

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

CÁLCULO TRIDIMENSIONAL DE CAMPOS ELÉTRICOS GERADO POR
LINHAS DE TRANSMISSÃO ATRAVÉS DO MÉTODO
DE ELEMENTOS FINITOS

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA
CATARINA PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM
ENGENHARIA ELÉTRICA

RICARDO MARÇAL MATIAS

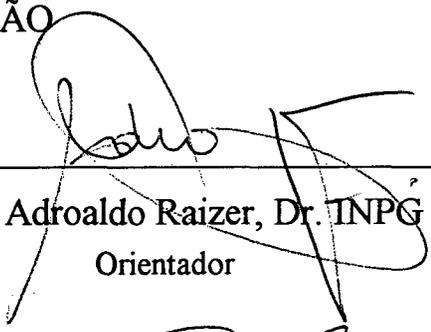
FLORIANÓPOLIS, MARÇO DE 1995

CÁLCULO TRIDIMENSIONAL DE CAMPOS ELÉTRICOS GERADO POR
LINHAS DE TRANSMISSÃO ATRAVÉS DO MÉTODO
DE ELEMENTOS FINITOS

RICARDO MARÇAL MATIAS

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO
TÍTULO DE MESTRE EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA ELÉTRICA, CONCEPÇÃO E ANÁLISE DE
DISPOSITIVOS ELETROMAGNÉTICOS, E APROVADA EM SUA FORMA
FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

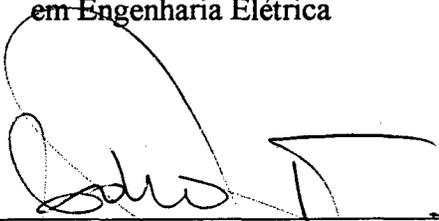


Prof. Adroaldo Raizer, Dr. INPG
Orientador

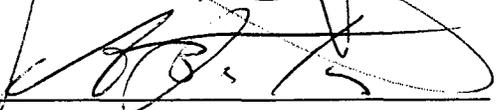


Prof. Ênio Valmor Kassick, Dr. INPT
Coordenador do Curso de Pós-Graduação
em Engenharia Elétrica

BANCA EXAMINADORA



Adroaldo Raizer, Dr. INPG



João Pedro Assumpção Bastos, Dr. d'Etat



Nelson Sadowiski, Dr. INPT



Walter Pereira Carpes Junior, M.Sc.

À Deus, luz que me guia.

AGRADECIMENTOS

Ao meu Orientador, Professor Adroaldo Raizer, pela ajuda sempre constante no desenvolvimento deste trabalho, por sua compreensão, sua dedicação e acima de tudo por sua amizade.

Aos Professores João Pedro Assumpção Bastos, Nelson Sadowisk, e Walter Pereira Carpes Júnior, pelo apoio e incentivo sempre constantes.

Aos colegas do GRUCAD pela ajuda prestada em diversos momentos de dúvidas.

Ao analista de sistemas, Roberto Rostirolla, pela ajuda prestada nas dúvidas relativas à utilização dos equipamentos informáticos.

Ao chefe da secção de expediente da CCPGEEL, Wilson da Silva Costa, pela colaboração prestada durante o curso.

À CAPES pela concessão da bolsa de estudo.

RESUMO

Neste trabalho é apresentada uma metodologia para o cálculo tridimensional do campo elétrico, produzido por linhas de transmissão, empregando-se o método de elementos finitos.

Inicialmente faz-se um estudo do método de simulação de cargas, que é um método clássico para o cálculo do campo elétrico de linhas de transmissão, visando obter uma base para comparação de resultados. Em seguida faz-se a descrição da metodologia proposta.

Por último, é feita a comparação entre os resultados obtidos com a aplicação do método proposto e os fornecidos pelo método clássico de simulação de cargas e também com valores medidos, afim de comprovar a validade da metodologia utilizada.

ABSTRACT

In this work, a methodology for the tridimensional calculation of the electric field produced by transmission lines, using the finite element method is presented.

At first, the charge simulation method is studied. This is a classical method for calculation of transmission line electric field and it was used in order to obtain a basis for comparison. Afterwards, the proposed methodology is described.

Finally, the results obtained by the proposed method are compared with those obtained by the classical method of charge simulation and also with measured values.

SUMÁRIO

RESUMO	vi
ABSTRACT	vii
INTRODUÇÃO	xii
CAPÍTULO 1 - CÁLCULO DO CAMPO ELÉTRICO GERADO POR LINHAS DE TRANSMISSÃO ATRAVÉS DO MÉTODO DE SIMULAÇÃO DE CARGAS	
1.1 - Introdução	1
1.2 - Fundamentos teóricos do método de simulação de cargas	2
1.3 - Determinação da matriz dos coeficientes de potencial	3
1.4 - Determinação genérica do vetor das cargas	7
1.5 - Influência do tipo de cabos pára-raios no vetor de cargas	7
1.5.1 - O vetor de cargas para o caso de linhas de transmissão com cabos pára-raios multiaterrados	7
1.5.2 - O vetor de cargas para o caso de linhas de transmissão com cabos pára-raios isolados	8
1.6 - Cálculo do campo elétrico	10
1.7 - Exemplo de cálculo do campo elétrico gerado por uma linha de transmissão através do MSC	12
1.8 - Conclusão	17
CAPÍTULO 2 - O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS E A SUA APLICAÇÃO NO CÁLCULO TRIDIMENSIONAL DE CAMPOS ELÉTRICOS DE LINHAS DE TRANSMISSÃO	

2.1 - Introdução	19
2.2 - Equações fundamentais do eletromagnetismo	19
2.3 - Formulação matemática do problema usando o potencial escalar elétrico complexo	22
2.4 - A forma fraca	26
2.5 - O método de Galerkin	29
2.6 - O método de elementos finitos	30
2.6.1 - O elemento de referência e as funções de interpolação	32
2.7 - As expressões matriciais para o problema	34
2.7.1 - As formas integrais sobre o elemento real	34
2.7.2 - A forma integral sobre o elemento de referência	35
2.7.2.1 - A transformação das derivadas em x , y e z	35
2.7.2.2 - A transformação do domínio de integração	36
2.7.3 - Cálculo do jacobiano, de seu determinante e de sua inversa	36
2.8 - Integração numérica	37
2.9 - Aspectos informáticos relativos à implementação do método de elementos finitos	38
2.9.1 - As técnicas de armazenamento da matriz global	39
2.9.1.1 - A matriz banda	39
2.9.1.2 - A matriz sob a forma compacta	41
2.9.2 - Introdução das condições de contorno	42
2.9.3 - Método de resolução do sistema complexo de equações lineares	43
2.10 - Obtenção do campo elétrico	44
2.11 - Conclusão	45

CAPÍTULO 3 - RESULTADOS OBTIDOS

3.1 - Introdução.....	46
3.2 - Linha de 500 kV - Endesa - Chile	47

3.2.1 - Características	47
3.2.2 - Malha de elementos finitos	48
3.2.3 - Linhas equipotenciais	49
3.2.4 - Curvas de campo elétrico	50
3.3 - Linha de 1050 kV	51
3.3.1 - Características	51
3.3.2 - Malha de elementos finitos	52
3.3.3 - Linhas equipotenciais	53
3.3.4 - Curvas de campo elétrico	53
3.4 - Linha de 1050 kV na presença de materiais condutores	55
3.4.1 - Características	55
3.4.2 - Malha de elementos finitos	56
3.4.3 - Linhas equipotenciais	56
3.4.4 - Linhas equicampos	56
3.5 - Caso hipotético do cruzamento entre duas linhas de transmissão	58
3.5.1 - Características	58
3.5.2 - Malha de elementos finitos	60
3.5.3 - Linhas equipotenciais	61
3.5.4 - Curvas de campo elétrico	61
CONCLUSÃO FINAL	63
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	65

CAPÍTULO 1

CÁLCULO DO CAMPO ELÉTRICO GERADO POR LINHAS DE TRANSMISSÃO ATRAVÉS DO MÉTODO DE SIMULAÇÃO DE CARGAS

1.1 Introdução

Devido ao crescente aumento dos níveis de tensão dos sistemas de transmissão, torna-se necessária uma análise mais detalhada dos efeitos eletrostáticos provenientes de tais sistemas, o que exige o conhecimento dos valores e da distribuição do campo elétrico e do potencial nas regiões de interesse [5,17].

Com o advento dos computadores, foram desenvolvidos vários métodos numéricos de cálculo para a determinação do campo elétrico, tornando possível a solução de inúmeros problemas onde uma solução analítica era sempre inviável de ser obtida. A origem desta dificuldade está na complexidade inerente de resolução das equações a derivadas parciais de segunda ordem que regem estes campos, agravadas pela complexidade das configurações envolvidas. Entre eles citam-se [12,18]: Método de Simulação de Cargas, Método das Diferenças Finitas, Método de Elementos Finitos, Método de Monte Carlo e Método das Equações Integrais de Fronteira (também denominado método das sub-áreas), entre outros. Dentre estes, os mais usados são o de simulação de cargas e o de diferenças finitas, e mais recentemente o de elementos finitos [1].

Será feita, a seguir, a apresentação do Método de Simulação de Cargas (MSC) em duas dimensões, evidenciando suas características e sua formulação matemática. Posteriormente, é dado um exemplo de aplicação prática do mesmo.

1.2 Fundamentos teóricos do método de simulação de cargas

Na aplicação do MSC ao cálculo do campo elétrico de linhas de transmissão cada condutor é representado por um segmento de reta infinito, apresentando densidade linear de carga elétrica uniforme, colocada em seu centro. Estas cargas são determinadas através da multiplicação da matriz de capacitâncias da linha pelo vetor das tensões fase-terra a que estão submetidos os condutores [2].

De posse do valor das cargas, o campo elétrico em qualquer ponto do espaço pode ser determinado através da composição vetorial dos campos nesse ponto, devido aos diversos eletrodos e suas imagens.

São admitidas no cálculo as seguintes hipóteses simplificadoras [2,3,4,11,12]:

- as cargas são uniformemente distribuídas ao longo dos condutores (o que implica em admitir condutores de superfície cilíndrica lisa, extensão infinita e paralelos entre si e à superfície do solo);

- a superfície do solo é plana e apresenta condutividade infinita;

- os condutores são considerados como superfícies equipotenciais com potenciais conhecidos;

- as torres estão bastante distantes do ponto onde se deseja determinar o campo elétrico e, portanto, não distorcem o mesmo.

De maneira geral, as aproximações indicadas acima conduzem a valores mais elevados que os reais, principalmente a última delas.

No entanto, na secção da linha correspondente ao meio do vão, o cálculo é bastante representativo, visto que nesta região os valores de campo elétrico já não são influenciados pela presença das estruturas [3].

Os dados necessários à determinação do campo elétrico são: as coordenadas cartesianas dos condutores, suas características físicas e a tensão fase-terra a eles aplicada.

É importante salientar que no cálculo do campo elétrico em circuitos simples o faseamento não é importante, porém, para circuitos múltiplos ou linhas paralelas torna-se de extrema importância, influenciando de maneira significativa os valores de campo elétrico [5].

1.3 Determinação da matriz dos coeficientes de potencial

A matriz dos coeficientes de potencial para uma linha de transmissão com n condutores e $(m-n)$ cabos pára-raios é representada em notação matricial sob a forma:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & \dots & P_{1n} & \dots & \dots & P_{1m} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & \dots & P_{2n} & \dots & \dots & P_{2m} \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & \dots & P_{nn} & \dots & \dots & P_{nm} \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ P_{m1} & P_{m2} & \dots & \dots & P_{mn} & \dots & \dots & P_{mm} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Esta matriz tem como característica simetria em relação à diagonal principal.

Seus elementos, considerando o uso de cargas elementares do tipo segmentos lineares infinitos, poderão ser calculados pelas seguintes expressões [15]:

- Os termos da diagonal principal, denominados coeficientes de potencial próprio, representam os potenciais devido às cargas dos próprios condutores e de suas imagens [7], e são definidos genericamente por:

$$P_{ii} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{2h_i}{r_i} \quad (\text{m/F}) \quad (1.2)$$

onde:

ϵ - Permissividade elétrica do meio (F/m);

h_i - Altura do condutor i (m);

r_i - Raio do condutor i (m).

- Os termos fora da diagonal principal, denominados coeficientes de potencial mútuos, representam a influência das cargas do condutor vizinho e de sua imagem sobre cada um dos condutores [7], e são definidos por:

$$P_{ij} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{D_{ij}}{d_{ij}} \quad (\text{m/F}) \quad (1.3)$$

onde:

ϵ - Permissividade elétrica do meio (F/m);

d_{ij} - Distância do condutor i ao condutor j (m);

D_{ij} - Distância do condutor i à imagem do condutor j (m).

