Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e
Computação Científica

Geometria de Fibrados Não-Comutativos

Gilles Gonçalves de Castro
Orientador: Prof. Dr. Eliezer Batista

Florianópolis
Fevereiro de 2005

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica

Geometria de Fibrados Não-Comutativos

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Matemática Aplicada.

Gilles Gonçalves de Castro
Florianópolis
Fevereiro de 2005

Geometria de Fibrados Não-Comutativos

por

Gilles Gonçalves de Castro

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de "Mestre", Área de Concentração em Matemática Aplicada, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica.

Coordenador

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Eliezer Batista (MTM-UFSC-Orientador)

Prof. Dr. Antônio Roberto da Silva (UFRJ)

Prof. Dr. Celso Melchiades Doria (MTM-UFSC)

Prof. Dr. Ruy Exel Filho (MTM-UFSC)

Florianópolis, fevereiro de 2005.

Para minha família.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer toda minha família por estar presente em todas as etapas da minha vida, em particular, minha mãe por apoiar em qualquer decisão que eu tomo desde que venha para minha felicidade. Agradeços aos amigos do curso e fora deles. Em especial, agradeço a Erwin, Fábio e Fernando por terem me influenciado na decisão de estudar matemática. Agradeço aos professores e professoras Albertina, Celso, Daniel, Eliana (in memorian), Fermín, Gustavo, Igor, Ivan, Leitão, Licio, Oscar, Paulo (in memorian), Ruy e Zambaldi por terem participado de minha formação universitária, dentro e fora de sala. Agradeço aos professores da banca por me terem examinado. Agradeço novamente o professor Ruy por me ajudar com meu próximo passo na carreira como matemático. Ao professor e orientador Eliezer que me acompanhou desde que entrei na universidade, sempre acreditou no meu potencial e que também me influenciou na decisão de estudar matemática, meus agradecimentos especiais. Finalmente agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho iremos generalizar o conceito de fibrados principais para o contexto não-comutativo, onde o papel do grupo estrutural será dado por um grupo quântico. Para isso, utilizaremos o conceito de extensões de Hopf-Galois. Revisaremos alguns resultados da teoria clássica de fibrados principais e mostraremos resultados análogos no caso não-comuativo. Também generalizaremos os conceitos de fibrado vetorial associado e fibrado de referenciais.

Palavras-chave: Grupos quânticos, geometria não-comutativa, fibrados principais quânticos, extensões de Hopf-Galois.

Abstract

In the present work, we will generalize the notion of principal fiber bundles to the noncommutative setting, where the role of the structure group will be played by a quantum group. To achieve this, we will use the notion of Hopf-Galois extension. We will review some results of the classical theory of principal fiber bundles and we will prove similar results in the noncommutative case. We also generalize the notions of associated vector bundle and frame bundle.

Keywords: Quantum groups, noncommutative geometry, quantum principal bundles, Hopf-Galois extensions.

Conteúdo

Introdução **1**

1 Noções da teoria álgebras de Hopf **5**

1.1 Definições básicas . . . 5

1.1.1 Álgebras . . . 5

1.1.2 Co-álgebras . . . 10

1.1.3 Bi-álgebras . . . 12

1.1.4 Álgebras de Hopf . . . 15

1.1.5 Par dual . . . 21

1.1.6 Módulos sobre bi-álgebras e álgebras de Hopf . . . 23

1.1.7 Co-módulos . . . 24

1.1.8 $*$-Álgebras de Hopf . . . 28

1.2 A construção FRT . . . 30

1.2.1 Estruturas quasitriangular e co-quasitriangular . . . 30

1.2.2 A construção FRT da bi-álgebra $A(R)$ . . . 36

1.2.3 Espaços quânticos para a bi-álgebra $A(R)$ . . . 43

2 Cálculo diferencial não-comutativo **47**

2.1 Cálculo diferencial covariante sobre espaços quânticos . . . 47

2.1.1 Cálculo diferencial sobre álgebras . . . 47

2.1.2 Cálculo sobre espaços quânticos . . . 52

2.1.3 Construção de alguns cálculos covariantes sobre espaços quânticos . . . 54

2.2 Bimódulos covariantes . . . 58

2.2.1 Bimódulos covariantes à esquerda . . . 59

2.2.2 Bimódulos covariante à direita . . . 64

2.2.3 Bimódulos bicovariantes . . . 64

2.3 Cálculo diferencial sobre álgebras de Hopf . . . 67

3 Fibrados principais quânticos **74**

3.1 Fibrados principais (caso clássico) . . . 74

3.1.1 Fibrados principais contínuos . . . 74

3.1.2 Fibrados principais diferenciáveis e conexões . . . 79

3.2 Extensões de Hopf-Galois . . . 83
3.3 Fibrados principais quânticos e conexões . . . 88
3.3.1 Espaços homogêneos quânticos . . . 95

4 Fibrados associados e resolução de referenciais **99**
4.1 Fibrados vetoriais quânticos associados . . . 99
4.1.1 Formas tensoriais . . . 102
4.1.2 Conexões fortes . . . 105
4.2 Resolução de referenciais . . . 108
4.2.1 Caso clássico . . . 108
4.2.2 Caso não-comutativo . . . 119

Considerações finais **128**

A Produto Tensorial **130**
A.1 Definição e construção do produto tensorial . . . 130
A.2 Resultados com o produto tensorial . . . 134

B Notação de Sweedler **139**
B.1 Co-produto . . . 139
B.2 Co-ações . . . 142

C Alguns lemas de álgebra **143**
C.1 O lema do diamante em teoria de anéis . . . 143
C.2 O lema da cobra e o lema dos cinco . . . 146

D Variedades diferenciáveis **149**
D.1 Definições básicas . . . 149

Introdução

O objetivo desta dissertação é estudar generalizações dos conceitos de fibrados principais, fibrados vetoriais associados e fibrados de referenciais para o contexto da geometria não-comutativa. Aqui, o papel do grupo estrutural será desempenhado por grupos quânticos. Para motivarmos esse estudo, façamos uma revisão histórica das teorias de geometria não-comutativa e de grupos quânticos. Nessa revisão, falaremos de diversos conceitos que não serão introduzidos ao longo da dissertação. Para mais informação, ver as referências mencionadas ao longo da discussão.

Um grande resultado que pode ser considerado um pilar para teoria de geometria não-comutativa é o teorema de Gelfand-Naimark publicado em 1943 [20]. Em linguagem atual, o teorema mostra que existe uma correspondência biunívoca entre espaços topológicos localmente compactos Hausdorff e C*-álgebras comutativas [19]. A parte trivial deste teorema é: dado um espaço topológico (localmente compacto Hausdorff) X considerar a álgebra de funções a valores complexos que se anulam no infinito $C_0(X)$ com a norma dada pelo supremo. A parte não-trivial é dada uma C*-álgebra comutativa A, encontrar um espaço topológico X de forma que $A \cong C_0(X)$.

Uma pergunta natural que surge é se podemos estudar propriedades topológicas de X a partir da álgebra $C_0(X)$ e reciprocamente estudar propriedades de uma C*-álgebra comutativa A a partir do espaço topológico correspondente. Um resultado básico neste sentido é que o espaço topológico X é compacto se e somente se a álgebra $C_0(X)$ tem unidade. Nesse caso temos que $C_0(X) = C(X)$ (espaço de todas funções contínuas a valores complexos) e de fato temos uma equivalência dada por um funtor contravariante entre a categoria dos espaços topológicos compactos Hausdorff e a categoria das C*-álgebras comutativas com unidade. Dada uma função contínua entre dois espaços topológicos compactos $\varphi : X \to Y$ iremos considerar o homomorfismo de C*-álgebras $\psi : C(Y) \to C(X)$ dado por $\psi(f) = f \circ \varphi$ e verifica-se que todo homomorfismo entre C*-álgebras comutativas com unidade é desta forma. No caso em que o espaço topológico não é compacto, temos que restringir os morfirmos nas categorias correspondentes e em particular podemos ter que o conjunto dos morfismos entre dois objetos seja vazio [19]. Diversas outras propriedades podem ser enxergadas em ambos os contextos, por exemplo, a separabilidade da álgebra está relacionado com o fato do espaço topológico ser metrizável; e o processo de compactificação a um ponto de um espaço topológico é equivalente ao processo de unitização da álgebra correspondente [19].

Outro pilar para a teoria de geometria não-comutativa é o teorema de Serre-Swan estabelecido no final da década de 50 e início da década de 60 [37] [39]. A primeira parte deste teorema mostra que se E é um fibrado vetorial complexo sobre um espaço topológico compacto Hausdorff X então o espaço das seções $\Gamma(E)$ é um módulo finitamente gerado projetivo sobre $C(X)$. A segunda parte é a recíproca que afirma que todo módulo finitamente gerado projetivo sobre $C(X)$ é o espaço das seções de algum fibrado vetorial complexo sobre X. Também temos que o fibrado vetorial E é unicamente determinado por $\Gamma(E)$, ou seja, neste caso podemos trocar um objeto geométrico por um objeto que é puramente algébrico.

Note que até agora todas as álgebras consideradas foram comutativas, no entanto, vários dos conceitos algébricos relacionados com conceitos topológicos podem, a menos de algumas modificações, ser estudados para álgebras não-comutativas. Este é o ponto de partida para geometria não-comutativa. No final da década de 70 e ínicio 80, Alain Connes usou brilhantemente essas idéias para resolver problemas em que as técnicas até o momento eram insuficientes. Em [12], Connes faz uma exposição dos principais resultados (muitos sem demonstração, apenas com referências) acerca de geometria não-comutativa. Para um texto mais detalhado, ver por exemplo [19].

Em paralelo, durante as décadas de 70 e 80, surgem diversos artigos que irão culminar no trabalho de Drinfeld [14], onde se começa a empregar o termo grupo quântico. O problema em questão era achar soluções da equação de Yang-Baxter [1] [43], proveniente de problemas em física nas áreas de sistemas integráveis e mecânica estatística quântica. Em [14], Drinfeld finalmente estabelece a relação entre as soluções da equação de Yang-Baxter e a teoria de deformações de álgebras iniciada em [21] por Gerstenhaber.

Alguns anos mais tarde, Faddeev, Reshetikhin e Takhtajan, em [18], ampliam o trabalho de Drinfeld e constroem deformações de certos grupos de Lie e correspondentes álgebras de Lie. É importante ressaltar aqui que as álgebras encontradas em [14] e [18] são exemplos de álgebra de Hopf (ver por exemplo [27]).

No final da década de 80, em paralelo aos trabalhos de Drinfeld, Faddeev, Reshetikhin e Takhtajan; Woronowicz em [41], estabelece importantes resultados acerca de pseudogrupos matriciais compactos. Em particular, no espírito da geometria não-comutativa, temos a existência do estado de Haar que é equivalente à medida de Haar no caso de grupos matriciais compactos. O que liga a teoria de Woronowicz com a teoria de grupos quânticos é que, no fundo, pseudogrupos matriciais compactos são exemplos de C*-álgebras de Hopf, isto é, uma C*-álgebra com unidade que contém uma álgebra de Hopf como sub-álgebra densa. De fato, os resultados mostrados em [41] puderam ser generalizados para esse contexto mais geral.

Vamos discutir um pouco a relação entre grupos quânticos, álgebras de Hopf e geometria não-comutativa. Suponha que G é um grupo finito então temos o seguinte isomorfismo $C(G \times G) \cong C(G) \otimes C(G)$ (produto tensorial algébrico) e o produto do grupo, visto como homomorfismo de álgebras $\Delta : C(G) \to C(G) \otimes C(G)$, satisfaz as condições para ser um co-produto. Também temos que a inversa do grupo nos dá uma aplicação $S : C(G) \to C(G)$, que vai fazer o papel de antípoda, de forma que $C(G)$ vai ter uma estrutura de álgebra de Hopf. No caso que G é um grupo topológico compacto Hausdorff com um número infinito de pontos, não mais é válido que $C(G \times G) \cong C(G) \otimes C(G)$ e no caso em que não temos nem a compacidade a situação piora uma vez que $C_0(G)$ não possui nem unidade.

Queremos pensar grupos quânticos como sendo na verdade a álgebra de funções contínuas a valores complexos de um "espaço não-comutativo com estrutura de grupo". Nesse ponto, temos que fazer uma escolha. Ou adaptamos a definição de álgebra de Hopf para funcionar no contexto mais geral, ou trabalhamos com álgebras de Hopf sem modificar, trabalhando com uma sub-álgebra densa da álgebra de funções do "espaço não-comutativo", como por exemplo a álgebra de funções coordenadas de um grupo matricial. Optaremos por seguir o segundo enfoque.

Também será de interesse, generalizar o conceito de ação de um grupo topológico em um espaço topológico. Aqui teremos o mesmo problema mencionado no parágrafo anterior ao dualizarmos a ação $a : G \times X \to X$ para um morfismo da álgebra de funções. Como no caso anterior não é válido em geral que $C(G \times X) \cong C(G) \otimes C(X)$, mas podemos restringir as álgebras de modo que o morfismo proveniente da ação tenha a imagem contida em $C(G) \otimes C(X)$. No caso geral, isso nos levará ao conceito de co-módulo.

Voltemos ao problema inicial proposto. Fibrados principais quânticos surgiram em meados da década de 90 em diversos trabalhos independentes [5], [6], [16], [17] e [35] como a generalização não-comutativa de fibrados principais. Todos tem como premissa básica utilizar grupos quânticos no papel do grupo estrutural, no entanto o enfoque e as técnicas variam de artigo para artigo. Um dos grande problemas é que fenômenos locais em geral são difíceis de serem estudados no contexto não-comutativo. Em [16], o espaço de base ainda é considerado como uma variedade clássica, não estando assim completamente no espírito da geometria não-comutativa. Em [35], são utilizadas técnicas de geometria algébrica para estudar fibrados principais quânticos, em particular é utilizado o conceito de feixes que precisa de espaço topológico como base. Em [5] e [17] a trivialidade local é de certa forma abandonada e são dadas condições extras num sentido mais global. A definição apresentada nesta dissertação seguirá esse contexto e faremos uma imposição mais forte para se assemelhar a definição clássica de fibrado principal dada em [25]. Também nesse contexto, podemos utilizar a teoria desenvolvida em [42] para estudar fibrados principais quânticos diferenciáveis. Finalmente, [6] trabalha no contexto localmente trivial onde um certo conjunto de ideais da álgebra que faz papel do espaço base é pensado como uma cobertura da "variedade base não-comutativa".

No presente trabalho, estudaremos a teoria de fibrados principais quânticos e outros conceitos relacionados seguindo a linha desenvolvida a partir de [5]. O texto tem como pré-requisito conhecimentos em álgebra, álgebra linear e topologia. A parte de geometria diferencial é revisada ao longo do texto, no entanto, os detalhes e algumas demonstrações são deixadas para as referências e portanto familiaridade com assunto também é desejada.

A dissertação segue a seguinte estrutura. No primeiro capítulo, iniciamos com as definições básicas da teoria de álgebras de Hopf na primeira seção, e faremos a construção FRT na segunda seção que nos servirá como fonte de exemplos.

No segundo capítulo, desenvolvemos a teoria de cálculos diferenciais não-comutativos e em particular, cálculos sobre álgebras de Hopf.

O terceiro capítulo inicia-se com uma revisão da teoria clássica de fibrados principais na primeira seção. Na segunda seção, estudaremos o conceito de extensões de Hopf-Galois e veremos na seção seguinte que elas são uma generalização natural para fibrados principais quânticos. Também na terceira seção, estudaremos fibrados principais quânticos diferenciáveis e conexões.

O quarto capítulo inicia-se com uma discussão de fibrados vetorias quânticos associados, derivada covariante e conexões fortes. Na segunda seção, vemos como generalizar o conceito de fibrado de referenciais para resolução de referenciais. Nesse contexto podemos enxergar o fibrado tangente de uma variedade como um fibrado vetorial associado. Redefiniremos, também, alguns conceitos de geometria diferencial clássica de forma que podemos generalizar de maneira natural para o caso não-comutativo. Terminamos o quarto capítulo discutindo exatamente a resolução de referenciais no caso não-comutativo.

Teremos também quatro apêndices. O apêndice A revisará a construção do produto tensorial e técnicas para se trabalhar com ele. O apêndice B apresenta a formalização da notação de Sweedler introduzida no capítulo 1. O apêndice C será destinado para demonstração de alguns lemas de álgebra. Em particular, o lema do diamante é uma grande ferramenta para estudar grupos quânticos. Finalmente, no apêndice D, revisaremos alguns conceitos de variedades diferenciáveis, no intuito de estabelecer notações para o terceiro e quarto capítulos, assim como para deixar o texto mais auto-suficiente.

Muitas das técnicas utilizadas nas demonstrações são similares umas com as outras. Se este for o caso, os detalhes serão apresentados somente nas primeiras demonstrações, ficando eles subentendidos nas demais.

Capítulo 1

Noções da teoria álgebras de Hopf

Neste primeiro capítulo, estudaremos alguns elementos da teoria de álgebras de Hopf. A primeira seção está destinada em apresentar a terminologia necessária para o entendimento do restante do trabalho assim como alguns resultados básicos e exemplos. Na segunda seção, começaremos definindo outros elementos da teoria de álgebra de Hopf necessários para o restante da seção. Em seguida faremos a construção FRT [18], a qual nos permitirá achar diversos exemplos para os conceitos a serem estudados. No final da segunda seção, também faremos um processo geral para achar espaços quânticos sobre as bi-álgebras encontradas na construção FRT.

1.1 Definições básicas

Nessa seção, definiremos os conceitos básicos utilizados ao longo das outras partes da dissertação. Para mais detalhes e outras aplicação ver por exemplo [26], [27] e [30].

1.1.1 Álgebras

Fixe $\mathbb{K}$ corpo de característica zero. Começaremos essa subseção definindo álgebra de maneira usual e em seguida mostraremos uma equivalência que nos permitirá definir álgebra de outra forma. Tal forma nos será mais conveniente na hora de definirmos co-álgebras, bi-álgebras e álgebras de Hopf. Por convenção consideraremos álgebras sempre como associativas e com unidade. Ao longo do texto a aplicação τ representará o isomorfismo 4 da proposição A.2.2, a saber, $\tau : V \otimes W \to W \otimes V$ dado por $\tau(v \otimes w) = w \otimes v$. Caso τ tenha sub-índices, estes denotarão quais parcelas estão sendo trocadas num produto tensorial de vários espaços vetoriais, por exemplo $\tau_{23} : V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \otimes V_4 \to V_1 \otimes V_3 \otimes V_2 \otimes V_4$ é dada nos geradores por $\tau_{23}(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 \otimes v_4) = v_1 \otimes v_3 \otimes v_2 \otimes v_4$.

Definição 1.1.1 *Seja $\mathbb{K}$ um corpo, dizemos que uma anel com unidade $(A, +, .)$ é uma álgebra sobre $\mathbb{K}$ se A for um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ tal que a multiplicação é uma aplicação bi-linear sobre $\mathbb{K}$.*

A partir de agora vamos falar apenas álgebra sem fazer menção ao corpo, ficando este subentendido. Note que não exigimos que a multiplicação do anel seja comutativa. Na verdade, na maior parte dos exemplos no qual estaremos interessados as álgebras serão não comutativas.

Vale lembrar que se $a \in A$ é um elemento que possui um inverso à direita d e um inverso à esquerda e então a é inversível e $a^{-1} = d = e$, de fato $d = 1d = (ea)d = e(ad) = e1 = e$.

Proposição 1.1.2 *Seja $\mathbb{K}$ um corpo, são equivalentes:*

1. A é uma álgebra;

2. A é um espaço vetorial e existem aplicações lineares $\mu : A \otimes A \to A$ e $\eta : \mathbb{K} \to A$ tais que os seguintes diagramas são comutativos

$$\begin{tikzcd} & A \otimes A \otimes A \arrow[dl, "\mu\otimes id"'] \arrow[dr, "id\otimes\mu"] & \\ A \otimes A \arrow[dr, "\mu"'] & & A \otimes A \arrow[dl, "\mu"] \\ & A & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[dr, "\mu"] & \\ \mathbb{K} \otimes A \arrow[u, "\eta\otimes id"] \arrow[r, leftrightarrow, "\sim"] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[dr, "\mu"] & \\ A \otimes \mathbb{K} \arrow[u, "id\otimes\eta"] \arrow[r, leftrightarrow, "\sim"] & A \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

Demonstração. $(1 \Rightarrow 2)$: O fato da multiplicação ser bi-linear implica que podemos estendê-la para μ no produto tensorial. A associatividade da multiplicação nos dá o primeiro digrama comutativo. A aplicação η é definida por $\eta(\lambda) = \lambda 1_A$ para $\lambda \in \mathbb{K}$, onde 1_A é a unidade da álgebra. Os dois últimos digramas seguem de imediato da definição de unidade.

$(2 \Rightarrow 1)$: Basta definir a multiplicação por $a.b = \mu(a \otimes b)$ e a unidade por $1_A = \eta(1)$. Segue das propriedade do produto tensorial que a multiplicação é bi-linear, além disso os diagramas nos dão as propriedades de associatividade e unidade. ■

Em vista desta proposição, confudiremos propositalmente a nomenclatura do produto tanto como sendo a aplicação usual como sendo a aplicação μ. Também chamaremos a aplicação η de unidade. Além disso definiremos morfismos entre álgebras e ideais a partir dessas aplicações.

Definição 1.1.3 *Sejam A e B álgebras e $f : A \to B$ uma aplicação linear, diremos que f é um morfismo de álgebras se $f \circ \mu_A = \mu_B \circ (f \otimes f)$ e $f \circ \eta_A = \eta_B$.*

Definição 1.1.4 *Seja A uma álgebra e I um subespaço de A, diremos que I é um ideal (bilateral) de A se $\mu(I \otimes A + A \otimes I) = I$.*

Segue do lema A.2.8 do apêndice A que se π é a projeção de A no quociente A/I então $I \otimes A + A \otimes I$ é exatamente $\ker(\pi \otimes \pi)$ e portanto temos uma multiplicação bem definida no quociente. Podemos também definir ideal à esquerda e à direita exigindo que $\mu(A \otimes I) = I$ e $\mu(I \otimes A) = I$ respectivamente.

Definição 1.1.5 *Sejam A e B álgebras, definimos a álgebra produto tensorial entre A e B como sendo o espaço vetorial $A \otimes B$ com produto definido nos geradores (como espaço vetorial) por $(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = a_1 a_2 \otimes b_1 b_2$, ou seja, $\mu_{A\otimes B} = (\mu_A \otimes \mu_B) \circ \tau_{23}$ e unidade $1_A \otimes 1_B$.*

Para ver que o produto está de fato bem definido, basta notar que a aplicação do produto cartesiano $A \times B \times A \times B$ em $A \otimes B$ dada por $(a_1, b_1, a_2, b_2) \to a_1 a_2 \otimes b_1 b_2$ é quadrilinear e portanto pela proposição A.2.6 pode ser estentida para o produto tensorial.

Definição 1.1.6 *Seja A uma álgebra, definimos a álgebra oposta denotada por A^{op} como a álgebra que tem o produto $\mu^{op}(a \otimes b) = \mu(b \otimes a) = ba$ e a mesma unidade de A.*

Com a notação da definição temos que uma álgebra é comutativa se e somente se $\mu = \mu^{op}$.

Assim como no apêndice A construímos um espaço vetorial a partir de um conjunto dado, podemos fazer a mesma coisa com álgebras. Tais álgebras denominadas álgebras livres têm a propriedade universal que toda álgebra é um quociente de uma álgebra livre por um de seus ideais. Tal ferramenta será freqüentemente utilizada na construção das álgebras nas quais estaremos interessados.

Seja X um conjunto qualquer e denote $I_n = \{1, \dots, n\}$. Uma palavra de tamanho n em X é uma função $f : I_n \to X$. Também estamos levando em consideração que n pode ser zero em I_n, neste caso a palavra será exatamente a função vazio. Denote $\mathbb{K}\{X\}$ o espaço vetorial gerado por todas as palavras e defina um produto em $\mathbb{K}\{X\}$ da seguinte forma.

Primeiro definamos a concatenação de duas palavras f de tamanho n e g de tamanho m como sendo $fg : I_{m+n} \to X$ dada por $fg(i) = f(i)$ para $1 \le i \le n$ e $fg(j + n) = g(j)$ para $1 \le j \le m$. Para cada palavra f podemos definir uma transformação linear $\mu_f : \mathbb{K}\{X\} \to \mathbb{K}\{X\}$ que na base formada pelas palavras é dada exatamente pela concatenação, ou seja, $\mu_f(g) = fg$ se g é uma palavra. Em seguida definimos uma aplicação $\overline{\mu} : \mathbb{K}\{X\} \to \mathrm{Lin}(\mathbb{K}\{X\}, \mathbb{K}\{X\})$ que nas palavras é dada por $\overline{\mu}(f) = \mu_f$. Por fim definimos a multiplicação como sendo $\mu : \mathbb{K}\{X\} \times \mathbb{K}\{X\} \to \mathbb{K}\{X\}$ por $\mu(x, y) = \overline{\mu}(x)(y)$ para $x, y \in \mathbb{K}\{X\}$ que é bilinear por construção. É claro que a concatenação de palavras é associativa donde segue que a multiplicação também o é, além disso temos que a palavra vazia corresponde a unidade. Em geral, denotaremos as palavras de um conjunto X por $x_1 x_2 \dots x_n$ e concatenação por $(x_1 \dots x_n)(y_1 \dots y_m) = x_1 \dots x_n y_1 \dots y_m$. Fica claro desta forma que temos uma injeção canônica de X em $\mathbb{K}\{X\}$.

Proposição 1.1.7 *Sejam A uma álgebra, X um conjunto e $f : X \to A$ uma função qualquer. Então existe um único morfismo de álgebras $\overline{f} : \mathbb{K}\{X\} \to A$ tal que $\overline{f}(x) = f(x)\ \forall x \in X$.*

Demonstração. É suficiente definir $\overline{f}$ nas palavras e estender linearmente para $\mathbb{K}\{X\}$. Dada uma palavra $x_1 x_2 \dots x_n$ de X, defina $\overline{f}(x_1 x_2 \dots x_n) = f(x_1) f(x_2) \dots f(x_n)$ e defina $\overline{f}(\emptyset) = 1$. É claro que $\overline{f}$ é um morfismo de álgebras. ■

Para ver que toda álgebra A é o quociente de uma álgebra livre, considere um conjunto X de geradores de A e $\bar{i}$ a extensão da inclusão conforme a proposição anterior, então $I = \ker \bar{i}$ é um ideal bilateral de $\mathbb{K}\{X\}$ e pelo primeiro teorema do homomorfismo $A \simeq \mathbb{K}\{X\}/I$.

Exemplo 1.1.8 *Seja $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ um conjunto finito e considere I o ideal de $\mathbb{K}\{X\}$ gerado por elementos da forma $x_i x_j - x_j x_i$, então $\mathbb{K}\{X\}/I$ é exatamente a álgebra polinomial de n variáveis $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$.*

Lembrando que um semi-grupo é um conjunto com uma operação associativa, temos a seguinte defninção.

Definição 1.1.9 *Seja G um semi-grupo, dizemos que A é uma álgebra G-graduada se*

1. *$A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ onde A_g são sub-espaços de A;*
2. *$A_g A_h \subseteq A_{gh}$ $\forall g, h \in G$.*

Os elementos de A que pertencem a um sub-espaço A_g são denominados monômios ou elementos homogêneos.

No caso em que G é o conjunto dos números naturais então dizemos apenas que A é uma álgebra graduada e dizemos que os elementos homogêneos de A_n têm grau n. Por construção, toda álgebra livre é uma álgebra graduada, onde as sub-álgebras A_n são definidas como sendo aquelas linearmente geradas pelas palavras de tamanho n.

Lema 1.1.10 *Seja A uma álgebra graduada e I um ideal bilateral de A gerado por elementos homogêneos então $I = \bigoplus_{n \in N} I \cap A_n$ e a álgebra quociente A/I é graduada com $(A/I)_n \cong A_n/(I \cap A_n)$ para $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Primeiro, vejamos que $I = \sum_{n \in N} I \cap A_n$.É claro que a inclusão $\supseteq$ é válida, vejamos a outra. Como o ideal I é gerado por elementos homogêneos x_i de grau n_i temos para $x \in I$ que $x = \sum_i a_i x_i b_i$ soma finita com $a_i, b_i \in A$. Como A é graduada, podemos escrever $a_i = \sum_j a_{ij}$ e $b_i = \sum_k b_{ik}$, ambas somas finitas com $a_{ij} \in A_j$ e $b_{ik} \in A_k$. Segue que $x = \sum_{i,j,k} a_{ij} x_i b_{ik}$ sendo que $a_{ij} x_i b_{ik} \in I \cap A_{j+n_i+k}$, donde temos a inclusão $\subseteq$. Esta soma é direta pois a soma dos A_n é direta.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina uma aplicação $\pi_n : A \to A_n/(I \cap A_n)$ por $\pi_n\left(\sum_i a_i\right) = a_n + (I \cap A_n)$, onde $a_i \in A_i$, e note que $\pi_n(I) = 0$. Como $A = \bigoplus_{n \in N} A_n$, temos uma aplicação bem definida $\pi : A \to \bigoplus_{n \in N} A_n/(I \cap A_n)$ dada por $\pi = \bigoplus_{n \in N} \pi_n$ e tal que $\pi(I) = 0$. Note que de fato $\ker \pi = I$ e que π é sobrejetora, donde $A/I \cong \bigoplus_{n \in N} A_n/(I \cap A_n)$. ■

Terminemos esta subseção com exemplos de álgebras, algumas das quais generalizaremos mais adiante.

Exemplo 1.1.11 (Álgebra tensorial) *Se V é um espaço vetorial então a álgebra tensorial definida por $T(V) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} V^{\otimes n}$, onde $V^{\otimes 0} = \mathbb{K}$ e $V^{\otimes n} = V^{\otimes n-1} \otimes V$ para $n \geq 1$, e produto definido pelo produto tensorial é uma álgebra graduada. No fundo a álgebra tensorial de V é isomorfa a uma álgebra livre gerada por uma base de V.*

Exemplo 1.1.12 (Álgebra de funções coordenadas) *Para A uma álgebra qualquer, construímos a álgebra das matrizes $n\times n$ por $M_n(A) = \{a = (a^i{}_j)_{i\in I_n, j\in I_n},\ a_{ij} \in A\}$ com produto*

$$(ab)^i{}_j = \sum_{k=1}^{n} a^i{}_k b^k{}_j.$$

Em particular se $A = \mathbb{K}$ temos que $M_n(\mathbb{K})$ $=M(n)$ é um espaço vetorial de dimensão n^2 com base as matrizes E_{ij} que tem 1 na coordenada ij e zero em todas as outras. O dual álgebrico $(M_n(\mathbb{K}))'$ tem como base dual as funções cordenadas $t^i{}_j(a) = a^i{}_j$. Note que $(M_n(\mathbb{K}))' \subseteq \mathcal{F}(M_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$ sendo este último a álgebra de funções de $M_n(\mathbb{K})$ sobre $\mathbb{K}$. Podemos então definir a álgebra de funções coordenadas $\mathbb{K}\left\langle t^i{}_j\right\rangle$ como a subálgebra da álgebra de funções gerada pelas funções $t^i{}_j$. Como supomos que a característica do corpo $\mathbb{K}$ é zero, a álgebra $\mathbb{K}\left\langle t^i{}_j\right\rangle$ nada mais é que a álgebra polinomial de n^2 variáveis $\mathbb{K}[t^i{}_j]$.

Definição 1.1.13 *Um par $(\mathfrak{g}, [,])$ onde $\mathfrak{g}$ é um espaço vetorial e $[,] : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ é uma aplicação bi-linear chamada comutador ou colchete de Lie é dito uma álgebra de Lie se $[,]$ satisfaz:*

1. $[x, x] = 0\ \forall x \in \mathfrak{g}$ *(anti-simetria);*

2. $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0\ \forall x, y, z \in \mathfrak{g}$ *(identidade de Jacobi).*

Se $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ são álgebras de Lie, então uma aplicação linear $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ é dita ser um homomorfismo de álgebras de Lie se vale $[f(x), f(y)] = f([x, y])\ \forall x, y \in \mathfrak{g}$.

Se A é uma álgebra então o comutador dado por $[x, y] = xy - yx$ dá uma estrutura de álgebra de Lie para o espaço vetorial A. Se A é comutativa, então o comutador é nulo.

Exemplo 1.1.14 (Álgebra envolvente universal) *Para estudar uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ no contexto de álgebras, iremos construir uma álgebra na qual $\mathfrak{g}$ está imersa e cujo comutador de $\mathfrak{g}$ é dado pelo comutador da álgebra. A construção de tal álgebra é imediata. Tome na álgebra tensorial (livre) $T(\mathfrak{g})$ o ideal $I(\mathfrak{g})$ gerado por expressões do tipo $x\otimes y - y\otimes x - [x, y]$ para $x, y \in \mathfrak{g}$. A álgebra quociente $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ $=T(\mathfrak{g})/I(\mathfrak{g})$, denominada álgebra envolvente de $\mathfrak{g}$ é a álgebra desejada.*

Para ver que existe uma injeção de $\mathfrak{g}$ em $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ basta notar que a intersecção do núcleo da projeção de $T(\mathfrak{g})$ em $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, que coincide com $I(\mathfrak{g})$, com a álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{\otimes 1}$ é apenas o zero. De fato, seja $\{e_i\}_{i\in\Lambda}$ uma base de $\mathfrak{g}$ onde Λ é um conjunto de indíces totalmente ordenados. Note que um elemento $c \in I(\mathfrak{g})$ pode ser escrito como uma soma finita da forma $c = \sum_{i<j\in\Lambda} a_{ij} \otimes (e_j \otimes e_i - e_i \otimes e_j - [e_j, e_i]) \otimes b_{ij}$ onde $a_{ij}, b_{ij} \in T(\mathfrak{g})$. Pela proposição A.2.3,

temos que $\sum_{i<j\in\Lambda} a_{ij}\otimes(e_j\otimes e_i - e_i\otimes e_j)\otimes b_{ij} = 0$ *se e só se* $a_{ij}=0$ *ou* $b_{ij}=0$ *para todo par* (i,j)*, mas neste caso temos que* $c=0$*. Portanto, supondo* c *não nulo, temos que* c *sempre possui um somando de grau maior ou igual a dois e portanto não pertence a* $\mathfrak{g}$*.*

A álgebra envolvente tem a propriedade universal de que se $\varphi:\mathfrak{g}\to A$ *é uma aplicação linear numa álgebra* A *tal que* $\varphi([x,y]) = \varphi(x)\varphi(y)-\varphi(y)\varphi(x)$ *então existe um único morfismo de álgebras* $\overline{\varphi}:\mathcal{U}(\mathfrak{g})\to A$ *tal que* $\overline{\varphi}|_{\mathfrak{g}}=\varphi$*. De fato, pela proposição 1.1.7 existe um morfismo de álgebras* $\widetilde{\varphi}:T(\mathfrak{g})\to A$ *tal que* $\widetilde{\varphi}(x)=\varphi(x)$ *para* $x\in\mathfrak{g}$*. A propriedade exigida de* φ *garante que* $\widetilde{\varphi}(I(\mathfrak{g}))=0$ *e portanto podemos passar* $\widetilde{\varphi}$ *para* $\overline{\varphi}$ *no quociente.*

1.1.2 Co-álgebras

Definição 1.1.15 *Uma co-álgebra* (C,Δ,ϵ) *é um espaço vetorial* C *munido de duas aplicações lineares* $\Delta: C\to C\otimes C$ *e* $\epsilon: C\to\mathbb{K}$ *tais que os seguintes diagramas são comutativos:*

$$
\begin{tikzcd}
 & & C\otimes C\otimes C & & \\
C\otimes C \arrow[urr, "\Delta\otimes id"] & & & & C\otimes C \arrow[ull, "id\otimes\Delta"'] \\
 & & C \arrow[ull, "\Delta"] \arrow[urr, "\Delta"'] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C\otimes C \arrow[d, "\epsilon\otimes id"'] & \\
\mathbb{K}\otimes C \arrow[r, leftrightarrow, "\sim"] & C \arrow[ul, "\Delta"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C\otimes C \arrow[d, "id\otimes\epsilon"'] & \\
C\otimes\mathbb{K} \arrow[r, leftrightarrow, "\sim"] & C \arrow[ul, "\Delta"']
\end{tikzcd}
\tag{1.2}
$$

A aplicação Δ *é chamada de co-produto e a aplicação* ϵ *de co-unidade. O primeiro diagrama comutativo é a propriedade da co-associatividade e os outros dois dão os axiomas de co-unidade. Diremos que uma co-álgebra é co-comutativa se vale* $\Delta^{op} := \tau\circ\Delta = \Delta$ *onde* τ *é o isomorfismo de troca.*

Note que o diagrama (1.2) simplesmente troca a direção das flechas do diagrama (1.1). Para o corpo $\mathbb{K}$ temos uma estrutura padrão de co-álgebra fazendo $\Delta(1) = 1\otimes 1$ e $\epsilon(1)=1$.

Notação 1.1.16 *Ao longo deste trabalho utilizaremos uma versão modificada da notação de Sweedler para o co-produto, a saber* $\Delta(c) = c_{(1)}\otimes c_{(2)}$*. A notação de Sweedler é amplamente utilizada em textos involvendo álgebras de Hopf e várias das demonstrações são mais claras utilizando esta notação. Esse tipo de demonstração pode gerar controvérsias, no sentido que se pode pensar que estamos utilizando particularidades da notação que não correspondem a nenhum fato formal. Por esse fato, o apêndice B deste trabalho será destinado para uma discussão detalhada da notação e da interface entre notação e propriedades formais.*

Usando a notação de Sweedler, a co-associatividade do coproduto é escrita então como $c_{(1)(1)}\otimes c_{(1)(2)}\otimes c_{(2)} = c_{(1)}\otimes c_{(2)(1)}\otimes c_{(2)(2)}$ *e por esse motivo escreveremos* $(\Delta\otimes id)\circ\Delta(c) = (id\otimes\Delta)\circ\Delta(c) = c_{(1)}\otimes c_{(2)}\otimes c_{(3)}$ *e as propriedade de co-unidade como* $\epsilon(c_{(1)})c_{(2)} = c = c_{(1)}\epsilon(c_{(2)})$*.*

Assim como em álgebras, temos algumas definições básicas relacionadas a co-álgebras.

Definição 1.1.17 *Sejam C, C_1 e C_2 co-álgebras, uma aplicação linear $f : C_1 \to C_2$ é um morfismo de co-álgebras se $\Delta_2 \circ f = (f \otimes f) \circ \Delta_1$ e $\epsilon_2 \circ f = \epsilon_1$. A co-álgebra oposta de C denotada C^{cop} é a co-álgebra cujo co-produto é dado por Δ^{op} e com a mesma co-unidade de C. A co-álgebra produto tensorial entre C_1 e C_2 tem como co-produto $\Delta = \tau_{23} \circ (\Delta_1 \otimes \Delta_2)$, ou seja temos nos geradores $\Delta(a \otimes b) = a_{(1)} \otimes b_{(1)} \otimes a_{(2)} \otimes b_{(2)}$ e co-unidade $\epsilon = \epsilon_1 \otimes \epsilon_2$.*

Definição 1.1.18 *Um subespaço vetorial I de uma co-álgebra C é dito ser um co-ideal se $\Delta(I) \subseteq I \otimes C + C \otimes I$ e $\epsilon(I) = 0$.*

Note que se I é um co-ideal de C, podemos definir uma estrutura de co-álgebra em C/I definindo $\overline{\Delta}([x]) = (\pi \otimes \pi) \circ \Delta(x)$ e $\overline{\epsilon}([x]) = \epsilon(x)$, onde $x \in C$ e o colchete denota a classe de x. As condições de co-ideal são exatamantes aquelas necessárias para que as operações estejam bem definidas.

A seguir apresentamos três resultados relacionando álgebras e co-álgebras. Dois deles, relacionando o espaço com seu dual, serão generalizados e estudados com mais detalhes na seção 1.1.5. O outro será utilizado como ferramenta para facilitar algumas demonstrações sobre álgebras de Hopf.

Proposição 1.1.19 *Seja C uma co-álgebra e A uma álgebra, então podemos dar uma estrutura de álgebra em $\mathrm{Lin}(C, A)$ definindo o produto de convolução para $f, g \in \mathrm{Lin}(C, A)$ por $f * g = \mu(f \otimes g)\Delta$, ou seja $f * g(c) = f(c_{(1)})g(c_{(2)})$ e unidade dada por $\eta \circ \epsilon$.*

Demonstração. Que $f * g \in \mathrm{Lin}(C, A)$ é claro, pois $f * g$ é composição de aplicações lineares. A associatividade vem de

$$(f * g) * h(c) = (f * g)(c_{(1)})h(c_{(2)}) = f(c_{(1)})g(c_{(2)})h(c_{(3)}) =$$

$$= f(c_{(1)})(g * h)(c_{(2)}) = f * (g * h)(c) \ \forall c \in C.$$

Vejamos que $\eta \circ \epsilon$ é a unidade da convolução

$$f * (\eta \circ \epsilon)(c) = f(c_{(1)})\eta(\epsilon(c_{(2)})) = f(c_{(1)}\epsilon(c_{(2)}))\eta(1) = f(c) \ \forall c \in C$$

$$(\eta \circ \epsilon) * f(c) = \eta(\epsilon(c_{(1)}))f(c_{(2)}) = \eta(1)f(\epsilon(c_{(1)})c_{(2)}) = f(c) \ \forall c \in C$$

ou seja, $f * (\eta \circ \epsilon) = f = (\eta \circ \epsilon) * f$.

A bi-linearidade do produto de convolução vem da linearidade das aplicações em questão e das propriedades do produto tensorial. ∎

Temos em particular, se $A = \mathbb{K}$.

Corolário 1.1.20 *Seja C uma co-álgebra, então podemos dar uma estrutura de álgebra no dual C', definindo o produto de $f, g \in C'$ por $fg(c) = f(c_{(1)})g(c_{(2)})$ e unidade o funcional linear ϵ.*

Proposição 1.1.21 *Seja A uma álgebra de dimensão finita, então, em vista da proposição A.2.7, podemos definir um coproduto em A' por $\Delta(f)(a \otimes b) = f(ab)$ e $\epsilon(f) = f(1)$.*

Demonstração. A aplicação $\widetilde{\Delta(f)} : A \times A \to \mathbb{K}$ dada por $\widetilde{\Delta(f)}(a, b) = f(ab)$ é bilinear e portanto pode ser estendida para o produto tensorial para $\Delta(f)$. Vejamos que a co-associatividade de Δ vem da associatividade da álgebra e a propriedade de co-unidade vem da unidade da álgebra.

Para a co-associatividade

$$(\Delta \otimes id)\,\Delta(f)(a \otimes b \otimes c) = (\Delta \otimes id)\,(f_{(1)} \otimes f_{(2)})(a \otimes b \otimes c) = f_{(1)}(ab) \otimes f_{(2)}(c) =$$

$$= \Delta(f)(ab \otimes c) = f((ab)c) = f(a(bc)) = \Delta(f)(a \otimes bc) = f_{(1)}(a) \otimes f_{(2)}(bc) =$$

$$= (id \otimes \Delta)\,(f_{(1)} \otimes f_{(2)})(a \otimes b \otimes c) = (id \otimes \Delta)\,\Delta(f)(a \otimes b \otimes c)$$

e para a co-unidade

$$(\epsilon \otimes id)\Delta(f)(a) = (\epsilon(f_{(1)})f_{(2)})(a) = \epsilon(f_{(1)})f_{(2)}(a) = f_{(1)}(1) \otimes f_{(2)}(a) =$$

$$= \Delta(f)(1 \otimes a) = f(1.a) = f(a)$$

sendo análogo o outro lado. ∎

Exemplo 1.1.22 *Seja X um conjunto e $\mathbb{K}X$ o espaço vetorial gerado por X, então definindo o co-produto e a co-unidade em $\mathbb{K}X$ por $\Delta(x) = x \otimes x$ e $\epsilon(x) = 1$ respectivamente para $x \in X$, temos claramente que $\mathbb{K}X$ é uma co-álgebra.*

Exemplo 1.1.23 *Em $(M_n(\mathbb{K}))'$ cuja base é formada pelas funções coordenadas t_{ij} definimos o co-produto e a co-unidade na base por $\Delta(t^i{}_j) = \sum_{k=1}^n t^i{}_k \otimes t^k{}_j$ e $\epsilon(t^i{}_j) = \delta_{ij}$, que nada mais é do que a estrutura de co-álgebra dada pela proposição 1.1.21. De fato, $\epsilon(t^i{}_j) = t^i{}_j(Id) = \delta_{ij}$ e $\Delta(t^i{}_j)(a \otimes b) = t^i{}_j(ab) = \sum_{k=1}^n a^i{}_k b^k{}_j = \sum_{k=1}^n (t^i{}_k \otimes t^k{}_j)(a \otimes b)$.*

1.1.3 Bi-álgebras

Suponha agora que um espaço vetorial H possua estruturas de álgebra (H, μ, η) e de co-álgebra (H, Δ, ϵ). A pergunta que surge é se existe uma relação entre essas duas e resposta é que nem sempre há alguma relação evidente, no entanto, dando a $H \otimes H$ as estruturas de produto tensorial de álgebras e de produto tensorial de co-álgebras temos o seguinte resultado.

Proposição 1.1.24 *Nas condições acima, são equivalentes:*

1. *μ e η são morfismos de co-álgebras;*

2. *Δ e ϵ são morfismos de álgebras.*

Demonstração. Dizer que μ é morfismo de co-álgebras é equivalente à comutatividade dos diagramas

$$\begin{tikzcd} H \otimes H \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\Delta\otimes\Delta"'] & H \arrow[r, "\Delta"] & H \otimes H \\ H \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[rr, "\tau_{2,3}"] & & H \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[u, "\mu\otimes\mu"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H \otimes H \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\epsilon_{H\otimes H}"'] & H \arrow[dl, "\epsilon"] \\ \mathbb{K} & \end{tikzcd} \tag{1.3}$$

e η é morfismo de co-álgebras é equivalente à comutatividade dos diagramas

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K} \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\Delta_{\mathbb{K}}"'] & H \arrow[d, "\Delta"] \\ \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \arrow[r, "\eta\otimes\eta"] & H \otimes H \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{K} \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, leftrightarrow, "id"'] & H \arrow[dl, "\epsilon"] \\ \mathbb{K} & \end{tikzcd} \tag{1.4}$$

observando que $\epsilon_{\mathbb{K}} = \eta_{\mathbb{K}} = id$. Agora, note que dizer que Δ é morfismo de álgebras é equivalente a dizer que os primeiros diagramas de (1.3) e (1.4) são comutativos; o mesmo valendo para ϵ com os segundos diagramas. A equivalência segue de imediato. ∎

Definição 1.1.25 *Dizemos que* $(H, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$ *é uma bi-álgebra se* (H, μ, η) *é uma álgebra,* (H, Δ, ϵ) *é uma co-álgebra e são satisfeitas as condições equivalentes da proposição 1.1.24.*

Podemos também combinar algumas das definições relacionadas a álgebras e co-álgebras. Temos então, a bi-álgebra produto tensorial, a bi-álgebra oposta H^{op} com $\mu' = \mu^{op}$, a bi-álgebra co-oposta H^{cop} com $\Delta' = \Delta^{op}$ e a bi-álgebra oposta, co-oposta $H^{op/cop}$ que é a combinação das duas anteriores.

Uma transformação linear entre bi-álgebras $f : H_1 \to H_2$ é dito morfismo de bi-álgebras se f for morfismo de álgebra e co-álgebra. E finalmente, dizemos que I é um ideal de uma bi-álgebra H se for ideal no sentido de álgebras e co-ideal.

Proposição 1.1.26 *Sejam* X *um conjunto qualquer e* $\mathbb{K}\{X\}$ *a álgebra livre gerada por* X*. Suponha que existam funções* $\widetilde{\Delta} : X \to \mathbb{K}\{X\} \otimes \mathbb{K}\{X\}$ *e* $\widetilde{\epsilon} : X \to \mathbb{K}$ *tais que suas extensões* Δ *e* ϵ *em* $\mathbb{K}\{X\}$ *conforme a proposição 1.1.7 satisfazem as propriedades de co-álgebra em* X*, ou seja,* $(\Delta \otimes id)\Delta(x) = (id \otimes \Delta)\Delta(x)$, $(\epsilon \otimes id)\Delta(x) = x = (id \otimes \epsilon)\Delta(x)$ $\forall x \in X$*. Então* Δ *e* ϵ *dão uma estrutura de bi-álgebra para* $\mathbb{K}\{X\}$*.*

Demonstração. Já temos que Δ e ϵ são morfismos de álgebras. Tudo que nos resta mostrar é que $(\mathbb{K}\{X\}, \Delta, \epsilon)$ é uma co-álgebra, mas como Δ e ϵ são transformações lineares, é suficiente mostrar as propriedades desejadas nos monômios. Como id, ϵ e Δ são morfismos de álgebras, também o são $\Delta \otimes id$, $id \otimes \Delta$, $\epsilon \otimes id$ e $id \otimes \epsilon$. Assim

$$(\Delta \otimes id)\Delta(x_1 \dots x_n) = (\Delta \otimes id)\Delta(x_1) \dots (\Delta \otimes id)\Delta(x_n) =$$

$$= (id \otimes \Delta)\Delta(x_1) \dots (id \otimes \Delta)\Delta(x_n) = (id \otimes \Delta)\Delta(x_1 \dots x_n)$$

e análogo para as propriedades de co-unidade. ∎

A partir dessa proposição, se pensarmos numa álgebra A como o quociente da álgebra livre de um conjunto de geradores de A por um ideal I, podemos construir um co-produto e uma co-unidade definindo-os nos geradores e verificando que I é um co-ideal da álgebra livre. Se I for um ideal gerado por uma quantidade finita de relações, então é fácil ver que para verificar que I é um co-ideal, basta analisar o que acontece quando aplicarmos Δ e ϵ nas relações. No caso do co-produto, para simplificar a notação, escreveremos apenas Δ no lugar de $(\pi \otimes \pi) \circ \Delta$, onde π é a projeção no quociente, de forma que podemos utilizar as relações da álgebra quando estivermos trabalhando no produto tensorial.

Exemplo 1.1.27 *Seja $A = \mathbb{C}(SL(2))$ a álgebra das funções coordenadas das matrizes complexas 2×2 com determinante 1. Note que podemos enxergar a álgebra A como sendo $A = \mathbb{C}[t^1{}_1, t^1{}_2, t^2{}_1, t^2{}_2]/\left\langle t^1{}_1 t^2{}_2 - t^1{}_2 t^2{}_1 - 1\right\rangle$ onde $t^i{}_j$ é função que dá a coordenada ij de uma matriz de $SL(2)$. Iremos definir o co-produto por*

$$\Delta(t^1{}_1) = t^1{}_1 \otimes t^1{}_1 + t^1{}_2 \otimes t^2{}_1 \qquad \Delta(t^1{}_2) = t^1{}_1 \otimes t^1{}_2 + t^1{}_2 \otimes t^2{}_2$$

$$\Delta(t^2{}_1) = t^2{}_1 \otimes t^1{}_1 + t^2{}_2 \otimes t^2{}_1 \qquad \Delta(t^2{}_2) = t^2{}_1 \otimes t^1{}_2 + t^2{}_2 \otimes t^2{}_2$$

e a co-unidade por

$$\epsilon(t^1{}_1) = \epsilon(t^2{}_2) = 1 \qquad \epsilon(t^1{}_2) = \epsilon(t^2{}_1) = 0.$$

Vamos verificar que eles satisfazem as relações que definem a álgebra

$$\Delta(t^1{}_1 t^2{}_2 - t^1{}_2 t^2{}_1) = \Delta(t^1{}_1)\Delta(t^2{}_2) - \Delta(t^1{}_2)\Delta(t^2{}_1) =$$

$$(t^1{}_1 \otimes t^1{}_1 + t^1{}_2 \otimes t^2{}_1)(t^2{}_1 \otimes t^1{}_2 + t^2{}_2 \otimes t^2{}_2) - (t^1{}_1 \otimes t^1{}_2 + t^1{}_2 \otimes t^2{}_2)(t^2{}_1 \otimes t^1{}_1 + t^2{}_2 \otimes t^2{}_1) =$$

$$= t^1{}_1 t^2{}_1 \otimes t^1{}_1 t^1{}_2 + t^1{}_1 t^2{}_2 \otimes t^1{}_1 t^2{}_2 + t^1{}_2 t^2{}_1 \otimes t^2{}_1 t^1{}_2 + t^1{}_2 t^2{}_2 \otimes t^2{}_1 t^2{}_2 -$$

$$- t^1{}_1 t^2{}_1 \otimes t^1{}_2 t^1{}_1 - t^1{}_1 t^2{}_2 \otimes t^1{}_2 t^2{}_1 - t^1{}_2 t^2{}_1 \otimes t^2{}_2 t^1{}_1 - t^1{}_2 t^2{}_2 \otimes t^2{}_2 t^2{}_1 =$$

$$= t^1{}_1 t^2{}_2 \otimes (t^1{}_1 t^2{}_2 - t^1{}_2 t^2{}_1) - t^1{}_2 t^2{}_1 \otimes (t^2{}_2 t^1{}_1 - t^2{}_1 t^1{}_2) =$$

$$= (t^1{}_1 t^2{}_2 - t^1{}_2 t^2{}_1) \otimes 1 = 1 \otimes 1 = \Delta(1)$$

e

$$\epsilon(t^1{}_1 t^2{}_2 - t^1{}_2 t^2{}_1) = \epsilon(t^1{}_1)\epsilon(t^2{}_2) - \epsilon(t^1{}_2)\epsilon(t^2{}_1) = 1 = \epsilon(1).$$

Temos que mostrar também que Δ e ϵ satisfazem a comutatividade do produto, mas essas propriedades serão demontradas num caso mais geral no próximo exemplo. Agora, vamos verificar que Δ e ϵ satisfazem os axiomas de co-álgebra. Façamos apenas para $t^1{}_1$ pois os outros são análogos.

$$(\Delta \otimes id)\Delta(t^1{}_1) = (\Delta \otimes id)(t^1{}_1 \otimes t^1{}_1 + t^1{}_2 \otimes t^2{}_1) =$$

$$= (t^1{}_1 \otimes t^1{}_1 + t^1{}_2 \otimes t^2{}_1) \otimes t^1{}_1 + (t^1{}_1 \otimes t^1{}_2 + t^1{}_2 \otimes t^2{}_2) \otimes t^2{}_1 =$$

$$= t^1{}_1 \otimes (t^1{}_1 \otimes t^1{}_1 + t^1{}_2 \otimes t^2{}_1) + t^1{}_2 \otimes (t^2{}_1 \otimes t^1{}_1 + t^2{}_2 \otimes t^2{}_1) =$$

$$= (id \otimes \Delta)(t^1{}_1 \otimes t^1{}_1 + t^1{}_2 \otimes t^2{}_1) = (id \otimes \Delta)\Delta(t^1{}_1)$$

e

$$(\epsilon \otimes id)\Delta(t^1{}_1) = (\epsilon \otimes id)(t^1{}_1 \otimes t^1{}_1 + t^1{}_2 \otimes t^2{}_1) = \epsilon(t^1{}_1)t^1{}_1 + \epsilon(t^1{}_2)t^2{}_1 = t^1{}_1$$

$$(id \otimes \epsilon)\Delta(t^1{}_1) = (id \otimes \epsilon)(t^1{}_1 \otimes t^1{}_1 + t^1{}_2 \otimes t^2{}_1) = t^1{}_1\epsilon(t^1{}_1) + t^1{}_2\epsilon(t^2{}_1) = t^1{}_1.$$

Mostramos assim que $\mathbb{C}(SL(2))$ é uma bi-álgebra.

É possível perceber por este exemplo que a quantidade de contas para mostrar que um determinado quociente de uma álgebra livre são em geral razoavelmente longas porém simples. Por esta razão, em vários casos, não apresentaremos todos os detalhes da demonstração.

Exemplo 1.1.28 *Seja $A = K[t^i{}_j]$ a álgebra de funções coordenas das matrizes de escalares $n \times n$ como no exemplo 1.1.12.. Podemos definir uma estrutura de bi-álgebra em A por*

$$\Delta(t^i{}_j) = \sum_{k=1}^{n} t^i{}_k \otimes t^k{}_j \qquad \text{e} \qquad \epsilon(t^i{}_j) = \delta_{ij}$$

que já sabemos que satisfazem os axiomas de co-álgebra conforme o exemplo 1.1.23. Resta-nos apenas mostrar que eles respeitam a comutatividade

$$\Delta(t^i{}_j t^k{}_l) = \Delta(t^i{}_j)\Delta(t^k{}_l) = \left(\sum_{p=1}^{n} t^i{}_p \otimes t^p{}_j\right)\left(\sum_{q=1}^{n} t^k{}_q \otimes t^q{}_l\right) = \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}(t^i{}_p t^k{}_q \otimes t^p{}_j t^q{}_l) =$$

$$= \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}(t^k{}_q t^i{}_p \otimes t^q{}_l t^p{}_j) = \left(\sum_{q=1}^{n} t^k{}_q \otimes t^q{}_l\right)\left(\sum_{p=1}^{n} t^i{}_p \otimes t^p{}_j\right) = \Delta(t^k{}_l)\Delta(t^i{}_j) = \Delta(t^k{}_l t^i{}_j)$$

e

$$\epsilon(t^i{}_j t^k{}_l) = \delta_{ij}\delta_{kl} = \delta_{kl}\delta_{ij} = \epsilon(t^k{}_l t^i{}_j).$$

1.1.4 Álgebras de Hopf

Na proposição 1.1.19 demos uma estrutura de álgebra para $\text{Lin}(C, A)$ para C uma co-álgebra e A uma álgebra. Podemos fazer o mesmo para $\text{Lin}(H, H)$ com H bi-álgebra e nos perguntar se id_H é um elemento inversível dessa álgebra. Vejamos que esse nem sempre é o caso, e portanto isso nos induzirá a definição de uma outra estrutura.

Exemplo 1.1.29 *Considere o semi-grupo $(\mathbb{N}\backslash\{0\}, \cdot)$ e tome H o quociente da álgebra livre $\mathbb{K}\{\mathbb{N}\backslash\{0\}\}$ pelas relações do semi-grupo, a saber $nm = n \cdot m$ para $n, m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, onde nm denota a concatenação das letras n e m na álgebra livre. Defina um co-produto e uma co-unidade por $\Delta(n) = n \otimes n$ e $\epsilon(n) = 1$ respectivamente para $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Se id_H fosse um elemento inversível por convolução, teríamos que existiria uma aplicação $S : H \to H$ tal que para $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $S(n)n = (S \otimes id)\Delta(n) = \epsilon(n)1 = 1$. Note que $\mathbb{K}\{\mathbb{N}\backslash\{0\}\}$ é uma álgebra* *graduada,* $\mathbb{K}\{\mathbb{N}\backslash\{0\}\} = \bigoplus_{m=1}^{\infty}\mathbb{K}m$, *sendo que a unidade é um monômio de grau* 1. *Como* $S(n)n \in \bigoplus_{m=n}^{\infty}\mathbb{K}m$, *temos que* $S(n)n = 1$ *é uma contradição.*

Definição 1.1.30 *Dizemos que* $(H,\mu,\eta,\Delta,\epsilon,S)$ *é uma álgebra de Hopf se* $(H,\mu,\eta,\Delta,\epsilon)$ *é uma bi-álgebra e* S *é o inverso de convolução de id na álgebra* $\mathrm{Lin}(H,H)$, *ou seja,* $S(h_{(1)})h_{(2)} = \epsilon(h)1_H = h_{(1)}S(h_{(2)})$ $\forall h \in H$, *ou ainda, em termos de um digrama comutativo*

$$\begin{tikzcd} H\otimes H \arrow[d, "S\otimes id"'] & H \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\eta\circ\epsilon"] & H\otimes H \arrow[d, "id\otimes S"] \\ H\otimes H \arrow[r, "\mu"] & H & H\otimes H \arrow[l, "\mu"'] \end{tikzcd} \tag{1.5}$$

A aplicação S *é chamada de antípoda e é a única que satisfaz tal propriedade por ser um inverso.*

Novamente, podemos definir o produto tensorial de duas álgebras de Hopf H_1, H_2 definindo a antípoda em $H_1 \otimes H_2$ por $S_1 \otimes S_2$. Diremos que f é um morfismo de álgebras de Hopf entre H_1 e H_2 se for um morfismo de bi-álgebras e $f \circ S_1 = S_2 \circ f$ e que um subespaço vetorial I de uma álgebra de Hopf H é um ideal de Hopf, se for um ideal no sentido de bi-álgebras e $S(I) \subseteq I$. É fácil ver que o quociente de uma álgebra de Hopf por um ideal de Hopf continua sendo uma álgebra de Hopf. Temos algumas proposições básicas a respeito de álgebras de Hopf.

Proposição 1.1.31 *Sejam* H_1 *e* H_2 *álgebras de Hopf e* $f : H_1 \to H_2$ *um morfimo de bi-álgebras, então* f *também é um morfismo de álgebras de Hopf.*

Demonstração. Em $\mathrm{Lin}(H_1, H_2)$ temos para $h \in H_1$ arbitrário que

$$((f \circ S_1) * f)(h) = (f \circ S_1)(h_{(1)})f(h_{(2)}) = f(S_1(h_{(1)})h_{(2)}) = f(\eta_1 \circ \epsilon_1(h)) = \eta_2 \circ \epsilon_1(h)$$

e

$$(f * (S_2 \circ f))(h) = f(h_{(1)})(S_2 \circ f)(h_{(2)}) = (f(h))_{(1)}S_2((f(h))_{(2)}) = (\eta_2 \circ \epsilon_2)(f(h)) = \eta_2 \circ \epsilon_1(h)$$

ou seja $(f \circ S_1)$ é o inverso à esquerda de f em $\mathrm{Lin}(H_1, H_2)$ e $(S_2 \circ f)$ o inverso à direita e portanto coincidem. ■

Proposição 1.1.32 *Seja* H *uma álgebra de Hopf, então* S *é um anti-morfismo de álgebras e anti-morfismo de co-álgebras, ou seja,* $S\otimes\mu = \mu^{op}\circ(S\otimes S)$, $S\circ\eta = \eta$, $\Delta\circ S = (S\otimes S)\circ\Delta^{op}$, *ou ainda,* $S(gh) = S(h)S(g)$, $S(1) = 1$, $\epsilon(S(h)) = \epsilon(h)$ *e* $(S(h))_{(1)}\otimes(S(h))_{(2)} = S(h_{(2)})\otimes S(h_{(1)})$ $\forall h, g \in H$.

Demonstração. Aplicando o axioma da antípoda para identidade temos $S(1) = S(1)1 = \epsilon(1)1 = 1$. Vamos fazer uma prova de $S(gh) = S(h)S(g)$ primeiro de forma direta para treinarmos a utilização da notação de Sweedler e as proposições que provamos no apêndice e depois utilizando o produto de convolução. De forma direta temos

$$S(hg) = S(h_{(1)}g)\epsilon(h_{(2)}) = S(h_{(1)}g)h_{(2)}S(h_{(3)}) = S(h_{(1)}g_{(1)})h_{(2)}\epsilon(g_{(2)})S(h_{(3)}) =$$

$$= S(h_{(1)}g_{(1)})h_{(2)}g_{(2)}S(g_{(3)})S(h_{(3)}) = S((h_{(1)}g_{(1)})_{(1)})(h_{(1)}g_{(1)})_{(2)}S(g_{(2)})S(h_{(2)}) =$$

$$= \epsilon(h_{(1)}g_{(1)})S(g_{(2)})S(h_{(2)}) = \epsilon(h_{(1)})\epsilon(g_{(1)})S(g_{(2)})S(h_{(2)}) =$$

$$= S(\epsilon(g_{(1)})g_{(2)})S(\epsilon(h_{(1)})h_{(2)}) = S(g)S(h)$$

e por convolução em $\mathrm{Lin}(H \otimes H, H)$ considere $T = \mu$, então

$$((S \otimes \mu) * T)(h \otimes g) = (S \otimes \mu)(h_{(1)} \otimes g_{(1)})\mu(h_{(2)} \otimes g_{(2)}) = S(h_{(1)}g_{(1)})h_{(2)}g_{(2)} =$$

$$= S((hg)_{(1)})(hg)_{(2)} = \epsilon(hg)1 = \epsilon(h)\epsilon(g)1 = \eta \circ \epsilon_{H\otimes H}(h \otimes g)$$

e

$$(T * (\mu^{op} \circ (S \otimes S)))(h \otimes g) = \mu(h_{(1)} \otimes g_{(1)})(\mu^{op} \circ (S \otimes S))(h_{(2)} \otimes g_{(2)}) =$$

$$= h_{(1)}g_{(1)}S(g_{(2)})S(h_{(2)}) = \epsilon(g)h_{(1)}S(h_{(2)}) = \epsilon(h)\epsilon(g)1 = \eta \circ \epsilon_{H\otimes H}(h \otimes g)$$

donde $S \otimes \mu = \mu^{op} \circ (S \otimes S)$.

Para o co-produto, basta fazer o mesmo em $\mathrm{Lin}(H, H \otimes H)$ para $T = \Delta$. E finalmente

$$\epsilon(S(h)) = \epsilon(S(\epsilon(h_{(1)})h_{(2)})) = \epsilon(h_{(1)})\epsilon(S(h_{(2)})) = \epsilon(h_{(1)}S(h_{(2)})) =$$

$$= \epsilon(\epsilon(h)1) = \epsilon(h)\epsilon(1) = \epsilon(h)$$

terminando a demonstração. ■

Proposição 1.1.33 *Se H é uma álgebra de Hopf comutativa ou co-comutativa, então $S^2 = id$.*

Demonstração. Temos que

$$S(S(h)) = S(S(\epsilon(h_{(1)})h_{(2)})) = \epsilon(h_{(1)})S(S(h_{(2)})) =$$

$$= h_{(1)}S(h_{(2)})S(S(h_{(3)})) = h_{(1)}S(S(h_{(3)})h_{(2)}) = \bigstar.$$

Se H é comutativa então

$$\bigstar = h_{(1)}S(h_{(2)}S(h_{(3)})) = h_{(1)}S(\epsilon(h_{(2)})1) = h_{(1)}\epsilon(h_{(2)}) = h,$$

e se H é co-comutativa então

$$\bigstar = h_{(1)}S(S(h_{(2)})h_{(3)}) = h_{(1)}S(\epsilon(h_{(2)})1) = h_{(1)}\epsilon(h_{(2)}) = h,$$

donde $S^2 = id$ para H comutativa ou co-comutativa. ■

Proposição 1.1.34 *Seja H uma álgebra de Hopf, então são equivalentes*

1. *S é inversível como transformação linear;*

2. *H^{op} é uma álgebra de Hopf;*

3. *H^{cop} é uma álgebra de Hopf.*

Neste caso $S^{-1} = S^{op} = S^{cop}$.

Demonstração. $(1 \Leftrightarrow 2)$: Se S é inversível então S^{-1} também é anti-morfismo de álgebras e $\mu^{op}(S^{-1}(h_{(1)}) \otimes h_{(2)}) = h_{(2)}S^{-1}(h_{(1)})$. Aplicando S temos

$$S(h_{(2)}S^{-1}(h_{(1)})) = h_{(1)}S(h_{(2)}) = \epsilon(h)1 = \epsilon(h)S(1) = S(\epsilon(h)1)$$

e como S é injetora temos $h_{(2)}S^{-1}(h_{(1)}) = \epsilon(h)1$. Analogamente, mostramos $S^{-1}(h_{(2)})h_{(1)} = \epsilon(h)1$.

Se H^{op} é álgebra de Hopf então

$$S^{op}(S(h)) = S^{op}(S(h_{(2)}))\epsilon(h_{(1)})1 = S^{op}(S(h_{(3)}))S^{op}(h_{(2)})h_{(1)} =$$

$$= S^{op}(h_{(2)}S(h_{(3)}))h_{(1)} = S^{op}(\epsilon(h_{(2)})1)h_{(1)} = h_{(1)}\epsilon(h_{(2)}) = h$$

sendo análogo para mostrar que $S \circ S^{op} = id$.

$(1 \Leftrightarrow 3)$: Se S é inversível, então $\mu(id \otimes S^{-1})\Delta^{op}(h) = h_{(2)}S^{-1}(h_{(2)}) = \epsilon(h)1$ como no caso anterior. Novamente o outro caso é análogo donde S^{-1} é uma antípoda para H^{cop}.

Reciprocamente, se H^{cop} é uma álgebra de Hopf, basta proceder como no caso anterior para mostrar que $S^{cop} = S^{-1}$. ■

Para o caso de $H^{op/cop}$ não precisamos da hipótese que S é inversível e da mesma maneira podemos mostrar que $H^{op/cop}$ é uma álgebra de Hopf com antípoda $S^{op/cop} = S$. No caso em que S é inversível temos que S é um isomorfismo de álgebras de Hopf ente H e $H^{op/cop}$.

Proposição 1.1.35 *Seja X um conjunto qualquer e suponha que $\mathbb{K}\{X\}$ possua uma estrutura de bi-álgebra. Se existe uma aplicação $\widetilde{S} : X \to \mathbb{K}\{X\}^{op}$ tal que sua extensão S para $\mathbb{K}\{X\}$ satisfaça os axiomas de antípoda em X, ou seja $\mu(S\otimes id)\Delta(x) = \mu(id\otimes S)\Delta(x) = \epsilon(x)1$ $\forall x \in X$ então S é uma antípoda em $\mathbb{K}\{X\}$.*

Demonstração. Pela linaridade das funções em questão, é suficiente mostrar nas palavras

$$\mu(S \otimes id)\Delta(x_1 \dots x_n) = \mu(S \otimes id)((x_1)_{(1)} \dots (x_n)_{(1)} \otimes (x_1)_{(2)} \dots (x_n)_{(2)}) =$$

$$= S((x_1)_{(1)} \dots (x_n)_{(1)})(x_1)_{(2)} \dots (x_n)_{(2)} = S((x_1)_{(n)}) \dots S((x_1)_{(1)})(x_1)_{(2)} \dots (x_n)_{(2)} =$$

$$= \epsilon(x_1)S((x_1)_{(n)})\dots S((x_2)_{(1)})(x_2)_{(2)}\dots(x_n)_{(2)} = \epsilon(x_1)\dots\epsilon(x_n)1 = \epsilon(x_1\dots x_n)1$$

sendo análogo para o outro lado. ■

Novamente, se uma A é uma bi-álgebra que é o quociente $\mathbb{K}\{X\}/I$ como bi-álgebra, então para construir uma antípoda para A, basta construir uma em $\mathbb{K}\{X\}$ como na proposição e verificar que $S(I) \subseteq I$. No caso em que I é um ideal gerado por relações, também é suficiente analisar o que acontece com S apenas nas relações.

Exemplo 1.1.36 (Álgebra Hopf Dual) *Seja H uma álgebra de Hopf. Em geral não podemos estender a proposição 1.1.21 quando H tem dimensão infinita, pelo fato de nem sempre a aplicação Δf, definida na proposição como um elemento de $(H \otimes H)'$, está em $H' \otimes H'$. No entanto, podemos restringir H' para uma sub-álgebra menor de forma que esta vire uma álgebra de Hopf. Definimos então*

$$H^\circ = \left\{ f \in H' : \exists f_i, g_i \in H' \ i = 1, \dots, n \text{ tais que } f(ab) = \sum_{i=1}^{n} f_i(a)g_i(b) \ \forall a, b \in H \right\}.$$

e vamos mostrar que podemos dar uma estrutrura de álgebra de Hopf para H°. A multiplicação vai ser o produto de convolução com identidade dada por ϵ, o co-produto é definido por $\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} f_i \otimes g_i$ onde os f_i e g_i são como na definição do conjunto H°, a co-unidade é $\epsilon_{H^\circ}(f) = f(1)$ e antípoda vai ser dada por $S(f)(a) = f(S(a))$. Temos que mostrar que o co-produto está de fato bem definido e que todas as operações são fechadas em H°.

Para mostrar que o co-produto independe da escolha dos f_i e g_i, suponha que podemos escrever

$$f(ab) = \sum_{i=1}^{n} f_i(a)g_i(b) = \sum_{j=1}^{m} f'_j(a)g'_j(b)$$

então existem $\{f''_k, g''_k\}_{k=1}^{p}$ com $\{g''_k\}_{k=1}^{p}$ LI tais que $\sum_{i=1}^{n} f_i \otimes g_i - \sum_{j=1}^{m} f'_j \otimes g'_j = \sum_{k=1}^{p} f''_k \otimes g''_k$. Como $\{g''_k\}_{k=1}^{p}$ é LI, existem $b_l \in H$, $l = 1, \dots, p$ tais que $g''_k(b_l) = \delta_{kl}$. Assim $\forall k \in \{1, \dots, p\}$ temos $f''_k(a) = \sum_{l=1}^{p} f''_l(a)g''_l(b_k) = \sum_{i=1}^{n} f_i(a)g_i(b_k) - \sum_{j=1}^{m} f'_j(a)g'_j(b_k) = 0$ para $a \in H$ arbitrário. Segue que $\sum_{i=1}^{n} f_i \otimes g_i = \sum_{j=1}^{m} f'_j \otimes g'_j$.

Mostremos então que as operações estão fechadas em H°. É claro que $\epsilon \in H^\circ$ pois $\epsilon(ab) = \epsilon(a)\epsilon(b)$. Dadas $f, g \in H^\circ$, considere as funções em H', $\{f_i, g_i\}_{i=1}^{n}$ e $\{f'_j, g'_j\}_{j=1}^{m}$ dadas na definição de H°. Então

$$(f * g)(ab) = f(a_{(1)}b_{(1)})g(a_{(2)}b_{(2)}) = \left(\sum_{i=1}^{n} f_i(a_{(1)})g_i(b_{(1)})\right)\left(\sum_{j=1}^{m} f'_j(a_{(2)})g'_j(b_{(2)})\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(f_i * f'_j)(a)(g_i * g'_j)(b)$$

donde $f * g \in H^\circ$. Para a antípoda, dada $f \in H^\circ$ e $\{f_i, g_i\}_{i=1}^{n}$ as funções correspondentes, então $S(f)(ab) = \sum_{i=1}^{n}(g_i \circ S)(a)(f_i \circ S)(b)$. Finalmente se escrevendo $\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} f_i \otimes g_i$

com $\{g_i\}_{i=1}^n$ *LI então existem* $b_l \in H$, $l = 1, \ldots, n$ *tais que* $g_i(b_l) = \delta_{il}$ *e para cada* i *temos* $f_i(ab) = \sum_{j=1}^n f_j(ab)g_j(b_i) = f(abb_i) = \sum_{j=1}^n f_j(a)(g \circ R_{b_i})(b)$ *onde* R_{b_i} *é a multiplicação por* b_i *à direita, donde* $\Delta(f) \in H^\circ \otimes H'$. *Analogamente, mostramos que* $\Delta(f) \in H' \otimes H^\circ$, *e portanto* $\Delta(f) \in H^\circ \otimes H^\circ$.

Resta-nos ainda provar que, de fato, temos uma álgebra de Hopf. Os axiomas de álgebra vem do fato de H° *ser uma sub-álgebra de* H'*; os axiomas de co-álgebra são mostrados analogamente à proposição 1.1.21; o fato do co-produto ser um morfismo de álgebras sai como conseqüência imediata da demontração que o produto de convolução é fechado em* H° *e é claro que* ϵ_{H° *é morfismo de álgebras. E por fim, mostremos um dos lados do axioma da antípoda sendo o outro análogo, dada* $f \in H^\circ$ *e* $\{f_i, g_i\}_{i=1}^n$ *as funções correspondentes*

$$*(S \otimes id)\Delta(f)(a) = \sum_{i=1}^n S(f_i)(a_{(1)})g_i(a_{(2)}) = \sum_{i=1}^n f_i(S(a_{(1)}))g_i(a_{(2)}) = f(S(a_{(1)})a_{(2)}) =$$

$$= f(\epsilon(a)1) = \epsilon_{H^\circ}(f)\epsilon(a)$$

ou seja $*(S \otimes id)\Delta(f) = \epsilon_{H^\circ}(f)\epsilon = \epsilon_{H^\circ}(f)1_{H^\circ}$.

