



**Universidade Federal de Santa Catarina**  
**Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil**

**MONITORAMENTO E ANÁLISE NUMÉRICA PARA OBTENÇÃO DE  
FREQUÊNCIAS NATURAIS DE UMA TORRE DE TELECOMUNICAÇÃO.**

Dissertação submetida à Universidade Federal de Santa Catarina como requisito exigido pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil- PPGEC, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Civil.

**RODRIGO ALVAREZ ARISPE**

Florianópolis, Junho 2005

**“MONITORAMENTO E ANÁLISE NUMÉRICA PARA OBTENÇÃO DE FREQUÊNCIAS NATURAIS DE UMA TORRE DE TELECOMUNICAÇÃO”**

Dissertação julgada adequada para a obtenção do Título de MESTRE em Engenharia Civil e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil-PPGEC, da Universidade federal de Santa Catarina-UFSC.

---

Prof<sup>a</sup>.Henriette Lebre La Rovere-Coordenadora do PPGEC

---

Profa. Henriette Lebre La Rovere-Orientadora/Moderadora

**COMISSÃO EXAMINADORA:**

---

Prof. Daniel Domingues Loriggio, Dr. - ECV/UFSC

---

Prof. Roberto Caldas de Andrade Pinto, Phd – ECV /UFSC

---

Prof. José João de Espíndola, Phd – UFSC

---

Prof.Atilio Morquio, Dr. – UDELAR/URUGUAI

*A minha esposa e filha, Paola e Mariana, mulheres maravilhosas*

## AGRADECIMENTOS

À Professora Henriette Lebre La Rovere, pela sua infinita paciência, foi um apoio em tudo momento, tanto na fase de estudos como nas correções do trabalho.

Ao Professor Atilio Morquio, pela orientação na fase experimental e pela amizade, um amigo de tempo completo.

Aos colegas da UFSC, principalmente a Igor Pierin, um exemplo de vida e fortaleza.

Aos professores do PPGEC da UFSC, Daniel Domingues Loriggio, Roberto Caldas, Ângela doValle e Narbal Ataliba.

À CAPES pela bolsa de estudos.

## SUMÁRIO

Índice de Figuras.....	5
Índice de Tabelas .....	8
RESUMO .....	9
ABSTRACT .....	10
1.1. Justificativa.....	11
1.2. Objetivos.....	12
Objetivo Geral .....	12
Objetivos Específicos.....	12
1.3. Organização .....	13
2 DINÂMICA DAS ESTRUTURAS .....	15
2.1 Introdução .....	15
2.2 Revisão Geral.....	16
2.2.1 Discretização.....	17
2.2.2 Formulação das equações de movimento .....	21
2.3 Sistemas com um grau de liberdade.....	22
2.3.1 Componentes básicos num sistema dinâmico.....	22
2.3.2 Formulação das equações de movimento num sistema de um grau de liberdade .....	23
2.3.3. Resposta dos sistemas de um grau de liberdade submetidos à vibração livre..	26
2.3.3.1.Vibrações livres sem amortecimento.....	27
2.3.3.2.Vibrações livres com amortecimento .....	28
2.3.3.3.Vibrações livres com amortecimento crítico .....	29
2.3.3.4.Vibrações livres sub-amortecidas.....	30
2.3.3.5.Vibrações livres super amortecidas.....	31
2.3.3.6 Adição de vibrações colineares.....	32
2.3.4 Vibrações forçadas para sistemas de 1 grau de liberdade (GL).....	33
2.3.5    Coeficiente de resposta .....	35
2.3.6    Sistema de 1 GL com amortecimento submetido a carregamento harmônico..	35
.....	35
2.3.7 Resposta de um sistema de 1 GL na ressonância.....	38
2.4    Introdução à análise no domínio da frequência.....	39

2.4.1 Aproximação de funções periódicas por series trigonométricas.....	40
2.4.2. Forma complexa da série de Fourier .....	42
2.4.3 A transformada integral de Fourier .....	42
2.5 Sistemas de vários graus de liberdade.....	44
2.5.1 Análise das vibrações pelo método de Rayleigh.....	45
2.5.2 Formulação das equações de movimento em sistemas com vários graus de liberdade .....	47
2.5.3 Vibrações livres sem amortecimento de sistemas de vários graus de liberdade	51
2.5.4 Análise dos modos de vibração.....	52
2.5.5. Análise da resposta dinâmica por superposição modal .....	53
3. MODELAGEM E ANÁLISE DE SISTEMAS ESTRUTURAIS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS .....	58
3.1 Introdução .....	58
3.1.1 Método da Rigidez Direta (Estruturas Reticuladas).....	58
3.2 Formulação do Método dos Elementos Finitos – análise estática .....	59
3.2.1 Energia potencial total e formulação das equações de equilíbrio .....	60
3.2.2 Discretização Espacial.....	63
3.2.3 Funções de forma e matriz de rigidez do elemento de pórtico plano.....	66
3.2.4 Matriz de rigidez do elemento de pórtico espacial.....	69
3.2.5 Transformação do sistema local para o sistema global de coordenadas .....	71
3.2.6 Formação da matriz de rigidez da estrutura global .....	75
3.3 Formulação do Método dos Elementos Finitos – análise dinâmica.....	75
3.3.1 Aplicação do princípio de Hamilton .....	75
3.3.2 Matriz de massa consistente .....	77
3.3.3 Matriz de massa discreta.....	78
3.3.4 Matriz de massa agrupada .....	79
3.3.5 Transformação de coordenadas e formação da matriz de massa da estrutura ...	80
3.4 Superposição modal .....	81
3.5 Métodos numéricos para solução de problemas de autovalor .....	82
3.5.1 Método de Jacobi .....	82
3.5.2 Métodos vetoriais de iteração .....	83
3.5.3 Autovalores de ordem superior .....	85
4 ANALISE EXPERIMENTAL DE ESTRUTURAS.....	86

4.1 Considerações gerais dos sistemas de monitoramento.....	86
4.1.1 Introdução ao conceito de monitoramento e avaliação da segurança em estruturas existentes. ....	86
4.1.2 Introdução à medição de deformações .....	87
4.1.3 Diferentes tipos de extensômetros.....	89
4.2 Extensômetros Elétricos de Resistência .....	91
4.2.1.Introdução: .....	91
4.2.2 Princípios básicos.....	91
4.2.4 Colas e materiais de suporte .....	97
4.2.5 Relações resistência-deformação-tensão .....	98
4.3 Circuitos dos extensômetros de resistência .....	100
4.3.1.Introdução .....	100
4.3.2 O circuito do potenciômetro e sua aplicação na medição de deformações .....	101
4.3.3 Circuito de ponte de Wheatstone .....	102
4.3.4 Sensibilidade do circuito de ponte de Wheatstone.....	104
4.3.5 Calibragem do circuito de extensômetros.....	106
4.4.Transdutores para captação de vibrações mecânicas .....	108
4.4.1 Introdução .....	108
4.4.2 Princípio de funcionamento .....	108
4.4.3 Acelerômetros .....	110
5 MODELO E INSTRUMENTAÇÃO DA TORRE DE TELECOMUNICAÇÕES EM ESTUDO. ....	112
5.1 Descrição da estrutura da torre .....	112
5.2 Características da estrutura e modelo estrutural .....	113
5.3 Considerações sobre a modelagem e a ligação entre as barras.....	114
5.4 Instrumentação da estrutura .....	115
5.5 Esquema do sistema de monitoramento .....	120
5.6 Características principais do programa computacional de aquisição.....	123
5.6.1 Tratamento dos sinais .....	124
6 RESULTADOS DA ANÁLISE NUMÉRICA E DO MONITORAMENTO DA TORRE.....	126
6.1 Introdução .....	126
6.2 Implementação computacional – programas ESPACIAL e ITINVERSA .....	127

6.3 Comparação de resultados entre os programas desenvolvidos e o programa SAP 2000.....	129
6.3.1 Descrição da estrutura usada na comparação dos resultados da análise estática e os resultados de frequência natural em pórticos com barras simétricas .....	129
6.3.2 Comparação entre resultados para estrutura com barras de seção simétrica ...	131
6.3.3 Comparação entre resultados para estrutura com barras em que o centro de torção não coincide com o centróide da seção. ....	133
6.3.4 Avaliação da frequência fundamental do pórtico espacial considerando-se os eixos principais de inércia da seção assimétrica como eixos locais .....	135
6.4 Apresentação dos dados adquiridos pelo sistema de monitoramento .....	135
6.4.1 Arquivo com informação gravada a cada quinze minutos .....	135
6.4.1.1 Sinal sem filtrar .....	135
6.4.1.2 Sinal após a filtragem .....	137
6.5 Gráficos da aquisição de diferentes canais .....	139
Solicitação causada por fortes ventos sobre a torre .....	139
6.5.1.Gráfico do vento em função do tempo .....	139
6.5.2 Gráfico da temperatura em função do tempo.....	140
6.5.3 Gráfico dos extensômetros elétricos em função do tempo .....	141
6.6 Determinação das frequências naturais .....	142
6.7 Comparação dos resultados experimentais com as hipóteses de cálculo estático .....	145
6.8 Apresentação dos dados adquiridos pelo sistema, resumidos a cada quinze dias .....	147
6.9 Resultados da análise numérica .....	148
6.10 Modos normais da torre obtidos com o programa SAP .....	148
6.11 Comparação entre os resultados numéricos obtidos com o programa SAP e com o programa ESPACIAL .....	150
6.12 Comparação entre os resultados numéricos obtidos com as observações experimentais.....	151
7 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES.....	154
7.1 Conclusões.....	154
7.2 Sugestões para Trabalhos Futuros.....	156
REFERENCIAS .....	158



## Índice de Figuras

Figura 2-1 Viga simplesmente apoiada submetida a carregamentos estático y dinâmico (CLOUGH & PENZIEN, 1975) .....	16
Figura 2-2 Viga com os efeitos de inércia concentrados (CLOUGH & PENZIEN, 1975) .....	18
Figura 2-3 Padrões de deformação de uma viga (CLOGH & PENZIEN, 1975). .....	19
Figura 2-4 Discretização de uma viga em elementos (CLOUGH & PENZIEN 1975)..	21
Figura 2-5 Sistema dinâmico de um grau de liberdade (CLOUGH & PENZIEN, 1975) .....	22
Figura 2-6 Movimento harmônico simples (CLOUGH & PENZIEN, 1975).....	28
Figura 2-7 Resposta de vibração livre com amortecimento crítico (CLOGH & PENZIEN ,1975).....	30
Figura 2-8 Movimento sub-amortecido (CLOUGH & PENZIEN, 1975) .....	31
Figura 2-9 Representação de oscilações no plano complexo .....	33
Figura 2-10 Diagrama no plano complexo das forças atuantes no sistema em equilíbrio (CLOUGH & PENZIEN, 1975). .....	37
Figura 2-11 Variação do fator de amplificação dinâmica com o coeficiente $\beta$ para diferentes coeficientes de amortecimento (CLOUGH & PENZIEN 1975) .....	38
Figura 2-12 Resposta na ressonância ( $\beta=1$ ) para condições de velocidade e deslocamento iniciais iguais a zero (CLOUGH & PENZIEN 1975).....	39
Figura 2-13 Representação do espectro de amplitudes de funções periódicas (BYKHOVSKY, 1980). .....	41
Figura 2-14 Vibração de uma viga com massa e inércia variando ao longo do eixo pelo Método de Rayleigh (CLOUGH & PENZIEN 1975). .....	46
Figura 2-15 Discretização de viga (CLOUGH & PENZIEN 1975) .....	47
Figura 2-16 Superposição modal (CLOUGH & PENZIEN, 1975).....	54
Figura 3-1 Corpo sólido submetido a ações externas e configuração deformada compatível com os vínculos .....	59
Figura 3-2 Elemento de pórtico plano .....	67
Figura 3-3 Elemento de Pórtico Espacial e graus de liberdade no sistema local (x,y,z)	70
Figura 3-4 Seção de barra espacial com simetria respeito dos eixos y e z.....	71
Figura 3-5 Elemento de pórtico espacial no sistema de coordenadas locais e no .....	72

Figura 3-6 Elemento de pórtico espacial com (1) graus de liberdade por nó .....	80
Figura 4-1 Esquema de um extensômetro mecânico (DALLY & RILEY, 1978).....	89
Figura 4-2 Esquema de um extensômetro ótico (DALLY & RILEY, 1978).....	90
Figura 4-3 Sensibilidade à deformação (DALLY & RILEY, 1978) .....	93
Figura 4-4 Fio colado nas extremidades a um corpo sólido.....	94
Figura 4-5 Fio colado ao longo de todo seu comprimento a um corpo sólido.....	94
Figura 4-6 Detalhamento de extensômetros elétricos de resistência (VISAY – COMPANY , 2004) .....	96
Figura 4-7 Detalhamento de colocação de um extensômetro.....	97
Figura 4-8 Circuito de potenciômetro (DOVE & ADAMS, 1964) .....	101
Figura 4-9 Esquema do circuito de Wheatstone (DOVE & ADAMS, 1964). .....	102
Figura 4-10 Gráfico eficiência versus relação de resistências (DALLY & RILEY,1978) .....	105
Figura 4-11 Diferentes configurações do circuito ponte de Wheatstone.....	106
Figura 4-12 Componentes de uma instrumentação com P. de Wheatstone .....	106
Figura 4-13 Esquema mecânico de um transdutor de vibrações .....	108
Figura 5-1 Esquema geral da torre de comunicações .....	112
Figura 5-2 Vista lateral da torre.....	113
Figura 5-3 Visão da parte inferior da torre.....	114
Figura 5-4 Detalhe do encontro das barras.....	115
Figura 5-5 Instrumentação da zona superior .....	116
Figura 5-6 Detalhe do anemômetro    Figura 5-7 Detalhe do acelerômetro .....	116
Figura 5-8 Instrumentação da zona inferior .....	117
Figura 5-9 Detalhe em planta da instrumentação da zona inferior.....	117
Figura 5-10 Detalhe do sensor    Figura 5-11 Detalhe dos extensômetros .....	118
Figura 5-12 Detalhe da circuito usado na conexão dos extensômetros. ....	119
Figura 5-13 Detalhe dos extensômetros colados na base.....	119
Figura 5-14 Detalhe dos sensor de temperatura .....	120
Figura 5-15 Esquema do sistema de aquisição de dados .....	120
Figura 5-16 Circuitos da placa amplificadora do sinal de acelerômetros e da placa conversora analógico digital .....	121
Figura 5-17 Detalhe da placa conversora analógico digital .....	122

Figura 5-18 Detalhe dos circuitos de amplificação dos acelerômetros e extensômetros .....	122
Figura 6-1 Esquema do pórtico espacial usado .....	129
Figura 6-2 Seção em L usada no elemento de pórtico espacial.....	133
Figura 6-3 Seção simétrica de elemento de pórtico espacial com características geométricas iguais à seção L .....	134
Figura 6-4 Gráfico dos registros da velocidade do vento adquirida a cada quinze minutos .....	140
Figura 6-5 Gráfico do canal de temperatura.....	141
Figura 6-6 Registro a cada quinze minutos dos extensômetros segundo as diagonais principais da torre.....	142
Figura 6-7 Gráfico das frequências em função da velocidade média do vento.....	143
Figura 6-8 Frequências registradas em intervalos de quinze minutos .....	144
Figura 6-9 Comparação entre valor teórico (estático) e medidas experimentais para deformação na diagonal da torre.....	146
Figura 6-10 Primeiro modo de vibração (flexão) $f=1.54 Hz$ . (SAP) .....	149
Figura 6-11 Segundo modo de vibração (flexão) $f=1.73 Hz$ . (SAP) .....	149
Figura 6-12 Quinto modo de vibração (torção) $f= 3.23 Hz$ (SAP) .....	150

## Índice de Tabelas

Tabela 2-1 Grandezas usuais do movimento harmônico simples.....	28
Tabela 2-2 Termos da equação de movimento de um sistema submetido à excitação harmônica e sem amortecimento .....	34
Tabela 3-1 Constantes da matriz de massa distribuída para elemento de pórtico espacial .....	78
Tabela 4-1 Materiais de fios de extensômetros (DALLY & RILEY, 1978).....	93
Tabela 5-1 Informação resumida cada 15 dias .....	124
Tabela 6- 1 Coordenadas dos nós do pórtico espacial da Figura 6.1.....	130
Tabela 6-2 Propriedades do material do pórtico espacial da Figura 6.1 .....	130
Tabela 6-3 Propriedades da seção tubular do pórtico espacial da Figura 6.1 .....	130
Tabela 6-4 Comparação dos deslocamentos em estruturas com barras de seção simétrica .....	131
Tabela 6-5 Propriedades da seção em L do pórtico espacial da Figura 6.1 .....	134
Tabela 6-6 Dados adquiridos pelo sistema de monitoramento (sinal antes da filtragem) .....	135
Tabela 6-7 Dados adquiridos pelo sistema de monitoramento (sinal após a filtragem) .	137
Tabela 6-8 Detalhe da informação resumida em quinze dias.....	147
Tabela 6-9 Comparação das frequências obtidas com os modelos numéricos.....	151
Tabela 6-10 Valores da primeira frequência obtida experimentalmente e numericamente .....	152
Tabela 6-11 Comparação dos resultados do modo de torção.....	152

## RESUMO

Os sistemas de monitoramento contínuo em estruturas de utilidade pública, tais como pontes, torres de transmissão e de telecomunicação, têm sido cada vez mais utilizados tanto em países desenvolvidos como em desenvolvimento. Este monitoramento possibilita a detecção de possíveis falhas na estrutura e também conhecer suas características e seu comportamento estrutural quando submetida a ações dinâmicas e de ocorrência aleatória.

Neste trabalho são encontradas experimental e numericamente as frequências naturais e os modos de vibração associados de uma torre de comunicações situada na cidade de Montevidéu (Uruguai).

É feita uma revisão sobre a análise dinâmica de sistemas de um e vários graus de liberdade e também uma breve introdução à análise no domínio da frequência. A formulação do MEF é apresentada, tanto para análise estática como dinâmica, dando-se ênfase a elementos finitos de barra tridimensional. Foram desenvolvidos dois programas computacionais, um para formar a matriz de rigidez e de massa da estrutura do tipo pórtico espacial e outro para a avaliação das frequências naturais e dos modos de vibração associados.

Para obter a caracterização dinâmica através da análise experimental foi montado um sistema de monitoramento contínuo, o qual fornece a resposta da estrutura em pequenos intervalos de tempo. O sistema de aquisição fornece, além da resposta no domínio do tempo, a resposta no domínio da frequência dos diferentes sensores instalados sobre a estrutura.

Finalmente são comparados os resultados, em termos de frequências naturais, obtidos pela análise numérica com os fornecidos pelo sistema de monitoramento. Também foi feita uma comparação da resposta teórica da torre, considerando-se a ação do vento em forma estática equivalente, com a resposta medida pelo sistema em função da velocidade do vento. Ao final do trabalho são extraídas algumas conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

## **ABSTRACT**

The use of Health Monitoring Systems (HMS) to monitor important structures such as bridges, transmission and telecommunication towers is continuously growing in developed as well in developing countries. The HMS allows for flaw detection in the structure and also to know the structure characteristics and its structural behavior when submitted do dynamic actions of random nature.

In this work, the natural frequencies and associated vibration modes of a telecommunication tower located at Montevideo (Uruguay) are found, both numerically and experimentally, by means of an HMS.

To solve the dynamic equilibrium equations of the tower a numerical analysis based on the Finite Element Method (FEM) is applied. A review of dynamic analysis for one or more degrees of freedom systems and a brief introduction to frequency domain analysis are initially presented. The FEM formulation is applied to both static and dynamic analysis, given emphasis to spatial frames. Two computational programs were developed, one for the structure stiffness and mass matrix generation, and the other one to obtain the natural frequencies and the associated vibration modes of the structure.

In order to obtain the dynamics characteristics of the structure an HMS was implemented on the tower structure. This system captures the response of the tower in a given time period. Since the tower is mainly submitted to wind action, the monitoring system was designed to capture specific wind characteristics such as speed and angle incidence at the top of the tower. Besides the time-domain response, the monitoring system gives also the frequency- domain response from the different sensors installed on the tower.

Finally, a comparison between numerical and experimental results from the HMS, in terms of natural frequencies is performed. A comparison between the analytical behaviour of the tower, submitted to equivalent static loads due to wind action and the experimental behaviour measured by the HMS as a function of wind speed is also performed. Conclusions and suggestions for future works are presented at the end of this work.

## **1. Introdução**

### **1.1. Justificativa**

O projeto e a construção de grandes obras da Engenharia Civil, tais como pontes, viadutos, plataformas marítimas, e torres, têm se desenvolvido fortemente nos últimos anos em todo o mundo. Com relação ao projeto estrutural dessas obras, o desenvolvimento ocorreu principalmente devido aos avanços da informática e ferramentas computacionais, que contribuíram para as etapas de análise, dimensionamento e detalhamento, e também devido ao avanço na engenharia eletrônica, que contribuiu para a análise experimental (MC.CONELL & RILEY, 1993), através de instrumentação e aquisição de dados, possibilitando tanto a verificação das análises estruturais como o monitoramento das estruturas (EWINS, 1986).

As estruturas destas grandes obras são projetadas para funcionar em serviço durante um período de tempo considerável, sendo necessário grandes investimentos para a sua execução. A falha de uma estrutura, além de gerar, na maioria dos casos, importantes prejuízos econômicos, pode inclusive provocar verdadeiros desastres, incluindo danos humanos irreparáveis.

Assim, surge a necessidade de se ter informação atualizada do estado das estruturas, de maneira a possibilitar a detecção de possíveis falhas ou problemas de funcionamento no momento em que estas começam a se produzir. Além disto, existem estruturas mais antigas que passaram a ter novas funções, sendo submetidas a solicitações não-previstas em seus projetos estruturais originais. Torna-se necessário assim conhecer algumas de suas características, principalmente seu comportamento quando submetidas a ações dinâmicas e de ocorrência aleatória, para tentar prever o surgimento de patologias.

Atualmente existem diversas aplicações no campo experimental baseadas nas técnicas de monitoramento contínuo. A capacidade de se fazer medições sem a presença de operadores (KENCHINGTON, 1976) permite monitorar estruturas por períodos longos de tempo. Essa opção é fundamental quando os fenômenos a serem estudados

são de curta duração e a sua ocorrência não é previsível com antecipação, como é o caso de efeitos produzidos por fortes ventos.

A possibilidade de se determinar com precisão as características modais de uma estrutura permite, a partir da medição das modificações produzidas com essas características, avaliar a ocorrência de dano estrutural (LITEWKA, 1986) e (DI PASQUALE, 1990). A realização desses controles tem ocorrido cada vez mais em países desenvolvidos (ARMER, 1992). A existência de informação atualizada facilita detectar previamente as falhas, permitindo um melhor diagnóstico do problema.

O monitoramento automático e autônomo não é contrário ao do tipo clássico, mas sim complementar e, quando usados em forma conjunta, permitem um conhecimento mais aprofundado do comportamento estrutural.

## **1.2. Objetivos**

### **Objetivo Geral**

O objetivo principal desta dissertação é a obtenção das frequências naturais e dos modos de vibração associados de uma torre de comunicações, por meio de análise numérica e experimental. Os resultados experimentais serão obtidos através de um sistema de monitoramento contínuo montado sobre a estrutura.

Pretende-se também verificar o dimensionamento estático da torre realizado a partir de normas vigentes, comparando-se a deformação medida na base com o valor teórico obtido a partir da velocidade média do vento.

### **Objetivos Específicos**

Os objetivos da análise experimental na dissertação são:

- Apresentação da montagem do sistema de monitoramento contínuo da estrutura:
  - Sensores;
  - Calibragem dos sensores;



- Programas de aquisição (FORTRAN);
  - Programas de pós-processamento .
- 
- Avaliar os resultados da aquisição de dados.
  - Verificar as diferentes respostas da estrutura conforme a variação da velocidade do vento.

Os objetivos da análise numérica na dissertação são:

- Obter as (primeiras) frequências de vibração livre da estrutura pelo método de iteração inversa.
- Comparar os valores de frequência natural obtidos numericamente com os extraídos dos resultados experimentais.

### **1.3. Organização**

Esta dissertação de mestrado está estruturada em sete capítulos, dentre os quais este capítulo introdutório, no qual expõem-se os objetivos e a justificativa do trabalho.

No capítulo dois apresentam-se os fundamentos teóricos de dinâmica das estruturas, com a formulação das equações de movimento para sistemas de um e vários graus de liberdade.

O capítulo três apresenta o método dos elementos finitos que é utilizado para a discretização espacial da estrutura. No final deste capítulo é apresentado o método empregado para a determinação dos autovalores e autovetores que surgem da resolução das equações de movimento para o modelo estrutural.

No capítulo quatro é feita uma revisão sobre os fundamentos de análise experimental, princípios de extensometria e princípios de funcionamento dos acelerômetros. Como o detalhamento do sistema de monitoramento não é simplesmente a descrição física dos sensores, também são apresentados os programas de aquisição de dados e os de pós-processamento, utilizados neste trabalho.

No capítulo cinco é apresentado o caso de estudo, sendo detalhadas as características da torre e apresentada a discretização espacial proposta para a análise numérica. Também é apresentado o sistema de monitoramento montado com um detalhamento da instrumentação que serve de base para a obtenção dos resultados experimentais.

No capítulo seis são mostrados os resultados numéricos, os resultados experimentais e a comparação entre eles.

Finalmente, no capítulo sete, são extraídas as conclusões do trabalho e algumas sugestões para trabalhos futuros.

## 2 DINÂMICA DAS ESTRUTURAS

### 2.1 Introdução

A dinâmica das estruturas tem-se convertido em objeto de numerosos estudos teóricos e experimentais nos últimos tempos na área da engenharia civil. Inicialmente seu desenvolvimento foi gerado por outras áreas da engenharia, podendo-se citar as áreas de engenharia mecânica e de aeronáutica, como as que mais estudavam esses fenômenos.

Com o crescimento do potencial de cálculo estrutural devido ao grande avanço dos computadores digitais, os métodos simplificados de conversão de efeitos dinâmicos em efeitos estáticos equivalentes têm dado lugar aos métodos de resolução numérica das equações diferenciais que governam a resposta dinâmica da estrutura submetida a uma excitação variável no tempo.

Assim como os métodos de resolução numérica têm logrado um crescimento considerável, também houve uma grande melhoria nas técnicas experimentais e nos instrumentos de medição, o que forneceu poderosas ferramentas no campo experimental e registraram um forte avanço nessa área de conhecimento.

Esses avanços, em forma conjunta, têm possibilitado o estudo dos fenômenos dinâmicos em estruturas que tanto preocupam aos engenheiros, tais como os efeitos de terremotos, ventos e outras solicitações aleatórias, que são excitações dinâmicas. Estes efeitos podem ser atualmente estudados e modelados de uma forma mais próxima à sua natureza.

Em alguns tipos de estruturas, tais como pontes e torres de transmissão, ocorrem solicitações de curta duração e o tempo de ocorrência em geral é incerto. Os aparelhos de medição contínua têm possibilitado a instrumentação destas estruturas para captar tanto a solicitação como a resposta dinâmica da estrutura a esta solicitação. Este tipo de instrumentação é conhecido na literatura inglesa como “motion measurement”.

Os fenômenos dinâmicos podem ser avaliados em forma mecânica (relógios), óptica (câmaras de alta velocidade) e com transdutores elétricos.

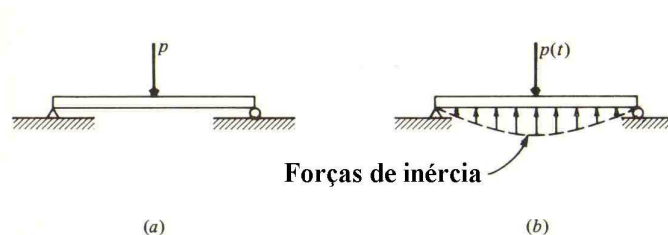
As principais vantagens da aquisição eletrônica feita com transdutores elétricos, além da versatilidade dos equipamentos, é a grande quantidade de dados que podem ser recolhidos em um tempo curto. Embora os dados sejam recolhidos em forma discreta, o intervalo de aquisição pode ser pequeno, obtendo-se assim uma boa aproximação do comportamento contínuo da variável estudada.

O trabalho desenvolvido nesta dissertação busca obter uma verificação das hipóteses utilizadas na resolução teórica de uma estrutura de barras, com as medições experimentais. Apresenta-se a seguir uma síntese teórica dos fundamentos da dinâmica das estruturas.

## 2.2 Revisão Geral

A análise dinâmica apresenta diferenças em relação à análise estática de estruturas; a variação no tempo das solicitações e das respostas fazem com que a solução, considerando os efeitos dinâmicos, seja muito mais complexa do que a solução dos problemas estáticos.

Seja uma viga simplesmente apoiada conforme mostra a Figura 2.1. O caso (a) é o modelo estático onde a carga  $P$  não apresenta variações ao longo do tempo, assim os esforços internos na viga são também constantes no tempo e somente equilibram o carregamento externo aplicado.



**Figura 2-1 Viga simplesmente apoiada submetida a carregamentos estático y dinâmico (CLOUGH & PENZIEN, 1975)**

No caso (b) considera-se que a carga  $P$  é função do tempo, sendo  $P=P(t)$ , portanto os deslocamentos resultantes na viga também irão variar em função do tempo.

Conforme variam os deslocamentos no tempo, as acelerações associadas provocam esforços de inércia que devem ser equilibrados junto ao carregamento externo; assim os esforços internos, que também são função do tempo, devem equilibrar os esforços externos e as forças de inércia (CLOUGH & PENZIEN, 1975).

As forças de inércia associadas às acelerações são a característica principal nos problemas de dinâmica de estruturas, se seus efeitos são desprezíveis, a análise estática é a ferramenta adequada para estudar o problema, caso contrário é necessário um enfoque que contemple os efeitos dinâmicos na estrutura.

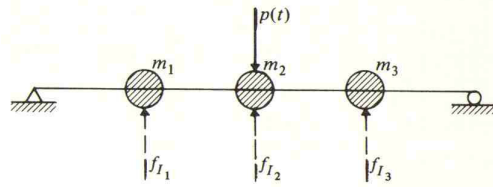
### **2.2.1 Discretização**

Para analisar casos como o apresentado na Figura 2.1, é necessário estabelecer o modelo físico a se adotar para estudar a solução do problema.

Considerando a viga com sua massa continuamente distribuída, a formulação do problema envolve um sistema de equações em derivadas parciais que fornece o campo de deslocamentos e suas derivadas em todos os pontos do sistema, embora nem sempre a solução analítica exata do problema seja possível. É claro que a solução de problemas simples resulta muito complexa quando se opta por esse caminho, sendo assim é mais conveniente simplificar o problema discretizando a estrutura e concentrando os efeitos da inércia em pontos relevantes da mesma.

Define-se o número de graus de liberdade  $N$  como o número de coordenadas independentes suficientes para descrever a configuração do sistema.

Na Figura 2.2 apresenta-se uma alternativa de discretização da viga da Figura 2.1, para considerar os efeitos de inércia.



**Figura 2-2 Viga com os efeitos de inércia concentrados (CLOUGH & PENZIEN, 1975)**

Neste exemplo, considerando-se como coordenada independente o deslocamento de translação vertical de cada massa, o número de graus de liberdade do sistema é 3. O número de graus de liberdade de um sistema pode ser calculado através da equação :

$$N = \text{No. de pontos} \times \text{No. de graus de liberdade de cada ponto} \quad (2.1)$$

Se em cada ponto considera-se o deslocamento vertical e a rotação no plano, o número de graus de liberdade do sistema é 6, e assim até um máximo de 6 graus de liberdade por ponto sendo três deslocamentos de translação e três de rotação. Ao se transformar um sistema contínuo em um sistema discreto, as equações de equilíbrio que regem o problema são transformadas em um sistema de equações diferenciais ordinárias.

Por outro lado, um sistema contínuo, em que a massa é considerada como uma função contínua, tem um número infinito de graus de liberdade e a formulação em equações de derivadas parciais é a alternativa para resolver analiticamente o problema .

Nem sempre a discretização é o caminho adequado para o tratamento de um problema, embora seja uma ferramenta útil em muitos casos. Existe uma outra forma de limitar o número de graus de liberdade do problema a considerar, conforme descrito no que se segue.

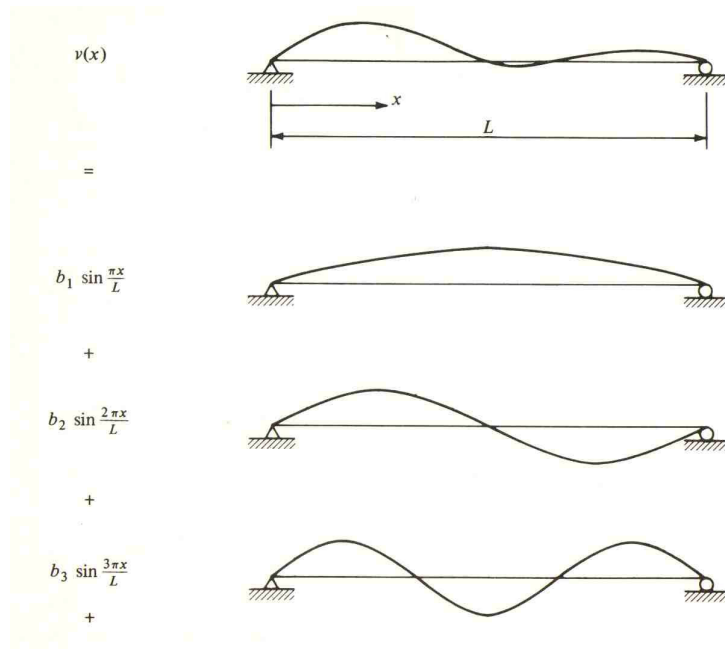
A hipótese que se faz em casos de vigas é que a função da deformada é constituída por uma soma de diferentes padrões de deformações afetados por um coeficiente que independe do tempo (Ver Fig 2.3).

Considerando os padrões de deformação como funções trigonométricas, onde  $b_n$  são coeficientes que independem de  $x$ , a expressão matemática que fornece a deformada da viga corresponde à equação :

$$v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad (2.2)$$

Qualquer função adotada para a deformada compatível com os vínculos pode ser aproximada pela série trigonométrica da eq. 2.2.

Essa formulação pode ser obtida do teorema de Fourier, considerando a função da deformada como uma função ímpar de período  $2L$ . É claro que a deformada cumpre com as hipóteses do teorema de Fourier (GUEDES DE FIGUEIREDO, 1977).



**Figura 2-3 Padrões de deformação de uma viga (CLOGH & PENZIEN, 1975).**

Os coeficientes que afetam as funções bases ( $b_n$ ) são chamados de coeficientes de amplitude e a igualdade na eq.2.2 é atendida para infinitas amplitudes. Considerando um número finito de amplitudes limita-se o problema. O número de amplitudes depende da acurácia procurada.

Embora a escolha das funções trigonométricas seja arbitrária, elas constituem uma alternativa válida para expressar a deformação de uma barra. A idéia pode ser generalizada considerando um conjunto de funções-base compatíveis com os vínculos, onde a expressão para a deformada unidimensional de uma estrutura é expressa segundo a equação:

$$v(x) = \sum_n Z_n \cdot \psi_n(x) \quad (2.3)$$

onde  $Z_n$  são coeficientes que independem de  $x$ , denominados de coordenadas generalizadas, que dependem da função que procura-se aproximar.

O número de coordenadas generalizadas consideradas é o número de graus de liberdade com que se procura modelar o problema. As funções-base devem satisfazer a equação diferencial que governa a deformada da viga, assim como uma combinação linear de soluções também é solução da equação da viga. (GUEDES DE FIGUEIREDO 1977)

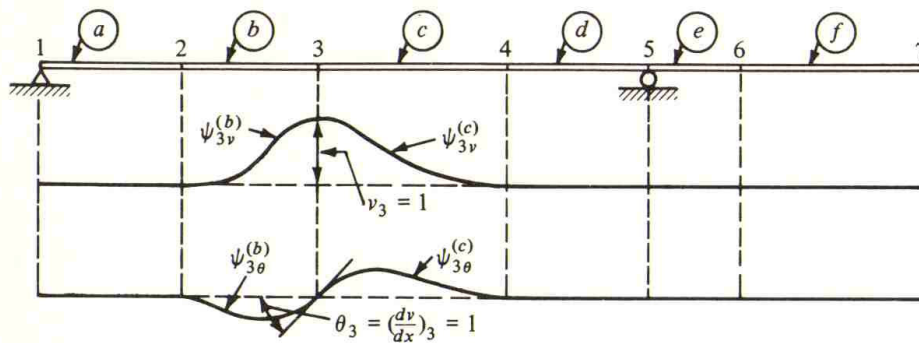
Outro caminho, que é muito usado e útil na formulação de problemas de dinâmica de estruturas, é a técnica dos elementos finitos. A idéia central é expressar os deslocamentos de qualquer estrutura em termos dos deslocamentos de pontos da estrutura previamente definidos. A técnica apresenta características das duas idéias anteriores, a concentração das massas num número finito de pontos e a superposição de soluções.

A análise de uma estrutura através do método dos elementos finitos é muito utilizada, já tendo sido desenvolvidos diversos programas computacionais para resolver



estruturas de diferentes formas, tais como vigas, cascas, estruturas tridimensionais, entre outras.

Na Figura 2.4 mostra-se uma possível discretização de uma viga em 6 elementos (a...f), ligados por pontos nodais, ou nós, na interseção (pontos 1 a 7). A resposta é fornecida nestes pontos nodais, sendo que o deslocamento dos pontos intermediários podem ser encontrados usando-se funções de interpolação adequadas.



**Figura 2-4 Discretização de uma viga em elementos (CLOUGH & PENZIEN 1975)**

A resposta da estrutura será dada em termos da resposta nos pontos nodais da discretização. Assim torna-se possível formular as equações de movimento de uma estrutura em função dos deslocamentos e suas derivadas dos nós resultantes da discretização.

O método dos elementos finitos é o procedimento mais eficiente atualmente para expressar os deslocamentos de uma estrutura arbitrária, com diferentes configurações e condições de apoio, submetida a carregamentos quaisquer.

## 2.2.2 Formulação das equações de movimento

Na maioria dos casos a análise dinâmica envolve um número finito de graus de liberdade os quais fornecem uma boa acurácia do problema. É assim que a formulação se reduz a encontrar a resposta no tempo destes graus de liberdade escolhidos.

As expressões matemáticas que determinam os deslocamentos dinâmicos são chamadas de equações de movimento da estrutura, e a solução destas equações fornece os deslocamentos em função do tempo.

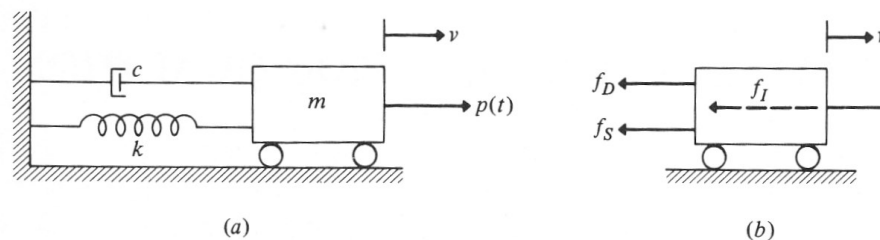
Existem diversos caminhos para formular as equações de movimento; as formulações utilizadas são: aplicando-se diretamente o equilíbrio de forças e o Princípio de d'Alembert; a partir do Princípio dos Trabalhos Virtuais ou então a partir do Princípio de Hamilton (em termos de energia). Embora sejam enfoques diferentes, a formulação resultante é a mesma e a resolução das equações de movimento do sistema fornece a solução procurada.

## 2.3 Sistemas com um grau de liberdade

### 2.3.1 Componentes básicos num sistema dinâmico

As propriedades físicas essenciais de qualquer sistema elástico linear submetido a carregamentos dinâmicos incluem a massa, a rigidez, os mecanismos de perda de energia (amortecimentos) e a excitação externa.