A distância entre um condutor i e um condutor j é dada por:

$$d_{ij} = \sqrt{(h_i - h_j)^2 + (d_i - d_j)^2} \quad (\text{m}) \quad (1.4)$$

e a distância entre um condutor i e a imagem de um condutor j por:

$$D_{ij} = \sqrt{(h_i + h_j)^2 + (d_i - d_j)^2} \quad (\text{m}) \quad (1.5)$$

conforme ilustra o diagrama mostrado abaixo:

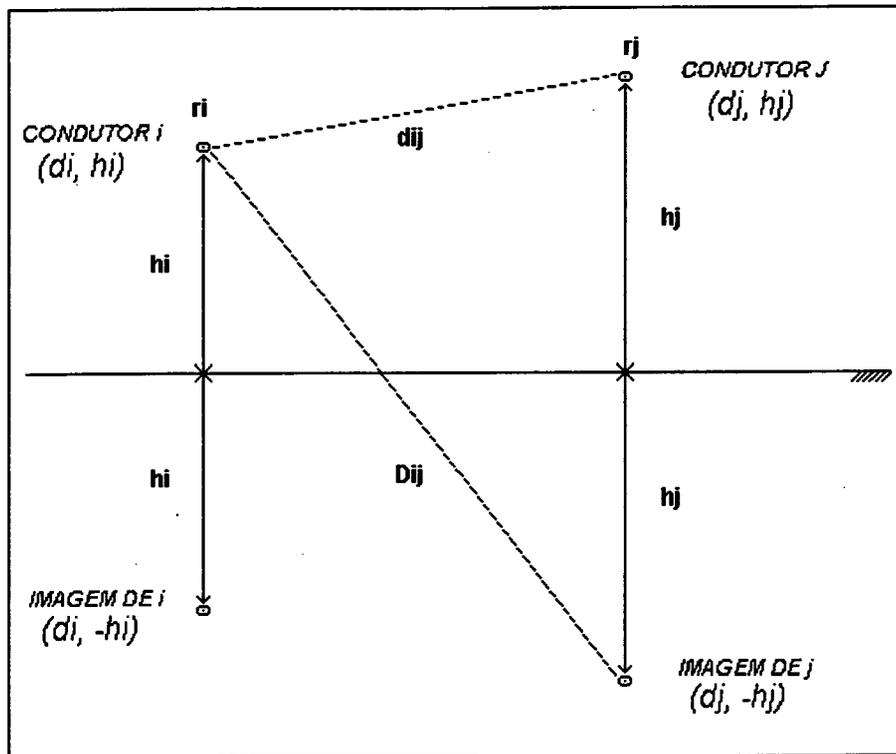


Figura 1.1 - Diagrama para o cálculo dos coeficientes de potencial.

Verifica-se que os valores dos coeficientes de potencial dependem exclusivamente do meio em que os condutores se encontram (representado pela permissividade elétrica do meio ϵ), das dimensões físicas dos condutores e da disposição espacial dos mesmos [7].

A inversa da matriz dos coeficientes de potencial fornece a matriz de capacitâncias da linha, usada no cálculo das cargas elétricas dos condutores, conforme será visto nos próximos itens.

Em linhas aéreas, o meio onde se encontram os condutores é o ar, e neste caso é assumido que [2,3,15]:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \quad (\text{F/m}) \quad (1.6)$$

Em geral, as fases das linhas de transmissão apresentam condutores múltiplos. Nesses casos, um raio equivalente deve ser calculado. Ele representa o raio de um condutor fictício, cilíndrico, possuindo a mesma carga e produzindo o mesmo campo elétrico que o condutor múltiplo [7,8].

Ele pode ser calculado a partir da seguinte expressão [3]:

$$R_{eq} = \frac{D \sqrt{\frac{nd}{D}}}{2} \quad (\text{m}) \quad (1.7)$$

onde:

D - é o diâmetro do feixe, ou seja, o diâmetro do círculo que liga o centro dos subcondutores e pode ser determinado através da expressão:

$$D = \frac{S}{\text{sen}(\pi/n)} \quad (\text{m}) \quad (1.8)$$

sendo S o espaçamento entre os subcondutores em metros e n o número de subcondutores que compõem o feixe.

d - é o diâmetro de um subcondutor do feixe em metros. Admite-se que todos sejam iguais.

A figura a seguir apresenta as configurações de condutores múltiplos mais usadas na prática [7]:

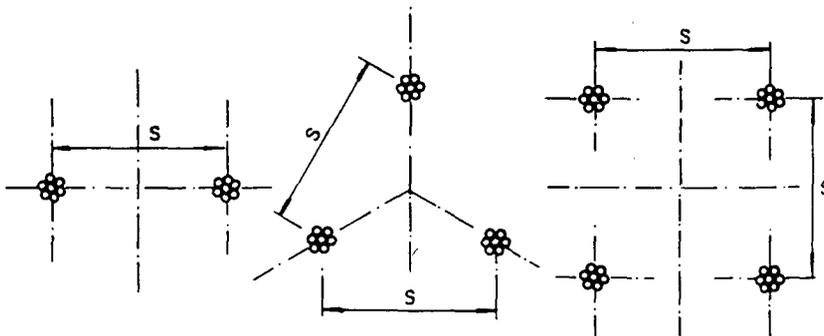


Figura 1.2 - Configurações de condutores múltiplos mais usadas na prática.

1.4 Determinação genérica do vetor das cargas

Como as linhas de transmissão são energizadas por tensões alternadas senoidais, as tensões e as cargas são representadas na forma fasorial [7,14,16].

O vetor de cargas $[\dot{Q}]$ é determinado a partir do vetor das tensões a que estão submetidos os condutores $[\dot{V}]$ e da inversa da matriz dos coeficientes de potencial $[P]$, que nos fornece a matriz de capacitâncias $[C]$ da linha. Assim tem-se:

$$[\dot{Q}] = [P]^{-1}[\dot{V}] = [C][\dot{V}] \quad (\text{C/m}) \quad (1.9)$$

Será verificado a seguir a influência do tipo de cabo pára-raios (isolado ou multiaterrado) da linha de transmissão na determinação das cargas dos condutores e, conseqüentemente, nos valores de campo elétrico.

1.5 Influência do tipo de cabos pára-raios no vetor de cargas

Os cabos pára-raios em geral utilizados em linhas de transmissão podem ser multiaterrados, isto é aterrados em todas as estruturas, ou podem ser isolados. Neste caso, sem perderem sua eficiência na proteção das linhas, servem também como circuitos de telecomunicações. Para isso são empregados isoladores de baixa tensão disruptiva, permitindo a abertura de arcos nos pontos de aterramento, quando são atingidos por descargas atmosféricas. Uma vez aberto o arco, comportam-se como cabos aterrados, cumprindo sua finalidade de proteção [7].

1.5.1 O vetor de cargas para o caso de linhas de transmissão com cabos pára-raios multiaterrados

Neste caso, haverá cargas nos cabos pára-raios que aí chegam por condução desde o solo [7]. Apresentam o mesmo potencial do solo ($V = 0$), pois estão

aterrados. Desta forma o vetor das cargas pode ser obtido através da seguinte expressão matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 \\ \vdots \\ \dot{Q}_n \\ \vdots \\ \dot{Q}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} & \dots & C_{1m} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} & \dots & C_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} & \dots & C_{nm} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ C_{m1} & C_{m2} & \dots & C_{mn} & \dots & C_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \vdots \\ \dot{V}_n \\ \vdots \\ \dot{V}_m \end{bmatrix} \quad (C/m) \quad (1.10)$$

onde os termos \dot{Q}_1 até \dot{Q}_n representam as cargas dos condutores fase, \dot{Q}_{n+1} até \dot{Q}_m , as cargas dos cabos pára-raios, \dot{V}_1 até \dot{V}_n , as tensões nas fases e \dot{V}_{n+1} até \dot{V}_m as tensões nos cabos pára-raios, sendo nesse caso iguais a zero, pois o cabo está aterrado.

1.5.2 O vetor de cargas para o caso de linhas de transmissão com cabos pára-raios isolados

Neste caso, o cabo pára-raio não tem cargas próprias. No entanto, as cargas existentes nos condutores fase induzirão eletrostaticamente uma diferença de potencial entre os cabos pára-raios e o solo. Estes potenciais por sua vez exercerão influência nas cargas dos condutores fase [7]. Assim neste caso, será preciso primeiramente determinar a tensão induzida nos cabos pára-raios, para posteriormente determinar as cargas dos condutores fase.

Para isso será utilizada a seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \vdots \\ \dot{V}_n \\ \vdots \\ \dot{V}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} & \vdots & P_{1m} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} & \vdots & P_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} & \vdots & P_{nm} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{m1} & P_{m2} & \dots & P_{mn} & \vdots & P_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 \\ \vdots \\ \dot{Q}_n \\ \vdots \\ \dot{Q}_m \end{bmatrix} \quad (\text{V}) \quad (1.11)$$

onde os termos \dot{Q}_{n+1} até \dot{Q}_m são nulos, pois os cabos pára-raios não possuem cargas próprias. Particionando-se a equação como indicado acima, pode-se representá-la da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_A \\ - \\ \dot{V}_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{AA} & | & P_{AP} \\ - & | & - \\ P_{PA} & | & P_{PP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{Q}_A \\ - \\ \dot{Q}_P \end{bmatrix} \quad (\text{V}) \quad (1.12)$$

onde:

\dot{V}_A - Tensão nos condutores fase (V);

\dot{V}_P - Tensão nos cabos pára-raios (V);

P_{AA} - Coeficientes de potencial devido aos condutores fase (m/F);

P_{AP}, P_{PA} - Coeficientes de potencial entre os condutores fase e os cabos pára-raios (m/F);

P_{PP} - Coeficientes de potencial devido aos cabos pára-raios (m/F);

\dot{Q}_A - Carga dos condutores fase (C);

\dot{Q}_P - Carga dos cabos pára-raios (C).

e como $\dot{Q}_P = 0$, tem-se que o vetor das tensões induzidas nos cabos pára-raios é dado por [3]:

$$[\dot{V}_P] = [P_{PA}][\dot{Q}_A] = [P_{PA}][P_{AA}]^{-1}[\dot{V}_A] \quad (\text{V}) \quad (1.13)$$

O vetor das cargas, levando em consideração as tensões induzidas nos cabos pára-raios, pode então ser obtido a partir da expressão matricial abaixo:

$$\begin{bmatrix} \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 \\ \vdots \\ \dot{Q}_n \\ \vdots \\ \dot{Q}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} & \dots & C_{1m} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} & \dots & C_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} & \dots & C_{nm} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ C_{m1} & C_{m2} & \dots & C_{mn} & \dots & C_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \vdots \\ \dot{V}_n \\ \vdots \\ \dot{V}_m \end{bmatrix} \quad (\text{C/m}) \quad (1.14)$$

1.6 Cálculo do campo elétrico

De posse do valor das cargas, o campo elétrico em qualquer ponto do espaço pode ser determinado pela resolução do teorema de Gauss para um cilindro de comprimento infinito [4,10].

O campo elétrico total é o somatório das contribuições de cada condutor e sua imagem [16]. Como as cargas são complexas, o campo elétrico será um vetor complexo, com componentes complexas ao longo dos eixos ortogonais [2].

As componentes horizontal (\vec{E}_X) e vertical (\vec{E}_Y) do campo elétrico são dadas por [4,10,15]:

$$\vec{E}_X = \frac{\dot{Q}}{2\pi\epsilon} \left[\frac{x-d}{(x-d)^2 + (y-h)^2} - \frac{x-d}{(x-d)^2 + (y+h)^2} \right] \quad (\text{V/m}) \quad (1.15)$$

$$\vec{E}_Y = \frac{\dot{Q}}{2\pi\epsilon} \left[\frac{y-h}{(x-d)^2 + (y-h)^2} - \frac{y+h}{(x-d)^2 + (y+h)^2} \right] \quad (\text{V/m}) \quad (1.16)$$

onde:

d, h - São as coordenadas dos condutores;

x, y - São as coordenadas do ponto de cálculo.

Para um sistema de n condutores, tem-se:

$$\vec{E}_{X_{total}} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \sum_{i=1}^n \dot{Q}_i \left[\frac{x-di}{(x-di)^2 + (y-hi)^2} - \frac{x-di}{(x-di)^2 + (y+hi)^2} \right] \quad (\text{V/m}) \quad (1.17)$$

$$\vec{E}_{Y_{total}} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \sum_{i=1}^n \dot{Q}_i \left[\frac{y-hi}{(x-di)^2 + (y-hi)^2} - \frac{y-hi}{(x-di)^2 + (y+hi)^2} \right] \quad (\text{V/m}) \quad (1.18)$$

O campo elétrico resultante em um ponto (x, y) é obtido através da expressão:

$$\vec{E} = \sqrt{|\vec{E}_{X_{total}}|^2 + |\vec{E}_{Y_{total}}|^2} \quad (\text{V/m}) \quad (1.19)$$

que representa o campo elétrico eficaz, pois as tensões das fases utilizadas no cálculo são expressas em valores eficazes. Este é o maior valor de campo elétrico eficaz no ponto considerado. Ele independe do ângulo de fase, sendo constante ao longo do tempo [9,10].

Todo procedimento descrito acima é válido para domínios com apenas um meio dielétrico, por exemplo um sistema de eletrodos no ar. Em princípio, o MSC também pode ser aplicado a domínios com mais de um dielétrico. No entanto, neste caso é necessário utilizar equações auxiliares para representar o potencial e o campo elétrico em cada um deles [13].

1.7 Exemplo de cálculo do campo elétrico gerado por uma linha de transmissão através do MSC

Para exemplo de aplicação prática do método, será apresentado o cálculo do campo elétrico resultante em um ponto, para uma linha de transmissão de 345 kV.

As fases são formadas por um arranjo geminado de dois subcondutores, com espaçamento de 0,40 m entre si e diâmetro de 0,025146 m. Os dois cabos pára-raios são de aço galvanizado de diâmetro 1/2", aterrados em todas as estruturas.

Calcular-se-á o campo elétrico resultante no ponto (20,1), considerando o ponto de referência das coordenadas no solo e sob a fase central da linha.

A figura abaixo apresenta a disposição geométrica dos condutores no meio do vão da linha de transmissão em estudo.