Exemplo 1.1.37 *Considere a bi-álgebra* $A = \mathbb{C}(SL(2))$ *do exemplo 1.1.27 e defina uma antípoda em* A *por*

$$S(t^1{}_1) = t^2{}_2 \qquad S(t^1{}_2) = -t^1{}_2 \qquad S(t^2{}_1) = -t^2{}_1 \qquad S(t^2{}_2) = t^1{}_1$$

que nada mais é que as coordenadas da matriz inversa. A propriedade da antípoda nada mais vai ser que dizer que uma matriz vezes sua inversa é a identidade. Calculando, por exemplo o axioma da antípoda em $t^1{}_1$ *temos*

$$\mu(S \otimes id)\Delta(t^1{}_1) = S(t^1{}_1)t^1{}_1 + S(t^1{}_2)t^2{}_1 = t^1{}_1t^2{}_2 - t^1{}_2t^2{}_1 = 1 = \epsilon(t^1{}_1)$$

$$\mu(id \otimes S)\Delta(t^1{}_1) = t^1{}_1S(t^1{}_1) + t^1{}_2S(t^2{}_1) = t^1{}_1t^2{}_2 - t^1{}_2t^2{}_1 = 1 = \epsilon(t^1{}_1).$$

Exemplo 1.1.38 *Sejam* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie e* $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ *sua álgebra envolvente. Vamos construir uma estrutura de álgebra de Hopf em* $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. *Já sabemos que* $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ *é o quociente da álgebra tensorial* $T(\mathfrak{g})$ *que nada mais é que a álgebra livre gerada por* $\mathfrak{g}$. *Então podemos definir* Δ, ϵ *e* S *em* $\mathfrak{g}$ *e verificar que* $I(\mathfrak{g})$ *é um ideal de Hopf. Para* $x \in \mathfrak{g}$, *defina*

$$\epsilon(x) = 0 \qquad \Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1 \qquad S(x) = -x$$

então

$$(\Delta \otimes id)\Delta(x) = (\Delta \otimes id)(1 \otimes x + x \otimes 1) = 1 \otimes 1 \otimes x + 1 \otimes x \otimes 1 + x \otimes 1 \otimes 1 =$$

$$= (id \otimes \Delta)(1 \otimes x + x \otimes 1) = (id \otimes \Delta)\Delta(x);$$

$$(\epsilon \otimes id)\Delta(x) = \epsilon(1)x + \epsilon(x)1 = x = 1\epsilon(x) + x\epsilon(1) = (id \otimes \epsilon)\Delta(x);$$

$$\mu(S \otimes id)\Delta(x) = S(1)x + S(x)1 = 0 = \epsilon(x)1 = 1S(x) + xS(1) = \mu(id \otimes S)\Delta(x)$$

dando uma estrutura de álgebra de Hopf, em princípio, para $T(\mathfrak{g})$. *Vejamos o que acontece com as relações que definem* $I(\mathfrak{g})$, *para* $x, y \in \mathfrak{g}$ *temos*

$$\epsilon(xy - yx) = 0 = \epsilon([x, y]);$$

$$S(xy - yx) = S(y)S(x) - S(x)S(y) = yx - xy = -[x, y] = S([x, y]);$$

$$\Delta(xy - yx) = (1 \otimes x + x \otimes 1)(1 \otimes y + y \otimes 1) - (1 \otimes y + y \otimes 1)(1 \otimes x + x \otimes 1) =$$

$$= 1 \otimes xy + y \otimes x + x \otimes y + xy \otimes 1 - 1 \otimes yx - x \otimes y - y \otimes x - yx \otimes 1 =$$

$$= 1 \otimes (xy - yx) + (xy - yx) \otimes 1 = 1 \otimes [x, y] + [x, y] \otimes 1 = \Delta([x, y])$$

o que mostra que $I(\mathfrak{g})$ *é um ideal de Hopf e que* $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ *é uma álgebra de Hopf.*

Exemplo 1.1.39 *Considere a álgebra* $A = \mathbb{C}[x, y]/I$ *onde* I *é o ideal gerado pelas relações* $xy = 1$ *e* $yx = 1$. *Em outras palavras temos que* $y = x^{-1}$ *em* A. *Vamos definir uma estrutura de álgebra de Hopf em* A *por*

$$\Delta(x) = x \otimes x, \quad \Delta(x^{-1}) = x^{-1} \otimes x^{-1}, \quad \epsilon(x) = \epsilon(x^{-1}) = 1, \quad S(x^{\pm 1}) = x^{\mp 1}.$$

Fazendo as verificações como no caso anterior não é difícil ver que as expressões acima de fato estão bem definidas em A. *Note que essa álgebra é uma sub-álgebra densa na álgebra de funções de* $U(1)$ *fazendo a identificação de* x *com a função* $f(z) = z$. *Diremos, então que* A *é a álgebra de funções coordenadas de* $U(1)$ *e iremos denotá-la por* $\mathbb{C}[x, x^{-1}]$.

1.1.5 Par dual

A definição seguinte é uma generalização da dualidade entre álgebras e co-álgebras vistas no corolário 1.1.20, na proposição 1.1.21 e no exemplo 1.1.36.

Definição 1.1.40 *Sejam* H, A *bi-álgebras, dizemos que uma aplicação bi-linear* $\langle , \rangle : H \times A \to \mathbb{K}$ *é um par dual entre* H *e* A *se vale*

$$\langle h, 1 \rangle = \epsilon(h) \qquad \langle 1, a \rangle = \epsilon(a)$$

$$\langle h \otimes g, \Delta a \rangle = \langle hg, a \rangle \qquad \langle \Delta h, a \otimes b \rangle = \langle h, ab \rangle$$

para $h, g \in H$ *e* $a, b \in A$ *onde estendemos a definição de* $\langle , \rangle$ *para* $H \otimes H \to G \otimes G$ *definindo nos geradores por* $\langle h \otimes g, a \otimes b \rangle = \langle h, a \rangle \langle g, b \rangle$. *Dizemos que esse par é não degenerado se* $\langle h, a \rangle = 0\ \forall a \in A$ *implica* $h = 0$ *e* $\langle h, a \rangle = 0\ \forall h \in H$ *implica* $a = 0$.

Vale observar que a extensão de $\langle , \rangle$ para o produto tensorial não é tão imediata porém é feita de forma natural assim como os outros exemplos de aplicações no produto tensorial.

Temos claramente que uma álgebra de Hopf H e sua álgebra Hopf dual H° possuem um par dual dado pela avaliação, $\langle f, a \rangle = f(a)$.

Proposição 1.1.41 *Se H e A são álgebras de Hopf e $\langle , \rangle$ é um par dual entre elas então $\langle S(h), a \rangle = \langle h, S(a) \rangle$ $\forall h \in H$ $\forall a \in A$.*

Demonstração. Na álgebra $\mathrm{Hom}_{\mathrm{lin}}(H \otimes A, \mathbb{K})$ considere as aplicações $f, g, k : H \otimes A \to \mathbb{K}$ dadas por $f(h \otimes a) = \langle S(h), a \rangle$, $g(h \otimes a) = \langle h, a \rangle$ e $k(h \otimes a) = \langle h, S(a) \rangle$. Então

$$(f * g)(h \otimes a) = f(h_{(1)} \otimes a_{(1)}) g(h_{(2)} \otimes a_{(2)}) = \left\langle S(h_{(1)}), a_{(1)} \right\rangle \left\langle h_{(2)}, a_{(2)} \right\rangle =$$

$$= \left\langle S(h_{(1)}) \otimes h_{(2)}, \Delta(a) \right\rangle = \left\langle S(h_{(1)}) h_{(2)}, a \right\rangle = \epsilon(h) \langle 1, a \rangle = \epsilon(h)\epsilon(a) = \eta_{\mathbb{K}} \circ \epsilon_{H \otimes A}(h \otimes a).$$

Analogamente $(g * k)(h \otimes a) = \eta_{\mathbb{K}} \circ \epsilon_{H \otimes A}(h \otimes a)$, ou seja, $f = k$ que é o desejado. ■

Proposição 1.1.42 *Se H e A são bi-álgebras e $\langle , \rangle$ é um par dual entre elas então $I = \{h \in H : \langle h, a \rangle = 0 \ \forall a \in A\}$ e $J = \{a \in A : \langle h, a \rangle = 0 \ \forall h \in H\}$ são ideais de bi-álgebra de H e A respectivamente. Se além disso H e A forem álgebras de Hopf então I e J também são ideais no sentido de álgebras de Hopf.*

Demonstração. É suficiente fazer para um lado, sendo o outro análogo. Pela bi-linearidade de $\langle , \rangle$, fica claro que I é um sub-espaço de H. Dados $g \in I$, $h \in H$ e $a \in A$

$$\langle gh, a \rangle = \langle g \otimes h, \Delta(a) \rangle = \left\langle g, a_{(1)} \right\rangle \left\langle h, a_{(2)} \right\rangle = 0$$

$$\langle hg, a \rangle = \langle h \otimes g, \Delta(a) \rangle = \left\langle h, a_{(1)} \right\rangle \left\langle g, a_{(2)} \right\rangle = 0$$

ou seja $\mu(I \otimes H + H \otimes I) = I$;

$$\epsilon(g) = \langle g, 1 \rangle = 0$$

ou seja $\epsilon(I) = 0$. Para ver que $\Delta(I) \subseteq I \otimes H + H \otimes I$, note que se considerarmos a aplicação $T : H \to A'$ dada por $T(h)(a) = \langle h, a \rangle$ então $I = \ker T$ e pelo lema A.2.8 $I \otimes H + H \otimes I = \ker(T \otimes T)$. Uma vez que a inclusão $A' \otimes A' \subseteq (A \otimes A)'$ independe da dimensão, podemos pensar $T \otimes T : H \otimes H \to (A \otimes A)'$. Então para $g \in I$, temos

$$(T \otimes T)(\Delta(g))(a \otimes b) = \langle \Delta(g), a \otimes b \rangle = \langle g, ab \rangle = 0$$

para $a, b \in A$ arbitrários e portanto $\Delta(g) \in \ker(T \otimes T) = I \otimes H + H \otimes I$.

Se H e A são álgebras de Hopf e $g \in I$, então

$$\langle S(g), a \rangle = \langle g, S(a) \rangle = 0 \qquad \forall a \in A$$

ou seja $S(I) \subseteq I$. ■

Segue desta proposição que se um par dual é degenerado, podemos deixá-lo não degenerado tomando o quociente pelos ideais definidos acima.

1.1.6 Módulos sobre bi-álgebras e álgebras de Hopf

Queremos estudar o que a estrutura de álgebra de Hopf nos permite fazer com o conceito de módulo. Em particular, se o espaço no qual a álgebra de Hopf atua também possui uma certa estrutura, estaremos interessados em módulos cujas operações preservem essa estrutura.

Nesta seção H denotará uma bi-álgebra e V um espaço vetorial.

Definição 1.1.43 *Dizemos que um par (V, φ), onde $\varphi : H \otimes V \to V$ é uma transformação linear, é um H-módulo à esquerda se são satisfeitas*

1. $g \triangleright (h \triangleright v) = gh \triangleright v$
2. $1 \triangleright v = v$

para $g, h \in H$ e $v \in V$ e onde $g \triangleright v = \varphi(g \otimes v)$. Dizemos que φ é uma ação de H sobre V. Se (V, φ_V) e (W, φ_W) são H-módulos então dizemos que uma transformação linear $T : V \to W$ é um H-homomorfismo, ou morfismo de H-módulos , se $T(h \triangleright v) = h \triangleright T(v)$. Definimos uma estrutura de H-módulo no produto tensorial $V \otimes W$ por $h \triangleright (v \otimes w) = (h_{(1)} \triangleright v) \otimes (h_{(2)} \triangleright w)$.

Quando não houver confusão, iremos omitir a lateralidade do módulo assim como já fizemos na definição. Note que o corpo $\mathbb{K}$ é um H-módulo definindo $h \triangleright \lambda = \epsilon(h)\lambda$.

Definição 1.1.44 *Se V é uma álgebra, dizemos que (V, φ) é um H-módulo álgebra à esquerda se (V, φ) for um H-módulo de forma que a multiplicação e a unidade em V são morfismos de H-módulos, ou seja, $h \triangleright (v_1 v_2) = (h_{(1)} \triangleright v_1)(h_{(2)} \triangleright v_2)$ e $h \triangleright 1 = \epsilon(h)1$.*

Exemplo 1.1.45 (Ação adjunta à esquerda) *Suponha que H seja álgebra de Hopf e defina $ad_L : H \otimes H \to H$ por $h \triangleright g = h_{(1)} g S(h_{(2)})$, então temos:*

$$h \triangleright (g \triangleright f) = h \triangleright (g_{(1)} f S(g_{(2)})) = h_{(1)} g_{(1)} f S(g_{(2)}) S(h_{(2)}) = (hg)_{(1)} f S((hg)_{(2)}) = hg \triangleright f,$$

$$1 \triangleright g = 1gS(1) = g, \qquad h \triangleright 1 = h_{(1)} 1 S(h_{(2)}) = \epsilon(h)1,$$

$$h \triangleright (gf) = h_{(1)} g f S(h_{(2)}) = h_{(1)} g \epsilon(h_{(2)}) f S(h_{(3)}) = h_{(1)} g S(h_{(2)}) h_{(3)} f S(h_{(4)}) = \left(h_{(1)} \triangleright g\right) (h_{(2)} \triangleright g).$$

Assim H torna-se um H-módulo álgebra.

Exemplo 1.1.46 (Ação co-regular à esquerda) *Defina $R^* : H \otimes H^\circ \to H^\circ$ por $h \triangleright \phi = \phi_{(1)} \left\langle \phi_{(2)}, h \right\rangle$ então pode-se mostrar que H° é um H-módulo álgebra.*

Definição 1.1.47 *Se V é uma co-álgebra, dizemos que (V, φ) é um H-módulo co-álgebra à esquerda se (V, φ) for um H-módulo tal que o co-produto e a co-unidade são morfismos de H-módulos, ou seja, $(h \triangleright v)_{(1)} \otimes (h \triangleright v)_{(2)} = (h_{(1)} \triangleright v_{(1)}) \otimes (h_{(2)} \triangleright v_{(2)})$ e $\epsilon(h \triangleright v) = \epsilon(h)\epsilon(v)$.*

Exemplo 1.1.48 (Ação regular à esquerda) *Defina $L : H \otimes H \to H$ como sendo a multiplicação vista como sendo pela esquerda, ie, $h \triangleright g = hg$, então*

$$h \triangleright (g \triangleright f) = h \triangleright (gf) = h(gf) = (hg)f = hg \triangleright f, \qquad 1 \triangleright g = g,$$

$$(h_{(1)} \triangleright v_{(1)}) \otimes (h_{(2)} \triangleright v_{(2)}) = (h_{(1)}v_{(1)}) \otimes (h_{(2)}v_{(2)}) =$$

$$= (hv)_{(1)} \otimes (hv)_{(1)} = (h \triangleright v)_{(1)} \otimes (h \triangleright v)_{(2)},$$

$$\epsilon(h \triangleright v) = \epsilon(hv) = \epsilon(h)\epsilon(v).$$

Logo H é um H-módulo co-álgebra com a multiplicação pela esquerda.

Exemplo 1.1.49 (Ação co-adjunta à esquerda) *Suponha H álgebra de Hopf e seja $ad^* : H \otimes H^\circ \to H^\circ$ dada por $h \triangleright \phi = \phi_{(2)} \left\langle S(\phi_{(1)})\phi_{(3)}, h \right\rangle$ então prova-se que H° é um H-módulo co-álgebra.*

Embora tenhamos apenas trabalhado com módulos à esquerda, as definições para módulos à direita são análogas. Temos os exemplos de ações regulares, co-regulares, adjuntas e co-adjuntas no caso à direita similares ao caso à esquerda com algumas modificações necessárias que são imediatas dentro do contexto.

1.1.7 Co-módulos

Nesta seção, dualizaremos o conceito de módulo para co-módulo invertendo as flechas nos diagramas comutativos assim como fizemos para co-álgebras. A definição de co-módulo é o ponto de partida do estudo de geometria não-comutativa do ponto de vista de grupos quânticos. Ao invés de termos um grupo agindo em um espaço, teremos uma álgebra de Hopf, que fará o papel do grupo, co-agindo em uma álgebra, que representa o espaço. O fato de queremos trabalhar com essa dualização por trocas de flechas, vem do fato que a equivalência de categorias entre uma sub-categoria dos espaço topológicos e uma sub-categoria das álgebras dada pelo teorema de Gelfand-Naimark vem de um funtor contravariante.

Manteremos a notação da seção anterior em que H representa uma bi-álgebra e V um espaço vetorial.

Definição 1.1.50 *Dizemos que o par (V, Δ_R) onde $\Delta_R : V \to V \otimes H$ é um H-co-módulo à direita se são satisfeitas*

1. $(id \otimes \Delta)\Delta_R = (\Delta_R \otimes id)\Delta,$

2. $(id \otimes \epsilon)\Delta_R = id.$

Chamamos a aplicação Δ_R de co-ação à direita e denotaremos por $\Delta_R(v) = v^{(0)} \otimes v^{(1)}$. Se (W, Δ'_R) é outro co-módulo, dizemos que uma tranformação linear $T : V \to W$ é um morfismo de co-módulos se $\Delta'_R T = (T \otimes id)\Delta_R$. Definimos uma estrutura de H-co-módulo *no produto tensorial por* $\overline{\Delta_R} : V \otimes W \to V \otimes W \otimes H$ *dada por* $\overline{\Delta_R}(v \otimes w) = v^{(0)} \otimes w^{(0)} \otimes v^{(1)} w^{(1)}$, *ie,* $\overline{\Delta_R} = (id \otimes id \otimes \mu)\tau_{23}(\Delta_R \otimes \Delta'_R)$.

Para uma formalização da notação de Sweedler para a co-ação ver a seção 2 do apêndice B. Temos uma estrutura natural de co-módulo no corpo $\mathbb{K}$ definindo $\Delta_R : \mathbb{K} \to \mathbb{K} \otimes H$ por $\Delta_R(\lambda) = \lambda \otimes 1$.

Definição 1.1.51 *Se V é uma álgebra dizemos que um H-co-módulo (V, Δ_R) é um H-co-módulo álgebra à direita se o produto e a unidade são morfismos de H-co-módulos, ou seja, $(v_1 v_2)^{(0)} \otimes (v_1 v_2)^{(1)} = v_1^{(0)} v_2^{(0)} \otimes v_1^{(1)} v_2^{(1)}$ e $(1_V)^{(0)} \otimes (1_V)^{(1)} = 1_V \otimes 1_H$. Neste caso também dizemos que (V, Δ_R) é um espaço quântico à direita.*

A nomenclatura de espaço quântico vem de pensarmos em V como sendo a álgebra de funções contínuas (diferenciáveis) de um espaço topológico compacto X (de uma variedade compacta) no espírito do teorema de Gelfand-Naimark, e co-ação H como sendo dual a uma ação de um grupo em X.

Exemplo 1.1.52 (Co-ação regular à esquerda) *O co-produto $\Delta : H \otimes H \to H$ faz de H um H-co-módulo álgebra à direita. As propriedades de co-módulo são as propriedades do co-produto. E o fato de ser co-módulo álgebra vem do fato do co-produto ser morfismo de álgebras.*

No próximo exemplo, construíremos uma co-ação no quociente de uma álgebra livre. Teríamos que mostrar que se as propriedades de co-ação são satisfeitas nos geradores no caso em que V é uma álgebra, então elas valem em todo V. A demonstração é feita da mesma forma que o caso do co-produto e antípoda já apresentados e não será feito aqui.

Exemplo 1.1.53 *Sejam $H = \mathbb{C}(SL(2))$ e $V = \mathbb{C}[x_1, x_2]$. Defina $\Delta_R : V \to V \otimes H$ por $\Delta_R(x_i) = \sum_{j=1}^{2} x_j \otimes t^j{}_i$, então como H é uma álgebra comutativa temos que Δ_R está de fato bem definida. Neste caso, temos que V é um H-espaço quântico à direita. De fato,*

$$(id \otimes \Delta)\Delta_R(x_i) = (id \otimes \Delta)\left(\sum_{j=1}^{2} x_j \otimes t^j{}_i\right) = \sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} x_j \otimes t^j{}_k \otimes t^k{}_i =$$

$$= (\Delta_R \otimes id)\left(\sum_{k=1}^{2} x_k \otimes t^k{}_i\right) = (\Delta_R \otimes id)\Delta_R(x_i),$$

$$(id \otimes \epsilon)\Delta_R(x_i) = (id \otimes \epsilon)\left(\sum_{j=1}^{2} x_j \otimes t^j{}_i\right) = \sum_{j=1}^{2} x_j \delta_{ji} = x_i,$$

e o fato da multiplicação e unidade serem morfismos de H-co-módulos vem da construção.

Note que podemos pensar que V é álgebra de coordenadadas de $\mathbb{C}^2$, e pensando num vetor como uma matriz linha e numa tranformação linear como produto de matrizes à direita, *temos que esta co-ação nada mais é que a dualização da ação de $SL(2)$ em $\mathbb{C}^2$. Na próxima seção iremos generalizar este exemplo para um caso mais geral, o qual será de fundamental importância no decorrer do trabalho.*

Definição 1.1.54 *Seja (V, Δ_R) um H-co-módulo à direita, dizemos que um elemento v é invariante à direita se $\Delta_R(v) = v \otimes 1$. Denotaremos os elementos invariantes de V pela co-ação por V^H.*

Note que se (V, Δ_R) um H-co-módulo álgebra, então V^H é uma sub-álgebra de V, de fato se $\Delta_R(v) = v \otimes 1$ e $\Delta_R(w) = w \otimes 1$, então $\Delta_R(vw) = v^{(0)}w^{(0)} \otimes v^{(1)}w^{(1)} = vw \otimes 1$.

Lema 1.1.55 *Sejam (V, Δ_R) um H-co-módulo e W um espaço vetorial se $x = \sum v_i \otimes w_i \in V \otimes W$ é tal que $(\Delta_R \otimes id)(x) = \sum v_i \otimes 1 \otimes w_i$ então podemos reescrever $x = \sum v'_j \otimes w'_j$ de forma que $v'_j \in V^H$ para todo j.*

Demonstração. Seja $\{f_j\}_j$ uma base do espaço gerado pelos w_i. Escrevendo $w_i = \sum_j \lambda_{ij} f_j$, então $x = \sum v'_j \otimes f_j$ onde $v'_j = \sum_i \lambda_{ij} v_i$. Note que $(\Delta_R \otimes id)(x) = \sum v'_j \otimes 1 \otimes f_j$, mas também $(\Delta_R \otimes id)(x) = \sum \Delta_R(v'_j) \otimes f_j$. Como $\{f_j\}_j$ é LI, temos que $\Delta_R(v'_j) = v'_j \otimes 1$ para todo j. ■

Podemos generalizar facilmente este resultado no caso de trabalharmos com $W_1 \otimes V \otimes W_2$ e estivermos aplicando $id \otimes \Delta_R \otimes id$. Também, se (V, Δ_R) um H-co-módulo álgebra e denotando $B = V^H$, temos que $V \otimes H$ é B-bimódulo fazendo $b_1(v \otimes h)b_2 = (b_1 v b_2) \otimes h$ e neste caso Δ_R é um morfismo de B-bimódulos vendo B como anel. Então o resultado se estende para $W_1 \otimes_B V \otimes_B W_2$ onde W_1 é um B-módulo à direita e W_2 é um B-módulo à esquerda. Podemos utilizar a mesma demonstração do lema neste caso pois a proposição A.2.3 que se refere à base do produto tensorial e suas conseqüências continuam valendo neste caso, trocando $\otimes$ por $\otimes_B$.

Definição 1.1.56 *Seja (V, Δ_R) um H-co-módulo à direita tal que V seja uma co-álgebra. Dizemos que (V, Δ_R) é um H-co-módulo co-álgebra se o co-produto e a co-unidade de V forem morfismos de co-módulos, ou seja, $\left(v^{(0)}\right)_{(1)} \otimes \left(v^{(0)}\right)_{(2)} \otimes v^{(1)} = \left(v_{(1)}\right)^{(0)} \otimes \left(v_{(2)}\right)^{(1)} \otimes \left(v_{(1)}\right)^{(1)} \left(v_{(2)}\right)^{(2)}$ e $\epsilon_V(v^{(0)})v^{(1)} = \epsilon(v)1_H$.*

Exemplo 1.1.57 (Co-ação adjunta à direita) *Suponha H álgebra de Hopf e defina $Ad_R : H \to H \otimes H$ por $Ad_R(h) = h_{(2)} \otimes S(h_{(1)})h_{(3)}$ então H com esta co-ação é um H-co-módulo co-álgebra. De fato*

$$(Ad_R \otimes id)Ad_R(h) = Ad_R(h_{(2)}) \otimes S(h_{(1)})h_{(3)} = h_{(3)} \otimes S(h_{(2)})h_{(4)} \otimes S(h_{(1)})h_{(5)} =$$

$$= h_{(2)} \otimes S(h_{(1)})_{(1)}h_{(3)} \otimes S(h_{(1)})_{(2)}h_{(4)} = h_{(2)} \otimes \Delta(S(h_{(1)})h_{(3)}) = (id \otimes \Delta)Ad_R,$$

$$(id \otimes \epsilon)Ad_R(h) = h_{(2)}\epsilon(S(h_{(1)}h_{(3)}) = \epsilon(h_{(1)})h_{(2)}\epsilon(h_{(3)}) = h,$$

$$(\Delta \otimes id)Ad_R(h) = h_{(2)} \otimes h_{(3)} \otimes S(h_{(1)})h_{(4)} = h_{(2)} \otimes h_{(4)} \otimes S(h_{(1)})\epsilon(h_{(3)})h_{(5)} =$$

$$= h_{(2)} \otimes h_{(5)} \otimes S(h_{(1)})h_{(3)}S(h_{(4)})h_{(6)} = (id \otimes id \otimes \mu)\tau_{23}(Ad_R \otimes Ad_R)\Delta(h),$$

$$(\epsilon \otimes id)Ad_R(h) = \epsilon(h_{(2)})S(h_{(1)})h_{(3)} = S(h_{(1)})h_{(2)} = \epsilon(h)1.$$

Tal co-ação nos será importante nos próximos capítulos, porém não estaremos interessados de fato que esta co-ação é compatível com a estrutura de co-álgebra de H.

Assim como para ações, embora tenhamos trabalhado com co-módulos à direita, podemos trabalhar também com co-módulos à esquerda fazendo as modificações necessárias. Em particular a notação para uma co-ação à esquerda será de $\Delta_L(v) = v^{(-1)} \otimes v^{(0)}$ e a co-ação adjunta à esquerda é dada por $Ad_L(h) = h_{(1)}S(h_{(3)}) \otimes h_{(2)}$.

Proposição 1.1.58 *Suponha que H é álgebra de Hopf e que V seja um H-co-módulo à esquerda com co-ação dada por $\Delta_L : V \to H \otimes V$, então a aplicação linear $\Delta_R : V \to V \otimes H$ dada por $\Delta_R = (id \otimes S)\tau\Delta_L$ é uma co-ação à direita em V. Reciprocamente, se a antípoda S é inversível, dado (V, Δ_R) um H-co-módulo à direita, a aplicação linear $(S^{-1} \otimes id)\tau\Delta_R$ é uma co-ação à esquerda.*

Demonstração. Em termos da notação de Sweedler, temos $\Delta_L(v) = v^{(-1)} \otimes v^{(0)}$ e $\Delta_R(v) = v^{(0)} \otimes S(v^{(-1)})$.Segue que

$$(id \otimes \epsilon)\Delta_R(v) = v^{(0)}\epsilon(S(v^{(-1)}) = \epsilon(v^{(-1)})v^{(0)} = v;$$

$$(id \otimes \Delta)\Delta_R(v) = v^{(0)} \otimes S(v^{(-1)})_{(1)} \otimes S(v^{(-1)})_{(2)} = v^{(0)} \otimes S(v^{(-1)}) \otimes S(v^{(-2)}) =$$

$$= (\Delta_R \otimes id)(v^{(0)} \otimes S(v^{(-1)})) = (\Delta_R \otimes id)\Delta_R(v)$$

como queríamos. Análogo para a recíproca. ■

Proposição 1.1.59 *Sejam H álgebra de Hopf, (V, Δ_R) um H-co-módulo à direita de dimensão finita e $\{e_i\}_{i=1}^n$ base de V. Considere os elementos $\{u^i{}_j\}_{i,j=1}^n$ de H tais que $\Delta_R(e_i) = \sum_j e_j \otimes u^j{}_i$. Se $\{x^i\}_{i=1}^n$ é a base dual a $\{e_i\}$ para V^* e H tem antípoda inversível, então $\Delta_R^* : V^* \to V^* \otimes H$ dada por $\Delta_R^*(x^i) = \sum_j x^j \otimes S^{-1}(u^i{}_j)$ é uma co-ação à direita. Neste caso a aplicação de avaliação* av $: V \otimes V^* \to \mathbb{K}$ *dada por* $\mathrm{av}(v \otimes f) = f(v)$ *é um morfismo de H-co-módulos à direita.*

Demonstração. Note que do fato que Δ_R é uma co-ação, os elementos $u^i{}_j$ satisfazem $\Delta(u^i{}_j) = \sum_k u^i{}_k \otimes u^k{}_j$ e $\epsilon(u^i{}_j) = \delta_{ij}$. Agora, usando que S^{-1} é antípoda para H^{op} temos que

$$(id \otimes \epsilon)\Delta_R^*(x^i) = \sum_j x^j \otimes \epsilon\left(S^{-1}(u^i{}_j)\right) = x^i$$

e também

$$(\Delta_R^* \otimes id)\Delta_R^*(x^i) = \sum_{j,k} x^k \otimes S^{-1}(u^j{}_k) \otimes S^{-1}(u^i{}_j) =$$

$$= (id \otimes \Delta)\left(\sum_k x^k \otimes S^{-1}(u^i{}_k)\right) = (id \otimes \Delta)\Delta_R^*(x^i)$$

como desejávamos.

Pela linearidade das aplicações em questão, é suficiente mostrar para um monômio da forma $e_i \otimes x^j \in V \otimes V^*$

$$(\mathrm{av} \otimes id)\Delta_R(e_i \otimes x^j) = (\mathrm{av} \otimes id)\left(\sum_{k,l} e_k \otimes x^l \otimes u^k{}_i S^{-1}(u^j{}_l)\right) =$$

$$= \sum_{k,l} x^l(e_k) \otimes u^k{}_i S^{-1}(u^j{}_l) = \sum_k 1 \otimes u^k{}_i S^{-1}(u^j{}_k) = 1 \otimes \epsilon(u^j{}_i) =$$

$$1 \otimes \delta_{ij} = 1 \otimes x^j(e_i) = \Delta_R(\mathrm{av}(e_i \otimes x^j))$$

como desejado. ■

1.1.8 $*$-Álgebras de Hopf

Fixe $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ neste subseção. Recorde que uma involução num espaço vetorial complexo V é uma aplicação $* : V \to V$ que é conjugado linear, ie $(\lambda v_1 + v_2)^* = \overline{\lambda} v_1^* + v_2^*$, onde denotamos $*(v) = v^*$ e tal que $*^2 = *$. Note que se tivermos involuções em V e W, então temos uma involução em $V \otimes W$ dada por $(v \otimes w)^* = v^* \otimes w^*$. Além disso uma aplicação $T : V \to W$ é dita um $*$-homomorfismo se $T(v^*) = T(v)^*$ $\forall v \in V$.

Definição 1.1.60 *Uma álgebra A com involução é uma $*$-álgebra se $(ab)^* = b^*a^*$ $\forall a, b \in A$. Uma co-álgebra C com involução é uma $*$-co-álgebra se o co-produto e a co-unidade forem $*$-homomorfismos. Uma bi-álgebra H com involução é uma $*$-bi-álgebra se for uma $*$-álgebra e uma $*$-co-álgebra. Finalmente, uma álgebra de Hopf H com involução é uma $*$-álgebra de Hopf se for uma $*$-bi-álgebra. Dadas duas involucões $*_1$ e $*_2$ em uma álgebra de Hopf H, dizemos que $*_1$ e $*_2$ são equivalente se existe um automorfismo de álgebras de Hopf T tal que $T(h^{*_1}) = T(h)^{*_2}$.*

No decorrer do texto, sempre que estivermos falando de involução, fica subentendido que o corpo em questão é o dos números complexos. Note que em uma $*$-álgebra temos $1^* = 1$. Vejamos que a antípoda tem uma certa relação de compatibilidade com a involução no caso de $*$-álgebras de Hopf.

Proposição 1.1.61 *Seja H uma $*$-álgebra de Hopf, então $S \circ * \circ S \circ * = id$. Neste caso $S^{-1} = * \circ S \circ *$.*

Demonstração. Pela proposição 1.1.34 é suficiente mostrar que $* \circ S \circ * = S^{op}$. Temos que para $h \in H$

$$h_{(2)}\,(* \circ S \circ *)\,(h_{(1)}) = (S(h^*_{(1)})h^*_{(2)})^* = (\epsilon(h^*)1)^* = \epsilon(h)$$

$$(* \circ S \circ *)(h_{(2)})h_{(1)} = \left(h^*_{(1)}S(h^*_{(2)})\right))^* = (\epsilon(h^*)1)^* = \epsilon(h)$$

como desejado. ■

Proposição 1.1.62 *Seja H uma $*$-álgebra de Hopf, então H° também é uma $*$-álgebra de Hopf com $f^*(h) = \overline{f(S(h)^*)}$.*

Demonstração. É claro que f^* é um funcional linear. Se $\Delta(f) = \sum_{i=1}^n f_i \otimes g_i$ então

$$f^*(hg) = \overline{f(S(hg)^*)} = \overline{f(S(h)^*S(g)^*)} = \overline{\sum_{i=1}^n f_i(S(h)^*)g_i(S(g)^*)} = \sum_{i=1}^n f_i^*(h)g_i^*(g)$$

donde $f^* \in H^\circ$ e $\Delta(f^*) = \Delta(f)^*$. Também $\epsilon(f^*) = f^*(1) = \overline{f(S(1)^*)} = \overline{f(1)} = \overline{\epsilon(f)}$ e

$$(f^*)^*(h) = \overline{f^*(S(h)^*)} = f(S(S(h)^*)^*) = f(h).$$

É claro que $*$ é conjugado linear. Finalmente

$$(f*g)^*(h) = \overline{(f*g)(S(h)^*)} = \overline{f((S(h)^*)_{(1)})g((S(h)^*)_{(2)})} = \overline{f(S(h_{(2)})^*)g(S(h_{(1)})^*)} = (g^* * f^*)(h)$$

terminando a demonstração. ■

Dadas duas $*$-álgebras de Hopf A e H, e um par dual $\langle , \rangle : H \times A \to \mathbb{C}$ entre elas, em vista da última proposição, diremos que este par é um par de $*$-álgebras de Hopf se $\langle h^*, a\rangle = \overline{\langle h, S(a)^*\rangle}$ e $\langle h, a^*\rangle = \overline{\langle S(h)^*, a\rangle}$. De fato, precisamos impor apenas uma das igualdades. Digamos que tenhamos apenas a primeira, então

$$\langle h, a^*\rangle = \langle (h^*)^*, a^*\rangle = \overline{\langle h^*, S(a^*)^*\rangle} = \overline{\langle h^*, S^{-1}(a)\rangle} = \overline{\langle S^{-1}(h^*), a\rangle} = \overline{\langle S(h)^*, a\rangle}.$$

Dado V um espaço vetorial complexo, defina $\overline{V}$ como sendo o espaço vetorial que coincide com V como conjuntos e com multiplicação por escalares dada por $\lambda \cdot v = \overline{\lambda}v$. Como a involução em uma álgebra A é um anti-homomorfismo de álgebras entre A e $\overline{A}^{op}$, para construir uma involução numa álgebra livre, basta definir a involução nos geradores. E para um quociente de uma álgebra livre, temos que verificar ainda que o ideal pelo qual a álgebra livre é quocientado é invariante pela involução.

Exemplo 1.1.63 (Formas reais de álgebras de Lie complexas) *Dado V um espaço vetorial complexo, o seu realificado $V^{\mathbb{R}}$ é o espaço vetorial real obtido ao restringirmos o produto por escalares em V para $\mathbb{R}$. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie complexa dizemos que uma sub-álgebra de Lie real $\mathfrak{g}_0$ de $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ é uma forma real de $\mathfrak{g}$ se $\mathfrak{g}_0$ é o conjunto dos pontos fixos de alguma involução $*_0$ satisfazendo $[X,Y]^{*_0} = [X^{*_0}, Y^{*_0}]$ $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$, ou equivalentemente, podemos escrever $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus i\mathfrak{g}_0$. Dada uma forma real em $\mathfrak{g}$, podemos definir uma nova involução $*$ em $\mathfrak{g}$ por $(x+iy)^* = -x+iy$ para $x, y \in \mathfrak{g}_0$. Neste caso vale $[X^*, Y^*] = [Y, X]^*$ $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$ donde podemos definir uma involução em $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ utilizando a propriedade universal da álgebra* *envolvente com a aplicação $*: \mathfrak{g} \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})^{op}$. É fácil ver que neste caso $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ torna-se uma $*$-álgebra de Hopf.*

Exemplo 1.1.64 *Em $\mathbb{C}(SL(2))$ podemos definir uma involução por $t_{ij}^* = t_{ij}$. Neste caso denotamos esta álgebra por $\mathbb{C}(SL(2,\mathbb{R}))$. Podemos definir uma outra involução em $\mathbb{C}(SL(2))$ por $\left(t^i{}_j\right)^* = S(t^j{}_i)$, ou seja, $\left(t^1{}_1\right)^* = t^2{}_2$, $\left(t^1{}_2\right)^* = -t^1{}_2$, $\left(t^2{}_1\right)^* = -t^2{}_1$ e $\left(t^2{}_2\right)^* = t^1{}_1$. Com esta involução temos que*

$$\Delta(t^i{}_j)^* = \sum_{k=1}^{2} S(t^k{}_i) \otimes S(t^j{}_k) = \Delta(S(t^j{}_i)) = \Delta(\left(t^i{}_j\right)^*)$$

e $\epsilon(\left(t^i{}_j\right)^*) = \epsilon(S(t^j{}_i)) = \epsilon(t^j{}_i) = \delta_{ij} = \overline{\epsilon(t^i{}_j)}$. Neste caso denotamos a $*$-álgebra de Hopf por $\mathbb{C}(SU(2))$.

Definição 1.1.65 *Sejam H uma $*$-álgebra de Hopf e (V, Δ_R) um espaço quântico à direita sobre H. Dizemos que $(V, \Delta_R, *)$ é um $*$-espaço quântico à direita sobre H, se $*$ é um involução sobre V tal que Δ_R é um $*$-homomorfismo.*

Exemplo 1.1.66 *Seja $V = \mathbb{C}[x_1, x_2]$ a álgebra polinomial em duas variáveis. Já vimos que V é um $\mathbb{C}(SL(2))$-espaço quântico à direita com $\Delta_R(x_i) = \sum_{j=1}^{2} x_j \otimes t^j{}_i$. Definindo uma involução em V por $x_1^* = x_1$ e $x_2^* = x_2$, temos que V é um $*$-espaço quântico à direita sobre $\mathbb{C}(SL(2,\mathbb{R}))$.*

1.2 A construção FRT

Nesta seção, iremos mostrar a construção feita por Faddeev, Reshetikhin e Takhtajan [18] para achar deformações de grupos de Lie. Mas antes, precisamos do conceito de estrutura quasitriangular e co-quasitriangular. Seguiremos a exposição de [27].

1.2.1 Estruturas quasitriangular e co-quasitriangular

Estamos interessados em estudar álgebras de Hopf que não são necessariamente co-comutativas mas de forma que $\tau \circ \Delta$ é dado por uma conjugação de um elemento inversível.

Definição 1.2.1 *Uma bi-álgebra H é dita ser quasitriangular se existe um elemento inversível $R \in H \otimes H$ tal que:*

1. $\tau \circ \Delta(h) = R\Delta(h)R^{-1}$ $\forall h \in H$;
2. $(\Delta \otimes id)(R) = R_{13}R_{23}$;
3. $(id \otimes \Delta)(R) = R_{13}R_{12}$;

onde se $R = \sum_i a_i \otimes b_i$ então $R_{13} = \sum_i a_i \otimes 1 \otimes b_i$, $R_{12} = \sum_i a_i \otimes b_i \otimes 1$ e $R_{23} = \sum_i 1 \otimes a_i \otimes b_i$. Tal elemento R chama-se matriz R universal, matriz R ou matriz universal.

Proposição 1.2.2 *Seja H uma álgebra de Hopf quasitriangular com matriz universal R. Então são válidas as seguintes relações*

1. $(\epsilon \otimes id)R = (id \otimes \epsilon)R = 1$;

2. $(S \otimes id)R = R^{-1}$;

3. $(id \otimes S)R^{-1} = R$;

4. $(S \otimes S)R = R$;

5. $R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}$ *(Equação de Yang-Baxter).*

Demonstração. 1. Aplicando $(\epsilon \otimes id \otimes id)$ em ambos os lados da igualdade 2 da definição 1.2.1 temos de um lado

$$(\epsilon \otimes id \otimes id)(\Delta \otimes id)R = (id \otimes id)R = R$$

e por outro lado, escrevendo $R = \sum_i a_i \otimes b_i$

$$(\epsilon \otimes id \otimes id)(R_{13}R_{23}) = \sum_{i,j} \epsilon(a_i)a_j \otimes b_i b_j = (\epsilon \otimes id)(R).R$$

e como R é inversível, multiplicando por R^{-1} pela direita temos $(\epsilon \otimes id)R = 1$. Análogo para a outra igualdade.

2. Basta aplicar $(\mu \otimes id)(S \otimes id \otimes id)$ na igualdade 2 da definição 1.2.1 e proceder como no caso anterior.

3. Temos que

$$1 \otimes 1 \otimes 1 = (id \otimes \Delta)(1 \otimes 1) = (id \otimes \Delta)(R.R^{-1}) =$$

$$= (id \otimes \Delta)(R)(id \otimes \Delta)(R^{-1}) = R_{13}R_{12}(id \otimes \Delta)(R^{-1})$$

donde $(id \otimes \Delta)(R^{-1}) = (R_{12})^{-1}(R_{13})^{-1}$. Analogamente temos $(\Delta \otimes id)(R^{-1}) = (R_{23})^{-1}(R_{13})^{-1}$. Observando que $(R^{-1})_{ij} = (R_{ij})^{-1}$ para $1 \leq i < j \leq 3$, chegamos que R^{-1} é uma matriz universal para a bi-álgebra H^{cop}. Portanto, escrevendo $R^{-1} = \sum_l c_l \otimes d_l$ e utilizando 1 temos

$$1 = (id \otimes \epsilon)R^{-1} = (id \otimes \mu)(id \otimes id \otimes S)(id \otimes \Delta)R^{-1} = (id \otimes \mu)(id \otimes id \otimes S)((R^{-1})_{12}(R^{-1})_{13}) =$$

$$= (id \otimes \mu)\left(\sum_{k,l} c_k c_l \otimes d_k \otimes S(d_l)\right) = R^{-1}.(id \otimes S)(R^{-1})$$

donde segue que $(id \otimes S)R^{-1} = R$.

4. Aplicando 2 e 3 temos $(S \otimes S)R = (id \otimes S)(S \otimes id)R = (id \otimes S)R^{-1} = R$.

5. Utilizando as propriedade da matriz R temos:

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{12}(\Delta \otimes id)R = (\tau \circ \Delta \otimes id)(R).R_{12} = (\tau \otimes id)(\Delta \otimes id)(R).R_{12} =$$

$$= (\tau \otimes id)(R_{13}R_{23}).R_{12} = R_{23}R_{13}R_{12}$$

onde na segunda igualdade utilizamos a propriedade 1 de 1.2.1 em $R_{12} = R \otimes 1$. ■

Lembre-se que se uma álgebra de Hopf é co-comutativa então $S^2 = id$ conforme a proposição 1.1.33. No caso de uma álgebra de Hopf quasitriangular este fato só é verdade se $1 \otimes 1$ for uma matriz universal, no entanto, podemos que mostrar que S^2 é um automorfismo interno de H. Em particular teremos que a antípoda será inversível e portanto, quando supusermos em algumas partes do próximo capítulo que a antípoda é inversível, estaremos trabalhando com uma classe muito grande de exemplos interessantes.

Proposição 1.2.3 *Seja H uma álgebra de Hopf quasitriangular com matriz universal R. Então $u := \mu(S \otimes id)\tau(R)$ tem inversa dada por $u^{-1} = \mu(id \otimes S^2)\tau(R)$. Temos ainda que $uS(u) = S(u)u$ é um elemento central e são válidas as igualdades*

$$S^2(h) = uhu^{-1} \qquad \text{e} \qquad S^{-1}(h) = u^{-1}hu$$

para $h \in H$.

Demonstração. Denote R por $R = \sum_i a_i \otimes b_i$, então $u = \sum_i S(b_i)a_i$. Primeiro, vejamos que $S^2(h)u = uh$. Utilizando a primeira propriedade da matriz universal obtemos $R_{12}(\Delta \otimes id)\Delta(h) = (\tau \circ \Delta \otimes id)\Delta(h)R_{12}$ o que pode ser reescrito como:

$$\sum_i a_ih_{(1)} \otimes b_ih_{(2)} \otimes h_{(3)} = \sum_i h_{(2)}a_i \otimes h_{(1)}b_i \otimes h_{(3)}.$$

Aplicando $id \otimes S \otimes S^2$ em ambos os lados da igualdade e multiplicando na ordem inversa obtemos de um lado

$$\sum_i S^2(h_{(3)})S(b_ih_{(2)})a_ih_{(1)} = \sum_i S(h_{(2)}S(h_{(3)}))S(b_i)a_ih_{(1)} =$$

$$= \sum_i S(\epsilon(h_{(2)})1)S(b_i)a_ih_{(1)} = uh$$

e por outro lado

$$\sum_i S^2(h_{(3)})S(h_{(1)}b_i)h_{(2)}a_i = \sum_i S^2(h_{(2)})S(b_i)\epsilon(h_{(1)})a_i = S^2(h)u$$

donde $S^2(h)u = uh \; \forall h \in H$. Seja $v = \mu(id \otimes S^2)\tau(R) = \sum_i b_iS^2(a_i)$ e vejamos que de fato $v = u^{-1}$. Escreva $R^{-1} = \sum c_j \otimes d_j$. Utilizando as relações $(S \otimes S)R = R$ e $(S \otimes id)R = R^{-1}$ da proposição anterior temos

$$vu = \sum_i b_iS^2(a_i)u = \sum_i b_iua_i = \sum_{i,k} b_iS(b_k)a_ka_i = \sum_{i,k} S(b_i)S(b_k)a_kS(a_i) =$$

$$= \sum_{j,k} S(d_j)S(b_k)a_kc_j = \sum_{j,k} S(b_kd_j)a_kc_j = 1$$

onde usamos que

$$\Delta(1) = 1 \otimes 1 = RR^{-1} = \sum_{j,k} a_kc_j \otimes b_kd_j.$$

Similarmente

$$uv = \sum_i ub_iS^2(a_i) = \sum_i S^2(b_i)uS^2(a_i) = \sum_i S(b_i)uS(a_i) = \sum_i b_iua_i = 1.$$

Segue que $S^2(h) = uhu^{-1}$.

Agora, note que para $h \in H$, temos

$$h = u^{-1}uhu^{-1}u = S^2(u^{-1})S^2(h)S^2(u) = S^2(u^{-1}hu)$$

donde $H = S(H)$. Portanto para mostrarmos que $S(u)u$ é central, é suficiente mostrar que ele comuta com elementos da forma $S(h)$. Aplicando S na igualdade $S^2(h)u = uh$ temos $S(u)S^3(h) = S(h)S(u)$ donde $S(u)uS(h)u^{-1} = S(h)S(u)$ e portanto $S(u)uS(h) = S(h)S(u)u$. Utilizando o fato de $S(u)u$ ser central com u, obtemos $uS(u)u = S(u)uu$ o que implica que $S(u)u = uS(u)$.

Finalmente, defina $T : H \to H$ por $T(h) = u^{-1}S(h)u$ e vejamos que $T = S^{-1}$, de fato

$$ST(h) = S(u^{-1}S(h)u) = S(u)S^2(h)S(u^{-1}) = S(u)uhu^{-1}S(u^{-1}) = hu^{-1}S(u^{-1})S(u)u = h$$

$$TS(h) = u^{-1}S^2(h)u = u^{-1}uhu^{-1}u = h$$

concluindo a proposição. ■

Vamos agora dualizar a noção de estrutura quasitriangular. Mas antes precisamos de um lema para justificar a notação.

Lema 1.2.4 *Seja H uma álgebra de Hopf e veja H' como uma álgebra de acordo com o corolário 1.1.20. Então H' age em $\mathrm{Lin}(H,H)$ à direita e à esquerda por $T * f = (T \otimes f) \circ \Delta$ e $f * T = (f \otimes T) \circ \Delta$ respectivamente.*

Demonstração. A demonstração é análoga à da proposição 1.1.19, lembrando que a unidade da álgebra H' é exatamente a co-unidade. ■

Definição 1.2.5 *Dizemos que uma bi-álgebra H é co-quasitriangular (ou quasitriangular dual) se existe uma aplicação linear $\mathbf{r} : H \otimes H \to \mathbb{K}$ inversível por convolução, com inversa denotada por $\bar{\mathbf{r}}$ tal que para $a, b, c \in H$:*

1. $\mu \circ \tau = \mathbf{r} * \mu * \bar{\mathbf{r}}$, *ie*, $ba = \mathbf{r}(a_{(1)} \otimes b_{(1)})a_{(2)}b_{(2)}\bar{\mathbf{r}}(a_{(3)} \otimes b_{(3)})$;

2. $\mathbf{r}(\mu \otimes id) = \mathbf{r}_{13} * \mathbf{r}_{23}$, *ie*, $\mathbf{r}(ab \otimes c) = \mathbf{r}(a \otimes c_{(1)})\mathbf{r}(b \otimes c_{(2)})$;

3. $\mathbf{r}(id \otimes \mu) = \mathbf{r}_{13} * \mathbf{r}_{12}$, *ie,* $\mathbf{r}(a \otimes bc) = \mathbf{r}(a_{(1)} \otimes c)\mathbf{r}(a_{(2)} \otimes b)$;

onde $\mathbf{r}_{12}(a \otimes b \otimes c) = \mathbf{r}(a \otimes b)\epsilon(c)$, $\mathbf{r}_{13}(a \otimes b \otimes c) = \mathbf{r}(a \otimes c)\epsilon(b)$ *e* $\mathbf{r}_{23}(a \otimes b \otimes c) = \mathbf{r}(b \otimes c)\epsilon(a)$. *A aplicação* $\mathbf{r}$ *é chamada de forma r universal, forma r ou forma universal.*

Não é difícil verificar que se H e K são duas bi-álgebras com um par dual e se K é quasitriangular com matriz universal R então H é co-quasitriangular com forma universal dada por $\mathbf{r}(a \otimes b) = \langle a \otimes b, R \rangle$.

Proposição 1.2.6 *Seja* H *uma álgebra de Hopf co-quasitriangular com forma universal* $\mathbf{r}$, *então para* $a, b \in H$ *são válidas:*

1. $\mathbf{r}(1 \otimes a) = \mathbf{r}(a \otimes 1) = \epsilon(a)$;
2. $\mathbf{r}(S(a) \otimes b) = \bar{\mathbf{r}}(a \otimes b)$;
3. $\mathbf{r}(S(a) \otimes S(b)) = \mathbf{r}(a \otimes b)$;
4. $\bar{\mathbf{r}}(a \otimes S(b)) = \mathbf{r}(a \otimes b)$;
5. $\mathbf{r}_{12} * \mathbf{r}_{13} * \mathbf{r}_{23} = \mathbf{r}_{23} * \mathbf{r}_{13} * \mathbf{r}_{12}$.

Demonstração. **1.** Utilizando a inversa de convolução de $\mathbf{r}$ e o item 2 da definição de co-quasitriangular temos

$$\mathbf{r}(1 \otimes a) = \epsilon(a_{(1)})\mathbf{r}(1 \otimes a_{(2)}) = \bar{\mathbf{r}}(1 \otimes a_{(1)})\mathbf{r}(1 \otimes a_{(2)})\mathbf{r}(1 \otimes a_{(3)}) = \bar{\mathbf{r}}(1 \otimes a_{(1)})\mathbf{r}(1.1 \otimes a_{(2)}) = \epsilon(a)$$

e análogo para o outro lado.

2. Temos que

$$\mathbf{r}(S(a_{(1)}) \otimes b_{(1)})\mathbf{r}(a_{(2)} \otimes b_{(2)}) = \mathbf{r}(S(a_{(1)})a_{(2)} \otimes b) = \epsilon(a)\mathbf{r}(1 \otimes b) = (\epsilon \otimes \epsilon)(a \otimes b)$$

ou seja $\mathbf{r}(S(a) \otimes b)$ é o inverso de convolução de $\mathbf{r}$. Pela unicidade da inversa temos $\mathbf{r}(S(a) \otimes b) = \bar{\mathbf{r}}(a \otimes b)$.

3. Temos que

$$\mathbf{r}(S(a_{(1)}) \otimes S(b_{(1)}))\bar{\mathbf{r}}(a_{(2)} \otimes b_{(2)}) = \mathbf{r}(S(a_{(1)}) \otimes S(b_{(1)}))\mathbf{r}(S(a_{(2)}) \otimes b_{(2)}) =$$

$$= \mathbf{r}(S(a) \otimes S(b_{(1)})b_{(2)}) = \mathbf{r}(S(a) \otimes 1)\epsilon(b) = (\epsilon \otimes \epsilon)(a \otimes b)$$

e novamente pela unicidade da inversa temos $\mathbf{r}(S(a) \otimes S(b)) = \mathbf{r}(a \otimes b)$.

4. Segue imediato de 2 e 3.

5. Podemos reescrever o item 1 da definição de co-quasitriangular por $\mu \circ \tau * \mathbf{r} = \mathbf{r} * \mu$, ou aplicando num elemento $a \otimes b$, temos $b_{(1)}a_{(1)}\mathbf{r}(a_{(2)} \otimes b_{(2)}) = \mathbf{r}(a_{(1)} \otimes b_{(1)})a_{(2)}b_{(2)}$. Segue que

$$\mathbf{r}_{12} * \mathbf{r}_{13} * \mathbf{r}_{23}(a \otimes b \otimes c) = \mathbf{r}_{12}(a_{(1)} \otimes b_{(1)} \otimes c_{(1)})\mathbf{r}_{13}(a_{(2)} \otimes b_{(2)} \otimes c_{(2)})\mathbf{r}_{23}(a_{(3)} \otimes b_{(3)} \otimes c_{(3)}) =$$

$$= \mathbf{r}(a_{(1)} \otimes b_{(1)})\mathbf{r}(a_{(2)} \otimes c_{(1)})\mathbf{r}(b_{(2)} \otimes c_{(2)}) = \mathbf{r}(a_{(1)} \otimes b_{(1)})\mathbf{r}(a_{(2)}b_{(2)} \otimes c) =$$

$$= \mathbf{r}(\mathbf{r}(a_{(1)} \otimes b_{(1)})a_{(2)}b_{(2)} \otimes c) = \mathbf{r}(b_{(1)}a_{(1)}\mathbf{r}(a_{(2)} \otimes b_{(2)}) \otimes c) =$$

$$= \mathbf{r}(b_{(1)}a_{(1)} \otimes c)\mathbf{r}(a_{(2)} \otimes b_{(2)}) = \mathbf{r}(b_{(1)} \otimes c_{(1)})\mathbf{r}(a_{(1)} \otimes c_{(2)})\mathbf{r}(a_{(2)} \otimes b_{(2)}) =$$

$$= \mathbf{r}_{23} * \mathbf{r}_{13} * \mathbf{r}_{12}(a \otimes b \otimes c)$$

como desejado. ■

Assim como no caso de álgebra de Hopf quasitriangular, a antípoda de uma álgebra de Hopf co-quasitriangular também se comporta bem e em particular é inversível.

Proposição 1.2.7 *Seja H uma álgebra de Hopf co-quasitriangular com forma universal $\mathbf{r}$. Defina funcionais lineares f e $\bar{f}$ em H por $f(a) = \mathbf{r}(a_{(1)} \otimes S(a_{(2)}))$ e $\bar{f} = \bar{\mathbf{r}}(S(a_{(1)}) \otimes a_{(2)})$ para $a \in H$, então $f * \bar{f} = \bar{f} * f = \epsilon$ em H'. Além disso a antípoda de H é inversível e satisfaz $S^2(a) = (\bar{f} * id * f)(a)$ e $S^{-1}(a) = (f * S * \bar{f})(a)$.*

Demonstração. Utilizando o item 1 da definição 1.2.5 temos

$$f(a)1 = \mathbf{r}(a_{(1)} \otimes S(a_{(2)}))1 = \mathbf{r}(a_{(1)} \otimes S(a_{(4)}))a_{(2)}S(a_{(3)}) =$$

$$= S(a_{(4)})a_{(1)}\mathbf{r}(a_{(2)} \otimes S(a_{(3)})) = S(a_{(3)})a_{(1)}f(a_{(2)}).$$

Segue que

$$f(a_{(1)})S^2(a_{(2)}) = S^2(a_{(4)})S(a_{(3)})a_{(1)}f(a_{(2)}) = S(a_{(3)}S(a_{(4)}))a_{(1)}f(a_{(2)}) = a_{(1)}f(a_{(2)}). \quad (1.6)$$

Desta igualdade e das relações da proposição anterior, temos

$$(\bar{f}*f)(a) = \bar{\mathbf{r}}(S(a_{(1)})\otimes a_{(2)})f(a_{(3)}) = \bar{\mathbf{r}}(S(a_{(1)})\otimes a_{(2)}f(a_{(3)})) = \bar{\mathbf{r}}(S(a_{(1)})\otimes f(a_{(2)})S^2(a_{(3)})) =$$

$$= \mathbf{r}(S(a_{(1)}) \otimes S(a_{(3)}))f(a_{(2)}) = \mathbf{r}(a_{(1)} \otimes a_{(3)})f(a_{(2)}) = \mathbf{r}(a_{(1)} \otimes a_{(4)})\mathbf{r}(a_{(2)} \otimes S(a_{(3)})) =$$

$$= \mathbf{r}(a_{(1)} \otimes S(a_{(2)})a_{(3)}) = \mathbf{r}(a \otimes 1) = \epsilon(a)$$

e analogamente $\left(f * \bar{f}\right)(a) = \epsilon(a)$. De $\bar{f} * f = \epsilon$ e (1.6) temos

$$\bar{f}(a_{(1)})a_{(2)}f(a_{(3)}) = \bar{f}(a_{(1)})f(a_{(2)})S^2(a_{(3)}) = S^2(a)$$

ou seja, $S^2 = \bar{f} * id * f$. Esta última igualdade pode ser reescrita como $S^2 * \bar{f} = \bar{f} * id$, ie,

$$S^2(a_{(1)})\bar{f}(a_{(2)}) = \bar{f}(a_{(1)})a_{(2)}. \quad (1.7)$$

Defina agora $T = f * S * \bar{f}$. De (1.6) e $f * \bar{f} = \epsilon$ temos

$$T(a_{(2)})a_{(1)} = f(a_{(2)})S(a_{(3)})\bar{f}(a_{(4)})a_{(1)} = S(a_{(3)})\bar{f}(a_{(4)})f(a_{(1)})S^2(a_{(2)}) =$$

$$= S(S(a_{(2)})a_{(3)})f(a_{(1)})\bar{f}(a_{(4)}) = f(a_{(1)})\bar{f}(a_{(2)})1 = \epsilon(a)1.$$

Analogamente usando (1.7) e $\bar{f} * f = \epsilon$ mostramos que $a_{(2)}T(a_{(1)}) = \epsilon(a)1$, ou seja, T é antípoda de H^{op}. Segue da proposição 1.1.34 que $T = S^{-1}$. ∎

1.2.2 A construção FRT da bi-álgebra $A(R)$

Nesta sub-seção, consideraremos $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ por simplicidade, já que estamos interessados em deformações da álgebra de funções complexas de grupos de Lie. Utilizaremos também a notação de Einstein que soma índices repetidos, um em cima e outro embaixo, por exemplo $v^i e_i := \sum_i v^i e_i$.

Teorema 1.2.8 *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $R : V \otimes V \to V \otimes V$ um isomorfismo. Então existe uma bi-álgebra $A(R)$ e uma aplicação $\Delta_R : V \to V \otimes A(R)$ tal que V seja $A(R)$ co-módulo à direita e R seja morfismo de co-módulos à direita em $V \otimes V$. Além disto, $A(R)$ tem a propriedade universal que se existir $\tilde{A}$ bi-álgebra e $\delta_R : V \to V \otimes \tilde{A}$ tal que V seja $\tilde{A}$-co-módulo à direita e R seja morfismo de $\tilde{A}$-co-módulos, então existe único morfismo de bi-álgebras $T : A(R) \to \tilde{A}$ tal que $\delta_R = (id \otimes T)\Delta_R$.*

Demonstração. Seja $\{e_i\}_{i=1}^n$ base de V e sejam $\{R_{ij}^{kl}\}_{i,j,k,l=1}^n$ os coeficientes da matriz de R na base $\{e_i \otimes e_j\}_{i,j=1}^n$, ie, eles são tais que $R(e_i \otimes e_j) = R_{ij}^{kl}(e_l \otimes e_k)$. Considere a álgebra livre gerada por $\{t^i{}_j\}_{i,j=1}^n$ denotada por $\mathbb{C}\{t^i{}_j\}$ e use a proposição 1.1.26 para criar uma estrutura de bi-álgebra por $\Delta(t^i{}_j) = t^i{}_k \otimes t^k{}_j$ e $\epsilon(t^i{}_j) = \delta_{ij}$. Além disso, conforme mencionada na subseção 1.1.7, podemos definir uma co-ação $\tilde{\Delta}_R : V \to V \otimes \mathbb{C}\{t^i{}_j\}$ por $\tilde{\Delta}_R(e_i) = e_k \otimes t^k{}_i$. Queremos impor também que R seja morfismo de co-módulos em $V \otimes V$. Assim, construíremos uma nova bi-álgebra que permita que seja satisfeita esta condição. Temos por um lado

$$\tilde{\Delta}_R(R(e_i \otimes e_j)) = \tilde{\Delta}_R(R_{ij}^{kl} e_l \otimes e_k) = e_p \otimes e_q \otimes t^p{}_l t^q{}_k R_{ij}^{kl} \tag{1.8}$$

e pelo outro lado

$$(R \otimes id)\tilde{\Delta}_R(e_i \otimes e_j) = R(e_k \otimes e_l) \otimes t^k{}_i t^l{}_j = e_p \otimes e_q \otimes R_{kl}^{qp} t^k{}_i t^l{}_j. \tag{1.9}$$

Subtaindo (1.8) de (1.9) temos

$$((R \otimes id)\tilde{\Delta}_R - \tilde{\Delta}_R \circ R)(e_i \otimes e_j) = e_p \otimes e_q \otimes R_{kl}^{qp} t^k{}_i t^l{}_j - t^p{}_l t^q{}_k R_{ij}^{kl} \tag{1.10}$$

o que nos induz a definir o ideal bi-lateral de $\mathbb{C}\{t^i{}_j\}$

$$I = \left\langle R_{kl}^{ij} t^k{}_m t^l{}_n - t^j{}_l t^i{}_k R_{mn}^{kl} \right\rangle$$

tomando o cuidado para não confundir o índice n com a dimensão de V. Então $A(R) = \mathbb{C}\{t^i{}_j\}/I$ é uma álgebra. Temos que mostrar também que I é um ideal de co-álgebra. Para o co-produto temos

$$\Delta\left(R^{ij}_{kl}t^k{}_m t^l{}_n - t^j{}_l t^i{}_k R^{kl}_{mn}\right) = R^{ij}_{kl}t^k{}_p t^l{}_q \otimes t^p{}_m t^q{}_n - t^j{}_p t^i{}_q \otimes t^p{}_l t^q{}_k R^{kl}_{mn} =$$

$$= R^{ij}_{kl}t^k{}_p t^l{}_q \otimes t^p{}_m t^q{}_n - t^j{}_l t^i{}_k R^{kl}_{pq} \otimes t^p{}_m t^q{}_n + t^j{}_l t^i{}_k \otimes R^{kl}_{pq} t^p{}_m t^q{}_n - t^j{}_l t^i{}_k \otimes t^l{}_q t^k{}_p R^{pq}_{mn} =$$

$$= \left(R^{ij}_{kl}t^k{}_p t^l{}_q - t^j{}_l t^i{}_k R^{kl}_{pq}\right)\otimes t^p{}_m t^q{}_n + t^j{}_l t^i{}_k \otimes \left(R^{kl}_{pq} t^p{}_m t^q{}_n - t^l{}_q t^k{}_p R^{pq}_{mn}\right) \in I \otimes \mathbb{C}\{t^i{}_j\} + \mathbb{C}\{t^i{}_j\} \otimes I$$

donde $\Delta(I) \subseteq I \otimes \mathbb{C}\{t^i{}_j\} + \mathbb{C}\{t^i{}_j\} \otimes I$; e para a co-unidade

$$\epsilon\left(R^{ij}_{kl}t^k{}_m t^l{}_n - t^j{}_l t^i{}_k R^{kl}_{mn}\right) = R^{ij}_{kl}\delta_{km}\delta_{ln} - \delta_{jl}\delta_{ik}R^{kl}_{mn} = R^{ij}_{mn} - R^{ij}_{mn} = 0$$

donde $\epsilon(I) = 0$ e de fato I é um ideal de co-álgebra. Segue que $A(R)$ é uma bi-álgebra. Não é difícil verificar que se definirmos $\Delta_R : V \to V \otimes A(R)$ por $(id \otimes \pi)\tilde{\Delta}_R$, onde π é a projeção canônica de $\mathbb{C}\{t^i{}_j\}$ em $A(R)$, temos que V é um $A(R)$-co-módulo à direita. Além disso, por construção temos $\Delta_R \circ R = (R \otimes id) \circ \Delta_R$.

Suponha, agora, dado uma bi-álgebra $\tilde{A}$ e $\delta_R : V \to V \otimes \tilde{A}$ uma co-ação à direita tal que $\delta_R \circ R = (R \otimes id) \circ \delta_R$. Seja $\{u^k{}_i\}^n_{i,k=1} \subseteq \tilde{A}$ o conjunto dos elementos definidos por $\delta_R(e_i) = e_k \otimes u^k{}_i$. Note que para que δ_R seja co-ação temos que esses elementos satisfaçam $\Delta(u^i{}_j) = u^i{}_k \otimes u^k{}_j$ e $\epsilon(u^i{}_j) = \delta_{ij}$. Defina $\tilde{T} : \mathbb{C}\{t^i{}_j\} \to \tilde{A}$ por $\tilde{T}(t^i{}_j) = u^i{}_j$ morfismo de álgebras pela propriedade universal de $\mathbb{C}\{t^i{}_j\}$ e mostremos que também é morfismo de co-álgebras

$$\Delta(\tilde{T}(t^i{}_j)) = \Delta(u^i{}_j) = u^i{}_k \otimes u^k{}_j = (\tilde{T} \otimes \tilde{T})(t^i{}_k \otimes t^k{}_j) = (\tilde{T} \otimes \tilde{T})\Delta(t^i{}_j)$$

$$\epsilon(\tilde{T}(t^i{}_j)) = \epsilon(u^i{}_j) = \delta_{ij} = \epsilon(t^i{}_j).$$

Por uma igualdade similar a (1.10) usando a hipótese $\delta_R \circ R = (R \otimes id) \circ \delta_R$ chegamos a $R^{ij}_{kl}u^k{}_m u^l{}_n = u^j{}_l u^i{}_k R^{kl}_{mn}$ donde

$$\tilde{T}(R^{ij}_{kl}t^k{}_m t^l{}_n - t^j{}_l t^i{}_k R^{kl}_{mn}) = R^{ij}_{kl}u^k{}_m u^l{}_n - u^j{}_l u^i{}_k R^{kl}_{mn} = 0$$

ie, $\tilde{T}(I) = 0$ e portanto podemos bem definir $T : A(R) \to \tilde{A}$ por $T(t^i{}_j) = u^i{}_j$, que é morfismo de bi-álgebras satisfazendo $\delta_R = (id \otimes T)\Delta_R$. A unicidade está garantida pelo fato que se $\delta_R = (id \otimes T')\Delta_R$ então $T'(t^i{}_j) = u^i{}_j$. ■

Teorema 1.2.9 *Nas condições do teorema anterior, suponha que R satisfaça a equação de Yang-Baxter $(R\otimes id)(id\otimes R)(R\otimes id) = (id\otimes R)(R\otimes id)(id\otimes R)$. Então $A(R)$ tem estrutura co-quasitriangular definida por R.*

Demonstração. Primeiro definamos $\tilde{\mathbf{r}} : \mathbb{C}\{t^i{}_j\}\otimes\mathbb{C}\{t^i{}_j\} \to \mathbb{C}$ por $\tilde{\mathbf{r}}(1\otimes t^i{}_j) = \tilde{\mathbf{r}}(t^i{}_j\otimes 1) = \delta_{ij}$, $\tilde{\mathbf{r}}(t^i{}_j \otimes t^k{}_l) = R^{ik}_{jl}$ e estendido para o produto pelas condições 2 e 3 de 1.2.5. Utilizando a equação de Yang-Baxter para R, vamos achar uma relação entre os elementos da matriz

$\{R^{ij}_{kl}\}^n_{i,j,k,l=1}$. Temos por um lado

$$(R\otimes id)(id\otimes R)(R\otimes id)(e_a\otimes e_b\otimes e_c) = (R\otimes id)(id\otimes R)(R^{pq}_{ab}e_q\otimes e_p\otimes e_c) =$$

$$= (R\otimes id)(R^{pq}_{ab}R^{rs}_{pc}e_q\otimes e_s\otimes e_r) = R^{pq}_{ab}R^{rs}_{aq}R^{xy}_{rp}(e_y\otimes e_x\otimes e_r)$$

e por outro lado

$$(id\otimes R)(R\otimes id)(id\otimes R)(e_a\otimes e_b\otimes e_c) = (id\otimes R)(R\otimes id)(R^{pq}_{bc}e_a\otimes e_q\otimes e_p) =$$

$$= (id\otimes R)(R^{pq}_{bc}R^{rs}_{aq}e_s\otimes e_r\otimes e_p) = R^{pq}_{bc}R^{rs}_{aq}R^{xy}_{rp}(e_s\otimes e_y\otimes e_x) = R^{pq}_{bc}R^{sy}_{aq}R^{rx}_{sp}(e_y\otimes e_x\otimes e_r)$$

ou seja temos

$$R^{pq}_{ab}R^{rs}_{aq}R^{xy}_{rp} = R^{pq}_{bc}R^{sy}_{aq}R^{rx}_{sp} \tag{1.11}$$

para quaisquer a,b,c,s,x,y. Pelo lema A.2.8, para mostrarmos que $\tilde{\mathbf{r}}$ desce para $A(R)$, temos que mostrar que $\tilde{\mathbf{r}}(I\otimes\mathbb{C}\{t^i{}_j\}) = \tilde{\mathbf{r}}(\mathbb{C}\{t^i{}_j\}\otimes I) = 0$. Primeiro observe que $\tilde{\mathbf{r}}(I\otimes 1) = \tilde{\mathbf{r}}(1\otimes I) = 0$ e utilizando as condições 2 e 3 de 1.2.5, vemos que resta-nos apenas mostrar que $\tilde{\mathbf{r}}(I^{ij}_{mn}\otimes t^p{}_q) = \tilde{\mathbf{r}}(t^p{}_q\otimes I^{ij}_{mn}) = 0$ onde denotamos $I^{ij}_{mn} = R^{ij}_{kl}t^k{}_m t^l{}_n - t^j{}_l t^i{}_k R^{kl}_{mn}$. Temos que

$$\tilde{\mathbf{r}}(R^{ij}_{kl}t^k{}_m t^l{}_n - t^j{}_l t^i{}_k R^{kl}_{mn}\otimes t^p{}_q) = R^{ij}_{kl}\tilde{\mathbf{r}}(t^k{}_m t^l{}_n\otimes t^p{}_q) - \tilde{\mathbf{r}}(t^j{}_l t^i{}_k\otimes t^p{}_q)R^{kl}_{mn} =$$
$$= R^{ij}_{kl}R^{kp}_{mr}R^{lr}_{nq} - R^{jp}_{lr}R^{ir}_{kq}R^{kl}_{mn} = 0$$

onde a última igualdade sai de (1.11) reinterpretando os índices; e

$$\tilde{\mathbf{r}}(t^p{}_q\otimes R^{ij}_{kl}t^k{}_m t^l{}_n - t^j{}_l t^i{}_k R^{kl}_{mn}) = R^{ij}_{kl}\tilde{\mathbf{r}}(t^p{}_q\otimes t^k{}_m t^l{}_n) - \tilde{\mathbf{r}}(t^p{}_q\otimes t^j{}_l t^i{}_k)R^{kl}_{mn} =$$

$$= R^{ij}_{kl}R^{pl}_{rn}R^{rk}_{qm} - R^{pi}_{rk}R^{rj}_{ql}R^{kl}_{mn} = 0$$

onde novamente a última igualdade segue de (1.11).

Portanto temos uma aplicação $\mathbf{r} : A(R)\otimes A(R)\to\mathbb{C}$ que satisfaz 2 e 3 de 1.2.5 por construção. Temos que mostrar que $\mathbf{r}$ é inversível por convolução e que satisfas a condição 1. Por hipótese R é inversível e é fácil ver que R^{-1} satisfaz a equação de Yang-Baxter e portanto, procedendo como acima, temos bem definida $\bar{\mathbf{r}}$ por $\bar{\mathbf{r}}(t^i{}_j\otimes t^k{}_l) = (R^{-1})^{ik}_{jl}$, $\bar{\mathbf{r}}(1\otimes t^i{}_j) = \bar{\mathbf{r}}(t^i{}_j\otimes 1) = \delta_{ij}$ e estendido para o produto por 2 e 3 de 1.2.5. Temos que mostrar que $\bar{\mathbf{r}}$ de fato é inversa de convolução de $\mathbf{r}$. Mostremos que

$$(\mathbf{r}*\bar{\mathbf{r}})(a\otimes b) = \mathbf{r}(a_{(1)}\otimes b_{(1)})\bar{\mathbf{r}}(a_{(2)}\otimes b_{(2)}) = \epsilon(a)\epsilon(b) \tag{1.12}$$

por indução nos graus dos monômios a e b (aqui estamos abusando as noções de grau e monômio para $A(R)$). Se o grau de a ou b é zero é imediato, por exemplo $\mathbf{r}(a_{(1)}\otimes 1)\bar{\mathbf{r}}(a_{(2)}\otimes 1) = \epsilon(a_{(1)})\epsilon(a_{(2)}) = \epsilon(a_{(1)}\epsilon(a_{(2)})) = \epsilon(a)$. Se os graus de a e b são ambos 1 então supondo

$a = t^i{}_j$ e $b = t^k{}_l$ temos

$$(\mathbf{r} * \bar{\mathbf{r}})(t^i{}_j \otimes t^k{}_l) = \mathbf{r}(t^i{}_p \otimes t^k{}_q)\bar{\mathbf{r}}(t^p{}_j \otimes t^q{}_l) = R^{ik}_{pq}(R^{-1})^{pq}_{jl} = \delta_{ij}\delta_{kl} = \epsilon(t^i{}_j)\epsilon(t^k{}_l).$$

Agora suponha que (1.12) seja válido para pares (a, b) onde os graus de a e b são menores que um determinado n mostremos que vale para (a, bc) onde o grau de c também é menor que n. Note que pela definição do co-produto podemos escolher os "elementos"$a_{(1)}$ e $a_{(2)}$ do co-produto com graus menores que n, de forma que temos

$$(\mathbf{r} * \bar{\mathbf{r}})(a \otimes bc) = \mathbf{r}(a_{(1)} \otimes b_{(1)}c_{(1)})\bar{\mathbf{r}}(a_{(2)} \otimes b_{(2)}c_{(2)}) =$$

$$= \mathbf{r}(a_{(1)} \otimes c_{(1)})\mathbf{r}(a_{(2)} \otimes b_{(1)})\bar{\mathbf{r}}(a_{(3)} \otimes b_{(2)})\bar{\mathbf{r}}(a_{(4)} \otimes c_{(2)}) =$$

$$= \mathbf{r}(a_{(1)} \otimes c_{(1)})\epsilon(a_{(2)})\epsilon(b)\bar{\mathbf{r}}(a_{(3)} \otimes c_{(2)}) = \epsilon(b)\mathbf{r}(a_{(1)} \otimes c_{(1)})\bar{\mathbf{r}}(a_{(2)} \otimes c_{(2)}) = \epsilon(a)\epsilon(bc)$$

e para o par (ab, c)

$$(\mathbf{r} * \bar{\mathbf{r}})(ab \otimes c) = \mathbf{r}(a_{(1)}b_{(1)} \otimes c_{(1)})\bar{\mathbf{r}}(a_{(2)}b_{(2)} \otimes c_{(2)}) =$$

$$= \mathbf{r}(a_{(1)} \otimes c_{(1)})\mathbf{r}(b_{(1)} \otimes c_{(2)})\bar{\mathbf{r}}(b_{(2)} \otimes c_{(3)})\bar{\mathbf{r}}(a_{(2)} \otimes c_{(4)}) =$$

$$= \mathbf{r}(a_{(1)} \otimes c_{(1)})\epsilon(b)\epsilon(c_{(2)})\bar{\mathbf{r}}(a_{(2)} \otimes c_{(3)}) = \epsilon(ab)\epsilon(c).$$

Analogamente mostramos que $\bar{\mathbf{r}} * \mathbf{r} = \epsilon \otimes \epsilon$ donde $\bar{\mathbf{r}}$ é o inverso de convolução de $\mathbf{r}$.