Um esquema de um sistema dinâmico é apresentado na Figura 2.5, onde a massa é concentrada no corpo rígido, a rigidez é dada pela mola vinculada ao corpo, e o mecanismo de perda de energia é dado pelo amortecedor de constante  $C$ ; a excitação externa é a força aplicada sobre o corpo,  $p(t)$ .



**Figura 2-5 Sistema dinâmico de um grau de liberdade (CLOUGH & PENZIEN, 1975)**

### 2.3.2 Formulação das equações de movimento num sistema de um grau de liberdade

Existem diferentes caminhos para formular as equações de movimento do sistema, sendo um caminho possível o de equilíbrio direto ou através do Princípio de d'Alembert, em que leva-se em conta os efeitos inerciais no equilíbrio do sistema.

Seja o esquema de corpo livre (rígido) em estudo mostrado no caso (b) da Figura 2.5; as forças atuantes podem ser classificadas como:

- $f_D$  força de amortecimento
- $f_S$  força de rigidez
- $f_I$  força de inércia
- $p(t)$  força externa

Do equilíbrio das forças surge a equação :

$$f_I + f_D + f_S = p(t) \quad (2.4)$$

As forças do lado esquerdo da equação 2.4 são contrárias à força da excitação externa. Seja  $v(t)$  a coordenada generalizada de deslocamento que define o estado cinemático do corpo, as expressões para as forças resultam em:

$$\begin{aligned} f_S &= k \cdot v \\ f_I &= m \cdot \ddot{v} \\ f_D &= c \cdot \dot{v} \end{aligned} \quad (2.5)$$

em que  $v = v(t)$ ,  $\dot{v} = \dot{v}(t)$  e  $\ddot{v} = \ddot{v}(t)$ .

A força restauradora, elástica, é proporcional ao deslocamento do corpo admitindo-se que seu material é elástico-linear; a força de inércia é proporcional à aceleração do corpo, de acordo com a segunda lei de Newton ou o Princípio de d'Alembert, e a força de amortecimento é proporcional à velocidade da massa, admitindo-se um amortecimento do tipo viscoso.

Substituindo-se na equação 2.4 as forças pelas expressões (2.5) acima, resulta na equação de movimento do sistema:

$$m \cdot \ddot{v} + c \cdot \dot{v} + k \cdot v = p(t) \quad (2.6)$$

A equação 2.6 também pode ser encontrada aplicando-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais ou o Princípio de Hamilton.

A análise proposta por Hamilton, que utiliza uma formulação energética do sistema, será aplicada para estruturas nas quais se considera a massa distribuída, conforme descrito no que se segue.

Sejam as grandezas:

- T** Energia cinética do corpo
- V** Energia potencial do sistema onde estão incluídas a energia de deformação ou a função potencial de qualquer força conservativa.
- $W_{nc}$**  Trabalho realizado por forças não conservativas atuando no sistema, incluídas as forças de amortecimento e qualquer força não conservativa externa.
- $\delta$**  Operador variacional

O Princípio de Hamilton expressa que a variação da energia cinética juntamente com a energia potencial é igual a menos a variação do trabalho das forças não conservativas integradas em um intervalo de tempo.

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - V) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0 \quad (2.7)$$

No caso do sistema esquematizado na Figura 2.5, as grandezas envolvidas no funcional de Hamilton resultam nas seguintes equações:

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{v}^2 \\
 V &= \frac{1}{2} \cdot k \cdot v^2 \\
 \delta W_{nc} &= p(t) \cdot \delta v - c\dot{v} \cdot \delta v
 \end{aligned}
 \tag{2.8}$$

em que  $v = v(t)$  e  $\dot{v} = \dot{v}(t)$

Aplicando-se a primeira variação às grandezas  $T$  e  $V$ , resultam as expressões:

$$\begin{aligned}
 \delta T &= \delta\left(\frac{1}{2}m\dot{v}^2\right) = \frac{m}{2} \delta(\dot{v}^2) = \frac{m}{2} \cdot 2 \cdot \dot{v} \cdot \delta(\dot{v}) \\
 \delta V &= \delta\left(\frac{1}{2}kv^2\right) = kv \cdot \delta(v)
 \end{aligned}
 \tag{2.9}$$

Substituindo-se as expressões encontradas na equação 2.7, obtém-se a seguinte equação:

$$\int_{t_1}^{t_2} (m\dot{v}\delta\dot{v} - c\dot{v}\delta v - kv\delta v + p(t)\delta v) dt = 0
 \tag{2.10}$$

Integrando-se por partes o primeiro termo da equação acima, chega-se à equação:

$$\int_{t_1}^{t_2} m\dot{v}\delta\dot{v} dt = m\dot{v}\delta v \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m\ddot{v}\delta v dt
 \tag{2.11}$$

Admitindo-se que os deslocamentos em  $t_1$  e  $t_2$  são valores prescritos, tem-se que  $\delta v(t_1)=0$  e  $\delta v(t_2)=0$ . Portanto resta apenas o segundo termo do lado direito da eq. 2.11, o qual substituído na equação 2.10 fornece:

$$\int_{t_1}^{t_2} (-m\ddot{v} - c\dot{v} - kv + p(t)) \delta v \cdot dt = 0 \quad (2.12)$$

Como a variação  $\delta v$  é arbitrária dentro do intervalo de tempo, de  $t_1$  a  $t_2$ , para que a equação 2.12 seja atendida a expressão entre parênteses deve se anular, chegando-se assim à mesma equação diferencial de equilíbrio obtida anteriormente (eq. 2.6).

### 2.3.3. Resposta dos sistemas de um grau de liberdade submetidos à vibração livre

A equação 2.6 é a expressão que governa o estado de movimento de um sistema de um grau de liberdade, seja de um corpo rígido ou para cada coordenada generalizada de um sistema de massa distribuída, que foi desacoplado em coordenadas generalizadas.

As vibrações livres são aquelas que se produzem no sistema quando não há força externa aplicada ao sistema que varia no tempo, apenas condições iniciais impostas. A equação geral para um sistema de um grau de liberdade em vibração livre é dada por:

$$m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + kv(t) = 0 \quad (2.13)$$

Esta é uma equação diferencial de segunda ordem, cuja solução pode ser expressa por:

$$v(t) = Ge^{st} \quad (2.14)$$

onde  $G$  e  $s$  são as constantes de integração da equação diferencial. Estas constantes têm significado físico, sendo que no tempo inicial (zero)  $G$  representa a posição nesse instante e  $s$  representa o quociente entre a velocidade inicial e a constante  $G$ .

Substituindo-se esta solução na equação diferencial 2.13 e fazendo-se  $k/m = \omega^2$ , resulta em:

$$s^2 + \frac{c}{m}s + \omega^2 = 0 \quad (2.15)$$

Apresentam-se a seguir os valores de  $s$ , solução da equação acima, para sistemas sem e com amortecimento.

### 2.3.3.1. Vibrações livres sem amortecimento

Nos sistemas sem amortecimento considera-se o coeficiente de amortecimento  $c$  igual a zero, então a solução da equação 2.15 fornece:

$$s = \pm(i\omega) \quad (2.16)$$

Substituindo-se a expressão de  $s$  na eq. (2.14), pode-se escrever a resposta do sistema da seguinte forma:

$$v(t) = G_1 e^{i\omega t} + G_2 e^{-i\omega t} \quad (2.17)$$

Assim o deslocamento em função do tempo fica definido a menos de duas constantes de integração,  $G_1$  e  $G_2$ . Introduzindo-se a notação de Euler, a equação de movimento do sistema sem amortecimento em vibração livre fica sendo:

$$v(t) = A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \text{sen}(\omega t) \quad (2.18)$$

onde as constantes  $A$  e  $B$  ficam determinadas aplicando-se as condições iniciais do movimento do corpo e o termo  $\omega$  é chamado de frequência angular.

Conhecendo-se por exemplo o deslocamento inicial ( $v_o$ ) e a velocidade inicial ( $\dot{v}_o$ ), no tempo zero, a equação de movimento com as constantes que verificam as condições iniciais resulta em:

$$v(t) = \frac{\dot{v}_o}{\omega} \text{sen}(\omega t) + v_o \cos(\omega t) \quad (2.19)$$

A equação de movimento pode ser apresentada em termos da amplitude ( $\rho$ ) e do ângulo de fase da oscilação ( $\theta$ ) segundo a equação abaixo:

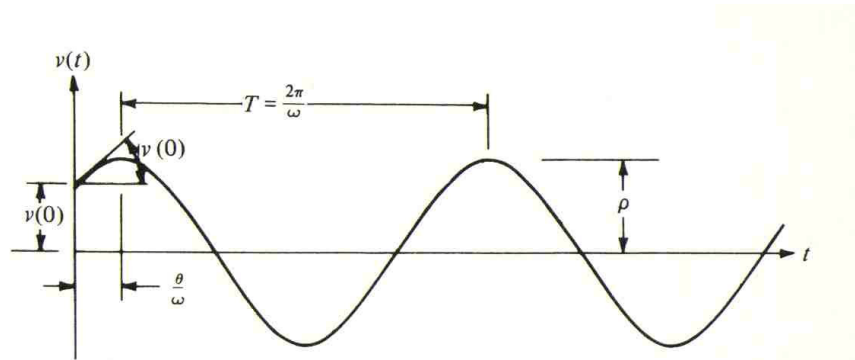
$$v(t) = \rho \cdot \cos(\omega t - \theta) \quad (2.20)$$

Na Tabela 2.1 apresenta-se um resumo das variáveis mais usadas no movimento harmônico e suas formulações:

**Tabela 2-1 Grandezas usuais do movimento harmônico simples**

$\omega$	Frequência angular
$f = \omega / 2\pi$	Frequência
$T = 1 / f$	Período da oscilação
$\rho = \sqrt{v_0^2 + \left(\frac{\dot{v}_0}{\omega}\right)^2}$	Amplitude da oscilação
$\theta = \arctg\left(\frac{\dot{v}_0}{\omega v_0}\right)$	Ângulo de fase da oscilação

O gráfico do movimento harmônico em função do tempo está mostrado na Figura 2.6.



**Figura 2-6 Movimento harmônico simples (CLOUGH & PENZIEN, 1975)**

### 2.3.3.2. Vibrações livres com amortecimento

Quando o coeficiente de amortecimento  $c$  não for nulo, a solução da eq. 2.15 é dada por:



$$s = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega^2} \quad (2.21)$$

As equações de movimento variam de acordo com o sinal da expressão dentro do radical ( $\Delta$ ): pode ser zero, positivo ou negativo. As soluções da equação de movimento são de três tipos, dependendo do sinal do radical, conforme descrito no que se segue.

### 2.3.3.3. Vibrações livres com amortecimento crítico

O caso de amortecimento crítico ocorre para  $\Delta=0$ ; nessa situação o valor do amortecimento é chamado de amortecimento crítico,  $c_c$ , definido pela expressão:

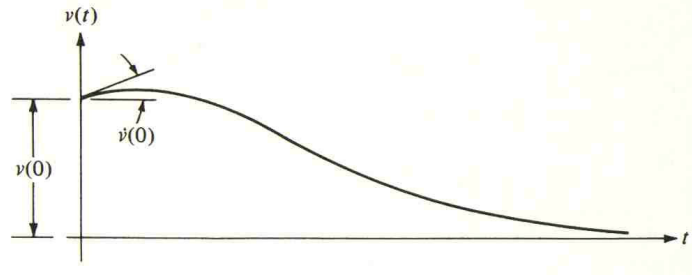
$$c_c = 2m\omega \quad (2.22)$$

Substituindo-se na equação 2.21 o valor de  $c_c$ , e igualando o deslocamento e a velocidade aos valores iniciais no tempo zero a  $v_0$  e  $\dot{v}_0$ , respectivamente, chega-se à solução da equação de movimento:

$$v(t) = [v_0(1 + \omega \cdot t) + \dot{v}_0 t] e^{-\omega t} \quad (2.23)$$

O deslocamento  $v$  não apresenta assim uma componente oscilatória, podendo-se definir o coeficiente de amortecimento crítico como o menor valor de  $c$  para o qual a resposta não apresente componente oscilatória.

O gráfico da equação de movimento está mostrado na Figura 2.7.



**Figura 2-7 Resposta de vibração livre com amortecimento crítico (CLOGH & PENZIEN ,1975)**

### 2.3.3.4. Vibrações livres sub-amortecidas

Define-se inicialmente o coeficiente de amortecimento  $\xi$ :

$$\xi = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega} \quad (2.24)$$

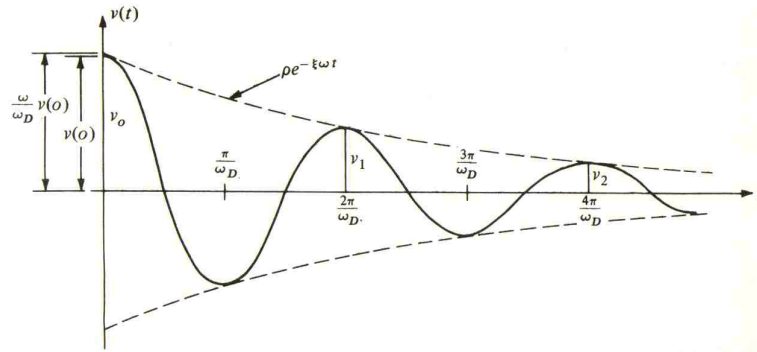
e também o conceito de frequência angular amortecida:

$$\omega_d = \omega\sqrt{1-\xi^2} \quad (2.25)$$

Se o amortecimento é menor do que o crítico, a solução da equação de movimento, introduzindo-se os termos (2.24) e (2.25), e com as constantes de integração definidas em função do deslocamento e da velocidade inicial, fica expressa por:

$$v(t) = e^{-\xi\omega t} \left[ \frac{\dot{v}_0 + v_0\xi\omega}{\omega_d} \text{sen}\omega_d t + v_0 \cos \omega_d t \right] \text{ para } c < 2m\omega \quad (2.26)$$

O gráfico da equação de movimento em função do tempo está mostrado na Figura 2.8:



**Figura 2-8 Movimento sub-amortecido (CLOUGH & PENZIEN, 1975)**

Observa-se o fato de que o movimento sub-amortecido apresenta oscilações ao redor da posição de equilíbrio, com uma frequência de oscilação  $\omega_D$ .

A equação de movimento, expressa em termos de amplitude de onda e do ângulo de fase, fica sendo:

$$v(t) = \rho \cdot e^{-\xi\omega t} \cos(\omega_D t - \theta) \quad (2.27)$$

Onde  $\rho$  e  $\theta$  são definidos por:

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{\dot{v}_0 + v_0 \xi \omega}{\omega_D}\right)^2 + v_0^2} \quad (2.28)$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{\dot{v}_0 + v_0 \xi \omega}{\omega_D v_0}\right) \quad (2.29)$$

### 2.3.3.5. Vibrações livres super amortecidas

Quando o radical ( $\Delta$ ) é positivo, o movimento é chamado de vibração livre super amortecida e a equação de movimento é uma combinação linear das funções trigonométricas hiperbólicas. Geralmente na área da dinâmica de estruturas não ocorre este tipo de situação.

### 2.3.3.6 Adição de vibrações colineares

Antes de se prosseguir no estudo das respostas dinâmicas de sistemas de um grau de liberdade, aborda-se um tópico relevante relacionado à soma das vibrações colineares. Como é considerado somente um grau de liberdade, a resposta da soma vai ser também a representação de uma função que corresponde a um grau de liberdade, embora apresente características de amplitude e de fase diferenciadas de cada uma das componentes do movimento.

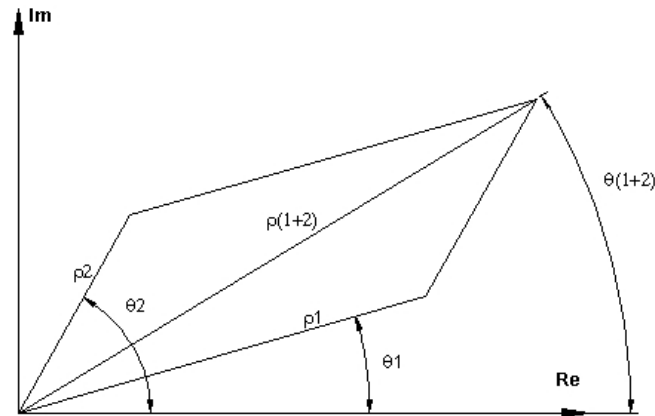
Um movimento harmônico simples pode ser representado a partir da eq. 2.20, onde a amplitude de onda e o ângulo de fase são os parâmetros principais da equação.

Pode-se utilizar também a representação das vibrações no plano complexo, observando-se que a equação de movimento pode ser decomposta numa parte real, com módulo igual à amplitude da onda ( $\rho$ ), e numa parte imaginária, com ângulo igual a  $(\omega t - \theta)$ .

A representação no plano complexo é usualmente denominada de diagrama de Armer. Considerando-se duas vibrações colineares:

$$\begin{aligned} v_1(t) &= a_1 \cos(\omega_1 t - \theta_1) \\ e \\ v_2(t) &= a_2 \cos(\omega_2 t - \theta_2) \end{aligned} \tag{2.30}$$

pode-se visualizar a sua representação gráfica vetorial no plano complexo, bem como a soma das duas vibrações na figura 2.9, onde é apresentada a soma vetorial de vibrações colineares.



**Figura 2-9 Representação de oscilações no plano complexo**

A superposição de efeitos deve levar em conta o caráter vetorial da grandeza, assim, a amplitude resultante e o ângulo que o vetor forma com o eixo real da função que resulta na soma das vibrações são:

$$a = \sqrt{\left(\sum a_i \cos(\theta_i)\right)^2 + \left(\sum a_i \text{sen}(\theta_i)\right)^2} \quad (2.31)$$

$$\theta = \text{arctg} \left( \frac{\sum a_i \text{sen}(\theta_i)}{\sum a_i \cos(\theta_i)} \right) \quad (2.32)$$

Observa-se que a amplitude e a fase da soma das vibrações não necessariamente apresentam valores iguais aos da soma das vibrações individuais.

### 2.3.4 Vibrações forçadas para sistemas de 1 grau de liberdade (GL)

Seja o sistema de 1 GL da Figura 2.5, submetido a uma excitação externa  $p(t)$ , do tipo harmônica. A equação diferencial que fornece o equilíbrio dinâmico é:

$$m \cdot \ddot{v}(t) + c \cdot \dot{v}(t) + k \cdot v(t) = p_0 \cdot \text{sen}(\omega t) \quad (2.33)$$

Considera-se inicialmente o sistema sem amortecimento; a equação (2.33) fica então:

$$m \cdot \ddot{v}(t) + k \cdot v(t) = p_o \cdot \text{sen}(\varpi t) \quad (2.34)$$

A solução da equação diferencial (2.34) é encontrada a partir da superposição da solução da equação homogênea (ver eq. 2.18) com uma solução particular, resultando em:

$$v(t) = v_c(t) + v_p(t) = A \text{sen}(\omega t) + B \cos(\omega t) + \frac{p_o}{k} \frac{1}{1 - \beta^2} \text{sen}(\varpi t) \quad (2.35)$$

onde  $\beta$  é dada pela expressão:

$$\beta = \frac{\varpi}{\omega} \quad (2.36)$$

O quociente  $\beta$  é a relação entre as frequências de excitação e a de vibração livre sem amortecimento. Admitindo-se que no tempo inicial o deslocamento e a velocidade também são iguais a zero, a equação de movimento de um sistema submetido a uma força do tipo harmônico e sem amortecimento é expressa por:

$$v(t) = \frac{p_o}{k} \frac{1}{1 - \beta^2} (\text{sen}(\varpi t) - \beta \cdot \text{sen}(\omega t)) \quad (2.37)$$

Na Tabela 2.2 apresentam-se os termos que aparecem na equação 2.37 agrupados e com uma interpretação do seu significado físico.

**Tabela 2-2 Termos da equação de movimento de um sistema submetido à excitação harmônica e sem amortecimento**

$\frac{p_o}{k} = v_{st}$	Deslocamento estático, correspondente ao deslocamento produzido por um carregamento de magnitude $p_o$ estáticamente aplicado ao sistema.
$FA = \frac{1}{1 - \beta^2}$	Fator de amplificação que representa a amplificação dinâmica induzida pelos efeitos oscilatórios da excitação.
$\text{sen}(\varpi \cdot t)$	Componente da resposta na frequência da carga aplicada.
$\beta \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)$	Componente da resposta na frequência de vibração natural

Nos casos usuais, o amortecimento causa o decaimento da componente da resposta na frequência natural conforme avança o tempo, sendo este o motivo para que se denomine esta parcela de resposta transitória.

### 2.3.5 Coeficiente de resposta

Uma forma de se avaliar a influência da característica dinâmica da carga sobre um sistema é usar o chamado coeficiente de resposta, definido na equação 2.38. Esse coeficiente mostra a relação entre o deslocamento sofrido pelo sistema sob ação dinâmica e o deslocamento que ocorre no caso de que o carregamento seja aplicado de forma estática.

$$R(t) = \frac{v(t)}{v_{st}} = \frac{v(t)}{p_o / k} = \frac{1}{1 - \beta^2} (\text{sen}(\varpi t) - \beta \cdot \text{sen}(\omega t)) \quad (2.38)$$

### 2.3.6 Sistema de 1 GL com amortecimento submetido a carregamento harmônico

Fazendo-se  $c/m = 2\xi\omega$  e  $k/m = \omega^2$ , pode-se escrever a equação de um sistema com amortecimento viscoso, submetido a uma excitação harmônica:

$$\ddot{v}(t) + 2 \cdot \xi \cdot \omega \cdot \dot{v}(t) + \omega^2 \cdot v(t) = \frac{p_o}{m} \text{sen}(\varpi t) \quad (2.39)$$

A solução homogênea da equação diferencial 2.39 é a equação da oscilação livre amortecida obtida anteriormente (eq. 2.26), a qual somada com a solução particular fornece a resposta do sistema amortecido submetido ao carregamento harmônico.

As constantes de integração da equação são facilmente encontradas com as condições iniciais do movimento, assim a equação da resposta total do sistema amortecido submetido ao carregamento harmônico fica sendo:

$$v(t) = e^{-\xi\omega t} (A \cdot \text{sen}(\omega_D t) + B \cdot \text{cos}(\omega_D t)) + \frac{p_o}{k} \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} [(1-\beta^2)\text{sen}(\omega t) - 2\xi\beta \cdot \text{cos}(\omega t)] \quad (2.40)$$

O primeiro termo corresponde à resposta transitória e o segundo é a resposta originada pelo carregamento harmônico.

O amortecimento afeta o primeiro termo ao longo do tempo, fazendo com que este tenda a zero. O segundo termo corresponde à frequência de excitação, embora não esteja em fase com ela; a representação no plano complexo da resposta associada à excitação e as forças atuantes no sistema estão mostrados nas Figuras 2.10 e 2.11.

O vetor resultante tem como módulo ( $\rho$ ) a amplitude do movimento (Fig.2.10), sendo expresso pela equação abaixo:

$$\rho = \frac{p_o}{k} \sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \quad (2.41)$$

e o ângulo de fase fica definido pela expressão:

$$\theta = \text{arctg}\left(\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}\right) \quad (2.42)$$

Assim a resposta do sistema submetido a carregamento harmônico pode ser expressa em termos da amplitude e do ângulo de fase:

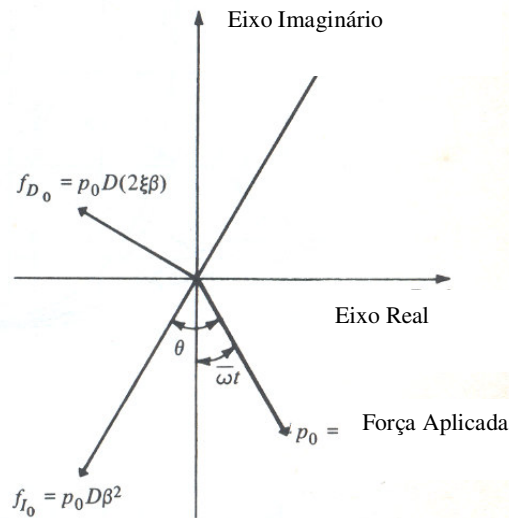
$$v(t) = \rho \cdot \text{sen}(\omega t - \theta) \quad (2.43)$$

Define-se agora o fator de amplificação dinâmica ( $D$ ) que mostra o efeito dinâmico sobre o deslocamento estático que seria produzido aplicando-se estaticamente uma força de magnitude  $p_o$ :



$$D \equiv \frac{\rho}{P_{olk}} = \sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\beta \cdot \xi)^2} \quad (2.44)$$

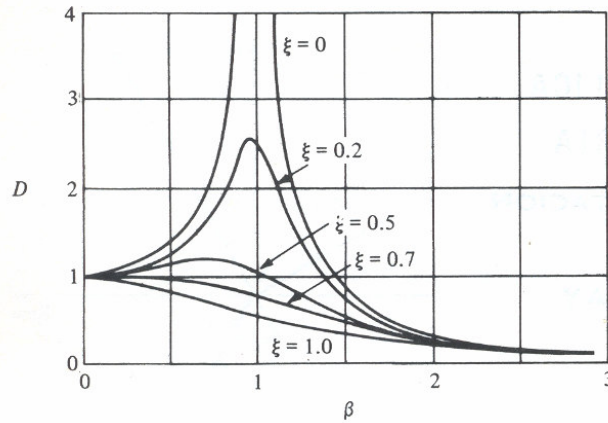
Na Figura 2.11 o equilíbrio de forças é apresentado em termos deste coeficiente de amplificação,  $D$ . É importante ressaltar o fato que as forças de amortecimento e as forças de inércia atuam em direção contrária à velocidade e à aceleração. Finalmente a resultante de forças é zero, de forma a garantir o equilíbrio dinâmico do sistema.



**Figura 2-10 Diagrama no plano complexo das forças atuantes no sistema em equilíbrio (CLOUGH & PENZIEN, 1975).**

Observa-se que o fator de amplificação dinâmica  $D$  é função da frequência de excitação. Quando a frequência da excitação tende para a frequência natural, o fator  $D$  apresenta um máximo, sendo infinito para um coeficiente de amortecimento nulo e frequências de excitação e natural iguais.

Este comportamento está ilustrado na Figura 2.12, onde é apresentado um gráfico do fator  $D$  versus o coeficiente  $\beta$  para diferentes coeficientes de amortecimento.



**Figura 2-11** Variação do fator de amplificação dinâmica com o coeficiente  $\beta$  para diferentes coeficientes de amortecimento (CLOUGH & PENZIEN 1975)

### 2.3.7 Resposta de um sistema de 1 GL na ressonância

Da Figura 2.11 pode-se concluir que o máximo fator de amplificação,  $D$ , ocorre quando o quociente entre as frequências, de excitação e natural, se aproxima da unidade e também conclui-se que  $D$  aumenta à medida que diminui o amortecimento do sistema.

Quando a frequência da excitação é igual à frequência natural, diz-se que o sistema entra em ressonância. Neste caso o coeficiente  $\beta$  é igual à unidade e o fator  $D$  fica sendo:

$$D_{\beta=1} = \frac{1}{2\xi} \quad (2.45)$$

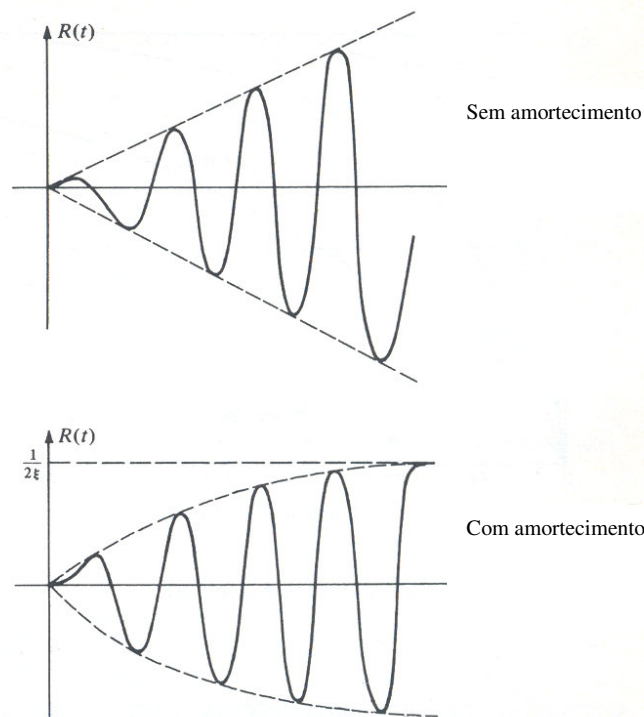
A expressão genérica para o valor máximo de  $D$  é obtida derivando-se a equação 2.44 em relação a  $\beta$  e igualando-se a zero:

$$\beta_{pico} = \sqrt{1-2\xi^2} \quad (2.46)$$

$$D_{pico} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \quad (2.47)$$

Embora a equação 2.45 não seja a expressão matemática genérica para o valor máximo de  $D$ , esta irá fornecer uma boa aproximação para valores típicos de coeficientes de amortecimento.

Na Figura 2.12 mostra-se o gráfico da resposta na ressonância, quando o coeficiente  $\beta$  é igual à unidade, para condições iniciais de deslocamento e velocidade nulos.



**Figura 2-12 Resposta na ressonância ( $\beta=1$ ) para condições de velocidade e deslocamento iniciais iguais a zero (CLOUGH & PENZIEN 1975).**

Para o sistema sem amortecimento o valor da resposta tende a infinito quando o tempo tende para o infinito, enquanto que para o sistema amortecido a resposta tende assintoticamente ao valor de  $\frac{1}{2\xi}$  quando o tempo tende ao infinito.

## 2.4 Introdução à análise no domínio da frequência

As transformadas integrais são ferramentas poderosas na resolução de sistemas de equações diferenciais, entre elas figuram a transformada de Laplace e a transformada

de Fourier que após serem aplicadas permitem a resolução algébrica do sistema de equações diferenciais (BOYCE & DIPRIMA,1981) .

Nos itens seguintes será apresentada uma análise que procura encontrar a aproximação em funções trigonométricas das funções que satisfazem às equações de movimento.

#### 2.4.1 Aproximação de funções periódicas por series trigonométricas

Uma função é chamada periódica de período  $T$  quando  $f(t)=f(t+T)$ . Qualquer função periódica pode ser expressa em termos de uma soma infinita de senos e cossenos, conforme a formulação de Fourier (BYKHOVSKY, 1980).

Seja o período  $T=2\pi/\omega$ , a formulação de uma função em série de Fourier é dada pelas expressões :

$$f(t) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \text{sen}(n\omega t))$$

onde

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(t) \cos(n\omega t) dt \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.48)$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(t) \text{sen}(n\omega t) dt \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$a_o = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(t) dt$$

As equações que definem  $a_n$  e  $b_n$  são as expressões dos chamados coeficientes de Fourier, e a expressão para  $a_o$  fornece o termo independente da série.

A formulação de Fourier também pode ser expressa de acordo com as equações :

$$f(t) = \frac{c_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega t - \theta_n)$$

$$c_o = a_o$$

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

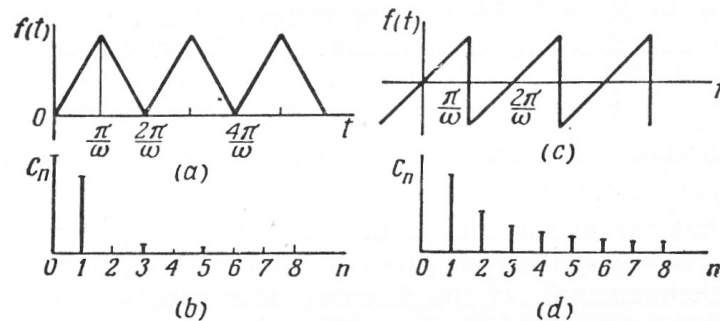
$$\theta_n = \arctg(b_n / a_n)$$
(2.49)

Nota-se a semelhança destas equações com as equações 2.31 e 2.32. Esta semelhança é devido ao fato que a série de Fourier é uma soma de funções harmônicas com diferentes amplitudes e períodos. Usualmente a análise de Fourier é conhecida como análise harmônica.

Os termos ( $c_n$ ) da equação 2.49 são chamados de amplitudes, que correspondem a uma amplitude de vibração, e o termos  $\theta_n$  da equação 2.49 são chamados de ângulos de fase, também referenciados ao ângulo de uma vibração com essas características.

O conjunto de dados  $c_n$  é chamado de espectro de amplitudes; o conjunto de dados  $\theta_n$  é chamado de espectro de fases e a quantidade  $c_o$  é chamada termo independente da série.

Na Figura 2.13 mostram-se duas funções periódicas e sua representação no espectro de amplitudes; as primeiras amplitudes resultam nas mais importantes da expressão em série.



**Figura 2-13 Representação do espectro de amplitudes de funções periódicas (BYKHOVSKY, 1980).**

O espectro de amplitudes de funções periódicas é um diagrama de linhas, onde as funções não periódicas apresentam um espectro contínuo; isto significa que uma função não periódica apresenta frequências de zero a infinito.

A análise harmônica de funções não periódicas é fundamentalmente feita através da transformada integral de Fourier.

### 2.4.2. Forma complexa da série de Fourier

A representação em séries de Fourier de uma função periódica pode ser formulada considerando a expressão complexa da série. Usando as equações de Euler (2.50 e 2.51) e substituindo-se na formulação de Fourier no domínio dos números reais, a função fica em termos complexos segundo a equação 2.52, onde o coeficiente  $c_n$  surge ao se considerar as funções trigonométricas na sua forma exponencial (eq. 2.53).

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}) \quad (2.50)$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2i}(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}) \quad (2.51)$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n \cdot e^{in\pi\omega t} \quad (2.52)$$

$$c_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(t) \cdot e^{-in\pi\omega t} dt \quad (2.53)$$

### 2.4.3 A transformada integral de Fourier

A análise em séries de Fourier pode ser estendida para funções não periódicas, usando-se a transformada integral como um passo ao limite dos coeficientes de Fourier na forma complexa.

A maior utilidade que apresenta a transformada integral de Fourier é de tornar uma equação diferencial em algébrica.

Define-se a transformada integral de Fourier segundo a equação abaixo:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\pi\omega t} dt \quad (2.54)$$

Nota-se a semelhança com a definição do coeficiente da série de Fourier em forma complexa. Assim como uma função periódica pode ser representada por um espectro de amplitudes (Fig. 2.10), uma função contínua pode ser representada por um espectro de frequências após a aplicação da transformada de Fourier na função.

Entre as propriedades da transformada integral de Fourier, uma das mais usadas é a que atende à equação abaixo (não sendo demonstrada nesta dissertação) (GUEDES de FIGUEIREDO, 1977)

$$F(f'(t)) = i \cdot \omega \cdot F(f(t)) \quad (2.55)$$

Aplicando a transformada de Fourier na equação diferencial que fornece o equilíbrio dinâmico do sistema da Figura 2.5, chega-se à equação:

$$F(v(t)) \cdot (-\omega^2 m + i\omega c + k) = F(p(t)) \quad (2.56)$$

A equação 2.58 pode ser reescrita como:

$$F(v(t)) = F(p(t)) / (-\omega^2 m + i\omega c + k) \quad (2.57)$$

ou

$$v(\omega) = p(\omega) \cdot H(\omega)$$

onde

$$\begin{aligned}
 H(\omega) &= \frac{1}{-\omega^2 m + i\omega c + k} \\
 v(\omega) &= F(v(t)) \\
 p(\omega) &= F(p(t))
 \end{aligned}
 \tag{2.58}$$

Assim a equação de movimento expressa em termos do domínio da frequência corresponde à equação 2.57, onde  $H(\omega)$  é definida na equação 2.58 e depende unicamente das características da estrutura, como a massa, a rigidez e o amortecimento.

Os termos  $v(\omega)$  e  $p(\omega)$  são as transformadas complexas de Fourier da resposta e da excitação e o termo  $H(\omega)$  é denominado de função de resposta em frequência do sistema.

O módulo da função de resposta em frequência é chamado de ganho do sistema, enquanto o ângulo que forma a função de transferência com o eixo dos reais é denominado fase do sistema.

Em sistemas submetidos à excitação senoidal, tais valores adquirem um importante significado físico, sendo o ganho a relação entre as amplitudes de resposta e de excitação. A diferença de fase entre a fase de excitação e a fase de resposta é a fase da função de transferência.

## 2.5 Sistemas de vários graus de liberdade

Na maioria das estruturas, a análise dinâmica envolve mais de um grau de liberdade. Os conceitos vistos para o comportamento de sistemas de muitos graus de liberdade são basicamente os mesmos que foram desenvolvidos para sistemas de um grau de liberdade.

Os sistemas de um grau de liberdade são muitas vezes aproximações de sistemas mais complexos; dependendo do sistema que esteja sendo estudado, o modelo unidimensional pode ou não descrever satisfatoriamente o fenômeno analisado.



Como uma estrutura apresenta infinitos graus de liberdade, é necessário determinar um número finito de graus de liberdade que representem adequadamente a resposta da estrutura. O método MEF é um dos mais utilizados para discretização das estruturas nos programas comerciais de análise estrutural.

Neste trabalho foi desenvolvido um programa computacional em FORTRAN 90 (COMPILADOR FORTRAN 90,1995) que adota a formulação do MEF para estruturas reticuladas espaciais.

### **2.5.1 Análise das vibrações pelo método de Rayleigh**

Antes de se apresentar a formulação do comportamento dinâmico de sistemas de múltiplos graus de liberdade, será introduzido o método de Rayleigh para a análise de vibrações.

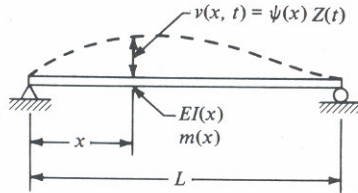
É muito importante a influência da frequência natural na resposta dinâmica em sistemas de um grau de liberdade. O método de Rayleigh é muito utilizado e fornece uma técnica para encontrar a frequência natural em sistemas contínuos cuja resposta é aproximada por apenas um grau de liberdade.

Na ausência de forças dissipativas, a soma da energia cinética e potencial de um sistema sem amortecimento é uma constante ao longo do tempo, assim as únicas forças atuantes no sistema são conservativas.

A energia cinética e a energia potencial são quantidades positivas, assim o valor mínimo que podem atingir é zero. Como a soma das energias é uma constante, quando a velocidade é zero o valor de energia potencial é máximo, e, analogamente, quando a energia potencial é zero o valor da energia cinética é máximo. A expressão matemática que corresponde à conservação da energia no sistema sem amortecimento é dada por:

$$T_{\max} = V_{\max} \quad (2.59)$$

Na consideração de sistemas com massa distribuída, uma forma de discretizar a estrutura é considerar a hipótese de Rayleigh, em que a resposta dinâmica é o produto de uma função que depende apenas da posição ( $x$ ), compatível com os vínculos do sistema por uma função que depende apenas do tempo, ( $t$ ). Na Figura 2.14 mostra-se um exemplo de aplicação desta hipótese para uma viga com massa e inércia distribuídas ao longo do eixo .