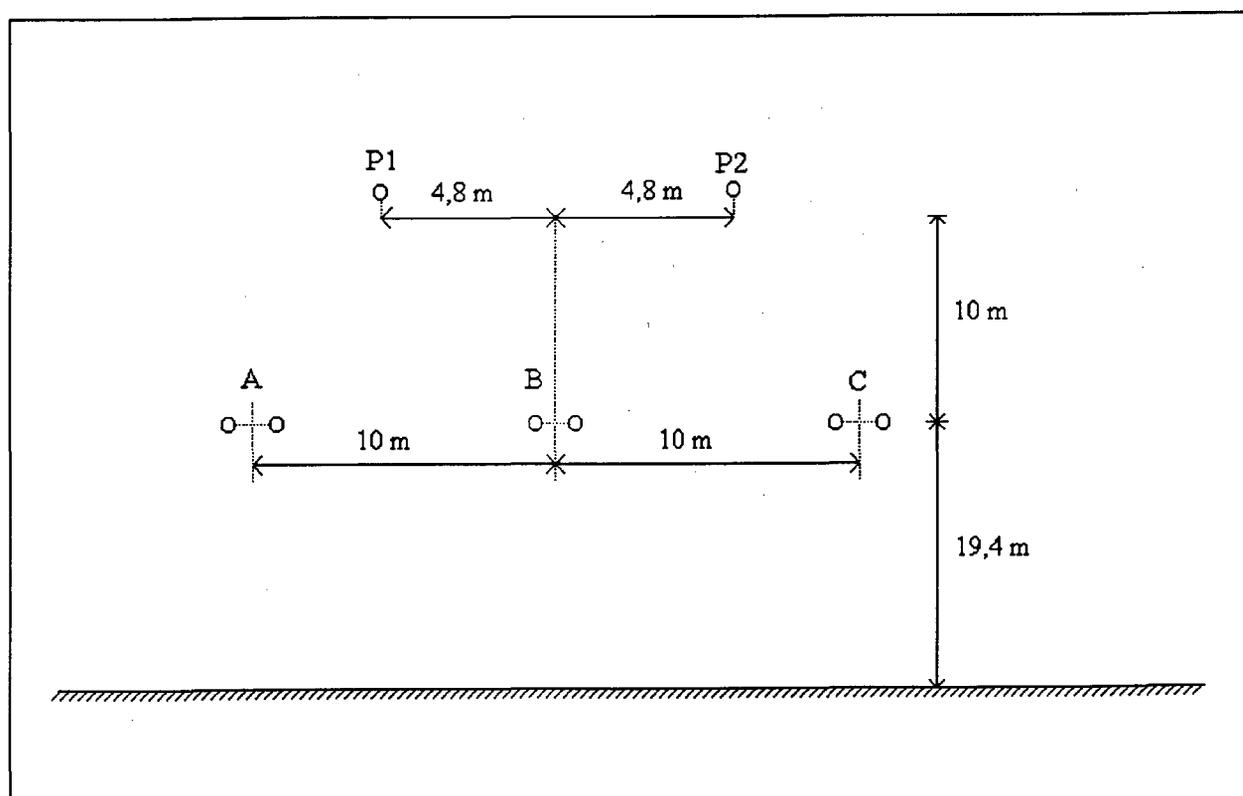


Figura 1.3 - Disposição geométrica dos condutores.

Inicialmente, calcula-se o raio equivalente das fases, utilizando a expressão (1.7):

$$R_{eq} = 0,0709 \text{ m}$$

Passa-se, agora, ao cálculo da matriz dos coeficientes de potencial da linha, utilizando para isto as expressões (1.2), (1.3), (1.4) e (1.5). A matriz dos coeficientes de potencial será:

$$P = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \begin{bmatrix} 6,30490 & 1,38799 & 0,78050 & 1,47112 & 1,04906 \\ 1,38799 & 6,30490 & 1,38799 & 1,48628 & 1,48628 \\ 0,78050 & 1,38799 & 6,30490 & 1,04906 & 1,47112 \\ 1,47112 & 1,48628 & 1,04906 & 8,44029 & 1,82553 \\ 1,04906 & 1,48628 & 1,47112 & 1,82553 & 8,44029 \end{bmatrix} \text{ (m/F)}$$

logo a matriz de capacitâncias da linha é:

$$C = 2\pi\epsilon_0 \begin{bmatrix} 0,17277 & -0,02850 & -0,00912 & -0,02176 & -0,01015 \\ -0,02850 & 0,18015 & -0,02850 & -0,01908 & -0,01908 \\ -0,00912 & -0,02850 & 0,17277 & -0,01015 & -0,02176 \\ -0,02176 & -0,01908 & -0,01015 & 0,13134 & -0,02057 \\ -0,01015 & -0,01908 & -0,02176 & -0,02057 & 0,13134 \end{bmatrix} \text{ (C/m)}$$

As tensões fase-terra da linha, considerando-se seqüência de fase *ABC* são:

$$\dot{V}_A = 199185,84 \angle 0^\circ \quad (\text{V})$$

$$\dot{V}_B = 199185,84 \angle 120^\circ \quad (\text{V})$$

$$\dot{V}_C = 199185,84 \angle -120^\circ \quad (\text{V})$$

e como os cabos para-raios são multiterrados, tem-se:

$$\dot{V}_{P1} = 0 \angle 0^\circ \quad (\text{V})$$

$$V_{P2} = 0 \angle 0^\circ \quad (\text{V})$$

logo o vetor das tensões será:

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} 199185,84 + j0 \\ -99592,92 + j172499,99 \\ -99592,92 - j172499,99 \\ 0 + j0 \\ 0 + j0 \end{bmatrix} \quad (\text{V})$$

Calculando o vetor das cargas pela expressão (1.10):

$$\vec{Q} = 2\pi\epsilon_0 \begin{bmatrix} 38160,0232 + j3343,0498 \\ -20780,0627 + j35992,1229 \\ -16184,8454 - j34719,0729 \\ -1423,1828 - j1540,4249 \\ 2045,6385 + j462,2984 \end{bmatrix} \quad (\text{C/m})$$

De posse do valor das cargas, pode-se calcular as componentes do campo elétrico em x e y , devido a cada um dos condutores, no ponto considerado, utilizando as expressões (1.15) e (1.16). Assim:

$$\vec{E}_{x_A} = 54,4961 + j4,7741 \quad (\text{V/m})$$

$$\vec{E}_{x_B} = -53,5029 + j92,6697 \quad (\text{V/m})$$

$$\vec{E}_{x_C} = -55,4826 - j119,0190 \quad (\text{V/m})$$

$$\vec{E}_{x_{P1}} = -1,8969 - j2,0531 \quad (\text{V/m})$$

$$\vec{E}_{x_{P2}} = 3,0506 + j0,6894 \quad (\text{V/m})$$

$$\vec{E}_{y_A} = -1158,3702 + j101,4802 \quad (\text{V/m})$$

$$\vec{E}_{y_B} = 1037,1005 - j1796,3108 \quad (\text{V/m})$$

$$\vec{E}_{yC} = 1318,7107 + j2828,8447 \quad (\text{V/m})$$

$$\vec{E}_{yP1} = 56,5402 + j61,1980 \quad (\text{V/m})$$

$$\vec{E}_{yP2} = -109,8234 - j24,8192 \quad (\text{V/m})$$

Fazendo-se o somatório das componentes em x e y devido a cada um dos condutores, obtém-se o campo total no ponto considerado:

$$\vec{E}_{xtotal} = -53,3357 - j32,4871 \quad (\text{V/m})$$

$$\vec{E}_{ytotal} = 1144,1578 + j1170,3929 \quad (\text{V/m})$$

Assim o campo elétrico resultante pode ser obtido pela expressão (1.19) e vale:

$$\vec{E} = 1637,9306 \quad (\text{V/m})$$

A fim de verificar a influência do tipo de cabo pára-raios nos valores de campo elétrico, considerar-se-á agora os mesmos isolados e determinar-se-á novamente o campo elétrico resultante no ponto (20,1). A matriz dos coeficientes de potencial e a matriz de capacitâncias da linha não sofrem nenhuma alteração.

Conforme foi visto, neste caso é necessário determinar as tensões induzidas nos cabos pára-raios para depois calcular-se o vetor de cargas. Isto pode ser feito através da expressão (1.13):

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{P1} \\ \dot{V}_{P2} \end{bmatrix} = \left\{ \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \begin{bmatrix} 1,47112 & 1,48628 & 1,04906 \\ 1,04906 & 1,48628 & 1,47112 \end{bmatrix} \right\} \left\{ \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \begin{bmatrix} 6,30490 & 1,38799 & 0,78050 \\ 1,38799 & 6,30490 & 1,38799 \\ 0,78050 & 1,38799 & 6,30490 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} 199185,84 + j0 \\ -99592,92 + j172499,99 \\ -99592,92 - j172499,99 \end{bmatrix}$$

e fornece:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{P1} \\ \dot{V}_{P2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8274,1063 + j12153,9543 \\ -14662,6889 - j1088,6099 \end{bmatrix} \quad (\text{V})$$

Agora, de posse dos valores das tensões induzidas nos cabos pára-raios, determinar-se-á o vetor das cargas através da equação (1.14). Não se deve esquecer que \dot{Q}_{P1} e \dot{Q}_{P2} são nulos. Assim:

$$\dot{Q} = 2\pi\epsilon_0 \begin{bmatrix} 38128,8049 - j3596,4704 \\ -20658,1686 + j35780,9961 \\ -15949,7674 - j34818,7474 \\ 0 + j0 \\ 0 + j0 \end{bmatrix} \text{ (C/m)}$$

Com as expressões (1.15) e (1.16) calcula-se as componentes do campo elétrico em x e y para cada um dos condutores:

$$\vec{E}_{x_A} = 54,4515 - j5,1361 \quad (\text{V/m})$$

$$\vec{E}_{x_B} = -53,1890 + j92,1261 \quad (\text{V/m})$$

$$\vec{E}_{x_C} = -54,6767 - j119,3607 \quad (\text{V/m})$$

$$\vec{E}_{x_{P1}} = 0 + j0 \quad (\text{V/m})$$

$$\vec{E}_{x_{P2}} = 0 + j0 \quad (\text{V/m})$$

$$\vec{E}_{y_A} = -1157,4226 + j109,1730 \quad (\text{V/m})$$

$$\vec{E}_{y_B} = 1031,0170 - j1785,7738 \quad (\text{V/m})$$

$$\vec{E}_{y_C} = 1299,5570 + j2836,9660 \quad (\text{V/m})$$

$$\vec{E}_{y_{P1}} = 0 + j0 \quad (\text{V/m})$$

$$\vec{E}_{y_{P2}} = 0 + j0 \quad (\text{V/m})$$

O campo total no ponto considerado vale:

$$\vec{E}_{x_{total}} = -53,4142 - j32,3707 \quad (\text{V/m})$$

$$\vec{E}_{y_{total}} = 1173,1514 + j1160,3652 \quad (\text{V/m})$$

O campo elétrico resultante obtido pela expressão (1.19) vale:

$$\vec{E} = 1651,2518 \quad (\text{V/m})$$

Portanto, observa-se uma diferença de 0,814% nos valores de campo elétrico entre os dois casos analisados. É importante ressaltar que a diferença entre os valores de campo elétrico obtidos, considerando os cabos pára-raios isolados e aterrados, não é significativa.

1.8 Conclusão

Observou-se que o Método de Simulação de Cargas é bastante simples e de fácil utilização quando aplicado em cálculos bidimensionais e na presença de apenas um meio dielétrico. Quando existe no domínio de estudo diferentes meios dielétricos, é necessário utilizar equações complementares para se modelar o potencial e o campo elétrico em cada um deles, o que dificulta sua utilização de forma genérica. Outro sério inconveniente deste método é o fato de não se poder ter meios condutores no domínio de estudo.

A literatura mostra que, em casos tridimensionais, ele torna-se extremamente complexo, tanto no que se refere à preparação dos dados como no processo de cálculo. Dependendo da complexidade da geometria em estudo, o mesmo torna-se até inviável em termos computacionais, pois exige uma grande quantidade de memória e demanda um tempo de cálculo elevado. A referência [19] cita que, para configurações possuindo 500 ou mais cargas, o tempo de cálculo é da ordem de duas horas.

Na seqüência apresenta-se o método de elementos finitos, aplicado ao cálculo tridimensional do campo elétrico produzido por linhas de transmissão, que atualmente, consiste em uma poderosa ferramenta de cálculo para análise de problemas eletromagnéticos, entre outros.

CAPÍTULO 2

O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS E A SUA APLICAÇÃO NO CÁLCULO TRIDIMENSIONAL DE CAMPOS ELÉTRICOS DE LINHAS DE TRANSMISSÃO

2.1 Introdução

Neste capítulo, faz-se uma revisão das equações fundamentais do eletromagnetismo, com o intuito de se obter a equação descritiva do problema do campo elétrico gerado por linhas de transmissão. Para isto, utiliza-se o potencial escalar elétrico complexo, o qual permite considerar as variações de módulo e fase das tensões de alimentação da linha. Em seguida, são apresentados os métodos de Galerkin e de Elementos Finitos, usados na solução numérica desta equação.

2.2 Equações fundamentais do eletromagnetismo

As equações fundamentais do eletromagnetismo são as equações de Maxwell [38]:

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (2.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J} \quad (2.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (2.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (2.4)$$

onde:

\vec{H} - Campo magnético (A/m);

\vec{E} - Campo elétrico (V/m);

\vec{B} - Indução magnética (Tesla);

\vec{D} - Indução elétrica (C/m²);

\vec{J} - Densidade de corrente de condução (A/m²);

ρ - Densidade volumétrica de carga elétrica (C/m³);

t - Tempo (s);

div - Operador divergente;

rot - Operador rotacional.

Assume-se que os vetores \vec{E} , \vec{H} , \vec{B} e \vec{D} em todos os pontos ordinários do domínio sejam funções contínuas com derivadas contínuas. Por ponto ordinário entende-se um ponto em cuja vizinhança as propriedades constitutivas do meio (permeabilidade, condutividade e permissividade) sejam contínuas. Descontinuidades nos vetores de campo ou em suas derivadas podem ocorrer, entretanto, em superfícies onde exista uma mudança abrupta das propriedades constitutivas do meio [40].

Existem ainda relações adicionais, denominadas equações constitutivas, dependentes do meio onde existe o campo:

$$\vec{D} = \|\epsilon\| \vec{E} \quad (2.5)$$

$$\vec{B} = \|\mu\| \vec{H} \quad (2.6)$$

$$\vec{J} = \|\sigma\| \vec{E} \quad (2.7)$$

onde:

$\|\varepsilon\|$ - Tensor de permissividade elétrica do meio (F/m);

$\|\mu\|$ - Tensor de permeabilidade magnética do meio (H/m);

$\|\sigma\|$ - Tensor de condutividade elétrica do meio $((\Omega\text{m})^{-1})$.

No caso em que os materiais são isotrópicos, os tensores $\|\varepsilon\|$, $\|\mu\|$ e $\|\sigma\|$ se reduzem aos escalares ε , μ e σ . Neste estudo apenas meios isotrópicos e lineares serão considerados.