Resta-nos mostrar a condição 1 de 1.2.5, ou reescrevendo de maneira mais apropriada

$$\mathbf{r}(a_{(1)} \otimes b_{(1)})a_{(2)}b_{(2)} = b_{(1)}a_{(1)}\mathbf{r}(a_{(2)} \otimes b_{(2)}). \tag{1.13}$$

Iremos fazer de maneira análoga a mostrar a inversa por convolução. Para a ou b de grau zero, (1.13) segue imediato do axioma da co-unidade. Façamos agora para $a = t^i{}_j$ e $b = t^k{}_l$

$$\mathbf{r}((t^i{}_j)_{(1)} \otimes (t^k{}_l)_{(1)})(t^i{}_j)_{(2)}(t^k{}_l)_{(2)} = \mathbf{r}(t^i{}_p \otimes t^k{}_q)t^p{}_j t^q{}_l = R^{ik}_{pq}t^p{}_j t^q{}_l = t^k{}_p t^i{}_q R^{pq}_{jl} =$$

$$= t^k{}_p t^i{}_q \mathbf{r}(t^p{}_j \otimes t^q{}_l) = (t^k{}_l)_{(1)}(t^i{}_j)_{(1)}\mathbf{r}((t^i{}_j)_{(2)} \otimes (t^k{}_l)_{(1)}).$$

Finalmente suponha que (1.13) seja válido para pares (a, b) onde os graus de a e b são menores que um determinado n mostremos que vale para (a, bc) onde o grau de c também é menor que n

$$\mathbf{r}(a_{(1)} \otimes b_{(1)}c_{(1)})a_{(2)}b_{(2)}c_{(2)} = \mathbf{r}(a_{(1)} \otimes c_{(1)})\mathbf{r}(a_{(2)} \otimes b_{(1)})a_{(3)}b_{(2)}c_{(2)} =$$

$$= b_{(1)}\mathbf{r}(a_{(1)} \otimes c_{(1)})a_{(2)}c_{(2)}\mathbf{r}(a_{(3)} \otimes b_{(2)}) = b_{(1)}c_{(1)}a_{(1)}\mathbf{r}(a_{(2)} \otimes c_{(2)})\mathbf{r}(a_{(3)} \otimes b_{(2)}) =$$

$$= b_{(1)}c_{(1)}a_{(1)}\mathbf{r}(a_{(2)} \otimes b_{(2)}c_{(2)})$$

e análogo para o par (ab, c), donde segue o teorema. ■

Corolário 1.2.10 *Nas condições do teorema anterior, a aplicação $\rho^+ : A(R) \to M_n(\mathbb{C})$ dada por $\rho^+(t^i{}_j)^p{}_q = \mathbf{r}(t^i{}_j \otimes t^p{}_q)$ é uma representação de $A(R)$ em $M_n(\mathbb{C})$ denominada representação fundamental de $A(R)$.*

Demonstração. Calculemos

$$\rho^+(t^i{}_j)^p{}_r\rho^+(t^k{}_l)^r{}_q = \mathbf{r}(t^i{}_j \otimes t^p{}_r)\mathbf{r}(t^k{}_l \otimes t^r{}_q) = \mathbf{r}(t^i{}_j t^k{}_l \otimes t^p{}_q) = \rho^+(t^i{}_j t^k{}_l)^p{}_q$$

donde segue o resultado. ■

Exemplo 1.2.11 *1. Considere os elementos $R^{ij}_{kl} = \delta^i_k\delta^j_l$ então*

$$R(e_i \otimes e_j) = R^{kl}_{ij} e_l \otimes e_k = \delta^k_i \delta^l_j e_l \otimes e_k = e_j \otimes e_i$$

ou seja $R = \tau$. As relações de $A(R)$ dadas por $R^{ij}_{kl} t^k{}_m t^l{}_n = t^j{}_l t^i{}_k R^{kl}_{mn}$ são exatamente $t^i{}_m t^j{}_n = t^j{}_n t^i{}_m$ ou seja $A(R) = \mathbb{C}[t^i{}_j]$.

2. Sejam $R^{ij}_{kl} = \delta^i_l\delta^j_k$ então

$$R(e_i \otimes e_j) = R^{kl}_{ij} e_l \otimes e_k = \delta^k_j \delta^l_i e_l \otimes e_k = e_i \otimes e_j$$

ou seja $R = id$ e as relações implicam $t^i{}_m t^j{}_n = t^i{}_m t^j{}_n$ donde $A(R) = \mathbb{C}\{t^i{}_j\}$ é a álgebra livre gerada pelos $t^i{}_j$.

A motivação para a escolha das matrizes R dos próximos exemplos vem do estudo das álgebras de Drinfeld-Jimbo e suas representações, o qual não faremos aqui uma vez que foge muito do escopo deste trabalho. O determinante quântico, que aparecerá nos próximos exemplos e que nos dará a impressão de serem definidos ad-hoc, será discutido na próxima sub-seção não com todos os detalhes.

Para simplificarmos um pouco as contas a seguir defina $\hat{R} = \tau \circ R$, ou em coeficientes, $\hat{R}^{ij}_{kl} = R^{ji}_{kl}$.Defina também $\mathbf{t} = (t^i{}_j)$, $\mathbf{t}_1 = \mathbf{t} \otimes I_n$ e $\mathbf{t}_2 = I_n \otimes \mathbf{t}$ onde I_n é matriz identidade de dimensão n. Note que podemos reescrever as relações da bi-álgebra $A(R)$ matricialmente por

$$R\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2 = \mathbf{t}_2\mathbf{t}_1 R \qquad \text{ou} \qquad \hat{R}\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2 = \mathbf{t}_1\mathbf{t}_2\hat{R} \tag{1.14}$$

Exemplo 1.2.12 (Álgebra de coordenadas de $M_q(N)$) *Fixe $q \neq 0$, $N = \dim V$ e seja $\hat{R}^{ij}_{kl} = R^{ji}_{kl} = q^{\delta_{ij}}\delta_{jk}\delta_{il} + (q - q^{-1})\delta_{jl}\delta_{ik}\mathsf{H}(j-i)$ onde H é fução de Heaviside dada por $\mathsf{H}(i) = 1$ se $i > 0$ e $\mathsf{H}(i) = 0$ se $i \leq 0$. A bi-álgebra $A(R)$ dada por esta matriz R é chamada de álgebra de coordenadas do espaço matricial quântico $M_q(N)$, denotada por $\mathcal{O}(M_q(N))$. Por exemplo, para $N = 2$ temos*

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q - q^{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2 = \begin{pmatrix} t^1{}_1 & t^1{}_2 & 0 & 0 \\ t^2{}_1 & t^2{}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^1{}_1 & t^1{}_2 \\ 0 & 0 & t^2{}_1 & t^2{}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^1{}_1 & 0 & t^1{}_2 & 0 \\ 0 & t^1{}_1 & 0 & t^1{}_2 \\ t^2{}_1 & 0 & t^2{}_2 & 0 \\ 0 & t^2{}_1 & 0 & t^2{}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^1{}_1t^1{}_1 & t^1{}_2t^1{}_1 & t^1{}_1t^1{}_2 & t^1{}_2t^1{}_2 \\ t^2{}_1t^1{}_1 & t^2{}_2t^1{}_1 & t^2{}_1t^1{}_2 & t^2{}_2t^1{}_2 \\ t^1{}_1t^2{}_1 & t^1{}_2t^2{}_1 & t^1{}_1t^2{}_2 & t^1{}_2t^2{}_2 \\ t^2{}_1t^2{}_1 & t^2{}_2t^2{}_1 & t^2{}_1t^2{}_2 & t^2{}_2t^2{}_2 \end{pmatrix}$$

ou seja as relações são dadas por

$$\begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q-q^{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^1{}_1t^1{}_1 & t^1{}_2t^1{}_1 & t^1{}_1t^1{}_2 & t^1{}_2t^1{}_2 \\ t^2{}_1t^1{}_1 & t^2{}_2t^1{}_1 & t^2{}_1t^1{}_2 & t^2{}_2t^1{}_2 \\ t^1{}_1t^2{}_1 & t^1{}_2t^2{}_1 & t^1{}_1t^2{}_2 & t^1{}_2t^2{}_2 \\ t^2{}_1t^2{}_1 & t^2{}_2t^2{}_1 & t^2{}_1t^2{}_2 & t^2{}_2t^2{}_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} t^1{}_1t^1{}_1 & t^1{}_2t^1{}_1 & t^1{}_1t^1{}_2 & t^1{}_2t^1{}_2 \\ t^2{}_1t^1{}_1 & t^2{}_2t^1{}_1 & t^2{}_1t^1{}_2 & t^2{}_2t^1{}_2 \\ t^1{}_1t^2{}_1 & t^1{}_2t^2{}_1 & t^1{}_1t^2{}_2 & t^1{}_2t^2{}_2 \\ t^2{}_1t^2{}_1 & t^2{}_2t^2{}_1 & t^2{}_1t^2{}_2 & t^2{}_2t^2{}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q-q^{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}$$

ou ainda denotando $\lambda_q = q - q^{-1}$,

$$\begin{pmatrix} qt^1{}_1t^1{}_1 & qt^1{}_2t^1{}_1 & qt^1{}_1t^1{}_2 & qt^1{}_2t^1{}_2 \\ \lambda_q t^2{}_1t^1{}_1 + t^1{}_1t^2{}_1 & \lambda_q t^2{}_2t^1{}_1 + t^1{}_2t^2{}_1 & \lambda_q t^2{}_1t^1{}_2 + t^1{}_1t^2{}_2 & \lambda_q t^2{}_2t^1{}_2 + t^1{}_2t^2{}_2 \\ t^2{}_1t^1{}_1 & t^2{}_2t^1{}_1 & t^2{}_1t^1{}_2 & t^2{}_2t^1{}_2 \\ qt^2{}_1t^2{}_1 & qt^2{}_2t^2{}_1 & qt^2{}_1t^2{}_2 & qt^2{}_2t^2{}_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} qt^1{}_1t^1{}_1 & \lambda_q t^1{}_2t^1{}_1 + t^1{}_1t^1{}_2 & t^1{}_2t^1{}_1 & qt^1{}_2t^1{}_2 \\ qt^2{}_1t^1{}_1 & \lambda_q t^2{}_2t^1{}_1 + t^2{}_1t^1{}_2 & t^2{}_2t^1{}_1 & qt^2{}_2t^1{}_2 \\ qt^1{}_1t^2{}_1 & \lambda_q t^1{}_2t^2{}_1 + t^1{}_1t^2{}_2 & t^1{}_2t^2{}_1 & qt^1{}_2t^2{}_2 \\ qt^2{}_1t^2{}_1 & \lambda_q t^2{}_2t^2{}_1 + t^2{}_1t^2{}_2 & t^2{}_2t^2{}_1 & qt^2{}_2t^2{}_2 \end{pmatrix}$$

que se reduz às seguintes seis relações

$$t^1{}_2t^1{}_1 = qt^1{}_1t^1{}_2, \qquad t^2{}_1t^1{}_1 = qt^1{}_1t^2{}_1, \qquad t^1{}_2t^2{}_1 = t^2{}_1t^1{}_2$$

$$t^2{}_2t^1{}_2 = qt^1{}_2t^2{}_2, \qquad t^2{}_2t^2{}_1 = qt^2{}_1t^2{}_2, \qquad t^2{}_2t^1{}_1 - t^1{}_1t^2{}_2 = (q-q^{-1})t^1{}_2t^2{}_1.$$

Exemplo 1.2.13 (Álgebra de coordenadas de $SL_q(2)$) *Da última relação do último exemplo temos $t^2{}_2t^1{}_1 - qt^1{}_2t^2{}_1 = t^1{}_1t^2{}_2 - q^{-1}t^1{}_2t^2{}_1$. Denotaremos este elemento por $\mathcal{D}_q$ que é chamado de determinante quântico para a bi-álgebra $\mathcal{O}(M_q(2))$. Não é difícil verificar que $\Delta(\mathcal{D}_q) = \mathcal{D}_q \otimes \mathcal{D}_q$ e $\epsilon(\mathcal{D}_q) = 1$, donde segue que $I = \langle \mathcal{D}_q - 1 \rangle$ é um ideal de bi-álgebra, de fato para $a, b \in \mathcal{O}(M_q(2))$*

$$\Delta(a(\mathcal{D}_q - 1)b) = \Delta(a)(\mathcal{D}_q \otimes \mathcal{D}_q - 1 \otimes 1)\Delta(b) = \Delta(a)(\mathcal{D}_q \otimes \mathcal{D}_q - \mathcal{D}_q \otimes 1 + \mathcal{D}_q \otimes 1 - 1 \otimes 1)\Delta(b) =$$

$$= \Delta(a)(\mathcal{D}_q \otimes (\mathcal{D}_q - 1))\Delta(b) + \Delta(a)((\mathcal{D}_q - 1) \otimes 1)\Delta(b) \in I \otimes \mathcal{O}(M_q(2)) + \mathcal{O}(M_q(2)) \otimes I.$$

Denote o quociente por $\mathcal{O}(SL_q(2)) = \mathcal{O}(M_q(2))/I$ e note que podemos definir uma antípoda no quociente por

$$S(t^1{}_1) = t^2{}_2, \qquad S(t^1{}_2) = -q^{-1}t^1{}_2, \qquad S(t^2{}_1) = -qt^2{}_1, \qquad S(t^2{}_2) = t^1{}_1$$

por exemplo

$$\mu(S \otimes id)\Delta(t^1{}_1) = S(t^1{}_1)t^1{}_1 + S(t^1{}_2)t^2{}_1 = t^2{}_2 t^1{}_1 - q^{-1}t^1{}_2 t^1{}_1 = \mathcal{D}_q = 1 = \epsilon(t^1{}_1),$$

ou seja $\mathcal{O}(SL_q(2))$ é uma álgebra de Hopf, a qual será chamada de álgebra de coordenadas do grupo quântico $SL_q(2)$. Em alguns exemplos também iremos escrever a, b, c, d no lugar de $t^1{}_1, t^1{}_2, t^2{}_1, t^2{}_2$ respectivamente.

Exemplo 1.2.14 (Álgebra de coordenadas e $O_q(N)$) *Fixe $q \neq 0$ e $N = \dim V$. Definimos $i' = N + 1 - i$, os números ρ_i por $\rho_i = \frac{N}{2} - i$ se $i < i'$ e $\rho_{i'} = -\rho_i$ se $i \geq i'$, a matriz $\mathsf{C} = (\mathsf{C}^i_j)$ por $\mathsf{C}^i_j = \delta_{ij'}q^{-\rho_i}$ notando que ele é idempotente, a matriz $\mathsf{K} = (\mathsf{K}^{ij}_{kl})$ por $\mathsf{K}^{ij}_{kl} = \mathsf{C}^i_j \mathsf{C}^k_l$ e finalmente R por*

$$R^{ij}_{kl} = \hat{R}^{ji}_{kl} = q^{\delta_{ij} - \delta_{ij'}}\delta_{ik}\delta_{jl} + (q - q^{-1})\mathsf{H}(i-k)(\delta_{jk}\delta_{il} - \mathsf{K}^{ji}_{kl}).$$

Do estudo de representações da álgebra de Drinfeld-Jimbo [27] vemos que R satisfaz a seguinte relação

$$R = \mathsf{C}_1(R^{t_1})^{-1}\mathsf{C}_1^{-1} = \mathsf{C}_2(R^{-1})^{t_2}\mathsf{C}_2^{-1} \tag{1.15}$$

onde $\mathsf{C}_1 = \mathsf{C} \otimes I_N$, $\mathsf{C}_2 = I_N \otimes \mathsf{C}$ e t_1, t_2 representam as transpostas com respeito ao primeiro e segundo fator tensorial respectivamente por exemplo $(A \otimes B)^{t_1} = A^t \otimes B$. Aplicando t_1 na relação $R\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2 = \mathbf{t}_2\mathbf{t}_1 R$ dada em (1.14) temos $(\mathbf{t}^t)_1 R^{t_1}\mathbf{t}_2 = \mathbf{t}_2 R^{t_1}(\mathbf{t}^t)_1$. Mas da primeira igualdade de (1.15) temos $R^{t_1} = \mathsf{C}_1^{-1}R^{-1}\mathsf{C}_1$ donde $(\mathbf{t}^t)_1\mathsf{C}_1^{-1}R^{-1}\mathsf{C}_1\mathbf{t}_2 = \mathbf{t}_2\mathsf{C}_1^{-1}R^{-1}\mathsf{C}_1(\mathbf{t}^t)_1$. Multiplicando esta última igualdade por $\mathbf{t}_1\mathsf{C}_1$ pela esquerda e por $\mathsf{C}_1^{-1}\mathbf{t}_1$ pela direita temos

$$(\mathbf{t}\mathsf{C}\mathbf{t}^t\mathsf{C}^{-1})_1 R^{-1}\mathbf{t}_2\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_1\mathbf{t}_2 R^{-1}(\mathsf{C}\mathbf{t}^t\mathsf{C}^{-1}\mathbf{t})_1$$

mas de (1.14) temos que $R^{-1}\mathbf{t}_2\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_1\mathbf{t}_2 R^{-1}$. Comparando as duas últimas igualdades no sugere impor $\mathbf{t}\mathsf{C}\mathbf{t}^t\mathsf{C}^{-1} = I_N = \mathsf{C}\mathbf{t}^t\mathsf{C}^{-1}\mathbf{t}$. Por essa razão heurística iremos definir o ideal

$$I = \left\langle \mathbf{t}\mathsf{C}\mathbf{t}^t\mathsf{C}^{-1} - I_N,\ \mathsf{C}\mathbf{t}^t\mathsf{C}^{-1}\mathbf{t} - I_N \right\rangle.$$

Denotaremos a álgebra quociente por $\mathcal{O}(O_q(N)) = A(R)/I$ e pode-se mostrar [ver Klymik] que I é um ideal de bi-álgebra e $\mathcal{O}(O_q(N))$ tem uma antípoda dada por $S(t^i{}_j) = q^{\rho_j - \rho_i}t^{j'}{}_{i'}$. Denominaremos $\mathcal{O}(O_q(N))$ de álgebra de coordenadas do grupo quântico $O_q(N)$.

Exemplo 1.2.15 (Álgebra de coordenadas de $SO_q(3)$) *Para $N = 3$ no exemplo ante-*

rior temos

$$\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q^{-1/2} \\ 0 & 1 & 0 \\ q^{1/2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q-q^{-1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q^{-3/2}-q^{1/2} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (q-q^{-1})(1-q^{-1}) & 0 & q^{-3/2}-q^{1/2} & 0 & q^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q-q^{-1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}.$$

Definimos o determinante quântico por $\mathcal{D}_q = t^1{}_1t^2{}_2t^3{}_3 + (q+q^2)t^1{}_2t^2{}_3t^3{}_1 - (1+q)t^1{}_1t^2{}_3t^3{}_2 - q^2t^1{}_3t^2{}_2t^3{}_1$. *Novamente verifica-se que* $\Delta(\mathcal{D}_q) = \mathcal{D}_q \otimes \mathcal{D}_q$ *e* $\epsilon(\mathcal{D}_q) = 1$ *e neste caso se definirmos* $J = \langle \mathcal{D}_q - 1\rangle$ *pode-se mostrar que* J *é um ideal de Hopf de* $\mathcal{O}(O_q(3))$. *Segue que o quociente denotado por* $\mathcal{O}(SO_q(3)) = \mathcal{O}(O_q(3))/J$ *é uma álgebra de Hopf chamada de álgebra de coordenadas do grupo quântico* $SO_q(3)$.

Seja $p = -q^{1/2}$ *e defina um morfismo de álgebras de Hopf* $\pi : \mathcal{O}(O_q(3)) \to \mathcal{O}(SL_p(2))$ *por*

$$\left(\pi\left(t^i{}_j\right)\right)_{i,j=1}^3 = \begin{pmatrix} \left(u^1{}_1\right)^2 & (1+p^2)^{1/2}u^1{}_2u^1{}_1 & \left(u^1{}_2\right)^2 \\ (1+p^2)^{1/2}u^2{}_1u^1{}_1 & 1+(p+p^{-1})u^1{}_2u^2{}_1 & (1+p^2)^{1/2}u^2{}_2u^1{}_2 \\ \left(u^2{}_1\right)^2 & (1+p^2)^{1/2}u^2{}_2u^2{}_1 & \left(u^2{}_2\right)^2 \end{pmatrix}$$

onde denotamos os geradores de $\mathcal{O}(SL_p(2))$ *por* $u^i{}_j$. *Da relação do determinante quântico em* $\mathcal{O}(SL_p(2))$, *temos que a imagem de* π *é exatamente a sub-álgebra de* $\mathcal{O}(SL_p(2))$ *gerada pelos elementos de grau dois. Também pode-se verficar que* $J = \ker\pi$, *ou seja, podemos identificar* $\mathcal{O}(SO_q(3))$ *com a sub-álgebra de* $\mathcal{O}(SL_p(2))$ *que acabamos de mencionar. Para detalhes ver [27] e [38].*

1.2.3 Espaços quânticos para a bi-álgebra $A(R)$

Fixe os elementos necessários para a construção FRT, ie, um espaço vetorial de dimensão finita V e $R : V\otimes V \to V \otimes V$. Como na demonstração do teorema 1.2.8, fixe $\{e_i\}_{i=1}^n$ uma base de V e defina os coeficientes da matriz R por $R(e_i \otimes e_j) = R^{kl}_{ij}(e_l \otimes e_k)$. Como na sub-seção anterior, defina $\hat{R} = \tau \circ R$, ou em termos de coeficientes $\hat{R}^{ij}_{kl} = R^{ji}_{kl}$. Seja V' o dual de V e considere $\left\{x^i\right\}_{i=1}^n$ a base dual de $\{e_i\}_{i=1}^n$, ie, $x^i(v^je_j) = v^i$, onde continuamos a usar a notação de Einstein. Lembre que temos uma co-ação à direita $\Delta_R : V \to V \otimes A(R)$ dada por $\Delta_R(e_i) = e_j \otimes t^j{}_i$. Da mesma forma, podemos definir uma co-ação à esquerda no dual $\Delta_L : V' \to A(R) \otimes V'$ por $\Delta_L(x^i) = t^i{}_j \otimes x^j$.

A partir dos dados acima e de um conjunto finito de polinômios em uma variável $F = \{f_1, \ldots, f_r\}$, iremos construir espaços quânticos (ie co-módulo álgebras) à esquerda e à direita. Para o caso à direita considere o ideal

$$\mathcal{I}_R(F,R) = \left\langle f_a(\hat{R})^{ij}_{kl} e_i e_j \mid i,j,k,l = 1,\ldots,n; a = 1,\ldots,r \right\rangle$$

da álgebra tensorial $T(V)$ que conforme mencionamos no exemplo 1.1.11 pode ser identificada com $\mathbb{C}\{e_i\}$. Para o caso à esquerda defina o ideal

$$\mathcal{I}_L(F,R) = \left\langle f_a(\hat{R})^{ij}_{kl} x^k x^l \mid i,j,k,l = 1,\ldots,n; a = 1,\ldots,r \right\rangle$$

de $T(V') = \mathbb{C}\left\{x^i\right\}$. Definimos as álgebras $\mathcal{X}_L(F,R) = T(V')/\mathcal{I}_L(F,R)$ e $\mathcal{X}_R(F,R) = T(V)/\mathcal{I}_R(F,R)$.

Proposição 1.2.16 *Seja A uma bi-álgebra quociente arbitrária de $A(R)$ então as álgebras $\mathcal{X}_L(F,R)$ e $\mathcal{X}_R(F,R)$ podem ser feitas A-co-módulo à esquerda e à direita respectivamente.*

Demonstração. Façamos para $\mathcal{X}_L(F,R)$ sendo o outro caso análogo. Continue denotando por $t^i{}_j$ os geradores de A e defina um morfismo de álgebras $\tilde{\delta}_L : \mathbb{C}\left\{x^i\right\} \to A \otimes \mathbb{C}\left\{x^i\right\}$ por $\tilde{\delta}_L(x^i) = t^i{}_j \otimes x^j$ que é uma co-ação uma vez que Δ_L definida no início desta sub-seção também o é. Basta-nos mostrar que $\tilde{\delta}_L(\mathcal{I}_L(F,R)) \subseteq A \otimes \mathcal{I}_L(F,R)$. Note que de (1.14) temos que $g(\hat{R})^{ij}_{kl} t^k{}_m t^l{}_n = t^i{}_k t^j{}_l g(\hat{R})^{kl}_{mn}$ para g polinômio de uma variável arbitrário, por exemplo

$$(\tilde{R}^2)^{ij}_{kl} t^k{}_m t^l{}_n = \hat{R}^{ij}_{ab} \hat{R}^{ab}_{kl} t^k{}_m t^l{}_n = \hat{R}^{ij}_{ab} t^a{}_k t^b{}_l \hat{R}^{kl}_{mn} = t^i{}_a t^j{}_b \hat{R}^{ab}_{kl} \hat{R}^{kl}_{mn} = t^i{}_a t^j{}_b (\tilde{R}^2)^{ab}_{mn}.$$

Desta última afirmação temos para $f_a \in F$

$$\tilde{\delta}_L\left(f_a\left(\hat{R}\right)^{ij}_{kl} x^k x^l\right) = f_a\left(\hat{R}\right)^{ij}_{kl} t^k{}_m t^l{}_n \otimes x^m x^n = t^i{}_k t^j{}_l \otimes f_a\left(\hat{R}\right)^{kl}_{mn} x^m x^n$$

como desejávamos. ■

Proposição 1.2.17 *Se $\hat{R}$ é simétrica, ie, $\hat{R}^{ij}_{kl} = \hat{R}^{kl}_{ij}$, então $\mathcal{X}_L(F,R) \cong \mathcal{X}_R(F,R)$ como álgebras.*

Demonstração. Temos um único morfismo de álgebras $\tilde{\varphi} : \mathbb{C}\left\{x^i\right\} \to \mathbb{C}\{e_i\}$ tal que $\tilde{\varphi}(x^i) = e_i$. Note que

$$\tilde{\varphi}\left(f_a\left(\hat{R}\right)^{ij}_{kl} x^k x^l\right) = f_a\left(\hat{R}\right)^{ij}_{kl} e_k e_l = f_a\left(\hat{R}\right)^{kl}_{ij} e_k e_l$$

ou seja, $\tilde{\varphi}\left(\mathcal{I}_L(F,R)\right) \subseteq \mathcal{I}_R(F,R)$, donde está bem-definido o morfismo de álgebras $\varphi : \mathcal{X}_L(F,R) \to \mathcal{X}_R(F,R)$ por $\varphi(x^i) = e_i$. De maneira análoga construímos $\psi : \mathcal{X}_R(F,R) \to \mathcal{X}_L(F,R)$ por $\psi(e_i) = x^i$ e é claro que $\psi = \varphi^{-1}$. ■

No caso de $\hat{R}$ ser simétrica, denotaremos a álgebra da proposição simplesmente por $\mathcal{X}(F,R)$ e esta será tanto espaço quântico à direita como à esquerda.

Exemplo 1.2.18 *1. Sejam $R^{ij}_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$ e $f(z) = 1 - z$, então $\hat{R}^{ij}_{kl} = \delta_{il}\delta_{jk}$ e $f\left(\hat{R}\right)^{ij}_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}$. Segue que as relações de $\mathcal{X}(F,R)$ são dadas por*

$$f\left(\hat{R}\right)^{ij}_{kl} x^k x^l = (\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk})\, x^k x^l = x^i x^j - x^j x^i$$

ou seja $\mathcal{X}(F,R) = \mathbb{C}\left[x^i\right]$.

2. Sejam $R^{ij}_{kl} = \delta_{il}\delta_{jk}$ e $f(z) = 1 - z$, então $\hat{R}^{ij}_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$ e $f\left(\hat{R}\right)^{ij}_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{ik}\delta_{jl} = 0$, ou seja, não temos nenhuma relação em $\mathcal{X}(F,R)$ e portanto $\mathcal{X}(F,R) = \mathbb{C}\left\{x^i\right\}$.

Exemplo 1.2.19 *Considere a matriz $\hat{R}^{ij}_{kl} = R^{ji}_{kl} = q^{\delta_{ij}}\delta_{jk}\delta_{il} + (q - q^{-1})\delta_{jl}\delta_{ik}\mathsf{H}(j-i)$ dada no exemplo 1.2.12, que é claramente simétrica. Defina $f_c(z) = z - q$ e $f_e(z) = z + q^{-1}$, as álgebras $\mathcal{O}(\mathbb{C}^N_q) := \mathcal{X}(f_c, R)$ e $\Lambda(\mathbb{C}^N_q) := \mathcal{X}(f_e, R)$ são chamadas respectivamantes de álgebra de coordenadas e álgebra exterior do espaço vetorial quântico $\mathbb{C}^N_q$. É fácil ver que quando $q = 1$, as álgebras $\mathcal{O}(\mathbb{C}^N_1)$ e $\Lambda(\mathbb{C}^N_1)$ são a álgebra de coordenadas e a álgebra exterior usuais de $\mathbb{C}^N$.*

Façamos com detalhes o caso $N = 2$. Vamos aplicar os polinômios f_c e f_e na matriz $\hat{R}$ achada no exemplo 1.2.12:

$$f_c(\tilde{R}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q^{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f_e(\hat{R}) = \begin{pmatrix} q + q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 1 & 0 \\ 0 & 1 & q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q + q^{-1} \end{pmatrix}.$$

Para evitar confusão, vamos denotar os geradores de $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2_q)$ por x_1 e x_2, e os geradores de $\Lambda(\mathbb{C}^2_q)$ por y_1 e y_2. No caso da álgebra de coordenadas, temos que a unica relação que sobra é:

$$x_1 x_2 = q x_2 x_1$$

e essa álgebra é conhecida como álgebra de coordenadas do plano quântico. Para a álgebra exterior no caso $q^2 \neq -1$, temos que as relações são

$$(y_1)^2 = (y_2)^2 = 0 \qquad \text{e} \qquad y_1 y_2 = -q^{-1} y_2 y_1$$

ou apenas a segunda relação no caso $q^2 = -1$.

Exemplo 1.2.20 *Considere a matriz $R^{ij}_{kl} = \hat{R}^{ji}_{kl} = q^{\delta_{ij} - \delta_{ij'}}\delta_{ik}\delta_{jl} + (q - q^{-1})\mathsf{H}(i-k)(\delta_{jk}\delta_{il} - \mathsf{K}^{ji}_{kl})$ do exemplo 1.2.14 e note que $\hat{R}$ é simétrica. Defina os polinômios $f_c(z) = z^2 - (q +$*

$q^{1-N})z + q^{2-N}$ *e* $f_e(z) = z + q^{-1}$. *As álgebras* $\mathcal{O}(\mathbb{O}_q^N) := \mathcal{X}(f_c, R)$ *e* $\Lambda(\mathbb{O}_q^N) := \mathcal{X}(f_e, R)$ *são chamadas respectivamente de álgebra de coordenadas e álgebra exterior do espaço euclidiano quântico* $\mathbb{O}_q^N$.

Observação 1.2.21 *Pode-se mostrar [27] que sobre certas condições sobre* q*, a álgebra* $\Lambda(\mathbb{C}_q^N)$ *tem no máximos elementos de grau* N *e que os elementos que possuem exatamente grau* N *formam um espaço vetorial de dimensão* 1 *denotado por* $\Lambda(\mathbb{C}_q^N)_N$. *Mostra-se também que existe um único elemento* $\mathcal{D}_q \in \mathcal{O}(M_q(N))$ *chamado de determinante quântico de forma que* $\forall\zeta \in \Lambda(\mathbb{C}_q^N)_N$ *vale* $\Delta_L(\zeta) = \mathcal{D}_q \otimes \zeta$ *e* $\Delta_R(\zeta) = \zeta \otimes \mathcal{D}_q$. *Tal elemento pode ser construído de forma combinatória usando permutações e produtos de* ${t^i}_j$ *e ele é utilizado na definição das álgebras de Hopf* $\mathcal{O}(GL_q(N))$ *e* $\mathcal{O}(SL_q(N))$. *O mesmo é válido para* $\Lambda(\mathbb{O}_q^N)$*, sendo que o determinante quântico não é necessariamente igual e este é usado para definir a álgebra* $\mathcal{O}(SO_q(N))$.

Capítulo 2

Cálculo diferencial não-comutativo

Neste capítulo iremos generalizar o espaço das formas para um contexto mais algébrico, isto é, sem precisar falar em variedades. Seguiremos a exposição de [27] sendo que as segunda e terceira seções foram desenvolvidas primeiramente em [42]. Na primeira seção, daremos as definições básicas acerca de cálculos diferenciais sobre álgebras e espaços quânticos, assim como daremos exemplos a partir da construção FRT feita no capítulo anterior. Na segunda seção estudaremos bimódulos covariantes sobre álgebras de Hopf para ajudar o estudo de cálculos sobre álgebras de Hopf. Um dos resultados principais dessa seção é o teorema a respeito da estutura dos bimódulos covariantes. Por fim, na terceira seção, estudaremos os cálculos sobre álgebras de Hopf utilizando os resultados da seção anterior. Entre outras coisas, veremos que tais cálculos estão em correspondência biunívoca com ideiais a direita de $\ker \epsilon$.

2.1 Cálculo diferencial covariante sobre espaços quânticos

2.1.1 Cálculo diferencial sobre álgebras

Fixe $\mathbb{K}$ um corpo de característica zero.

Definição 2.1.1 *Seja A uma álgebra. Dizemos que o par (Γ, d) é um cálculo diferencial de primeira ordem (c.d.p.o.) sobre A se Γ é um A-bimódulo e $\mathrm{d} : A \to \Gamma$ é uma transformação linear satisfazendo:*

1. $\mathrm{d}(xy) = x \cdot \mathrm{d}y + \mathrm{d}x \cdot y \ \forall x, y \in A$ *(Regra de Leibniz),*
2. $\Gamma = \mathrm{span}\{x \cdot \mathrm{d}y \cdot z \mid x, y, z \in A\}$.

Diremos que dois c.d.p.o. Γ_1 e Γ_2 são isomorfos se existe uma aplicação linear bijetora $\psi : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ tal que $\psi(x \cdot \mathrm{d}_1 y \cdot z) = x \cdot \mathrm{d}_2 y \cdot z \ \forall x, y, z \in A$. Os elementos de Γ são chamados de 1-formas e a aplicação d é chamada de diferenciação.

Notação 2.1.2 *Em alguns casos, iremos omitir o ponto para denotar a multiplicação do bimódulo. Neste caso $\mathrm{d}xy$ sempre denotará $\mathrm{d}x \cdot y$ e não $\mathrm{d}(xy)$.*

Note que podemos reescrever a segunda condição da definição acima por $\Gamma = A \cdot \mathrm{d}A \cdot A := \operatorname{span}\{x \cdot \mathrm{d}y \cdot z \mid x, y, z \in A\}$. Além disso por 1 temos $x \cdot \mathrm{d}y \cdot z = x \cdot \mathrm{d}(yz) - xy \cdot \mathrm{d}z$ donde $\Gamma = A \cdot \mathrm{d}A := \operatorname{span}\{x \cdot \mathrm{d}y \mid x, y \in A\}$. Analogamente temos $\Gamma = \mathrm{d}A \cdot A := \operatorname{span}\{\mathrm{d}x \cdot y \mid x, y \in A\}$. Observe também que $\mathrm{d}1 = \mathrm{d}(1.1) = 1 \cdot \mathrm{d}1 + \mathrm{d}1 \cdot 1 = \mathrm{d}1 + \mathrm{d}1$, donde $\mathrm{d}1 = 0$.

Exemplo 2.1.3 *Seja M uma variedade compacta de dimensão finita e $A = C^\infty(M)$. Então o espaço das 1-formas $\Omega^1(M)$ com a aplicação $\mathrm{d} : A \to \Omega^1(M)$ dada pela derivação exterior é um c.d.p.o.. Neste caso temos que $x \cdot \mathrm{d}y = \mathrm{d}y \cdot x$.*

Note que a igualdade $x \cdot \mathrm{d}y = \mathrm{d}y \cdot x$ em geral não é válida mesmo quando a álgebra A é comutativa.

Exemplo 2.1.4 *Seja $A = \mathbb{K}[x]$ a álgebra polinomial de uma variável e seja Γ o A-módulo livre à direita gerado por um único elemento, o qual denotaremos por $\mathrm{d}x$. Fixe um polinômio $p \in \mathbb{K}[x]$ então existe uma única estrutura de bimódulo em Γ tal que a ação à esquerda é dada por $x \cdot \mathrm{d}x = \mathrm{d}x \cdot p$ estendido linearmente para A e depois para Γ. Denotemos por Γ_p este bimódulo e defina $\mathrm{d} : A \to \Gamma$ por*

$$\mathrm{d}\left(\sum_{n=1}^{k} a_n x^n\right) = \sum_{n=1}^{k} \left(\sum_{i+j=n-1} a_n x^i \cdot \mathrm{d}x \cdot x^j\right)$$

temos que $\mathrm{d}(x) = \mathrm{d}x$ donde segue a segunda condição da definição de c.d.p.o.. Utilizando essa expressão e fazendo os cálculo verifica-se que a regra de Leibniz também é válidada, donde (Γ_p, d) é um c.d.p.o..

Definição 2.1.5 *Um c.d.p.o. sobre uma $*$-álgebra A é um $*$-cálculo de primeira ordem se existe uma involução em Γ satisfazendo $(x \cdot \mathrm{d}y \cdot z)^* = z^* \cdot \mathrm{d}(y^*) \cdot x^*$ $\forall x, y, z \in A$.*

Proposição 2.1.6 *Um c.d.p.o. Γ sobre uma $*$-álgebra A é um $*$-cálculo de primeira ordem se e somente se $\sum x_i \mathrm{d}y_i = 0$ implica $\sum \mathrm{d}(y_i^*) x_i^* = 0$.*

Demonstração. A implicação direta é imediata. Para a recíproca, uma vez que $\Gamma = A \cdot \mathrm{d}A$, é suficiente definir a involução em elementos da forma $x \cdot \mathrm{d}y$, o que é feito por $(x \cdot \mathrm{d}y)^* = \mathrm{d}(y^*) x^*$. A hipótese da recíproca é exatamante àquela que precisamos para estender a involução linearmente imaginando o contra-domínio como $\overline{\Gamma}$. ■

No próximo exemplo iremos construir a primeira versão do cálculo diferencial de primeira ordem universal, do qual todo c.d.p.o. é um quociente. Logo em seguida veremos uma outra forma de ver este cálculo quando estivermos falando de cálculos de ordem qualquer. Enfim, quando trabalharmos com álgebra de Hopf, veremos uma terceira forma de vermos este cálculo, a qual no será mais apropriada para demonstrarmos os resultados. Esta última forma, no entanto, será específica para álgebras de Hopf.

Exemplo 2.1.7 *Seja A uma álgebra e considere $\Omega^1 A := \ker \mu = \{q \in A \otimes A \mid \mu(q) = 0\}$, então é claro que $\Omega^1 A$ é subespaço vetorial de $A \otimes A$. Dando a estrutra de bimódulo em $A \otimes A$ ao pensarmos A como A-bimódulo com a multiplicação μ, temos que $\Omega^1 A$ é um sub-bimódulo de $A \otimes A$. Defina uma aplicação linear $\mathrm{d}_U : A \to \Omega^1 A$ por $\mathrm{d}_U a = 1 \otimes a - a \otimes 1$. Afirmamos que $(\Omega^1 A, \mathrm{d}_U)$ é um c.d.p.o. sobre A, de fato $\forall a, b \in A$*

$$\mathrm{d}_U(ab) = 1 \otimes ab - ab \otimes 1 = 1 \otimes ab - a \otimes b + a \otimes b - ab \otimes 1 = \mathrm{d}_U a \cdot b + a \cdot \mathrm{d}_U b$$

e se $a \otimes b \in \Omega^1 A$ temos $ab = 0$, donde $a \otimes b = a \otimes b - ab \otimes 1 = a \cdot d_U b$.

Proposição 2.1.8 *Sejam N um sub-bimódulo de $\Omega^1 A$, $\Gamma = \Omega^1 A / N$, $\pi : \Omega^1 A \to \Gamma$ a projeção canônica e $\mathrm{d} = \pi \circ d_U$. Então (Γ, d) é um c.d.p.o. sobre A. Reciprocamente, qualquer c.d.p.o. sobre A pode ser obtido deste forma.*

Demonstração. A primeira parte da demonstração é trivial. Para a recíproca, tome (Γ, d) um c.d.p.o. sobre A e defina $\pi : \Omega^1 A \to \Gamma$ por $\pi \left(\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \mathrm{d}b_i$. Temos que π é um morfismo de A-bimódulos, de fato

$$\pi\left(c \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i\right) = \pi\left(\sum_{i=1}^n ca_i \otimes b_i\right) = \sum_{i=1}^n ca_i \cdot \mathrm{d}b_i = c \cdot \sum_{i=1}^n a_i \cdot \mathrm{d}b_i = c \cdot \pi\left(\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i\right),$$

$$\pi\left(\left(\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i\right) c\right) = \pi\left(\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i c\right) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \mathrm{d}(b_i c) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right) \cdot \mathrm{d}c + \sum_{i=1}^n a_i \cdot \mathrm{d}b_i \cdot c = \left(\sum_{i=1}^n a_i \cdot \mathrm{d}b_i\right) \cdot c = \pi\left(\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i\right) \cdot c.$$

Além disso, π é sobrejetiva pois dado $\sum_{i=1}^n a_i \cdot \mathrm{d}b_i \in \Gamma$ temos que $\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i - \sum_{i=1}^n a_i b_i \otimes 1 \in \Omega^1 A$ e $\pi\left(\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i - \sum_{i=1}^n a_i b_i \otimes 1\right) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \mathrm{d}b_i - \sum_{i=1}^n a_i b_i \cdot \mathrm{d}1 = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \mathrm{d}b_i$. Se $N = \ker \pi$ então pelo primeiro teorema do homomorfismo temos $\Gamma \cong \Omega^1 A / N$ e $\forall a \in A$ vale $\pi(d_U a) = \pi(1 \otimes a - a \otimes 1) = 1 \cdot \mathrm{d}a - a \cdot \mathrm{d}1 = \mathrm{d}a$. ∎

Definição 2.1.9 *Dizemos que $(\Gamma^\wedge, \mathrm{d})$ é um cálculo diferencial (c.d.) sobre A se $\Gamma^\wedge = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \Gamma^{\wedge n}$ é uma álgebra graduada com multiplicação denotada por $\wedge$ e $\mathrm{d} : \Gamma^\wedge \to \Gamma^\wedge$ é uma aplicação de grau 1 (ie, $\mathrm{d}(\Gamma^{\wedge n}) \subseteq \Gamma^{\wedge(n+1)}$) tais que:*

1. $\mathrm{d}^2 = 0$,

2. $\mathrm{d}(\rho \wedge \eta) = \mathrm{d}\rho \wedge \eta + (-1)^n \rho \wedge \mathrm{d}\eta \ \forall \rho \in \Gamma^{\wedge n} \ \forall \eta \in \Gamma^\wedge$ *(Regra de Leibniz graduada),*

3. $\Gamma^{\wedge 0} = A$ *e* $\Gamma^{\wedge n} = \mathrm{span}\{x_0 \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n \mid x_0, \ldots, x_n \in A\}$ *para* $n \geq 1$.

Se tirarmos a condição 3 temos a definição de álgebra graduada diferencial.

Na condição 3 acima, ao dizermos que $\Gamma^{\wedge 0} = A$, subentende-se que o produto $\wedge$ em $\Gamma^{\wedge 0}$ é o produto da álgebra. Note que por indução podemos mostrar que a condição 3 pode ser substituída por

3' $\Gamma^{\wedge 0} = A$ e $\Gamma^{\wedge n} = A \wedge \mathrm{d}\Gamma^{\wedge (n-1)}$ para $n \geq 1$.

Definição 2.1.10 *Um ideal diferencial de um c.d.* $\Gamma^{\wedge}$*sobre* A *é um ideal bilateral* $\mathcal{I}$ *de* $\Gamma^{\wedge}$ *tal que*

1. $\mathcal{I} \cap \Gamma^{\wedge 0} = \{0\}$,

2. $\mathrm{d}\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}$,

3. $\mathcal{I}$ *é gerado por elementos homogêneos.*

Seja $\mathcal{I}$ um ideal diferencial de um c.d. $\Gamma^{\wedge}$ e seja $\widetilde{\Gamma}^{\wedge} := \Gamma^{\wedge}/\mathcal{I}$ então $\widetilde{\Gamma}^{\wedge}$ continua sendo uma álgebra graduada pelo lema 1.1.10. A condição 2 de 2.1.10 nos garante que podemos restringir d para uma aplicação linear $\widetilde{\mathrm{d}}$ em $\widetilde{\Gamma}^{\wedge}$ por $\widetilde{\mathrm{d}}(\pi(\rho)) = \pi(\mathrm{d}\rho)$ $\forall \rho \in \Gamma^{\wedge}$, onde π é a projeção no quociente. A condição 1 de 2.1.10 implica que $\widetilde{\Gamma}^{\wedge 0} = A$. É claro que $\widetilde{\mathrm{d}}^2 = 0$ e que $\widetilde{\mathrm{d}}$ satisfaz a regra de Leibniz graduada. Finalmente do lema 1.1.10, temos que $\widetilde{\Gamma}^{\wedge n} \cong \Gamma^{\wedge n}/(\mathcal{I} \cap \Gamma^{\wedge n})$ donde segue que $(\widetilde{\Gamma}^{\wedge}, \widetilde{\mathrm{d}})$ é um c.d., chamado de quociente de $\Gamma^{\wedge}$ pelo ideal diferencial $\mathcal{I}$.

Proposição 2.1.11 *Seja* $(\Gamma^{\wedge}, \mathrm{d})$ *um c.d. sobre* A*, então são válidas as seguintes relações para* $x_i \in A$*:*

1. $\mathrm{d}(x_0 \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n) = \mathrm{d}x_0 \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$

2. $(x_0 \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n) \wedge (x_{n+1} \wedge \mathrm{d}x_{n+2} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{n+k}) =$
$= (-1)^n x_0 x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{n+k} + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} x_0 \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}(x_i x_{i+1}) \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{n+k}$

Demonstração. 1. É fácil ver por indução que as condições 1 e 2 de 2.1.9 implicam que $\mathrm{d}(\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n) = 0$, donde pela regra de Leibniz graduada temos

$$\mathrm{d}(x_0 \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n) = \mathrm{d}x_0 \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n + x_0 \wedge \mathrm{d}(\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n) =$$

$$= \mathrm{d}x_0 \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

2. Basta notar que ao utilizarmos a regra de Leibniz em $\mathrm{d}(x_i x_{i+1})$ no somatório do lado direito da igualdade, teremos uma soma telescópica e o único termo que sobra é exatamente o lado esquerdo da igualdade. ■

Definição 2.1.12 *Um c.d.* $(\Gamma^{\wedge}, \mathrm{d})$ *sobre uma* $*$*-álgebra* A *munido de uma involução é um* $*$*-cálculo se a involução de* A *coincide com a involução de* $\Gamma^{\wedge}$ *em* $\Gamma^{\wedge 0}$ *e satisfaz:*

1. $(\rho_n \wedge \rho_k)^* = (-1)^{nk} \rho_k^* \wedge \rho_n^*$ $\forall \rho_n \in \Gamma^{\wedge n}$ $\forall \rho_k \in \Gamma^{\wedge k}$,

2. $\mathrm{d}(\rho^*) = (\mathrm{d}\rho)^*$ $\forall \rho \in \Gamma^{\wedge}$.

Observe que pelas condições 1 e 2 acima temos que a involução em $\Gamma^{\wedge}$ está unicamente determinada pela involução em $\Gamma^{\wedge 0} = A$.

Definição 2.1.13 *Dizemos que* $(\Gamma^\wedge, \mathrm{d})$ *um c.d. sobre* A *é um c.d. universal se todo outro c.d.* $(\widetilde{\Gamma}^\wedge, \widetilde{\mathrm{d}})$ *é um quociente de* $\Gamma^\wedge$ *por algum ideal diferencial* $\mathcal{I}$ *de* $\Gamma^\wedge$.

Nosso objetivo agora é construir um c.d. universal que chamaremos de $\widehat{\Omega}A$ e que claramante é único a menos de isomorfismo. A idéia é criar uma álgebra gerada por elementos $x \in A$ e símbolos $\mathrm{d}x$ para $x \in A$ sujeitos à regra de Leibniz $\mathrm{d}x \cdot y = \mathrm{d}(xy) - x \cdot \mathrm{d}y$ e em particular $\mathrm{d}1 = 0$.

Seja $\widetilde{A} := A/\mathbb{C}.1$ e denote por $\overline{x}$ os elementos de $\widetilde{A}$, isto é, $\overline{x} = x + \mathbb{C}.1$ para $x \in A$. Defina $\widehat{\Omega}A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}}^n \widehat{\Omega}^n A$ onde $\widehat{\Omega}^0 A = A$ e $\widehat{\Omega}^n A = A \otimes \widetilde{A}^{\otimes n}$ para $n \geq 1$. Não é difícil mostrar, porém é trabalhoso, que as fórmulas 1 e 2 da proposição 2.1.11 definem uma diferenciação e um produto respectivamente ao pensarmos $x_0 \otimes \overline{x_1} \otimes \cdots \otimes \overline{x_n}$ como $x_0 \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$, de forma que $(\widehat{\Omega}A, \mathrm{d})$ é um c.d. sobre A. Note que 2 de 2.1.11 nos dá a regra de Leibniz para $x, y \in A$. Segue também que $\widehat{\Omega}A$ é um $*$-cálculo se A é uma $*$-álgebra.

Proposição 2.1.14 *Todo c.d.* $(\Gamma^\wedge, \widetilde{\mathrm{d}})$ *sobre* A *é isomorfo a um quociente de* $\widehat{\Omega}A$ *por um ideal diferenciável.*

Demonstração. Defina uma transformação linear $\psi : \widehat{\Omega}A \to \Gamma^\wedge$ por $\psi(x) = x$ para $x \in A$ e $\psi(x_0 \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n) = x_0 \wedge \widetilde{\mathrm{d}}x_1 \wedge \ldots \wedge \widetilde{\mathrm{d}}x_n$ para $n \geq 1$ e $x_0, x_1, \ldots, x_n \in A$. Que ψ é linear e está bem definida vem do fato que $\widetilde{\psi} : A \times \widetilde{A}^{\times n} \to \Gamma^\wedge$ dada por $\widetilde{\psi}(x_0, x_1, \ldots, x_n) = x_0 \wedge \widetilde{\mathrm{d}}x_1 \wedge \ldots \wedge \widetilde{\mathrm{d}}x_n$ é multilinear. Afirmamos que $\ker \psi$ é um ideal diferencial de $\widehat{\Omega}A$. De fato, como $\widehat{\Omega}A$ e $\Gamma^\wedge$ satisfazem 2 de 2.1.11 temos que para ρ e ζ monômios $\psi(\rho \wedge \zeta) = \psi(\rho) \wedge \psi(\zeta)$ e portanto vale para todos os elementos de $\widehat{\Omega}A$, donde segue que $\ker \psi$ é ideal bilateral de $\widehat{\Omega}A$. É óbvio que $\ker \psi \cap \widehat{\Omega}^0 A = \{0\}$. De 1 de 2.1.11 temos que para ρ monômio vale $\psi(\mathrm{d}\rho) = \widetilde{\mathrm{d}}\psi(\rho)$ e pela linearidade de d, $\widetilde{\mathrm{d}}$ e ψ, esta igualdade vale em todo $\widehat{\Omega}A$, donde $\mathrm{d}(\ker \psi) \subseteq \ker \psi$. Segue do fato das álgebras $\widehat{\Omega}A$ e $\Gamma^\wedge$ serem graduadas e da condição 3 de 2.1.9 que $\ker \psi$ é gerado por elementos homogêneos, donde concluímos que $\ker \psi$ é um ideal diferencial de $\widehat{\Omega}A$.

Pela condição 3 de 2.1.9, ψ é sobrejetora e portanto temos $\widehat{\Omega}A/\ker \psi \cong \Gamma^\wedge$ como álgebras, mas da definição de ψ e da definição de diferenciação no quociente, temos que de fato $\Gamma^\wedge$ é um quociente de $\widehat{\Omega}A$ como cálculos. ■

Conforme já comentado a diferenciação d em $\widehat{\Omega}A$ satisfaz $\mathrm{d}(xy) = x \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}x \wedge y$ para $x, y \in A$, donde podemos ver $\widehat{\Omega}^1 A$ como um c.d.p.o. e segue de uma demonstração análoga a esta proposição que todo c.d.p.o. Γ sobre a álgebra A é isomorfa a um quociente de $\widehat{\Omega}^1 A$. Em particular temos que $(\widehat{\Omega}^1 A, \mathrm{d})$ é isomorfo a $(\Omega^1 A, d_U)$. Também podemos construir o c.d. universal a partir de $\Omega^1 A$ definindo $\Omega^n A = \Omega^1 A \otimes_A \cdots \otimes_A \Omega^1 A$ (n vezes) e $\Omega A = \bigoplus_{n=1}^\infty \Omega^n A$ com multiplicação dada por $\otimes_A$ e derivação definida num elemento $\sum_i a_i \otimes b_i \in \Omega^1 A$ por $\sum_i (1 \otimes a_i - a_i \otimes 1) \otimes_A (1 \otimes b_i - b_i \otimes 1)$ e estendida pela regra de Leibniz para ΩA (ver [15], [29] e suas referências). O isomorfismo de $\widehat{\Omega}A$ com ΩA será caracterizado fazendo corresponder $a_0 \otimes_A \mathrm{d}_U a_1 \otimes_A \cdots \otimes_A \mathrm{d}_U a_n$ com $a_0 \otimes \overline{a_1} \otimes \cdots \otimes \overline{a_n}$.

2.1.2 Cálculo sobre espaços quânticos

Sejam H uma álgebra de Hopf e A um H-espaço quântico à esquerda com co-ação denotada por $\varphi : A \to H \otimes A$. Neste caso estaremos interessados em cálculos com um pouco mais de estrutura e de forma que sejam compatíveis com a co-ação de H em A. Faremos um abuso de linguagem e diremos simplesmente espaço quântico no lugar de H-espaço quântico à esquerda. Quando estivermos trabalhando com ambas as lateralidades, usaremos a definção completa.

Definição 2.1.15 *Considere um c.d.p.o.* (Γ, d) *sobre um espaço quântico* A *e suponha que* (Γ, Δ_L) *seja um* H*-co-módulo. Dizemos que o cálculo* Γ *é covariante à esquerda com respeito a* H *se:*

1. $\Delta_L(x\rho y) = \varphi(x)\Delta_L(\rho)\varphi(y)\ \forall x, y \in A\ \forall \rho \in \Gamma,$
2. $\Delta_L(\mathrm{d}x) = (id \otimes \mathrm{d})\varphi(x)\ \forall x \in A.$

Observe que no item 1 estamos vendo $H \otimes \Gamma$ como $H \otimes A$-módulo de maneira evidente. De certa forma, essas condições dizem que a co-ação $\Delta_L : \Gamma \to H \otimes \Gamma$ de H em Γ é compatível com a co-ação φ de H em A e com a diferenciação. Lembrando que $\Gamma = A \cdot \mathrm{d}A$, vemos que as condições 1 e 2 acima implicam que Δ_L está unicamente determinado a partir de φ e d.

Proposição 2.1.16 *Seja* (Γ, d) *um c.d.p.o. sobre um espaço quântico* A*. São equivalentes:*

1. *Existe uma co-ação* $\Delta_L : \Gamma \to H \otimes \Gamma$ *tal que* Γ *é um c.d.p.o. covariante à esquerda,*
2. *Existe uma transformação linear* $\Delta_L : \Gamma \to H \otimes \Gamma$ *tal que* $\Delta_L(x\mathrm{d}y) = \varphi(x)(id \otimes \mathrm{d})\varphi(y)$ $\forall x, y \in A,$
3. $\sum x_i \mathrm{d}y_i = 0$ *em* Γ *implica que* $\sum \varphi(x_i)(id \otimes \mathrm{d})\varphi(y_i) = 0$ *em* $H \otimes \Gamma$.

Demonstração. $(1 \Rightarrow 2)$ Imediato da definição de covariância à esquerda.

$(2 \Rightarrow 3)$ Óbvio.

$(3 \Rightarrow 1)$ O item 3 é a condição necessária e suficiente para que possamos bem definir uma aplicação linear $\Delta_L : \Gamma \to H \otimes \Gamma$ por $\Delta_L(x\mathrm{d}y) = \varphi(x)(id \otimes \mathrm{d})\varphi(y)$ para $x, y \in A$. Precisamos mostrar que Δ_L é uma co-ação e satisfaz os itens 1 e 2 da definição 2.1.15. Que satisfaz 2 é imediato. Para ver que Δ_L é co-ação é suficiente mostrar nos geradores. Sejam $x, y \in A$, então

$$(\Delta \otimes id)\Delta_L(x\mathrm{d}y) = (\Delta \otimes id)(\varphi(x).(id \otimes \mathrm{d})\varphi(y)) =$$

$$= (\Delta \otimes id)(\varphi(x)).(\Delta \otimes id)(id \otimes \mathrm{d})\varphi(y)) = (id \otimes \varphi)(\varphi(x)).(id \otimes id \otimes \mathrm{d})(id \otimes \varphi)(\varphi(y)) =$$

$$= (id \otimes \Delta_L)(\varphi(x).(id \otimes \mathrm{d})\varphi(y))(id \otimes \Delta_L)\Delta_L(x\mathrm{d}y),$$

sendo que na terceira igualdade usamos que $(\Delta \otimes id)(id \otimes \mathrm{d}) = (id \otimes id \otimes \mathrm{d})(\Delta \otimes id)$, também

$$(\epsilon \otimes id)\Delta_L(x\mathrm{d}y) = (\epsilon \otimes id)\varphi(x).(\epsilon \otimes id)(id \otimes \mathrm{d})\varphi(y) = x\mathrm{d}(\epsilon \otimes id)\varphi(y) = x\mathrm{d}y.$$

Para mostrarmos 1 utilizaremos a regra de Leibniz e o fato de φ ser morfismo de álgebras. Tome $\rho = \sum x_i \mathrm{d}y_i \in \Gamma$ arbitrário

$$\Delta_L(x\rho y) = \Delta_L\left(x\left(\sum x_i \mathrm{d}y_i\right)y\right) = \Delta_L\left(\sum x x_i \mathrm{d}y_i \cdot y\right) =$$

$$= \Delta_L\left(\sum x x_i \mathrm{d}(y_i y)\right) - \Delta_L\left(\sum x x_i y_i \mathrm{d}y\right) =$$

$$= \sum \varphi(x)\varphi(x_i)(id \otimes \mathrm{d})(\varphi(y_i)\varphi(y)) - \sum \varphi(x)\varphi(x_i)\varphi(y_i)(id \otimes \mathrm{d})\varphi(y) =$$

$$= \sum \varphi(x)\varphi(x_i)(id \otimes \mathrm{d})\varphi(y_i)\varphi(y) + \sum \varphi(x)\varphi(x_i)\varphi(y_i)(id \otimes \mathrm{d})\varphi(y) -$$

$$- \sum \varphi(x)\varphi(x_i)\varphi(y_i)(id \otimes \mathrm{d})\varphi(y) =$$

$$= \varphi(x)\left(\sum \varphi(x_i)(id \otimes \mathrm{d})\varphi(y_i)\right)\varphi(y) = \varphi(x)\Delta_L(\rho)\varphi(y)$$

como desejado. ■

Podemos falar também em covariância à esquerda para cálculos de ordem superior.

Definição 2.1.17 *Seja $\Gamma^\wedge$ um c.d. sobre um espaço quântico A. Dizemos que $\Gamma^\wedge$ é covariante à esquerda com respeito a H se existe uma aplicação $\Phi : \Gamma^\wedge \to H \otimes \Gamma^\wedge$ tal que $(\Gamma^\wedge, \Phi)$ é um H-co-módulo álgebra e satisfazendo:*

1. *$\Phi(x) = \varphi(x)\ \forall x \in A$;*
2. *$\Phi(\mathrm{d}\rho) = (id \otimes \mathrm{d})\Phi(\rho)\ \forall \rho \in \Gamma^\wedge$.*

Análogo ao caso de c.d.p.o. temos a seguinte proposição.

Proposição 2.1.18 *Seja $\Gamma^\wedge$ um c.d. sobre um espaço quântico A. São equivalentes:*

1. *$\Gamma^\wedge$ é covariante à esquerda;*
2. *Existe um transformação linear $\Phi : \Gamma^\wedge \to H \otimes \Gamma^\wedge$ tal que a restrição de Φ a A é igual a φ e $\forall x_0, \ldots, x_n \in A$ temos $\Phi(x_0 \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n) = \varphi(x_0)(id \otimes \mathrm{d})\varphi(x_1) \ldots (id \otimes \mathrm{d})\varphi(x_n)$.*
3. *$\sum_i x_0^i \mathrm{d}x_1^i \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n^i = 0$ em $\Gamma^\wedge$ implica que $\sum_i \varphi(x_0^i)(id \otimes \mathrm{d})\varphi(x_1^i) \ldots (id \otimes \mathrm{d})\varphi(x_n^i) = 0$ em $H \otimes \Gamma^\wedge$.*

Demonstração. Análogo à proposição 2.1.16 usando o fato de Δ e ϵ serem morfismos de álgebras e as fórmulas 1. e 2. de 2.1.11 para podermos sempre reduzir ao caso de monômios. ■

Segue imediato desta proposição que se $\Gamma^\wedge$ é uma c.d. covariante à esquerda então $\Gamma^{\wedge 1}$ é um c.d.p.o. covariante à esquerda.

Corolário 2.1.19 *O c.d. universal ΩA e o c.d.p.o. universal $\Omega^1 A$ são covariantes à esquerda.*

Demonstração. É suficiente mostrar 3. da proposição anterior. Uma vez que $\forall \overline{x} \in \overline{X} = X/\mathbb{C}.1$ temos $(id \otimes \mathrm{d})\varphi(\overline{x}) = (id \otimes \mathrm{d})\varphi(x)$. Se $0 = \sum_i x_0^i \mathrm{d}x_1^i \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}_n^i = \sum_i x_0^i \otimes \overline{x_1^i} \otimes \cdots \otimes \overline{x_n^i}$ então

$$\sum_i \varphi(x_0^i)(id \otimes \mathrm{d})\varphi(x_1^i) \ldots (id \otimes \mathrm{d})\varphi(x_n^i) = \sum_i \varphi(x_0^i)(id \otimes \mathrm{d})\varphi(\overline{x_1^i}) \ldots (id \otimes \mathrm{d})\varphi(\overline{x_n^i}) =$$

$$= \mu^n \circ (id \otimes (id \otimes \mathrm{d})^{\otimes n}) \circ \varphi^{\otimes(n+1)} \left(\sum_i x_0^i \otimes \overline{x_1^i} \otimes \cdots \otimes \overline{x_n^i} \right) = 0$$

onde μ^n é fazer a multiplicação de todos os termos. ■

Observação 2.1.20 *Note que a condição* 3 *da proposição 2.1.16 é equivalente a dizer que o A-sub-bimódulo N do cálculo universal $\Omega^1 A$ tal que $\Gamma \cong \Omega^1 A/N$ satisfaz $\Delta_L(N) \subseteq H \otimes N$. De fato basta usar a covariância à esquerda de $\Omega^1 A$ e o lema A.2.8 em $id \otimes \pi$ com $\pi : \Omega^1 A \to \Gamma$ a projeção.*

Assim como podemos falar de covariância à esquerda, podemos falar de covariância à direita.

Definição 2.1.21 *Considere um c.d.p.o.* (Γ, d) *sobre um espaço quântico A e suponha que (Γ, Δ_R) seja um H-co-módulo à direita. Dizemos que o cálculo Γ é covariante à direita com respeito a H se:*

1. $\Delta_R(x\rho y) = \varphi(x)\Delta_R(\rho)\varphi(y)\ \forall x, y \in A\ \forall \rho \in \Gamma,$
2. $\Delta_R(\mathrm{d}x) = (\mathrm{d} \otimes id)\varphi(x)\ \forall x \in A.$

Os resultados mostrados para cálculos covariantes à esquerda, valem para covariantes à direita fazendo as devidas modificações.

2.1.3 Construção de alguns cálculos covariantes sobre espaços quânticos

Vamos fazer uma construção geral de cálculos sobre espaços quânticos para depois especializarmos para o caso de espaços quânticos sobre a bi-álgebra $A(R)$ construídos no capítulo 1. Fixemos H uma álgebra de Hopf e suponha que A é um H-espaço quântico à direita com co-ação denotada por $\varphi : A \to A \otimes H$ de tal forma que existe um conjunto finito de geradores linearmente independentes $\{x_i\}_{i \in I}$.

Denotaremos por $A_0 := \mathrm{span}\,\{x_i : i \in I\}$ o subespaço vetorial de A com base $\{x_i\}$, $B := \mathbb{K}\{x_i\}$ a álgebra livre gerada pelos x_i, $\pi : B \to A$ a projeção canônica e $\mathcal{I} = \ker \pi$. Defina também o conjunto $dA_0 := \mathrm{span}\{\widetilde{\mathrm{d}}x_i : i \in I\}$ o espaço vetorial gerado livremente pelos símbolos $\widetilde{\mathrm{d}}x_i$ junto com uma aplicação linear $\widetilde{\mathrm{d}} : A_0 \to \mathrm{d}A_0$ dada por $\widetilde{\mathrm{d}}(x_i) = \widetilde{\mathrm{d}}x_i$.

Seja $\{x_{ij}^k\}_{i,j,k}$ um conjunto de elementos de A e escolha elementos $y_{ij}^k \in B$ tal que $\pi(y_{ij}^k) = x_{ij}^k$. Seja M o B-módulo à esquerda $B \otimes \mathrm{d}A_0$ com produto por B evidente e por simplicidade escreveremos um elemento $y \otimes \mathrm{d}x_i$ de $B \otimes \mathrm{d}A_0$ por $y\mathrm{d}x_i$. Daremos uma estrutura de B-bimódulo em M definindo um produto à direita por $y\widetilde{\mathrm{d}}x_i \cdot x_j = yy^k_{ij}\widetilde{\mathrm{d}}x_k$ (onde estamos utilizando a notação de Einstein como na seção 1.2) e utilizando a propriedade universal da álgebra livre para definir um morfismo de álgebras de B na álgebra $\mathrm{Lin}(M, M)$, cujo produto é dado por composição.

Defina $\tilde{\Gamma} := B \otimes \mathrm{d}A_0 \otimes B$ que é um B-bimódulo com as multiplicações naturais e como no caso anterior denotaremos um elemento $y \otimes \mathrm{d}x_i \otimes z$ por $y\mathrm{d}x_i z$. Note que podemos ver M como um subespaço vetorial de $\tilde{\Gamma}$ identificando M com $M \otimes 1$, no entanto M não é um B-sub-bimódulo de $\tilde{\Gamma}$. Defina a aplicação linear $\widetilde{\mathrm{d}} : B \to \tilde{\Gamma}$ por $\widetilde{\mathrm{d}}(1) = 0$, $\widetilde{\mathrm{d}}(x_i) = \mathrm{d}x_i$ e

$$\widetilde{\mathrm{d}}(x_{i_1} \cdots x_{i_n}) = \sum_{j=1}^{n} x_{i_1} \cdots x_{i_{j-1}} \widetilde{\mathrm{d}}x_{i_j} x_{i_{j+1}} \cdots x_{i_n}$$

para $i, i_1, \ldots, i_n \in I$.

Finalmente, defina a aplicação linear $T : A_0 \otimes A_0 \to A \otimes A_0$ por $T(x_i \otimes x_j) = x^k_{ij} \otimes x_k$ e o conjunto $N_0 := \mathcal{I}.\mathrm{d}A_0 \subseteq M$, que também podemos ver como subconjunto de $\tilde{\Gamma}$.

Proposição 2.1.22 *No contexto acima, suponha que $\varphi(A_0) \subseteq A_0 \otimes H$, ou seja, A_0 é H-co-módulo com co-ação $\varphi_0 = \varphi|_{A_0}$; que T seja um morfismo de H-co-módulos; e que exista um conjunto $\mathcal{I}_0$ de geradores do ideal bilateral $\mathcal{I}$ de forma que para $z_0 \in \mathcal{I}_0$ e $i \in I$ arbitrários temos*

$$\widetilde{\mathrm{d}}x_i \cdot z_0 \in N_0 \qquad \text{e} \qquad \widetilde{\mathrm{d}}z_0 \in N_0. \tag{2.1}$$

Então existe um único c.d.p.o. covariante à direita Γ sobre A tal que $\{\mathrm{d}x_i\}_{i\in I}$ é uma base de A-módulo livre à esquerda Γ e a estrutura de A-bimódulo de Γ é dada pelas relações:

$$\mathrm{d}x_i \cdot x_j = x^k_{ij}\mathrm{d}x_k,\ i, j \in I. \tag{2.2}$$

Demonstração. Note que a definição de $\widetilde{\mathrm{d}} : B \to \tilde{\Gamma}$ é feita de tal forma que $\widetilde{\mathrm{d}}$ satisfaz a regra de Leibniz, ou seja, temos que $(\tilde{\Gamma}, \widetilde{\mathrm{d}})$ é um c.d.p.o. sobre B. Vamos definir co-ações em B e $\tilde{\Gamma}$ de forma que $(\tilde{\Gamma}, \widetilde{\mathrm{d}})$ seja um c.d.p.o. covariante à direita. Defina $\psi_0 : B \to B \otimes H$ estendendo a aplicação φ_0 do enunciando utilizando a propriedade universal das álgebras livres. Pelo fato de o co-produto e a co-unidade serem morfismos de álgebras, temos que ψ_0 continua sendo uma co-ação. Agora, defina a aplicação linear $\psi_1 : \mathrm{d}A_0 \to \mathrm{d}A_0 \otimes H$ por $\psi_1(\widetilde{\mathrm{d}}x_i) = (\widetilde{\mathrm{d}} \otimes id)\varphi_0(x_i)$ e vejamos que ψ_1 é também uma co-ação. Temos

$$(id \otimes \epsilon)\psi_1(\widetilde{\mathrm{d}}x_i) = (id \otimes \epsilon)(\widetilde{\mathrm{d}} \otimes id)\varphi_0(x_i) = \widetilde{\mathrm{d}}(id \otimes \epsilon)\varphi_0(x_i) = \widetilde{\mathrm{d}}x_i;$$

$$(id \otimes \Delta)\psi_1(\widetilde{\mathrm{d}}x_i) = (id \otimes \Delta)(\widetilde{\mathrm{d}} \otimes id)\varphi_0(x_i) = (\widetilde{\mathrm{d}} \otimes id \otimes id)(id \otimes \Delta)\varphi_0(x_i) =$$

$$= (\widetilde{\mathrm{d}} \otimes id \otimes id)(\varphi_0 \otimes id)\varphi_0(x_i) = (\psi_1 \otimes id)(\widetilde{\mathrm{d}} \otimes id)\varphi_0(x_i) = (\psi_1 \otimes id)\psi_1(\widetilde{\mathrm{d}}x_i).$$

Como $\tilde{\Gamma}$ é o produto tensorial de co-módulos, $\tilde{\Gamma}$ também o é com co-ação denotada por ψ e note que o podemos escrever o co-produto definido da forma $\psi(ydx_iz) = \psi_0(y)(\widetilde{\mathrm{d}} \otimes$

$id)\psi_0(x_i)\psi_0(z)$ donde segue claro que $(\tilde{\Gamma}, \widetilde{\mathrm{d}})$ é um c.d.p.o. covariante à direita sobre B.

Levando em consideração os elementos $y_{ij}^k \in B$ achados acima, defina aplicações lineares ρ_j^k para $j, k \in I$ da seguinte forma

$$\rho_j^k(x_{i_1} \cdots x_{i_n}) = y_{ji_1}^{m_1} y_{m_1 i_2}^{m_2} \cdots y_{m_{n-2} i_{n-1}}^{m_{n-1}} y_{m_{n-1} i_n}^k$$

e $\rho_j^k(1) = \delta_{jk}1$. Note que desta forma $\rho_i^j(yz) = \rho_i^k(y)\rho_k^j(z)$. Defina $N_1 = \mathrm{span}\{z\widetilde{\mathrm{d}}x_i y - z\rho_i^k(y)\widetilde{\mathrm{d}}x_k : y, z \in B, i \in I\} \subseteq \tilde{\Gamma}$ e vejamos que N_1 é um B-sub-bimódulo de $\tilde{\Gamma}$. É claro que $BN_1 \subseteq N_1$. Mostremos que $N_1 B \subseteq N_1$, multiplicando um gerador de N_1 por $w \in B$ à direita temos

$$z\widetilde{\mathrm{d}}x_i yw - z\rho_i^k(y)\widetilde{\mathrm{d}}x_k w = z\widetilde{\mathrm{d}}x_i yw - z\rho_i^k(yw)\widetilde{\mathrm{d}}x_k + z\rho_i^k(yw)\widetilde{\mathrm{d}}x_k - z\rho_i^k(y)\widetilde{\mathrm{d}}x_k w =$$

$$= z\widetilde{\mathrm{d}}x_i yw - z\rho_i^k(yw)\widetilde{\mathrm{d}}x_k - \left(z\rho_i^k(y)\widetilde{\mathrm{d}}x_k w - z\rho_i^k(y)\rho_k^j(w)\widetilde{\mathrm{d}}x_j\right) \in N_1$$

Segue que podemos bem definir o B-bimódulo quociente $\Gamma_1 := \tilde{\Gamma}/N_1$ e uma aplicação linear $\overline{\mathrm{d}} : B \to \Gamma_1$ compondo $\widetilde{\mathrm{d}}$ com a projeção $\pi_1 : \tilde{\Gamma} \to \Gamma_1$ de forma que $(\Gamma_1, \overline{\mathrm{d}})$ é um c.d.p.o.. Note que Γ_1 assim construído pode ser identificado com o B-bimódulo M da discussão acima.

Observe que pensando N_0 como subconjundo de $\tilde{\Gamma}$, temos que $N_0 \cap N_1 = \{0\}$ pois para um elemento de N_1 está em N_0 devemos ter $y = 1$, mas nesse caso $z\widetilde{\mathrm{d}}x_i - z\rho_i^k(1)\widetilde{\mathrm{d}}x_k = z\widetilde{\mathrm{d}}x_i - z\widetilde{\mathrm{d}}x_i = 0$. Claramente N_0 é um B-sub-bimódulo de M, de forma que podemos pensar em $\pi_1(N_0) = N_0$ como B-sub-bimódulo de Γ_1. Temos por construção que $\mathcal{I}\Gamma_1 \subseteq N_0$ e da primeira condição de (2.1) temos $\Gamma_1\mathcal{I} \subseteq N_0$, ou seja, $\Gamma := \Gamma_1/N_0$ é um bimódulo sobre a álgebra quociente $A = B/\mathcal{I}$. Compondo a segunda condição de (2.1) com π_1, temos que $\overline{\mathrm{d}}(\mathcal{I}_0) \subseteq N_0$. Para um elemento $y_1 z_0 y_2 \in \mathcal{I}$ com $y_1, y_2 \in B$ e $z_0 \in \mathcal{I}_0$ temos $\overline{\mathrm{d}}(y_1 z_0 y_2) = \overline{\mathrm{d}}y_1 \cdot (z_0 y_2) + y_1 \overline{\mathrm{d}}z_0 \cdot y_2 + y_1 z_0 \overline{\mathrm{d}}y_2 \in N_0$ sendo que o primeiro e o segundo termo da soma estão em N_0 por (2.1) e pelo fato de N_0 ser B-sub-bimódulo. Segue que $\overline{\mathrm{d}}(\mathcal{I}) \subseteq N_0$, donde podemos bem definir uma aplicação linear $\mathrm{d} : A \to \Gamma$ de forma que (Γ, d) é um c.d.p.o. sobre A.