**Figura 2-14 Vibração de uma viga com massa e inércia variando ao longo do eixo pelo Método de Rayleigh (CLOUGH & PENZIEN 1975).**

Admitindo-se que  $v(x,t) = \psi(x) \cdot Z_o \cdot \sin \omega t$ , onde  $\psi(x)$  é uma função de forma, que representa como o deslocamento de uma coordenada generalizada  $Z(t)$  varia ao longo de  $x$ , pode-se calcular a energia cinética máxima e a energia potencial máxima do sistema pelas expressões (CLOUGH & PENZIEN 1975):

$$T_{\max} = \frac{1}{2} Z_o^2 \cdot \omega^2 \int_0^L m(x) \cdot [\psi(x)]^2 dx \quad (2.60)$$

$$V_{\max} = \frac{1}{2} Z_o^2 \int_0^L EI(x) \cdot [\psi''(x)]^2 dx \quad (2.61)$$

Substituindo-se as expressões 2.60 e 2.61 na equação 2.59, chega-se na seguinte equação, que fornece a frequência do sistema com massa e rigidez distribuídas:

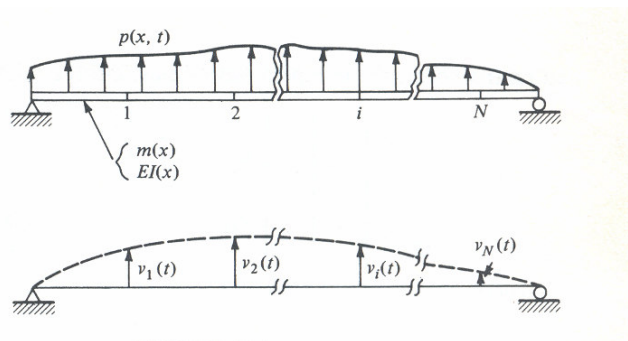
$$\omega^2 = \frac{\int_0^L EI(x) [\psi''(x)]^2 dx}{\int_0^L m(x) [\psi(x)]^2 dx} \quad (2.62)$$

Nota-se que a formulação acima coincide com a definição da frequência em sistemas discretos, onde o numerador fornece a rigidez integrada ao longo do elemento, denominada rigidez generalizada do sistema, e o denominador é a massa distribuída multiplicada pela função de forma, integrada também ao longo do elemento, sendo denominada massa generalizada do sistema.

Conclui-se assim que o método, através da decomposição de Rayleigh, transforma um sistema contínuo, com massa distribuída e um número infinito de graus de liberdade, num sistema equivalente discreto, com apenas um grau de liberdade, utilizando os conceitos de rigidez e massa generalizadas.

### 2.5.2 Formulação das equações de movimento em sistemas com vários graus de liberdade

Na Figura 2.15 apresenta-se a discretização de uma viga simplesmente apoiada, dividindo-a em  $N$  elementos. O equilíbrio global da viga se verifica através da soma dos equilíbrios parciais de cada elemento que constitui a estrutura.



**Figura 2-15 Discretização de viga (CLOUGH & PENZIEN 1975)**

As equações de equilíbrio para cada um dos componentes da discretização correspondem ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}
 f_{I1} + f_{D1} + f_{S1} &= p_1(t) \\
 f_{I2} + f_{D2} + f_{S2} &= p_2(t) \\
 f_{I3} + f_{D3} + f_{S3} &= p_3(t) \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{2.63}$$

O sistema de equações 2.63 pode ser escrito na seguinte forma vetorial:

$$\{f_I\} + \{f_D\} + \{f_S\} = \{p(t)\}
 \tag{2.64}$$

onde cada termo da esquerda corresponde ao vetor que agrupa as forças de inércia, amortecimento e rigidez respectivamente. O termo da direita é o vetor de forças externas aplicadas em relação aos pontos da discretização.

Admitindo-se que a estrutura tem um comportamento elástico-linear, é possível usar o princípio de superposição de forças elásticas atuantes sobre um elemento:

$$f_{si} = k_{i1}v_1 + k_{i2}v_2 + \dots + k_{iN}v_N
 \tag{2.65}$$

O coeficiente  $k_{ij}$  corresponde à força elástica na direção  $i$  quando se impõe um deslocamento unitário na direção  $j$  e deslocamentos nulos nas demais direções. A expressão matricial do conjunto das forças elásticas pode ser escrita então sob a seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} f_{s1} \\ f_{s2} \\ \cdot \\ f_{si} \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \dots & k_{1i} & \dots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \dots & k_{2i} & \dots & k_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{i1} & k_{i2} & k_{i3} & \dots & k_{ii} & \dots & k_{iN} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ v_i \\ \cdot \end{bmatrix}
 \tag{2.66}$$

que pode ser reescrita sob a forma reduzida:

$$\{f_s\} = [K] \cdot \{v\} \quad (2.67)$$

onde  $[K]$  é a matriz de rigidez da estrutura,  $\{v\}$  é o vetor de deslocamentos e  $\{f_s\}$  o vetor de forças elásticas em relação aos  $N$  graus de liberdade considerados.

A formulação matricial das forças de inércia é similar à formulação das forças elásticas (que dependem da rigidez do sistema). Na seguinte equação apresenta-se a expressão matricial do efeito da inércia:

$$\begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ \cdot \\ f_{ii} \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \dots & m_{1i} & \dots & m_{1N} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & \dots & m_{2i} & \dots & m_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{i1} & m_{i2} & m_{i3} & \dots & m_{ii} & \dots & m_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{v}_1 \\ \ddot{v}_2 \\ \cdot \\ \ddot{v}_i \\ \cdot \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

onde os coeficientes  $m_{ij}$  são chamados de coeficientes de massa, assim  $m_{ij}$  é a força de inércia na direção  $i$  que resulta de uma aceleração unitária imposta na direção  $j$  e acelerações nulas impostas nas demais direções. A equação 2.68 pode ser escrita na seguinte forma:

$$\{f_i\} = [M] \cdot \{\ddot{v}\} \quad (2.69)$$

onde  $[M]$  é a matriz de massa da estrutura,  $\{\ddot{v}\}$  é o vetor de acelerações e  $\{f_i\}$  é o vetor de forças de inércia em relação aos  $N$  graus de liberdade considerados.

Considerando-se o amortecimento de tipo viscoso, pode-se expressar as forças de amortecimento em função das velocidades. A formulação matricial do efeito do amortecimento está apresentada na equação que se segue:

$$\begin{bmatrix} f_{D1} \\ f_{D2} \\ \cdot \\ f_{Di} \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1i} & \dots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2i} & \dots & c_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & c_{i2} & c_{i3} & \dots & c_{ii} & \dots & c_{iN} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \cdot \\ \dot{v}_i \\ \cdot \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

onde os coeficientes  $c_{ij}$  são denominados de coeficientes de influencia de amortecimento, sendo  $c_{ij}$  a força que surge na direção  $i$  quando se impõe uma velocidade unitária na direção  $j$  e velocidades nulas nas demais direções. A equação 2.70 pode ser escrita na seguinte forma:

$$\{f_D\} = [C] \cdot \{\dot{v}\} \quad (2.71)$$

onde  $[C]$  é a matriz de amortecimento do sistema,  $\{\dot{v}\}$  é o vetor de velocidades e  $\{f_D\}$  é o vetor de forças de amortecimento em relação aos  $N$  graus de liberdade da estrutura.

Fazendo-se o equilíbrio de forças do sistema e substituindo as forças elásticas, de inércia e de amortecimento, pelas suas expressões reduzidas, obtém-se o sistema de equações de equilíbrio dinâmico do sistema de vários graus de liberdade:

$$[M] \cdot \{\ddot{v}\} + [C] \cdot \{\dot{v}\} + [K] \cdot \{v\} = \{p(t)\} \quad (2.72)$$

onde  $p(t)$  é o vetor de forças generalizadas aplicadas ao sistema.

Nesta formulação do equilíbrio dinâmico não foram levados em conta os efeitos de perda de rigidez causados pelos esforços de compressão devido a efeitos de segunda ordem. Nos casos em que esta perda tenha que ser considerada, deve-se descontar da matriz de rigidez da estrutura a matriz de rigidez geométrica  $[K_g]$ , que leva em conta os efeitos de mudança de configuração geométrica da estrutura.

### 2.5.3 Vibrações livres sem amortecimento de sistemas de vários graus de liberdade

As equações de vibrações livres de um sistema de vários graus de liberdade, sem levar em conta o efeito do amortecimento, podem ser escritas:

$$[M] \cdot \{\ddot{v}\} + [K] \cdot \{v\} = 0 \quad (2.73)$$

Assim como nos sistemas de um grau de liberdade, o vetor de deslocamentos em função do tempo apresenta em cada componente um comportamento de movimento harmônico simples.

A resposta da estrutura pode ser expressa em função das amplitudes e do ângulo de fase da resposta:

$$\{v(t)\} = \{\hat{v}\} \cdot \text{sen}(\omega_i t + \theta_i) \quad (2.74)$$

onde o vetor  $\hat{v}$  é o vetor de amplitudes, que representa a porção deformada do sistema que não varia com o tempo, e  $\theta$  é o ângulo de fase da resposta

Derivando-se duas vezes a expressão acima em relação ao tempo, considerado como variável independente, obtém-se o vetor de acelerações do sistema:

$$\{\ddot{v}(t)\} = -\omega_i^2 \cdot \hat{v}_i \cdot \text{sen}(\omega_i t + \theta_i) = -\omega_i^2 v_i \quad (2.75)$$

Substituindo-se esta expressão acima no sistema de equações diferenciais que governam o movimento do sistema, resulta em:

$$-\omega_i^2 M \hat{v}_i \text{sen}(\omega_i t + \theta_i) + K \hat{v}_i \text{sen}(\omega_i t + \theta_i) = 0 \quad (2.76)$$

Como o termo da função seno é arbitrário, pode-se reescrever este sistema de equações:

$$[K - \omega^2 \cdot M] \cdot \{\hat{v}\} = 0 \quad (2.77)$$

sendo que, para que este sistema tenha solução não trivial, deve-se atender à condição:

$$\|K - \omega^2 M\| = 0 \quad (2.78)$$

Expandindo-se este determinante obtém-se uma equação algébrica do enésimo grau, para um sistema de  $N$  graus de liberdade, denominada equação de frequências do sistema, pois sua solução fornece as  $N$  frequências naturais (ao quadrado) do sistema, correspondentes aos  $N$  modos de vibração do sistema.

Observa-se que a eq. (2.77) representa um problema de autovalor, cujos autovalores são as frequências naturais ao quadrado do sistema e os autovetores correspondentes são os modos de vibração do sistema. O modo correspondente à frequência mais baixa é chamado de primeiro modo, o seguinte é chamado de segundo modo, etc.

Pode-se demonstrar que as matrizes de massa e de rigidez dos sistemas estruturais são reais, simétricas e positivo-definidas, assim o problema de autovalor generalizado (eq. 2.78) apresenta como solução  $N$  valores reais positivos.

#### 2.5.4 Análise dos modos de vibração

Os modos de vibração são os autovetores associados ao vetor de autovalores (frequências naturais ao quadrado do sistema). Pode-se demonstrar (CLOUGH & PENZIEN, 1975) que os autovetores atendem às seguintes condições de ortogonalidade com relação às matrizes de massa e de rigidez:

$$\begin{aligned} \{\phi_m\} \cdot [M] \cdot \{\phi_n\} &= 0; & \omega_m \neq \omega_n \\ \{\phi_m\} \cdot [K] \cdot \{\phi_n\} &= 0; & \omega_m \neq \omega_n \end{aligned} \quad (2.79)$$



$$\begin{aligned} M_n &= \{\phi_n\}^T \cdot [M] \cdot \{\phi_n\}; & \omega_m &= \omega_n \\ K_n &= \{\phi_n\}^T \cdot [K] \cdot \{\phi_n\}; & \omega_m &= \omega_n \end{aligned} \quad (2.80)$$

onde  $M_n$  é denominada massa generalizada e  $K_n$  rigidez generalizada.

Chamando de  $[\Phi]$  a matriz cujas colunas são os autovetores correspondentes à solução da equação 2.77, e ortonormalizando-se os autovetores em relação à massa, pode-se reescrever as expressões acima, matricialmente:

$$[\Phi]^T \cdot [M] \cdot [\Phi] = [I] \quad (2.81)$$

$$[\Phi]^T \cdot [K] \cdot [\Phi] = [\Omega^2] \quad (2.82)$$

onde  $[\Omega^2]$  é uma matriz diagonal, em que cada elemento da diagonal corresponde a uma frequência natural (ao quadrado) do sistema,  $\omega_n^2$ .

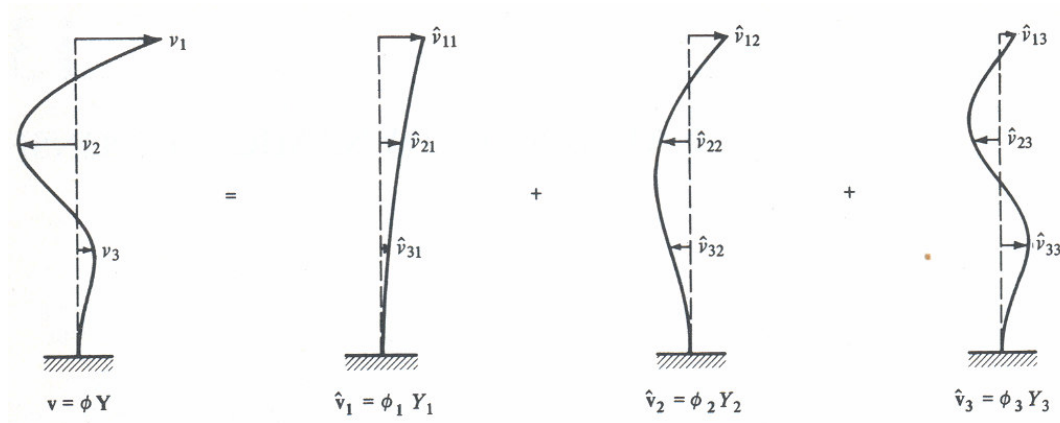
### 2.5.5. Análise da resposta dinâmica por superposição modal

Na análise dos sistemas de  $N$  graus de liberdade, a posição deslocada do conjunto é definida por um vetor cujas coordenadas são os deslocamentos de cada um dos graus de liberdade considerados.

Uma das representações mais usadas na análise das respostas dinâmicas é a que considera os modos normais de vibração livre como padrões de deslocamentos.

Os modos normais constituem  $N$  padrões de deslocamento independentes cujas amplitudes servem de coordenadas generalizadas para descrever qualquer deslocamento da estrutura.

Os modos normais podem ser utilizados da mesma forma que as funções de Fourier. Devido às propriedades de ortogonalidade e à eficiência na aproximação do campo do deslocamentos, geralmente obtém-se uma boa aproximação da resposta em termos de deslocamentos utilizando-se poucos modos de vibração.



**Figura 2-16 Superposição modal (CLOUGH & PENZIEN, 1975)**

Na Figura 2.16 ilustra-se a deformada de um pilar engastado na base e livre no topo, discretizado em um sistema de 3 graus de liberdade (deslocamento horizontal apenas nos 3 nós). Demonstra-se a seguir que, utilizando-se a técnica de superposição modal, a deformada do pilar pode ser obtida superpondo-se as deformadas de cada modo de vibração livre, ou seja, o autovetor associado a cada autovalor (frequência natural ao quadrado) multiplicadas pela respectiva amplitude modal.

Para cada componente modal, a expressão do vetor padrão de deslocamentos  $\{v_n\}$  é dada pelo produto do autovetor  $\{\phi_n\}$  pela respectiva amplitude modal  $Y_n$ :

$$\{\hat{v}_n\} = \{\phi_n\} \cdot Y_n \quad (2.83)$$

Pelo fato dos autovetores serem linearmente independentes, pode-se então obter o vetor de deslocamentos total pela superposição dos  $N$  vetores padrão de deslocamentos  $\{v_n\}$ :

$$\{v\} = \{\phi_1\} \cdot Y_1 + \{\phi_2\} \cdot Y_2 + \dots + \{\phi_N\} \cdot Y_N = \sum_{n=1}^N \{\phi_n\} Y_n \quad (2.84)$$

Esta equação pode-ser reescrita sob forma matricial:

$$\{v\} = [\Phi] \cdot \{Y\} \quad (2.85)$$

onde  $[\Phi]$  é a matriz composta pelos autovetores ou modos de vibração em cada coluna e  $Y$  é o vetor de amplitudes modais, também chamado de coordenadas normais. A matriz  $[\Phi]$  transforma assim as coordenadas generalizadas  $Y$  em coordenadas geométricas  $v$ .

Para obtenção do vetor de amplitudes modais  $\{Y\}$ , serão utilizadas as propriedades de ortogonalidade da matriz de autovetores para desacoplar o sistema de equações diferenciais em  $N$  equações diferenciais, lineares, independentes.

Parte-se de um sistema de  $N$  graus de liberdade, (equação 2.72), submetido a um vetor de forças externas,  $\{p(t)\}$ , sem levar em conta o efeito do amortecimento.

A partir da eq. (2.85) obtém-se o vetor de acelerações em função das coordenadas normais, ou amplitudes modais:

$$\{\ddot{v}\} = [\Phi] \cdot \{\ddot{Y}\} \quad (2.86)$$

Substituindo-se tanto o vetor de deslocamentos, eq. (2.85), como o vetor de acelerações, eq. (2.86), em função das coordenadas normais no sistema de equações de equilíbrio (2.72) e considerando nula a matriz de amortecimento, obtém-se:

$$[M] \cdot [\Phi] \cdot \{\ddot{Y}\} + [K] \cdot [\Phi] \cdot \{Y\} = \{p(t)\} \quad (2.87)$$

Pré-multiplicando-se o sistema de equações acima pelo vetor  $\{\phi_n\}^T$ , correspondente ao  $n$ -ésimo modo de vibração, resulta em:

$$\{\phi_n\}^T \cdot [M] \cdot [\Phi] \cdot \{\ddot{Y}\} + \{\phi_n\}^T \cdot [K] \cdot [\Phi] \cdot \{Y\} = \{\phi_n\}^T \cdot \{p(t)\} \quad (2.88)$$

Utilizando-se as condições de ortogonalidade, equações (2.79) a (2.80), nas equações (2.90) acima, consegue-se desacoplar o sistema de equações, obtendo-se para cada modo de vibração  $n$ :

$$\{\phi_n\}^T \cdot [M] \cdot \{\phi_n\} \cdot \ddot{Y}_n + \{\phi_n\}^T \cdot [K] \cdot \{\phi_n\} \cdot Y_n = \{\phi_n\}^T \cdot \{p(t)\} \quad (2.89)$$

ou seja, transformou-se um sistema de  $N$  graus de liberdade em  $N$  sistemas independentes de 1 grau de liberdade.

Utilizando-se o conceito de massa e rigidez generalizada, definidos anteriormente nas equações (2.80), e definindo-se agora o vetor de cargas generalizada:

$$P_n(t) = \{\phi_n\}^T \cdot \{p(t)\} \quad (2.90)$$

pode-se chegar a uma expressão, em termos de coordenadas normais, para a equação de movimento de cada modo de vibração. Introduzindo na equação 2.91 a massa, a rigidez e o vetor de cargas generalizado, chega-se na equação:

$$M_n \ddot{Y}_n + K_n Y_n = P_n(t) \quad (2.91)$$

A equação 2.91 fornece a equação de movimento de um sistema de 1 grau de liberdade para cada modo de vibração independente  $n$ , onde  $n$  varia de 1 a  $N$ . Verifica-se também a seguinte igualdade:

$$K_n = \omega_n^2 M_n \quad (2.92)$$

onde  $\omega_n$  é a frequência natural do modo de vibração  $n$ .

A solução da equação (2.91) fornece como resposta a amplitude modal em função do tempo, para cada modo de vibração  $n$ . A partir destas amplitudes modais e dos autovetores ou modos de vibração, obtém-se, a partir da eq. (2.86), o vetor de deslocamentos em função do tempo,  $\{v(t)\}$ , que é a solução do sistema de  $N$  graus de liberdade submetido a um vetor de cargas dinâmicas,  $\{p(t)\}$ .

No próximo capítulo é feita uma revisão sobre o método dos elementos finitos e apresentam-se alguns métodos numéricos para obtenção de autovalores e autovetores utilizados nos problemas de dinâmica estrutural.

### **3. MODELAGEM E ANÁLISE DE SISTEMAS ESTRUTURAIS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

#### **3.1 Introdução**

Um sistema estrutural, ao ser submetido a forças externas e certas condições de vínculo, irá se deformar acarretando esforços internos na estrutura, que devem estar em equilíbrio com as forças externas aplicadas. O objetivo da análise estrutural é obter a configuração deformada do sistema e os esforços internos decorrentes.

Existem dois métodos clássicos para a análise de estruturas estaticamente indeterminadas: o método dos deslocamentos e o método das forças. O método dos deslocamentos é mais eficiente para implementação computacional, portanto é o utilizado geralmente nos programas computacionais comerciais ou educacionais de análise estrutural. Por este motivo o Método dos Deslocamentos, também conhecido como Método da Rigidez, é utilizado neste trabalho, sendo descrito resumidamente no que se segue.

#### **3.1.1 Método da Rigidez Direta (Estruturas Reticuladas)**

O método da rigidez é um método geral e pode ser usado para resolver qualquer tipo de estrutura, isostática ou hiperestática.

No caso de estruturas reticuladas compostas por barras ligadas por nós, as incógnitas do problema são os deslocamentos dos nós da estrutura e as equações resultantes são equações de equilíbrio de forças em torno dos nós.

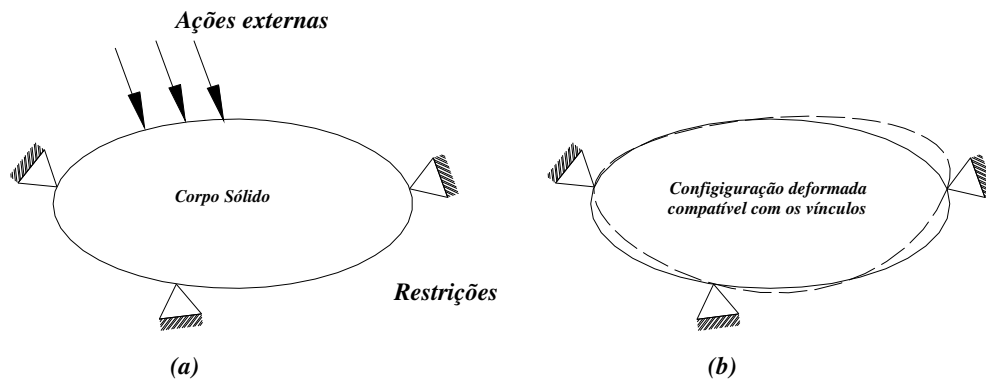
Na análise estática de estruturas reticuladas, costuma-se aplicar o método dos deslocamentos da forma conhecida como método da rigidez direta, no qual a matriz de rigidez de cada elemento é obtida diretamente a partir dos coeficientes de rigidez,  $k_{ij}$ , que correspondem ao esforço que surge no grau de liberdade  $i$  causado por um deslocamento unitário imposto na direção  $j$ , bloqueados deslocamentos nas demais direções ou graus de liberdade.

Pode-se também utilizar a formulação do método dos elementos finitos (MEF), no qual a matriz de rigidez de cada elemento é obtida a partir de uma formulação variacional do problema.

Ambas formulações conduzem ao mesmo resultado de deslocamentos nodais, no entanto, no caso de análise dinâmica de estruturas reticuladas, a formulação do método dos elementos finitos possibilita a obtenção da matriz de massa denominada “consistente”, que aproxima mais realisticamente a distribuição da massa ao longo da barra ou elemento. Optou-se assim neste trabalho por utilizar a formulação do MEF para a obtenção das matrizes de rigidez e massa dos elementos. No próximo item é feita uma breve revisão da formulação do MEF para análise estática, inicialmente, e posteriormente, no item 3.3, é estendida para análise dinâmica.

### 3.2 Formulação do Método dos Elementos Finitos – análise estática

Seja um sistema composto de um corpo sólido submetido a certas ações externas e condições de contorno (Figura 3.1 a). Sob estas ações o corpo irá se deformando até atingir uma certa configuração deformada compatível com os vínculos (Figura 3.1 b), que é a configuração de equilíbrio do sistema.



**Figura 3-1 Corpo sólido submetido a ações externas e configuração deformada compatível com os vínculos**

Existem duas alternativas para se formular as equações de equilíbrio deste sistema; a primeira alternativa consiste em dividir o corpo em elementos infinitesimais e estabelecer as equações de equilíbrio de forças de um elemento isolado; introduzindo-se nestas equações as equações constitutivas do material do corpo e as relações que vinculam as deformações específicas e os deslocamentos, obtém-se um sistema de equações diferenciais parciais de equilíbrio, cuja solução depende das condições de contorno do corpo. A segunda alternativa é a formulação variacional do problema em que calcula-se o funcional de energia potencial total do sistema. As equações de equilíbrio são encontradas tornando-se estacionário este funcional de energia. Se o valor estacionário corresponde a um valor mínimo de energia potencial total, a configuração deformada do corpo, obtida da solução das equações de equilíbrio, é uma configuração de equilíbrio estável.

Embora os dois enfoques sejam equivalentes e apresentem a mesma solução exata, será utilizado neste trabalho o enfoque baseado na energia potencial total por ser o mais usualmente encontrado na literatura.

### 3.2.1 Energia potencial total e formulação das equações de equilíbrio

O funcional de energia potencial total ( $\Pi$ ) de um corpo elástico em relação a uma certa configuração deformada é definido como a soma da energia de deformação interna ( $U$ ), acumulada pelo corpo desde sua configuração indeformada até a configuração deformada, com o potencial de realização de trabalho das forças externas atuantes ( $V$ ):

$$\Pi = U + V \quad (3.1)$$

Seja o estado de tensões e de deformações específicas do corpo expresso em forma vetorial segundo as equações:

$$\{\sigma^T\} = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}] \quad (3.2)$$

$$\{\varepsilon^T\} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}] \quad (3.3)$$



A energia de deformação interna  $U$ , que corresponde à integração no volume do corpo do trabalho que as tensões realizam sobre as deformações, pode ser expressa por :

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma^T\} \cdot \{\varepsilon\} \cdot dV \quad (3.4)$$

O potencial de realização de trabalho do carregamento externo pode ser expresso por:

$$V = - \left( \int_V \{v^T\} \cdot \{f\} \cdot dV + \int_{\partial V} \{v^T\} \cdot \{p\} \cdot dA + \sum_i \{v_i^T\} \cdot \{p_i\} \right) \quad (3.5)$$

onde o primeiro termo corresponde ao potencial das forças de volume ( $\{f\}$ ), o segundo termo ao potencial das forças de superfície ( $\{p\}$ ) e o terceiro termo ao potencial das forças externas ( $\{p_i\}$ ) nos pontos de aplicação  $i$ .

Na formulação anterior está implícita a hipótese de que o potencial de realização de trabalho é conservativo, assim o trabalho realizado pelas forças de uma configuração inicial até uma final independe do caminho percorrido.

Segundo o Princípio da Energia Potencial Estacionária para sistemas conservativos, entre todos os campos de deslocamentos cinematicamente admissíveis ao sistema (compatíveis com os vínculos) aqueles que satisfazem as equações de equilíbrio fazem com que a energia potencial total apresente um valor estacionário nessa configuração. Se o valor estacionário corresponde a um valor mínimo diz-se que a configuração de equilíbrio é estável, sendo o princípio denominado de Princípio de Energia Potencial Mínima.

Aplicando-se o Princípio da Energia Potencial Estacionária ao funcional de energia potencial total  $\Pi$ , deve-se ter necessariamente que a sua primeira variação deve ser igual a zero:

$$\delta\Pi = 0 \quad (3.6)$$

Existem diferentes técnicas para se encontrar os valores extremos de um funcional, uma delas é a conhecida como método de Rayleigh – Ritz.

O método consiste em aproximar a função que torna o funcional estacionário por uma combinação linear de funções linearmente independentes que atendem às condições de contorno, chamadas admissíveis. Assim pode ocorrer que não se obtenha a solução exata do problema, mas pode-se obter uma boa aproximação.

A aplicação do método de Rayleigh-Ritz ao funcional de energia de um corpo sólido geralmente é feita aproximando as funções que definem o campo dos deslocamentos por polinômios. Assim o campo de deslocamentos segundo os três eixos de coordenadas cartesianas  $x, y, z$  pode ser aproximado conforme as seguintes equações :

$$v_x = \sum \alpha_i \phi_i(x, y, z) \quad (3.7)$$

$$v_y = \sum \alpha_j \phi_j(x, y, z) \quad (3.8)$$

$$v_z = \sum \alpha_k \phi_k(x, y, z) \quad (3.9)$$

onde  $v_x$ ,  $v_y$  e  $v_z$  são os deslocamentos de um ponto qualquer segundo as direções  $x, y$  e  $z$  ;  $\phi$  são as funções admissíveis (polinômios) e  $\alpha$  são os parâmetros ajustáveis, incógnitas do problema.

Substituindo-se este campo de deslocamentos aproximado no funcional  $\Pi$ , obtém-se o funcional aproximado de energia potencial total que depende apenas dos parâmetros  $\alpha$ , uma vez que as funções  $\phi$  são conhecidas:

$$\bar{\Pi} = \bar{\Pi}(\alpha_i) \quad (3.10)$$

Aplicando-se a condição de estacionariedade ao funcional  $\bar{\Pi}$  tem-se que :

$$\delta\bar{\Pi} = \frac{\partial\bar{\Pi}}{\partial\alpha_i} \cdot \delta\alpha_i = 0 \quad (3.11)$$

e como  $\delta\alpha_i$  são valores pequenos, arbitrários e independentes tem-se que :

$$\frac{\partial\bar{\Pi}}{\partial\alpha_i} = 0 \quad (3.12)$$

### 3.2.2 Discretização Espacial

Dividindo-se o sólido (domínio) em  $N$  elementos de dimensão finita (chamados elementos finitos) e escolhendo funções que aproximem o campo de deslocamentos dentro do elemento, as equações 3.7 , 3.8 e 3.9 podem ser aplicadas em cada elemento, assim o campo de deslocamentos dentro do elemento é :

$$v_x = \sum \alpha_i^e \phi_i^e \quad (3.13)$$

$$v_y = \sum \alpha_j^e \phi_j^e \quad (3.14)$$

$$v_z = \sum \alpha_k^e \phi_k^e \quad (3.15)$$

As equações 3.13, 3.14 e 3.15 podem ser escritas sob a forma matricial :

$$\{v^e\} = [A] \cdot \{\alpha\} \quad (3.16)$$

onde  $[A] = \begin{bmatrix} \phi_1 & \dots & \phi_n & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \phi_1 & \dots & \phi_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \phi_1 & \dots & \phi_n \end{bmatrix}$  e  $\{\alpha\} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{Bmatrix}$

Ao invés de se trabalhar com parâmetros  $\{\alpha\}$  que não têm significado físico, fica mais fácil utilizar os deslocamentos nodais do elemento como incógnitas. Aplica-se inicialmente a equação 3.16 para os pontos nodais do elemento ( $e$ ) resultando em:

$$\begin{aligned} \{v^1\} &= [A^1] \cdot \{\alpha\} \\ \{v^2\} &= [A^2] \cdot \{\alpha\} \\ &\dots \\ \{v^{nm}\} &= [A^{nm}] \cdot \{\alpha\} \end{aligned} \tag{3.17}$$

Definindo-se o vetor de deslocamentos nodais :  $\{\bar{v}\} = \left\{ \begin{array}{c} \{v^1\} \\ \{v^2\} \\ \vdots \\ \{v^{nm}\} \end{array} \right\}$

e a seguinte matriz :  $[C] = \begin{bmatrix} [A^1] \\ [A^2] \\ \vdots \\ [A^{nm}] \end{bmatrix}$

onde  $\{v^i\}$  é o vetor de deslocamentos do nó  $i$  ;  $nm$  é o número de nós no elemento e  $[A^i]$  é uma matriz obtida substituindo-se as coordenadas do nó  $i$  na função de forma  $\phi_i$ .

Pode-se reescrever a equação 3.17 na seguinte forma:

$$\{\bar{v}\} = [C] \cdot \{\alpha\} \tag{3.18}$$

Se o número de nós no elemento for igual ao número de parâmetros  $\alpha$  a matriz  $[C]$  é quadrada e também é inversível porque as funções  $\phi$  são linearmente independentes. Invertendo-se a equação 3.18 obtém-se :

$$\{\alpha\} = [C]^{-1} \cdot \{\bar{v}\} \tag{3.19}$$

Substituindo-se agora a equação 3.19 na equação 3.16, obtém-se :

$$\begin{aligned} \{v^e\} &= [A] \cdot [C]^{-1} \cdot \{\bar{v}\} \\ \{v^e\} &= [N^e] \cdot \{\bar{v}\} \end{aligned} \quad \text{ou} \quad (3.20)$$

A equação 3.20 relaciona o campo de deslocamentos em qualquer ponto dentro do elemento ( $e$ ) com os deslocamentos nodais através das funções de interpolação. A matriz  $[N^e]$  é conhecida também como matriz de funções de forma que relacionam os deslocamentos de um ponto do elemento com os deslocamento dos nós do elemento.

Como a energia potencial total do sistema é a soma da energia potencial total de cada um dos elementos, verifica-se a equação :

$$\Pi_{tot} = \sum_e \Pi_e (e=1...N) \quad (3.21)$$

Atendendo-se às condições de continuidade entre os elementos pode-se reescrever a equação 3.21 :

$$\sum \delta \Pi_e = 0 \quad (3.22)$$

Para cada elemento  $e$ , a condição de estacionariedade  $\delta \Pi_e = 0$  conduz à equação de equilíbrio de forças no elemento (LA ROVERE, 2003):

$$[k^e] \cdot \{\bar{v}\} = \{f^e\} \quad (3.23)$$

onde  $[k^e]$  é a matriz de rigidez do elemento ( $e$ ) definida por :

$$[k^e] = \int_e [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot dV \quad (3.24)$$

sendo que  $[B]$  é a matriz que relaciona as deformações específicas com os deslocamentos nodais;  $[D]$  é a matriz constitutiva do material e  $\{f^e\}$  é o vetor de cargas consistente do elemento, equivalente às cargas de volume, de superfície e as cargas nodais aplicadas no elemento.

$$\{f^e\} = \int_e N^T \cdot b \cdot dV + \int_s N^T \cdot p \cdot dA + \{p^i\} \quad (3.25)$$

A matriz de rigidez da estrutura pode ser encontrada, levando-se em conta a contribuição de todos os elementos, somando-se os coeficientes de rigidez correspondentes aos mesmos graus de liberdade :

$$[K] = \sum_{e=1}^N [k^e] \quad (3.26)$$

Analogamente o vetor de forças da estrutura é formado por :

$$[F] = \sum_{e=1}^N [f^e] \quad (3.27)$$

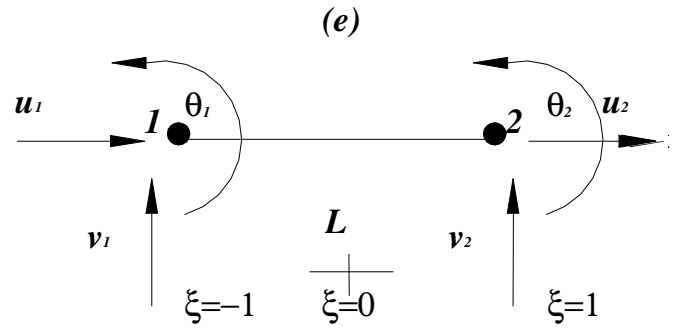
O sistema de equações de equilíbrio da estrutura fica sendo então :

$$[K] \cdot \{\bar{V}\} = \{F\} \quad (3.28)$$

onde  $\{\bar{V}\}$  é o vetor de deslocamentos nodais da estrutura.

### 3.2.3 Funções de forma e matriz de rigidez do elemento de pórtico plano

O elemento finito chamado elemento de pórtico plano é usado em muitos dos problemas de estruturas planas. Na Figura 3.2 que se segue é apresentado um elemento de pórtico plano, no qual cada nó extremo do elemento tem três graus de liberdade, sendo um deslocamento horizontal, um deslocamento vertical e uma rotação no plano.



**Figura 3-2 Elemento de pórtico plano**

O campo de deslocamentos do elemento é bidimensional, tendo cada ponto do elemento um deslocamento horizontal e um deslocamento vertical, sendo definido pela expressão:

$$\{v^e\} = \begin{Bmatrix} u(\xi) \\ v(\xi) \end{Bmatrix} \quad (3.29)$$

onde  $\xi$  é uma coordenada natural (ver Figura 3.2) que apresenta valores no intervalo  $[-1,1]$ : no nó 1 do elemento a coordenada  $\xi$  é igual a  $-1$  e no nó 2 é igual a  $1$ , o ponto com valor igual a zero é arbitrário, mas comumente é usado o ponto médio como origem das coordenadas.

A expressão vetorial dos deslocamentos nodais do elemento é dada pela expressão:

$$\{\bar{v}\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (3.30)$$

O campo de deslocamentos no elemento é definido por :

$$u(\xi) = N_1 \cdot u_1 + N_2 \cdot u_2 \quad (3.31)$$

$$v(\xi) = H_1 \cdot v_1 + H_2 \cdot v_2 + H_3 \cdot v_3 + H_4 \cdot v_4 \quad (3.32)$$

Utilizam-se como funções de forma para aproximar o campo de deslocamentos verticais os chamados polinômios de Hermite, no caso polinômios do terceiro grau, sendo expressos em coordenada natural por:

$$H_i = a_i + b_i \xi + c_i \xi^2 + d_i \xi^3 \quad (3.33)$$

Os polinômios ou funções de forma de Hermite correspondem às seguintes equações:

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi) \\ H_2 &= \frac{1}{4}(1-\xi)^2(1+\xi) \\ H_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi) \\ H_4 &= \frac{1}{4}(1+\xi)^2(\xi-1) \end{aligned} \quad (3.34)$$

A partir das relações entre deformação específica ( $\epsilon_x$ ) e deslocamentos nodais ( $\{\bar{v}\}$ ), encontra-se a matriz  $[B]$ . Para este elemento a matriz constitutiva é  $[D]=E$ , onde  $E$  é o módulo de elasticidade do material. Aplicando-se em seguida a equação 3.24, chega-se à matriz de rigidez do elemento de pórtico plano (CHANDRUPATLA & BELEGUNDU, 1999):



$$[k^e] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 0 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 4EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 0 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 2EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

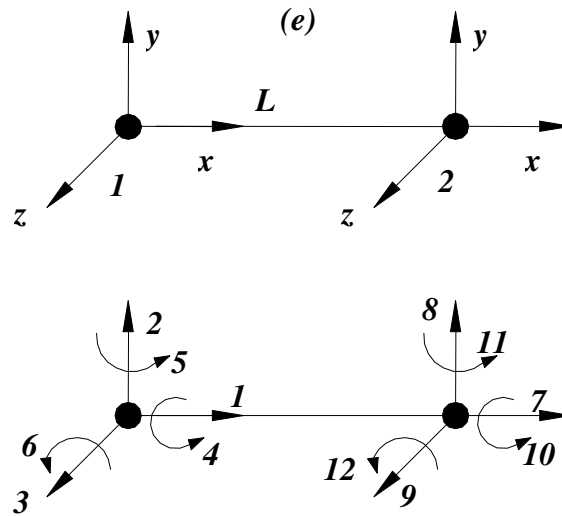
onde  $A$  é a seção da barra,  $I$  é o momento de inércia em torno do eixo horizontal da seção e  $L$  é o comprimento da barra.

### 3.2.4 Matriz de rigidez do elemento de pórtico espacial

Nos projetos estruturais, a maioria dos sistemas de barras são pórticos espaciais, cujo comportamento é essencialmente tridimensional, assim a modelagem matemática das estruturas de barras deve levar em conta o caráter espacial da mesma (BALFOUR, 1992).

Os deslocamentos de cada um dos nós de um elemento de barra no espaço são definidos por seis graus de liberdade, três graus de liberdade associados às translações e três graus de liberdade associados às rotações do nó.

Na figura que se segue apresenta-se um elemento de barra no espaço e os graus de liberdade associados aos deslocamentos dos nós.