Na interface entre dois materiais com propriedades constitutivas diferentes, verificam-se as seguintes condições sobre os vetores de campo [40,42]

$$\bar{n} \wedge [\bar{E}] = 0 \quad (2.8)$$

$$\bar{n} \bullet [\bar{D}] = 0 \quad (2.9)$$

$$\bar{n} \bullet [\bar{B}] = 0 \quad (2.10)$$

$$\bar{n} \wedge [\bar{H}] = 0 \quad (2.11)$$

onde:

\bar{n} - Vetor normal à superfície entre dois meios diferentes;

\wedge - Indica produto vetorial;

\bullet - Indica produto escalar;

$[\]$ - Indica variação da grandeza no ponto.

As equações (2.8) e (2.9) estabelecem que a componente tangencial do campo elétrico e a componente normal da indução elétrica são contínuas entre dois meios

diferentes. As equações (2.10) e (2.11) estabelecem que a componente normal da indução magnética e a componente tangencial do campo magnético são contínuas entre dois meios com propriedades constitutivas diferentes.

2.3 Formulação matemática do problema usando o potencial escalar elétrico complexo

Para se chegar à equação do problema, duas considerações devem ser feitas:

1ª - O campo elétrico gerado por uma linha de transmissão é um fenômeno eletromagnético quase-estático [9,10,14], ocorrendo em domínios onde pode haver a presença de materiais que apresentem uma alta permissividade elétrica relativa [54] e/ou em meios onde não haja condutividade elétrica. Desse modo, a simplificação habitual para o caso quase-estático [40]:

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \ll \vec{J} \quad (2.12)$$

não é verdadeira, de modo que o termo $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ continua válido na equação (2.2).

2ª - Partindo-se da equação (2.1):

$$\text{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

e devido à equação (2.3), pode-se utilizar o potencial vetor \vec{A} , que é relacionado com a indução magnética \vec{B} através de:

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} \quad (2.13)$$

Sabe-se também que:

$$\text{rot}(\text{grad} V) = 0 \quad (2.14)$$

sendo V o potencial escalar elétrico.

Com as equações (2.1), (2.13) e (2.14), pode-se chegar a:

$$\text{rot}(\vec{E} + \text{grad}V) = \text{rot}\left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) \quad (2.15)$$

Isolando \vec{E} na equação (2.15), tem-se:

$$\vec{E} = -\text{grad}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (2.16)$$

No caso de linhas de transmissão, o campo elétrico é originado principalmente devido ao potencial elétrico a que estão submetidos os condutores e assume-se que a variação das grandezas são suficientemente lentas para se poder desprezar o efeito do potencial vetor \vec{A} , ou seja da variação da indução magnética [14].

Assim tem-se $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cong 0$, logo pode-se definir o campo elétrico como:

$$\vec{E} = -\text{grad}V \quad (2.17)$$

No entanto, o potencial escalar elétrico V não é suficiente para representar as características totais do campo elétrico gerado por uma linha de transmissão, pois as tensões de alimentação da linha são senoidais, apresentando variações de módulo e fase.

Assim, há a necessidade de introduzir o potencial escalar elétrico complexo \dot{V} , o qual permite considerar tais variações nos cálculos. Ele é definido como:

$$\dot{V} = V_0[\cos(\omega t + \alpha) + j \text{sen}(\omega t + \alpha)] \quad (2.18)$$

onde:

V_0 - Representa a amplitude da onda de tensão (V);

α - Ângulo de fase (rad);

ω - Freqüência angular (rad/s).

A expressão (2.18) pode ser representada de forma exponencial pela aplicação da identidade de Euler

$$\dot{V} = V_0 e^{j(\omega t + \alpha)} \quad (2.19)$$

Desta forma, as equações fundamentais (2.1), (2.2) e (2.4) se alteram para:

$$\text{rot} \vec{E} = 0 \quad (2.20)$$

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.21)$$

$$\text{div} \vec{D} = \dot{\rho} \quad (2.22)$$

bem como a equação (2.17):

$$\vec{E} = -\text{grad} \dot{V} \quad (2.23)$$

A equação que descreve o comportamento do potencial escalar elétrico complexo no domínio de estudo, pode ser obtida aplicando-se o operador divergente na equação (2.21), como mostrado abaixo:

$$\text{div}(\text{rot} \vec{H}) = \text{div} \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \quad (2.24)$$

como div rot é sempre nulo, tal operação resulta em:

$$\text{div} \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.25)$$

Introduzindo-se a equação (2.23) e também as relações constitutivas (2.5) e (2.7) em (2.25), obtém-se:

$$\operatorname{div}\left[-\sigma \operatorname{grad} \dot{V} + \frac{\partial}{\partial t}(-\varepsilon \operatorname{grad} \dot{V})\right] = 0 \quad (2.26)$$

Substituindo a equação (2.19) em (2.26):

$$\operatorname{div}\left[-\sigma \operatorname{grad} V_0 e^{j(\omega t + \alpha)} + \frac{\partial}{\partial t}(-\varepsilon \operatorname{grad} V_0 e^{j(\omega t + \alpha)})\right] = 0 \quad (2.27)$$

como $e^{j\omega t}$ não varia com as coordenadas do domínio e ε não varia com o tempo [10], obtém-se:

$$\operatorname{div}\left[-(\sigma + j\omega\varepsilon) \operatorname{grad} V_0 e^{j\alpha}\right] = 0 \quad (2.28)$$

A fim de tornar a notação um pouco mais compacta, representar-se-á o termo $V_0 e^{j\alpha}$ por V^* . Dessa forma, a expressão (2.28) pode ser reescrita como:

$$\operatorname{div}\left[-(\sigma + j\omega\varepsilon) \operatorname{grad} V^*\right] = 0 \quad (2.29)$$

que é a equação relativa à distribuição do potencial escalar elétrico complexo no domínio tridimensional de estudo Ω .

Para se resolver uma equação diferencial de problema de contorno, deve-se estabelecer as condições de contorno relativas ao fenômeno que está sendo estudado. Neste caso, as seguintes condições de contorno devem ser consideradas [39,41,46]:

- Condição de contorno de Dirichlet, onde o valor do potencial escalar elétrico complexo é especificado.

$$\dot{V} = V_0^* \quad , \text{ em } \Gamma_1 \quad (2.30)$$

- Condição de contorno de Neumann homogênea, onde o valor da derivada normal do potencial escalar elétrico complexo é especificado.

$$\frac{\partial \dot{V}}{\partial n} = 0 \quad , \text{ em } \Gamma_2 \quad (2.31)$$

onde:

Γ_1 - Parcela do domínio onde se impõem condições de contorno de Dirichlet;

Γ_2 - Parcela do domínio onde se impõem condições de contorno de Neumann;

Γ_m - Interface entre os materiais.

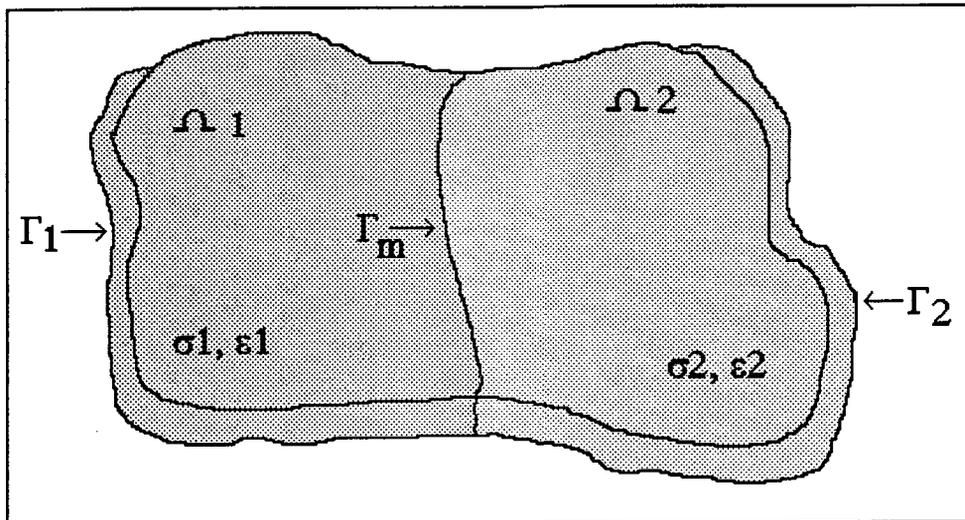


Figura 2.1 - Representação de um domínio tridimensional Ω , contendo uma interface entre dois materiais com condutividade e permissividade elétrica diferentes e a indicação das condições de contorno.

A resolução analítica da equação (2.29) é muito difícil. Assim, serão utilizadas técnicas numéricas para solucioná-la. Nos próximos ítems serão apresentadas as maneiras que tornam possíveis o tratamento numérico desta equação pelo método de elementos finitos.

2.4 A forma fraca

O tratamento clássico das equações diferenciais exige que a solução satisfaça a equação em todos os pontos do domínio. No entanto, a existência de materiais

com propriedades constitutivas diferentes no domínio de estudo, causa descontinuidades nas interfaces entre estes materiais e esta se torna uma exigência muito forte.

Para vencer esta dificuldade, reformula-se o problema de forma a admitir condições mais fracas para a solução e suas derivadas [39,40,42].

A forma fraca para o problema descrito pela equação (2.29) sujeita às condições de contorno (2.30) e (2.31) é obtida através da definição do resíduo r , tal que:

$$r = \text{div} [-(\sigma + j\omega\varepsilon)\text{grad}V^*] \quad (2.32)$$

em cada subdomínio regular de Ω .

Define-se agora, duas classes de funções [39,40,42]:

a) Funções admissíveis:

$$H = \{u: u \in H^1(\Omega); u = \dot{V} \text{ em } \Gamma_1\} \quad (2.33)$$

b) Funções de teste

$$H_0 = \{u: u \in H^1(\Omega); u = 0 \text{ em } \Gamma_1\} \quad (2.34)$$

onde $H^1(\Omega)$ é o espaço de Sobolev de ordem 1, ou seja, o espaço das funções suficientemente regulares de forma que suas primeiras derivadas sejam integráveis ao quadrado sobre Ω e Γ_1 é a parcela do contorno do domínio onde se aplica a condição de contorno de Dirichlet.

Multiplicando-se r por uma função de teste u suficientemente regular, como descrita acima, integra-se ru sobre cada subdomínio regular de Ω e iguala-se a zero [39].

$$\int_{\Omega_i} r u d\Omega = 0 \quad i = 1, 2 \quad (2.35)$$

ou

$$\int_{\Omega_i} \text{div} [-(\sigma + j\omega\varepsilon) \text{grad} V^*] u \, d\Omega = 0 \quad i = 1, 2 \quad (2.36)$$

ou ainda, dividindo Ω em Ω_1 e Ω_2 , obtém-se:

$$\int_{\Omega_1} \text{div} [-(\sigma + j\omega\varepsilon) \text{grad} V^*] u \, d\Omega + \int_{\Omega_2} \text{div} [-(\sigma + j\omega\varepsilon) \text{grad} V^*] u \, d\Omega \quad (2.37)$$

Integrando (2.37) por partes sobre cada subdomínio e aplicando o teorema da divergência, obtém-se:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_1} \text{grad} u [(\sigma + j\omega\varepsilon) \text{grad} V^*] \, d\Omega + \int_{\Omega_2} \text{grad} u [(\sigma + j\omega\varepsilon) \text{grad} V^*] \, d\Omega + \\ & \int_{\delta\Omega_1} [-(\sigma + j\omega\varepsilon) \text{grad} V^*] \cdot \bar{n}_1 u \, d\Gamma + \int_{\delta\Omega_2} [-(\sigma + j\omega\varepsilon) \text{grad} V^*] \cdot \bar{n}_2 u \, d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (2.38)$$

onde $\delta\Omega_1$ e $\delta\Omega_2$ são as fronteiras das regiões 1 e 2 e \bar{n}_1 e \bar{n}_2 são os vetores normais às respectivas fronteiras.

Somando-se as contribuições dos subdomínios Ω_1 e Ω_2 , obtém-se:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \text{grad} u [(\sigma + j\omega\varepsilon) \text{grad} V^*] \, d\Omega + \int_{\delta\Omega_1} [-(\sigma + j\omega\varepsilon) \text{grad} V^*] \cdot \bar{n}_1 u \, d\Gamma + \\ & \int_{\delta\Omega_2} [-(\sigma + j\omega\varepsilon) \text{grad} V^*] \cdot \bar{n}_2 u \, d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (2.39)$$

Deve ser notado que as fronteiras $\delta\Omega_1$ e $\delta\Omega_2$ são compostas de duas parcelas: uma que não coincide com a interface Γ_m denotada por $\delta\Omega_1 - \Gamma_m$ e $\delta\Omega_2 - \Gamma_m$ e outra que coincide com Γ_m .