Queremos mostrar que (Γ, d) é covariante à direita. Note que a definição da co-ação ψ_0 em B implica que $\psi_0(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{I} \otimes H$, pois pela construção de ψ_0 temos que a co-ação φ é dada por $\varphi(\pi(y)) = (\pi \otimes id)\psi_0(y)$. Como $N_0 \cap N_1 = \{0\}$ temos $\Gamma = \tilde{\Gamma}/(N_0 + N_1)$, ou seja, podemos construir uma co-ação em Γ a partir de ψ, mostrando que $\psi(N_0 + N_1) \subseteq (N_0 + N_1) \otimes H$. Reescrevamos a hipótese que T é morfismo de co-módulos de uma forma mais conveniente. Pela hipótese $\varphi(A_0) \subseteq A_0 \otimes H$ podemos escolher elementos $\{u_i^j\}_{i,j \in I} \subseteq H$ tais que $\varphi_0(x_i) = x_j \otimes u_i^j$, então para $x_{ij}^k \otimes x_k = T(x_i \otimes x_j)$ temos

$$x_{ij}^{k(0)} \otimes x_k^{(0)} \otimes x_{ij}^{k(1)} x_k^{(1)} = (T \otimes id)(x_i^{(0)} \otimes x_j^{(0)} \otimes x_i^{(1)} x_j^{(1)}) =$$

$$= (T \otimes id)(x_l \otimes x_m \otimes u_i^l u_j^m) = x_{lm}^k \otimes x_k \otimes u_i^l u_j^m$$

ou usando que $\pi(y_{ij}^k) = x_{ij}^k$ e $\varphi(\pi(y)) = (\pi \otimes id)\psi_0(y)$, temos

$$\pi(y_{ij}^{k(0)}) \otimes x_k^{(0)} \otimes y_{ij}^{k(1)} x_k^{(1)} = \pi(y_{lm}^k) \otimes x_k \otimes u_i^l u_j^m.$$

Usando o lema A.2.8 em $\pi \otimes id \otimes id : B \otimes A_0 \otimes H \to A \otimes A_0 \otimes H$ temos que $\ker(\pi \otimes id \otimes id) = \mathcal{I} \otimes A_0 \otimes H$, donde temos que

$$y_{ij}^{k(0)} \otimes x_k^{(0)} \otimes y_{ij}^{k(1)} x_k^{(1)} = y_{lm}^k \otimes x_k \otimes u_i^l u_j^m + \rho$$

com $\rho \in \mathcal{I} \otimes A_0 \otimes H$. Assim definindo $\tilde{\rho} = (id \otimes \widetilde{\mathrm{d}} \otimes id)(\rho) \in N_0 \otimes H$, temos

$$\psi(\widetilde{\mathrm{d}}x_i x_j - y_{ij}^k \widetilde{\mathrm{d}}x_k) = \widetilde{\mathrm{d}}x_l x_m \otimes u_i^l u_j^m - y_{ij}^{k(0)} \widetilde{\mathrm{d}}x_k^{(0)} \otimes y_{ij}^{k(1)} x_k^{(1)} =$$

$$= \widetilde{\mathrm{d}}x_l x_m \otimes u_i^l u_j^m - y_{lm}^k \widetilde{\mathrm{d}}x_k \otimes u_i^l u_j^m - \tilde{\rho} \in (N_0 + N_1) \otimes H.$$

Usando que N_1 é gerado por elementos da forma $\widetilde{\mathrm{d}}x_i x_j - y_{ij}^k \widetilde{\mathrm{d}}x_k$, $i, j \in I$ como B-bimódulo, que N_0 é B-bimódulo e a definição de ψ segue que $\psi(N_1) \subseteq (N_0 + N_1) \otimes H$. Como $\psi_0(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{I} \otimes H$ e $\psi(\mathrm{d}A_0) \subseteq \mathrm{d}A_0 \otimes H$, temos que $\psi(N_0) \subseteq N_0 \otimes H$, donde $\psi(N_0 + N_1) \subseteq (N_0 + N_1) \otimes H$ como desejado. Segue que a co-ação ψ de $\tilde{\Gamma}$ induz uma co-ação em Γ e como $(\tilde{\Gamma}, \widetilde{\mathrm{d}})$ é um c.d.p.o. covariante à direita, (Γ, d) com a co-ação induzida também o será.

Por construção temos que Γ é um A-módulo livre à esquerda gerado por $\{\mathrm{d}x_i\}_{i \in I}$ cuja estrutura de A-módulo à direita é dada pelas relações (2.2). Além disso, essa propriedade define Γ unicamente, concluindo o resultado. ■

Suponha agora que os elementos x_{ij}^k dependam linearmente de x_i, ou seja, existe uma matriz $(D_{ij}^{kl})_{i,j,k,l \in I}$ tal que $x_{ij}^k = D_{ij}^{kl} x_l$. Então supondo $\varphi_0(x_i) = x_j \otimes u_i^j$ como na demonstração da proposição, podemos re-escrever a condição de que T é um morfismo de A-co-módulos de uma outra forma. Por um lado temos

$$\Delta_R(T(x_i \otimes x_j)) = \Delta_R(x_{ij}^k \otimes x_k) = \Delta_R(D_{ij}^{kl} x_l \otimes x_k) = x_n \otimes x_m \otimes u_l^n u_k^m D_{ij}^{kl}$$

e por outro

$$(T \otimes id)\Delta_R(x_i \otimes x_j) = (T \otimes id)(x_k \otimes x_l \otimes u_i^k u_j^l) = x_{kl}^m \otimes x_m \otimes u_i^k u_j^l = x_n \otimes x_m \otimes D_{kl}^{mn} u_i^k u_j^l$$

ou seja, devemos ter $D_{kl}^{mn} u_i^k u_i^l = u_l^n u_k^m D_{ij}^{kl}$.

Note que, no caso de espaços quânticos sobre a bi-álgebra $A(R)$ construídos na seção 1.2 são de forma que $\varphi(e_i) = e_j \otimes t^j{}_i$ e a relação acima é satisfeita se D é um múltiplo da matriz R.

Exemplo 2.1.23 *Façamos com detalhes o caso da álgebra de coordenadas do plano quântico $A = \mathcal{O}(\mathbb{C}_q^2)$ com $H = \mathcal{O}(SL_q(2))$. Mantendo a notação da construção geral, note que, como x_{ij}^k depende linearmente de x_i, podemos escolher $y_{ij}^k = x_{ij}^k \in B$. Supondo $D = \lambda R$, esses* *elementos são da forma*

$$x^1_{11} = \lambda q x_1, \qquad x^2_{11} = 0, \qquad x^1_{12} = \lambda x_2, \qquad x^2_{12} = \lambda(q - q^{-1})x_1$$

$$x^1_{21} = 0, \qquad x^1_{21} = \lambda x_1, \qquad x^1_{22} = 0, \qquad x^2_{22} = \lambda q x_2$$

donde a estrutura do B-bimódulo M é dada por

$$\widetilde{\mathrm{d}}x_1 \cdot x_1 = \lambda q x_1 \widetilde{\mathrm{d}}x_1, \qquad \widetilde{\mathrm{d}}x_1 \cdot x_2 = \lambda x_2 \widetilde{\mathrm{d}}x_1 + \lambda(q - q^{-1})x_1 \widetilde{\mathrm{d}}x_2,$$

$$\widetilde{\mathrm{d}}x_2 \cdot x_1 = \lambda x_1 \widetilde{\mathrm{d}}x_2, \qquad \widetilde{\mathrm{d}}x_2 \cdot x_2 = \lambda q x_2 \widetilde{\mathrm{d}}x_2.$$

Vamos achar um λ adequado de forma que a segunda condição de (2.1) valha trivialmente no caso em que $\mathcal{I}_0 = \{z_0 = x_1x_2 - qx_2x_1\}$. Temos que

$$\widetilde{\mathrm{d}}(x_1x_2 - qx_2x_1) = x_1\widetilde{\mathrm{d}}x_2 + \widetilde{\mathrm{d}}x_1 \cdot x_2 - qx_2\widetilde{\mathrm{d}}x_1 - q\widetilde{\mathrm{d}}x_2 \cdot x_1 =$$

$$= x_1\widetilde{\mathrm{d}}x_2 + \lambda x_2\widetilde{\mathrm{d}}x_1 + \lambda(q - q^{-1})x_1\widetilde{\mathrm{d}}x_2 - qx_2\widetilde{\mathrm{d}}x_1 - q\lambda x_1\widetilde{\mathrm{d}}x_2 =$$

$$= (\lambda x_2 - qx_2)\widetilde{\mathrm{d}}x_1 + (x_1 - \lambda q^{-1}x_1)\widetilde{\mathrm{d}}x_2.$$

Portanto se fixarmos $\lambda = q$, temos $\widetilde{\mathrm{d}}z_0 = 0 \in N_0$. Resta-nos verificar a primeira condição de (2.1)

$$\widetilde{\mathrm{d}}x_1 \cdot (x_1x_2 - qx_2x_1) = q^2x_1\widetilde{\mathrm{d}}x_1 \cdot x_2 - q^2x_2\widetilde{\mathrm{d}}x_1 \cdot x_1 - (q^3 - q)x_1\widetilde{\mathrm{d}}x_2 \cdot x_1 =$$

$$= q^3x_1x_2\widetilde{\mathrm{d}}x_1 + (q^4 - q^2)x_1x_1\widetilde{\mathrm{d}}x_2 - q^4x_2x_1\widetilde{\mathrm{d}}x_1 - (q^4 - q^2)x_1x_1\widetilde{\mathrm{d}}x_2 = q^3z_0\widetilde{\mathrm{d}}x_1 \in N_0.$$

Segue que temos um cálculo $\mathcal{O}(SL_q(2))$-covariante sobre $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2_q)$ dada pelas relações

$$\mathrm{d}x_1x_1 = q^2x_1\mathrm{d}x_1, \qquad \mathrm{d}x_1x_2 = qx_2\mathrm{d}x_1 + (q^2 - 1)x_1\mathrm{d}x_2,$$

$$\mathrm{d}x_2x_1 = qx_1\mathrm{d}x_2, \qquad \mathrm{d}x_2x_2 = q^2x_2\mathrm{d}x_2.$$

2.2 Bimódulos covariantes

Nesta seção estudaremos bimódulos sobre uma álgebra de Hopf que são covariantes como definiremos a seguir. Utilizaremos as ferramentas desta seção para caracterizarmos todos os cálculos covariantes sobre uma álgebra de Hopf.

Fixe A uma álgebra de Hopf com antípoda inversível.

Note que se V é um A-bimódulo então as seguintes funções $ad_L : A \otimes V \to V$ e $ad_R : V \otimes A \to V$ dadas por $ad_L(a \otimes v) = a_{(1)}vS(a_{(2)})$ e $ad_R(v \otimes a) = S(a_{(1)})va_{(2)}$ estão bem definidas. Além disso, verifica-se facilmente que ad_L e ad_R são ações à esquerda e à direita respectivamente.

2.2.1 Bimódulos covariantes à esquerda

Definição 2.2.1 *Dizemos que (Γ, φ_L) é um bimódulo covariante à esquerda sobre A, onde Γ é um A-bimódulo e $\varphi_L : \Gamma \to A \otimes \Gamma$ é uma co-ação à esquerda, se $\forall a, b \in A$ $\forall \rho \in \Gamma$ vale $\varphi_L(a\rho b) = \Delta(a)\varphi_L(\rho)\Delta(b)$. Um elemento $\rho \in \Gamma$ é dito ser invariante à esquerda se $\varphi_L(\rho) = 1 \otimes \rho$. Denotaremos por ${}_{\mathrm{inv}}\Gamma$ o espaço vetorial de todos os elementos invariantes à esquerda.*

Lema 2.2.2 *Seja Γ um bimódulo covariante à esquerda sobre A. Então existe uma única projeção linear $P_L : \Gamma \to {}_{\mathrm{inv}}\Gamma$ tal que $P_L(a\rho) = \epsilon(a)P_L(\rho)$ $\forall a \in A$ $\forall \rho \in \Gamma$. Tal projeção é dada por $P_L(\rho) = S(\rho^{(-1)})\rho^{(0)}$ lembrando que estamos denotando $\varphi_L(\rho) = \rho^{(-1)} \otimes \rho^{(0)}$. Além disso $\forall \rho \in \Gamma$ $\forall a \in A$ vale:*

$$\rho = \rho^{(-1)}P_L(\rho^{(0)}), \tag{2.3}$$

$$P_L(\rho a) = ad_R(P_L(\rho) \otimes a) = S(a_{(1)})P_L(\rho)a_{(2)}. \tag{2.4}$$

Demonstração. Primeiro vamos mostrar que $P_L(\rho) = S(\rho^{(-1)})\rho^{(0)} \in {}_{\mathrm{inv}}\Gamma$

$$\varphi_L(P_L(\rho)) = \varphi_L(S(\rho^{(-1)})\rho^{(0)}) = \Delta(S(\rho^{(-1)}))\varphi_L(\rho^{(0)}) =$$

$$= (S(\rho^{(-2)}) \otimes S(\rho^{(-3)}))(\rho^{(-1)} \otimes \rho^{(0)}) = S(\rho^{(-2)})\rho^{(-1)} \otimes S(\rho^{(-3)})\rho^{(0)} =$$

$$= \epsilon(\rho^{(-1)})1 \otimes S(\rho^{(-2)})\rho^{(0)} = 1 \otimes S(\rho^{(-1)})\rho^{(0)} = 1 \otimes P_L(\rho)$$

onde usamos o fato da antípoda ser anti-morfismo de co-álgebras da primeira para segunda linha, e as propriedades de antípoda na segunda linha e co-unidade na terceira. Agora mostremos que P_L de fato satisfaz as propriedades desejadas. Para $a \in A$ e $\rho \in \Gamma$ temos:

$$P_L(a\rho) = S((a\rho)^{(-1)})(a\rho)^{(0)} = S(a_{(1)}\rho^{(-1)})a_{(2)}\rho^{(0)} = S(\rho^{(-1)})S(a_{(1)})a_{(2)}\rho^{(0)} =$$

$$= S(\rho^{(-1)})\epsilon(a)\rho^{(0)} = \epsilon(a)P_L(\rho);$$

para 2.3

$$\rho^{(-1)}P_L(\rho^{(0)}) = \rho^{(-2)}S(\rho^{(-1)})\rho^{(0)} = \epsilon(\rho^{(-1)})\rho^{(0)} = \rho$$

e finalmente para 2.4

$$P_L(\rho a) = S((\rho a)^{(-1)})(\rho a)^{(0)} = S(a_{(1)})S(\rho^{(-1)})\rho^{(0)}a_{(2)} = ad_R(P_L(\rho) \otimes a).$$

Que P_L é projeção vem do fato de que se $\varphi_L(\rho) = 1 \otimes \rho$ então $P_L(\rho) = S(1)\rho = \rho$. Resta-nos apenas mostrar a unicidade. Suponha que $P : \Gamma \to {}_{\mathrm{inv}}\Gamma$ seja outra projeção linear tal que $P(a\rho) = \epsilon(a)P(\rho)$, então

$$P(\rho) = P(\rho^{(-1)}P_L(\rho^{(0)})) = \epsilon(\rho^{(-1)})P(P_L(\rho^{(0)})) = \epsilon(\rho^{(-1)})P_L(\rho^{(0)}) = P_L(\rho)$$

como desejado. ■

Proposição 2.2.3 *Dado um A-módulo à direita Γ_0, podemos dar uma estrutura de bimódulo covariante à esquerda em $\Gamma_L := A \otimes \Gamma_0$ de forma que $\Gamma_0 \cong {}_{\mathrm{inv}}(\Gamma_L)$. Reciprocamente dado um bimódulo covariante à esquerda Γ, podemos dar uma estrutura de A-módulo à direita em ${}_{\mathrm{inv}}\Gamma$ de forma que Γ é isomorfo ao Γ_L construído na primeira parte.*

Demonstração. Defina em $\Gamma_L = A \otimes \Gamma_0$ as ações à direita e esquerda por:

$$a(b \otimes w)c = abc_{(1)} \otimes w \triangleleft c_{(2)} \tag{2.5}$$

lembrando que $w \triangleleft a$ denota a ação à direita de A em Γ_0, e co-ação à esquerda por:

$$\Delta_L(b \otimes w) = b_{(1)} \otimes b_{(2)} \otimes w \tag{2.6}$$

e mostremos que assim Γ_L torna-se um bimódulo covariante à esquerda. Façamos apenas para as propriedades menos triviais. Temos

$$(b \otimes w)(cd) = b(cd)_{(1)} \otimes w \triangleleft (cd)_{(2)} = bc_{(1)}d_{(1)} \otimes w \triangleleft (c_{(2)}d_{(2)}) =$$

$$= bc_{(1)}d_{(1)} \otimes (w \triangleleft c_{(2)}) \triangleleft d_{(2)} = (bc_{(1)} \otimes w \triangleleft c_{(2)})d = ((b \otimes w)c)d$$

para a ação a direita e

$$(id \otimes \Delta_L)\Delta_L(b \otimes w) = (id \otimes \Delta_L)(\Delta b \otimes w) = ((id \otimes \Delta)\,\Delta b) \otimes w =$$

$$= ((\Delta \otimes id)\,\Delta b) \otimes w = (\Delta \otimes id \otimes id)(\Delta b \otimes w) = (\Delta \otimes id \otimes id)\Delta_L(b \otimes w)$$

para a co-ação à esquerda. Agora, note que

$$P_L(b \otimes w) = S(b_{(1)})(b_{(2)} \otimes w) = S(b_{(1)})b_{(2)} \otimes w = 1 \otimes \epsilon(b)w$$

ou seja, temos ${}_{\mathrm{inv}}(\Gamma_L) \subseteq 1 \otimes \Gamma_0$, e além disso temos também $P_L(1 \otimes w) = 1 \otimes w$ donde ${}_{\mathrm{inv}}(\Gamma_L) = 1 \otimes \Gamma_0 \cong \Gamma_0$, demonstrando a primeira parte. Note também que, neste caso

$$P_L((1 \otimes w)b) = P_L(b_{(1)} \otimes w \triangleleft b_{(2)}) = 1 \otimes w \triangleleft \epsilon(b_{(1)})b_{(2)} = 1 \otimes w \triangleleft b$$

o que nos induz a definir, para a recíproca, a estrutura de A-módulo à direita em ${}_{\mathrm{inv}}\Gamma$ por $w \triangleleft a := P_L(wa)$ para $w \in {}_{\mathrm{inv}}\Gamma$ e $a \in A$ e por (2.4) temos que $w \triangleleft a = ad_R(w \otimes a)$ que de fato é uma ação à direita conforme mencionado no início da seção.

Resta-nos mostrar que o Γ_L obtido para ${}_{\mathrm{inv}}\Gamma$ é isomorfo, como bimódulo covariante à esquerda, ao Γ inicial. Considere a aplicação linear $T : \Gamma \to \Gamma_L$ dada por $T = (id \otimes P_L) \circ \varphi_L$. De (2.3) temos que $\Gamma = A \cdot {}_{\mathrm{inv}}\Gamma$, de forma que só é necessário verificar as propriedades para elementos da forma aw com $a \in A$ e $w \in {}_{\mathrm{inv}}\Gamma$. Dados $a, b, c \in A$ e $w \in {}_{\mathrm{inv}}\Gamma$ temos

$$T(a(bw)c) = (id \otimes P_L)\varphi_L(a(bw)c) = (id \otimes P_L)\Delta(a)\Delta(b)\varphi_L(w)\Delta(c) =$$

$$= (id \otimes P_L)(a_{(1)}b_{(1)}c_{(1)} \otimes a_{(2)}b_{(2)}wc_{(2)}) = a_{(1)}b_{(1)}c_{(1)} \otimes \epsilon(a_{(2)}b_{(2)})P_L(wc_{(2)}) =$$

$$= abc_{(1)} \otimes w \lhd c_{(2)} = a(b \otimes w)c$$

donde T é um homomorfismo de A-bimódulos. É claro que T é sobrejetora e se $T\left(\sum_i b_i w_i\right) = \sum_i b_i \otimes w_i = 0$, aplicando a ação à esquerda de A em Γ, temos $\sum_i b_i w_i = 0$, ou seja T também é injetora e portanto bijetora. Resta-nos apenas mostrar que T é um morfismo de A-co-módulos à esquerda, mas

$$\Delta_L \circ T = (\Delta \otimes id)(id \otimes P_L)\varphi_L = (id \otimes id \otimes P_L)(\Delta \otimes id)\varphi_L =$$

$$= (id \otimes id \otimes P_L)(id \otimes \varphi_L)\varphi_L = (id \otimes T)\varphi_L$$

como desejado. ■

Por causa dessa proposição e do fato de que $\Gamma = A \cdot {}_{\text{inv}}\Gamma$, faremos a identifiação $a \otimes w = aw$ via a tranformação linear T da demonstração. Usaremos, agora, nossa hipótese da antípoda ser inversível para demonstrar uma proposição similar à anterior com ${}_{\text{inv}}\Gamma \otimes A$ no lugar de $A \otimes ({}_{\text{inv}}\Gamma)$.

Proposição 2.2.4 *Dado um A-módulo à direita Γ_0, podemos dar uma estrutura de bimódulo covariante à esquerda em $\Gamma_R := \Gamma_0 \otimes A$ de forma que $\Gamma_0 \cong {}_{\text{inv}}(\Gamma_R)$. Reciprocamente dado um bimódulo covariante à esquerda Γ, podemos dar uma estrutura de A-módulo à direita em ${}_{\text{inv}}\Gamma$ de forma que Γ é isomorfo ao Γ_R construído na primeira parte.*

Demonstração. Primeiro vejamos que no caso de um bimódulo covariante à esquerda Γ, temos para $a \in A$ e $w \in {}_{\text{inv}}\Gamma$

$$aw = (w \lhd S^{-1}(a_{(2)}))a_{(1)}, \tag{2.7}$$

de fato

$$(w \lhd S^{-1}(a_{(2)}))a_{(1)} = a_{(1)}((w \lhd S^{-1}(a_{(3)})) \lhd a_{(2)}) = a_{(1)}(w \lhd (S^{-1}(a_{(3)})a_{(2)}) =$$

$$= a_{(1)}(w \lhd (\epsilon(a_{(2)})1)) = a(w \lhd 1) = aw.$$

Em particular, temos que (2.7) implica que $\Gamma = {}_{\text{inv}}\Gamma \cdot A$. Agora, dado um A-módulo à direita Γ_0, (2.7) nos induz a definir a estrutura de A-bimódulo em $\Gamma_R := \Gamma_0 \otimes A$ por

$$a(w \otimes b)c = (w \lhd S^{-1}(a_{(2)})) \otimes a_{(1)}bc \tag{2.8}$$

que, como na proposição anterior, verifica-se que será um bimódulo covariante à esquerda com co-ação dada por

$$\Delta_L(w \otimes b) = b_{(1)} \otimes w \otimes b_{(2)}. \tag{2.9}$$

Neste caso temos

$$P_L(w\otimes b)=S(b_{(1)})(w\otimes b_{(2)})=(w\lhd S^{-1}(S(b_{(1)})_{(2)}))\otimes S(b_{(1)})_{(1)}b_{(2)}=$$

$$=(w\lhd S^{-1}(S(b_{(1)})))\otimes S(b_{(2)})b_{(3)}=(w\lhd b_{(1)})\otimes\epsilon(b_{(2)})1=(w\lhd b)\otimes 1$$

donde segue que ${}_{\text{inv}}(\Gamma_R)=\Gamma_0\otimes 1$.

Reciprocamente, dado Γ é um bimódulo covariante à esquerda, defina a ação à direita em ${}_{\text{inv}}\Gamma$ como no caso anterior por $w\lhd a=P_L(wa)$ e considere $\Gamma_R={}_{\text{inv}}\Gamma\otimes A$ com estrutura dada por (2.8) e (2.9). Defina uma transformação linear $T:\Gamma\to\Gamma_R$ por $T(\rho)=(P_L(\rho^{(0)})\lhd S^{-1}(\rho^{(-1)}))\otimes\rho^{(-2)}$ e vejamos que a inversa é $T^{-1}:\Gamma_R\to\Gamma$ definida por $T^{-1}(w\otimes a)=wa$. De fato, por um lado

$$T(T^{-1}(w\otimes b))=T(wb)=(P_L(wb_{(3)})\lhd S^{-1}(b_{(2)}))\otimes b_{(1)}=$$

$$=\big((w\lhd b_{(3)})\lhd S^{-1}(b_{(2)})\big)\otimes b_{(1)}=(w\lhd\epsilon(b_{(2)})1)\otimes b_{(1)}=w\otimes b$$

e pelo outro lado

$$T^{-1}(T(\rho))=T^{-1}((P_L(\rho^{(0)})\lhd S^{-1}(\rho^{(-1)}))\otimes\rho^{(-2)})=(P_L(\rho^{(0)})\lhd S^{-1}(\rho^{(-1)}))\rho^{(-2)}=$$

$$=\rho^{(-3)}((P_L(\rho^{(0)})\lhd S^{-1}(\rho^{(-2)}))\lhd\rho^{(-1)})=\rho^{(-2)}(P_L(\rho^{(0)})\lhd\epsilon(\rho^{(-1)})1)=\rho^{(-1)}P_L(\rho^{(0)})=\rho.$$

Além disso

$$aT(\rho)b=a((P_L(\rho^{(0)})\lhd S^{-1}(\rho^{(-1)}))\otimes\rho^{(-2)})b=$$

$$=((P_L(\rho^{(0)})\lhd S^{-1}(\rho^{(-1)}))\lhd S^{-1}(a_{(2)}))\otimes a_{(1)}\rho^{(-2)}b=$$

$$=((P_L(\rho^{(0)})\lhd S^{-1}(\rho^{(-1)}b_{(2)}S(b_{(3)})))\lhd S^{-1}(a_{(2)}))\otimes a_{(1)}\rho^{(-2)}b_{(1)}=$$

$$=((P_L(\rho^{(0)})\lhd b_{(3)})\lhd S^{-1}(a_{(2)}\rho^{(-1)}b_{(2)}))\otimes a_{(1)}\rho^{(-2)}b_{(1)}=$$

$$=(P_L(P_L(\rho^{(0)})b_{(3)})\lhd S^{-1}(a_{(2)}\rho^{(-1)}b_{(2)}))\otimes a_{(1)}\rho^{(-2)}b_{(1)}=$$

$$=((\epsilon(a_{(3)})P_L(\rho^{(0)}b_{(3)}))\lhd S^{-1}(a_{(2)}\rho^{(-1)}b_{(2)}))\otimes a_{(1)}\rho^{(-2)}b_{(1)}=$$

$$=(P_L(a_{(3)}\rho^{(0)}b_{(3)}))\lhd S^{-1}(a_{(2)}\rho^{(-1)}b_{(2)}))\otimes a_{(1)}\rho^{(-2)}b_{(1)}=$$

$$=P_L((a\rho b)^{(0)})\lhd S^{-1}((a\rho b)^{(-1)})\otimes(a\rho b)^{(-2)}=T(a\rho b)$$

ou seja T é homomorfismo de A-bimódulos. Resta-nos apenas mostrar que T é morfismo de A-co-módulos

$$(id\otimes T)\varphi_L(\rho)=(id\otimes T)(\rho^{(-1)}\otimes\rho^{(0)})=\rho^{(-3)}\otimes P_L(\rho^{(0)})\lhd S^{-1}(\rho^{(-1)})\otimes\rho^{(-2)}=$$

$$=\Delta_L(P_L(\rho^{(0)})\lhd S^{-1}(\rho^{(-1)})\otimes\rho^{(-2)})=\Delta_L(T(\rho))$$

ou seja Γ e Γ_R são isomorfos como bimódulos covariantes à esquerda. ■

Terminaremos essa seção reescrevendo alguns resultados em termos de coordenadas. Mas antes, precisamos de alguns fatos e uma definição. Seja A' o dual algébrico de A visto como álgebra pelo corolário 1.1.20, então podemos definir uma ação esquerda de A' em A por $f \cdot a = a_{(1)} f(a_{(2)})$ que é similar à ação co-regular do exemplo 1.1.46, e da mesma forma definimos uma ação à direita por $a \cdot f = f(a_{(1)}) a_{(2)}$.

Definição 2.2.5 *Dado I um conjunto de índices, dizemos que matrizes $(v^i_j)_{i,j \in I}$ e $(f^i_j)_{i,j \in I}$ de elementos $v^i_j \in A$ e funcionais lineares $f^i_j \in A'$ são pontualmente finitas se $\forall i \in I$ e $\forall a \in A$, apenas um número finito de termos v^i_j e $f^i_j(a)$ são não nulos.*

Tal definição nos garante que a soma nos índices de baixo das matrizes são finitas.

Proposição 2.2.6 *Sejam Γ um bimódulo covariante à esquerda e $\{w_i\}_{i \in I}$ uma base para o espaço vetorial ${}_{\mathrm{inv}}\Gamma$. Então $\{w_i\}_{i \in I}$ é um base livre para o A-módulo à esquerda Γ e existe uma matriz pontualmente finita $(f^i_j)_{i,j \in I}$ de funcionais $f^i_j \in A'$ tais que $\forall a, b \in A$ $\forall i, j \in I$ temos*

$$f^i_j(ab) = \sum_k f^i_k(a) f^k_j(b), \qquad f^i_j(1) = \delta_{ij},$$

$$w_i a = \sum_k (f^i_k \cdot a) w_k.$$

O conjunto $\{w_i\}_{i \in I}$ é também uma base livre para o A-módulo à direita Γ e vale

$$a w_i = \sum_k w_k \left((f^i_k \circ S^{-1}) \cdot a \right).$$

Demonstração. A primeira parte vem do fato que $\Gamma \cong A \otimes {}_{\mathrm{inv}}\Gamma$. Como $w_i \triangleleft a \in {}_{\mathrm{inv}}\Gamma$, então existem números complexos $f^i_j(a)$ para $i, j \in I$ tais que $f^i_j(a)$ são não nulos apenas para uma quantidade finita de índices j, e $w_i \triangleleft a = \sum_j f^i_j(a) w_j$. É claro que $(f^i_j)_{i,j \in I}$ é uma matriz pontualmente finita de funcionais $f^i_j \in A'$. As relações do enunciado seguem de

$$\sum_j f^i_j(ab) w_j = w_i \triangleleft (ab) = (w_i \triangleleft a) \triangleleft b = \left(\sum_k f^i_k(a) w_k \right) \triangleleft b = \sum_{k,j} f^i_k(a) f^k_j(b) w_j$$

e como $\{w_i\}_{i \in I}$ é base temos $f^i_j(ab) = \sum_k f^i_k(a) f^k_j(b)$;

$$w_i = w_i \triangleleft 1 = f^i_j(1) w_j$$

donde $f^i_j(1) = \delta_{ij}$;

$$w_i a = a_{(1)} \left(w_i \triangleleft a_{(2)} \right) = \sum_j a_{(1)} (f^i_j(a_{(2)})) w_j = \sum_j (f^i_j \cdot a) w_j$$

e finalmente

$$aw_i = (w_i \triangleleft S^{-1}(a_{(2)}))a_{(1)} = \sum_j f^i_j(S^{-1}(a_{(2)})w_j a_{(1)} = \sum_j w_j((f^i_j \circ S^{-1}) \cdot a).$$

Para a última parte, o isomorfismo $\Gamma \cong {}_{\text{inv}}\Gamma \otimes A$ implica que $\{w_i\}_{i \in I}$ é uma base livre para o A-módulo à direita Γ. ■

Note que pela expressão dada para $f^i_j(ab)$ temos de fato que os funcionais f^i_j do teorema estão de fato em A°.

2.2.2 Bimódulos covariante à direita

Podemos reescrever toda a subseção anterior trocando esquerda por direita e fazendo as devidas modifiações.

Definição 2.2.7 *Um par (Γ, φ_R) é um bimódulo covariante à direita sobre A se Γ é um A-bimódulo e $\varphi_R : \Gamma \to \Gamma \otimes A$ é uma co-ação à direita satisfazendo $\varphi_R(a\rho b) = \Delta(a)\varphi_R(\rho)\Delta(b)$ $\forall a, b \in A$ e $\forall \rho \in \Gamma$. Um elemento ρ de Γ é dito ser invariante à direita se $\varphi_R(\rho) = \rho \otimes 1$. Denotaremos por Γ_{inv} o espaço vetorial de todos os elementos invariantes à direita.*

A projeção canônica $P_R : \Gamma \to \Gamma_{\text{inv}}$ é definida por $P_R(\rho) = \rho^{(0)}S\left(\rho^{(1)}\right)$ e satisfaz $P_R(\rho a) = \epsilon(a)P_R(\rho)$ e $P_R(a\rho) = a_{(1)}P_R(\rho)S(a_{(2)}) = ad_L(a \otimes P_R(\rho))$ $\forall a \in A$ e $\forall \rho \in \Gamma$. A estrutura de A-módulo à esquerda em Γ_{inv} é dada pela ação adunta à esquerda $a \triangleright \eta = P_R(a\eta) = ad_L(a \otimes \eta)$, a qual determina completamente a estrutura de bimódulo covariante à direita uma vez que $\Gamma = \Gamma_{\text{inv}} \cdot A$ e $a(\eta b) = (a_{(1)} \triangleright \eta)a_{(2)}b$ $\forall a, b \in A$ $\forall \eta \in \Gamma_{\text{inv}}$.

2.2.3 Bimódulos bicovariantes

Definição 2.2.8 *Uma tripla $(\Gamma, \varphi_L, \varphi_R)$ é dito se um bimódulo bicovariante (ou bimódulo de Hopf) sobre A se (Γ, φ_L) é um bimódulo covariante à esquerda, (Γ, φ_R) é um bimódulo covariante à direita e vale $(id \otimes \varphi_R) \circ \varphi_L = (\varphi_L \otimes id) \circ \varphi_R$.*

Essa última condição na definição justifica o uso da notação de Sweedler $\rho^{(-1)} \otimes \rho^{(0)} \otimes \rho^{(1)}$ para $(id \otimes \varphi_R) \circ \varphi_L(\rho) = (\varphi_L \otimes id) \circ \varphi_R(\rho)$ com $\rho \in \Gamma$.

Prosseguiremos como na penúltima seção para caracterizaremos a estrutura de um bimódulo bicovariante através de espaço dos elementos invariantes à esquerda. Para isso precisamos da seguinte definição.

Definição 2.2.9 *Seja Γ_0 um espaço vetorial que é um A-módulo à direita com ação denotada por $\triangleleft$ e um A-co-módulo à direita com co-ação $\delta_R : \Gamma_0 \to \Gamma_0 \otimes A$. Dizemos que $(\Gamma_0, \triangleleft, \delta_R)$ satisfaz a condição de Yetter-Drinfeld se vale a seguinte condição de compatibilidade*

$$(w^{(0)} \triangleleft a_{(1)}) \otimes w^{(1)}a_{(2)} = (w \triangleleft a_{(2)})^{(0)} \otimes a_{(1)}(w \triangleleft a_{(2)})^{(1)} \tag{2.10}$$

para todos $w \in \Gamma_0$ e $a \in A$.

Proposição 2.2.10 *Dado um A-módulo à direita Γ_0 que também é um A-co-módulo à direita e satisfaz a condição de Yetter-Drinfeld, então podemos dar uma estrutura de bimódulo bicovariante em $\Gamma_B = A \otimes \Gamma_0$ de forma que $\Gamma_0 \cong {}_{\mathrm{inv}}(\Gamma_B)$. Reciprocamente, dado um bimódulo bicovariante Γ, existem estruturas de A-módulo à direita e A-co-módulo à direita em ${}_{\mathrm{inv}}\Gamma$ satisfazendo a condição de Yetter-Drinfeld e vale que Γ é isomorfo ao bimódulo bicovariante Γ_B construído na primeira parte.*

Demonstração. Dado Γ_0 como no enunciado, construíremos um bimódulo bicovariante à esquerda $\Gamma_B = A \otimes \Gamma_0$ como na proposição 2.2.3 e portanto já temos $\Gamma_0 \cong {}_{\mathrm{inv}}(\Gamma_B)$. Usaremos a coação à direita de Γ_0 para definir uma co-ação à direita em Γ de tal forma que Γ seja um bimódulo bicovariante. Defina $\varphi_R : \Gamma \to \Gamma \otimes A$ por

$$\varphi_R(a \otimes w) = a_{(1)} \otimes w^{(0)} \otimes a_{(2)} w^{(1)} \tag{2.11}$$

que é co-ação à direita pela co-associatividade do co-produto e das propriedades da co-ação δ_R. É fácil ver que $\varphi_R(a\rho) = \Delta(a)\varphi_R(\rho)$ para $\rho \in \Gamma$ e $a \in A$ e lembrando que a co-ação à esquerda φ_L de Γ_B era simplesmente aplicar o co-produto na primeira entrada, também fica fácil ver que $(id \otimes \varphi_R) \circ \varphi_L = (\varphi_L \otimes id) \circ \varphi_R$. Temos que mostrar que $\varphi_R(\rho a) = \varphi_R(\rho)\Delta(a)$, mas note que

$$\varphi_R((b \otimes w)a) = \varphi_R(ba_{(1)} \otimes w \lhd a_{(2)}) = b_{(1)}a_{(1)} \otimes (w \lhd a_{(3)})^{(0)} \otimes b_{(2)}a_{(2)}(w \lhd a_{(3)})^{(1)} \tag{2.12}$$

$$\varphi_R(b \otimes a)\Delta a = (b_{(1)} \otimes w^{(0)} \otimes b_{(2)} w^{(1)})(a_{(1)} \otimes a_{(2)}) = b_{(1)}a_{(1)} \otimes w^{(0)} \lhd a_{(2)} \otimes b_{(2)} w^{(1)} a_{(3)} \tag{2.13}$$

e a igualdade entre (2.12) e (2.13) vem da condição de Yetter-Drinfeld.

Reciprocamente, se Γ é um bimódulo bicovariante, então ${}_{\mathrm{inv}}\Gamma$ é um A-módulo à direita com ação dada por $w \lhd a = P_L(wa)$. Além disso, da identidade de bimódulos bicovariantes, temos para $w \in {}_{\mathrm{inv}}\Gamma$

$$(\varphi_L \otimes id)\varphi_R(w) = (id \otimes \varphi_R)\varphi_L(w) = 1 \otimes \varphi_R(w)$$

donde $\varphi_R({}_{\mathrm{inv}}\Gamma) \subseteq {}_{\mathrm{inv}}\Gamma \otimes A$, ou seja, podemos restringir a co-ação de Γ para $\delta_R : {}_{\mathrm{inv}}\Gamma \to {}_{\mathrm{inv}}\Gamma \otimes A$. Do fato que Γ é bimódulo covariante à direita temos que (2.12) e (2.13) coincidem e aplicando $\epsilon \otimes id$ em ambos os lados direitos temos que a condição de Yetter-Drinfeld é satisfeita. O isomorfismo de bimódulos bicovariantes $\Gamma \cong \Gamma_B$ é imediato. ■

Antes de irmos para o teorema fundamental desta seção, vamos definir uma bijeção de um bimódulo bicovariante Γ com ele mesmo de tal forma que sua restrição a ${}_{\mathrm{inv}}\Gamma$ nos dará um isomorfismo de espaços vetoriais entre ${}_{\mathrm{inv}}\Gamma$ e Γ_{inv}. Defina $\Phi : \Gamma \to \Gamma$ por

$$\Phi(\rho) = S(\rho^{(-1)})\rho^{(0)}S(\rho^{(1)}) \tag{2.14}$$

e mostremos que sua inversa é dada por $\Psi(\rho) = S^{-1}(\rho^{(1)})\rho^{(0)}S^{-1}(\rho^{(-1)})$. Primeiro, calculemos

$$\varphi_L(\Phi(\rho)) = \varphi_L(S(\rho^{(-1)})\rho^{(0)}\Delta(S(\rho^{(1)})) = (1 \otimes S(\rho^{(-1)})\rho^{(0)})(S(\rho^{(2)}) \otimes S(\rho^{(1)}) =$$

$$= S(\rho^{(2)}) \otimes S(\rho^{(-1)})\rho^{(0)}S(\rho^{(1)})$$

onde usamos que $S(\rho^{(-1)})\rho^{(0)} = P_L(\rho^{(0)}) \in {}_{\mathrm{inv}}\Gamma$. Temos ainda

$$(id \otimes \varphi_R)\varphi_L(\Phi(\rho)) = S(\rho^{(2)}) \otimes (\Delta(S(\rho^{(-1)}))(\rho^{(0)}S(\rho^{(1)}) \otimes 1) =$$

$$= S(\rho^{(2)}) \otimes S(\rho^{(-1)})\rho^{(0)}S(\rho^{(1)}) \otimes S(\rho^{(-2)})$$

e aplicando Ψ temos

$$\Psi(\Phi(\rho)) = S^{-1}(S(\rho^{(-2)}))S(\rho^{(-1)})\rho^{(0)}S(\rho^{(1)})S^{-1}(S(\rho^{(2)})) =$$

$$= \epsilon(\rho^{(-1)})\rho^{(0)}\epsilon(\rho^{(1)}) = \rho.$$

Analogamente temos $\Phi(\Psi(\rho)) = \rho$, ou seja, Φ é bijetiva com inversa dada por Ψ. Note que para $w \in {}_{\mathrm{inv}}\Gamma$ e $\eta \in \Gamma_{\mathrm{inv}}$, temos que $\Phi(w) = w^{(0)}S(w^{(1)}) = P_R(w) \in \Gamma_{\mathrm{inv}}$ e $\Psi(\eta) = \eta^{(0)}S^{-1}(\eta^{(-1)}) \in {}_{\mathrm{inv}}\Gamma$ onde a última relação de pertinência é mostrada de maneira análoga à mostrar que $P_L(\rho) \in {}_{\mathrm{inv}}\Gamma$. Concluímos assim que $\Phi : {}_{\mathrm{inv}}\Gamma \to \Gamma_{\mathrm{inv}}$ e $\Psi : \Gamma_{\mathrm{inv}} \to {}_{\mathrm{inv}}\Gamma$ estão bem definidas e que Φ é um isomorfismo entre os espaços vetoriais ${}_{\mathrm{inv}}\Gamma$ e Γ_{inv}.

Teorema 2.2.11 (Teorema fundamental para bimódulos bicovariantes) *Sejam Γ um bimódulo bicovariante sobre A e $\{w_i\}_{i\in I}$ uma base para o espaço vetorial ${}_{\mathrm{inv}}\Gamma$. Então existem matrizes pontualmente finitas*[1] $v = (v^i_j)_{i,j\in I}$ *e* $f = (f^i_j)_{i,j\in I}$ *com* $v^i_j \in A$ *e* $f^i_j \in A'$ *tais que* $\forall a, b \in A$ $\forall i, j \in I$ *vale:*

1. $w_i a = \sum_k (f^i_k \cdot a) w_k$;
2. $\varphi_R(w_i) = \sum_k w_k \otimes v^k_i$;
3. $f = (f^i_j)_{i,j\in I}$ *satisfaz* $f^i_j(ab) = \sum_k f^i_k(a) f^k_j(b)$ *e* $f^i_j(1) = \delta_{ij}$;
4. $v = (v^i_j)_{i,j\in I}$ *satisfaz* $\Delta(v^i_j) = \sum_k v^i_k \otimes v^k_j$ *e* $\epsilon(v^i_j) = \delta_{ij}$;
5. $\sum_k v^k_i (a \cdot f^k_j) = \sum_k (f^i_k \cdot a) v^j_k$.

Além disso $\left\{\eta_i = \sum_j w_j S(v^j_i)\right\}_{i\in I}$ *é uma base para o espaço vetorial* Γ_{inv} *e ambos conjuntos* $\{w_i\}_{i\in I}$ *e* $\{\eta_i\}_{i\in I}$ *são bases para o A-módulo livre à esquerda* Γ *e o A-módulo livre à direita* Γ *respectivamente. Reciprocamente se* $\{w_i\}_{i\in I}$ *é a base de um espaço vetorial* Γ_0 *e se* $v = (v^i_j)_{i,j\in I}$ *e* $f = (f^i_j)_{i,j\in I}$ *são matrizes pontualmente finitas*[2] *satisfazento* $3-5$ *então*

[1] Neste caso, temos que, para $j \in I$ fixo, apenas um número finito de elementos v^i_j é não nulo.
[2] Vale a mesma observação anterior para v.

existe um único bimódulo bicovariante Γ, denotado por (v, f), tal que $\Gamma_0 \cong \Gamma_{\text{inv}}$ e $1-2$ são válidas.

Demonstração. De acordo com a proposição 2.2.6 temos uma correspondência 1-1 entre ações à direita em ${}_{\text{inv}}\Gamma$ e matrizes pontualmente finitas (f^i_j) satisfazendo 3. Temos neste caso que 1 segue de (2.5). Como $\{w_i\}_{i\in I}$ é base e $\varphi_R({}_{\text{inv}}\Gamma) \subseteq {}_{\text{inv}}\Gamma \otimes A$ existe uma matriz pontualmente finita $v = (v^i_j)_{i,j\in I}$, de acordo com a observação, e tal que $\varphi_R(w_i) = \sum_k w_k \otimes v^k_i$, donde é fácil ver que existe uma correspondência 1-1 entre co-ações à direita em ${}_{\text{inv}}\Gamma$ e matrizes satisfazendo 4. De (2.14) temos que $\{\eta_i = \Phi(w_i)\}_{i\in I}$ é uma base para Γ_{inv}, e o fato de serem bases livres para os módulos respectivos vem dos isomorfismos $\Gamma \cong A \otimes {}_{\text{inv}}\Gamma$ e $\Gamma \cong \Gamma_{\text{inv}} \otimes A$. Para terminar a demonstração, basta-nos mostrar que 5 do enunciado é equivalente à condição de Yetter-Drinfeld, mas note que para $i \in I$ e $a \in A$, temos

$$w_i^{(0)} \triangleleft a_{(1)} \otimes w_i^{(1)} a_{(2)} = \sum_k w_k \triangleleft a_{(1)} \otimes v^k_i a_{(2)} =$$

$$\sum_{k,j} f^k_j(a_{(1)}) w_j \otimes v^k_i a_{(2)} = \sum_j w_j \otimes \left(\sum_k v^k_i (a \cdot f^k_j) \right)$$

e também

$$(w_i \triangleleft a_{(2)})^{(0)} \otimes a_{(1)} (w_i \triangleleft a_{(2)})^{(1)} = \sum_k (f^i_k(a_{(2)}) w_k)^{(0)} \otimes a_{(1)} (f^i_k(a_{(2)}) w_k)^{(1)} =$$

$$\sum_k w_k^{(0)} \otimes a_{(1)} f^i_k(a_{(2)}) w_k^{(1)} = \sum_j w_j \otimes \left(\sum_k (f^i_k \cdot a) v^j_k \right)$$

donde a equivalência fica evidente. ■

2.3 Cálculo diferencial sobre álgebras de Hopf

Nesta seção, iremos utilizar os resultados da seção anterior para estudar cálculos sobre álgebras de Hopf. Fixe, então, A álgebra de Hopf com antípoda inversível. Vamos pensar em A como A-espaço quântico à direita e à esquerda com co-ação dada pelo co-produto em ambos os casos. Fixemos a notação $\bar{a} = a - \epsilon(a)1$, $\forall a \in A$.

Muitas vezes, estaremos interessados em cálculos que são A-co-módulo à direita e à esquerda ao mesmo tempo. Neste caso, temos a seguinte definição.

Definição 2.3.1 *Seja Γ um c.d.p.o. sobre A, dizemos que $(\Gamma, \Delta_L, \Delta_R)$ é bicovariante se (Γ, Δ_L) for covariante à esquerda e (Γ, Δ_R) for covariante à direita.*

Proposição 2.3.2 *Seja Γ um c.d.p.o. bicovariante sobre A, então $(id \otimes \Delta_R) \circ \Delta_L = (\Delta_L \otimes id) \circ \Delta_R$.*

Demonstração. Tome um monômio $a\mathrm{d}b \in \Gamma$ com $a, b \in A$, então

$$(id \otimes \Delta_R) \circ \Delta_L(a\mathrm{d}b) = (id \otimes \Delta_R)(\Delta a.(id \otimes \mathrm{d})\Delta b) = (id \otimes \Delta_R)(a_{(1)}b_{(1)} \otimes a_{(2)}\mathrm{d}b_{(2)}) =$$

$$= a_{(1)}b_{(1)} \otimes \Delta a_{(2)}.(\mathrm{d} \otimes id)\Delta b_{(2)} = a_{(1)}b_{(1)} \otimes a_{(2)}\mathrm{d}b_{(3)} \otimes a_{(3)}b_{(3)} = \Delta a_{(1)}.(id \otimes \mathrm{d})\Delta b_{(1)} \otimes a_{(2)}b_{(2)} =$$

$$= (\Delta_L \otimes id)(a_{(1)}\mathrm{d}b_{(1)} \otimes a_{(2)}b_{(2)}) = (\Delta_L \otimes id)(\Delta a.(\mathrm{d} \otimes id)\Delta b) = (\Delta_L \otimes id) \circ \Delta_R(a\mathrm{d}b)$$

donde segue o resultado. ■

Fixe agora, Γ c.d.p.o. covariante à esquerda sobre A. Então a condição 1 de 2.1.15 implica que Γ é um A-bimódulo bicovariante. Vamos reescrever alguns dos resultados da seção anterior numa linguagem mais conveniente.

Defina uma aplicação linear $\omega_\Gamma : A \to {}_{\mathrm{inv}}\Gamma$ por $\omega_\Gamma(a) = P_L(\mathrm{d}a)$. Quando não houver confusão, omitiremos o índice Γ e escreveremos apenas ω. Do fato que $\Gamma = A\mathrm{d}A$ e do lema 2.2.2 temos que $\omega(A) = {}_{\mathrm{inv}}\Gamma$, pois dado $\rho \in {}_{\mathrm{inv}}\Gamma$ então $\rho = \sum_i a_i\mathrm{d}b_i$ e $\rho = P_L(\rho) = P_L\left(\sum_i a_i\mathrm{d}b_i\right) = \sum_i \epsilon(a_i)\omega(b_i) \in \omega(A)$. Note que como $\mathrm{d}1 = 0$, também temos que $\rho = \omega\left(\sum_i \epsilon(a_i)\bar{b}_i\right)$, donde também ${}_{\mathrm{inv}}\Gamma = \omega(\ker \epsilon)$. Conforme foi mostrado na subseção 2.2.1, temos que $\Gamma = \omega(A)A = A\omega(A)$ e qualquer base do espaço vetorial $\omega(A)$ é uma base do A-módulo livre à esquerda (ou à direita) Γ. Uma vez que $\Delta_L(\mathrm{d}a) = a_{(1)} \otimes \mathrm{d}a_{(2)}$, segue das propriedades de P_L que

$$\omega(a) = S(a_{(1)})\mathrm{d}a_{(2)}; \tag{2.15}$$

$$\mathrm{d}a = a_{(1)}\omega(a_{(2)}). \tag{2.16}$$

Segue de propriedades obtidas na subseção 2.2.1 que

$$\omega(a) \triangleleft b = P_L(S(a_{(1)})\mathrm{d}a_{(2)}.b) = \epsilon(S(a_{(1)}))P_L(\mathrm{d}a_{(2)}.b) = P_L(\mathrm{d}a.b) =$$

$$= P_L(\mathrm{d}(ab)) - P_L(a\mathrm{d}b) = \omega(ab) - \epsilon(a)\omega(b) = \omega(\bar{a}b)$$

e por (2.4) e (2.5) temos

$$ad_R(b \otimes \omega(a)) = \omega(a) \triangleleft b = \omega(\bar{a}b) \tag{2.17}$$

$$b\omega(a)c = bc_{(1)}\omega(\bar{a}c_{(2)}). \tag{2.18}$$

Vamos fazer uma outra descrição do c.d.p.o. universal no caso de álgebras de Hopf. Considere $\widetilde{\Omega}^1 A = A \otimes \ker \epsilon$ e note que $\ker \epsilon = \{\bar{a} : a \in A\}$. Denotaremos o elemento $a \otimes \bar{b} \in \widetilde{\Omega}^1 A$ por $a\omega(b) := a \otimes \bar{b}$ e em particular $\omega(b) := 1 \otimes \bar{b}$. Veremos mais adiante que com essa escolha de notação teremos $\omega_{\widetilde{\Omega}^1 A}(a) = \omega(a)$, justificando a notação. Levando em consideração (2.16) e (2.18), podemos dar uma estrutura de A-bimódulos em $\widetilde{\Omega}^1 A$ por $c(b\omega(a)) = cb\omega(a)$ e $(b\omega(a))c = bc_{(1)}\omega(\bar{a}c_{(2)})$, além de definir uma aplicação linear $\mathrm{d} : A \to$

$\widetilde{\Omega}^1 A$ por $\mathrm{d}a = a_{(1)}\omega(a_{(2)})$. Veja que

$$a\mathrm{d}b + \mathrm{d}a.b = a(b_{(1)}\omega(b_{(2)})) + (a_{(1)}\omega(a_{(2)}))b = ab_{(1)}\omega(b_{(2)}) + a_{(1)}b_{(1)}\omega(\overline{a_{(2)}}b_{(2)}) =$$

$$ab_{(1)}\omega(b_{(2)}) + a_{(1)}b_{(1)}\omega(a_{(2)}b_{(2)}) - a_{(1)}\epsilon(a_{(2)})b_{(1)}\omega(b_{(2)}) = a_{(1)}b_{(1)}\omega(a_{(2)}b_{(2)}) = \mathrm{d}(ab)$$

ou seja, d satisfaz a regra de Leibniz. Além disso temos

$$\omega(a) = \epsilon(a_{(1)})\omega(a_{(2)}) = S(a_{(1)})a_{(2)}\omega(a_{(3)}) = S(a_{(1)})\mathrm{d}a_{(2)} \tag{2.19}$$

donde $\widetilde{\Omega}^1 A = A\mathrm{d}A$ e portanto $(\widetilde{\Omega}^1 A, \mathrm{d})$ é um c.d.p.o. sobre a álgebra de Hopf A.

Proposição 2.3.3 *O c.d.p.o.* $(\widetilde{\Omega}^1 A, \mathrm{d})$ *construído acima é o c.d.p.o. universal.*

Demonstração. Seja $(\Gamma, \widetilde{\mathrm{d}})$ um outro c.d.p.o. sobre A. Defina a aplicação linear $\psi : \widetilde{\Omega}^1 A \to \Gamma$ por $\psi(a\mathrm{d}b) = a\widetilde{\mathrm{d}}b$. Vejamos que ψ está de fato bem definida. Tome uma combinação linear nula $\sum_i a_i \mathrm{d}b_i$ em $\widetilde{\Omega}^1 A$. Pela definição de d em $\widetilde{\Omega}^1 A$ temos

$$0 = \sum_i a_i \mathrm{d}b_i = \sum_i a_i b_{i(1)}\omega(b_{i(2)}) = \sum_i a_i b_{i(1)} \otimes b_{i(2)} - \sum_i a_i b_i \otimes 1.$$

Aplicando $(\mu \otimes id)(id \otimes S \otimes id)(id \otimes \Delta)$ em ambos os lados temos

$$0 = \sum_i a_i b_{i(1)} S(b_{i(2)}) \otimes b_{i(3)} - \sum_i a_i b_i \otimes 1 = \sum_i a_i \otimes b_i - \sum_i a_i b_i \otimes 1$$

donde

$$\sum_i a_i \widetilde{\mathrm{d}} b_i = \sum_i a_i b_i \mathrm{d}1 = 0$$

como desejado. Verifica-se fácil que Γ é isomorfo ao c.d.p.o. quociente $\widetilde{\Omega}^1 A/N$ onde $N = \ker\psi$ é A-sub-bimódulo. ■

Corolário 2.3.4 *O c.d.p.o.* $(\widetilde{\Omega}^1 A, \mathrm{d})$ *é isomorfo a c.d.p.o.* $(\Omega^1 A, \mathrm{d}_U)$.

Demonstração. O resultado é trivial uma vez que ambos são cálculos universais. Temos que

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\Omega}^1 A = A \otimes \ker\epsilon & \longrightarrow & \Omega^1 A = \ker\mu \\ \sum_i a_i \otimes b_i & \longmapsto & \sum_i a_i S(b_{i(1)}) \otimes b_{i(2)} \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} \Omega^1 A = \ker\mu & \longrightarrow & \widetilde{\Omega}^1 A = A \otimes \ker\epsilon \\ \sum_i a_i \otimes b_i & \longmapsto & \sum_i a_i b_{i(1)} \otimes \overline{b_{i(2)}} \end{array}$$

estabelecem o isomorfismo em questão. ■

Do corolário 2.1.19 temos que $\widetilde{\Omega}^1 A$ é covariante à esquerda e das fórmulas (2.15) e (2.19) temos que $\omega(a) = P_L(\mathrm{d}a) = \omega_{\widetilde{\Omega}^1 A}(a)$ justificando nossa notação. A aplicação ω assim definida é chamada de forma de Maurer-Cartan.

Para um c.d.p.o. covariante à esquerda Γ sobre A, definimos

$$R_\Gamma = \{a \in \ker \epsilon : \omega_\Gamma(a) = 0\}.$$

O próximo teorema mostrará que $\Gamma \mapsto R_\Gamma$ é uma correspondência biunívoca entre c.d.p.o.'s covariantes à esquerda sobre A e ideais à direita de $\ker \epsilon$.

Teorema 2.3.5 *Seja R um ideal à direita de $\ker \epsilon$. Então $N = A\omega_{\widetilde{\Omega}^1 A}(R)$ é um A-sub-bimódulo de $\widetilde{\Omega}^1 A$ e o quociente $\Gamma = \widetilde{\Omega}^1 A/N$ é um c.d.p.o. tal que $R_\Gamma = R$. Reciprocamente, se Γ é um c.d.p.o. covariante à esquerda, então R_Γ é um ideal à direita de $\ker \epsilon$ e Γ é isomorfo ao c.d.p.o. $\widetilde{\Omega}^1 A/\left(A\omega_{\widetilde{\Omega}^1 A}(R_\Gamma)\right)$.*

Demonstração. Iremos omitir o índice em $\omega_{\widetilde{\Omega}^1 A}$. Primeiro note que se R é ideal à direita de $\ker \epsilon$ então R também é ideal à direita de A, de fato $\forall a \in A$ sabemos que $R\bar{a} \subseteq R$, portanto dado $r \in R$ temos que $\exists s \in R$ tal que $r\bar{a} = s$ donde $ra = s + r\epsilon(a) \in R$. Então para qualquer $b \in R \subseteq \ker \epsilon$ temos $\omega(b)c = c_{(1)}\omega(bc_{(2)}) \in A\omega(R)$, donde $N = A\omega(R)$ é um A-sub-bimódulo de $\widetilde{\Omega}^1 A$ e $\Gamma = \widetilde{\Omega}^1 A/N$ é um c.d.p.o. sobre A. Se Δ_L denota a co-ação em $\widetilde{\Omega}^1 A$, temos que $\Delta_L(a\omega(b)) = \Delta(a)(1 \otimes \omega(b))$ donde $\Delta_L(N) \subseteq A \otimes N$. Podemos assim definir uma co-ação em Γ que claramente vai fazer de Γ um c.d.p.o. covariante à esquerda. Resta-nos mostrar que $R = R_\Gamma$, mas

$$\omega_\Gamma(a) = S(a_{(1)})\widetilde{\mathrm{d}}a_{(2)} = S(a_{(1)})\pi \circ \mathrm{d}a_{(2)} = S(a_{(1)})\pi(a_{(2)}\omega(a_{(3)})) = S(a_{(1)})a_{(2)}\pi(\omega(a_{(3)})) = \pi(\omega(a)).$$

Logo, se $a \in R$ é claro que $\omega_\Gamma(a) = 0$, e reciprocamente se $\omega_\Gamma(a) = 0$ então $\omega(a) \in A\omega(R)$. Como $a \in \ker \epsilon$ temos $\omega(a) = 1 \otimes a \in A \otimes R$ donde $a \in R$, como queríamos.

Reciprocamente dado Γ é um c.d.p.o. covariante à esquerda, então vale (2.17). Assim, se $a \in R_\Gamma$ e $b \in \ker \epsilon$ temos $\omega_\Gamma(a) = 0$ e $\omega_\Gamma(ab) = ad_R(b \otimes \omega_\Gamma(a)) = 0$. Logo R_Γ é um ideal à direita de $\ker \epsilon$. Resta-nos mostrar que $\Gamma \cong \widetilde{\Omega}^1 A/(A\omega(R_\Gamma))$. Seja $\psi : \widetilde{\Omega}^1 A \to \Gamma$ é dada por $\psi(a\mathrm{d}b) = a\widetilde{\mathrm{d}}b$, se $a \in A$ e $b \in \ker \epsilon$ então

$$\psi(a\omega(b)) = \psi(aS(b_{(1)})\mathrm{d}b_{(2)}) = aS(b_{(1)})\widetilde{\mathrm{d}}b_{(2)} = a\omega_\Gamma(b).$$

Tomando $b \in R_\Gamma$ na expressão acima temos $\psi(a\omega(b)) = 0$, ou seja, $A\omega(R_\Gamma) \subseteq \ker \psi$. Segue que temos uma aplicação $\tilde{\psi} : \widetilde{\Omega}^1 A/(A\omega(R_\Gamma)) \to \Gamma$ bem definida. Conforme mencionamos acima podemos escolher elementos $b_i \in A$ de forma que $\{\omega_\Gamma(b_i)\}_i$ é uma base de A-módulo livre à esquerda Γ. Podemos então, definir uma morfismo de A-módulos $\varphi : \Gamma \to \widetilde{\Omega}^1 A/(A\omega(R_\Gamma))$ por $\varphi\left(\sum_i a_i\omega_\Gamma(b_i)\right) = \pi\left(\sum_i a_i\omega(b_i)\right)$ e é claro que $\varphi = \tilde{\psi}^{-1}$, donde segue o resultado. ■

Proposição 2.3.6 *Seja A uma $*$-álgebra de Hopf e Γ um c.d.p.o. covariante à esquerda, então Γ é um $*$-cálculo se e somente se $S(R_\Gamma)^* \subseteq R_\Gamma$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Tome $a \in R_\Gamma$. Das propriedades de $*$-álgebra de Hopf temos

$\Delta(S(a)^*) = S(a_{(2)})^* \otimes S(a_{(1)})^*$. Então $\epsilon(S(a)^*) = \overline{\epsilon(a)} = 0$ e

$$\omega_\Gamma(S(a)^*) = S(S(a_{(2)})^*)\mathrm{d}(S(a_{(1)})^*) = a_{(2)}^*(\mathrm{d}(S(a_{(1)}))^* = (\mathrm{d}(S(a_{(1)}))a_{(2)})^* =$$

$$(\mathrm{d}(S(a_{(1)})a_{(2)} - S(a_{(1)})\mathrm{d}a_{(2)})^* = (\mathrm{d}(\epsilon(a)1) - \omega_\Gamma(a))^* = 0.$$

($\Leftarrow$) Novamente omitimos o índice em $\omega_{\widetilde{\Omega}^1 A}$. Conforme a seção 2.1.1, temos que $\widetilde{\Omega}^1 A$ é um $*$-cálculo de modo que se $a \in R_\Gamma$ então $\omega(a)^* = -\omega(S(a)^*) \in \omega(R_\Gamma)$, ou seja, $\omega(R_\Gamma)^* \subseteq \omega(R_\Gamma)$. Uma vez que R_Γ é um ideal à direita de A, por (2.18) temos que $\omega(R_\Gamma)A \subseteq A\omega(R_\Gamma)$, donde vale que $(A\omega(R_\Gamma))^* \subseteq \omega(R_\Gamma)^* A^* \subseteq \omega(R_\Gamma)A \subseteq A\omega(R_\Gamma)$. Portanto podemos passar a involução do cálculo universal para o quociente que é isomorfo a Γ e este torna-se um $*$-cálculo. ■

Conforme verificamos no ínicio desta sub-seção, temos que $\omega : \ker \epsilon \to {}_{\mathrm{inv}}\Gamma$ é sobrejetora. Além disso $R = \ker \omega$, donde ${}_{\mathrm{inv}}\Gamma \cong \ker \epsilon / R$, e o cálculo que acabamos de achar, de acordo com a proposição 2.2.3 nada mais é que $\Gamma = A \otimes \ker \epsilon / R$. Além disso, pela proposição 2.2.6, nos diz que uma base do espaço vetorial ${}_{\mathrm{inv}}\Gamma$ é uma base do módulo livre Γ tanto à esquerda quanto à direita. Por essa razão definimos.

Definição 2.3.7 *Seja Γ um c.d.p.o. sobre uma álgebra de Hopf A, a dimensão do cálculo Γ é a dimensão de ${}_{\mathrm{inv}}\Gamma$ como espaço vetorial.*

Exemplo 2.3.8 (O cálculo tridimensional de $\mathcal{O}(SL_q(2))$ [41]) *Seja $A = \mathcal{O}(SL_q(2))$ e seja R o ideal à direita de $\ker \epsilon$ gerado pelos seis elementos*

$$a + q^{-2}d - (1 + q^{-2})1, \quad b^2, \quad c^2, \quad bc, \quad (a-1)b, \quad (a-1)c.$$

Usando que ϵ é morfismo de álgebras e que $\epsilon(a) = \epsilon(d) = 1$ e $\epsilon(b) = \epsilon(c) = 0$ é fácil ver que esse elementos estão de fato em $\ker \epsilon$. Vamos verificar que $\ker \epsilon / R$ é tridimensional e portanto pela definição acima teremos que o cálculo em questão será tridimensional. Do corolário C.1.3 temos que $\mathcal{B} = \left\{\delta_{0,lm} a^k b^l c^m d^n : k, l, m, n \in \mathbb{N}\right\} \setminus \{0\}$ é uma base para o espaço vetorial $\mathcal{O}(SL_q(2))$. Os elementos de $\ker \epsilon$ serão então combinação linear de elementos da forma $a^k b^l d^n$ com $l > 0$, $a^k c^m d^n$ com $m > 0$ e $\sum_{k,n} \lambda_{kn} a^k d^n$ com $\sum_{k,n} \lambda_{kn} = 0$. Vejamos o que acontece com esses elementos quando passados para o quociente $\ker \epsilon / R$.

Vamos continuar denotando os elementos em $\ker \epsilon / R$ por a, b, c, d. Primeiro vamos analisar os elementos da forma $a^k b^l d^n$ com $l > 0$. Se $l > 1$ como $b^2 = 0$ temos que $a^k b^l d^n = 0$. Suponhamos então $l = 1$. Neste caso usando a relação $ab = b$ repetidas vezes caímos em um elemento da forma bd^n. Lembrando da relação $bd = q^{-1}db$ em $\mathcal{O}(SL_q(2))$ temos que

$$bd^n = q^{-1}dbd^{n-1} = q^{-1}(q^2 + 1 - q^2 a)bd^{n-1} =$$

$$= (q + q^{-1})bd^{n-1} - qabd^{n-1} = q^{-1}bd^{n-1}$$

onde na segunda igualdade usamos a primeira relação que define R e na última igualdade *usamos que $ab = b$. Repetindo o processo temos que $bd^n = q^{-n}b$. Ou seja reduzimos todos os elementos da forma $a^k b^l d^n$ com $l > 0$ para 0 ou b. O mesmo acontece com $a^k c^m d^n$ com $m > 0$. Resta-nos verificar o que acontece com as combinações de $a^k d^n$. Usando que $ad = 1 + q^{-1}bc$ em $\mathcal{O}(SL_q(2))$ e que $bc = 0$ no quociente, reduzimos para combinações de potências de a e d. Usando ainda a primeira relação $d = q^2 + 1 - q^2 a$, reduzimos para polinômios em a. Agora para $k \geq 2$, temos que*

$$a^k = (1 + q^{-2})a^{k-1} - q^{-2}a^{k-1}d = (1 + q^{-2})a^{k-1} - q^{-2}a^{k-2}(1 + q^{-1}bc) =$$

$$= (1 + q^{-2})a^{k-1} - q^{-2}a^{k-2}$$

donde podemos reduzir todo polinômio em a para um polinômio de primeiro grau $\lambda a + \mu$. Como ϵ é morfismo de álgebras e R é ideal temos que ϵ passa para o quociente de $\ker \epsilon$, *ou seja, devemos ter que $\epsilon(\lambda a + \mu) = 0$, ou ainda $\mu = -\lambda$. Concluímos assim que uma base de* $\ker \epsilon / R$ *é dada por $\{b, c, a - 1\}$.*

É claro que os resultados para cálculos covariantes à esquerda valem para cálculos covariantes à direita. Algumas modificações necessárias são definir uma aplicação linear $\eta = \eta_\Gamma : A \to \Gamma_{\text{inv}}$ e temos as seguintes formas análogas

$$\eta(a) = \mathrm{d}a_{(1)}S(a_{(2)}) \qquad \text{e} \qquad \mathrm{d}a = \eta(a_{(1)})a_{(2).}$$

Se definirmos $L_\Gamma = \{a \in \ker \epsilon : \eta_\Gamma(a) = 0\}$ então $\Gamma \mapsto L_\Gamma$ é uma correspondência biunívoca entre cálculos covariantes à direita e ideais à esquerda de $\ker \epsilon$.

Lembre-se que num cálculo covariante sobre um espaço quântico qualquer (à direita ou à esquerda) a co-ação do bimódulo está unicamente determinada pela co-ação na álgebra e pela diferenciação. No caso em que A é uma álgebra de Hopf, uma pergunta natural é em que condições um cálculo covariante à esquerda é bicovariante. Lembre-se da co-ação adjunta à direita $Ad_R(a) = a_{(2)} \otimes S(a_{(1)})a_{(3)}$ definida no exemplo 1.1.57 e note que se Γ é um c.d.p.o. bicovariante então

$$\Delta_R(\omega(a)) = \Delta_R(S(a_{(1)})\mathrm{d}a_{(2)}) = S(a_{(2)})\mathrm{d}a_{(3)} \otimes S(a_{(1)})a_{(4)} = (\omega \otimes id)(Ad_R(a)). \qquad (2.20)$$

Proposição 2.3.9 *Sejam Γ um c.d.p.o. sobre A e R seu ideal à direita de* $\ker \epsilon$ *associado. O c.d.p.o. Γ é bicovariante se e somente se R é invariante pela co-ação adjunta à direita, ie, $Ad_R(R) \subseteq R \otimes A$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se Γ é bicovariante, então vale (2.20) e como $R = \{a \in \ker \epsilon : \omega_\Gamma(a) = 0\}$ temos que $Ad_R(R) \subseteq R \otimes A$.

($\Leftarrow$) Pelo corolário 2.1.19 temos que $\widetilde{\Omega}^1 A$ é covariante à esquerda e de maneira análoga temos que $\widetilde{\Omega}^1 A$ é covariante à direita donde $\widetilde{\Omega}^1 A$ é bicovariante. Segue de (2.20) aplicado a $\widetilde{\Omega}^1 A$ e Ad_R-invariância de R que $\Delta_R(A\omega(R)) \subseteq A\omega(R) \otimes A$ onde Δ_R é a co-ação em $\widetilde{\Omega}^1 A$. Podemos assim passar a co-ação Δ_R para o quociente $\widetilde{\Omega}^1 A/N$ onde $N = A\omega(R)$ de modo que $\widetilde{\Omega}^1 A/N$ se torna um cálculo covariante à direita. Como Γ é isomorfo à $\widetilde{\Omega}^1 A/N$ segue o resultado. ■

Exemplo 2.3.10 (Os cálculos quadridimensionais de $\mathcal{O}(SL_q(2))$ [41]) *Considere a álgebra $A = \mathcal{O}(SL_q(2))$ e sejam R_+ e R_- os ideais à direita de* $\ker\epsilon$ *gerados pelos elementos*

$$b^2, \quad c^2, \quad b(a-d), \quad c(a-d), \quad a^2 + q^2 d^2 - (1+q^2)(ad + q^{-1}bc),$$

$$x_\pm b, \quad x_\pm c, \quad x_\pm (a-d), \quad x_\pm (a + q^{-2} d - (1+q^{-2})1)$$

onde $x_\pm := q^2 a + d \mp (q^{-1} + q^3)1$. Fazendo uma análise similar ao caso tridimensional, mostramos que $\ker\epsilon/R$ *tem dimensão* 4. *Vejamos que esses ideais são Ad_R-invariantes. Para isso é suficiente analisar o que acontece nos geradores. De fato se y é um gerador e* $z \in \ker\epsilon$ *temos supondo que y é Ad_R-invariante*

$$Ad_R(yz) = (yz)_{(2)} \otimes S((yz)_{(1)})(yz)_{(3)} = y_{(2)} z_{(2)} \otimes S(z_{(1)}) S(y_{(1)}) y_{(3)} z_{(3)} =$$

$$= y z_{(2)} \otimes S(z_{(1)}) z_{(3)} \in R \otimes A.$$

A última relação de pertinência vale pois

$$(\epsilon \otimes id)(z_{(2)} \otimes S(z_{(1)}) z_{(3)}) = \epsilon(z_{(2)}) S(z_{(1)}) z_{(3)} = \epsilon(z)1 = 0$$

e usando o lema A.2.8 temos que $z_{(2)} \otimes S(z_{(1)}) z_{(3)} \in \ker\epsilon \otimes A$. *Os cálculos para mostrar que os geradores são Ad_R-invariantes são elementares, no entanto trabalhosos. Segue os cálculos quadridimensionais são bicovariantes.*

Já sabemos que c.d.p.o. covariantes à esquerda (respectivamente à direita) são bimódulos covariantes à esquerda (respectivamente à direita). E da proposição 2.3.2 temos que um c.d.p.o. bicovariante é um bimódulo bicovariante. Podemos, assim, utilizar os resultados sobre bimódulos e concluir que todo c.d.p.o. covariante sobre uma álgebra de Hopf é livre.

Capítulo 3

Fibrados principais quânticos

Neste capítulo definiremos o objeto principal de estudo dessa dissertação, a saber, fibrados principais quânticos. Iniciaremos revisando a teoria clássica, conforme [25] para o caso topológico e [28], [34] para o caso diferenciável. Tal revisão vem para motivar as definições a serem dadas no caso não-comutativo. A segunda seção estudará o conceito de extensões de Hopf-Galois, alguns lemas para trabalhar com elas e um teorema que terá uma interpretação interessante no próximo capítulo quando estivermos falando de fibrados vetoriais quânticos associados. A terceira seção tratará de fibrados principais quânticos propriamente ditos e conexões neles. Faremos uma discussão acerca de nossa escolha para a definição e trataremos alguns exemplos como o caso de espaços homogêneos quânticos.

3.1 Fibrados principais (caso clássico)

3.1.1 Fibrados principais contínuos

Nessa seção revisaremos alguns conceitos da teoria clássica de fibrados principais para motivar nossa generalização para o caso não-comutativo. Por essa razão, sempre que falarmos de espaços topológicos, entenda-se espaço topológico compacto Hausdorff para satisfazermos às hipóteses da teoria de Gelfand-Naimark no caso de álgebras com unidade. Para mais detalhes e algumas demonstrações que omitiremos, ver [25] e [28].

Definição 3.1.1 *Uma tripla (P, M, π) onde P e M são espaços topológicos e $\pi : P \to M$ é uma aplicação contínua é dita ser um fibrado se π é aberta e sobrejetora. Neste caso, P é chamado de espaço total, M de espaço base, π de projeção e para cada $m \in M$, $\pi^{-1}(m)$ é chamado de fibra.*

Definição 3.1.2 *Uma seção em um fibrado (P, M, π) é uma aplicação contínua $\sigma : M \to P$ tal que $\pi \circ \sigma = id_M$. O espaço das seções contínuas será denotado por $\Gamma(P)$.*

Definição 3.1.3 *Sejam P um espaço topológico, G um grupo topológico e $\cdot : P \times G \to P$ uma aplicação contínua onde denotaremos $\cdot(p, g)$ simplesmente por pg. Diremos que $(P, \cdot)$ é um G-espaço à direita se são satisfeitas:*

1. *$(pg)h = p(gh)$ para quaisquer $p \in P$, $g, h \in G$;*

2. *$pe = p$ para qualquer $p \in P$ onde e é a unidade do grupo G.*

Para cada $g \in G$, denotaremos $R_g : P \to P$ por $R_g(p) = pg$.

É claro que temos uma definição análoga para G-espaços à esquerda.

Proposição 3.1.4 *Para um G-espaço P a aplicação $p \mapsto pg$ é um homeomorfismo de P em P e $\pi_G : P \to P/G$ é uma aplicação aberta. No caso em que P/G é Hausdorff, temos que $(P, P/G, \pi_G)$ é um fibrado.*

Demonstração. Temos que $p \mapsto pg$ é claramente contínua com inversa dada por $p \mapsto pg^{-1}$ que também é contínua. Seja U aberto de P então $\pi^{-1}\pi(U) = \bigcup_{g \in G} Ug$ que é aberto por ser uma união de abertos. Segue que $\pi(U)$ é aberto pela definição da topologia em P/G. ■

Definição 3.1.5 *Diremos que (P, M, π) é um G-fibrado se P possui uma estrutura de G-espaço e existe um homeomorfismo $f : M \to P/G$ de forma que $\pi_G = f \circ \pi$. Dois G-fibrados (P, M, π) e (P', M, π') sobre a mesma base são isomorfos se existe um homeomorfismo $\psi : P \to P'$ tal que $\psi(pg) = \psi(p)g$ e $\pi'(\psi(p)) = \pi(p)$.*

Note que uma fibra $\pi^{-1}(m)$ de um G-fibrado é a órbita de cada ponto $p \in \pi^{-1}(m)$ e portanto G age transitivamente em $\pi^{-1}(m)$. Suponha agora que a ação de G seja livre em P, isto é, se $pg = p$ para algum $p \in P$ então $g = e$. Defina $\widehat{P} = \{(p, pg) \in P \times P : g \in G\}$, então pelo fato da ação ser transitiva nas fibras e fiel existe uma aplicação bem definida $\mathsf{T} : \widehat{P} \to G$ dada por $\mathsf{T}(p, pg) = g$ ou equivalentemente $p\mathsf{T}(p, p') = p'$. Tal função é chamada de aplicação de translação e note que ela possui as seguintes propriedades:

(i) $\mathsf{T}(p, p) = e$;

(ii) $\mathsf{T}(p, p')\mathsf{T}(p', p'') = \mathsf{T}(p, p'')$;

(iii) $\mathsf{T}(p', p) = \mathsf{T}(p, p')^{-1}$ para $p, p', p'' \in P$.

