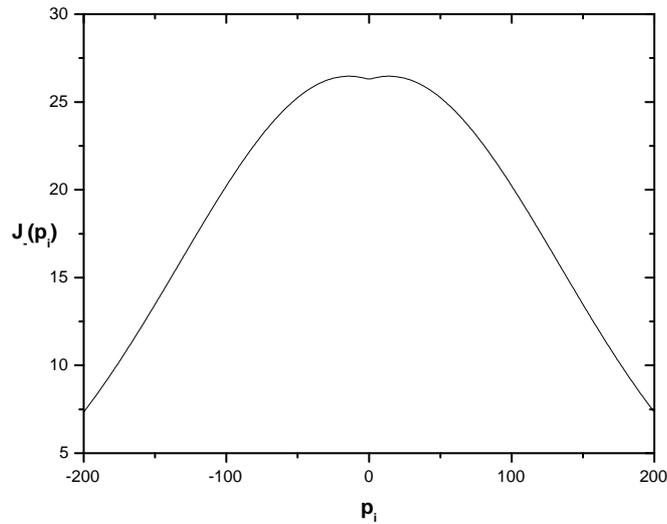


Figura 3.2: Gráfico de J_- para $l = 0$, $j = 1/2$ e $m_{s_f} = -1/2$.

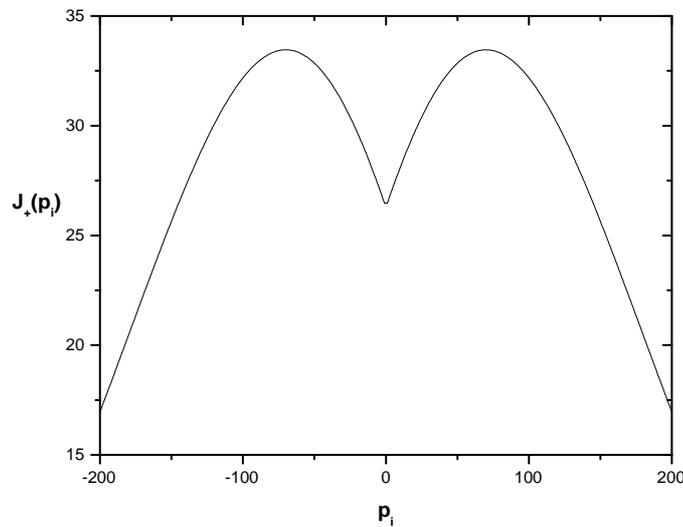


Figura 3.3: Gráfico de J_+ para $l = 0$, $j = 1/2$ e $m_{s_f} = +1/2$.

validade para a equação da continuidade dentro da teoria aqui apresentada. O resultado, caso a equação seja válida, tanto para $m_{s_f} = +1/2$ como para $m_{s_f} = -1/2$, é que a curva obtida tenha um valor constante e igual a 1. Vemos no entanto que este comportamento desejado não é satisfeito dentro do modelo, em toda a faixa de valores de p_i observada. Após analisarmos os

outros grupos de resultados, voltaremos a discutir este ponto importante.

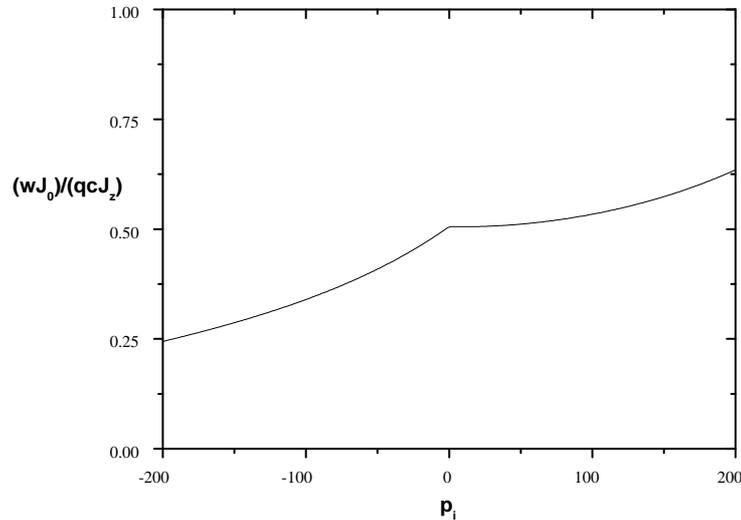


Figura 3.4: Gráfico da razão $\frac{w J_0}{qc J_z}$ para $l = 0$, $j = 1/2$ e $m_{s_f} = \pm 1/2$.