Assim decompondo-se as integrais referentes a $\delta\Omega_1$ e $\delta\Omega_2$ de (2.39) nas duas parcelas acima, tem-se:

$$\int_{\Omega} \text{grad} u [(\sigma + j\omega\varepsilon) \text{grad} V^*] \, d\Omega + \int_{\Gamma_m} [-(\sigma + j\omega\varepsilon) \text{grad} V^*] \cdot \bar{n}_1 u \, d\Gamma +$$

$$\int_{\partial\Omega_1 - \Gamma_m} [-(\sigma + j\omega\varepsilon) \text{grad} V^*] \cdot \bar{n}_1 u d\Gamma + \int_{\Gamma_m} [-(\sigma + j\omega\varepsilon) \text{grad} V^*] \cdot \bar{n}_2 u d\Gamma + \int_{\partial\Omega_2 - \Gamma_m} [-(\sigma + j\omega\varepsilon) \text{grad} V^*] \cdot \bar{n}_2 u d\Gamma = 0 \quad (2.40)$$

Somando-se as duas integrais referentes a Γ_m , tem-se:

$$\int_{\Gamma_m} [-(\sigma + j\omega\varepsilon) \text{grad} V^*] \cdot \bar{n}_1 u d\Gamma + \int_{\Gamma_m} [-(\sigma + j\omega\varepsilon) \text{grad} V^*] \cdot \bar{n}_2 u d\Gamma \quad (2.41)$$

e sabendo que em Γ_m , $\bar{n}_1 = -\bar{n}_2$, as duas integrais de (2.41) se anulam. Além disso:

$$(\partial\Omega_1 - \Gamma_m) \cup (\partial\Omega_2 - \Gamma_m) = \Omega \quad (2.42)$$

portanto (2.40) se reduz a:

$$\int_{\Omega} \text{grad} u [(\sigma + j\omega\varepsilon) \text{grad} V^*] d\Omega + \int_{\Gamma} [-(\sigma + j\omega\varepsilon) \text{grad} V^*] \cdot \bar{n} u d\Gamma = 0 \quad (2.43)$$

Aplicando a condição de contorno de Neumann homogênea (2.31), o termo de Γ referente à Γ_2 desaparece [39]. Assim tem-se:

$$\int_{\Omega} \text{grad} u [(\sigma + j\omega\varepsilon) \text{grad} V^*] d\Omega = 0 \quad (2.44)$$

que é a forma fraca para o problema em questão.

2.5 O método de Galerkin

Considerando apenas problemas lineares, pode-se citar a seguinte formulação fraca, obtida no item anterior: ache $V^* \in H$, tal que:

$$\int_{\Omega} (\sigma + j\omega\varepsilon) \text{grad} V^* \cdot \text{grad} u d\Omega = 0 \quad \forall u \in H_0 \quad (2.45)$$

onde H é o conjunto das funções admissíveis definido em (2.33) e H_0 é o conjunto das funções de teste definido em (2.34). Sendo assim, a solução V^* e a função de teste u

pertencem a conjuntos de dimensão infinita. Logo a procura da solução é extremamente difícil [39,40].

O método de Galerkin consiste na procura de uma solução aproximada para (2.45) em um conjunto de dimensão finita. Assim, ao invés de abordar o problema (2.45) de dimensão infinita, procura-se uma solução aproximada $V_n^* \in H_0$ de forma que:

$$V_n^* = \sum_{i=1}^n \alpha_i N_i \quad (2.46)$$

onde N_i são funções de interpolação, α_i constantes desconhecidas, n a dimensão do espaço e H_0^n é um subconjunto de H_0 com dimensão n .

Assim, a formulação fraca para o problema consiste agora em achar $V_n^* \in H_0^n$, tal que:

$$\int_{\Omega} (\sigma + j\omega\varepsilon) \text{grad} V_n^* \text{grad} u_n \, d\Omega = 0 \quad \forall u_n \in H_0^n \quad (2.47)$$

2.6 O método de Elementos Finitos

O método de Galerkin fornece uma elegante estratégia para a obtenção da solução aproximada de problemas de contorno, porém apresenta um sério inconveniente: não fornece uma maneira sistemática de construção das funções de interpolação N_i para as funções de teste u_n .

Em problemas com geometrias complexas, sejam eles bi ou tridimensionais, a seleção das funções de interpolação que satisfazem as condições de contorno do problema é uma tarefa extremamente difícil [40].

Desta forma, o método de Galerkin só é eficaz se associado a uma técnica geral e sistemática para a construção das funções de interpolação. Uma das técnicas mais interessantes é fornecida pelo método de Elementos Finitos.

A idéia principal deste método é que as funções de interpolação podem ser definidas de maneira independente sobre as subregiões do domínio, denominadas elementos finitos e que sobre cada subdomínio, N_i pode ser funções simples, geralmente polinomiais de baixa ordem [47].

Na aplicação deste método, primeiramente o domínio é particionado ou discretizado em subdomínios chamados de elementos finitos. Em cada elemento são identificados certos pontos chamados nós ou pontos nodais. O conjunto de elementos e nós que formam o domínio aproximado do problema é chamado de malha de elementos finitos. A figura mostrada abaixo, apresenta uma malha de elementos finitos, onde destaca se um elemento e seus respectivos nós.

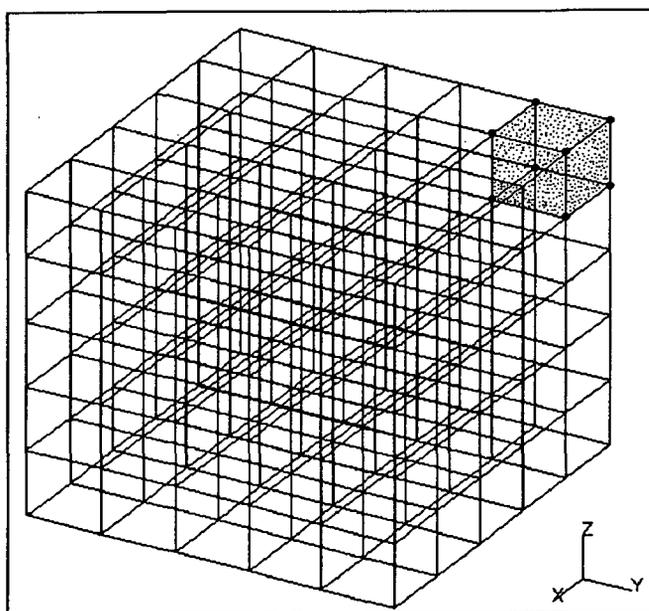


Figura 2.2 - Malha de elementos finitos.

Uma escolha adequada dos pontos nodais é realizada e as funções de interpolação N_i são geradas de forma que estas sejam contínuas nas fronteiras entre os elementos.

Neste trabalho, o domínio tridimensional de estudo foi discretizado em elementos finitos isoparamétricos do tipo hexaedro trilinear de 1ª ordem, com funções de interpolação lineares, apresentando continuidade C^0 [43].

2.6.1 O elemento de referência e as funções de interpolação

A integração da equação (2.47) depende do sistema de coordenadas utilizado e, em alguns casos, pode apresentar dificuldades [38,48]. Assim, ao invés de empregar-se o sistema de coordenadas xyz , utilizar-se-á um sistema de referência de tal forma que as operações algébricas possam ser mais facilmente realizadas.

Desta forma, calcula-se a integral (2.47) dentro de um elemento de referência pertencente ao sistema de coordenadas $\xi\eta\zeta$. A figura a seguir mostra o elemento utilizado no sistema real de coordenadas xyz e no sistema de referência $\xi\eta\zeta$.

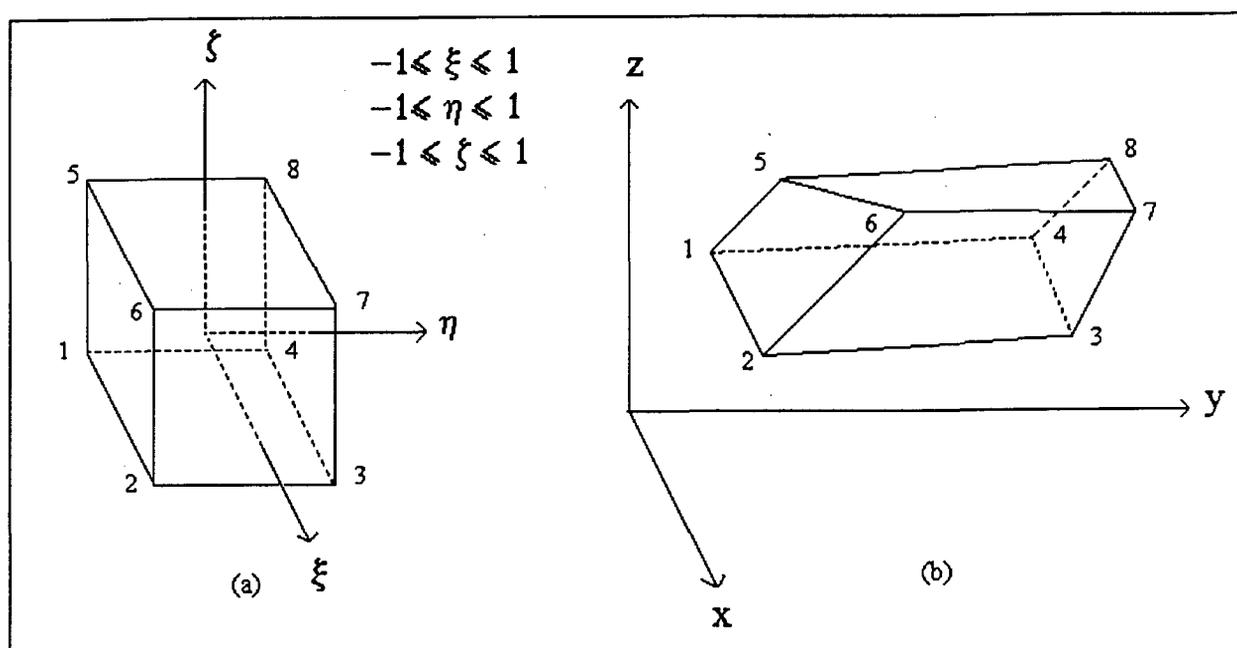


Figura 2.3 - Elemento isoparamétrico trilinear de 1ª ordem, (a) no sistema de referência, (b) no sistema real.

Ao se adotar o sistema de referência, $\xi\eta\zeta$, serão utilizadas funções de transformação geométrica, Φ_i , que fazem o mapeamento do elemento real, expresso no sistema de coordenadas xyz , para o elemento de referência, expresso em termos de $\xi\eta\zeta$.

É importante notar que a função de transformação geométrica, Φ_i , será utilizada também como função de interpolação do potencial escalar elétrico complexo nos nós do elemento [38,43]. Logo:

$$N_i = \Phi_i \quad (2.48)$$

A tabela a seguir apresenta as funções de interpolação e também suas derivadas (cuja utilidade será evidenciada nos próximos parágrafos) para o elemento considerado.

Tabela 2.1 - Funções de interpolação e suas derivadas.

NÓ	N	$\frac{\partial N}{\partial \xi}$	$\frac{\partial N}{\partial \eta}$	$\frac{\partial N}{\partial \zeta}$
1	$\frac{a_2 b_2 c_2}{8}$	$-\frac{b_2 c_2}{8}$	$-\frac{a_2 c_2}{8}$	$-\frac{a_2 b_2}{8}$
2	$\frac{a_1 b_2 c_2}{8}$	$\frac{b_2 c_2}{8}$	$-\frac{a_1 c_2}{8}$	$-\frac{a_1 b_2}{8}$
3	$\frac{a_1 b_1 c_2}{8}$	$\frac{b_1 c_2}{8}$	$\frac{a_1 c_2}{8}$	$-\frac{a_1 b_1}{8}$
4	$\frac{a_2 b_1 c_2}{8}$	$-\frac{b_1 c_2}{8}$	$\frac{a_2 c_2}{8}$	$-\frac{a_2 b_1}{8}$
5	$\frac{a_2 b_2 c_1}{8}$	$-\frac{b_2 c_1}{8}$	$-\frac{a_2 c_1}{8}$	$\frac{a_2 b_2}{8}$
6	$\frac{a_1 b_2 c_1}{8}$	$\frac{b_2 c_1}{8}$	$-\frac{a_1 c_1}{8}$	$\frac{a_1 b_2}{8}$
7	$\frac{a_1 b_1 c_1}{8}$	$\frac{b_1 c_1}{8}$	$\frac{a_1 c_1}{8}$	$\frac{a_1 b_1}{8}$
8	$\frac{a_2 b_1 c_1}{8}$	$-\frac{b_1 c_1}{8}$	$\frac{a_2 c_1}{8}$	$\frac{a_2 b_1}{8}$

onde:

$$a_1 = 1 + \xi \quad a_2 = 1 - \xi$$

$$b_1 = 1 + \eta \quad b_2 = 1 - \eta$$

$$c_1 = 1 + \zeta \quad c_2 = 1 - \zeta$$

2.7 As expressões matriciais para o problema

2.7.1 As formas integrais sobre o elemento real

Para se obter a forma discretizada da equação (2.47), levar-se-á em conta o fato de que as funções de interpolação, definidas no item anterior, são também válidas para o potencial nos nós do elemento. Assim:

$$V^* = [N_1 \quad N_2 \quad \dots \quad N_8]^t \begin{bmatrix} V_1^* \\ V_2^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ V_8^* \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

ou seja,

$$V^* = [N_i]^t [V_i^*] \quad i = 1, 8 \quad (2.50)$$

Logo:

$$\text{grad} V^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial V^*}{\partial x} \\ \frac{\partial V^*}{\partial y} \\ \frac{\partial V^*}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} (N_i^t \cdot V_i^*) \\ \frac{\partial}{\partial y} (N_i^t \cdot V_i^*) \\ \frac{\partial}{\partial z} (N_i^t \cdot V_i^*) \end{bmatrix} \quad i = 1, 8 \quad (2.51)$$

Assim:

$$\int_{\Omega} (\sigma + j\omega\varepsilon) \text{grad} N_i^t \text{grad} u_n V_i^* d\Omega \quad i = 1, 8 \quad (2.52)$$

Como u_n pode ser qualquer função do conjunto de funções de teste, escolhe-se u_n de modo que $u_j = N_j$, logo:

$$\int_{\Omega} (\sigma + j\omega\varepsilon) \text{grad } N_i^t \text{grad } N_j V_i^* d\Omega \quad i = j = 1, 8 \quad (2.53)$$

que pode ser escrita na forma matricial abaixo:

$$\int_{\Omega} (\sigma + j\omega\varepsilon) [B]^t [B] [V_n^*] d\Omega \quad (2.54)$$

onde:

$[B]$ - Matriz de derivadas das funções de interpolação em relação a xyz ;

$[V_n^*]$ - Vetor dos potenciais nos nós do elemento.

Logo a matriz de contribuição elementar, 8×8 , deste trabalho é da forma:

$$[\dot{g}] = \int_{\Omega} (\sigma + j\omega\varepsilon) [B]^t [B] d\Omega \quad (2.55)$$

2.7.2 A forma integral sobre o elemento de referência

Para passar do elemento real para o elemento de referência, é necessário transformar as derivações em xyz para derivações em $\xi\eta\zeta$ e ainda a integração sobre o elemento real em uma integração sobre o elemento de referência [43]. Nos próximos itens serão mostrados os passos para se realizar tais transformações.