**Figura 3-3 Elemento de Pórtico Espacial e graus de liberdade no sistema local (x,y,z)**

Análogamente ao que foi feito para pórtico plano, chega-se à matriz de rigidez de um elemento de pórtico espacial:

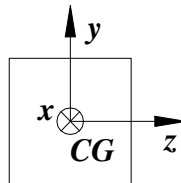
$$k^e = \begin{bmatrix} AS & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -AS & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_z & 0 & 0 & 0 & b_z & 0 & -a_z & 0 & 0 & 0 & 0 & b_z \\ a_y & 0 & -b_y & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_y & 0 & -b_y & 0 & 0 \\ TS & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -TS & 0 & 0 & 0 \\ c_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_y & 0 & 0 & d_y & 0 & 0 \\ c_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_z & 0 & 0 & 0 & 0 & d_z \\ AS & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_z & 0 \\ a_y & 0 & b_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ TS & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S & i & m & e & t & r & i & c & a & & & c_z \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

onde:

$$\begin{aligned}
 AS &= \frac{EA}{L}, TS = \frac{GJ}{L} \\
 a_z &= \frac{12EI_z}{L^3}, b_z = \frac{6EI_z}{L^2}, c_z = \frac{4EI_z}{L}, d_z = \frac{2EI_z}{L} \\
 a_y &= \frac{12EI_y}{L^3}, b_y = \frac{6EI_y}{L^2}, c_y = \frac{4EI_y}{L}, d_y = \frac{2EI_y}{L}
 \end{aligned}
 \tag{3.37}$$

sendo os momentos de inércia referidos aos eixos da seção  $y$  e  $z$  e  $G$  o módulo de cisalhamento do material.

Considera-se na eq.3.36 que a flexão, os esforços axiais assim como os esforços de torção não estão acoplados, e portanto o centro de torção, o centro de cisalhamento e o baricentro (CG) da seção são um único ponto no espaço (ver Figura 3.4). Os eixos locais  $y$  e  $z$  da barra devem ser assim eixos de simetria da seção.



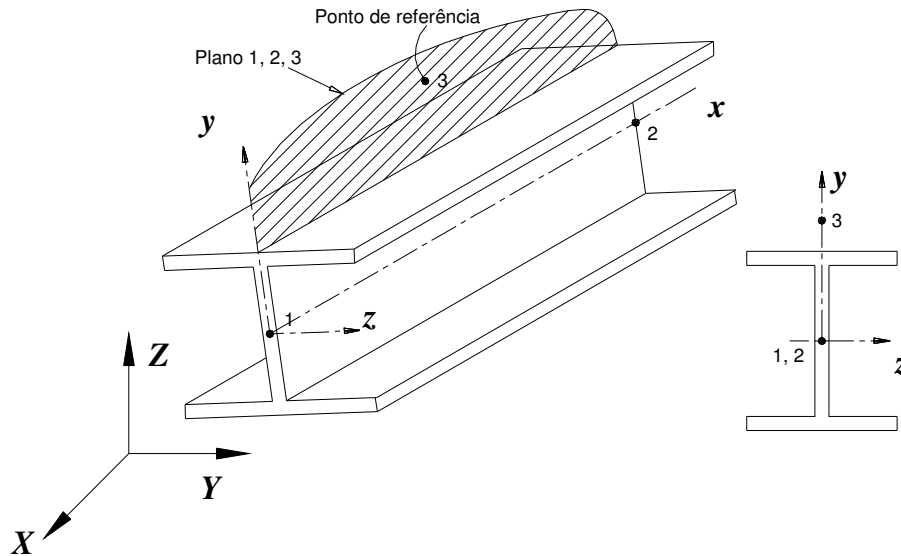
**Figura 3-4 Seção de barra espacial com simetria respeito dos eixos  $y$  e  $z$**

### 3.2.5 Transformação do sistema local para o sistema global de coordenadas

A matriz de rigidez de toda a estrutura é expressa em termos de coordenadas globais, assim cada uma das matrizes de rigidez correspondente a cada elemento deve ser transformada do sistema de coordenadas locais ao sistema de coordenadas globais.

No caso do pórtico espacial aparecem considerações mais complexas em relação a estruturas de barras planas, essas considerações devem ser levadas em conta para obter as matrizes de rigidez expressas em termos de coordenadas globais.

Na figura que se segue é mostrada uma barra no espaço com um sistema de coordenadas locais do elemento e um sistema de coordenadas globais em função dos quais serão expressos os deslocamentos das extremidades da barra.



**Figura 3-5 Elemento de pórtico espacial no sistema de coordenadas locais e no sistema de coordenadas globais**

Chamando de  $\{v_L\}$  o vetor de deslocamentos nodais do elemento de pórtico espacial em relação ao sistema local e de  $\{v_G\}$  o vetor de deslocamentos nodais em relação ao sistema global, pode-se escrever :

$$\{v_L\} = [R] \cdot \{v_G\} \quad (3.38)$$

onde  $[R]$  é a matriz de rotação, ou de transformação de coordenadas, que, no caso dos elementos de pórtico espacial, é uma matriz quadrada de 12x12 formada por submatrizes agrupadas (3x3) na diagonal principal (CHANDRUPATLA & BELEGUNDU, 1999):

$$[R] = \begin{bmatrix} \lambda & & 0 \\ & \lambda & \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

em que as linhas da matriz  $[\lambda]$  são os cossenos diretores dos eixos locais em relação ao sistema de coordenadas global.

Os termos da matriz  $[\lambda]$  são obtidos usando-se as propriedades geométricas da barra, sendo conhecidas as coordenadas no sistema global dos pontos extremos da barra, os cossenos diretores do primeiro eixo podem ser obtidos por :

$$\begin{aligned} l_1 &= \frac{X_2 - X_1}{L} \\ m_1 &= \frac{Y_2 - Y_1}{L} \\ n_1 &= \frac{Z_2 - Z_1}{L} \\ L &= \sqrt{((X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2)} \end{aligned} \quad (3.41)$$

onde  $L$  é o comprimento do elemento.

Seja o vetor unitário na direção definida pelos pontos 1 e 3 da Figura 3.5, sendo que o ponto 3 pertence ao plano de simetria da barra e não pertence ao eixo longitudinal da barra. As coordenadas do vetor  $\{V_{13}\}$  podem ser obtidas por:

$$\{V_{13}\} = \left[ \frac{X_3 - X_1}{L_{13}}, \frac{Y_3 - Y_1}{L_{13}}, \frac{Z_3 - Z_1}{L_{13}} \right] \quad (3.42)$$

onde  $L_{13}$  é a distância entre os pontos 1 e 3 que definem ao vetor  $\{V_{13}\}$ .

Usando-se este vetor  $\{V_{13}\}$  encontra-se o vetor unitário na direção  $z$  da barra,  $\{V_z\}$ , aplicando-se o produto vetorial :

$$\{V_z\} = [l_3, m_3, n_3]^T = \frac{\{V_x\} \times \{V_{13}\}}{|\{V_x\} \times \{V_{13}\}|} \quad (3.43)$$

onde  $\{V_x\}$  é o vetor unitário colinear com o eixo  $x$  do elemento.

Finalmente o vetor unitário na direção  $y$  da barra é obtido aplicando-se o seguinte produto vetorial:

$$\{V_y\} = [l_2, m_2, n_2]^T = \{V_z\} \times \{V_x\} \quad (3.44)$$

Assim é obtida totalmente a matriz  $[\lambda]$  dos cossenos diretores e a matriz de transformação  $[R]$  que transforma as coordenadas globais de um vetor em coordenadas locais.

A matriz de rigidez do elemento em relação ao sistema global é expressa pela seguinte equação:

$$[k_G] = [R^T] \cdot [k^e] \cdot [R] \quad (3.45)$$

onde  $[R^T]$  é a matriz de rotação transposta, que é igual à inversa da matriz de rotação,  $[R^{-1}]$ , uma vez que  $[R]$  é uma matriz ortogonal (CHANDRUPATLA & BELEGUNDU, 1999).

Obtidas as matrizes de rigidez de cada elemento no sistema global, pode-se formar a matriz de rigidez da estrutura, conforme descrito a seguir.

### **3.2.6 Formação da matriz de rigidez da estrutura global**

A partir das matrizes de rigidez de cada elemento expressas no sistema global, forma-se a matriz de rigidez global da estrutura somando-se os coeficientes que correspondem aos mesmos graus de liberdade. Uma vez definidos os graus de liberdade com restrições (na maioria dos casos são apoios), reordena-se o sistema aplicando-se a chamada Técnica da Reordenação. Usa-se a regra da correspondência para relacionar a numeração dos graus de liberdade do elemento com os graus de liberdade da estrutura, deixando-se os graus de liberdade restringidos para o final do sistema de equações (LA ROVERE, 2003).

As forças aplicadas diretamente nos nós são colocadas no vetor de ações externas e os carregamentos aplicados ao longo das barras são transformados em um vetor de ações nodais equivalentes. Resolvendo-se o sistema de equações de equilíbrio da estrutura obtém-se a solução estática do problema em termos de deslocamentos nodais.

### **3.3 Formulação do Método dos Elementos Finitos – análise dinâmica**

Também é possível aplicar a técnica do MEF para se encontrar as equações de equilíbrio dinâmico das estruturas (PRZEMIENIECKI, 1967). A aplicação do princípio variacional para o estudo de vibrações em um sistema contínuo discretizado em elementos finitos permite transformar as equações diferenciais parciais de equilíbrio em um sistema de equações matriciais (BREBBIA & FERRANTE, 1975).

No Capítulo 2 foi apresentada uma parte da teoria da análise dinâmica de estruturas e na primeira parte deste capítulo foi apresentada a formulação do método dos elementos finitos para o equilíbrio estático. Neste item apresenta-se a formulação das equações de equilíbrio dinâmico usando o método dos elementos finitos.

#### **3.3.1 Aplicação do princípio de Hamilton**

Seja o funcional de Lagrange definido segundo a equação:

$$L = T - (U + V) \quad (3.46)$$

onde  $T$  é a energia cinética do corpo sólido (ou da estrutura),  $U$  a energia potencial interna e  $V$  o potencial de realização de trabalho das forças externas.

Agrupando-se os termos entre parênteses, obtém-se a equação:

$$L = T - \Pi \quad (3.47)$$

onde  $\Pi$  é a energia potencial total do corpo sólido.

A energia cinética de um corpo sólido é expressa pela equação:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \cdot \{\dot{v}^T\} \cdot \{\dot{v}\} \cdot dV \quad (3.48)$$

Substituindo-se na equação 3.46 a energia cinética (equação 3.48), a energia interna (equação 3.4) e o potencial de trabalho das forças externas (equação 3.5), obtém-se a seguinte equação do funcional de Lagrange:

$$L = \frac{1}{2} \int_V (\rho \cdot \{\dot{v}^T\} \cdot \{\dot{v}\}) - \{\varepsilon^T\} [D] \{\varepsilon\} + 2 \{v^T\} \cdot \{b_m\} \cdot dV + \int_{\partial V} \{v^T\} \cdot \{p\} \cdot dS \quad (3.49)$$

onde  $\rho$  é a massa específica ou densidade do material,  $\{v\}$  é o vetor de deslocamentos do corpo  $\{\varepsilon\}$  é o vetor de deformações  $[D]$  é a matriz constitutiva,  $\{b_m\}$  são as forças de volume e  $\{p\}$  as forças de superfície. A primeira integral é definida em todo o volume do corpo e a segunda na superfície do corpo submetida a forças de superfície ( $\partial V$ ).

O princípio de Hamilton, em termos do funcional de Lagrange, pode ser expresso pela seguinte equação:



$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L \cdot dt = 0 \quad (3.50)$$

onde é imposta a condição de que a primeira variação do funcional de Lagrange ( $L$ ) seja igual a zero (BREBBIA & FERRANTE, 1975).

Na equação 3.49 não foram consideradas as forças de amortecimento, assim aparecem apenas os termos relacionados à energia cinética, à energia interna de deformação e ao trabalho das forças de volume e superfície.

### 3.3.2 Matriz de massa consistente

Sendo a energia cinética de um corpo sólido definida pela equação 3.48, e aproximando-se o campo de deslocamentos segundo a seguinte equação:

$$\{v\} = [N] \cdot \{\bar{v}\} \quad (3.51)$$

pode-se obter a seguinte equação para a energia cinética em termos dos deslocamentos nodais :

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{\bar{v}}^T\} \cdot \left[ \int \rho \cdot N^T N \cdot dV \right] \cdot \{\dot{\bar{v}}\} \quad (3.52)$$

A expressão entre colchetes da equação 3.52 é conhecida por matriz de massa consistente, a qual é diferente para cada tipo de elemento finito, de acordo com as funções de interpolação utilizadas.

No caso do elemento de pórtico espacial, a matriz de massa consistente fica sendo (PAZ, 1987) :

$$[m] = \frac{\bar{m}L}{420} \begin{bmatrix} 140 & & & & & & & & & & & \\ & 156 & & & & & & & & & & \\ & 0 & 156 & & & & & & & & & \\ & 0 & 0 & \frac{140I_R}{\bar{m}} & & & & & & & & \\ & 0 & 0 & -22L & 0 & 4L^2 & & & & & & \\ & 0 & 22L & 0 & 0 & 0 & 4L^2 & & & & & \\ 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 140 & & & & \\ & 0 & 54 & 0 & 0 & 0 & 13L & 0 & 156 & & & \\ & 0 & 0 & 54 & 0 & -13L & 0 & 0 & 0 & 156 & & \\ & 0 & 0 & 0 & \frac{70I_R}{\bar{m}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{140I_R}{\bar{m}} & \\ & 0 & 0 & 13L & 0 & -3L^2 & 0 & 0 & 0 & 22L & 0 & 4L^2 \\ & 0 & -13L & 0 & 0 & 0 & -3L^2 & 0 & -22L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

onde as constantes que aparecem na equação 3.53 são apresentadas na Tabela 3.1

**Tabela 3-1 Constantes da matriz de massa distribuída para elemento de pórtico espacial**

$L$	Comprimento do elemento
$\bar{m}$	Massa distribuída por unidade de comprimento
$I_R$	Momento de inércia polar

### 3.3.3 Matriz de massa discreta

Embora a matriz de massa consistente seja muito usada em programas computacionais, é usual encontrar aplicações em que se utiliza a chamada matriz de massa discreta.

A formulação da matriz de massa discreta é feita de modo a discretizar as forças de inércia somente nos graus de liberdade de translação, distribuídas igualmente entre os nós do elemento.

Nos casos em que são considerados os graus de liberdade rotacionais na formulação da matriz de massa discreta, apareceriam zeros na diagonal principal, logo a matriz de massa deixa de ser positivo-definida. Nem sempre é conveniente que isso ocorra, sendo neste caso melhor efetuar uma condensação estática dos graus de liberdade associados às rotações, o que inclusive torna o problema mais econômico computacionalmente (LA ROVERE, 1983).

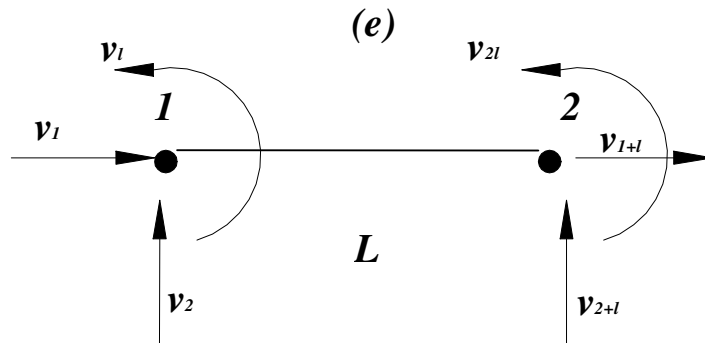
Para um elemento que tenha somente graus de liberdade translacionais, como por exemplo em treliças espaciais, a matriz de massa discreta é dada pela equação:

$$[m] = \frac{\bar{m}L}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

Nota-se que nos elementos de treliça os graus de liberdade associados às rotações não são considerados na análise estática, por isto não aparecem zeros na diagonal da matriz de massa (CHANDRUPATLA & BELEGUNDU 1999).

### 3.3.4 Matriz de massa agrupada

Outro tipo de matriz de massa é a matriz de massa agrupada que é calculada transformando a matriz de massa consistente em diagonal proporcionalmente aos elementos da diagonal. Na Figura 3.6 apresenta-se um elemento de barra qualquer com ( $l$ ) graus de liberdade por nó :



**Figura 3-6 Elemento de pórtico espacial com (l) graus de liberdade por nó**

Os elementos da diagonal da matriz de massa agrupada são encontrados a partir das equações:

$$\begin{aligned}
 m_{k,k}^{(d)} &= \alpha (m_{k,k}^{(c)} + m_{k,k+l}^{(c)}) \dots k \leq l \\
 m_{k,k}^{(d)} &= \alpha (m_{k,k}^{(c)} + m_{k,k-l}^{(c)}) \dots k > l
 \end{aligned}
 \tag{3.55}$$

onde  $\alpha = 1$  na maioria dos problemas (LA ROVERE, 1983).

Este procedimento pode ser aplicado para qualquer tipo de elemento finito de estruturas reticuladas.

Para estruturas reticuladas esta matriz agrupada fornece resultados bem semelhantes aos obtidos pela matriz consistente e apresenta a vantagem de ser mais eficiente computacionalmente.

### 3.3.5 Transformação de coordenadas e formação da matriz de massa da estrutura

Assim como a matriz de rigidez depende do sistema de coordenadas, a matriz de massa também deve ser expressa em termos do sistema de coordenadas global definido para a estrutura.

A formação da matriz de massa de uma estrutura é idêntica à formação da matriz de rigidez global, levando-se em conta a contribuição de todos os elementos. Para expressar a matriz de massa de cada elemento em coordenadas globais deve-se aplicar a mesma transformação que se aplica na matriz de rigidez:

$$[m_g] = [R]^T \cdot [m^e] \cdot [R] \quad (3.56)$$

### 3.4 Superposição modal

No segundo capítulo já foi apresentada a análise dos modos de vibração, a análise da resposta dinâmica e o desacoplamento das equações de movimento na forma matricial. Para-se obter as frequências naturais de uma estrutura, é necessário resolver o seguinte sistema de equações:

$$[M] \cdot \{\ddot{\bar{V}}\} + [K] \cdot \{\bar{V}\} = 0 \quad (3.57)$$

onde,  $[M]$  é a matriz de massa,  $[K]$  é a matriz de rigidez da estrutura,  $\{\bar{V}\}$  é o vetor de deslocamentos nodais e  $\{\ddot{\bar{V}}\}$  é o vetor de acelerações.

Conforme visto no Capítulo 2, fazendo-se  $\{\bar{V}(t)\} = \{\phi\} \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \theta)$ , e substituindo na equação 3.57 vem:

$$-\omega^2 \cdot [M] \cdot \{\phi\} \text{sen}(\omega t + \theta) + [K] \cdot \{\phi\} \text{sen}(\omega t + \theta) = 0 \quad (3.58)$$

e como  $\text{sen}(\omega \cdot t + \theta)$  é arbitrário :

$$[[K] - \omega^2 [M]] \cdot \{\phi\} = 0 \quad (3.59)$$

A equação 3.59 é um problema de autovalores e autovetores geral, sendo que os autovalores correspondem às frequências naturais ( $\omega^2$ ) e os autovetores  $\{\phi\}$  correspondem aos modos de vibração da estrutura.

A maioria das rotinas desenvolvidas para resolver os problemas de autovalores são para matrizes simétricas. Embora as matrizes de massa e rigidez sejam simétricas o produto  $[M]^{-1} \cdot [K]$  não é simétrico. Neste caso os métodos vetoriais são mais recomendáveis para encontrar os autovalores da transformação (BREBBIA & FERRANTE, 1975), sendo alguns destes descritos resumidamente no que se segue.

### 3.5 Métodos numéricos para solução de problemas de autovalor

Existem diferentes métodos numéricos para resolver problemas de autovalor, sendo possível classificar os métodos usuais em:

- Método de transformação – Jacobi
- Método de iteração vetorial
- Método de iteração inversa-Coeficiente de Rayleigh

#### 3.5.1 Método de Jacobi

O método de Jacobi original é um método usado para se obter todos os autovalores e autovetores de uma transformação.

A estrutura da torre a ser analisada neste trabalho, modelada como pórtico espacial, resulta em 1296 graus de liberdade, e quando é modelada como treliça espacial, 636 graus de liberdade. É evidente que mesmo considerando os elementos como treliça espacial, obter todos os autovalores da transformação envolve um esforço computacional muito alto, e por outro lado as frequências e modos associados mais relevantes são em geral provenientes dos primeiros autovalores. Portanto, não é recomendável se utilizar o Método de Jacobi original em problemas de muitos graus de liberdade. Para estes problemas é mais eficiente aplicar-se inicialmente procedimentos tais como o método do sub-espço (BATHE, 1996) que permite encontrar apenas alguns autovalores e autovetores.

### 3.5.2 Métodos vetoriais de iteração

Existem diferentes métodos de iteração vetorial, sendo que alguns métodos encontram a partir do autovalor mais alto os demais autovalores em forma iterativa, outros encontram os seguintes a partir do autovalor mais baixo, sendo denominado Método de Iteração Inversa (NAKAMURA,1997) (MATHEWS & KURTIS, 1999).

O método implementado no programa computacional desenvolvido nesta dissertação utiliza o Método de Iteração Inversa, descrito a seguir.

Define-se inicialmente o denominado coeficiente de Rayleigh:

$$Q(v) = \frac{\{v^T\} \cdot [K] \cdot \{v\}}{\{v^T\} \cdot [M] \cdot \{v\}} \quad (3.60)$$

onde  $\{v\}$  é um vetor qualquer (CHANDRUPATLA & BELEGUNDU ,1999).

A propriedade fundamental do método de iteração inversa é :

$$\lambda_1 \leq Q(v) \leq \lambda_n \quad (3.61)$$

Os métodos de iteração inversa e de potência usam esta propriedade, sendo diferentes do método de transformação de Jacobi, já que permitem achar um número reduzido de autovalores e autovetores que são os mais relevantes na resposta dinâmica.

O algoritmo de convergência usado para achar o primeiro autovalor é:

- i) Estimar um vetor  $\{u_0\}$  inicial de prova (fixa-se o índice de iteração  $k$  igual a zero)

$$k = k + 1 \quad (3.62)$$

- ii) Resolve-se o lado direito da equação

$$\{v^{k-1}\} = [M] \cdot \{u^{k-1}\} \quad (3.63)$$

iii) Resolvem-se as equações

$$[K] \cdot \{u^k\} = \{v^{k-1}\} \quad (3.64)$$

$$\{v^k\} = [M] \cdot \{u^k\} \quad (3.65)$$

iv) Estima-se o primeiro autovalor

$$\lambda^k = \frac{\{u^{kT}\} \cdot \{v^{k-1}\}}{\{u^{kT}\} \cdot \{v^k\}} \quad (3.66)$$

v) Normaliza-se o autovetor

$$\{u^k\} = \frac{\{u^k\}}{(\{u^{kT}\} \cdot \{v^k\})^{1/2}} \quad (3.67)$$

vi) Verifica-se a Tolerância (*tol*)

$$\left| \frac{\lambda^k - \lambda^{k-1}}{\lambda^k} \right| \leq tol \quad (3.68)$$

vii) No caso de não se verificar a tolerância, volta-se ao passo ii)

Ressalta-se que, no caso de raízes múltiplas, este método encontra apenas uma raiz, ou seja o analista deve identificar, dependendo do tipo de estrutura, se existem dois modos de vibração distintos com a mesma frequência de vibração. Esta é uma desvantagem do método de iteração inversa, que não ocorre no caso do método de Jacobi, uma vez que todos os autovalores são encontrados.



### 3.5.3 Autovalores de ordem superior

Os autovalores de ordem superior podem ser encontrados a partir do método da iteração inversa usando o vetor de prova de um espaço  $M$ -ortogonal.

#### O processo de Gram-Schmidt:

Sejam  $\{U_1\}, \{U_2\}, \dots, \{U_m\}$  os autovetores já determinados. Para cada nova iteração, o vetor de prova é considerado segundo a equação:

$$\begin{aligned} \{u^{(k-1)}\} = & \{u^{(k-1)}\} - (\{u^{(k-1)T}\} \cdot [M] \cdot \{U_1\}) \cdot \{U_1\} - (\{u^{(k-1)T}\} \cdot [M] \cdot \{U_2\}) \cdot \{U_2\} - \\ & \dots (\{u^{(k-1)T}\} \cdot [M] \cdot \{U_m\}) \cdot \{U_m\} \end{aligned} \quad (3.69)$$

Com esse método encontra-se o autovalor e o autovetor da etapa  $m+1$ .

No próximo capítulo é feita uma revisão sobre análise experimental, no capítulo seguinte (5), apresenta-se o modelo estrutural da torre de telecomunicações, com a instrumentação utilizada, objeto do estudo de este trabalho.

## **4 ANALISE EXPERIMENTAL DE ESTRUTURAS**

### **4.1 Considerações gerais dos sistemas de monitoramento**

#### **4.1.1 Introdução ao conceito de monitoramento e avaliação da segurança em estruturas existentes.**

As novas técnicas de medição assim como os avanços computacionais contribuíram para o desenvolvimento de uma grande variedade de aplicações de monitoramento de estruturas. As técnicas de monitoramento têm proporcionado informações relevantes tanto para a racionalização do projeto de manutenção como para as reparações da infraestrutura existente.

Os transdutores modernos e a tecnologia da informação possibilitaram a implementação de complexos sistemas de supervisão, com custos razoáveis e efetivos para o controle do estado geral das estruturas. Atualmente podem-se monitorar estruturas em forma contínua, remota e com um alto grau de versatilidade e flexibilidade.

A análise e a construção de sistemas de monitoramento são atividades que envolvem diferentes especialidades do conhecimento, abrangendo assim engenheiros estruturais, elétricos e de informática. Na planificação e na aplicação de sistemas de monitoramento é necessário contar com equipes de trabalho multidisciplinares (FIB CIEB, 2003).

A segurança e confiabilidade das estruturas não é somente uma tarefa importante dos órgãos de fiscalização e manutenção, mas também dos proprietários, sendo que devem trabalhar em forma conjunta de forma a garantir a integridade da infraestrutura em uso pela população.

O conceito mais usado de manutenção das estruturas envolve atividades de revisões periódicas, as quais geralmente começam com uma inspeção visual da mesma. Para garantir a integridade e a durabilidade das estruturas, é importante o

desenvolvimento dos sistemas de monitoramento contínuo tanto para componentes particulares como para análises globais (FIB CIEB 2003).

Para se obter informação das estruturas e de seu desempenho em um certo período de tempo, é necessário colocar os sensores adequadamente. A definição das variáveis mais importantes e a planificação do sistema de monitoramento pode assegurar ou dar margens razoáveis de certeza a cerca da integridade da estrutura estudada. Não é somente com a identificação de grandezas a serem medidas que se assegura um bom desempenho do sistema de monitoramento, também é necessária uma interpretação adequada dos valores obtidos assim como uma análise da evolução no tempo das variáveis monitoradas.

Uma das questões centrais é a determinação das grandezas físicas a serem medidas, os instrumentos a utilizar, sua localização e a análise da informação adquirida. Outro aspecto relevante é proceder a uma modelagem e análise do fenômeno a estudar, que ajude como referência para a análise da evolução das características da estrutura e dos valores esperados em termos de comportamento estrutural (FIB CIEB, 2003).

A quantidade de estruturas de grande porte tais como pontes, túneis, barragens, etc. têm crescido e se desenvolvido muito na maioria dos países especialmente nas últimas décadas do século passado. Na América do Sul o Brasil lidera a construção de grandes estruturas e já existem sistemas de monitoramento contínuo em diferentes tipos de estruturas. Pode-se citar como exemplo o sistema da ponte Ríó-Niteroi desenvolvido por R.C. Battista (BATTISTA & PFEIL, 2002).

#### **4.1.2 Introdução à medição de deformações**

A análise de deformações e tensões de um corpo sólido visa encontrar a solução do estado de deformações e tensões num ponto ou num conjunto de pontos submetidos a um grupo determinado de condições (DOVE & ADAMS, 1964). Nas análises de membros estruturais, busca-se encontrar as formas, magnitude e direções principais das deformações e tensões nos pontos definidos.

A informação obtida pela análise experimental é combinada com a informação prévia dos materiais para predizer ou explicar o comportamento desse membro estrutural.

A análise experimental não envolve medidas diretas de deformações ou tensões, geralmente são obtidas medidas de outras grandezas que estão relacionadas com elas; é por isto que surge a necessidade de uma teoria que sustente o processo que leve a grandeza medida a um valor de deformação. É evidente que a análise experimental não é 100% experimental e não supera todas as objeções feitas sob a análise teórica de deformações.

A análise mais usual e simples é o ensaio de deformação axial. Procura-se obter experimentalmente o estado de deformações e tensões num ponto ou num conjunto de pontos admitindo que os campos de deformações e tensões são unidirecionais.

A deformação axial é a mudança de um certo comprimento original segundo uma direção fixa; a experimentação para captar essa mudança envolve :

- Estabelecer um comprimento de referência antes da deformação
- Estabelecer a mudança do comprimento de referência após a deformação

A medição da mudança no comprimento não fornece a deformação num ponto, embora possa dar uma idéia da deformação média segundo a direção estudada. A qualidade da aproximação depende do gradiente da deformação segundo essa direção.

Os experimentos de Robert Hooke em 1660 (que foram as bases da teoria da elasticidade) são excelentes exemplos de determinações experimentais de deformações por medição direta. Esses experimentos consistiam em medir os comprimentos de cabos submetidos a tensão antes de aplicar o carregamento e depois de sua aplicação, obtendo-se assim o alongamento do cabo. Nestes casos o alongamento dividido pelo comprimento original do cabo resulta na deformação específica que é considerada aproximadamente constante ao longo de todo o cabo. Desde esta época, para minimizar

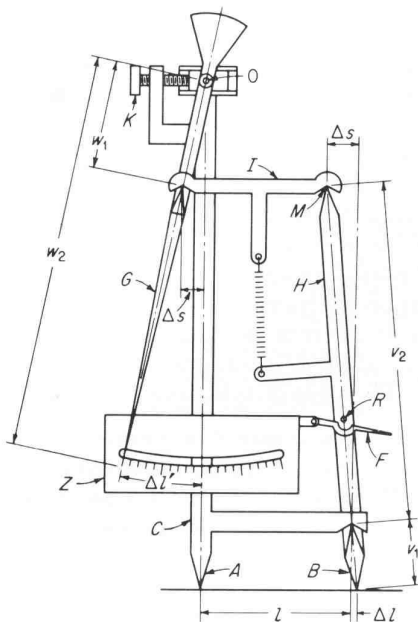
os erros desta aproximação, a tendência tem sido a utilização de comprimentos de referência bem pequenos.

Os extensômetros (medidores de deformações) de diferentes tipos são dispositivos que fornecem as deformações como uma amplificação de variação de comprimento, escolhendo-se o menor comprimento possível.

#### 4.1.3 Diferentes tipos de extensômetros

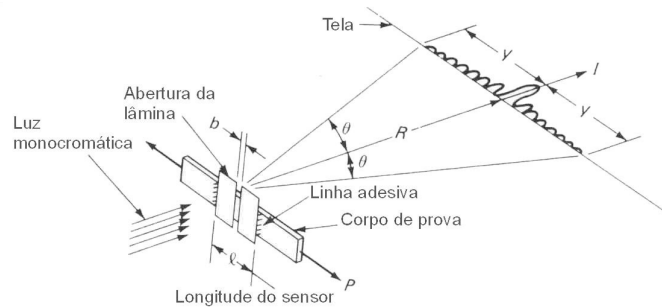
Existem diferentes métodos para a determinação experimental de deformações. Os extensômetros que se empregam podem ser mecânicos, óticos, acústicos ou elétricos.

Os sensores de tipo mecânico medem a variação da distância entre dois pontos e por procedimentos mecânicos fazem sua amplificação. Somente servem para medições estáticas e necessitam de um operador. Na Figura 4.1 apresenta-se um esquema do funcionamento de um extensômetro mecânico.



**Figura 4-1 Esquema de um extensômetro mecânico (DALLY & RILEY, 1978)**

Os transdutores óticos realizam a mesma medição; fazem a amplificação com um mecanismo ótico, necessitam de um operador com experiência e podem adquirir dados estáticos e dinâmicos de baixas frequências.



**Figura 4-2 Esquema de um extensômetro ótico (DALLY & RILEY, 1978)**

Os extensômetros elétricos medem uma certa deformação através da variação de diferentes características elétricas do sensor. A deformação pode ser medida conforme varia a capacitância do extensômetro, ou a indutância ou a resistência .

Os dois primeiros tipos (os que medem a deformação através da mudança na capacitância ou da indutância) não são de uso muito comum, sendo o terceiro (extensômetro de resistência) o mais usado atualmente para a medição de deformações.

As medições com os extensômetros elétricos de resistência permitem obter a deformação numa certa direção sobre uma base pequena. Os registros obtidos com extensômetros elétricos têm boa precisão e podem ser estáticos ou dinâmicos, e as medições podem ser obtidas em forma automatizada, sem presença de um observador.

No caso da estrutura em estudo, surge a necessidade de que as medições sejam feitas:

- Sobre a estrutura
- Que possa registrar os efeitos dinâmicos
- Que a aquisição seja automática e autônoma

É evidente que usando-se os extensômetros de resistência elétrica cumprem-se os requisitos além da economia e simplicidade dos mesmos.

## 4.2 Extensômetros Elétricos de Resistência

### 4.2.1. Introdução:

O extensômetro de resistência elétrica é um dispositivo que traduz pequenas mudanças em suas dimensões em mudanças na sua resistência elétrica.

Existem duas categorias de extensômetros: os de elemento sensível metálico e os de elemento sensível semicondutor. Estes tipos básicos usados corretamente fornecem uma leitura com boa acurácia (dependendo do fabricante), da ordem de  $(\pm 10^{-6})$  e podem ser utilizados na medição de deformações estáticas e dinâmicas num intervalo de temperatura de  $-195\text{ }^{\circ}\text{C}$  até  $260\text{ }^{\circ}\text{C}$  (VISAY – Company, 2004).

O extensômetro elétrico tem encontrado grande aceitação tanto no campo do desenvolvimento de transdutores (células de carga, aparelhos para medidas de momentos, medidores de pressão) quanto na área de pesquisa, sendo para a análise experimental de deformações e tensões uma grande ferramenta de medição.

### 4.2.2 Princípios básicos

O princípio básico do funcionamento dos extensômetros de resistência é conhecido há muito tempo; a resistência elétrica de um condutor de seção uniforme é dada pela expressão (TUPPENY & KOBAYASHI, 1970) :

$$R = \rho \cdot \frac{L}{A} \quad (4.1)$$

onde  $R$  é a resistência em Ohms,  $L$  é o comprimento do condutor,  $A$  é sua seção transversal e  $\rho$  uma propriedade do material chamada de resistividade.

Um fio reto submetido a um esforço de alongamento sofrerá um aumento no seu comprimento e uma diminuição da sua seção transversal (efeito de Poisson). A expressão (4.1) indica que tanto um aumento no comprimento quanto uma diminuição da seção produzem um aumento na resistência do fio condutor (admitindo-se a hipótese de que a resistividade não muda no processo).

Neste ponto pode-se introduzir o termo “sensibilidade à deformação” que indica a variação da resistência do condutor em relação à variação de comprimento sofrida :

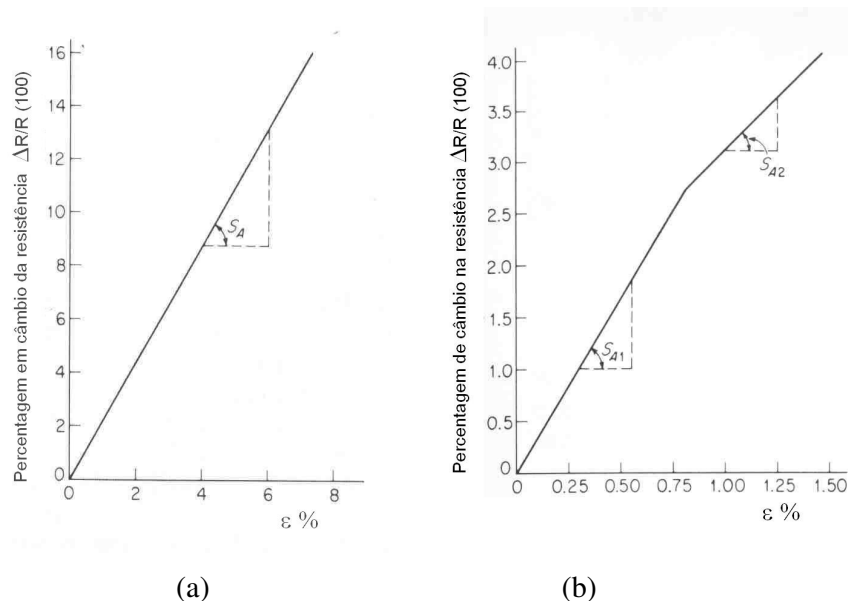
$$S_A = \frac{(\Delta R / R)}{(\Delta L / L)} \quad (4.2)$$

Têm-se feito múltiplos ensaios para determinar o valor da sensibilidade à deformação para diferentes ligas metálicas. Vários metais apresentam valores diferentes, já foram até obtidos valores negativos sugerindo a idéia de que para aumentos de comprimento diminui a resistência elétrica. Este fato demonstra claramente que a propriedade de resistividade não pode ser considerada sempre uma constante (TUPPENY & KOBAYASHI, 1970).

O fator de sensibilidade à deformação depende do tipo de material que seja usado para montar a resistência do extensômetro.

Na Figura que se segue apresenta-se um gráfico com o comportamento de um extensômetro elétrico típico: a) antes de alcançar o limite elástico e b) depois de ter alcançado o limite elástico.





**Figura 4-3 Sensibilidade à deformação (DALLY & RILEY, 1978)**

Apresenta-se a seguir na Tabela 4.1 os valores típicos de  $S_A$  para diferentes materiais condutores utilizados nos extensômetros.

**Tabela 3-1 Materiais de fios de extensômetros (DALLY & RILEY, 1978)**

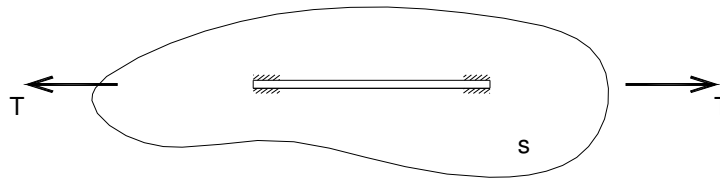
Material	Composição %	$S_A$
Nicromo V	80 Ni- 20 Cr	2.1
Isoelástico	36 Ni-8Cr-0.5 Mo-55.5 Fe	3.6
Karma	74Ni-20Cr-3Al-3Fe	2.0
Armour D	70Fe-20Cr-10Al	2.0
Platino Tungesteno	92T-8W	4.0

#### 4.2.3 Ideias básicas acerca dos extensômetros elétricos de resistência

Os primeiros ensaios feitos com fios de metal colados a uma superfície para medir deformações atribuem-se em geral a Edward Simmons do CIT (1936) nos Estados Unidos, e a Arthur Ruge do MIT, que dois anos mais tarde publicava um trabalho similar. O primeiro extensômetro comercializado levou o nome de SR-4 em honra às duas pessoas consideradas pioneiras nesses trabalhos.

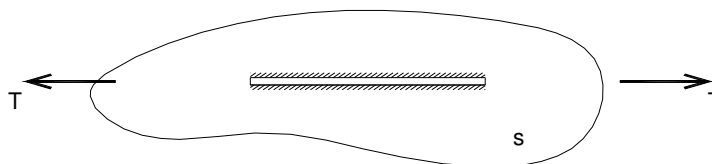
Para compreender como trabalham esses dispositivos é importante conhecer com certeza os mecanismos que governam seu comportamento.

Seja um fio comprido com as extremidades fixas, colados à estrutura (ver Figura 4.4). Aplicando-se um esforço de tração ao corpo, o fio se alongará de acordo com a deformação da superfície. A tensão de aderência pode ser calculada conhecendo-se a deformação produzida, o comprimento da parte colada e o diâmetro do fio .



**Figura 4-4 Fio colado nas extremidades a um corpo sólido**

Se o fio é colado também na parte central (ver Figura 4.5), as tensões de aderência nessa zona são zero, devido ao fato de que as deformações do fio e do corpo são iguais resultando o esforço cortante na cola e no suporte do extensômetro máximo nas extremidades e muito pequeno em outras partes.