Segundo grupo: ($l=1$ e $j=3/2$)

O gráfico da figura 3.5 apresenta pontos de máximo para valores de momento (p_i) afastados de zero e mínimo em zero. Este comportamento diferente, em relação ao caso anterior, é devido ao fato de estarmos agora observando um próton arrancado originalmente de um estado com $l = 1$.

O gráfico da figura 3.6 apresenta o comportamento de $J_-(p_i)$ para $j = 3/2$ e $l = 1$. Diferentemente do caso em que $l = 0$, vemos o aparecimento de um mínimo pronunciado quando $p_i \rightarrow 0$. O mesmo vale aqui no que diz respeito ao spin final, ou seja, os valores serão nulos para spin final do próton $m_{s_f} = +1/2$.

O gráfico da figura 3.7 mostra os valores de J_+ para spin final $m_{s_f} = +1/2$. Novamente constatamos que os valores são nulos para spin final igual a $-1/2$.

O gráfico 3.8 mostra ainda um teste para a validade da equação da continuidade para o caso específico do estado $p_{3/2}$ e, novamente, observa-se uma quebra desta simetria do sistema.

Terceiro grupo: ($l=1$ e $j=1/2$)

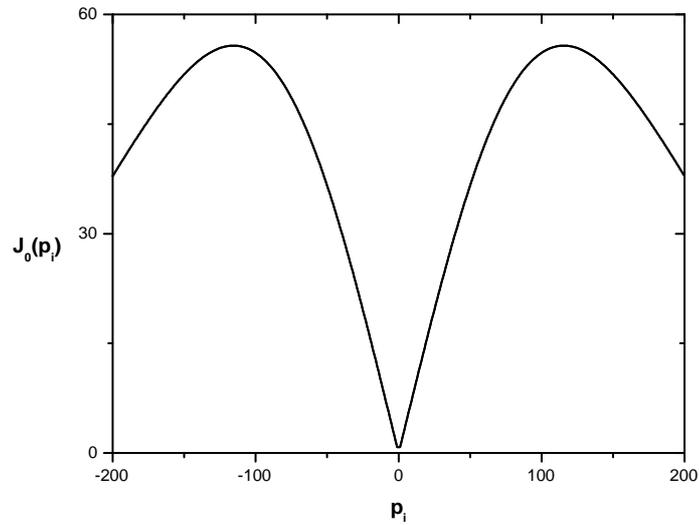


Figura 3.5: Gráfico de J_0 para $l = 1$, $j = 3/2$ e $m_{s_f} = \pm 1/2$.

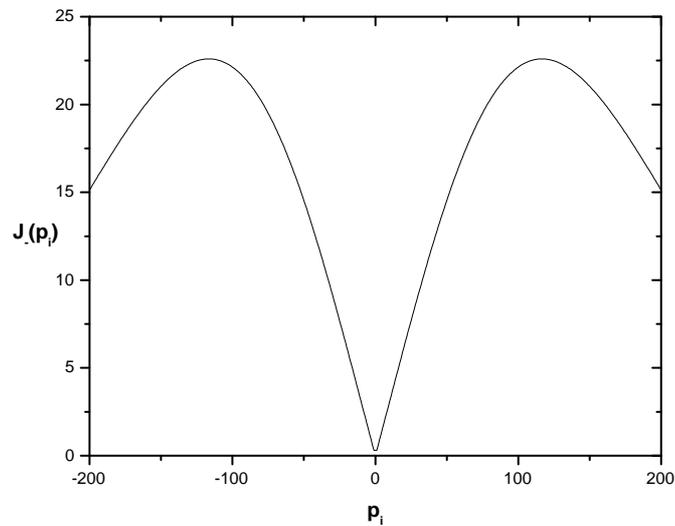


Figura 3.6: Gráfico de J_- para $l = 1$, $j = 3/2$ e $m_{s_f} = -1/2$.

Neste terceiro grupo, analisamos o estado ($1p^{1/2}$) e a situação é um tanto diferenciada em relação às anteriores, sob vários aspectos que passaremos agora a discutir. Mais uma vez a equação da continuidade é fortemente desrespeitada para uma larga faixa de p_i dentro do modelo aqui utilizado, como podemos ver pela figura 3.12.