2.7.2.1 A transformação das derivadas em x, y e z

As derivadas em xyz são expressas em função das derivadas em $\xi\eta\zeta$ através da inversa da matriz Jacobiana. Assim a matriz $[B]$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$[B] = [J]^{-1} [B\xi] \quad (2.56)$$

e conseqüentemente:

$$[B]^t = [B\xi]^t \{[J]^{-1}\}^t \quad (2.57)$$

onde:

$[J]$ - Matriz Jacobiana;

$[B\xi]$ - Matriz semelhante a $[B]$, contendo as derivadas em $\xi\eta\zeta$ das funções $N(\xi, \eta, \zeta)$ ao invés das derivadas em xyz das funções $N(x, y, z)$.

2.7.2.2 A transformação do domínio de integração

A passagem da integral do elemento real para o elemento de referência é obtida através da seguinte relação [38,43]:

$$\int_{\Omega} \dots d\Omega = \int_{\Omega_r} \dots \det(J) d\xi d\eta d\zeta \quad (2.58)$$

e os limites de integração em ξ, η e ζ para o elemento de referência são [43]:

$$\int_{\xi=-1}^{\xi=1} \int_{\eta=-1}^{\eta=1} \int_{\zeta=-1}^{\zeta=1} \dots \det(J) d\xi d\eta d\zeta \quad (2.59)$$

Logo a matriz de contribuição fica sendo:

$$[\dot{g}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\sigma + j\omega\epsilon) [B\xi]^t \{[J]^{-1}\}^t [J]^{-1} [B\xi] \det(J) d\xi d\eta d\zeta \quad (2.60)$$

2.7.3 Cálculo do Jacobiano, de seu determinante e de sua inversa

O cálculo do Jacobiano é feito da seguinte maneira [43,48]:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_2}{\partial \zeta} & \dots & \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_i & y_i & z_i \end{bmatrix} \quad i = 1, 8 \quad (2.61)$$

O cálculo do $\det(J)$, não apresenta dificuldades particulares, pois a matriz resultante do jacobiano é uma matriz 3×3 , assim como sua inversa, ou seja:

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

logo:

$$\begin{aligned} \det(J) = & J_{11}(J_{22}J_{33} - J_{32}J_{23}) + J_{12}(J_{31}J_{23} - J_{21}J_{33}) + \\ & + J_{13}(J_{21}J_{32} - J_{31}J_{22}) \end{aligned} \quad (2.63)$$

e a inversa é dada por:

$$[J]^{-1} = \frac{1}{\det(J)} \begin{bmatrix} J_{22}J_{33} - J_{32}J_{23} & J_{13}J_{32} - J_{12}J_{33} & J_{12}J_{23} - J_{13}J_{22} \\ J_{31}J_{23} - J_{21}J_{33} & J_{11}J_{33} - J_{13}J_{31} & J_{21}J_{13} - J_{23}J_{11} \\ J_{21}J_{32} - J_{31}J_{22} & J_{12}J_{31} - J_{32}J_{11} & J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21} \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

2.8 Integração numérica

A integração analítica da equação (2.59) sobre cada elemento de referência do domínio tridimensional de estudo Ω , não é uma tarefa muito fácil. Este fato leva a utilizar um método de integração numérica. Neste trabalho, utilizar-se-á o método de integração de Gauss, pois é um método numérico muito utilizado, conhecido por sua eficácia e que se adapta muito bem à resolução da integral deste problema.

Assim, a transformação da equação integral dada pela equação (2.59) é a seguinte:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 Y(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r W_i W_j W_k Y(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \quad (2.65)$$

onde:

W_i, W_j, W_k - São os coeficientes ou pesos de integração no método de Gauss;

ξ_i, η_j, ζ_k - São as abcissas ou coordenadas dos pontos de integração onde a função Y deve ser calculada;

r_1, r_2, r_3 - São os números de pontos de integração em cada direção dos eixos coordenados.

Como o elemento de referência é o hexaédrico, tem-se dois pontos de integração em cada direção, logo $r_1 = r_2 = r_3 = 2$. Os valores de W_i, W_j, W_k e de ξ_i, η_j, ζ_k são os seguintes [43]:

$$W_i = W_j = W_k = 1$$

$$\xi_i = \eta_j = \zeta_k = \pm 0,577\ 350\ 269\ 189\ 626 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

2.9 Aspectos informáticos relativos à implementação do método de elementos finitos

Na técnica de elementos finitos, para cada elemento da malha, é obtida uma matriz, chamada matriz de contribuição elementar. Neste trabalho, a matriz de contribuição elementar é uma matriz complexa, simétrica, 8×8 . A soma matricial ou "condensação" de todas as matrizes elementares vai formar a matriz de contribuição global, onde todos os elementos da malha são considerados. Esta matriz apresenta algumas características particulares, que devem ser exploradas de modo a tornar sua

manipulação otimizada, especialmente em casos tridimensionais, onde apresenta dimensões consideráveis [43].

Obtém-se, então, um sistema matricial de equações, que pode ser representado por $\left[\dot{SS} \right] \left[\dot{V} \right] = \left[\dot{Q} \right]$, onde $\left[\dot{SS} \right]$ é a matriz global, $\left[\dot{V} \right]$ é o vetor dos potenciais incógnitos nos nós e $\left[\dot{Q} \right]$ representa o que, em geral, chama-se de "fontes" e

pode ser relativo a cargas elétricas, correntes elétricas ou ímãs permanentes, dependendo do problema [38]. Neste caso, é relativo às cargas elétricas e vale zero, pois não há cargas elétricas no domínio de estudo.

Uma vez que o sistema $\left[\dot{SS} \right] \left[\dot{V} \right] = \left[\dot{Q} \right]$ está formado, deve-se inserir as

condições de contorno do tipo Dirichlet, ou seja, os potenciais impostos e finalmente passa-se à etapa de resolução do sistema de equações lineares, que fornecerá os potenciais incógnitos nos nós da malha.

A seguir, serão apresentados alguns aspectos informáticos relativos ao armazenamento da matriz global, inserção das condições de contorno de Dirichlet e método de resolução do sistema matricial de equações.

2.9.1 As técnicas de armazenamento da matriz global

2.9.1.1 A matriz banda

A matriz de contribuição global é simétrica, visto que é formada pela condensação de matrizes elementares simétricas. Esta matriz possui a forma chamada de "matriz banda", onde os termos não nulos se situam próximos à diagonal principal [38,43,44]. Ela possui a forma mostrada na figura abaixo:

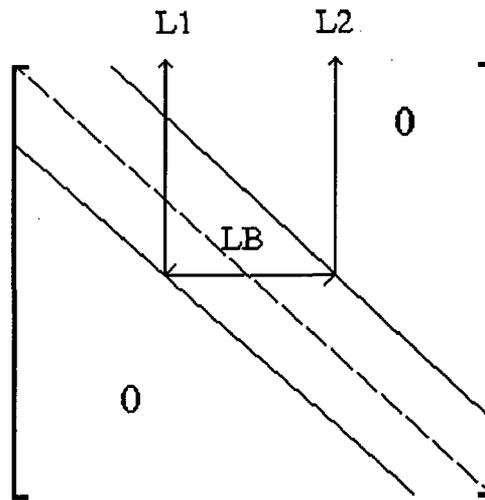


Figura 2.4 - Topologia da matriz global

Este fato permite armazenar apenas sua banda. No entanto, como a mesma é simétrica, pode-se guardar na memória apenas meia-banda, de forma que a economia de memória é ainda maior.

É importante notar que se a malha não for convenientemente numerada, a matriz poderá não ter a forma de matriz banda e, neste caso, perder-se-ia a vantagem desta propriedade topológica [38].

A largura da banda é definida como a "distância" entre os dois mais distantes nós, ou seja, entre os mais distantes termos da matriz global, obtível em uma linha, e pode ser obtida pela expressão abaixo [43]:

$$LB = L_2 - L_1 + 1 \quad (2.66)$$

A matriz banda será então armazenada sob uma forma diferente da matriz original, tal como indica a figura abaixo:

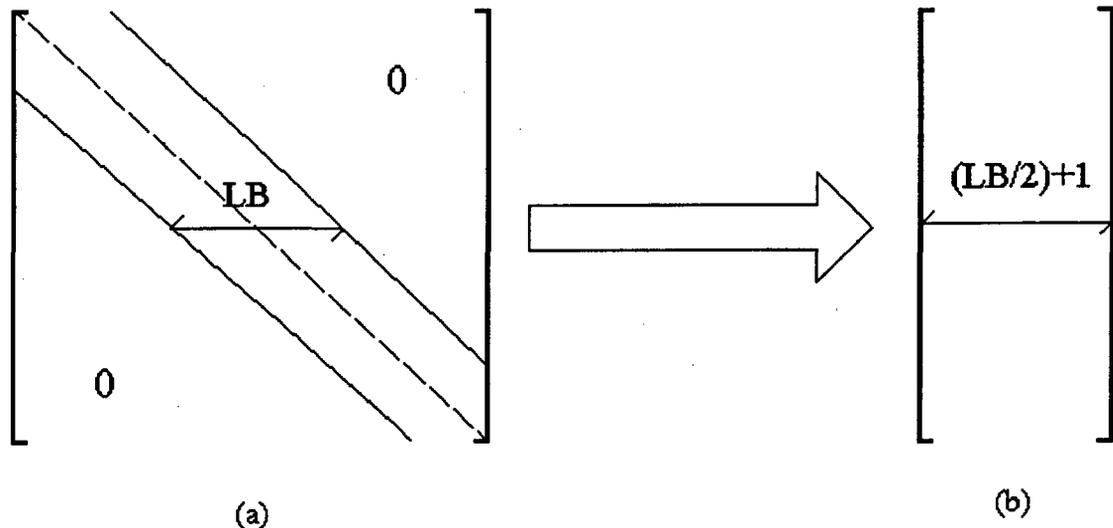


Figura 2.5 - (a) Matriz global, (b) Matriz banda equivalente.

Logo, deve existir uma relação de passagem entre os dois arranjos. Esta relação é a seguinte: um termo que ocupa na matriz global a posição (i, j) , ocupará na matriz banda a posição (i, jj) , onde $jj = j - i + 1$. Assim, trabalhar na matriz banda é equivalente a fazê-lo na matriz global, trocando-se os índices j por jj .

Outro aspecto importante refere-se à resolução do sistema de equações. Quanto mais "estreita" for a banda da matriz, mais rápida será a resolução do mesmo, pois os algoritmos de resolução operam somente na banda da matriz [38].

2.9.1.2 A matriz sob a forma compacta

Embora armazenar a matriz global sob a forma de semi-banda represente uma economia de memória muito importante, em certos casos, a semi-banda pode ainda ser muito esparsa. Pode-se, então, conceber uma outra maneira de armazenar a matriz global, onde apenas os termos não nulos da matriz são armazenados. Este método permite trabalhar com um domínio de cálculo muito maior, tendo em vista que apenas os termos não nulos da matriz global serão armazenados, possibilitando assim um aumento considerável do número de nós. Isto é feito através de dois arranjos, um chamado "INDIC" que é uma matriz que contém os endereços dos termos não nulos localizados

fora da diagonal principal e o outro chamado de "SS" que é a matriz que contém os termos não nulos da matriz global.

Esta maneira possui também a vantagem de que a malha pode ser numerada de qualquer forma, visto que a largura de banda não tem mais influência no armazenamento da matriz.

Neste trabalho as duas dimensões da matriz "INDIC" e "SS" são, respectivamente, (número total de nós, 14) e (número total de nós, 15), pois a experiência mostra que o número de nós vizinhos a um certo nó não excede a 14 [38,43].

Um inconveniente neste tipo de armazenamento é que sua implementação exige um trabalho computacional um tanto quanto complexo, e que deve ser feito com bastante cuidado, pois a probabilidade de se cometer erros é grande. Outro aspecto importante é que este tipo de armazenamento exige que sejam utilizados métodos iterativos para a resolução do sistema de equações lineares formado, pois neste tipo de resolução não há criação de novos termos matriciais, de forma que os arranjos "INDIC" e "SS" permanecem inalterados [38,43].

2.9.2 Introdução das condições de contorno

Após formado o sistema matricial de equações $\begin{bmatrix} SS \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Q} \end{bmatrix}$, deve-se

inserir os potenciais já conhecidos, ou seja, as condições de contorno de Dirichlet. A inserção das condições de contorno neste trabalho é feita da seguinte maneira [43]: no termo diagonal da matriz global coloca-se um número grande, na ordem de 10^{20} . No vetor do lado direito, coloca-se o valor do potencial imposto multiplicado pelo mesmo fator 10^{20} . Nos outros termos da linha correspondente ao potencial imposto, nada é feito. Veja-se um exemplo: considere o sistema matricial abaixo

$$\begin{bmatrix} \dot{S}_{11} & \dot{S}_{12} & \dot{S}_{13} \\ & \dot{S}_{22} & \dot{S}_{23} \\ & & \dot{S}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \dot{V}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Suponha-se que seja conhecido o valor do potencial no nó 1, e que este vale \dot{v} . Então, usando a regra descrita acima, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 10^{20} & \dot{S}_{12} & \dot{S}_{13} \\ & \dot{S}_{22} & \dot{S}_{23} \\ & & \dot{S}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \dot{V}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{v} \cdot 10^{20} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dessa forma:

$$10^{20}\dot{V}_1 + \dot{S}_{12}\dot{V}_2 + \dot{S}_{13}\dot{V}_3 = \dot{v} \cdot 10^{20}$$

que fornece:

$$\dot{V}_1 = \dot{v}$$

Assim, tem-se inserida a condição de contorno do problema.

2.9.3 Método de resolução do sistema complexo de equações lineares

Estando o sistema matricial formado e com as condições de contorno de Dirichlet inseridas, deve-se passar à etapa de resolução, que fornecerá os potenciais nos nós da malha. Para isto pode-se utilizar dois tipos de métodos: diretos ou iterativos.

