



Universidade Federal de Santa Catarina
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

**ESTUDO DE ESTABILIDADE DE PERFIS
PULTRUDADOS DE MATERIAIS PRFV**

Dissertação submetida à Universidade Federal de Santa Catarina como requisito exigido pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil - PPGEC, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Civil.

IGOR PIERIN

Florianópolis, Março de 2005

“ESTUDO DA ESTABILIDADE DE PERFIS DE MATERIAIS DE PRFV”

IGOR PIERIN

Dissertação julgada adequada para a obtenção do Título de MESTRE em Engenharia Civil e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil –PPGEC, da Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC.

Prof^a. Henriette Lebre La Rovere - Coordenadora do PPGEC

Prof^a. Henriette Lebre La Rovere – Orientadora / Moderadora

COMISSÃO EXAMINADORA:

Dr. Daniel Domingues Loriggio - ECV/UFSC

Dr. Eduardo Miranda Batista – COPPE/UFRJ

Dr. José Carlos Pereira – UFSC

Dr. Luís Carlos Prola – IPT/Portugal

Dr. Roberto Caldas de Andrade Pinto – ECV/UFSC

AGRADECIMENTOS

À Professora Henriette Lebre La Rovere, pela dedicação na orientação desta dissertação, no auxílio no desenvolvimento do programa computacional (principalmente para achar os erros durante a programação) e dos conhecimentos transmitidos para a realização desta dissertação. E no apoio e na confiança depositada, que eu seria capaz de realizar este trabalho.

Ao Professor Luís Carlos Prola que desde a minha graduação em Engenharia Civil na Universidade Estadual de Maringá, sempre me incentivou na participação de trabalhos científicos e no acúmulo de conhecimentos (até em ligações internacionais) que auxiliaram na confecção desta dissertação.

Aos professores Daniel Domingues Loriggio, Ivo José Padaratz, Narbal Ataliba Marcellino e Roberto Caldas de Andrade Pinto do programa de pós-graduação em Engenharia Civil da UFSC.

Aos amigos da UFSC Rodrigo Arispe, Rodrigo da Mata, Felipe Tamashiro, Marcos Souza Amaral, Márcio Moura, Almir Barros da Silva Santos Neto, Diogo Zanette. Luiz Duarte pela amizade.

Aos meus pais, Paulo e Ester, e aos meus irmãos Denise, Júlio e Letícia que sempre me apoiaram, incentivaram e ajudaram a conquistar as barreiras que apareceram durante o caminho até a conclusão deste curso de Mestrado.

Aos meus parentes de Florianópolis que ajudaram na minha estada nesta cidade. E em especial à Sandra que foi uma “mãe” e aos primos que foram “irmãos”.

Ao CNPq pela bolsa de estudos concedida.

SUMÁRIO

Lista de Figuras.....	vii
Lista de Tabelas	x
Lista de Símbolos.....	xii
Resumo	xviii
Abstract.....	xix
1. Introdução	1
1.1. Considerações Iniciais	1
1.2. Justificativa	2
1.3. Objetivo	3
1.4. Organização	3
2. Polímeros Reforçados com Fibras e Instabilidade de Perfis.....	5
2.1. Polímeros Reforçados com Fibras	5
2.1.1. Fibras.....	8
2.1.2. Matrizes.....	18
2.1.3. Interface Fibra-Matriz.....	21
2.2. Fabricação dos compostos	22
2.3. Aplicações de compostos de <i>PRFV</i> na Engenharia Civil	26
2.4. Comportamento macromecânico dos compostos	31
2.4.1. Equações Constitutivas dos Materiais Compostos numa Direção Qualquer.....	34
2.5. Micromecânica dos compostos	36
2.6. Critérios de Ruptura.....	43
2.6.1. Critério da Máxima Tensão.....	43
2.6.2. Critério da Máxima Deformação	43
2.6.3. Critérios Energéticos.....	44
2.6.3.1 Critério de Hill.....	44
2.6.3.2 Critério de Tsai-Hill.....	46
2.6.3.3 Critério de Hoffman.....	46
2.6.3.4 Critério de Tsai-Wu	46
2.7. Instabilidade de Perfis.....	47
2.7.1. Modos Globais	51

2.7.2. Modo Local de Placa	52
2.7.3. Modo Distorcional	54
3. Método dos Elementos Finitos	58
3.1. Elemento de Estado Plano de Tensões	58
3.2. Elemento de Placa.....	61
3.2.1. Elemento <i>ACM</i>	63
3.2.2. Elemento <i>DKQ</i>	69
3.3. Elemento de Casca.....	75
3.4. Transformação de Coordenadas.....	78
3.5. Cálculo dos Deslocamentos e Tensões.....	79
3.6. Não Linearidade Geométrica	80
3.6.1. Problema de Instabilidade Inicial.....	83
3.6.2. Não Linearidade Geométrica Aplicada ao Elemento de Casca	84
3.7. Solução do Problema de Autovalores.....	88
3.8. Implementação Computacional	89
4. Método das Faixas Finitas	93
4.1. Condições de Contorno.....	96
4.2. Relações Deformações-Deslocamentos	98
4.3. Relações Tensões-Deformações	99
4.4. Energia Potencial	100
4.5. Matriz de Rigidez.....	103
4.6. Transformação de Coordenadas.....	104
4.7. Equações de Equilíbrio	105
4.8. Implementação Computacional	107
5. Comparação entre Métodos	110
5.1. Estudos Iniciais com o <i>MEF</i>	111
5.1.1. Compressão Uniforme	111
5.1.2. Compressão Uniforme em Duas Direções Perpendiculares	115
5.1.3. Flexão Pura de Placas	117
5.2. Estudos Iniciais com <i>MFF</i>	118
5.3. Comparação entre <i>MEF</i> e <i>MFF</i> - Seção em <i>U</i>	120
5.4. Efeito da Ortotropia do Material e do Comprimento do Perfil – Seção <i>U</i> ...	123
5.5. Comparação entre Métodos <i>MEF</i> e <i>MFF</i> – Seção <i>H</i>	129
5.6. Efeito da Ortotropia do Material e do Comprimento do Perfil – Seção <i>H</i> ...	134

5.7. Efeito da Compressão Variável – Seção <i>H</i>	143
5.8. Considerações sobre as Análises e Métodos Numéricos	146
6. Conclusões e Recomendações	148
6.1. Conclusões	148
6.2. Sugestões para Trabalhos Futuros	150
Anexo 1	151
Anexo 2.....	153
Referências bibliográficas.....	155

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1: Diagrama tensão-deformação de algumas fibras. (Committee ACI 440R, 1996).	8
Figura 2.2: Tipos de orientações das fibras: (a) unidimensional, (b) plano e (c) aleatório. (Schwartz, 1984).....	9
Figura 2.3: Efeito da deformação ao redor da fibra na matriz sob tensão: (a) fibra contínua e (b) fibra descontínua.....	11
Figura 2.4: Distribuição de tensões ao longo da fibra.	12
Figura 2.5: Filamento contínuo – <i>rovings</i> , (Santos Neto, 2004).....	15
Figura 2.6: Filamentos entrelaçados – <i>woven rovings</i> , (Santos Neto, 2004).....	15
Figura 2.7: Manta de fios picados – <i>chopped strand mats</i> , (Santos Neto, 2004).	15
Figura 2.8: Manta de fios contínuos – <i>continuous strand mats</i> , (Santos Neto, 2004)..	16
Figura 2.9: Manta fina ou véu – <i>surfacing mats ou veil</i> , (Santos Neto, 2004).	16
Figura 2.10: Tecido – <i>woven fabrics</i> , (Santos Neto, 2004).	16
Figura 2.11: Esquema do processo de pultrusão, (Santos Neto, 2004).....	24
Figura 2.12: Esquema de um perfil pultrudado, (ENMAC, 2003).	25
Figura 2.13: Perfis pultrudados, (Cogumelo, 2003).	25
Figura 2.14: Ponte <i>West Mill</i> na Inglaterra, (FiberLine, 2004).....	28
Figura 2.15: Edifício <i>Eyecatcher</i> , (Fiberline, 2004).....	28
Figura 2.16: Estação de metrô na Alemanha, (Fiberline, 2004).	29
Figura 2.17: Posto de combustível em <i>PRF</i> , (Euzébio, 2004).....	29
Figura 2.18: Pavilhão para armazenamento de defensivos agrícolas, (Euzébio, 2004)..	30
Figura 2.19: Vista da torre de sinalização da Marinha do Brasil, (Euzébio, 2004).	30
Figura 2.20: Comportamento dos materiais: (a) isotrópico, (b) anisotrópico e (c) ortotrópico.....	32
Figura 2.21: Eixos de ortotropia	33
Figura 2.22: Sistema de eixos de referência e de ortotropia.....	35
Figura 2.23: Representação do material real por um modelo simplificado, (Leal, 2003).	39
Figura 2.24: Relações dos módulos de elasticidade com o volume de fibras.....	39
Figura 2.25: Relação entre o módulo de cisalhamento e o volume de fibras.	40
Figura 2.26: Modelo dos cilindros concêntricos.....	41
Figura 2.27: Tipos de seções de perfis pultrudados comumente utilizados.....	48

Figura 2.28: Instabilidade bifurcacional. (Reis e Camotim, 2000).....	49
Figura 2.29: Barra comprimida em seção C: (a) <i>MLP</i> , (b) <i>MD</i> , (c) <i>MGF</i> e (d) <i>MGFT</i> , (Prola e Camotim, 2000).....	50
Figura 2.30: Variação de σ_b com a relação a/b_1 : (a) $t=t_1$ e (b) $t=t_2>t_1$	51
Figura 2.31: Variação de σ_b com a relação a/b_1 e n (Prola, 2001).....	51
Figura 2.32: Instabilidade de uma barra em <i>C</i> num <i>MLP</i> influenciado pela alma.	53
Figura 2.33: Modo Distorcional, (Hancock, 1997).....	55
Figura 2.34: Seções transversais em: (a) <i>Z</i> com bordos inclinados; (b) <i>S</i> reforçado; (c) <i>rack</i> ; (d) <i>sigma</i>	56
Figura 3.1: Elemento Plano – Bilinear.....	58
Figura 3.2: Deformação da placa de Kirchhoff: (a) paralela a <i>xz</i> e (b) paralela a <i>yz</i>	63
Figura 3.3: Elemento finito de placa de quatro nós	64
Figura 3.4: Geometria do elemento <i>DKQ</i>	71
Figura 3.5: Elementos Finitos: (a) Estado Plano de Tensões; (b) Placa; (c) Casca.	75
Figura 3.6: Representação do elemento finito de casca no sistema local.	78
Figura 3.7: Fluxograma do programa baseado no <i>MEF</i>	90
Figura 4.1: Discretização de um perfil em faixas finitas.	94
Figura 4.2: Graus de liberdade numa faixa finita.	95
Figura 4.3: Linha nodal de simetria, (Prola, 2001).....	98
Figura 4.4: Representação de uma faixa finita submetida a tensões de membrana.	101
Figura 4.5: Transformação de eixos global para local.	104
Figura 4.6: Fluxograma do programa <i>INSTABFAIXA</i>	108
Figura 5.1: Placa retangular submetida à compressão uniforme.	112
Figura 5.2: Placa submetida à compressão em direções perpendiculares.....	116
Figura 5.3: Placa retangular simplesmente apoiada submetida à flexão pura.	117
Figura 5.4: Coluna engastada e livre, (Lima <i>et al</i> , 2002).	120
Figura 5.5: Coluna simplesmente apoiada sob compressão.	121
Figura 5.6: Modo de instabilidade da viga engastada-livre em seção <i>U</i>	123
Figura 5.7: Representação esquemática do perfil pultrudado em <i>U</i> de material de <i>PRFV</i>	124
Figura 5.8: Influência do nível de ortotropia para a seção em <i>U</i>	125
Figura 5.9: Seção em <i>U</i> e modos de instabilidade (a) geometria, (b) <i>MLP</i> e (c) <i>MGF</i>	125
Figura 5.10: Variação da tensão de bifurcação com a/b_1 para a seção em <i>U</i>	129

Figura 5.11: Colunas de seção H: (a) características geométricas, (b) MLP e (c) MGF.	130
Figura 5.12: Configuração do modo local de placa ($n=3$).....	131
Figura 5.13: Configuração do modo global de flexão ($a=4460mm$).	132
Figura 5.14: Dimensões da seção transversal do perfil <i>H</i> pultrudado de <i>PRFV</i> (Santos Neto <i>et al</i> , 2004).	134
Figura 5.15: Representação esquemática do perfil pultrudado de material <i>PRFV</i> em seção <i>H</i>	135
Figura 5.16: Influência do nível da ortotropia do material para a seção <i>H</i>	136
Figura 5.17: Variação da tensão de bifurcação com a/b_1 e n	137
Figura 5.18: Valores de tensão de bifurcação obtidos pelo <i>MFF</i> e <i>MEF</i>	139
Figura 5.19: Detalhe ampliado da variação da tensão de bifurcação com o comprimento do perfil.....	139
Figura 5.20: Configuração do <i>MLP</i> para $a=0,225m$ ($n=1$).....	140
Figura 5.21: Configuração do <i>MLP</i> para $a=0,41m$ ($n=2$).....	140
Figura 5.22: Configuração do <i>MLP</i> para $a=0,45m$ ($n=2$).....	141
Figura 5.23: Configuração do <i>MLP</i> para $a=0,58m$ ($n=3$).....	141
Figura 5.24: Configuração do <i>MLP</i> para $a=0,71m$ ($n=3$).....	142
Figura 5.25: Configuração do <i>MLP</i> para $a=0,82m$ ($n=4$).....	142
Figura 5.26: Configuração do modo global (<i>MG</i>) para $a=2,00m$	143
Figura 5.27: Vigas em seção H: (a) características geométricas, (b) <i>MLP</i> e (c) <i>MGT</i> . 144	
Figura 5.28: Distribuição de tensões aplicadas: (a) viga ($\psi = -1,0$), (b) viga-coluna ($\psi = -$ $0,5; 0,0; 0,5$) e (c) coluna ($\psi = 1,0$).....	144
Figura 5.29: Influência da distribuição de tensões aplicadas na tensão de bifurcação. 145	

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1: Propriedades dos Vidros E, S e D, (Kaw, 1997).....	13
Tabela 2.2: Propriedades Mecânicas das Fibras.	13
Tabela 2.3: Composição dos vidros, (Hull, 1981)	14
Tabela 2.4: Propriedades mecânicas das fibras de grafite, (Kaw, 1997).	17
Tabela 2.5: Propriedades mecânicas das fibras aromáticas, (Kaw, 1997).	17
Tabela 2.6: Comparação entre algumas propriedades das resinas usadas nos compostos, (Hull, 1981).....	20
Tabela 2.7: Constantes elásticas, adaptada de Tsai e Hahn (1980).	41
Tabela 5.1: Coeficientes de flambagem para placas com bordos longitudinais e transversais simplesmente apoiados.	112
Tabela 5.2: Coeficientes de flambagem para placas com bordos transversais simplesmente apoiados e longitudinais apoiado-engastado.....	113
Tabela 5.3: Coeficientes de flambagem para placas com quatro bordos engastados (a/b $=1$).....	114
Tabela 5.4: Coeficientes de flambagem para placas com quatro bordos engastados (a/b $=2$).....	115
Tabela 5.5: Coeficientes de flambagem para placas com bordos transversais simplesmente apoiados e longitudinais engastados.	115
Tabela 5.6: Coeficientes de flambagem para placas simplesmente apoiadas, $a/b = 1$, sob compressão em direções perpendiculares.	116
Tabela 5.7: Placa submetida à flexão pura ($n=3$)	117
Tabela 5.8: Coeficientes de flambagem para placa retangular sob compressão uniforme utilizando <i>MFF</i>	119
Tabela 5.9: Coeficientes de flambagem obtidos com <i>MFF</i> para placa sob compressão $\sigma_x = \sigma_y$	119
Tabela 5.10: Coeficientes de flambagem obtidos com <i>MFF</i> para placa sob flexão pura	120
Tabela 5.11: Carga crítica obtida pelo <i>MEF</i> para coluna engastada e livre.	121
Tabela 5.12: Carga crítica obtida pelo <i>MFF</i> para coluna simplesmente apoiada.	122
Tabela 5.13: Propriedades elásticas do perfil de <i>PRFV</i> , (Santos Neto <i>et al</i> , 2004).....	124
Tabela 5.14: Propriedades elásticas dos materiais ortotrópicos e isotrópicos.	124

Tabela 5.15: Valores da tensão de bifurcação para o modo local obtidos pelo <i>MEF</i> e <i>MFF</i> para seção em <i>U</i>	127
Tabela 5.16: Valores obtidos de tensão de bifurcação obtidos pelo <i>MEF</i> e <i>MFF</i> para seção em <i>U</i> (malha de elementos finitos constante).....	128
Tabela 5.17: Tensões de bifurcação para perfil H com $a=802mm$, obtidas pelo <i>MEF</i> (Programa <i>INSTABDKQ</i>).....	131
Tabela 5.18: Tensões de bifurcação para perfil H com $a=4460mm$, obtidas pelo <i>MEF</i> (Programa <i>INSTABDKQ</i>).....	132
Tabela 5.19: Tensões de bifurcação para perfil H obtidas pelo <i>MFF</i> (Programa <i>INSTABFAIXA</i>).....	133
Tabela 5.20: Comparação entre valores de tensão de bifurcação obtidos pelos métodos <i>MEF</i> e <i>MFF</i>	138
Tabela 5.21: Tensão de bifurcação crítica para diferentes distribuições de tensões aplicadas.....	145

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras Latinas

a	comprimento da faixa finita; dimensão do elemento finito; comprimento do perfil
a_{LG}	comprimento do perfil relativo à iteração entre os modos locais e globais
A	área do elemento
\tilde{A}	matriz dos termos dependentes das funções de interpolação
b	largura da faixa finita; dimensão do elemento finito
\tilde{b}	vetor de forças de volume
b_1	largura da alma
b_2	largura da mesa
B	matriz de deformações específicas
\tilde{B}_0	matriz de deformações específicas lineares
\tilde{B}_{NL}	matriz de deformações específicas não lineares
\tilde{B}_m	matriz das deformações de membrana
\tilde{B}_f	matriz das deformações de flexão
\tilde{C}	matriz das coordenadas nodais
d	diâmetro da fibra
\tilde{D}^*	matriz constitutiva no sistema de referência
$\tilde{\bar{D}}_m$	matriz constitutiva generalizada de membrana
$\tilde{\bar{D}}_f$	matriz constitutiva generalizada de flexão
E_1	módulo de elasticidade na direção 1
E_2	módulo de elasticidade na direção 2
E_3	módulo de elasticidade na direção 3

E_f, E_m	módulos de elasticidade da fibra e da matriz
$H_i^{x,y}$	funções de interpolação do elemento DKQ
$\tilde{H}^{x,y}$	vetor das funções de interpolação do elemento DKQ
\tilde{f}	vetor de cargas consistentes no sistema local; vetor de forças externas
\tilde{F}	vetor de cargas consistentes no sistema global
\tilde{f}_e^b	vetor de cargas distribuídas
\tilde{f}_n	vetor de cargas nodais
G_f, G_m	módulos de cisalhamento da fibra e da matriz
G_{12}	módulo de cisalhamento no plano 1-2
G_{23}	módulo de cisalhamento no plano 2-3
G_{31}	módulo de cisalhamento no plano 3-1
M_i	funções de interpolação
l	comprimento da fibra
l_c	comprimento crítico da fibra
K_b	coeficiente de flambagem
\tilde{k}_0	matriz de rigidez elástica no sistema local
\tilde{K}_0	matriz de rigidez elástica no sistema global
\tilde{k}_0^f	matriz de rigidez elástica de flexão no sistema local
\tilde{k}_0^m	matriz de rigidez elástica de membrana no sistema local
\tilde{k}_{NL}	matriz de rigidez não linear no sistema local
\tilde{K}_{NL}	matriz de rigidez não linear no sistema global
\tilde{k}_σ	matriz de rigidez geométrica no sistema local
\tilde{K}_σ	matriz de rigidez geométrica no sistema global

k_{σ}^f ~	matriz de rigidez geométrica de flexão no sistema local
k_{σ}^m ~	matriz de rigidez geométrica de membrana no sistema local
k^t ~	matriz de rigidez tangente
M_x	momento fletor em relação ao plano xz
M_y	momento fletor em relação ao plano yz
M_{xy}	momento torsor
n	número de semi-comprimentos de onda
N ~	matriz de funções de interpolação
N_f ~	matriz de funções de interpolação polinomiais de flexão da faixa finita
N_m ~	matriz de funções de interpolação polinomiais de membrana da faixa finita
N_i	funções <i>serendipity</i> de oito nós, funções de interpolação da faixa finita
p	forças distribuídas por unidade de área
\vec{p}	vetor de forças de superfície
r ~	matriz de rotação
R ~	matriz de transformação de coordenadas; matriz de Reuter
S	resistência última de cisalhamento
S ~	matriz de tensões iniciais de membrana
S_{ε}	deformação máxima de cisalhamento
S_{σ}	contorno do elemento onde há cargas de superfícies aplicadas
t	espessura
T ~	matriz de transformação
T_m	temperatura de amolecimento
U	energia de deformação
U_f	energia de deformação de flexão
U_m	energia de deformação de membrana
u	deslocamento longitudinal de membrana

\tilde{u}	vetor de deslocamentos no sistema local
\tilde{U}	vetor de deslocamentos no sistema global
\tilde{u}_f	vetor de deslocamentos generalizados de flexão
\tilde{u}_m	vetor de deslocamentos generalizados de membrana
V	volume
v	deslocamento lateral de membrana
V_f	energia potencial de flexão
V_m	energia potencial de membrana
V_m, V_f, V_c	volume de matriz, de fibras e do composto
v_m, v_f	proporções volumétricas da matriz e da fibra
v_v	volume de vazios
X_c, X_t	resistências últimas paralelas às fibras de compressão e tração
X_{ec}, X_{et}	deformações máximas paralelas às fibras de compressão e tração
Y_c, Y_t	resistências últimas perpendiculares às fibras de compressão e tração
Y_{ec}, Y_{et}	deformações máximas perpendiculares às fibras de compressão e tração
w	deslocamento transversal de flexão

Letras Gregas

$\tilde{\alpha}$	vetor das constantes da função de interpolação
$\tilde{\alpha}_i$	constantes da função de interpolação
β_x, β_y	rotação do vetor normal ao plano indeformado da placa em relação aos planos xz e yz
$\tilde{\chi}$	vetor de curvaturas generalizadas
χ_x, χ_y	curvatura de flexão
χ_{xy}	curvatura de torção
$\tilde{\delta}_f$	vetor de deslocamentos generalizados de flexão da faixa finita

$\tilde{\delta}_m$	vetor de deslocamentos generalizados de membrana da faixa finita
$\tilde{\varepsilon}$	vetor de deformações generalizadas
$\tilde{\varepsilon}^*$	vetor de deformações no sistema de referência
$\tilde{\varepsilon}_0$	vetor de deformações lineares
ε_i	deformação linear na direção i
$\tilde{\varepsilon}_m, \tilde{\varepsilon}_0^m$	vetor de deformações lineares de membrana
$\tilde{\varepsilon}_f, \tilde{\varepsilon}_0^f$	vetor de deformações lineares de flexão
$\tilde{\varepsilon}_{NL}$	vetor de deformações não lineares
γ_{ij}	deformação angular no plano i - j
λ	parâmetro de carga
ν_{ij}	coeficientes de Poisson
ν_f, ν_m	coeficientes de Poisson da fibra e da matriz
π	energia potencial total
σ_b	tensão de bifurcação
σ_{cr}	tensão crítica de bifurcação
σ_{crl}	tensão crítica local
σ_i	tensão normal à direção i
σ_f	resistência à tração da fibra
σ_{inf}	tensão normal aplicada no bordo inferior da faixa
σ_{sup}	tensão normal aplicada no bordo superior da faixa
$\tilde{\sigma}^*$	vetor de tensões no sistema de referência
$\tilde{\sigma}_f$	vetor de tensões generalizadas de flexão
$\tilde{\sigma}_m$	vetor de tensões de membrana
θ_x	rotação em torno do eixo x
θ_y	rotação em torno do eixo y

θ_z	rotação em torno do eixo z
τ	menor resistência ao cisalhamento da matriz ou da fibra
τ_{12}, τ_{xy}	tensões de cisalhamento
ψ	parâmetro de distribuição de tensões aplicadas
ψ_{\sim}	vetor de forças residuais
ψ_f	matriz de funções de interpolação trigonométricas flexão da faixa finita
ψ_m	matriz de funções de interpolação trigonométricas de membrana da faixa finita

RESUMO

Os perfis estruturais pultrudados de materiais poliméricos reforçados com fibra (*PRF*) apresentam alta resistência mecânica o que conduz à concepção de seções transversais constituídas por placas de parede fina. Para o caso de polímeros reforçados com fibra de vidro (*PRFV*), o baixo módulo de elasticidade do material combinado com o alto índice de esbeltez do perfil implica em fenômenos de instabilidade estrutural.

Abordam-se neste trabalho o cálculo das tensões de bifurcação e os modos de instabilidade, tanto locais como globais, de perfis pultrudados de materiais de *PRFV* através de análises lineares de estabilidade.

Dois métodos numéricos são utilizados para as análises de estabilidade: o método de elementos finitos (*MEF*) e o método das faixas finitas (*MFF*). No *MEF* utilizam-se elementos de casca de quatro nós formados pela superposição de elementos planos com elementos de placa de Kirchoff. Para o *MFF* utiliza-se o método semi-analítico onde os deslocamentos longitudinais são aproximados por funções trigonométricas. Ambos métodos são implementados em programas computacionais na linguagem Fortran 90. A validação dos programas desenvolvidos é feita comparando-se os resultados numéricos com resultados analíticos e numéricos encontrados na literatura.

Utilizando-se os programas desenvolvidos, efetua-se a análise linear de estabilidade de perfis pultrudados de seções *U* e *H*. Comparando-se os métodos *MEF* e *MFF*, obtiveram-se diferenças desprezíveis nos valores de tensão de bifurcação e nas configurações dos modos de instabilidade correspondentes. Observa-se uma variação significativa dos valores das tensões de bifurcação e dos modos de instabilidade em função do nível de ortotropia dos materiais. Estes resultados enfatizam a importância do estudo dos fenômenos de instabilidade estrutural em perfis pultrudados.

Ao final do trabalho são extraídas algumas conclusões e são sugeridas algumas propostas para trabalhos futuros, tendo em vista a continuidade do estudo de estabilidade dos perfis pultrudados de *PRFV*.

Palavras Chaves: Perfis pultrudados, Instabilidade, Plástico reforçado com fibra de vidro, Método dos elementos finitos; Método das faixas finitas.

ABSTRACT

Stability Study of *GFRP* Pultruded Profiles

Pultruded profiles made of fiber reinforced polymers (*FRP*) are usually composed of thin walled sections due to the high mechanical strength of the material. For glass fiber reinforced polymers (*GFRP*), the low elastic modulus of the material combined with the high slenderness ratio of the profile leads to structural instability phenomena.

This work deals with linear elastic stability of *GFRP* profiles and aims to obtain both the bifurcation stresses and the buckling modes of such profiles, either local or global modes.

Two numerical methods are utilized for the stability analyses: the Finite Element Method (*FEM*) and the Finite Strip Method (*FSM*). Four-noded shell elements, formed by combining a membrane element with Kirchoff plate elements, are utilized in the *FEM*. The semi-analytical formulation, where trigonometric functions are used for longitudinal displacement approximation, is considered in the *FSM*. Both numerical methods are implemented into computer programs developed in Fortran 90 language. The numerical results are validated by means of comparisons with numerical and analytical results available in the literature.

The computer programs developed are applied to analyze pultruded *GFRP* profiles of *H* and *U* sections. Comparisons between the *FEM* and *FSM* showed negligible differences in bifurcation stress values and in the corresponding buckling modes. A significant variation in bifurcation stress values and corresponding buckling modes according to the material orthotropy level was observed. These findings emphasize the importance of structural stability studies for *FRP* pultruded profiles.

Concluding remarks and a few recommendations for pursuing stability studies of *FRP* profiles are given at the end of the work.

Key-words: Pultruded profiles, Instability, Glass fiber reinforced polymers, Finite element method; Finite strip method.

1. INTRODUÇÃO

1.1. Considerações Iniciais

A evolução tecnológica que ocorre no mundo inteiro nas últimas décadas tem acelerado o desenvolvimento de novos materiais e processos que podem ser utilizados em diversas áreas.

Na engenharia civil destacam-se os materiais compostos, que são uma combinação de dois ou mais materiais para a formação de um novo material com propriedades diferentes, com a finalidade de se obter um melhor comportamento da estrutura para um determinado tipo de aplicação. O uso de materiais compostos é uma técnica utilizada pelo homem há milhares de anos e também pela própria natureza. Através dos milhões de anos de evolução das espécies animais e vegetais, observam-se uma série de estruturas feitas de materiais compostos que possuem propriedades específicas para cada fim. Músculos, ossos e bambus são alguns exemplos naturais de materiais compostos por fibras que possuem resistência maior numa direção, geralmente na direção mais solicitada, e menor nas outras direções. Materiais com esta característica são denominados, na literatura especializada, de compostos unidirecionais.

Mas, apesar do homem utilizar os materiais compostos por milhares de anos, somente a partir da segunda metade do século passado houve interesse no desenvolvimento de materiais compostos com alta tecnologia, denominados materiais compostos avançados. Inicialmente estes materiais foram utilizados nas indústrias militares, navais, aeronáuticas, etc. Através do desenvolvimento da técnica de pultrusão (*pultrusion*), a fabricação dos perfis de materiais compostos avançados tornou-se um processo bastante mecanizado, diminuindo o custo do material. Com a redução do custo, a engenharia civil tem adotado, nos últimos anos, os materiais compostos avançados como uma alternativa aos materiais convencionais tais como o concreto, o aço e a madeira.

Os materiais compostos avançados são formados por uma matriz, geralmente polimérica, reforçada com fibras. As fibras de vidro, carbono ou aramida embebidas numa matriz plástica são também conhecidos como Polímeros (Plásticos) Reforçados

com Fibras (*PRF*) ou, internacionalmente, como *Fiber Reinforced Polymer or Plastic (FRP)*.

A utilização de perfis pultrudados está em crescente aceleração no mundo. Há três anos, a indústria nacional consumia uma média de 100 toneladas/mês de produtos pultrudados, enquanto que o ano de 2003 encerrou com uma média de 280 toneladas/mês, (Pachinos, 2003).

A alta resistência dos perfis pultrudados conduz, inevitavelmente, à concepção de estruturas muito esbeltas (*i.e.* seções transversais constituídas por paredes finas¹) e, conseqüentemente, muito deformáveis e susceptíveis a colapso por instabilidade.

O projeto de uma estrutura não pode basear-se unicamente em conceitos de segurança relacionados com a resistência e a deformabilidade de seus elementos, especialmente nos casos de estruturas esbeltas. É indispensável considerar também os fenômenos que envolvam os conceitos de estabilidade, nos próprios elementos, encarados isoladamente, ou em toda a estrutura, analisada no seu conjunto. Estes fenômenos são designados, genericamente, de fenômenos de instabilidade estrutural. Além disto deve-se considerar também a segurança da estrutura submetida a altas temperaturas, como ocorre por exemplo em situação de incêndio, além de outras situações excepcionais, tais como terremotos, ciclones, etc.

1.2. Justificativa

O desenvolvimento e o aumento na utilização de novos materiais requerem o estudo do comportamento mecânico para a posterior incorporação de métodos e procedimentos de cálculo em projetos que fazem uso de materiais novos. Os perfis de *PRFV* (polímeros reforçados com fibra de vidro) apresentam altas relações resistência específica (*i.e.*, resistência/peso específico) e rigidez específica (*i.e.*, rigidez/peso específico), além da alta resistência à corrosão, sendo altamente indicados em situações onde o ambiente é quimicamente agressivo, tais como na construção de pontes e plataformas marítimas.

Segundo Lin *et al* (1996), os *PRFV* exibem alta resistência mecânica, porém problemas de deformabilidade e instabilidade, devido à sua baixa elasticidade e rigidez, são os maiores inconvenientes na aceitação deste material na engenharia de estruturas.

¹ *Thin-walled structures*, na designação anglo-saxônica

Os critérios de estabilidade e de deformação tendem a governar os projetos de estruturas com *PRFV*. Ressalta-se também a baixa resistência às altas temperaturas dos *PRFV*, devido à presença da resina polimérica.

1.3. Objetivo

Este trabalho tem como objetivo geral analisar os fenômenos de instabilidade de peças estruturais (vigas e pilares) de seção aberta e de parede fina, com ênfase em peças de materiais compostos avançados obtidos por pultrusão.

Na literatura existem vários métodos para realizar análises de estabilidade, dentre os quais se destacam: (i) Métodos Diretos baseados em soluções das equações diferenciais originadas da Teoria de Estabilidade Elástica (Timoshenko, 1936); (ii) Método dos Elementos Finitos (*MEF*); (iii) Método das Faixas Finitas (*MFF*); (iv) Teoria Generalizada de Vigas (*GBT*²) (Camotim e Silvestre, 2002).

Este trabalho tem como objetivo específico estudar, implementar computacionalmente e comparar os resultados das análises lineares de estabilidade para perfis de seção aberta e de paredes finas através dos métodos dos elementos finitos e o das faixas finitas. São elaborados dois programas computacionais para a análise de instabilidade baseados no programa *ANEST* (La Rovere *et al*, 2003): (i) *INSTAB* para o *MEF* e (ii) *INSTABFAIXA* para o *MFF*.

O trabalho também tem como objetivo específico o estudo da influência da geometria dos elementos estruturais e da ortotropia do material nos resultados da análise de estabilidade.

Esta dissertação é o primeiro trabalho concluído dentro da sub-linha de pesquisa Estruturas de Materiais Compostos Avançados (linha de pesquisa Projeto e Análise de Estruturas) da área de Estruturas do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (*PPGEC*) da Universidade Federal de Santa Catarina (*UFSC*).

A estrutura do trabalho está descrita no próximo item.

1.4. Organização

Esta dissertação de mestrado está estruturada em seis capítulos, dentre os quais este capítulo introdutório, no qual é exposto o objetivo geral e específico da pesquisa.

² *Generalised Beam Theory*, na designação anglo-saxônica

No capítulo dois apresenta-se uma revisão bibliográfica para o entendimento dos comportamentos físico e mecânico dos *PRF* e dos fenômenos de instabilidade que podem ocasionar o colapso de estruturas constituídas por elementos esbeltos. Também neste capítulo apresentam-se algumas obras realizadas no mundo, inclusive no Brasil, onde são empregadas estruturas de *PRFV*.

O capítulo três apresenta uma revisão do método dos elementos finitos. Utiliza-se para a análise linear de estabilidade o elemento de casca de quatro nós. Dentro do âmbito linear, o elemento de casca pode ser obtido através da superposição de efeitos do elemento de estado plano de tensões juntamente com o elemento de placa. Neste trabalho apresentam-se duas formulações para o elemento de placa (i) uma baseada no elemento *ACM* (Adini e Clough, 1960) o qual apresenta uma descontinuidade de rotações sendo, portanto, um elemento *não conforme* e (ii) outra baseada no elemento *DKQ* (Batoz e Tahar, 1982), classificado como elemento *conforme*. Estas duas formulações admitem a teoria de placa fina (hipóteses de *Kirchhoff*). No capítulo quatro descreve-se a formulação do método das faixas finitas semi-analítico na análise linear de estabilidade. Nos capítulos três e quatro também se abordam a implementação computacional dos respectivos métodos apresentados.

O capítulo cinco é destinado às comparações entre os métodos *MEF* e *MFF*. Inicialmente são feitas as validações dos resultados dos programas elaborados com resultados analíticos. Em seguida são realizadas comparações entre os métodos na análise linear de estabilidade de perfis pultrudados de *PRFV*.

Finalmente, no último capítulo, são extraídas as conclusões deste trabalho e são feitas algumas recomendações para trabalhos futuros.

2. POLÍMEROS REFORÇADOS COM FIBRAS E INSTABILIDADE DE PERFIS

O objetivo deste capítulo é apresentar sucintamente os materiais compostos avançados e os fenômenos de instabilidade que ocorrem em perfis de seção aberta e de parede fina. Este capítulo divide-se em duas partes. A primeira parte começa a caracterizar os materiais compostos avançados apresentando os tipos principais de matrizes e de fibras utilizadas. Em seguida descreve sucintamente os processos de fabricação, especificamente a pultrusão, e apresentam-se algumas obras realizadas na Europa e no Brasil com a utilização de materiais compostos avançados.

A segunda parte é destinada a revisão bibliográfica dos modelos micromecânicos e macromecânicos dos laminados. Em seguida apresenta-se os fenômenos de instabilidade que ocorrem em perfis de seção aberta e parede fina.

2.1. Polímeros Reforçados com Fibras

No campo de materiais compostos, conhecidos também como “compósitos”, ou simplesmente compostos, ainda hoje não existe uma definição realmente adequada. Segundo Schwartz (1984), a palavra “compósitos” significa a combinação macroscópica de dois ou mais materiais insolúveis para a formação de um material que reúne as melhores características dos constituintes e que apresenta propriedades, mecânicas e/ou físicas, que nenhum dos materiais originais possuem isoladamente, como por exemplo o concreto armado. Porém, em virtude dos materiais compostos serem usualmente empregados em sistemas estruturais, a definição costuma ser restringida a somente aqueles materiais que apresentam um reforço e um material aglomerante (matriz).

Deste modo, os materiais compostos possuem, tipicamente, uma ou mais fases descontínuas envolvidas por uma fase contínua. A fase descontínua (reforço) é, geralmente, mais rígida e resistente do que a fase contínua denominada de matriz.

Os compostos podem ser divididos quanto à geometria do reforço, um dos principais parâmetros na determinação das propriedades mecânicas dos compostos, em: (i) fibrosos, (ii) flocos, (iii) partículas e (iv) laminados, (Schwartz, 1984). Quanto ao tipo de matriz, podem ser classificados em: poliméricas, metais, cerâmicas e carbono. Neste trabalho serão tratados apenas os compostos fibrosos com matrizes poliméricas.

A madeira é um exemplo natural de material composto, onde a matriz de lignina é reforçada com fibras de celulose, (Kaw, 1997).

A utilização de materiais compostos já tem uma grande história. Israelitas utilizavam tijolos feitos de barro reforçado com palha. Na idade medieval, as espadas eram constituídas por camadas de diferentes materiais. Os egípcios (1500 AC) usavam, nas paredes de suas casas, reforços com varas de bambu e a madeira compensada, pois perceberam que as madeiras podiam ser reagrupadas de modo a atingir uma maior resistência. Recentemente resinas reforçadas com fibras que possuem resistência específica e rigidez específica elevadas tem tido grandes aplicações onde o peso é importante, tais como na fabricação de aviões e veículos espaciais, (Jones, 1975). Na década de 1930 surge a fibra de vidro, comumente conhecida como *fiberglass*. A partir de 1970, as aplicações de materiais compostos aumentaram no mundo inteiro devido ao desenvolvimento de novas fibras, tais como carbono, boro e aramididas, além de novas matrizes compostas de metais e cerâmicas, sendo denominados então materiais compostos avançados, (Kaw, 1997).

Os materiais compostos avançados podem ter as seguintes propriedades melhoradas em relação aos materiais constituintes, (Jones, 1975):

- Elevada resistência;
- Elevada rigidez;
- Resistência à corrosão;
- Alta durabilidade;
- Baixo peso específico;
- Grande capacidade de amortecimento;
- Alta resistência à fadiga;
- Isolamento térmico;
- Condutividade térmica;
- Isolamento acústico;
- Pigmentabilidade.

Naturalmente, nem todas as propriedades listadas acima são melhoradas em um material composto ao mesmo tempo. As características finais dos compostos dependem do tipo da fibra e da matriz utilizada como constituinte para o sistema compósito. Devido a estas qualidades, a engenharia civil tem manifestado grande interesse na aplicação destes materiais, principalmente em elementos estruturais expostos a ambientes altamente agressivos, tais como pontes, passarelas e plataformas marítimas, sob a forma de Polímeros (plásticos) Reforçados com Fibras (*PRF*). Internacionalmente estes materiais são conhecidos pelas siglas *FRP* “*Fiber Reinforced Polymer*”, *PMC* “*Polymer Matrix Composite*” ou *APC* “*Advanced Polymer/Continuous Composite*”.

Com relação às desvantagens dos materiais compostos avançados destaca-se a baixa resistência a altas temperaturas, devido à presença da resina polimérica.

As propriedades físicas e mecânicas dos compostos são fortemente influenciadas pelas propriedades, pela distribuição e pela interação de seus componentes. Portanto, dois compostos constituídos com o mesmo tipo de reforço e matriz mas com concentrações, distribuição e orientações variadas, podem resultar em dois sistemas com características mecânicas e/ou físicas diferentes.

Diferentemente dos materiais comuns na engenharia civil, os materiais compostos possuem comportamento anisotrópico e heterogêneo. Uma grande vantagem destes materiais está no fato de que, através do processo de fabricação, o composto pode ser considerado anisotrópico, ortotrópico e, até mesmo, isotrópico, (Agarwal e Broutman, 1990). No caso de *PRF*, estes não apresentam patamar de escoamento e comportam-se como materiais perfeitamente elásticos até a sua ruptura, que é frágil.

Por causa da heterogeneidade dos materiais compostos, eles devem ser estudados sob dois comportamentos: (i) micromecânico que estuda o comportamento do material da escala microscópica, ou seja, determinação das propriedades dos materiais constituintes e, (ii) macromecânico que estuda as relações tensões-deformações do composto, assumindo que ele se comporta como um material homogêneo.

Os polímeros reforçados com fibras são os materiais compostos avançados mais utilizados atualmente no mercado devido ao seu baixo custo, alta resistência e facilidade na produção.

Neste item serão apresentadas as formas e propriedades dos compostos *PRF* que são fabricados pelo processo da pultrusão.

Além das considerações feitas usualmente quando se projeta com materiais convencionais de engenharia, o projetista que utiliza materiais compostos deve, também, considerar a seleção dos materiais constituintes, pois o comportamento final do *PRF* está diretamente ligado aos materiais que o constituem, ao teor e disposição das fibras, à interação entre a matriz e as fibras e ao processo de fabricação do composto. Outros fatores que influenciam neste comportamento são as formas, as orientações, as composições das fibras, as propriedades mecânicas da matriz e a adesão entre a fibra e a resina.

Nos itens seguintes são apresentados os materiais constituintes dos sistemas *PRF*.

2.1.1. Fibras

As fibras são definidas, segundo Kaw (1997), como um longo filamento contínuo com relação entre diâmetro e comprimento de, no máximo, 1/10, e com diâmetro na ordem de 0,01mm. Quanto mais fina a fibra utilizada como reforço do composto, maior será a área de contato entre a fibra e a matriz e, conseqüentemente, maior a resistência do material.

Por causa do pequeno diâmetro da seção transversal da fibra, elas são envoltas numa matriz que, segundo Jones (1975), possui a função de suportar e proteger as fibras, além de transmitir de forma distribuída os esforços solicitantes entre os reforços constituintes. Esta última função é de extrema importância, principalmente quando ocorre a quebra de algum reforço. Neste caso, o esforço atuante de um lado da fibra quebrada é transmitido à matriz e em seqüência para a outra parte e fibras adjacentes.

As fibras exibem um comportamento perfeitamente elástico até a ruptura, sem a presença de tensão residual e deformação plástica, ao contrário dos metais. Além disso, apresentam uma deformação lenta praticamente desprezível em ambientes secos, Figura 2.1.

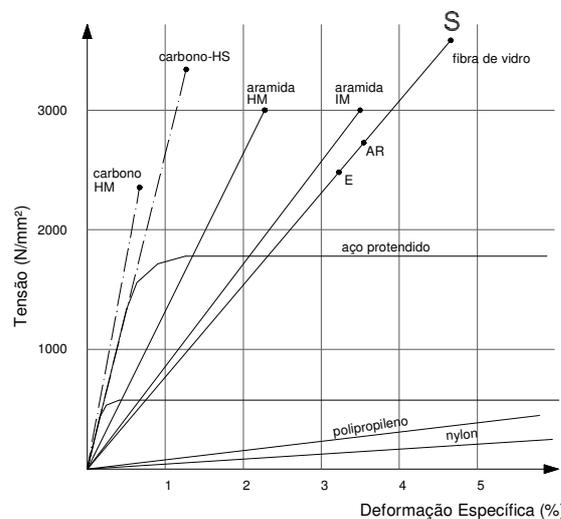


Figura 2.1: Diagrama tensão-deformação de algumas fibras. (Committee ACI 440R, 1996).

Os compostos fibrosos podem ser classificados em: (i) lâminas (*single layer*) e (ii) laminados (*multilayer*). Os compostos fibrosos com lâminas podem ser feitos de diversas camadas, mas cada uma deve possuir a mesma orientação e propriedades. Os laminados são constituídos de várias lâminas que possuem orientação variada, mas de

mesmo material, enquanto os laminados híbridos são constituídos de várias lâminas com materiais diferentes.

A seguir apresenta-se como as características das fibras influenciam diretamente nas propriedades mecânicas dos compostos *PRF*, (Schwartz, 1984):

- (i) **Orientação:** a orientação das fibras na matriz determina a resistência mecânica do *PRF* e a direção onde a resistência é maior. A Figura 2.2 mostra os três tipos de orientação das fibras. O tipo unidimensional confere ao composto a máxima resistência na direção das fibras, mas é geralmente frágil na direção perpendicular à fibra. O tipo plano (ou bidirecional) exibe resistências diferentes em cada direção das fibras e o tipo aleatório possui o comportamento isotrópico;

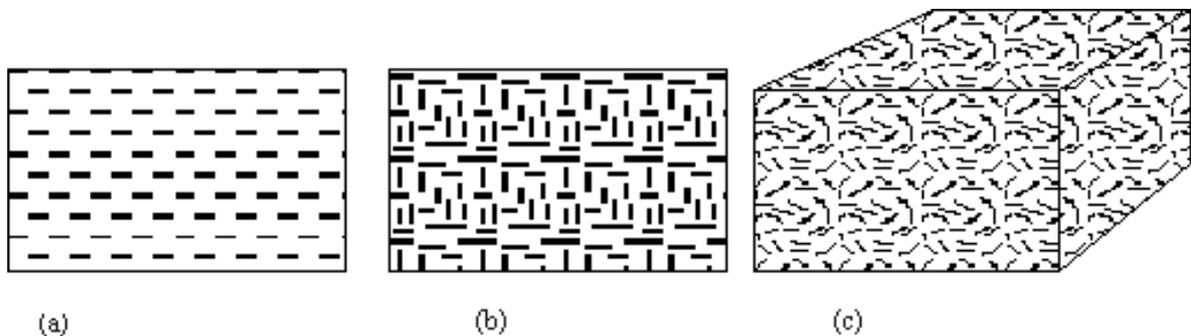


Figura 2.2: Tipos de orientações das fibras: (a) unidimensional, (b) plano e (c) aleatório. (Schwartz, 1984)

- (ii) **Comprimento:** As fibras podem ser curtas (descontínuas) ou longas (contínuas). As fibras contínuas são mais eficientes, pois, teoricamente, o carregamento ou a tensão aplicada pode ser transmitido diretamente para as fibras, porém isto não é possível por duas razões: (i) por razão de fabricação, pois é impossível obter uma fibra contínua com a mesma resistência por todo o comprimento da fibra, e (ii) não é possível fabricar uma fibra contínua com o mesmo nível de tensão. As fibras longas são mais fáceis de orientar na matriz e resultam em maiores benefícios em relação às fibras curtas tais como resistência ao impacto, baixo grau de contração, melhor acabamento superficial e estabilidade. Entretanto as fibras curtas apresentam menores falhas e conseqüentemente são mais resistentes e seu custo de fabricação é menor;

- (iii) Forma: As fibras circulares são mais comuns por sua facilidade de produção, embora as formas hexagonais e retangulares sejam possíveis, mas a relação resistência/peso destas formas não é atrativa;
- (iv) Material: As fibras podem ser orgânicas ou inorgânicas. As orgânicas podem ser caracterizadas pelo baixo peso, flexibilidade, elasticidade e a sensibilidade à temperatura, enquanto as inorgânicas são definidas pela alta resistência, resistência às altas temperaturas, leves, rígidas e resistentes à fadiga;

Quanto à orientação das fibras, na disposição unidirecional obtém-se a máxima resistência e a maior rigidez na direção longitudinal destas fibras, por outro lado, obtém-se propriedades bem mais deficientes na direção transversal às mesmas. Com relação à concentração de fibras, na disposição unidirecional é possível concentrar uma quantidade de até 90% de material em um dado volume. Já o arranjo bidirecional obtém boa resistência nas duas direções; menor do que as propriedades na disposição unidirecional, mas ainda considerável. A disposição aleatória, por sua vez, não apresenta direção preferencial de resistência. O arranjo bidirecional permite concentrações menores, com valores alcançados de no máximo 75% e a disposição aleatória não permite concentrações maiores que 50%, (Blass, 1988).