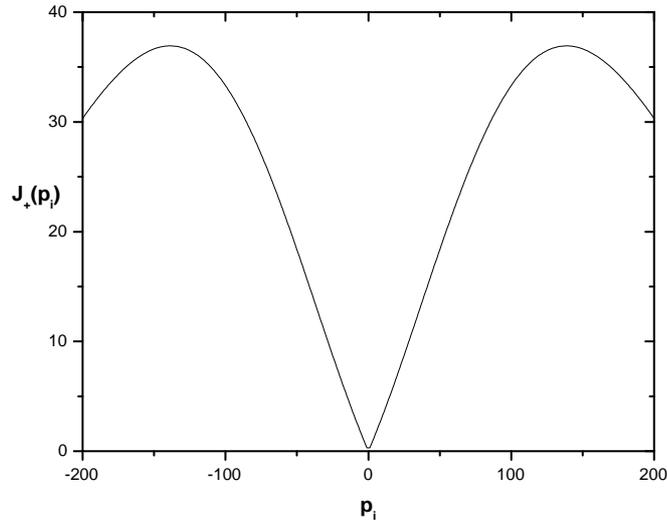


Figura 3.7: Gráfico de J_+ para $l = 1$, $j = 3/2$ e $m_{s_f} = +1/2$.

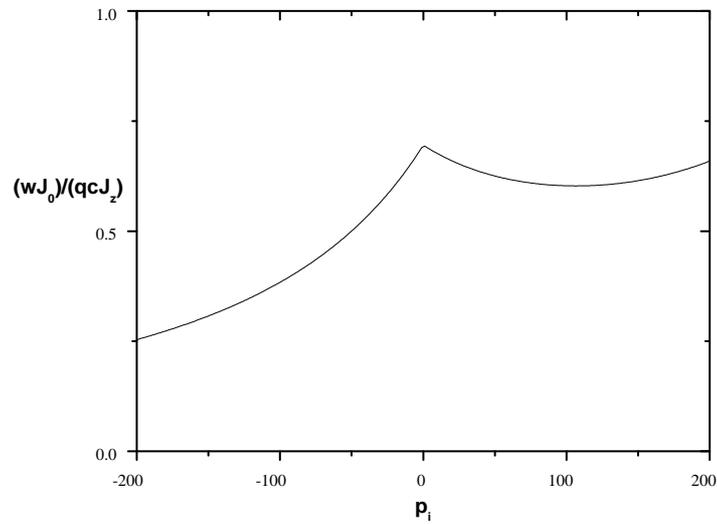


Figura 3.8: Gráfico da razão $\frac{wJ_0}{qcJ_z}$ para $l = 1$, $j = 3/2$ e $m_{s_f} = \pm 1/2$.

O gráfico da figura 3.9 foi o único que apresentou diferenças em relação ao spin final do próton. Essa diferença no entanto desaparece quando calculamos a seção de choque, pois esta depende apenas do módulo de J_0 , ao menos na cinemática paralela.

O gráfico da figura 3.10 apresentou picos negativos, em oposição aos

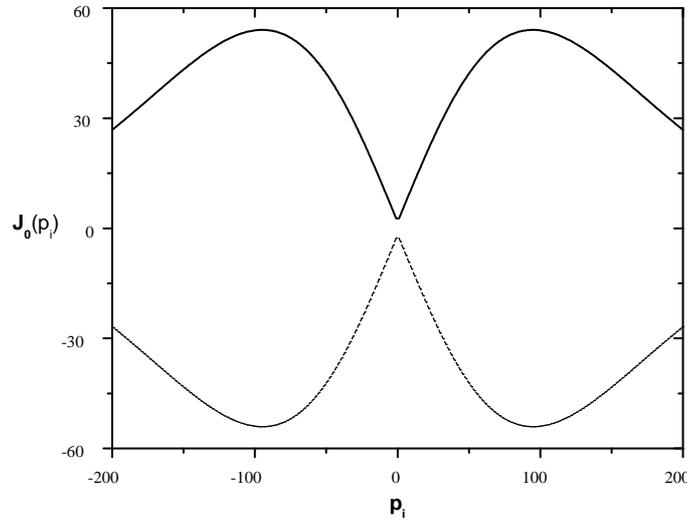


Figura 3.9: Gráfico de J_0 para $l = 1$, $j = 1/2$, com a curva contínua representando o spin final $-1/2$ e a hachurada o spin final $+1/2$.

outros gráficos de J_- (vale lembrar que em zero a função não está determinada, correspondendo ao que chamamos de zero de Born). Novamente, não esperamos observar o sinal das densidades em uma medida experimental. Na figura 3.11 mostramos finalmente o comportamento de J_+ para este estado.