A utilização de um e de outro está condicionada ao tipo de armazenamento da matriz global. Normalmente, quando a matriz global é armazenada sob a forma de semi-banda, utiliza-se métodos diretos. É importante salientar que, durante o processo de resolução utilizando estes métodos, nas posições onde há termos nulos, serão criados termos não nulos, de tal forma que no final do processo, a semi-banda da matriz que inicialmente era esparsa, tornar-se-á quase plena. Quando a matriz é armazenada sob

a forma compacta, usam-se métodos de resolução iterativos, pois neste tipo de resolução não há criação de novos termos matriciais, permanecendo a topologia dos arranjos "SS" e "INDIC" inalterados [43].

Neste trabalho, armazena-se a matriz global na forma compacta. Conseqüentemente deve-se utilizar um método iterativo para resolução do sistema matricial.

Cabe salientar que o estudo de métodos de resolução de grandes sistemas matriciais é em si próprio uma vasta área de pesquisa, cuja exposição completa dentro de todo rigor matemático foge aos objetivos deste trabalho. Procurar-se-á expor aqui, de forma resumida, apenas alguns aspectos relativos ao tipo do método empregado neste trabalho.

Os métodos iterativos são métodos que conduzem à solução através de uma sucessão de cálculos, sendo que o número de operações necessárias para se chegar à solução depende do erro de convergência adotado e da estrutura da matriz global. Com isto, o número de operações para se chegar à solução desejada pode variar conforme a natureza do problema e do sistema matricial obtido [43].

O método iterativo empregado neste trabalho é uma variante do método de gradientes conjugados com condicionamento, adaptado para solução de sistemas complexos e conhecido como método dos gradientes conjugados ortogonalmente conjugados (COCG). Para maiores detalhes sobre este método ver: [40,43,53].

2.10 Obtenção do campo elétrico

Após a resolução do sistema matricial global, pelo método citado acima, obtém-se os valores do potencial escalar elétrico complexo em cada nó da malha de elementos finitos. Assim, pode-se calcular o campo elétrico, através da equação (2.23).

Algumas considerações são feitas para o cálculo do campo elétrico pelo MEF. São elas:

- a superfície do solo é considerada um condutor perfeito, apresentando potencial nulo;
- os condutores são considerados segmentos de reta com potenciais impostos através da condição de contorno de Dirichlet;
- os cabos pára-raios, quando presentes, são considerados aterrados.

2.11 Conclusão

Neste capítulo foi apresentada a formulação matemática para o cálculo do campo elétrico gerado por linhas de transmissão através do MEF. Foi utilizado o conceito de potencial escalar elétrico complexo o qual permite representar a variação de módulo e fase das grandezas na solução de problemas em regime permanente senoidal.

No próximo capítulo serão apresentados os valores de campo elétrico calculados pelo MEF e pelo MSC os quais serão comparados com valores medidos, a fim de comprovar a eficácia do método utilizado.

CAPÍTULO 3

RESULTADOS OBTIDOS

3.1 Introdução

A fim de validar a metodologia apresentada no capítulo II, para o cálculo tridimensional do campo elétrico produzido por linhas de transmissão, serão apresentadas curvas do perfil transversal do campo elétrico obtidas a partir da aplicação desta metodologia e também pela aplicação do MSC. Ambos os resultados serão comparados com valores medidos.

A análise será feita para duas linhas de transmissão trifásica, uma de 500 kV de estrutura tipo plana e outra de 1050 kV também de estrutura plana, para as quais dispõe-se de valores medidos. Serão apresentadas também a malha de elementos finitos e as linhas equipotenciais para cada um dos casos analisados.

Em seguida, considera-se a presença de um bloco de material condutor com permissividade nula e também um bloco de material condutor com uma certa permissividade, sob as fases da linha de 1050 kV analisada anteriormente, com o objetivo de verificar a influência destes objetos nos valores e na distribuição do potencial e do campo elétrico produzido pela linha.

Por último, faz-se a análise de um caso hipotético do cruzamento entre duas linhas de transmissão, com o objetivo de demonstrar a versatilidade do método.

3.2 Linha de 500 kV - Endesa - Chile

3.2.1 Características

A tabela 3.1, mostrada a seguir, apresenta as características principais do trecho da linha em estudo [2]:

Tabela 3.1 - Características da linha de transmissão de 500 kV da Endesa, Chile.

Tensão da linha (kV)	500
Número de condutores por fase	2
Diâmetro dos condutores (m)	0,03195
Diâmetro dos cabos pára-raios (m)	0,01905
Espaçamento entre subcondutores (m)	0,40
Distância entre as fases (m)	16,80
Altura das fases (m)	13,0
Distância entre os cabos pára-raios (m)	27,30
Altura dos cabos pára-raios (m)	22,0

Os cabos pára-raios são multiaterrados e o terreno onde se encontra o trecho da linha em análise é plano. É admitida nos cálculos seqüência de fase *ABC*, da esquerda para a direita. A figura abaixo apresenta uma vista no plano do domínio de estudo, válido tanto para o MEF como para o MSC.

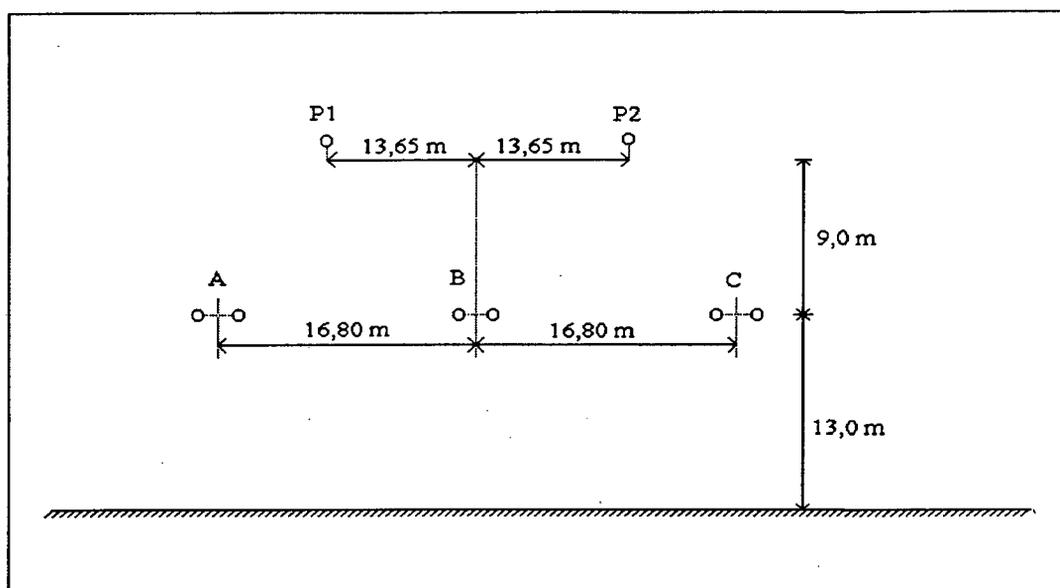


Figura 3.1 - Vista no plano do domínio de estudo.

3.2.2 Malha de elementos finitos

A figura a seguir apresenta uma vista, no plano, da malha de elementos finitos utilizada neste caso. Optou-se em apresentar a malha de elementos finitos no plano, pois sua visualização no espaço seria prejudicada devido ao elevado número de elementos. As dimensões do domínio são: 0 a 130 metros na horizontal (eixo y), 0 a 50 metros na vertical (eixo z) e 0 a 10 metros na longitudinal (eixo x), ou seja, considera-se um trecho de 10 metros da linha de transmissão, e admite-se que neste trecho os condutores são segmentos de reta, desprezando-se a variação de altura dos mesmos.

A malha, para este caso, possui 18360 elementos e um total de 37268 nós. Observa-se que, na região entre os condutores, a malha apresenta-se mais densa. Isto é feito para se obter uma melhor precisão nos resultados, visto que nesta região o campo é mais intenso. Foram realizados vários exemplos, onde para cada um deles a malha apresentava diferentes topologias. Com isso observou-se que os melhores resultados, ou seja, aqueles que mais se aproximaram dos valores obtidos pelo MSC, eram obtidos quando a malha apresentava uma densidade de elementos elevada entre as fases da linha.

Neste caso, foram necessárias 138 iterações no método iterativo COCG para se obter a convergência e um tempo de cálculo de 9 minutos e 30 segundos, em uma estação Sun SparkStation 2.

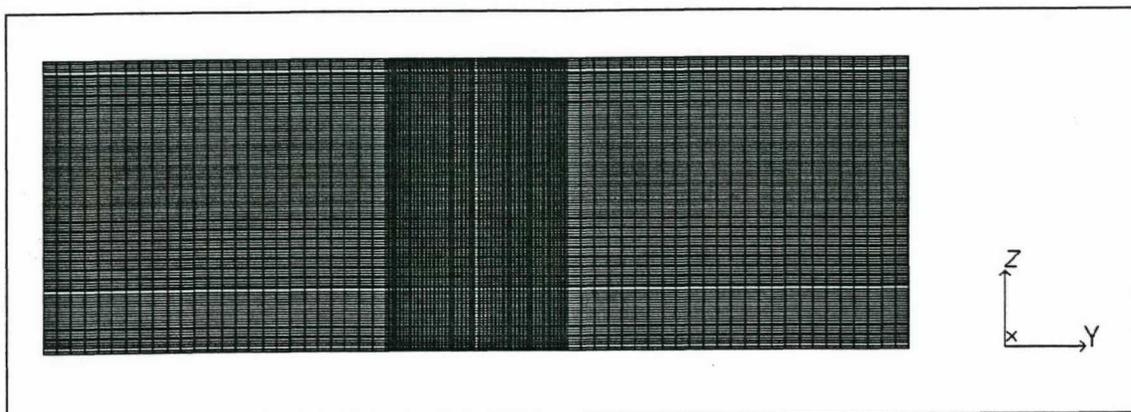


Figura 3.2 - Vista no plano da malha de elementos finitos para a linha de 500 kV.

3.2.3 Linhas equipotenciais

A figura 3.3 apresenta as linhas equipotenciais, obtidas pelo método de elementos finitos para linha de 500 kV. Elas representam o módulo do potencial escalar elétrico complexo. As equipotenciais servem para dar uma noção da distribuição do campo elétrico no domínio de estudo, indicando as regiões onde o campo é uniforme ou não [9].

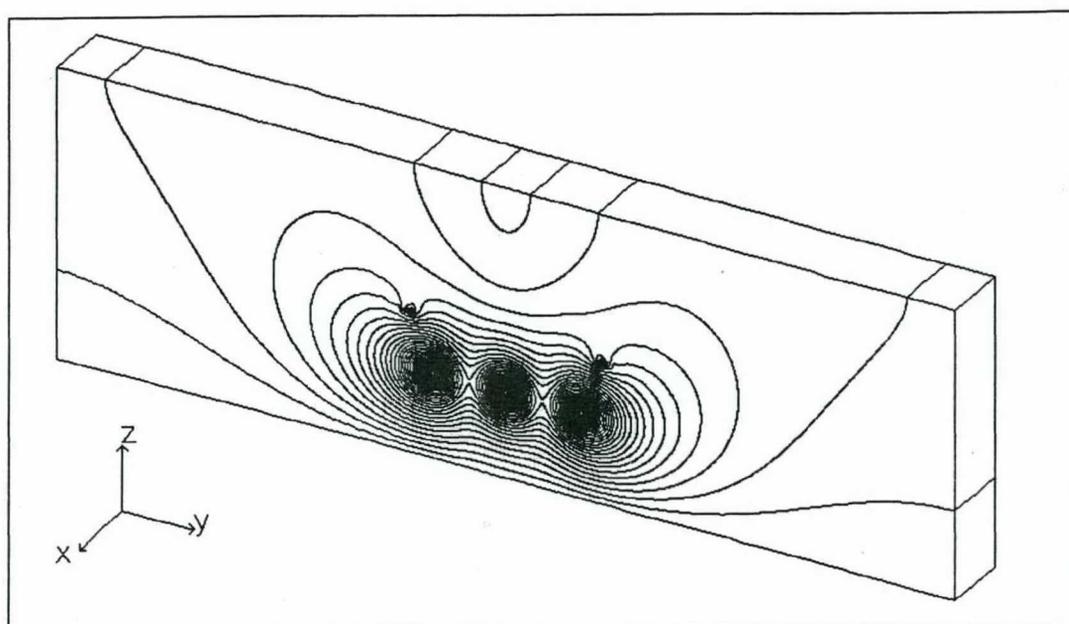


Figura 3.3 - Equipotenciais para linha de 500 kV.

3.2.4 Curvas de campo elétrico

A figura 3.4 apresenta as curvas do perfil lateral do campo elétrico a altura de 1 m do solo, obtidas pelo MEF, MSC e também a partir de valores medidos.

As medições do campo elétrico foram realizadas com o medidor de campo elétrico de frequência industrial, modelo 113 da Electric Field Measurement Co. Foi utilizado o procedimento de medição do IEEE, que recomenda manter o medidor a altura de 1 m do solo e a uma distância mínima de 2,5 m do operador [2].