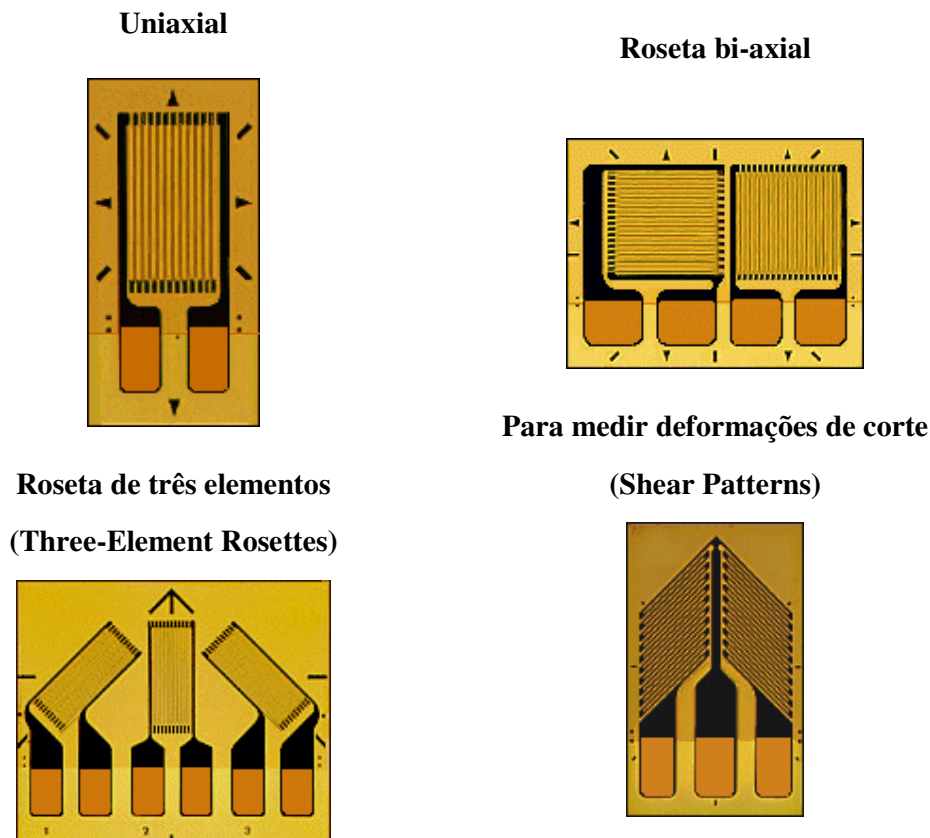
**Figura 4-5 Fio colado ao longo de todo seu comprimento a um corpo sólido**

Outro fator a se considerar é a mudança do diâmetro do fio devido ao efeito de Poisson. A cola pode atuar no fio somente em caso de estar em contacto direto com a superfície, e, como o módulo de elasticidade do fio é cerca de 30 a 80 vezes maior que o módulo da cola, ela não pode impedir mudanças no diâmetro do condutor. É assim que um extensômetro elétrico com somente um fio colado responderá a deformações longitudinais, mas será insensível a deformações perpendiculares ao seu eixo.

Colar o fio ao longo de todo seu comprimento é muito efetivo, impede que o fio saia da reta do eixo, e sendo adequadamente colado, pode se alongar (ou encurtar), fornecendo uma deformação igual à da superfície onde esteja colado na direção do eixo do fio.

Pelas limitações práticas do tamanho do condutor, geralmente o comprimento de um extensômetro de resistência é muito grande para colar sobre a superfície, por isto são produzidos em geometria de grelha, mesmo que se produzam efeitos prejudiciais .

A seguir apresentam-se na Figura 4.6 imagens dos extensômetros mais usados; o caso uniaxial foi o empregado na instrumentação da estrutura, os outros casos são apresentados para ilustrar as aplicações práticas mais usuais disponíveis no mercado.



**Figura 4-6 Detalhamento de extensômetros elétricos de resistência (VISAY – COMPANY , 2004)**

Os extensômetros apresentados são fixados num material de suporte. O extensômetro uniaxial fornece uma única deformação colinear com o eixo do fio condutor e o biaxial fornece duas deformações perpendiculares; cada extensômetro trabalha segundo o eixo do condutor.

A roseta de três elementos é usada para determinar estados planos de deformação, medindo-se as deformações em 3 direções no plano dos fios.

O ultimo extensômetro mostrado na Figura 4.6 é usado para estudar estados de cisalhamento.

#### 4.2.4 Colas e materiais de suporte

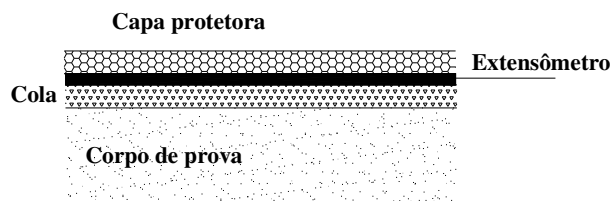
A grande maioria dos extensômetros é feita sobre um material chamado suporte, que serve para facilitar a manipulação, mantendo os fios no lugar e na direção apropriada. O material de suporte também serve como isolante elétrico. Sobre o suporte fixam-se os terminais de conexão, facilitando a colocação dos cabos do circuito nos terminais do extensômetro.

Os materiais usados para suporte devem ser isolantes elétricos para diferentes temperaturas de trabalho, além de ser resistentes e flexíveis para sua manipulação.

As colas usadas devem apresentar propriedades similares às do suporte tanto em relação à capacidade de não conduzir eletricidade como à capacidade de suportar variações de temperatura.

Geralmente as colas são sugeridas pelo fabricante do extensômetro em função do uso que se planeje para o mesmo.

A colocação do extensômetro sobre o corpo a ser analisado deve ser feita como mostra a Figura 4.7.



**Figura 4-7 Detalhamento de colocação de um extensômetro**

#### 4.2.5 Relações resistência-deformação-tensão

A idéia fundamental da extensometria é que um extensômetro colado na estrutura tenha as mesmas deformações sofridas pela estrutura no ponto de fixação.

Sendo assim, a medição da deformação com extensômetros elétricos de resistência é fornecida pela variação que se produz na resistência (  $R$  ) do condutor quando é submetido a tensões ou sofre deformações. A equação 4.2 pode ser reescrita na forma:

$$\frac{\Delta R}{R} = S_A \cdot \frac{\Delta L}{L} \quad (4.3)$$

Em função de sua forma o extensômetro terá uma variação de sua resistência ( $\Delta R$ ) que dependerá da deformação axial, da transversal e da de corte. Portanto a equação 4.3 pode ser reescrita em função das deformações sofridas, fornecendo a seguinte expressão para a variação da resistência:

$$\frac{\Delta R}{R} = S_{ax} \epsilon_{ax} + S_{tr} \epsilon_{tr} + S_{co} \gamma \quad (4.4)$$

onde a primeira parcela corresponde à deformação axial, a segunda à deformação transversal e a terceira à distorção angular.

Geralmente pode-se desprezar a terceira parcela da equação 4.4. Colocando-se o termo  $S_{ax}$  em evidência tem-se então:

$$\frac{\Delta R}{R} = S_{ax} (\epsilon_{ax} + K_{TR} \epsilon_{tr}) \quad (4.5)$$

onde  $K_{TR}$  é o fator de sensibilidade transversal, que é uma propriedade fornecida pelo fabricante.

Se o material sobre o qual está colocado o extensômetro está submetido a um estado uniaxial de tensões, verifica-se a seguinte equação:

$$\varepsilon_{tr} = -\nu \varepsilon_{ax} \quad (4.6)$$

onde  $\nu$  é o coeficiente de Poisson do material da estrutura.

Substituindo-se a equação 4.6 na 4.5 e agrupando-se termos, obtém-se a seguinte equação:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta R}{R} &= S_g \varepsilon_{ax} \\ S_g &= S_{ax} - \nu \cdot K_{tr} \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde o parâmetro ( $S_g$ ) é chamado de sensibilidade do extensômetro e é uma característica fornecida pelo fabricante.

A partir das equações anteriores obtêm-se as expressões que fornecem as tensões em função da variação da resistência na zona da estrutura onde está colado o extensômetro:

$$\sigma_a = E_a \varepsilon \quad (4.8)$$

$$\sigma_a = E_a (\Delta R / R) / S_g \quad (4.9)$$

onde  $\sigma_a$  é a tensão e  $\varepsilon$  é a deformação segundo a direção do eixo do extensômetro.

Para fazer uso do princípio básico do funcionamento de um extensômetro elétrico de resistência, este deve ser ligado a um circuito elétrico capaz de captar pequenas mudanças na sua resistência.

Mostra-se a seguir um exemplo que ilustra as grandezas envolvidas em uma medição.

Seja uma peça de aço submetida a uma tensão de 10 MPa, sobre a qual é colado um extensômetro de 120 ohms e fator de sensibilidade igual a 2.

Aplicando-se a equação da teoria da elasticidade para estado uniaxial de tensões tem-se:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{100}{2.10^6} = 50.10^{-6}$$

Da aplicação da equação 4.7 resulta :

$$\frac{\Delta R}{R} = 2 \cdot 50.10^{-6} = 10^{-4}$$

Substituindo-se agora  $R$  por seu valor obtém-se :

$$\Delta R = 120 \cdot 10^{-4} = 0.120\Omega$$

Observa-se deste exemplo (com valores reais) que para se fazer uma medida com precisão é necessário ter um dispositivo que permita captar pequenas mudanças na resistência.

A ponte de Wheatstone é o dispositivo usado na maioria dos aparelhos de medição para captar estas pequenas mudanças.

## **4.3 Circuitos dos extensômetros de resistência**

### **4.3.1.Introdução**

Para se obter a deformação sofrida por um corpo através da instrumentação com extensômetros elétricos de resistência , é necessário conectar o sensor a um circuito elétrico que permita captar as mudanças na resistência do sensor.

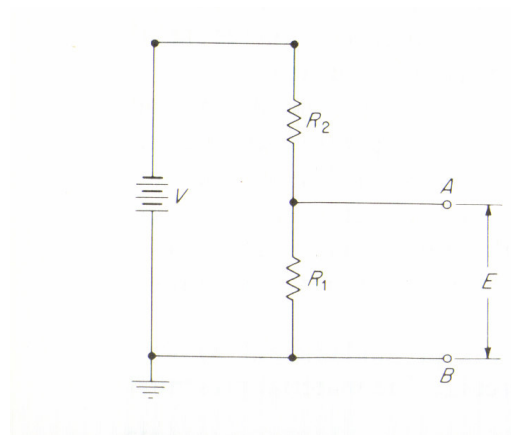
As mudanças na resistência do extensômetro são percebidos através das mudanças no potencial (voltagem) da corrente que circula pelo circuito ao qual se encontra conectado o extensômetro.



Os circuitos elétricos conectados a extensômetros mais usuais são os chamados circuito de potenciômetro e a ponte de Wheatstone. Em função das configurações que adotem estes circuitos, as mudanças de resistência são obtidas através dos registros de voltagem entre dois pontos estratégicos do circuito. Assim a grandeza  $\Delta R/R$  é obtida pela medição de um sinal de voltagem  $\Delta E$  o qual pode ser medido e gravado em diferentes aparelhos.

#### 4.3.2 O circuito do potenciômetro e sua aplicação na medição de deformações

Na Figura 4.8 apresenta-se um esquema do circuito de potenciômetro. O circuito apresentado é umas das soluções rotineiras das análises experimentais .



**Figura 4-8 Circuito de potenciômetro (DOVE & ADAMS, 1964)**

A equação do circuito que fornece a variação de voltagem  $E$  em função das resistências é dada pela expressão :

$$E = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot V = \frac{1}{1 + r} \cdot V \quad (4.10)$$

onde  $r = R_2/R_1$

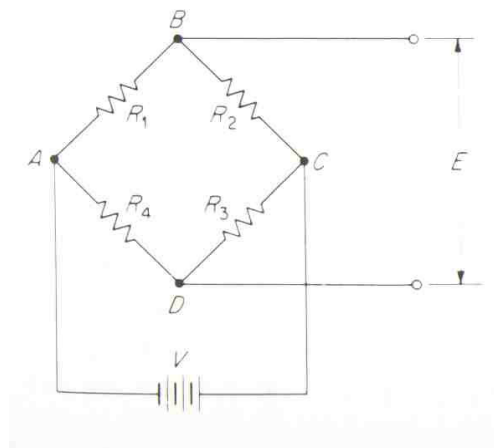
É assim que a variação de voltagem pode-ser expressa conforme a seguinte equação:

$$\Delta E = \left( \frac{R_1 + \Delta R_1}{R_1 + \Delta R_1 + R_2 + \Delta R_2} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) \cdot V \quad (4.11)$$

Selecionando-se adequadamente os valores das resistências, obtêm-se as variações de voltagem que fornecem os dados necessários para obter as deformações nos pontos em que foram colados os extensômetros.

### 4.3.3 Circuito de ponte de Wheatstone

O circuito de Wheatstone é usado tanto para medições dinâmicas quanto estáticas. Apresenta-se um esquema do circuito na Figura 4.9, sendo que esta foi a solução adotada na instrumentação da estrutura.



**Figura 4-9 Esquema do circuito de Wheatstone (DOVE & ADAMS, 1964).**

A equação que vincula a diferença de potencial (voltagem) entre os pontos A e B do circuito mostrado na Figura 4.9 é :

$$V_{AB} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot V \quad (4.12)$$

onde  $V_{AB}$  é a diferença de potencial procurada.

De forma similar, para os pontos  $A$  e  $D$  a diferença de potencial é:

$$V_{AD} = \frac{R_4}{R_4 + R_3} \cdot V \quad (4.13)$$

A voltagem de saída da ponte obedece à seguinte equação:

$$E = V_{BD} = V_{AB} - V_{AD} \quad (4.14)$$

É considerado que o circuito está em equilíbrio quando  $E=0$ ; desta forma verifica-se a seguinte expressão:

$$R_1 \cdot R_3 = R_2 \cdot R_4 \quad (4.15)$$

É essa característica que permite usar o circuito de Wheatstone nos ensaios estáticos.

Considerando a ponte inicialmente em equilíbrio e em seguida variando-se os valores nas resistências (desprezando-se as mudanças de ordem maior que um), a equação da ponte completa resulta em:

$$\Delta E = V \cdot \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} \cdot \left( \frac{\Delta R_1}{R_1} - \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_3}{R_3} - \frac{\Delta R_4}{R_4} \right) \quad (4.16)$$

Seja  $r = R_2/R_1$ , então a equação básica que governa o comportamento do circuito de Wheatstone na medição de deformações, através das mudanças na resistência dos extensômetros, resulta em :

$$\Delta E = V \cdot \frac{r}{(1+r)^2} \cdot \left( \frac{\Delta R_1}{R_1} - \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_3}{R_3} - \frac{\Delta R_4}{R_4} \right) \quad (4.17)$$

#### 4.3.4 Sensibilidade do circuito de ponte de Wheatstone

A sensibilidade do circuito é definida segundo a expressão:

$$S_c = \frac{\Delta E}{\varepsilon} = \frac{V}{\varepsilon} \cdot \frac{r}{(1+r)^2} \cdot \left( \frac{\Delta R_1}{R_1} - \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_3}{R_3} - \frac{\Delta R_4}{R_4} \right) \quad (4.18)$$

Em um circuito com  $n$  extensômetros iguais, verifica-se a seguinte equação:

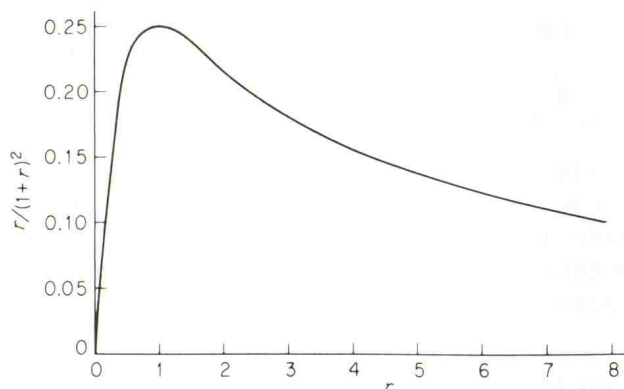
$$\sum_1^n \frac{\Delta R_i}{R_i} = n \cdot \frac{\Delta R}{R} = n \cdot S_g \cdot \varepsilon \quad (4.19)$$

Lembrando que  $S_g$  é a sensibilidade do extensômetro, a relação entre a sensibilidade do circuito e do extensômetro fica sendo :

$$S_c = V \cdot \frac{r}{(1+r)^2} \cdot n \cdot S_g \quad (4.20)$$

Da equação 4.20 conclui-se que a sensibilidade do circuito é função do número de extensômetros  $n$ , da sensibilidade do extensômetro  $S_g$ , da voltagem  $V$  e da relação  $r = R_2/R_1$ .

Define-se a eficiência do circuito segundo a relação  $r/(1+r)^2$ . Na Figura 4.10 mostra-se o gráfico da eficiência em função da relação de resistências  $r$ .



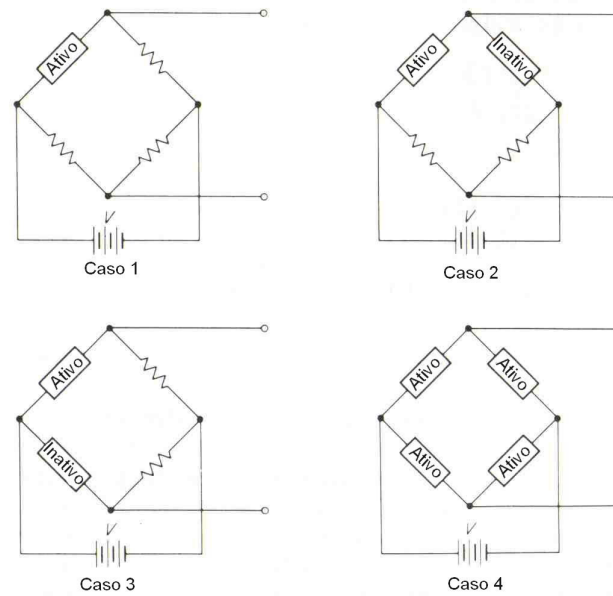
**Figura 4-10 Gráfico eficiência versus relação de resistências (DALLY & RILEY,1978)**

Analisando-se a figura 4.10, pode-se notar que a máxima eficiência é obtida quando  $r$  é igual a um, atingindo o valor de 0,25.

Da equação 4.20 pode-se observar que em um circuito de quatro resistências, o circuito pode atingir uma sensibilidade igual a  $S_g \cdot V$  quando a relação de resistências é igual a um. Quando o circuito tem somente um extensômetro, a máxima sensibilidade que este pode atingir é igual a  $S_g \cdot V/4$ .

É evidente que a seleção das resistências e da voltagem são relevantes na hora de procurar a maior eficiência do circuito.

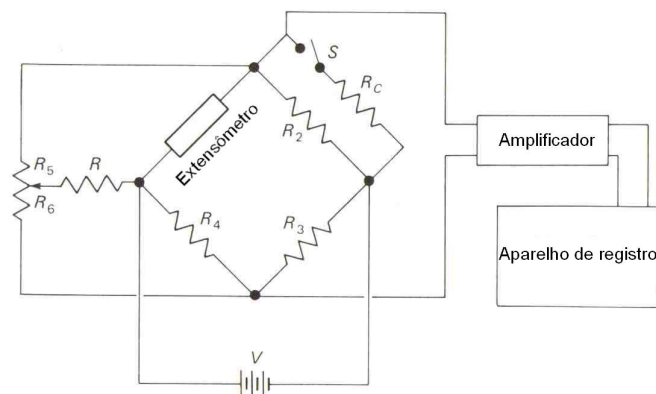
Existem diferentes configurações possíveis do circuito de Wheatstone. Na Figura 4.11 apresentam-se as configurações mais usuais.



**Figura 4-11** Diferentes configurações do circuito ponte de Weatstone

#### 4.3.5 Calibragem do circuito de extensômetros

Os circuitos têm como componentes: os extensômetros, uma fonte de energia, resistências auxiliares, um amplificador e um dispositivo de registro de dados. Apresenta-se na Figura 4.12 a seguir um esquema com os componentes de um circuito típico de extensômetros.



**Figura 4-12** Componentes de uma instrumentação com P. de Weatstone

Uma calibragem simples do sistema pode ser efetuada a partir das leituras do sistema relacionadas com as deformações que as produzem.

Seja a resistência  $R_c$  fixa e conhecida, colocada em paralelo com a resistência  $R_2$ . A resistência equivalente é dada pela expressão:

$$R_{2e} = \frac{R_2 \cdot R_c}{R_2 + R_c} \quad (4.21)$$

Manipulando-se as equações do circuito vistas anteriormente, encontra-se que a diferença de potencial produzida por  $R_c$  é :

$$\Delta E = \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_c} V \quad (4.22)$$

Com o extensômetro colocado na posição de  $R_1$  encontra-se que a diferença de potencial produzida é dada pela equação:

$$\Delta E = \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} \cdot (S_g \cdot \varepsilon) \cdot V \quad (4.23)$$

Combinando-se as equações 4.22 e 4.23 para a mesma diferença de potencial na saída, resulta na equação :

$$\varepsilon_c = \frac{R_2}{S_g \cdot (R_2 + R_c)} \quad (4.24)$$

onde  $\varepsilon_c$  é chamada de deformação de calibragem.

Na maioria das aplicações experimentais a calibragem já é inclusa nos programas de aquisição, mas, quando é montado um circuito não-comercial, é necessário conhecer o funcionamento geral no momento da análise da aquisição.

#### 4.4. Transdutores para captação de vibrações mecânicas

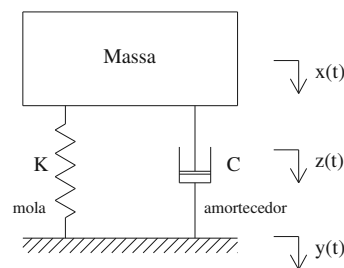
##### 4.4.1 Introdução

Analogamente à medição de deformações, a medição das variáveis originadas no movimento de diferentes corpos pode ser feita com transdutores mecânicos, óticos ou elétricos.

Os transdutores elétricos necessitam de um equipamento adicional importante, para o correto funcionamento da aquisição. Estes transdutores permitem transformar oscilações mecânicas em sinais elétricos, os quais na maioria dos casos são proporcionais às vibrações estudadas.

##### 4.4.2 Princípio de funcionamento

O modelo mecânico que fornece a base teórica para a construção do transdutor é apresentado na Figura 4.13 abaixo.



**Figura 4-13 Esquema mecânico de um transdutor de vibrações**



Assim o deslocamento a ser caracterizado  $z(t)$  e as respectivas derivadas no tempo (velocidades e acelerações) são a resposta a uma excitação do sistema massa-mola-amortecedor (HEINDRICH, 2004).

Fazendo-se um diagrama de corpo livre da massa do sistema, a equação diferencial de equilíbrio é dada pela expressão:

$$m \cdot \ddot{x}(t) = -c \cdot (\dot{x}(t) - \dot{y}(t)) - k \cdot (x(t) - y(t)) \quad (4.25)$$

Considerando a coordenada relativa  $z(t)=x(t)-y(t)$ , a equação 4.25 representada em termos da coordenada relativa é segundo a expressão:

$$m \cdot \ddot{z}(t) + c \cdot \dot{z}(t) + k \cdot z(t) = -m \cdot \ddot{y}(t) \quad (4.26)$$

Aplicando-se a transformada de Laplace à equação 4.26, chega-se na seguinte equação:

$$m \cdot s^2 \cdot Z(s) + c \cdot s \cdot Z(s) + k \cdot Z(s) = -m \cdot s^2 \cdot Y(s) \quad (4.27)$$

Reordenando a equação 4.27 resulta em:

$$\frac{Z(s)}{Y(s)} = \frac{-m \cdot s^2}{m \cdot s^2 + c \cdot s + k} = H_{z-y}(s) \quad (4.28)$$

onde  $(H_{z-y}(s)=Z(s)/Y(s))$  é chamada função de transferência no domínio de Laplace. Para-se obter a função de transferência no domínio das frequências (Transformada de Fourier) aplica-se uma troca de variáveis ( $s=i\omega$ ) na equação 4.28, chegando-se na equação:

$$\frac{Z(i \cdot \omega)}{Y(i \cdot \omega)} = \frac{m \cdot \omega^2}{(k - m \cdot \omega^2) + i \cdot c \cdot \omega} = H_{z-y}(i \cdot \omega) \quad (4.29)$$

A função de transferência pode também ser expressa em termos de amplitude e fase. Assim usando-se a notação exponencial em números complexos, a função de transferência pode ser expressa pelo quociente de módulos (HEINDRICH, 2004) :

$$\frac{Z(\omega)}{Y(\omega)} = \frac{m \cdot \omega^2}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c \cdot \omega)^2}} = H_{z-y}(\omega) \quad (4.30)$$

#### 4.4.3 Acelerômetros

Os acelerômetros são transdutores elétricos utilizados para captar oscilações mecânicas. Estes transdutores procuram transformar as oscilações mecânicas em sinais elétricos proporcionais.

O princípio de funcionamento dos acelerômetros pode ser descrito pelo modelo de massa- mola – amortecedor apresentado no item anterior. O sinal mecânico a ser capturado é a aceleração na base do transdutor. Este sinal é captado como uma diferença de potencial proporcional à aceleração sofrida na base do transdutor.

De acordo com as características do fenômeno a captar, os acelerômetros elétricos são feitos com um cristal piezoelétrico que fornece uma diferença de potencial quando este é deformado.

Geralmente os acelerômetros são transdutores com frequência muito altas devido ao fato de terem massa pequena e rigidez alta.

A equação de movimento do transdutor em termos de módulo (amplitude e fase) fica sendo:

$$Z(\omega) = \frac{\ddot{Y}(\omega)}{\omega_n^2 \sqrt{(1-r^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot r)^2}} \quad (4.31)$$

onde  $r = \omega/\omega_n$ . A equação 4.31 expressa a deformação do sensor ( $Z(\omega)$ ) em função da excitação (aceleração) na base em que se encontra fixo o transdutor.

Como a frequência natural do transdutor é muito maior que a frequência da vibração, em um intervalo de frequências considerável, o quociente  $r$  é muito pequeno, aproximando-se a zero.

A equação 4.31 pode ser reformulada, admitindo-se  $r=0$ :

$$Z(\omega) \approx \frac{\ddot{Y}(\omega)}{\omega_n^2} \quad (4.32)$$

onde a aceleração da base é diretamente proporcional à deformação do sensor e portanto ao sinal elétrico que resulta da deformação do cristal piezoelétrico.

Utilizando o método dos elementos finitos, revisto no capítulo anterior, discretizou-se a torre de telecomunicações em estudo conforme apresentado no próximo capítulo e, a partir dos conceitos de análise experimental realizados neste capítulo, instrumentou-se a torre em estudo, conforme será visto no próximo capítulo.

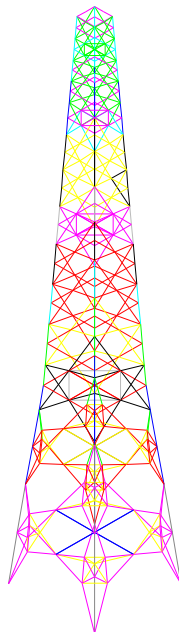
## **5 MODELO E INSTRUMENTAÇÃO DA TORRE DE TELECOMUNICAÇÕES EM ESTUDO.**

### **5.1 Descrição da estrutura da torre**

A torre de telecomunicações encontra-se na cidade de Montevidéu, Uruguai, próxima à baía do porto, sendo que é nesta faixa perto do mar aonde ocorrem os ventos mais fortes. Os prédios próximos à estrutura são relativamente baixos e sob a estrutura estão instaladas antenas receptoras e transmissoras para as telecomunicações e para telefonia celular.

A torre apresenta uma altura total de 77,6 metros, formando nos quatro pontos de apoio um quadrado de 13,6 m de comprimento. As seções horizontais são quadradas e decrescentes conforme aumenta a altura, sendo que no topo da torre o quadrado formado pelas barras é de 2,8 metros.

Podem-se diferenciar dois grandes blocos com características diferentes, conforme varia a disposição das barras. O primeiro bloco vai desde o apoio da estrutura até os 27 m de altura e é formado pelos dois primeiros tramos. Acima dele apóia-se o segundo bloco formado por 12 tramos, conforme está ilustrado na figura que segue.



**Figura 5-1 Esquema geral da torre de comunicações**

## 5.2 Características da estrutura e modelo estrutural

No anexo 1 é apresentado o modelo estrutural da torre, discretizado por elementos finitos de barra, sendo os pontos de encontro de cada barra definidos como nós da torre, cujas coordenadas nodais estão expressas em centímetros.

As propriedades mecânicas do aço não foram obtidas experimentalmente. Para a modelagem numérica adotou-se o módulo de elasticidade do aço  $E=200 \text{ GPa}$ , o coeficiente de Poisson  $\nu=0,3$ , e a densidade  $\rho=7850 \text{ kg/m}^3$ .

A numeração dos nós e a tabela de conectividade dos nós nos elementos estão apresentadas no Anexo 2.

Nas figuras que se seguem mostram-se imagens da torre em elevação e em planta.



**Figura 5-2 Vista lateral da torre**



**Figura 5-3 Visão da parte inferior da torre**

### **5.3 Considerações sobre a modelagem e a ligação entre as barras**

Os deslocamentos apresentados por uma estrutura estão relacionados com sua rigidez global, a qual depende da rigidez de suas ligações. O comportamento das ligações quanto à rigidez à flexão pode ser classificado em geral em três categorias : articuladas, semi-rígidas e rígidas (DO VALLE & LA ROVERE, 2003).

Portanto no caso da estrutura em estudo foram considerados o primeiro e o último caso da classificação proposta das ligações, o caso de articulação é considerado quando a torre é modelada como uma treliça espacial, e o caso de ligação rígida quando a estrutura é modelada como pórtico espacial.

Para considerar as ligações semi-rígidas seria necessário obter-se uma caracterização experimental do tipo de ligação a utilizar, a qual não pôde ser realizada para o presente estudo.

Na figura que se segue apresenta-se um detalhe do encontro de barras no nível de base da estrutura.



**Figura 5-4 Detalhe do encontro das barras.**

Existem alguns pontos que não teriam o número correto de restrições quando a estrutura é considerada como treliça espacial (pontos de encontro de duas barras). Nestes casos foi considerado um apoio simples que restringe o deslocamento perpendicular ao plano formado pelas barras concorrentes.

#### **5.4 Instrumentação da estrutura**

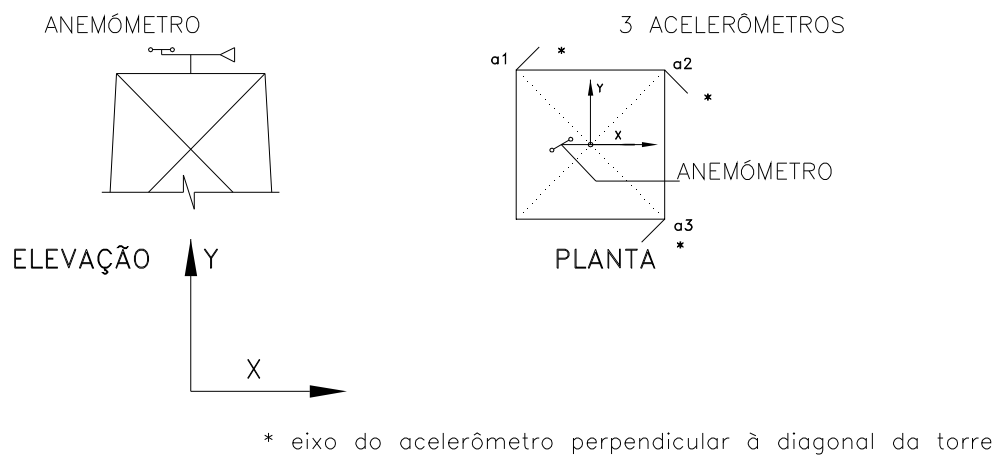
A torre foi instrumentada de acordo com o seguinte esquema :

Zona A: É a zona superior da torre, aonde foram colocados três acelerômetros, com precisão  $0,2 \text{ cm/s}^2$  ( $100 \text{ mV-g}$ ) e um sensor para medir a velocidade e o ângulo do vento (anemômetro).

O anemômetro é o modelo 09101 é fabricado pela empresa R.M. Young Company e os acelerômetros são da firma Dytran Instruments, os quais estão hermeticamente fechados e possuem um amplificador de sinal dependendo dos valores a serem obtidos.

O esquema da instrumentação na parte superior está mostrado na Figura 5.5 a seguir.

## ZONA A



**Figura 5-5 Instrumentação da zona superior**

Nas figuras que se seguem (5.6 e 5.7) são mostrados os sensores colocados no topo da torre:



**Figura 5-6 Detalhe do anemômetro**

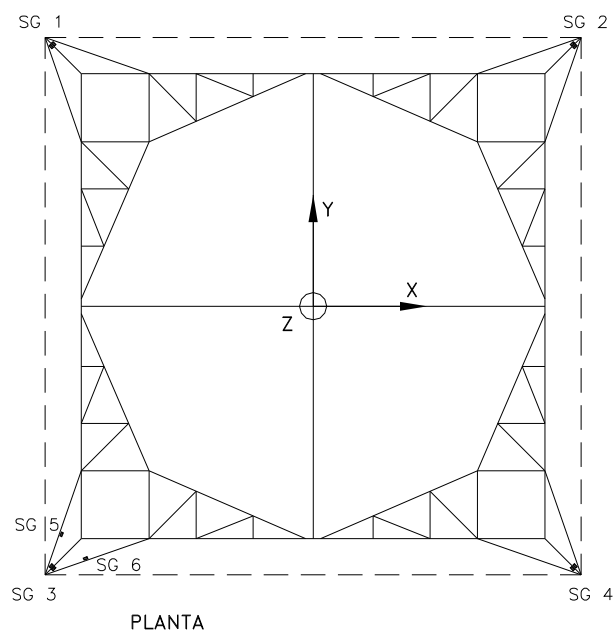


**Figura 5-7 Detalhe do acelerômetro**

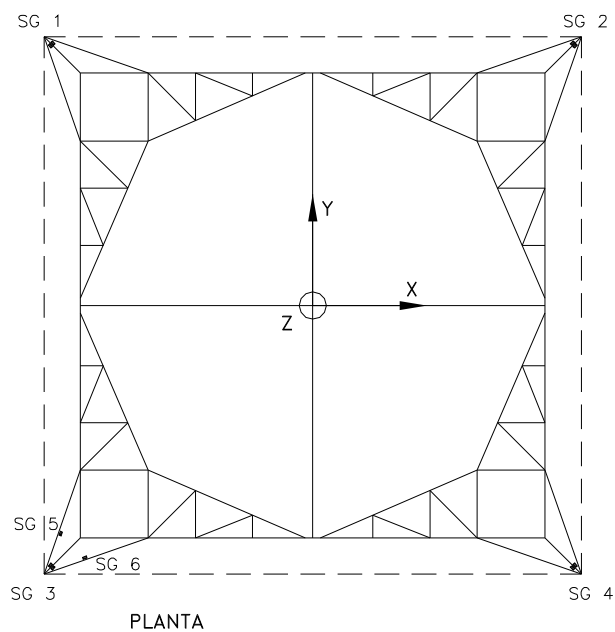
Zona C: É a base da torre, aonde foram colocados um termômetro e os extensômetros elétricos de resistência nas barras que suportam a estrutura. O medidor de temperatura é o modelo 41002, que também é fornecido pela empresa R.M. Young Company. Os extensômetros elétricos de resistência são unidirecionais e foram fornecidos pela empresa VYSAY Co.



O esquema de instrumentação na zona inferior está ilustrado nas Figuras 5.8 e 5.9 a seguir.



**Figura 5-8 Instrumentação da zona inferior**

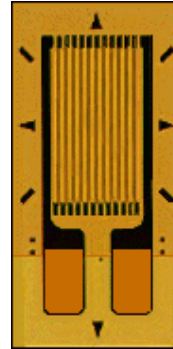


**Figura 5-9 Detalhe em planta da instrumentação da zona inferior**

Detalhes dos instrumentos colocados na zona inferior da torre estão mostrados nas Figuras 5.10 e 5.11 abaixo.



**Figura 5-10 Detalhe do sensor de temperatura**

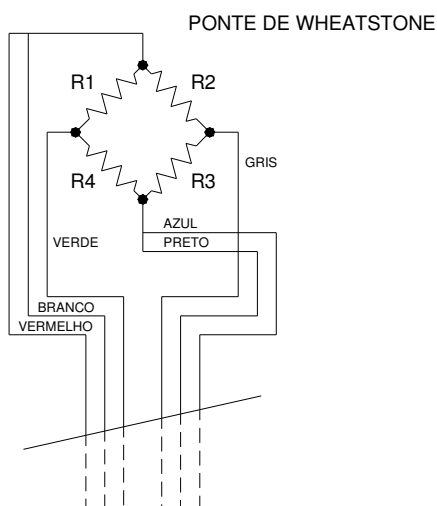


**Figura 5-11 Detalhe dos extensômetros**

Os extensômetros elétricos de resistência instalados para medir as deformações relativas permitem analisar efeitos dinâmicos e estáticos, apresentam uma boa sensibilidade e acurácia para os intervalos previstos de funcionamento.

Os extensômetros foram conectados segundo uma ponte de Wheatstone que permitem compensar os efeitos de temperatura e os efeitos de flexão.

A Figura 5.12 apresenta o esquema de conexão dos extensômetros utilizado na montagem na estrutura em estudo, onde as posições R2 e R4 são as que fazem a compensação dos efeitos de temperatura.



**Figura 5-12 Detalhe da circuito usado na conexão dos extensômetros.**

Nas figuras que se seguem (5.13 e 5.14) apresenta-se um detalhamento dos extensômetros colados na base da torre e da colocação do sensor de temperatura também na base da estrutura.