Definição 3.1.6 *Um G-fibrado (P, M, π) é dito ser principal se G age livremente em P e a aplicação de translação é contínua. Neste caso, chamamos G de grupo estrutural.*

Proposição 3.1.7 *Seja (P, M, π) um G-fibrado principal então cada fibra é homeomorfa a G.*

Demonstração. Considere uma fibra $\pi^{-1}(m)$, fixe um elemento $p \in \pi^{-1}(m)$ e defina uma aplicação $u : G \to \pi^{-1}(m)$ por $u(g) = pg$, que é contínua. A inversa de u é dada por $p' \mapsto \mathsf{T}(p, p')$ que também é contínua e portanto u é um homeomorfismo. ■

Exemplo 3.1.8 *Seja $P = M \times G$ e defina $(m, g)h = (m, gh)$, então (P, M, π_1) é um G-fibrado principal.*

Definição 3.1.9 *Diremos que um G-fibrado principal (P, M, π) é trivial se ele for isomorfo ao fibrado $(M \times G, M, \pi_1)$.*

Definição 3.1.10 *Um G-fibrado principal é dito ser localmente trivial se $\forall m \in M$ existe uma vizinhaça aberta U de M e um homeomorfismo $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times G$ tal que $\pi_1(\varphi(p)) = \pi(p)$ e se $\varphi(pg) = \varphi(p)g$ para $p \in \pi^{-1}(U)$ e $g \in G$. O par (U, φ) é chamado de trivialidade local. Um atlas é uma coleção de trivialidades locais tal que os abertos cobrem M.*

Poderíamos definir um fibrado principal sem exigir a continuidade da aplicação de translação, mas exigindo a existência de um atlas. Neste caso é fácil verificar, usando as trivialidades locais, que a aplicação de translação é de fato contínua.

Definição 3.1.11 *Uma seção local em um G-fibrado principal (P, M, π) é uma aplicação $\sigma : U \to P$ tal que $\pi \circ \sigma = id_U$ onde U é um aberto de M.*

Note que para um fibrado localmente trivial, sempre existem seções locais. De fato temos o seguinte resultado.

Proposição 3.1.12 *Um G-fibrado principal (P, M, π) é trivial se e só se admite uma seção global.*

Demonstração. A implicação direta é imediata. Para a recíproca, seja $\sigma : M \to P$ uma seção global e defina $\Phi : M \times G \to P$ por $\Phi(m, g) = \sigma(m)g$. A inversa de Φ é dada por $\Phi^{-1}(p) = (\pi(p), \mathsf{T}((\sigma \circ \pi)(p), p))$ que também é contínua. Segue que Φ é o isomorfismo desejado. ■

Fixe uma atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ para um G-fibrado principal localmente trivial (P, M, π). Dado um par $(i, j) \in I \times I$ definimos a aplicação $\psi_{ji} : U_i \cap U_j \to G$ por $\psi_{ji}(m) = \pi_2(\varphi_j(p))\pi_2(\varphi_i(p))^{-1}$ para $p \in \pi^{-1}(m)$ e onde π_2 é a projeção na segunda coordenada. Para ver que ψ_{ji} não depende de p, escolha outro $p' \in \pi^{-1}(m)$ então existe $g \in G$ tal que $p' = pg$ e $\pi_2(\varphi_j(p'))\pi_2(\varphi_i(p'))^{-1} = \pi_2(\varphi_j(p))gg^{-1}\pi_2(\varphi_i(p))^{-1} = \pi_2(\varphi_j(p))\pi_2(\varphi_i(p))^{-1}$. Escolhendo seções locais apropriadas, podemos verificar que ψ_{ji} é uma composição de funções contínuas e portanto contínua. Além disso temos que o conjunto de funções $\{\psi_{ji}\}_{i,j \in I}$ satisfaz as seguinte propriedades:

(t1) $\psi_{ki} = \psi_{kj} \circ \psi_{ji}$ em $U_i \cap U_j \cap U_k$;

(t2) $\psi_{ii} \equiv e$ onde e é o elemento neutro de G;

(t3) $\psi_{ij}(m) = \psi_{ji}(m)^{-1}$ para $m \in M$.

Definição 3.1.13 *Um sistema de funções de transição em um espaço topológico M relativo a uma cobertura aberta $\{U_i\}_{i \in I}$ é um conjunto de aplicações contínuas $\{\psi_{ji} : U_i \cap U_j \to G\}$ tal que a propriedade **(t1)** acima é satisfeita.*

Note que $\psi_{ii}\psi_{ii} = \psi_{ii}$ implica a propriedade **(t2)** e $\psi_{ij}\psi_{ji} = \psi_{ii} = e$ implica a propriedade **(t3)**. A construção acima nos diz que temos um sistema de funções de transição definido a partir de um atlas.

Definição 3.1.14 *Dois sistemas de funções de transição $\{\psi_{ji}\}_{i,j\in I}$ e $\{\psi'_{ji}\}_{i,j\in I}$ relativos a uma mesma cobertura aberta $\{U_i\}_{i\in I}$, são ditos serem equivalentes se para cada $i \in I$ existe uma aplicação contínua $r_i : U_i \to G$ tal que $\psi'_{ji}(m) = r_j(m)\psi_{ji}(m)r_i(m)^{-1}$ para $m \in U_i \cap U_j$.*

Teorema 3.1.15 *Dados dois G-fibrados principais locamente triviais (P, M, π), (P', M, π') com mesma base M e dados atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ e $\{(U_i, \varphi'_i)\}$ para P e P' respectivamente, temos que P é isomorfo a P' se e só se os sistemas de funções de transição achados a partir dos dois atlas são equivalentes.*

Demonstração. Ver [25]. ■

Suponha dados (P, M, π) um G-fibrado principal e F um G-espaço à esquerda. Defina uma relação de equivalência em $P \times F$ por $(p, y) \sim (p', y') \Leftrightarrow \exists g \in G$ tal que $p' = pg$ e $y' = g^{-1}y$. Defina $E = P \times_G F := P \times F/\sim$ e denote as classes por $[p, y]$. É claro que a função $\pi_E : E \to M$ dada por $\pi_E([p, y]) = \pi(p)$ está bem definida.

Proposição 3.1.16 *No contexto acima (E, M, π_E) é um fibrado com fibra homeomorfa a F. Tal fibrado é denominado de fibrado associado a P.*

Demonstração. É claro que π_E é sobrejetora e é contínua pelas propriedades da topologia quociente. Vejamos que π_E é uma aplicação aberta. Dado A aberto em E, denotando por $\widetilde{\pi} : P \times F \to E$ a projeção, temos que $\widetilde{\pi}^{-1}(A)$ é aberto em $P \times F$ e $\pi(\widetilde{\pi}^{-1}(A)) = \pi_E(A)$. Pela definição da topologia produto temos que $\widetilde{\pi}^{-1}(A) = \bigcup_{i\in I} V_i \times W_i$ com V_i aberto em P e W_i aberto em F. Então $\pi_E(A) = \pi\left(\bigcup_{i\in I} V_i\right)$ que é um conjunto aberto em M por π ser uma aplicação aberta.

Dado $m \in M$, vamos mostrar que $\pi_E^{-1}(m)$ é homeomorfo a F. Fixe $p_0 \in \pi^{-1}(m)$ e defina $f : F \to \pi_E^{-1}(m)$ por $f(y) = [p_0, y]$ que está de fato bem definida pois $\pi_E([p_0, y]) = \pi(p_0) = m$, e é claramente contínua. Vejamos que f tem inversa contínua. Para isto note que $\pi_E^{-1}(m) = \widetilde{\pi}(\pi^{-1}(m) \times F)$ e defina uma aplicação contínua $g' : \pi^{-1}(m) \times F \to F$ por $g'(p, y) = \mathsf{T}(p_0, p)y$. Temos que $g'(pg, g^{-1}y) = \mathsf{T}(p_0, pg)g^{-1}y = \mathsf{T}(p_0, p)gg^{-1}y = \mathsf{T}(p_0, p)y$ donde g' induz uma aplicação contínua $g : \pi_E^{-1}(m) \to F$. Utilizando as propriedades da aplicação de translação, vemos que g é a inversa de f. ■

No caso em que (P, M, π) é um fibrado principal localmente trivial, temos que (E, M, π_E) é localmente trivial no sentido que para cada $m \in M$ existe uma vizinhaça aberta U de m e um homeomorfismo $\zeta : \pi_E^{-1}(U) \to U \times F$. De fato, tome uma trivialidade local $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times G$ de P. Observe que $\pi_E^{-1}(U) = \widetilde{\pi}(\pi^{-1}(U) \times F)$ e $G \times_G F$ é homeomorfo a F por $[g, y] \mapsto y$ e $y \mapsto [y, e]$. Usando ainda que φ preserva a ação à direita de G temos os homeomorfismos

$$\pi_E^{-1}(U) \cong \pi^{-1}(U) \times_G F \cong U \times G \times_G F \cong U \times F. \tag{3.1}$$

Definição 3.1.17 *Sejam P um G-espaço à direita e F um G-espaço à esquerda. Uma função contínua $\phi : P \to F$ é dita ser G-equivariante se $\phi(pg) = g^{-1}\phi(p)$. Denotaremos o espaço das funções equivariantes por $C_G(P, F)$.*

Teorema 3.1.18 *Sejam (P, M, π) um G-fibrado principal, F um G-espaço à esquerda e $E = P \times_G F$ o fibrado associado. Então as seções de E estão em correspondência biunívoca com funções equivariantes $\phi : P \to F$ através de $s_\phi(m) = [p, \phi(p)]$ para $p \in \pi^{-1}(m)$.*

Demonstração. Para ver que $s_\phi$está bem definida tome outro $p' = pg \in \pi^{-1}(m)$ então $[p', \phi(p')] = [pg, g^{-1}\phi(p)] = [p, \phi(p)]$. Temos que $s_\phi \circ \pi$ é contínua pois $s_\phi(\pi(p)) = \widetilde{\pi}(p, \phi(p))$, onde $\widetilde{\pi}$ é como na proposição anterior, o que implica a continuidade de s_ϕ. Pelo fato de G agir livremente em P, para um elemento $x \in E$ e para cada $p \in \pi^{-1}(\pi_E(x))$ existe único $y \in F$ tal que $[p, y] = x$. Dada uma seção s, defina ϕ_s pela igualdade $s(\pi(p)) = [p, \phi_s(p)]$. Neste caso temos que $s(\pi(pg)) = s(\pi(p)) = [p, \phi_s(p)] = [pg, g^{-1}\phi_s(p)]$. Pela unicidade de y como acima temos que $\phi_s(pg) = g^{-1}\phi_s(p)$.

É claro que as aplicações $\phi \mapsto s_\phi$ e $s \mapsto \phi_s$ serão mutuamente inversas uma vez que mostrarmos que ϕ_sé contínua. Sejam $p_0 \in P$, $y_0 = \phi_s(p_0)$ e $m_0 = \pi(p_0)$, ou seja, $s(m_0) = [p_0, y_0]$. Tome W vizinhaça aberta de y_0. Pela continuidade da ação de G em F, existem vizinhaças abertas W' de y_0e N de $e \in G$ de forma que $NW' \subseteq W$. Pela continuidade da aplicação de translação podemos tomar V vizinhança aberta de p_0 tal que $\mathsf{T}\left((V \times V) \cap \widehat{P}\right) \subseteq N$. Como s é contínua existe U vizinhança aberta de $m_0$tal que $s(U) \subseteq \widetilde{\pi}(V \times W')$. Defina $V' = \pi^{-1}(U \cap V)$, que contém p_0, e note que $\pi(V') = U$ e $s(U) \subseteq \widetilde{\pi}(V' \times W')$ uma vez que $\pi_E \circ s = id_M$. Vamos provar que $\phi_s(V') \subseteq W'$. Dado $p \in V'$ temos $\pi(p) = m \in U$ e $s(m) = [p', y']$ com $p' = p' \in V'$ e $y' \in W'$. Mas $[p', y'] = [p\mathsf{T}(p, p'), y'] = [p, \mathsf{T}(p, p')y']$ donde $\phi_s(p) = \mathsf{T}(p, p')y' \in NW' \subseteq W$. ∎

Definição 3.1.19 *Um G-espaço à esquerda $(V, \cdot)$ tal que V é um espaço vetorial (sobre $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$) e $\cdot(g, \_)$ é uma transformação linear $\forall g \in G$ será denominado G-espaço vetorial à esquerda.*

Em outras palavras temos uma representação contínua de G em V através da aplicação $\varrho : G \to \mathrm{Aut}(V)$ dada por $\varrho(g) = L_g$, onde $L_g(v) = \cdot(g, v)$.

Definição 3.1.20 *Um fibrado vetorial é um fibrado (E, M, π) munido de estruturas vetoriais para cada fibra $\pi^{-1}(m)$ de forma que para cada $m \in M$ existe uma vizinhaça aberta U de m e um homeomorfismo $\varphi : \pi^{-1}(U) \to M \times V_m$, onde V_m é um espaço vetorial, de forma que para cada $m' \in U$, a restrição de φ dá um isomorfismo de espaços vetoriais entre $E_{m'} := \pi^{-1}(m')$ e $\{m'\} \times V_m$.*

Na definição acima não exigimos que os espaços vetoriais V_m tenha a mesma dimensão, mas é fato que a dimensão de V_m é constante em cada componente conexa de M.

Observação 3.1.21 *Se (P, M, π) for um G-fibrado principal localmente trivial e V for um G-espaço vetorial à esquerda, temos que o fibrado associado $E = P \times_G V$ é um fibrado vetorial. De fato, note que $\pi_E^{-1}(m) = \{[p, v] : v \in V\}$ para qualquer $p \in \pi^{-1}(m)$ fixo donde podemos dar uma estrutura de espaço vetorial em $E_m := \pi_E^{-1}(m)$ por $\lambda[p, v_1] + [p, v_2] = [p, \lambda v_1 + v_2]$. Utilizando os isomorfismos de (3.1) e essa estrutura de espaço vetorial para E_m segue claro que estamos na hipóteses da definição de fibrado vetorial. Neste caso dizemos que E é um fibrado vetorial associado. Definindo uma multiplicação de $C(M)$ em $C_G(P, V)$ por $(\alpha\phi)(p) = \alpha(\pi(p))\phi(p)$, que é equivariante pois G age linearmente em V, temos que $C_G(P, V)$ é um $C(M)$-módulo e o teorema 3.1.18 nos dá um isomorfismo de $C(M)$-módulos $\Gamma(E) \cong C_G(P, V)$.*

3.1.2 Fibrados principais diferenciáveis e conexões

Se os espaços topológicos da subseção anterior forem variedades diferenciáveis (que estamos supondo serem suaves) e as aplicações forem diferenciáveis, colocaremos um adjetivo diferenciável nas definições da subseção anterior. Para não confudirmos atlas definido acima e atlas de uma variedade, diremos atlas de fibrado no primeiro caso. Além disso, no caso diferenciável, estaremos sempre supondo que os fibrados são localmente triviais, o que nos será útil para demonstrar a diferenciabilidade de algumas aplicações.

Vamos começar definindo uma estrutura diferenciável num fibrado associado $E = P \times_G F$ para (P, M, π) fibrado localmente trivial. Podemos considerar um conjunto de trivialidades locais $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ em P de forma que para cada $i \in I$ exista $\alpha_i : U_i \to \mathbb{R}^m$ com a condição que $\{(U_i, \alpha_i)\}_{i \in I}$ é um atlas diferenciável de P. Denotando por $\zeta_i : \pi_E^{-1}(U_i) \to U_i \times F$ o homeomorfismo achado em (3.1) e sendo $\{(V_j, \beta_j)\}_{j \in J}$ atlas de F, não é difícil verificar que para $W_{ij} = \zeta_i^{-1}(U_i \times V_j)$ e $\gamma_{ij} = (\alpha_i \times \beta_j) \circ \zeta_i$ temos que $\{(W_{ij}, \gamma_{ij})\}_{i \in I, j \in J}$ é atlas de E. Fica claro que as funções ζ_i e a projeção π_E são diferenciáveis.

Proposição 3.1.22 *A correspondência dada no teorema 3.1.18 pode ser restringida para funções diferenciáveis.*

Demonstração. Suponha s diferenciável. Observe que para uma trivialidade local (U_i, φ_i) de P, acompanhando os homeomorfismos em (3.1) vemos que se $\varphi_i(p) = (\pi(p), g_i(p))$ para $p \in \pi^{-1}(U)$ temos $\zeta_i([p, y]) = (\pi(p), g_i(p))y)$ para $[p, y] \in \pi_E^{-1}(U)$. Segue que em $\pi^{-1}(U)$ temos a igualdade $\phi_s(p) = g_i(p)^{-1}\pi_2(\zeta_i(s(\pi(p))))$, o lado direito sendo composição de aplicações diferenciáveis. Como diferenciabilidade é um fato local, segue que ϕ_s é diferenciável.

Reciprocamente, suponha ϕ diferenciável. Para cada $m \in M$, escolha uma seção local diferenciável $\sigma : U \to P$ tal que $m \in U$. Então em U a seção s_ϕ é definida por $s_\phi(m) = [\sigma(m), \phi(\sigma(m))]$ que é composição de aplicações diferenciáveis e portanto implicando a diferenciabilidade de s_ϕ. ■

Suponha agora, V de dimensão finita e $\varrho : G \to \mathrm{Aut}(V)$ uma representação diferenciável. Fixe $E = P \times_G V$ o fibrado vetorial associado a um G-fibrado principal localmente trivial (P, M, π).

Definição 3.1.23 *Definimos uma r-forma pseudotensorial como uma r-forma a valores em V, φ, tal que ela seja G-equivariante no sentido que $R_g^*\varphi = g^{-1}\varphi$ para todo $g \in G$. Diremos que tal φ é tensorial se além disso ela for horizontal significando que $\varphi(X_1, \ldots, X_r) = 0$ se algum dos vetores X_i for vertical, ie, se $\pi_*(X_i) = 0$. Denotaremos o espaço das formas tensoriais por $\Omega^r_{tens}(P, V)$.*

Note que funções G-equivariantes são exatamente 0-formas tensoriais. Iremos generalizar a proposição anterior para 1-formas tensoriais.

Proposição 3.1.24 *O espaço $\Omega^1_{tens}(P, V)$ de 1-formas tensoriais está em correspondência com o espaço de morfismos de fibrados de TM em E. Estes, por sua vez, estão em correspondência com morfismos de $C(M)$-módulos de $\mathfrak{X}(M)$ em $C_G(P, V)$.*

Demonstração. Dada $\varphi \in \Omega^1_{tens}(P, V)$, definimos para cada $m \in M$ a aplicação $\widetilde{\varphi_m}(X_m) = [p, \varphi(\widetilde{X}_p)]$ onde, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $p \in \pi^{-1}(m)$ e $\widetilde{X}$ é um campo vetorial em P tal que $\pi_*(\widetilde{X}_p) = X_m$, ie, $\widetilde{X}$ é um levantamento local de X. Assim como no resultado anterior, o fato de φ ser G-equivariante implica que a definição acima independe da escolha de p, e o fato de φ ser horizontal nos dá a independência na escolha de $\widetilde{X}$. É claro que $\widetilde{\varphi_m}$ é uma aplicação linear. Pode-se mostrar que essa construção se estende diferenciavelmente em m para uma aplicação entre fibrados.

Reciprocamente, dado um morfismo $\psi : TM \to E$, defina uma 1-forma φ dada pontualmente por $\varphi_p : T_pP \to V$ tal que $[p, \varphi_p(Y_p)] = \psi(\pi_*(Y_p))$, assim como fizemos no caso anterior. É claro que φ_p é linear e horizontal pois π_* se anula nos vetores verticais. Para mostrar a equivariância temos que calcular $[pg, \varphi_{pg}(R_{g*}(Y_p))]$. Como $\pi_*(R_{g*}(Y_p)) = \pi_*(Y_p)$ temos $[pg, \varphi_{pg}(R_{g*}(Y_p))] = \psi(\pi_*(Y_p)) = [p, \varphi_p(Y_p)] = [pg, g^{-1}\varphi_p(Y_p)]$, donde $\varphi_{pg}(R_{g*}(Y_p)) = g^{-1}\varphi_p(Y_p)$ e portanto $R_g^*\varphi = g^{-1}\varphi$.

Finalmente a última correspondência segue do fato que $\mathfrak{X}(M)$ é o espaço das seções de TM e $C_G(P, V)$ é isomorfo ao espaço das seções de E. ■

Corolário 3.1.25 *O espaço $\Omega^1_{tens}(P, V)$ de 1-formas tensoriais está em correspondência com o espaço de morfismos de fibrados de E^* em T^*M , que por sua vez, estão em correspondência com morfismos de $C(M)$-módulos de $C_G(P, V^*)$ em $\Omega^1(M)$. Neste caso a representação de G em V^* é dada por $g\zeta(v) = \zeta(g^{-1}v)$ para $g \in G$, $v \in V$ e $\zeta \in V^*$.*

Demonstração. Basta pegar a adjunta de $\widetilde{\varphi_m}$ da proposição anterior em cada ponto de m e verificar que tal aplicação se estende para uma aplicação diferenciável entre fibrados. Explicitamente temos que a forma $\alpha \in \Omega^1(M)$ que é imagem de um elemento $f \in C_G(P, V^*)$ através do morfismo em questão satisfaz

$$\alpha_m(X_m) = f_p(\varphi(\widetilde{X}_p)) \tag{3.2}$$

para $X_m \in TM$, $\pi(p) = m$ e $\widetilde{X}_p \in TP$ é tal que $\pi_*(\widetilde{X}_p)$. De fato, pensando em E^* como sendo $P \times_G V^*$ temos que a adjunta $\widetilde{\varphi_m}^* : E_m^* \to T_m M^*$ num ponto $m \in M$ é dada por

$$\widetilde{\varphi_m}^*([p, \zeta])(X_m) = [p, \zeta](\widetilde{\varphi_m}(X_m)) = [p, \zeta]([p, \varphi(\widetilde{X}_p)]) = \zeta(\varphi(\widetilde{X}_p)). \tag{3.3}$$

Se $s_f : M \to E^*$ é a seção dada por $s_f(m) = [p, f(p)]$ como no teorema 3.1.18 então a forma $\alpha \in \Omega^{-1}(M)$ é dada por $\alpha = \widetilde{\varphi}^* \circ s_f$. A equação 3.2 segue desse fato e da igualdade 3.3. Podemos ainda codificar a igualdade 3.2 por

$$\pi^* \alpha = \langle f, \varphi \rangle \tag{3.4}$$

onde π^* é o pullback da forma e $\langle , \rangle$ denota a imagem de f aplicando na imagem de φ. ■

Agora, vamos revisar alguns conceitos relacionados a conexões em fibrados principais. Para mais detalhes, ver [28]. Note que para cada $p \in P$, graças à trivialidade local, podemos determinar um subespaço de $T_p P$ na direção de G, o qual será denotado por $T_p G$. Para os próximos resultados fixe (P, M, π) um G-fibrado principal diferenciável.

Definição 3.1.26 *Uma conexão* Π *em* P *é a escolha de um subespaço* H_p *de* $T_p P$ *para cada* $p \in P$ *de forma que:*

1. $T_P P = H_p \oplus T_p G$ *para todo* $p \in P$,
2. $H_{pg} = R_{g*}(H_p)$ *para todos* $p \in P$ *e* $g \in G$,
3. H_p *depende diferencialmente de* p, *ou seja, se* $X \in \mathfrak{X}(P)$ *e se para cada* p *definimos* Y_p *como a componente em* H_p *de* X_p *então* $Y \in \mathfrak{X}(P)$.

Chamamos H_p *o subespaço horizontal de* $T_p P$ *e* $T_p G$ *o subespaço vertical. Para cada* $X_p \in T_p P$ *denotaremos* hX_p *a componente em* H_p *de* X_p *e* vX_p *a componente em* $T_p G$ *de* X_p *chamadas respectivamente de componente horizontal e vertical. Podemos pensar também em* $v : T_p P \to T_p G$ *e* $h : T_p P \to H_p$ *como projeções lineares.*

Para cada $p \in P$ e $A \in \mathfrak{g}$ (onde $\mathfrak{g}$ denota a álgebra de Lie de G) iremos construir um vetor em $T_p G$ o qual denotaremos por $A_p^\#$. Note que se $g_t = \exp(tA)$ então $R_{g_t}(p)$ define uma curva diferenciável em P que passa por p em $t = 0$. Defina então $A_p^\#$ como sendo o vetor tangenta à curva no ponto p. Explicitamente temos para $f : P \to \mathbb{R}$:

$$A_p^\#(f) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(p \exp(tA))|_{t=0}.$$

Pelo fato de a ação de $\pi(p) = \pi(p \exp(tA))$, temos que de fato $A_p^\# \in T_p G$. Pode-se mostrar que $A \mapsto A_p^\#$ nos dá um isomorfismo entre $\mathfrak{g}$ e $T_p G$ e neste caso $A^\#$ é um campo vetorial em P.

Lembre que para cada $g \in G$ temos um automorfismo interno $a_g : G \to G$ dado por $a_g(b) = gbg^{-1}$ onde a identidade e é um ponto fixo. Segue que o diferencial de a_g nos dá uma automorfismo de espaços vetorias de $T_e G \cong \mathfrak{g}$. Denotaremos tal aplicação por $Ad_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$.

Definição 3.1.27 *Diremos que uma 1-forma $\mathfrak{g}$-valuada em P, $\omega : TP \to \mathfrak{g}$ é uma 1-forma de conexão se:*

1. $\omega(A^{\#}) = A$ *para todo* $A \in \mathfrak{g}$,

2. $R_g^*(\omega) = Ad_g(\omega)$ *para todo* $g \in G$, *ou seja temos que para cada* $X \in \mathfrak{X}(P)$, $\omega(R_{g*}(X)) = Ad_g(\omega(X))$.

Observação 3.1.28 *Dada uma conexão Π em P podemos definir uma forma $\omega : TP \to \mathfrak{g}$ da seguinte forma: para $X_p \in T_pP$, escolhemos $\omega(X_p)$ como sendo o único elemento de $\mathfrak{g}$ tal que $\omega(X_p)^{\#} = vX_p$. Pode-se mostrar que ω assim definido é uma 1-forma de conexão. Reciprocamente dada uma 1-forma de conexão temos que a escolha de H_p da forma $H_p = \{X_p \in T_pP : \omega(X_p) = 0\}$ nos dá uma conexão. Além disso, pode-se mostrar que essa correspondência é biunívoca.*

Definição 3.1.29 *Definimos um levantamento de um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ como sendo um campo vetorial $\widetilde{X} \in \mathfrak{X}(P)$ tal que $\pi_*(\widetilde{X}_p) = X_{\pi(p)}$ para todo $p \in P$. Se além disso for dada uma conexão em P, diremos que o levantamento é horizontal se $v\widetilde{X}_p = 0$ para todo $p \in P$.*

As próximas duas proposições que serão apresentadas sem demontração terão como corolário que dado um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ sempre existe um levantamento $\widetilde{X} \in \mathfrak{X}(P)$ de X, fato que será amplamente utilizado na subseção 4.2.1.

Proposição 3.1.30 *Dada uma conexão em P e um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$, existe um único levantamento horizontal $\widetilde{X} \in \mathfrak{X}(P)$ de X. O levantamento é invariante por R_g para todo $g \in G$, ou seja, $R_{g*}(\widetilde{X}_p) = \widetilde{X}_{pg}$.*

Dado um subconjunto F de M, diremos que temos uma conexão sobre F se para cada $p \in P$ tal que $\pi(p) \in F$ temos um subespaço H_p de T_pP satisfazendo as condições 1 e 2 da definição de conexão e depende diferencialmente em p no sentido que para cada $m \in F$ existe uma vizinhança aberta U de m e uma conexão em $P|_U := \pi^{-1}(U)$ tal que o espaço horizontal desta conexão coincide com H_p se $\pi(p) \in F$.

Proposição 3.1.31 *Dada uma conexão sobre um subconjunto fechado F de M, então podemos estender tal conexão para P. Em particular se $F = \emptyset$, temos que existe uma conexão em P.*

Corolário 3.1.32 *Dado um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ sempre existe um levantamento $\widetilde{X} \in \mathfrak{X}(P)$ de X. Em particular podemos considerar que $\widetilde{X}$ é invariante pela ação de G.*

De volta ao caso em que V é de dimensão finita e $\varrho : G \to \mathrm{Aut}(V)$ é uma representação diferenciável.

Proposição 3.1.33 *Se φ é uma n-forma pseudotensorial em P então:*

1. *A forma* $(h\varphi)$ *definida por* $(h\varphi)_p(X_1, \dots X_n) = \varphi_p(hX_1, \dots, hX_n)$*, para* $X_i \in T_pP$*, é uma forma tensorial.*

2. $\mathrm{d}\varphi$ *é uma* $(n+1)$*-forma pseudotensorial.*

3. *A* $(n+1)$*-forma* $D\varphi$ *definida por* $D\varphi = h(\mathrm{d}\varphi)$ *é uma forma tensorial, chamada de derivada exterior covariante de* φ*.*

3.2 Extensões de Hopf-Galois

Fixe H álgebra de Hopf, P um H-co-módulo álgebra à direita com co-ação Δ_R e $M = P^H = \{p \in P : \Delta_R(p) = p \otimes 1\}$. Como M é sub-álgebra de P, temos que P é um M-bimódulo. Dada uma estrutura de M-bimódulo em $P \otimes H$ por $b(p \otimes h)c = bpc \otimes h$ temos que Δ_R é um homomorfismo de M-bimódulos.

Defina a aplicação $\bar{\chi} : P \otimes P \to P \otimes H$ por $\bar{\chi} = (\mu \otimes id)(id \otimes \Delta_R)$, ou na notação de Sweedler, $\bar{\chi}(p \otimes q) = pq^{(0)} \otimes q^{(1)}$. Dos fatos que Δ_R é um homomorfismo de M-bimódulos e que a multiplicação μ está bem definida como uma aplicação em $P \otimes_M P$ temos que $\bar{\chi}$ desce para uma aplicação $\chi : P \otimes_M P \to P \otimes H$. Definimos a aplicação linear $\beta : P \otimes P \to P \otimes_M P$ por $\beta(p \otimes q) = p \otimes_M q$. A menos que dito o contrário, nesta seção trabalharemos sempre neste contexto. Em grande parte, estaremos seguindo [4].

Definição 3.2.1 *Dizemos que* P *é uma extensão de Hopf-Galois (à direita) de* M *se* χ *é um isomorfismo. Neste caso definimos a aplicação de translação por* $\mathsf{T} : H \to P \otimes_M P$ *por* $\mathsf{T}(h) = \chi^{-1}(1 \otimes h)$ *e no espírito da notação de Sweedler, denotaremos* $\mathsf{T}(h) = \sum \mathsf{T}'(h) \otimes \mathsf{T}''(h)$*.*

Proposição 3.2.2 *Suponha que exista uma aplicação* $\Phi : H \to P$ *inversível por convolução e homomorfismo de* H*-co-módulos à direita (pensando* H *com a co-ação regular), ie,* $\Delta_R \circ \Phi = (\Phi \otimes id) \circ \Delta$*. Então* P *é uma extensão de Hopf-Galois de* M *e neste caso dizemos que a extensão é fendida (cleft) e* Φ *é a aplicação de fissura (cleaving).*

Demonstração. Defina a aplicação $\psi : P \otimes H \to P \otimes_M P$ por $\psi = (\mu \otimes_M id)(id \otimes \beta)(id \otimes \Phi^{-1} \otimes \Phi)\Delta$, ou seja, $\psi(p \otimes h) = p\Phi^{-1}(h_{(1)}) \otimes_M \Phi(h_{(2)})$ e onde Φ^{-1} denota a inversa de convolução de Φ. Por um lado temos

$$(\chi \circ \psi)(p \otimes h) = \chi\left(p\Phi^{-1}(h_{(1)}) \otimes_M \Phi(h_{(2)})\right) = p\Phi^{-1}(h_{(1)})\Delta_R(\Phi(h_{(2)})) =$$

$$= p\Phi^{-1}(h_{(1)})\Phi(h_{(2)}) \otimes h_{(3)} = p\epsilon(h_{(1)}) \otimes h_{(2)} = p \otimes h.$$

Para o outro lado primeiro vejamos o que é $\Delta_R \circ \Phi^{-1}$. Para isso usaremos a convolução em $\mathrm{Lin}(H, P \otimes H)$. Note que do fato de Δ_R ser morfismo de álgebras temos que $\Delta_R \circ \Phi^{-1}$ é o inverso de convolução de $\Delta_R \circ \Phi$. Defina $\alpha : H \to P \otimes H$ por $\alpha = (\Phi^{-1} \otimes S) \circ \tau \circ \Delta$, ie, $\alpha(h) = \Phi^{-1}(h_{(2)}) \otimes S(h_{(1)})$, e veja que

$$\left((\Delta_R \circ \Phi) * \alpha\right)(h) = (\Delta_R \circ \Phi)(h_{(1)})\alpha(h_{(2)}) = (\Phi(h_{(1)}) \otimes h_{(2)})(\Phi^{-1}(h_{(4)}) \otimes S(h_{(3)})) =$$

$$= \Phi(h_{(1)})\Phi^{-1}(h_{(4)}) \otimes h_{(2)}S(h_{(3)}) = \Phi(h_{(1)}\epsilon(h_{(2)}))\Phi^{-1}(h_{(3)}) \otimes 1 = \epsilon(h)1 \otimes 1$$

e analogamente $(\alpha * (\Delta_R \circ \Phi))(h) = \epsilon(h)1 \otimes 1$, ou seja α é o inverso de convolução de $\Delta_R \circ \Phi$. Pela unicidade do inverso temos

$$\Delta_R \circ \Phi^{-1}(h) = \Phi^{-1}(h_{(2)}) \otimes S(h_{(1)}). \tag{3.5}$$

Assim

$$(\psi \circ \chi)(p \otimes_M q) = \psi(pq^{(0)} \otimes q^{(1)}) = pq^{(0)}\Phi^{-1}(q^{(1)}) \otimes_M \Phi(q^{(2)}) =^*$$
$$= p \otimes_M q^{(0)}\Phi^{-1}(q^{(1)})\Phi(q^{(2)}) = p \otimes_M q.$$

Para justificar a igualdade com asterisco, calculemos

$$(\Delta_R \otimes id)(q^{(0)}\Phi^{-1}(q^{(1)}) \otimes \Phi(q^{(2)})) = q^{(0)}\Phi^{-1}(q^{(3)}) \otimes q^{(1)}S(q^{(2)}) \otimes \Phi(q^{(4)}) =$$

$$= q^{(0)}\Phi^{-1}(q^{(1)}) \otimes 1 \otimes \Phi(q^{(2)})$$

donde pelo lema 1.1.55 temos que $q^{(0)}\Phi^{-1}(q^{(1)}) \otimes \Phi(q^{(2)}) \in M \otimes P$. ■

Se temos uma extensão de Hopf-Galois fendida, sempre podemos achar uma aplicação de fissura unital ($\Phi(1) = 1$). De fato se $\tilde{\Phi}$ é uma aplicação de fissura tal que $\tilde{\Phi}(1) = b$, então $\tilde{\Phi}^{-1}(1) = b^{-1}$ e de (3.5) temos $\Delta_R(b^{-1}) = b^{-1} \otimes 1$. Defina $\Phi = b^{-1}\tilde{\Phi}$, então $\Phi^{-1} = b\tilde{\Phi}^{-1}$ e pelo fato de b^{-1} ser invariante temos claramente que $\Delta_R \circ \Phi = (\Phi \otimes id) \circ \Delta$. Por essa razão, iremos supor que a aplicação de fissura é sempre unital.

Vamos achar agora propriedades da aplicação χ e da aplicação de translação T para mostrarmos um teorema que terá uma interpretação muito interessante quando estivermos no contexto de fibrados associados quânticos. Mas antes, note que se $\tau : P \otimes H \to H \otimes P$ é a aplicação de troca, dando uma estrutura de M-bimódulo em $H \otimes P$ por $b(h \otimes p)c = h \otimes bpc$, então τ é um morfismo de M-bimódulos.

Lema 3.2.3 *A aplicação χ tem as seguintes propriedades:*

Proposição 3.2.4 *1.* $(id \otimes \chi)((\tau \circ \Delta_R) \otimes_M id) = \nu \circ \chi$*;*

2. $(\chi \otimes id) \circ (id \otimes_M \Delta_R) = (id \otimes \Delta) \circ \chi$*;*

3. $(\chi \otimes id) \circ \Delta_R^{\otimes_M} = \Delta_R^{Ad} \circ \chi$*;*

onde $\nu : P \otimes H \to H \otimes P \otimes H$ é dado por $\nu(p \otimes h) = p^{(1)}S(h_{(1)}) \otimes p^{(0)} \otimes h_{(2)}$, $\Delta_R^{\otimes_M}$ é o co-produto de $P \otimes_M P$ e Δ_R^{Ad} é o co-produto de $P \otimes H$ pensando em H com a co-ação adjunta à direita.

Demonstração. *1.* Por um lado

$$(id \otimes \chi)((\tau \circ \Delta_R) \otimes_M id)(p \otimes_M q) = (id \otimes \chi)(p^{(1)} \otimes p^{(0)} \otimes_M q) = p^{(1)} \otimes p^{(0)}q^{(0)} \otimes q^{(1)}$$

e pelo outro lado

$$(\nu \circ \chi)(p \otimes_M q) = \nu(pq^{(0)} \otimes q^{(1)}) = p^{(1)}q^{(1)}S(q^{(2)}) \otimes p^{(0)}q^{(0)} \otimes q^{(3)} = p^{(1)} \otimes p^{(0)}q^{(0)} \otimes q^{(1)}.$$

2. Temos

$$(\chi \otimes id)(id \otimes_M \Delta_R)(p \otimes_M q) = (\chi \otimes id)(p \otimes_M q^{(0)} \otimes q^{(1)}) = pq^{(0)} \otimes q^{(1)} \otimes q^{(2)} =$$

$$= (id \otimes \Delta)(pq^{(0)} \otimes q^{(1)}) = (id \otimes \Delta)\chi(p \otimes_M q).$$

3. Calculemos

$$(\chi \otimes id)\Delta_R^{\otimes_M}(p \otimes_M q) = (\chi \otimes id)(p^{(0)} \otimes_M q^{(0)} \otimes p^{(1)}q^{(1)}) = p^{(0)}q^{(0)} \otimes q^{(1)} \otimes p^{(1)}q^{(2)}$$

e do outro lado

$$\Delta_R^{Ad}\chi(p \otimes_M q) = \Delta_R^{Ad}(pq^{(0)} \otimes q^{(1)}) = p^{(0)}q^{(0)} \otimes q^{(3)} \otimes p^{(1)}q^{(1)}S(q^{(2)})q^{(4)} =$$

$$= p^{(0)}q^{(0)} \otimes q^{(1)} \otimes p^{(1)}q^{(2)}$$

concluindo a proposição. ■

Proposição 3.2.5 *Seja P uma extensão de Hopf-Galois de M. Então a aplicação de translação tem as seguintes propriedades:*

1. $((\tau \circ \Delta_R) \otimes_M id) \circ \mathsf{T} = (S \otimes \mathsf{T}) \circ \Delta$;
2. $(id \otimes_M \Delta_R) \circ \mathsf{T} = (\mathsf{T} \otimes id) \circ \Delta$;
3. $\Delta_R^{\otimes_M} \circ \mathsf{T} = (\mathsf{T} \otimes id) \circ Ad_R$;
4. $\mu \circ \mathsf{T} = 1\epsilon$.

Demonstração. *1.* Calculemos

$$(id \otimes \chi)((\tau \circ \Delta_R) \otimes_M id)\mathsf{T}(h) = (\nu \circ \chi)(\mathsf{T}(h)) = \nu(1 \otimes h) = S(h_{(1)}) \otimes 1 \otimes h_{(2)}$$

e do outro lado

$$(id \otimes \chi)(S \otimes \mathsf{T})\Delta(h) = (id \otimes \chi)(S(h_{(1)}) \otimes \mathsf{T}(h_{(2)})) = S(h_{(1)}) \otimes 1 \otimes h_{(2)}$$

e como $(id \otimes \chi)$ é um isomorfismo temos $((\tau \circ \Delta_R) \otimes_M id) \circ \mathsf{T} = (S \otimes \mathsf{T}) \circ \Delta$.

2. e *3.* Basta fazer como no item anterior aplicando $(\chi \otimes id)$ nestes casos e usando os itens 2 e 3 da proposição anterior.

4. Temos

$$1\epsilon(h) = (id \otimes \epsilon)(1 \otimes h) = (id \otimes \epsilon)\chi\mathsf{T}(h) = (id \otimes \epsilon)\chi\left(\sum \mathsf{T}'(h) \otimes \mathsf{T}''(h)\right) =$$

$$= (id \otimes \epsilon)\left(\sum \mathsf{T}'(h)(\mathsf{T}''(h))^{(0)} \otimes (\mathsf{T}''(h))^{(1)}\right) = \sum \mathsf{T}'(h)\mathsf{T}''(h) = \mu \circ \mathsf{T}(h)$$

como desejado. ■

Considere agora V um H-co-módulo à esquerda com co-ação dada por $\rho_L : V \to H \otimes V$, então pela proposição 1.1.58 temos que $\rho_R : V \to V \otimes H$ dada por $\rho_R(v) = v^{(0)} \otimes S(v^{(-1)})$ é uma co-ação à direita. Considerando $P \otimes V$ como um co-módulo à direita, defina $E = (P \otimes V)^H$, então é claro que E é um M-módulo à esquerda. Denote por ${}^{\#}E := \{s : E \to M \mid s$ é morfismo de M-módulos à esquerda$\}$ e denote por $\mathrm{Eq}_H(V, P) := \{\phi : V \to P \mid \phi$ é morfismo de H-co-módulos à direita$\}$.

Teorema 3.2.6 *Sendo P uma extensão de Hopf-Galois de M, no contexto acima, temos o seguinte isomorfismo de espaços vetoriais ${}^{\#}E \cong \mathrm{Eq}_H(V, P)$.*

Demonstração. Defina $\Psi : \mathrm{Eq}_H(V, P) \to {}^{\#}E$ por $\Psi(\phi) = \mu(id \otimes \phi)$ e mostremos que Ψ está de fato bem definida, isto é, se $\sum_i p_i \otimes v_i \in E$ então $\sum_i p_i\phi(v_i) \in M$. Calculemos

$$\Delta_R\left(\sum_i p_i\phi(v_i)\right) = \sum_i p_i^{(0)}(\phi(v_i))^{(0)} \otimes p_i^{(1)}(\phi(v_i))^{(1)} =$$

$$= \sum_i p_i^{(0)}\phi(v_i^{(0)}) \otimes p_i^{(1)}v_i^{(1)} = \sum_i p_i\phi(v_i) \otimes 1$$

onde usamos o fato que ϕ é morfismo de H-co-módulos à direita na segunda igualdade e usamos que $\sum_i p_i \otimes v_i$ é invariante à direita pois pertence a E. Segue que de fato $\sum_i p_i\phi(v_i) \in M$.

Agora, defina $\bar{\Psi} : {}^{\#}E \to \mathrm{Eq}_H(V, P)$, por

$$\bar{\Psi}(s)(v) = \sum \mathsf{T}'(v^{(-1)})s(\mathsf{T}''(v^{(-1)}) \otimes v^{(0)})$$

para $s \in {}^{\#}E$. Novamente precisamos mostrar que $\bar{\Psi}$ está bem definida e neste caso precisamos verificar que $\sum \mathsf{T}'(v^{(-1)}) \otimes_M \mathsf{T}''(v^{(-1)}) \otimes v^{(0)} \in P \otimes_M E$. Denotando por Δ_R^E a co-ação em $P \otimes V$ e observando que Δ_R^E é um morfismo de M-módulos à esquerda definindo a multiplicação à esqureda de M em $P \otimes V$ de forma natural, temos que

$$(id \otimes_M \Delta_R^E)\left(\sum \mathsf{T}'(v^{(-1)}) \otimes_M \mathsf{T}''(v^{(-1)}) \otimes v^{(0)}\right) =$$

$$= \sum \mathsf{T}'(v^{(-2)}) \otimes_M \mathsf{T}''(v^{(-2)})^{(0)} \otimes v^{(0)} \otimes \mathsf{T}''(v^{(-2)})^{(1)}S(v^{(-1)}) =$$

$$= \sum \mathsf{T}'(v^{(-3)}) \otimes_M \mathsf{T}''(v^{(-3)}) \otimes v^{(0)} \otimes v^{(-2)}S(v^{(-1)}) =$$

$$= \sum \mathsf{T}'(v^{(-1)}) \otimes_M \mathsf{T}''(v^{(-1)}) \otimes v^{(0)} \otimes 1$$

onde na primeira igualdade usamos o item 2 da proposição anteriror. Invocando o lema 1.1.55, temos o desejado. Também precisamos verificar que $\bar{\Psi}(s)(v) \in \mathrm{Eq}_H(V, P)$ e para isso calculemos

$$\Delta_R(\bar{\Psi}(s)(v)) = \Delta_R\left(\sum \mathsf{T}'(v^{(-1)})s(\mathsf{T}''(v^{(-1)}) \otimes v^{(0)})\right) =$$

$$= \sum \mathsf{T}'(v^{(-1)})^{(0)}s(\mathsf{T}''(v^{(-1)}) \otimes v^{(0)}) \otimes \mathsf{T}'(v^{(-1)})^{(1)} =$$

$$= \sum \mathsf{T}'(v^{(-1)})s(\mathsf{T}''(v^{(-1)}) \otimes v^{(0)}) \otimes S(v^{(-2)}) =$$

$$= (\bar{\Psi} \otimes id)(v^{(0)} \otimes S(v^{(-1)})) = (\bar{\Psi} \otimes id)\rho_R(v)$$

onde na terceira igualdade usamos o item 1 da proposição anterior.

Vejamos que $\bar{\Psi} = \Psi^{-1}$. Por um lado temos para $\phi \in \mathrm{Eq}_H(V, P)$ e $v \in V$

$$\bar{\Psi}(\Psi(\phi))(v) = \sum \mathsf{T}'(v^{(-1)})\Psi(\phi)(\mathsf{T}''(v^{(-1)}) \otimes v^{(0)}) =$$

$$= \sum \mathsf{T}'(v^{(-1)})\mathsf{T}''(v^{(-1)})\phi(v^{(0)}) = \epsilon(v^{(-1)})\phi(v^{(0)}) = \phi(v)$$

onde usamos o item 4 da proposição anterior. Por outro lado para $s \in {}^{\#}E$ e $\sum_i p_i \otimes v_i \in E$

$$\Psi(\bar{\Psi}(s))\left(\sum_i p_i \otimes v_i\right) = \sum_i p_i\bar{\Psi}(s)(v_i) =$$

$$= \sum_i p_i\mathsf{T}'(v_i^{(-1)})s(\mathsf{T}''(v_i^{(-1)}) \otimes v_i^{(0)}) =^*$$

$$= \sum_i s(p_i\mathsf{T}'(v_i^{(-1)})\mathsf{T}''(v_i^{(-1)}) \otimes v_i^{(0)}) = s\left(\sum_i p_i \otimes v_i\right)$$

restando justificar a igualdade com asterisco. Para isso calculemos

$$(\Delta_R \otimes_M id \otimes id)\left(\sum_i p_i\mathsf{T}'(v_i^{(-1)}) \otimes_M \mathsf{T}''(v_i^{(-1)}) \otimes v_i^{(0)}\right) =$$

$$= \sum_i p_i^{(0)}\mathsf{T}'(v_i^{(-1)})^{(0)} \otimes p_i^{(1)}\mathsf{T}'(v_i^{(-1)})^{(1)} \otimes_M \mathsf{T}''(v_i^{(-1)}) \otimes v_i^{(0)} =$$

$$= \sum_i p_i^{(0)}\mathsf{T}'(v_i^{(-1)}) \otimes p_i^{(1)}S(v_i^{(-2)}) \otimes_M \mathsf{T}''(v_i^{(-1)}) \otimes v_i^{(0)} =$$

$$= \sum_i p_i^{(0)}\mathsf{T}'(v_i^{(0)(-1)}) \otimes p_i^{(1)}v_i^{(1)} \otimes_M \mathsf{T}''(v_i^{(0)(-1)}) \otimes v_i^{(0)(0)} =$$

$$= \sum_i p_i\mathsf{T}'(v_i^{(-1)}) \otimes 1 \otimes_M \mathsf{T}''(v_i^{(-1)}) \otimes v_i^{(0)}$$

e novamente invocando o lema 1.1.55, temos que $\sum_i p_i\mathsf{T}'(v_i^{(-1)}) \otimes_M \mathsf{T}''(v_i^{(-1)}) \otimes v_i^{(0)} \in M \otimes_M P \otimes V$ e a igualdade com asterisco acima fica justificada usando que s é morfismo de M-módulos à esquerda. ■

3.3 Fibrados principais quânticos e conexões

Fixemos H álgebra de Hopf, (P, Δ_R) H-co-módulo álgebra e $M = P^H$ o conjunto dos elementos invariantes.

Definição 3.3.1 *Diremos que $P(M, H)$ é um fibrado principal quântico com grupo estrutural quântico H e base M, se P é uma extensão de Hopf-Galois de M.*

Observação 3.3.2 *Mantemos a nomenclatura utilizada na literatura de fibrados principais quânticos, mesmo que as álgebras em questão não venham de processos de quantização ou deformação. Tal problema na nomenclatura, na verdade, surge antes ao considerarmos álgebras de Hopf como sendo grupos quânticos, sendo que nem toda álgebra de Hopf vem de um processo de deformação. A alternativa fibrado principal não-comutativo também não é de todo adequada uma vez que as álgebras em questão podem ou não serem comutativas.*

Seja $\Omega^1 P = \ker \mu$ o cálculo universal de P e seja $\bar{\chi} : P \otimes P \to P \otimes H$ como na seção anterior. Defina a aplicação $\# : \Omega^1 P \to P \otimes \ker \epsilon$ como sendo a restrição de $\bar{\chi}$. Explicitamente temos

$$\#(p\mathrm{d}_U q) = \#(p \otimes q - pq \otimes 1) = pq^{(0)} \otimes q^{(1)} - pq \otimes 1 \tag{3.6}$$

e aplicando $id \otimes \epsilon$ em ambos os lados temos $(id \otimes \epsilon)(\#(p\mathrm{d}_U q)) = 0$, donde podemos de fato restringir o contradomínio de $\bar{\chi}$ para $P \otimes \ker \epsilon$. Como M é sub-álgebra de P, temos a inclusão dos cálculos universais $\Omega^1 M \subseteq \Omega^1 P$. Temos assim um P-sub-bimódulo de $\Omega^1 P$ gerado por $\Omega^1 P$

$$\Gamma^U_{hor} := P\Omega^1 M P \tag{3.7}$$

e diremos que uma 1-forma $\alpha \in \Omega^1 P$ é horizontal se $\alpha \in \Gamma^U_{hor}$. Note que

$$\Gamma^U_{hor} \subseteq \ker \#, \tag{3.8}$$

de fato, por (3.6) temos

$$\#(p\mathrm{d}_U bq) = \#(p\mathrm{d}_U(bq)) - \#(pb\mathrm{d}_U q) = pb^{(0)}q^{(0)} \otimes b^{(1)}q^{(1)} - pbq^{(0)} \otimes q^{(1)} = 0.$$

Temos que se $\bar{\chi}$ é sobrejetora então $\#$ também o é. De fato, dados $\sum_i u_i \otimes h_i \in P \otimes \ker \epsilon$ e $\sum_j p_j \otimes q_j \in P \otimes P$ tal que $\chi(\sum_j p_j \otimes q_j) = \sum_i u_i \otimes h_i$ então

$$\mu\left(\sum_j p_j \otimes q_j\right) = \sum_j p_j q_j = (id \otimes \epsilon)\bar{\chi}\left(\sum_j p_j \otimes q_j\right) = (id \otimes \epsilon)\left(\sum_i u_i \otimes h_i\right) = 0.$$

Suponha agora que tenhamos um cálculo (Γ_P, d) covariante à direita sobre P dado por P-sub-bimódulo N_P de $\Omega^1 P$ tal que $\Delta_R(N_P) \subseteq N_p \otimes H$ conforme um análogo da observação 2.1.20. Como M é sub-álgebra de P, podemos restringir o cálculo Γ_P para $\Gamma_M := M\mathrm{d}(M)M$.

Neste caso também temos um P-sub-bimódulo de Γ_P gerado por Γ_M

$$\Gamma_{hor} := P\Gamma_M P = \Gamma^U_{hor}/(N_P \cap \Gamma^U_{hor}) \tag{3.9}$$

cujos elementos serão chamados de 1-formas horizontais. Seja também Γ_H um cálculo bicovariante sobre H dado por um ideal à direita R_H de $\ker\epsilon$ que é Ad_R invariante conforme a seção 2.3. Denote por $\pi_H : \ker\epsilon \to \ker\epsilon/R_H$ a projeção canônica. Suponha que $\#(N_P) \subseteq P\otimes R_H$ de modo que temos uma aplicação bem definida $\#_{N_P} : \Gamma_P \to P\otimes\ker\epsilon/R_H$ dada por

$$\#_{N_P}([\rho]) = (id \otimes \pi_H)(\#(\rho))$$

onde os colchetes indicam a classe de um elemento $\rho \in \Omega^1 P$. Do fato que $\Gamma^U_{hor} \subseteq \ker\#$ também temos que $\Gamma_{hor} \subseteq \ker\#_{N_P}$ e se $\bar{\chi}$ e portanto $\#$ são sobrejetoras então $\#_{N_P}$ também o é.

Definição 3.3.3 *Sejam N_P um P-sub-bimódulo de $\Omega^1 P$ definindo um cálculo covariante à direita Γ_P sobre P e R_H um ideal à direita de* $\ker\epsilon$ *definindo um cálculo bicovariante sobre H. Diremos que $P(M, H, N_P, R_H)$ é um fibrado principal quântico diferenciável se:*

1. *$P(M, H)$ é um fibrado principal quântico;*
2. *$\#(N_P) \subseteq P \otimes R_H$*
3. *A seqüência de P-módulos à esquerda*

$$0 \longrightarrow \Gamma_{hor} \hookrightarrow \Gamma_P \xrightarrow{\#_{N_P}} P \otimes \ker\epsilon/R_H \longrightarrow 0 \tag{3.10}$$

é exata.

A condição 1 acima diz que estamos trabalhando com uma extensão de Hopf-Galois. A definição original dada em [5] não fazia essa exigência e impunha que χ fosse sobrejetora para fazer sentido falar em exatidão de (3.10). Conforme demonstrado em [22], ambas as definições são equivalentes no caso do cálculo universal. No caso do cálculo não universal temos em [23] uma condição suficiente e necessária para que um fibrado principal quântico como em [5] seja uma extensão de Hopf-Galois. Também em [22], foi mostrado que neste caso a condição 2 pode ser substituída por $\#(N_P) = P \otimes R_H$, o que ainda não se sabia em [5] conforme a discussão após o exemplo 4.11 do mesmo. Faremos as demonstrações desses fatos em seguida.

A razão de escolhermos impor que P seja uma extensão de Hopf-Galois de M vem da existência da aplicação de translação e do teorema 3.2.6, que nos dará uma interpretação interessante de fibrados associados quânticos. Também utilizaremos a existência da aplicação de translação no próximo capítulo. Além disso, os exemplos dados em [5] de fibrados principais quânticos triviais e homogêneos, que também faremos adiante, são construídos primeiro como sendo fibrados principais quânticos com o cálculo universal (e portanto extensões de

Hopf-Galois) e depois, sobre certas condições em N_P e R_H, são construídos fibrados principais quânticos com cálculos não universais.

Antes de começarmos, note que temos o seguinte diagrama comutativo de P-módulos à esquerda com linhas exatas

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \Omega^1 P \arrow[r] \arrow[d, "\#"] & P\otimes P \arrow[r, "\mu_P"] \arrow[d, "\bar{\chi}"] & P \arrow[r] \arrow[d, "id"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & P\otimes \ker\epsilon \arrow[r] & P\otimes H \arrow[r, "id\otimes\epsilon"] & P \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

donde usando o lema da cobra temos a seguinte seqüência exata

$$0 \longrightarrow \ker\# \longrightarrow \ker\bar{\chi} \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathrm{coker}\# \longrightarrow \mathrm{coker}\bar{\chi} \longrightarrow 0\ . \qquad (3.11)$$

Proposição 3.3.4 *Todo fibrado principal quântico é diferenciável com os cálculos universais. Reciprocamente, se P é um H-co-módulo álgebra tal que $\bar{\chi}$ é sobrejetora e a seqüência (3.10) para $N_p = R_H = 0$ é exata, então $P(M,H)$ é um fibrado principal quântico.*

Demonstração. Temos o seguinte diagrama comutativo de P-módulos à esquerda

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & P\Omega^1 MP \arrow[r] \arrow[d] & P\otimes P \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\chi}"] & P\otimes_M P \arrow[r] \arrow[d, "\chi"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P\otimes H \arrow[r, "id"] & P\otimes H \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

com linhas exatas. Do lema da cobra temos a seqüência exata

$$0 \longrightarrow P\Omega^1 MP \longrightarrow \ker\bar{\chi} \longrightarrow \ker\chi \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathrm{coker}\bar{\chi} \longrightarrow \mathrm{coker}\chi \longrightarrow 0\ . \qquad (3.12)$$

Suponha $P(M,H)$ fibrado principal quântico, então χ é isomorfismo e $\ker\chi = 0 = \mathrm{coker}\,\chi$. Segue de (3.12) e (3.11) que $P\Omega^1 MP = \ker\bar{\chi} = \ker\#$ e portanto a seqüência (3.10) é exata. A condição 2 da definição 3.3.3 é trivial no caso dos cálculos universais.

Reciprocamente, usando que $\bar{\chi}$ é sobrejetora, ou seja, $\mathrm{coker}\,\bar{\chi} = 0$ e $P\Omega^1 MP = \ker\bar{\chi}$ pela exatidão de (3.10) temos de (3.12) que $\ker\chi = \mathrm{coker}\,\chi = 0$ donde χ é um isomorfismo e P é uma extensão de Hopf-Galois de M. ∎

Proposição 3.3.5 *Seja $P(M,H,N_P,R_H)$ um fibrado principal quântico diferenciável, então $\#(N_P) = P\otimes R_H$. Reciprocamente, a condição 3 da definição 3.3.3 é satisfeita automaticamente se supusermos que $\#(N_P) = P\otimes R_H$ no lugar da inclusão.*

Demonstração. Considere o diagrama comutativo de P-módulos à esquerda com linhas exatas

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N_P \arrow[r] \arrow[d, "\overline{\#}"] & \Omega^1 P \arrow[r, "\pi_P"] \arrow[d, "\#"] & \Gamma_P \arrow[r] \arrow[d, "\#_{N_P}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & P\otimes R_H \arrow[r] & P\otimes\ker\epsilon \arrow[r, "id\otimes\pi_H"] & P\otimes\ker\epsilon/R_H \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \qquad (3.13)$$

onde $\pi_P : \Omega^1 P \to \Gamma_P$ é a projeção e $\overline{\#}$ é a restrição de domínio e contra-domínio de $\#$. Segue do lema da cobra que temos a seqüência exata

$$0 \longrightarrow \ker \overline{\#} \longrightarrow \ker \# \longrightarrow \ker \#_{N_P} \longrightarrow \mathrm{coker} \overline{\#} \longrightarrow \mathrm{coker} \# \longrightarrow \mathrm{coker} \#_{N_P} \longrightarrow 0 . \tag{3.14}$$

Temos que $\mathrm{coker}\, \# = 0$ pois $\#$ é sobrejetora. Seja $\overline{\pi_P} : \ker \# \to \ker \#_{N_P}$ a restrição de π_P. Da exatidão de (3.10), de (3.9) e da proposição anterior temos $\ker \#_{N_P} = \Gamma_{hor} = \pi_P(P\Omega^1 MP) = \pi_P(\ker \#)$, ou seja, $\overline{\pi_P}$ é sobrejetora. Segue desses fatos e da exatidão de (3.14) que $\mathrm{coker}\, \overline{\#} = 0$ donde $\#(N_P) = P \otimes R_H$.

Reciprocamente, se $\#(N_P) = P \otimes R_H$, então $\mathrm{coker}\, \overline{\#} = 0$ e $\overline{\pi_P}$ é sobrejetora. Usando a proposição anterior, temos $\ker \#_{N_P} = \pi_P(\ker \#) = \pi_P(P\Omega^1 MP) = \Gamma_{hor}$ donde segue a exatidão de (3.10). ■

Proposição 3.3.6 *Seja $P(M, H, N_P, R_H)$ um fibrado principal quântico diferenciável, então $N_P \cap \ker \# \subseteq P\Omega^1 MP$. Reciprocamente, se N_P e R_H definem cálculos covariantes à direita sobre P e bicovariante sobre H respectivamente, $\bar{\chi}$ é sobrejetora, $\#(N_P) \subseteq P \otimes R_H$, a seqüência (3.10) é exata e $N_P \cap \ker \# \subseteq P\Omega^1 MP$ então $P(M, H)$ é fibrado quântico principal.*

Demonstração. A ida é imediata uma vez que mostramos que $\ker \# = P\Omega^1 MP$ na proposição 3.3.4. Da hipótese que (3.10) é exata, contínuamos a ter o diagrama (3.13) e a seqüência exata (3.14). Temos que $\mathrm{coker}\, \# = 0$, e de (3.8) e da exatidão de (3.10) temos $\ker \#_{N_P} = \Gamma_{hor} = \pi_P(P\Omega^1 MP) \subseteq \pi_P(\ker \#)$, ou seja $\overline{\pi_P}$ como na proposição anterior é sobrejetora e $\mathrm{coker}\, \overline{\#} = 0$. Da comutatividade de (3.13), de (3.8) e da hipótese que $N_P \cap \ker \# \subseteq P\Omega^1 MP$, temos $\ker \overline{\#} = N_P \cap \ker \# = N_P \cap \ker \# \cap P\Omega^1 MP = N_P \cap P\Omega^1 MP$. Como $\ker \#_{N_P} = \Gamma_{hor} = P\Gamma_M P$, usando (3.14) temos o seguinte diagrama comutativo com linhas exatas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d, "id"] & N_P \cap P\Omega^1 MP \arrow[r, hook] \arrow[d, "id"] & P\Omega^1 MP \arrow[r] \arrow[d, hook] & P\Gamma_M P \arrow[r] \arrow[d, "id"] & 0 \arrow[d, "id"] \\
0 \arrow[r] & N_P \cap P\Omega^1 MP \arrow[r, hook] & \ker \# \arrow[r] & P\Gamma_M P \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde segue, usando o lema dos cinco, que $\ker \# = P\Omega^1 MP$. Caímos assim nas hipóteses da recíproca da proposição 3.3.4, e portanto $P(M, H)$ é fibrado quântico principal. ■

O que essa última proposição nos diz é que a condição suficiente e necessária para que um fibrado principal quântico no sentido de [5], onde não é exigido que a extensão seja de Hopf-Galois, seja um fibrado principal quântico diferenciável conforme a definição 3.3.3, é $N_P \cap \ker \# \subseteq P\Omega^1 MP$.

Proposição 3.3.7 *Sejam H uma álgebra de Hopf e M uma álgebra. Considere $P = M \otimes H$ com co-ação à direita dada por $\Delta_R = id \otimes \Delta$. Então $P(M, H)$ é um fibrado principal quântico, o qual chamaremos de trivial.*

Demonstração. Defina a aplicação $\Phi : H \to P$ por $\Phi(h) = 1 \otimes h$ cuja inversa de convolução é dada por $\Phi^{-1} : H \to P$ com $\Phi^{-1}(h) = 1 \otimes S(h)$. É claro que $\Delta_R \circ \Phi = (\Phi \otimes id) \circ \Delta$, ou seja, Φ é uma aplicação de fissura e pela proposição 3.2.2 temos que $P(M, H)$ é um fibrado principal quântico. ■

Em [5], um fibrado principal quântico trivial é definido como sendo uma extensão de Hopf-Galois fendida. No entanto, conforme [13] temos um exemplo de uma extensão de Hopf-Galois fendida que provém de um fibrado principal (clássico) não trivial.

Exemplo 3.3.8 *Suponha que P é uma álgebra de Hopf e veja P como P-co-módulo álgebra com a co-ação regular $\Delta_R = \Delta$. Seja R_P um ideal à direita de $\ker\epsilon$ definindo um cálculo bi-covariante. Note que se $\Delta(p) = p \otimes 1$ então $p = \epsilon(p)1$ pelo axioma da co-unidade, ou seja, $P^P = \mathbb{K}$. Segue $P = \mathbb{K} \otimes P$ é um fibrado principal quântico trivial. Neste caso temos que $P \otimes_M P = P \otimes P$ e que $\bar{\chi} = \chi$ é um isomorfismo com inversa dada por $\chi^{-1}(p \otimes q) = pS(q_{(1)}) \otimes q_{(2)}$. Como vimos que $\#$ é sobrejetora em $P \otimes \ker\epsilon$, temos na verdade que $\#$ é o isomorfismo entre as duas formas de vermos o cálculo universal e o P-sub-bimódulo N_P definindo o cálculo sobre P nada mais é que $\#^{-1}(P \otimes R_P)$, donde estamos na recíproca da proposição 3.3.5 e $P(\mathbb{K}, P, R_P, N_P)$ é um fibrado principal quântico diferenciável.*

Definição 3.3.9 *Uma conexão (Π, Γ_{ver}) (que denotaremos simplesmente por Π) em um fibrado principal quântico diferenciável $P(M, H, N_P, R_H)$ é a escolha de um P-submódulo à esquerda $\Gamma_{ver} \subseteq \Gamma_P$ tal que:*

1. *$\Gamma_P = \Gamma_{hor} \oplus \Gamma_{ver}$;*
2. *a projeção $\Pi : \Gamma_P \to \Gamma_{ver}$ (morfismo de P-módulos) é invariante à direita, ou seja, $\Delta_R \circ \Pi = (\Pi \otimes id) \circ \Delta_R$.*

Um elemento $\alpha \in \Gamma_{ver}$ é chamado de 1-forma vertical.

Note que a segunda condição acima diz que Γ_{ver} continua sendo um H-co-módulo.

Lembrando-se que do lema 3.2.3, onde tínhamos que $(\chi \otimes id) \circ \Delta_R^{\otimes_M} = \Delta_R^{Ad} \circ \chi$, podemos usar praticamente a mesma demonstração para provar que $(\bar{\chi} \otimes id) \circ \Delta_R = \Delta_R^{Ad} \circ \bar{\chi}$. Temos que $\ker\epsilon$ é Ad_R-invariante, pois $\epsilon(a_{(2)}) \otimes S(a_{(1)})a_{(3)} = 1 \otimes \epsilon(a) = 0$ (ou usando os resultados do capítulo anterior, lembrar que o cálculo universal é bicovariante), donde segue que a aplicação $\#$ satisfaz a mesma propriedade $(\# \otimes id) \circ \Delta_R = \Delta_R^{Ad} \circ \#$. Se além disso N_P é um P-sub-bimódulo de $\Omega^1 P$ definindo um cálculo covariante à direita Γ_P sobre P e R_H é um ideal à direita de $\ker\epsilon$ definindo um cálculo bicovariante sobre H, como $\Delta_R(N_P) \subseteq N_P \otimes H$ e $Ad_R(R_H) \subseteq R_H \otimes H$ temos que $\#_{N_P}$ também é morfismo de co-módulos, $(\#_{N_P} \otimes id) \circ \Delta_R = \Delta_R^{Ad} \circ \#_{N_P}$.

Segue da discussão acima que a existência de uma conexão é equivalente a existência de uma cisão $\sigma_{N_P} : P \otimes \ker\epsilon / R_H \to \Gamma_P$ de $\#_{N_P}$ na seqüência (3.10) que seja morfismo de co-módulos. De fato, se existe uma cisão então a projeção Π é dada por $\Pi = \sigma_{N_P} \circ \#_{N_P}$.

Reciprocamente, se existe uma conexão, então $\#_{N_P}|_{\Gamma_{ver}}$ é um isomorfismo e σ_{N_P} é dada pela inversa (onde observe que inversa de um morfismo de co-módulos T é também um morfismo de co-módulos bastando aplicar $(T^{-1} \otimes id)$ à esquerda e T^{-1} à direita na igualdade $(T \otimes id) \circ \Delta_R = \Delta_R \circ T$).

Definição 3.3.10 *A forma de conexão associada à conexão Π é a aplicação linear $\omega : H \to \Gamma_P$ dada por*

$$\omega(a) = \sigma_{N_P}(1 \otimes \pi_H(\bar{a})) \tag{3.15}$$

lembrando que $\bar{a} = a - \epsilon(a)1$.

Proposição 3.3.11 *Sejam $P(M, H, N_P, R_H)$ um fibrado principal quântico diferenciável e Π uma conexão em P. Então a forma de conexão $\omega : H \to \Gamma_P$ satisfaz:*

1. $\omega(\mathbb{K} \oplus R_H) = 0$;
2. $\#_{N_P}(\omega(a)) = 1 \otimes \pi_H(\bar{a})$;
3. $\Delta_R \circ \omega = (\omega \otimes id) \circ Ad_R$.

Reciprocamente, se $\omega : H \to \Gamma_P$ é um aplicação linear satisfazendo as três condições acima, então existe uma única conexão Π_ω dada por

$$\Pi_\omega = \mu \circ (id \otimes [\omega]) \circ \#_{N_P} \tag{3.16}$$

tal que ω é sua forma de conexão, onde μ é a multiplicação de P no P-bimódulo Γ_P e $[\omega]$ é a aplição ω induzida no quociente $\ker \epsilon / R_H$.

Demonstração. A condição 1 decorre imediatamente da definição e condição 2 vem de σ_{N_P} ser uma cisão de $\#_{N_P}$. Verifiquemos 3:

$$\Delta_R(\omega(a)) = \Delta_R(\sigma_{N_P}(1 \otimes \pi_H(\bar{a}))) = (\sigma_{N_P} \otimes id)\Delta_R^{Ad}(1 \otimes \pi_H(\bar{a})) =$$

$$= (\sigma_{N_P} \otimes id)(1 \otimes \pi_H(a_{(2)}) \otimes S(a_{(1)})a_{(3)}) - (\sigma_{N_P} \otimes id)(1 \otimes \pi_H(1) \otimes \epsilon(a)1) =$$

$$= (\sigma_{N_P} \otimes id)(1 \otimes \pi_H(\overline{a_{(2)}}) \otimes S(a_{(1)})a_{(3)}) =$$

$$= \omega(a_{(2)}) \otimes S(a_{(1)})a_{(3)} = (\omega \otimes id) \circ Ad_R(a).$$

Para a recíproca, suponha que seja dado ω satisfazendo de 1 a 3 e defina $\sigma_{N_P} : P \otimes \ker \epsilon / R_H \to \Gamma_P$ por

$$\sigma_{N_P}(p \otimes \pi_H(\bar{a})) = p[\omega](\pi_H(\bar{a})) = p\omega(a) \tag{3.17}$$

que é claramente um morfismo de P-módulos à esquerda. Além disso para $p \otimes [\bar{a}] \in P \otimes \ker \epsilon / R_H$, temos pelo item 2 que

$$\#_{N_P}(\sigma_{N_P}(p \otimes \pi_H(\bar{a}))) = \#_{N_P}(p\omega(a)) = p\#_{N_P}(\omega(a)) = p \otimes \pi_H(\bar{a}),$$

ou seja, σ_{N_P} é uma cisão de $\#_{N_P}$. Agora, temos que

$$\Delta_R(\sigma_{N_P}(p \otimes \pi_H(\bar{a}))) = \Delta_R(p\omega(a)) = p^{(0)}\omega(a_{(2)}) \otimes p^{(1)}S(a_{(1)})a_{(3)} =$$

$$= (\sigma_{N_P} \otimes id)(p^{(0)} \otimes \pi_H(\overline{a_{(2)}}) \otimes p^{(1)}S(a_{(1)})a_{(3)}) = (\sigma_{N_P} \otimes id)\Delta_R^{Ad}(p \otimes \pi_H(\bar{a}))$$

donde σ_{N_P} define unicamente uma conexão por $\Pi_\omega = \sigma_{N_P} \circ \#_{N_P}$ e de (3.17) temos (3.16). A unicidade segue que (3.15) e (3.17) estabelecem uma relação 1-1 entre a conexão ω e a cisão σ_{N_P}. ■

No caso do cálculo universal, temos que por (3.6) a expressão (3.16) pode ser escrita explicitamente por

$$\Pi_\omega(q\mathrm{d}p) = qp^{(0)}\omega\left(p^{(1)}\right). \tag{3.18}$$

Exemplo 3.3.12 *Suponha P extensão de Hopf-Galois fendida de M e seja $\Phi : H \to P$ a aplicação de fissura. Então existe uma forma de conexão natural $\omega : H \to \Omega^1 P$ em $P(M, H, 0, 0)$ dada por*

$$\omega(a) = \Phi^{-1}(a_{(1)})\mathrm{d}\Phi(a_{(2)}).$$

De fato vamos mostrar que tal ω satisfaz as condições de 1 à 3 da proposição anterior. A primeira condição vem do fato de supormos que Φ é unital conforme comentamos após a proposição 3.2.2. Para a segunda condição temos por (3.6)

$$\#(\omega(a)) = \#(\Phi^{-1}(a_{(1)})\mathrm{d}\Phi(a_{(2)})) = \Phi^{-1}(a_{(1)})\Phi(a_{(2)})^{(0)} \otimes \Phi(a_{(2)})^{(1)} - 1 \otimes \epsilon(a) =$$

$$= \Phi^{-1}(a_{(1)})\Phi(a_{(2)}) \otimes a_{(3)} - 1 \otimes \epsilon(a) = 1 \otimes \bar{a}.$$

Para a última condição, vamos usar (3.5) e a covariância do cálculo universal

$$\Delta_R(\omega(a)) = \Delta_R(\Phi^{-1}(a_{(1)})\mathrm{d}\Phi(a_{(2)})) = \Phi^{-1}(a_{(1)})^{(0)}\mathrm{d}(\Phi(a_{(2)})^{(0)}) \otimes \Phi^{-1}(a_{(1)})^{(1)}\Phi(a_{(2)})^{(1)} =$$

$$= \Phi^{-1}(a_{(2)})\mathrm{d}\Phi(a_{(3)}) \otimes S(a_{(1)})a_{(4)} = (\omega \otimes id)Ad_R(a).$$

A conexão correspondente é conhecida como conexão plana.

Mais em geral, se nos é dado uma aplicação linear $\beta : H \to \Omega^1 M$ tal que $\beta(1) = 0$ então a aplicação linear $\omega_\beta : H \to \Omega^1 P$ dada por

$$\omega_\beta(a) = \sum \Phi^{-1}(a_{(1)})\beta(a_{(2)})\Phi(a_{(3)}) + \sum \Phi^{-1}(a_{(1)})\mathrm{d}\Phi(a_{(2)})$$

também é uma conexão no fibrado $P(M, H, 0, 0)$. De fato, utilizando o que já demonstramos no caso anterior, temos que a primeira condição segue de $\beta(1) = 0$. Para a segunda condição, note que o primeiro somatório está em $P\Omega^1 MP = \Gamma^U_{hor} = \ker \#$, e portanto $\#(\omega_\beta(a)) = 1 \otimes \bar{a}$. E para a última condição temos

$$\Delta_R(\omega_\beta(a)) = \sum \Phi^{-1}(a_{(2)})\beta(a_{(3)})\Phi(a_{(4)}) \otimes S(a_{(1)})a_{(5)} + \sum \Phi^{-1}(a_{(2)})\mathrm{d}\Phi(a_{(3)}) \otimes S(a_{(1)})a_{(4)} =$$

$$= (\omega_\beta \otimes id)Ad_R(a).$$

Note que no caso do fibrado principal quântico trivial $P = \mathbb{K} \otimes P$ do exemplo3.3.8 a conexão ω é dada por $\omega(a) = S(a_{(1)})\mathrm{d}(a_{(2)})$ para $a \in P$, coincidindo com a equação (2.19) e dando assim uma interpretação geométrica para a forma de Maurer-Cartan.

3.3.1 Espaços homogêneos quânticos

Definição 3.3.13 *Sejam P, H álgebras de Hopf e suponha que exista $\pi : P \to H$ um morfismo de álgebra de Hopf sobrejetor. A co-ação regular à direita de P desce por π para uma co-ação $\Delta_R := (id \otimes \pi) \circ \Delta : P \to P \otimes H$. Neste caso dizemos que $M = P^H$ é o espaço homogêneo quântico associado a π.*

Proposição 3.3.14 *Seja M um espaço homogêneo quântico associado a uma sobrejeção $\pi : P \to H$. Se π é tal que $\ker \pi \subseteq \mu(\ker \pi|_M \otimes P)$ então $P(M, H)$ é um fibrado principal quântico.*

Demonstração. Do fato de $\bar{\chi}$ do exemplo 3.3.8, o qual denotaremos aqui por $\bar{\chi}_P$, ser sobrejetora e de π ser sobrejetor, temos que $\bar{\chi}$ deste exemplo também o é. Vamos mostrar que $\ker \# = \Gamma^U_{hor}$ e utilizar a proposição 3.3.4. Já sabemos que $\Gamma^U_{hor} \subseteq \ker \#$. Conforme mencionado no exemplo 3.3.8, dado $\rho \in \Omega^1 P$, podemos escrever $\rho = \sum_k \bar{\chi}_P^{-1}(p^k \otimes u^k)$ com $u^k \in \ker \epsilon_P$, $p^k \in P$ e $\{p^k\}_k$ linearmente independente. Então $\#\rho = (id \otimes \pi)\bar{\chi}_P(\rho) = \sum_k p^k \otimes \pi(u^k)$.