Os resultados acima nos mostram que, embora a utilização de uma aproximação de onda plana para descrever o próton no estado final, tenha a vantagem de uma dependência bastante simples das densidades de corrente de transição com a função de onda do próton em seu estado inicial ligado, isto traz consigo o ônus da quebra de uma simetria fundamental do sistema. Que isto deveria ocorrer, fica claro se notamos que estamos usando na verdade diferentes hamiltonianas para descrever o próton em seu estado inicial e final. Esta dificuldade poderia ser eliminada se obtivéssemos a função de onda final do próton a partir da mesma interação usada para descrever o estado ligado, ou seja, em nosso caso a partir dos potenciais mesônicos obtidos através do modelo de Wallecka. De qualquer forma, poderíamos esperar que o relaxamento desta condição fosse razoável do ponto de vista dos resultados numéricos, o que definitivamente não ocorre nos casos con-

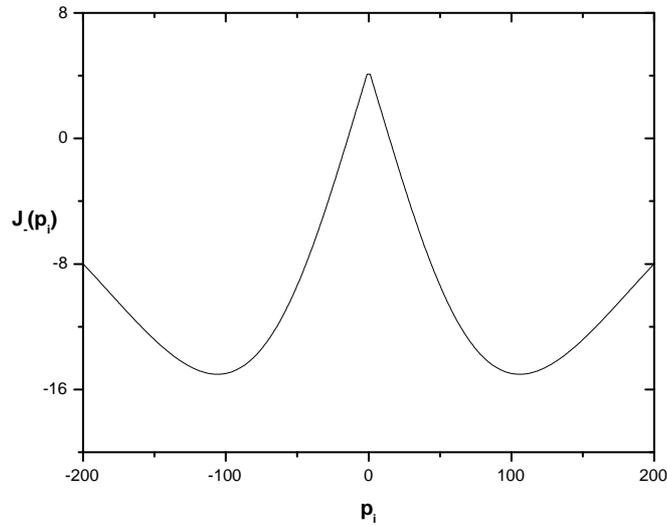


Figura 3.10: Gráfico de J_- para $l = 1$, $j = 1/2$ e $m_{s_f} = -1/2$.

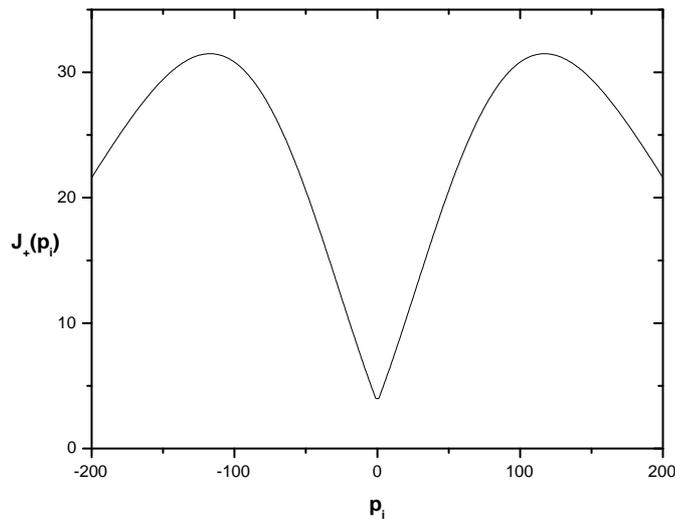


Figura 3.11: Gráfico de J_+ para $l = 1$, $j = 1/2$ e $m_{s_f} = +1/2$.

siderados aqui. Vale lembrar que a cinemática aqui escolhida corresponde à utilizada em medidas experimentais recentes. No entanto, mesmo que a energia final do próton aumentasse significativamente, o comportamento da razão entre J_0 e J_z não deve mudar em relação ao que foi anteriormente apresentado, como foi por nós numericamente verificado.