De um modo geral, as fibras contínuas são mais indicadas para sistemas estruturais em função da possibilidade de orientação para a formação do composto, com o objetivo da otimização estrutural.

As características mecânicas do *PRF* não dependem somente das propriedades das fibras, mas também da magnitude que o carregamento é transmitido às fibras por meio da matriz. Este fenômeno de transferência do carregamento, mostrado na Figura 2.3, é função do comprimento da fibra e adesão interfacial fibra-matriz. Assim, é necessário definir um comprimento mínimo para a fibra capaz de garantir efetivamente a rigidez e a resistência do composto.

Matthews e Rawlings (1994), *apud* Silvestre Filho (2001), definem o comprimento crítico da fibra (l_c) como sendo o comprimento mínimo da fibra, para um dado diâmetro, que admita a tensão de ruptura à tração da fibra ao invés da tensão de ruptura ao cisalhamento da interface matriz-fibra, *i.e.* o comprimento mínimo necessário para a tensão transmitida alcançar a tensão de ruptura à tração da fibra. Então:

$$l_c = \frac{\sigma_f d}{2\tau} \quad (2.1)$$

em que:

σ_f = resistência à tração da fibra;

d = diâmetro da fibra;

τ = menor resistência ao cisalhamento da matriz ou da fibra.

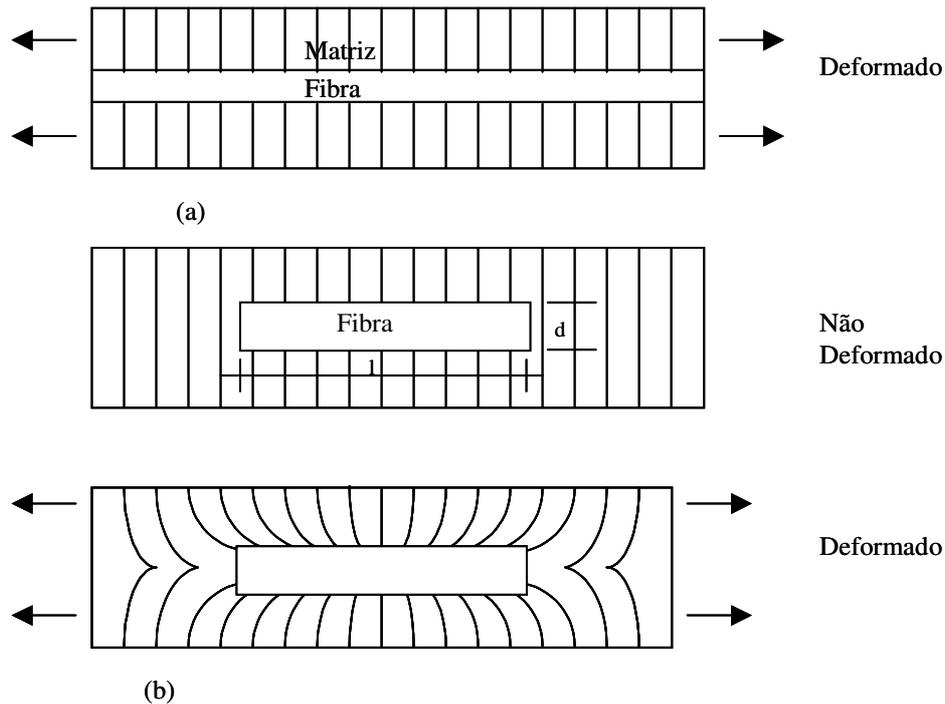


Figura 2.3: Efeito da deformação ao redor da fibra na matriz sob tensão: (a) fibra contínua e (b) fibra descontínua.

Quanto maior o comprimento da fibra, maior a eficácia do reforço, pois o máximo carregamento se distribui ao longo da fibra, conforme a Figura 2.4. Ou seja, para fibras curtas ($l < l_c$) a tensão aplicada na fibra é menor do que a resistência da fibra (σ_f). Neste caso a matriz se deforma ao redor da fibra (ver Figura 2.3b) de modo que não há uma transferência efetiva de carregamento e, conseqüentemente, uma baixa eficácia do composto por parte da fibra. Estes se comportam essencialmente como compostos particulados.

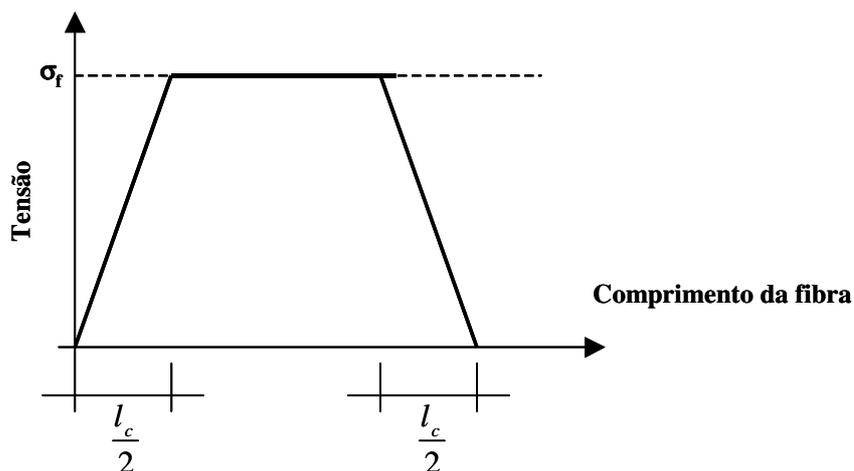


Figura 2.4: Distribuição de tensões ao longo da fibra.

As fibras com $l > 15.l_c$ são, usualmente, consideradas como fibras contínuas enquanto as mais curtas são denominadas descontínuas.

Os compostos *PRF* resultam da composição de fibras contínuas de reforço com resinas termofixas. As fibras mais comumente utilizadas são: Vidro (*V*), Grafite (*G*), Carbono (*C*), Kevlar®³ (*K*), e Boro (*B*). Compostos *PRF* com fibra de Boro apresentam melhor desempenho estrutural, em relação à tensão crítica de bifurcação, Silvestre *et al* (2001) e Pierin (2002), porém seu custo é relativamente alto em comparação com as outras fibras. A fibra de vidro é a mais utilizada, devido ao seu custo, conhecida pela sigla *PRFV* (*Polímeros Reforçados com Fibra de Vidro*)⁴.

O primeiro desenvolvimento específico para a produção de fibra contínua de vidro foi o vidro óxido de cal-trióxido de alumínio-silicato de boro, designado por Vidro-E (*E-glass*) ou também conhecido por *fiberglass*, possuindo alta resistência, rigidez e resistência elétrica, além de possuir o custo mais baixo em relação aos outros tipos de vidros, (Hull, 1981). Compreende aproximadamente 80 a 90% da produção comercial de fibra de vidro. Este tipo de fibra pode tornar-se, segundo Kim (1995), o material mais importante para aplicações nas estruturas civis. O Vidro-S (*S-glass*) possui alto teor de sílica possuindo resistência e módulo de elasticidade superior ao Vidro-E, respectivamente, 33% e 20%. O Vidro-D (*D-glass*) possui alto desempenho eletrônico com baixa constante dielétrica e baixa densidade, sendo utilizado em antenas. O Vidro-C (*C-glass*) tem uma maior resistência à corrosão química do que o fiberglass,

³ Kevlar é marca registrada de E.I. duPont deNemours and Company, Inc., Wilmington, DE.

⁴ Internacionalmente conhecido por *GFRP* “glass fiber reinforced polymer”

porém seu custo é maior e sua resistência mecânica é menor. O Vidro-A (*A-glass*) é utilizado com finalidade estética para melhorar a aparência das superfícies. Já o Vidro-R (*R-glass*) é utilizado em aplicações estruturais, tal como em construções civis. Também existem tipos combinados, tais como: (i) o Vidro-E-CR (*E-CR glass*) que apresenta resistências elétricas e corrosivas e (ii) o Vidro-AR (*AR glass*) resistente a álcalis. Na Tabela 2.1 estão relacionadas algumas propriedades dos vidros E, S e D, enquanto na Tabela 2.2 são apresentadas as propriedades mecânicas das fibras utilizadas em PRF e também as do aço utilizado em estruturas.

Tabela 2.1: Propriedades dos Vidros E, S e D, (Kaw, 1997).

Propriedade	Temp. °C	Vidro-E	Vidro-S	Vidro-D
Massa Específica (g/cm ³)	----	2,54	2,49	2,16
Resistência à Tração (GPa)	22,2	3,45	4,60	2,41
Resistência à Tração (GPa)	538	1,70	2,41	517
Módulo de Elasticidade (GPa)	22,2	72,40	85,50	----
Alongamento (%)	22,2	4,8	5,4	4,7
Coefficiente de dilatação térmica (°C)	23,8	$5,04 \times 10^{-6}$	$0,89 \times 10^{-6}$	$1,70 \times 10^{-6}$

Tabela 2.2: Propriedades Mecânicas das Fibras.

Fibra	Módulo de Elasticidade (GPa)	Resistência à Tração (MPa)	Massa Específica (g/cm ³)
Vidro-E	72,40	3447,00	2,54
Vidro-S	85,50	4585,00	2,49
Grafite	230,00	2067,00	1,80
Kevlar	124,00	1379,00	1,40
Boro	385,00	2800,00	2,63
Aço	206,80	648,10	7,80

As fibras de vidro são responsáveis por 90% das fibras utilizadas em resinas termofixas. Estas fibras possuem altas relações tensão/peso e resistência/peso além da resistência às altas temperaturas: 50% das propriedades mecânicas são preservadas a 371°C e 25% a 538°C, (Schwartz, 1984). Além disso, segundo Blass (1988), as fibras de vidro não absorvem umidade, possuem uma notável estabilidade dimensional, resistência à corrosão, excelentes características elétricas e possuem um baixo custo de produção.

Por outro lado, segundo Agarwal e Broutman (1990), as fibras de vidro possuem baixo módulo de elasticidade e fraca resistência à abrasão, a qual diminui a resistência do PRFV e a adesão da fibra com a matriz, principalmente, na presença de umidade. Para melhorar a adesão é aplicado um produto de silano sobre a superfície das fibras.

O principal constituinte do vidro é a sílica cuja molécula tem a configuração tetraédrica com o íon central de sílica cercado por quatro íons de oxigênio. Com esta configuração básica, o vidro pode possuir várias variações.

A Tabela 2.3 apresenta a composição química dos tipos de vidro encontrados no mercado.

Tabela 2.3: Composição dos vidros, (Hull, 1981)

Componente	Vidro E	Vidro C	Vidro S
SiO ₂	52,4	64,4	64,4
Al ₂ O ₃ , Fe ₂ O ₃ ,	14,4	4,1	25,0
Cão	17,2	13,0	---
MgO	4,6	3,3	10,3
Na ₂ O, K ₂ O	0,8	9,6	0,3
Ba ₂ O ₃ ,	10,6	4,7	---
BaO	---	0,9	---

As fibras de vidro são contínuas com diâmetro variando de 0,003 a 0,02 mm e são apresentadas em algumas formas comerciais:

- (i) *Rovings* – Filamentos contínuos enrolados paralelamente com diâmetros de 9 a 13µm e peso entre 450 e 3600 m/kgf, apresentados em forma de bobinas. São geralmente utilizados em processos de pultrusão e enrolamento em bobinas (Figura 2.5);
- (ii) *Woven Rovings* – Tecido de fibra de vidro enroladas, utilizado em aplicações onde são necessários tecidos espessos (Figura 2.6);
- (iii) *Chopped Strands Mats* – Fibras curtas (de comprimento de 3,2 a 50,8mm) espalhadas aleatoriamente num plano horizontal (Figura 2.7);
- (iv) *Continuous Strands Mats* – Fibras contínuas depositadas e entrelaçadas na forma de espiral (Figura 2.8),
- (v) *Surfacing Mats (Veil)* – Aglomerado fino composto de uma camada de filamentos finos (Figura 2.9);

- (vi) *Woven Fabrics* – Tecido formado por fios trançados, utilizado em estruturas de aviões e equipamentos marinhos (Figura 2.10);



Figura 2.5: Filamento contínuo – *rovings*, (Santos Neto, 2004).

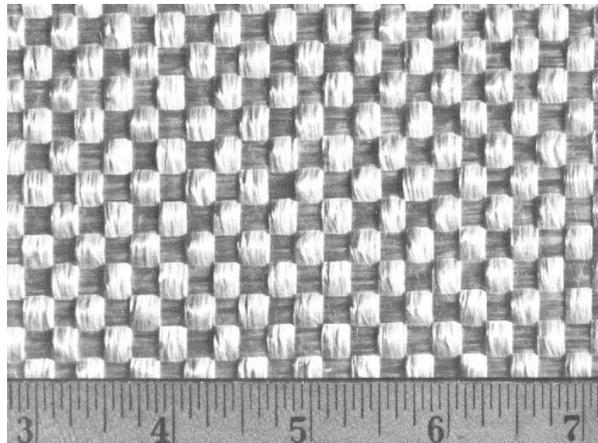


Figura 2.6: Filamentos entrelaçados – *woven rovings*, (Santos Neto, 2004).



Figura 2.7: Manta de fios picados – *chopped strand mats*, (Santos Neto, 2004).

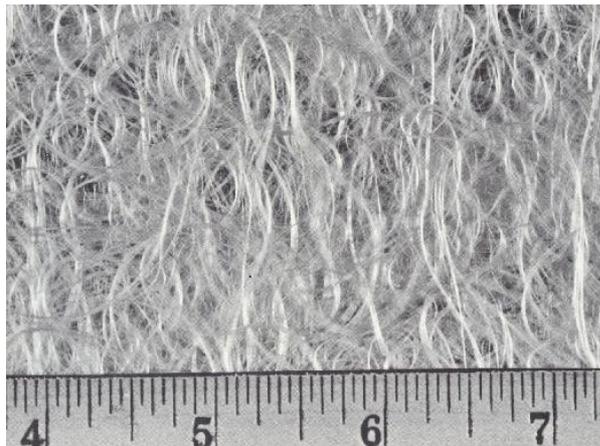


Figura 2.8: Manta de fios contínuos – *continuous strand mats*, (Santos Neto, 2004).

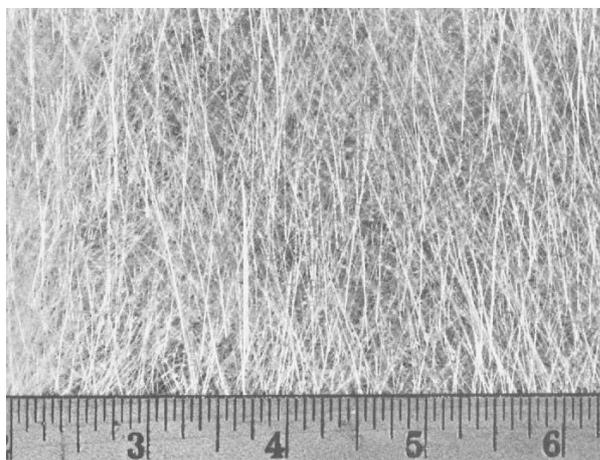


Figura 2.9: Manta fina ou véu – *surfacing mats ou veil*, (Santos Neto, 2004).

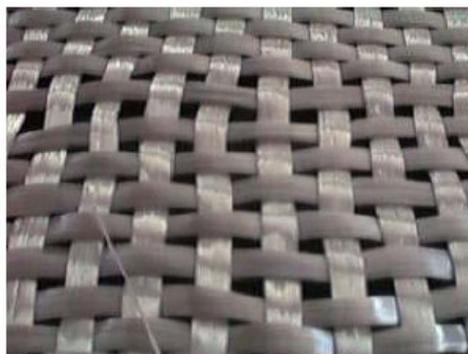


Figura 2.10: Tecido – *woven fabrics*, (Santos Neto, 2004).

As fibras de grafite caracterizam-se por sua alta resistência mecânica e alto módulo de elasticidade, baixo coeficiente de dilatação térmica e alta resistência à fadiga, utilizadas em materiais compostos onde é exigido alto desempenho. A fibra de grafite pode ser produzida através de três materiais – fibra têxtil, poliacriliconitrato (*PAN*) e

piche. A fibra *PAN* é a mais conhecida e suas propriedades mecânicas são apresentadas na Tabela 2.4.

Tabela 2.4: Propriedades mecânicas das fibras de grafite, (Kaw, 1997).

Propriedade	PAN	Piche
Massa Específica (g/cm ³)	1,99	1,78
Módulo de Elasticidade (GPa)	379,2	241,3
Resistência à Tração (MPa)	1723	3447
Coefficiente de Dilatação Térmica (µm/m/°C)	-0,54	-1,26

As fibras Kevlar, introduzidas em 1971, são fibras orgânicas aromáticas compostas de carbono, hidrogênio, oxigênio e nitrogênio, possuindo baixa densidade, alta resistência à tração, baixo custo e alta resistência a impactos. As principais fibras aromáticas são Kevlar 29 e Kevlar 49 utilizadas em cabos e na indústria aeroespacial, respectivamente. A Tabela 2.5 mostra as propriedades mecânicas das fibras aromáticas

Tabela 2.5: Propriedades mecânicas das fibras aromáticas, (Kaw, 1997).

Propriedade	Kevlar 29	Kevlar 49
Massa Específica (g/cm ³)	1,44	1,48
Módulo de Elasticidade (GPa)	62,05	131,0
Resistência à Tração (MPa)	3620	3620
Coefficiente de Dilatação Térmica (µm/m/°C)	-2,00	-2,00

A fibra de carbono aumenta significativamente a rigidez do composto na direção longitudinal. Perfis em fibra de carbono que requerem reforço transversal são em geral misturas de reforços de vidro transversais com fibra de carbono longitudinal ou mantas de fibra de carbono costurada. Mantas de fibra de carbono costuradas são significativamente mais caras que todos os produtos de fibra de carbono longitudinais. Fibras de carbono produzem um composto mais rígido que fibras de vidro, que por sua vez produzem um composto mais rígido que fibras poliéster.

A mistura de tipos diferentes de reforços pode causar problemas de deformação devido à contração diferencial (fibra de carbono tem um coeficiente negativo de expansão térmica). Reforços compatíveis com um tipo de matriz resinosa podem não ser compatíveis com um outro tipo.

2.1.2. Matrizes

As fibras possuem elevadas resistências e rigidez, mas elas não são capazes de transferir esforços entre elas, por isso são embebidas numa matriz. As matrizes também são responsáveis pela proteção das fibras. As propriedades mecânicas e físicas das matrizes influenciam bastante nas propriedades dos compostos, tais como módulo de elasticidade e resistência transversal, propriedades cortantes e de compressão. Características físicas e químicas das matrizes, tais como temperatura de cura e fundição, viscosidade e reação com as fibras, influenciam na escolha do processo de fabricação dos compostos, (Agarwal e Broutman, 1990).

As resinas mais utilizadas na fabricação de materiais compostos são as polímeras, conhecidas como plásticos. A denominação de plástico é dada a uma molécula sintética chamada de polímero (do grego poli – muitas e mero – partes). Os polímeros são grandes moléculas constituídas pela união de moléculas de baixo peso molecular, denominadas monômeros, por meio de reações químicas.

Dependendo da estrutura e do comportamento dos polímeros eles podem ser classificados em: (i) termofixos – epóxi, poliéster e viniléster e, (ii) termoplásticos – polietileno, poliestireno e nylon. Os termoplásticos são polímeros que a partir da certa temperatura (de amolecimento, T_m), o movimento molecular torna-se tão intenso que as atrações intramoleculares são rompidas e iniciam a passar umas próximas das outras. A partir da temperatura de amolecimento, o polímero pode ser moldado em qualquer forma sendo que a fundição ou a solidificação destes polímeros pode ser reversível com a aplicação de resfriamento, isto é, os termoplásticos podem ser endurecidos ou amolecidos reversivelmente. Logo as resinas termoplásticas sofrem deformações com o aumento da temperatura e, em função disto, elas são amplamente utilizadas nos processos de injeção de plásticos.

Os polímeros termofixos sofrem decomposição com o aumento da temperatura e a solidificação não pode ser reversível, assim, entram num regime de cura (polimerização) formando moléculas maiores e mais complexas, tornando as resinas mais resistentes. Diferentemente dos metais e das cerâmicas, as características dos polímeros são influenciadas por agentes externos, principalmente a temperatura.

As condições ambientes (por exemplo, absorção da umidade) também influenciam no comportamento mecânico do polímero. Por exemplo, o epóxi e o

poliéster podem absorver 4-5% da umidade se exposto em ambientes com umidade relativa igual a 100% ou imerso na água, (Agarwal e Broutman, 1990).

As resinas poliéster apresentam boas propriedades elétricas e resistência à corrosão e a ataques químicos, entretanto são materiais frágeis, (Lubin, 1969). A compatibilidade da resina poliéster com o vidro é medida pela molhabilidade (grau de saturação do reforço). A resistência mecânica será menor se a molhabilidade for deficiente. O arranjo do composto também influencia a seleção da resina.

Resinas poliéster processadas em pultrusão são divididas em isoftálicas, tereftálicas e ortoftálicas. Estas últimas oferecem uma vantagem no custo para pultrusão, mas não são resistentes à corrosão como as isoftálicas ou tereftálicas. Além do custo e resistência à corrosão, fatores que afetam a seleção da resina são a resistência a altas temperaturas e a compatibilidade da resina poliéster com o vidro.

Resinas éster-vinílicas tendem a molhar (saturar) os reforços mais eficientemente e a produzir melhores resultados. Resinas éster-vinílicas tendem a ter a capacidade de resistir a temperaturas maiores, com melhoraria na flexibilidade, bem como aumento na resistência à corrosão.

Os sistemas de resinas epóxi são extensões das éster-vinílicas, no que diz respeito à resistência e podem ser produzidos com um sistema de cura com amina ou anidrido, as matrizes de resina éster-vinílica e poliéster são curadas com peróxido. O sistema de resina epóxi requer um conteúdo de reforço significativamente mais alto que as matrizes de poliéster ou éster-vinílicas. Em adição ao seu conteúdo de reforço mais alto, resinas epóxi têm também um *pot life* significativamente mais baixo que os sistemas de poliéster ou éster-vinílicas, aumentando a dificuldade de processamento das epóxis. *Pot life* é a quantidade de tempo que a mistura de resina mantém as propriedades estáveis (viscosidade, cura na área de impregnação de resina).

A resina epóxi foi sintetizada pela primeira vez na Suíça em 1936 pelo Dr. Pierre Castan, tendo sua aplicação inicial em adesivos. Em 1939, Sylvan Greenlee nos EUA investigou a aplicação de epóxi em pinturas. Em 1948, nos EUA, foram introduzidas as resinas epóxi para fins comerciais, (Lubin, 1969).

As resinas termofixas são as mais comuns no uso estrutural, pois apresentam um grande número de aplicações e suas características finais são geralmente as mais desejáveis. A Tabela 2.6 apresenta algumas propriedades das resinas termoplásticas e termofixas.

Segundo Lubin (1969) e Tita (1999), as resinas epóxi apresentam as seguintes vantagens para o desenvolvimento de projetos:

- (i) Variedade de formas e aplicações;
- (ii) Tempo de cura rápido ou lento, dependendo do sistema de endurecimento;
- (iii) Baixa retração, evitando tensões residuais;
- (iv) Alta resistência à compressão;
- (v) Alto módulo de elasticidade;
- (vi) Baixa viscosidade, facilitando a modelagem;
- (vii) Adesão;
- (viii) Resistência química;
- (ix) Estabilidade térmica;
- (x) Resistência a fungos e a água;
- (xi) Propiciam aplicações de alto desempenho.

Tabela 2.6: Comparação entre algumas propriedades das resinas usadas nos compostos, (Hull, 1981).

Propriedade	Unidade	Resinas Termofixas		Resinas Termoplásticas	
		Epóxi	Poliéster	Polipropileno	Nylon
Massa Especifica	Kg/m ³	1100-1400	1200-1500	900	1140
Módulo de Elasticidade	GPa	3-6	2,0-4,5	1,0-1,4	1,4-2,8
Coefficiente de Poisson	-	0,38-0,40	0,37-0,39	0,3	0,3
Resistência à tração	MPa	35-100	40-90	-	-
Resistência à compressão	MPa	100-200	90-250	-	-
Tensão de escoamento	MPa	-	-	25-38	60-75
Limite de deformação	%	1-6	2	>300	40-80
Condutividade térmica	W ^o C/m	0,1	0,2	0,2	0,2
Coefficiente de dilatação térmica	10 ⁻⁶ °C ⁻¹	60	100-200	110	90
Temperatura de distorção	°C	50-300	50-110	-	-
Temperatura de amolecimento	°C	-	-	175	264
Absorção de água (24h a 20°C)	%	0,1-0,4	0,1-0,3	0,03	1,3

Lubin (1969) cita algumas desvantagens nas resinas epóxi tais como alto custo, desgastes devido a intempéries e riscos de incompatibilidade com algumas resinas e reforços e aderência indesejável nas paredes dos moldes, (Blass, 1988). Segundo Kaw

(1997), devido às características citadas acima, as resinas epóxi são as mais utilizadas em sistemas *PRF*.

A seleção da resina será dirigida pelo desempenho do produto desejado. Algumas regras para selecionar um composto são:

- (i) Sistemas expostos a produtos químicos cáusticos exigirão uma resina éster-vinílica;
- (ii) Algumas propriedades mecânicas são melhoradas usando resina epóxi em relação a éster-vinílica, e a resina éster-vinílica é superior a poliéster em relação ao desempenho mecânico;
- (iii) A ligação do reforço deve combinar com a resina;
- (iv) Resinas epóxi tendem a oferecer mais resistência à fadiga que as éster-vinílicas ou poliéster;
- (v) Resinas epóxi tendem a ser significativamente mais difícil de processar do que as resinas poliéster ou éster-vinílicas. As resinas epóxi requerem maiores níveis de reforço;
- (vi) Sistemas fenólicos podem processar facilmente;
- (vii) Reforço trançado melhora as propriedades mecânicas transversais, mas aumenta o custo;
- (viii) Manta cortada reduzirá a performance das propriedades mecânicas nos testes em corpos de prova estruturais;
- (ix) Níveis de *roving* maiores nos compostos tendem a apresentar uma razão de absorção de água em 24 horas reduzida quando comparada com um composto manta/*roving*;
- (x) O reforço trançado a 45° melhora as propriedades de torque ou torção dentro do composto, mas não é um meio eficiente para melhorar o desempenho transversal, a 90° (orientação para testes);
- (xi) Quanto maior o conteúdo de *roving* no perfil pultrudado, melhor são as propriedades mecânicas longitudinais;
- (xii) Resinas fenólicas requerem níveis mais altos de reforço.

2.1.3. Interface Fibra-Matriz

A estrutura e as propriedades da interface fibra-matriz representam o papel principal na determinação das propriedades físicas e mecânicas dos compostos. A

grande diferença entre as propriedades elásticas da fibra e da matriz está relacionada à ligação por meio da interface, ou em outras palavras, as tensões atuantes na matriz serão transmitidas para a fibra através da interface. Assim, ao analisar teoricamente o fenômeno da transferência de tensões, Hull (1981) adota algumas hipóteses para as propriedades da interface: (i) a matriz e as fibras possuem comportamento elástico, (ii) a interface é extremamente fina, (iii) o contato entre a fibra e a matriz é perfeito, de forma que não ocorre descontinuidade de deformação ao longo da interface, (iv) a interface que se forma ao redor da fibra tem as mesmas propriedades de um material no estado sólido e (v) a geometria do empacotamento das fibras na matriz é regular. Entretanto as hipóteses (ii), (iii) e (iv) não estão totalmente corretas, pois a real interface possui uma forma física e química bastante complexa.

Por outro lado, uma vez que a natureza da interface é dependente das propriedades da fibra e da matriz, segue que a interface é característica específica para cada sistema fibra-matriz. Deste modo, para garantir que os esforços sejam transmitidos entre os materiais constituintes do composto, deve-se propiciar uma forte adesão entre as fibras (material inorgânico) e a resina (material orgânico). Caso não seja possível esta forte interação, o material ficará sujeito a falhas, tais como a delaminação e trincas em maiores escalas. Este fato influi diretamente na escolha dos materiais empregados, pois, em alguns casos, é necessário um tratamento superficial nas fibras com finalidade de melhorar a interface matriz-reforço.

2.2. Fabricação dos compostos

A formação do composto envolve a combinação da matriz com as fibras. A forma que estes materiais são combinados altera de modo significativo às propriedades mecânicas e físicas finais dos compostos avançados. Os métodos de fabricação destes materiais evoluíram a partir dos processos manuais para os automatizados, que atualmente são vantajosos em relação à precisão, controle de qualidade e rapidez na produção.

O método de aplicação manual (*Hand Lay-up*) é o mais antigo, simples e muito utilizado na produção de *PRF*. A resina e as fibras são manualmente colocadas num molde, sendo que a espessura do perfil é controlada através do número de camadas aplicadas. Esta técnica é utilizada com resinas termofixas e em aplicações onde o volume de produção é considerado baixo.

A técnica de aplicação com pistola (*Spray-up*) é uma automação do método manual, onde as fibras e a resina são simultaneamente depositadas no molde através de um equipamento onde a fibra é picotada num determinado tamanho. As fibras são lançadas sobre um jato de resina e a combinação de materiais é direcionada para a cavidade do molde, onde o composto toma sua forma. Após este processo, a mistura é trabalhada com pinças ou roletes para remover as bolhas de ar aprisionadas e alisar a superfície.

O processo de enrolamento ou *bobinamento* (*Filament Winding*) é usado para a construção de produtos de forma oca, geralmente cilíndrica e de alta resistência, tais como tanques de armazenagem, vasos de pressão e cápsulas para motor de foguetes. A fibra é impregnada por um banho de resina e puxada pela força de um mandril rotatório, o que dá parte de sua forma. Para a superfície interna e/ou externa, usa-se véu de vidro para torná-la rica em resina. Com isto provê-se melhor resistência à corrosão e consegue-se bom aspecto estético.

No método *RTM*, do inglês *resin transfer molding*, o reforço é colocado na parte inferior do molde "macho-e-fêmea". Depois que o molde é fechado, injeta-se resina sob pressão dentro da cavidade do molde. A resina molha o reforço e cura-se, formando a peça de composto.

O processo de laminação contínua é usado para se fazer compostos na forma de lâminas, como painéis corrugados ou lisos, translúcidos, opacos, para construção de materiais elétricos isolantes. O reforço é combinado com resina e "ensanduichado" entre dois filmes plásticos. As lâminas tomam sua forma através de rolos e a resina é curada para formar o composto.

A moldagem em câmara de vácuo é outro método bastante utilizado que envolve o vácuo para eliminar os vazios e liberar o ar aprisionado, expulsando o excesso de resina. Neste processo uma película é colocada sobre o molde e retirada após a utilização do vácuo e, posteriormente, o material é levado à cura.

O processo da pultrusão foi desenvolvido na década de 1950 e hoje é o método utilizado na produção dos tipos mais comuns de compostos avançados aplicados na construção civil. Durante várias décadas os compostos pultrudados foram considerados elementos estruturais secundários em várias aplicações. Segundo Bakis et al. (2002), desde os anos 90 tem havido um aumento significativo nas pesquisas e no uso de perfis estruturais pultrudados em pontes, passarelas, torres de eletrificação e edificações.

A pultrusão é um processo condizente com a produção em larga escala de perfis lineares com alto teor de fibras e de seção transversal constante. Componentes pultrudados com fibras de vidro apresentam resistência e rigidez específicas elevadas quando comparados aos materiais convencionais. Elementos pultrudados são cerca de 50% e 75% mais leves do que perfis de alumínio e aço com mesma resistência, respectivamente.

A grande parte dos pultrudados utiliza resinas termofixas reforçadas longitudinalmente com fibras de vidro contínuas. Recentemente, segundo Van de Velde e Kiekens (2001), também foram utilizadas as resinas termoplásticas nos processos de pultrusão.

A Figura 2.11 mostra um esquema do processo de pultrusão. Os reforços são tracionados (o inverso da extrusão) através de uma chapa guia que auxilia no correto posicionamento do reforço no produto final. Os materiais alinhados são então passados por uma câmara de impregnação de resina que contém o polímero, com a atuação semelhante a uma cola conectando os vários componentes do reforço. A solução de polímero contém aditivos de carga, catalisadores e outros produtos aditivadores que melhoram o desempenho estrutural do perfil pultrudado.

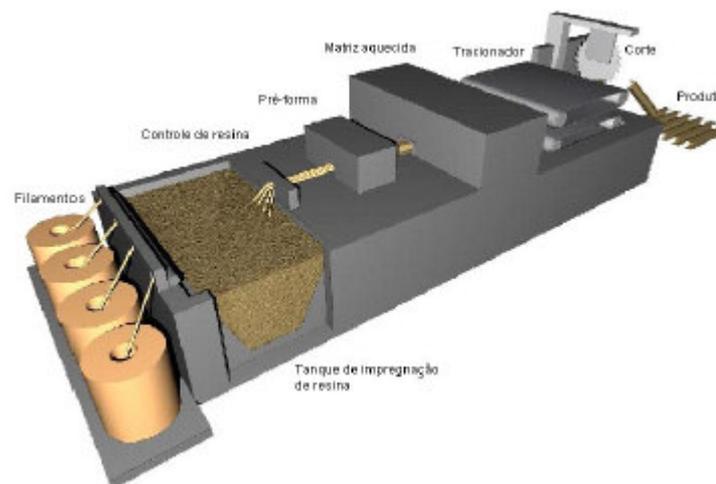


Figura 2.11: Esquema do processo de pultrusão, (Santos Neto, 2004).

O material superficial (véu) é geralmente adicionado após a fase de impregnação para que haja uma completa saturação do reforço. Após a câmara de impregnação, os reforços saturados são confinados e moldados numa pré-fôrma de modo a reduzir as tensões internas da peça. A cura do perfil acontece na matriz aquecida cujo aquecimento, na maioria das vezes, pode ser elétrico ou a óleo com uma ou quatro

zonas distintas de aquecimento, dependendo da resina a ser curada e da velocidade do processo. A seguir, o material curado é passado por um sistema de puxadores que traciona a peça e em seguida o perfil é serrado nos comprimentos desejados.

A Figura 2.12 esquematiza o perfil pultrudado sendo: (A) resina padrão; (B) véu superficial; (C) a manta de filamento contínuo e (D) os filamentos. A função dos filamentos é prover resistência à tração, compressão e flexão. O maior reforço concentra-se na direção longitudinal do perfil, com um mínimo na direção transversal. A manta de filamentos contínuos fornece uma resistência transversal ao elemento, enquanto o véu propicia uma elevada resistência à corrosão em ambientes agressivos, além de uma barreira contra a exibição de raios ultravioletas.

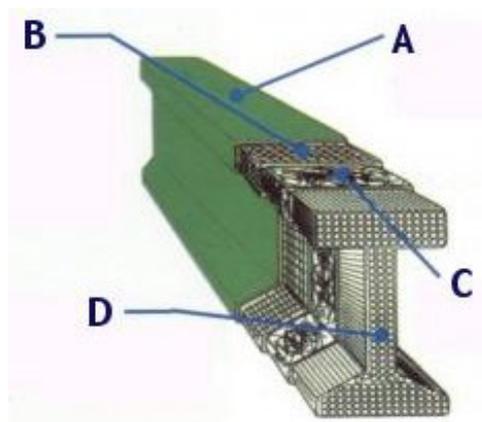


Figura 2.12: Esquema de um perfil pultrudado, (ENMAC, 2003).

A Figura 2.13 apresenta alguns perfis pultrudados de várias seções transversais, tais como I, H, C, L, U, entre outras. Outra vantagem do processo de pultrusão é a possibilidade de se fabricar perfis coloridos.



Figura 2.13: Perfis pultrudados, (Cogumelo, 2003).

Um dos problemas mais comuns na fabricação de compostos que afeta diretamente as propriedades mecânicas dos materiais é a formação de vazios. A causa principal na formação de vazios é a incapacidade da resina expulsar o ar da superfície

das fibras quando esta é revestida pela resina líquida, (Nagahama, 2003). Outros fatores que podem agravar a presença de ar no material são: a taxa de fibras, a viscosidade da resina, a manipulação mecânica das fibras na resina líquida e as bolhas de ar.

Os solventes para o controle da viscosidade, misturas e contaminantes químicos nas resinas volatilizam-se a altas temperaturas de cura e também formam bolhas. Para contornar este problema faz-se uso da desgazetificação da resina líquida, aplicação de vácuo no processo de moldagem e uso de resina mais fluída.

Além das variedades das formas e propriedades mecânicas, Gangarao et al (1999) citam outras vantagens associadas à técnica de pultrusão: (i) baixo custo de mão-de-obra e operação; (ii) mínimo desperdício de material e (iii) elevada taxa de produção.

Os materiais compostos apresentam características peculiares que devem ser adotadas para a confecção do projeto estrutural que utilize os perfis pultrudados, embora as características geométricas destes se assemelhem com os perfis em aço. Nesse caso, as geometrias dos perfis pultrudados deverão se adaptar ao desempenho estrutural do material, não sendo resultado da simples reprodução dos perfis em aço. Tratando-se de perfis pultrudados, segundo Nagahama e Batista (2000), a análise de problemas de instabilidade estrutural deve ser uma das prioridades, devido ao baixo módulo de elasticidade do material composto: em geral na faixa de 18 a 30 GPa na direção longitudinal do perfil e de 5 a 15 GPa na direção transversal ao eixo do perfil.

A análise estrutural de materiais compostos não deve seguir os princípios e metodologias desenvolvidas para as estruturas metálicas, devido à anisotropia. No entanto, o uso destes materiais pode oferecer vantagens em relação aos materiais estruturais convencionais, para certos tipos de aplicações.

Bakis et al (2002) sugerem que o aumento da aceitação de perfis pultrudados para a utilização em sistemas estruturais principais nas construções civis depende de três acontecimentos: (i) aceitação internacional por parte dos projetistas dos materiais pultrudados; (ii) desenvolvimento de normas técnicas de perfis pultrudados e, (iii) redução no custo de perfis pultrudados que atualmente não são competitivos com os materiais tradicionais, tais como o aço e o alumínio.

2.3. Aplicações de compostos de PRFV na Engenharia Civil

A aplicação de materiais compostos avançados na engenharia civil está se desenvolvendo lentamente devido a razões econômicas. Embora, de acordo com Van

Den Einde *et al* (2003), nos últimos anos alguns desenvolvimentos tecnológicos e a difusão da técnica da pultrusão têm ajudado a mudar este cenário: (i) redução na demanda destes materiais na indústria de defesa, expansão de um mercado altamente competitivo destes materiais na indústria e perspectiva de um aumento na utilização dos perfis *PRFV* no setor da construção civil; e (ii) o desenvolvimento destes materiais em conjunto com materiais estruturais convencionais.

Devido às vantagens já citadas, tais como (i) a resistência à corrosão, (ii) baixo peso específico, (iii) elevada resistência específica, (iv) manutenção mínima ao longo da vida útil e (v) rápida fabricação e montagem dos perfis pultrudados, atualmente a aplicação destes perfis na engenharia civil é uma alternativa aos materiais tradicionais (como por exemplo, o aço, o concreto e a madeira) principalmente em ambientes quimicamente agressivos, especialmente os perfis pultrudados com fibras de vidro (*PRFV*).

Nos últimos anos, não têm sido poucos os casos de uso do *PRFV* em obras de engenharia civil em todo o mundo, inclusive no Brasil, tais como em pontes, reforços estruturais, torres de transmissão de energia e edificações. Van Den Einde *et al* (2003) mostram uma visão geral da pesquisa e do desenvolvimento do emprego de materiais compostos avançados em obras civis realizados pela Universidade da Califórnia (*UCSD*). Em Hollaway (2003) também são apresentadas algumas aplicações do *PRFV* e algumas tendências para o futuro.

Nos parágrafos seguintes estão relacionadas algumas obras civis com o emprego do *PRFV*, executadas na Europa e no Brasil, (Santos Neto, 2004).

A ponte *West Mill*, localizada ao sul da Inglaterra, que une as cidades de *Highworth* e *Watchfield*, é um dos maiores e mais recentes exemplos de sucesso da construção civil em materiais compostos avançados. Inaugurada em 2002 e instalada sobre o rio *Cole*, a ponte de plástico reforçado com 11m de comprimento e 6,8m de largura, suporta pesos de até 440 kN num sistema extremamente complexo.

O sistema da ponte consiste em quatro vigas de 11m, feitas com 34 perfis pultrudados de *PRFV*, colados transversalmente às vigas principais. Por cima e por baixo das vigas foram aplicados flanges de 20mm de espessura feitas com plástico reforçado com fibra de carbono (*PRFC*) e instalados com o método de infusão. A ponte demorou 16 semanas para ser construída e, para garantir a segurança da ponte, a cerimônia de inauguração contou com a presença de um tanque Sherman de 340 kN,

Figura 2.14. A ponte pesa apenas 120 kN enquanto que, se fosse de concreto, pesaria 260 kN. Atualmente a ponte suporta o tráfego diário de aproximadamente mil veículos, inclusive veículos articulados com peso total de 440 kN, sendo monitorada continuamente para confirmar a segurança do material.



Figura 2.14: Ponte *West Mill* na Inglaterra, (FiberLine, 2004).

Uma interessante aplicação na engenharia civil foi a construção do primeiro prédio comercial/residencial, o *Eyecatcher*, Figura 2.15. Prédio com cinco pavimentos e com altura de 15m, foi construído inteiramente com perfis pultrudados. Apresentado, primeiramente, no *Swissbau'99 Fair* e, após sua exibição, a construção foi desmontada e levada a sua atual localização na *Münchensteinerstrasse 210*, Basel. As colunas apresentam seções compostas por um perfil *H* e dois perfis *U*. Além disso, as lajes foram construídas combinando-se dois perfis *U* e quatro placas pultrudadas. Em todas as seções os perfis foram unidos utilizando-se adesivo a base de epóxi de alta resistência e em seguida ligados por parafusos de aço. Os perfis pultrudados, com espessura de 50 mm e peso próprio de 120 N/m², alcançam um poder isolante equivalente a paredes com virtualmente 300 mm de miolo com isolamento térmico.



Figura 2.15: Edifício *Eyecatcher*, (Fiberline, 2004).

Uma outra obra interessante é a cobertura da estação de metrô de *Lindevang*, em *Copenhaga* na Alemanha. A cobertura de *PRF* com 60m de comprimento e 7,5m de largura é montada sobre estruturas metálicas e suportada por cabos de aço.



Figura 2.16: Estação de metrô na Alemanha, (Fiberline, 2004).

No Brasil foi construído um posto de combustível na cidade de Salvador, na Bahia, em perfis pultrudados. Esta escolha foi em função da proximidade do mar, que exigiria uma manutenção de custo elevado ao proprietário caso fosse construído em estrutura metálica devido à corrosão.



Figura 2.17: Posto de combustível em *PRF*, (Euzébio, 2004).

A Figura 2.18 mostra uma estrutura de um pavilhão de 16x20m em *PRF* para o armazenamento de defensivos agrícolas



Figura 2.18: Pavilhão para armazenamento de defensivos agrícolas, (Euzébio, 2004).

A Marinha do Brasil solicitou a substituição das estruturas metálicas das torres de iluminação por estruturas em *PRFV*. Esta decisão deve-se ao fato do custo de manutenção e de controle da corrosão sofrida pelo aço.



Figura 2.19: Vista da torre de sinalização da Marinha do Brasil, (Euzébio, 2004).

Outras aplicações do *PRFV* podem ser encontradas em Bakis *et al* (2002), Hollaway (1996) e Van Den Einde (1996).

A partir do próximo item é feita a parte teórica da revisão bibliográfica, inicialmente são apresentados sucintamente os modelos macromecânico e micromecânico dos laminados nos itens 2.4 e 2.5, respectivamente. No item 2.6 são

discutidos os critérios de ruptura dos materiais compostos. Em seguida apresenta-se uma revisão bibliográfica sobre os fenômenos de instabilidade de perfis de seção aberta e de parede fina no item 2.7.

2.4. Comportamento macromecânico dos compostos

Os compostos são formados por várias lâminas dispostas em diversas direções para constituir um laminado. Segundo Kaw (1997), uma lâmina é uma fina camada, na ordem de 0,125mm de espessura, constituída de matriz e reforço. Os materiais *PRF* são constituídos por lâminas dispostas em uma única direção, por este motivo, sendo as lâminas conhecidas também por compostos unidirecionais.

Pelo fato da lâmina ser formada por dois materiais, geralmente isotrópicos, com propriedades mecânicas diferentes a rigidez da lâmina varia de ponto a ponto, dependendo se o ponto analisado é na fibra, na matriz ou na interface matriz-fibra. Por esta razão, a macromecânica estabelece as relações tensões-deformações da lâmina considerando-a como material homogêneo.

Do ponto de vista mecânico, segundo Agarwal e Brotman (1990) e Nagaraj e Gangarao (1997), os compostos avançados possuem comportamento anisotrópico, porem os compostos fibrosos fabricados pelo processo da pultrusão são materiais ortotrópicos com as direções principais coincidindo com os eixos longitudinal e transversal do elemento, cujo comportamento está entre os materiais isotrópicos e anisotrópicos. No caso da placa isotrópica, Figura 2.20a, sujeita a um carregamento uniaxial haverá alongamento na direção do carregamento e encurtamento na direção perpendicular, entretanto não há alteração no ângulo formado por dois lados adjacentes. Quando se aplica cisalhamento puro neste material, este esforço produz uma distorção angular entre os lados, mas seus comprimentos não sofrem alteração.

Nos materiais anisotrópicos, Figura 2.20b, submetidos tanto a tensões uniaxiais como a cisalhamento puro, são produzidas simultaneamente alterações angulares e das dimensões da placa. As deformações dos materiais ortotrópicos, Figura 2.20c, são geralmente similares às deformações dos materiais anisotrópicos. Entretanto, quando o carregamento é aplicado em algumas direções específicas, as tensões normais produzem deformações normais e tensões cisalhantes produzem deformações cisalhantes somente, ou seja, para carregamentos nestas direções o comportamento mecânico se assemelha ao de materiais isotrópicos. Estas direções são conhecidas como eixos de simetria.

Os materiais ortotrópicos possuem três planos perpendiculares de simetria que implicam também em três planos ortogonais de simetria das constantes elásticas. Para estes materiais, pode-se definir um sistema de eixos ortogonais, dentro do qual as propriedades mecânicas são identificadas. Estes eixos são paralelos às direções longitudinais e transversais às fibras, eixos 1 e 2 , respectivamente, e o eixo 3 é obtido pelo produto vetorial dos dois eixos anteriores, conforme a Figura 2.21.

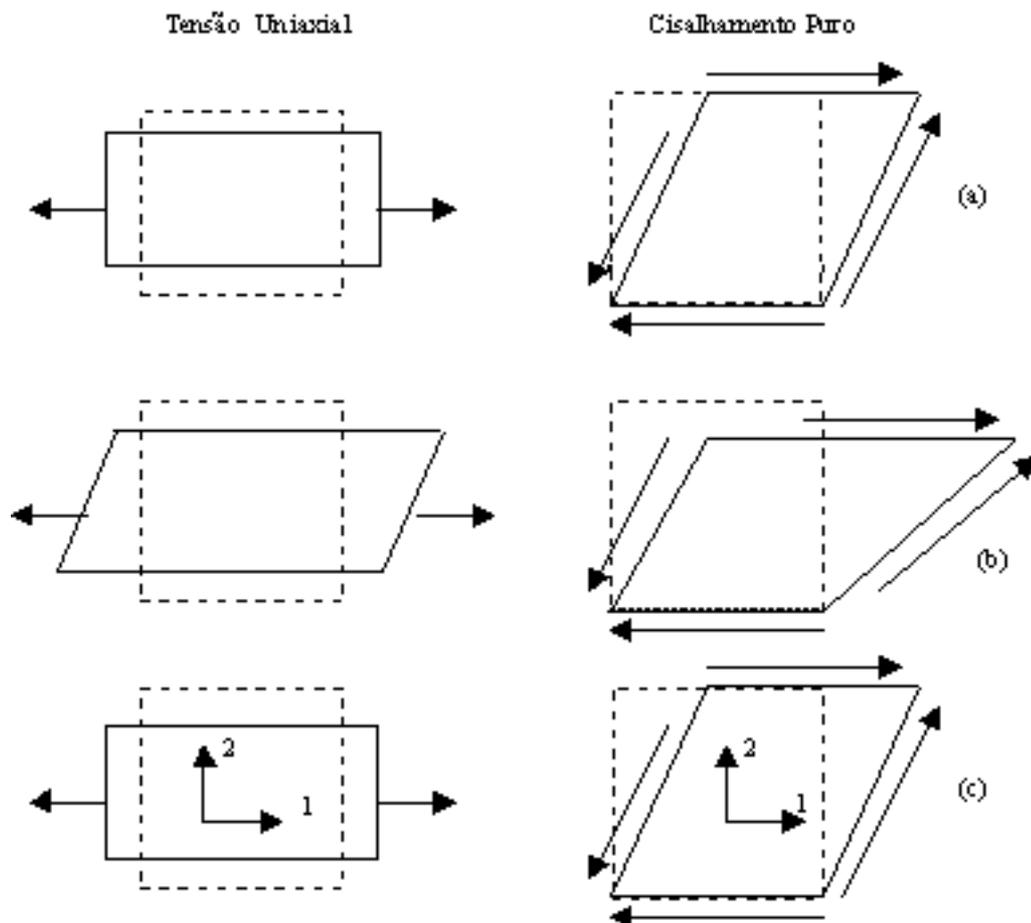


Figura 2.20: Comportamento dos materiais: (a) isotrópico, (b) anisotrópico e (c) ortotrópico.