Supondo $\rho \in \ker \#$, como os p^k são l.i. temos $\pi(u^k) = 0$ para todo k. De nossa hipótese, podemos escrever $u^k = \sum_i m^k_i v^k_i$ onde $m^k_i \in \ker \pi|_M$ e $v^k_i \in P$. Para $m \in M$ temos $m_{(1)} \otimes \pi(m_{(2)}) = m \otimes 1$, donde $\pi(m) = \epsilon(m_{(1)})\pi(m_{(2)}) = \epsilon(m)1$ e assim podemos considerar $m^k_i \in \ker \epsilon|_M$. Lembrando que no cálculo universal temos $p \otimes q = p\mathrm{d}q$ e usando a expressão de χ_P^{-1} no exemplo anterior temos

$$\rho = \sum_k p^k(S(u^k_{(1)})\mathrm{d}(u^k_{(2)})) = \sum_{k,i} p^k S(v^k_{i(1)})S(m^k_{i(1)})\mathrm{d}(m^k_{i(2)}v^k_{i(2)}) =$$

$$= \sum_{k,i} \epsilon(m^k_i)p^k S(v^k_{i(1)})\mathrm{d}(v^k_{i(2)}) + p^k S(v^k_{i(1)})S(m^k_{i(1)})\mathrm{d}(m^k_{i(2)})v^k_{i(2)}$$

onde o primeiro termos se anula e o segundo está em Γ^U_{hor}, ou seja, $\ker \# = \Gamma^U_{hor}$. ■

Proposição 3.3.15 *Seja $P(M, H)$ um fibrado principal quântico sobre um espaço homogêneo quântico M associado a $\pi : P \to H$. Se existe um morfismo de álgebras $\iota : H \to P$ tal que $\pi \circ \iota = id$, $\epsilon(\iota(a)) = \epsilon(a)$ e $(id \otimes \pi) \circ Ad_R \circ \iota = (\iota \otimes id) \circ Ad_R$ então a aplicação linear $\omega : H \to \Omega^1 P$ dada por $\omega(a) = S(\iota(a)_{(1)})\mathrm{d}(\iota(a)_{(2)})$ é uma forma de conexão no fibrado $P(M, H, 0, 0)$. Chamamos a conexão correspondente Π de conexão canônica do espaço homogêneo quântico.*

Demonstração. Verifiquemos as três condições de 3.3.11. A primeira é trivial. Para a segunda temos, usando (3.6)

$$\#(\omega(a)) = \#(S(\iota(a)_{(1)})\mathrm{d}(\iota(a)_{(2)})) = S(\iota(a)_{(1)})\iota(a)_{(2)} \otimes \overline{\pi(\iota(a)_{(3)})} =$$

$$= \epsilon(\iota(a)_{(1)}) \otimes \overline{\pi(\iota(a)_{(2)})} = 1 \otimes \overline{\pi(\iota(a))} = 1 \otimes \bar{a}.$$

E para a última condição

$$\Delta_R(\omega(a)) = S(\iota(a)_{(2)})\mathrm{d}(\iota(a)_{(3)}) \otimes \pi(S(\iota(a)_{(1)})\iota(a)_{(4)}) =$$

$$= S(\iota(a_{(2)})_{(1)})\mathrm{d}(\iota(a_{(2)})a_{(2)}) \otimes S(a_{(1)})a_{(3)} =$$

$$= \omega(a_{(2)}) \otimes S(a_{(1)})a_{(3)} = (\omega \otimes id)Ad_R(a)$$

onde na segunda igualdade usamos nossa hipótese sobre ι. ∎

Corolário 3.3.16 *Suponha que $\pi : P \to H$ seja um morfismo de álgebras de Hopf sobrejetor e que $\iota : H \to P$ seja também morfismo de álgebras de Hopf e tal que $\pi \circ \iota = id$. Então ι é uma aplicação de fissura para a co-ação dada na definição de espaço homogêneo quântico. Além disso a conexão canônica acima da proposição anterior coincide com a a conexão plana do exemplo 3.3.12.*

Demonstração. Como ι é morfismo de álgebras de Hopf, temos que ι é inversível por convolução com inversa dada por $\iota \circ S$. Também vale que

$$\Delta_R(\iota(a)) = \iota(a)_{(1)} \otimes \pi(\iota(a)_{(2)}) = \iota(a_{(1)}) \otimes \pi(\iota(a_{(2)})) = (\iota \otimes id)\Delta(a),$$

ou seja, ι é de fato uma aplicação de fissura. Além disso, não é difícil ver que ι satisfaz as condições da proposição anterior e como $S \circ \iota = \iota \circ S$ temos a última afirmação do corolário. ∎

Proposição 3.3.17 *Nas condições da proposição 3.3.14 supomos que P possui uma estrutura diferenciável covariante à esquerda em relação P dada pelo ideal à direita R_P de $\ker \epsilon_P$ e que H possui um c.d.p.o. bicovariante dada pelo ideal à direita R_H de $\ker \epsilon_H$. Se*

$$(id \otimes \pi)Ad_R(R_P) \subseteq R_P \otimes A \tag{3.19}$$

e $R_H = \pi(R_P)$ então $P(M, H, N_P, R_H)$ é um fibrado principal quântico diferenciável onde $N_P = \chi_P^{-1}(P \otimes R_P)$ com χ_P dado no exemplo 3.3.8.

Demonstração. Primeiro vejamos a covariância à direita do cálculo sobre P em relação a H, ou seja, $\Delta_R(N_P) \subseteq N_P \otimes H$. Da condição (3.19), temos para $q \in R_P$

$$1 \otimes q_{(2)} \otimes \pi(S(q_{(1)})q_{(3)}) \in P \otimes R_P \otimes H$$

donde

$$\chi_P^{-1}(1 \otimes q_{(2)}) \otimes \pi(S(q_{(1)})q_{(3)}) = S(q_{(2)}) \otimes q_{(3)} \otimes \pi(S(q_{(1)})q_{(4)}) \in N_P \otimes H.$$

Como N_P é P-sub-bimódulo de $\Omega^1 P$ temos para $p \in P$ que

$$p_{(1)}S(q_{(2)}) \otimes q_{(3)} \otimes \pi(p_{(2)}S(q_{(1)})q_{(4)}) \in N_P \otimes H.$$

Dado $\rho \in N_P$, podemos escrever $\rho = \sum_k \chi_P^{-1}(p^k \otimes q^k)$ com $p^k \in P$ e $q^k \in R_P$ para todo k. Então

$$\Delta_R(\rho) = \Delta_R\left(\sum_k p^k S(q^k_{(1)}) \otimes q^k_{(2)}\right) = \sum_k p^k_{(1)} S(q^k_{(2)}) \otimes q^k_{(3)} \otimes \pi(p^k_{(2)} S(q^k_{(1)}) q^k_{(4)})$$

que como vimos acima está em $N_P \otimes H$. Além disso, para ρ como acima temos

$$\#(\rho) = \#\left(\sum_k \chi_P^{-1}(p^k \otimes q^k)\right) = \#\left(\sum_k p^k S(q^k_{(1)}) \otimes q^k_{(2)}\right) =$$

$$= \sum_k p^k S(q^k_{(1)}) q^k_{(2)} \otimes \pi(q^k_{(2)}) = \sum_k p^k \otimes \pi(q^k)$$

donde segue que $\#(N_P) = \#(\chi_P^{-1}(P \otimes R_P)) = (id \otimes \pi)(P \otimes R_P) = P \otimes R_H$ onde a última igualdade sai da hipótese $R_H = \pi(R_P)$. Usando a proposição 3.3.5, o resultado segue. ■

Exemplo 3.3.18 *Seja* $q \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ *e* $p = -q^{1/2}$. *Considere* $\widetilde{P} = \mathcal{O}(SL_p(2))$ *do exemplo 1.2.13 e* $\widetilde{H} = \mathbb{C}[z^{-1/2}, z^{1/2}]$ *do exemplo 1.1.39 (a razão de escolhermos o expoente* $1/2$ *ficará claro logo adiante). Podemos definir uma co-ação à direita* $\widetilde{\Delta_R} : \widetilde{P} \to \widetilde{P} \otimes \widetilde{H}$ *por*

$$\widetilde{\Delta_R}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \otimes z^{1/2} & b \otimes z^{-1/2} \\ c \otimes z^{1/2} & d \otimes z^{-1/2} \end{pmatrix}$$

de forma que $\widetilde{P}$ *se torna um* $\widetilde{H}$*-co-módulo álgebra à direita. Lembrando que temos uma base de* $\mathcal{O}(SL_p(2))$ *dada por* $\mathcal{B} = \left\{\delta_{0,lm} a^k b^l c^m d^n : k, l, m, n \in \mathbb{N}\right\} \backslash \{0\}$, *não é difícil verifcar que* $M = \widetilde{P}^{\widetilde{H}}$ *é a subálgebra de* $\widetilde{P}$ *gerada por*

$$1, \quad x_1 := ab, \quad x_2 := cd, \quad x_3 := ad.$$

A álgebra M *assim achada é uma das esferas quânticas de Podlès [36] e será denotada por* $\mathcal{O}(S^2_q)$.

Vamos definir uma aplicação $\widetilde{\pi} : \widetilde{P} \to \widetilde{H}$ *por*

$$\widetilde{\pi}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^{1/2} & 0 \\ 0 & z^{-1/2} \end{pmatrix}.$$

Seja I o ideal de $\mathbb{C}\{a,b,c,d\}$ que define $\mathcal{O}(SL_p(2))$. Pode-se, então verificar que $\widetilde{\pi}(I)$ donde $\widetilde{\pi}$ é um morfismo de álgebras bem definido. Também como os geradores de $\widetilde{H}$ são atingidos temos que $\widetilde{\pi}$ é uma aplicação sobrejetora. Vejamos que $\widetilde{\pi}$ é um morfismo de álgebras de Hopf:

$$(\widetilde{\pi}\otimes\widetilde{\pi})\Delta\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} = (\widetilde{\pi}\otimes\widetilde{\pi})\begin{pmatrix} a\otimes a + b\otimes c & a\otimes b + b\otimes d \\ c\otimes a + d\otimes c & c\otimes b + d\otimes d\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} z^{1/2}\otimes z^{1/2} & 0 \\ 0 & z^{-1/2}\otimes z^{-1/2}\end{pmatrix} = \Delta\begin{pmatrix} z^{1/2} & 0 \\ 0 & z^{-1/2}\end{pmatrix} = (\Delta\circ\widetilde{\pi})\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$$

e como π e Δ são morfimsos de álgebra temos que $(\widetilde{\pi}\otimes\widetilde{\pi})\circ\Delta = \Delta\circ\widetilde{\pi}$. Analogamente mostramos que $\epsilon\circ\widetilde{\pi} = \epsilon$ e $S\circ\widetilde{\pi} = \widetilde{\pi}\circ S$.

Defina agora $H = \mathbb{C}[z^{-1}, z]$ como sub-álgebra de Hopf de $\widetilde{H}$ e seja $P = \mathcal{O}(SO_q(3))$ vista como a sub-álgebra de Hopf de $\mathcal{O}(SL_p(2))$ gerada pelos monômios quadráticos como no exemplo 1.2.15. Como $\widetilde{\Delta_R}$ é morfismo de álgebras segue que podemos restringir o domínio e o contra-domínio e definir uma co-ação $\Delta_R : P \to P\otimes H$ de modo que P é um H-co-módulo álgebra. Como M também é gerada por monômios quadráticos teremos que $P^H = M$. Além disso temos que $\widetilde{\pi}$ pode ser restringido para um morfismo de álgebras de Hopf sobrejetor $\pi : P \to H$.

Vamos mostrar que $P(M,H)$ é uma extensão de Hopf-Galois e para isso vamos utilizar a proposição 3.3.14 e mostrar que $\ker\pi \subseteq \mu(\ker\pi|_M \otimes P)$. Para isso é mais interessante utilizar uma outra base de $\mathcal{O}(SL_p(2))$ dada por $\widehat{\mathcal{B}} = \{a^n b^m c^r,\ b^m c^r d^s : m,r,s\in\mathbb{N},\ n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}\}$. Para mostrar que tal conjunto é base basta proceder como no corolário C.1.3 com outro sistema de reduções (ver [27]). Com esta base e com o fato de $\{z^n : n\in\mathbb{Z}\}$ ser base de H, temos que os elementos de $\ker\pi$ são somatórios de produtos que possuem b ou c com expoente positivo. Agora note que

$$px_1 d - (x_3 - 1)b = b + pabd - adb = b \tag{3.20}$$

e

$$p^2(x_3-1)c = p^2(ad-1)c = pbc^2,$$

$$x_2 a = cda = c + pbc^2$$

donde

$$c = x_2 a - p^2(x_3-1)c. \tag{3.21}$$

Tomando um somando de um elemento de $\ker\pi$ podemos escrevê-lo como by ou cy onde y é um monômio de grau ímpar. Usando as relações (3.20) e (3.21) e observando que $x_1, x_2, x_3 - 1 \in \ker\pi|_M$ vemos que os elementos by e cy estão em $\mu(\ker\pi|_M\otimes P)$ donde $\ker\pi\subseteq\mu(\ker\pi|_M\otimes P)$. Concluímos assim que $\mathcal{O}(SO_q(3))$ é um fibrado principal quântico sobre a esfera quântica $\mathcal{O}(S^2_q)$ com grupo estrutural quântico $\mathbb{C}[z^{-1},z]\cong\mathcal{O}(U(1))$ (este último denotando a álgebra de funções coordenadas de $U(1)$). Pode-se também mostrar que essa é uma extensão de Hopf-Galois que não é fendida [24].

Capítulo 4

Fibrados associados e resolução de referenciais

Este último capítulo está destinado em estudar alguns conceitos relacionados com fibrados principais quânticos. Na primeira seção, iniciaremos com a definição de fibrados vetorias quânticos associados e uma discussão acerca da diferença entre nossa definição e a original dada em [5]. Em seguida, revisaremos o teorema sobre extensões de Hopf-Galois do capítulo anterior e veremos como ele se encaixa no contexto de fibrados associados. Também definiremos formas tensoriais nesse contexto e estenderemos o teorema mencionado acima, e por fim, estudaremos conexões fortes que serão necessárias no estudo de derivadas covariantes na seção seguinte. Na segunda seção, primeiramente, generalizaremos o conceito de fibrados de referenciais para resolução de referenciais e utilizaremos esse nosso objeto para reescrever alguns objetos básicos da teoria de geometria diferencial em termos de formas diferenciáveis. Finalmente, generalizaremos o conceito de resolução de referenciais para o contexto não-comutativo assim como alguns dos conceitos estudados na sub-seção anterior.

4.1 Fibrados vetoriais quânticos associados

Comecemos definindo fibrado vetorial quântico associado como em [5] com uma modificação e após, façamos uma discussão acerca da definição comparando com o caso clássico.

Definição 4.1.1 *Sejam $P(M,H)$ um fibrado principal quânticos e (V,ρ_R) um H-co-módulo à direita. Considere a estrutura de co-módulo induzida em $P\otimes V$. O M-módulo à esquerda $E:=(P\otimes V)^H$ é denominado de fibrado vetorial quântico associado a P sobre M com grupo estrutural H e fibra V, o qual será denotado por $E=E(M,V,H)$.*

Em [5], (V,ρ_R) é tomado como um H^{op}-co-módulo álgebra, para que possamos colocar uma estrutura de álgebra em E, no entanto, o análogo algébrico de fibrados vetoriais são módulos projetivos finitamente gerados de acordo com o teorema de Serre-Swan e portanto E como acima deve ser interpretado como as seções do fibrado e não a álgebra de funções em si.

Não fazemos a exigência de que E seja finitamente gerado projetivo aqui uma vez que nossas álgebras não representam exatamente a "álgebra de funções de um espaço não-comutativo" mas uma possível "sub-álgebra densa".

Vamos considerar o caso clássico e verificar que interpretar o M-módulo E da definição acima como sendo as seções de um "fibrado quântico" é de fato mais adequado. Iremos trabalhar de forma ingênua e informal, ie, iremos supor sem maiores discussões a igualdade $C(P \times G) = C(P) \otimes C(G)$, o que em geral não é válido.

Suponha então (P, M, π) um G-fibrado principal e V um G-espaço vetorial de dimensão finita conforme as definições da seção 3.1. Fixe $\{e_i\}_{i=1}^n$ uma base de V e $\{x^i\}_{i=1}^n$ uma base dual para V^*, ie, $x^i(e_j) = \delta_{ij}$. Sendo $\varrho : G \to \mathrm{Aut}(V)$ a representação de G em V induzida pela multiplicação e escrevendo os elementos de $\mathrm{Aut}(V)$ como matrizes relativas à base $\{e_i\}_{i=1}^n$, temos funções coordenadas $u^i{}_j : G \to \mathbb{C}$ de forma que $u^i{}_j(g)$ é a coordenada (i, j) da matriz $\varrho(g)$. Como a representação é contínua temos que $u^i{}_j \in C(G)$. Desta forma a representação induz uma aplicação $\rho_L : V^* \to C(G) \otimes V^*$ dada por $\rho_L(x^i) = \sum_j u^i{}_j \otimes x^j$, que é uma "co-ação à esquerda" no espaço vetorial dual e não na álgebra de funções. Podemos, no entanto, interpretar ρ_L como sendo a restrição de $C(V) \to C(G) \otimes C(V)$ procedente de dualizar a multiplicação de G em V. Em vista das proposições 1.1.58 e 1.1.59 temos uma "co-ação à direita" em V dada por $\rho_R(e_i) = \sum_k e_k \otimes u^k{}_i$.

Além disso temos um isomorfismo $C(P, V) \cong C(P) \otimes V$ que leva $\phi \in C(P, V)$ em $\sum_i x^i \circ \phi \otimes e_i$. Definindo $(u^{-1})^i{}_j(g) = u^i{}_j(g^{-1})$ temos que $(u^{-1})^i{}_j \in C(G)$. Sendo $\Delta_R : C(P) \to C(P) \otimes C(G)$ a "co-ação" proveniente da multiplicação de G em P, temos que, se $\phi \in C_G(P, V)$ então $\Delta_R(x^i \circ \phi) = \sum_j x^j \circ \phi \otimes (u^{-1})^i{}_j$, de forma que

$$\Delta_R^{\otimes}\left(\sum_i x^i \circ \phi \otimes e_i\right) = \sum_{i,j,k} x^j \circ \phi \otimes e_k \otimes (u^{-1})^i{}_j u^k{}_i = \sum_i x^i \circ \phi \otimes e_i \otimes 1.$$

Por outro lado, pensando $e_i \in C(V^*)$ e abusando da notação de Sweedler (representaremos por $f^{(0)} \otimes f^{(1)}$ uma função no produto cartesiano $P \times G$ ou $V \times G$ que é aplicar f no produto de G em P ou V, ou seja, $(f^{(0)} \otimes f^{(1)})(p, g) = f(pg)$) temos que

$$\Delta_R^{\otimes}\left(\sum_i x^i \circ \phi \otimes e_i\right)(p, x^j, g) = \sum_i (x^i \circ \phi)^{(0)}(p) e_i^{(0)}(x^j)\left((x^i \circ \phi)^{(1)} e_i^{(1)}\right)(g) =$$

$$= \sum_i (x^i \circ \phi)^{(0)}(p)(x^i \circ \phi)^{(1)}(g) e_i^{(0)}(x^j) e_i^{(1)}(g) = \sum_i (x^i \circ \phi)(pg) e_i(x^j g)$$

onde temos $e_i(x^j g) = (x^j g)(e_i) = x^j(g e_i)$. Supondo que $\sum_i x^i \circ \phi \otimes e_i$ é invariante à direita e usando a igualdade acima

$$x^j(g\phi(pg)) = x^j\left(\sum_i (x^i \circ \phi)(pg) g e_i\right) = \Delta_R^{\otimes}\left(\sum_i x^i \circ \phi \otimes e_i\right)(p, x^j, g) =$$

$$= \left(\sum_i x^i \circ \phi \otimes e_i \otimes 1 \right) (p, x^j, g) = \sum_i (x^i \circ \phi)(p) e_i(x^j) = (x^j \circ \phi)(p),$$

ou seja temos que cada coordenada de $g\phi(pg)$ é igual à coordenada de $\phi(p)$ e portanto $g\phi(pg) = \phi(p)$, que é o mesmo que dizer que ϕ é equivariante. Concluímos então que $\Gamma(E) \cong C_G(P, V) \cong (C(P) \otimes V)^{C(G)}$.

Suponha que (V, ρ_L) seja um H-co-módulo à esquerda. Então o espaço $\widetilde{E} := \{x \in P \otimes V : (\Delta_R \otimes id)(x) = (id \otimes \rho_L)(x)\}$ definido como em [6] é um fibrado vetorial quântico associado como acima. Para provar este fato, considere a co-ação à direita em V dada por $\rho_R(v) = v^{(0)} \otimes S(v^{(-1)})$ conforme a proposição 1.1.58. Considere $x = \sum_i p_i \otimes v_i \in P \otimes V$. Se $x \in \widetilde{E}$ então

$$\sum_i p_i^{(0)} \otimes p_i^{(1)} \otimes v_i = \sum_i p_i \otimes v_i^{(-1)} \otimes v_i^{(0)}$$

e portanto

$$\Delta_R^{\otimes} \left(\sum_i p_i \otimes v_i \right) = \sum_i p_i^{(0)} \otimes v_i^{(0)} \otimes p_i^{(1)} v_i^{(1)} = \sum_i p_i^{(0)} \otimes v_i^{(0)} \otimes p_i^{(1)} S\left(v_i^{(-1)} \right) =$$

$$= \sum_i p_i^{(0)} \otimes v_i \otimes p_i^{(1)} S\left(p_i^{(2)} \right) = \sum_i p_i^{(0)} \otimes v_i \otimes \epsilon(p_i^{(1)}) 1 = \sum_i p_i \otimes v_i \otimes 1$$

ou seja $x \in E$. Por outro lado, supondo $x \in E$, temos a igualdade do segundo com o último termo da expressão, ie, $\sum_i p_i^{(0)} \otimes v_i^{(0)} \otimes p_i^{(1)} v_i^{(1)} = \sum_i p_i \otimes v_i \otimes 1$. Aplicando $(id \otimes \mu \otimes id)(id \otimes id \otimes S \otimes id)(id \otimes id \otimes \rho_L)(id \otimes \tau)$ temos

$$\sum_i p_i^{(0)} \otimes p_i^{(1)} \otimes v_i = \sum_i p_i^{(0)} \otimes p_i^{(1)} S\left(v_i^{(-2)} \right) v_i^{(-1)} \otimes v_i^{(0)} = \sum_i p_i \otimes v_i^{(-1)} \otimes v_i^{(0)}$$

e portanto $x \in \widetilde{E}$.

Continuando a teoria desenvolvida por Brzeziński, Hajac e Majid em [5], [4] ,[22], definiríamos uma seção cruzada como um morfismo de M-módulos à esquerda $s : E \to M$ (ainda era exigido que $s(1) = 1$, mas como não supomos que V é álgebra, em nosso caso isso pode não fazer sentido e de fato não é necessário) e o teorema 3.2.6 que nos dá o isomorfismo ${}^{\#}E \cong \mathrm{Eq}_H(V, P)$ seria interpretado como o análogo não comutativo do teorema 3.1.18. Entretanto, conforme observamos acima é interessante pensar nosso E como sendo as seções do fibrado quântico de forma que precisamos reinterpretar o isomorfismo ${}^{\#}E \cong \mathrm{Eq}_H(V, P)$. Isso faremos motivados pelo isomorfismo no caso clássico $\Gamma(E^*) \cong \Gamma(E)^{\#}$.

Definição 4.1.2 *Dados $P(M, H)$ fibrado principal quânticos e (V, ρ_R) H-co-módulo à direita, definiremos o fibrado vetorial dual quântico associado a P como sendo o M-módulo ${}^{\#}E$ o qual denotaremos por E^*.*

Suponha que V tenha dimensão finita e H tenha antípoda inversível de forma que usando a notação e o resultado da proposição 1.1.59, temos uma co-ação em V dada por $\rho_R(e_i) = \sum_j e_j \otimes u^j{}_i$ e em V^* dada por $\rho_R^*(x^i) = \sum_j x^j \otimes S^{-1}(u^i{}_j)$.

Proposição 4.1.3 *No contexto acima, é válido:*

1. $E = (P \otimes V)^H \cong \mathrm{Eq}_H(V^*, P)$;
2. $(V^* \otimes P)^H \cong \mathrm{Eq}_H(V, P)$.

Demonstração. Demonstraremos apenas o item *2.*, sendo o outro análogo. Dado $\alpha = \sum_i \xi^i \otimes p_i \in (V^* \otimes P)^H$ defina $\varphi_\alpha : V \to P$ por $\varphi_\alpha(v) = \sum_i \xi^i(v)p_i$. Da proposição 1.1.59, temos que a avaliação é um morfismo de co-álgebras, ou seja, para cada i temos $\xi^i(v)1 = (\xi^i)^{(0)}\left(v^{(0)}\right)v^{(1)}(\xi^i)^{(1)}$. Assim

$$\Delta_R\left(\sum_i \xi^i(v)p_i\right) = \sum_i \xi^i(v)p_i^{(0)} \otimes p_i^{(1)} = \sum_i (\xi^i)^{(0)}\left(v^{(0)}\right)p_i^{(0)} \otimes v^{(1)}(\xi^i)^{(1)}p_i^{(1)} =$$

$$= \sum_i \xi^i\left(v^{(0)}\right)p_i \otimes v^{(1)} = (\varphi_\alpha \otimes id)\rho_R(v)$$

donde $\varphi_\alpha \in \mathrm{Eq}_H(V, P)$.

Dado $\varphi \in \mathrm{Eq}_H(V, P)$, defina $\alpha_\varphi = \sum_{l=1}^n x^l \otimes \varphi(e_l)$, então

$$\Delta_R\left(\sum_l x^l \otimes \varphi(e_l)\right) = \sum_l (x^l)^{(0)} \otimes \varphi(e_l)^{(0)} \otimes (x^l)^{(1)}\varphi(e_l)^{(1)} =$$

$$= \sum_l (x^l)^{(0)} \otimes \varphi(e_l^{(0)}) \otimes (x^l)^{(1)}e_l^{(1)} = \sum_{l,j,k} x^j \otimes \varphi(e_k) \otimes S^{-1}(u^l{}_j)u^k{}_l =$$

$$= \sum_l x^l \otimes \varphi(e_l) \otimes 1$$

donde $\alpha_\varphi \in (V^* \otimes P)^H$. Note que

$$\varphi_{a_\varphi}(v) = \sum_l x^l(v)\varphi(e_i) = \varphi(v)$$

e

$$\alpha_{\varphi_\alpha} = \sum_l x^l \otimes \varphi_\alpha(e_l) = \sum_{i,l} x^l \otimes \xi^i(e_l)p_i = \sum_i \xi^i \otimes p_i$$

donde $\alpha \mapsto \varphi_\alpha$ é o isomorfismo desejado. ∎

Usando a proposição acima e o isomorfismo ${}^\#E \cong \mathrm{Eq}_H(V, P)$ temos que $E^* \cong (V^* \otimes P)^H$. Podemos, então, interpretar o fibrado vetorial dual quântico associado a P como um certo tipo de fibrado vetorial quânticos associado. De fato poderíamos ter igualmente definido o fibrado associado quântico como $E = (V \otimes P)^H$ e a teoria resultante seria análoga.

4.1.1 Formas tensoriais

Quando estivermos falando de formas tensoriais no contexto de um cálculo não-universal, utilizaremos a notação $\Omega(P)$ para representar um cálculo de ordem superior de forma que

$\Omega^1(P) = \Gamma_P$. Utilizaremos essa notação para estar mais de acordo com o caso clássico. Não confundir com ΩP (sem os parênteses) que indica o cálculo diferencial universa. Nesse contexto $\Omega(M)$ denotará a restrição de $\Omega(P)$ para M.

Definição 4.1.4 *Uma n-forma horizontal em um fibrado principal quântico diferenciável $P(M, H, N_P, R_H)$ é um elemento do conjunto $\Omega^n(P)_{hor} := P(\Gamma_M)P(\Gamma_M)P \dots P(\Gamma_M)P$ (n vezes). O espaço de todas as formas horizontais será denotado por $\Omega(P)_{hor}$. Dizemos que $\alpha \in \Omega(P)$ é fortemente horizontal à esquerda (respectivamente à direita) se $\alpha \in (\Omega(M))P$ (respectivamente $\alpha \in P(\Omega(M))$).*

Proposição 4.1.5 *Se o fibrado $P(M, H, 0, 0)$ tem uma conexão Π, então a aplicação*

$$\mathrm{h}(p_0 \mathrm{d}p_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}p_n) = p_0(id - \Pi)(\mathrm{d}p_1) \wedge \dots \wedge (id - \Pi)(\mathrm{d}p_n)$$

onde $p_0, p_1, \dots, p_n \in P$ é uma projeção linear de ΩP em ΩP_{hor} tal que $\Delta_R \circ \mathrm{h} = (\mathrm{h} \otimes id)\Delta_R$.

Demonstração. No caso cálculo universal temos $\wedge = \otimes_P$ e para provar que h é uma aplicação linear bem definida pela expressão acima é suficiente mostrar que ela pode ser vista como induzida de uma aplicação $\widetilde{\mathrm{h}}$ P-balanceada em cada entrada. Tal aplicação é definida escrevendo para uma n-upla $(q_1 \mathrm{d}r_1, \dots, q_n \mathrm{d}r_n)$ o elemento $q_1 \mathrm{d}r_1 \otimes_P \dots \otimes_P q_n \mathrm{d}r_n$ na forma $p_0 \mathrm{d}p_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}p_n$, usando sucessivamente a regra de Leibniz e passando os escalares em P pelo produto tensorial, e impondo $\widetilde{\mathrm{h}}(q_1 \mathrm{d}r_1, \dots, q_n \mathrm{d}r_n) = \mathrm{h}(p_0 \mathrm{d}p_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}p_n)$. Temos que $\mathrm{h}(\Omega^n P) = \Omega^n P_{hor}$ pois $(id - \Pi)(\Omega^1 P) = P(\Omega^1 M)P$ e é uma projeção uma vez que $(id - \Pi)$ o é. Para a última expressão calculemos

$$(\Delta_R \circ \mathrm{h})(p_0 \mathrm{d}p_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}p_n) = \Delta_R \left(p_0(id - \Pi)(\mathrm{d}p_1) \wedge \dots \wedge (id - \Pi)(\mathrm{d}p_n)\right) =$$

$$= p_0^{(0)}((id - \Pi)(\mathrm{d}p_1))^{(0)} \wedge \dots \wedge ((id - \Pi)(\mathrm{d}p_n))^{(0)} \otimes p_0^{(1)}((id - \Pi)(\mathrm{d}p_1))^{(1)} \cdots ((id - \Pi)(\mathrm{d}p_n))^{(1)} =$$

$$= p_0^{(0)}(id - \Pi)\mathrm{d}\left(p_1{}^{(0)}\right) \wedge \dots \wedge (id - \Pi)\mathrm{d}\left(p_n{}^{(0)}\right) \otimes p_0^{(1)} \dots p_n^{(1)} =$$

$$= (\mathrm{h} \otimes id)\Delta_R(p_0 \mathrm{d}p_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}p_n)$$

onde na segunda igualdade usamos a proposição 2.1.18 e o fato do cálculo universal ser covariante. Na terceira igualdade, usamos como d e Π se comportam com a co-ação. ∎

Definição 4.1.6 *Sejam $P(M, H, N_P, R_H)$ um fibrado principal quântico diferenciável, (V, ρ_R) um H-co-módulo à direita e seja $\phi : V \to \Omega(P)$ uma aplicação linear. Dizemos que ϕ é uma forma pseudotensorial em P se $\Delta_R \phi = (\phi \otimes id)\rho_R$, ou seja, ϕ é um morfismo de co-módulos. A aplicação ϕ será chamada de forma tensorial (respectivamente fortemente tensorial à direita ou esquerda) em P se ϕ é pseudotensorial e $\forall v \in V$, $\phi(v)$ é horizontal (respectivamente fortemente horizontal à direita ou esquerda).*

Lema 4.1.7 *Seja $\phi : V \to \Omega(P)$ uma forma tensorial em um fibrado principal quântico diferenciável $P(M, H, N_P, R_H)$ com conexão Π. Então $\mathrm{d}\phi : V \to \Omega(P)$ é pseudotensorial.*

Demonstração. Temos apenas que mostrar que $\mathrm{d}\phi$ é morfismo de co-módulos

$$\Delta_R(\mathrm{d}\phi) = (\mathrm{d} \otimes id)\Delta_R\phi = (\mathrm{d} \otimes id)(\phi \otimes id)\Delta_R = (\mathrm{d}\phi \otimes id)\Delta_R$$

como desejado. ∎

Definição 4.1.8 *Seja $P(M, H, 0, 0)$ um fibrado principal quântico com conexão Π. A aplicação $D = \mathrm{h} \circ \mathrm{d}$ é chamada de derivada covariante exterior em P.*

Segue dos lema e proposição anteriores que D manda formas tensoriais em formas tensoriais. Na próxima subseção, veremos em que condições a tensorialidade forte é preservada.

Temos a seguinte generelização do teorema 3.2.6.

Teorema 4.1.9 *Sejam $P(M, H, N_P, R_H)$ um fibrado principal quântico diferenciável e (V, ρ_R) um H-co-módulo à direita. Suponha que $(P\Omega^n(M))^H = \Omega^n(M)$ e que H tenha antípoda inversível, então formas fortemente tensoriais à direita $\phi : V \to P\Omega^n(M)$ estão em correspondência biunívoca com homomorfismos de M-módulos à esquerda $s : E \to \Omega^n(M)$.*

Demonstração. Dada $\phi : V \to P\Omega^n(M)$, defina a aplicação linear $\widetilde{s_\phi} : P \otimes V \to P\Omega^n(M)$ por $\widetilde{s_\phi}(p \otimes v) = p\phi(v)$ e vejamos que podemos restringir o domínio e contra-domínio e definir $s_\phi : E \to \Omega^n(M)$. Suponha $\sum_i p_i \otimes v_i \in E$ e calculemos

$$\Delta_R\left(\widetilde{s_\phi}\left(\sum_i p_i \otimes v_i\right)\right) = \sum_i \Delta_R(p_i\phi(v_i)) = \sum_i \Delta_R(p_i).\Delta_R(\phi(v_i)) =$$

$$= \sum_i \Delta_R(p_i).(\phi \otimes id)\rho_R(v_i) = \sum_i p_i^{(0)}\phi\left(v_i^{(0)}\right) \otimes p_i^{(1)}v_i^{(1)} =$$

$$= \sum_i p_i\phi(v_i) \otimes 1 = \widetilde{s_\phi}\left(\sum_i p_i \otimes v_i\right) \otimes 1$$

onde na penúltima igualdade usamos que $\sum_i p_i^{(0)} \otimes v_i^{(0)} \otimes p_i^{(1)}v_i^{(1)} = \sum_i p_i \otimes v_i \otimes 1$. Pela hipótese que $(P\Omega^n(M))^H = \Omega^n(M)$, temos $\widetilde{s_\phi}\left(\sum_i p_i \otimes v_i\right) \in \Omega^n(M)$ e s_ϕ está bem definido.

Por outro lado, dado $s \in E \to \Omega^n(M)$ defina $\phi_s : V \to P\Omega^n(M)$ por

$$\phi_s(v) = \sum_i \mathsf{T}'_i\left(S^{-1}\left(v^{(1)}\right)\right) s\left(\mathsf{T}''_i\left(S^{-1}\left(v^{(1)}\right)\right) \otimes v^{(0)}\right)$$

onde T é a aplicação de translação. O restante da demonstração segue de forma análoga à demonstração do teorema 3.2.6. ∎

Como no teorema 3.2.6, se a co-ação ρ_R provém de uma co-ação à esquerda ρ_L como na proposição 1.1.58, não precisaríamos supor que H tenha antípoda inversível.

4.1.2 Conexões fortes

Nesta seção, a menos que dito o contrário, trabalharemos com os cálculos universais.

Definição 4.1.10 *Uma conexão Π num fibrado principal quântico $P(M,H)$ é dita ser forte à esquerda se $(id-\Pi)(dP) \subseteq (\Omega^1 M)P$.*

Utilizaremos a mesma nomenclatura para a forma de conexão $\omega : H \to \Omega^1 P$. Isto é, no caso acima diremos que ω é uma forma de conexão forte.

Proposição 4.1.11 *Seja $\omega : H \to \Omega^1 P$ uma forma de conexão num fibrado principal quântico $P(M,H)$, são equivalentes:*

1. *ω é uma conexão forte à esquerda;*

2. *D_ω preserva tensorialidade forte à esquerda;*

3. *Para $p \in P$, vale*

$$\tau_{23} \circ (\Delta_R \otimes id)\left(p^{(0)}\omega\left(p^{(1)}\right)\right) = p \otimes 1 \otimes 1 - p^{(0)} \otimes 1 \otimes p^{(1)} + p^{(0)}\omega\left(p^{(1)}\right) \otimes 1. \quad (4.1)$$

Demonstração. *1.* $\Rightarrow$ *2.* Tome $\phi : V \to (\Omega^n M)P$ fortemente tensorial à esquerda. Já sabemos que D_ω é pseudotensorial. Além disso, se $\rho = \sum_j \mathrm{d}m_1^j \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}m_n^j \wedge p^j \in (\Omega^n M)P$, então $D_\omega \rho = (-1)^n \sum_j \mathrm{d}m_1^j \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}m_n^j \wedge (id-\Pi)\mathrm{d}p^j$. Por hipótese para cada j, podemos escrever $(id-\Pi)\mathrm{d}p^j = \sum_i \mathrm{d}\overline{m}^{ij} \wedge p^{ij}$, donde segue que $D_\omega\rho \in (\Omega^{n+1}M)P$.

2. $\Rightarrow$ *1.* Basta tomar $V = P$ e $\phi = id$.

1. $\Rightarrow$ *3.* Por um lado, como $D_\omega p \in (\Omega^1 M)P$, temos

$$\tau_{23}(\Delta_R \otimes id)(D_\omega p) = D_\omega p \otimes 1 = 1 \otimes p \otimes 1 - p \otimes 1 \otimes 1 - p^{(0)}\omega\left(p^{(1)}\right) \otimes 1,$$

por outro lado,

$$\tau_{23}(\Delta_R \otimes id)(D_\omega p) = \tau_{23}(\Delta_R \otimes id)\left(1 \otimes p - p \otimes 1 - p^{(0)}\omega\left(p^{(1)}\right)\right) =$$

$$= 1 \otimes p \otimes 1 - p^{(0)} \otimes 1 \otimes p^{(1)} - \tau_{23}(\Delta_R \otimes id)\left(p^{(0)}\omega\left(p^{(1)}\right)\right).$$

Comparando as expressões, segue o desejado.

3. $\Rightarrow$ *1.* Utilizando os cálculos acima e a hipótese, chegamos a $\tau_{23}(\Delta_R \otimes id)(D_\omega p) = D_\omega p \otimes 1$, ou seja, $D_\omega p \in \Omega^1 P \cap (M \otimes P) = (\Omega^1 M)P$. ∎

Assuma que H tem antípoda inversível, então H^{op} é álgebra de Hopf e $\overline{P}$ ($= P$ como álgebra) é um H^{op}-co-módulo álgebra à esquerda com co-ação dada por $\Delta_L(p) = S^{-1}\left(p^{(1)}\right) \otimes p^{(0)}$ como na proposição 1.1.58. Definimos $\overline{\Pi}_\omega : \Omega^1 P \to \Omega^1 P$ pela restrição de $p \otimes q \mapsto \omega\left(p^{(-1)}\right) p^{(0)} q$, que é a versão à esquerda da fórmula para Π_ω. Definimos então $\overline{D}_\omega = (id - \overline{\Pi}_\omega)\mathrm{d}$ para formas em P.

Proposição 4.1.12 *Sejam $\omega : H \to \Omega^1 P$ uma forma de conexão num fibrado principal quântico $P(M,H)$ sendo H com antípoda inversível. São equivalentes:*

1. *ω é uma conexão forte à esquerda;*

2. $$(\Delta_L \otimes id) \circ \omega = id \otimes 1 \otimes 1 - 1 \otimes 1 \otimes 1\epsilon + (id \otimes \omega) \circ \Delta; \tag{4.2}$$

3. $$(id \otimes \Delta_R) \circ \omega = 1 \otimes 1 \otimes id - 1 \otimes 1 \otimes 1\epsilon + (\omega \otimes id) \circ \Delta. \tag{4.3}$$

Neste caso $\overline{D}_\omega$ preserva formas fortemente tensoriais à direita.

Demonstração. Denote $\omega(h) = \sum_i \omega_i'(h) \otimes \omega_i''(h)$ e seja T a aplicação de translação. Utilizando o fato que Δ_R é morfismo de álgebras, temos

$$(\Delta_R \otimes id)\left(p^{(0)}\omega\left(p^{(1)}\right)\right) = \sum_i (\Delta_R \otimes id)\left(p^{(0)}\omega_i'\left(p^{(1)}\right) \otimes \omega_i''\left(p^{(1)}\right)\right) =$$

$$= \sum_i p^{(0)}\omega_i'\left(p^{(2)}\right)^{(0)} \otimes p^{(1)}\omega_i'\left(p^{(2)}\right)^{(1)} \otimes \omega_i''\left(p^{(2)}\right).$$

Portanto (4.1) é equivalente a

$$\sum_i p^{(0)}\omega_i'\left(p^{(2)}\right)^{(0)} \otimes p^{(1)}\omega_i'\left(p^{(2)}\right)^{(1)} \otimes \omega_i''\left(p^{(2)}\right) =$$

$$= p \otimes 1 \otimes 1 - p^{(0)} \otimes p^{(1)} \otimes 1 - \sum_i p^{(0)}\omega_i'\left(p^{(1)}\right) \otimes 1 \otimes \omega_i''\left(p^{(1)}\right). \tag{4.4}$$

1. $\Rightarrow$ *2.* Temos que *1.* é equivalente a (4.1) que por sua vez é equivalente a (4.4). Multiplicando (4.4) por um elemento $q \in P$, temos

$$\sum_i qp^{(0)}\omega_i'\left(p^{(2)}\right)^{(0)} \otimes p^{(1)}\omega_i'\left(p^{(2)}\right)^{(1)} \otimes \omega_i''\left(p^{(2)}\right) =$$

$$= qp \otimes 1 \otimes 1 - q\Delta_R(p) \otimes 1 - \sum_i qp^{(0)}\omega_i'\left(p^{(1)}\right) \otimes 1 \otimes \omega_i''\left(p^{(1)}\right). \tag{4.5}$$

Aplicando (4.5) em $\mathsf{T}(h) = \sum_j \mathsf{T}_j'(h) \otimes \mathsf{T}_j''(h)$, temos

$$\sum_{i,j} \mathsf{T}_j'(h)\mathsf{T}_j''(h)^{(0)}\omega_i'\left(\mathsf{T}_j''(h)^{(2)}\right)^{(0)} \otimes \mathsf{T}_j''(h)^{(1)}\omega_i'\left(\mathsf{T}_j''(h)^{(2)}\right)^{(1)} \otimes \omega_i''\left(\mathsf{T}_j''(h)^{(2)}\right) =$$

$$= \sum_j \mathsf{T}_j'(h)\mathsf{T}_j''(h) \otimes 1 \otimes 1 - \sum_j \mathsf{T}_j'(h)\Delta_R(\mathsf{T}_j''(h)) \otimes 1 -$$

$$- \sum_{i,j} \mathsf{T}_j'(h)\mathsf{T}_j''(h)^{(0)}\omega_i'\left(\mathsf{T}_j''(h)^{(1)}\right) \otimes 1 \otimes \omega_i''\left(\mathsf{T}_j''(h)^{(1)}\right).$$

Utilizando que $\mu \circ \mathsf{T} = 1\epsilon$ e que T é definida a partir da inversa de $p \otimes q \mapsto pq^{(0)} \otimes q^{(1)}$, temos a igualdade acima é equivalente a

$$\sum_i \omega_i' \left(h_{(2)}\right)^{(0)} \otimes h_{(1)} \omega_i' \left(h_{(2)}\right)^{(1)} \otimes \omega_i'' \left(h_{(2)}\right) = \epsilon(h) 1 \otimes 1 \otimes 1 - 1 \otimes h \otimes 1 + \sum_i \omega_i'(h) \otimes 1 \otimes \omega_i''(h).$$

Aplicando esta igualdade em $h_{(2)}$ de $S(h_{(1)}) \otimes h_{(2)}$ e multiplicando pelo $S(h_{(1)})$ livre temos

$$\sum_i \omega_i' \left(h_{(3)}\right)^{(0)} \otimes S(h_{(1)}) h_{(2)} \omega_i' \left(h_{(3)}\right)^{(1)} \otimes \omega_i'' \left(h_{(3)}\right) =$$

$$= 1 \otimes S(h_{(1)}) \epsilon(h_{(2)}) \otimes 1 - 1 \otimes S(h_{(1)}) h_{(2)} \otimes 1 + \sum_i \omega_i'(h_{(2)}) \otimes S(h_{(1)}) \otimes \omega_i''(h_{(2)}),$$

ou ainda,

$$(\Delta_R \otimes id)(\omega(h)) = 1 \otimes S(h) \otimes 1 - \epsilon(h) 1 \otimes 1 \otimes 1 + \sum_i \omega_i'(h_{(2)}) \otimes S(h_{(1)}) \otimes \omega_i''(h_{(2)}), \quad (4.6)$$

que é equivalente a (4.2) ao aplicarmos o isomorfismo $\tau_{12} \circ (id \otimes S^{-1} \otimes id)$.

2. $\Rightarrow$ *1.* Temos que (4.2) é equivalente a (4.6). Usando (4.6) temos

$$(\Delta_R \otimes id) \left(\sum_i p^{(0)} \omega_i' \left(p^{(1)}\right) \otimes \omega_i'' \left(p^{(2)}\right) \right) = \sum_i p^{(0)} \omega_i' \left(p^{(2)}\right)^{(0)} \otimes p^{(1)} \omega_{i'} \left(p^{(2)}\right)^{(1)} \otimes \omega_i'' \left(p^{(2)}\right) =$$

$$= p^{(0)} \otimes p^{(1)} S \left(p^{(2)}\right) \otimes 1 - p^{(0)} \otimes p^{(1)} \epsilon \left(p^{(2)}\right) \otimes 1 + \sum_i p^{(0)} \omega_i' \left(p^{(1)}\right) \otimes 1 \otimes \omega_i'' \left(p^{(1)}\right) =$$

$$= p \otimes 1 \otimes 1 - p^{(0)} \otimes p^{(1)} \otimes 1 + \sum_i p^{(0)} \omega_i' \left(p^{(1)}\right) \otimes 1 \otimes \omega_i'' \left(p^{(1)}\right)$$

que é exatamente (4.4).

2. $\Rightarrow$ *3.* Aplicando $(id \otimes id \otimes \mu) \circ \tau_{23} \circ (id \otimes id \otimes \Delta_R)$ em (4.6) e utilizando o fato de ω ser Ad_R-equivariante temos

$$\omega(h_{(2)}) \otimes S(h_{(1)}) h_{(3)} = 1 \otimes 1 \otimes S(h) - \epsilon(h) 1 \otimes 1 \otimes 1 +$$

$$+ \sum_i \omega_i'(h_{(2)}) \otimes \omega_i''(h_{(2)})^{(0)} \otimes S(h_{(1)}) \omega_i''(h_{(2)})^{(1)}$$

Aplicando em $h_{(2)}$ de $h_{(1)} \otimes h_{(2)}$ e multiplicando pelo $h_{(1)}$ livre temos

$$\omega(h_{(3)}) \otimes h_{(1)} S(h_{(2)}) h_{(4)} = 1 \otimes 1 \otimes h_{(1)} S(h_{(2)}) - 1 \otimes 1 \otimes h_{(1)} \epsilon(h_{(2)}) +$$

$$+ \sum_i \omega_i'(h_{(3)}) \otimes \omega_i''(h_{(3)})^{(0)} \otimes h_{(1)} S(h_{(2)}) \omega_i''(h_{(3)})^{(1)}$$

donde

$$\omega(h_{(1)}) \otimes h_{(2)} = 1 \otimes 1 \otimes 1 \epsilon(h) - 1 \otimes 1 \otimes h + (id \otimes \Delta_R) \omega(h)$$

que é exatamante (4.3).

3. $\Rightarrow$ *2.* Vamos dar apenas os passos da demonstração, as contas sendo análogas ao caso anterior. Aplique $\tau_{23}(\Delta_R \otimes id \otimes id)$ em (4.3), aplique o resultado em $h_{(1)}$ de $h_{(1)} \otimes S(h_{(2)})$, multplique pelo $S(h_{(2)})$ livre e aplique τ_{23} para chegar em (4.6).

Finalmente, para provar que $\overline{D}_\omega$ preserva formas fortemente tensoriais à direita, basta provar que $(id - \overline{\Pi}_\omega)\mathrm{d}P \subseteq P(\Omega^1 M)$ e utilizar a proposição análoga a anterior para conexão forte à direita. Usando (4.3), temos

$$(id \otimes \Delta_R)\overline{D}_\omega p = (id \otimes \Delta_R)\left(1 \otimes p - p \otimes 1 + \omega\left(p^{(-1)}\right)p^{(0)}\right) =$$

$$= 1 \otimes p^{(0)} \otimes p^{(1)} - p \otimes 1 \otimes 1 + (id \otimes \Delta_R)\left(\omega\left(S^{-1}\left(p^{(1)}\right)\right)p^{(0)}\right) =$$

$$= 1 \otimes p^{(0)} \otimes p^{(1)} - p \otimes 1 \otimes 1 + (id \otimes \Delta_R)\left(\omega\left(S^{-1}\left(p^{(2)}\right)\right)\right).(1 \otimes p^{(0)} \otimes p^{(1)}) =$$

$$= 1 \otimes p^{(0)} \otimes p^{(1)} - p \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes p \otimes 1 - 1 \otimes p^{(0)} \otimes p^{(1)} + \omega\left(S^{-1}\left(p^{(1)}\right)\right)p^{(0)} \otimes 1 = \overline{D}_\omega p \otimes 1.$$

Segue que $\overline{D}_\omega p \in \Omega^1 P \cap (P \otimes M) = P(\Omega^1 M)$. ∎

4.2 Resolução de referenciais

4.2.1 Caso clássico

Vamos definir agora o conceito de fibrado de referenciais e estudar como podemos generalizar essa definição de forma que não precisaremos falar de coordenadas locais e que possamos fazer definições análogas no caso não-comutativo [31]. Também estaremos interessados em caracterizar o fibrado tangente de uma variedade M como um fibrado associado a um fibrado principal com base M. Neste contexto com ajuda de alguns isomorfismos poderemos estudar conceitos que dependem de campos vetoriais do ponto de vista de formas. Nesta subseção a dimensão de M está subentendida como n e esta será considerada uma variedade compacta.

Definição 4.2.1 *Seja M uma variedade, um referencial linear sobre um ponto $m \in M$ é um isomorfismo de espaços vetoriais $p : \mathbb{R}^n \to T_m M$. Este pode ser pensado como uma escolha de base em $T_m M$.*

O fibrado de referenciais terá como fibra sobre m o conjunto de todos os referenciais lineares sobre m. Sejam FM o conjunto de todos os referenciais lineares sobre todos os pontos de M e π a aplicação de FM em M que associa um referencial sobre m ao próprio ponto m. Considere o grupo $G = GL_n$ e a multiplicação de G em FM dada por $R_g(p) = p \circ g$ para $g \in GL_n$. Então (FM, M, π) é um GL_n-fibrado principal diferenciável localmente trivial, com trivialidade local dada através de um sistema de coordenadas locais para M. Se $(U, x_1, \ldots, x_n)$ é um sistema de coordenadas então podemos considerar uma base fixa $\{\partial/\partial x_i\}_{i=1}^n$ e considerar um referencial linear como a transformação linear que leva essa base fixa na base do referencial.

Definimos a 1-forma canônica $\theta \in \Omega^1_{tens}(FM, \mathbb{R}^n)$ localmente por $\theta_p(Y_p) = p^{-1}\pi_*(Y_p)$ para $Y_p \in T_pFM$ onde $p : \mathbb{R}^n \to T_{\pi(p)}M$ é um referencial linear. Pode-se mostrar que θ definido desta forma é diferenciável. É claro que θ é horizontal. Vejamos que ela também é G-equivariante

$$R^*_g(\theta_p(Y_p)) = \theta_{pg}(R_{g*}(Y_p)) = (pg)^{-1}\pi_*(R_{g*}(Y_p)) = g^{-1}p^{-1}\pi_*(Y_p) = g^{-1}\theta_p(Y_p).$$

Pela proposição 3.1.24, θ está associado a uma transformação de fibrados entre TM e $E = FM \times_{GL_n} \mathbb{R}^n$ dada pontualmente por $\widetilde{\theta}_m : T_mM \to E_m$ com $\widetilde{\theta}_m(X_m) = [p, \theta(\widetilde{X}_p)]$ onde $p \in \pi^{-1}(m)$ e $\widetilde{X}_p$ é levantamento de X_m. Temos que $\widetilde{\theta}_m$ é sobrejetora, de fato dado $[p, v] \in E_m$ considere $X_m = p(v)$ e $\widetilde{X}_p$ levantamento de X_m então $\theta(\widetilde{X}_p) = p^{-1}(\pi_*(\widetilde{X}_p)) = p^{-1}(X_m) = p^{-1}(p(v)) = v$, ou seja, $\widetilde{\theta}_m(X_m) = [p, v]$. Como $\dim T_mM = \dim E_m$ temos que $\widetilde{\theta}_m$ é um isomorfismo e portanto $\widetilde{\theta} : TM \to E$ também é um isomorfismo.

Os próximos resultados são o ponto de partida para a definição de resolução de referenciais.

Teorema 4.2.2 *Um GL_n-fibrado principal (P, M, π) é isomorfo ao fibrado de referenciais FM se e somente se existe $\theta \in \Omega^1_{tens}(P, \mathbb{R}^n)$ tal que* $\ker\theta = \ker\pi_*$.

Demonstração. Ver [22]. ■

Proposição 4.2.3 *Sejam (P, M, π) um G-fibrado principal e $\varrho : G \to \mathrm{Aut}(V)$ uma representação diferenciável de G num espaço vetorial de dimensão finita V. Para $\theta \in \Omega^1_{tens}(P, V)$ temos que* $\ker\theta = \ker\pi_*$ *se e somente se o morfismo de fibrados correspondente como na proposição 3.1.24 é um isomorfismo.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Pela definição de forma tensorial já temos que $\ker\pi_* \subseteq \ker\theta$. Lembre que o morfismo da proposição 3.1.24 é dado localmente por $\widetilde{\theta}_m : T_mM \to E_m$ definido por $\widetilde{\theta}_m(X_m) = [p, \theta(\widetilde{X}_p)]$ onde $p \in \pi^{-1}(m)$ e $\pi_*(\widetilde{X}_p) = X_m$. Tome $Y_p \in T_pP$ tal que $\theta(Y_p) = 0$ então $\widetilde{\theta}(\pi_*(Y_p)) = [p, \theta(Y_p)] = 0$. Como estamos supondo $\widetilde{\theta}$ um isomorfismo temos que $\pi_*(Y_p) = 0$, ou seja, $Y_p \in \ker\pi_*$.

($\Leftarrow$) É suficiente mostrar que para cada $m \in M$ temos que $\widetilde{\theta}_m : T_mM \to E_m$ é injetora uma vez que $\dim(T_mM) = \dim(E_m)$. Suponha então que $\widetilde{\theta}_m(X_m) = 0$ então para o levantamento temos $[p, \theta(\widetilde{X}_p)] = 0$. Pela definição da estrutura vetorial em E_m temos que $[p, \theta(\widetilde{X}_p)] = [p, 0]$, mas note que, pelo fato da ação de G ser fiel em P temos que $(p, v) \sim (p, w)$ se e só se $v = w$. Segue que $\theta(\widetilde{X}_p) = 0$ e usando a hipótese que $\ker\theta = \ker\pi_*$ temos que $X_m = \pi_*(\widetilde{X}_p) = 0$. ■

Segue dos resultaos acima que um GL_n-fibrado principal é isomorfo ao fibrado de referenciais se e só se existe $\theta \in \Omega^1_{tens}(P, \mathbb{R}^n)$ tal que $\widetilde{\theta}$ como na proposição é um isomorfismo. Este é um caso particular em que o grupo estrutural é GL_n, no entanto a proposição 3.1.24 assim como a proposição anterior é para um grupo G arbitrário. Motivamos por esses fatos, faremos a seguinte definição.

Definição 4.2.4 *Sejam (P, M, π) um G-fibrado principal e $\varrho : G \to \mathrm{Aut}(V)$ uma representação diferenciável num espaço vetorial de dimensão finita V. Diremos que (P, V, G, θ) é uma resolução de referenciais sobre M se $\theta \in \Omega^1_{tens}(P, V)$ é tal que o homorfismo associado pela proposição 3.1.24 é um isomorfismo.*

Antes de continuarmos a teoria desenvolvida em [31] e redefinir os conceitos básicos de geometria diferencial sobre esse novo ponto de vista, vamos dar um exemplo não trivial de resolução de referenciais.

Exemplo 4.2.5 (Fibração de Hopf) *Neste exemplo, trabalharemos em $\mathbb{C}$ mas estamos pensando tudo como variedades reais. Sejam $S^3 = S^1_{\mathbb{C}} = \{(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 : |z_0|^2 + |z_1|^2 = 1\}$ e $S^2 = \mathbb{C}P^1 = \{[z_0 : z_1] : (z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 \backslash \{(0,0)\}\}$ onde $[z_0 : z_1] = \{(\lambda z_0, \lambda z_1) \in \mathbb{C}^2 : \lambda \in \mathbb{C}^*\}$. Considere a ação à direita de $U(1) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ em S^3 dada por $((z_0, z_1), \lambda) \mapsto (z_0\lambda, z_1\lambda)$ que está de fato bem definida uma vez que $|z_0\lambda|^2 + |z_1\lambda|^2 = (|z_0|^2 + |z_1|^2)|\lambda|^2 = 1$. Seja também $\pi : S^3 \to S^2$ dada por $\pi(z_0, z_1) = [z_0 : z_1]$ que é sobrejetora pois dado um ponto $[w_0 : w_1] \in S^2$, basta tomar*

$$p = \left(\frac{w_0}{(|w_0|^2 + |w_1|^2)^{1/2}}, \frac{w_1}{(|w_0|^2 + |w_1|^2)^{1/2}} \right) \in S^3$$

e temos $\pi(p) = [w_0 : w_1]$. Mostremos que (S^3, S^2, π) é um $U(1)$-fibrado principal localmente trivial. Considere os seguintes conjuntos abertos de S^2, $U_N := \{[w_0 : w_1] \in S^2 : w_1 \neq 0\}$ e $U_S := \{[w_0 : w_1] \in S^2 : w_0 \neq 0\}$ então é claro que $\{U_N, U_S\}$ é uma cobertura aberta de S^2 e é suficiente definir trivialidades locais para esses abertos. Defina $\varphi_S : \pi^{-1}(U_S) \to U_S \times U(1)$ por

$$\varphi_S(w_0, w_1) = \left([w_0 : w_1], \frac{w_0}{|w_0|} \right)$$

e $\varphi_N : \pi^{-1}(U_N) \to U_N \times U(1)$ por

$$\varphi_N(w_0, w_1) = \left([w_0 : w_1], \frac{w_1}{|w_1|} \right)$$

então

$$\varphi_S(w_0\lambda, w_1\lambda) = \left([w_0\lambda : w_1\lambda], \frac{w_0\lambda}{|w_0\lambda|} \right) = \left([w_0 : w_1], \frac{w_0\lambda}{|w_0|} \right) = \varphi_S(w_0, w_1)\lambda$$

e análogo para φ_N. Condidere as duas parametrizações locais $\psi_N : \mathbb{C} \to U_N$ e $\psi_S : \mathbb{C} \to U_S$ dadas por $\psi_N(\zeta) = [\zeta : 1]$ e $\psi_S(\zeta) = [1 : \zeta]$ respectivamente. Para cada $(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 \backslash \{(0,0)\}$, definamos uma transformação linear de espaços vetoriais complexos $\rho_{(z_0,z_1)} : T_{[z_0:z_1]}S^2 \to \mathbb{C}$. Para isso note que se $z_0 \neq 0$ então $v_S := \mathrm{d}\psi_{S(z_1/z_0)}(1)$ é uma base de $T_{[z_0:z_1]}S^2$ e se $z_1 \neq 0$ então $v_N := \mathrm{d}\psi_{N(z_0/z_1)}(1)$ é base de $T_{[z_0:z_1]}S^2$. Defina então $\rho^S_{(z_0,z_1)}(v_S) = z_0^2$ no primeiro caso e $\rho^N_{(z_0,z_1)}(v_N) = -z_1^2$ no segundo e vejamos que essas definições coincidem quando

$z_0 \neq 0 \neq z_1$. *Note que temos o seguinte diagrama comutativo*

$$\begin{tikzcd} U_S \cap U_N \arrow[r, "id"] & U_S \cap U_N \\ \mathbb{C} \setminus \{0\} \arrow[u, "\psi_N"] \arrow[r, "f"] & \mathbb{C} \setminus \{0\} \arrow[u, "\psi_S"'] \end{tikzcd}$$

onde $f(\zeta) = 1/\zeta$ *e portanto* $\mathrm{d}f_{(z_0/z_1)}(u) = -\left(z_1^2/z_0^2\right) u$, *donde*

$$v_n = \mathrm{d}\psi_{N(z_0/z_1)}(1) = \mathrm{d}\psi_{S(z_1/z_0)}\left(\mathrm{d}f_{(z_0/z_1)}(1)\right) = -\left(\frac{z_1^2}{z_0^2}\right)\mathrm{d}\psi_{S(z_1/z_0)}(1) = -\left(\frac{z_1^2}{z_0^2}\right) v_S.$$

Substituindo esta igualdade na definição de $\rho^S_{(z_0,z_1)}$ *temos*

$$\rho^S_{(z_0,z_1)}(v_N) = \rho^S_{(z_0,z_1)}\left(-\left(\frac{z_1^2}{z_0^2}\right) v_S\right) = -\left(\frac{z_1^2}{z_0^2}\right) z_0^2 = -z_1^2 = \rho^N_{(z_0,z_1)}(v_N),$$

ou seja, podemos bem definir $\rho_{(z_0,z_1)}$ *para todos os pontos* $(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$. *Defina agora* $\theta : TS^3 \to \mathbb{C}$ *por* $Y_{(z_0,z_1)} \mapsto \rho_{(z_0,z_1)}(\pi_*(Y_{(z_0,z_1)}))$ *que é claramente uma forma horizontal. Calculemos para* $g \in U(1)$,

$$R_g^*\theta(Y_{(z_0,z_1)}) = \theta(R_{g*}(Y_{(z_0,z_1)})) = \rho_{(z_0 g, z_1 g)}\pi_*\left(R_{g*}(Y_{(z_0,z_1)})\right) =$$

$$= g^2\rho_{(z_0,z_1)}\pi_*(Y_{(z_0,z_1)}) = g^2\theta(Y_{(z_0,z_1)}).$$

Portanto, definindo uma representação de $U(1)$ *por* $\kappa : U(1) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ *por* $\kappa(g) = g^{-2}$ *temos que* θ *é uma* 1*-forma tensorial. Note que* θ *restrito a cada espaço tangente* $T_{(z_0,z_1)}S^3$ *é sobrejetora uma vez que* $\pi_{*(z_0,z_1)}$ *e* $\rho_{(z_0,z_1)}$ *o são. Agora, fazendo as substituições adequadas dos espaços vetorias complexos por espaços vetoriais reais e usando argumentos de dimensão e a sobrejetividade acima temos que a aplicação* $\widetilde{\theta} : TS^2 \to S^3 \times_{U(1)} \mathbb{R}^2$ *definida por* $X_m \mapsto [p, \theta(\widetilde{X}_p)]$ *com* $\pi(p) = m$ *e* $\pi_*(\widetilde{X}_p) = X_m$ *é um isomorfismo. Concluímos então que* $(S^3, U(1), \mathbb{R}^2, \theta)$ *é uma resolução de referenciais sobre* S^2.

Utilizando os resultados de topologia algébrica e da teoria que construímos podemos concluir que todo campo vetorial na esfera se anula. Lembre que $C_G(P, V) \cong \Gamma(E)$ *onde a seção* s_ϕ *associada a* $\phi \in C_G(P, V)$ *é dada por* $s_\phi(m) = [p, \phi(p)]$ *onde* $p \in \pi^{-1}(m)$. *Portanto, basta mostrar que qualquer função* $\phi \in C_{U(1)}(S^3, \mathbb{R}^2)$ *se anula em pelo menos um ponto. De fato, dado* $p \in S^3$ *a órbita de* p, $\mathcal{O}(p)$, *é uma curva fechada em* S^3 *cuja imagem por* ϕ *é uma circunferência centrada na origem. Como* S^3 *é simplesmente conexo podemos fazer uma homotopia de* $\mathcal{O}(p)$ *para um ponto. A imagem dessa homotopia por* ϕ *será uma homotopia de uma circuferência ao redor da origem para um ponto e portanto deve passar pela origem. Ou seja, existe um ponto em* S^3 *cuja imagem por* ϕ *é a origem, como desejado.*

Da definição de resolução de referenciais temos um isomorfismo entre o espaço dos campos vetoriais $\mathfrak{X}(M)$ e o espaço $C_G(P, V)$ que pode ser pensando como sendo 0-formas tensoriais a valores em V. Neste caso, graças ao corolário 3.1.25 também temos um isomorfismo entre $\Omega^1(M)$ o espaços das 1-formas em M e o espaço $C_G(P,V^*)$ das 0-formas tensoriais a valores em V^*. Nosso próximo objetivo é usar esses dois isomorfismos para criar outros isomorfismos entre espaços que dependem apenas de M e outros que dependem de P e V ou P e V^*.

Teorema 4.2.6 *Seja (P,V,G,θ) uma resolução de referenciais sobre M. Então temos os seguintes isomorfismos*

$$\Omega^r(M)\otimes_{C(M)}\mathfrak{X}(M)\cong\Omega^r_{tens}(P,V);$$

$$\Omega^r(M)\otimes_{C(M)}\Omega^1(M)\cong\Omega^r_{tens}(P,V^*).$$

Demonstração. Para o primeiro isomorfismo, considere a aplicação de $\Omega^r(M)\otimes_{C(M)}\mathfrak{X}(M)$ em $\Omega^r_{tens}(P,V)$ que associa um elemento $\kappa=\sum_j\beta^j\otimes_{C(M)}Y^j\in\Omega^r(M)\otimes_{C(M)}\mathfrak{X}(M)$ a um elemento $\rho^\kappa\in\Omega^r_{tens}(P,V)$ de forma que

$$\rho^\kappa_p(Z_1,\ldots,Z_r)=\sum_j\beta^j_{\pi(p)}(\pi_*Z_1,\ldots,\pi_*Z_r)\theta_p(\widetilde{Y^j_p})$$

onde $Z_i\in T_pP$ e $\widetilde{Y^j}$ é um levantamento de Y^j invariante por G. É claro que ρ^κ é horizontal definido desta forma. Para ver que é G-equivariante, calculemos

$$R_g^*(\rho^\kappa_p(Z_1,\ldots,Z_r))=\rho^\kappa_{pg}(R_{g*}(Z_1),\ldots,R_{g*}(Z_r))=$$

$$=\sum_j\beta^j_{\pi(pg)}(\pi_*R_{g*}(Z_1),\ldots,\pi_*R_{g*}(Z_r))\theta_{pg}(\widetilde{Y^j_{pg}})=$$

$$=\sum_j\beta^j_{\pi(p)}(\pi_*Z_1,\ldots,\pi_*Z_r)\theta_{pg}(R_{g*}\widetilde{Y^j_p})=$$

$$=\sum_j\beta^j_{\pi(p)}(\pi_*Z_1,\ldots,\pi_*Z_r)g^{-1}\theta_p(\widetilde{Y^j_p})=$$

$$=g^{-1}\rho^\kappa_p(Z_1,\ldots,Z_r).$$

Para achar a inversa, teremos que proceder localmente e depois colar usando partição da unidade. Fixe $\rho\in\Omega^r_{tens}(P,V)$. Considere um conjunto finito de sistemas coordenadas locais $\{(U_l,x^1_l,\ldots,x^n_l)\}_{l\in\Lambda}$ onde $\{U_l\}_{l\in\Lambda}$ é uma cobertura aberta de M e uma partição da unidade $\{\psi_l\}_{l\in\Lambda}$ de forma que o suporte de cada ψ_l está contido em um compacto $K_l\subseteq U_l$ e para cada $m\in M$ existe $l_m\in\Lambda$ tal que K_{l_m} é vizinhança de m. Para um sistema de coordenada $(U_l,x^1_l,\ldots,x^n_l)$ fixo temos que $\{\partial/\partial x^i_l\}_{i=1}^n$ é uma base de T_mM para cada $m\in U_l$. Denote por $\widetilde{\theta}:TM\to E$ o isomorfismo de fibrados induzido por θ e definamos um elemento de $\Omega^r(M)\otimes_{C(M)}\mathfrak{X}(M)$ dependendo de l da seguinte forma: para $m\in U_l$ e $X_1,\ldots,X_r\in T_mM$ o número $(\beta^i_l)_m(X_1,\ldots,X_r)$ é o coeficiente de $\widetilde{\theta}^{-1}([p,\rho_p(\widetilde{X}_1,\ldots,\widetilde{X}_r)])$ na base $\{\partial/\partial x^i_l\}_{i=1}^n$, onde $p\in\pi^{-1}(m)$ e $\widetilde{X}_k\in T_pP$ é um levantamento de X_k. A independência de p e do levantamento vem de ρ ser tensorial. Para cada $l\in\Lambda$ tome um aberto $V_l\supseteq K_l$ e tal que

$\overline{V_l} \subseteq U_l$ e use o lema de Urysohn (versão diferenciável) para construir uma função $g_l \in C(M)$ que vale 1 em K_l e zero no complementar de V_l. O elemento em questão, então, será dado por $\kappa_l^\rho := \sum_{i=1}^n g_l \beta_l^i \otimes_{C(M)} \psi_l(\partial/\partial x_l^i)$ onde zero vezes algo não definido será entendido como zero. Finalmente, associaremos a ρ o elemento $\kappa^\rho = \sum_{l\in\Lambda} \kappa_l$.

Vejamos que de fato temos um inverso do outro. Comece de $\kappa = \sum_j \beta^j \otimes_{C(M)} Y^j$ e faça o procedimento acima para ρ^κ e provemos que voltamos para κ. Como $\sum_{l\in\Lambda} \psi_l = 1$, temos que

$$\kappa = \sum_{l\in\Lambda} \sum_j \beta^j \otimes_{C(M)} \psi_l Y^j$$

donde é suficiente mostrar que $\sum_j \beta^j \otimes_{C(M)} \psi_l Y^j = \kappa_l^\rho$. Para cada j considere as funções f_l^{ij} definidas em U_l que dão os coeficientes de Y^j na base $\{\partial/\partial x_l^i\}_{i=1}^n$. Então

$$\sum_j \beta^j \otimes_{C(M)} \psi_l Y^j = \sum_j \sum_{i=1}^n \beta^j \otimes_{C(M)} \psi_l f_l^{ij} \partial/\partial x_l^i =$$

$$= \sum_j \sum_{i=1}^n \beta^j \otimes_{C(M)} \psi_l g_l f_l^{ij} \partial/\partial x_l^i = \sum_j \sum_{i=1}^n \beta^j g_l f_l^{ij} \otimes_{C(M)} \psi_l \partial/\partial x_l^i$$

donde resta-nos mostar que $g_l \beta_l^i = \sum_j \beta^j g_l f_l^{ij}$. No complementar de V_l temos que essa igualdade vale pois ambos os lados são zero. Para $m \in V_l$ e $X_1, \ldots, X_r \in T_m M$ temos que achar o coeficiente de $\widetilde{\theta}^{-1}([p, \rho_p(\widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_r)])$ na base $\{\partial/\partial x_l^i\}_{i=1}^n$, mas

$$\widetilde{\theta}^{-1}([p, \rho_p(\widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_r)]) = \widetilde{\theta}^{-1}\left(\left[p, \sum_j \beta_m^j(X_1, \ldots, X_r)\theta_p(\widetilde{Y^j}_p)\right]\right) =$$

$$\sum_j \beta_m^j(X_1, \ldots, X_r)\widetilde{\theta}^{-1}([p, \theta_p(\widetilde{Y^j}_p)]) = \sum_j \beta_m^j(X_1, \ldots, X_r) Y_m^j$$

donde

$$(\beta_l^i)_m(X_1, \ldots, X_r) = \sum_j \beta_m^j(X_1, \ldots, X_r) f_l^{ij}(m)$$

como desejado. Agora, começando de ρ considere κ^ρ como definido acima e vamos calcular para $Z_1, \ldots, Z_r \in T_p P$

$$v := \sum_{l\in\Lambda} \sum_{i=1}^n g_l(\pi(p))(\beta_l^i)_{\pi(p)}(\pi_* Z_1, \ldots, \pi_* Z_r)\theta_p(\psi_l(\pi(p))(\widetilde{\partial/\partial x_l^i})_p) =$$

$$= \sum_{l\in\Lambda} g_l(\pi(p))\psi_l(\pi(p))\theta_p \left(\sum_{i=1}^n (\beta_l^i)_{\pi(p)}(\pi_* Z_1, \ldots, \pi_* Z_r)(\partial/\partial x_l^i)\right)_p^\sim =$$

$$= \sum_{l\in\Lambda} \psi_l(\pi(p))\theta_p \left(\widetilde{\theta}^{-1}([p, \rho_p(Z_1, \ldots, Z_r)])\right)_p^\sim$$

donde

$$[p,v]=\left[p,\theta_p\left(\widetilde{\theta}^{-1}\left(\sum_{l\in\Lambda}\psi_l(\pi(p))[p,\rho_p(Z_1,\dots,Z_r)]\right)\right)_p^{\sim}\right]=$$

$$=\widetilde{\theta}\left(\widetilde{\theta}^{-1}\left(\left[p,\sum_{l\in\Lambda}\psi_l(\pi(p))\rho_p(Z_1,\dots,Z_r)\right]\right)\right)=$$

$$=[p,\rho_p(Z_1,\dots,Z_r)]$$

e portanto

$$\rho_p^{\kappa^\rho}(Z_1,\dots,Z_r)=v=\rho_p(Z_1,\dots,Z_r)$$

como desejado. Nas contas o símbolo $\sim$ nos parênteses indica o levantamento de tudo que está envolvidos por eles.

A demonstração do outro caso é análoga e não faremos aqui. Apenas apresentaremos as relações que serão utilizadas ao longos das próximas demontrações. Temos de um lado

$$\begin{array}{rcl}\Omega^r(M)\otimes_{C(M)}\Omega^1(M) & \longrightarrow & \Omega^r_{tens}(P,V^*)\\ \sum_i\beta_i\otimes_{C(M)}\alpha_i & \longmapsto & \rho(Z_1,\dots,Z_r)=\sum_i\beta_i(\pi_*Z_1,\dots,\pi_*Z_r)\phi_i\end{array}$$

onde $\phi_i\in C_G(P,V^*)$ está relacionado com $\alpha_i\in\Omega^1(M)$ pelo corolário 3.1.25. Do outro lado temos

$$\begin{array}{rcl}\Omega^r_{tens}(P,V^*) & \longrightarrow & \Omega^r(M)\otimes_{C(M)}\Omega^1(M)\\ \rho & \longmapsto & \left(\sum_i\beta_i\otimes_{C(M)}\alpha_i\right)(X_1,\dots,X_r,Y)=\left\langle\rho(\widetilde{X_1},\dots,\widetilde{X_r}),\theta(\widetilde{Y})\right\rangle\end{array}$$

onde $\langle,\rangle$ denota a avaliação de V^* em V e a forma de achar os β_i e α_i adequados segue como na demonstração do caso anterior. A relação importante que teremos é que $\kappa\in\Omega^r(M)\otimes_{C(M)}\Omega^1(M)$ estará relacionado com $\rho\in\Omega^r_{tens}(P,V^*)$ se e somente se vale

$$\pi^*\kappa=\langle\rho,\theta\rangle \tag{4.7}$$

onde π^* denota o pullback em cada fator do produto tensorial $\Omega^r(M)\otimes_{C(M)}\Omega^1(M)$. Basicamente a equação acima significa a igualdade definida na aplicação de volta. ■

Dada uma representação $\varrho:G\to\mathrm{Aut}(V)$, temos associada uma representação da álgebra de Lie $\mathrm{d}\varrho:\mathfrak{g}\to\mathrm{End}(V)$ de forma que para $A\in\mathfrak{g}$ e $v\in V$ temos $Av=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{tA}v)|_{t=0}$. Em particular a representação no dual $\varrho^*:G\to\mathrm{Aut}(V^*)$ que é dada por $g\zeta(v)=\zeta(g^{-1}v)$ para $g\in G$, $\zeta\in V^*$ e $v\in V$ nos dá uma representação de $\mathfrak{g}$ que é tal que $A\zeta(v)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\zeta(e^{-tA}v)|_{t=0}$.