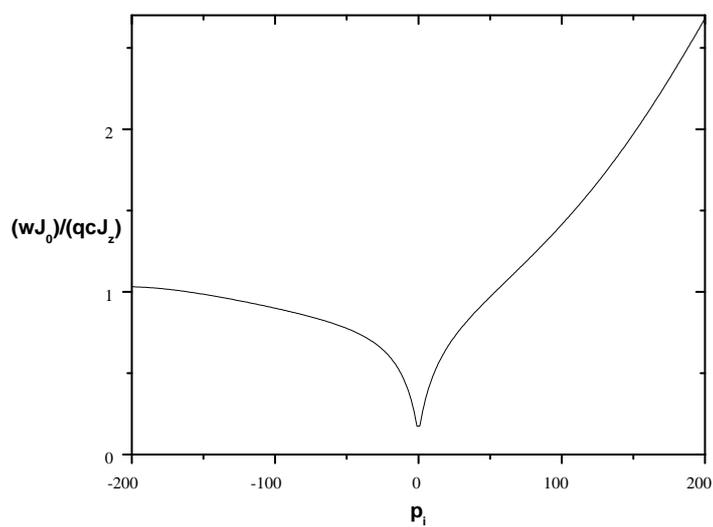


Figura 3.12: Gráfico da razão $\frac{w J_0}{qc J_z}$ para $l = 1$, $j = 1/2$ e $m_{s_f} = \pm 1/2$.

Conclusões

O método de espalhamento de elétrons pelo núcleo atômico é uma excelente forma para se obter informações a respeito da estrutura nuclear. Atualmente estas informações são muito importantes não apenas do ponto de vista da Física Nuclear em si, mas também para uma melhor compreensão de outros mecanismos de funcionamento da natureza. O fato do núcleo possuir uma estrutura, implica a existência de fatores de forma, os quais dependem diretamente das densidades de corrente nucleares. Como os fatores de forma estão diretamente relacionados à secção de choque de espalhamento, esta última se torna assim em uma medida direta das densidades. No caso específico do espalhamento $(e,e'p)$ no chamado regime quasielástico, vimos que a descrição tanto do elétron espalhado, como do próton arrancado do núcleo, através da aproximação de ondas planas, nos conduz à interpretação dos fatores de forma simplesmente como a transformada de Fourier da função de onda do próton ligado, ou melhor dizendo, como a distribuição de momentos para o próton dentro do núcleo.

Esta interpretação simples, esbarra no entanto no fato de que a equação da continuidade para a parte hadrônica da corrente é fortemente violada na aproximação de ondas planas para o próton no contínuo. Embora nosso teste numérico tenha sido aplicado a um modelo específico para descrever a estrutura nuclear, podemos concluir que esta violação deve ocorrer para qualquer outro modelo. Quanto à aproximação de ondas planas para o elétron, é um fato bem estabelecido que esta deve conduzir a resultados bem realistas para o problema, ao menos para núcleos relativamente leves, como o ^{16}O .

Quanto ao fato de usarmos um modelo que inclui explicitamente correções relativísticas para descrever o próton ainda em seu estado ligado, acreditamos que este trabalho possa servir como ponto de partida para comparações

com outros modelos não-relativísticos, a fim de melhor quantificar a necessidade ou não de introduzirmos tais correções neste tipo de problema. Neste sentido, um estudo que explore ainda a relação com a utilização de diferentes cinemáticas de detecção do próton, pode ser importante. A partir de nossas expressões obtidas no Capítulo 2 e algum esforço computacional adicional, este estudo pode ser feito.

Assim, baseados nos resultados obtidos e na argumentação acima, podemos propor dois pontos como forma de continuidade do presente trabalho: no primeiro, a obtenção da função de onda do próton emitido a partir do mesmo potencial utilizado para descrever o próton ligado, o que deve satisfazer a equação da continuidade para as correntes de transição correspondentes. No caso do modelo de Wallecka em sua versão mais simples, isto significa resolver o problema do estado final do próton a partir dos mesmos potenciais mesônicos da aproximação de Hartree.

O segundo ponto é a tentativa de refinarmos o modelo usado neste trabalho. Isto inclui a possibilidade de adicionarmos outros mésons no modelo ou efeitos que possam ir além da aproximação de partícula independente. Embora isto possa corresponder a correções bastante pequenas em alguns observáveis médios do núcleo, tais efeitos podem trazer modificações bastante sensíveis nas densidades de corrente e conseqüentemente na seção de choque ($e, e'p$).