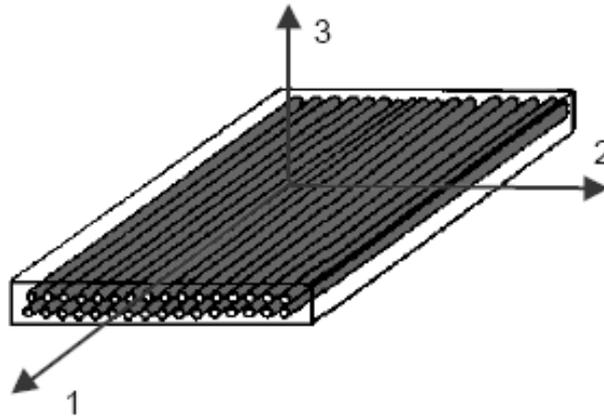


Figura 2.21: Eixos de ortotropia

As relações tensões-deformações para os materiais compostos são mais complexas do que para os materiais isotrópicos. Nos perfis pultrudados são admitidas que estas relações sejam lineares e de comportamento ortotrópico, *i.e.*, material com três eixos ortogonais de simetria, sendo dada pela equação:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

onde: E_i , ε_i e σ_i são, respectivamente, o módulo de elasticidade, a deformação linear e a tensão normal à direção i ;

G_{ij} são os módulos de cisalhamento nos planos 1-2, 1-3 e 2-3;

τ_{ij} são as tensões cisalhantes nos planos 1-2, 1-3 e 2-3;

γ_{ij} são componentes da deformação angular nos planos 1-2, 1-3 e 2-3;

ν_{ij} é o coeficiente de Poisson definido pela razão entre a deformação específica na direção i pela deformação na direção j , provocada quando o corpo é submetido somente à tensão normal na direção i .

Pelo teorema de Betti, a matriz constitutiva da equação (2.2) é simétrica, ou seja, das doze constantes de engenharia, somente nove são independentes, pois os coeficientes de Poisson são relacionados:

$$\begin{aligned}v_{21} &= \frac{E_2 \cdot v_{12}}{E_1} \\v_{31} &= \frac{E_3 \cdot v_{13}}{E_1} \\v_{32} &= \frac{E_3 \cdot v_{23}}{E_2}\end{aligned}\tag{2.3}$$

Devido ao fato que a espessura da lâmina (direção 3) é muito fina, a placa pode ser considerada sob estado plano de tensão, (Timoshenko e Goodier, 1980), ou seja, $\sigma_3 = \tau_{23} = \tau_{13} = 0$, logo a equação (2.2) pode ser reescrita como:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{v_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{v_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}\tag{2.4}$$

2.4.1. Equações Constitutivas dos Materiais Compostos numa Direção Qualquer

Para a análise do comportamento mecânico dos materiais compostos, é necessário definir um sistema de coordenadas de referência, x e y , que, geralmente, não coincidem com as direções principais de ortotropia, 1 e 2 , conforme a Figura 2.22. O ângulo entre os dois sistemas de eixos é denotado por θ .

A relação inversa da equação (2.4) pode ser expressa por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{1 - v_{12}v_{21}} \begin{bmatrix} E_1 & v_{21}E_1 & 0 \\ v_{12}E_2 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12}(1 - v_{12}v_{21}) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}\tag{2.5}$$

ou

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{\varepsilon}}\tag{2.6}$$

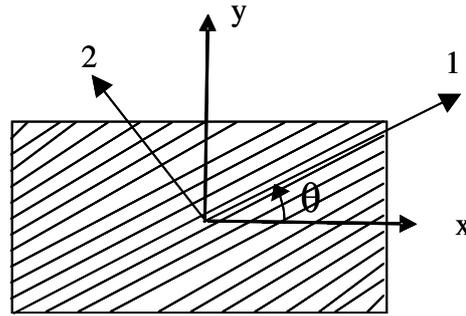


Figura 2.22: Sistema de eixos de referência e de ortotropia.

Pode-se escrever o vetor de tensões no sistema de referência através de uma transformação de coordenadas:

$$\underset{\sim}{\sigma}^* = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \underset{\sim}{T}^{-1} \underset{\sim}{\sigma} \quad (2.7)$$

onde $\underset{\sim}{T}$ é a matriz de transformação definida por (Kaw, 1997):

$$\underset{\sim}{T} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \text{sen}^2 \theta & 2.\text{sen}\theta.\cos \theta \\ \text{sen}^2 \theta & \cos^2 \theta & -2.\text{sen}\theta.\cos \theta \\ -\text{sen}\theta.\cos \theta & \text{sen}\theta.\cos \theta & \cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Substituindo-se (2.6) em (2.7), vem:

$$\underset{\sim}{\sigma}^* = \underset{\sim}{T}^{-1} \underset{\sim}{D} \underset{\sim}{\varepsilon} \quad (2.9)$$

O vetor de deformações também pode ser escrito no sistema de referência através da matriz de transformação:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{Bmatrix} = \underset{\sim}{T}^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12}/2 \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

Definindo a matriz de Reuter como sendo (Kaw, 1997):

$$\underset{\sim}{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Pode-se escrever que:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \underset{\sim}{R} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12}/2 \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

e

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \underset{\sim}{R} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

Substituindo-se (2.12) e (2.13) em (2.10), tem-se que:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \underset{\sim}{R} \underset{\sim}{T} \underset{\sim}{R}^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

ou

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{R} \underset{\sim}{T} \underset{\sim}{R}^{-1} \underset{\sim}{\varepsilon}^* \quad (2.15)$$

Substituindo-se (2.15) em (2.9), obtém-se:

$$\underset{\sim}{\sigma}^* = \underset{\sim}{D}^* \underset{\sim}{\varepsilon}^* \quad (2.16)$$

onde

$$\underset{\sim}{D}^* = \underset{\sim}{T}^{-1} \underset{\sim}{D} \underset{\sim}{R} \underset{\sim}{T} \underset{\sim}{R}^{-1} \quad (2.17)$$

Pode-se demonstrar que:

$$\underset{\sim}{T}^{-T} = \underset{\sim}{R} \underset{\sim}{T} \underset{\sim}{R}^{-1} \quad (2.18)$$

e portanto:

$$\underset{\sim}{D}^* = \underset{\sim}{T}^{-1} \underset{\sim}{D} \underset{\sim}{T}^{-T} \quad (2.19)$$

onde o índice sobrecritito $-T$ denota a matriz transposta da matriz inversa.

No caso de laminados formados por diversas lâminas com diferentes orientações, pode-se encontrar a matriz constitutiva ortotrópica equivalente do laminado através da Teoria Clássica da Laminação e dos modelos macromecânicos, cujos procedimentos podem ser encontrados em Jones (1975), Agarwal e Broutman (1990) e Kaw (1997).

2.5. Micromecânica dos compostos

A micromecânica pretende resolver o problema que consiste em saber de que forma as propriedades globais do material composto dependem ou se relacionam com as propriedades dos constituintes individualmente considerados (Leal, 2003).

Segundo Leal (2003), os modelos micromecânicos devem permitir a previsão das propriedades dos materiais compostos obtidos com diversas combinações de materiais constituintes e com diferentes proporções de fibras e matriz, sem a necessidade de fabricar e ensaiar os compostos em questão, o que acarretaria em um custo inicial na elaboração de projetos com compostos.

Admite-se que os *PRF* são formados por matrizes e fibras com propriedades elásticas isotrópicas, sendo caracterizados por dois módulos de elasticidade (E_m e E_f) e dois coeficientes de Poisson (ν_m e ν_f).

Os modelos usados em micromecânica podem classificar-se em três grupos, (Leal, 2003):

- (i) Os baseados na Teoria da Elasticidade que pretendem obter resultados através da solução analítica ou numérica do problema de elasticidade, representando o material com a melhor aproximação possível, onde, em casos mais complexos, pode ser considerada a heterogeneidade do composto;
- (ii) Os baseados na Resistência dos Materiais que consideram a hipótese da homogeneidade pelo que estudam apenas os valores médios dos deslocamentos, tensões e deformações envolvidas;
- (iii) Os métodos semi-analíticos, que conjugam resultados teóricos com experimentais de forma a fornecer um conjunto de expressões diretamente utilizáveis na prática.

Além das propriedades elásticas dos componentes do *PRF*, o composto é caracterizado pelas proporções volumétricas da matriz (v_m) e da fibra (v_f) obtidas pelas relações;

$$v_m = \frac{V_m}{V_c} \tag{2.20}$$

$$v_f = \frac{V_f}{V_c}$$

onde V_m , V_f e V_c são, respectivamente, o volume da matriz, de fibras e do composto.

Durante o processo de fabricação do composto são introduzidos pequenos volumes de vazios (v_v) no *PRF*. Segundo Hull (1981), os vazios introduzidos são causados por dois motivos principais: (i) pela incompleta molhagem das fibras pela

matriz e (ii) pela presença de gases voláteis produzidos durante o processo de cura das resinas termofixas ou no processo de fundição no caso de polímeros termoplásticos. Isto causa uma densidade teórica do composto maior do que a densidade real e conseqüentemente diminui as propriedades mecânicas finais do sistema, (Kaw, 1997). Logo, verifica-se a seguinte relação.

$$v_m = 1 - (v_f + v_v) \quad (2.21)$$

No processo da pultrusão, por ser um meio de produção bastante mecanizado, o volume de vazios é muito pequeno podendo ser desprezado.

O modelo micromecânico admite as seguintes hipóteses, (Kaw, 1997):

- (i) Contato entre as fibras e a matriz é perfeito;
- (ii) Módulo de elasticidade, diâmetros e espaçamento entre as fibras são uniformes;
- (iii) As fibras são contínuas e paralelas;
- (iv) As fibras e a matriz são materiais elástico-linear;
- (v) As fibras possuem resistência uniforme;
- (vi) O volume de vazios do composto é nulo.

Expressões simplificadas e práticas do modelo de elasticidade em função do volume de fibras do composto podem ser obtidas a partir de aproximações do comportamento mecânico do material composto.

A idéia é simular os ensaios usados na determinação experimental das propriedades mediante: (i) a utilização das hipóteses de Resistência dos Materiais para os estados de tensões aplicadas e, (ii) a adoção de um modelo simplificado representativo das propriedades médias do composto. Esta segunda hipótese corresponde a considerar que as propriedades mecânicas não dependem da distribuição das fibras na matriz.

A Figura 2.23 representa o *PRF* por um paralelepípedo que apresenta uma porcentagem de material de reforço equivalente ao volume de fibras determinado para o material real.

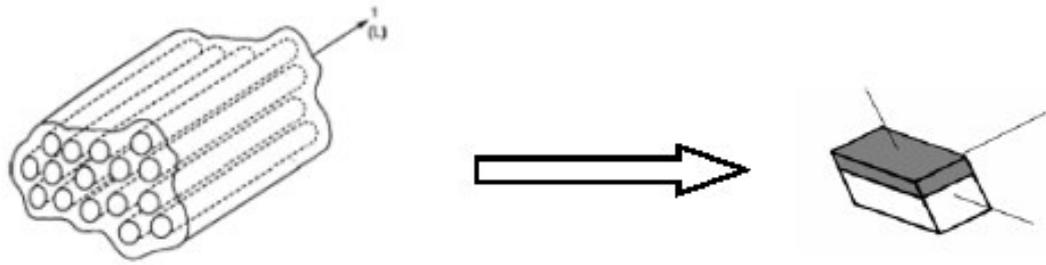


Figura 2.23: Representação do material real por um modelo simplificado, (Leal, 2003).

Submetendo o paralelepípedo a ensaios de tração nas direções longitudinal e transversal às fibras, direção 1 e 2, respectivamente, é possível determinar os módulos de elasticidade dos compostos nestas direções através de equações simplificadas da Resistência dos Materiais, conhecida na literatura especializada como a Regra das Misturas. Esta regra pressupõe como hipótese básica que o contato entre a fibra e a matriz seja perfeito, logo quando se aplica uma tensão paralela às fibras, a deformação da matriz (ϵ_m) é a mesma causada nas fibras (ϵ_f). Portanto, pode-se demonstrar as seguintes relações, ver Jones (1975), Hull (1981), Agarwal e Broutman (1990), Kaw (1997) e Leal (2003).

$$E_1 = E_f \cdot v_f + E_m \cdot v_m \quad (2.22)$$

$$E_2 = \frac{E_f \cdot E_m}{E_f \cdot v_m + E_m \cdot v_f}$$

O módulo de elasticidade na direção 1 é expresso por uma relação linear com o volume de fibras, ou seja, assume valores iguais a E_m e E_f , respectivamente, para uma fração volumétrica de fibras nula ou unitária no composto. Na direção 2, esta relação não é linear mostrando que as fibras participam pouco do módulo de elasticidade transversal, conforme mostrado na Figura 2.24.

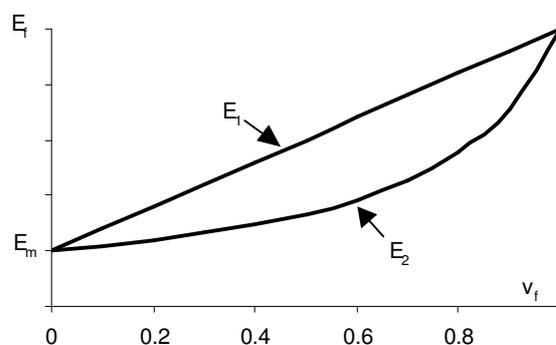


Figura 2.24: Relações dos módulos de elasticidade com o volume de fibras.

De forma análoga, determina-se o coeficiente de Poisson (ν_{12}) e o módulo de cisalhamento transversal (G_{12}):

$$\nu_{12} = \nu_f \cdot \nu_f + \nu_m \cdot \nu_m \quad (2.23)$$

$$G_{12} = \frac{G_m \cdot G_f}{G_m \cdot \nu_f + G_f \cdot \nu_m} \quad (2.24)$$

onde G_m e G_f são os módulos de cisalhamento da matriz e das fibras, respectivamente:

$$G_m = \frac{E_m}{2 \cdot (1 + \nu_m)} \quad (2.25)$$

$$G_f = \frac{E_f}{2 \cdot (1 + \nu_f)}$$

Demonstra-se também, pela Figura 2.25, que as fibras participam pouco do módulo de cisalhamento do composto.

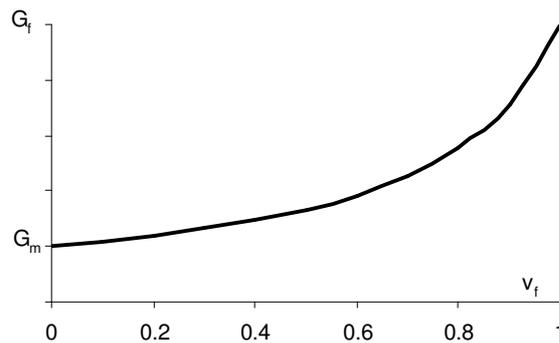


Figura 2.25: Relação entre o módulo de cisalhamento e o volume de fibras.

A Regra das Misturas representa os volumes de fibra e de matriz por um paralelepípedo. Porém, nos materiais pultrudados, geralmente as fibras são circulares sendo completamente embebidas na matriz. Assim, para ser mais realista, representa-se o volume de fibra e matriz do composto por dois cilindros concêntricos como mostra a Figura 2.26.

Segundo Tsai e Hahn (1980), o modelo dos cilindros concêntricos é uma formulação semi-empírica que fornece resultados melhores para o módulo de elasticidade e o de cisalhamento do que a Regra das Misturas. Resumidamente, as propriedades dos compostos, segundo este modelo, são dadas na Tabela 2.7.

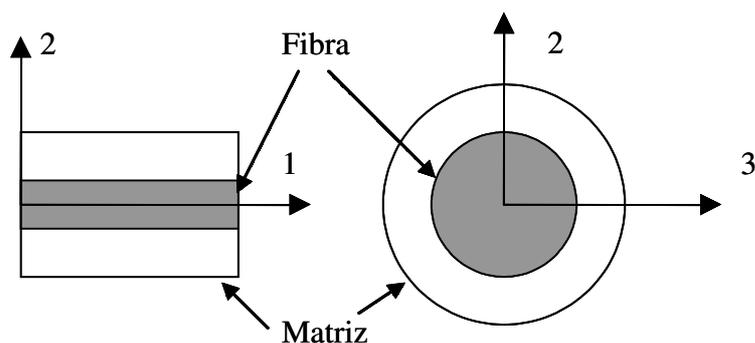


Figura 2.26: Modelo dos cilindros concêntricos.

Tabela 2.7: Constantes elásticas, adaptada de Tsai e Hahn (1980).

$$P = \frac{1}{v_f + \eta v_m} (v_f P_f + \eta v_m P_m)$$

Constante de Engenharia	P	P_f	P_m	η
E_I	E_I	E_f	E_m	1
v_{12}	v_{12}	v_f	v_m	1
G_{12}	$1/G_{12}$	$1/G_f$	$1/G_m$	η_6
G_y	$1/G_y$	$1/G_f$	$1/G_m$	η_4
k_y	$1/k_y$	$1/G_f$	$1/G_m$	η_k

Onde η_4 , η_6 e η_k são dados por:

$$\eta_4 = \frac{1}{4(1-v_m)} \left(3 - 4v_m + \frac{G_m}{G_f} \right) \quad (2.26)$$

$$\eta_6 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{G_m}{G_f} \right) \quad (2.27)$$

$$\eta_k = \frac{1}{2(1-v_m)} \left(1 + (1-2v_f) \frac{G_m}{G_f} \right). \quad (2.28)$$

E o módulo de elasticidade na direção 2 (perpendicular às fibras) é encontrado por:

$$E_2 = \frac{4k_y G_y}{k_y + mG_y} \quad (2.29)$$

em que

$$m = 1 + \frac{4k_y v_{12}^2}{E_1} \quad (2.30)$$

Segundo Tsai e Hahn (1980), a maioria dos compostos apresenta a razão entre os módulos de cisalhamento de seus constituintes (*i.e.* G_m/G_f) muito menor do que a unidade. Desta forma, os parâmetros η podem ser aproximados por:

$$\eta_4 = \frac{3 - 4\nu_m}{4(1 - \nu_m)} \quad (2.31)$$

$$\eta_6 = \frac{1}{2} \quad (2.32)$$

$$\eta_k = \frac{1}{2(1 - \nu_m)} \quad (2.33)$$

Halpin e Tsai (1967), *apud* Kaw (1997), desenvolveram equações semi-empíricas para o módulo de cisalhamento e para o módulo de elasticidade transversal, baseados nas soluções das equações da elasticidade, juntamente com a verificação de dados experimentais.

$$\begin{aligned} E_1 &= E_f \cdot \nu_f + E_m \cdot \nu_m \\ \nu_{12} &= \nu_f \cdot \nu_f + \nu_m \cdot \nu_m \\ \frac{M}{M_m} &= \frac{1 + \xi \cdot \eta \cdot \nu_f}{1 - \eta \cdot \nu_f} \\ \eta &= \frac{M_f / M_m - 1}{M_f / M_m + \xi} \end{aligned} \quad (2.34)$$

em que M são os módulos do composto E_2 , G_{12} ou ν_{12} e $M_{m,f}$ corresponde aos módulos E , G ou ν da fibra ou da matriz de acordo com o índice subscrito.

O termo ξ é conhecido como *fator de reforço* e depende: (i) da geometria da fibra, (ii) da disposição das fibras e (iii) das condições de carregamento. Para fibras circulares dispostas em um arranjo quadrado, utiliza-se $\xi = 2$ para o cálculo do módulo de elasticidade transversal e $\xi = 1$ na obtenção do módulo de cisalhamento.

A Regra das Misturas é bastante utilizada na determinação das constantes de engenharia para os materiais compostos por sua simplicidade e praticidade, embora leve

a resultados errôneos por desconsiderar completamente a microestrutura dos materiais. Porém esta regra fornece boas aproximações no caso de compostos unidirecionais.

2.6. Critérios de Ruptura

Segundo Kaw (1997), o sucesso do projeto com materiais compostos requer que a estrutura seja (i) eficiente e (ii) segura. Para os materiais isotrópicos (por exemplo, o aço), as teorias de ruptura utilizam as resistências normais e cisalhantes últimas que são comparadas com as tensões normais principais e com a máxima tensão cisalhante.

Entretanto, nos compostos unidirecionais existem cinco parâmetros de resistências últimas no sistema local do material: (i) duas tensões paralelas às fibras, (i_1) uma de compressão (X_c) e (i_2) outra de tração (X_t), (ii) duas tensões perpendicular às fibras, (ii_1) uma de compressão (Y_c) e (ii_2) outra de tração (Y_t) e (iii) uma tensão cisalhante (S) cujo sinal não difere na análise.

A seguir são mostrados alguns destes critérios de ruptura.

2.6.1. Critério da Máxima Tensão

Este critério, relacionado com a teoria da máxima tensão normal de Rankine e com a teoria de máxima tensão cisalhante de Tresca, é similar aos critérios aplicados aos materiais isotrópicos.

O critério da máxima tensão estipula que a resistência mecânica da lâmina é atingida quando uma das três tensões, que a lâmina esta submetida, atinja o valor de ruptura correspondente, ou seja, o material não apresenta falha quando as seguintes inequações são satisfeitas.

$$\begin{aligned} -X_c < \sigma_1 < X_t \\ -Y_c < \sigma_2 < Y_t \\ |\tau_{12}| < S \end{aligned} \quad (2.35)$$

onde σ_1 e σ_2 são as tensões normais às direções 1 e 2 e τ_{12} é a tensão cisalhante.

2.6.2. Critério da Máxima Deformação

Esta teoria é baseada no critério da máxima deformação normal de St. Venant e no critério de Tresca aplicados aos materiais isotrópicos. O critério da máxima deformação estipula que a resistência mecânica da lâmina é atingida quando uma das

três deformações que a lâmina está submetida atinja o valor de ruptura correspondente. Desta forma, o critério pode ser escrito matematicamente da seguinte maneira.

$$\begin{aligned} -X_{\varepsilon c} < \varepsilon_1 < X_{\varepsilon t} \\ -Y_{\varepsilon c} < \varepsilon_2 < Y_{\varepsilon t} \\ |\gamma_{12}| < S_{\varepsilon} \end{aligned} \quad (2.36)$$

onde ε_1 , ε_2 e γ_{12} representam as deformações longitudinal, transversal e de cisalhamento da lâmina, $X_{\varepsilon c}$ e $X_{\varepsilon t}$ representam as deformações máximas na direção longitudinal em compressão e em tração, $Y_{\varepsilon c}$ e $Y_{\varepsilon t}$ representam as deformações máximas na direção transversal em compressão e em tração e S_{ε} representa a deformação máxima ao cisalhamento, sendo relacionadas com as resistências mecânicas últimas por.

$$\begin{aligned} X_{\varepsilon c} &= \frac{X_c}{E_1} & X_{\varepsilon t} &= \frac{X_t}{E_1} \\ Y_{\varepsilon c} &= \frac{Y_c}{E_2} & Y_{\varepsilon t} &= \frac{Y_t}{E_2} \\ S_{\varepsilon} &= \frac{S}{G_{12}} \end{aligned} \quad (2.37)$$

2.6.3. Critérios Energéticos

Os critérios de máxima tensão e deformação, apresentados acima, admitem que os mecanismos de rupturas longitudinais, transversais e de cisalhamento se produzem de forma independente e, em muitos casos, os critérios são contraditórios nos seus resultados. De maneira a levar todos os mecanismos simultaneamente como o critério de Von Mises para os materiais isotrópicos, foram desenvolvidos os critérios energéticos.

2.6.3.1 Critério de Hill

Segundo Jones (1975), o critério de Hill para materiais anisotrópicos é uma extensão da teoria de Von Mises para os materiais isotrópicos que considera (i) a energia de dilatação do material (mudanças volumétricas) e (ii) a energia que causa distorções de cisalhamento. Entretanto, nos materiais ortotrópicos as energias de dilatação e de distorção não podem ser consideradas separadamente.

A energia de distorção para materiais ortotrópicos, quando as tensões de cisalhamentos (τ_{12} , τ_{23} e τ_{31}) são diferentes de zero, é obtida de forma análoga aos materiais isotrópicos. Igualando a energia de distorção de cisalhamento com a energia

no ponto da ruptura, obtém-se o critério de Hill para materiais anisotrópicos, (Jones, 1975).

$$(G + H)\sigma_1^2 + (F + H)\sigma_2^2 + (F + G)\sigma_3^2 - 2H\sigma_1\sigma_2 - 2G\sigma_1\sigma_3 - \dots \quad (2.38)$$

$$\dots - 2F\sigma_2\sigma_3 + 2L\tau_{23}^2 + 2M\tau_{13}^2 + 2N\tau_{12}^2 < 1$$

As constantes de resistência de Hill F , G , H , L , M e N estão intimamente relacionadas com os parâmetros de ruptura do material X , Y e S . Para um ensaio de tração (ou de compressão) na direção 1 do material até a sua ruptura (*i.e.* $\sigma_1 = X$), tem-se que:

$$G + H = \frac{1}{X^2} \quad (2.39)$$

e para ensaios de tração (ou compressão) nas direções transversais 2 e 3, o critério de Hill fornece:

$$F + H = \frac{1}{Y^2} \quad (2.40)$$

$$F + G = \frac{1}{Z^2} \quad (2.41)$$

onde se denota a resistência mecânica de ruptura na direção 3 por Z .

Para ensaios de cisalhamento nos planos 1-2, 1-3 e 2-3, o critério pode ser matematicamente reescrito por:

$$2N = \frac{1}{S_{12}^2}$$

$$2M = \frac{1}{S_{13}^2} \quad (2.42)$$

$$2L = \frac{1}{S_{23}^2}$$

onde S_{12} , S_{13} e S_{23} são as tensões de ruptura de cisalhamento nos planos 1-2, 1-3 e 2-3, respectivamente.

Substituindo-se as equações (2.39) a (2.42) na equação (2.38), o critério de ruptura de Hill pode ser reescrito em função dos parâmetros de resistência do composto.

$$\left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_3}{Z}\right)^2 - \left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2}\right)\sigma_1\sigma_2 - \left(\frac{1}{X^2} - \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2}\right)\sigma_1\sigma_3 - \dots \quad (2.43)$$

$$\dots - \left(-\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2}\right)\sigma_2\sigma_3 + \left(\frac{\tau_{23}}{S_{23}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{13}}{S_{13}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S_{12}}\right)^2 < 1$$

2.6.3.2 Critério de Tsai-Hill

Tsai adaptou o critério de Hill para os compostos unidirecionais, onde se admitem que: (i) a lâmina está submetida ao estado plano de tensões (*i.e.*, $\sigma_3 = \tau_{13} = \tau_{23} = 0$) e (ii) as resistências mecânicas nas direções 2 e 3 são iguais, ou seja, $Y=Z$ e por simplicidade $S_{12}=S$. Logo, pelo critério de ruptura de Tsai-Hill, o composto não apresenta falhas caso a inequação seja satisfeita.

$$\left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2 - \frac{\sigma_1\sigma_2}{X^2} + \left(\frac{\tau_{12}}{S}\right)^2 < 1 \quad (2.44)$$

2.6.3.3 Critério de Hoffman

Neste critério, ao contrário da teoria de Tsai-Hill, leva-se em consideração a diferença do comportamento na tração e na compressão. Por este critério o material apresenta segurança contra a ruptura se for verificada a inequação para os compostos unidirecionais em estado plano de tensões:

$$\frac{\sigma_1^2}{X_t X_c} + \frac{\sigma_2^2}{Y_t Y_c} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{X_t X_c} + \frac{X_c - X_t}{X_t X_c} \sigma_1 + \frac{Y_c - Y_t}{Y_t Y_c} \sigma_2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S}\right)^2 < 1 \quad (2.45)$$

onde $X_{c,t}$ representam as resistências mecânicas paralelas às fibras, de compressão e de tração, respectivamente, $Y_{c,t}$ representam as resistências mecânicas perpendiculares às fibras, de compressão e de tração, respectivamente e S é a resistência mecânica ao cisalhamento.

2.6.3.4 Critério de Tsai-Wu

Segundo Jones (1975), os critérios apresentados nos itens anteriores mostram várias divergências com resultados experimentais. Para melhorar a correlação entre os resultados numéricos com os experimentais, Tsai e Wu (1971) *apud* Jones (1975) adicionaram várias constantes de resistências no seu critério de ruptura. Estas constantes consideram a iteração entre as tensões últimas nas duas direções do composto unidirecional.

Para o composto submetido ao estado plano de tensões, a teoria de Tsai-Wu garante que o material não se rompe se:

$$F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_3\tau_{12} + F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 < 1 \quad (2.46)$$

sendo que, através de ensaios uniaxiais de tração ou de compressão, obtém-se (ver Jones (1975) e Kaw (1997)):

$$F_1 = \frac{X_c + X_t}{X_c X_t} \quad (2.47)$$

$$F_{11} = -\frac{1}{X_c X_t}$$

e

$$F_2 = \frac{Y_c + Y_t}{Y_c Y_t} \quad (2.48)$$

$$F_{22} = -\frac{1}{Y_c Y_t}$$

O coeficiente F_{12} é o termo de acoplamento das resistências últimas nas duas direções e também depende da tensão biaxial de ruptura, podendo variar de -1 a $+1$. Kaw (1997) sugere algumas expressões empíricas para a determinação de F_{12} .

$$F_{12} = -\frac{1}{2X_t^2} \text{ conforme o critério de Tsai-Hill} \quad (2.49)$$

$$F_{12} = -\frac{1}{2X_c X_t} \text{ conforme o critério de Hoffman} \quad (2.50)$$

$$F_{12} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{X_c X_t Y_c Y_t}} \text{ conforme o critério de Mises-Hencky} \quad (2.51)$$

Neste trabalho dá-se ênfase a exemplos de perfis de materiais compostos *PRFV* que apresentam problemas de instabilidade antes que ocorra ruptura de material em algum ponto da seção. No próximo item é feita uma revisão de instabilidade de perfis de seção aberta e de parede fina.

2.7. Instabilidade de Perfis

A Figura 2.27 apresenta alguns tipos de seções transversais comumente utilizadas em elementos estruturais pultrudados onde, devido ao processo de fabricação, as espessuras das paredes são da ordem de 5,0 mm, o que implica, automaticamente, a um conjunto de fenômenos que normalmente afetam as seções mais esbeltas tais como (i) a instabilidade das placas dos perfis submetidas à compressão ou (ii) fenômenos resultantes da baixa rigidez e complexa deformabilidade sob torção (por exemplo, o empenamento).

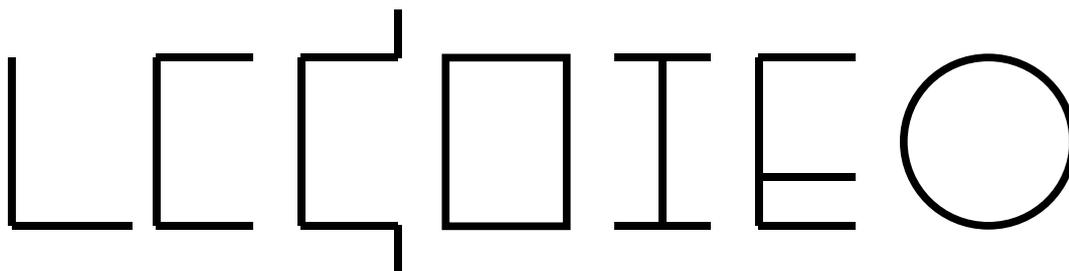


Figura 2.27: Tipos de seções de perfis pultrudados comumente utilizados

Os materiais compostos apresentam características peculiares que devem ser adotadas para a confecção do projeto estrutural que utilize os perfis pultrudados, embora as características geométricas destes se assemelhem com os perfis em aço. Nesse caso, as geometrias dos perfis pultrudados deverão se adaptar ao desempenho estrutural do material, não sendo resultado da simples reprodução dos perfis em aço. Tratando de perfis pultrudados, a análise de problemas de instabilidade estrutural deve ser uma das prioridades, devido ao baixo módulo de deformação do material composto: em geral na faixa de 18 a 30 GPa na direção longitudinal do perfil e de 5 a 15 GPa na direção transversal ao eixo do perfil, (Nagahama e Batista, 2000). Como resultado, em muitos casos de projetos com perfis pultrudados a resistência não é totalmente utilizada pois o fenômeno da instabilidade se torna crítico. Neste contexto, Pecce e Cosenza (2000) apresentam uma série de testes experimentais onde a flambagem local é crítica e comparam com resultados numéricos.

O fenômeno da instabilidade de uma estrutura que evolui ao longo de uma determinada trajetória de equilíbrio (relação carga-deslocamento) corresponde à transição de configuração de equilíbrio estável para instável. As estruturas podem apresentar dois diferentes tipos de instabilidade. Pode ocorrer uma perda de estabilidade por bifurcação de equilíbrio, fenômeno designado por instabilidade bifurcacional, ou então por ocorrência de um ponto limite na trajetória de equilíbrio (curva não linear carga-deslocamento), também conhecido por *snap-through*, (Reis e Camotim, 2000).

Serão consideradas neste trabalho estruturas compostas de material elástico-linear, que não apresentam imperfeições geométricas iniciais e que sofrem perda de estabilidade por bifurcação de equilíbrio (ver Figura 2.28). Efetua-se portanto uma análise linear de estabilidade, sendo a trajetória fundamental de equilíbrio linear, na qual pretende-se obter unicamente a carga crítica de bifurcação e os modos de instabilidade

associados. A carga crítica de bifurcação também é denominada por alguns autores de carga crítica de flambagem e os modos de instabilidade de modos de flambagem.

Os perfis com seção aberta e parede fina podem apresentar os modos de instabilidade de natureza global e local, os quais são assim definidos, segundo Prola e Camotim (2000) e Prola (2001):

- (i) Os modos de instabilidade global são caracterizados pela ocorrência de deformação do eixo da barra, sofrendo as suas seções transversais unicamente deslocamentos de corpo rígido no próprio plano (uma rotação e duas translações). São exemplos (i) a instabilidade de colunas (barras comprimidas) por flexão ou flexo-torção, e (ii) a instabilidade lateral de vigas (barras fletidas) por flexo-torção;
- (ii) Os modos de instabilidade local envolvem as deformações das paredes da barra, permanecendo o seu eixo na configuração indeformada. É ainda conveniente distinguir entre os fenômenos de instabilidade local associados: (i) apenas a deslocamentos de flexão das paredes (*i.e.*, os bordos longitudinais dos perfis permanecem indeformados) e (ii) também a deslocamentos de membrana (*i.e.*, que provocam deformações nos bordos longitudinais).

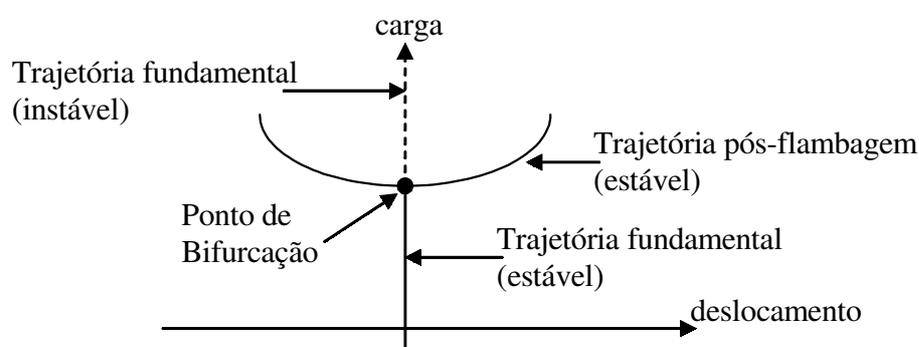


Figura 2.28: Instabilidade bifurcacional. (Reis e Camotim, 2000)

Dependendo da sua geometria (forma e dimensões da seção transversal e comprimento), o comportamento estrutural de uma barra com seção aberta e parede fina pode ser tanto influenciado por qualquer um destes dois tipos de modos de instabilidade como por ambos. Assim, uma barra com as características referidas pode classificar-se, de acordo com a relação que existe entre o comprimento e o comportamento de estabilidade como: (i) “barra curta”, se não ocorrer o modo de instabilidade global, (ii)

“barra longa”, se ocorrer um modo de instabilidade global e, (iii) “barra intermediária”, se a instabilidade ocorrer numa combinação de um modo local com um modo global.

Na análise linear de estabilidade pode-se aplicar tanto um método analítico como um método de discretização, transformando-se o problema a resolver em um problema de autovalores e autovetores, cuja solução fornece os valores de tensão crítica de bifurcação, definida neste trabalho como sendo a carga crítica de bifurcação por unidade de área, e os modos associados de instabilidade.

O valor da tensão crítica de bifurcação e a natureza do modo de instabilidade dependem: (i) do comprimento da barra; (ii) da forma e das dimensões da seção transversal e (iii) das condições de bordos, ou seja, das restrições aos deslocamentos e rotações existentes nas seções transversais, (Prola, 2001).

A Figura 2.29 apresenta, com caráter meramente ilustrativo, o caso particular de uma seção em C submetida à compressão uniforme cujos possíveis modos de instabilidade são: (a) modo local de placa (*MLP*), (b) modo distorcional (*MD*), (c) modo global de flexão (*MGF*) e (d) modo global de flexo-torção (*MGFT*).

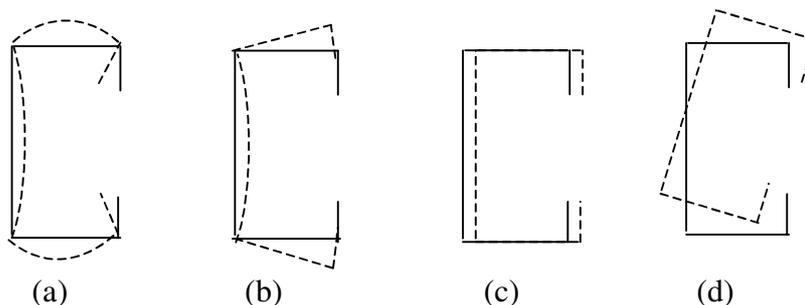


Figura 2.29: Barra comprimida em seção C: (a) *MLP*, (b) *MD*, (c) *MGF* e (d) *MGFT*, (Prola e Camotim, 2000)

Discute-se agora a variação da tensão de bifurcação (σ_b) associada com qualquer um dos modos de instabilidade, com a relação adimensional a/b_1 , onde a é o comprimento da barra e b_1 é a dimensão da alma do perfil. As curvas apresentadas na Figura 2.30 são relativas à variação da tensão de bifurcação com a relação a/b_1 , representada em escala logarítmica, de duas colunas de uma seção C que diferem apenas na espessura do perfil (t).

Ambas as curvas apresentam dois pontos de mínimos locais, sendo que o primeiro e o segundo ponto de mínimo são correspondentes à bifurcação no *MLP* e no *MD*, respectivamente, e o último tramo descendente está associado ao modo de instabilidade global.

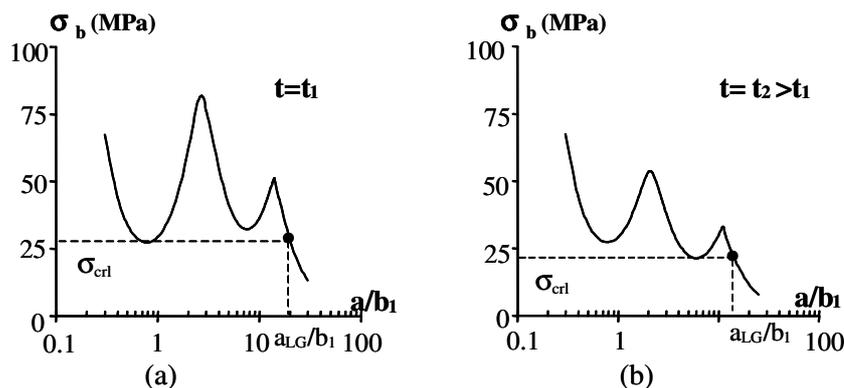


Figura 2.30: Variação de σ_b com a relação a/b_1 : (a) $t=t_1$ e (b) $t=t_2>t_1$

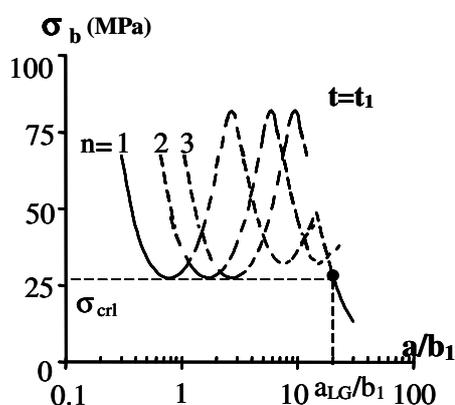


Figura 2.31: Variação de σ_b com a relação a/b_1 e n (Prola, 2001).

2.7.1. Modos Globais

Pode-se considerar que a Teoria Linear da Estabilidade teve o seu início com os trabalhos de Euler, em 1744, sobre a instabilidade global, por flexão, de colunas elásticas, simplesmente apoiadas e submetidas à compressão uniforme. Durante várias décadas, foi este o único fenômeno de instabilidade estudado, motivo pelo qual se tornou sinônimo do próprio conceito de “instabilidade”.

A determinação das cargas críticas de bifurcação de colunas, associadas à instabilidade em um modo global de flexão, foi alvo, ao longo dos anos, da atenção de um considerável número de projetistas e investigadores. Estudaram-se colunas com diferentes condições de contorno e submetidos aos diversos tipos de carregamento. Os principais resultados obtidos podem ser encontrados, por exemplo, nas obras de Timoshenko (1936) e de Bleich (1952).

Brooks e Turvey (1995) e Turvey (1996) executaram uma série de testes de flambagem com vigas de *PRF* verificando a influência da posição do carregamento no valor da carga crítica de flambagem. Estes resultados foram comparados com as fórmulas de Nethercot e Rockey (1973) e com análises de autovalores através do Método dos Elementos Finitos.

Qiao *et al* (2003) realizaram um estudo analítico e experimental sobre a instabilidade global de vigas-*I* pultrudadas em balanço. Qiao *et al* (2003) também desenvolveram fórmulas baseadas na energia potencial total para a determinação da carga crítica de bifurcação.

Para o projeto de perfis pultrudados as características dos modelos micro e macromecânico do material tais como a orientação e o volume de fibras no composto, são fatores que influenciam na determinação da flecha (deslocamento vertical do eixo) e da carga crítica de bifurcação. Davalos *et al* (1996) estudaram critérios para otimização do projeto de vigas-*I* cujas cargas críticas de bifurcação foram determinadas através do método de Rayleigh-Ritz e comparadas com o método dos elementos finitos.

2.7.2. Modo Local de Placa

Neste modo de instabilidade local, os bordos longitudinais internos (*i.e.*, que unem duas placas adjacentes) da barra permanecem indeformados. Isto significa dizer que a deformação das seções se deve à flexão das paredes internas, enquanto as paredes externas possuem um bordo livre e, conseqüentemente, sofrem deslocamentos de corpo rígido. Este fato ilustra-se na Figura 2.32, onde se observa que o *MLP* da seção em *C* representada, submetida à compressão uniforme, é induzido pela instabilidade da alma (placa mais esbelta). A deformação das mesas e reforços deve-se, unicamente, à compatibilidade que as rotações de flexão têm que satisfazer nos bordos longitudinais alma-banzo.

Segundo Prola (2001), a estabilidade da barra é condicionada pelo comportamento da placa mais susceptível à instabilidade por flexão, cujo fenômeno depende da esbeltez das várias placas da seção transversal e da distribuição das tensões atuantes. Em termos físicos, Prola (2001) diz que:

- (i) A estabilidade da barra é precipitada pela flambagem, por flexão, da placa condicionante, sendo que as placas restantes, por compatibilidade, acompanham as deformações;

- (ii) O comportamento da barra pode ser simulado ao de uma barra comprimida (total ou parcialmente) cujos bordos longitudinais estão na condição de engastamento elástico, de modo que as molas de rotação traduzem as influências das placas restantes da barra.

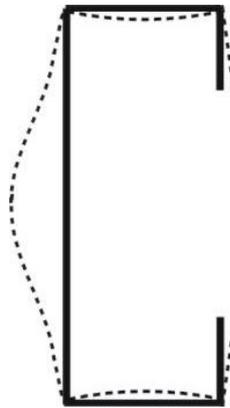


Figura 2.32: Instabilidade de uma barra em C num MLP influenciado pela alma.

A análise linear de estabilidade de uma seção, relativamente a uma placa isolada, é dificultada pela necessidade de compatibilizar as rotações que ocorrem nos bordos longitudinais. A rigor, a instabilidade da seção pode ser analisada através do comportamento de qualquer uma das suas placas, desde que se conheça o grau de restrição às rotações existentes nos bordos longitudinais da placa (*i.e.*, a rigidez das molas elásticas que modelam estas restrições). Uma abordagem conservadora é admitir que esta rigidez seja nula, o que vale dizer que todos os bordos longitudinais são simplesmente apoiados. Deste modo, a instabilidade de cada placa independe das restantes e, portanto, admite-se que a tensão de bifurcação da seção é fornecida pela placa mais esbelta.

A primeira análise sistemática e consistente de estabilidade de seções deve-se a Lundquist *et al* (1943), que utilizaram o método de distribuição de momentos para resolver o sistema de equações diferenciais de equilíbrio de seções uniformemente comprimidas. Posteriormente, Chilver (1951) validou, experimentalmente, os resultados obtidos por Lundquist *et al* (1943).

Bleich (1952) determinou expressões para tensões de bifurcação no MLP, a partir da resolução das equações diferenciais de equilíbrio relativas a cada placa, satisfazendo as condições de contorno, estáticas e cinemáticas, relativas à continuidade de deformações nos bordos longitudinais. Chilver (1953) e Bulson (1967) escreveram as

equações de equilíbrio em forma matricial, cujos coeficientes dependem, não linearmente, do parâmetro de carga (tensão). O menor valor deste parâmetro que anula o determinante da matriz fornece a tensão crítica de bifurcação da seção.

Walker (1966) estudou a estabilidade de seções em C submetidas à flexão composta, onde considerava, separadamente, os comportamentos: (i) da alma, sendo uma placa sujeita à compressão uniforme com as rotações elasticamente restringidas nos bordos longitudinais e (ii) dos banzos, sendo placas submetidas à compressão linearmente variável e com um bordo longitudinal (banzo-alma) engastado elasticamente e com o outro (banzo-reforço) articulado.

Rhodes e Harvey (1976) analisaram o comportamento de seções em U , submetidas à compressão uniforme na alma e variável nos banzos, baseados em métodos energéticos.

A partir dos avanços computacionais, tendo em vista principalmente o desenvolvimento do método dos elementos finitos (MEF), assistiu-se a uma progressiva substituição dos métodos analíticos pelos métodos numéricos. A partir da década de 1960, iniciou a generalização do uso do MEF para a resolução de problemas geometricamente não lineares, especificamente a análise linear de estabilidade de elementos estruturais, tais como os trabalhos de Gallagher e Padlog (1963), Kapur e Hantz (1966), Wittrick (1968) e Przemieniecki (1968, 1972). Chin *et al* (1993) elaboraram um elemento finito de placa fina com seis nós e trinta graus de liberdade.

A formulação e a implementação computacional de uma faixa finita geometricamente não linear nos deslocamentos de flexão, por parte de Przemieniecki (1973), contribuíram para a utilização corrente de análises da estabilidade de seções. O método das faixas finitas (MFF) foi, subsequente, utilizado por diversos pesquisadores para estudar o MLP de seções com diferentes geometrias. Neste contexto, devem ser referidos, por exemplo, os trabalhos de Graves Smith e Sridharan (1978), de Hancock (1978) e mais recentemente os trabalhos de Batista (1989), de Prola (2001) e de Nagahama (2003).