No caso de um G-fibrado principal P temos uma aplicação $\#:\mathfrak{g}\to\mathfrak{X}(P)$ tal que $A^{\#}h(p)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h(pe^{tA})|_{t=0}$ para $A\in\mathfrak{g}$, $h\in C(P)$ e $p\in P$. Podemos também pensar que um campo vetorial é uma derivação em $C_G(P,V^*)$. Fazendo essa extrapolação temos que $A^{\#}\phi_p(v)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(pe^{tA})(v)|_{t=0}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{-tA}\phi(p)(v))|_{t=0}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_p(e^{tA}v)|_{t=0}$ para $\phi\in C_G(P,V^*)$ donde segue que $A\phi=-A^{\#}\phi$.

Suponha ainda dada uma conexão definida por uma 1-forma de conexão $\omega : TP \to \mathfrak{g}$, então temos uma derivada exterior covariante definida por $D = h\mathrm{d}$ onde h é a projeção horizontal definida pela conexão. Da observação 3.1.28 temos que a projeção vertical v é dada por $\# \circ \omega$ e como a conexão nos dá uma soma direta temos que $h = id - \# \circ \omega$. Usando esse fato e os resultados acima, temos para $\phi \in C_G(P, V^*)$ que $D\phi = h(\mathrm{d}\phi) = \mathrm{d}\phi - \mathrm{d}\phi(\# \circ \omega) = \mathrm{d}\phi - \# \circ \omega(\phi) = \mathrm{d}\phi + \omega\phi$.

Proposição 4.2.7 *Seja (P, V, G, θ) uma resolução de referenciais sobre M e ω uma 1-forma de conxão em P. Defina a derivada covariante $\nabla : \Omega^1(M) \to \Omega^1(M) \otimes_{C(M)} \Omega^1(M)$ induzida da derivada exterior covariante $D : C_G(P, V^*) \to \Omega^1_{tens}(P, V^*)$ pelos isomorfismos encontrados acima. Então ∇ é uma derivação com respeito à multiplicação por funções de $C(M)$. Além disso $\pi^*\nabla_X\alpha = \pi^*L_X\alpha - \left\langle \phi, \mathcal{L}_{\widetilde{X}}\theta \right\rangle$ onde $\mathcal{L} = L + \omega$, $\phi \in C_G(P, V^*)$ corresponde a $\alpha \in \Omega^1(M)$, $\widetilde{X}$ é qualquer levantamento de $X \in \mathfrak{X}(M)$, e $\langle , \rangle$ denota a avaliação de V^* em V.*

Demonstração. Lembre que por (3.4) temos $\pi^*\alpha = \langle \phi, \theta \rangle$. Podemos pensar que $\nabla\alpha$ como uma 1-forma $\Omega^1(M)$ valuada $\nabla\alpha : TM \to \Omega^1(M)$ donde podemos definir $\nabla_X\alpha := \nabla\alpha(X) \in \Omega^1(M)$ para $X \in TM$. Nestes termos temos para $Y \in TP$

$$\pi^*(\nabla_X\alpha)(Y) = (\nabla_X\alpha)(\pi_*Y) = \left\langle D_{\widetilde{X}}\phi, \theta Y \right\rangle = \left\langle \mathrm{d}_{\widetilde{X}}\phi + \omega_{\widetilde{X}}\phi, \theta Y \right\rangle = \left\langle \widetilde{X}(\phi) + \omega_{\widetilde{X}}\phi, \theta Y \right\rangle$$

portanto $\pi^*(\nabla_X\alpha) = \left\langle D_{\widetilde{X}}\phi, \theta \right\rangle$ ou simplesmente $\pi^*\nabla\alpha = \langle D\phi, \theta \rangle$. Se $f \in C(M)$ então por definição $f.\phi := (\pi^*f)\phi$ para $\phi \in C_G(P, V^*)$ e como θ nos dá um morfismo de $C(M)$-módulos temos que $\alpha \sim \phi$ implica $f\alpha \sim (\pi^*f)\phi$ onde $\sim$ significa a correspondência da proposição. Segue que

$$\pi^*\nabla(f\alpha) = \langle D((\pi^*f)\phi), \theta \rangle = \langle \mathrm{d}(\pi^*f)\phi + (\pi^*f)(D\phi), \theta \rangle$$

e como $\mathrm{d}\pi^*f = \pi^*\mathrm{d}f$ temos que $\nabla f\alpha = \mathrm{d}f.\alpha + f\nabla\alpha$, ou seja, ∇ é uma diferenciação em relação à multiplicação por elementos de $C(M)$.

Finalmente, para a última parte, note que $\left\langle \omega_{\widetilde{X}}\phi, \theta \right\rangle = -\left\langle \phi, \omega_{\widetilde{X}}\theta \right\rangle$, $\pi^*(L_X\alpha) = L_{\widetilde{X}}(\pi^*\alpha) = L_{\widetilde{X}}(\langle \phi, \theta \rangle) = \left\langle L_{\widetilde{X}}\phi, \theta \right\rangle + \left\langle \phi, L_{\widetilde{X}}\theta \right\rangle$e $\widetilde{X}(\phi) = L_{\widetilde{X}}\phi$ onde $\widetilde{X}$ é um levantamento de X. Segue que

$$\pi^*\nabla_X\alpha = \left\langle (\widetilde{X}(\phi) + \omega_{\widetilde{X}}\phi, \theta \right\rangle = \left\langle L_{\widetilde{X}}\phi, \theta \right\rangle - \left\langle \phi, \omega_{\widetilde{X}}\theta \right\rangle =$$

$$\pi^*L_X\alpha - \left\langle \phi, L_{\widetilde{X}}\theta \right\rangle - \left\langle \phi, \omega_{\widetilde{X}}\theta \right\rangle = \pi^*L_X\alpha - \left\langle \phi, \mathcal{L}_{\widetilde{X}}\theta \right\rangle$$

e usando os isomorfismos acima segue o desejado. ■

Definiremos a derivada covariante de campos vetorias impondo que

$$\alpha(\nabla_XY) = X(\alpha(Y)) - \nabla_X\alpha(Y) \qquad \forall\alpha \in \Omega^1(M) \tag{4.8}$$

para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Proposição 4.2.8 *Nas condições da proposição anterior, defina o tensor de torção T como sendo o $(1,2)$-tensor em M correspondendo a $D\theta \in \Omega^2_{tens}(P,V)$ pelos isomorfismos acima. Então*

$$\nabla \wedge \alpha = \mathrm{d}\alpha - \alpha(T)$$

para todo $\alpha \in \Omega^1(M)$, sendo que tal definição é equivalente à noção usual de tensor de torção.

Demonstração. Primeiro vejamos o que a equação do enunciado quer dizer, ie, temos por definição $(\nabla \wedge \alpha)(X,Y) := \nabla_X \alpha(Y) - \nabla_Y \alpha(X)$ e $\alpha(T)(X,Y) = \alpha(T(X,Y))$. Se T está associado a $D\theta$ e $\alpha \in \Omega^1(M)$ está associado a $\phi \in C_G(P,V^*)$ então $\left\langle \phi_p, D\theta_p(\widetilde{X}_p, \widetilde{Y}_p)\right\rangle = \alpha_m(T_m(X_m,Y_m))$ para $p \in \pi^{-1}(m)$ e $\widetilde{X}$ e $\widetilde{Y}$ levantamentos de X e Y respectivamente. Tirando a dependência pontual temos $\pi^*(\alpha(T)) = \langle \phi, D\theta\rangle$. Assim

$$\pi^*\nabla \wedge \alpha(\widetilde{X},\widetilde{Y}) = \pi^*(\nabla_X\alpha(Y) - \nabla_Y\alpha(X)) = \left\langle D_{\widetilde{X}}\phi, \theta(\widetilde{Y})\right\rangle - \left\langle D_{\widetilde{Y}}\phi, \theta(\widetilde{X})\right\rangle =$$

$$= \left\langle \mathrm{d}_{\widetilde{X}}\phi + \omega_{\widetilde{X}}\phi, \theta(\widetilde{Y})\right\rangle - \left\langle \mathrm{d}_{\widetilde{Y}}\phi + \omega_{\widetilde{Y}}\phi, \theta(\widetilde{X})\right\rangle =$$

$$= \left\langle \widetilde{X}(\phi) + \omega_{\widetilde{X}}\phi, \theta(\widetilde{Y})\right\rangle - \left\langle \widetilde{Y}(\phi) + \omega_{\widetilde{Y}}\phi, \theta(\widetilde{X})\right\rangle = \bigstar.$$

Agora note que

$$\mathrm{d}\left(\langle\phi,\theta\rangle\right)(\widetilde{X},\widetilde{Y}) = \widetilde{X}\left(\left\langle \phi, \theta(\widetilde{Y})\right\rangle\right) - \widetilde{Y}\left(\left\langle \phi, \theta(\widetilde{X})\right\rangle\right) - \left\langle \phi, \theta\left([\widetilde{X},\widetilde{Y}]\right)\right\rangle =$$

$$= \left\langle \widetilde{X}(\phi), \theta(\widetilde{Y})\right\rangle + \left\langle \phi, \widetilde{X}(\theta(\widetilde{Y}))\right\rangle - \left\langle \widetilde{Y}(\phi), \theta(\widetilde{X})\right\rangle - \left\langle \phi, \widetilde{Y}(\theta(\widetilde{X}))\right\rangle - \left\langle \phi, \theta\left([\widetilde{X},\widetilde{Y}]\right)\right\rangle$$

e

$$\langle \phi, \mathrm{d}\theta\rangle(\widetilde{X},\widetilde{Y}) = \left\langle \phi, \widetilde{X}(\theta(\widetilde{Y}))\right\rangle - \left\langle \phi, \widetilde{Y}(\theta(\widetilde{X}))\right\rangle - \left\langle \phi, \theta\left([\widetilde{X},\widetilde{Y}]\right)\right\rangle$$

donde

$$\mathrm{d}\left(\langle\phi,\theta\rangle\right)(\widetilde{X},\widetilde{Y}) = \left\langle \widetilde{X}(\phi), \theta(\widetilde{Y})\right\rangle - \left\langle \widetilde{Y}(\phi), \theta(\widetilde{X})\right\rangle + \langle \phi, \mathrm{d}\theta\rangle(\widetilde{X},\widetilde{Y}).$$

Segue que

$$\bigstar = \mathrm{d}\left(\langle\phi,\theta\rangle\right)(\widetilde{X},\widetilde{Y}) - \langle \phi, \mathrm{d}\theta\rangle(\widetilde{X},\widetilde{Y}) - \left\langle \phi, \omega_{\widetilde{X}}\theta(\widetilde{Y})\right\rangle + \left\langle \phi, \omega_{\widetilde{Y}}\theta(\widetilde{X})\right\rangle =$$

$$= \mathrm{d}\left(\langle\phi,\theta\rangle\right)(\widetilde{X},\widetilde{Y}) - \langle \phi, \mathrm{d}\theta\rangle(\widetilde{X},\widetilde{Y}) - \langle \phi, \omega\wedge\theta\rangle(\widetilde{X},\widetilde{Y}),$$

logo

$$\pi^*\nabla \wedge \alpha = \mathrm{d}\left(\langle\phi,\theta\rangle\right) - \langle \phi, \mathrm{d}\theta + \omega\wedge\theta\rangle = \pi^*\mathrm{d}\alpha - \langle\phi, D\theta\rangle = \pi^*\mathrm{d}\alpha - \pi^*(\alpha(T))$$

e finalmente temos que $\nabla \wedge \alpha = \mathrm{d}\alpha - \alpha(T)$.

Agora, vamos mostrar que esta equação é equivalente à definição usual do tensor de torção, a saber, $T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$. Aplicando $\alpha \in \Omega^1(M)$ arbitrário nesta úlima igualdade e usando (4.8) temos

$$X(\alpha(Y)) - \nabla_X\alpha(Y) - Y(\alpha(X)) + \nabla_Y\alpha(X) - \alpha([X,Y]) = \alpha(T(X,Y))$$

ou reescrevendo

$$X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X,Y]) - \nabla\wedge\alpha(X,Y) = \alpha(T)(X,Y).$$

Mas $\mathrm{d}\alpha(X,Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X,Y])$ donde segue a equivalência desejada. ■

Proposição 4.2.9 *Nas condições da proposição anterior, defina o tensor de curvatura de ∇ para $\alpha \in \Omega^1(M)$ arbitrário como sendo $R\alpha \in \Omega^2(M) \otimes_{C(M)} \Omega^1(M)$ correspondente a $\Omega\phi$ onde $\Omega := D\omega \in \Omega^2_{tens}(P,\mathfrak{g})$ é a curvatura da forma de conexão e $\phi \in C_G(P,V^*)$ corresponde a α. Então*

$$R(X,Y)\alpha = [\nabla_X,\nabla_Y]\alpha - \nabla_{[X,Y]}\alpha \qquad \forall X,Y \in \mathfrak{X}(M)$$

e tal equação é equivalente à definição usual.

Demonstração. Note que

$$\pi^*(R(X,Y)\alpha)\widetilde{Z} = (R(X,Y)\alpha)(\pi_*\widetilde{Z}) = \left\langle \Omega\phi(\widetilde{X},\widetilde{Y}), \theta(\widetilde{Z})\right\rangle,$$

ou seja, $R(X,Y)\alpha \sim \Omega\phi(\widetilde{X},\widetilde{Y})$ onde $X,Y \in X(M)$, $\widetilde{Z} \in X(P)$ e $\widetilde{X},\widetilde{Y}$ são levantamentos de X e Y respectivamente. Também já vimos que $\pi^*\nabla_X\alpha = \langle D_{\widetilde{X}}\phi, \theta\rangle$, isto é, $\nabla_X\alpha \sim D_{\widetilde{X}}\phi$ e portanto temos que

$$[\nabla_X,\nabla_Y]\alpha - \nabla_{[X,Y]}\alpha \sim [D_{\widetilde{X}}, D_{\widetilde{Y}}]\phi - D_{[\widetilde{X},\widetilde{Y}]}\phi.$$

Segue para a primeira parte, é suficiente mostrar que $\Omega\phi(\widetilde{X},\widetilde{Y}) = [D_{\widetilde{X}}, D_{\widetilde{Y}}]\phi - D_{[\widetilde{X},\widetilde{Y}]}\phi$. Lembrando que $\Omega = \mathrm{d}\omega + \omega\wedge\omega$ [34] e fazendo os cálculos temos por um lado

$$\Omega\phi(\widetilde{X},\widetilde{Y}) = (\mathrm{d}\omega + \omega\wedge\omega)\phi(\widetilde{X},\widetilde{Y}) = \widetilde{X}(\omega_{\widetilde{Y}})\phi - \widetilde{Y}(\omega_{\widetilde{X}})\phi - \omega_{[\widetilde{X},\widetilde{Y}]}\phi + \omega_{\widetilde{X}}\omega_{\widetilde{Y}}\phi - \omega_{\widetilde{Y}}\omega_{\widetilde{X}}\phi$$

e por outro lado

$$[D_{\widetilde{X}}, D_{\widetilde{X}}]\phi = D_{\widetilde{X}}(\widetilde{Y}(\phi) + \omega_{\widetilde{Y}}\phi) - D_{\widetilde{Y}}(\widetilde{X}(\phi) + \omega_{\widetilde{X}}) =$$

$$= \widetilde{X}\widetilde{Y}(\phi) + \widetilde{X}(\omega_{\widetilde{Y}}\phi) + \omega_{\widetilde{X}}(\widetilde{Y}(\phi)) + \omega_{\widetilde{X}}\omega_{\widetilde{Y}}\phi - \widetilde{Y}\widetilde{X}(\phi) - \widetilde{Y}(\omega_{\widetilde{X}}\phi) - \omega_{\widetilde{Y}}(\widetilde{X}(\phi)) - \omega_{\widetilde{Y}}\omega_{\widetilde{X}}\phi =$$

$$= [\widetilde{X},\widetilde{Y}]\phi + \widetilde{X}(\omega_{\widetilde{Y}})\phi + \omega_{\widetilde{Y}}\omega_{\widetilde{X}}\phi - \widetilde{Y}(\omega_{\widetilde{X}})\phi - \omega_{\widetilde{Y}}\omega_{\widetilde{X}}\phi$$

onde usamos que $\widetilde{X}(\omega_{\widetilde{Y}}\phi) = \widetilde{X}(\omega_{\widetilde{Y}})\phi + \omega_{\widetilde{Y}}(\widetilde{X}(\phi))$. Comparando as duas expressões acima e usando a relação para $D_{[\widetilde{X},\widetilde{Y}]}\phi$, temos a igualdade desejada $\Omega\phi(\widetilde{X},\widetilde{Y}) = [D_{\widetilde{X}}, D_{\widetilde{Y}}]\phi - D_{[\widetilde{X},\widetilde{Y}]}\phi$.

Para a equivalência com a definição usual, note que usando a relação (4.8) diversas vezes para $\alpha \in \Omega^1(M)$ e $X, Y, Z \in X(M)$ arbitrários temos

$$[\nabla_X, \nabla_Y]\alpha(Z) - \nabla_{[X,Y]}\alpha(Z) = \nabla_X(\nabla_Y \alpha)(Z) - \nabla_Y(\nabla_X \alpha)(Z) - \nabla_{[X,Y]}\alpha(Z) =$$

$$= X(\nabla_Y \alpha(Z)) - \nabla_Y \alpha(\nabla_X Z) - Y(\nabla_X \alpha(Z)) + \nabla_X \alpha(\nabla_Y Z) - \nabla_{[X,Y]}\alpha(Z) =$$

$$= X(Y(\alpha(Z)) - X(\alpha(\nabla_Y Z)) - Y(\alpha(\nabla_X Z)) + \alpha(\nabla_Y \nabla_X Z) - Y(X(\alpha(Z)) + Y(\alpha(\nabla_X Z))+$$

$$+X(\alpha(\nabla_Y Z)) - \alpha(\nabla_X \nabla_Y Z) - [X,Y](\alpha(Z)) + \alpha(\nabla_{[X,Y]} Z) =$$

$$= -\alpha([\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X,Y]} Z)$$

ou seja, denotando a definição de curvatura usual por $\overline{R}$ temos que

$$\alpha\left(\overline{R}(X,Y)Z\right) = -R(X,Y)\alpha(Z)$$

diferindo apenas por um sinal. ■

Passemos agora para discussão da métrica Riemanniana. Na verdade, não estaremos trabalhando com uma métrica Riemanniana em si, mas com uma generalização dela e veremos como interpretar a métrica como uma resolução de referenciais.

Definição 4.2.10 *Seja M uma variedade. Uma métrica Riemmaniana em M é um elemento $g \in \Omega^1(M) \otimes_{C(M)} \Omega^1(M)$ satisfazendo:*

1. *$g(X,X) \geq 0$ $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ e $g(X,X) = 0$ se é só se $X = 0$ (condição de ser positiva definida);*

2. *$g(X,Y) = g(Y,X)$ $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ (condição de simetria).*

Note que para cada ponto $m \in M$ a métrica Riemanniana dá um produto interno g_m em T_mM e portanto podemos pensar g_m como um isomorfismo entre T_mM e T_m^*M dado por $g_m(X_m, \_)$. Estendendo essa idéia globalmente temos um homomorfismo de fibrados $g : \mathfrak{X}(M) \to \Omega^1(M)$ e, usando coordenadas locais e partição da unidade pode-se mostrar que este homomorfismo é na verdade um isomorfismo. A primeira generalização de métrica vem ao trocar a condição 1. pela condição que g_m seja um isomorfismo entre T_mM e T_m^*M o que resulta também num isomorfismo $g : \mathfrak{X}(M) \to \Omega^1(M)$. Neste caso, dizemos que g é uma métrica semi-Riemanniana ou pseudo-Riemanniana. Quando formos generalizar para o caso não comutativo, em geral, a simetria é algo que não se espera. Em alguns casos podemos definir um certo tipo de simetria, mas no caso geral, isto não é claro. Por isso, vamos generalizar ainda mais a noção de métrica.

Definição 4.2.11 *Seja M uma variedade. Uma métrica generalizada em M é um elemento $g \in \Omega^1(M) \otimes_{C(M)} \Omega^1(M)$ de forma que o homorfismo de fibrados $g : \mathfrak{X}(M) \to \Omega^1(M)$ definido por $X \mapsto g(X, \_)$ é um isomorfismo.*

Voltando ao caso em que temos uma resolução de referenciais (P, V, G, θ) sobre M, um elemento $g \in \Omega^1(M) \otimes_{C(M)} \Omega^1(M)$ pode ser enxergado através dos isomorfismos acima como um elemento $\gamma \in \Omega^1_{tens}(P, V^*)$. O próximo resultado relaciona os conceitos de métrica generalizada e resolução de referenciais.

Teorema 4.2.12 *Suponha dado uma resolução de referenciais (P, V, G, θ) sobre M, então um elemento $g \in \Omega^1(M) \otimes_{C(M)} \Omega^1(M)$ é uma métrica generalizada se é somente se o elemento $\gamma \in \Omega^1_{tens}(P, V^*)$ correspondente é tal que (P, V^*, G, γ) é outra resolução de referenciais sobre M, a qual será chamada de resolução de referenciais dual.*

Demonstração. A resolução de referenciais nos dá um isomorfismo $\Omega^1(M) \cong C_G(P, V^*)$, então o isomorfismo $g : \mathfrak{X}(M) \to \Omega^1(M)$ é equivalente a um isomorfismo $\mathfrak{X}(M) \to C_G(P, V^*)$ que manda X em $\gamma_{\widetilde{X}}$ onde $\widetilde{X}$ é levantamento de X, $\pi^*(g(X, \_)) = \langle \gamma_{\widetilde{X}}, \theta \rangle$ e $\gamma_{\widetilde{X}}(p) = \gamma(\widetilde{X}_p)$. Pela proposição 3.1.24 este último isomorfismo é equivalente a $\theta' \in \Omega^1_{tens}(P, V^*)$ tal que (P, V^*, G, θ') é uma resolução de referenciais e de tal forma que a aplicação $\mathfrak{X}(M) \to C_G(P, V^*)$ é dada por $X \mapsto \theta'(\widetilde{X})$, ou seja, neste caso temos que $\theta' = \gamma$. ∎

4.2.2 Caso não-comutativo

Definição 4.2.13 *Dizemos que (P, H, V, θ) é uma resolução de referenciais de $(M, \Omega^1 M)$ se H é uma álgebra de Hopf com antípoda inversível, $P(M, H)$ é um fibrado principal quântico sobre M, V é um H-co-módulo à direita e $\theta : V \to P\Omega^1 M$ é uma 1-forma fortemente tensorial tal que a aplicação $s_\theta : E \to \Omega^1 M$ do teorema 4.1.9 é um isomorfismo.*

A definição pode ser reescrita para cálculos não universais, mas o restante da seção será em termos de cálculos universais.

Lema 4.2.14 *Seja $P(M, H, 0, 0)$ um fibrado principal quântico diferenciável com cálculo universal e V um H-co-módulo álgebra a direita então é válido o seguinte isomorfismo: $((\Omega^1 M)P \otimes V)^H \cong \Omega^1 M \otimes_M E$.*

Demonstração. Note que $(\Omega^1 M)P \subseteq M \otimes P$. Definiremos as aplicações $\Phi : ((\Omega^1 M)P \otimes V)^H \to \Omega^1 M \otimes_M E$ e $\Psi : \Omega^1 M \otimes_M E \to ((\Omega^1 M)P \otimes V)^H$ por $\Phi\left(\sum_i m_i \otimes p_i \otimes v_i\right) = -\sum_i \mathrm{d}m_i \otimes_M p_i \otimes v_i$ e $\Psi\left(\sum_i n_i \mathrm{d}m_i \otimes_M p_i \otimes v_i\right) = \sum_i n_i \mathrm{d}m_i p_i \otimes v_i$. Temos que ver estas funções estão bem definidas, isto é, que as expressões dadas estão no contra-domínio. No primeiro caso temos que $\sum_i m_i \otimes p_i \otimes v_i \in ((\Omega^1 M)P \otimes V)^H$ implica que

$$\sum_i m_i \otimes p_i^{(0)} \otimes v_i^{(0)} \otimes p_i^{(1)} v_i^{(1)} = \sum_i m_i \otimes p_i \otimes v_i \otimes 1$$

o que por sua vez implica que

$$-\sum_i \mathrm{d}m_i \otimes_M p_i^{(0)} \otimes v_i^{(0)} \otimes p_i^{(1)} v_i^{(1)} = -\sum_i \mathrm{d}m_i \otimes_M p_i \otimes v_i \otimes 1$$

donde segue que $-\sum_i \mathrm{d}m_i \otimes_M p_i \otimes v_i \in \Omega^1 M \otimes_M E$ usando um análogo do lema 1.1.55. Da mesma forma, fazemos o outro caso. Vejamos que um é inverso do outro. Lembrando que $\mathrm{d}m = 1 \otimes m - m \otimes 1$ temos

$$(\Phi \circ \Psi)\left(\sum_i n_i \mathrm{d}m_i \otimes_M p_i \otimes v_i\right) = \Phi\left(\sum_i n_i \mathrm{d}m_i p_i \otimes v_i\right) =$$

$$= \Phi\left(\sum_i n_i \otimes m_i p_i \otimes v_i - n_i m_i \otimes p_i \otimes v_i\right) =$$

$$= -\sum_i \mathrm{d}n_i \otimes_M m_i p_i \otimes v_i - \mathrm{d}(n_i m_i) \otimes_M p_i \otimes v_i =$$

$$= -\sum_i \mathrm{d}n_i \otimes_M m_i p_i \otimes v_i - \mathrm{d}n_i \otimes_M m_i p_i \otimes v_i - n_i \mathrm{d}m_i \otimes_M p_i \otimes v_i =$$

$$= \sum_i n_i \mathrm{d}m_i \otimes_M p_i \otimes v_i.$$

Por outro lado note que podemos escrever um elemento de $((\Omega^1 M)P \otimes V)^H$ da forma $\sum_{i,j} m_{ij} \otimes p_{ij} \otimes v_i$ onde $\sum_j m_{ij} p_{ij} = 0$ para cada i. Assim, temos que

$$(\Psi \circ \Phi)\left(\sum_{i,j} m_{ij} \otimes p_{ij} \otimes v_i\right) = \Psi\left(-\sum_{i,j} \mathrm{d}m_{ij} \otimes_M p_{ij} \otimes v_i\right) =$$

$$= -\left(\sum_{i,j} 1 \otimes m_{ij} p_{ij} \otimes v_i - m_{ij} \otimes p_{ij} \otimes v_i\right) = \sum_{i,j} m_{ij} \otimes p_{ij} \otimes v_i$$

como desejado. ∎

Suponha agora que (P, H, V, θ) seja uma resolução de referenciais sobre $(M, \Omega^1 M)$, ou seja temos um isomorfismo $s_\theta : E \to \Omega^1 M$ dado por $s_\theta(p \otimes v) = p\theta(v)$. Então podemos compor o isomorfismo acima com $id \otimes_M s_\theta$ para chegar num isomorfismo com $\Omega^1 M \otimes_M \Omega^1 M$. O último por sua vez pode ser visto com subconjunto de $M \otimes \Omega^1 M$ uma vez feita a identificação $M \otimes_M \Omega^1 M = \Omega^1 M$. Agora, pelo fato de M ser o conjunto dos elementos invariantes de P e usando o lema 1.1.55 vemos que $((\Omega^1 M)P \otimes V)^H \subseteq M \otimes E$. Finalmente juntando todos esses fatos vemos que o isomorfismo $((\Omega^1 M)P \otimes V)^H \cong \Omega^1 M \otimes_M \Omega^1 M \subseteq M \otimes \Omega^1 M$ é dado por $id \otimes s_\theta$.

Proposição 4.2.15 *Seja (P, H, V, θ) uma resolução de referenciais sobre $(M, \Omega^1 M)$ e suponha que $\omega : H \to \Omega^1 P$ é uma forma de conexão forte à esquerda. Considere a derivada covariante $D^E_\omega : E \to \Omega^1 M \otimes_M E$ dada por $D_\omega \otimes id = (id - \Pi_\omega)\mathrm{d} \otimes id$ e definamos $\nabla_\omega : \Omega^1 M \to \Omega^1 M \otimes_M \Omega^1 M$ usando o isomorfismo s_θ, então ∇_ω obedece uma regra de derivação com respeito à multiplicação à esquerda por elementos de M análogo ao caso* *clássico. Além disso temos a seguinte expressão*

$$\nabla_\omega = 1 \otimes id - (id \otimes \theta) \circ s_\theta^{-1} - \sum (s_{\theta P}^{-1})^{(0)} \omega \left((s_{\theta P}^{-1})^{(1)} \right) \theta(s_{\theta V}^{-1})$$

onde usamos a notação $s_\theta^{-1} = \sum s_{\theta P}^{-1} \otimes s_{\theta V}^{-1}$ *para uma escolha arbitrária de representante da imagem de* s_θ^{-1}.

Demonstração. Pela definição conexão forte temos que $(id - \Pi_\omega)\mathrm{d}P \subseteq (\Omega^1 M)P$ e usando o lema acima temos que D_ω^E está bem definida. Agora, conforme o enunciado e a discussão anterior temos que $\nabla_\omega = (id \otimes s_\theta) \circ (D_\omega \otimes id) \circ s_\theta^{-1}$. Lembrando que $\Pi_\omega(p \otimes q) = pq^{(0)}\omega\left(q^{(1)}\right)$ temos utilizando a notação para s_θ^{-1}

$$\nabla_\omega = \sum (id \otimes s_\theta)((id - \Pi_\omega)\mathrm{d} \otimes id) \left(s_{\theta P}^{-1} \otimes s_{\theta V}^{-1}\right) =$$

$$= (id \otimes s_\theta) \left(\left(1 \otimes s_{\theta P}^{-1} - s_{\theta P}^{-1} \otimes 1 - \left(s_{\theta P}^{-1}\right)^{(0)} \omega \left(\left(s_{\theta P}^{-1}\right)^{(1)} \right) \right) \otimes s_{\theta V}^{-1} \right) =$$

$$= 1 \otimes id - s_{\theta P}^{-1} \otimes \theta \left(s_{\theta V}^{-1}\right) - \left(s_{\theta P}^{-1}\right)^{(0)} \omega \left(\left(s_{\theta P}^{-1}\right)^{(1)} \right) \theta(s_{\theta V}^{-1})$$

como desejado. Sejam $\rho = \sum_i m_i \otimes n_i \in \Omega^1 M$, $f \in M$ e $\sum_j p_j \otimes v_j = s_\theta^{-1}(\rho)$, assim usando a expressão acima temos

$$\nabla_\omega(f\rho) = \sum_{i,j} 1 \otimes fm_i \otimes n_i - fp_j \otimes \theta(v_j) - fp_j^{(0)} \omega \left(p_j^{(1)}\right) \theta(v_j)$$

onde usamos que s_θ, s_θ^{-1} e Δ_R são morfismos de M-módulos à esquerda. Por outro lado

$$f\nabla_\omega(\rho) = \sum_{i,j} f \otimes m_i \otimes n_i - fp_j \otimes \theta(v_j) - fp_j^{(0)} \omega \left(p_j^{(1)}\right) \theta(v_j).$$

Voltando a pensar em $\Omega^1 M \otimes_M \Omega^1 M$ temos que $\sum_i f \otimes m_i \otimes n_i \sim \sum_i f \otimes 1 \otimes_M m_i \otimes n_i$ e $\sum_i 1 \otimes fm_i \otimes n_i \sim \sum_i 1 \otimes f \otimes_M m_i \otimes n_i$ donde

$$\nabla_\omega(f\rho) - f\nabla_\omega(\rho) = (1 \otimes f - f \otimes 1) \otimes_M \rho = \mathrm{d}f \otimes_M \rho.$$

Lembrando que no caso do cálculo universal temos $\otimes_M = \wedge$ segue que $\nabla_\omega(f\rho) = f\nabla_\omega(\rho) + \mathrm{d}f \wedge \rho$ que é a expressão para o caso clássico. ■

Queremos agora mostrar um resultado análogo à proposição 4.2.8. No entanto, uma vez que θ é uma forma fortemente tensorial à direita e ω é uma forma de conexão forte à esquerda, não podemos tirar conclusões sobre $D_\omega\theta$. Para resolver este problema usaremos a proposição 4.1.12 que nos diz que a derivada convariante no contexto à esquerda $\overline{D}_\omega = (id - \overline{\Pi}_\omega)\mathrm{d}$ (onde $\overline{\Pi}_\omega$ é caracterizado por $\overline{\Pi}_\omega(p \otimes q) = \omega\left(p^{(-1)}\right)p^{(0)}q$) preserva tensorialidade forte à direita.

Proposição 4.2.16 *Nas condições da proposição anterior, o tensor de torção* $T : \Omega^1 M \to \Omega^1 M \otimes_M \Omega^1 M$ *definido por* $T = \mathrm{d} - \nabla$ *corresponde à forma fortemente tensorial* $\overline{D}_\omega\theta : V \to$

$P\Omega^2 M$ à direita pelo teorema 4.1.9. Explicitamente

$$\overline{D}_\omega \theta = 1 \otimes \theta - \sum_k \left(\theta'_k \otimes 1 \otimes \theta''_k\right) + \theta \otimes 1 + \cdot \circ (\omega \otimes \theta) \circ \rho_L$$

onde denotamos $\theta = \sum_k \theta'_k \otimes \theta''_k$ para uma possível escolha de representar a imagem de θ, a aplicação $\cdot$ multiplica cópias adjacentes vindas de ω e θ e ρ_L é a co-ação à esquerda associada a co-ação à direita de V como na proposição 1.1.58.

Demonstração. Note que a inclusão $\Omega^1 M \subseteq M \otimes M$ é tal que $\sum_i m_i \mathrm{d} n_i = \sum_i m_i \otimes n_i$. Portanto a derivação exterior em $\Omega^1 M$ é dada por

$$\mathrm{d}\left(\sum_i m_i \otimes n_i\right) = \sum_i \mathrm{d}m_i \otimes_M \mathrm{d}n_i = \sum_i (1 \otimes m_i - m_i \otimes 1) \otimes_M (1 \otimes n_i - n_i \otimes 1) \sim$$

$$\sim \sum_i 1 \otimes m_i \otimes n_i - m_i \otimes 1 \otimes n_i + m_i \otimes n_i \otimes 1.$$

Segue que

$$\mathrm{d}(s_\theta(p \otimes v)) = 1 \otimes p\theta(v) + \sum \left(p\theta'(v) \otimes 1 \otimes \theta''(v)\right) + p\theta(v) \otimes 1.$$

Pela proposição anterior temos

$$\nabla_\omega(s_\theta(p \otimes v)) = 1 \otimes p\theta(v) - p \otimes \theta(v) - p^{(0)}\omega\left(p^{(1)}\right)\theta(v).$$

Sendo $\widetilde{T} : E \to \Omega^2 M = \Omega^1 M \otimes_M \Omega^1 M$ dada por $\widetilde{T} = (\mathrm{d} - \nabla) \circ s_\theta$, isto é, a torção vista com aplicação de E, temos

$$\widetilde{T}(p \otimes v) = p \otimes \theta(v) - \sum_k \left(p\theta'_k(v) \otimes 1 \otimes \theta''_k(v)\right) + p\theta(v) \otimes 1 + p^{(0)}\omega\left(p^{(1)}\right)\theta(v).$$

Seja $Y : V \to P\Omega^2 M$ é a 2-forma associada a $\widetilde{T}$ pelo teorema 4.1.9. Usando as propriedades da aplicação de translação $\mu \circ \mathsf{T} = 1\epsilon$ e $(id \otimes_M \Delta_R)\mathsf{T} = (\mathsf{T} \otimes id) \circ \Delta$ sai que

$$(\mu \otimes \omega)(id \otimes_M \Delta_R)\mathsf{T} = (\mu \otimes \omega)(\mathsf{T} \otimes id) \circ \Delta = (1\epsilon \otimes \omega) \circ \Delta = 1 \otimes \omega.$$

Assim

$$Y(v) = \sum_i \mathsf{T}'_i\left(S^{-1}\left(v^{(1)}\right)\right)\widetilde{T}\left(\mathsf{T}''_i\left(S^{-1}\left(v^{(1)}\right)\right) \otimes v^{(0)}\right) =$$

$$= 1 \otimes \theta(v) - \sum_k \left(\theta'_k(v) \otimes 1 \otimes \theta''_k(v)\right) + \theta(v) \otimes 1 + \omega\left(S^{-1}\left(v^{(1)}\right)\right)\theta(v^{(0)})$$

onde nos três primeiros somandos usamos a propriedade $\mu \circ \mathsf{T} = 1\epsilon$, depois que $\epsilon \circ S^{-1} = \epsilon$ e por fim as propriedades de co-ação; no último somando utilizamos a expressão achada acima. Note que Y possui a expressão dada para $\overline{D}_\omega \theta$ no enunciado. Resta-nos apenas mostrar que tal expressão de fato vale. Pensando $\Omega^2 P \subseteq P \otimes P \otimes P$ temos

$$\overline{D}_\omega \theta(v) = \overline{h}\mathrm{d}\theta(v) = \overline{h}\mathrm{d}\left(\sum_k \theta'_k(v) \otimes \theta''_k(v)\right) = \overline{h}\mathrm{d}\left(\sum_k \theta'_k(v)\mathrm{d}\theta''_k(v)\right) =$$

$$= \overline{h}\left(\sum_k \mathrm{d}\theta'_k(v)\mathrm{d}\theta''_k(v)\right) = \sum_k (id - \overline{\Pi}_\omega)(\mathrm{d}\theta'_k(v))(id - \overline{\Pi}_\omega)(\mathrm{d}\theta''_k(v)) = \bigstar.$$

Uma vez que $\theta(v) \in P\Omega^1 M \subseteq P \otimes M$ podemos escolher os θ'' de forma que $\theta''_k(v) \in M$ para todo k, donde

$$\overline{\Pi}_\omega(\mathrm{d}\theta''_k(v)) = \overline{\Pi}_\omega(1 \otimes \theta''_k(v) - \theta''_k(v) \otimes 1) = -\omega\left(S^{-1}\left(\theta''_k(v)^{(1)}\right)\right)\theta''_k(v)^{(0)} = 0$$

para cada k. Assim

$$\bigstar = \mathrm{d}\theta(v) - \sum_k \overline{\Pi}_\omega(1 \otimes \theta'_k(v) - \theta'_k(v) \otimes 1)(\mathrm{d}\theta''_k(v)) =$$

$$= \mathrm{d}\theta(v) + \sum_k \omega\left(S^{-1}\left(\theta'_k(v)^{(1)}\right)\right)\theta'_k(v)^{(0)}(\mathrm{d}\theta''_k(v)) = \blacktriangle.$$

Como θ é fortemente tensorial e em particular, equivariante, temos $\Delta_R(\theta(v)) = (\theta \otimes id)\rho_R$, ou ainda, como escolhemos $\theta''_k(v) \in M$ temos $\sum_k \theta'_k(v)^{(0)} \otimes \theta''_k(v) \otimes \theta'_k(v)^{(1)} = \sum_l \theta'_l\left(v^{(0)}\right) \otimes \theta''_l\left(v^{(0)}\right) \otimes v^{(1)}$ donde

$$\blacktriangle = \mathrm{d}\theta(v) + \sum_l \omega\left(S^{-1}\left(v^{(1)}\right)\right)\theta'_l\left(v^{(0)}\right)\mathrm{d}\theta''_l\left(v^{(0)}\right) =$$

$$= 1 \otimes \theta(v) - \sum_k \left(\theta'_k(v) \otimes 1 \otimes \theta''_k(v)\right) + \theta(v) \otimes 1 + \omega\left(S^{-1}\left(v^{(1)}\right)\right)\theta(v^{(0)})$$

onde usamos os fatos mencionados no início da demonstração. ■

Exemplo 4.2.17 *Seja M uma álgebra de Hopf. Considere $H = \mathbb{K}$ e $P = M$ com $\Delta_R : P \to P \otimes H$ dada por $\Delta_R(p) = p \otimes 1$. Temos que a unidade $\eta : H \to P$ é uma aplicação de fissura, de fato ela a identidade em $\mathrm{Lin}(H, P)$ uma vez que $\epsilon_H = id$ no caso em que H é o próprio corpo e $\Delta_R(\eta(\lambda)) = \Delta_R(\lambda 1_P) = 1_P \otimes \lambda = (\eta \otimes id)\Delta(\lambda)$. Segue que $P(M, H)$ é um fibrado principal quântico. Considere $V = \ker \epsilon$ e $\rho_R = \Delta_R|_{\ker \epsilon}$, donde $E = M \otimes \ker \epsilon$.*

Seja $\theta : V \to \Omega^1 M$ dada por $\theta(v) = S(v_{(1)}) \otimes v_{(2)}$ que está bem definida pois $v \in \ker \epsilon$ e $S(v_{(1)})v_{(2)} = \epsilon(v) = 0$. Então $s_\theta : E \to \Omega^1 M$ dado por $s_\theta(p \otimes v) = pS(v_{(1)}) \otimes v_{(2)}$ é um isomorfismo cuja inversa é dada por $\# : \Omega^1 M \to E$ com $\#(m \otimes n) = mn_{(1)} \otimes n_{(2)}$. De fato essa é uma interpretação geométrica do isomorfismo entre duas das formas de se ver o c.d.p.o. universal sobre uma álgebra de Hopf. Segue que (P, H, V, θ) é uma resolução de referenciais sobre $(M, \Omega^1 M)$.

Uma conexão $\omega : \mathbb{K} \to \Omega^1 P$ tem que satisfazer $\omega(1) = 0$, ou seja, neste caso temos apenas a conexão nula. A derivada covariante exterior associada a esta conexão como na *proposição 4.2.15 é dada por*

$$\nabla_\omega(m \otimes n) = 1 \otimes m \otimes n - mn_{(1)} \otimes S(m_{(2)}) \otimes m_{(3)}$$

e lembrando que $\mathrm{d}(m\otimes n) = 1\otimes m\otimes n - m\otimes 1\otimes n + m\otimes n\otimes 1$ *temos que a torção* $T = \mathrm{d} - \nabla_\omega$ *desta conexão vale*

$$T(m \otimes n) = m \otimes n \otimes 1 - m \otimes 1 \otimes n + mn_{(1)} \otimes S(n_{(2)}) \otimes n_{(3)}.$$

Exemplo 4.2.18 (Espaços homogêneos quânticos) *Sejam P e H álgebras de Hopf e $\pi : P \to H$ um morfismo de álgebras de Hopf sobrejetor. Defina a co-ação $\Delta_R : P \to P \otimes H$ por $\Delta_R = (id \otimes \pi) \circ \Delta$ e seja $M = P^H$. Suponha que $P(M, H)$ seja um fibrado principal quânticos (por exemplo se $\ker\pi \subseteq \mu(\ker\epsilon|_M \otimes P)$ como na proposição 3.3.14). Seja $\iota : H \to P$ uma aplicação linear tal que $\pi\circ\iota = id$ e $(id\otimes\pi)\circ Ad_R\circ\iota = (\iota\otimes id)\circ Ad_R$, então pela proposição 3.3.15, temos uma forma de conexão dada por $\omega(h) = S(\iota(h_{(1)}))\mathrm{d}(\iota(h_{(2)}))$. Se além disso ι satisfaz $(\iota \otimes id) \circ \Delta = \Delta_R \circ \iota$, então ω é uma conexão forte à esquerda [24].*

Seja $V = \ker\epsilon \cap M$ e defina $\rho_R : V \to V \otimes H$ por $\rho_R(v) = v_{(2)} \otimes \pi(S(v_{(1)}))$. Queremos mostrar que ρ_R está bem definida e é uma co-ação. Pela proposição 1.1.58 é suficiente mostrar que $\rho_L : V \to H \otimes V$ dada por $\rho_L(v) = \pi(v_{(1)}) \otimes v_{(2)}$ está bem definida e é uma co-ação, uma vez que $\pi \circ S = S \circ \pi$. Calculemos para $v \in V \subseteq P$,

$$(id \otimes \Delta_R)\rho_L(v) = \pi(v_{(1)}) \otimes v_{(2)} \otimes \pi(v_{(3)}) = (\pi \otimes id \otimes id)(\Delta \otimes id)\Delta_R(v) =$$

$$\pi(v_{(1)}) \otimes v_{(2)} \otimes 1 = \rho_L \otimes 1$$

donde $\rho_L(v) \in H \otimes M$ pelo lema 1.1.55. Além disso

$$(id \otimes \epsilon)\rho_L(v) = \pi(v_{(1)})\epsilon(v_{(2)}) = \pi(v) = \epsilon(v_{(1)})\pi(v_{(2)}) = \epsilon(v)1 = 0$$

onde na penúltima igualdade usamos o fato que $v \in M$. Segue de lema A.2.8 que $\rho_L(v) \in H \otimes \ker\epsilon$ e portanto $\rho_L(v) \in H \otimes V$ como desejado. Também tiramos que a co-ação ρ_R é bem definida.

Defina $\theta : V \to P\otimes P$ por $\theta(v) = S(v_{(1)})\otimes v_{(2)}$ e note que $\mu(\theta(v)) = S(v_{(1)})v_{(2)} = \epsilon(v)1 = 0$ e

$$(id \otimes \Delta_R)(\theta(v)) = S(v_{(1)}) \otimes v_{(2)} \otimes \pi(v_{(3)}) = S(v_{(1)}) \otimes v_{(2)} \otimes 1 = \theta(v) \otimes 1$$

donde podemos restringir o contra-domínio de θ para $P\Omega^1 M = \Omega^1 P \cap P \otimes M$. Vejamos que θ é equivariante

$$\Delta_R(\theta(v)) = (S(v_{(1)}))_{(1)} \otimes v_{(2)} \otimes \pi((S(v_{(1)}))_{(2)}) = S(v_{(2)}) \otimes v_{(3)} \otimes S(\pi(v_{(3)})) = (\theta \otimes id)\rho_R(v).$$

Segue que θ é uma 1-forma fortemente tensorial à direita. Vamos mostrar que $s_\theta : E \to \Omega^1 M$ dada por $s_\theta(p \otimes v) = p\theta(v) = pS(v_{(1)}) \otimes v_{(2)}$ é um isomorfismo. De fato vejamos que a *inversa é a restrição de $\tilde{t} : P \otimes P \to P \otimes P$ dada por $\tilde{t}(m \otimes n) = mn_{(1)} \otimes n_{(2)}$ para $\Omega^1 M$. Se $\sum_i m_i \otimes n_i \in \Omega^1 M$ então, como anteriormente temos*

$$(id \otimes \epsilon)\tilde{t}\left(\sum_i m_i \otimes n_i\right) = \sum_i m_i n_{i(1)}\epsilon(n_{i(2)}) = \sum_i m_i n_i = 0$$

e

$$(id \otimes \Delta_R)\tilde{t}\left(\sum_i m_i \otimes n_i\right) = \sum_i m_i n_{i(1)} \otimes n_{i(2)} \otimes \pi(n_{i(3)}) = \sum_i m_i n_{i(1)} \otimes n_{i(2)} \otimes 1$$

donde $\tilde{t}\left(\sum_i m_i \otimes n_i\right) \in P \otimes V$. Além disso

$$\Delta_R\left(\sum_i m_i n_{i(1)} \otimes n_{i(2)}\right) = \sum_i m_{i(1)} n_{i(1)} \otimes n_{i(4)} \otimes \pi(m_{i(2)})\pi(n_{i(2)})\pi(S(n_{i(3)})) =$$

$$= \sum_i m_i n_{i(1)} \otimes n_{i(3)} \otimes \pi(\epsilon(n_{i(2)})) = \sum_i m_i n_{i(1)} \otimes n_{i(2)} \otimes 1$$

donde restringindo o domínio e contra-domínio de $\tilde{t}$ temos bem definido $t : \Omega^1 M \to E$. Por um lado temos

$$(t \circ s_\theta)\left(\sum_i p_i \otimes v_i\right) = t\left(\sum_i p_i S(v_{i(1)}) \otimes v_{i(2)}\right) = \sum_i p_i S(v_{i(1)})v_{i(2)} \otimes v_{i(3)} = \sum_i p_i \otimes v_i$$

e do outro lado

$$(s_\theta \circ t)\left(\sum_i m_i \otimes n_i\right) = s_\theta\left(\sum_i m_i n_{i(1)} \otimes n_{i(2)}\right) = \sum_i m_i n_{i(1)} S(n_{i(2)}) \otimes n_{i(3)} = \sum_i m_i \otimes n_i$$

donde segue que (P, H, V, θ) é uma resolução de referenciais sobre $(M, \Omega^1 M)$.

Para uma resolução de referenciais (P, H, V, θ) sobre $(M, \Omega^1 M)$, suponha agora V de dimensão finita e considere um elemento $g = \sum_n g_n \otimes_M h_n \in \Omega^1 M \otimes_M \Omega^1 M$. Queremos mostrar um resultado análogo ao último teorema da subseção anterior a respeito de métrica generalizada. Primeiramente, vemos o elemento g como uma forma fortemente tensorial à esquerda $\gamma : V^* \to (\Omega^1 M)P$ aplicando $id \otimes_M s_\theta^{-1}$, depois usando o isomorfismo do lema 4.2.14 e finalmente utilizando um resultado análogo à proposição 4.1.3. Explicitamente para $f \in V^*$, temos

$$\gamma(f) = \sum_n f\left(s_{\theta V}^{-1}(h_n)\right) g_n s_{\theta P}^{-1}(h_n).$$

Reescrevendo a teoria para o caso dual, temos que a forma γ pode ser interpretada como um morfismo de módulos $s_\gamma : (V^* \otimes P)^H \to \Omega^1 M$ dada por $s_\gamma(f \otimes p) = \gamma(f)p$.

Temos também que comentar sobre o que se entende por campos vetoriais no contexto não-comutativo. Ainda não existe uma teoria amplamente aceita de campos vetoriais não comutativos. Duas das tentativas são de pensar como a álgebra de Lie das derivações de M (ver por exemplo [15]) e a outra em termos de pares de Cartan [3]. No primeiro caso perdemos a dualidade entre campos e formas e no segunto a dualidade é preservada, mas perdemos a regra de Leibniz clássica para campos, sendo esta modificada para uma relação similar.

No caso de pares de Cartan, temos que para c.d.p.o. Γ sobre M temos que o ${}^{\#}\Gamma$ conjunto dos morfismo de M-módulos à esquerda de Γ em M junto com uma representação $\varrho : {}^{\#}\Gamma \to \mathrm{Lin}(M, M)$ dada por $\varrho(X)(m) = X(dm)$ é um par de Cartan sendo esta última fórmula análoga ao caso clássico. Nesse contexto poderíamos pensar por exemplo $\mathfrak{X}M := {}^{\#}\Omega^1 M$ e se tivermos ainda uma resolução de referenciais e utilizando os isomorfismos encontrados ao longo do texto temos $(V^* \otimes P)^H \cong \mathrm{Eq}_H(V, P) \cong {}^{\#}E \cong {}^{\#}\Omega^1 M$. Desta forma podemos ver s_γ como uma transformação linear de $\mathfrak{X}M$ em $\Omega^1 M$. Seguindo os isomorfismos vemos que s_γ é exatamente a aplicação $\overline{g} : \mathfrak{X}M \to \Omega^1 M$ que dado $X \in \mathfrak{X}M$ nos dá $\overline{g}(X) = \sum_n g_n X(h_n)$. Temos assim o seguinte resultado.

Proposição 4.2.19 *No contexto acima, s_γ é uma resolução de referenciais se e somente se g é uma métrica generalizada, no sentido que gera um isomorfismo entre $\mathfrak{X}M$ e $\Omega^1 M$.*

Ainda no contexto que V tem dimensão finita, suponha que P é uma extensão de Hopf-Galois fendida com aplicação de fissura $\Phi : H \to P$. Conforme [22] temos que uma conexão forte à esquerda ω é equivalente a uma aplicação linear $A : H \to \Omega^1 M$ tal que $A(1) = 0$. Explicitamente temos

$$\omega = \Phi^{-1} * A * \Phi + \Phi^{-1} * \mathrm{d}\Phi$$

onde $*$ é o produto de convolução, ou seja,

$$(\Phi^{-1} * A * \Phi + \Phi^{-1} * \mathrm{d}\Phi)(h) = \sum \Phi^{-1}(h_{(1)}) A(h_{(2)}) \Phi(h_{(3)}) + \sum \Phi^{-1}(h_{(1)}) \mathrm{d}\Phi(h_{(2)}).$$

Neste caso, temos que formas fortemente tensoriais à esquerda $\alpha : V \to (\Omega^n M)P$ estão em correspondência biunívoca com aplicações lineares $\sigma : V \to \Omega^n M$ através de $\alpha = \sigma *_R \Phi$ e $\sigma = \alpha *_R \Phi^{-1}$ onde $*_R$ é a convolução com respeito a co-ação à direita ρ_R de V, isto é, $\alpha(v) = \sigma\left(v^{(0)}\right) \Phi\left(v^{(1)}\right)$ e análogo no segundo caso. Similarmente, formas fortemente tensoriais à direita $\alpha : V \to P(\Omega^1 M)$ estão em correspondência biunívoca com aplicações lineares $\sigma : V \to \Omega^n M$ através de $\alpha = \Phi^{-1} *_L \sigma$ e $\sigma = \Phi *_L \alpha$ onde $*_L$ é a convolução com relação a co-ação ρ_L como no caso anterior, e onde ρ_L está relacionada com ρ_R como na proposição 1.1.58.

Além disso temos um isomorfismo $\Theta : M \otimes V \to E$ dado por $\Theta(m \otimes v) = m\Phi\left(S^{-1}\left(v^{(1)}\right)\right) \otimes v^{(0)}$ com inversa dada por $\Theta^{-1}(p \otimes v) = p\Phi^{-1}\left(v^{(-1)}\right) \otimes v^{(0)}$. Similarmente para E^* temos $\Theta^* : V^* \otimes M \to (V^* \otimes P)^H$ dado por $\Theta(x \otimes m) = x^{(0)} \otimes \Phi\left(S\left(x^{(1)}\right)\right) m$ com inversa $(\Theta^*)^{-1}(x \otimes p) = x^{(0)} \otimes \Phi^{-1}\left(S\left(x^{(1)}\right)\right) p$.

No caso das formas $\theta : V \to P(\Omega^1 M)$ e $\gamma : V^* \to (\Omega^1 M)P$ sejam $e : V \to \Omega^1 M$ e $f : V^* \to \Omega^1 M$ as aplicações lineares correspondentes. Temos que a inversibilidade de

$s_e : M \otimes V \to \Omega^1 M$ dada por $s_e(m \otimes v) = me(v)$ é equivalente à inversibilidade de s_θ, de fato, basta notar que $s_\theta = s_e \circ \Theta^{-1}$. Analogamente temos $s_f : V^* \otimes M \to \Omega^1 M$ dada por $s_f(x \otimes m) = f(x)m$ e a inversibilidade de s_γ é equivalente à inversibilidade de s_f. Ou seja, podemos pensar numa resolução de referenciais a partir de uma aplicação linear $e : V \to \Omega^1 M$ tal que s_e é um isomorfismo e continuando a discussão sobre métrica, teríamos que g é uma métrica generalizada se e somente se a aplicação $f : V^* \to \Omega^1 M$ correspondente é tal que s_f é um isomorfismo.

Considerações Finais

Vimos que ao pensarmos extensões de Hopf-Galois como generalização de fibrados principais para o caso não-comutativo podemos construir uma teoria muito próxima ao caso clássico. Para uma teoria final, no entanto, será necessário incluir o formalismo de fibrados principais quânticos localmente triviais [6]. Em [5], já se sentiu a necessidade de considerar trivialidades locais e não ficou claro o que exatamente se definia como fibrados localmente triviais nesta referência. Um problema interessante é tentar unir a teoria de fibrados localmente triviais iniciada em [6] e continuada em [7], [8], [9] e [10] com a teoria apresentada neste trabalho.

No quarto capítulo justificamos que a noção de fibrado vetorial quântico associado representa na verdade o espaço das seções, como em [6] e [9], não havendo a necessidade de achar uma estrutura de álgebra para E como feito em [5]. Uma pergunta interessante a ser respondida é em que condições de P e V temos que E será um M-módulo finitamente gerado projetivo. Na mesma linha podemos tentar estudar fibrados vetoriais quânticos em geral [9] e responder à mesma pergunta, colocando-os no contexto do teorema de Serre-Swan.

Como mencionado em [22], a definição abstrata de fibrado de referenciais é algo que já poderia ter sido feito há muito tempo. Sua generalização para resolução de referenciais surgiu em [31] na tentativa de generalizar a geometria Riemanniana para o caso não-comutativo. O exemplo da fibração de Hopf (não presente em [31]) mostra que tal teoria pode ser interessante inclusive no caso clássico.

O objetivo inicial da dissertação era estudar a generalização da geometria Riemanniana feita em [31] e [32]. O caso do cálculo universal está bem estruturado, no entanto, é um caso não muito interessante uma vez que a co-homologia do cálculo universal é trivial. Já o trabalho para o caso cálculo não-universal desenvolvido em [32] deixa dois pontos fundamentais sem demonstração explícita e cujas técnicas utilizadas para o cálculo universal não funcionam diretamente. O primeiro deles é o isomorfismo $((\Gamma_M)P \otimes V)^H \cong (\Gamma_M) \otimes_M E$ que é essencial para a definição da derivada covariante. O segundo ponto é a questão da torção discutida na proposição 4.2.16 onde se fez necessário utilizar uma versão à esquerda da derivada covariante exterior desenvolvida na proposição 4.1.12. A demonstração desta proposição foi altamente técnica e utilizamos diversas vezes fatos particulares do cálculo universal. Devido a esses fatores, decidimos limitar um pouco o escopo desta dissertação.

Outra problema de fundamental importância é a questão dos exemplos. Em [32], apresentam-se exemplos em que o fibrado principal quântico é uma extensão de Hopf-Galois fendida. Nesse caso, uma resolução de referenciais é equivalente a um isomorfismo $M \otimes V \cong \Gamma_M$ e podemos definir a derivada covariante em termos apenas da derivação em M, sem precisar falar de fibrados principais quânticos e conexões fortes. Em particular o caso que M é uma álgebra de Hopf o isomorfismo em questão é dado pela proposição 2.2.6 e pelo teorema 2.2.11.

A idéia de estudar geometria Riemanniana via fibrados principais quânticos é tentar construir um operador de Dirac e não exigi-lo na definição como nas triplas espectrais de Connes [12]. De qualquer forma, fica em aberto outro problema a ser investigado, a saber, construir triplas espectrais no sentido de Connes utilizando o formalismo de fibrados quânticos. Desta forma, poderíamos identificar as geometrias não-comutativas oriundas do formalismo de grupos quânticos como triplas espectrais, estendendo o trabalho iniciado em [11].

Apêndice A

Produto Tensorial

A.1 Definição e construção do produto tensorial

Este apêndice se destinará a fazer a construção do produto tensorial e demonstrar diversas proposições a respeito do produto tensorial que são utilizados freqüentemente ao longo do texto. Em particular a proposição que fala do produto tensorial entre funções terá grande importância no próximo apêndice para justificar a utilização da notação de Sweedler.

Neste apêndice R denotará um anel com unidade, não necessariamente comutativo e $\mathbb{K}$ um corpo. Lembre-se que um R-bimódulo é um grupo abeliano M munido de uma multiplicação por escalar à esquerda e outra à direita tal que $(rm)s = r(ms)$ e $r(m_1+m_2)s = rm_1s+rm_2s$ $\forall r, s \in R$, $\forall m, m_1, m_2 \in M$. Não necessariamente vale que $rm = mr$ mesmo quando R é comutativo. Dados dois R-bimódulos M, N então o produto cartesiano $M \times N$ é um R-bimódulo fazendo $r(m,n)s = (rm, ns)$.

Definição A.1.1 *Sejam M, N R-bimódulos e P grupo abeliano, dizemos que uma aplicação $f : M \times N \to P$ é R-balanceada se*

1. $f(m_1 + m_2, n) = f(m_1, n) + f(m_2, n)$
2. $f(m, n_1 + n_2) = f(m, n_1) + f(m, n_2)$
3. $f(mr, n) = f(m, rn)$

$\forall r \in R$ $\forall m, m_1, m_2 \in M$ $\forall n, n_1, n_2 \in N$.

Vamos definir o produto tensorial a partir da propriedade universal, em seguida mostraremos que ele é único a menos de isomorfismo e por fim faremos a construção de um produto tensorial mostrando assim sua existência.

Definição A.1.2 *Sejam M e N R-bimódulos. Diremos que o par (P, π), onde P é um grupo abeliano e $\pi : M \times N \to P$ é uma aplicação R-balanceada, é um produto tensorial entre M e N se para qualquer aplicação R-balanceada $f : M \times N \to Q$ para Q grupo abeliano, existe um único homomorfismo de grupos $\overline{f}$ tal que o seguinte diagrama comute:*

$$\begin{tikzcd} & M \times N \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "f"] & \\ P \arrow[rr, "\overline{f}"] & & Q \end{tikzcd} \tag{A.1}$$

Vale observar que poderíamos ter definido o produto tensorial num contexto um pouco mais geral, exigindo apenas que M fosse um R-módulo à direita, N um R-módulo à esquerda. No entanto, em grande parte dos casos estaremos fazendo o produto tensorial sobre um corpo, mais especificamente $\mathbb{C}$, e nos poucos casos que não será sobre $\mathbb{C}$, será justamente no caso de bimódulos.

Proposição A.1.3 *Sejam M, N R-bimódulos e (P_1, π_1), (P_2, π_2) produtos tensoriais entre M e N, então P_1 e P_2 são isomorfos como grupos.*

Demonstração. Da definição de produto tensorial temos que existem homomorfismos de grupos $\overline{\pi_1} : P_2 \to P_1$, $\overline{\pi_2} : P_1 \to P_2$ tal que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} & M \times N \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ P_1 \arrow[rr, shift left, "\overline{\pi_2"] & & P_2 \arrow[ll, shift left, "\overline{\pi_1}"] \end{tikzcd}$$

Então temos que $\overline{\pi_1} \circ \overline{\pi_2} \circ \pi_1 = \overline{\pi_1} \circ \pi_2 = \pi_1$, mas id_{P_1} também satisfaz $id_{P_1} \circ \pi_1 = \pi_1$; portanto da definição de produto tensorial, trocando f por π_1, temos que $\overline{\pi_1} \circ \overline{\pi_2} = id_{P_1}$. Analogamente $\overline{\pi_2} \circ \overline{\pi_1} = id_{P_2}$ donde segue o resultado. ∎

Lembre que, dada uma família de R-bimódulos $\{M_i\}_{i \in I}$, a soma direta entre os módulos denotada por $\bigoplus_{i \in I} M_i$ é por definição o subconjunto do produto cartesiano $\prod_{i \in I} M_i$ das seqüencias quase sempre nulas, ou seja, que a não ser por uma quantidade finita de elementos a seqüência $(m_i)_{i \in I}$ é nula. A soma direta tem uma estrutura natural de R-bimódulo definindo as operações coordenada a coordenada.

Dado um conjunto X, definimos o R-bimódulo livre gerado por X como sendo $\langle X \rangle = \bigoplus_{x \in X} R$. Caso R seja um corpo, diremos que $\langle X \rangle$ é o espaço vetorial gerado por X, e se R for comutativo, diremos apenas R-módulo, uma vez que a multiplicação à esquerda coincide com a multiplicação à direita. Denotaremos um elemento de $\langle X \rangle$ por $\sum_{i=1}^{n} r_i x_i$ fazendo a identificação desta soma com a seqüência que possui o valor r_i na coordenada x_i somando r_i com r_j caso $x_i = x_j$ para $i \neq j$. Com essa identificação temos uma inclusão natural de X em $\langle X \rangle$ e para os elementos de X, vale que $rx = xr$ $\forall r \in R$. Aqui, vale notar que esta é uma soma formal, ou seja, mesmo que X já possua uma soma e uma multiplicação por escalar, o somatório não representa as operações já existentes no conjunto X. Além disso, dado um subconjunto M' de um R-bimódulo M, podemos considerar o sub-bimódulo gerado por M' como sendo a intersecção de todos os sub-bimódulos de M que contêm M', tal sub-bimódulo também será denotado por $\langle M' \rangle$.

Podemos, agora, começar a construir um produto tensorial e assim mostrar sua existência. Dados M e N R-bimódulos, considere o $\mathbb{Z}$-módulo livre $G = \langle M \times N \rangle_{\mathbb{Z}}$ gerado por $M \times N$ e defina os seguintes subconjuntos de G onde as somas fora dos parênteses são as somas formais conforme descritas acima:

- $D_1 = \{(m_1 + m_2, n) - (m_1, n) - (m_2, n) \mid m_1, m_2 \in M,\ n \in N\}$;
- $D_2 = \{(m, n_1 + n_2) - (m, n_1) - (m, n_2) \mid m \in M,\ n_1, n_2 \in N\}$;
- $D_3 = \{(mr, n) - (m, rn) \mid m \in M,\ n \in N,\ r \in R\}$.

Defina $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ e tome o $\mathbb{Z}$-sub-módulo $H = \langle D \rangle_{\mathbb{Z}}$. Denote o $\mathbb{Z}$-módulo quociente por $M \otimes_R N = G/H$. Denote por $\widetilde{\pi}$ a projeção canônica de $\langle M \times N \rangle$ em $M \otimes_R N$ e por i a inclusão natural de $M \times N$ em $\langle M \times N \rangle$. Podemos então definir $\pi = \widetilde{\pi} \circ i : M \times N \to M \otimes_R N$. Antes de mostrarmos que realmente construímos um produto tensorial, note que $\pi(M \times N)$ gera $M \otimes_R N$. De fato, se $p = (\sum_{i=1}^{n} z_i(m_i, n_i)) + H$, então $p = \sum_{i=1}^{n} z_i \left((m_i, n_i) + H\right) = \sum_{i=1}^{n} z_i \pi(m_i, n_i)$.

Proposição A.1.4 *O par $(M \otimes_R N, \pi)$ construído acima é um produto tensorial entre M e N.*

Demonstração. Primeiramente, temos que mostrar que a aplicação π é R-balanceada. Mostremos que π separa a soma na primeira entrada. Temos que $\pi(m_1 + m_2, n) = (m_1 + m_2, n) + H$, mas $(m_1 + m_2, n) - (m_1, n) - (m_2, n) \in D_1 \subseteq H$, portanto $(m_1 + m_2, n) + H = (m_1, n) + (m_2, n) + H$ e assim $\pi(m_1 + m_2, n) = (m_1, n) + (m_2, n) + H = ((m_1, n) + H) + ((m_2, n) + H) = \pi(m_1, n) + \pi(m_2, n)$. Seguimos o mesmo processo para cada um dos conjuntos D_i para mostrar as propriedades necessárias.

Seja $f : M \times N \to P$ uma aplicação R-balanceada em algum grupo abeliano P. Como $M \times N$ gera G livremente como $\mathbb{Z}$-módulo existe um único homomorfismo de grupos $\widehat{f} : G \to P$ tal que $\widehat{f}|_{M \times N} = f$. Para descermos para o quociente, temos que mostrar que $\widehat{f}(H) = 0$, mas como $\widehat{f}$ é homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos, é suficiente mostrar que $\widehat{f}(D) = 0$. Para isto, basta utilizar o fato de f ser R-balanceada, por exemplo para D_1 temos $\widehat{f}((m_1 + m_2, n) - (m_1, n) - (m_2, n)) = f(m_1 + m_2, n) - f(m_1, n) - f(m_2, n) = f(m_1, n) + f(m_2, n) - f(m_1, n) - f(m_2, n) = 0$.

Temos assim um homomorfismo de grupos bem definido $\overline{f} : M \otimes_R N \to P$ tal que $\overline{f} \circ \widetilde{\pi} = \widehat{f}$, ou seja $\overline{f} \circ \pi = \overline{f} \circ \widetilde{\pi} \circ i = \widehat{f} \circ i = \widehat{f}|_{M \times N} = f$. Resta-nos apenas mostrar a unicidade $\overline{f}$. Suponha que exista outro homomorfismo de grupos $g : M \otimes_R N \to P$ tal que $g \circ \pi = f$. Conforme visto, para $p \in M \otimes_R N$, podemos escrever $p = \sum_{i=1}^{n} z_i \pi(m_i, n_i)$, então $g(p) = \sum_{i=1}^{n} z_i (g \circ \pi)(m_i, n_i) = \sum_{i=1}^{n} z_i f(m_i, n_i) = \sum_{i=1}^{n} z_i (\overline{f} \circ \pi)(m_i, n_i) = \overline{f}(p)$. ■

Mostramos assim a existência de um produto tensorial e como este é único a menos de isomorfismo, sempre que mencionarmos produto tensorial estaremos nos referindo a este que acabamos de construir. Além disto escrevemos $\pi(m, n) = m \otimes_R n$ e valem as seguintes propriedades para $m, m_1, m_2 \in M$, $n, n_1, n_2 \in N$, $r \in R$ e $z \in \mathbb{Z}$:

1. $(m_1 + m_2) \otimes_R n = m_1 \otimes_R n + m_2 \otimes_R n$;

2. $m \otimes_R (n_1 + n_2) = m \otimes_R n_1 + m \otimes_R n_2$;

3. $mr \otimes_R n = m \otimes_R rn$;

4. $0 \otimes_R n = m \otimes_R 0 = 0$;

5. $-(m \otimes_R n) = (-m) \otimes_R n = m \otimes_R (-n)$;

6. $z(m \otimes_R n) = (zm) \otimes_R n = m \otimes_R (zn)$.

As três primeiras propriedades saem do fato de π ser R-balanceada. Para 4 temos $0 \otimes_R n = (0 + 0) \otimes_R n = 0 \otimes_R n + 0 \otimes_R n \Rightarrow 0 \otimes_R n = 0$ e análogo no outro caso. Para 5, $m \otimes_R n + (-m) \otimes_R n = (m - m) \otimes_R n = 0 \Rightarrow (-m) \otimes_R n = -(m \otimes_R n)$ e análogo para o outro caso. E por fim para demonstrar o propriedade 6 basta utilizar as propriedade 1, 2 e 5 e o processo de indução. Por causas destas propriedade, o elemento $p \in M \otimes_R N$ da discussão acima será escrito por $p = \sum_{i=1}^n z_i(m_i \otimes_R n_i) = \sum_{i=1}^n (z_i m_i) \otimes_R n_i = \sum_{i=1}^n m_i' \otimes_R n_i$ para $m_i' = z_i m_i$. Essa última maneira de escrever serve para enfatizar que não precisamos de coeficientes para escrever um elemento arbitrário de $M \otimes_R N$. Fica claro também a partir das propriedade acima que a maneira de escrever p como soma de elementos da forma $m \otimes_R n$ não é única e mesmo sem essas propriedades não haveria razão de acreditar que isso fosse verdade.

Em princípio não há por que $M \otimes_R N$ ser um R-bimódulo com operações $r(\sum_{i=1}^n m_i \otimes_R n_i) = \sum_{i=1}^n (rm_i) \otimes_R n_i$ e $(\sum_{i=1}^n m_i \otimes_R n_i)r = \sum_{i=1}^n m_i \otimes_R (n_i r)$, porém veremos que esse será o caso.

Proposição A.1.5 *No contexto acima, $M \otimes_R N$ é um R-módulo à esquerda com operação $r(\sum_{i=1}^n m_i \otimes_R n_i) = \sum_{i=1}^n (rm_i) \otimes_R n_i$.*

Demonstração. A primeira parte da demonstração consiste em mostrar que a operação acima está de fato bem definida. Na segunda parte mostraremos que desta forma $M \otimes_R N$ torna-se um R-módulo à esquerda. Para cada $r \in R$, defina a aplicação $v_r : M \times N \to M \otimes_R N$ por $v_r(m, n) = (rm) \otimes_R n$. Usando as propriedades do produto tensorial e o fato de M ser R-bimódulo, é fácil ver que v_r é R-balanceada e portanto existe um homomorfismo de grupos $\overline{v_r} : M \otimes_R N \to M \otimes_R N$ que é dado por $\overline{v_r}(\sum_{i=1}^n m_i \otimes_R n_i) = \sum_{i=1}^n (rm_i) \otimes_R n_i$.

Defina a aplicação $v : R \times (M \otimes_R N) \to M \otimes_R N$ por

$$v(r, \sum_{i=1}^n m_i \otimes_R n_i) = \overline{v_r}(\sum_{i=1}^n m_i \otimes_R n_i).$$

A distributividade da soma do anel vem da propriedade 1 do produto tensorial e a distributividade da soma de $M \otimes_R N$ vem do fato de $\overline{v_r}$ ser homomorfismo de grupos. Além disso é claro que $1(\sum_{i=1}^{n} m_i \otimes_R n_i) = \sum_{i=1}^{n} m_i \otimes_R n_i$. Resta-nos apenas mostrar a associatividade do produto e esta é suficiente mostrar nos geradores $(rs)(m \otimes_R n) = ((rs)m \otimes_R n) = (r(sm) \otimes_R n) = r(sm \otimes_R n) = r(s(m \otimes_R n))$. ■

Analogamente podemos definir um produto à direita e claramante $(r(m \otimes_R n))s = r((m \otimes_R n)s)$, donde $M \otimes_R N$ é de fato um R-bimódulo.

A.2 Resultados com o produto tensorial

Comecemos esta seção com um dos resultados mais fundamentais relacionados ao produto tensorial, que é a existência do produto tensorial de funções.

Proposição A.2.1 *Sejam M, M', N, N' R-bimódulos e $f : M \to M'$, $g : N \to N'$ homomorfismos de R-bimódulos, então existe um único homomorfismo de R-bimódulos $f \otimes_R g : M \otimes_R N \to M' \otimes_R N'$ tal que nos geradores é dado por $(f \otimes_R g)(m \otimes_R n) = f(m) \otimes_R g(n)$.*

Demonstração. Construa a aplicação $(f, g) : M \times N \to M' \otimes_R N'$ fazendo $(f, g)(a, b) = f(a) \otimes_R g(b)$. É claro que (f, g) separa a soma na primeira e na segunda entrada, além disso $(f, g)(mr, n) = f(mr) \otimes_R g(n) = f(m)r \otimes_R g(n) = f(m) \otimes_R rg(n) = f(m) \otimes_R g(rn) = (f, g)(m, rn)$. Segue que (f, g) é R-balanceada e portanto existe um homomorfismo de grupos $f \otimes_R g : M \otimes_R N \to M' \otimes_R N'$ tal que $(f \otimes_R g)(m \otimes_R n) = f(m) \otimes_R g(n)$.

Resta-nos observar que $f \otimes_R g$ é um homomorfismo de R-bimódulos, mas $(f \otimes_R g)(r(m \otimes_R n)s) = (f \otimes_R g)(rm \otimes_R ns) = f(rm) \otimes_R g(ns) = rf(m) \otimes_R g(n)s = r(f \otimes_R g)(m \otimes_R n)s$. ■

Agora, vamos mostrar algums isomorfismos básicos de produtos tensorial e em seguida vamos nos restringir ao caso de produtos tensoriais de espaços vetoriais.

Proposição A.2.2 *Sejam M, N, P R-bimódulos, então são válidos os seguintes isomorfismos de R-bimódulos:*

1. $R \otimes_R M \cong M \otimes_R R \cong M$;

2. $M \otimes_R (N \otimes_R P) \cong (M \otimes_R N) \otimes_R P$ *e neste caso escreveremos apenas* $M \otimes_R N \otimes_R P$;

3. $M \otimes_R (N \oplus P) \cong (M \otimes_R N) \oplus (M \otimes_R P)$;

4. $M \otimes_R N \cong N \otimes_R M$ *caso* $mr = rm$ *e* $nr = rn$ $\forall r \in R$, $\forall m \in M$ *e* $\forall n \in N$.

Demonstração. **1**. Seja L a multiplicação pela esquerda, ou seja, $L(r, m) = rm$ então pelas propriedades de módulo temos que L é R-balanceada e portanto existe uma aplicação $\overline{L} : R \otimes_R M \to M$ tal que $L(r \otimes_R m) = rm$. Como R tem unidade, podemos definir $\overline{L}^{-1} : M \to R \otimes_R M$ por $\overline{L}^{-1}(m) = 1 \otimes_R m$. Claro que $\overline{L} \circ \overline{L}^{-1}(m) = m$, além disso, $\overline{L}^{-1} \circ \overline{L}(\sum_{i=1}^{n} r_i \otimes_R m_i) = \overline{L}^{-1}(\sum_{i=1}^{n} r_i m_i) = 1 \otimes_R (\sum_{i=1}^{n} r_i m_i) = \sum_{i=1}^{n}(1 \otimes_R r_i m_i) = \sum_{i=1}^{n}(r_i \otimes_R m_i)$.

2. Para cada $m \in M$ fixo defina a aplicação $f_m : N \times P \to (M \otimes_R N) \otimes_R P$ por $f_m(n,p) = (m \otimes_R n) \otimes_R p$. É fácil ver que f_m separa a soma tanto na primeira quanto na segunda entrada e $f_m(nr,p) = (m \otimes_R nr) \otimes_R p = (m \otimes_R n)r \otimes_R p = (m \otimes_R n) \otimes_R rp = f_m(n,rp)$, donde f_m é R-balanceada e portando podemos levar para o produto tensorial $\overline{f_m} : N \otimes_R P \to (M \otimes_R N) \otimes_R P$. Agora, defina $\varphi : M \times (N \otimes_R P) \to (M \otimes_R N) \otimes_R P$ por $\varphi(m,x) = \overline{f_m}(x)$. Não é difícil verificar que esta aplicação é R-balanceada e portanto temos uma aplicação $\overline{\varphi} : M \otimes_R (N \otimes_R P) \to (M \otimes_R N) \otimes_R P$ que nos geradores é dada por $\overline{\varphi}(m \otimes_R (n \otimes_R p)) = (m \otimes_R n) \otimes_R p$.