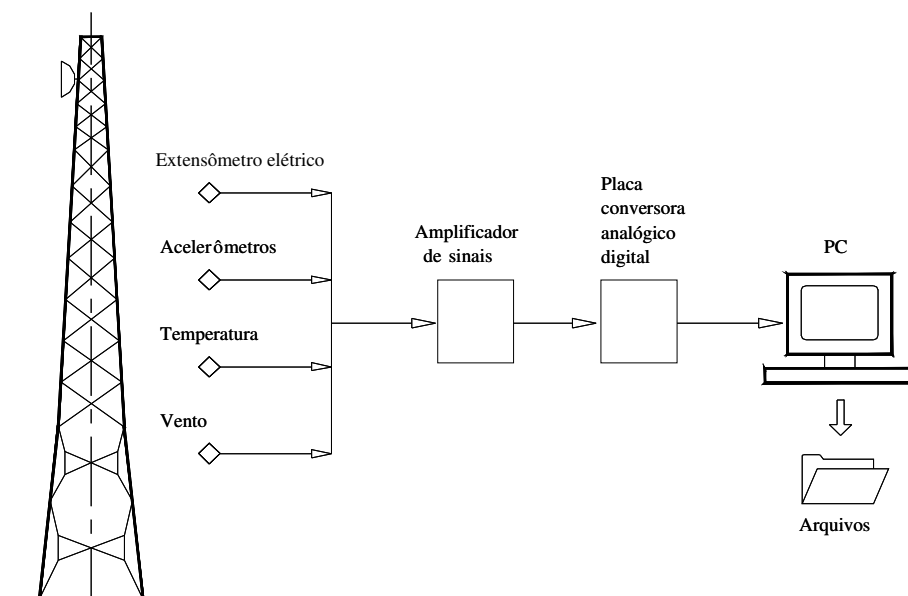
**Figura 5-13 Detalhe dos extensômetros colados na base**



**Figura 5-14** Detalhe dos sensor de temperatura

### 5.5 Esquema do sistema de monitoramento

O sistema de monitoramento para aquisição de dados funciona segundo o esquema apresentado na Figura 5.15 abaixo :



**Figura 5-15** Esquema do sistema de aquisição de dados

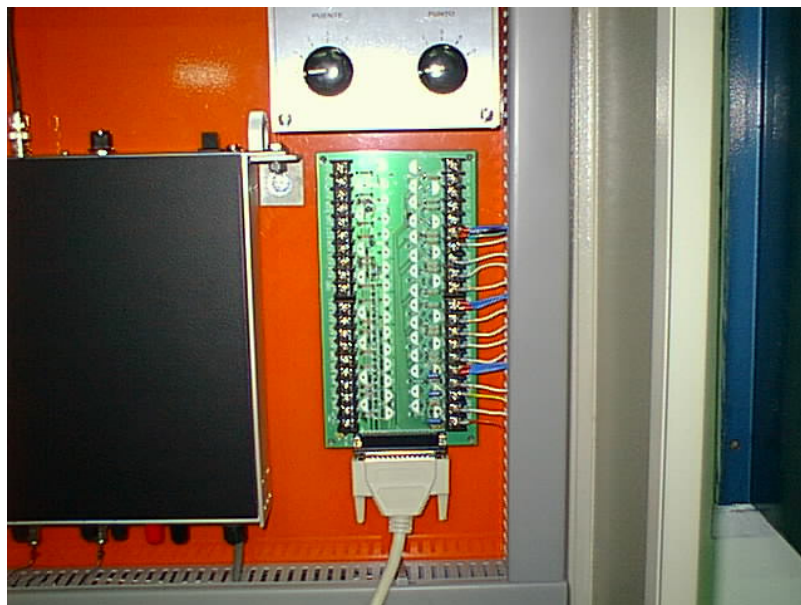
O sinal adquirido de cada um dos sensores é passado por um amplificador de sinais. Na saída do amplificador conecta-se uma placa conversora analógico digital, logo a placa converte o sinal em volts (entrada da placa) numa saída digital que se armazena no disco rígido do microcomputador, aonde são gerados os arquivos da aquisição de todos os sensores.

A placa utilizada conta com 24 canais, e permite processar informação de 24 sensores e depois passar a arquivos digitais, sendo usado o modelo PCI-1713.

Na figuras que se seguem (5.16, 5.17 e 5.18) são mostradas a instalação dos circuitos e a placa conversora instalada no sistema de monitoramento.



**Figura 5-16 Circuitos da placa amplificadora do sinal de acelerômetros e da placa conversora analógico digital**



**Figura 5-17 Detalhe da placa conversora analógico digital**



**Figura 5-18 Detalhe dos circuitos de amplificação dos acelerômetros e extensômetros**

## 5.6 Características principais do programa computacional de aquisição

O programa de aquisição contínua é estruturado da seguinte forma:

- Numa primeira etapa realizam-se aquisições por aproximadamente 45 segundos com uma quantidade de 500 leituras por segundo, obtendo-se aproximadamente 20520 dados neste intervalo de tempo.
- A informação adquirida nestes 45 segundos é processada nos seguintes 15 segundos, obtendo-se assim um resumo da aquisição em um tempo global de um minuto nas primeiras duas etapas; esta informação é gravada em um arquivo provisório.
- A cada 15 minutos realiza-se uma síntese da aquisição cuja informação depois é condensada em um arquivo que é gravado no disco rígido do microcomputador; o arquivo tem a informação de 24 horas de aquisição agrupada nos intervalos de 15 minutos.

O arquivo residente no disco rígido um arquivo de texto, contendo a informação condensada a cada 15 min. , por cada canal de aquisição.

Esses arquivos são gravados com um nome relativo ao dia em que se encontra a aquisição; assim para o primeiro dia grava-se o arquivo com nome Dato1.sol, o segundo com nome Dato2.sol e assim sucessivamente.

As rotinas do programa computacional foram desenvolvidas na linguagem de programação FORTRAN. Os nomes das rotinas (que são apresentadas no CD anexo do trabalho ) da aquisição são :

- AnAg1 .exe
- AnAg2.exe
- AnAg3.exe

Embora os arquivos gravados guardam grandes quantidades de informação, seu formato permite que ocupem um lugar muito pequeno de memória, ocupando cada arquivo, com informação resumida de um dia, 438 kB de memória.

A aquisição pode funcionar em forma autônoma durante 100 dias, sendo necessário, depois de passado este período retirar os arquivos e reiniciar o sistema para que continue a aquisição.

Foi desenvolvida também uma rotina que resume as informações cada quinze dias, sendo gravada no disco rígido do microcomputador (AnAg4.exe).

Por cada arquivo diário (num total de até 15 arquivos) é guardada a informação conforme mostrado na Tabela 5.1

**Tabela 5-1 Informação resumida cada 15 dias**

Velocidade máxima e mínima do vento
Máxima velocidade média e mínima velocidade média do vento
Média das velocidades médias do vento
Por cada extensômetro, leitura máxima e mínima
Por cada extensômetro, máxima das médias e mínima das médias
Por cada extensômetro, média das médias das leituras
Momentos fletores na base (máximos, mínimos, máx.das médias, min.das médias)
Frequências naturais na direção das diagonais principais da torre (primeira e segunda)
Canal de Temperatura (máximo, mínima, média das médias)
Momentos Torsões na base da estrutura
A partir dos sinais dos acelerômetros processa-se a frequência natural de torção da estrutura

### 5.6.1 Tratamento dos sinais

O objetivo principal da aquisição é obter a caracterização dinâmica da estrutura em termos de suas frequências naturais, e de algumas respostas no tempo dos



extensômetros e acelerômetros colocados. A análise no domínio da frequência foi o caminho escolhido para obter a caracterização dinâmica procurada.

O sinal adquirido recebe um processo que permite jogar fora da aquisição as frequências que sujam a leitura. É assim que a aquisição é passada por uma filtragem de passa-baixa e suavização que elimina as frequências altas, obtendo-se assim um sinal mais limpo e fácil de estudar.

Os dados adquiridos são discretos, e o número de dados por aquisição é fornecido em potências de dois, de modo a possibilitar a aplicação ao sinal discreto a ferramenta de transformada rápida de Fourier.

Aplica-se uma janela de Hanning para evitar os efeitos do corte do sinal e aplica-se a transformada rápida de Fourier (FFT) ao sinal, obtendo-se assim no arquivo da aquisição, além dos dados transformados da leitura (voltagem-grandeza estudada), a resposta no campo das frequências das variáveis estudadas.

A informação obtida assim por cada um dos sensores é uma aproximação à resposta no domínio do tempo (informação resumida a cada 15 minutos) e a resposta no campo das frequências para as diferentes velocidades do vento atuante na estrutura.

Os resultados da aquisição de dados bem como os resultados da análise dinâmica da torre em estudo, estão apresentados no próximo capítulo.

## **6 RESULTADOS DA ANÁLISE NUMÉRICA E DO MONITORAMENTO DA TORRE.**

### **6.1 Introdução**

1. A integridade de uma estrutura monitorada com base em sua resposta dinâmica não é uma experiência nova em engenharia civil, este tipo de análise é baseado no fato de que os modos e as frequências de vibração naturais de uma estrutura são características fundamentais e não mudam com o tempo (em caso que não exista dano) (IDICHANDY, GANAPATHY & SRINIVASA 1987).

Os pesquisadores envolvidos nestes tipos de pesquisa, além de se basearem dados recolhidos pela análise experimental, também usam métodos analíticos ou numéricos para estudar o comportamento da estrutura. Analisam-se os resultados da análise experimental junto aos resultados da análise numérica, testando os modelos numéricos e o funcionamento dos sistemas de aquisição.

No trabalho apresentado por IDICHANDY, GANAPATHY & SIRINIVASSA em 1987 o modelo analítico proposto é um modelo de elementos finitos de barra de dois nós com seis graus de liberdade por nó (pórtico espacial). Existem vários pontos em comum entre esse trabalho e a presente dissertação: as estruturas também são formadas por barras no espaço (plataforma marítima de petróleo) e estão submetidas a esforços aleatórios, tanto forças causadas por ondas e correntes marítimas como forças causadas pela ação do vento.

O programa utilizado nas análises foi o SAP, na época era a versão IV, e foram encontrados dez autovalores com um tempo de processamento de 20 minutos. Atualmente a velocidade dos processadores dos computadores é muito maior e os tempos de processamento têm se reduzido fortemente, podendo-se obter um número maior de autovalores num tempo muito menor. O programa desenvolvido para este trabalho é testado com o SAP versão 8, seguindo a linha de outros trabalhos.

No ano 2003, Li, Yang, Wong & Jeary publicaram um trabalho sobre as vibrações induzidas pela ação do vento num prédio de grande altura (“super tall

building”). Neste trabalho foi feita uma análise numérica e os resultados obtidos analiticamente foram comparados com os dados obtidos por um sistema de monitoramento montado na estrutura, sendo que na determinação das duas primeiras frequências da estrutura encontraram uma diferença da ordem de 20% entre os dados calculados numericamente e os dados adquiridos experimentalmente. Este trabalho, publicado há pouco tempo, fornece um indicador das diferenças encontradas entre os valores calculados e os valores obtidos com o sistema de aquisição (no campo de frequências).

No Brasil existem diferentes pesquisas relacionadas ao monitoramento de estruturas, podendo-se citar entre elas, o sistema de monitoramento na ponte Rio-Niteroi (BATTISTA & PFEIL, 2002). Neste trabalho algumas características da estrutura foram encontradas a partir de uma modelagem no túnel de vento, assim a resposta teórica em termos de deslocamentos da seção estudada apresentou um grau de aproximação melhor do que o trabalho de Li, Yang, Wong & Jeary.

É evidente que o comportamento real da estrutura apresenta diferenças em relação aos modelos numéricos utilizados. No entanto, os modelos numéricos, além de proporcionarem valores indicativos do comportamento real das estruturas, auxiliam na definição e verificação do sistema de instrumentação. Por outro lado, os resultados numéricos podem ser melhorados a partir dos resultados obtidos na análise experimental, possibilitando assim um processo contínuo de aprimoramento, tanto nas considerações teóricas quanto nas análises experimentais.

## **6.2 Implementação computacional – programas ESPACIAL e ITINVERSA**

Foram desenvolvidos para a presente dissertação dois programas computacionais desenvolvidos na linguagem de programação FORTRAN.

O programa ESPACIAL calcula os deslocamentos em nós, as reações de apoio e os esforços em membros de estruturas do tipo pórtico espacial.

Os dados necessários para que o programa seja executado são fornecidos como arquivos de texto e consistem em:

- Geometria da estrutura :
  - Número de nós
  - Coordenadas dos nós
  - Número de barras
  - Conectividade das barras (nó inicial, nó final, nó de referência)
  - Coordenadas dos nós de referência
- Características geométricas e mecânicas dos elementos
  - Conectividade das barras (nó inicial, nó final, nó de referência)
  - Características geométricas das barras (area, momentos de inércia, material)
- Materiais usados
  - Módulos de elasticidade e cisalhamento, densidade do material por unidade de volume.
- Restrições nos apoios
- Forças aplicadas

Os resultados fornecidos pelo programa também são arquivos de texto e são gravados no disco do computador com um nome fornecido pelo usuário. As matrizes de rigidez, de massa agrupada, de massa consistente e massa discreta são gravadas no disco do computador automaticamente, com formato de arquivos de texto.

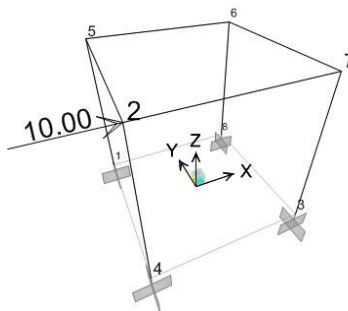
O programa que calcula as frequências naturais e os modos normais de vibração é o programa ITINVERSA.

Este programa resolve o problema geral de autovalores e autovetores, com as matrizes de massa e de rigidez obtidas através do programa ESPACIAL. A saída deste programa é em um arquivo de texto cujo nome é escolhido pelo usuário. O arquivo de saída fornece a quantidade de autovalores e de autovetores desejada, os quais são obtidos pelo método de iteração inversa descrito no Capítulo três.

### 6.3 Comparação de resultados entre os programas desenvolvidos e o programa SAP 2000

#### 6.3.1 Descrição da estrutura usada na comparação dos resultados da análise estática e os resultados de frequência natural em pórticos com barras simétricas

Para verificar o funcionamento dos programas ESPACIAL e ITINVERSA desenvolvidos nesta dissertação, compararam-se os seus resultados numéricos com os obtidos pelo programa comercial SAP 2000. Para testar as diferenças entre os resultados fornecidos pelos programas foi escolhido um exemplo simples de um pórtico espacial, inicialmente submetido a uma carga horizontal estática no topo e em seguida comparando-se as frequências naturais. Na Figura 6.1 apresenta-se um esquema do pórtico espacial analisado (COMPUTER AND STRUCTURES Inc, 1997).



**Figura 6-1 Esquema do pórtico espacial usado**

A estrutura tem oito nós e oito barras, sendo as coordenadas dos nós apresentadas na seguinte tabela :

**Tabela 6- 1 Coordenadas dos nós do pórtico espacial da Figura 6.1**

Nó	X(m)	Y(m)	Z(m)
1	-1,5	1,5	0
3	1,5	-1,5	0
4	-1,5	-1,5	0
8	1,5	1,5	0
2	-1,5	-1,5	3
5	-1,5	1,5	3
6	1,5	1,5	3
7	1,5	-1,5	3

Os nós dos pilares na base estão totalmente engastados (seis graus de liberdade restringidos) e portanto os deslocamentos dos nós no topo são as incógnitas do problema. O material usado nas barras é o aço, com as seguintes propriedades :

**Tabela 6-2 Propriedades do material do pórtico espacial da Figura 6.1**

$E$ (GPa)	$G$ (GPa)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
200	77	7850

onde  $E$  é o módulo de elasticidade do material,  $G$  é o módulo de cisalhamento e  $\rho$  é a densidade por unidade de volume.

Na primeira comparação todas as barras do pórtico têm a mesma seção, sendo usada uma seção tubular (simétrica), portanto o centro de cisalhamento e o baricentro coincidem num mesmo ponto. São apresentadas na Tabela 6.3 as propriedades da seção:

**Tabela 6-3 Propriedades da seção tubular do pórtico espacial da Figura 6.1**

$A$ (m <sup>2</sup> )	$J$ (m <sup>4</sup> )	$I$ (m <sup>4</sup> )
2,914 e-3	1,577 e-5	7,783 e-6

onde  $A$  é a área da seção,  $J$  é o momento de inércia polar e  $I$  é o momento de inércia respeito dos eixos de simetria da seção, sendo igual para qualquer eixo que passe pelo centro da barra (seção tubular). O carregamento externo considerado é uma força horizontal aplicada no nó 2 de 10 kN segundo a direção X.

### 6.3.2 Comparação entre resultados para estrutura com barras de seção simétrica

Na Tabela 6.4 estão apresentados os deslocamentos dos nós no topo, plano  $Z=3$  m, calculados com o SAP e com o programa desenvolvido na dissertação (ESPACIAL). As diferenças entre os resultados apresentadas são calculadas relativamente aos resultados do programa SAP.

**Tabela 6-4 Comparação dos deslocamentos em estruturas com barras de seção simétrica**

Nó	Programa/ Diferença	$v_x$ (m)	$v_y$ (m)	$v_z$ (m)	$\theta_x$	$\theta_y$	$\theta_z$
2	SAP	0,00795	-0,00144	8,27E-06	1,95E-04	0,00158	0,00132
	ESPACIAL	7,93E-03	-1,43E-03	9,13E-06	1,85E-04	1,52E-03	1,31E-03
	Diferença	0%	1%	-10%	6%	4%	1%
5	SAP	0,00246	-0,00146	3,39E-06	3,05E-04	6,25E-04	0,00134
	ESPACIAL	2,43E-03	-1,43E-03	3,49E-06	3,52E-04	5,66E-04	1,31E-03
	Diferença	1%	2%	-3%	-13%	10%	3%
6	SAP	0,00246	0,00146	-1,38E-05	-1,97E-04	5,15E-04	0,00133
	ESPACIAL	2,43E-03	1,43E-03	-1,36E-05	-2,05E-04	5,65E-04	1,30E-03
	Diferença	1%	2%	1%	-4%	-9%	2%
7	SAP	0,00805	0,00146	-1,86E-05	-3,05E-04	0,00148	0,00133
	ESPACIAL	7,91E-03	1,43E-03	-1,83E-05	-3,45E-04	1,51E-03	1,30E-03
	Diferença	2%	2%	1%	-11%	-2%	2%

Pode-se observar da Tabela 6.4 que os resultados obtidos pelos dois programas são muito próximos, sendo as diferenças encontradas entre 1 e 3%, exceto nos nós onde os deslocamentos foram muito pequenos. Além deste exemplo, o programa ESPACIAL também foi verificado para alguns exemplos em comparação com resultados apresentados nos livros de métodos computacionais e elementos finitos citados nas referências (BALFOUR, 1992) e (CHANDRUPATLA & BELEGUNDU, 1999).

Comparando-se agora as frequências naturais, encontrou-se, inicialmente por meio do programa SAP, o período e a frequência fundamental da estrutura, com barras de seção simétrica:

$$T_1 = 0,091559 (s) \therefore f_1 = 10,922 (Hz)$$

Em seguida foram executados os programas ESPACIAL e ITINVERSA para calcular as frequências naturais da estrutura, considerando-se tanto a matriz de massa consistente da estrutura como a matriz agrupada .

O programa ITINVERSA, considerando a matriz de massa agrupada, forneceu os seguintes resultados:

Primeiro autovalor	4702,357 ( $\omega^2$ )
Primeira frequência	10,914 (Hz)

E para a matriz de massa consistente forneceu os seguintes resultados :

Primeiro autovalor	5331,266 ( $\omega^2$ )
Primeira frequência	11,621 (Hz)

Os resultados obtidos para a frequência fundamental são muito semelhantes quando se considera a matriz de massa agrupada da estrutura no programa ITINVERSA, com uma diferença relativa de 0,07% (em relação ao valor fornecido pelo SAP). Já para o caso em que se considera a matriz de massa consistente da estrutura, a diferença relativa entre os resultados cresce para 6,4%, mostrando assim que há diferença nos resultados, dependendo de como é considerada a matriz de massa na análise. O manual do programa SAP descreve a matriz de massa dos elementos como uma matriz diagonal, mas não está especificado se esta é a matriz de massa discreta ou a agrupada, no entanto foi verificado que o programa utiliza a matriz de massa discreta.

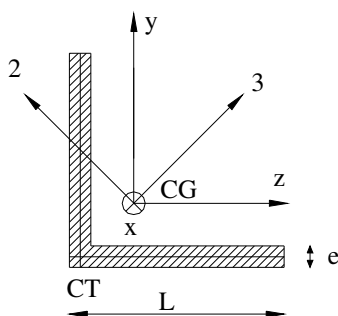
Fica assim verificado através destes exemplos o correto funcionamento dos programas desenvolvidos, tanto para análise estática como para análise de frequências



naturais. No próximo item verifica-se a influência da escolha dos eixos locais dos elementos para seções assimétricas.

### 6.3.3 Comparação entre resultados para estrutura com barras em que o centro de torção não coincide com o centróide da seção.

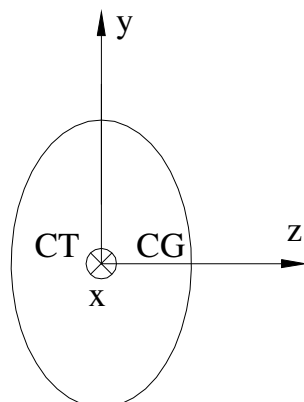
Seja uma seção em L, que não é simétrica em relação aos eixos  $y$  e  $z$ , com as características apresentadas na figura a seguir:



**Figura 6-2 Seção em L usada no elemento de pórtico espacial**

Como algumas barras da torre em estudo nesta dissertação têm o tipo de seção apresentado na Figura 6.2, e como o programa ESPACIAL não leva em conta o fato das seções não terem o centro de torção e o baricentro num mesmo ponto, foi testado no programa SAP o mesmo pórtico espacial analisado anteriormente (Figura 6.1), considerando agora que as barras têm a seção mostrada na Figura 6.2.

Para avaliar as possíveis diferenças nos resultados pelo fato da seção não ser simétrica, também foi analisado o pórtico espacial com barras de seção simétrica genérica, mas com as mesmas características geométricas da seção em L (momentos de inércia em relação aos eixos  $y$  e  $z$  e área transversal, ver Figura 6.3).



**Figura 6-3 Seção simétrica de elemento de pórtico espacial com características geométricas iguais à seção L**

Todas as barras em seção L introduzidas no pórtico têm as seguintes propriedades:

**Tabela 6-4 Propriedades da seção em L do pórtico espacial da Figura 6.1**

$L(cm)$	$e(mm)$	$A (m^2)$	$J (m^4)$	$I_y = I_z (m^4)$
10	8	$1,55 e-3$	$3,176e-8$	$1,45 e-6$

Para a análise estática em que se aplicou a mesma força horizontal no pórtico que no exemplo anterior, obteve-se para as duas seções consideradas resultados idênticos em termos de deslocamentos, não apresentando diferenças pelo fato da seção ser ou não simétrica. Da mesma forma, na análise de frequências naturais não houve diferença nos resultados, podendo-se concluir que o programa SAP não considera interação entre flexão e torção na matriz de rigidez dos elementos, independentemente da seção ser simétrica ou não.

A frequência fundamental obtida foi:

$$f_1 = 6,567 (Hz)$$

### 6.3.4 Avaliação da frequência fundamental do pórtico espacial considerando-se os eixos principais de inércia da seção assimétrica como eixos locais

A seção apresentada na Figura 6.2 tem momentos de inércia em relação aos eixos 2 e 3 diferentes dos momentos de inércia em relação aos eixos y e z. Para o perfil L descrito na Tabela 6.5 os momentos de inércia em relação aos eixos 2 e 3 são:

$$I_2 = 59,8 (cm^4)$$

$$I_3 = 230 (cm^4)$$

A frequência fundamental obtida com os eixos locais da seção coincidindo com os eixos principais de inércia, 2 e 3, foi:

$$f_1 = 4,694 (Hz)$$

Portanto a avaliação das frequências naturais de uma estrutura de barras com seções assimétricas depende dos eixos escolhidos como sistema local de coordenadas.

## 6.4 Apresentação dos dados adquiridos pelo sistema de monitoramento

### 6.4.1 Arquivo com informação gravada a cada quinze minutos

Na Tabela 6.6 é apresentado um trecho extraído de um arquivo de aquisição diária. Neste arquivo são gravadas as aquisições adquiridas num intervalo de tempo de quinze minutos.

#### 6.4.1.1 Sinal sem filtrar

**Tabela 6-5 Dados adquiridos pelo sistema de monitoramento (sinal antes da filtragem)**

500	20520	
10/24:18/43		
10/24:18/58		
22.25	21.46	21.89

249.79	180.79	211.76	
14.36	5.27	9.14	
77.15	-76.42	-.01	
175.78	-165.77	.31	
167.97	-157.47	.00	
102.93	100.00	101.39	
381.25	369.53	376.43	
101.37	97.07	99.56	
132.81	129.88	131.40	
181.84	177.15	179.71	
41.41	38.87	40.19	
178.56	175.24	177.20	
869.77	.031	223249.50	49.988
629.25	.092	168325.80	50.079
356.63	50.018	158665.20	49.927
259.02	149.994	69501.31	49.866
251.95	149.902	60694.97	50.140
231.15	244.568	39242.91	50.201
227.55	150.055	39074.81	49.805
176.79	244.659	2335.66	50.262
161.08	244.385	.00	.000
110.75	.153	.00	.000

No cabeçalho da Tabela 6.6 estão apresentados os seguintes dados:

- quantidade de leituras por segundo (500)
- quantidade de leituras processadas (20520)
- data em que foi feita a aquisição (24/10)
- hora do início e hora final em que foi feita a aquisição

Depois deste conjunto de dados, segue um grupo de dados (13 linhas) que correspondem ao sinal antes da filtragem; são gravados no arquivo os valores máximo, mínimo e médio de cada canal. Os sinais adquiridos na ordem apresentada correspondem às seguintes grandezas:

- 1- Temperatura (em graus CELSIUS)
- 2- Ângulo do vento (em graus, sendo o zero correspondente à direção norte)
- 3- Velocidade do vento (km/h)

- 4- Três valores dos acelerômetros em  $\text{cm/s}^2$  colocados no topo da estrutura
- 5- Seis valores dos extensômetros elétricos de resistência
- 6- Valor médio dos quatro extensômetros colocados na base

O terceiro conjunto de dados mostra os valores da transformada rápida de Fourier (FFT) dos sinais correspondentes aos extensômetros e aos acelerômetros antes da filtragem juntamente com os seus valores em frequências. Nota-se que as frequências dos acelerômetros antes da filtragem são valores muito próximos a 50 Hz, que é a frequência do impulso elétrico que alimenta o sistema, é por isto que a aquisição dos acelerômetros (antes da filtragem) não proporciona uma informação confiável.

#### 6.4.1.2 Sinal após a filtragem

O sinal adquirido é filtrado e processado de forma a eliminar os efeitos de bordo em frequências altas e baixas. Respeitando-se a mesma ordem do sinal antes da filtragem é elaborada a informação que corresponde ao sinal após a filtragem. Na Tabela 6.7 são apresentados os dados de cada canal depois de passar pelo filtro:

**Tabela 6-6 Dados adquiridos pelo sistema de monitoramento (sinal após a filtragem)**

22.14	21.57	21.89
249.30	181.56	211.76
14.30	5.31	9.14
13.35	-12.02	-.01
18.01	-16.59	.31
12.94	-13.49	.01
102.27	100.79	101.39
378.61	374.43	376.42
100.44	97.90	99.57
132.27	130.32	131.39
181.04	177.82	179.71
40.79	39.33	40.19
177.56	176.68	177.19
2.55	-2.23	-.01
12.84	-13.26	.31
13.02	-12.55	.00

-56.93	-63.49	-60.71	
567.94	554.66	560.24	
111.82	109.38	110.64	
431.63	.024	29.96	4.687
131.82	1.343	16.04	7.812
110.53	.073	13.73	18.433
42.78	.146	13.48	3.125
16.03	6.396	13.09	1.562
15.35	6.299	9.66	.098
12.78	.195	9.28	3.516
11.40	6.860	8.87	17.773
8.79	.244	8.70	17.725
8.03	.513	8.53	13.794
502.88	.024	118.75	6.738
167.79	.073	111.94	3.369
62.65	.220	70.27	4.883
58.91	.122	68.85	2.905
50.54	1.318	67.90	1.562
44.48	.171	66.86	3.149
41.88	.293	66.75	5.713
36.76	.342	63.81	4.468
32.97	.488	63.35	3.955
32.71	.903	63.32	8.032
64.55	.024	920.71	1.562
32.18	.073	631.00	4.687
16.21	.122	253.26	7.812
7.63	2.417	146.38	10.937
6.63	2.466	145.12	1.123
4.86	2.856	141.24	.952
4.75	6.396	80.82	1.001
4.73	.513	78.48	1.172
4.42	2.515	52.78	1.880
3.36	6.860	43.46	5.054

No conjunto de dados ao final da tabela aparecem as FFT das aquisições e o valor em frequências de cada uma delas. Nota-se que o sinal dos acelerômetros apresenta uma coerência maior após a aplicação do filtro.

As frequências captadas pelos acelerômetros são em geral maiores que as captadas pelos extensômetros, portanto a aquisição dos extensômetros é fundamental para captar as primeiras frequências, e, como será visto neste capítulo, há uma coerência destas medidas apresentadas neste trabalho. Baseando-se na confiabilidade da aquisição

destes sensores, será feita a comparação entre o sinal adquirido pelo sistema com as primeiras frequências obtidas pelos métodos numéricos.

## **6.5 Gráficos da aquisição de diferentes canais**

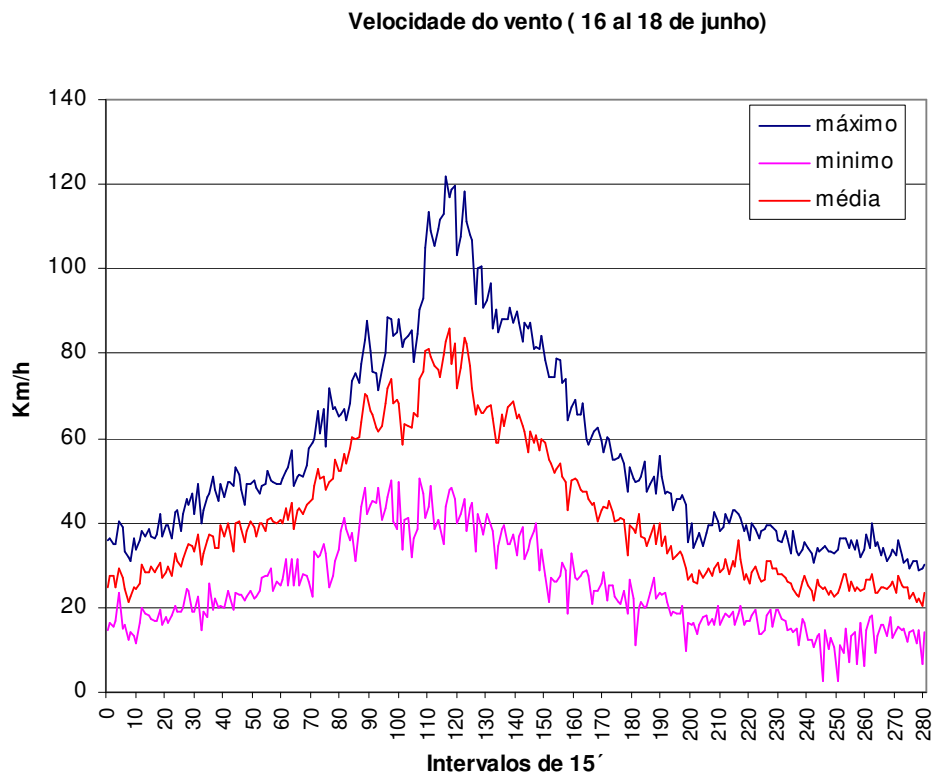
### **Solicitação causada por fortes ventos sobre a torre**

Uma vez instalado o sistema de monitoramento, as condições para processar a aquisição de dados permitiram captar um forte temporal ocorrido na cidade de Montevideu onde está localizada a torre.

#### **6.5.1. Gráfico do vento em função do tempo**

As velocidades do vento no topo da torre alcançaram valores máximos da ordem de 120 Km/h. Na Figura 6.4, apresenta-se o gráfico de velocidade do vento captada em intervalos de quinze minutos. Os valores máximo, mínimo e médio da velocidade apresentam coerência em relação aos valores informados pelo Instituto de Meteorologia Nacional do Uruguai.

O temporal foi importante em termos de solicitações de vento ocorridas na região, observando-se que a velocidade máxima registrada é muito próxima da velocidade de projeto recomendada pela norma da ação do vento sob construções (UNIT 50, 1984) que é de 158 km/h, sendo menor do que a velocidade característica que foi utilizada pelos calculistas no projeto da torre, 162 km/h (MARELLI, 1974).

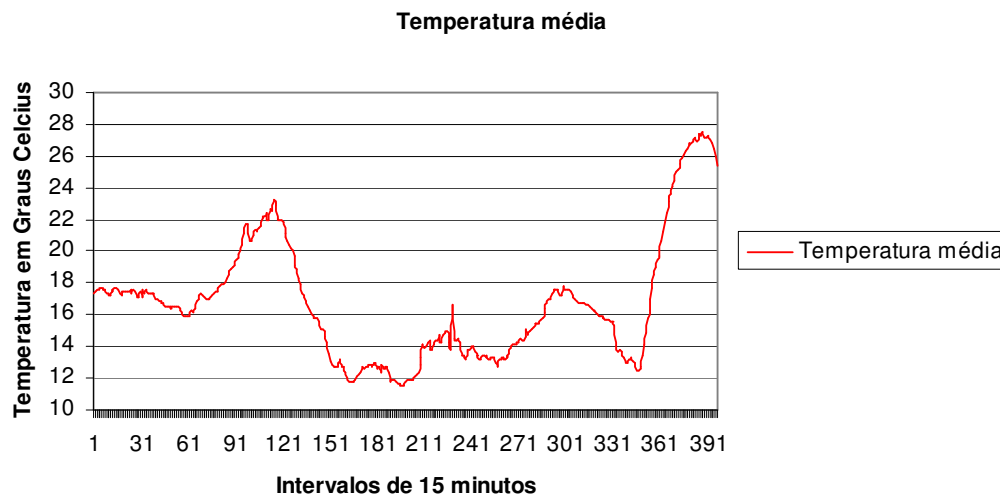


**Figura 6-4 Gráfico dos registros da velocidade do vento adquirida a cada quinze minutos**

### 6.5.2 Gráfico da temperatura em função do tempo

Na Figura 6.5 apresentam-se os valores adquiridos no canal correspondente à temperatura. Neste gráfico observam-se valores mais baixos no período noturno e valores mais altos durante o dia. A utilização das medições em temperatura poderiam ser usadas para fazer correções nas outras medições se fossem constatados efeitos térmicos.





**Figura 6-5 Gráfico do canal de temperatura**

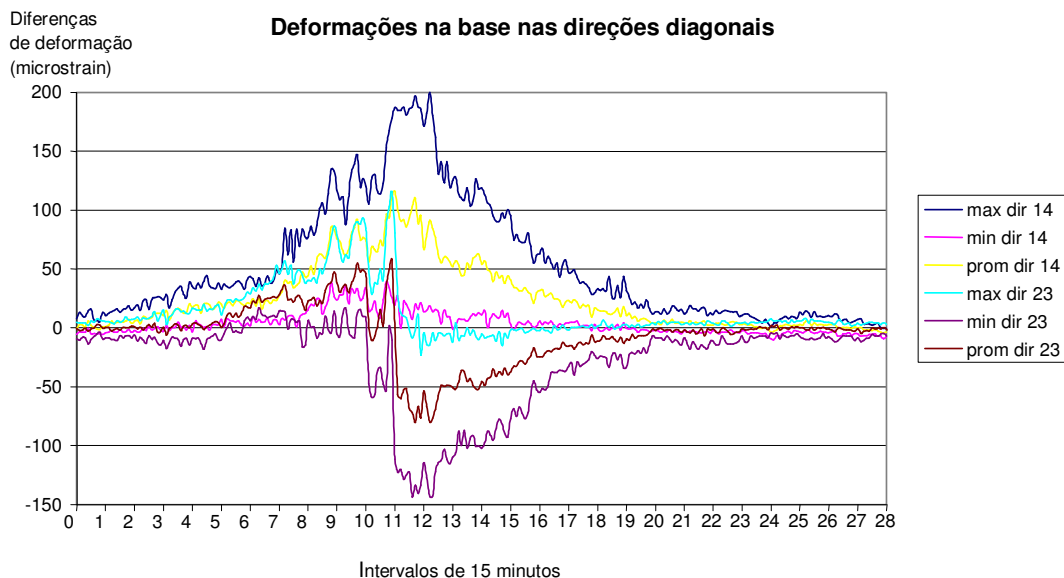
### 6.5.3 Gráfico dos extensômetros elétricos em função do tempo

Perto das extremidades das barras na base da torre foram colados extensômetros com numeração 1, 2, 3 e 4. Considerando as diferenças positivas das deformações segundo as direções 1-4 e 2-3, as quais correspondem às direções diagonais, obtêm-se um gráfico proporcional aos momentos de flexão segundo as diagonais da torre. Os momentos positivos na direção 1-4 correspondem aos ventos incidentes na direção sudoeste (SW) assim como os momentos positivos da direção 2-3 correspondem aos ventos na direção noroeste (NW).

Na Figura 6.6 é apresentado o gráfico do sinal dos extensômetros que fornecem as deformações segundo as direções das diagonais da estrutura. Observa-se que para ventos de baixa intensidade as solicitações produzidas na direção 1-4 são maiores do que as solicitações na direção 2-3; isto é devido principalmente ao fato de que o vento atua na direção SW.

Os ventos que tem esta direção são conhecidos popularmente como “VENTO SUL”.

Quando o vento alcança sua velocidade máxima os esforços segundo a direção 2-3 alcançam seus máximos valores negativos e na direção 1-4 os máximos valores positivos. Nota-se a simetria das deformações segundo as direções das diagonais, demonstrando assim a coerência dos dados adquiridos com os extensômetros.



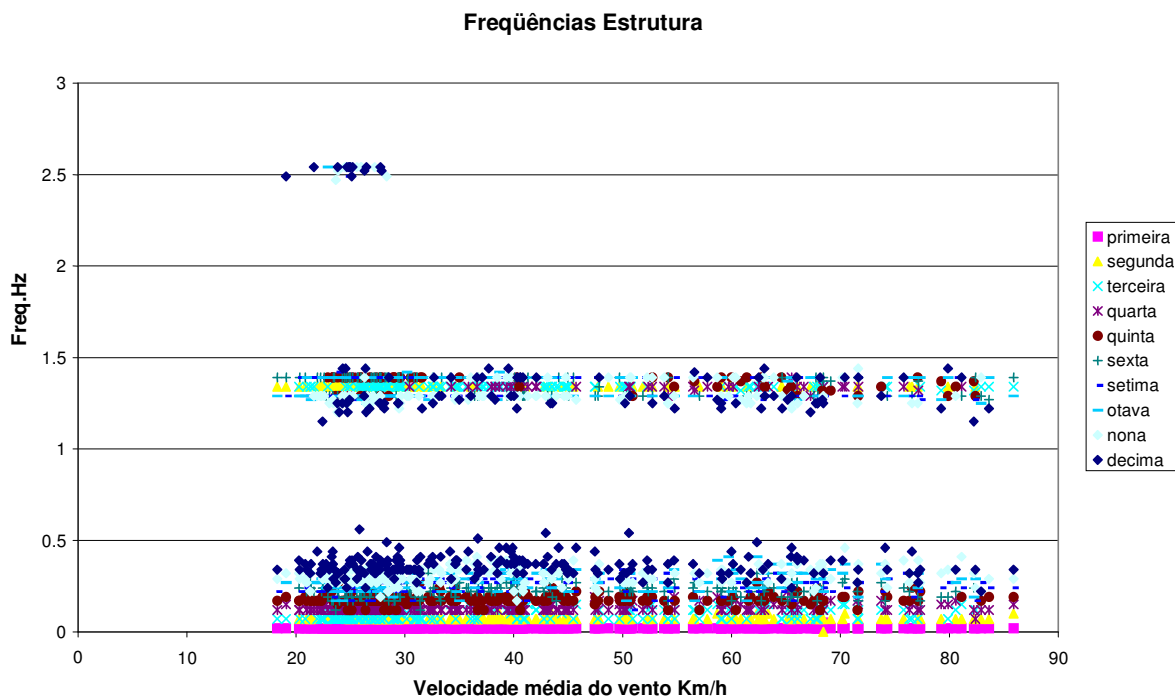
**Figura 6-6 Registro a cada quinze minutos dos extensômetros segundo as diagonais principais da torre**

Os valores máximos ocorridos nos valores médios das deformações segundo a direção 1-4 são aproximadamente 100 microstrain; os que originam tensões nas bases segundo a direção 1-4 são da ordem de 20 MPa e as reações correspondentes da ordem de 200 kN; na direção 2-3 os esforços são da ordem de 15 MPa e as reações nos apoios, 150 kN.