2.7.3. Modo Distorcional

Define-se por distorção a alteração da geometria original da seção transversal. No modo local de placa, por definição, está sempre garantida a conservação original dos bordos longitudinais (linhas de dobra), os quais permanecem retos ao longo do perfil,

assim como os ângulos formados entre as placas vizinhas. O modo distorcional envolve deslocamentos de flexão e de membrana e inclui deslocamento nas linhas de dobra provocando distorção na seção transversal. A flambagem distorcional de membros comprimidos envolve a rotação, em sentidos opostos, do conjunto mesa e reforço sobre a junção mesa-alma conforme mostra a Figura 2.33a. No caso de perfis submetidos à flexão pura, o modo distorcional envolve somente a rotação do conjunto mesa-reforço comprimido sobre a junção mesa-alma conforme mostra a Figura 2.33b.

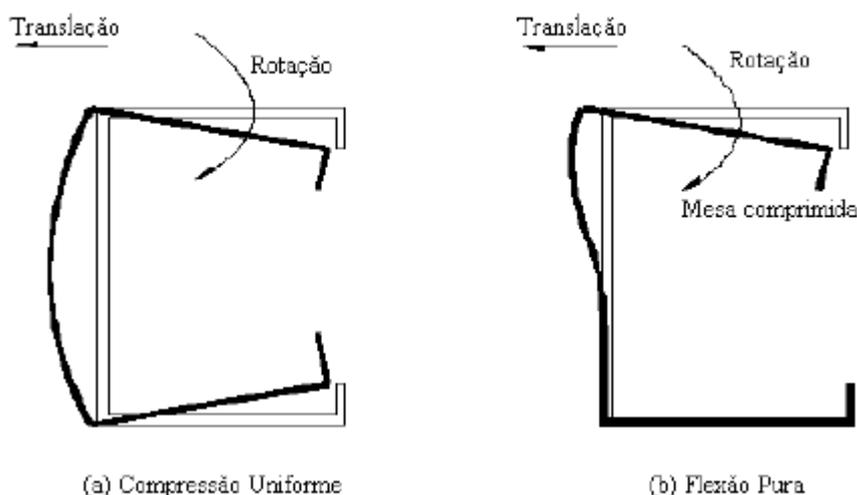


Figura 2.33: Modo Distorcional, (Hancock, 1997).

O modo distorcional teve sua primeira abordagem em 1966, mas apenas no trabalho de Hancock (1978) sobre instabilidade em vigas com seção em I , o fenômeno da flambagem distorcional voltou a ser referido como um modo de instabilidade. Três anos mais tarde Desmond *et al* (1981) atribuíram a sua ocorrência ao fato do reforço não ser suficientemente rígido (largo) para impedir o deslocamento de membrana do bordo longitudinal da placa reforçada. Uma contribuição expressiva na compreensão do fenômeno da instabilidade no modo distorcional deve-se ao trabalho, desde meados da década de 1980, por uma equipe de pesquisadores da Universidade de Sidney, Austrália, sob orientação de G. Hancock.

Hancock (1985) publicou um trabalho, analítico e experimental, sobre o comportamento de colunas de armazenamento, no qual apresentou uma caracterização detalhada do *MD*. Neste trabalho, a análise linear de estabilidade (*ALE*) das colunas é realizada por meio do *MFF*, baseado na faixa finita formulada por Plank e Wittrick (1974). O fato desta formulação incluir os deslocamentos de membrana torna possível a identificação do *MD*.

Lau e Hancock (1987) desenvolveram expressões analíticas para calcular as tensões de bifurcação no *MD* para perfis de aço formados a frio com seções em *C* e em *rack*, seções utilizadas em estruturas de armazenamento (ver Figura 2.34c), submetidas à compressão. Os autores ainda propuseram fórmulas simplificadoras que foram validadas por Papangelis e Hancock (1995) por meio do *MFF* e utilizando o programa de cálculo THIN-WALL (Centre of Advanced Structural Engineering, 1996). Hancock (1997) desenvolveu e validou fórmulas simplificadoras análogas para seções em *C* e em *rack* submetidas à flexão pura em torno do eixo de maior inércia. Estas fórmulas simplificadoras foram incorporadas na norma brasileira de perfis de aço formados a frio, NBR 14.762/2001.

Prola e Camotim (1995, 1997) e Camotim e Prola (1996a, 1996b) utilizaram o *MFF* para efetuar análises lineares de estabilidade de seções com diferentes configurações geométricas e suscetíveis de instabilizar no *MD*, tais como (ver Figura 2.34): (a) seções em *Z* com reforços inclinados, (b) seções em *S*-reforçado, (c) seções *rack* e (d) seções *sigma*. Os resultados obtidos foram utilizados para calcular estimativas da resistência última das seções (“barras curtas”), as quais foram comparadas com resultados de ensaios experimentais efetuados por Prola *et al.* (1996) e Batista *et al.* (1999). Camotim *et al.* (2000) utilizaram o *MFF* com funções “*B₃-Spline*” para estudar a influência das condições de contorno (sobretudo as relativas ao empenamento das seções de extremidade) na instabilidade distorcional de “barras curtas” com seção em *rack*.

Rogers e Schuster (1997) apresentaram um estudo comparativo da utilização de vários modelos estruturais existentes para modelar a instabilidade de seções submetidas à flexão pura e avaliar a resistência última.

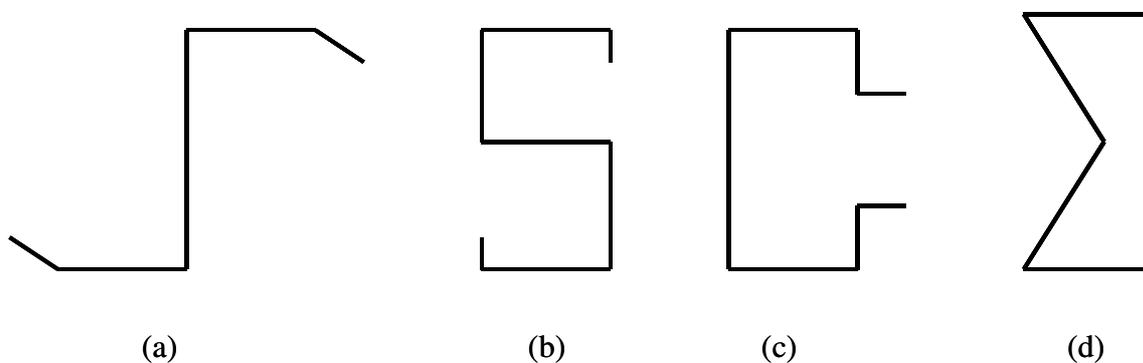


Figura 2.34: Seções transversais em: (a) *Z* com bordos inclinados; (b) *S* reforçado; (c) *rack*; (d) *sigma*.

Nos próximos capítulos, 3 e 4, apresentam-se a formulação e a implementação computacional dos métodos dos elementos finitos, *MEF*, e o das faixas finitas, *MFF*, a serem utilizados neste trabalho para a análise linear de estabilidade de perfis de *PRFV*.

As tensões críticas e os modos de instabilidade podem ser observados nos exemplos de análise de instabilidade a serem vistos no Capítulo 5.

3. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Neste capítulo apresenta-se a formulação do elemento finito de casca de quatro nós para a análise linear de estabilidade de perfis de parede fina. Nesta formulação pode-se combinar o elemento de placa com o elemento de estado plano de tensões, trabalhando-se com as resultantes de tensões deste estado. Segundo Alves Filho (2000), dentro do âmbito linear, admitindo-se que os deslocamentos sejam pequenos, as ações de flexão na chapa não afetam as ações axiais, ou seja, pode-se submeter a chapa à flexão que não surgirão forças axiais no plano médio decorrente desta solicitação.

3.1. Elemento de Estado Plano de Tensões

Os elementos planos são utilizados para modelar estruturas submetidas a estado plano de tensão ou de deformação, sendo que cada ponto do elemento pode sofrer dois deslocamentos no plano xy , u e v . A Figura 3.1 apresenta um elemento plano retangular, de lados $2a$ por $2b$, com quatro nós. O movimento dos nós do elemento pode ser descrito através das componentes de deslocamento de membrana u e v e, portanto, dois graus de liberdade por nó. Como o elemento possui quatro nós, fica no total com oito graus de liberdade.

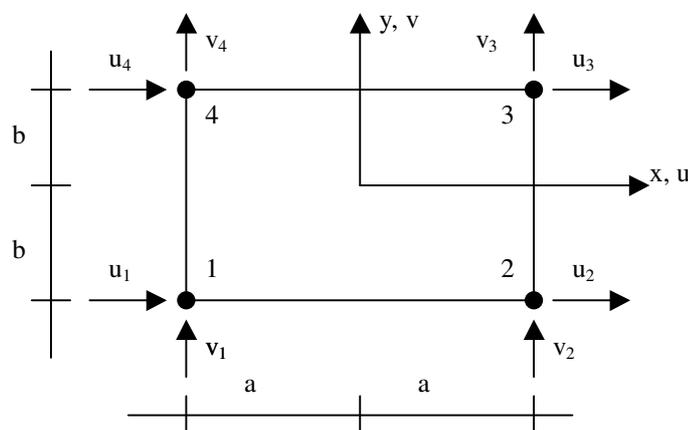


Figura 3.1: Elemento Plano – Bilinear.

O vetor de deslocamentos, o vetor de deformações específicas e o vetor de tensões no elemento são representados por:

$$\tilde{u} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} \quad \tilde{\epsilon}_m = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \tilde{\sigma}_m = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

Admitindo-se que não há deformações e nem tensões iniciais, as tensões são relacionadas com as deformações específicas por:

$$\underline{\underline{\sigma}}_m = \underline{\underline{D}}_m \underline{\underline{\varepsilon}}_m \quad (3.2)$$

onde $\underline{\underline{D}}_m$ é a matriz constitutiva generalizada de membrana que contém os coeficientes elásticos, que para materiais ortotrópicos com eixos de material 1,2 coincidindo com os eixos x,y do elemento fica sendo:

$$\underline{\underline{D}}_m = \frac{1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \begin{bmatrix} E_1 & \nu_{21}E_1 & 0 \\ \nu_{12}E_2 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12}(1-\nu_{12}\nu_{21}) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

onde:

E_1 é o módulo de elasticidade na direção das fibras;

E_2 é o módulo de elasticidade na direção perpendicular às fibras;

ν_{12} e ν_{21} são os coeficientes de Poisson maior e menor, respectivamente;

G_{12} é o módulo de cisalhamento no plano 1-2,

sendo que:

$$\nu_{21}E_1 = \nu_{12}E_2 \quad (3.4)$$

Quando os eixos 1 e 2 do material não coincidem com os eixos x e y do elemento, deve-se aplicar uma transformação de coordenadas na matriz $\underline{\underline{D}}_m$, conforme explicado no item 2.4.1.

O vetor de deslocamentos generalizados ou dos graus de liberdade de membrana num elemento plano é definido como:

$$\underline{\underline{u}}_m = \{u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4\}^T \quad (3.5)$$

Assim, os deslocamentos de membrana u e v que ocorrem na superfície média do elemento são dados por:

$$\underline{\underline{u}} = \underline{\underline{M}} \underline{\underline{u}}_m \quad (3.6)$$

ou,

$$\underline{\underline{u}} = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & M_2 & 0 & M_3 & 0 & M_4 & 0 \\ 0 & M_1 & 0 & M_2 & 0 & M_3 & 0 & M_4 \end{bmatrix} \cdot \underline{\underline{u}}_m \quad (3.7)$$

onde M_i são as funções de interpolação definidas por:

$$M_1 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{x}{a} \right) \left(1 - \frac{y}{b} \right) \quad (3.8)$$

$$M_2 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{x}{a} \right) \left(1 - \frac{y}{b} \right) \quad (3.9)$$

$$M_3 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{x}{a} \right) \left(1 + \frac{y}{b} \right) \quad (3.10)$$

$$M_4 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{x}{a} \right) \left(1 + \frac{y}{b} \right) \quad (3.11)$$

A partir das relações entre deformações específicas e deslocamentos, Timoshenko e Goodier (1980), pode-se escrever:

$$\tilde{\varepsilon}_m = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \tilde{u}_m \quad (3.12)$$

Desta forma as deformações específicas podem ser relacionadas com os deslocamentos nodais,

$$\tilde{\varepsilon}_m = \tilde{B}_m \tilde{u}_m \quad (3.13)$$

onde a matriz \tilde{B}_m é denominada de matriz de deformação específica \times deslocamentos nodais, sendo dada por:

$$\tilde{B}_m = \begin{bmatrix} \frac{\partial M_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial M_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial M_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial M_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial M_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial M_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial M_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial M_4}{\partial y} \\ \frac{\partial M_1}{\partial y} & \frac{\partial M_1}{\partial x} & \frac{\partial M_2}{\partial y} & \frac{\partial M_2}{\partial x} & \frac{\partial M_3}{\partial y} & \frac{\partial M_3}{\partial x} & \frac{\partial M_4}{\partial y} & \frac{\partial M_4}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Pode-se escrever agora o valor aproximado da energia potencial total do elemento:

$$\pi_p = \int_V \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}_m^T \tilde{D}_m \tilde{\varepsilon}_m dV - \int_V \tilde{u}_m^T \tilde{b} dV - \int_{S_\sigma} \tilde{u}_m^T \tilde{p} dA - \tilde{u}_m^T \tilde{f}_n \quad (3.15)$$

sendo que o último termo representa o potencial de realização de trabalho das forças aplicadas diretamente nos nós sobre os deslocamentos nodais, S_σ é a parte do contorno do elemento com forças de superfície, \tilde{b} e \tilde{p} são os vetores de forças de volume e superfície, respectivamente. Neste trabalho as forças de volume são consideradas nulas.

Aplicando-se a condição de estacionaridade obtém-se:

$$\delta\pi_p = \delta u_m^T \left\{ \left[\int_V \tilde{B}_m^T \tilde{D}_m \tilde{B}_m dV \right] u_m - \int_V \tilde{M}^T \tilde{b} dV - \int_{S_\sigma} \tilde{M}^T \tilde{p} dA - \tilde{f}_n \right\} = 0 \quad (3.16)$$

Como δu_m é arbitrário e $dV = t.dA = t.dxdy$ onde t é a espessura do elemento e é constante, a matriz de rigidez do elemento plano pode ser obtida a partir da expressão, (La Rovere, 2003):

$$k_0^m = \int_{-a-b}^a \int_{-a-b}^b t \tilde{B}_m^T \tilde{D}_m \tilde{B}_m dxdy \quad (3.17)$$

E o vetor de cargas consistentes do elemento, que representa as forças nodais equivalentes a cargas aplicadas dentro e na superfície do elemento, pode ser obtido por (La Rovere, 2003):

$$\tilde{f} = \int_{-a-b}^a \int_{-a-b}^b t \tilde{M}^T \tilde{b} dydx + \int_{-a-b}^a \int_{-a-b}^b \tilde{M}^T \tilde{p} dydx + \tilde{f}_n \quad (3.18)$$

Para a obtenção da matriz de rigidez e do vetor de cargas consistentes nos elementos em programas computacionais de elementos finitos, pode-se obter as expressões analíticas com o auxílio de programas de matemática simbólica (*e.g.*, *Maple*, (Waterloo, 2002)) ou por integração numérica. Neste trabalho, utiliza-se o processo numérico de Gauss e verifica-se que o esquema de integração 2×2 é suficiente para obtenção da integração exata. Porém, como se verá mais adiante, utiliza-se o esquema de integração 3×3 para a compatibilidade com o elemento de placa.

3.2. Elemento de Placa

Define-se placa como uma estrutura laminar, ou seja, um sólido em que uma das suas dimensões (*i.e.* a espessura) é muito menor do que as outras, sólido esse submetido a ações que provoquem flexão transversal ao plano definido por sua superfície média. As placas podem ser classificadas como finas, em geral para $t < 0,10L$, ou espessas, em geral para $t > 0,10L$, onde t é a espessura da placa e L , a maior dimensão

da placa. A placa fina irá sempre fletir segundo uma superfície de revolução, admitindo-se que sofrerá pequenos deslocamentos em relação à sua espessura. A teoria de placas finas fica então simplificada, podendo-se utilizar modelos matemáticos bidimensionais, enquanto que a teoria de placas espessas recai em um problema de valor de contorno tridimensional da teoria de elasticidade.

A primeira teoria de placa foi apresentada por Sophie Germain (1776-1831) na Academia de Ciências de Paris, em 1811, e suas diversas teorias se diferenciam basicamente quanto à idealização do esforço cortante. Na teoria clássica de Gustave Robert Kirchhoff (1824-1887), apresentada em 1850, considera-se inextensível a espessura e desprezam-se as deformações por esforço cortante.

Eric Reissner, entre 1945 e 1947, e R. D. Mindlin, em 1951, desenvolveram teorias de placa considerando as deformações por esforço cortante. A teoria de Reissner foi desenvolvida a partir de hipóteses mecânicas e a de Mindlin, a partir de hipóteses cinemáticas.

A teoria de Kirchhoff é assim aplicável a placas finas e a teoria de Reissner-Mindlin se aplica a placas mais espessas. Outros fatores, contudo, também estão em jogo, tais como: (i) comportamento estático ou dinâmico e (ii) placa de um único material ou em camadas de materiais distintos (*i.e.*, placa sanduíche ou laminada). A consideração das deformações de esforço cortante é acentuadamente mais importante em comportamento dinâmico e/ou em placa sanduíche. Nesta dissertação, devido à espessura fina e ao comportamento unidirecional dos perfis pultrudados, será utilizada a teoria clássica de Kirchhoff.

Os modelos matemáticos das placas são bidimensionais e guardam aproximações em relação ao modelo da elasticidade tridimensional. Contudo, tais modelos têm a vantagem de operar com um número menor de incógnitas do que este último, reduzindo o esforço computacional.

Atualmente há diversas pesquisas para o desenvolvimento de elementos finitos de placa. Hrabok e Hrudey (1984) catalogaram 88 tipos diferentes de elementos de placa baseados nas teorias de Kirchhoff e de Reissner-Mindlin. Um dos elementos finitos mais utilizados foi inicialmente desenvolvido por Adini e Clough (1960) e por Melosh (1963) conhecido na literatura como elemento *ACM*, sigla formada pelas iniciais dos nomes dos investigadores que participaram no seu desenvolvimento.

As hipóteses básicas da teoria de placa de Kirchhoff são as seguintes, (Oñate, 1995):

- i. Em todos os pontos do plano x - y , os deslocamentos longitudinais (u e v) são nulos, ou seja, estes pontos só se deslocam verticalmente;
- ii. Todos os pontos contidos em uma reta normal ao plano médio da placa possuem o mesmo deslocamento transversal w ;
- iii. A tensão normal σ_z é desprezível;
- iv. Os pontos da reta normal ao plano médio antes da deformação, permanecem sobre a reta também ortogonal à deformada do plano médio após a deformação e não sofrem variação de comprimento (Figura 3.2).

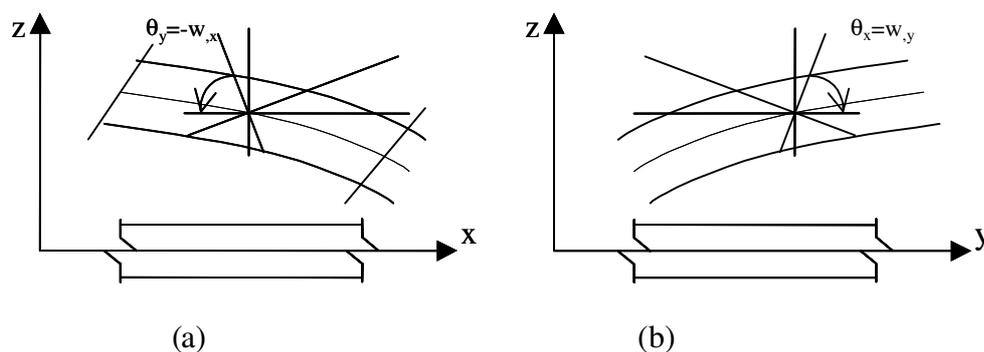


Figura 3.2: Deformação da placa de Kirchhoff: (a) paralela a xz e (b) paralela a yz .

Assim o campo de deslocamentos devido à flexão do elemento finito pode ser escrito da forma:

$$\underline{u} = \begin{Bmatrix} w(x, y) \\ \theta_x(x, y) \\ \theta_y(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w(x, y) \\ w_{,y}(x, y) \\ -w_{,x}(x, y) \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

A seguir apresenta-se a formulação para dois elementos finitos de placa.

3.2.1. Elemento ACM

Trata-se de um elemento de placa retangular de quatro nós, sendo que cada um apresenta três deslocamentos independentes, especificamente um deslocamento transversal, w , e duas rotações, θ_x e θ_y . Em cada elemento define-se desta forma um total de 12 graus de liberdade, conforme a Figura 3.3.

Deste modo, deve-se escolher uma função polinomial de deslocamentos que defina de forma única o estado de deslocamentos em todos os pontos dentro do elemento, em termos dos graus de liberdade dos nós, permitindo, a partir dos deslocamentos nodais conhecidos, obter-se o campo de deslocamentos dentro do

elemento. A função polinomial, como uma série de potências, é amplamente utilizada devido à facilidade de manipulação, limitando o número de termos em função do número de coeficientes a determinar. Assim, o campo de deslocamentos devido à flexão $u_f(x, y)$ é aproximado por um polinômio incompleto de quarto grau em x e em y , com 12 termos, (Zienkiewicz e Taylor, 1991):

$$u_f(x, y) = A \alpha \quad (3.20)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & x^3y & xy^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & x^2 & 2xy & 3y^2 & x^3 & 3xy^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x & -y & 0 & -3x^2 & -2xy & -y^2 & 0 & -3x^2y & -y^3 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$\alpha = \{\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5 \quad \alpha_6 \quad \alpha_7 \quad \alpha_8 \quad \alpha_9 \quad \alpha_{10} \quad \alpha_{11} \quad \alpha_{12}\}^T$$

Pode-se observar que o vetor gradiente do deslocamento transversal w normal ao longo dos lados do elemento é um polinômio cúbico. Como nos lados do elemento estão definidos somente dois valores de rotação normal (θ_x e θ_y), o polinômio cúbico não pode ser especificado unicamente e, em geral, ocorre uma descontinuidade de uma rotação normal entre dois elementos adjacentes. Isto indentifica o elemento *ACM* como um elemento finito incompatível e portanto não conforme (sendo classificado de conforme o elemento que é compatível e completo, ou seja atende às condições de convergência, de compatibilidade e de completude, do *MEF*).

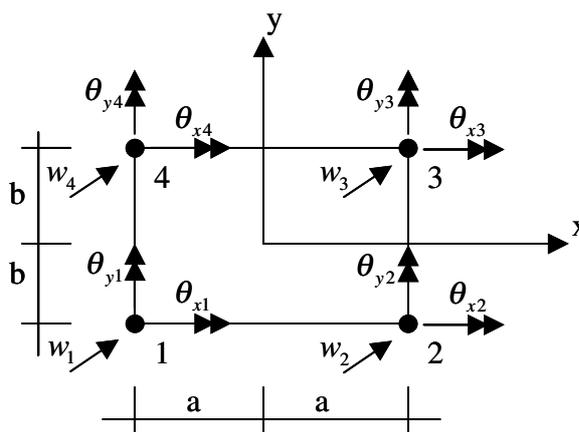


Figura 3.3: Elemento finito de placa de quatro nós

Considerando o elemento finito de placa de lados $2a$ e $2b$ conforme a Figura 3.3, as constantes α_1 a α_{12} podem ser determinadas escrevendo-se o campo de

deslocamentos (equação (3.20)) para cada nó do elemento, resultando em um sistema de 12 equações algébricas:

$$\underset{\sim}{U} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ w_3 \\ \theta_{x3} \\ \theta_{y3} \\ w_4 \\ \theta_{x4} \\ \theta_{y4} \end{Bmatrix} = \underset{\sim}{C} \underset{\sim}{\alpha} \quad (3.22)$$

em que:

$$\underset{\sim}{C} = \begin{bmatrix} 1 & -a & -b & a^2 & ab & b^2 & -a^3 & -a^2b & -ab^2 & -b^3 & a^3b & ab^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -a & -2b & 0 & a^2 & 2ab & 3b^2 & -a^3 & -3ab^2 \\ 0 & -1 & 0 & 2a & b & 0 & -3a^2 & -2ab & -b^2 & 0 & 3a^2b & b^3 \\ 1 & a & -b & a^2 & -ab & b^2 & a^3 & -a^2b & ab^2 & -b^3 & -a^3b & -ab^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a & -2b & 0 & a^2 & -2ab & 3b^2 & a^3 & 3ab^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2a & b & 0 & -3a^2 & 2ab & -b^2 & 0 & 3a^2b & b^3 \\ 1 & a & b & a^2 & ab & b^2 & a^3 & a^2b & ab^2 & b^3 & a^3b & ab^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a & 2b & 0 & a^2 & 2ab & 3b^2 & a^3 & 3ab^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2a & -b & 0 & -3a^2 & -2ab & -b^2 & 0 & -3a^2b & -b^3 \\ 1 & -a & b & a^2 & -ab & b^2 & -a^3 & a^2b & -ab^2 & b^3 & -a^3b & -ab^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -a & -2b & 0 & a^2 & -2ab & 3b^2 & -a^3 & 3ab^2 \\ 0 & -1 & 0 & 2a & -b & 0 & -3a^2 & 2ab & -b^2 & 0 & -3a^2b & -b^3 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Da equação (3.22) tem-se a expressão:

$$\underset{\sim}{\alpha} = \underset{\sim}{C}^{-1} \underset{\sim}{U} \quad (3.24)$$

a qual inserida na equação (3.20) fornece:

$$\underset{\sim}{u}_f(x, y) = \underset{\sim}{A} \underset{\sim}{C}^{-1} \underset{\sim}{U} \quad (3.25)$$

Portanto a matriz de interpolação fica sendo:

$$\underset{\sim}{N} = \underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{C}^{-1} \quad (3.26).$$

a qual pode ser encontrada com auxílio, por exemplo, do programa computacional *Maple*, (Waterloo, 2002).

Sendo u e v os deslocamentos de um ponto qualquer fora da superfície média da placa, paralelos respectivamente aos eixos x e y , tem-se que:

$$\begin{aligned} u &= z\theta_y = -z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v &= -z\theta_x = -z \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.27)$$

onde z é a distância do ponto à superfície média do elemento (positivo para cima).

Considerando-se pequenos deslocamentos e deformações específicas nas relações deformações-deslocamentos da teoria da elasticidade, e introduzindo-se nestas o campo de deslocamentos da placa (equação (3.27)), tem-se que:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Ou, em forma vetorial:

$$\underline{\varepsilon}_f = -z \underline{\varepsilon}_0^f \quad (3.29)$$

onde $\underline{\varepsilon}_0^f$ é o vetor de deformações específicas generalizadas de flexão:

$$\underline{\varepsilon}_0^f = \begin{Bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ 2w_{,xy} \end{Bmatrix} \quad (3.30)$$

As tensões generalizadas resultantes na placa, M_x , M_y e M_{xy} , ou seja, respectivamente, os momentos fletores em relação aos planos xz , yz e o momento torsor, por unidade de comprimento, são definidas por:

$$\begin{aligned}
M_x &= - \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz \\
M_y &= - \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z dz \\
M_{xy} &= - \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z dz
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Desta forma o vetor de tensões generalizadas resultantes pode ser relacionado com o vetor de deformações específicas generalizadas:

$$\bar{\sigma}_f = \bar{D}_f \bar{\varepsilon}_0^f \tag{3.32}$$

onde o vetor de tensões generalizadas é definido por:

$$\bar{\sigma}_f = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \tag{3.33}$$

E \bar{D}_f é a matriz constitutiva generalizada de flexão que contém os coeficientes elásticos, que para materiais ortotrópicos com eixos de material 1,2 coincidindo com os eixos x, y do elemento fica sendo:

$$\bar{D}_f = \frac{t^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})} \begin{bmatrix} E_1 & \nu_{21}E_1 & 0 \\ \nu_{12}E_2 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12}(1-\nu_{12}\nu_{21}) \end{bmatrix} \tag{3.34}$$

sendo que

$$\nu_{21}E_1 = \nu_{12}E_2 \tag{3.35}$$

onde t é a espessura da placa e as demais constantes foram definidas anteriormente.

Quando os eixos 1 e 2 do material não coincidem com os eixos x e y do elemento, deve-se aplicar uma transformação de coordenadas na matriz \bar{D}_f , conforme explicado no item 2.4.1.

A partir das relações deformação específica \times deslocamentos (equação (3.28)), pode-se escrever matricialmente a relação entre o vetor de deformações específicas generalizadas e o vetor de deslocamentos nodais do elemento:

$$\bar{\varepsilon}_f = \bar{B}_f u_f \tag{3.36}$$

onde a matriz \bar{B} pode ser facilmente encontrada a partir da matriz de funções de interpolação:

$$\bar{B}_f = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 N}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.37)$$

Aplicando-se o Princípio da Energia Potencial Total (*PEPT*) ao elemento finito de placa, obtém-se a matriz de rigidez de flexão do elemento (k_0^f):

$$k_0^f = \int_{-a}^a \int_{-b}^b \bar{B}_f^T \bar{D}_f \bar{B}_f dx dy \quad (3.38)$$

O cálculo do vetor de forças depende da forma com que os carregamentos estão aplicados na estrutura. No caso de forças ou momentos concentrados aplicados diretamente nos nós da estrutura, basta aplicar o valor equivalente na devida posição dentro do vetor de forças.

Já no caso de forças distribuídas aplicadas, é necessário fazer a integração dentro de cada elemento e posteriormente sobrepor essas cargas ao vetor de forças concentradas nos nós. O vetor de cargas distribuídas fica assim definido:

$$f_b = \int_{-a}^a \int_{-b}^b N^T p dy dx \quad (3.39)$$

onde p representa as forças distribuídas por unidade de área aplicada perpendicularmente ao elemento.

E finalmente o vetor de forças para o elemento de placa fica definido como sendo:

$$f = f_n + f_b \quad (3.40)$$

em que f_n é o vetor de cargas concentradas nos nós do elemento de placa.

O vetor de forças global da estrutura é formado levando-se em conta a contribuição dos vetores de força de cada elemento e a relação entre os graus de liberdade dos nós no elemento e na estrutura. Quando os eixos xy do elemento não coincidem com os eixos globais da estrutura, deve-se aplicar uma transformação de

coordenadas, tanto para a matriz de rigidez como para o vetor de cargas consistentes, conforme será visto mais adiante no item 3.4.

3.2.2. Elemento *DKQ*

Um elemento conforme muito eficiente foi desenvolvido por Batoz e Tahar (1982) baseado na Teoria Discreta de Kirchhoff (*DKT – Discrete Kirchhoff Theory*). Inicialmente foi desenvolvido um elemento triangular, Batoz *et al* (1980), e posteriormente o elemento quadrilátero (*DKQ - discrete Kirchhoff quadrilateral*). Este último é o elemento utilizado no programa SAP-2000, (Computer and Structures, 1997).

A formulação do elemento *DKQ* é baseada na aplicação da Teoria de Kirchhoff, na qual se despreza a deformação devido ao cisalhamento, em pontos discretos do elemento, no caso ao longo dos lados. A energia de deformação fica sendo:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \underline{\chi}^T \underline{\bar{D}}_f \underline{\chi} dV \quad (3.41)$$

onde $\underline{\bar{D}}_f$ é a matriz constitutiva generalizada de flexão (ver equação (3.34)) e $\underline{\chi}$ as curvaturas generalizadas, dadas por:

$$\underline{\chi} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{array} \right\} \quad (3.42)$$

em que β_x e β_y são as rotações do vetor normal aos planos indeformados da placa paralelos aos planos x - z e y - z , respectivamente. Deve-se notar que a energia de deformação depende unicamente das rotações β_x e β_y sendo funções de continuidade C^0 .

É necessário relacionar as rotações β_x e β_y com o deslocamento transversal w de tal maneira que o elemento formulado apresente as características da teoria de Kirchhoff, *i.e.*,

- (i) O elemento possui quatro nós, sendo que cada nó está associado a três graus de liberdade: um deslocamento transversal w e duas rotações, $\theta_x = \partial w / \partial y$ e $\theta_y = -\partial w / \partial x$;

- (ii) As hipóteses de Kirchhoff devem ser verificadas ao longo de todo o contorno do elemento de modo a satisfazer as condições de contorno.

A formulação do elemento DKQ se baseia nas seguintes considerações:

- (i) As funções β_x e β_y são definidas por polinômios cúbicos incompletos:

$$\begin{aligned}\beta_x &= \sum_{i=1}^8 N_i \beta_{xi} \\ \beta_y &= \sum_{i=1}^8 N_i \beta_{yi}\end{aligned}\quad (3.43)$$

onde as funções de forma N_i são as funções do elemento *serendipity* de oito nós, (Cook *et al.*, 1989). β_{xi} e β_{yi} são variáveis nodais transitórias afetadas pelos nós do canto (externos) e nós intermediários (internos) dos lados do elemento DKQ (ver Figura 3.4);

- (ii) As hipóteses de Kirchhoff são introduzidas:

- (ii₁) nos nós dos cantos (externos)

$$\begin{Bmatrix} \beta_{xi} + w_{,xi} \\ \beta_{yi} + w_{,yi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{para } i=1,2,3,4 \quad (3.44)$$

- (ii₂) nos nós intermediários (internos)

$$\beta_{sk} + w_{,sk} = 0 \quad \text{para } k=5,6,7,8 \quad (3.45)$$

onde s representa o eixo paralelo ao lado do elemento.

- (iii) $w_{,sk}$ é a derivada do deslocamento transversal w em relação à s no nó intermediário k , onde w é definida pela expressão cúbica ao longo de cada lado do elemento, *i.e.*,

$$w_{,sk} = -\frac{3}{2l_{ij}}(w_i - w_j) - \frac{1}{4}(w_{,si} + w_{,sj}) \quad (3.46)$$

onde $k=5,6,7,8$ é o nó intermediário dos lados $ij = \overline{12}, \overline{23}, \overline{34}, \overline{41}$, respectivamente, e l_{ij} é o comprimento do lado ij (ver Figura 3.4).

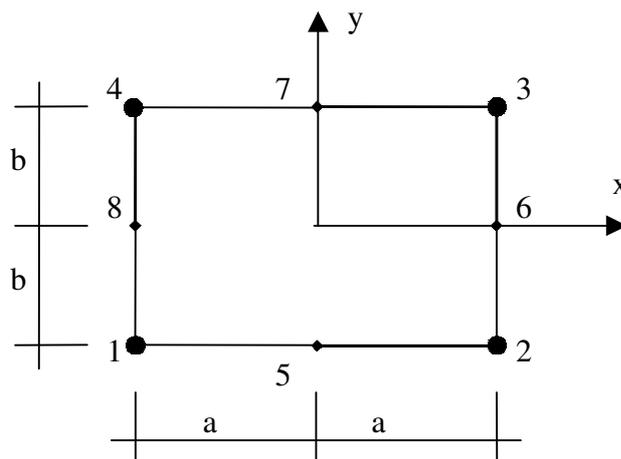


Figura 3.4: Geometria do elemento *DKQ*.

Nota-se ainda que:

- (i) O deslocamento w não é definido no interior do elemento e varia independentemente ao longo do lado do elemento;
- (ii) As hipóteses de Kirchhoff são satisfeitas ao longo de todo o contorno do elemento, pois $w_{,s}$ e β_s são expressões quadráticas ao longo dos lados;
- (iii) O elemento *DKQ* apresenta convergência em elementos de placa fina em que o efeito de cisalhamento transversal pode ser desprezado;
- (iv) A teoria clássica de vigas pode ser obtida com o elemento *DKQ* se os nós 3 e 4 forem eliminados;
- (v) O elemento *DKQ* é compatível ao longo de todo o contorno.

Os graus de liberdade de flexão do elemento são:

$$\underset{\sim}{u}_f = \{w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad w_2 \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad w_3 \quad \theta_{x3} \quad \theta_{y3} \quad w_4 \quad \theta_{x4} \quad \theta_{y4}\}^T \quad (3.47)$$

onde $\theta_{xi} = w_{i,y}$ e $\theta_{yi} = -w_{i,x}$ para $i = 1, 2, 3, 4$.

As rotações β_x e β_y podem ser relacionadas com os graus de liberdade do elemento *DKQ* usando-se as equações (3.43) a (3.47):

$$\beta_x = \underset{\sim}{H}^{xT} \underset{\sim}{u}_f \quad (3.48)$$

$$\beta_y = \underset{\sim}{H}^{yT} \underset{\sim}{u}_f \quad (3.49)$$

sendo:

$$\underline{H}^x = \{H_1^x \dots H_{12}^x\} \quad (3.50)$$

$$\underline{H}^y = \{H_1^y \dots H_{12}^y\}$$

onde,

$$H_1^x = \frac{3}{2}(a_5 N_5 - a_8 N_8) \quad (3.51)$$

$$H_2^x = b_5 N_5 + b_8 N_8 \quad (3.52)$$

$$H_3^x = N_1 - c_5 N_5 - c_8 N_8 \quad (3.53)$$

$$H_4^x = \frac{3}{2}(a_6 N_6 - a_5 N_5) \quad (3.54)$$

$$H_5^x = b_6 N_6 + b_5 N_5 \quad (3.55)$$

$$H_6^x = N_2 - c_6 N_6 - c_5 N_5 \quad (3.56)$$

$$H_7^x = \frac{3}{2}(a_7 N_7 - a_6 N_6) \quad (3.57)$$

$$H_8^x = b_7 N_7 + b_6 N_6 \quad (3.58)$$

$$H_9^x = N_3 - c_7 N_7 - c_6 N_6 \quad (3.59)$$

$$H_{10}^x = \frac{3}{2}(a_8 N_8 - a_7 N_7) \quad (3.60)$$

$$H_{11}^x = b_8 N_8 + b_7 N_7 \quad (3.61)$$

$$H_{12}^x = N_4 - c_8 N_8 - c_7 N_7 \quad (3.62)$$

$$H_1^y = \frac{3}{2}(d_5 N_5 - d_8 N_8) \quad (3.63)$$

$$H_2^y = -N_1 + e_5 N_5 + e_8 N_8 \quad (3.64)$$

$$H_3^y = -b_5 N_5 - b_8 N_8 \quad (3.65)$$

$$H_4^y = \frac{3}{2}(d_6 N_6 - d_5 N_5) \quad (3.66)$$

$$H_5^y = -N_2 + e_6 N_6 + e_5 N_5 \quad (3.67)$$

$$H_6^y = -b_6 N_6 - b_5 N_5 \quad (3.68)$$

$$H_7^y = \frac{3}{2}(d_7 N_7 - d_6 N_6) \quad (3.69)$$

$$H_8^y = -N_3 + e_7 N_7 + e_6 N_6 \quad (3.70)$$

$$H_9^y = -b_7 N_7 - b_6 N_6 \quad (3.71)$$

$$H_{10}^y = \frac{3}{2} (d_8 N_8 - d_7 N_7) \quad (3.72)$$

$$H_{11}^y = -N_4 + e_8 N_8 + e_7 N_7 \quad (3.73)$$

$$H_{12}^y = -b_8 N_8 - b_7 N_7 \quad (3.74)$$

onde

$$a_k = -\frac{x_{ij}}{l_{ij}^2} \quad b_k = \frac{3x_{ij}y_{ij}}{4l_{ij}^2}$$

$$c_k = \frac{\frac{x_{ij}^2}{4} - \frac{y_{ij}^2}{2}}{l_{ij}^2} \quad d_k = -\frac{y_{ij}}{l_{ij}^2} \quad (3.75)$$

$$e_k = \frac{\frac{y_{ij}^2}{4} - \frac{x_{ij}^2}{2}}{l_{ij}^2}$$

sendo $k = 5, 6, 7, 8$ para os lados $ij = \overline{12}, \overline{23}, \overline{34}, \overline{41}$, onde $x_{ij} = x_i - x_j$, $y_{ij} = y_i - y_j$ e $l_{ij}^2 = x_{ij}^2 + y_{ij}^2$. As funções N_i são as funções de forma do elemento *serendipity* de 8 nós:

$$N_1 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) - \frac{1}{2} N_5 - \frac{1}{2} N_8 \quad (3.76)$$

$$N_2 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) - \frac{1}{2} N_5 - \frac{1}{2} N_6 \quad (3.77)$$

$$N_3 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{x}{a}\right) \left(1 + \frac{y}{b}\right) - \frac{1}{2} N_7 - \frac{1}{2} N_6 \quad (3.78)$$

$$N_4 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 + \frac{y}{b}\right) - \frac{1}{2} N_7 - \frac{1}{2} N_8 \quad (3.79)$$

$$N_5 = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right] \left[1 - \frac{y}{b}\right] \quad (3.80)$$

$$N_6 = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{x}{a}\right] \left[1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2\right] \quad (3.81)$$

$$N_7 = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right] \left[1 + \frac{y}{b} \right] \quad (3.82)$$

$$N_8 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{x}{a} \right] \left[1 - \left(\frac{y}{b} \right)^2 \right] \quad (3.83)$$

A partir das equações (3.42), (3.48) e (3.49) pode-se escrever:

$$\underset{\sim}{\chi} = \underset{\sim}{B}_f \underset{\sim}{u}_f \quad (3.84)$$

onde

$$\underset{\sim}{B}_f = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial H^{x^T}}{\partial x} \\ \frac{\partial H^{y^T}}{\partial y} \\ \frac{\partial H^{x^T}}{\partial y} + \frac{\partial H^{y^T}}{\partial x} \end{array} \right\} \quad (3.85)$$

Assim, pode-se obter a matriz de rigidez de flexão do elemento DKQ :

$$\underset{\sim}{k}_0^f = \int_{-a}^a \int_{-b}^b \underset{\sim}{B}_f^T \underset{\sim}{D}_f \underset{\sim}{B}_f dx dy \quad (3.86)$$

A matriz de rigidez pode ser integrada numericamente através da integração de Gauss, cujo esquema 3×3 é teoricamente necessário para a integração exata em um elemento retangular.

A energia potencial externa para uma carga uniformemente distribuída de intensidade p_z sobre o elemento é definida como:

$$W = p_z \int_{-a}^a \int_{-b}^b w dy dx = \underset{\sim}{u}_f^T \underset{\sim}{f} \quad (3.87)$$

Como o deslocamento transversal w não é explícito na formulação do elemento DKQ , costuma-se adotar um vetor de cargas consistente simplificado, (Batoz e Tahar, 1982):

$$\underset{\sim}{f} = p_x \left\{ \frac{A}{4} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{A}{4} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{A}{4} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{A}{4} \quad 0 \quad 0 \right\}^T \quad (3.88)$$

onde A é a área do elemento.

3.3. Elemento de Casca

Pode-se tratar a formulação do elemento de casca plana através do comportamento físico do trabalho da chapa em flexão juntamente com a ação de forças planas atuantes na sua superfície, por intermédio de dois fenômenos independentes associados às componentes de rigidez que o elemento apresenta: (i) rigidez à ação de forças agindo paralelamente ao plano médio, *i.e.* Estado Plano de Tensões, e (ii) rigidez à ação de cargas laterais, traduzindo o comportamento de placa.

A Figura 3.5 representa a idéia de superposição dos elementos finitos de Estado Plano de Tensões e de Placa na formação do elemento finito de casca plana. Assim, o elemento de casca de quatro nós possui cinco graus de liberdade por nó: (i) duas translações no plano xy , u e v ; (ii) uma translação vertical, w ; (iii) duas rotações θ_x e θ_y , totalizando 20 graus de liberdade.

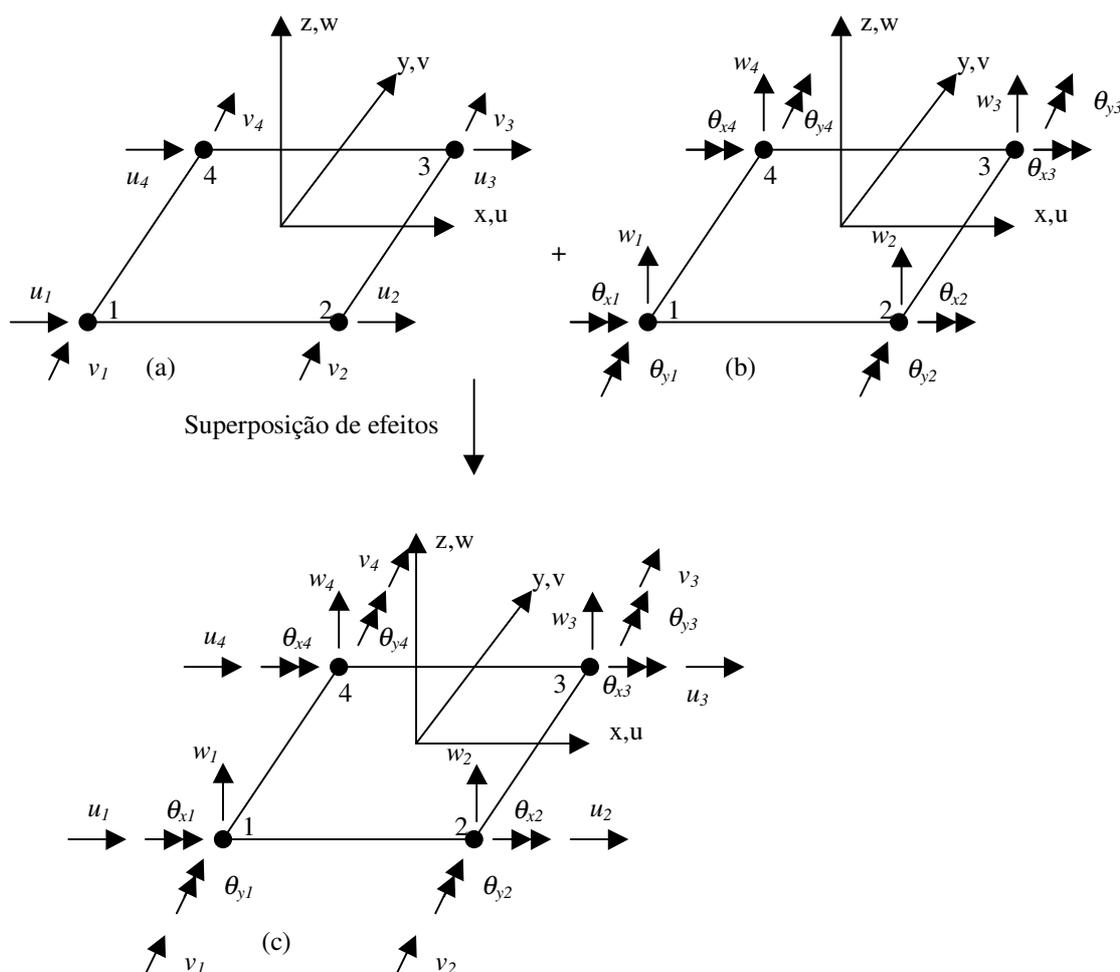


Figura 3.5: Elementos Finitos: (a) Estado Plano de Tensões; (b) Placa; (c) Casca.

Desta forma, a partir das equações (3.5) e (3.47), o vetor dos deslocamentos generalizados ou dos graus de liberdade do elemento de casca é dado por:

$$\underline{u} = \{u_1 \ v_1 \ w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ u_3 \ v_3 \ w_3 \ \theta_{x3} \ \theta_{y3} \ u_4 \ v_4 \ w_4 \ \theta_{x4} \ \theta_{y4}\}^T \quad (3.89)$$

Das equações (3.13) e (3.84), as relações das tensões generalizadas de membrana e de flexão (curvaturas) podem ser reescritas para o elemento de casca como sendo:

$$\underline{\varepsilon}_m = \underline{B}_0^m \underline{u} \quad (3.90)$$

$$\underline{\chi} = \underline{B}_0^f \underline{u} \quad (3.91)$$

onde a matriz de deformação de membrana para elementos de casca é dada por:

$$\underline{B}_0^m = \begin{bmatrix} \frac{\partial M_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial M_2}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial M_3}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial M_4}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial M_1}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial M_2}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial M_3}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial M_4}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial M_1}{\partial y} & \frac{\partial M_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial M_2}{\partial y} & \frac{\partial M_2}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial M_3}{\partial y} & \frac{\partial M_3}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial M_4}{\partial y} & \frac{\partial M_4}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

e a matriz de deformações de flexão para o elemento finito de casca baseado no elemento ACM é dada por:

$$\underline{B}_0^f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N_2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N_3}{\partial x^2} & 0 & 0 & \frac{\partial^2 N_4}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N_5}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N_6}{\partial x^2} \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 N_1}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 N_2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 N_3}{\partial y^2} & 0 & 0 & \frac{\partial^2 N_4}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 N_5}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 N_6}{\partial y^2} \\ 0 & 0 & 2\frac{\partial^2 N_1}{\partial x \partial y} & 2\frac{\partial^2 N_2}{\partial x \partial y} & 2\frac{\partial^2 N_3}{\partial x \partial y} & 0 & 0 & 2\frac{\partial^2 N_4}{\partial x \partial y} & 2\frac{\partial^2 N_5}{\partial x \partial y} & 2\frac{\partial^2 N_6}{\partial x \partial y} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 N_7}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N_8}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N_9}{\partial x^2} & 0 & 0 & \frac{\partial^2 N_{10}}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N_{11}}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N_{12}}{\partial x^2} \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 N_7}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 N_8}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 N_9}{\partial y^2} & 0 & 0 & \frac{\partial^2 N_{10}}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 N_{11}}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 N_{12}}{\partial y^2} \\ 0 & 0 & 2\frac{\partial^2 N_7}{\partial x \partial y} & 2\frac{\partial^2 N_8}{\partial x \partial y} & 2\frac{\partial^2 N_9}{\partial x \partial y} & 0 & 0 & 2\frac{\partial^2 N_{10}}{\partial x \partial y} & 2\frac{\partial^2 N_{11}}{\partial x \partial y} & 2\frac{\partial^2 N_{12}}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

onde N_i são as funções de interpolação do elemento finito de placa ACM dadas na equação (3.26).