Analogamente podemos definir uma aplicação $\overline{\psi} : (M \otimes_R N) \otimes_R P \to M \otimes_R (N \otimes_R P)$ dada por $\overline{\psi}((m \otimes_R n) \otimes_R p) = m \otimes_R (n \otimes_R p)$. Segue que $\overline{\psi}$ e $\overline{\varphi}$ são inversas uma da outra e também é evidente que essas aplicações são homomorfismo de R-bimódulos.

3. Defina as aplicações $i : M \times N \to M \otimes_R (N \oplus P)$, $j : M \times (N \oplus P) \to M \otimes_R N$, $\varphi : M \times (N \oplus P) \to M \otimes_R P$ e $\psi : M \times P \to M \otimes_R (N \oplus P)$ por $i(m,n) = m \otimes_R (n \oplus 0)$, $j(m, n \oplus p) = m \otimes_R n$, $\varphi(m, n \oplus p) = m \otimes_R p$ e $\psi(m,p) = m \otimes_R (0 \oplus p)$ respectivamente. É fácil mostrar que essas aplicações são R-balanceadas e portanto podemos definir $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{\varphi}$ e $\overline{\psi}$ homomorfismo de R-bimódulos nos respectivos produtos tensoriais. Também é fácil ver que $\overline{i} \circ \overline{j} = id$ e $\overline{\psi} \circ \overline{\varphi} = id$ donde temos a seguinte seqüência exata que cinde

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \otimes_R N \arrow[r, "\overline{i}"] & M \otimes_R (N \oplus P) \arrow[r, "\overline{\varphi}"] \arrow[l, bend left, "\overline{j}"] & M \otimes_R P \arrow[r] \arrow[l, bend left, "\overline{\psi}"] & 0 \end{tikzcd}$$

Segue de um resultado de álgebra que $M \otimes_R (N \oplus P) \cong (M \otimes_R N) \oplus (M \otimes_R P)$ como R-bimódulos.

4. Basta definir $\varphi : M \times N \to N \otimes_R M$ e $\psi : N \times M \to M \otimes_R N$ por $\varphi(m,n) = n \otimes_R m$ e $\psi(n,m) = m \otimes_R n$, então φ e ψ são R-balanceadas. De fato verifiquemos por exemplo a propriedade 3 para φ: $\varphi(mr,n) = n \otimes_R mr = n \otimes_R rm = nr \otimes_R m = rn \otimes_R m = \varphi(m,rn)$. Segue que podemos levar as aplicações para o produto tensorial e é fácil ver que $\overline{\varphi}$ e $\overline{\psi}$ serão homomorfismo de R-bimódulos inversos um do outro. ∎

É importante notar que a hipótese no item 4 de que os produtos à esquerda devem coincidir com os produtos à direita é necessária para que o isomorfismo valha.

Passemos agora para o caso de espaços vetoriais. Subentende-se que todos os espaços vetoriais são sobre um mesmo corpo $\mathbb{K}$ e neste caso denotaremos $\otimes_{\mathbb{K}}$ simplesmente por $\otimes$.

Proposição A.2.3 *Sejam V e W espaços vetoriais com bases $\{e_i\}_{i\in I}$, $\{f_j\}_{j\in J}$ respectivamente, então $\mathcal{B} = \{e_i \otimes f_j\}_{i\in I, j\in J}$ é uma base para $V \otimes W$.*

Demonstração. Já vimos que elementos da forma $v \otimes w$ geram $V \otimes W$, mas para $v \in V$ e $w \in W$ podemos escrever $v = \sum_{l=1}^{n} \lambda_{i_l} e_{i_l}$ e $w = \sum_{k=1}^{m} \eta_{j_k} f_{j_k}$, donde $v \otimes w = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \lambda_{i_l} \eta_{j_k} (e_{i_l} \otimes f_{j_k})$ e portanto $\mathcal{B}$ é um conjundo de geradores para $V \otimes W$.

Temos que mostrar o conjunto $\mathcal{B}$ é LI. Suponha que a seguinte soma finita seja nula

$$\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\lambda_{i_l,j_k}(e_{i_l}\otimes f_{j_k})=0$$

e não havendo pares de índices (i_l, j_k) repetidos. Para cada par de índices (i_l, j_k) que aparece na soma defina o funcional linear $\varphi_{i_l,j_k}=\mathrm{d}x_{i_l}\otimes \mathrm{d}y_{j_k}$, onde $\mathrm{d}x_{i_l}$ é o funcional de V que na base é dado por $\mathrm{d}x_{i_l}(e_i)=\delta_{i_l,i}$ e $\mathrm{d}y_{j_k}$ é o funcional de W dado por $\mathrm{d}y_{j_k}(f_j)=\delta_{j_k,j}$. Para cada par de índices (i_l, j_k), aplicando φ_{i_l,j_k} em ambos os lados da soma temos $\lambda_{i_l,j_k}=0$, ou seja, $\mathcal{B}$ é LI. ■

Segue de imediato que $\dim(V\otimes W)=\dim(V)\dim(W)$.

Corolário A.2.4 *Nas condições da proposição anterior, se $v\otimes w=0$ em $V\otimes W$ então $v=0$ ou $w=0$.*

Demonstração. Suponha que $w\neq 0$ então podemos escrever $w=\sum_{k=1}^{m}\eta_{j_k}f_{j_k}$ com todos η_{j_k} não nulos. Escrevendo também $v=\sum_{l=1}^{n}\lambda_{i_l}e_{i_l}$, então $v\otimes w=\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\lambda_{i_l}\eta_{j_k}(e_{i_l}\otimes f_{j_k})$. Pela proposição, temos que $\lambda_{i_l}\eta_{j_k}=0$ para todo par de índices (i_l, j_k). Como escolhemos η_{j_k} não nulos, segue que $\lambda_{i_l}=0\ \forall i_l$ e portanto $v=0$. ■

Observação A.2.5 *Note que para um elemento $\sum_{i=1}^{n}v_i\otimes w_i\in V\otimes W$ sempre podemos supor sem perda de generalidade que $\{v_i\}_{i=1}^{n}$ ou $\{w_i\}_{i=1}^{n}$ é LI. Façamos para o caso de $\{v_i\}_{i=1}^{n}$ e outro é análogo. Suponha que $\{v_i\}_{i=1}^{n}$ não seja LI, então existe um subconjunto finito $\{e_{i_1},\dots,e_{i_m}\}$ da base $\{e_i\}_{i\in I}$ de V tal que todos os v_i podem ser escrito como $v_i=\sum_{j=1}^{m}\lambda_{ij}e_{i_j}$. Segue que podemos escrever $\sum_{i=1}^{n}v_i\otimes w_i=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}\lambda_{ij}e_{i_j}\right)\otimes w_i=\sum_{j=1}^{m}e_{i_j}\otimes\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_{ij}w_i\right)$ donde segue o desejado.*

Proposição A.2.6 *Sejam $V_1,\dots,V_n,W$ espaços vetoriais e $f: V_1\times\cdots\times V_n\to W$ uma aplicação n-linear, então existe uma única aplicação linear $\overline{f}: V_1\otimes\cdots\otimes V_n\to W$ tal que $\overline{f}(v_1\otimes\cdots\otimes v_n)=f(v_1,\dots,v_n)$.*

Demonstração. A prova é feita por indução, onde o caso $n=2$ vem da definição do produto tensorial. Suponha que valha para $2\leq i\leq n-1$, então para cada $v_n\in V_n$ fixo a aplicação $f_{v_n}: V_1\times\cdots\times V_{n-1}\to W$ dada por $f_{v_n}(v_1,\dots,v_{n-1})=f(v_1,\dots,v_n)$ é $(n-1)$-linear e portanto podemos passar para o produto tensorial para $\overline{f_{v_n}}: V_1\otimes\cdots\otimes V_{n-1}\to W$. Defina então a aplicação $\widehat{f}:(V_1\otimes\cdots\otimes V_{n-1})\times V_n\to W$ por $\widehat{f}(x,v_n)=\overline{f_{v_n}}(x)$. A aplicação $\widehat{f}$ é bilinear por construção, donde segue o resultado. ■

Proposição A.2.7 *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita m, então vale o seguinte isomorfismo*

$$\underbrace{V'\otimes\cdots\otimes V'}_{\text{n vezes}}\cong(\underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{\text{n vezes}})'$$

onde a linha denota o dual álgebrico de V.

Demonstração. Seja $\mathcal{B}_1 = \{e_1, \ldots, e_m\}$ uma base de V e tome $\mathcal{B}'_1 = \{\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_m\}$ a base dual de V'. Pela proposição A.2.3 $\mathcal{B}_n = \{e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}\}_{i_1,\ldots,i_n=1}^m$ e $\mathcal{B}'_n = \{\mathrm{d}x_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x_{i_n}\}_{i_1,\ldots,i_n=1}^m$ são bases de $V^{\otimes n}$ e $(V')^{\otimes n}$ respectivamente. Tome $\overline{\mathcal{B}_n} = \{\mathrm{d}x_{i_1,\ldots,i_n}\}_{i_1,\ldots,i_n=1}^m$ a base dual de $\mathcal{B}_n$, então o isomorfismo desejado é associar $\mathrm{d}x_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x_{i_n}$ a $\mathrm{d}x_{i_1,\ldots,i_n}$. ■

Devido a esta proposição iremos identificar propositalmente o elemento $f_1 \otimes \cdots \otimes f_n \in (V')^{\otimes n}$ com o funcional $(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) \in (V^{\otimes n})'$ que é dado por $(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = f_1(v_1) \ldots f_n(v_n)$ e está bem definido devido à proposição A.2.6.

Terminaremos essa seção com um lema que nos será útil quando estivermos falando de ideais.

Lema A.2.8 *Sejam V, W espaços vetoriais e $T : V \to W$ uma aplicação linear, então $\ker(T \otimes T) = \ker T \otimes V + V \otimes \ker T$.*

Demonstração. É claro que $\ker T \otimes V + V \otimes \ker T \subseteq \ker(T \otimes T)$. A outra inclusão mostraremos por indução sobre n, onde n é o números de termos de algum somatório $\sum_{i=1}^n v_i \otimes u_i$ com $\{u_i\}_{i=1}^n$ LI representando um elemento $x \in \ker(T \otimes T)$, o que é possível de acordo com a observação A.2.5. Para $n = 1$, temos $x = v \otimes u$. Aplicando $T \otimes T$ em x temos $T(v) \otimes T(u) = 0$ e pelo corolário A.2.4 temos $T(v) = 0$ ou $T(u) = 0$, ou seja, $x \in \ker T \otimes V + V \otimes \ker T$.

Suponha válido para $n - 1$, tome $x = \sum_{i=1}^n v_i \otimes u_i \in \ker(T \otimes T)$ e suponha que existe i_0 tal que $T(v_{i_0}) \neq 0$ e $T(u_{i_0}) \neq 0$. Em particular, existe um funcional $f \in W'$ tal que $f(T(u_{i_0})) \neq 0$. Para $j \neq i_0$ defina $k_j = \frac{f(T(u_j))}{f(T(u_{i_0}))}$ e $\overline{u_j} = u_j - k_j u_{i_0}$; e para i_0 defina $\overline{u_{i_0}} = u_{i_0}$. Note que $f(T(\overline{u_j})) = 0\ \forall j \neq i_0$ e que $\{\overline{u_j}\}_{j=1}^n$ continua sendo LI. De fato,

$$\sum_{i=1}^n \alpha_j \overline{u_j} = 0 \Rightarrow \sum_{j=1, j\neq i_0}^n \alpha_j (u_j - k_j u_{i_0}) + \alpha_{i_0} u_{i_0} = \sum_{j=1, j\neq i_0}^n \alpha_j u_j + \left(\left(\sum_{j=1, j\neq i_0}^n \alpha_j k_j \right) + \alpha_{i_0} \right) u_{i_0} = 0.$$

Como $\{u_i\}_{i=1}^n$ é LI segue que $\alpha_j = 0\ \forall j \neq i_0$ e voltando para a igualdade do lado esquerdo da implicação temos também que $\alpha_{i_0} = 0$.

Podemos então escrever $x = \sum_{i=1}^n \overline{v_i} \otimes \overline{u_i}$, onde $\overline{v_j} = v_j$ para $j \neq i_0$ e $\overline{v_{i_0}} = v_{i_0} + \sum_{j=1, j\neq i_0}^n k_j v_j$. Afirmamos que $\overline{v_{i_0}} \in \ker T$, de fato se $T(\overline{v_{i_0}}) \neq 0$ então existe $g \in W'$ tal que $g\left(T(\overline{v_{i_0}})\right) \neq 0$ e

$$0 = (g \otimes f)\left((T \otimes T)(x)\right) = (g \otimes f)\left((T \otimes T)\left(\sum_{i=1}^n \overline{v_i} \otimes \overline{u_i}\right)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^n g(T(\overline{v_i})) f(T(\overline{u_i})) = g\left(T(\overline{v_{i_0}})\right) f(T(u_{i_0})) \neq 0$$

o que é um absurdo. Desta forma temos

$$(T \otimes T)\left(\sum_{j=1, j\neq i_0}^{n} \overline{v_i} \otimes \overline{u_i}\right) = (T \otimes T)\left(\sum_{i=1}^{n} \overline{v_i} \otimes \overline{u_i}\right) - (T \otimes T)(\overline{v_{i_0}} \otimes \overline{u_{i_0}}) = 0.$$

Pela hipótese de indução $\sum_{j=1,j\neq i_0}^{n} \overline{v_i} \otimes \overline{u_i} \in \ker T \otimes V + V \otimes \ker T$ e como $\overline{v_{i_0}} \in \ker T$, temos $\overline{v_{i_0}} \otimes \overline{u_{i_0}} \in \ker T \otimes V$. Portanto $x = \sum_{i=1}^{n} \overline{v_i} \otimes \overline{u_i} \in \ker T \otimes V + V \otimes \ker T$. Caso não existisse i_0 com $T(v_{i_0}) \neq 0$ e $T(u_{i_0}) \neq 0$, então isso significaria que x já estava escrito como elemento de $\ker T \otimes V + V \otimes \ker T$. $\blacksquare$

Observação A.2.9 *A demonstração é a mesma para duas aplicações* $T_i : V_i \to W_i$, $i = 1, 2$ *onde* $\ker(T_1 \otimes T_2) = \ker T_1 \otimes V_2 + V_1 \otimes \ker T_2$.

Apêndice B

Notação de Sweedler

O objetivo deste apêndice é formalizar e justificar a utilização da notação de Sweedler para o co-produto e co-ação. Tal notação pode codificar a informação necessária de maneira simples de forma a poder demonstrar resultados relacionados com um esforço significamente menor em comparação a utilizar diagramas comutativos ou composição de funções.

B.1 Co-produto

Nesta seção, C denotará uma co-álgebra e H uma álgebra de Hopf.

Conforme mencionado em 1.1.16 estaremos usando a seguinte notação para o co-produto: $\Delta(c) = c_{(1)} \otimes c_{(2)}\ \forall c \in C$. A notação que normalmente é utilizada nos textos que involvem co-produto tem um símbolo de somatório na notação, tendo como possível interpretação dizer que escolhemos uma representação em somatório para o elemento $\Delta(c)$ que, conforme visto no apêndice anterior, não é necessariamente única. Embora devamos pensar desta forma algumas vezes, esse tipo de interpretação pode gerar confusão ao trabalhar com a co-associatividade. Assim como dito em 1.1.16 trabalharemos com a seguinte notação: $(\Delta \otimes id) \circ \Delta(c) = (id \otimes \Delta) \circ \Delta(c) = c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)}$. Poder-se-ia então pensar que ao aplicarmos o co-produto duas vezes seria possível escolher uma representação em somatório para $(id \otimes \Delta) \circ \Delta(c)$ em $C \otimes C \otimes C$ que utiliza os mesmos elementos de C para escrever $\Delta(c)$, em outras palavras, se $\Delta(c) = \sum_{i=1}^{n} c_i \otimes c'_i$, em geral não é verdade que existem $c''_i \in C$ tal que $(id \otimes \Delta) \circ \Delta(c) = \sum_{i=1}^{n} c_i \otimes c'_i \otimes c''_i$.

Fixada a notação para o co-produto, estaremos interessados em aplicar funções em $\Delta(c)$. Mais especificamente, aplicaremos o produto tensorial de funções e utilizaremos a notação um tanto evidente: $(f \otimes g)\Delta(c) = f(c_{(1)}) \otimes g(c_{(2)})$. Se estivermos pensando na interpretação de que a notação significa que escolhemos uma possível representação em somatório para $\Delta(c)$, então esta notação para funções aplicadas significa simplesmente que aplicamos cada função na sua respectiva coordenada do produto tensorial. Esse tipo de interpretação é justificada pela proposição A.2.1 que tem como conseqüência que se $x = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes w_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{v_i} \otimes \overline{u_i}$ então $(f \otimes g)(x) = \sum_{i=1}^{n} f(v_i) \otimes g(w_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{v_i}) \otimes g(\overline{u_i})$.

Temos também, ao aplicarmos o co-produto após outro, as notações já utilizadas em

1.1.16 $(\Delta \otimes id) \circ \Delta(c) = c_{(1)(1)} \otimes c_{(1)(2)} \otimes c_{(2)}$ e $(id \otimes \Delta) \circ \Delta(c) = c_{(1)} \otimes c_{(2)(1)} \otimes c_{(2)(2)}$. Indutivamente criamos notações para o co-produto sendo aplicado diversas vezes, por exemplo $(\Delta \otimes id \otimes id)(\Delta \otimes id) \circ \Delta(c) = c_{(1)(1)(1)} \otimes c_{(1)(1)(2)} \otimes c_{(1)(2)} \otimes c_{(2)}$. Conforme provaremos na próxima proposição a co-associatividade se estende ao aplicarmos o co-produto diversas vezes, e esse último elemento será escrito simplesmente por $c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)} \otimes c_{(4)}$.

Precisamos de um pouco mais de notação antes de mostrarmos o primeiro resultado desta seção. Denotaremos por $\Delta_{i,n}$ a aplicação em $C^{\otimes n}$ que aplica o co-produto exatamente na i-ésima entrada, por exemplo $\Delta_{2,3} = id \otimes \Delta \otimes id$.

Proposição B.1.1 *Para C uma co-álgebra, é válido*

$$\Delta_{i_n,n} \circ \Delta_{i_{n-1},n-1} \circ \cdots \circ \Delta_{i_2,2} \circ \Delta_{i_1,1} = \Delta_{j_n,n} \circ \Delta_{j_{n-1},n-1} \circ \cdots \circ \Delta_{j_2,2} \circ \Delta_{j_1,1}$$

para qualquer escolha de índices $1 \leq i_k, j_k \leq k$, $1 \leq k \leq n$.

Demonstração. Procederemos por indução sobre n. O caso $n = 2$ é o axioma da co-associatividade e note que deste axioma também temos $\Delta_{i,n'} \circ \Delta_{i,n'-1} = \Delta_{i+1,n'} \circ \Delta_{i,n'-1}$ para $1 \leq i \leq n' - 1$.

Suponha válido para $n - 1$. Se $i_n = j_n$ basta substituir cada i_k por j_k para todo $1 \leq k \leq n - 1$, o que é possível graças a hipótese de indução. Suponha, então, sem perda de generalidade, $i_n < j_n$. Pela hipótese de indução podemos trocar i_{n-1} por i_n, isto é, podemos escrever $\Delta_{i_n,n} \circ \Delta_{i_{n-1},n-1} \circ \cdots = \Delta_{i_n,n} \circ \Delta_{i_n,n-1} \circ \cdots$, e utilizar a observação do parágrafo anterior para em seguida trocar i_n por $i_n + 1$, isto é, $\Delta_{i_n,n} \circ \Delta_{i_n,n-1} \circ \cdots = \Delta_{i_n+1,n} \circ \Delta_{i_n,n-1} \circ \cdots$. Se $i_n + 1 = j_n$, basta igualar os demais índices como no caso anterior, senão troque i_{n-1} por $i_n + 1$ e $i_n + 1$ por $i_n + 2$; e assim sucessivamente até igualar os índices i e j de subíndice n. Os demais podem ser igualados pela hipótese de indução. ■

Graças a essa proposição, iremos denotar $\Delta_{i_n,n} \circ \Delta_{i_{n-1},n-1} \circ \cdots \circ \Delta_{i_2,2} \circ \Delta_{i_1,1}(c) = c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes \cdots \otimes c_{(n)} \otimes c_{(n+1)}$. Aqui cabe a seguinte observação, o maior índice na notação do co-produto menos um é exatamente a quantidade de vezes que aplicamos o co-produto. Assim como generalizamos a co-associatividade, podemos fazer o mesmo com a co-unidade. Para isso, defina $\epsilon_{i,n}$ de forma análoga a $\Delta_{i,n}$, a saber, $\epsilon_{i,n}$ aplica ϵ na i-ésima entrada do produto tensorial $C^{\otimes n}$.

Proposição B.1.2 *Para C uma co-álgebra é válido*

$$\epsilon_{i_n,n} \circ \Delta_{i_{n-1},n-1} \circ \cdots \circ \Delta_{i_2,2} \circ \Delta_{i_1,1} = \Delta_{i_{n-2},n-2} \circ \cdots \circ \Delta_{i_2,2} \circ \Delta_{i_1,1}$$

para qualquer escolha de índices $1 \leq i_k \leq k$, $1 \leq k \leq n$, ou utilizando a notação que está sendo definida

$$\epsilon_{i_n,n}(c_{(1)} \otimes \cdots \otimes c_{(n)}) = c_{(1)} \otimes \cdots \otimes \epsilon(c_{(i_n)}) \otimes \cdots \otimes c_{(n)} = c_{(1)} \otimes \cdots \otimes c_{(n-1)}$$

para $c \in C$, sendo que um dos produtos tensoriais que acompanham $\epsilon(c_{(i_n)})$ deve ser pensado como o produto por escalar.

Demonstração. Basta trocar i_{n-1} por i_n, que é possível pela proposição anterior, e em seguida utilizar o axioma de co-unidade para substituir $\epsilon_{i_n,n} \circ \Delta_{i_n,n-1}$ por $id^{\otimes n-1}$. Se $i_n = n$, trocamos i_{n-1} por $n-1$ e usamos o outro axioma de co-unidade. ■

Para exemplificarmos a utilização da proposição acima, escreveremos $(f \otimes g)\Delta(c) = (f \otimes g)(\varphi \otimes id)(id \otimes \epsilon \otimes id)(\Delta \otimes id)\Delta(c)$ por $f(c_{(1)}) \otimes g(c_{(2)}) = f(c_{(1)}\epsilon(c_{(2)})) \otimes g(c_{(3)})$ onde φ dá o isomorfismo $C \cong C \otimes \mathbb{K}$. Como supomos f linear e $\epsilon(c_{(2)})$ é um escalar podemos continuar a igualdade com $f(c_{(1)}) \otimes g(\epsilon(c_{(2)})c_{(3)})$.

Para finalizarmos a discussão sobre a notação de Sweedler para o co-produto, vamos passar para o caso de álgebras de Hopf e o axioma da antípoda. De forma análoga ao co-produto e à co-unidade, definimos $\eta_{i,n}$, $S_{i,n}$ e $\mu_{i,n}$, com os seguintes detalhes: para o caso da multiplicação, temos que μ aplica nas i-ésima e $(i+1)$-ésimas coordenadas; e para o caso da unidade $\eta_{i,n}$ aplica em $H^{\otimes n-1}$ com uma cópia de $\mathbb{K}$ entre a $(i-1)$-ésima e a i-ésima coordenadas.

Proposição B.1.3 *Seja H uma álgebra de Hopf então são válidas as seguintes identidade*

$$\mu_{i_n,n} \circ S_{i_n,n} \circ \Delta_{i_{n-1},n-1} \circ \cdots \circ \Delta_{i_2,2} \circ \Delta_{i_1,1} = \eta_{i_n,n-1} \circ \epsilon_{i_n,n-1} \circ \Delta_{i_{n-2},n-2} \circ \cdots \circ \Delta_{i_2,2} \circ \Delta_{i_1,1}$$

$$\mu_{i_n-1,n} \circ S_{i_n,n} \circ \Delta_{i_{n-1},n-1} \circ \cdots \circ \Delta_{i_2,2} \circ \Delta_{i_1,1} = \eta_{i_n-1,n-1} \circ \epsilon_{i_n,n-1} \circ \Delta_{i_{n-2}-1,n-2} \circ \cdots \circ \Delta_{i_2,2} \circ \Delta_{i_1,1}$$

para quaisquer escolhas de índices $1 \leq i_k \leq k$, $1 \leq k \leq n$ com $i_n \neq n$ no primeiro caso e $i_n \neq 1$ no segundo . Em termos de nossa notação temos

$$h_{(1)} \otimes \cdots \otimes S(h_{(i_n)})h_{(i_n+1)} \otimes \cdots \otimes h_{(n)} = h_{(1)} \otimes \cdots \otimes \epsilon(h_{(i_n)})1_H \otimes \cdots \otimes h_{(n-1)}$$

$$h_{(1)} \otimes \cdots \otimes h_{(i_n-1)}S(h_{(i_n)}) \otimes \cdots \otimes h_{(n)} = h_{(1)} \otimes \cdots \otimes \epsilon(h_{(i_n-1)})1_H \otimes \cdots \otimes h_{(n-1)}$$

para $h \in H$.

Demonstração. Basta prosseguir como nas outras proposições, trocando i_{n-1} por i_n e utilizando o axioma da antípoda na coordenada apropriada. ■

Exemplo B.1.4 *A cadeia de apliações equivalente*

$$(f \otimes g)\Delta(h) = (f \otimes g)(\varphi \otimes id)(id \otimes \epsilon \otimes id)(\Delta \otimes id)\Delta(h) =$$

$$= (f \otimes g)(\mu \otimes id)(id \otimes \eta \otimes id)(id \otimes \epsilon \otimes id)(\Delta \otimes id)\Delta(h) =$$

$$= (f \otimes g)(\mu \otimes id)(id \otimes \mu \otimes id)(id \otimes S \otimes id \otimes id)(\Delta \otimes id \otimes id)(\Delta \otimes id)\Delta(h)$$

pode ser reescrita, utilizando-se a notação, como

$$f(h_{(1)}) \otimes g(h_{(2)}) = f(h_{(1)}\epsilon\left(h_{(2)}\right)) \otimes g(h_{(3)}) =$$

$$= f(h_{(1)}\epsilon\left(h_{(2)}\right) 1_H) \otimes g(h_{(3)}) = f(h_{(1)}S(h_{(2)})h_{(3)}) \otimes g(h_{(4)})$$

que não só ocupa menos espaço para escrever, como é muito mais simples para se enxergar quais axiomas podemos utilizar. Esses tipos de técnicas de contrair e expandir ϵ serão amplamente utilizadas e no caso acima, a segunda igualdade é tão trivial que nem precisamos escrever.

Observação B.1.5 *Há alguns casos, embora poucos, que iremos trabalhar com expressões do tipo $(\Delta \otimes id)\,\Delta(c)+(\Delta\otimes id)(c\otimes d)$, que em nossa notação escreveríamos $c_{(1)}\otimes c_{(2)}\otimes c_{(3)}+c_{(1)}\otimes c_{(2)} \otimes d$. Tal expressão sugere utilizar uma das propriedades de produto tensorial e escrever $c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes (c_{(3)} + d)$ o que não é correto (em geral). Para esse tipo de expressão iremos colocar um somatório para diferenciar como se tomou o co-produto, ou seja, escreveremos $(\Delta \otimes id)\,\Delta(c) + (\Delta \otimes id)(c \otimes d) = \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)} + \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes d$.*

B.2 Co-ações

Assim como na seção anterior, queremos formalizar a utilização da notação de Sweedler para a co-ação. Fixe V um H-co-módulo à esquerda com co-ação denotada por $\Delta_L(v) = v^{(-1)} \otimes v^{(0)}$ $\forall v \in V$. Também, como no caso anterior, definimos notação induzidas, ao aplicarmos a co-ação ou co-produto diversas vezes. Por exemplo a propriedade 1 de co-ação pode ser reescrita por $v^{(-1)}{}_{(1)}\otimes v^{(-1)}{}_{(2)}\otimes v^{(0)} = v^{(-1)}\otimes v^{(0)(-1)}\otimes v^{(0)(0)}$, e neste caso escreveremos simplesmente $(id \otimes \Delta_L)\Delta_L(v) = (\Delta \otimes id)\Delta_L(v) = v^{(-2)} \otimes v^{(-1)} \otimes v^{(0)} = \Delta_L^2(v)$.

Para mostrarmos que a propriedade da co-ação se estende ao aplicarmos a co-ação ou co-produto várias vezes, vamos proceder de uma maneira mais informal que a seção anterior. Caso contrário, gastaríamos muito tempo definindo notações desnecessárias. Suponha que $\Delta_L^n : H^{\otimes n-1} \otimes V \to H^{\otimes n} \otimes V$ esteja bem definido, isto é, independe da ordem em que se aplica o co-produto ou co-ação a partir da segunda vez; é claro que o primeiro a ser aplicado é a co-ação. Então é válido que $(id^{\otimes n} \otimes \Delta_L)\Delta_L^n = (\Delta_{i_n,n} \otimes id)\Delta_L^n$ para $i_n = 1, \ldots, n$ arbitrário, onde $\Delta_{i_n,n}$ é como definido na seção anterior, de fato, $(id^{\otimes n} \otimes \Delta_L)\Delta_L^n = (id^{\otimes n} \otimes \Delta_L)(id^{\otimes n-1} \otimes \Delta_L)\Delta_L^{n-1} = (id^{\otimes n-1} \otimes \Delta \otimes id)(id^{\otimes n-1} \otimes \Delta_L)\Delta_L^{n-1} = (\Delta_{i_n,n} \otimes id)\Delta_L^n$ sendo que a penúltima igualdade vale utilizando a propriedade 1 da co-ação e a última pela seção anterior. Escreveremos neste caso $\Delta_L^n(v) = v^{(-n)} \otimes \cdots \otimes v^{(-1)} \otimes v^{(0)}$.

O caso de co-módulo à direita é análogo e neste caso escreveremos $\Delta_R^n(v) = v^{(0)} \otimes v^{(1)} \otimes \cdots \otimes v^{(n)}$. Note que se tivéssemos escolhido colocar os índices embaixo, teríamos, até certo ponto uma consistência com a notação anterior. No entanto, para enfatizar que estamos trabalhando com co-ação, decidimos colocar os índices em cima. Além disso, uma certa confusão poderia ser criada quando pensamos o co-produto como uma co-ação pois teríamos expressões do tipo $h_{(0)} \otimes h_{(1)} = h_{(1)} \otimes h_{(2)}$.

Apêndice C

Alguns lemas de álgebra

C.1 O lema do diamante em teoria de anéis

Sejam k um anel comutativo com unidade, X um conjunto, $\langle X \rangle$ o semi-grupo livre com identidade gerado por X e $k\langle X \rangle$ a álgebra livre gerada por X.

Seja S um conjunto de pares da forma $\sigma = (W_\sigma, f_\sigma)$ com $W_\sigma \in \langle X \rangle$ e $f_\sigma \in k\langle X \rangle$. Para cada $\sigma \in S$, $A, B \in \langle X \rangle$ definimos o k-endomorfismo de $k\langle X \rangle$, $r_{A\sigma B} : k\langle X \rangle \to k\langle X \rangle$ de forma que $r_{A\sigma B}$ fixa todos os elementos de $\langle X \rangle$ exceto $AW_\sigma B$ que é mandado em $Af_\sigma B$. Chamaremos S de sistema de reduções e as aplicações $r_{A\sigma B}$ de reduções.

Diremos que uma redução $r_{A\sigma B}$ age trivialmente em $a \in k\langle X \rangle$ se o coeficiente de $AW_\sigma B$ em a é zero, ou equivalentemente, $r_{A\sigma B}(a) = a$. Diremos que a é irredutível sobre S se todas as reduções agem trivialmente em a. O k-submódulo de todos os elementos irredutíveis de $k\langle X \rangle$ será denotado por $k\langle X \rangle_{irr}$. Uma seqüência finita de reduções $r_1, \ldots, r_n$ ($r_i = r_{A_i\sigma_i B_i}$) será dita final em a se $(r_n \circ \cdots \circ r_1)(a) \in k\langle X \rangle_{irr}$.

Um elemento $a \in k\langle X \rangle$ é dito ser de redução finita se para toda seqüência infinita de reduções $r_1, r_2, \ldots$ $\exists i_o \in \mathbb{N}$ tal que $\forall i \geq i_0$ temos que r_i age trivialmente em $(r_{i-1} \circ \ldots \circ r_1)(a)$. Se a é de redução finita então toda seqüência maximal de reduções $\{r_i\}$ de forma que r_i age não trivialmente em $(r_{i-1} \circ \ldots \circ r_1)(a)$ é finita e portanto uma seqüência final em a. Segue de sua definição que os elementos de redução finita formam um k-submódulo de $k\langle X \rangle$.

Diremos que um elemento $a \in k\langle X \rangle$ é de redução única se for de redução finita e a imagem sobre todas as seqüências finais em a coincidem. Tal valor comum será denotado por $r_S(a)$.

Lema C.1.1 *No contexto acima são válidas as afirmações:*

1. *O conjunto dos elementos de redução única forma um k-submódulo de $k\langle X \rangle$ e r_S é uma aplicação k-linear deste submódulo em $k\langle X \rangle_{irr}$.*

2. *Suponha que $a, b, c \in k\langle X \rangle$ são tais que para todos monômios A, B, C aparecendo com coeficiente não nulo em a, b, c respectivamente, o produto ABC é de redução única (em particular, pela parte* 1.*, isto implica que abc é de redução única). Se r é qualquer composição finita de reduções então $ar(b)c$ é de redução única e $r_S(ar(b)c) = r(abc)$.*

Demonstração. *1.* Dados $a, b \in k\langle X\rangle$ de redução única e $\alpha \in k$, sabemos que $d = \alpha a + b$ é de redução finita. Seja r uma composição de reduções final em d. Como a é de redução única poremos achar uma composição finita de reduções r' tal que $r'r(a) = r_S(a)$ e analogamente achamos uma composição finita de reduções r'' tal que $r''r'r(b) = r_S(b)$. Como $r(d)$ é irredutível, temos $r(\alpha a + b) = r''r'r(\alpha a + b) = \alpha r''r'r(a) + r''r'r(b) = \alpha r_S(a) + r_S(b)$. O resultado segue.

2. Note que por 1. e o modo como 2. foi enunciado, é suficiente provar 2.no caso em que a, b, c são monômios A, B, C e r é uma simples redução $r_{D\sigma E}$. Mas neste caso $Ar_{D\sigma E}(B)C = r_{AD\sigma EC}(ABC)$ que é a imagem de ABC por uma redução e portanto é de redução única se ABC o for, e com mesma forma reduzida. ∎

Chamaremos uma quíntupla (σ, τ, A, B, C) com $\sigma, \tau \in S$, $A, B, C \in \langle X\rangle \setminus \{1\}$ tal que $W_\sigma = AB$ e $W_\tau = BC$ de ambigüidade de sobreposição em S. Diremos que uma tal ambigüidade é resolvível se existem composições de reduções r e r' tais que $r(f_\sigma C) = r'(Af_\tau)$ que é uma condição de confluência nos resultados das duas formas indicadas de reduzir ABC (condição do diamante).

Similarmente, uma quíntupla (σ, τ, A, B, C) com $\sigma, \tau \in S$, $\sigma \neq \tau$, $A, B, C \in \langle X\rangle$ tal que $W_\sigma = B$ e $W_\tau = ABC$ é chamada de ambigüidade de inclusão, a qual será resolvível se $Af_\sigma C$ e f_τ podem ser reduzidas para um elemento comum.

Por uma ordem parcial de semi-grupos em $\langle X\rangle$ entenderemos uma ordem parcial $\leq$ tal que $B \leq B'$ implica $ABC \leq AB'C$ para $A, B, B', C \in \langle X\rangle$. Uma tal ordem será dita compatível com S se para todo $\sigma \in S$, f_σ é uma combinação linear de monômios menores estritamente que W_σ.

Denotaremos por I_S o ideal bilateral de $k\langle X\rangle$ gerado pelos elementos $W_\sigma - f_\sigma$. Se $\leq$ é uma ordem parcial de semi-grupos em $\langle X\rangle$ compatível com o sistema de reduções S e A é um elemento qualquer de $\langle X\rangle$, denotaremos por I_A o submódulo de $k\langle X\rangle$ gerado por todos os elementos $B(W_\sigma - f_\sigma)C$ tal que $BW_\sigma C < A$. Diremos que uma ambigüidade de sobreposição (respectivamente, de inclusão) (σ, τ, A, B, C) é resolvível relativo à $\leq$ se $f_\sigma C - Af_\tau \in I_{ABC}$ (respectivamente, $Af_\sigma C - f_\tau \in I_{ABC}$).

Teorema C.1.2 (Lema do diamante) *Sejam S um sistema de reduções para a álgebra livre $k\langle X\rangle$ e $\leq$ uma ordem parcial de semi-grupos compatível com S e satisfazendo a condição das cadeias descendentes. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *Todas ambigüidades de S são resolvíveis.*

(a') *Todas ambigüidades de S são resolvíveis relativo à $\leq$.*

(b) *Todos elementos de $k\langle X\rangle$ são de redução única sob S.*

(c) *Um conjunto de representantes*[1] *em $k\langle X\rangle$ para os elementos da álgebra $R = k\langle X\rangle / I_S$ é dado pelo k-submódulo $k\langle X\rangle_{irr}$ gerado pelos monômios irredutíveis de $\langle X\rangle$.*

[1]Por conjunto de representates, entende-se escolher um único elemento $a \in k\langle X\rangle$ para cada elemento $b \in R$ de forma que $b = [a]$.

Neste caso, a álgebra R pode ser identificada com o k-submódulo $k\langle X\rangle_{irr}$que se torna uma álgebra com multiplicação dada por $a \cdot b = r_S(ab)$.

Demonstração. Por indução transfinita e as hipóteses do teorema vemos que todo elemento de $\langle X\rangle$ é de redução finita, uma vez que todo elemento minimal é irredutível pelo fato da ordem ser compatível com S, e para um elemento geral, ao aplicarmos uma redução que age não trivialmente, caso exista, caímos na hipótese de indução. Segue também que todo elemnto de $k\langle X\rangle$ é de redução finita.

(b) $\Rightarrow$ **(a)** Segue imediato das definições.

(a) $\Rightarrow$ **(a')** Note que pela transitividade de $\leq$ e pelo fato de $\leq$ ser compatível com S temos que $r_{D\sigma E}$ age não trivialmente em $r(A)$, para A monômio e r composição de reduções com pelo menos uma agindo não trivialmente, apenas quando $DW_\sigma E < ABC$. Note também que se $r_{D\sigma E}$ age não trivialmente num elemento $a \in k\langle X\rangle$ então $r_{D\sigma E}(a) = a + \lambda D(W_\sigma - f_\sigma)E$ para $\lambda \in k\backslash\{0\}$. Juntando ambos os fatos temos a implicação desejada.

(a') $\Rightarrow$ **(b)** É suficiente mostrar que todos os monômios $D \in \langle X\rangle$ são de redução única pelo item 1. do lema C.1.1. Novamente, vamos usar indução transfinita. Pelo fato dos elementos minimais serem irredutíveis, eles são de redução única. Suponha válido para monômios menores que D. Então o domínio de r_S contém o submódulo gerado por esses monômios e o núcleo de r_S contém I_D. Temos que mostrar que dadas quaisquer duas reduções $r_{L\sigma M'}$ e $r_{L'\tau M}$ agindo não trivialmente em D (cada uma das quais mandam D para uma combinação linear de monômios menores que D), temos $r_S(r_{L\sigma M'}(D)) = r_S(\ r_{L'\sigma M}(D))$. Podemos supor sem perda de generalidade que $l(L) \leq l(L')$ onde l denota o comprimento da palavra. Temos três casos:

Caso 1: As subpalavras W_σ e $W\tau$ se sobrepõem em D mas uma não contém a outra. Então $D = LABCM$ onde (σ, τ, A, B, C) é uma ambigüidade de sobreposição em S e $r_{L\sigma M'}(D)-\ r_{L'\sigma M}(D) = L(f_\sigma C - Af_\tau)M$. Pela hipótese **(a')** temos que $f_\sigma C - Af_\tau \in I_{ABC}$ donde segue que $L(f_\sigma C - Af_\tau)M \in I_{LABCM} = I_D \in \ker r_S$ e portanto $r_S(r_{L\sigma M'}(D))-$ $r_S(r_{L'\sigma M}(D)) = 0$ como desejávamos.

Caso 2: Uma das subpalavras W_σ, W_τ de D está contida na outra. Este caso é análogo ao caso 1 usando ambigüidades de inclusão.

Caso 3: As subpalavras W_σ e W_τ são disjuntas em D, ou seja, $D = LW_\sigma NW_\tau M$. Temos que mostrar que $r_S(Lf_\sigma NW_\tau M)$ e $r_S(LW_\sigma Nf_\tau M)$ são iguais, mas usando a parte 2. do lema C.1.1, vemos que ambos são iguais a $r_S(Lf_\sigma Nf_\tau M)$.

Antes de mostrarmos que **(b)** $\Leftrightarrow$ **(c)**, note que **(c)** nos dá uma cisão do epimorfismo da seqüência exata curta $0 \to I_S \to k\langle X\rangle \to R \to 0$ e com imagem $k\langle X\rangle_{irr}$, ou seja, temos a decomposição $k\langle X\rangle = I_S \oplus k\langle X\rangle_{irr}$. De fato essa decomposição é equivalente ao item **(c)**.

(b) $\Rightarrow$ **(c)** Neste caso temos uma projeção r_S definida em todo $k\langle X\rangle$ com contra-domínio $k\langle X\rangle_{irr}$. Note que para cada redução $r = r_{A\sigma B}$ temos que $r(a) = a + i$ para $i \in I_S$, de fato $i = \lambda A(W_\sigma - f_\sigma)B$ para $\lambda \in k$. Segue que $\ker r_S \subseteq I_S$. Por outro lado, usando 2. do lema C.1.1, temos para um gerador linear de I_S que $r_S(A(W_\sigma - f_\sigma)B) = r_S(AW_\sigma B) - r_S(Af_\sigma B) =$ 0. Segue que $I_S = \ker r_S$ e $k\langle X\rangle = I_S \oplus k\langle X\rangle_{irr}$.

(c) $\Rightarrow$ (b) Suponha que $a \in k\langle X\rangle$ possa ser reduzido para b e b' irredutíveis. Note que $b - a \in I_S$ e $b' - a \in I_S$ donde $b - b' \in I \cap k\langle X\rangle_{irr} = 0$.

Finalmente, a última parte segue de imediato da existência da projeção $r_S : k\langle X\rangle = I_S \oplus k\langle X\rangle_{irr} \to k\langle X\rangle_{irr}$. ■

Vejamos um corolário que nos interessa e que serve como exemplo de aplicação deste teorema.

Corolário C.1.3 *Considere a álgebra $\mathcal{O}(SL_q(2))$ achada no exemplo 1.2.13, então o conjunto $\mathcal{B} = \left\{\delta_{0,lm}a^k b^l c^m d^n : k,l,m,n \in \mathbb{N}\right\} \setminus \{0\}$ é uma base para o espaço vetorial $\mathcal{O}(SL_q(2))$.*

Demonstração. Defina $X = \{a,b,c,d\}$. Podemos colocar as relações definidoras de $\mathcal{O}(SL_q(2))$ no sistema de reduções $S = \{\sigma_1,\ldots,\sigma_7\}$ com $\sigma_1 = (ba, qab)$; $\sigma_2 = (ca, qac)$; $\sigma_3 = (da, qbc+1)$; $\sigma_4 = (bc, qad - q)$; $\sigma_5 = (cb, bc)$; $\sigma_6 = (db, qbd)$ e $\sigma_7 = (dc, qcd)$ de forma que a álgebra R do teorema acima coincide com $\mathcal{O}(SL_q(2))$. Note que o conjunto $\mathcal{B}$ é exatamente o conjunto dos monômios irredutíveis sobre S e portanto uma base de $\mathbb{C}\langle X\rangle_{irr}$. Defina uma ordem em X por $a < b < c < d$ e para monômios $A, B \in \langle X\rangle$ definimos $A < B$ se $l(A) < l(B)$ ou se $l(A) = l(B)$ usamos a ordem lexicográfica em $X^{l(A)}$. Note que tal ordem é uma ordem total de semi-grupos compatível com S e satisfazendo a condição das cadeias descendentes. Resta-nos mostrar que todas as ambigüidades são resolúveis. Temos as seguintes ambigüidades:

$$1 - (\sigma_4, \sigma_2, b, c, a); \qquad 2 - (\sigma_4, \sigma_5, b, c, b); \qquad 3 - (\sigma_5, \sigma_1, c, b, a);$$

$$4 - (\sigma_5, \sigma_4, c, b, c); \qquad 5 - (\sigma_6, \sigma_1, d, b, a); \qquad 6 - (\sigma_6, \sigma_4, d, b, c);$$

$$7 - (\sigma_7, \sigma_2, d, c, a); \qquad 8 - (\sigma_7, \sigma_5, d, c, b).$$

Vejamos que podemos resolver a segunda ambigüidade, sendo as outras análogas. Temos que mostrar que $b^2c = r_{b\sigma_5 1}(bcb)$ e $qadb - qb = r_{1\sigma_4 b}(bcb)$ podem ser reduzidas para um elemento comum. Note que

$$r_{1\sigma_1 d}\left(r_{b\sigma_4 1}(b^2c)\right) = r_{1\sigma_1 d}(qbad - qb) = q^2abd - qb;$$

$$r_{a\sigma_6 1}(qadb - qb) = q^2abd - qb;$$

como desejávamos. O fato de $\mathcal{B}$ ser base para $\mathcal{O}(SL_q(2))$ segue do teorema da constatação acima que $\mathcal{B}$ é base de $\mathbb{C}\langle X\rangle_{irr}$. ■

C.2 O lema da cobra e o lema dos cinco

Lema C.2.1 (Lema da cobra) *Sejam R uma anel A, B, C, A', B', C' R-módulos à esquerda e suponha que tenhamos o seguinte diagrama comutativo de morfismos de R-módulos à es-*

querda:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C' & \end{tikzcd}$$

com linhas exatas. Então existe um morfismo $\delta : \ker\gamma \to \operatorname{coker}\alpha$ *tal que a seguinte seqüência é exata*

$$\ker\alpha \xrightarrow{\bar{f}} \ker\beta \xrightarrow{\bar{g}} \ker\gamma \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker}\alpha \xrightarrow{[f']} \operatorname{coker}\beta \xrightarrow{[g']} \operatorname{coker}\gamma \tag{C.1}$$

onde $\bar{f}$ *e* $\bar{g}$ *são as restrições de* f *e* g *respectivamente e* $[f']$ *e* $[g']$ *são os morfismos induzidos no quociente. Se além disso* f *é injetora então* $\bar{f}$ *também o é e se* g' *é sobrejetora então* $[g']$ *também o é.*

Demonstração. Tome $c \in \ker\gamma$, então como g é sobrejetora existe $b \in B$ tal que $g(b) = c$. Temos que $0 = \gamma(g(b)) = g'(\beta(b))$, portanto existe um único $a' \in A'$ tal que $f'(a') = \beta(b)$. Defina $\delta : \ker\gamma \to \operatorname{coker}\alpha$ por $\delta(c) = a' + \operatorname{Im}\alpha$ e vejamos que δ está de fato bem definida, isto é, não depende da escolha de b. Suponha que $b_1 \in B$ seja tal que $g(b_1) = c$ e tome a'_1 tal que $f'(a'_1) = \beta(b_1)$. Temos que $g(b - b_1) = 0$, donde existe $a \in A$ tal que $f(a) = b - b_1$. Então $f'(a' - a'_1) = \beta(b - b_1) = \beta(f(a)) = f'(\alpha(a))$ e como f' é injetora temos $a' - a'_1 = \alpha(a)$ donde segue que $a' + \operatorname{Im}\alpha = a'_1 + \operatorname{Im}\alpha$. Portanto δ é um morfimso de R-módulos bem definido. Resta-nos mostrar a exatidão de (C.1).

É claro que $\operatorname{Im}\bar{f} \subseteq \ker\bar{g}$. Tome $b \in \ker\bar{g} \subseteq \ker\beta$, então existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$ e assim $f'(\alpha(a)) = \beta(f(a)) = \beta(b) = 0$. Como f' é injetora temos $\alpha(a) = 0$, ou seja $a \in \ker\alpha$, $b = \bar{f}(a)$ e $\ker\bar{g} \subseteq \operatorname{Im}\bar{f}$.

Que $\operatorname{Im}\bar{g} \subseteq \ker\delta$ vem do fato que se $b \in \ker\beta$ então podemos escolher o próprio b para achar $\delta(\bar{g}(b))$ e o a' correspondente é 0 uma vez que $\beta(b) = 0$. Suponha $c \in \ker\delta$ e sejam $b \in B$ tal que $g(b) = c$ e $a' \in A'$ tal que $f'(a') = \beta(b)$. Como $\delta(c) = 0$ então $a' \in \operatorname{Im}\alpha$, ie, existe $a \in A$ tal que $\alpha(a) = a'$ e assim $\beta(b) = f'(a') = f'(\alpha(a)) = \beta(f(a))$, ou seja $b - f(a) \in \ker\beta$. Como $gf = 0$ temos $g(b - f(a)) = g(b) = c$ donde $c \in \operatorname{Im}\bar{g}$.

Tome $\delta(c) \in \operatorname{Im}\delta$ e sejam $a' \in A'$ e $b \in B$ como na contrução de δ. Então $[f'](\delta(c)) = [f'](a' + \operatorname{Im}\alpha) = f'(a') + \operatorname{Im}\beta = \beta(b) + \operatorname{Im}\beta = 0$, ou seja, $\operatorname{Im}\delta \subseteq \ker[f']$. Por outro lado, dado $a' + \operatorname{Im}\alpha \in \ker[f']$ temos $f'(a') = \beta(b)$ para algum $b \in B$ e $\gamma(g(b)) = g'(\beta(b)) = g'(f'(a')) = 0$ e pela contrução de δ temos $\delta(g(b)) = a' + \operatorname{Im} a$, donde $\ker[f'] \subseteq \operatorname{Im}\delta$.

É claro que $\operatorname{Im}[f'] \subseteq \ker[g']$. Tome $b' + \operatorname{Im}\beta \in \ker[g']$, então $g'(b') = \gamma(c)$ para algum $c \in C$. Como g é sobrejetora existe $b \in B$ tal que $c = g(b)$, então $g'(\beta(b)) = \gamma(g(b)) = \gamma(c) = g'(b')$, ou seja, $b' - \beta(b) \in \ker g' = \operatorname{Im} f'$. Tome $a' \in A'$ tal que $f'(a') = b' - \beta(b)$, então $[f'](a' + \operatorname{Im}\alpha) = f'(a') + \operatorname{Im}\beta = b' - \beta(b) + \operatorname{Im}\beta = b' + \operatorname{Im}\beta$, donde $\ker[g'] \subseteq \operatorname{Im}[f']$.

A última afirmação do lema é evidente. ■

Lema C.2.2 (Lema dos cinco) *Sejam* R *uma anel* $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$ R*-módulos à esquerda e suponha que tenhamos o seguinte diagrama comutativo de morfismos de* R*-*

módulos à esquerda:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\phi_1"] & B \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\phi_2"] & C \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "\phi_3"] & D \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "\phi_4"] & E \arrow[d, "\phi_5"] \\
A' \arrow[r, "g_1"'] & B' \arrow[r, "g_2"'] & C' \arrow[r, "g_3"'] & D' \arrow[r, "g_4"'] & E'
\end{tikzcd}$$

com linhas exatas. Suponha que ϕ_2 e ϕ_4 sejam isomorfimos, ϕ_1 seja epimorfismo e ϕ_5 seja monomorfismo. Então ϕ_3 é um isomorfismo.

Demonstração. Suponha $\phi_3(c) = 0$ para algum $c \in C$, então temos $\phi_4(f_3(c)) = g_3(\phi_3(c)) = 0$. Usando a injetividade de ϕ_4 temos $f_3(c) = 0$ e usando a exatidão da primeira linha, $\exists b \in B$ tal que $f_2(b) = c$. Temos que $g_2(\phi_2(b)) = \phi_3(f_2(b)) = \phi_3\,(c) = 0$ e pela exatidão da linha de baixo temos que $\exists a' \in A'$ tal que $g_1(a') = \phi_2(b)$. Pela sobrejetividade de ϕ_1 tome $a \in A$ tal que $a' = \phi_1(a)$, e portanto $\phi_2(b - f_1(a)) = g_1(a') - g_1(\phi_1(a)) = 0$, donde pela injetividade de ϕ_2 temos $b = f_1(a)$. Voltando para c, temos $c = f_2(b) = f_2(f_1(a)) = 0$ pela exatidão da primeira linha. Concluímos assim que ϕ_3 é injetora.

Tome $c' \in C'$ e pela sobrejetividade de ϕ_4 tome $d \in D$ tal que $\phi_4(d) = g_3(c')$. Aplicando g_4 nesta igualdade e utilizando a exatidão da linha de baixo temos $g_4(\phi_4(d)) = g_4(g_3(c')) = 0$. Assim $\phi_5(f_4(d)) = g_4(\phi_4(d)) = 0$ e pela injetividade de ϕ_5 temos $f_4(d) = 0$. Agora, usando a exatidão da linha de cima achamos $c \in C$ tal que $d = f_3(c)$. Temos que $g_3(\phi_3(c)) = \phi_4(f_3(c)) = g_3(c')$ e pela exatidão da linha de baixo temos que $\exists b' \in B'$ tal que $c' - \phi_3(c) = g_2(b')$. Pela sobrejetividade de ϕ_2 tomamos $b \in B$ tal que $\phi_2(b) = b'$, assim $\phi_3(f_2(b)) = g_2(\phi_2(b)) = g_2(b')$, donde $c' = \phi_3(c + f_2(b))$. Concluímos que ϕ_3 é sobrejetora. ∎

Apêndice D

Variedades diferenciáveis

D.1 Definições básicas

Neste apêndice revisaremos alguns conceitos e resultados relacionados a teoria de variedades diferenciáveis. Para provas dos resultados e mais detalhes ver qualquer livro deste assunto, por exemplo [28], [33], [34] e [40].

Fixe M um espaço topológico Hausdorff.

Uma carta local (de dimensão n) em M é um par (U, ψ) onde U é um aberto de M e $\psi : U \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua tal que U é homeomorfo a sua imagem.

Iremos omitir a dimensão da carta local, ficando essa subentendida no contexto.

Definição D.1.1 *Diremos que M é uma variedade topológica de dimensão n se para todo $x \in M$ existe uma carta local (U, ψ) tal que U é vizinhança aberta de x.*

Definição D.1.2 *Seja M uma variedade topológica de dimensão n. Um atlas diferenciável de classe C^k para M é um conjunto $\mathcal{A} = \{(U_i, \psi_i)\}_{i \in I}$ de cartas locais de forma que $\{U_i\}_{i \in I}$ é uma cobertura aberta de m e para cada par (i, j) tal que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, a aplicação $\psi_j \circ \psi_i^{-1} : \psi_i(U_i \cap U_j) \to \psi_j(U_i \cap U_j)$ é de classe C^k. Tal atlas é dito ser completo se para toda carta local (U, ψ) com a propriedade que $\forall i$ com $U \cap U_i \neq \emptyset$ a aplicação $\psi_i \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap U_i) \to \psi_i(U \cap U_i)$ é de classe C^k implica que $(U, \psi) \in \mathcal{A}$.*

Pode-se provar que todo atlas $\mathcal{A}_0$ está contido em um único atlas completo $\mathcal{A}$, a saber, $\mathcal{A} = \{(U, \psi) \,|\, (U, \psi)$ é carta local e $\psi_i \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap U_i) \to \psi_i(U \cap U_i)$ é de classe C^k $\forall i$ tal que $U \cap U_i \neq \emptyset\}$.

Definição D.1.3 *Um variedade diferenciável de dimensão n e classe C^k é uma par (M, A) onde M é uma variedade topológica paracompacta de dimensão n e A é um atlas diferenciável completo de classe C^k. Em particular se $k = \infty$, diremos que a variedade é suave.*

Observação D.1.4 *1. Neste trabalho, suporemos sempre que as variedades diferenciáveis são de classe C^∞.*

2. *Pelo fato de todo atlas estar contido em um único atlas completo, para construir uma variedade a partir de um espaço topológico Hausdorff, é suficiente apresentar um atlas diferenciável.*

3. *A exigência de paracompacidade para M vem do fato que neste caso podemos garantir a existência de partição de unidade, a qual é amplamente utilizada para construção de estruturas globais em variedades.*

Definição D.1.5 *Seja M uma variedade diferenciável. Uma função real contínua $f : M \to \mathbb{R}$ é dita ser diferenciável se para qualquer qualquer carta local (U, ψ), a aplicação $f \circ \psi^{-1} : \psi(U) \to \mathbb{R}$ é (infinitamente) diferenciável. Denotaremos o espaço das funções reais diferenciáveis por $C(M)$.*

Observação D.1.6 *A notação acima é a mesma para funções contínuas e poderíamos optar por utilizar $C^\infty(M)$, no entanto, no caso diferenciável sempre consideraremos $C(M)$ como aplicações diferenciáveis.*

Definição D.1.7 *Sejam M_1 variedade diferenciável de dimensão n_1 e M_2 de dimensão n_2, diremos que uma função contínua $\varphi : M_1 \to M_2$ é diferenciável se para qualquer função $f : M_2 \to \mathbb{R}$ diferenciável temos que $f \circ \varphi$ também é diferenciável.*

Para um ponto $m \in M$ definimos $\mathfrak{F}(m)$ como o conjunto de todas as funções reais diferenciáveis definidas numa vizinhança de m. Podemos definir uma soma e um produto para elementos f, g de $\mathfrak{F}(m)$ definindo o domínio como sendo a intersecção das vizinhanças e a imagem é dada por soma ou produto pontuais. Da mesma forma definimos λf para $\lambda \in \mathbb{R}$ e $f \in \mathfrak{F}(m)$.

Definição D.1.8 *Um vetor tangente a M no ponto m é uma aplicação $v : \mathfrak{F}(m) \to \mathbb{R}$ satisfazendo:*

1. $v(\lambda f + \mu g) = \lambda v(f) + \mu v(g)$ *para* $f, g \in \mathfrak{F}(m)$ *e* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$;

2. $v(fg) = v(f)g(m) + f(m)v(g)$ *para* $f, g \in \mathfrak{F}(m)$.

Pode-se mostrar que o conjunto dos vetores tangentes num ponto $m \in M$ é um espaço vetorial de dimensão $n = \dim M$. Tal conjunto é denominado espaço tangente de M no ponto m e é denotado por $T_m M$. Dada uma aplicação diferenciável $\varphi : M_1 \to M_2$ entre duas variedades podemos definir o diferencial de φ no ponto $m \in M_1$ como a aplicação linear $\mathrm{d}\varphi_m : T_m M_1 \to T_{\varphi(m)} M_2$ por

$$\mathrm{d}\varphi_m(v)(g) = v(g \circ \varphi)$$

para $v \in T_m M$ e $g \in \mathfrak{F}(\varphi(m))$. Ao longo do texto também utilizaremos a notação $(\varphi_*)_m$ ou simplesmente φ_* para $\mathrm{d}\varphi_m$.

Defina o fibrado tangente de M por $TM := \bigcup_{m \in M} T_m M$, então podemos definir uma estrutura diferenciável em TM de forma que a aplicação $\pi : TM \to M$ definida por $\pi(v) = m$ para $v \in T_m M$ seja diferenciável.

Definição D.1.9 *Um campo vetorial numa variedade M é uma aplicação diferenciável $X : M \to TM$ tal que $\pi \circ X = id_M$. O espaço de todos os campos vetoriais será denotado por $\mathfrak{X}(M)$.*

Podemos definir o produto de uma função real diferenciável $f \in C(M)$ por um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ por $fX(m) = f(m)X_m$ onde X_m denota $X(m)$. Pode-se mostrar que $fX \in \mathfrak{X}(M)$ e que $\mathfrak{X}(M)$ é um $C(M)$-módulo. Note também que em cada ponto $m \in M$ e $X_m(f)$ é um número real para $f \in C(M)$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$ donde podemos pensar $X(f)$ como uma função de M em $\mathbb{R}$. É válido que $X(f) \in C(M)$.

Dados dois campos vetoriais $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos que a expressão $X(Y(f)) - Y(X(f))$ define um novo campo vetorial denotado por $[X, Y]$ e chamado de comutador de X e Y. Temos que $\mathfrak{X}(M)$ com esse comutador se torna uma álgebra de Lie.

Para cada ponto $m \in M$ considere o dual de T_mM o qual denotaremos por T_m^*M. Definimos o fibrado cotangente por $T^*M = \bigcup_{m\in M} T_m^*M$ e novamente temos uma estrutura diferenciável de forma que a projeção $\pi : T^*M \to M$ definida por $\pi(\zeta) = m$ para $\zeta \in T_m^*M$ seja diferenciável.

Definição D.1.10 *Uma 1-forma diferenciável em M é uma aplicação diferenciável $\alpha : M \to T^*M$ tal que $\pi \circ \alpha = id_M$. Denotaremos o espaço de todas 1-formas por $\Omega^1(M)$.*

Da mesma forma podemos definir o produto de uma função $f \in C(M)$ por uma 1-forma $\alpha \in \Omega^1 M$ por $fa(m) = f(m)\alpha_m$, donde $\Omega^1(M)$ é um $C(M)$-módulo. De fato, no contexto de fibrados do capítulo 3, temos que TM e T^*M são fibrados vetoriais além de que $\mathfrak{X}(M)$ e $\Omega^1(M)$ são nada mais que o espaço das seções diferenciáveis de TM e T^*M respectivamente.

Confundindo o espaço tangente de $\mathbb{R}$ em qualquer ponto com o próprio $\mathbb{R}$, temos que para uma função $f \in C(M)$ e $m \in M$ o diferencial $\mathrm{d}f_m$ de f no ponto m é uma aplicação linear de T_mM em $\mathbb{R}$, ou seja $\mathrm{d}f_m \in T_m^*M$ e assim temos uma 1-forma $\mathrm{d}f$ definida por $\mathrm{d}f(m) = \mathrm{d}f_m$. Em outras palavras temos uma aplicação $\mathrm{d} : C(M) \to \Omega^1(M)$ que associa uma função real diferenciável a uma 1-forma diferenciável. Tal aplicação satisfaz a regra de Leibniz

$$\mathrm{d}(fg) = f\mathrm{d}g + g\mathrm{d}f$$

de fato

$$\mathrm{d}(fg)_m(v) = v(fg) = f(m)v(g) + g(m)v(f) = (f\mathrm{d}g)_m(v) + (g\mathrm{d}f)_m(v)$$

para $v \in T_mM$. Além disso se M for uma variedade compacta não é dificil ver que a imagem da aplicação d gera $\Omega^1(M)$ como $C(M)$-módulo. Essas duas propriedades serão o ponto de partida para a definição de cálculo diferenciável de primeira ordem no capítulo 2.

Definição D.1.11 *Seja V um espaço vetorial real, diremos que uma aplicação multilinear $\alpha : V \times \cdots \times V \to \mathbb{R}$ (r vezes) é alternada se*

$$\alpha(v_1, \ldots, v_r) = \mathrm{sgn}(\sigma)\alpha(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(r)})$$

para qualquer permutação $\sigma \in S_r$.

Para uma variedade M, denotaremos por $\Lambda_m^r(M)$ o espaço de todas as aplicações alternadas em T_mM. Pode-se verificar que se $r > n = \dim M$ então $\Lambda_m^r(M)$ é o espaço vetorial nulo. Definiremos a aplicação $\wedge : \Lambda_m^r(M) \times \Lambda_m^q(M) \to \Lambda_m^{r+q}(M)$ impondo que

$$(\xi \wedge \eta)(v_1, \ldots, v_{r+q}) = \frac{1}{r!q!} \sum_{\sigma \in S_{r+q}} \operatorname{sgn}(\sigma)\xi(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(r)})\eta(v_{\sigma(r+1)}, \ldots, v_{\sigma(r+q)})$$

e se definirmos $\Lambda_m(M) = \bigoplus_{r=0}^n \Lambda_m^r(M)$ onde $\Lambda_m^0(M) = \mathbb{R}$ temos que $(\Lambda_m(M), \wedge)$ é uma álgebra graduada. Chamaremos a aplicação $\wedge : \Lambda_m(M) \to \Lambda_m(M)$ de produto exterior. Definimos $\Lambda^r(M) = \bigcup_{m \in M} \Lambda_m^r(M)$ e $\Lambda(M) = \bigcup_{m \in M} \Lambda_m(M)$. Novamente podemos mostrar que esses objetos são fibrados vetoriais diferenciáveis com base M.

Definição D.1.12 *Uma forma (resp. r-forma) diferenciável é uma aplicação diferenciável $\alpha : M \to \Lambda(M)$ (resp. $\alpha : M \to \Lambda^r(M)$) tal que $\pi \circ \alpha = id_M$. Os espaço das formas (resp. r-formas) diferenciáveis será denotado por $\Omega(M)$ (resp. $\Omega^r(M)$).*

Observação D.1.13 *1. Note que o espaço $\Omega^1(M)$ aqui definido é o mesmo definido anteriormente e $\Omega^0(M)$ nada mais é que $C(M)$.*

2. Temos também que o produto exterior se estende para o espaço das formas fazendo $(\alpha \wedge \beta)_m = \alpha_m \wedge \beta_m$.

3. Por construção $\Omega^r(M)$ também pode ser considerado como o espaço das aplicações $C(M)$-r-lineares alternadas sobre $\mathfrak{X}(M)$.

4. Dada uma aplicação diferenciável $\varphi : M_1 \to M_2$ entre duas variedades, iremos definir uma aplicação $\varphi^* : \Omega(M_2) \to \Omega(M_1)$ satisfazendo

$$\varphi^*\alpha(Z_1, \ldots, Z_r) = \alpha(\varphi_* Z_1, \ldots, \varphi_* Z_r)$$

para $\alpha \in \Omega^r(M_2)$, $Z_1, \ldots, Z_r \in \mathfrak{X}(M_1)$. A forma $\varphi^*\alpha$ é dita ser o pullback de α por φ.

Teorema D.1.14 *Existe uma única aplicação linear $\mathrm{d} : \Omega(M) \to \Omega(M)$ de grau 1 (ie, $\mathrm{d}(\Omega^r(M)) \subseteq \Omega^{r+1}(M)$) satisfazendo:*

1. $\mathrm{d}^2 = 0$;
2. $\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge \mathrm{d}\beta$ *para* $\alpha \in \Omega^r(M)$ *e* $\beta \in \Omega(M)$;
3. $\mathrm{d}f$ *é o diferencial de* f *se* $f \in C(M)$.

A aplicação d *é chamada de derivação exterior.*

No caso em que a variedade é compacta pode-se mostrar que o espaço das r-formas é gerado como $C(M)$-módulo por elementos da forma $\mathrm{d}f_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f_r$ para $f_1, \ldots, f_r \in C(M)$. Esse fato junto com o teorema são a motivação da definição de cálculo superior no capítulo 2.

Proposição D.1.15 *Para uma r-forma $\alpha \in \Omega^r(M)$ e campos vetoriais $X_1, \ldots, X_{r+1} \in \mathfrak{X}(M)$ é válida a relação*

$$\mathrm{d}\alpha(X_1, \ldots, X_{r+1}) = \sum_{i=1}^{r+1}(-1)^{i+1}X_i(\alpha(X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_{r+1})+$$

$$+\sum_{1\leq i<j\leq r+1}(-1)^{i+j}\alpha([X_i, X_j], X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_{r+1})$$

onde o símbolo ˆ indica que o termo foi omitido.

Temos em particular no caso $r = 1$ da proposição

$$\mathrm{d}\alpha(X, Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y])$$

para $\alpha \in \Omega^2(M)$ e $X, Y \in\in \mathfrak{X}(M)$.

Definição D.1.16 *Seja G um grupo com uma estrutura diferenciável. Diremos que G é um grupo de Lie se a multiplicação e a inversão forem aplicações diferenciáveis.*

Em particular temos que para cada $g \in G$ a aplicação $L_g : G \to G$ dada por $L_g(h) = gh$ é uma aplicação diferenciável.

Definição D.1.17 *Seja G um grupo de Lie. Diremos que uma campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(G)$ é invariante à esquerda se para quaisquer $g, h \in G$ temos que $L_{g*}(X_h) = X_{gh}$. Denotaremos o espaço dos campos invariantes à esquerda por $\mathfrak{g}$.*

Pode-se mostrar que o comutador de dois campos vetoriais invariantes à esquerda continua invariante à esquerda. Segue que $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie. Dado um vetor $v \in T_eG$ (onde e é a unidade do grupo) temos um campo vetorial invariante à esquerda definido por $X_v(g) = L_{g*}(v)$. De fato uma campo $X \in \mathfrak{g}$ é o campo vetorial gerado X_e desta forma. Ou seja, temos um isomorfismo $T_eG \cong \mathfrak{g}$. Em particular se tivermos uma aplicação diferenciável $\varphi : G \to M$ temos que o diferencial em e é uma aplicação cujo domínio é a álgebra de Lie, $\mathrm{d}\varphi_e : \mathfrak{g} \to T_{\varphi(e)}M$.

Teorema D.1.18 *Sejam G e H grupos de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ respectivamente e suponha G simplesmente conexo. Para um homomorfismo de álgebras de Lie $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ existe um único homomorfismo de grupos de Lie $\varphi : G \to H$ tal que $\mathrm{d}\varphi = \psi$.*

Pense $\mathbb{R}$ como um grupo de Lie com a soma. Se G é um grupo de Lie e $X \in \mathfrak{g}$ então $\lambda \mathrm{d}/\mathrm{d}r \mapsto \lambda X$ nos dá um homomorfismo da álgebra de Lie de $\mathbb{R}$ com $\mathfrak{g}$ (onde $\mathrm{d}/\mathrm{d}r$ é a base de $T_0\mathbb{R}$ proveniente da identidade vista como carta local). Como $\mathbb{R}$ é simplesmente conexo temos um único homomorfismo $\exp_X : \mathbb{R} \to G$ tal que

$$\mathrm{d}\exp_X\left(\lambda\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right) = \lambda X.$$

Finalmente, definiremos a aplicação exponencial $\exp : \mathfrak{g} \to G$ por $\exp(X) = \exp_X(1)$.

Bibliografia

[1] BAXTER, R. J. *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics.* London: Academic Press, 1982.

[2] BERGMAN, M. G. *The Diamond Lemma for Ring Theory.* Adv. Math., n29, p178-218, 1978.

[3] BOROWIECZ, A. *Cartan Pairs.* Czech. J. Phys., n46, p1197-1202, 1996 (q-alg/9609011).

[4] BRZEZINSKI, T. *Translation map in quantum principal bundles.* J. Geom. Phys., n20, p349-370, 1996 (hep-th/9407145).

[5] BRZEZINSKI, T.; MAJID, S. *Quantum group gauge theory on quantum spaces.* Commun. Math. Phys., n157, p591-638, 1993 (hep-th/9208007).

[6] BUDZYNSKI, R. J.; KONDRACKI, W. *Quantum principal fiber bundles.* Rep Math. Phys., n37, p365-385, 1996 (hep-th/9401019).

[7] CALOW, D.; MATTHES, R. *Covering and gluing of algebras and differential algebras.* J. Geom. Phys. n32, p364-396, 2000 (math.QA/9910031)

[8] CALOW, D.; MATTHES, R. *Connections on locally trivial quantum principal fibre bundles.* J. Geom. Phys. n41, p114-165, 2002 (math.QA/0002228).

[9] CALOW, D.; MATTHES, R. *Locally trivial quantum vector bundles and associated vector bundles* (math.QA/0002229).

[10] CALOW, D.; MATTHES, R. *Gauge transformations on locally trivial quantum principal fibre bundles* (math.QA/0002230).

[11] CHAKRABORTY, P. S.; ARUPKUMAR, P. *Spectral triples and associated Connes-de Rham complex for the quantum $SU(2)$ and the quantum sphere.* Commun. Math. Phys. n240, p447-456, 2003.

[12] CONNES, A. *Noncommutative Geometry.* San Diego: Academic Press, 1994.

[13] DABROWSKI, L.; HAJAC, P.; SINISCALCO, P. *Explicit Hopf-Galois Description of $SL_{e^{\frac{2\pi i}{3}}}(2)$-induced Frobenius Homomorphisms.* In: Enlarged Proceedings of the ISI GUCCIA Workshop on quantum groups, non commutative geometry and fundamental physical interactions. Commack: Nova Science Pub, Inc., p279-298, 1999. (q-alg/9708031).

[14] DRINFELD, V. G. *Quantum Groups.* In Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Providence, p798-820, 1986.

[15] DUBOIS-VIOLETTE, M. *Derivations et Calcul Differentiel Non-Commutatif.* C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I, n307, p403-408, 1988.

[16] DURDEVICH, M. *Geometry of quantum principal bundles I.* Commun. Math. Phys., n175, p457-521, 1996 (q-alg/9507019).

[17] DURDEVICH, M. *Geometry of quantum principal bundles II.* Rep. Math. Phys., n9, p531-607, 1997 (q-alg/9412005).

[18] FADDEEV, L. D.; RESHETIKHIN, N; TAKHTAJAN, L. A. *Quantization of Lie Groups and Lie algebras.* Leningrad Math. J., n1, p193-224, 1990.

[19] FIGUEROA, H.; GRACIA-BONDÍA, J. M.; VÁRILLY, J.C. *Elements of Noncommutative Geometry.* Boston: Birkhäuser, 2001.

[20] GELFAND, I. M.; NAIMARK, M. A. *On the imbedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space.* Mat. Sbornik, n12, p197-213, 1943.

[21] GERSTENHABER, M. *On the deformation of rings and algebras.* Ann. Math. n79, p59-103, 1964.

[22] HAJAC, P. *Strong Connections on Quantum Principal Bundles.* Commun. Math. Phys., n182, p579-617, 1996 (hep-th/9406129).

[23] HAJAC, P. *A note on first order differential calculus on quantum principal bundles.* Czech. J. Phys. n47, p1139-1143, 1997 (q-alg/9708014).

[24] HAJAC, P.; MAJID, S. *Projective module description of the q-monopole.* Commun. Math. Phys. n206, p247-264, 1999 (math.QA/9803003).

[25] HUSEMOLLER, D. *Fibre Bundles.* New York: Springer-Verlag, 1995 (Graduate Texts in Mathematics).

[26] KASSEL, C. *Quantum groups.* New York: Springer-Verlag, 1975 (Graduate Texts in Mathematics).

[27] KLIMYK, A.; SCHMÜDGEN, K. *Quantum Groups and Their Representations.* Berlin: Springer-Verlag, 1997 (Texts and Monographs in Physics).

[28] KOBAYASHI, S.; NOMIZU, K. *Foundations of Differential Geometry Volume I.* New York: John Wiley & Sons, 1963 (Tracts in Mathematics).

[29] MADORE, J. *An Introduction to Noncommutative Differential Geometry and its Physical Applications. 2. ed.* Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

[30] MAJID, S. *Foundations of Quantum Group Theory.* Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

[31] MAJID, S. *Quantum and braided group Riemannian geometry.* J. Geom. Phys., n30, p113-146, 1999 (q-alg/9709025).

[32] MAJID, S. *Riemannian geometry of quantum groups and finite groups with nonuniversal differentials,* Commun. Math. Phys., n225 p131-170, 2002 (math.QA/0006150).

[33] MATSUSHIMA, Y. *Differentiable Manifolds.* New York: Marcel Dekker, Inc., 1972.

[34] NAKAHARA, M. *Geometry, Topology and Physics.* London: Institute of Physics Publishing, 1990 (Graduate Student Series in Physics).

[35] PFLAUM, M. J. *Quantum Groups on Fiber Bundles.* Commun. Math. Phys., n166, p279-315, 1994 (hep-th/9401085).

[36] PODLEŠ, P. *Quantum Spheres.* Lett. Math. Phys. n14, p193-202, 1987.

[37] SERRE, J. P. *Modules projectifs et espaces fibrés à fibre vectorielle.* Séminaire Dubreil, n23, 1957-8.

[38] SCHMÜDGEN, K.; SCHÜLER, A. *Classification of Bicovariant Differential Calculi on Quantum Groups.* Commun. Math. Phys., n170, p315-335, 1995.

[39] SWAN, R. G. *Vector bundles and projective modules.* Trans. Amer. Math. Soc., n105, p264-277, 1962.

[40] WARNER, F. W. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups.* New York: Springer-Verlag, 1983 (Graduate Texts in Mathematics).

[41] WORONOWICZ, S. L. *Compact Matrix Pseudogroups.* Commun. Math. Phys., n111, p613-665, 1987.

[42] WORONOWICZ, S. L. *Differential Calculus on Compact Matrix Pseudogroups (Quantum Groups).* Commun. Math. Phys., n122, p125-170, 1989.

[43] YANG, C. N. *Some exact results for the many-body problem in one dimension with repulsive delta-function interaction.* Phys. Rev. Lett. n190, p.1312-1315, 1967.