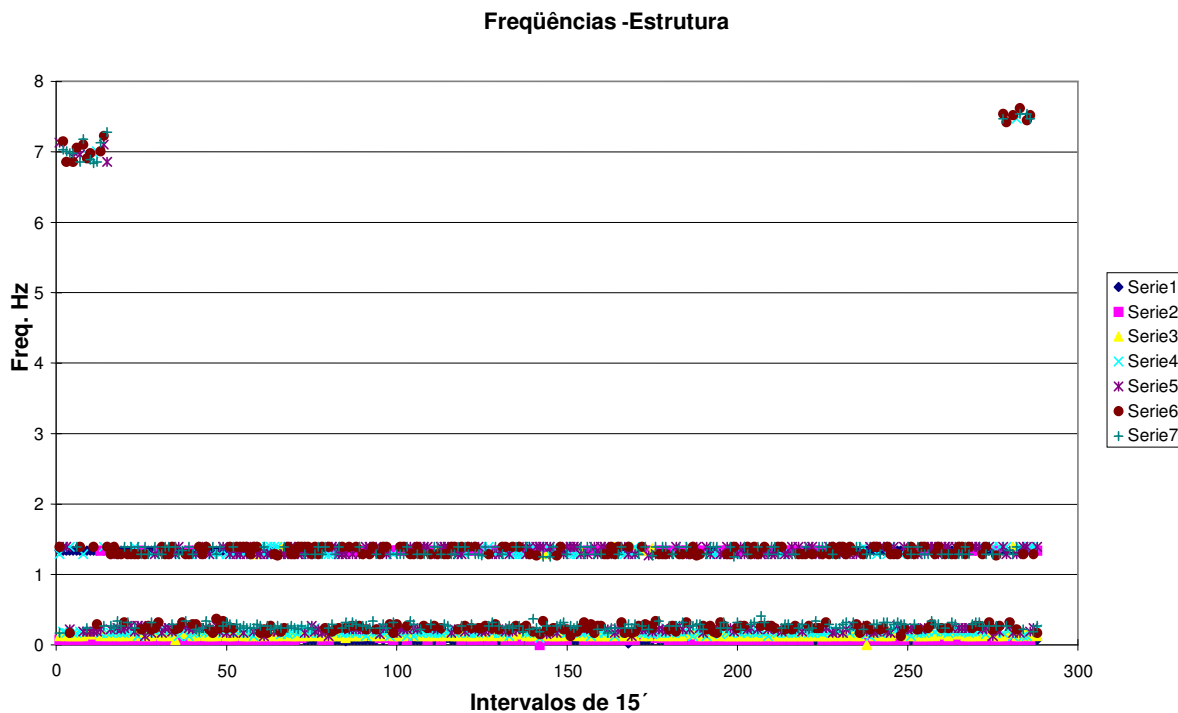
### 6.6 Determinação das frequências naturais

No primeiro processamento de dados experimentais é feita uma análise em frequências, extraindo-se a partir destas as deformações nas bases. Deste processo resultam as dez frequências principais e os módulos da transformada rápida de Fourier (FFT). A cada quinze minutos são adquiridas as dez frequências principais de cada sinal., sendo estas as dez frequências que mais se repetem no conjunto de sinais. Com

esta informação são determinadas as primeiras frequências naturais da torre. Na Figura 6-7 apresenta-se um gráfico das frequências obtidas em função da velocidade média do vento, sendo cada valor correspondente a um intervalo de tempo de quinze minutos.



Na figura que se segue, é apresentado um gráfico com resposta da estrutura no campo das frequências em função do tempo:



**Figura 6-8** Frequências registradas em intervalos de quinze minutos

Pode-se observar no gráfico apresentado na Figura 6-7 que, independentemente da velocidade do vento, existem dois intervalos de frequências claramente definidos, assim no intervalo de 1.3-1.5 Hz e no intervalo de 2.3-2.7 Hz encontram-se as duas primeiras frequências naturais (dos modos de flexão) da estrutura.

Na faixa de frequências menores do que 1 Hz o sinal apresenta uma distorção eletrônica, sendo então desprezadas as frequências dessa ordem.

Observa-se (Figura 6-7) que, no caso de velocidades altas do fluxo de vento, a frequência predominante é a fundamental, assim para velocidades baixas os sinais dos extensômetros conseguem captar a primeira e a segunda frequência da estrutura.

No gráfico de frequências em função do tempo (Figura 6-8) aparece claramente a primeira frequência natural da estrutura e também aparecem frequências da ordem de 7 Hz as quais são associadas aos efeitos de torção sobre a torre.

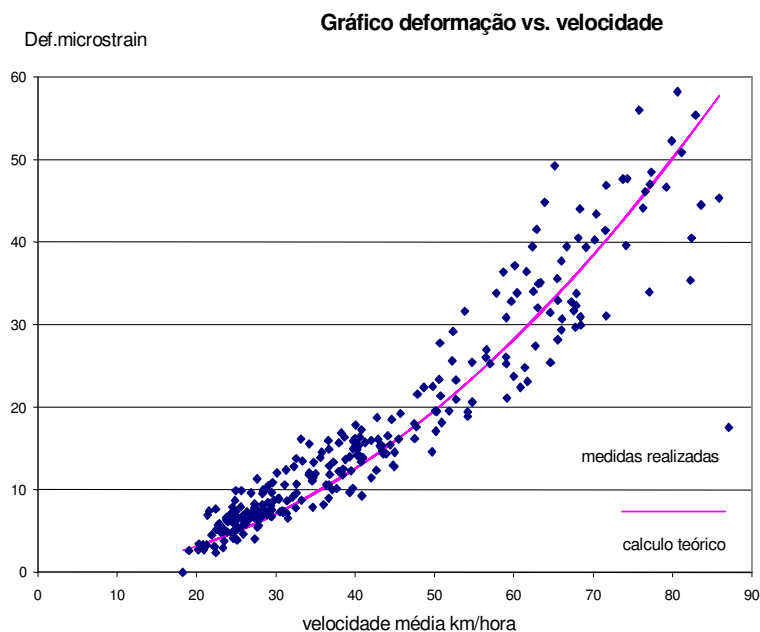
A norma Brasileira (ABNT 6123) assim como a norma uruguaia de ações do vento sobre construções (UNIT 50-84) adotam o valor de 1 segundo como limite superior do período fundamental para não levar em conta o efeito dinâmico ocasionado pelo vento sobre a estrutura. O cálculo da estrutura da torre em estudo foi feito em 1974 considerando efeitos estáticos equivalentes, portanto a análise experimental realizada neste trabalho confirma que as hipóteses admitidas na época foram válidas.

### **6.7 Comparação dos resultados experimentais com as hipóteses de cálculo estático**

Foram analisados os dados de deformações segundo a diagonal da torre no período em que ocorreram fortes ventos sobre a estrutura.

Para que a análise da ação do vento seja independente do ângulo formado entre o fluxo de vento e a direção 1-4 (Figura 5-8), considerou-se a componente da velocidade do vento segundo a direção diagonal, sendo cada registro de velocidade multiplicado pelo cosseno do ângulo que forma a velocidade do vento com a direção da diagonal.

Na Figura 6-9 é apresentado um gráfico onde compara-se a deformação específica (estática) nas bases da torre, segundo as direções diagonais, obtida a partir da memória de cálculo da torre (MARELLI, 1974), com a deformação medida pelo sistema de monitoramento.



**Figura 6-9 Comparação entre valor teórico (estático) e medidas experimentais para deformação na diagonal da torre.**

Com velocidades de vento de até 50 km/h a aproximação é muito boa, no entanto, para velocidades maiores a 50 km/h, os valores experimentais apresentam uma maior dispersão em relação aos resultados teóricos (estáticos). A análise de deformações em função da velocidade do vento mostra a coerência dos resultados experimentais em relação aos valores teóricos.

Levando em conta a sugestão das normas de vento, onde é proposto um cálculo estático equivalente em estruturas cujo período fundamental é menor a 1 s, foi estudada a torre com um estado de carregamento estático. Para analisar a influência dos efeitos de segunda ordem na modelagem da estrutura, foi aplicado o carregamento de vento estático proposto na memória de cálculo da torre (MARELLI, 1974). Utilizando-se o programa SAP, foi analisada a relação entre os deslocamentos obtidos considerando-se análise linear sem efeitos de segunda ordem e os deslocamentos considerando a não linearidade geométrica, obteve-se uma diferença da ordem de 0.1 %. Como essa diferença obtida foi muito pequena, neste trabalho serão desprezados os efeitos de segunda ordem na análise da torre em estudo.

## 6.8 Apresentação dos dados adquiridos pelo sistema, resumidos a cada quinze dias

A informação adquirida é resumida a cada quinze dias, obtendo-se assim um conjunto de dados no campo das frequências. Com estes dados é possível identificar os modos de vibração associados às frequências medidas.

Na tabela 6.8 apresenta-se um detalhe da informação resumida:

**Tabela 6-7 Detalhe da informação resumida em quinze dias**

DATO1.SOL	
10/24:18/43	10/25:19/52
PRIMEIRA FRECUÊNCIA SGS DIREÇÃO 1-4 EM HERTZ	
1.34	
1.34	
1.34	
95	
PRIMEIRA FRECUÊNCIA SGS DIREÇÃO 2-3 EM HERTZ	
1.34	
1.32	
1.32	
95	
FRECUÊNCIA A SGS TORÇÃO EM HERTZ	
2.54	
2.42	
2.48	
92	
FRECUÊNCIA B SGS TORÇÃO EM HERTZ	
2.88	
2.86	
2.87	
80	

Os dados que aparecem no cabelhaço são os de identificação do dia em que foi feita a aquisição, o nome do arquivo, a hora do início e a hora do fim da aquisição.

Depois dos dados de identificação, são apresentados os dados de frequências associadas aos efeitos de flexão e aos de torção.

Os dados resumidos apresentam a seguinte ordem:

- valor máximo
- valor mínimo
- valor médio
- número de vezes que foi encontrada um valor de frequência no intervalo definido

No arquivo escolhido como exemplo, pode-se ver no primeiro grupo de dados, que foi encontrada 95 vezes em um máximo de 96 (96 pacotes de quinze minutos em 24 horas) uma frequência no intervalo de [1,3-1,5 Hz] com um valor médio de 1,34, um máximo de 1,34 e um mínimo de 1,34 Hz.

## **6.9 Resultados da análise numérica**

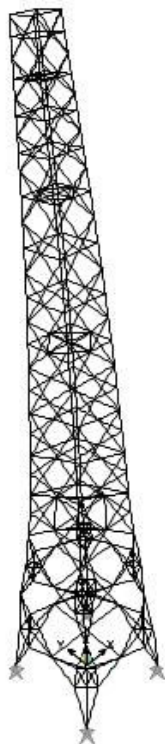
Experimentalmente são obtidas com clareza duas frequências naturais da estrutura, a partir dos sensores que fazem a aquisição dos efeitos de flexão sobre a torre.

Foram considerados dois programas para a análise numérica, o desenvolvido nesta dissertação, ESPACIAL, e o programa comercial SAP 2000. O programa SAP fornece saídas gráficas que permite identificar os modos de vibração da estrutura, facilitando a comparação entre os resultados experimentais e os resultados numéricos.

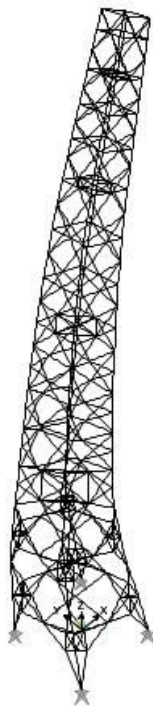
## **6.10 Modos normais da torre obtidos com o programa SAP**

Inicialmente utilizou-se o programa SAP modelando-se a estrutura da torre como um pórtico espacial. As deformadas associadas aos modos de flexão e torção estão apresentadas nas Figuras 6-10, 6-11 e 6-12. O terceiro e o quarto modo de vibração correspondem a modos de deformação locais, portanto não foram mostrados.

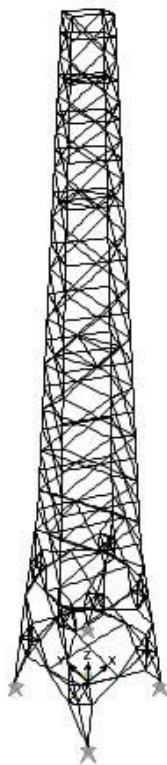




**Figura 6-10 Primeiro modo de vibração (flexão)  $f=1.54$  Hz. (SAP)**



**Figura 6-11 Segundo modo de vibração (flexão)  $f=1.73$  Hz. (SAP)**



**Figura 6-12 Quinto modo de vibração (torção)  $f= 3.23 \text{ Hz}$  (SAP)**

### **6.11 Comparação entre os resultados numéricos obtidos com o programa SAP e com o programa ESPACIAL**

Na Tabela 6-9 apresenta-se uma comparação entre os valores de frequências naturais obtidos com o programa SAP e com os programas ESPACIAL e ITINVERSA. Na primeira coluna aparecem identificados os modos de vibração, na segunda as primeiras frequências encontradas com o o programa SAP, sendo a torre modelada como pórtico espacial, e na terceira modelada como treliça espacial; na quarta coluna são apresentados as primeiras frequências encontradas com o programa ESPACIAL\*, modelando-se a torre como pórtico espacial e na quinta coluna as diferenças relativas em porcentagem entre os resultados.

---

\* e ITINVERSA

Pode-se observar inicialmente que a diferença entre os resultados das primeiras frequências naturais, considerando a modelagem da estrutura como treliça espacial ou pórtico espacial é pequena. No entanto para frequências mais altas esta diferença aumenta.

Comparando-se agora as quatro primeiras frequências obtidas pelo programa ESPACIAL\* com as obtidas pelo programa SAP, observa-se que há uma pequena diferença, no máximo de 6.2 %. A diferença entre os resultados podem ser atribuídas ao fato de que o programa ESPACIAL\* utiliza na sua formulação a matriz de massa consistente enquanto que o programa SAP utiliza uma matriz de massa diagonal (discreta, sem considerar os graus de liberdade de rotação).

**Tabela 6-8 Comparação das frequências obtidas com os modelos numéricos**

<b>Modo</b>	<b>Freq. em Hz. SAP (P. Espacial)</b>	<b>Freq. em Hz. SAP (Treliza Espacial)</b>	<b>Freq. em Hz. ESPACIAL* (P.Espacial)</b>	<b>Diferenças relativas entre resultados do programa ESPACIAL* em relação aos do SAP</b>
<i>1</i>	<i>1,54</i>	<i>1,60</i>	<i>1,47</i>	<i>4.6%</i>
<i>2</i>	<i>1,73</i>	<i>1,79</i>	<i>1,63</i>	<i>5.8%</i>
<i>3</i>	<i>2,44</i>	<i>2,76</i>	<i>2,29</i>	<i>6.2%</i>
<i>4</i>	<i>2,99</i>	<i>3,38</i>	<i>2,82</i>	<i>5.7%</i>

### **6.12 Comparação entre os resultados numéricos obtidos com as observações experimentais**

Os resultados numéricos apresentam uma aproximação razoável em relação aos resultados obtidos experimentalmente, embora não se tenham feito análises experimentais para determinar as características do material da estrutura, indicando assim que as propriedades mecânicas adotadas na análise numérica fornecem resultados satisfatórios.

---

\* e ITINVERSA

Embora apareçam algumas frequências associadas a fenômenos locais na estrutura, fica evidente que a primeira frequência é a que corresponde ao modo fundamental de flexão da torre, a qual se comporta em forma similar a uma barra engastada na base e livre no topo. Esta primeira frequência obtida experimentalmente (ver Figura 6-7 e Tabela 6-8) é apresentada na Tabela 6-10 juntamente ao valor obtido com os programas computacionais. Observa-se que, para o caso da estrutura da torre analisada, o valor obtido a partir do programa ESPACIAL\*, com a formulação de matriz de massa consistente, tem uma diferença menor em relação ao valor obtido experimentalmente do que o valor fornecido pelo programa SAP, o qual utiliza uma formulação com matriz de massa diagonal. O valor obtido pelo programa SAP através do modelo de treliça espacial apresenta uma diferença maior em relação ao valor experimental do que o valor fornecido pelo mesmo programa usando o modelo de pórtico espacial.

**Tabela 6-9 Valores da primeira frequência obtida experimentalmente e numericamente**

<b>Aquisição</b>	<b>SAP (Trelliça)</b>	<b>SAP (Pórtico)</b>	<b>ESPACIAL*</b>
<i>1,37 Hz</i>	<i>1,60 Hz</i>	<i>1,54 Hz</i>	<i>1,47 Hz</i>

As frequências associadas aos efeitos de torção obtidas pela análise numérica apresentam uma aproximação razoável em relação à frequência obtida experimentalmente (ver Figura 6-7 e Tabela 6-8). Na Tabela 6-11 apresentam-se as frequências obtidas do sistema de aquisição juntamente com a frequência de torção obtida a partir da análise numérica.

**Tabela 6-10 Comparação dos resultados do modo de torção**

<b>ESPACIAL*</b>	<b>SAP (Pórtico)</b>	<b>Aquisição</b>	<b>Diferença (ESPACIAL*)</b>	<b>Diferença (SAP)</b>
<i>2.96 Hz</i>	<i>3,23 Hz</i>	<i>[2,50-2,90 Hz]</i>	<i>[2,07 % - 18,59%]</i>	<i>[10,2 % - 22,6%]</i>

\* e ITINVERSA

Ressalta-se que na análise numérica aparecem efeitos de torção localizados nas barras diagonais da torre, ou seja, pode ser que o sistema esteja captando essas frequências as quais são próximas a  $2.50 \text{ Hz}$  , assim o fenômeno de torção global em termos experimentais é um valor perto de  $2,90 \text{ Hz}$  .

No próximo capítulo apresentam-se as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

## 7 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

### 7.1 Conclusões

Esta dissertação teve como objetivo a caracterização dinâmica de torres de transmissão, obtida a partir de análise experimental e numérica.

No Capítulo 2 foi apresentada parte da teoria da análise dinâmica de estruturas, pelo fato desta ser a primeira dissertação sobre este assunto realizada na área de estruturas do PPGEC-UFSC. Aparece em detalhe uma introdução aos sistemas dinâmicos, desde os mais simples (sistemas com um grau de liberdade) até os mais complexos (sistemas com múltiplos graus de liberdade). É introduzido também neste capítulo as bases da análise modal.

Como a caracterização dinâmica de estruturas envolve uma análise no campo das frequências, também foi apresentada (em forma resumida) uma introdução à análise de Fourier. Foram apresentadas as equações relacionadas à representação de funções em séries de Fourier, a transformada integral de Fourier e as propriedades da transformada integral (de Fourier) utilizadas na resolução de equações diferenciais.

O Capítulo 3 apresenta a formulação do Método dos Elementos Finitos (MEF) desde as equações de equilíbrio estático, passando pelas equações de equilíbrio dinâmico até chegar na resolução de problemas de autovalores e autovetores característicos de vibrações livres.

Foram desenvolvidos dois programas computacionais (ESPACIAL e ITINVERSA) para a obtenção das frequências naturais e dos modos de vibração associados tendo como base a formulação teórica do MEF, sendo consideradas na formulação diferentes tipos de matriz de massa: consistente, discreta e agrupada. Ao final deste capítulo apresentam-se alguns métodos de resolução de problemas de autovalor, sendo selecionado o método de iteração inversa para a implementação computacional (ITINVERSA).

No Capítulo 4 é feita uma introdução à análise experimental, apresentando tanto as características que devem ter os sistemas de monitoramento assim como as finalidades destes sistemas para análise experimental.

Também neste capítulo são apresentadas as bases teóricas do funcionamento dos diferentes tipos de sensores utilizados na instrumentação da torre, assim como a instrumentação colocada na estrutura, além das características técnicas de cada um dos aparelhos de medição. Também é feita uma descrição dos programas de aquisição desenvolvidos nesta dissertação para o funcionamento do sistema de monitoramento contínuo.

No Capítulo 5 é apresentado o caso de estudo, com um detalhamento das características principais da estrutura analisada e do sistema de monitoramento montado.

No Capítulo 6 são apresentados os resultados numéricos obtidos com os programas desenvolvidos e com um programa comercial SAP, sendo feita a comparação com os dados obtidos a partir do sistema de aquisição montado na estrutura.

Em termos de frequências, pode-se concluir que a primeira frequência natural da estrutura, associada ao efeito de flexão, surge claramente da análise experimental como um valor de 1,34 Hz. Os valores obtidos a partir dos programas ESPACIAL\* e SAP apresentam em relação a este valor experimental uma diferença de 10% e 13% respectivamente. Estas diferenças são consideradas razoáveis para o nível de precisão com que foi feita a modelagem numérica. Existem trabalhos publicados relacionados a este tipo de pesquisas, que apresentam valores até superiores aos obtidos neste trabalho em termos de diferenças entre as frequências medidas e calculadas (LI, YANG, WONG & JEARY, 2003).

---

\* e ITINVERSA

Nota-se que para a estrutura analisada o programa ESPACIAL\* fornece um resultado mais próximo ao valor experimental da primeira frequência. Esta diferença entre o programa SAP e o programa ESPACIAL\* pode ser explicada pela consideração da matriz de massa da estrutura, tendo em vista que o programa SAP usa uma formulação de matriz de massa discreta enquanto que no programa ESPACIAL\* foi utilizada matriz de massa consistente. Ressalta-se que também há diferença nos métodos numéricos utilizados para a obtenção de autovalores pelos dois programas.

Também foi constatado que os resultados obtidos a partir do modelo de pórtico espacial são mais próximos aos valores experimentais do que os valores obtidos quando a torre é modelada como uma treliça espacial.

Em relação ao funcionamento do sistema de aquisição, pode-se concluir que este fornece resultados coerentes tanto a partir da análise das observações como em comparação com a análise numérica.

Esta coerência é percebida através do uso de sensores de diferentes características, o que permite testar em forma conjunta o funcionamento do sistema de aquisição. Os diferentes cruzamentos de informação fornecida pelos acelerômetros e extensômetros são favoráveis neste sentido, assim a aquisição de dados da estrutura feita através do sistema de monitoramento fornece informação confiável para obter a caracterização dinâmica da torre.

Testar o grau de concordância entre os modelos numéricos e o comportamento real de uma estrutura é uma das utilidades dos sistemas de monitoramento. No caso da torre instrumentada, foi possível estabelecer que os modelos numéricos implementados apresentam uma boa aproximação em relação aos dados medidos.

## **7.2 Sugestões para Trabalhos Futuros**

O uso dos sistemas de monitoramento contínuo e sem presença de operadores é cada vez mais usual em todo o mundo, e, como primeira experiência no Uruguai, pode-



se concluir que a modelagem teórica da estrutura, a instalação do sistema, a calibração dos sensores e a comparação dos resultados fornecem uma base razoável para desenvolver mais projetos em outros tipos de estruturas com maior complexidade e importância, podendo auxiliar na previsão de falhas estruturais como por exemplo em áreas de corrosão (efeito prolongado no tempo), no monitoramento de pontes, etc.

Particularmente em casos de estruturas repetidas (torres de transmissão elétrica) a caracterização de uma estrutura real proporciona dados importantes para todo um conjunto estrutural, assim com a instrumentação de um protótipo obtém-se a caracterização de todo um conjunto, o que facilita a implementação dos planos de manutenção e identifica os possíveis problemas a ocorrerem dependendo da localização da estrutura.

Sugere-se também estender os programas computacionais desenvolvidos nesta dissertação para permitir a solução das equações de equilíbrio dinâmico de estruturas ao longo do tempo, seja por superposição modal ou utilizando-se métodos de integração direta.

Por último sugere-se testar as hipóteses de cálculo simplificado proposto pelas normas de vento para diferentes tipos de estruturas comparando-se os resultados da análise estática equivalente com resultados experimentais de sistemas de monitoramento.

## REFERENCIAS

- ABNT – NBR 6123; Forças devidas ao vento em edificações, 1988.
- ARMER G.S.T. Planning a Scheme. Monitoring Building. New York U.S.A.: Moore Van Nostrand Reinhold , 1992 .
- BALFOUR; J.A.D, Computer Analysis of Structural Frameworks Second edition, U.K, Blackwell, 1992
- BATHE; K.J., Finite element procedures, New Jersey: Prentice Hall, 1996
- BATTISTA; R.C. e PFEIL; M.S., Monitoring and control of wind-induced oscillations of a steel bridge, Elsevier Science: Journal of Wind engineering and Industrial Aerodynamics, 273-288, 2002
- BATTISTA; R.C. , RODRIGUES; R. e PFEIL; M. , Dynamic behavior and stability of transmission line towers under wind forces, Elsevier Science: Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, Volume 91, N.8, August 2003.
- BOYCE; e DIPRIMA, Ecuaciones diferenciales con valores en la frontera, México: Limusa, 1981
- BREBBIA; C.A. e FERRANTE; A.J. The Finite Element Technique, Porto Alegre, Editora da UFRGS, 1975
- BYKHOVSKY; I.I, Fundamentals of Vibration Engineering, Moscú, MIR,1980
- CHANDRUPATLA e BELEGUNDU, Introducción al Estudio del Elemento Finito en Ingeniería, México, Prentice Hall, 1999
- CLOUGH; R.W. e PENZIEN; J., Dynamics of Structures, Mc.Graw-Hill, 1975
- DALLY; J.W. e RILEY; W.F, Experimental Stress Analysis, Mc.Graw-Hill, 1978
- DI PASQUALE E. Relation between Global Damage Indices and Local Stiffness Degradation. Journal of Structural Engineering, v 116, 1990
- DOVE; R.C. e ADAMS; P.H.A, Experimental Stress Analysis and Motion , USA, Ohio,: Measurement, Charles E.Merrill Books Inc., 1964
- EWINS D.J. Modal Testing : Theory and Practice , England : Research Studies Press Ltd. , 1986 .
- FIB CIEB State of the art in monitoring structures, 2003

- GERE; J.M. e WEAVER; W., Análisis de Estructuras Reticulares (Analysis of Framed Structures), 1975
- GUEDES DE FIGUEIREDO, Djairo, Análise de Fourier e equações diferenciais parciais, Brasil: LTC, 1977
- HEINDRICH, Notas de aula de disciplina Controle de vibrações, UFSC, 2004
- IDICHANDY; V.G., GANAPATHY C. e SRINIVASA RAO; P., Structural Integrity Monitoring of Fixed Offshore Pataforms IABSE COLLOQUIUM BERGAMO, 1987.
- KENCHINGTON A. Automatic and Autonomous Monitoring. Monitoring Building New York U.S.A.: Moore, Van Nostrand Reinhold, 1992.
- LA ROVERE; H.L Tese de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Rio de Janeiro, 1983
- LA ROVERE; H.L., Análise Matricial de Estruturas, Notas de Aula do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, 2003
- LA ROVERE; H.L., Método dos elementos finitos, Notas de Aula do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, 2003
- LA ROVERE; H.L. e DO VALLE; A., Análise Matricial de Estruturas, Notas de Aula do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Tópicos especiais, Ligações semi-rígidas, Universidade Federal de Santa Catarina, 2003
- LI; Q.S., YANG; K., WONG; C.K. e JEARY; A.P., The effect of amplitude-dependent damping on wind induced vibrations of a super tall building, Elsevier Science: Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, Volume 91, Number 9, September 2003.
- LITEWKA A. On Stiffness and Strength Reduction of Solids due to Crack Developement Engineering Fracture Mechanics v 25, 1986.
- MARELLI, Memoria de Cálculo de Torre Reticulada, Bs.As., 1974
- MATHEWS; J.H. e KURTIS; D.F., Métodos Numéricos con Matlab 3<sup>rd</sup>.Edition, Prentice Hall, 1999
- MC.CONELL K.G.; RILEY W.F. Strain-Gages Instrumentation and Data Analysis Handbook on Experimental Mechanics. Washington U.S.A.: Albert Kobayashi, 1993.
- MC CORMAC; J. e ELLING; R.E, Análisis de Estructuras Método Clásico y Matricial, México, Alfaomega, 1996

MORQUIO; A. e ALVAREZ; R., Monitoreo de Solicitaciones en Torres Metálicas y Algunas de sus Aplicaciones XXX Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural, 2002

NAKAMURA; S., Análisis Numérico y visualización gráfica con Matlab, E.Prentice Hall Latinoamericana, 1997

PAZ; M., Micro computer Aided Engineering Structural Dynamics, 1985

PRZEMIENIECKI; J.S., Theory of Matrix Structural Analysis, McGraw-Hill, 1967.

RIERA; D., Dinâmica de estruturas, Notas de Aula do Curso de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1993

TUPPENY; W.H. e KOBAYASHI; A.S, Análisis Experimental de Tensiones, 1970

UNIT 50/84, Norma de acción del viento sobre construcciones , Uruguay, 1984

VISAY, Manual de VISAY – Company, 2004

WILSON; E.L., Three Dimensional Static and Dynamic Análisis of Structures Third Edition, U.S.A., CSI Pub., 2002

**Anexo 1 – Numeração dos nós da torre e a suas coordenadas espaciais**

Node#	X (cm)	Y (cm)	Z (cm)
1	- 680	- 680	680
2	- 680	- 680	680
3	- 680	- 680	680
4	- 680	- 680	680
5	- 630	- 430	537
6	- 630	- 430	537
7	- 430	- 630	537
8	- 430	- 630	537
9	- 430	- 630	537
10	- 430	- 630	537
11	- 630	- 430	537
12	- 630	- 430	537
13	- 612	- 612	707
14	- 612	-	707
15	- 612	- 612	707
16	- 430	- 430	707
17	- 430	- 430	707
18	-	- 612	707
19	-	-	707
20	-	- 612	707
21	- 430	- 430	707
22	- 430	- 430	707
23	- 612	- 612	707
24	- 612	-	707
25	- 612	- 612	707
26	- 594	- 430	877
27	- 594	- 430	877
28	- 430	- 594	877
29	- 430	- 594	877
30	- 430	- 594	877
31	- 430	- 594	877
32	- 594	- 430	877
33	- 594	- 430	877
34	- 545	- 545	1.360
35	- 545	- 545	1.360
36	- 545	- 545	1.360
37	- 545	- 545	1.360
38	- 507	- 363	1.720
39	- 507	- 363	1.720
40	- 363	- 507	1.720
41	- 363	- 507	1.720
42	- 363	- 507	1.720
43	- 363	- 507	1.720
44	- 507	- 363	1.720

---

45		507		363	1.720
46	-	490	-	490	1.880
47	-	490		-	1.880
48	-	490		490	1.880
49	-	353	-	353	1.880
50	-	353		353	1.880
51		-	-	490	1.880
52		-		-	1.880
53		-		490	1.880
54		353	-	353	1.880
55		353		353	1.880
56		490	-	490	1.880
57		490		-	1.880
58		490		490	1.880
59	-	474	-	353	2.040
60	-	474		353	2.040
61	-	353	-	474	2.040
62	-	353		474	2.040
63		353	-	474	2.040
64		353		474	2.040
65		474	-	353	2.040
66		474		353	2.040
67	-	438	-	438	2.380
68	-	438		438	2.380
69		438	-	438	2.380
70		438		438	2.380
71	-	405	-	405	2.715
72	-	405		-	2.715
73	-	405		405	2.715
74		-	-	405	2.715
75		-		-	2.715
76		-		405	2.715
77		405	-	405	2.715
78		405		-	2.715
79		405		405	2.715
80	-	390	-	390	2.995
81	-	390		390	2.995
82		390	-	390	2.995
83		390		390	2.995
84	-	374	-	374	3.290
85	-	374		-	3.290
86	-	374		374	3.290
87		-	-	374	3.290
88		-		374	3.290
89		374	-	374	3.290
90		374		-	3.290
91		374		374	3.290
92	-	361	-	361	3.550
93	-	361		361	3.550

---

MONITORAMENTO E ANÁLISE NUMÉRICA PARA OBTENÇÃO DE FREQUÊNCIAS NATURAIS DE 163  
 UMA TORRE DE TELECOMUNICAÇÃO (PPGEC-UFSC).

---

94		361	-	361	3.550
95		361		361	3.550
96	-	344		-	3.843
97	-	344	-	344	3.843
98	-	344		344	3.843
99		-	-	344	3.843
100		-		344	3.843
101		344	-	344	3.843
102		344		344	3.843
103		344		-	3.843
104	-	331	-	331	4.100
105	-	331		331	4.100
106		331	-	331	4.100
107		331		331	4.100
108	-	316	-	316	4.383
109	-	316		-	4.383
110	-	316		316	4.383
111		-	-	316	4.383
112		-		316	4.383
113		316	-	316	4.383
114		316		-	4.383
115		316		316	4.383
116	-	303	-	303	4.650
117	-	303		303	4.650
118		303	-	303	4.650
119		303		303	4.650
120	-	289	-	289	4.918
121	-	289		-	4.918
122	-	289		289	4.918
123		-	-	289	4.918
124		-		-	4.918
125		-		289	4.918
126		289	-	289	4.918
127		289		-	4.918
128		289		289	4.918
129	-	276	-	276	5.163
130	-	276		276	5.163
131		276	-	276	5.163
132		276		276	5.163
133	-	262	-	262	5.415
134	-	262		-	5.415
135	-	262		262	5.415
136		-	-	262	5.415
137		-		262	5.415
138		262	-	262	5.415
139		262		-	5.415
140		262		262	5.415
141	-	250	-	250	5.664
142	-	250		250	5.664

---

Mestrando : Rodrigo Alvarez Arispe

Orientadora : Henriette Lebre La Rovere, PhD

Co-Orientador : Dr. Ing. Atilio Morquio Dovat

MONITORAMENTO E ANÁLISE NUMÉRICA PARA OBTENÇÃO DE FREQUÊNCIAS NATURAIS DE 164  
 UMA TORRE DE TELECOMUNICAÇÃO (PPGEC-UFSC).

---

143		250	-	250	5.664
144		250		250	5.664
145	-	236	-	236	5.907
146	-	236		-	5.907
147	-	236		236	5.907
148		-	-	236	5.907
149		-		236	5.907
150		236	-	236	5.907
151		236		-	5.907
152		236		236	5.907
153	-	224	-	224	6.145
154	-	224		224	6.145
155		224	-	224	6.145
156		224		224	6.145
157	-	212	-	212	6.375
158	-	212		-	6.375
159	-	212		212	6.375
160		-	-	212	6.375
161		-		212	6.375
162		212	-	212	6.375
163		212		-	6.375
164		212		212	6.375
165	-	201	-	201	6.585
166	-	201		201	6.585
167		201	-	201	6.585
168		201		201	6.585
169	-	193	-	193	6.740
170	-	193		-	6.740
171	-	193		193	6.740
172		-	-	193	6.740
173		-		193	6.740
174		193	-	193	6.740
175		193		-	6.740
176		193		193	6.740
177	-	186	-	186	6.880
178	-	186		186	6.880
179		186	-	186	6.880
180		186		186	6.880
181	-	178	-	178	7.033
182	-	178		-	7.033
183	-	178		178	7.033
184		-	-	178	7.033
185		-		178	7.033
186		178	-	178	7.033
187		178		-	7.033
188		178		178	7.033
189	-	171	-	171	7.160
190	-	171		171	7.160
191		171	-	171	7.160

---

Mestrando : Rodrigo Alvarez Arispe

Orientadora : Henriette Lebre La Rovere, PhD

Co-Orientador : Dr. Ing. Atilio Morquio Dovat



---

192		171		171	7.160
193	-	163	-	163	7.310
194	-	163		-	7.310
195	-	163		163	7.310
196		-	-	163	7.310
197		-		163	7.310
198		163	-	163	7.310
199		163		-	7.310
200		163		163	7.310
201	-	155	-	155	7.460
202	-	155		155	7.460
203		155	-	155	7.460
204		155		155	7.460
205	-	147	-	147	7.610
206	-	147		-	7.610
207	-	147		147	7.610
208		-	-	147	7.610
209		-		147	7.610
210		147	-	147	7.610
211		147		-	7.610
212		147		147	7.610
213	-	140	-	140	7.760
214	-	140		140	7.760
215		140	-	140	7.760
216		140		140	7.760

## Anexo 2 Discretização da torre instrumentada

Barra	Nó inicial	Nó Final	Ponto de Referência	Material	Area (cm <sup>2</sup> )	Iy (cm <sup>4</sup> )	Iz (cm <sup>4</sup> )	J (cm <sup>4</sup> )
1	36	42	10001	1	12.65	280.00	73.30	2.79
2	44	57	10002	1	12.65	280.00	73.30	2.79
3	44	56	10003	1	12.65	280.00	73.30	2.79
4	42	51	10004	1	12.65	280.00	73.30	2.79
5	42	56	10005	1	12.65	280.00	73.30	2.79
6	57	65	10006	1	12.65	280.00	73.30	2.79
7	51	63	10007	1	12.65	280.00	73.30	2.79
8	56	65	10008	1	12.65	280.00	73.30	2.79
9	56	63	10009	1	12.65	280.00	73.30	2.79
10	75	78	10010	1	12.65	280.00	73.30	2.79
11	74	75	10011	1	12.65	280.00	73.30	2.79
12	77	78	10012	1	12.65	280.00	73.30	2.79
13	74	77	10013	1	12.65	280.00	73.30	2.79
14	89	90	10014	1	12.65	280.00	73.30	2.79
15	87	89	10015	1	12.65	280.00	73.30	2.79
16	94	103	10016	1	12.65	280.00	73.30	2.79
17	94	99	10017	1	12.65	280.00	73.30	2.79
18	101	103	10018	1	12.65	280.00	73.30	2.79
19	103	106	10019	1	12.65	280.00	73.30	2.79
20	99	101	10020	1	12.65	280.00	73.30	2.79
21	99	106	10021	1	12.65	280.00	73.30	2.79
22	106	114	10022	1	12.65	280.00	73.30	2.79
23	106	111	10023	1	12.65	280.00	73.30	2.79
24	113	114	10024	1	12.65	280.00	73.30	2.79
25	114	118	10025	1	12.65	280.00	73.30	2.79
26	111	113	10026	1	12.65	280.00	73.30	2.79
27	111	118	10027	1	12.65	280.00	73.30	2.79
28	36	44	10028	1	12.65	280.00	73.30	2.79
29	109	116	10029	1	12.65	280.00	73.30	2.79
30	108	109	10030	1	12.65	280.00	73.30	2.79
31	104	109	10031	1	12.65	280.00	73.30	2.79
32	96	104	10032	1	12.65	280.00	73.30	2.79
33	96	97	10033	1	12.65	280.00	73.30	2.79
34	92	96	10034	1	12.65	280.00	73.30	2.79
35	84	85	10035	1	12.65	280.00	73.30	2.79
36	71	72	10036	1	12.65	280.00	73.30	2.79
37	47	59	10037	1	12.65	280.00	73.30	2.79
38	38	47	10038	1	12.65	280.00	73.30	2.79
39	72	75	10039	1	12.65	280.00	73.30	2.79
40	97	99	10040	1	12.65	280.00	73.30	2.79
41	92	99	10041	1	12.65	280.00	73.30	2.79
42	84	87	10042	1	12.65	280.00	73.30	2.79
43	71	74	10043	1	12.65	280.00	73.30	2.79

MONITORAMENTO E ANÁLISE NUMÉRICA PARA OBTENÇÃO DE FREQUÊNCIAS NATURAIS DE 167  
 UMA TORRE DE TELECOMUNICAÇÃO (PPGEC-UFSC).