A matriz de deformações de flexão para o elemento finito de casca baseado no elemento DKQ é dada por:

$$B_0^f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial H_1^x}{\partial H_1^x} & \frac{\partial H_1^y}{\partial H_1^y} & \frac{\partial H_1^y}{\partial H_1^x} & \frac{\partial H_1^x}{\partial H_1^y} \\ \frac{\partial x}{\partial H_2^x} & \frac{\partial y}{\partial H_2^y} & \frac{\partial x}{\partial H_2^y} & \frac{\partial y}{\partial H_2^x} \\ \frac{\partial x}{\partial H_3^x} & \frac{\partial y}{\partial H_3^y} & \frac{\partial x}{\partial H_3^y} & \frac{\partial y}{\partial H_3^x} \\ \frac{\partial x}{\partial H_4^x} & \frac{\partial y}{\partial H_4^y} & \frac{\partial x}{\partial H_4^y} & \frac{\partial y}{\partial H_4^x} \\ \frac{\partial x}{\partial H_5^x} & \frac{\partial y}{\partial H_5^y} & \frac{\partial x}{\partial H_5^y} & \frac{\partial y}{\partial H_5^x} \\ \frac{\partial x}{\partial H_6^x} & \frac{\partial y}{\partial H_6^y} & \frac{\partial x}{\partial H_6^y} & \frac{\partial y}{\partial H_6^x} \\ \frac{\partial x}{\partial H_7^x} & \frac{\partial y}{\partial H_7^y} & \frac{\partial x}{\partial H_7^y} & \frac{\partial y}{\partial H_7^x} \\ \frac{\partial x}{\partial H_8^x} & \frac{\partial y}{\partial H_8^y} & \frac{\partial x}{\partial H_8^y} & \frac{\partial y}{\partial H_8^x} \\ \frac{\partial x}{\partial H_9^x} & \frac{\partial y}{\partial H_9^y} & \frac{\partial x}{\partial H_9^y} & \frac{\partial y}{\partial H_9^x} \\ \frac{\partial x}{\partial H_{10}^x} & \frac{\partial y}{\partial H_{10}^y} & \frac{\partial x}{\partial H_{10}^y} & \frac{\partial y}{\partial H_{10}^x} \\ \frac{\partial x}{\partial H_{11}^x} & \frac{\partial y}{\partial H_{11}^y} & \frac{\partial x}{\partial H_{11}^y} & \frac{\partial y}{\partial H_{11}^x} \\ \frac{\partial x}{\partial H_{12}^x} & \frac{\partial y}{\partial H_{12}^y} & \frac{\partial x}{\partial H_{12}^y} & \frac{\partial y}{\partial H_{12}^x} \\ \frac{\partial x}{\partial H_{13}^x} & \frac{\partial y}{\partial H_{13}^y} & \frac{\partial x}{\partial H_{13}^y} & \frac{\partial y}{\partial H_{13}^x} \end{bmatrix}^T \quad (3.94)$$

A partir do princípio da superposição de efeitos, a matriz de rigidez do elemento de casca pode ser obtida como sendo:

$$k_0 = k_0^m + k_0^f \quad (3.95)$$

onde

$$k_0^m = \int_{-a}^a \int_{-b}^b t B_0^{mT} D_m B_0^m dy dx \quad (3.96)$$

e

$$\tilde{k}_0^f = \int_{-a-b}^a \int_{-a-b}^b \tilde{B}_0^{fT} \tilde{D}_f \tilde{B}_0^f dydx \quad (3.97)$$

3.4. Transformação de Coordenadas

As matrizes de rigidez estabelecidas nos itens anteriores estão referenciadas no sistema de coordenadas locais x , y e z de cada elemento finito. Para escrever as equações da estrutura, referenciada a um sistema de coordenadas globais designado por X , Y e Z , deve-se proceder a uma transformação de coordenadas, isto é, escrever as equações relativas a cada elemento finito no sistema global.

Partindo do princípio que cada elemento de quatro nós está contido em um único plano pode-se obter, através das coordenadas nodais do elemento e de relações geométricas, as coordenadas do vetor normal ao plano que contém o elemento. Deste modo fica estabelecido o sistema de coordenadas local (x , y e z) de cada elemento, conforme a Figura 3.6.

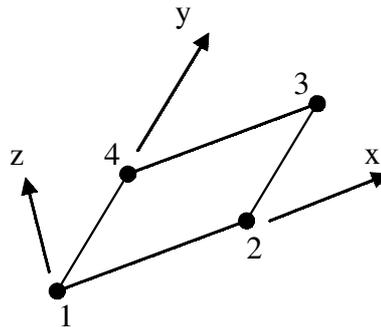


Figura 3.6: Representação do elemento finito de casca no sistema local.

A transformação de coordenadas entre os sistemas fica estabelecida através da matriz de rotações definida por:

$$\tilde{r} = \begin{bmatrix} \cos(x, X) & \cos(x, Y) & \cos(x, Z) \\ \cos(y, X) & \cos(y, Y) & \cos(y, Z) \\ \cos(z, X) & \cos(z, Y) & \cos(z, Z) \end{bmatrix} \quad (3.98)$$

onde $\cos(p, q)$ representa o co-seno do ângulo formado entre os vetores p e q (vetores unitários das direções dos eixos).

Para que haja compatibilização entre as rotações de dois elementos adjacentes não co-planares, como por exemplo, na junção da alma e da mesa de um perfil, incluiu-

se um sexto grau de liberdade θ_z em cada nó com rigidez nula, totalizando 24 graus de liberdade no elemento (três translações e três rotações). Desta forma o vetor de deslocamentos generalizados do elemento de casca, no sistema local, é dado por:

$$\underline{u} = \{u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad \theta_{z1} \quad \dots \quad u_4 \quad v_4 \quad w_4 \quad \theta_{x4} \quad \theta_{y4} \quad \theta_{z4}\}^T \quad (3.99)$$

E no sistema global:

$$\underline{U} = \{U_1 \quad V_1 \quad W_1 \quad \Theta_{x1} \quad \Theta_{y1} \quad \Theta_{z1} \quad \dots \quad U_4 \quad V_4 \quad W_4 \quad \Theta_{x4} \quad \Theta_{y4} \quad \Theta_{z4}\}^T \quad (3.100)$$

Assim a transformação de coordenadas pode ser expressa matricialmente por:

$$\underline{u} = \underline{R} \underline{U} \quad (3.101)$$

em que:

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} r & & & 0 \\ & r & & \\ & & r & \\ 0 & & & r \end{bmatrix} \quad (3.102)$$

A matriz de rigidez de cada elemento no sistema global pode ser obtida através da expressão, (Cook *et al*, 1989):

$$\underline{K}_0 = \underline{R}^T \underline{k}_0 \underline{R} \quad (3.103)$$

E o vetor de cargas consistentes de cada elemento no sistema global pode ser obtido por:

$$\underline{F} = \underline{R}^T \underline{f} \quad (3.104)$$

3.5. Cálculo dos Deslocamentos e Tensões.

Determinadas as matrizes de rigidez elásticas e os vetores de cargas consistentes dos elementos *ACM* ou *DKQ* no sistema global da estrutura, e através da relação entre os graus de liberdade do elemento e os graus de liberdade da estrutura (matriz de incidências nodais), define-se a matriz de rigidez global e o vetor de cargas consistentes da estrutura. Portanto, os deslocamentos nodais podem ser obtidos através da solução do seguinte sistema de equações lineares:

$$\underline{K}_0 \underline{U} = \underline{F} \quad (3.105)$$

onde \tilde{K}_0 é a matriz de rigidez (elástica) global da estrutura e \tilde{F} é a soma do vetor de cargas nodais aplicadas com o vetor de cargas consistentes (equivalente às cargas distribuídas nos elementos) no sistema global.

Obtidos os deslocamentos nodais (\tilde{U}), por meio da equação (3.101) determinam-se os deslocamentos de cada elemento no sistema local. A partir dos deslocamentos nodais pode-se calcular as tensões de membrana ($\tilde{\sigma}_m$) através das equações:

$$\tilde{\sigma}_m = \int_{-a}^a \int_{-b}^b \tilde{D}_m \tilde{B}_m \tilde{u}_m dx dy \quad (3.106)$$

onde \tilde{D}_m é a matriz constitutiva de membrana, \tilde{B}_m é a matriz de deformações de membrana e \tilde{u}_m é o vetor de deslocamentos generalizados de membrana no sistema local.

Analogamente as tensões de flexão ($\tilde{\sigma}_f$) são definidas por:

$$\tilde{\sigma}_f = \int_{-a}^a \int_{-b}^b \tilde{D}_f \tilde{B}_f \tilde{u}_f dx dy \quad (3.107)$$

onde \tilde{D}_f é a matriz constitutiva de flexão, \tilde{B}_f é a matriz de deformações de flexão e \tilde{u}_f é o vetor de deslocamentos generalizados de flexão no sistema local.

3.6. Não Linearidade Geométrica

A partir do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) chega-se à equação de equilíbrio de forças de um elemento finito (Zienkiewicz e Taylor, 1991):

$$\tilde{\psi} = \int_V \tilde{B}^T \tilde{\sigma} dV - \tilde{f} = 0 \quad (3.108)$$

em que (i) \tilde{f} é o vetor de forças externas, (ii) $\int_V \tilde{B}^T \tilde{\sigma} dV$ é o vetor de forças internas e

(iii) $\tilde{\psi}$ é o vetor de forças residuais que deve se anular ou ser menor do que uma tolerância, na configuração de equilíbrio do elemento finito.

Sabendo-se que:

$$d \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\bar{B}}} d \underline{\underline{u}} \quad (3.109)$$

e

$$\underline{\underline{\bar{B}}} = \underline{\underline{B}}_0 + \underline{\underline{B}}_{NL}(\underline{\underline{u}}) \quad (3.110)$$

onde $\underline{\underline{\bar{B}}}$ é a matriz que relaciona o incremento de deformações específicas com o incremento de deslocamentos nodais, considerando grandes deslocamentos, composta de duas parcelas: (i) a parcela $\underline{\underline{B}}_0$ como sendo a mesma matriz utilizada em análises lineares e (ii) a parcela $\underline{\underline{B}}_{NL}$ que depende dos deslocamentos nodais.

Para material elástico linear, as relações constitutivas se escrevem:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{D}} \left(\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}_0 \right) + \underline{\underline{\sigma}}_0 \quad (3.111)$$

em que (i) $\underline{\underline{D}}$ é a matriz constitutiva do material, (ii) $\underline{\underline{\varepsilon}}_0$ é o vetor de deformações específicas iniciais e (iii) $\underline{\underline{\sigma}}_0$ é o vetor de tensões iniciais.

Para se encontrar a relação entre $d \underline{\underline{\psi}}$ e $d \underline{\underline{u}}$, faz-se a primeira variação de $\underline{\underline{\psi}}$ em relação a $\underline{\underline{u}}$:

$$d \underline{\underline{\psi}} = \frac{\partial \underline{\underline{\psi}}}{\partial \underline{\underline{\bar{B}}}} d \underline{\underline{\bar{B}}} + \frac{\partial \underline{\underline{\psi}}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} d \underline{\underline{\sigma}} = d \underline{\underline{\bar{B}}}^T \frac{\partial \underline{\underline{\psi}}}{\partial \underline{\underline{\bar{B}}}^T} + \frac{\partial \underline{\underline{\psi}}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} d \underline{\underline{\sigma}} \quad (3.112)$$

Substituindo-se (3.112) em (3.108) obtém-se:

$$d \underline{\underline{\psi}} = \int_V d \underline{\underline{\bar{B}}}^T \underline{\underline{\sigma}} dV + \int_V \underline{\underline{\bar{B}}}^T d \underline{\underline{\sigma}} dV = \underline{\underline{k}}^t d \underline{\underline{u}} \quad (3.113)$$

onde $\underline{\underline{k}}^t$ é a matriz de rigidez tangente do elemento.

A partir de (3.109) e (3.111) tem-se que:

$$d \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{D}} d \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{\bar{B}}} d \underline{\underline{u}} \quad (3.114)$$

E a partir de (3.110) obtém-se:

$$d \underline{\underline{\bar{B}}} = d \underline{\underline{B}}_{NL} \quad (3.115)$$

Substituindo-se (3.114) e (3.115) em (3.113) obtém-se:

$$d\tilde{\psi} = \tilde{k}_\sigma d\tilde{u} + \tilde{k} d\tilde{u} = \tilde{k}' d\tilde{u} \quad (3.116)$$

onde \tilde{k}_σ é conhecida como matriz de tensões iniciais, também conhecida como matriz geométrica, dada por:

$$\tilde{k}_\sigma d\tilde{u} = \int_V d\tilde{B}_{NL}^T \tilde{\sigma} dV \quad (3.117)$$

e,

$$\tilde{k} = \int_V \tilde{B}^T D \tilde{B} dV \quad (3.118)$$

Substituindo-se (3.110) em (3.118) tem-se que:

$$\tilde{k} = \int_V \left(\tilde{B}_0^T + \tilde{B}_{NL}^T \right) D \left(\tilde{B}_0 + \tilde{B}_{NL} \right) dV = \tilde{k}_0 + \tilde{k}_{NL} \quad (3.119)$$

onde \tilde{k}_0 representa a matriz de rigidez de pequenos deslocamentos, dada por:

$$\tilde{k}_0 = \int_V \tilde{B}_0^T D \tilde{B}_0 dV \quad (3.120)$$

e a matriz \tilde{k}_{NL} , conhecida como matriz de grandes deslocamentos, também conhecida por matriz de deslocamentos iniciais, é devida aos grandes deslocamentos:

$$\tilde{k}_{NL} = \int_V \tilde{B}_0^T D \tilde{B}_{NL} dV + \int_V \tilde{B}_{NL}^T D \tilde{B}_0 dV + \int_V \tilde{B}_{NL}^T D \tilde{B}_{NL} dV \quad (3.121)$$

Substituindo-se (3.120) e (3.121) em (3.113), tem-se:

$$d\tilde{\psi} = \tilde{k}' d\tilde{u} = 0 \quad (3.122)$$

onde

$$\tilde{k}' = \tilde{k}_0 + \tilde{k}_\sigma + \tilde{k}_{NL} \quad (3.123)$$

No caso de uma estrutura composta de vários elementos, a equação de equilíbrio se escreve:

$$d\tilde{\Psi} = \left(\tilde{K}_0 + \tilde{K}_\sigma + \tilde{K}_{NL} \right) \tilde{U} = 0 \quad (3.124)$$

onde o problema não-linear acima pode ser resolvido pelos métodos usuais, como por exemplo o método de Newton-Raphson, não sendo porém o objetivo desta dissertação.

Pode-se também, para forças conservativas, aplicar-se o Princípio da Energia Potencial Estacionária (*PEPE*), que é equivalente ao Princípio dos Trabalhos Virtuais (*PTV*):

$$\delta\pi = \delta(U + V) = \delta W^i - \delta W^e = 0 \quad (3.125)$$

que também pode ser escrito como:

$$\delta\pi = \delta \underset{\sim}{u}^T \underset{\sim}{\psi} = 0 \quad (3.126)$$

e a segunda variação da energia potencial total fornece:

$$\delta^2\pi = \delta(\delta\pi) = \delta \underset{\sim}{u}^T \delta \underset{\sim}{\psi} = \delta \underset{\sim}{u}^T \underset{\sim}{k}^t \delta \underset{\sim}{u} \quad (3.127)$$

Se $\delta^2\pi > 0$ então a configuração de equilíbrio do elemento é estável, mas se $\delta^2\pi < 0$ ou seja, $\underset{\sim}{k}^t$ é negativo-definida, então a configuração de equilíbrio do elemento é instável. Pode-se também verificar através do sinal do determinante da matriz $\underset{\sim}{k}^t$ ou seja, se $\det(\underset{\sim}{k}^t) < 0$ o elemento apresenta o fenômeno de instabilidade.

3.6.1. Problema de Instabilidade Inicial

É interessante notar, neste estágio, que a matriz K_σ não contém explicitamente os deslocamentos e é proporcional ao nível de tensões. Portanto, em uma análise incremental, na primeira etapa de carregamento, no sistema local, a matriz $\underset{\sim}{k}_{NL}$ é nula e a equação (3.122) se reduz a:

$$d \underset{\sim}{\psi} = \left(\underset{\sim}{k}_0 + \underset{\sim}{k}_\sigma \right) d \underset{\sim}{u} = 0 \quad (3.128)$$

Aumentando as tensões por um fator λ , haverá um ponto neutro de instabilidade se:

$$d \underset{\sim}{\psi} = \left(\underset{\sim}{k}_0 + \lambda \underset{\sim}{k}_\sigma \right) d \underset{\sim}{u} = 0 \quad (3.129)$$

sendo que o parâmetro de tensão λ pode ser obtido através da solução do seguinte problema de autovalores e autovetores:

$$\underset{\sim}{k}_0 + \lambda \underset{\sim}{k}_\sigma = 0 \quad (3.130)$$

Este é o problema clássico de instabilidade inicial típico de problemas de flambagem de hastes, placas e cascas onde os autovalores fornecem a carga crítica de

bifurcação e os autovetores fornecem a configuração do modo de instabilidade correspondente. O problema de instabilidade inicial pode dar somente respostas fisicamente significativas se a solução elástica fornecer deformações em que a matriz de grandes deslocamentos for nula.

Como o sistema de equações (3.130), que traduz o equilíbrio de um elemento finito de casca, está referido ao sistema de coordenadas locais, o estabelecimento das equações de equilíbrio da estrutura requer (i) a realização de uma transformação do sistema de coordenadas locais para o global das matrizes de rigidez e geométrica de cada elemento finito (ver item 3.4) e (ii) formar as matrizes de rigidez e geométrica globais da estrutura com base nas incidências nodais. Após estas operações, chega-se ao sistema de equações:

$$\underline{K}_0 + \lambda \underline{K}_\sigma = 0 \quad (3.131)$$

Deve-se ter cuidado para não se utilizar a equação (3.131) além dos limites de aplicabilidade, ou seja no caso de grandes deslocamentos, quando se deve utilizar a equação (3.124), ou seja, a expressão completa da matriz de rigidez tangente. Neste caso, deve-se realizar uma análise de autovalores e autovetores para cada etapa ou incremento de tensão.

Este trabalho limita-se ao estudo de instabilidade inicial, portanto não será considerada a expressão completa da matriz tangente e será utilizado o problema de autovalor e autovetor (3.131) para a obtenção das cargas críticas e dos modos de instabilidade correspondentes.

3.6.2. Não Linearidade Geométrica Aplicada ao Elemento de Casca

O vetor de deformações generalizadas para o elemento de casca incluindo os efeitos de não linearidade geométrica, no caso considerando rotações moderadas, pode ser definido como:

$$\underline{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \underline{\varepsilon}_0 + \underline{\varepsilon}_{NL} \quad (3.132)$$

em que $\underline{\varepsilon}_0$ é o vetor de deformações que contém os termos lineares devido às tensões de membrana e de flexão, onde $\underline{\varepsilon}_0^m = \underline{\varepsilon}_m$ e $\underline{\varepsilon}_0^f = \underline{\varepsilon}_f$, ou seja:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_0 = \underline{\underline{\varepsilon}}_0^m + \underline{\underline{\varepsilon}}_0^f = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.133)$$

sendo que,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \beta_x = \sum_{i=1}^{12} H_i^x u_i^f \quad (3.134)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \beta_y = \sum_{i=1}^{12} H_i^y u_i^f \quad (3.135)$$

e $\underline{\underline{\varepsilon}}_{NL}$ é o vetor de deformações que contém os termos não lineares devido às tensões de

membrana, *i.e.* $\underline{\underline{\varepsilon}}_{NL} = \underline{\underline{\varepsilon}}_{NL}^m$, definido por:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_{NL} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \\ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \\ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{Bmatrix} \quad (3.136)$$

Na equação (3.133) considera-se a curvatura à flexão χ_{xy} com sinal positivo de maneira a coincidir com o sinal positivo adotado para o momento torsor definido em (3.31).

Definindo-se os vetores:

$$\underline{\underline{\theta}}_x = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial x} \quad \frac{\partial w}{\partial x} \right\}^T \quad (3.137)$$

$$\underline{\underline{\theta}}_y = \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial w}{\partial y} \right\}^T \quad (3.138)$$

e,

$$\underset{\sim}{\theta} = \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \sim \\ \theta_y \\ \sim \end{Bmatrix} \quad (3.139)$$

a equação (3.136) pode ser escrita matricialmente da seguinte forma:

$$\underset{\sim}{\epsilon}_{NL} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \theta_x^T & 0 \\ \sim & \sim \\ 0 & \theta_y^T \\ \sim & \sim \\ \theta_y^T & \theta_x^T \\ \sim & \sim \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \underset{\sim}{A} \underset{\sim}{\theta} \quad (3.140)$$

Define-se agora (Zienkiewickz e Taylor, 1991):

$$\underset{\sim}{\theta} = \underset{\sim}{G} \underset{\sim}{u} \quad (3.141)$$

e portanto,

$$d \underset{\sim}{\theta} = \underset{\sim}{G} d \underset{\sim}{u} \quad (3.142)$$

onde $\underset{\sim}{u}$ é o vetor de graus de liberdade do elemento de casca definido em (3.89).

A matriz $\underset{\sim}{G}$ para o elemento de casca ACM fica sendo:

$$\underset{\sim}{G} = \begin{bmatrix} \frac{\partial M_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial M_2}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial M_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial M_2}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & \frac{\partial N_5}{\partial x} & \frac{\partial N_6}{\partial x} \\ \frac{\partial M_1}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial M_2}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial M_1}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial M_2}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_5}{\partial y} & \frac{\partial N_6}{\partial y} \\ \frac{\partial M_3}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial M_4}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial M_3}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial M_4}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_7}{\partial x} & \frac{\partial N_8}{\partial x} & \frac{\partial N_9}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_{10}}{\partial x} & \frac{\partial N_{11}}{\partial x} & \frac{\partial N_{12}}{\partial x} \\ \frac{\partial M_3}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial M_4}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial M_3}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial M_4}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_7}{\partial y} & \frac{\partial N_8}{\partial y} & \frac{\partial N_9}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_{10}}{\partial y} & \frac{\partial N_{11}}{\partial y} & \frac{\partial N_{12}}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.143)$$

E a matriz $\underset{\sim}{G}$ para o elemento de casca DKQ é dada por:

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} \frac{\partial M_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial M_2}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial M_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial M_2}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_1^x & H_2^x & H_3^x & 0 & 0 & H_4^x & H_5^x & H_6^x \\ \frac{\partial M_1}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial M_2}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial M_1}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial M_2}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_1^y & H_2^y & H_3^y & 0 & 0 & H_4^y & H_5^y & H_6^y \\ \frac{\partial M_3}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial M_4}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial M_3}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial M_4}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_7^x & H_8^x & H_9^x & 0 & 0 & H_{10}^x & H_{11}^x & H_{12}^x \\ \frac{\partial M_3}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial M_4}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial M_3}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial M_4}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_7^y & H_8^y & H_9^y & 0 & 0 & H_{10}^y & H_{11}^y & H_{12}^y \end{bmatrix} \quad (3.144)$$

Da equação (3.117) tem-se que:

$$\tilde{k}_\sigma \tilde{d}u = \int_V \tilde{d}B_{NL}^T \tilde{\sigma} \tilde{d}V \quad (3.145)$$

Das equações (3.140) e (3.142) obtém-se (Zienkiewicz e Taylor, 1991):

$$\tilde{d}\tilde{\varepsilon}_{NL} = \frac{1}{2} \tilde{d}A\tilde{\theta} + \frac{1}{2} A\tilde{d}\tilde{\theta} = A\tilde{d}\tilde{\theta} = A\tilde{G}\tilde{d}u \quad (3.146)$$

Logo,

$$\tilde{B}_{NL} = A \tilde{G} \quad (3.147)$$

portanto,

$$\tilde{d}B_{NL} = \tilde{d}A \tilde{G} \quad (3.148)$$

e

$$\tilde{d}B_{NL}^T = \tilde{G}^T \tilde{d}A^T \quad (3.149)$$

Considerando a relação entre tensões e deformações,

$$\tilde{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \tilde{D} \tilde{\varepsilon} \quad (3.150)$$

e tendo em vista que:

$$d \tilde{A}^T \tilde{\sigma} = \tilde{S} d \tilde{\theta} \quad (3.151)$$

sendo \tilde{S} a matriz de tensões de membrana atuantes no elemento,

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 & \tau_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_x & 0 & 0 & \tau_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_x & 0 & 0 & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & 0 & 0 & \sigma_y & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{xy} & 0 & 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{xy} & 0 & 0 & \sigma_y \end{bmatrix} \quad (3.152)$$

pode-se obter, substituindo (3.142), (3.149) e (3.151), em (3.145) a expressão:

$$\tilde{k}_\sigma d \tilde{u} = \int_V \tilde{G}^T d \tilde{A}^T \tilde{\sigma} dV = \int_V \tilde{G}^T \tilde{S} \tilde{G} d \tilde{u} dV \quad (3.153)$$

Portanto a matriz de rigidez de tensões iniciais para o elemento de casca, também conhecida como matriz de rigidez geométrica, é definida por:

$$\tilde{k}_\sigma = \int_V \tilde{G}^T \tilde{S} \tilde{G} dV \quad (3.154)$$

Como $\tilde{\varepsilon}_{NL} = \tilde{\varepsilon}_{NL}^m$ pode-se considerar apenas tensões de membrana na equação (3.150), *i.e.* $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}^m$, logo \tilde{S} é função somente das tensões na superfície média do elemento, ou seja, a equação (3.154) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\tilde{k}_\sigma = t \int_{-a}^a \int_{-b}^b \tilde{G}^T \tilde{S} \tilde{G} dy dx \quad (3.155)$$

onde t é a espessura da casca.

3.7. Solução do Problema de Autovalores

O problema da determinação de uma estimativa da tensão crítica de uma estrutura (λ_{cr}) reduz-se ao cálculo da menor raiz λ da equação (3.131), sendo que existem técnicas numéricas muito eficientes para realizar esta operação, (Bathe e Wilson, 1976).

A matriz de rigidez \tilde{K}_0 é sempre positivo-definida, mas a matriz \tilde{K}_σ pode ser negativo-definida, quando a estrutura estiver solicitada a esforços de tração, ou apresentar zeros na diagonal principal, quando as tensões de membrana S_x ou S_y forem nulas em algum ponto da estrutura. Este fato influencia bastante na escolha do método de solução do problema de autovalores e autovetores, (Nagahama, 2003).

Neste trabalho utilizam-se dois métodos eficazes na solução de problemas de autovalores e autovetores: (i) o método do sub-espço, apresentado por Bathe e Wilson (1976) e Bathe (1996); (ii) as sub-rotinas da biblioteca *Lapack*, (Anderson *et al*, 1999). Segundo Prola (2001), o método do sub-espço é bastante eficaz computacionalmente, pois permite obter-se apenas um autovalor (o menor) ou um certo número específico (1, 2, 3 ou 4) de autovalores em ordem crescente. No entanto, possui a limitação de exigir que as matrizes \tilde{K}_0 e \tilde{K}_σ sejam positivas-definidas. Quando isto não ocorre, é necessário recorrer-se às sub-rotinas *Lapack*, que fornecem todos os autovalores e autovetores, requerendo um esforço computacional muito elevado.

Para aumentar o campo de aplicação do método do sub-espço, quando os termos da diagonal principal da matriz geométrica são maiores ou iguais a zero utiliza-se o seguinte procedimento: (i) identificam-se os graus de liberdade cujos termos da diagonal principal são nulos e (ii) realiza-se a condensação estática das matrizes de rigidez e geométrica. Este procedimento também pode ser utilizado quando é necessário o uso das sub-rotinas *Lapack* para diminuir o esforço computacional exigido pelas sub-rotinas.

3.8. Implementação Computacional

Para a análise linear de estabilidade foi implementado um módulo chamado de INSTAB no programa computacional *ANEST* (La Rovere *et al*, 2003). Este módulo, programado em linguagem Fortran 90, tem o objetivo de realizar a análise de estabilidade, ou seja, resolver a equação (3.131), através do Método dos Elementos Finitos utilizando os elementos de casca não conformes (*ACM*) e conformes (*DKQ*).

Antes do início do programa é necessário elaborar um arquivo de texto com os seguintes dados iniciais da estrutura para a análise de estabilidade:

- (i) Número de nós e tipo de elemento a ser utilizado (*ACM* ou *DKQ*);
- (ii) Coordenadas nodais;

- (iii) Propriedades dos materiais: módulos de elasticidade; maior coeficiente de Poisson; módulo de cisalhamento transversal e, opcionalmente, o peso próprio do material;
- (iv) As propriedades dos elementos: conectividade; espessura; carregamento distribuído perpendicularmente ao longo do elemento; número de pontos de *gauss* para o cálculo das tensões de modo a permitir uma variação de tensões no interior do elemento;
- (v) As cargas nodais;
- (vi) As condições de apoios.

A Figura 3.7 mostra o fluxograma utilizado para o cálculo automático. Em seguida descrevem-se sucintamente as principais funções dos módulos envolvidos no algoritmo de cálculo.

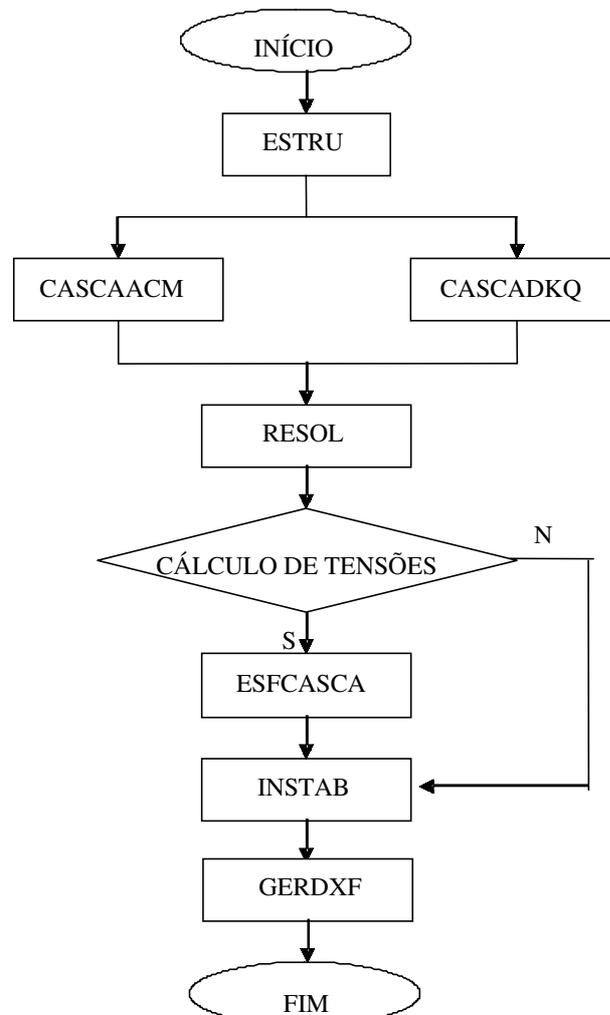


Figura 3.7: Fluxograma do programa baseado no *MEF*.

No módulo ESTRU são feitas a leitura das coordenadas dos nós, das conectividades dos elementos e das condições de apoio (graus de liberdades impedidos). Com estas informações, o módulo renumera automaticamente os nós de modo que a largura de banda da matriz de rigidez seja a menor possível e numera as equações.

Os módulos CASCAACM e CASCADKQ são responsáveis pela formação das matrizes de rotação, das matrizes de rigidez elástica e dos vetores de cargas equivalentes para cada elemento no sistema global, dependendo do tipo de formulação escolhida, ACM ou DKQ, respectivamente. Convém lembrar que é permitido utilizar apenas um tipo de elemento para toda a estrutura.

A partir das matrizes de rigidez dos elementos o módulo RESOL forma a matriz de rigidez global da estrutura que é armazenada em perfil. Neste módulo são lidas as cargas aplicadas diretamente nos nós e resolvido o sistema de equações lineares (3.105) para a obtenção dos deslocamentos nodais.

Caso as tensões de membrana nos elementos não sejam informadas pelo usuário, a partir dos deslocamentos nodais o módulo ESFCASCA calcula as tensões de membrana e de flexão nos elementos.

Com a matriz de rotação e as tensões de membrana atuantes em cada elemento, o módulo INSTAB calcula as matrizes de rigidez geométrica dos elementos e através do mesmo procedimento adotado no módulo RESOL, efetua-se o posicionamento das matrizes de cada elemento na matriz de rigidez geométrica global da estrutura. A estratégia de resolução do sistema (3.131), o qual consiste em um problema de autovalores (tensões de bifurcação) e autovetores (modos de instabilidade) é fator importante no esforço computacional envolvido, conforme já foi discutido.

Como resultado o módulo INSTAB gera um arquivo tipo texto que contém o valor da tensão de bifurcação e a configuração do modo de instabilidade, definida por um vetor de deslocamentos nodais (três translações e três rotações). O número de modos analisados é estipulado pelo usuário, sendo que, geralmente, apenas o primeiro modo é de interesse prático. Quanto às configurações dos modos de instabilidade, através dos deslocamentos nodais e das funções de aproximação pode-se calcular os deslocamentos em quaisquer pontos do elemento estrutural.

Para identificar o modo de instabilidade e o número de semi-comprimentos de onda exibidos, o último módulo do programa, denominado GERDXF, gera um arquivo DXF (*drawing interchange file*) a partir dos autovetores calculados no módulo INSTAB

e das coordenadas nodais da estrutura. Este arquivo contém informações para o desenho da estrutura e da configuração do modo de instabilidade em programas *CAD* (do inglês *computed aided design* – desenho assistido por computador).

De modo a facilitar a linguagem, o programa computacional desenvolvido é denominado de *INSTABACM* e *INSTABDKQ* quando se referir aos elementos finitos de casca *ACM* e *DKQ*, respectivamente.

4. MÉTODO DAS FAIXAS FINITAS

O método das faixas finitas (*MFF*) foi formulado inicialmente por Cheung (1968). Anos mais tarde, Przemieniecki (1973) utilizou o método em análise de seções de parede fina considerando apenas deformações de flexão. Plank e Wittrick (1974) incluíram as deformações de membrana. Um pouco mais tarde, Hancock (1978) estudou a instabilidade de vigas em seção *I* através do *MFF*.

O método das faixas finitas (*MFF*) Cheung (1968) combina os métodos dos elementos finitos com a formulação dos métodos de *Rayleigh-Ritz* ou *Galerkin* (Fan, 1982). A discretização dos elementos estruturais é processada da seguinte forma:

- (i) Discretização espacial no plano da seção transversal da peça, passando esta a ser constituída por um conjunto de faixas finitas de largura b e comprimento a , sendo que a conexão de duas faixas adjacentes é feita através das linhas nodais, conforme a Figura 4.1;
- (ii) Na direção transversal, o campo de deslocamentos é aproximado, em cada faixa finita, por funções polinomiais cujo grau condiciona a compatibilidade entre as faixas adjacentes;
- (iii) Na direção longitudinal, os deslocamentos de cada faixa finita são aproximados por funções contínuas que satisfazem as condições de contorno globais do elemento. Em geral utilizam-se funções periódicas, a exemplo das funções trigonométricas. Devido a este fato, é usual designar esta versão por método das faixas finitas (*MFF*) semi-analítico.

Pela forma de discretização das estruturas, o *MFF* apresenta uma redução no esforço computacional, para a modelagem e processamento do cálculo, comparando-se ao uso do método de elementos finitos (*MEF*).

A formulação das faixas finitas para análise linear de estabilidade envolve as seguintes etapas:

- (i) Identificação dos graus de liberdade e escolha das funções de aproximação dos deslocamentos de membrana no plano transversal e de flexão no plano longitudinal;
- (ii) Escolha das deformações generalizadas e das relações entre deformações e deslocamentos (relações cinemáticas);
- (iii) Identificação dos esforços e definição das relações tensões-deformações;

- (iv) Estabelecimento das equações de equilíbrio da faixa, obtidas a partir da aplicação do Método de Rayleigh-Ritz ao princípio da estacionariedade da energia potencial;

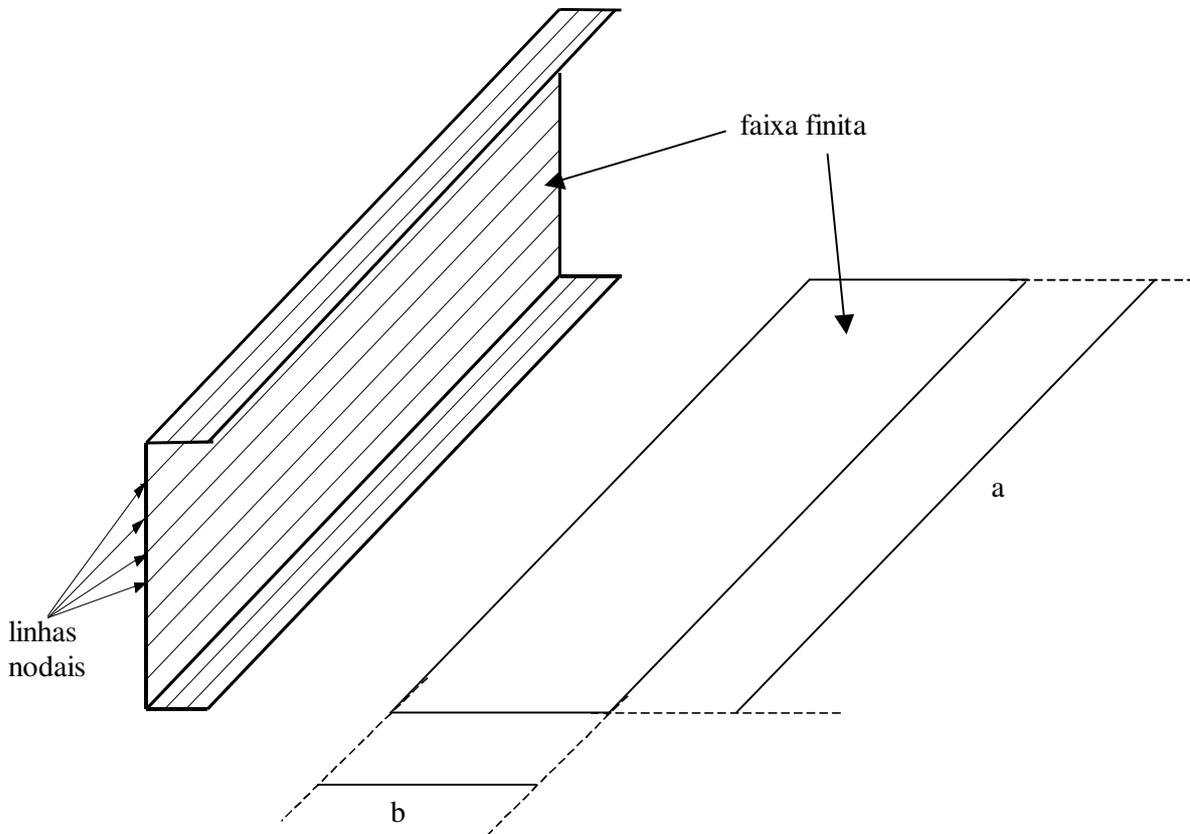


Figura 4.1: Discretização de um perfil em faixas finitas.

Na Figura 4.2 está representada uma faixa finita *semi-analítica* e pode-se observar que esta possui 8 graus de liberdade, na medida em que cada linha nodal (i e j) está associada a: (a) dois deslocamentos de membrana (u e v), (b) um deslocamento de flexão (w) e (c) uma rotação de flexão (θ).

Os vetores dos deslocamentos generalizados ou dos graus de liberdade, de membrana (δ_m) e de flexão (δ_f), de uma faixa finita são definidos por:

$$\delta_m = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \quad \delta_f = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_i \\ w_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

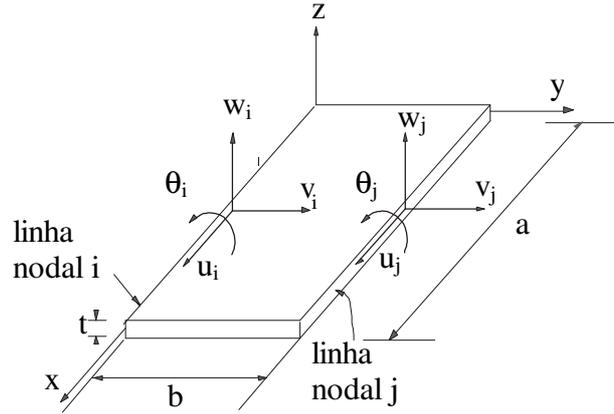


Figura 4.2: Graus de liberdade numa faixa finita.

As funções adotadas para aproximar os deslocamentos são obtidas a partir do produto de funções trigonométricas (direção longitudinal – eixo x) com funções polinomiais (direção transversal – eixo y). Na direção transversal de cada faixa finita, os deslocamentos são expressos por funções lineares (deslocamentos de membrana, u e v) e por polinômios cúbicos (deslocamentos de flexão, w e θ). Assim, os deslocamentos u , v e w , que ocorrem na superfície média da faixa, são dados por:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \underset{\sim}{N}_m(y) \underset{\sim}{\Psi}_m(x) \underset{\sim}{\delta}_m \quad (4.2)$$

$$w = \underset{\sim}{N}_f(y) \underset{\sim}{\Psi}_f(x) \underset{\sim}{\delta}_f$$

onde

$$\underset{\sim}{N}_m(y) = \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{N}_u(y) \\ \underset{\sim}{N}_v(y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1(y) & 0 & N_2(y) & 0 \\ 0 & N_1(y) & 0 & N_2(y) \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$\underset{\sim}{N}_f(y) = \{N_3(y) \quad N_4(y) \quad N_5(y) \quad N_6(y)\} \quad (4.4)$$

sendo que as funções N_i mostram a variação dos deslocamentos de cada faixa finita na direção transversal (eixo y):

$$N_1 = 1 - \eta \quad (4.5)$$

$$N_2 = \eta \quad (4.6)$$

$$N_3 = 1 - 3\eta^2 + 2\eta^3 \quad (4.7)$$

$$N_4 = \eta - 2\eta^2 + \eta^3 \quad (4.8)$$

$$N_5 = 3\eta^2 - 2\eta^3 \quad (4.9)$$

$$N_6 = \eta^3 - \eta^2 \quad (4.10)$$

$$\eta = \frac{y}{b} \quad (4.11)$$

As matrizes $\tilde{\psi}_m(x)$ e $\tilde{\psi}_f(x)$ representam a variação dos deslocamentos na direção longitudinal de cada faixa finita (eixo x), e valem:

$$\tilde{\psi}_m(x) = \begin{bmatrix} \Psi_1(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Psi_2(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_3(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Psi_4(x) \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$\tilde{\psi}_f(x) = \begin{bmatrix} \Psi_5(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Psi_6(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_7(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Psi_8(x) \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

em que:

$$\Psi_k = \begin{cases} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) & \text{para } k = 2, 4, 5, 6, 7, 8 \\ \text{cos}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) & \text{para } k = 1, 3 \end{cases} \quad (4.14)$$

onde n é o número de semi-comprimentos de onda longitudinal da função de aproximação e x é a posição na direção longitudinal da faixa.

4.1. Condições de Contorno

Devida a formulação do método das faixas finitas, as condições de contorno podem ser divididas em dois grupos (i) as condições que envolvem os bordos transversais das faixas finitas (situados sobre a linha média das seções extremas, definidas por $x=0$ e $x=a$, ver Figura 4.1 e Figura 4.2) e (ii) as condições que envolvem os bordos longitudinais das faixas finitas (*i.e.* as linhas nodais, definidas por $y=0$ e $y=b$, ver Figura 4.1 e Figura 4.2) A seguir, apresentam-se os aspectos relacionados com estes tipos de condições de contorno.

(i) Bordos transversais:

No *MTF* as funções de aproximação dos deslocamentos são trigonométricas (seno, para v , w e θ , e co-seno, para u). Isto implica que nos bordos (i) os deslocamentos (v , w e θ) estejam impedidos e suas derivadas (v' , w' e θ') livres, (ii) o deslocamento axial (u) esteja livre e (iii) a sua derivada (u') esteja impedida. Esta característica implica automaticamente que só é possível modelar as condições de bordos simplesmente apoiados.

(ii) Bordos longitudinais:

Segundo Prola (2001), as condições de contorno impostas nos bordos longitudinais (linhas nodais) da faixa finita podem apresentar quatro situações: (i) livres (u e v livres), (ii) articuladas ou simplesmente apoiadas (u e v livres), (iii) engastadas (u e v impedidos) e, (iv) com garfo (u livre e v impedido), ou seja, quando as linhas nodais estiverem sobre o plano de simetria das deformações. A seguir apresentam-se algumas características das quatro condições de contorno:

- (i) Linha nodal *livre*: não existem quaisquer restrições aos valores dos deslocamentos e suas derivadas;
- (ii) Linha nodal *articulada*: esta condição se satisfaz quando o deslocamento transversal da linha nodal i é nulo, ou seja, faz-se $w_i=0$, o que corresponde a anular o deslocamento w_i ;
- (iii) Linha nodal *engastada*: esta condição se satisfaz quando o deslocamento transversal (w_i) e a rotação (θ_i) da linha nodal i são nulos;
- (iv) Linhas nodais com *garfo*: caso a deformação de um elemento estrutural ser simétrica em relação a uma linha nodal, ou seja, a estrutura e o carregamento serem simétricos, conforme a Figura 4.3. Basta então analisar somente a metade do elemento estrutural, correspondendo a anular, sobre a linha de simetria, a rotação θ_i ;

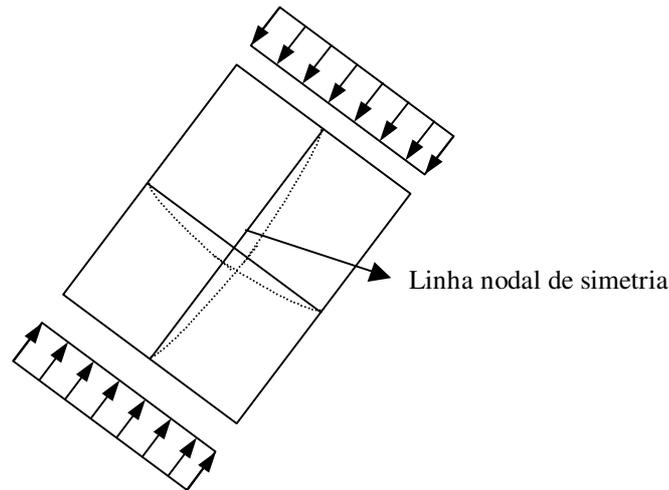


Figura 4.3: Linha nodal de simetria, (Prola, 2001).

4.2. Relações Deformações-Deslocamentos

As relações deformações-deslocamentos são válidas para as seções constituídas por placas finas e baseiam-se nas seguintes hipóteses, Novozhilov (1953) e Cheung (1976):

- (i) A espessura de cada placa é muito pequena em relação às dimensões da sua superfície média.
- (ii) As rotações das placas são pequenas.
- (iii) Os deslocamentos de membrana das placas são pequenos, quando comparados com os respectivos deslocamentos de flexão.
- (iv) No plano médio de cada placa as fibras normais, antes da deformação, permanecem normais a esse mesmo plano, após a deformação. Deste modo, as deformações (e, conseqüentemente, as tensões) em qualquer ponto da placa podem ser expressas em termos das deformações generalizadas do plano médio (deformações de membrana e curvaturas).