Apêndice

Apresentamos, neste apêndice, algumas relações usadas para deduzir as expressões de J^μ apresentadas no capítulo 2. Uma delas é a que fornece o gradiente de uma função radial multiplicada pelo harmônico esférico:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\varphi(r)Y_{l,m}(\hat{r}) = & -\left(\frac{l+1}{2l+1}\right)^{1/2}\left(\frac{d}{dr}-\frac{l}{r}\right)\varphi(r)\mathbf{Y}_{l,l+1}^m(\hat{r}) + \\ & +\left(\frac{l}{2l+1}\right)^{1/2}\left(\frac{d}{dr}+\frac{l+1}{r}\right)\varphi(r)\mathbf{Y}_{l,l-1}^m(\hat{r})\end{aligned}$$

onde $\varphi(r)$ é uma função arbitrária de r . Os harmônicos esféricos vetoriais são dados por:

$$\mathbf{Y}_{L,l}^M(\hat{r}) = \sum_{m,m'} \langle l \ m \ 1 \ m' | L \ M \rangle Y_{l,m}(\hat{r}) \hat{e}_{m'}$$

com $m' = 0, \pm 1$.

Em nossos cálculos utilizamos ainda as seguintes relações envolvendo as funções de Bessel esféricas [12]:

$$\frac{2l+1}{x}j_l(x) = j_{l-1}(x) + j_{l+1}(x)$$

e:

$$\frac{d}{dx}j_l(x) = \frac{1}{2l+1}[lj_{l-1}(x) - (l+1)j_{l+1}(x)] .$$

Para deixar claro a notação e convenções usadas, definimos as matrizes de Pauli utilizadas no desenvolvimento das expressões. Podemos escrever as componentes de $\vec{\sigma}$ como:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ,$$

com

$$\sigma_{\pm} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_x \pm i\sigma_y) .$$

Aplicando σ_+ , σ_- e σ_z à função de spin , temos:

$$\sigma_+ \chi_{m_s} = -\sqrt{2} \chi_{1/2} \delta_{m_s, -1/2} ,$$

$$\sigma_- \chi_{m_s} = \sqrt{2} \chi_{-1/2} \delta_{m_s, 1/2}$$

e

$$\sigma_z \chi_{m_s} = \frac{m_s}{|m_s|} \chi_{m_s} .$$

Para finalizar, apresentamos o produto vetorial:

$$\vec{\sigma} \times \vec{p}_f = -i(\sigma_- p_z - \sigma_z p_-)e_+ + i(\sigma_+ p_z - \sigma_z p_+)e_- - i(\sigma_+ p_- - \sigma_- p_+)e_z$$

onde p_{\pm} é definido de forma similar às matrizes de Pauli.

Propriedades dos coeficientes de Clebsh-Gordan assim como dos harmônicos esféricos, bem como valores especiais destes últimos, foram obtidos de [13].

Referências Bibliográficas

- [1] J.M. Eisenberg & W. Greiner, *Excitation Mechanisms of the Nucleus*, North-Holland (1970)
- [2] B.D. Serot & J.D. Walecka, *Advances in Nuclear Physics*, Plenum Press, New York (1968)
- [3] D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, John Wiley & Sons, New York (1987)
- [4] J.R. Marinelli, *Espalhamento elástico e inelástico de elétrons na banda fundamental do núcleo de Mg^{25}* , Tese de Mestrado, USP, São Paulo (1980)
- [5] C. Cohen-Tannoudji, B. Din & F. Laloë, *Quantum Mechanics*, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, New York (1977)
- [6] S. Boffi, C. Giusti, F.D. Pacati & M. Radici, *Eletromagnetic Response of Atomic Nuclei*, Clarendon Press, Oxford (1996)
- [7] S.R.Mokhtar, M. Anguiano, G. Co' and A.M. Lallena, *Ann. Phys.* 67 (2001)**293**
- [8] C.J. Horowitz & B. D. Serot, *Nucl. Phys. A* 368 (1981)**503**
- [9] D.C. Cheng & G.K. O'Neill, *Elementary Particle Physics, An Introduction*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts (1979)
- [10] A. Messiah, *Quantum Mechanics, vol II*, John Wiley & Sons, Inc, New York (1962)
- [11] T.W. Donnelly and R.D. Peccei, *Physics Reports*, 50 (1979)**1**

- [12] J. D. Jackson, *Classical Eletrodynamics*, John Wiley & Sons, Inc (1962)
- [13] D.A. Varshalovich, A.N. Moskalev & V.K. Khersonskii, *Quantum Theory of Angular Momentum*, World Scientific (1988)
- [14] C.Ciofi degli Atti, *Prog.Part.Nucl.Phys.*,3 (1980) **163**
- [15] J. R. Shepard, E. Rost, E. R. Siciliano & J.A. McNeil, *Physical Review C*, 29 (1984) **2243**