44	51	61	10044	1	12.65	280.00	73.30	2.79
45	40	51	10045	1	12.65	280.00	73.30	2.79
46	111	116	10046	1	12.65	280.00	73.30	2.79
47	108	111	10047	1	12.65	280.00	73.30	2.79
48	104	111	10048	1	12.65	280.00	73.30	2.79
49	99	104	10049	1	12.65	280.00	73.30	2.79
50	46	61	10050	1	12.65	280.00	73.30	2.79
51	40	46	10051	1	12.65	280.00	73.30	2.79
52	34	40	10052	1	12.65	280.00	73.30	2.79
53	38	46	10053	1	12.65	280.00	73.30	2.79
54	46	59	10054	1	12.65	280.00	73.30	2.79
55	34	38	10055	1	12.65	280.00	73.30	2.79
56	112	117	10056	1	12.65	280.00	73.30	2.79
57	110	112	10057	1	12.65	280.00	73.30	2.79
58	105	112	10058	1	12.65	280.00	73.30	2.79
59	100	105	10059	1	12.65	280.00	73.30	2.79
60	98	100	10060	1	12.65	280.00	73.30	2.79
61	93	100	10061	1	12.65	280.00	73.30	2.79
62	86	88	10062	1	12.65	280.00	73.30	2.79
63	73	76	10063	1	12.65	280.00	73.30	2.79
64	53	62	10064	1	12.65	280.00	73.30	2.79
65	41	53	10065	1	12.65	280.00	73.30	2.79
66	75	76	10066	1	12.65	280.00	73.30	2.79
67	96	98	10067	1	12.65	280.00	73.30	2.79
68	93	96	10068	1	12.65	280.00	73.30	2.79
69	85	86	10069	1	12.65	280.00	73.30	2.79
70	72	73	10070	1	12.65	280.00	73.30	2.79
71	47	60	10071	1	12.65	280.00	73.30	2.79
72	39	47	10072	1	12.65	280.00	73.30	2.79
73	109	117	10073	1	12.65	280.00	73.30	2.79
74	109	110	10074	1	12.65	280.00	73.30	2.79
75	105	109	10075	1	12.65	280.00	73.30	2.79
76	96	105	10076	1	12.65	280.00	73.30	2.79
77	48	60	10077	1	12.65	280.00	73.30	2.79
78	39	48	10078	1	12.65	280.00	73.30	2.79
79	35	39	10079	1	12.65	280.00	73.30	2.79
80	41	48	10080	1	12.65	280.00	73.30	2.79
81	48	62	10081	1	12.65	280.00	73.30	2.79
82	35	41	10082	1	12.65	280.00	73.30	2.79
83	114	119	10083	1	12.65	280.00	73.30	2.79
84	114	115	10084	1	12.65	280.00	73.30	2.79
85	107	114	10085	1	12.65	280.00	73.30	2.79
86	103	107	10086	1	12.65	280.00	73.30	2.79
87	102	103	10087	1	12.65	280.00	73.30	2.79
88	95	103	10088	1	12.65	280.00	73.30	2.79
89	90	91	10089	1	12.65	280.00	73.30	2.79
90	78	79	10090	1	12.65	280.00	73.30	2.79
91	57	66	10091	1	12.65	280.00	73.30	2.79
92	45	57	10092	1	12.65	280.00	73.30	2.79

MONITORAMENTO E ANÁLISE NUMÉRICA PARA OBTENÇÃO DE FREQUÊNCIAS NATURAIS DE 168  
 UMA TORRE DE TELECOMUNICAÇÃO (PPGEC-UFSC).

93	100	102	10093	1	12.65	280.00	73.30	2.79
94	95	100	10094	1	12.65	280.00	73.30	2.79
95	88	91	10095	1	12.65	280.00	73.30	2.79
96	76	79	10096	1	12.65	280.00	73.30	2.79
97	53	64	10097	1	12.65	280.00	73.30	2.79
98	43	53	10098	1	12.65	280.00	73.30	2.79
99	112	119	10099	1	12.65	280.00	73.30	2.79
100	112	115	10100	1	12.65	280.00	73.30	2.79
101	107	112	10101	1	12.65	280.00	73.30	2.79
102	100	107	10102	1	12.65	280.00	73.30	2.79
103	58	64	10103	1	12.65	280.00	73.30	2.79
104	43	58	10104	1	12.65	280.00	73.30	2.79
105	37	43	10105	1	12.65	280.00	73.30	2.79
106	45	58	10106	1	12.65	280.00	73.30	2.79
107	58	66	10107	1	12.65	280.00	73.30	2.79
108	37	45	10108	1	12.65	280.00	73.30	2.79
109	40	61	10109	1	12.65	280.00	73.30	2.79
110	38	59	10110	1	12.65	280.00	73.30	2.79
111	39	60	10111	1	12.65	280.00	73.30	2.79
112	41	62	10112	1	12.65	280.00	73.30	2.79
113	42	63	10113	1	12.65	280.00	73.30	2.79
114	44	65	10114	1	12.65	280.00	73.30	2.79
115	45	66	10115	1	12.65	280.00	73.30	2.79
116	43	64	10116	1	12.65	280.00	73.30	2.79
117	155	160	10117	1	7.07	67.10	17.60	1.17
118	155	163	10118	1	7.07	67.10	17.60	1.17
119	9	11	10119	1	7.07	67.10	17.60	1.17
120	11	21	10120	1	7.07	67.10	17.60	1.17
121	9	21	10121	1	7.07	67.10	17.60	1.17
122	21	24	10122	1	7.07	67.10	17.60	1.17
123	18	21	10123	1	7.07	67.10	17.60	1.17
124	21	32	10124	1	7.07	67.10	17.60	1.17
125	21	30	10125	1	7.07	67.10	17.60	1.17
126	30	32	10126	1	7.07	67.10	17.60	1.17
127	42	44	10127	1	7.07	67.10	17.60	1.17
128	44	54	10128	1	7.07	67.10	17.60	1.17
129	42	54	10129	1	7.07	67.10	17.60	1.17
130	54	57	10130	1	7.07	67.10	17.60	1.17
131	51	54	10131	1	7.07	67.10	17.60	1.17
132	54	65	10132	1	7.07	67.10	17.60	1.17
133	54	63	10133	1	7.07	67.10	17.60	1.17
134	63	65	10134	1	7.07	67.10	17.60	1.17
135	153	158	10135	1	7.07	67.10	17.60	1.17
136	47	49	10136	1	7.07	67.10	17.60	1.17
137	14	16	10137	1	7.07	67.10	17.60	1.17
138	49	51	10138	1	7.07	67.10	17.60	1.17
139	16	18	10139	1	7.07	67.10	17.60	1.17
140	153	160	10140	1	7.07	67.10	17.60	1.17
141	16	26	10141	1	7.07	67.10	17.60	1.17

MONITORAMENTO E ANÁLISE NUMÉRICA PARA OBTENÇÃO DE FREQUÊNCIAS NATURAIS DE 169  
 UMA TORRE DE TELECOMUNICAÇÃO (PPGEC-UFSC).

142	5	16	10142	1	7.07	67.10	17.60	1.17
143	26	28	10143	1	7.07	67.10	17.60	1.17
144	5	7	10144	1	7.07	67.10	17.60	1.17
145	49	59	10145	1	7.07	67.10	17.60	1.17
146	38	49	10146	1	7.07	67.10	17.60	1.17
147	59	61	10147	1	7.07	67.10	17.60	1.17
148	38	40	10148	1	7.07	67.10	17.60	1.17
149	7	16	10149	1	7.07	67.10	17.60	1.17
150	16	28	10150	1	7.07	67.10	17.60	1.17
151	40	49	10151	1	7.07	67.10	17.60	1.17
152	49	61	10152	1	7.07	67.10	17.60	1.17
153	154	161	10153	1	7.07	67.10	17.60	1.17
154	50	53	10154	1	7.07	67.10	17.60	1.17
155	17	20	10155	1	7.07	67.10	17.60	1.17
156	47	50	10156	1	7.07	67.10	17.60	1.17
157	14	17	10157	1	7.07	67.10	17.60	1.17
158	154	158	10158	1	7.07	67.10	17.60	1.17
159	17	29	10159	1	7.07	67.10	17.60	1.17
160	8	17	10160	1	7.07	67.10	17.60	1.17
161	27	29	10161	1	7.07	67.10	17.60	1.17
162	6	8	10162	1	7.07	67.10	17.60	1.17
163	50	62	10163	1	7.07	67.10	17.60	1.17
164	41	50	10164	1	7.07	67.10	17.60	1.17
165	60	62	10165	1	7.07	67.10	17.60	1.17
166	39	41	10166	1	7.07	67.10	17.60	1.17
167	6	17	10167	1	7.07	67.10	17.60	1.17
168	17	27	10168	1	7.07	67.10	17.60	1.17
169	39	50	10169	1	7.07	67.10	17.60	1.17
170	50	60	10170	1	7.07	67.10	17.60	1.17
171	156	163	10171	1	7.07	67.10	17.60	1.17
172	55	57	10172	1	7.07	67.10	17.60	1.17
173	22	24	10173	1	7.07	67.10	17.60	1.17
174	53	55	10174	1	7.07	67.10	17.60	1.17
175	20	22	10175	1	7.07	67.10	17.60	1.17
176	156	161	10176	1	7.07	67.10	17.60	1.17
177	22	33	10177	1	7.07	67.10	17.60	1.17
178	12	22	10178	1	7.07	67.10	17.60	1.17
179	31	33	10179	1	7.07	67.10	17.60	1.17
180	10	12	10180	1	7.07	67.10	17.60	1.17
181	55	66	10181	1	7.07	67.10	17.60	1.17
182	45	55	10182	1	7.07	67.10	17.60	1.17
183	64	66	10183	1	7.07	67.10	17.60	1.17
184	43	45	10184	1	7.07	67.10	17.60	1.17
185	10	22	10185	1	7.07	67.10	17.60	1.17
186	22	31	10186	1	7.07	67.10	17.60	1.17
187	43	55	10187	1	7.07	67.10	17.60	1.17
188	55	64	10188	1	7.07	67.10	17.60	1.17
189	65	69	10189	1	14.36	280.00	73.30	3.62
190	63	69	10190	1	14.36	280.00	73.30	3.62

MONITORAMENTO E ANÁLISE NUMÉRICA PARA OBTENÇÃO DE FREQUÊNCIAS NATURAIS DE 170  
 UMA TORRE DE TELECOMUNICAÇÃO (PPGEC-UFSC).

191	59	67	10191	1	14.36	280.00	73.30	3.62
192	61	67	10192	1	14.36	280.00	73.30	3.62
193	62	68	10193	1	14.36	280.00	73.30	3.62
194	60	68	10194	1	14.36	280.00	73.30	3.62
195	66	70	10195	1	14.36	280.00	73.30	3.62
196	64	70	10196	1	14.36	280.00	73.30	3.62
197	94	101	10197	1	45.81	1340.00	347.00	25.62
198	101	106	10198	1	45.81	1340.00	347.00	25.62
199	97	104	10199	1	45.81	1340.00	347.00	25.62
200	92	97	10200	1	45.81	1340.00	347.00	25.62
201	98	105	10201	1	45.81	1340.00	347.00	25.62
202	93	98	10202	1	45.81	1340.00	347.00	25.62
203	102	107	10203	1	45.81	1340.00	347.00	25.62
204	95	102	10204	1	45.81	1340.00	347.00	25.62
205	19	24	10205	1	17.57	134.20	35.20	4.19
206	18	19	10206	1	17.57	134.20	35.20	4.19
207	14	19	10207	1	17.57	134.20	35.20	4.19
208	19	20	10208	1	17.57	134.20	35.20	4.19
209	155	162	10209	1	16.96	280.00	73.30	4.69
210	162	167	10210	1	16.96	280.00	73.30	4.69
211	167	174	10211	1	16.96	280.00	73.30	4.69
212	174	179	10212	1	16.96	280.00	73.30	4.69
213	3	11	10213	1	16.96	280.00	73.30	4.69
214	3	9	10214	1	16.96	280.00	73.30	4.69
215	11	24	10215	1	16.96	280.00	73.30	4.69
216	11	23	10216	1	16.96	280.00	73.30	4.69
217	9	18	10217	1	16.96	280.00	73.30	4.69
218	9	23	10218	1	16.96	280.00	73.30	4.69
219	24	32	10219	1	16.96	280.00	73.30	4.69
220	18	30	10220	1	16.96	280.00	73.30	4.69
221	23	32	10221	1	16.96	280.00	73.30	4.69
222	23	30	10222	1	16.96	280.00	73.30	4.69
223	32	36	10223	1	16.96	280.00	73.30	4.69
224	30	36	10224	1	16.96	280.00	73.30	4.69
225	14	26	10225	1	16.96	280.00	73.30	4.69
226	5	14	10226	1	16.96	280.00	73.30	4.69
227	1	7	10227	1	16.96	280.00	73.30	4.69
228	1	5	10228	1	16.96	280.00	73.30	4.69
229	18	28	10229	1	16.96	280.00	73.30	4.69
230	7	18	10230	1	16.96	280.00	73.30	4.69
231	165	169	10231	1	16.96	280.00	73.30	4.69
232	157	165	10232	1	16.96	280.00	73.30	4.69
233	153	157	10233	1	16.96	280.00	73.30	4.69
234	169	177	10234	1	16.96	280.00	73.30	4.69
235	13	28	10235	1	16.96	280.00	73.30	4.69
236	7	13	10236	1	16.96	280.00	73.30	4.69
237	26	34	10237	1	16.96	280.00	73.30	4.69
238	28	34	10238	1	16.96	280.00	73.30	4.69
239	13	26	10239	1	16.96	280.00	73.30	4.69

MONITORAMENTO E ANÁLISE NUMÉRICA PARA OBTENÇÃO DE FREQUÊNCIAS NATURAIS DE 171  
 UMA TORRE DE TELECOMUNICAÇÃO (PPGEC-UFSC).

240	5	13	10240	1	16.96	280.00	73.30	4.69
241	20	29	10241	1	16.96	280.00	73.30	4.69
242	8	20	10242	1	16.96	280.00	73.30	4.69
243	2	6	10243	1	16.96	280.00	73.30	4.69
244	2	8	10244	1	16.96	280.00	73.30	4.69
245	14	27	10245	1	16.96	280.00	73.30	4.69
246	6	14	10246	1	16.96	280.00	73.30	4.69
247	166	171	10247	1	16.96	280.00	73.30	4.69
248	159	166	10248	1	16.96	280.00	73.30	4.69
249	154	159	10249	1	16.96	280.00	73.30	4.69
250	171	178	10250	1	16.96	280.00	73.30	4.69
251	15	27	10251	1	16.96	280.00	73.30	4.69
252	6	15	10252	1	16.96	280.00	73.30	4.69
253	29	35	10253	1	16.96	280.00	73.30	4.69
254	27	35	10254	1	16.96	280.00	73.30	4.69
255	15	29	10255	1	16.96	280.00	73.30	4.69
256	8	15	10256	1	16.96	280.00	73.30	4.69
257	24	33	10257	1	16.96	280.00	73.30	4.69
258	12	24	10258	1	16.96	280.00	73.30	4.69
259	4	10	10259	1	16.96	280.00	73.30	4.69
260	4	12	10260	1	16.96	280.00	73.30	4.69
261	20	31	10261	1	16.96	280.00	73.30	4.69
262	10	20	10262	1	16.96	280.00	73.30	4.69
263	168	176	10263	1	16.96	280.00	73.30	4.69
264	164	168	10264	1	16.96	280.00	73.30	4.69
265	156	164	10265	1	16.96	280.00	73.30	4.69
266	176	180	10266	1	16.96	280.00	73.30	4.69
267	25	31	10267	1	16.96	280.00	73.30	4.69
268	10	25	10268	1	16.96	280.00	73.30	4.69
269	33	37	10269	1	16.96	280.00	73.30	4.69
270	31	37	10270	1	16.96	280.00	73.30	4.69
271	25	33	10271	1	16.96	280.00	73.30	4.69
272	12	25	10272	1	16.96	280.00	73.30	4.69
273	12	33	10273	1	16.96	280.00	73.30	4.69
274	10	31	10274	1	16.96	280.00	73.30	4.69
275	9	30	10275	1	16.96	280.00	73.30	4.69
276	11	32	10276	1	16.96	280.00	73.30	4.69
277	8	29	10277	1	16.96	280.00	73.30	4.69
278	6	27	10278	1	16.96	280.00	73.30	4.69
279	5	26	10279	1	16.96	280.00	73.30	4.69
280	7	28	10280	1	16.96	280.00	73.30	4.69
281	69	78	10281	1	17.21	541.00	140.00	4.38
282	78	82	10282	1	17.21	541.00	140.00	4.38
283	74	82	10283	1	17.21	541.00	140.00	4.38
284	69	74	10284	1	17.21	541.00	140.00	4.38
285	67	72	10285	1	17.21	541.00	140.00	4.38
286	72	80	10286	1	17.21	541.00	140.00	4.38
287	74	80	10287	1	17.21	541.00	140.00	4.38
288	67	74	10288	1	17.21	541.00	140.00	4.38

MONITORAMENTO E ANÁLISE NUMÉRICA PARA OBTENÇÃO DE FREQUÊNCIAS NATURAIS DE 172  
 UMA TORRE DE TELECOMUNICAÇÃO (PPGEC-UFSC).

289	68	76	10289	1	17.21	541.00	140.00	4.38
290	76	81	10290	1	17.21	541.00	140.00	4.38
291	72	81	10291	1	17.21	541.00	140.00	4.38
292	68	72	10292	1	17.21	541.00	140.00	4.38
293	70	78	10293	1	17.21	541.00	140.00	4.38
294	78	83	10294	1	17.21	541.00	140.00	4.38
295	76	83	10295	1	17.21	541.00	140.00	4.38
296	70	76	10296	1	17.21	541.00	140.00	4.38
297	3	23	10297	1	84.48	4540.00	1160.00	65.50
298	23	36	10298	1	84.48	4540.00	1160.00	65.50
299	1	13	10299	1	84.48	4540.00	1160.00	65.50
300	13	34	10300	1	84.48	4540.00	1160.00	65.50
301	2	15	10301	1	84.48	4540.00	1160.00	65.50
302	15	35	10302	1	84.48	4540.00	1160.00	65.50
303	4	25	10303	1	84.48	4540.00	1160.00	65.50
304	25	37	10304	1	84.48	4540.00	1160.00	65.50
305	74	78	10305	1	7.95	115.00	29.60	1.37
306	72	74	10306	1	7.95	115.00	29.60	1.37
307	72	76	10307	1	7.95	115.00	29.60	1.37
308	76	78	10308	1	7.95	115.00	29.60	1.37
309	36	56	10309	1	73.53	3740.00	943.00	48.86
310	56	69	10310	1	73.53	3740.00	943.00	48.86
311	69	77	10311	1	73.53	3740.00	943.00	48.86
312	67	71	10312	1	73.53	3740.00	943.00	48.86
313	46	67	10313	1	73.53	3740.00	943.00	48.86
314	34	46	10314	1	73.53	3740.00	943.00	48.86
315	68	73	10315	1	73.53	3740.00	943.00	48.86
316	48	68	10316	1	73.53	3740.00	943.00	48.86
317	35	48	10317	1	73.53	3740.00	943.00	48.86
318	70	79	10318	1	73.53	3740.00	943.00	48.86
319	58	70	10319	1	73.53	3740.00	943.00	48.86
320	37	58	10320	1	73.53	3740.00	943.00	48.86
321	191	198	10321	1	15.49	280.00	73.30	4.24
322	196	198	10322	1	15.49	280.00	73.30	4.24
323	198	199	10323	1	15.49	280.00	73.30	4.24
324	198	203	10324	1	15.49	280.00	73.30	4.24
325	203	210	10325	1	15.49	280.00	73.30	4.24
326	210	215	10326	1	15.49	280.00	73.30	4.24
327	179	186	10327	1	15.49	280.00	73.30	4.24
328	193	194	10328	1	15.49	280.00	73.30	4.24
329	193	196	10329	1	15.49	280.00	73.30	4.24
330	189	193	10330	1	15.49	280.00	73.30	4.24
331	177	181	10331	1	15.49	280.00	73.30	4.24
332	201	205	10332	1	15.49	280.00	73.30	4.24
333	205	213	10333	1	15.49	280.00	73.30	4.24
334	193	201	10334	1	15.49	280.00	73.30	4.24
335	195	197	10335	1	15.49	280.00	73.30	4.24
336	194	195	10336	1	15.49	280.00	73.30	4.24
337	190	195	10337	1	15.49	280.00	73.30	4.24

Mestrando : Rodrigo Alvarez Arispe

Orientadora : Henriette Lebre La Rovere, PhD

Co-Orientador : Dr. Ing. Atilio Morquio Dovat



MONITORAMENTO E ANÁLISE NUMÉRICA PARA OBTENÇÃO DE FREQUÊNCIAS NATURAIS DE 173  
 UMA TORRE DE TELECOMUNICAÇÃO (PPGEC-UFSC).

338	178	183	10338	1	15.49	280.00	73.30	4.24
339	202	207	10339	1	15.49	280.00	73.30	4.24
340	207	214	10340	1	15.49	280.00	73.30	4.24
341	195	202	10341	1	15.49	280.00	73.30	4.24
342	199	200	10342	1	15.49	280.00	73.30	4.24
343	197	200	10343	1	15.49	280.00	73.30	4.24
344	192	200	10344	1	15.49	280.00	73.30	4.24
345	180	188	10345	1	15.49	280.00	73.30	4.24
346	204	212	10346	1	15.49	280.00	73.30	4.24
347	212	216	10347	1	15.49	280.00	73.30	4.24
348	200	204	10348	1	15.49	280.00	73.30	4.24
349	186	191	10349	1	15.49	280.00	73.30	4.24
350	188	192	10350	1	15.49	280.00	73.30	4.24
351	181	189	10351	1	15.49	280.00	73.30	4.24
352	183	190	10352	1	15.49	280.00	73.30	4.24
353	118	127	10353	1	10.98	184.00	47.80	2.43
354	127	131	10354	1	10.98	184.00	47.80	2.43
355	118	123	10355	1	10.98	184.00	47.80	2.43
356	124	127	10356	1	10.98	184.00	47.80	2.43
357	123	124	10357	1	10.98	184.00	47.80	2.43
358	123	126	10358	1	10.98	184.00	47.80	2.43
359	123	131	10359	1	10.98	184.00	47.80	2.43
360	123	127	10360	1	10.98	184.00	47.80	2.43
361	126	127	10361	1	10.98	184.00	47.80	2.43
362	121	123	10362	1	10.98	184.00	47.80	2.43
363	121	129	10363	1	10.98	184.00	47.80	2.43
364	120	121	10364	1	10.98	184.00	47.80	2.43
365	116	121	10365	1	10.98	184.00	47.80	2.43
366	121	124	10366	1	10.98	184.00	47.80	2.43
367	116	123	10367	1	10.98	184.00	47.80	2.43
368	120	123	10368	1	10.98	184.00	47.80	2.43
369	123	129	10369	1	10.98	184.00	47.80	2.43
370	121	125	10370	1	10.98	184.00	47.80	2.43
371	125	130	10371	1	10.98	184.00	47.80	2.43
372	122	125	10372	1	10.98	184.00	47.80	2.43
373	117	125	10373	1	10.98	184.00	47.80	2.43
374	124	125	10374	1	10.98	184.00	47.80	2.43
375	117	121	10375	1	10.98	184.00	47.80	2.43
376	121	122	10376	1	10.98	184.00	47.80	2.43
377	121	130	10377	1	10.98	184.00	47.80	2.43
378	125	127	10378	1	10.98	184.00	47.80	2.43
379	127	132	10379	1	10.98	184.00	47.80	2.43
380	127	128	10380	1	10.98	184.00	47.80	2.43
381	119	127	10381	1	10.98	184.00	47.80	2.43
382	119	125	10382	1	10.98	184.00	47.80	2.43
383	125	128	10383	1	10.98	184.00	47.80	2.43
384	125	132	10384	1	10.98	184.00	47.80	2.43
385	52	57	10385	1	11.83	106.00	27.60	1.97
386	51	52	10386	1	11.83	106.00	27.60	1.97

MONITORAMENTO E ANÁLISE NUMÉRICA PARA OBTENÇÃO DE FREQUÊNCIAS NATURAIS DE 174  
 UMA TORRE DE TELECOMUNICAÇÃO (PPGEC-UFSC).

387	47	52	10387	1	11.83	106.00	27.60	1.97
388	52	53	10388	1	11.83	106.00	27.60	1.97
389	77	82	10389	1	55.04	2690.00	679.00	30.72
390	71	80	10390	1	55.04	2690.00	679.00	30.72
391	73	81	10391	1	55.04	2690.00	679.00	30.72
392	79	83	10392	1	55.04	2690.00	679.00	30.72
393	131	139	10393	1	7.75	115.00	29.60	1.33
394	139	143	10394	1	7.75	115.00	29.60	1.33
395	131	136	10395	1	7.75	115.00	29.60	1.33
396	138	139	10396	1	7.75	115.00	29.60	1.33
397	136	138	10397	1	7.75	115.00	29.60	1.33
398	136	143	10398	1	7.75	115.00	29.60	1.33
399	143	151	10399	1	7.75	115.00	29.60	1.33
400	143	148	10400	1	7.75	115.00	29.60	1.33
401	150	151	10401	1	7.75	115.00	29.60	1.33
402	151	155	10402	1	7.75	115.00	29.60	1.33
403	148	150	10403	1	7.75	115.00	29.60	1.33
404	148	155	10404	1	7.75	115.00	29.60	1.33
405	146	153	10405	1	7.75	115.00	29.60	1.33
406	145	146	10406	1	7.75	115.00	29.60	1.33
407	141	146	10407	1	7.75	115.00	29.60	1.33
408	134	141	10408	1	7.75	115.00	29.60	1.33
409	133	134	10409	1	7.75	115.00	29.60	1.33
410	129	134	10410	1	7.75	115.00	29.60	1.33
411	148	153	10411	1	7.75	115.00	29.60	1.33
412	145	148	10412	1	7.75	115.00	29.60	1.33
413	141	148	10413	1	7.75	115.00	29.60	1.33
414	133	136	10414	1	7.75	115.00	29.60	1.33
415	136	141	10415	1	7.75	115.00	29.60	1.33
416	129	136	10416	1	7.75	115.00	29.60	1.33
417	149	154	10417	1	7.75	115.00	29.60	1.33
418	147	149	10418	1	7.75	115.00	29.60	1.33
419	142	149	10419	1	7.75	115.00	29.60	1.33
420	137	142	10420	1	7.75	115.00	29.60	1.33
421	135	137	10421	1	7.75	115.00	29.60	1.33
422	130	137	10422	1	7.75	115.00	29.60	1.33
423	146	154	10423	1	7.75	115.00	29.60	1.33
424	146	147	10424	1	7.75	115.00	29.60	1.33
425	142	146	10425	1	7.75	115.00	29.60	1.33
426	134	135	10426	1	7.75	115.00	29.60	1.33
427	134	142	10427	1	7.75	115.00	29.60	1.33
428	130	134	10428	1	7.75	115.00	29.60	1.33
429	151	156	10429	1	7.75	115.00	29.60	1.33
430	151	152	10430	1	7.75	115.00	29.60	1.33
431	144	151	10431	1	7.75	115.00	29.60	1.33
432	139	144	10432	1	7.75	115.00	29.60	1.33
433	139	140	10433	1	7.75	115.00	29.60	1.33
434	132	139	10434	1	7.75	115.00	29.60	1.33
435	149	156	10435	1	7.75	115.00	29.60	1.33

Mestrando : Rodrigo Alvarez Arispe

Orientadora : Henriette Lebre La Rovere, PhD

Co-Orientador : Dr. Ing. Atilio Morquio Dovat

MONITORAMENTO E ANÁLISE NUMÉRICA PARA OBTENÇÃO DE FREQUÊNCIAS NATURAIS DE 175  
 UMA TORRE DE TELECOMUNICAÇÃO (PPGEC-UFSC).

436	149	152	10436	1	7.75	115.00	29.60	1.33
437	144	149	10437	1	7.75	115.00	29.60	1.33
438	137	140	10438	1	7.75	115.00	29.60	1.33
439	137	144	10439	1	7.75	115.00	29.60	1.33
440	132	137	10440	1	7.75	115.00	29.60	1.33
441	82	89	10441	1	55.04	2690.00	679.00	30.72
442	89	94	10442	1	55.04	2690.00	679.00	30.72
443	80	84	10443	1	55.04	2690.00	679.00	30.72
444	84	92	10444	1	55.04	2690.00	679.00	30.72
445	81	86	10445	1	55.04	2690.00	679.00	30.72
446	86	93	10446	1	55.04	2690.00	679.00	30.72
447	83	91	10447	1	55.04	2690.00	679.00	30.72
448	91	95	10448	1	55.04	2690.00	679.00	30.72
449	143	150	10449	1	26.96	750.00	194.00	10.43
450	131	138	10450	1	26.96	750.00	194.00	10.43
451	138	143	10451	1	26.96	750.00	194.00	10.43
452	150	155	10452	1	26.96	750.00	194.00	10.43
453	145	153	10453	1	26.96	750.00	194.00	10.43
454	133	141	10454	1	26.96	750.00	194.00	10.43
455	129	133	10455	1	26.96	750.00	194.00	10.43
456	141	145	10456	1	26.96	750.00	194.00	10.43
457	147	154	10457	1	26.96	750.00	194.00	10.43
458	135	142	10458	1	26.96	750.00	194.00	10.43
459	130	135	10459	1	26.96	750.00	194.00	10.43
460	142	147	10460	1	26.96	750.00	194.00	10.43
461	152	156	10461	1	26.96	750.00	194.00	10.43
462	140	144	10462	1	26.96	750.00	194.00	10.43
463	132	140	10463	1	26.96	750.00	194.00	10.43
464	144	152	10464	1	26.96	750.00	194.00	10.43
465	82	90	10465	1	12.84	379.00	98.60	2.64
466	82	87	10466	1	12.84	379.00	98.60	2.64
467	90	94	10467	1	12.84	379.00	98.60	2.64
468	87	94	10468	1	12.84	379.00	98.60	2.64
469	85	92	10469	1	12.84	379.00	98.60	2.64
470	80	85	10470	1	12.84	379.00	98.60	2.64
471	87	92	10471	1	12.84	379.00	98.60	2.64
472	80	87	10472	1	12.84	379.00	98.60	2.64
473	88	93	10473	1	12.84	379.00	98.60	2.64
474	81	88	10474	1	12.84	379.00	98.60	2.64
475	85	93	10475	1	12.84	379.00	98.60	2.64
476	81	85	10476	1	12.84	379.00	98.60	2.64
477	90	95	10477	1	12.84	379.00	98.60	2.64
478	83	90	10478	1	12.84	379.00	98.60	2.64
479	88	95	10479	1	12.84	379.00	98.60	2.64
480	83	88	10480	1	12.84	379.00	98.60	2.64
481	187	191	10481	1	5.75	36.10	9.43	1.00
482	160	167	10482	1	5.75	36.10	9.43	1.00
483	167	172	10483	1	5.75	36.10	9.43	1.00
484	163	167	10484	1	5.75	36.10	9.43	1.00

Mestrando : Rodrigo Alvarez Arispe

Orientadora : Henriette Lebre La Rovere, PhD

Co-Orientador : Dr. Ing. Atilio Morquio Dovat

MONITORAMENTO E ANÁLISE NUMÉRICA PARA OBTENÇÃO DE FREQUÊNCIAS NATURAIS DE 176  
 UMA TORRE DE TELECOMUNICAÇÃO (PPGEC-UFSC).

485	167	175	10485	1	5.75	36.10	9.43	1.00
486	179	184	10486	1	5.75	36.10	9.43	1.00
487	179	187	10487	1	5.75	36.10	9.43	1.00
488	172	179	10488	1	5.75	36.10	9.43	1.00
489	175	179	10489	1	5.75	36.10	9.43	1.00
490	184	191	10490	1	5.75	36.10	9.43	1.00
491	191	196	10491	1	5.75	36.10	9.43	1.00
492	191	199	10492	1	5.75	36.10	9.43	1.00
493	196	203	10493	1	5.75	36.10	9.43	1.00
494	199	203	10494	1	5.75	36.10	9.43	1.00
495	203	208	10495	1	5.75	36.10	9.43	1.00
496	203	211	10496	1	5.75	36.10	9.43	1.00
497	208	215	10497	1	5.75	36.10	9.43	1.00
498	211	215	10498	1	5.75	36.10	9.43	1.00
499	206	213	10499	1	5.75	36.10	9.43	1.00
500	201	206	10500	1	5.75	36.10	9.43	1.00
501	194	201	10501	1	5.75	36.10	9.43	1.00
502	189	194	10502	1	5.75	36.10	9.43	1.00
503	182	189	10503	1	5.75	36.10	9.43	1.00
504	170	177	10504	1	5.75	36.10	9.43	1.00
505	177	182	10505	1	5.75	36.10	9.43	1.00
506	165	170	10506	1	5.75	36.10	9.43	1.00
507	158	165	10507	1	5.75	36.10	9.43	1.00
508	208	213	10508	1	5.75	36.10	9.43	1.00
509	201	208	10509	1	5.75	36.10	9.43	1.00
510	196	201	10510	1	5.75	36.10	9.43	1.00
511	189	196	10511	1	5.75	36.10	9.43	1.00
512	172	177	10512	1	5.75	36.10	9.43	1.00
513	177	184	10513	1	5.75	36.10	9.43	1.00
514	165	172	10514	1	5.75	36.10	9.43	1.00
515	160	165	10515	1	5.75	36.10	9.43	1.00
516	184	189	10516	1	5.75	36.10	9.43	1.00
517	209	214	10517	1	5.75	36.10	9.43	1.00
518	202	209	10518	1	5.75	36.10	9.43	1.00
519	197	202	10519	1	5.75	36.10	9.43	1.00
520	190	197	10520	1	5.75	36.10	9.43	1.00
521	185	190	10521	1	5.75	36.10	9.43	1.00
522	173	178	10522	1	5.75	36.10	9.43	1.00
523	178	185	10523	1	5.75	36.10	9.43	1.00
524	166	173	10524	1	5.75	36.10	9.43	1.00
525	161	166	10525	1	5.75	36.10	9.43	1.00
526	206	214	10526	1	5.75	36.10	9.43	1.00
527	202	206	10527	1	5.75	36.10	9.43	1.00
528	194	202	10528	1	5.75	36.10	9.43	1.00
529	190	194	10529	1	5.75	36.10	9.43	1.00
530	170	178	10530	1	5.75	36.10	9.43	1.00
531	178	182	10531	1	5.75	36.10	9.43	1.00
532	166	170	10532	1	5.75	36.10	9.43	1.00
533	158	166	10533	1	5.75	36.10	9.43	1.00

Mestrando : Rodrigo Alvarez Arispe

Orientadora : Henriette Lebre La Rovere, PhD

Co-Orientador : Dr. Ing. Atilio Morquio Dovat

MONITORAMENTO E ANÁLISE NUMÉRICA PARA OBTENÇÃO DE FREQUÊNCIAS NATURAIS DE 177  
 UMA TORRE DE TELECOMUNICAÇÃO (PPGEC-UFSC).

534	182	190	10534	1	5.75	36.10	9.43	1.00
535	211	216	10535	1	5.75	36.10	9.43	1.00
536	204	211	10536	1	5.75	36.10	9.43	1.00
537	199	204	10537	1	5.75	36.10	9.43	1.00
538	192	199	10538	1	5.75	36.10	9.43	1.00
539	187	192	10539	1	5.75	36.10	9.43	1.00
540	175	180	10540	1	5.75	36.10	9.43	1.00
541	180	187	10541	1	5.75	36.10	9.43	1.00
542	168	175	10542	1	5.75	36.10	9.43	1.00
543	163	168	10543	1	5.75	36.10	9.43	1.00
544	209	216	10544	1	5.75	36.10	9.43	1.00
545	204	209	10545	1	5.75	36.10	9.43	1.00
546	197	204	10546	1	5.75	36.10	9.43	1.00
547	192	197	10547	1	5.75	36.10	9.43	1.00
548	173	180	10548	1	5.75	36.10	9.43	1.00
549	180	185	10549	1	5.75	36.10	9.43	1.00
550	168	173	10550	1	5.75	36.10	9.43	1.00
551	161	168	10551	1	5.75	36.10	9.43	1.00
552	185	192	10552	1	5.75	36.10	9.43	1.00
553	194	199	10553	1	5.75	36.10	9.43	1.00
554	196	197	10554	1	5.75	36.10	9.43	1.00
555	194	197	10555	1	5.75	36.10	9.43	1.00
556	194	196	10556	1	5.75	36.10	9.43	1.00
557	196	199	10557	1	5.75	36.10	9.43	1.00
558	197	199	10558	1	5.75	36.10	9.43	1.00
559	106	113	10559	1	37.00	1340.00	347.00	3.86
560	113	118	10560	1	37.00	1340.00	347.00	3.86
561	104	108	10561	1	37.00	1340.00	347.00	3.86
562	108	116	10562	1	37.00	1340.00	347.00	3.86
563	105	110	10563	1	37.00	1340.00	347.00	3.86
564	110	117	10564	1	37.00	1340.00	347.00	3.86
565	107	115	10565	1	37.00	1340.00	347.00	3.86
566	115	119	10566	1	37.00	1340.00	347.00	3.86
567	162	163	10567	1	4.75	17.40	4.59	0.83
568	160	162	10568	1	4.75	17.40	4.59	0.83
569	157	158	10569	1	4.75	17.40	4.59	0.83
570	157	160	10570	1	4.75	17.40	4.59	0.83
571	159	161	10571	1	4.75	17.40	4.59	0.83
572	158	159	10572	1	4.75	17.40	4.59	0.83
573	163	164	10573	1	4.75	17.40	4.59	0.83
574	161	164	10574	1	4.75	17.40	4.59	0.83
575	158	163	10575	1	4.75	17.40	4.59	0.83
576	160	161	10576	1	4.75	17.40	4.59	0.83
577	160	163	10577	1	4.75	17.40	4.59	0.83
578	158	160	10578	1	4.75	17.40	4.59	0.83
579	158	161	10579	1	4.75	17.40	4.59	0.83
580	161	163	10580	1	4.75	17.40	4.59	0.83
581	118	126	10581	1	32.16	1010.00	262.00	13.44
582	126	131	10582	1	32.16	1010.00	262.00	13.44

Mestrando : Rodrigo Alvarez Arispe

Orientadora : Henriette Lebre La Rovere, PhD

Co-Orientador : Dr. Ing. Atilio Morquio Dovat

MONITORAMENTO E ANÁLISE NUMÉRICA PARA OBTENÇÃO DE FREQUÊNCIAS NATURAIS DE 178  
 UMA TORRE DE TELECOMUNICAÇÃO (PPGEC-UFSC).

583	116	120	10583	1	32.16	1010.00	262.00	13.44
584	120	129	10584	1	32.16	1010.00	262.00	13.44
585	117	122	10585	1	32.16	1010.00	262.00	13.44
586	122	130	10586	1	32.16	1010.00	262.00	13.44
587	119	128	10587	1	32.16	1010.00	262.00	13.44
588	128	132	10588	1	32.16	1010.00	262.00	13.44
589	172	174	10589	1	3.84	17.40	4.59	0.53
590	174	175	10590	1	3.84	17.40	4.59	0.53
591	186	187	10591	1	3.84	17.40	4.59	0.53
592	208	210	10592	1	3.84	17.40	4.59	0.53
593	210	211	10593	1	3.84	17.40	4.59	0.53
594	184	186	10594	1	3.84	17.40	4.59	0.53
595	181	182	10595	1	3.84	17.40	4.59	0.53
596	213	214	10596	1	3.84	17.40	4.59	0.53
597	205	206	10597	1	3.84	17.40	4.59	0.53
598	169	170	10598	1	3.84	17.40	4.59	0.53
599	213	215	10599	1	3.84	17.40	4.59	0.53
600	205	208	10600	1	3.84	17.40	4.59	0.53
601	181	184	10601	1	3.84	17.40	4.59	0.53
602	169	172	10602	1	3.84	17.40	4.59	0.53
603	183	185	10603	1	3.84	17.40	4.59	0.53
604	207	209	10604	1	3.84	17.40	4.59	0.53
605	171	173	10605	1	3.84	17.40	4.59	0.53
606	206	207	10606	1	3.84	17.40	4.59	0.53
607	182	183	10607	1	3.84	17.40	4.59	0.53
608	170	171	10608	1	3.84	17.40	4.59	0.53
609	187	188	10609	1	3.84	17.40	4.59	0.53
610	215	216	10610	1	3.84	17.40	4.59	0.53
611	211	212	10611	1	3.84	17.40	4.59	0.53
612	175	176	10612	1	3.84	17.40	4.59	0.53
613	214	216	10613	1	3.84	17.40	4.59	0.53
614	209	212	10614	1	3.84	17.40	4.59	0.53
615	185	188	10615	1	3.84	17.40	4.59	0.53
616	173	176	10616	1	3.84	17.40	4.59	0.53