Na formulação das faixas finitas utilizadas para efetuar a análise linear de estabilidade, o vetor da deformação de membrana é dada por:

$$\underline{\varepsilon}_m = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, 2\varepsilon_{xy}\}^T = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right\}^T \quad (4.15)$$

Considerando a curvatura de flexão (χ_{xy}) com o sinal positivo de maneira a coincidir com o sinal positivo do momento torsor, o vetor de deformação de flexão (curvaturas) fica sendo:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_f \equiv \{\chi_x, \chi_y, \chi_{xy}\}^T = \left\{ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \frac{2\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\}^T \quad (4.16)$$

4.3. Relações Tensões-Deformações

Considera-se que cada faixa finita é constituída por um material elástico e ortotrópico, logo as relações tensões-deformações são lineares. As tensões generalizadas de membrana $\underline{\underline{\sigma}}_m$ e de flexão $\underline{\underline{\sigma}}_f$ são dadas por:

$$\underline{\underline{\sigma}}_m = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.17)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_f = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.18)$$

Conseqüentemente, as relações tensões-deformações específicas podem ser dadas por:

$$\underline{\underline{\sigma}}_m = \underline{\underline{D}}_m \underline{\underline{\varepsilon}}_m \quad (4.19)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_f = \underline{\underline{D}}_f \underline{\underline{\varepsilon}}_f \quad (4.20)$$

sendo que as matrizes constitutivas de constantes elásticas, de membrana e flexão, para material ortotrópico são definidas por:

$$\underline{\underline{D}}_m = \frac{1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \begin{bmatrix} E_1 & \nu_{21}E_1 & 0 \\ \nu_{12}E_2 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12}(1-\nu_{12}\nu_{21}) \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

$$\underline{\underline{D}}_f = \frac{t^3}{12} \underline{\underline{D}}_m \quad (4.22)$$

e,

$$\nu_{21}E_1 = \nu_{12}E_2 \quad (4.23)$$

onde E , G e ν são, respectivamente, o módulo de elasticidade, o módulo de cisalhamento e o coeficiente de Poisson. Os índices 1 e 2 representam as direções

paralelas e transversais às fibras, respectivamente. E por último, t é a espessura uniforme da faixa finita.

Quando os eixos 1 e 2 do material não coincidem com os eixos x e y da faixa, deve-se proceder a uma transformação de coordenadas, conforme explicado no item 2.4.1.

4.4. Energia Potencial

As equações de equilíbrio da faixa finita podem ser estabelecidas através do Princípio da Energia Potencial Estacionária (*PEPE*). Deste modo, estabelece a energia da faixa finita representada na Figura 4.4, a qual se encontra submetida a uma combinação arbitrária de tensões de membrana: (i) tensões normais longitudinais σ_x (linearmente variáveis, onde σ_{inf} e σ_{sup} são valores extremos); (ii) tensão normal transversal uniforme σ_y ; (iii) tensão de cisalhamento uniforme τ_{xy} .

A energia potencial da faixa finita (π) é constituída pela soma da energia de deformação (U) com o potencial das tensões aplicadas (V). Desta forma:

$$\pi = U + V \quad (4.24)$$

A energia de deformação armazenada numa faixa finita é constituída por duas parcelas associadas, respectivamente, às deformações de membrana (U_m) e de flexão (U_f). Assim,

$$U = U_m + U_f \quad (4.25)$$

onde cada uma das parcelas é dada por:

$$U_m = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \sigma_m^T \varepsilon_m t dx dy \quad (4.26)$$

$$U_f = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \sigma_f^T \varepsilon_f dx dy \quad (4.27)$$

Introduzindo (4.19) e (4.20) em (4.26) e (4.27), e observando que as matrizes constitutivas de constantes elásticas são simétricas ($D_m = D_m^T$ e $D_f = D_f^T$), as expressões que fornecem as energias de deformação podem ser reescritas como:

$$U_m = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \varepsilon_m^T D_m \varepsilon_m t dx dy \quad (4.28)$$

$$U_f = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \underline{\underline{\varepsilon}}_f^T \underline{\underline{D}}_f \underline{\underline{\varepsilon}}_f dx dy \tag{4.29}$$

Para exprimir as parcelas da energia de deformação em função dos deslocamentos nodais $\underline{\underline{\delta}}_m$ e $\underline{\underline{\delta}}_f$, utilizam-se as seguintes relações:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_m = \underline{\underline{B}}_m \underline{\underline{\delta}}_m \tag{4.30}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_f = \underline{\underline{B}}_f \underline{\underline{\delta}}_f \tag{4.31}$$

onde $\underline{\underline{B}}_m$ e $\underline{\underline{B}}_f$ são as matrizes de deformação de membrana e de flexão, respectivamente, dadas por:

$$\underline{\underline{B}}_m = \begin{bmatrix} N_1 \psi_{1,x} & 0 & N_2 \psi_{3,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} \psi_2 & 0 & N_{2,y} \psi_4 \\ N_{1,y} \psi_1 & N_1 \psi_{2,x} & N_{2,y} \psi_3 & N_2 \psi_{4,x} \end{bmatrix} \tag{4.32}$$

e,

$$\underline{\underline{B}}_f = \begin{bmatrix} N_3 \psi_{5,xx} & N_4 \psi_{6,xx} & N_5 \psi_{7,xx} & N_6 \psi_{8,xx} \\ N_{3,yy} \psi_5 & N_{4,yy} \psi_6 & N_{5,yy} \psi_7 & N_{6,yy} \psi_8 \\ 2N_{3,y} \psi_{5,x} & 2N_{4,y} \psi_{6,x} & 2N_{5,y} \psi_{7,x} & 2N_{6,y} \psi_{8,x} \end{bmatrix} \tag{4.33}$$

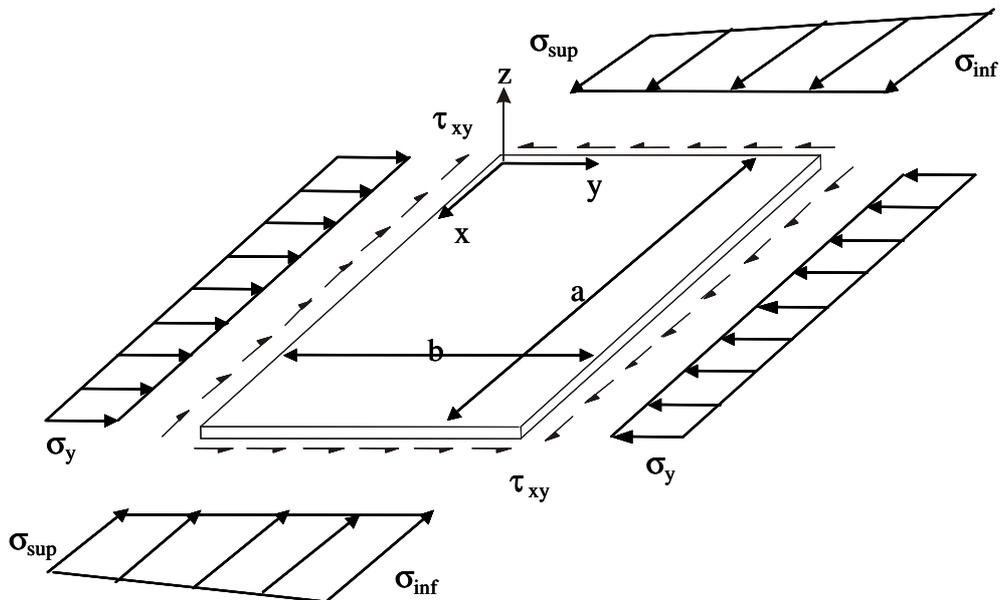


Figura 4.4: Representação de uma faixa finita submetida a tensões de membrana.

Introduzindo (4.30) a (4.33) em (4.28) e (4.29), pode-se escrever a energia de deformação da faixa finita em termos dos deslocamentos nodais, por:

$$U_m = \frac{1}{2} \delta_m^T \int_0^a \int_0^b B_m^T D_m B_m t dx dy \delta_m \quad (4.34)$$

$$U_f = \frac{1}{2} \delta_f^T \int_0^a \int_0^b B_f^T D_f B_f dx dy \delta_f \quad (4.35)$$

Ao estabelecer a expressão da variação do potencial das tensões de membrana aplicadas (σ_x , σ_y e τ_{xy}), recorda-se que as tensões normais longitudinais variam linearmente ao longo dos bordos longitudinais (ver Figura 4.4). Assim, tem-se que:

$$\sigma_x = \sigma_{\text{inf}} + \rho_\sigma y \quad (4.36)$$

onde

$$\rho_\sigma = \frac{\sigma_{\text{sup}} - \sigma_{\text{inf}}}{b} \quad (4.37)$$

Os termos quadráticos relevantes do potencial das tensões aplicadas podem se agrupar em duas parcelas, (Plank e Wittrick, 1974): (i) uma devida às deformações de membrana e envolvendo apenas σ_x e (ii) outra devida às deformações de flexão e envolvendo σ_x , σ_y e σ_{xy} . Assim,

$$V_m = -\frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b (\sigma_{\text{inf}} + \rho_\sigma y) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] t dy dx \quad (4.38)$$

$$V_f = -\frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[(\sigma_{\text{inf}} + \rho_\sigma y) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \sigma_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2\sigma_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] t dy dx \quad (4.39)$$

e tem-se que:

$$V = V_m + V_f \quad (4.40)$$

Para exprimir as parcelas do potencial das tensões aplicadas em função dos deslocamentos nodais, introduzem-se as relações (4.2) a (4.4), (4.12) e (4.13) em (4.38) e (4.39), o que conduz a:

$$V_m = -\frac{1}{2} \delta_m^T \int_0^a \int_0^b (\sigma_{\text{inf}} + \rho_\sigma y) \psi_{m,x}^T \left(N_u^T N_u + N_v^T N_v \right) \psi_{m,x} t dy dx \quad (4.41)$$

$$V_f = -\frac{1}{2} \delta_f^T \int_0^a \int_0^b \left\{ \begin{array}{l} (\sigma_{\text{inf}} + \rho_{\sigma} y) \psi_{f,x}^T N_f^T N_f \psi_{f,x} + \\ + \sigma_y \psi_f^T N_{f,y}^T N_{f,y} \psi_f + \\ + 2\sigma_{xy} \psi_f^T N_{f,y}^T N_f \psi_{f,x} \end{array} \right\} t dy dx \delta_f \quad (4.42)$$

4.5. Matriz de Rigidez

Na análise linear de estabilidade, a matriz de rigidez de uma faixa finita pode ser obtida através da derivação em relação aos deslocamentos generalizados das parcelas de energia de deformação de membrana (U_m) e de flexão (U_f). Assim,

$$\frac{\partial U_m}{\partial \delta_m} = \left[\int_0^a \int_0^b B_m^T D_m B_m t dy dx \right] \delta_m \quad (4.43)$$

$$\frac{\partial U_f}{\partial \delta_f} = \left[\int_0^a \int_0^b B_f^T D_f B_f dy dx \right] \delta_f \quad (4.44)$$

onde as integrais que multiplicam os deslocamentos generalizados nas equações (4.43) e (4.44) são, respectivamente, as matrizes de rigidez lineares, no sistema local, associadas às deformações de membrana (k_0^m) e de flexão (k_0^f), as quais são dadas por:

$$k_0^m = \int_0^a \int_0^b B_m^T D_m B_m t dy dx \quad (4.45)$$

$$k_0^f = \int_0^a \int_0^b B_f^T D_f B_f dy dx \quad (4.46)$$

Analogamente, a matriz de rigidez geométrica (ou simplesmente matriz geométrica) é obtida da derivação das parcelas de energia potencial das tensões aplicadas de membrana (V_m) e de flexão (V_f). Logo,

$$\frac{\partial V_m}{\partial \delta_m} = - \left[\int_0^a \int_0^b (\sigma_{\text{inf}} + \rho_{\sigma} y) \psi_{m,x}^T \left(N_u^T N_u + N_v^T N_v \right) \psi_{m,x} t dy dx \right] \delta_m \quad (4.47)$$

$$\frac{\partial V_f}{\partial \delta_f} = - \left[\int_0^a \int_0^b \left\{ \begin{array}{l} (\sigma_{\text{inf}} + \rho_{\sigma} y) \psi_{f,x}^T N_f^T N_f \psi_{f,x} + \sigma_y \psi_f^T N_{f,y}^T N_{f,y} \psi_f + \\ + 2\sigma_{xy} \psi_f^T N_{f,y}^T N_f \psi_{f,x} \end{array} \right\} t dy dx \right] \delta_f \quad (4.48)$$

E as matrizes geométricas são, respectivamente, no sistema local, associadas às deformações de membrana (k_{σ}^m) e de flexão (k_{σ}^f), dadas por:

$$k_{\sigma}^m = - \int_0^a \int_0^b (\sigma_{\text{inf}} + \rho_{\sigma} y) \psi_{m,x}^T \left(N_u^T N_u + N_v^T N_v \right) \psi_{m,x} t dy dx \quad (4.49)$$

$$k_{\sigma}^f = - \int_0^a \int_0^b \left\{ \begin{aligned} &(\sigma_{\text{inf}} + \rho_{\sigma} y) \psi_{f,x}^T N_f^T N_f \psi_{f,x} + \sigma_y \psi_f^T N_{f,y}^T N_{f,y} \psi_f + \\ &+ 2\sigma_{xy} \psi_f^T N_{f,y}^T N_f \psi_{f,x} \end{aligned} \right\} t dy dx \quad (4.50)$$

4.6. Transformação de Coordenadas

As equações estabelecidas até aqui estão referenciadas às coordenadas locais (x, y, z) de cada faixa finita. Para escrever as equações globais da barra em relação ao sistema de coordenadas globais (X, Y, Z) é necessário realizar uma transformação de coordenadas, *i.e.* escrever as equações relativas ao comportamento de cada faixa finita no sistema global.

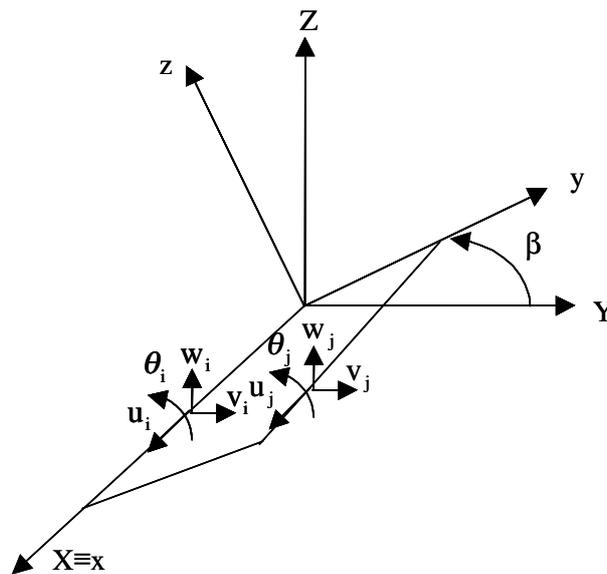


Figura 4.5: Transformação de eixos global para local.

Considerando-se uma faixa finita genérica cujo eixo longitudinal local (x) coincida com o eixo global (X) e cuja seção transversal seja definida no sistema de eixos $y-z$, o qual por meio de uma rotação de valor β obtém-se o sistema de eixos global $Y-Z$, conforme a Figura 4.5.

Por meio de relações trigonométricas é possível relacionar os valores dos graus de liberdade locais (u , v , w e θ) e globais (U , V , W e Θ) em cada uma das linhas nodais (i e j), através das seguintes equações:

$$\begin{aligned} u_i &= U_i & u_j &= U_j \\ v_i &= V_i \cdot \cos \beta + W_i \cdot \text{sen} \beta & v_j &= V_j \cdot \cos \beta + W_j \cdot \text{sen} \beta \\ w_i &= -V_i \cdot \text{sen} \beta + W_i \cdot \cos \beta & w_j &= -V_j \cdot \text{sen} \beta + W_j \cdot \cos \beta \\ \theta_i &= \Theta_i & \theta_j &= \Theta_j \end{aligned} \quad (4.51)$$

e podem ser reescritas, em forma matricial, como:

$$\tilde{\delta}_L = R \tilde{\delta}_G \quad (4.52)$$

onde os vetores dos deslocamentos generalizados referidos, respectivamente, aos eixos globais ($\tilde{\delta}_G$) e locais ($\tilde{\delta}_L$) são definidos como:

$$\tilde{\delta}_G = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \\ \Theta_i \\ U_j \\ V_j \\ W_j \\ \Theta_j \end{Bmatrix} \quad \tilde{\delta}_L = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ w_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (4.53)$$

E a matriz de transformação de coordenadas é dada por:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \text{sen} \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\text{sen} \beta & \cos \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \beta & \text{sen} \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\text{sen} \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

4.7. Equações de Equilíbrio

Conforme já visto, a energia potencial total de uma faixa finita é dada por:

$$\pi = U_m + U_f + V_m + V_f \quad (4.55)$$

e o *PEPE* estabelece que para que haja equilíbrio estável na faixa finita, a primeira variação da energia potencial total, em relação aos deslocamentos generalizados, deve ser nula. Matematicamente, tem-se que:

$$\frac{\partial \pi}{\partial \delta} = \frac{\partial(U_m + V_m)}{\partial \delta_m} \delta \delta_m + \frac{\partial(U_f + V_f)}{\partial \delta_f} \delta \delta_f = 0 \quad (4.56)$$

Como $\delta \delta_m$ é arbitrário:

$$\frac{\partial(U_m + V_m)}{\partial \delta_m} = 0 \quad \rightarrow \quad k_0^m \delta_m + k_\sigma^m \delta_m = 0 \quad (4.57)$$

e como $\delta \delta_f$ também é arbitrário:

$$\frac{\partial(U_f + V_f)}{\partial \delta_f} = 0 \quad \rightarrow \quad k_0^f \delta_f + k_\sigma^f \delta_f = 0 \quad (4.58)$$

Matricialmente pode-se escrever:

$$\left(\begin{bmatrix} k_0^m & 0 \\ 0 & k_0^f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_\sigma^m & 0 \\ 0 & k_\sigma^f \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{Bmatrix} \delta_m \\ \delta_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.59)$$

ou, em notação mais compacta

$$\left(k_0 + \lambda k_\sigma \right) \cdot \delta = 0 \quad (4.60)$$

onde λ é o parâmetro de tensão, k_0 e k_σ são, respectivamente, no sistema local, a matriz de rigidez e a matriz geométrica, as quais têm a forma:

$$k_0 = \begin{bmatrix} k_0^m & 0 \\ 0 & k_0^f \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

$$k_\sigma = \begin{bmatrix} k_\sigma^m & 0 \\ 0 & k_\sigma^f \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

O parâmetro de tensão (λ) define o nível das tensões aplicadas o qual está associado a um perfil de carregamento, isto é, a uma combinação arbitrária de tensões normais longitudinais, tensões normais transversais e tensões tangenciais cisalhantes, conforme mostra a Figura 4.4.

Como o sistema de equações definido em (4.60), que traduz o equilíbrio de uma faixa finita, está referido ao sistema de coordenadas local, o estabelecimento das equações de equilíbrio de um elemento estrutural, discretizado em faixas finitas e, portanto, de seção constante, requer os seguintes passos:

- (i) Efetuar a transformação de coordenadas das matrizes de rigidez e geométrica de cada uma das faixas finitas, conforme descrito no item 4.6;
- (ii) Definir a relação entre os graus de liberdade de cada faixa finita e os graus de liberdade do elemento estrutural (matriz de incidências nodais) e utilizá-la para definir as matrizes de rigidez e geométrica no sistema de coordenadas global da estrutura.

Após a realização destas operações, chega-se ao sistema de equações no sistema de coordenadas globais:

$$\left(\begin{matrix} \tilde{K}_0 + \lambda \tilde{K}_\sigma \end{matrix} \right) \tilde{\delta} = 0 \quad (4.63)$$

Deve-se salientar que as matrizes \tilde{K}_0 e \tilde{K}_σ apesar de possuírem, freqüentemente, dimensões elevadas, são matrizes simétricas, com característica de banda cuja largura é pequena, (Prola, 2001). Esta característica possibilita um armazenamento otimizado em computador, o que torna mais eficiente a implementação computacional da resolução do problema de autovalores e autovetores definido em (4.63), (Bathe, 1998).

Assim como no *MEF*, a matriz \tilde{K}_0 é sempre positivo-definida e a matriz geométrica \tilde{K}_σ não é sempre positivo-definida. Esta última só é positivo-definida quando não existirem tensões de tração aplicadas. Conforme já discutido no Capítulo 3, este fato influencia na escolha do método de resolução do problema de autovalores e autovetores.

4.8. Implementação Computacional

Baseado no programa computacional *ALESA* (Análise Linear de Estabilidade pelo Método das Faixas Finitas Semi Analítico) desenvolvido por Prola (2001), implementou-se no programa *ANEST* (La Rovere *et al*, 2003) um módulo denominado de *FAIXA* que realiza o cálculo das matrizes de rigidez e geométricas utilizadas no

método das faixas finitas. Denomina-se *INSTABFAIXA* ao programa baseado no *MFF* para a análise linear de estabilidade elaborado sobre o programa *ANEST*.

A Figura 4.6 mostra, de forma esquemática e simplificada, o algoritmo do programa de cálculo automático implementado.

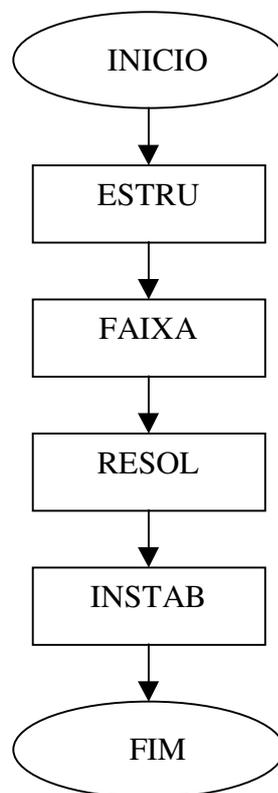


Figura 4.6: Fluxograma do programa *INSTABFAIXA*.

Os dados necessários ao programa são informados em arquivo texto e consistem em:

- (i) Características geométricas e definição da discretização: número de linhas (pontos) nodais, coordenadas cartesianas das linhas nodais, conectividades das faixas finitas, comprimento do perfil e a espessura que pode ser diferente para cada faixa;
- (ii) Características do material: módulos de elasticidade e coeficientes de Poisson;
- (iii) Restrições nodais (linhas nodais): restrição aos deslocamentos u , v , w e θ de cada faixa (L- livre, F-fixa);
- (iv) Tensões de membrana aplicadas nas faixas da seção;
- (v) Número de modos de instabilidade desejados;

-
- (vi) Os pontos onde se deseja obter os deslocamentos;
 - (vii) O número de semi-comprimentos de onda que os modos de instabilidade devem exibir.

De modo semelhante aos programas descritos no capítulo 3 (*INSTABACM* e *INSTABDKQ*), no programa *INSTABFAIXA* o módulo ESTRU faz a leitura das coordenadas nodais da seção transversal do perfil e as restrições dos graus de liberdade das linhas nodais.

No módulo FAIXA são lidas (i) as conectividades das faixas finitas, (ii) a espessura, as tensões σ_x e as propriedades dos materiais associadas às faixas, (iii) o comprimento do perfil e (iv) o número de semi-comprimentos de onda desejado. Com estas informações são calculadas no sistema global as matrizes de rigidez e geométrica de cada faixa finita.

O módulo RESOL forma as matrizes de rigidez e geométrica globais da estrutura e, finalmente, o módulo INSTAB resolve o problema de autovalores e autovetores (4.63) onde o autovalor é a tensão de bifurcação e o autovetor representa a configuração do modo de instabilidade.

De forma semelhante ao método dos elementos finitos, o resultado do módulo INSTAB consiste em um arquivo texto que contém os valores das tensões de bifurcação e as configurações dos modos de instabilidade, definidas por um vetor de deslocamentos nodais (valores de u , v , w e θ , em todas as linhas nodais).

No próximo capítulo é feita uma comparação entre o método das faixas finitas e o método dos elementos finitos para diversos exemplos.

5. COMPARAÇÃO ENTRE MÉTODOS

Neste capítulo realizam-se vários estudos de estabilidade com perfis de seção aberta e parede fina utilizando os métodos numéricos apresentados nos capítulos anteriores.

Já é fato conhecido que a precisão dos resultados fornecidos por um programa de elementos finitos depende da escolha da malha utilizada na discretização da estrutura, portanto é importante fazer um estudo de malhas ao se utilizar métodos numéricos, tais como o *MEF* e o *MFF*.

Para o programa *INSTABFAIXA*, o número de semi-comprimentos de onda do modo de instabilidade (n) constitui em um dado fornecido pelo usuário. Assim, para cada valor de n obtém-se um valor de tensão de bifurcação correspondente, cuja precisão depende unicamente do número de faixas utilizadas na discretização da seção transversal. Por outro lado, na utilização dos programas *INSTABDKQ* e *INSTABACM*, o número de semi-comprimentos de onda do modo de instabilidade é um resultado fornecido pelos programas, cuja visualização é facilitada através de programas de *CAD* que possibilitem a leitura dos arquivos *DXF* gerados.

Este capítulo se divide em duas partes principais. A primeira parte (os dois primeiros itens) é destinada à validação dos resultados obtidos pelos programas baseados nos métodos apresentados através da combinação de estudos de convergência (definição do nível de discretização necessário para se obter resultados precisos) e com comparações de resultados analíticos obtidos na literatura. Para este estudo consideram-se placas constituídas de materiais isotrópicos cujos resultados numéricos apresentados consistem em valores de coeficientes de flambagem (K_b) que podem ser relacionados com a carga de bifurcação. No entanto, é mais usual utilizar-se a carga de bifurcação por unidade de área, denominada neste trabalho de “tensão de bifurcação” (σ_b). A relação entre K_b e σ_b é dada por:

$$K_b = \frac{12(1-\nu^2)}{\pi^2 E} \left(\frac{b}{t}\right)^2 \sigma_b \quad (5.1)$$

onde E e ν são, respectivamente, o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson do material, t é a espessura da placa e b a largura da placa.

A segunda e última parte é destinada a estudos de estabilidade de perfis pultrudados de *PRFV* em que são investigadas a influência do nível de ortotropia e as condições de bordo para perfis com seção em *U* e *H* na análise de estabilidade através dos dois métodos apresentados, *MEF* e *MFF*.

Nagahama (2003) também fez comparações entre o método das faixas finitas e o método dos elementos finitos através do programa comercial ABAQUS para perfis de seção aberta e parede fina de aço formado a frio e perfis pultrudados de *PRFV*. Prola e Santos (2004) realizaram comparações de análises lineares de estabilidade de perfis formados a frio por meio do *MEF* e *MFF*. Para as análises com o *MFF*, Prola e Santos (2004) utilizaram dois programas desenvolvidos por Prola (2001): (i) Método das Faixas Finitas Semi-Analítico, onde os deslocamentos longitudinais são aproximados por funções trigonométricas (permite somente que os bordos extremos sejam simplesmente apoiados), e (ii) Método das Faixas Finitas com Funções *Splines*, onde os deslocamentos longitudinais são aproximados por funções *splines* (permite quaisquer condições de contorno nos bordos). Os resultados foram comparados com o *MEF* através do programa comercial SAP2000.

Alguns destes trabalhos serão citados ao longo deste capítulo na comparação entre os métodos *MEF* e *MFF*.

5.1. Estudos Iniciais com o *MEF*.

Inicialmente apresentam-se estudos de malhas e a convergência dos resultados obtidos pelos programas *INSTABACM* e *INSTABDKQ* com resultados analíticos obtidos na literatura. Apresentam-se os resultados de análises lineares de estabilidade efetuadas em placas constituídas de materiais isotrópicos submetidas a várias condições de carregamento e vinculações.

5.1.1. Compressão Uniforme

No primeiro estudo de modelagem utilizou-se a placa retangular representada na Figura 5.1, cujos bordos longitudinais e transversais estão simplesmente apoiados, sendo submetida à compressão uniforme.

Na Tabela 5.1 mostram-se os resultados obtidos do coeficiente de flambagem para a placa com os quatro bordos simplesmente apoiados e com a relação entre o comprimento e a largura $a/b=1,0$ utilizando-se os programas *INSTABACM* e

INSTABDKQ. Verifica-se, neste caso, que a convergência no programa *INSTABDKQ* ocorreu “por cima”, ou seja, os valores vão diminuindo com o refinamento da malha, convergindo para o valor exato, enquanto que no programa *INSTABACM* a convergência ocorreu “por baixo” (valores vão aumentando com o refinamento da malha). Este fato resulta da aproximação do campo de deslocamentos utilizados na formulação dos elementos. A utilização de elementos finitos não conformes (incompatíveis) torna os modelos discretizados menos rígidos e, conseqüentemente, podem conduzir a estimativas de tensões críticas de bifurcação inferiores ao valor exato, Reis e Camotim (2000) e Zienkiewicz e Taylor (1991).

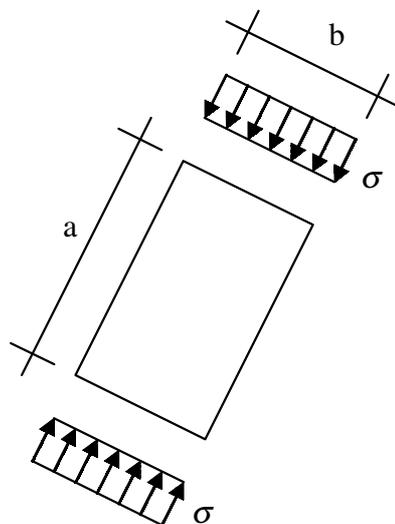


Figura 5.1: Placa retangular submetida à compressão uniforme.

Tabela 5.1: Coeficientes de flambagem para placas com bordos longitudinais e transversais simplesmente apoiados.

Malha	<i>INSTABACM</i>	<i>INSTABDKQ</i>
2×2	3,1892	4,087
4×4	3,7603	4,037
6×6	3,8873	4,016
8×8	3,9352	4,009
12×12	3,9707	4,004
14×14	3,9784	4,003
Resultado Exato, (Yu, 2000)		4,000

Observa-se ainda que com 196 elementos (malha 14×14) o valor do coeficiente de flambagem apresenta um erro relativo de 0,54% e 0,075% utilizando-se os programas *INSTABACM* e *INSTABDKQ*, respectivamente. Ressalta-se que com o programa *INSTABDKQ*, o erro relativo é de apenas 0,4% ao se utilizar 36 elementos (malha 6×6). Verifica-se também que a convergência para o valor exato utilizando-se o elemento *DKQ* (programa *INSTABDKQ*) é mais rápida. Quanto ao modo de instabilidade a placa exibe um semi-comprimento de onda ($n = 1$).

Na Tabela 5.2 apresentam-se os resultados obtidos para a placa com os bordos transversais e um bordo longitudinal simplesmente apoiados e outro bordo longitudinal engastado, sendo a relação entre os lados $a/b = 0,795$, cujo modo de instabilidade exibe um semi-comprimento de onda ($n = 1$). Verifica-se que a convergência para o valor exato com o programa *INSTABDKQ* é bem mais rápida: com 400 elementos (malha 20×20) o erro relativo é inferior a 0,02% e com apenas 16 elementos (malha 4×4) o erro relativo é igual 0,59%.

A Tabela 5.3 apresenta os resultados obtidos para a placa com os quatro bordos engastados e com a relação entre os lados $a/b = 1$. Verifica-se que a convergência para o valor exato, fornecido em Bradford e Azhari (1995), com um semi-comprimento de onda ($n = 1$) é mais rápida utilizando-se o *INSTABDKQ*: com 676 elementos (malha 26×26) o erro relativo é de 0,22% enquanto que utilizando-se o programa *INSTABACM* o erro relativo é de 0,38%. Ressalta-se que discretizando-se a placa com 256 elementos *DKQ* (malha 16×16), o erro relativo é de apenas 0,5%.

Tabela 5.2: Coeficientes de flambagem para placas com bordos transversais simplesmente apoiados e longitudinais apoiado-engastado

Malha	<i>INSTABACM</i>	<i>INSTABDKQ</i>
2×2	4,278	5,153
4×4	5,020	5,378
8×8	5,300	5,403
15×15	5,378	5,408
20×20	5,392	5,409
Resultado Exato, (Prola, 2001)		5,410

Tabela 5.3: Coeficientes de flambagem para placas com quatro bordos engastados ($a/b = 1$)

Malha	<i>INSTABACM</i>	<i>INSTABDKQ</i>
2×2	9,7691	10,274
4×4	9,2393	9,6056
6×6	9,5847	9,8112
8×8	9,7696	9,9134
10×10		9,9669
14×14	9,9652	10,017
16×16		10,030
26×26	10,041	10,057
40×40	10,060	10,067
60×60	10,068	10,071
Valor Exato	10,08	

A Tabela 5.4 mostra os resultados obtidos para a placa com os quatro bordos engastados e uma relação entre os lados $a = 2b$. Para este exemplo o modo de instabilidade obtido exibe três semi-comprimentos de onda ($n = 3$). Verifica-se que com 800 elementos (malha 40×20) os programas *INSTABACM* e *INSTABDKQ* apresentaram convergência aos valores exatos obtidos por Bradford e Azhari (1995), com erros relativos de 0,8% e 0,57%, respectivamente.

Apresentam-se na Tabela 5.5 resultados obtidos pelo programa *INSTABDKQ* para uma placa retangular com relação $a/b = 2,0$, cujos bordos transversais são simplesmente apoiados e os bordos longitudinais, engastados. Neste caso o número de semi-comprimentos de onda exibido no modo de instabilidade é igual a três ($n = 3$). Observa-se que com 5.000 elementos (malha 50×100) a diferença relativa em relação ao valor exato é da ordem de 0,03%.

Tabela 5.4: Coeficientes de flambagem para placas com quatro bordos engastados ($a/b = 2$)

Malha	<i>INSTABACM</i>	<i>INSTABDKQ</i>
4x2	6,9478	5,8891
8x4	6,9952	7,2125
20x10	7,6773	7,7414
30x15	7,7797	7,8100
40x20	7,8173	7,8348
60x30	7,8448	7,8526
80x40	7,8545	7,8589
100x50	7,8569	7,8622
120x60	7,8615	7,8635
Valor Exato	7,8800	

Tabela 5.5: Coeficientes de flambagem para placas com bordos transversais simplesmente apoiados e longitudinais engastados.

Malha	<i>INSTABDKQ</i>
8x4	6,3908
16x8	6,8173
32x16	6,9324
50x25	6,9555
60x30	6,9604
40x80	6,9653
50x100	6,9676
Resultado Exato (Prola, 2001)	6,970

5.1.2. Compressão Uniforme em Duas Direções Perpendiculares

Os programas também permitem analisar a estabilidade de placas submetidas a tensões em duas direções perpendiculares, como mostra a Figura 5.2. Timoshenko (1936) demonstra que para o caso de placa quadrada com bordos simplesmente apoiados e submetida às tensões de compressão de igual intensidade em direções

perpendiculares ($\sigma_x = \sigma_y$), a tensão crítica de flambagem é igual à metade da tensão obtida quando a placa está submetida à tensão de compressão em uma só direção.

A Tabela 5.6 mostra os resultados obtidos para a placa quadrada com os quatro bordos simplesmente apoiados, relação $a/b = 1$, e com tensões de compressão em duas direções perpendiculares. Ambos os programas convergiram para o resultado exato sendo que com 196 elementos (malha 16×16) os programas *INSTABACM* e *INSTABDKQ* apresentam erros relativos iguais a 0,54% e 0,05%, respectivamente. Ressalta-se que com 36 elementos (malha 6×6) o programa *INSTABDKQ* apresenta resultado com precisão de 10^{-3} e erro relativo igual a 0,4%.

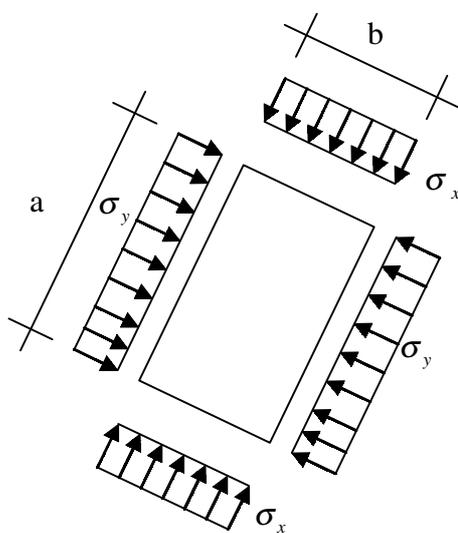


Figura 5.2: Placa submetida à compressão em direções perpendiculares.

Tabela 5.6: Coeficientes de flambagem para placas simplesmente apoiadas, $a/b = 1$, sob compressão em direções perpendiculares.

Malha	<i>INSTABACM</i>	<i>INSTABDKQ</i>
2×2	1,6538	2,078
4×4	1,8819	2,019
6×6	1,9439	2,008
8×8	1,9677	2,004
10×10	1,9791	2,003
12×12	1,9854	2,002
14×14	1,9892	2,001
Resultado Exato		2,000

5.1.3. Flexão Pura de Placas

O programa *INSTABDKQ* também permite analisar a estabilidade de placas submetidas a diagramas de tensões aplicadas variáveis. Na Tabela 5.7 apresentam-se os resultados da tensão crítica de flambagem fornecidos pelo programa *INSTABDKQ* para uma placa com todos os bordos simplesmente apoiados, relação $a/b=2,0$, sob a ação de um diagrama de tensões aplicadas correspondentes à flexão pura e cujo modo de instabilidade exibe três semi-comprimentos de onda ($n=3$).

Para a escolha da malha de elementos finitos procurou-se obter elementos quadrados. Verifica-se a convergência para o valor exato fornecido em Timoshenko (1936) com o refinamento da malha, e com 800 elementos (malha 20×40) o erro relativo é de 0,39%.

Tabela 5.7: Placa submetida à flexão pura ($n=3$)

Malha	<i>INSTABDKQ</i>
8×16	24,840
16×32	24,066
20×40	23,993
Resultado Exato, (Prola, 2001)	23,900

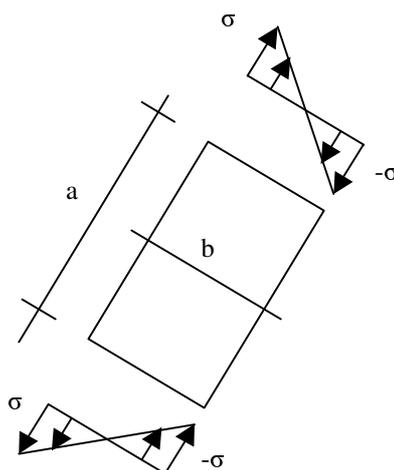


Figura 5.3: Placa retangular simplesmente apoiada submetida à flexão pura.

5.2. Estudos Iniciais com *MFF*

Conforme já exposto no Capítulo 4 o método das faixas finitas semi-analítico (*MFF*), no qual os programas *CU-FSM* (Schafer, 2001), *ALESA* (Prola, 2001) e o *INSTABFAIXA* desenvolvido neste trabalho se baseiam, permite a análise linear de estabilidade em perfis prismáticos cujas condições de apoio dos bordos transversais são simplesmente apoiados.

A Tabela 5.8 mostra os coeficientes de flambagem obtidos pelo programa *ALESA* (Prola, 2001) para placas com bordos transversais simplesmente apoiados e com combinações de bordos longitudinais simplesmente apoiados (B_{SA}) e engastados (B_E). Consideram-se três placas, com condições de contorno $B_{SA}-B_{SA}$, $B_{SA}-B_E$ e B_E-B_E e as relações entre o comprimento e a largura (a/b) indicadas. O número de semi-comprimentos de onda dos modos de instabilidade adotados foi de $n=1$, para as duas primeiras placas, e $n=3$, para a última placa (B_E-B_E).

Observa-se que, em todos casos considerados, ocorre uma convergência rápida para o resultado analítico obtido na literatura, o qual é reproduzido para discretizações com um pequeno número de faixas finitas. Assim, tem-se que os resultados se aproximam dos valores exatos (com precisão de 10^{-3}) com cinco e sete faixas nas combinações de B_A-B_A e B_A-B_E , respectivamente. Já para o caso B_E-B_E são necessárias doze faixas para se obter um valor próximo do resultado exato (precisão de 10^{-2}).

No caso de uma placa quadrada com todos os bordos simplesmente apoiados, submetida a carregamentos de compressão de igual intensidade em duas direções perpendiculares, o programa *INSTABFAIXA* apresenta convergência ao resultado exato (com precisão de 10^{-3}) com quatro faixas, conforme mostra a Tabela 5.9.

Assim como no método dos elementos finitos, o *MFF* também permite a análise linear de estabilidade de placas submetidas à flexão (diagrama de tensões linearmente variáveis). A Tabela 5.10 mostra os valores de coeficientes de flambagem (K_b) obtidos por Prola (2001) através do programa *ALESA*, no caso de uma placa retangular com relação $a/b=2,0$ e com todos os bordos simplesmente apoiados, submetida à flexão pura e cujo modo de instabilidade exhibe três semi-comprimentos de onda ($n=3$).

Tabela 5.8: Coeficientes de flambagem para placa retangular sob compressão uniforme utilizando *MFF*.

Número de faixas	Bordos longitudinais		
	$B_{SA}-B_{SA}$	$B_{SA}-B_E$	B_E-B_E
1	4,258	7,144	-
2	4,009	5,482	7,227
3	4,002	5,425	7,029
4	4,001	5,415	6,991
5	4,000	5,412	6,980
6		5,411	6,976
7		5,410	6,974
8		5,410	6,973
9		5,410	6,973
10			6,972
11			6,972
12			6,972
a/b	1,0	0,795	2,0
n	1	1	3
Resultado Exato	4,000	5,410	6,970

Tabela 5.9: Coeficientes de flambagem obtidos com *MFF* para placa sob compressão $\sigma_x = \sigma_y$

Número de faixas	K_b
1	2,115
2	2,004
3	2,001
4	2,000
5	2,000
Resultado Exato	2,000

Através dos resultados fornecidos, observa-se uma rápida convergência ao valor analítico com um pequeno número de faixas utilizadas na discretização da seção transversal.

Tabela 5.10: Coeficientes de flambagem obtidos com *MFF* para placa sob flexão pura

Número de faixas	K_b
1	27,410
2	25,454
3	24,219
4	23,954
5	23,914
6	23,900
Resultado Exato	23,900

5.3. Comparação entre *MEF* e *MFF* - Seção em *U*

Para comparar a eficiência entre os métodos *MEF* e *MFF*, realiza-se inicialmente uma análise linear de estabilidade de uma coluna engastada e livre, com seção transversal em *U* e material isotrópico ($E= 210,00 \text{ GPa}$; $\nu = 0,30$), submetida a uma carga de compressão centrada na extremidade livre, conforme mostra a Figura 5.4. Lima *et al* (2002) trataram analiticamente este exemplo através de equações diferenciais linearizadas (as quais fornecem somente a carga crítica de flambagem) e concluíram que nesta estrutura ocorre o fenômeno da flambagem por flexo-torção com uma carga crítica de $P_{cr}=94,95 \text{ kN}$.

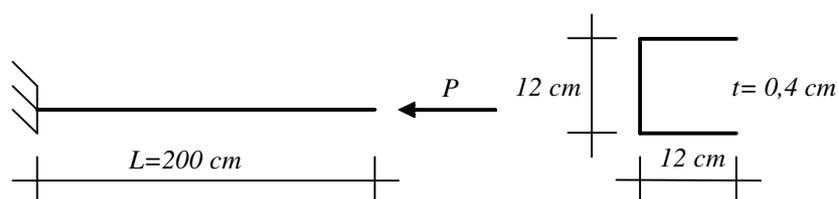


Figura 5.4: Coluna engastada e livre, (Lima *et al*, 2002).

Para a análise com o *MEF*, discretizou-se a coluna em 792 elementos *DKQ* e utilizou-se o programa *INSTABDKQ*. O erro relativo obtido na análise foi de 1,06%, como mostra a Tabela 5.11.

Considerando que a formulação utilizada no Método das Faixas Finitas só é permitida a consideração de bordos extremos simplesmente apoiados, modelou-se uma coluna simplesmente apoiada com o dobro do comprimento, sendo igual a 400 cm, conforme mostra a Figura 5.5. A Tabela 5.12 mostra os resultados obtidos pelo programa *INSTABFAIXA*.

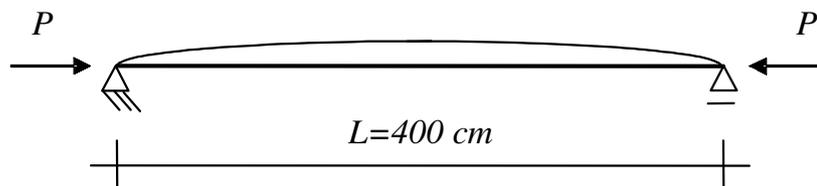


Figura 5.5: Coluna simplesmente apoiada sob compressão.

Tabela 5.11: Carga crítica obtida pelo *MEF* para coluna engastada e livre.

Dimensão do elemento (cm)	Número de elementos	Carga Crítica (kN)
4,00×4,00	450	97,25
3,03×3,00	792	96,01
2,00×2,00	1800	95,08
1,00×1,00	7200	94,53
0,80×0,80	28800	94,47
Resultado "Exato"		94,95

Observa-se que na análise linear de estabilidade utilizando o Método das Faixas Finitas obtém-se uma rápida convergência da carga crítica em relação ao valor exato obtido por Lima *et al* (2002). Com 21 faixas (7 na alma e 7 em cada mesa) a diferença relativa obtida é inferior a 0,1%, sendo que com apenas 11 faixas (4 na alma e 3 em cada mesa) a diferença relativa é igual a 0,48%, bem inferior à diferença obtida através da análise por *MEF* com 792 elementos.

Observa-se assim que uma malha fina de elementos é necessária para se obter uma boa precisão ao se utilizar o método dos elementos finitos, *MEF*, o que resulta em um esforço computacional muito mais elevado em comparação com a análise através do método das faixas finitas, *MFF*.

A Figura 5.6 mostra a configuração do modo de instabilidade global por flexo-torção obtida pelo método dos elementos finitos através do programa *INSTABDKQ*, para a viga engastada e livre.

Tabela 5.12: Carga crítica obtida pelo *MFF* para coluna simplesmente apoiada.

Número de faixas		Carga Crítica (kN)
Alma	Mesa	
1	1	100,28
2	1	98,61
2	2	96,27
3	2	95,96
3	3	95,52
4	3	95,41
4	4	95,25
5	4	95,20
5	5	95,13
6	5	95,10
6	6	95,06
7	7	95,03
10	10	94,96
15	15	94,94
16	15	94,94

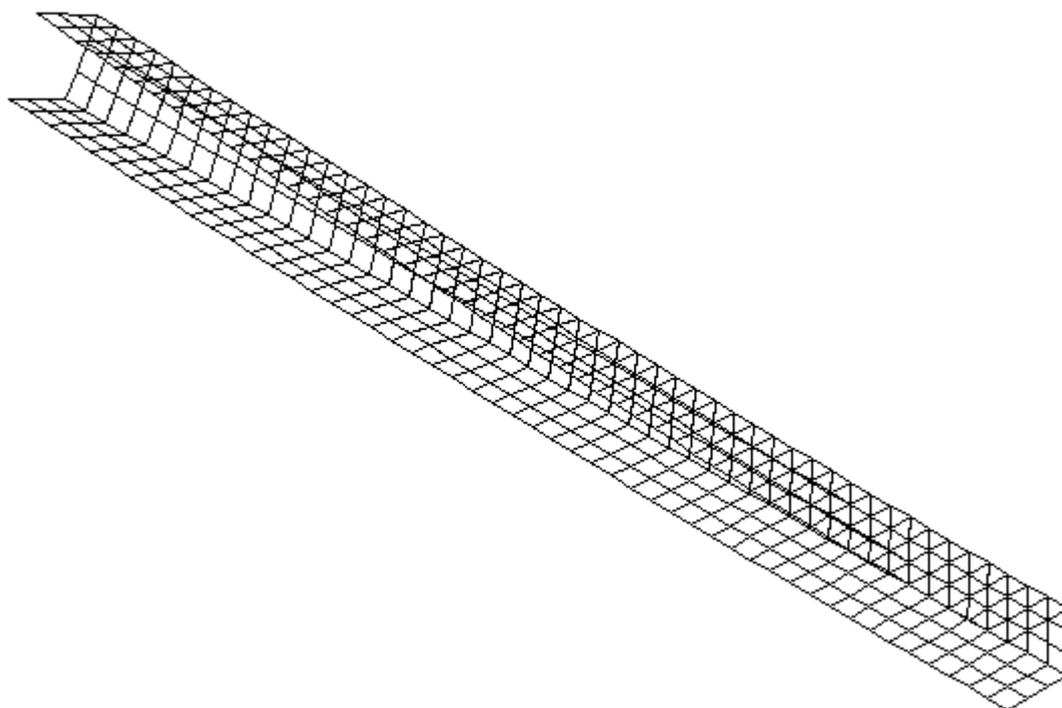


Figura 5.6: Modo de instabilidade da viga engastada-livre em seção *U*.

5.4. Efeito da Ortotropia do Material e do Comprimento do Perfil – Seção *U*

Para o estudo da influência do nível de ortotropia na tensão crítica de bifurcação, considera-se uma viga de seção em *U* de dimensões $b_1 = b_2 = 120\text{mm}$ e $t = 4\text{mm}$, bordos extremos simplesmente apoiados, fabricada de material pultrudado de PRFV. O perfil é composto de lâminas de *rovings* de fibra de vidro dispostas a 0° (paralelamente ao eixo longitudinal do perfil) com uma fração volumétrica de 60% e de manta de fios picados (consideradas isotrópicas), conforme mostra a Figura 5.7. As propriedades da fibra, da resina e da manta foram fornecidas pelo fabricante (ENMAC, São José dos Campos, SP). As propriedades elásticas do perfil pultrudado foram estimadas através da Regra das Misturas e da Teoria Clássica da Laminação (*TCL*), utilizando-se o programa computacional *PROMAL* desenvolvido por Kaw (1997). As propriedades equivalentes (material ortotrópico) do laminado no perfil (tanto para a alma como para as mesas) e das propriedades de cada lâmina estão resumidas na Tabela 5.13.

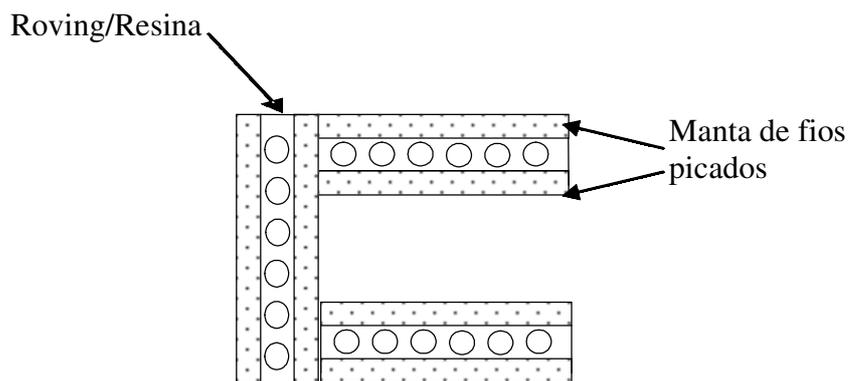


Figura 5.7: Representação esquemática do perfil pultrudado em U de material de PRFV.

A Figura 5.8, obtida pelo programa *INSTABFAIXA*, apresenta três curvas que relacionam a variação da tensão de bifurcação (σ_b) obtida para um semi-comprimento de onda ($n=1$) com a relação a/b_1 para elementos estruturais uniformemente comprimidos, com bordos extremos simplesmente apoiados e constituídos por materiais distintos cujas propriedades elásticas estão resumidas na Tabela 5.14.

Tabela 5.13: Propriedades elásticas do perfil de PRFV, (Santos Neto *et al*, 2004)

Material	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	G_{12} (GPa)	ν_{12}
Manta de fios picados/Resina	7,00	7,00	2,50	0,401
Filamentos (<i>rovings</i>)/Resina	49,24	6,56	2,39	0,272
Laminado	35,55	7,02	2,43	0,319

Onde os índices 1 e 2 são as direções longitudinal e transversal às fibras, respectivamente.

Tabela 5.14: Propriedades elásticas dos materiais ortotrópicos e isotrópicos.

Material	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	G_{12} (GPa)	ν_{12}
Isotrópico $E=E_1$	35,55	35,55	13,48	0,319
Isotrópico $E=E_2$	7,02	7,02	2,66	0,319
Laminado Ortotrópico E_1, E_2	35,55	7,02	2,43	0,319

Onde os índices 1 e 2 são as direções longitudinal e transversal às fibras, respectivamente.

Através da observação das três curvas da Figura 5.8 verifica-se que o valor da carga crítica de flambagem correspondente ao elemento estrutural constituído pelo

material ortotrópico encontra-se entre as cargas críticas dos perfis constituídos de material isotrópico com $E = E_1$ e $E = E_2$. Ou seja, o nível de ortotropia do material influencia significativamente no valor da tensão crítica de bifurcação e no modo de instabilidade do elemento estrutural.

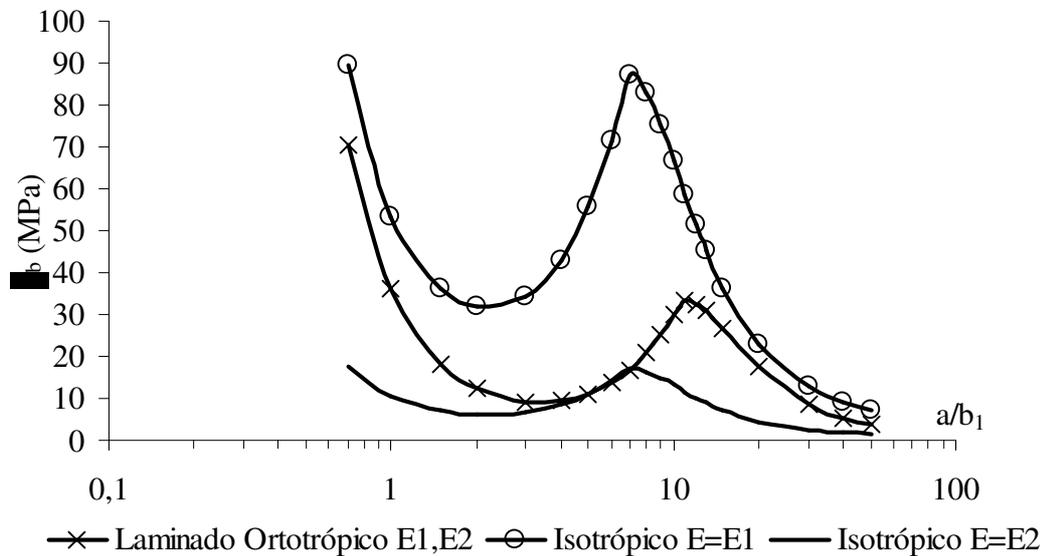


Figura 5.8: Influência do nível de ortotropia para a seção em U .

Observa-se também que cada curva da Figura 5.8 apresenta (i) um ponto de mínimo local cuja tensão de bifurcação está associada ao modo local de placa (*MLP*), (ii) um ramo descendente onde as tensões correspondem ao modo global de flexão (*MGF*) para valores elevados de a/b_1 ($>10,0$). A Figura 5.9 mostra a geometria e as configurações dos modos de instabilidade da seção em U .

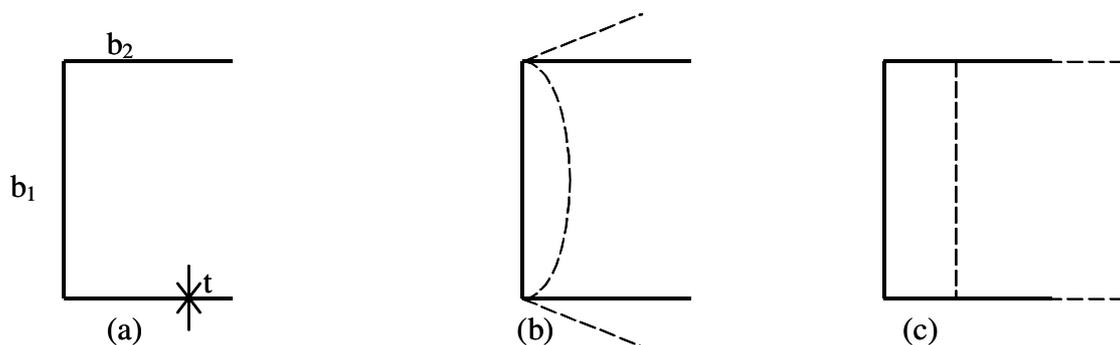


Figura 5.9: Seção em U e modos de instabilidade (a) geometria, (b) *MLP* e (c) *MGF*.

Em relação aos modos de instabilidade, a Figura 5.8 mostra que a transição entre os modos local e global ocorrem com o mesmo comprimento do perfil para os

materiais isotrópicos E_1 e E_2 , enquanto que para o material ortotrópico a transição entre os modos ocorre para comprimentos maiores.

Pretende-se agora mostrar a variação da tensão de bifurcação com o comprimento do perfil em seção U . Para isto considera-se uma seção caracterizada pelas relações geométricas $b_2/b_1=0,5$ e $b_1/t=10$ constituída com material laminado ortotrópico cujas propriedades elásticas foram resumidas na Tabela 5.14.

Observou-se inicialmente neste exemplo que, ao se utilizar o programa *INSTABDKQ (MEF)*, os resultados de tensão de bifurcação para o modo local de instabilidade e o número de semi-comprimentos de onda exibidos variam de acordo com a malha utilizada, conforme mostra a Tabela 5.15. Apresentam-se também na Tabela 5.15, nas duas últimas colunas, os resultados obtidos através do programa *INSTABFAIXA (MFF)* para um e dois semi-comprimentos de onda ($n=1$ e $n=2$, respectivamente) cujos valores críticos encontram-se sublinhados. Para o *MFF*, neste exemplo, a seção transversal é discretizada em 45 faixas, sendo 15 faixas em cada mesa e 15 na alma.

Nas colunas 2, 3 e 4 da Tabela 5.15 estão indicados os números de elementos utilizados na discretização das mesas, da alma e do comprimento longitudinal do perfil, respectivamente. Por exemplo, para $a/b_1=3,5$ com a malha de 1152 elementos finitos (6 elementos nas mesas, 12 elementos na alma e 48 elementos ao longo do comprimento longitudinal do perfil) obtém-se uma tensão de bifurcação de 257,21 MPa com um semi-comprimento de onda ($n=1$), enquanto que para a malha de 720 elementos finitos (6 elementos nas mesas, 12 elementos na alma e 30 elementos ao longo do comprimento longitudinal do perfil) obtém-se uma tensão de bifurcação de 245,15 MPa com dois semi-comprimento de onda ($n=2$).

Portanto, para se investigar o efeito do comprimento do perfil utiliza-se a mesma malha, com um total de 2000 elementos finitos (10 elementos nas mesas, 20 elementos na alma e 50 elementos ao longo do comprimento longitudinal do perfil) para todos os valores de a/b_1 escolhidos. A Tabela 5.16 apresenta as tensões de bifurcação obtidas utilizando o *MEF* com 2000 elementos. Observa-se que a diferença relativa entre os valores obtidos através do *MEF* e do *MFF* aumenta para comprimentos elevados do perfil ($a/b_1 > 15$). Este fato é justificado pela fixação da malha de elementos finitos,

pois para comprimentos longos do perfil o elemento finito torna-se muito alongado, com relação entre os lados do elemento finito maior do que 5,0.

Tabela 5.15: Valores da tensão de bifurcação para o modo local obtidos pelo *MEF* e *MFF* para seção em *U*.

a/b_1	Número de elementos			<i>MEF</i>		<i>MFF</i> σ_b (MPa)	
	Mesa	Alma	Comp.	σ_b (MPa)	n	$n=1$	$N=2$
0,5	10	20	10	1292,3	1	<u>1288,9</u>	2474,9
0,5	12	24	12	1292,6	1		
0,5	14	28	14	1292,2	1		
1,0	10	20	20	415,09	1	<u>415,31</u>	1288,9
1,0	12	24	24	415,15	1		
1,0	14	28	28	415,19	1		
1,5	6	12	18	272,60	1	<u>272,83</u>	637,46
1,5	10	20	30	272,74	1		
1,5	12	24	36	272,77	1		
1,5	14	28	42	272,78	1		
2,0	10	20	40	244,57	1	<u>244,58</u>	415,31
2,0	12	24	48	244,57	1		
2,0	14	28	56	244,57	1		
2,5	10	20	50	252,91	1	<u>252,83</u>	318,76
2,5	12	24	60	252,88	1		
2,5	14	28	70	252,84	1		
3,0	6	12	36	274,67	1	274,11	<u>272,83</u>
3,0	8	16	48	273	2		
3,0	10	20	60	273,04	2		
3,0	12	24	72	274,22	1		
3,0	14	28	84	274,18	1		
3,5	6	12	42	291,46	1	290,9	<u>251,73</u>
3,5	10	20	70	252,25	2		
3,5	12	24	84	290,85	1		
3,5	14	28	98	252,34	2		
4,0	6	12	30	245,15	2	256,67	<u>244,58</u>
4,0	6	12	48	257,21	1		
4,0	10	20	80	245,62	2		
4,0	12	24	98	256,61	1		
4,0	14	28	112	245,64	2		

Tabela 5.16: Valores obtidos de tensão de bifurcação obtidos pelo *MEF* e *MFF* para seção em *U* (malha de elementos finitos constante).

a/b_1	<i>MEF</i>		<i>MFF</i> σ_b (MPa)		Diferença (%)
	σ_b (MPa)	Modo	$n=1$	$n=2$	
0,5	1288,90	MLP ($n=1$)	<u>1288,90</u>	2474,90	0,00
1	415,28	MLP ($n=1$)	<u>415,31</u>	1288,90	0,01
1,5	272,83	MLP ($n=1$)	<u>272,83</u>	637,46	0,00
2	244,61	MLP ($n=1$)	<u>244,58</u>	415,31	0,01
2,5	252,91	MLP ($n=1$)	<u>252,83</u>	318,76	0,03
3	272,98	MLP ($n=1$)	274,11	<u>272,83</u>	0,05
3,5	252,15	MLP ($n=2$)	290,90	<u>251,73</u>	0,17
4	245,45	MLP ($n=2$)	256,67	<u>244,58</u>	0,36
4,5	224,69	MGF	<u>224,45</u>	245,99	0,11
5	196,83	MGF	<u>196,55</u>	252,83	0,14
6	153,97	MGF	<u>153,64</u>	274,11	0,21
7	124,27	MGF	<u>123,92</u>	290,90	0,28
8	103,34	MGF	<u>102,98</u>	256,67	0,35
9	88,19	MGF	<u>87,84</u>	224,45	0,41
10	76,94	MGF	<u>76,58</u>	196,55	0,47
15	39,56	MGF	<u>39,17</u>	112,57	1,01
20	22,93	MGF	<u>22,54</u>	76,58	1,76
30	10,58	MGF	<u>10,18</u>	39,17	3,92

A partir dos resultados da Tabela 5.16, foram elaboradas três curvas mostradas na Figura 5.10 que traduzem a variação da tensão de bifurcação com o parâmetro geométrico a/b_1 (em escala logarítmica) para a seção em *U*: (i) duas curvas obtidas pelo programa *INSTABFAIXA* para um e dois semi-comprimentos de onda ($n=1$ e $n=2$, respectivamente), e (ii) uma curva obtida pelo programa *INSTABDKQ*, lembrando que o *MEF* fornece como resultado o número de semi-comprimentos de onda exibido pelo modo de instabilidade. Observa-se assim que fixando-se a malha de

elementos finitos, neste exemplo, os resultados fornecidos pelo *MEF* coincidem com os obtidos pelo *MFF*.

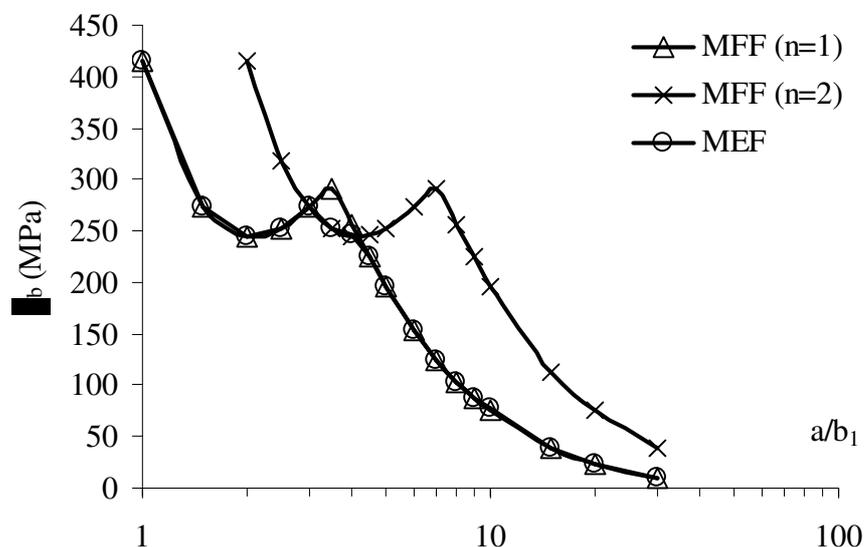


Figura 5.10: Variação da tensão de bifurcação com a/b_1 para a seção em *U*.

A observação destas curvas permite concluir que:

- (i) Para comprimentos menores do que 400mm ($a/b_1 < 4,0$), o modo crítico de instabilidade é o *MLP* cuja tensão crítica de bifurcação é igual a $\sigma_{cr} = 244,57\text{MPa}$.
- (ii) Para comprimentos iguais a 400mm ($a/b_1 = 4,0$), a tensão crítica de bifurcação corresponde a dois modos de instabilidade: um *MLP* com dois semi-comprimentos de onda e um *MGF* com um semi-comprimento de onda.
- (iii) Para comprimentos maiores do que 400mm ($a/b_1 > 4,0$), o modo crítico de instabilidade passa a ser o modo global.

5.5. Comparação entre Métodos *MEF* e *MFF* – Seção *H*

Nas estruturas de perfis pultrudados observa-se a utilização freqüente de elementos estruturais com seção transversal em forma de H cuja geometria está representada na Figura 5.11a. Desta maneira, justifica-se avaliar a eficiência estrutural destes perfis, o que implica estudar, entre outros aspectos, a estabilidade local de elementos estruturais com esta geometria. As configurações dos modos de instabilidade

relevantes para a análise do comportamento de colunas com seção em H são, especificamente, o modo local de placa (MLP) onde ocorre uma translação na junção da alma com a mesa comprimida (Figura 5.11b) e o modo de instabilidade global de flexão (MGF) onde ocorre uma translação da seção (Figura 5.11c).

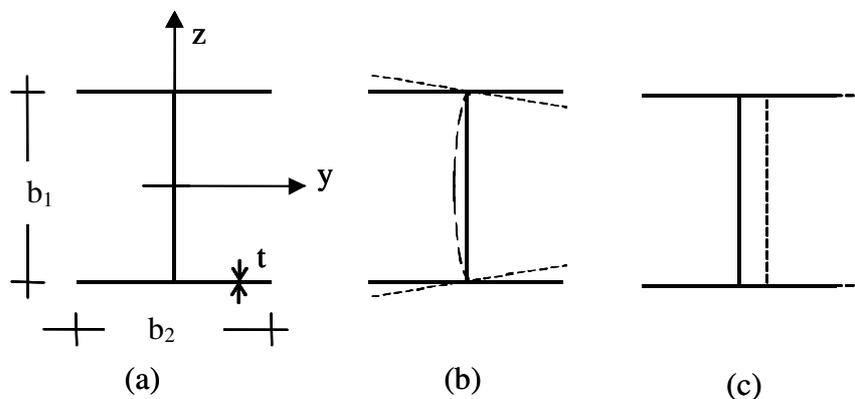


Figura 5.11: Colunas de seção H: (a) características geométricas, (b) MLP e (c) MGF.

Estuda-se inicialmente a estabilidade de perfil de seção H com os bordos transversais extremos simplesmente apoiados e submetido à compressão, através do método dos elementos finitos, MEF , utilizando-se elementos DKQ retangulares. O perfil está representado na Figura 5.11a e é caracterizado pelas dimensões $b_1 = 138,5mm$, $b_2 = 152,0mm$ e $t = 9,5mm$, sendo constituído de material pultrudado de $PRFV$ com as seguintes propriedades elásticas equivalentes de um material ortotrópico: $E_1 = 17100MPa$, $E_2 = 8600MPa$, $G_{12} = 3600MPa$ e $\nu_{12} = 0,296$, onde 1 é a direção longitudinal e 2 a transversal do perfil. A Tabela 5.17 e a Figura 5.12 apresentam, respectivamente, os valores de tensões de bifurcação (σ_b) e a configuração do modo de instabilidade. Observa-se da Figura 5.12 que ocorre um modo local de placa com três semi-comprimentos de onda ($n = 3$), obtidos através do programa $INSTABDKQ$, para o perfil com comprimento $a = 0,802m$. Da Tabela 5.17 pode-se notar que a diferença relativa no valor da tensão crítica obtida com a malha de 1008 elementos e a de 1560 elementos é de 0,12%, sendo que a diferença passa a diminuir com o refinamento subsequente da malha, demonstrando a convergência do método.

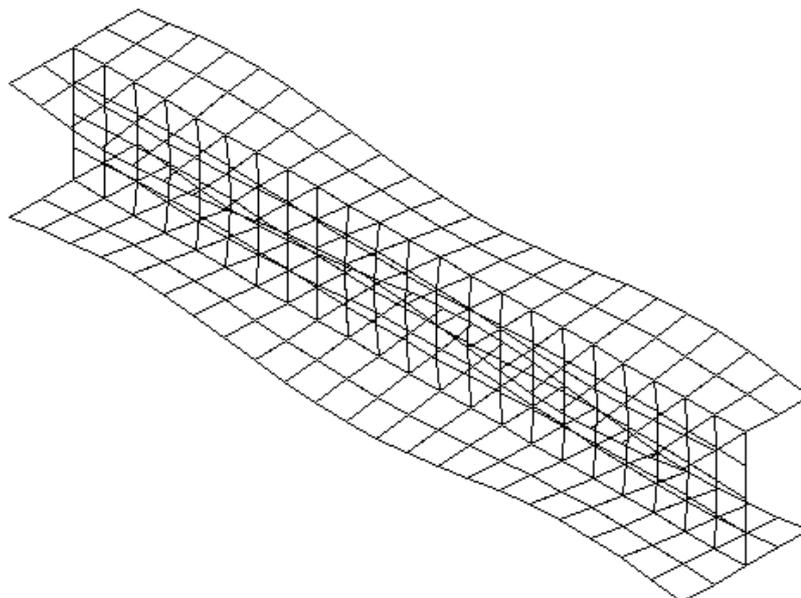


Figura 5.12: Configuração do modo local de placa ($n=3$).

Tabela 5.17: Tensões de bifurcação para perfil H com $a=802mm$, obtidas pelo *MEF* (Programa *INSTABDKQ*)

Número de Elementos	Discretização			σ_b (MPa) $n = 3$
	Mesa	Alma	Longitudinal	
60	2	2	10	88,693
264	4	4	22	95,471
576	6	6	32	96,200
1008	8	8	42	96,447
1560	10	10	52	96,560
2304	12	12	64	96,632
3108	14	14	74	96,665
4032	16	16	84	96,688
5724	18	18	96	96,706

Para comprimentos maiores ($a > 4400mm$) o modo de instabilidade crítica passa a ser o modo global. Para esta seção transversal sujeita à compressão, a Tabela 5.18 e a Figura 5.13 apresentam as tensões de bifurcação e configuração do modo global de flexão (*MGF*) para $a = 4460mm$ obtidas pelo programa *INSTABDKQ*, respectivamente.

Novamente observa-se da Tabela 5.18 a convergência do *MEF*, com a diferença relativa entre os valores de tensão crítica diminuindo com o refinamento da malha (0,94% de diferença relativa entre as malhas de 1656 e 2880 elementos).

Tabela 5.18: Tensões de bifurcação para perfil H com $a=4460mm$, obtidas pelo *MEF* (Programa *INSTABDKQ*)

Número de Elementos	Discretização			σ_b (MPa) $n=1$
	Mesa	Alma	Longitudinal	
360	2	2	30	13,570
720	4	4	60	11,774
1656	6	6	92	11,431
2880	8	8	120	11,325
4380	10	10	146	11,276
5760	12	12	160	11,259

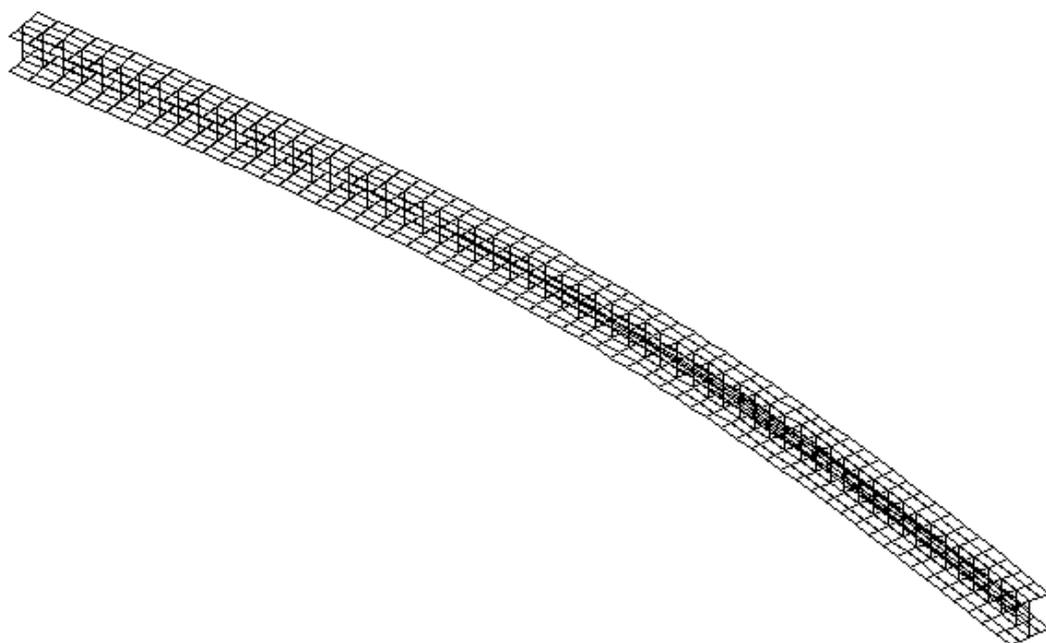


Figura 5.13: Configuração do modo global de flexão ($a=4460mm$).

Em seguida apresenta-se a análise do mesmo perfil de seção *H*, bi-apoiado e sob compressão simples, através do método das faixas finitas, *MFF*. A Tabela 5.19 relata os valores das tensões de bifurcação obtidas através do programa *INSTABFAIXA* para o

mesmo elemento estrutural descrito anteriormente. Lembrando que no método das faixas finitas o número de semi-comprimentos de onda é um dado fornecido ao programa.

Tabela 5.19: Tensões de bifurcação para perfil H obtidas pelo *MEF* (Programa *INSTABFAIXA*)

Número de Faixas		σ_b (MPa)	σ_b (MPa)
Mesa	Alma	a=802mm	a=4460mm
2	2	97,233	11,312
3	2	97,233	11,312
4	4	96,824	11,210
5	4	96,824	11,210
5	6	96,796	11,191
5	8	96,791	11,184
8	8	96,791	11,184
8	10	96,789	11,181
8	16	96,788	11,178
16	16	96,788	11,178
16	20	96,788	11,177
16	30	96,788	11,176
16	40	96,788	11,176
16	60	96,788	11,176
16	80	96,788	11,176
16	100	96,788	11,176
MEF		96,706	11,259

Constata-se que ambos os programas convergiram para praticamente os mesmos valores de tensão de bifurcação. As diferenças relativas entre as tensões de bifurcação obtidas através dos dois métodos de cálculo foram de 0,08% e 0,74% para os modos de instabilidade local ($a = 0,802m$) e global ($a = 4,460m$), respectivamente.

5.6. Efeito da Ortotropia do Material e do Comprimento do Perfil – Seção *H*

Investigam-se agora as tensões críticas de bifurcação de um perfil *H* de dimensões $b_1 = 92,1\text{mm}$, $b_2 = 101,6\text{mm}$ e $t = 9,5\text{mm}$, fabricado pela empresa ENMAC, São José dos Campos (SP), ilustrado na Figura 5.14. O perfil é constituído de material pultrudado de *PRFV*, composto de lâminas de *rovings* dispostas a 0° (paralelamente ao eixo longitudinal do perfil) com uma fração volumétrica de 60% e de mantas de fios picados (consideradas isotrópicas), conforme mostra a Figura 5.15. As propriedades elásticas do perfil pultrudado de material *PRFV* foram estimadas através da Regra das Misturas e da Teoria Clássica da Laminação, utilizando-se o programa computacional *PROMAL* (Kaw, 1997) cujas propriedades elásticas da fibra e da manta foram fornecidas pelo fabricante. As propriedades elásticas equivalentes (material ortotrópico) do perfil estão resumidas na Tabela 5.14.

Uns dos melhores recursos para a avaliação de instabilidade em perfis de seção aberta e parede fina são gráficos que mostram a variação da tensão de bifurcação com o comprimento do perfil, geralmente representados através do parâmetro geométrico a/b_1 em escala logarítmica, onde a é o comprimento do perfil e b_1 é a largura da alma. Neste caso, o método das faixas finitas tem sido utilizado por vários autores na elaboração destas curvas, por permitir uma solução rápida do problema.

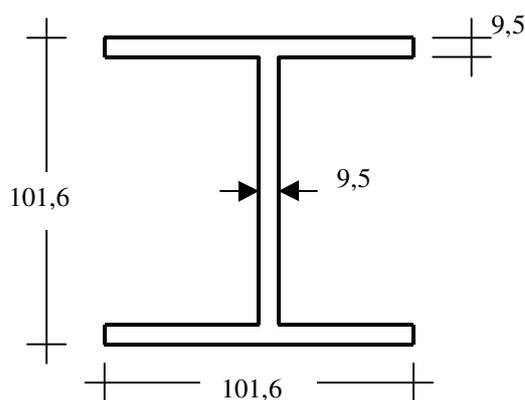


Figura 5.14: Dimensões da seção transversal do perfil *H* pultrudado de *PRFV* (Santos Neto *et al*, 2004).

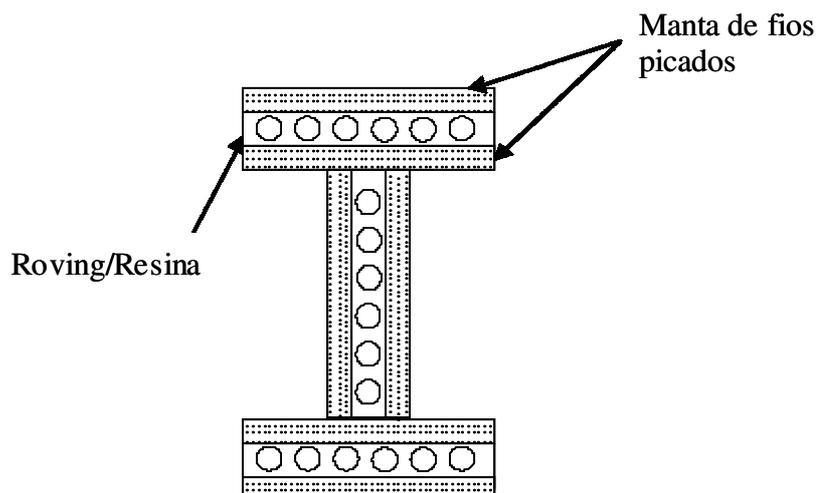


Figura 5.15: Representação esquemática do perfil pultrudado de material *PRFV* em seção *H*.

Através do programa *INSTABFAIXA*, elaborou-se a Figura 5.16 com três curvas que representam a variação da tensão de bifurcação com a relação a/b_1 , para elementos uniformemente comprimidos e com bordos transversais extremos simplesmente apoiados para os três materiais apresentados na Tabela 5.14. Observa-se que cada curva, obtida para um semi-comprimento de onda ($n=1$), apresenta (i) um ponto de mínimo local cuja tensão crítica corresponde ao modo crítico de instabilidade que está associado a um *MLP* e (ii) um ramo descendente, para comprimentos elevados, correspondente ao modo de instabilidade global cujas tensões de bifurcação são equivalentes às tensões críticas de Euler.

A observação das três curvas permite concluir que:

- (i) Os valores das tensões de bifurcação correspondentes ao laminado (material ortotrópico) estão situados entre as tensões dos materiais isotrópicos;
- (ii) A tensão crítica de bifurcação (σ_{cr}) do material laminado é igual a 197,40 MPa, a qual está mais próxima da tensão crítica do material isotrópico $E = E_2$ ($\sigma_{cr} = 150,25MPa$), do que da tensão crítica obtida para o material isotrópico $E = E_1$ ($\sigma_{cr} = 761,23MPa$);
- (iii) A transição entre os modos de instabilidade dos materiais isotrópicos ocorre com os mesmos comprimentos, enquanto que o material ortotrópico apresenta as transições com comprimentos maiores, ou seja, a

curva é deslocada para a direita, evidenciando a diferença de comportamento de um material ortotrópico no modo de instabilidade.

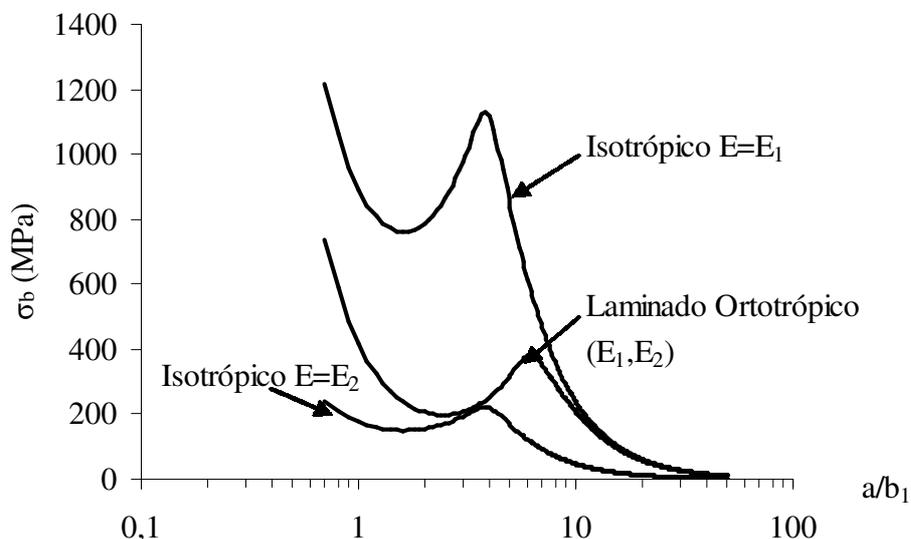


Figura 5.16: Influência do nível da ortotropia do material para a seção H .

A tensão crítica (σ_{cr}) de uma coluna com um determinado comprimento é fornecida pelo menor valor das tensões de bifurcação (σ_b) associado a modos com diferentes números de semi-comprimentos (n) de onda, ou seja:

$$\sigma_{cr} = \min_n [\sigma_b(n)] \quad (5.2)$$

A Figura 5.17 exemplifica esta afirmação mostrando curvas que traduzem a variação de σ_b com a/b_1 e n para a seção em estudo. Chama a atenção o fato da curva com $n=1$ da Figura 5.17 ser a mesma curva obtida para o material laminado da Figura 5.16. Conforme exposto no Capítulo 2, as curvas para diferentes semi-comprimentos de onda podem ser obtidas a partir da curva com $n=1$ por meio de uma translação horizontal e observa-se que:

- (i) Para colunas com relação a/b_1 igual a 10 (mais precisamente $a/b_1 = 10,3$), a tensão crítica de bifurcação corresponde a dois modos de instabilidade: um *MLP* com quatro semi-comprimentos de onda e um *MG* com um semi-comprimento de onda;

- (ii) Em termos do comprimento do perfil, a coluna pode ser classificada como: (a) curta para $a/b_1 < 10,3$; (b) intermediária para $a/b_1 \approx 10,3$; (c) longa para $a/b_1 > 10,3$. O modo crítico de instabilidade é *local* para as colunas curtas e *global*, para as longas. As colunas intermediárias exibem dois modos críticos, um local e outro global.

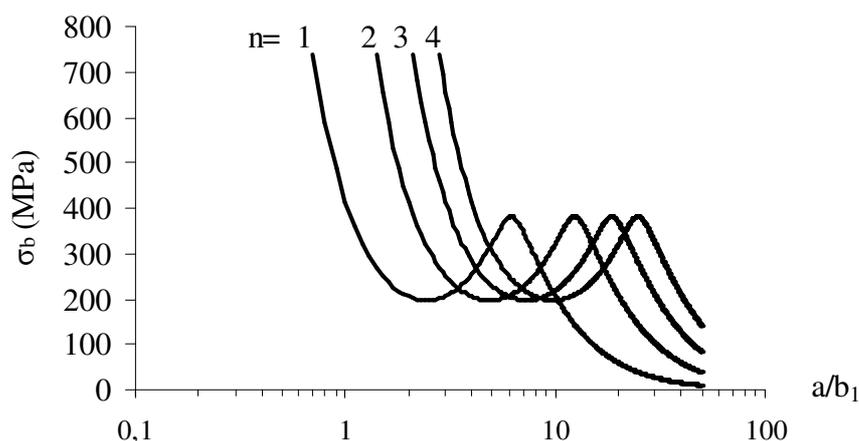


Figura 5.17: Variação da tensão de bifurcação com a/b_1 e n .

Tendo em vista o método dos elementos finitos, foram realizadas análises de instabilidade para dez perfis de seção H e material laminado para diferentes vãos: $a = 225mm$; $a = 410mm$; $a = 450mm$; $a = 580mm$; $a = 650mm$; $a = 710mm$, $a = 820mm$, $a = 1000mm$, $a = 1500mm$ e $a = 2000mm$. Todos os perfis foram discretizados com elementos retangulares DKQ com as dimensões dos lados próximos a $0,01m$, exceto para o vão $a = 2000mm$ onde se adotam elementos retangulares cuja relação entre os lados do elemento é igual a dois.

Diferentemente do método das faixas finitas, o *MEF* fornece como resultado o número de semi-comprimentos de onda que os modos de instabilidade exibem. Na Tabela 5.20 apresenta-se os valores da tensão de bifurcação obtidos através dos programas *INSTABDKQ* e *INSTABFAIXA* para os dez vãos analisados e a Figura 5.18 mostra um gráfico da variação dos valores de tensão crítica de bifurcação (σ_b) obtidos. Os valores obtidos são bem próximos do valor da tensão crítica de bifurcação calculada pelo programa *INSTABFAIXA* ($\sigma_{cr} = 197,40MPa$). Para os vãos $a = 225mm$ e $a = 450mm$, cujas tensões de bifurcação, através do *MFF*, são exatamente iguais a σ_{cr} obtidos com $n=1$ e $n=2$ (ver Figura 5.17), respectivamente, apresentaram valores

bem próximos quando calculados pelo *MEF* ($\sigma_b = 196,96\text{MPa}$ e $\sigma_b = 197,13\text{MPa}$, respectivamente).

Um detalhe ampliado da variação da tensão de bifurcação com a relação geométrica a/b_1 permite concluir que o método dos elementos finitos fornece as tensões críticas de bifurcação e o modo de instabilidade crítico associado, conforme mostra a Figura 5.19.

Tabela 5.20: Comparação entre valores de tensão de bifurcação obtidos pelos métodos *MEF* e *MFF*.

Vão (mm)	σ_b (MPa) <i>INSTABDKQ</i>	σ_b (MPa) <i>INSTABFAIXA</i>	Modo de Instabilidade
225	196,96	197,40	MLP (n=1)
410	199,14	199,11	MLP (n=2)
450	197,13	197,40	MLP (n=2)
580	201,72	202,10	MLP (n=3)
710	197,71	198,02	MLP (n=3)
820	198,78	199,11	MLP (n=4)
1000	180,13	180,04	MG (n=1)
1500	86,783	86,715	MG (n=1)
2000	50,272	50,203	MG (n=1)

Da Figura 5.20 a Figura 5.25 estão mostradas as configurações dos modos de instabilidade para os seis primeiros vãos obtidas pelo programa *INSTABDKQ*. Relativamente ao número de semi-comprimentos de onda os modos locais exibem um ($a = 225\text{mm}$), dois ($a = 410\text{mm}$ e $a = 450\text{mm}$), três ($a = 580\text{mm}$, $a = 650\text{mm}$ e $a = 710\text{mm}$) e quatro ($a = 820\text{mm}$), respectivamente. A Figura 5.26 mostra a configuração do modo global de instabilidade exibido pelo perfil com $a = 2000\text{mm}$ obtida também pelo programa *INSTABDKQ*.

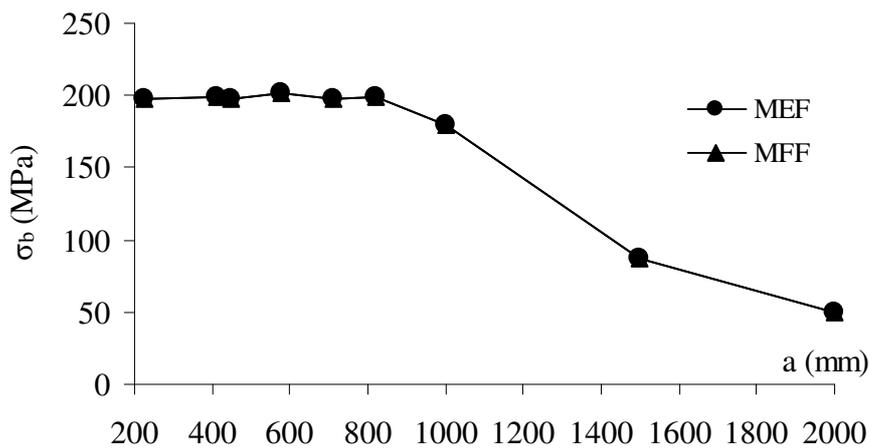


Figura 5.18: Valores de tensão de bifurcação obtidos pelo *MFF* e *MEF*.

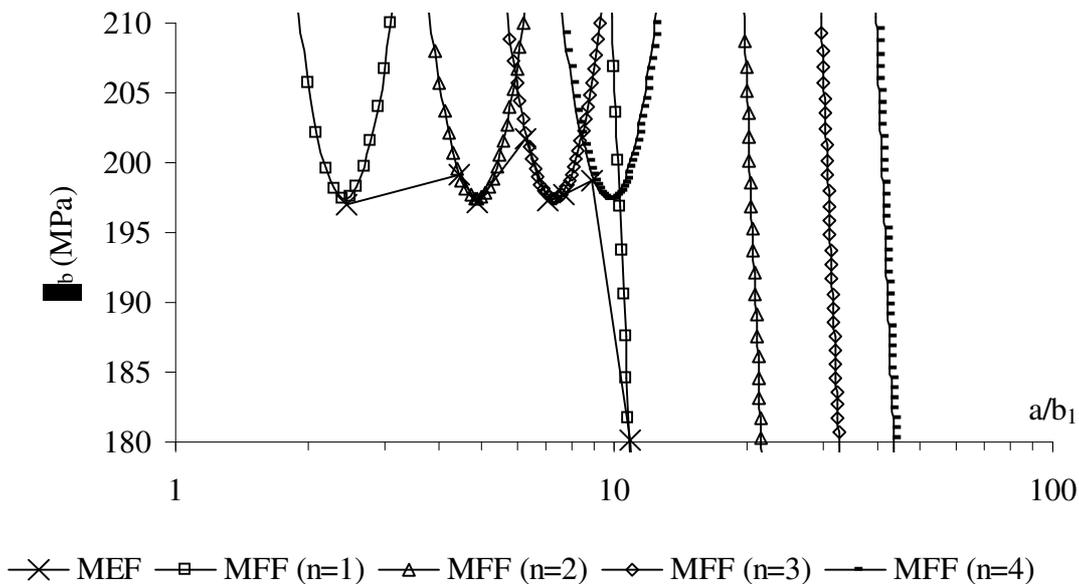


Figura 5.19: Detalhe ampliado da variação da tensão de bifurcação com o comprimento do perfil.

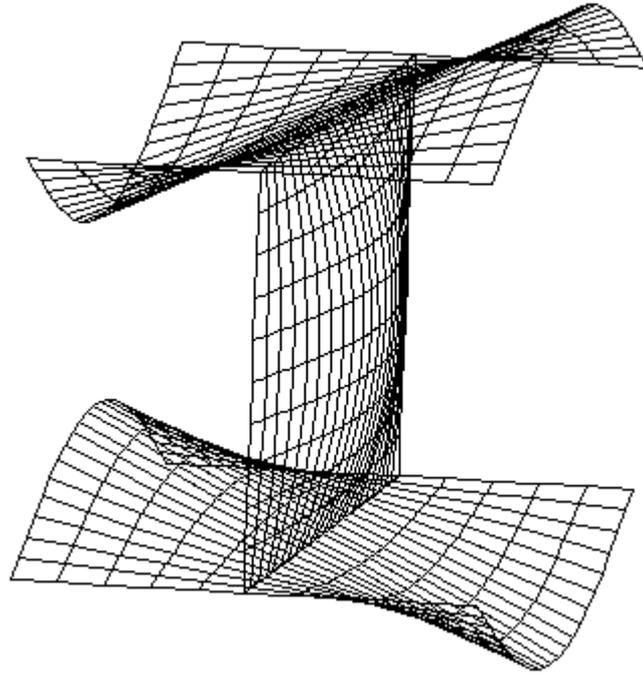


Figura 5.20: Configuração do *MLP* para $a=0,225\text{m}$ ($n=1$)

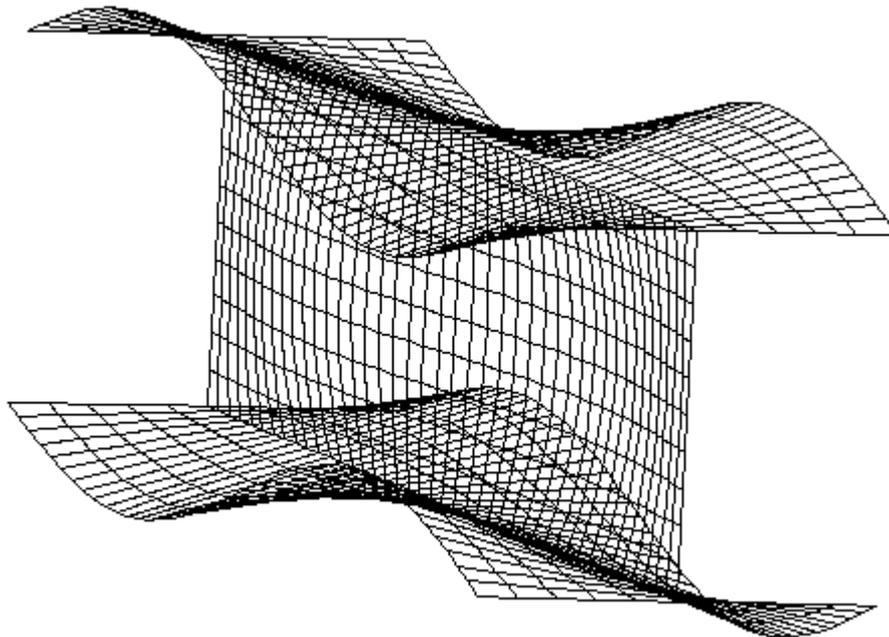


Figura 5.21: Configuração do *MLP* para $a=0,41\text{m}$ ($n=2$)

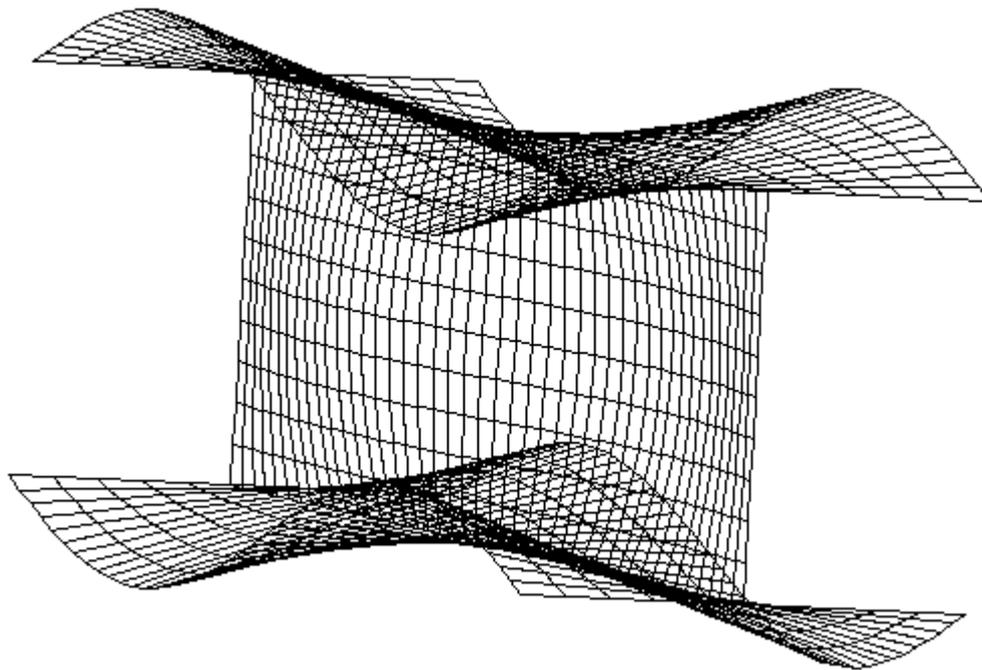


Figura 5.22: Configuração do *MLP* para $a=0,45\text{m}$ ($n=2$)

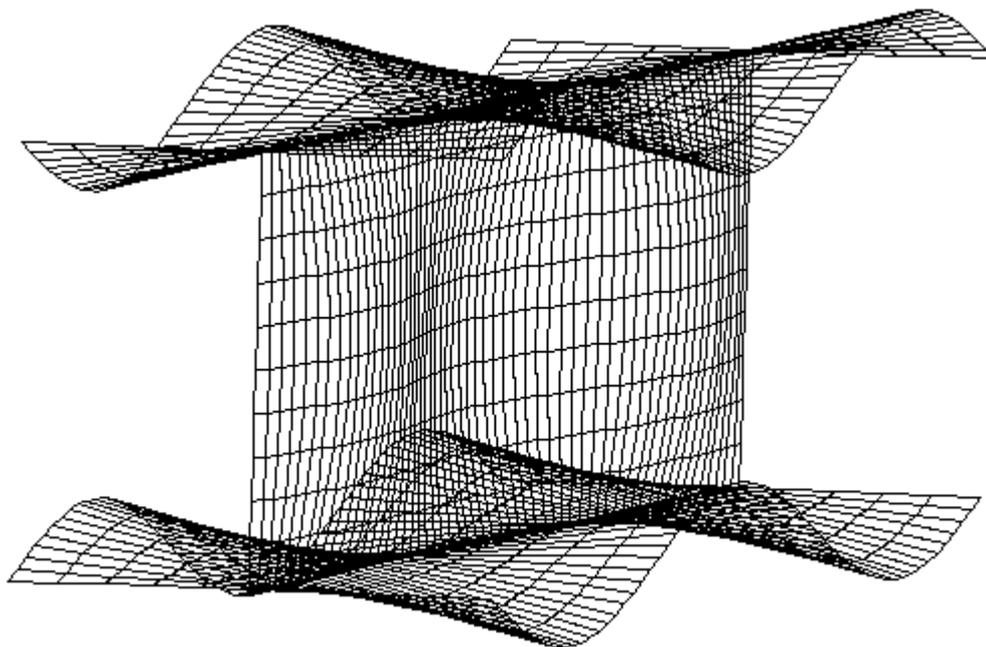


Figura 5.23: Configuração do *MLP* para $a=0,58\text{m}$ ($n=3$)

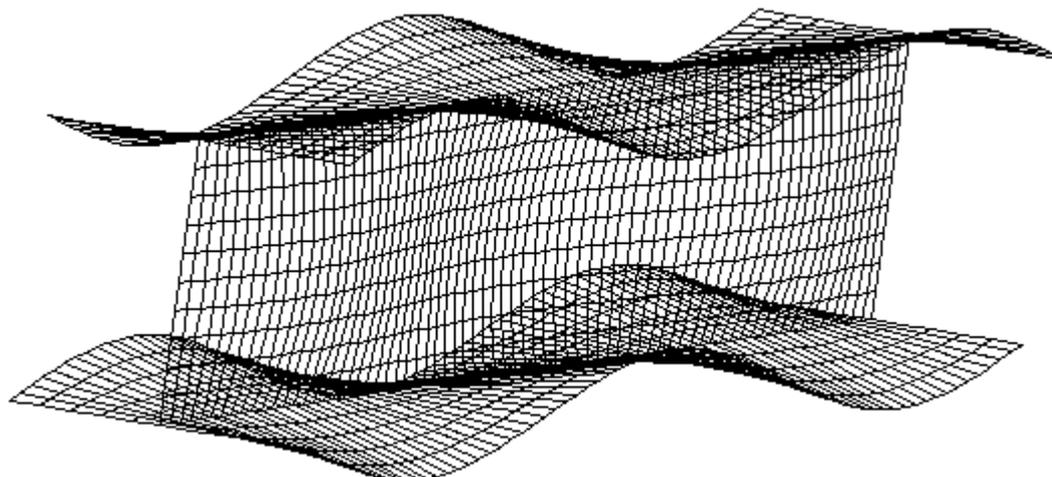


Figura 5.24: Configuração do *MLP* para $a=0,71\text{m}$ ($n=3$)

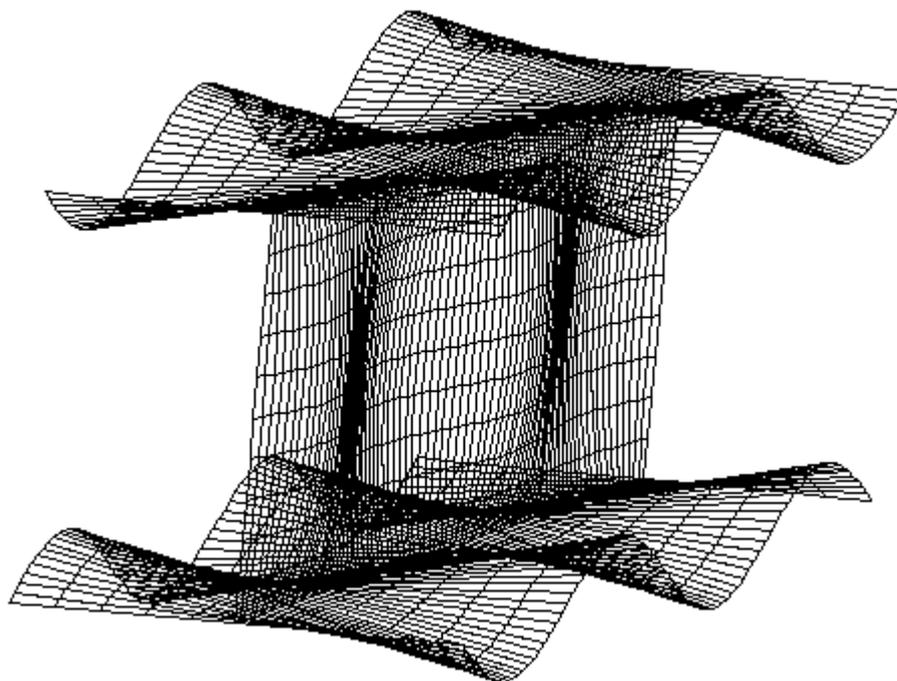


Figura 5.25: Configuração do *MLP* para $a=0,82\text{m}$ ($n=4$)

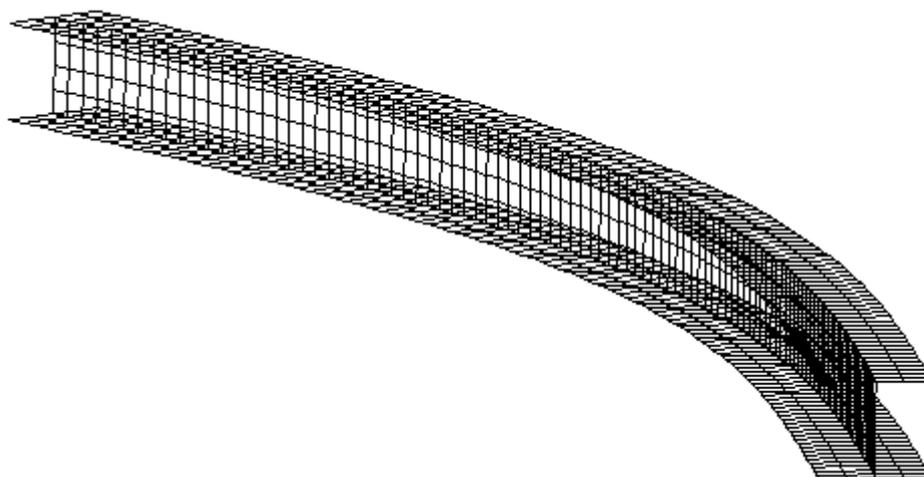


Figura 5.26: Configuração do modo global (*MG*) para $a=2,00m$.

5.7. Efeito da Compressão Variável – Seção *H*

Efetuiu-se até agora a análise linear de estabilidade de perfis estruturais de material *PRFV* submetidos à compressão unicamente (colunas). Porém, os programas desenvolvidos, *INSTABDKQ* e *INSTABFAIXA*, permitem também a análise linear de estabilidade de vigas e vigas-colunas (*i.e.* elementos estruturais solicitados, simultaneamente, por esforços axiais de compressão e momentos fletores devido a um carregamento transversal). Quando o elemento estrutural for submetido à tensão de tração, a matriz de rigidez geométrica não é positivo-definida sendo necessário recorrer às subrotinas *Lapack* (Anderson *et al*, 1999) para a solução do problema de autovalores e autovetores, nas quais é exigido um esforço computacional elevado, pois as rotinas calculam todos os autovalores existentes. Baseado neste fato e na diferença do número de graus de liberdade entre o Método dos Elementos Finitos e o Método das Faixas Finitas, optou-se em efetuar a análise linear de estabilidade de vigas e vigas-colunas somente por meio do programa *INSTABFAIXA*.

Para mostrar a influência da distribuição de tensões na análise linear de estabilidade mostram-se, em seguida, os resultados obtidos para o perfil pultrudado de material *PRFV* de seção em *H*, fabricado pela empresa ENMAC, São José dos Campos (SP), ilustrado na Figura 5.14 cujas propriedades elásticas equivalentes (material ortotrópico) do perfil estão resumidas na Tabela 5.14.

A Figura 5.27a mostra a geometria dos perfis de seção H e os modos de instabilidade, que no caso de elementos de vigas são caracterizados por (i) modo local de placa (MLP) (Figura 5.27b) onde ocorre uma instabilidade local da mesa comprimida juntamente com a parte comprimida da alma e (ii) o modo global por torção (MGT) (Figura 5.27c) em que ocorre uma rotação da seção transversal.

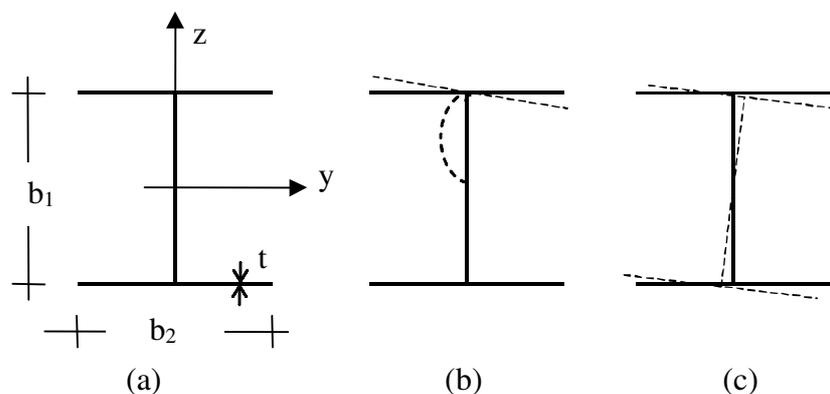


Figura 5.27: Vigas em seção H: (a) características geométricas, (b) MLP e (c) MGT

As distribuições de tensões aplicadas correspondem a diferentes combinações de compressão e de flexão (vigas-colunas), caracterizadas pelo parâmetro ψ (*i.e.* relação entre as tensões aplicadas nos bordos superior e inferior do perfil) e, incluem os casos de compressão uniforme (colunas - $\psi = 1,0$) e de flexão pura (vigas - $\psi = -1,0$), conforme indicado na Figura 5.28.

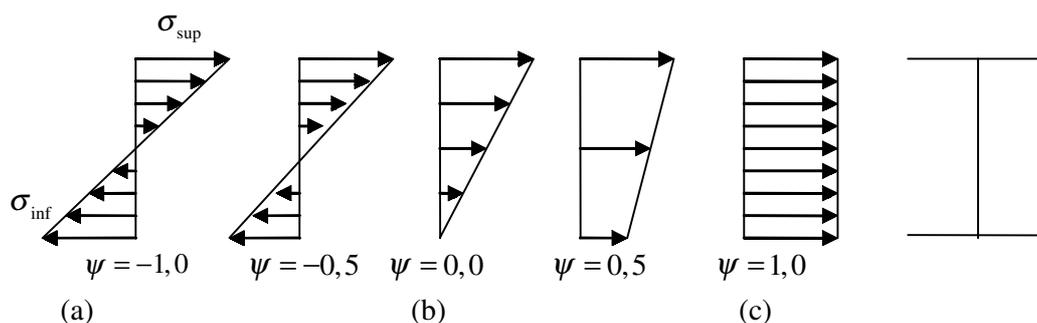


Figura 5.28: Distribuição de tensões aplicadas: (a) viga ($\psi = -1,0$), (b) viga-coluna ($\psi = -0,5$; $0,0$; $0,5$) e (c) coluna ($\psi = 1,0$)

A Figura 5.29 mostra a variação da tensão de bifurcação com a relação geométrica a/b_1 para cinco perfis idênticos (ver Figura 5.14) correspondentes ao comportamento de uma coluna, uma viga e três vigas-colunas, conforme as distribuições de tensões aplicadas indicadas na Figura 5.28. Todas as curvas, obtidas

pelo programa *INSTABFAIXA*, admitem que os modos de instabilidade apresentem um semi-comprimento de onda ($n = 1$).

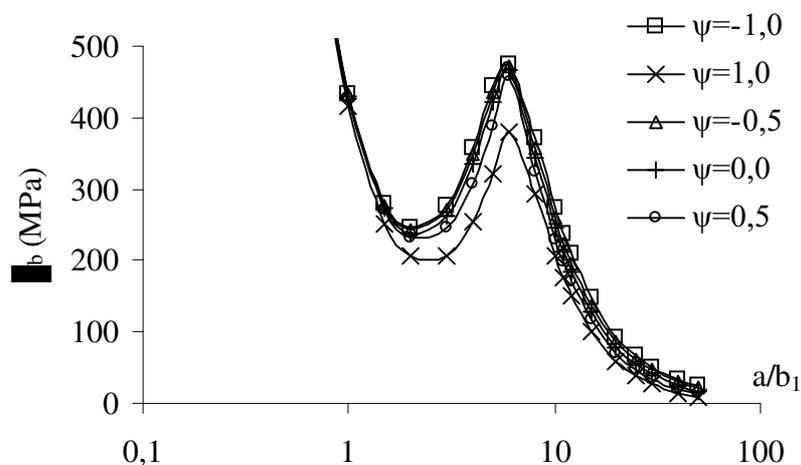


Figura 5.29: Influência da distribuição de tensões aplicadas na tensão de bifurcação.

Observa-se da Figura 5.29 que todas as curvas apresentam uma forma semelhante, exibindo um modo local de placa, cujas tensões de bifurcações associadas, neste caso particular, apresentam pouca variação para os diferentes comportamentos analisados, conforme apresentados na Tabela 5.21.

Tabela 5.21: Tensão de bifurcação crítica para diferentes distribuições de tensões aplicadas

Parâmetro ψ	σ_b (MPa)	a/b_1
-1,0 (viga)	244,42	2,10
-0,5	241,30	2,10
0,0	236,74	2,20
0,5	228,08	2,30
1,0 (coluna)	197,40	2,44

Observa-se que a diferença das tensões de bifurcação críticas entre os comportamentos de viga e de coluna é de aproximadamente 20%. Este fato pode ser explicado devido ao fato da presença de tensões de tração no elemento estrutural provocarem um aumento na rigidez da estrutura. Quanto à configuração do modo de instabilidade, existe uma transição contínua entre os modos exibidos na coluna (Figura 5.11) e na viga (Figura 5.27).

5.8. Considerações sobre as Análises e Métodos Numéricos

Conforme já exposto, a escolha do método de solução do problema de autovalores e autovetores é um fator importante no desempenho computacional. Nesta dissertação adotaram-se dois métodos numéricos para a solução do problema de autovalores: o método do sub-espço e as subrotinas *Lapack*. O método do sub-espço permite o cálculo de um número especificado de autovalores (os menores), enquanto as subrotinas *Lapack* fornecem todos os autovalores, aumentando desta forma consideravelmente o esforço computacional. Porém, o método do sub-espço necessita que tanto a matriz de rigidez elástica quanto a geométrica sejam positivo-definidas. No caso de análises de estabilidade através do método dos elementos finitos, *MEF*, de peças submetidas à compressão simples, implementou-se uma rotina de condensação estática que elimina os graus de liberdade que possuem tensões normais nulas com o intuito de aumentar o campo de aplicação do método do sub-espço. No entanto, a subrotina de condensação estática implementada utiliza matrizes cheias, o que torna o esforço computacional bastante elevado, devido ao número elevado de graus de liberdade do modelo do *MEF*. Para contornar este problema, nos exemplos de compressão simples apresentados neste capítulo, aplicou-se uma tensão transversal bem pequena ($\sigma_y = 10^{-8} \sigma_x$) de modo a se evitar a condensação estática das matrizes.

Um outro aspecto relevante no esforço computacional ao se utilizar o *MEF*, devido ao número elevado de graus de liberdade em comparação ao método das faixas finitas, *MFF*, é a largura de banda das matrizes. Isto explica o fato de que no caso de análises de estabilidade de perfis em seção de forma *H* o esforço computacional envolvido é bem maior do que as análises em perfis de seção em *U*, apesar de que o módulo *ESTRU* do programa utilizado para o *MEF* renumera os nós da estrutura internamente para minimizar a banda da matriz de rigidez.

Deve-se observar também que, no caso de análises de peças submetidas à flexão ou a flexo-compressão através do *MEF*, há a limitação imposta pela memória do computador, pois as subrotinas *Lapack* necessitam que as matrizes sejam armazenadas em forma cheia.

Deve-se ressaltar ainda que o método dos elementos finitos permite análises de estabilidade com uma maior versatilidade de geometrias e condições de apoio quando comparados ao método das faixas finitas semi-analítico. No entanto, deve-se cuidar ao

utilizar o *MEF* para restringir corretamente os graus de liberdade dos nós da estrutura, de forma a representar adequadamente as condições de bordo.

No próximo capítulo são extraídas as conclusões deste trabalho e são feitas algumas recomendações para trabalhos futuros.

6. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

6.1. Conclusões

Este trabalho teve como objetivo estudar a estabilidade linear de perfis pultrudados de materiais de *PRFV* através do método dos elementos finitos, *MEF*, e do método das faixas finitas, *MFF*, considerando os materiais ortotrópicos e em regime elástico.

No Capítulo 2 apresentou-se uma revisão bibliográfica ampla dos materiais compostos avançados, com ênfase nos materiais produzidos pelo processo da pultrusão. Verificou-se que os materiais pultrudados vêm ganhando espaço na utilização em diversos campos e também na construção civil devido a melhores desempenhos mecânicos, físicos e químicos em relação aos materiais convencionais, tais como o aço, o alumínio e a madeira, principalmente em ambientes quimicamente agressivos. Foram apresentadas algumas obras realizadas no Brasil e no exterior com a utilização de materiais pultrudados de *PRFV*. Também foi feita uma revisão bibliográfica dos principais aspectos relacionados ao comportamento geometricamente não linear de barras constituídas de seção aberta e parede fina, importantes para o entendimento das análises lineares de estabilidade.

Verificou-se que os critérios de deformação excessiva e de instabilidade estrutural tendem a governar o projeto de perfis pultrudados de polímeros reforçados com fibra de vidro, *PRFV*, pois o material ortotrópico equivalente apresenta baixos módulos de elasticidade e sua resistência mecânica não é totalmente utilizada.

No Capítulo 3 apresentou-se a formulação e a implementação computacional do método dos elementos finitos para a análise linear de estabilidade através de elementos de casca plana de quatro nós. Utilizaram-se dois elementos de casca obtidos a partir da superposição do elemento plano bilinear com o elemento de placa, considerando-se para este último duas formulações: (i) um elemento de placa não-conforme (elemento *ACM*, Adini e Clough, 1960) e (ii) um elemento de placa conforme (elemento *DKQ*, Batoz e Tahar, 1982). Foram desenvolvidos dois programas computacionais para a análise de estabilidade linear pelo *MEF*, *INSTABACM* e *INSTABDKQ*, na linguagem Fortran 90. Verificou-se que a velocidade de convergência dos resultados é mais rápida quando se utilizam elementos de casca conformes.

Em seguida foram apresentados no Capítulo 4 aspectos relativos ao método das faixas finitas para o estudo da estabilidade linear. Apresentou-se a formulação do método das faixas finitas semi-analítico, no qual se utilizam funções trigonométricas para a aproximação dos deslocamentos longitudinais. A utilização destas funções implica automaticamente que os bordos transversais extremos sejam simplesmente apoiados, limitando o método a estas condições de apoio. O método foi implementado em um programa computacional na linguagem Fortran 90, denominado *INSTABFAIXA*.

No Capítulo 5 foram validados os programas computacionais desenvolvidos, através de comparações dos resultados obtidos pelos métodos numéricos com resultados analíticos publicados na literatura. Também foram efetuados estudos de malha para determinar o nível de discretização necessário (*i.e.* número de elementos finitos e de faixas finitas) para se obter uma boa precisão com os métodos numéricos.

Em seguida efetuaram-se, com ambos os métodos numéricos, análises de estabilidade de perfis pultrudados de materiais *PRFV* de seção *U* e *H*. Observou-se que as diferenças relativas nos exemplos executados entre os métodos apresentados, *MEF* e *MFF*, foram consideradas satisfatórias, inferiores a 0,5%. Foram efetuados estudos sobre a influência que o efeito da ortotropia do material e do comprimento do perfil exerce sobre a natureza do modo de instabilidade crítico e no respectivo valor da tensão de bifurcação. Verificou-se que o nível de ortotropia do material é bastante nítido no comportamento de flambagem, afetando tanto os valores de carga crítica como os modos de instabilidade, já que a transição entre os modos locais para os globais ocorre em perfis de comprimentos maiores quando se utilizam materiais ortotrópicos.

O método das faixas finitas semi-analítico apresenta um número de graus de liberdade (8 graus por faixa finita) menor quando comparado ao método dos elementos finitos (24 graus por elemento finito), o que acarreta em um esforço computacional bem menor para se efetuar a análise linear de estabilidade. Além disto, o *MEF* necessita que o perfil estudado seja discretizado nas direções longitudinal e transversal, enquanto que o *MFF* necessita de discretização apenas na seção transversal, acarretando em um número de graus de liberdade da estrutura muito maior para o *MEF* do que para o *MFF*. Deste modo, a utilização do *MEF* fica limitada para o caso de modelos com número elevado de graus de liberdade, mesmo utilizando-se o armazenamento das matrizes em perfil, devido à limitação na memória dos microcomputadores, além do fato da velocidade de processamento numérico das análises ficar muito lenta.

Apesar de ser numericamente mais eficiente, o *MFF* apresenta a limitação de apenas poder ser utilizado em análises de elementos cujas seções transversais extremas sejam simplesmente apoiadas, conforme foi utilizado neste trabalho. Em análises com o *MEF* esta limitação não se aplica, pois o método permite a consideração de qualquer condição de contorno. Apesar disto, deve-se ressaltar que na modelagem é importante uma definição precisa das restrições dos graus de liberdade para a correta simulação das condições de apoio quando se utiliza o *MEF*.

6.2. Sugestões para Trabalhos Futuros

Esta dissertação apresentou alguns resultados e conclusões relacionadas a estudos de estabilidade de perfis pultrudados de materiais de *PRFV*, que podem servir como base para estudos que orientem a determinação da carga crítica de instabilidade para o projeto de estruturas de *PRFV*.

Recomenda-se utilizar os programas desenvolvidos com o intuito de realizar estudos de novas seções de perfis de *PRFV* e também diferentes composições das lâminas e orientação das fibras nos perfis, contribuindo para o desenvolvimento de perfis pultrudados mais estáveis.

Outra possibilidade de trabalho futuro seria estender os programas desenvolvidos para a análise não-linear incremental, de forma a incluir análises de estabilidade para grandes deslocamentos.

Pode-se também estender os programas desenvolvidos para a consideração de materiais elasto-plásticos (não linearidade física) para abranger o campo de aplicação das análises à estabilidade de perfis de aço formados a frio.

Sugere-se também uma análise experimental dos perfis pultrudados de forma a comparar os modos de instabilidade e tensão crítica com os obtidos pelos métodos numéricos.

Estas sugestões visam o aprimoramento do conhecimento dos fenômenos de instabilidade em perfis de seção aberta e parede fina, com a finalidade de estabelecer critérios de dimensionamento de elementos estruturais de perfis pultrudados.

ANEXO 1

Apresenta-se a seguir um arquivo de dados do programa *INSTABDKQ* para a análise linear de estabilidade de uma placa quadrada simplesmente apoiada submetida à compressão simples. A placa foi discretizada em nove elementos finitos *DKQ* e o modo de instabilidade exhibe um semi-comprimento de onda.

Placa retangular – compressão simples

ESTRU

NOS= 9 TIPO=8 CAR=1 PRINT=1 ANALISE=2

:

COORD

```

1 X= 0.00000e+00 Y= 0.00000e+00 Z= 0.00000e+00
2 X= 5.00000e-01 Y= 0.00000e+00 Z= 0.00000e+00
3 X= 0.00000e+00 Y= 5.00000e-01 Z= 0.00000e+00
4 X= 5.00000e-01 Y= 5.00000e-01 Z= 0.00000e+00
5 X= 1.00000e+00 Y= 0.00000e+00 Z= 0.00000e+00
6 X= 0.00000e+00 Y= 1.00000e+00 Z= 0.00000e+00
7 X= 5.00000e-01 Y= 1.00000e+00 Z= 0.00000e+00
8 X= 1.00000e+00 Y= 5.00000e-01 Z= 0.00000e+00
9 X= 1.00000e+00 Y= 1.00000e+00 Z= 0.00000e+00

```

:

CONTO

```

1 GL=L,L,F,L,L,F
2 GL=F,L,F,L,L,F
3 GL=L,L,F,L,L,F
4 GL=L,F,L,L,L,F
5 GL=L,L,F,L,L,F
6 GL=L,L,F,L,L,F
7 GL=F,L,F,L,L,F
8 GL=L,L,F,L,L,F
9 GL=L,L,F,L,L,F

```

:

CASCA

1

1 E=2000000,2000000 U=0.3,0.3 G=769230.76923 W=0.0

```

1 3 4 7 6 M=1 T=0.1 GAUSS=3 PZ=0.0
2 1 2 4 3 M=1 T=0.1 GAUSS=3 PZ=0.0
3 4 8 9 7 M=1 T=0.1 GAUSS=3 PZ=0.0
4 2 5 8 4 M=1 T=0.1 GAUSS=3 PZ=0.0

```

:

CARR

```

1 CASO=1 CAR=.025,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0
3 CASO=1 CAR=.05,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0
5 CASO=1 CAR=-.025,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0

```

6 CASO=1 CAR=.025,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0
 8 CASO=1 CAR=-.05,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0
 9 CASO=1 CAR=-.025,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0
 :

A seguir mostra-se o arquivo de resultados obtidos pelo *INSTABDKQ*.

PARAMETRO DE TENSAO CRITICA: .73881E+05

COEFICIENTE DE TENSAO CRITICA (MATERIAIS ISOTROPICOS):
 .40872E+01

CONFIGURACAO DO MODO: 1

NO	U(X)	U(Y)	U(Z)	R(X)	R(Y)	R(Z)
1	.4809E-12	-.1009E-11	.0000E+00	.1044E+00	-.4347E+00	.0000E+00
2	.0000E+00	-.7214E-13	.0000E+00	.7089E+01	.3449E-07	.0000E+00
3	-.1000E-16	-.9365E-12	.0000E+00	.1999E-08	-.8637E+01	.0000E+00
4	.9090E-17	.0000E+00	.2419E+01	-.9290E-09	-.8463E-08	.0000E+00
5	-.4809E-12	-.1009E-11	.0000E+00	.1044E+00	.4347E+00	.0000E+00
6	-.4809E-12	-.1009E-11	.0000E+00	-.1044E+00	-.4347E+00	.0000E+00
7	.0000E+00	-.7214E-13	.0000E+00	-.7089E+01	.4588E-07	.0000E+00
8	-.1000E-16	-.9365E-12	.0000E+00	.3848E-08	.8637E+01	.0000E+00
9	.4809E-12	-.1009E-11	.0000E+00	-.1044E+00	.4347E+00	.0000E+00

ANEXO 2

Apresenta-se a seguir um arquivo de dados para a análise linear de estabilidade pelo programa *INSTABFAIXA* de uma placa quadrada submetida à compressão simples com os bordos longitudinais apoiados. A placa foi discretizada em quatro faixas finitas e o modo de instabilidade exibe um semi-comprimento de onda.

NOME DO ARQUIVO = FAIXA2

```
ESTRU
NOS= 5 CAR= 1 TIPO= 9 PRINT= 1 ANALISE=2
:
COORD
 1 X= 0 Y= 0
 2 X=25
 3 X=50
 4 X=75
 5 X= 100 Y=0
:
CONTO
 1 GL=L,L,F,L
 5 GL=L,L,F,L
:
FAIX
L=100 ITERACOES=1 INC=0 ONDA=1 B=100
1
1 E=200000,200000 U=0.3,0.3 G=76923.0769 W=0
1 1 2 M=1 T=0.1 GAUSS=3 SIGMA=1,1,0,0,0
2 2 3
3 3 4
4 4 5
:
```

A seguir apresenta-se o arquivo de resultados obtido pelo programa *INSTABFAIXA*.

```
PARAMETRO DE TENSAO CRITICA: .72314E+00
COEFICIENTE DE TENSAO CRITICA (MATERIAIS ISOTROPICOS):
.40005E+01
COMPRIMENTO CRITICO A: .10000E+03
NUMERO DE SEMI-COMPRIMENTO DE ONDA: 1
COMPRIMENTO CRITICO / ALMA (A/B1): .10000E+01
```

CONFIGURACAO DO MODO= 1

NÓ	U(X)	V(Y)	W(Z)	R(X)
1	.8818E-24	.1291E-23	.0000E+00	.6328E-01
2	.2599E-24	.1399E-23	.1424E+01	.4475E-01
3	.2086E-26	.1404E-23	.2014E+01	.3973E-09
4	-.2566E-24	.1401E-23	.1424E+01	-.4475E-01
5	-.8808E-24	.1295E-23	.0000E+00	-.6328E-01

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ADINI; A. e CLOUGH; R.W., **Analysis of plate bending by the finite element method**, National Science Foundation (Grant G7337), Washington D.C. 1960.
- AGARWAL; B.D. e BROUTMAN; L.J., **Analysis and performance of fiber composites**, 2ª Edition, Jonh Wiley & Sons, Inc., New York, 1990.
- ALVES FILHO; A., **Elementos finitos: A base da tecnologia CAE**, 1ª Edição, Editora Érica, 2000.
- AMERICAN CONCRETE INSTITUTE – **State-of-the-Art Report on Fiber Reinforced Plastic (FRP) – Reinforcement for Concrete Structures**. (ACI 440.R-96), ACI Committee 440, Detroit, USA, 1996, 65p.
- ANDERSON; E., BAI; Z., BISCHOF, C., BLACKFORD; L.S., DEMMEL; J., DONGARRA; J., CROZ; J.D., GREENBAUN; A., HAMMARLING; S., McKENNEY; A. e SORENSEN; D., **LAPACK User's Guide (3rd Edition)**, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 1999.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, **NBR 14.762: Dimensionamento de estruturas de aço constituídas por perfis formados a frio**, Rio de Janeiro, ABNT, 2001.
- AZEVEDO; A.F.M, **Método dos elementos finitos**, 1ª Edição. Faculdade de Engenharia Civil da Universidade do Porto, Portugal, 2003, 258p.
- BAKIS, C., E.; BANK, L., C.; BROWN, V., L.; COSENZA, E.; DAVALOS, J., F.; LESKO, J., J.; MACHIDA, A.; RIZKALLA, S., H.; TRIANTAFILLOU, T., C., **Fiber-reinforced polymer composites for construction - state-of-the-art review**, Journal of Composites for Construction, ASCE, Vol. 6. Nº 2, p. 73-87, 2002
- BATHE; K.J., **Finite element procedures**, New Jersey: Prentice Hall, 1996. 1037p
- BATHE; K.J., **Numerical methods in finite element analysis**, Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1976.
- BATISTA, E.M., CAMOTIM; D., PROLA; L.C. e VAZQUEZ; E., **Encurvadura local de colunas de aço enformadas a frio com secção em “rack”**, Construção Metálica e Mista 2 (Actas do 2º Encontro Nacional de Construção Metálica, Coimbra), Eds. A. Lamas, L. Simões da Silva e P. Cruz, p. 401-412, 1999.
- BATISTA; E.M., **Etude de la stabilité des profils à parois minces et section ourverte de types U et C**, Thèse de Doctorat, Faculté de Sciences Appliquées, Université de Liège, Belgique, 1989.
- BATOZ; J.L e TAHAR; M. B., **Evaluation of a new quadrilateral thin plate bending element**, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 18, p.

1655-1677, 1982.

- BLASS; A., **Processamento de polímeros**, Editora da UFSC, Florianópolis, SC, 1988.
- BLEICH; F., **Buckling strength of metal structures**, McGraw-Hill, New York, 1952.
- BRADFORD; M.A. e AZHARI; M., **Buckling of plates with different end conditions using the finite strip method**, Computer and Structures, Vol. 56, p. 75-83, 1995
- BROOKS; R.J. e TURVEY; G.J., **Lateral buckling of pultruded GRP I-sections cantilevers**, Composite Structures, Vol. 32, p. 203-215, 1995.
- BULSON; P.S., **Local instability and strength of structural sections**, Thin-Walled Structures, Ed. A.H. Chilver, Chatto & Windus, p. 153-207, 1967.
- CAMOTIM; D. e PROLA; L.C., **On the stability of cold-formed steel structural elements with “rack” sections**, Stability Problems in Designing, Construction and Rehabilitation of Metal Structures (Proceedings of 5th International Colloquium on Structural Stability – Brazilian Session), Eds. R. Batista, E. Batista e M. Pfeil, p. 21-32, 1996a.
- CAMOTIM; D. e PROLA; L.C., **On the stability of thin-walled columns with Z, S and SIGMA sections**, Coupled Instabilities in Metal Structures (CIMS’96), Eds. J. Rondal, D. Dubina e V. Gioncu, Imperial College Press, p.149-156, 1996b.
- CAMOTIM; D., BATISTA; E.M., PROLA; L.C. e VAZQUEZ; E., **Local post-buckling behaviour of cold-formed steel rack columns**, Coupled Instabilities in Metal Structures (CIMS’2000), Eds. D. Camotim, D. Dubina e J. Rondal, Imperial College Press, p. 213-222, 2000.
- CAMOTIM; D. E SILVESTRE; N., **Aplicação da teoria generalizada de vigas (GBT) à análise de estabilidade de perfis de aço formados a frio**, In II Congresso Internacional da Construção Metálica, II Cicom, São Paulo, 2002. (artigo em CD-ROM)
- CENTRE FOR ADVANCED STRUCTURAL ENGINEERING, **Computer program THIN-WALL**, *Users Manual* (Version 1.2), School of Civil and Mining Engineering, University of Sydney, Australia, 1996.
- CHEUNG; Y.K., **Finite strip method in structural analysis**, Pergamon Press, Oxford, 1976.
- CHILVER; A.H., **A generalised approach to the local instability of certain thin-walled struts**, The Aeronautical Quarterly, Vol. 4, p. 245-260, 1953.
- CHILVER; A.H., **Behaviour of thin-walled structural members in compression**, Engineering, Vol. 172, p. 281-282, 1951.
- CHIN; C.-K., AL-BERMANI; F.G. e KITIPORNCHAI; S., **Finite element for buckling analysis of plate structures**, Journal of Structural Engineering (ASCE),

-
- Vol. 119, N° 4, p. 1048-1068, 1993.
- COGUMELO, **Pultrudados em fibra de vidro**, Disponível em www.cogumelo.com.br. Acesso em 03-10-2003.
- COMPUTER AND STRUCTURES Inc, **SAP 2000 Plus – Integrated structural and design software**, Version 6.1, 1997.
- COOK; R.D., MALKUS; D.S. e PLESHA; M.F., **Concepts and applications of finite element analysis**, John Wiley & Sons Inc, 3rd edition, 1989.
- DAVALOS; J. F., QIAO; P. e BARBERO; E.J., **Multiobjective material architecture optimization of pultruded FRP I-beams**, Composite Structures, Vol. 35, p. 271-281, 1996.
- DESMOND; T.P., PEKÖZ; T. e WINTER, G., **Intermediate stiffeners for thin-walled members**, Journal of Structural Engineering (ASCE), Vol. 107, N° 4, p. 627-648, 1981.
- ENMAC, **Materiais Compostos**, Disponível em www.enmac.com.br. Acesso em 02-08-2003.
- EUZÉBIO, A., **Fotos [mensagem pessoal]**. Mensagem recebida por almir@unesc.rc-sc.br em 06 de janeiro 2004.
- FIBERLINE, **The world's widest range in pultruded FRP profiles**, Disponível em www.fiberline.com. Acesso em 15-04-2004.
- GALLAGHER; R.H. e PADLOG; J., **Discrete element approach to structural instability analysis**, Journal of the American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA), Vol. 1, N° 6, p. 1437-1439, 1963.
- GANGARAO, H. V. S.; THIPPESWAMY, H., K.; SHEKAR, V.; CRAIGO, C., **Development of glass fiber reinforced polymer composite bridge deck**. Journal SAMPE – Society for the Advancement of Materials and Process Engineering, Vol. 35. No. 4 July/August, p. 12-24, 1999.
- GRAVES SMITH; T.R. e SRIDLHRAN; S., **A finite strip method for the buckling of plate structures under arbitrary loading**, International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 20, p. 685-693, 1978.
- HANCOCK; G.J. **Local, distortional and lateral buckling of I-beams**, Journal of the Structural Division (ASCE), Vol. 104, N° 11, p. 1787-1798, 1978.
- HANCOCK; G.J., **Design for distortional buckling of flexural members**, Thin-Walled Structures, Vol. 27, N° 1, p. 3-12, 1997.
- HANCOCK; G.J., **Distortional buckling of steel storage rack columns**, Journal of Structural Engineering (ASCE), Vol. 111, N° 12, p. 2270-2283, 1985.
- HOLLAWAY; L.C., **The evolution of and the way forward for advanced polymer**
-

-
- composites in the civil infrastructure**, Construction and Building Materials, Vol. 17, p. 365-378, 2003.
- HRABOK; M.M. e HRUVEY; T.M., **A review and catalogue of plate bending finite elements**, Computers and Structures, Vol. 19, N° 3. p. 479-495, 1984.
- HULL; D., **An introduction to composites materials**, London, Cambridge University Press, 1981.
- JONES, R.M., **Mechanics of composite materials**, McGraw Hill Books. Washington, D.C., 1975.
- KAPUR; K.K e HARTZ; B.J., **Stability of plates using the finite element method**, Journal of the Engineering Mechanics Division (ASCE), Vol. 92, N° 4, p. 1555-1571, 1966.
- KAW; A. A., **Mechanics of composite materials**, CRC Press LLC, USA, 1997.
- KIM, D.; H., **Composite structures for civil and architectural engineering**. Published by E & FN Spon, an imprint of Chapman & Hall. London. 1995.
- LA ROVERE; H.L., **Método dos elementos finitos**, Notas de Aula do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, 2003.
- LA ROVERE; H.L., SCHNEIDER; A., PIGNOLO; G.J., GONCHOROVSKI; G. e CHIMELLO; A. A., **ANEST – Programa educacional para análise de estruturas reticuladas – manual do usuário**, Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, 2003.
- LAU; S.C. e HANCOCK; G.J., **Distortional Buckling Formulas for Channel Columns**, Journal of Structural Engineering (ASCE), Vol. 113, N° 5, p. 1063-1078, 1987.
- LEAL; R.P., **Notas de aula – Materiais Compósitos**, disponível em www2.dem.uc.pt/rogério.leal/matcomp/, 2003.
- LIN; Z.M., POLYZOIS D. e SHAH; A., **Stability of thin-walled pultruded structural members by the finite element method**, Thin-Walled Structures, Vol. 24, p. 1-18, 1996.
- LUBIN; G., **Handbook of fiberglass and advanced plastics composites**, Published by Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1969.
- LUNDQUIST; E.E., STOWEL; E.Z. e SCHUETTE; E.H., **Principles of moment distribution applied to stability of structures composed of bars or plates**, NACA Wartime Report L326, 1943.
- MELOSH; R.J., **Basis for derivation of matrices for the direct stiffness method**, Am. Inst. Aeronaut., Astronaut, J. 1 (7), p. 1631-1637, 1963.
- NAGAHAMA; K.J. e BATISTA; E.M., **Análise de estabilidade de perfis**
-

-
- pultrudados em material compósito com fibra de vidro**, Memórias da XXIX Jornadas Sudamericanas de Ingenieria Estructural, Punta Del Este, Uruguai, 2000. (artigo em CD-ROM).
- NAGAHAMA; K.J., **Análise de estabilidade local em perfis de seção aberta em aço e em resina reforçada com fibras de vidro**, Tese de Doutorado, UFRJ, Rio de Janeiro, 2003,
- NAGARAJ; V., GANGARAO; H. V. S., **Static behavior of pultruded gfrp beams**, Journal of Composites for Construction, ASCE, vol. 1, n. 3, p. 120-129, 1997.
- NETHERCOT; D. A. e ROCKEY; K.C., **Lateral buckling of beams with mixed ends conditions**, The Structural Engineer, Vol. 54, p. 133-139, 1973.
- NOVOZHILOV; V., **Foundations of non-linear theory of elasticity**, Greylock Press, Rochester, New York, 1953.
- OÑATE; E., **Cálculo de estructuras por el método de los elementos finitos. Análisis estático lineal**, 2ª Edición. Ed. CIMNE, 1995.
- PACHINOS; R.B., **Faturamento encolhe mas o setor investe em novas tecnologias para ganhar mercado**, Plástico Moderno, Edição n. 350, dezembro, 2003.
- PAPANGELIS; J.P. e HANCOCK; G.J., **Computer analysis of thin-walled structural members**, Computers and Structures, Vol. 56, p. 157-176, 1995.
- PECCE; M. e COSENZA; E., **Local buckling curves for the design of FRP profiles**, Thin-Walled Structures, Vol. 37, p. 207-222, 2000.
- PIERIN; I., **Análise linear de estabilidade em perfis pultrudados**, Monografia de Conclusão de Curso, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, PR, 2002.
- PLANK; R.J. e WITTIRICK; W.H., **Buckling under combined loading of thin, flat-walled structures by a complex finite strip method**, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 8, Nº 2, p. 323-339, 1974.
- PROLA; L.C. e CAMOTIM; D., **Estabilidade e resistência última de colunas de aço enformadas a frio de seção em z com reforços inclinados**, Construção Metálica e Mista (Actas do 1º Encontro Nacional de Construção Metálica, Porto), Eds. A. Lamas, P. Cruz e L. Calado, p. 703-712, 1997.
- PROLA; L.C. e CAMOTIM; D., **Estabilidade local e global de elementos estruturais de aço enformados a frio com seção em S-reforçado**, Actas do 4º Encontro Nacional de Mecânica Computacional (IV ENMC), Lisboa, p. 95-108, 1995.
- PROLA; L.C. e SANTOS; L.F., **Linear stability analysis of cold-formed steel members performed by finite strip and finite element methods**, Modern Building: Materials, Structures and Techniques, Vilnius, Lithuania, May 19-21, 2004.
-

-
- PROLA; L.C., CAMOTIM; D., **Consideração dos efeitos pós-flambagem local no comportamento global de colunas de aço enformadas à frio**, Memórias das XXIX Jornadas Sudamericanas de Ingenieria Estructural, Punta Del Este, Uruguai, 2000. (artigo completo em CD-ROM).
- PROLA; L.C., CAMOTIM; D., RODRIGUES; F.C. e CAMPOS; F., **Stability and ultimate strength of cold-formed steel S-columns**, Stability Problems in Designing, Construction and Rehabilitation of Metal Structures (Proceedings of 5th International Colloquium on Structural Stability – Brazilian Session), Eds. R. Batista, E. Batista e M. Pfeil, p. 81-93, 1996.
- PROLA; L.C., **Estabilidade local e global de elementos estruturais de aço enformados a frio**, Tese de Doutorado. Universidade Técnica de Lisboa, Portugal, 2001.
- PRZEMIENIECKI; J.S., **Discrete element method for stability analysis of complex structures**, The Aeronautical Journal, Vol. 72, p. 1077-1086, 1968.
- PRZEMIENIECKI; J.S., **Finite element structural analysis of local instability**, Journal of the American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA), Vol. 11, Nº 1, p. 33-39, 1973.
- PRZEMIENIECKI; J.S., **Matrix analysis of local instability in plates, stiffened panels and columns**, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 5, p. 209-216, 1972.
- QIAO; P., ZOU; G., DAVALOS; J.F., **Flexural torsional buckling of fiber-reinforced plastic composite cantilever i-beams**, Composite Structures, Vol. 60, p. 205-217, 2003.
- REIS; A. e CAMOTIM; D., **Estabilidade estrutural**, Mc-Graw Hill, 2000.
- RHODES; J. e HARVEY; J.M., **Plain channel section struts in compression and bending beyond the local buckling load**, International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 18, p. 511-519, 1976.
- ROGERS; C.A. e SCHUSTER; R.M., **Flange/web distortional buckling of cold-formed steel sections in bending**, Thin-Walled Structures, Vol. 27, p. 13-29, 1997.
- SANTOS NETO; A.B.S., **Desenvolvimento de um sistema de laje mista de concreto com perfis pultrudados de materiais compostos avançados**, Qualificação de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, 2004.
- SANTOS NETO; A.B.S., LA ROVERE; H.L. e PIERIN; I., **Avaliação da rigidez de perfis pultrudados de PRFV submetidos à flexão**, XXXI Jornadas Sud-Americanas de Ingenieria Estructural, Mendoza, Argentina, 2004.
- SCHAFER; B.W., **CUFSM 2.5 – Users manual and tutorials**, disponível em

-
- <http://www.ce.jhu.edu/bschafer/cufsm/>, 2001.
- SCHWARTZ; M. M., **Composite materials handbook**, McGraw Hill Books, USA, 1984.
- SILVESTRE FILHO; G.D., **Comportamento mecânico do poliuretano derivado de óleo de mamona reforçado por fibra de carbono: contribuição para o projeto de hastes de implante de quadril**, Dissertação de Mestrado, USP, São Carlos, SP, 2001.
- SILVESTRE; N., CAMOTIM; D., BATISTA; E., NAGAHAMA; K., **Buckling behaviour of thin-walled composite columns using generalised beam theory**, Thin-Walled Structures - Advances and Developments, J. Zaras, K. Kowal-Michalska, J. Rhodes (Eds.), Elsevier, p. 329-337, 2001.
- SORIANO; H.L., **Método dos elementos finitos em análise estrutural**, Edusp, 2003, 608p.
- TIMOSHENKO; S.P e GOODIER; N.J., **Teoria da elasticidade**, 3ª Edição, Editora Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1980.
- TIMOSHENKO; S.P., **Theory of elastic stability**, 1st Edition, McGraw-Hill, New York, 1936.
- TITA; V., **Análise dinâmica teórica e experimental de vigas fabricadas a partir de materiais poliméricos reforçados**, Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, 1999.
- TSAI; S.W. e HANH; H.T., **Introduction to composite materials**, Technomic Publishing Company, Lancaster, Pennsylvania, USA, 1980.
- TURVEY; G.J., **Lateral buckling tests on rectangular cross-section pultruded grp cantilever beams**, Composites: Part B, Vol. 27B, p. 35-42, 1996.
- VAN DE VELDE; K e KIEKENS; P., **Thermoplastic pultrusion of natural fibre reinforced composites**, Composites Structures, Vol. 54, 2001, p. 355-360.
- VAN DEN EINDE; L., ZHAO; L. e SEIBLE; F., **Use of FRP composites in the civil structural applications**, Construction and Building Materials, Vol. 17, p. 389-403, 2003.
- WALKER; A.C., **Local instability in plates and channel struts**, Journal of the Structural Division (ASCE), Vol. 92, N° 3, p. 39-55, 1966.
- WATERLOO MAPLE SOFTWARE, **Maple 8.0**, University of Waterloo, 2002.
- WITTRICK; G., **General sinusoidal stiffness matrices for buckling and vibration of thin-walled structures**, International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 10, p. 949-966, 1968.
- YU; W.-W., **Cold-formed steel design**, 3rd Edition, John Wiley & Sons, New York,
-

2000.

ZIENKIEWICZ; O. C. e TAYLOR; R. L., **The finite element method**, 4th ed London, Vol. 2, McGraw-Hill, 1991.