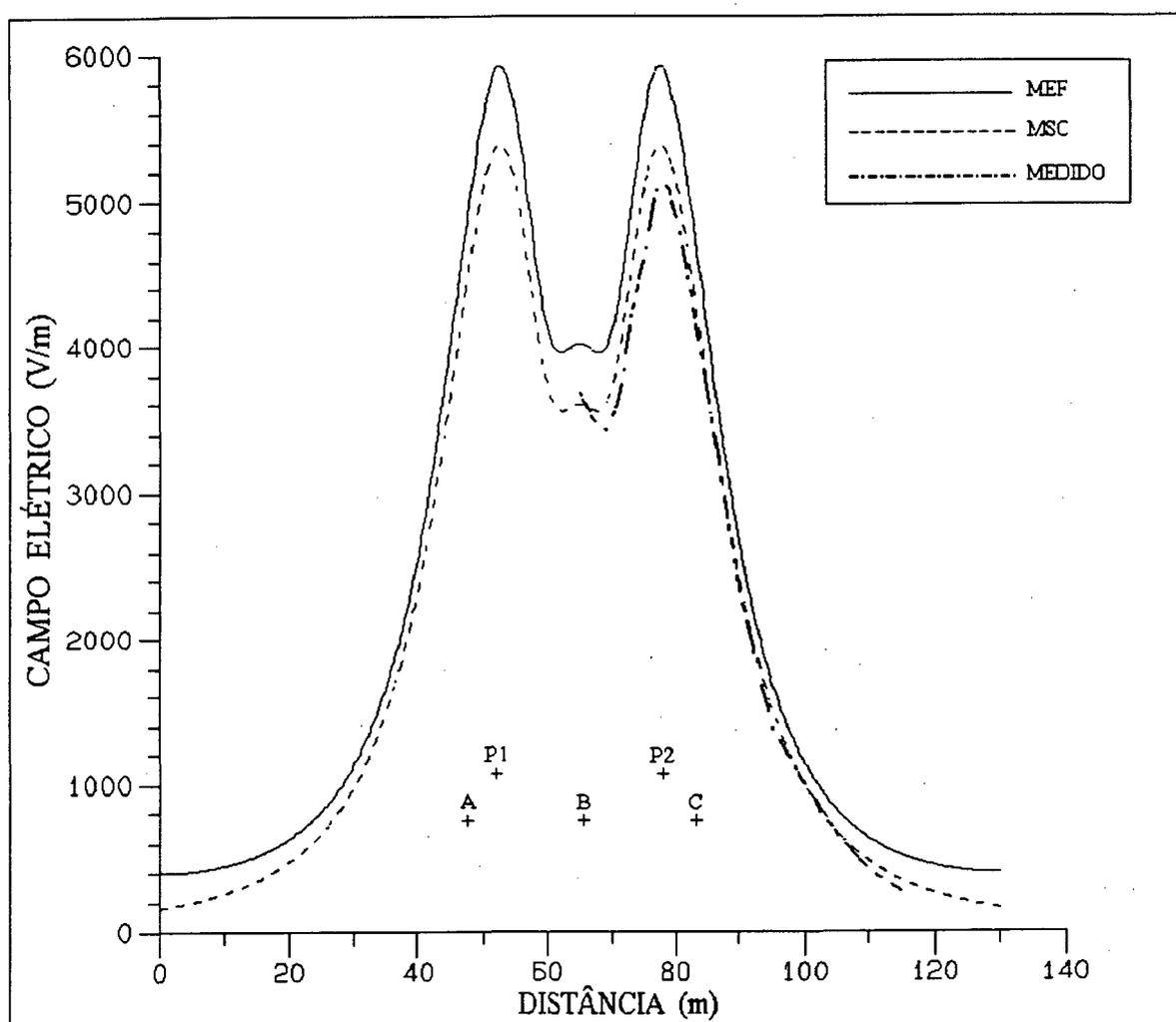


Figura 3.4 - Curvas do perfil lateral do campo elétrico a 1 metro do solo para linha de 500 kV.

Os valores obtidos através do MEF e MSC, variam de 0 a 130 m segundo o eixo das abscissas e os valores medidos de 65 a 130 m. Verifica-se uma boa concordância entre estes valores.

3.3 Linha de 1050 kV

3.3.1 Características

A tabela 3.2 apresenta as características do trecho da linha em estudo [9]:

Tabela 3.2 - Características da linha de transmissão de 1050 kV.

Tensão da linha (kV)	1050
Número de condutores por fase	8
Diâmetro dos condutores (m)	0,03307
Diâmetro dos cabos pára-raios (m)	1,016
Distância entre as fases (m)	15,20
Altura das fases (m)	18,93; 18,92; 18,27
Distância entre os cabos pára-raios (m)	17,83
Altura dos cabos pára-raios (m)	39,0

Aqui também os cabos pára-raios são multiterrados e o terreno onde se encontra o trecho da linha em análise é plano. É admitida nos cálculos seqüência de fase *ABC*, da esquerda para a direita. É importante ressaltar que no MSC é levada em consideração a altura de cada fase, ou seja, fase A a 18,93 m, fase B a 18,92 m e fase C a 18,27 m. Já no MEF as fases A e B são consideradas na mesma altura e estão a 18,92 m e a fase C a 18,27 m. A figura a seguir apresenta uma vista no plano do domínio de estudo, válido tanto para o MEF como para o MSC.

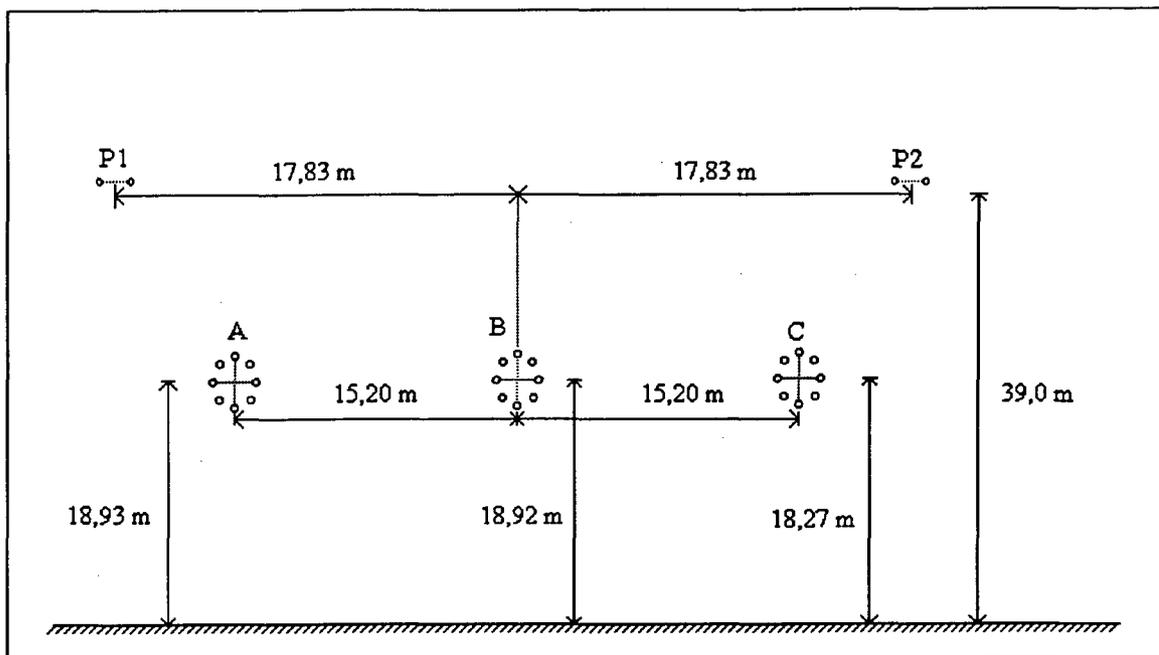


Figura 3.5 - Vista no plano do domínio de estudo.

3.2.2 Malha de elementos finitos

A figura a seguir apresenta uma vista, no plano, da malha de elementos finitos usada neste caso. As dimensões do domínio são: 0 a 130 metros na horizontal (eixo y), 0 a 60 metros na vertical (eixo z) e 0 a 10 metros na longitudinal (eixo x).

A malha apresenta 10586 elementos e 21600 nós. Neste caso foram necessárias 79 iterações no método iterativo COCG para se obter a convergência e um tempo de cálculo de 4 minutos e 28 segundos, em uma estação Sun SparkStation 2.

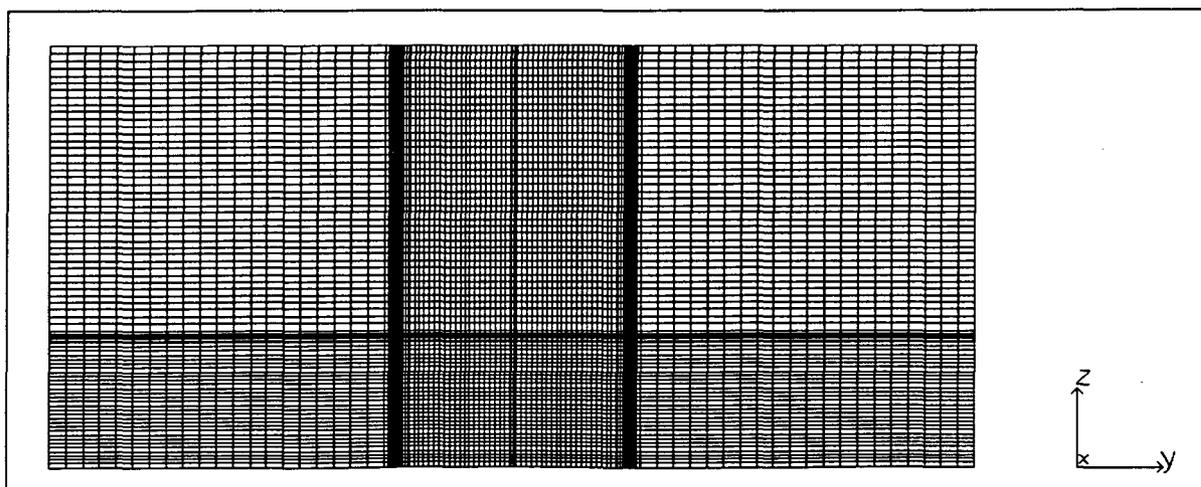


Figura 3.6 - Vista no plano da malha de elementos finitos para linha de 1050 kV.

3.3.3 Linhas equipotenciais

A figura 3.7 apresenta as linhas equipotenciais, obtidas pelo MEF, para a linha de 1050 kV.

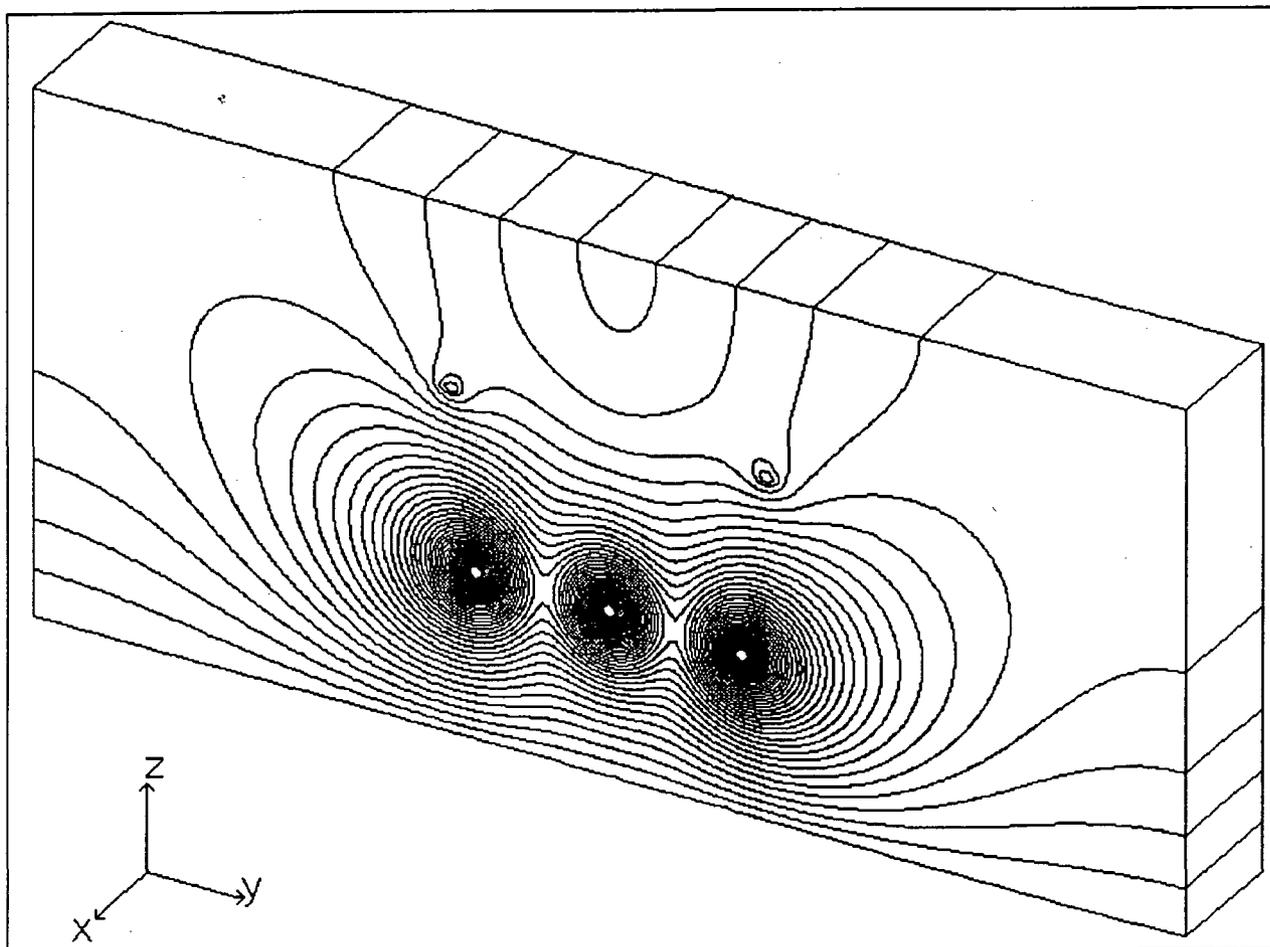


Figura 3.7 - Equipotenciais para linha de 1050 kV.

3.3.4 Curvas de campo elétrico

A figura 3.8 apresenta as curvas do perfil lateral do campo elétrico a altura de 1 m do solo, obtidas pelo MEF, MSC e também a partir de valores medidos.

Nota-se que sob a fase C, o campo elétrico é mais intenso, isto se deve ao fato de que a altura da fase C é menor, em relação às outras fases.

As medições foram feitas com o medidor a altura de 1 metro do solo e a uma distância mínima de 1 m do operador [9].

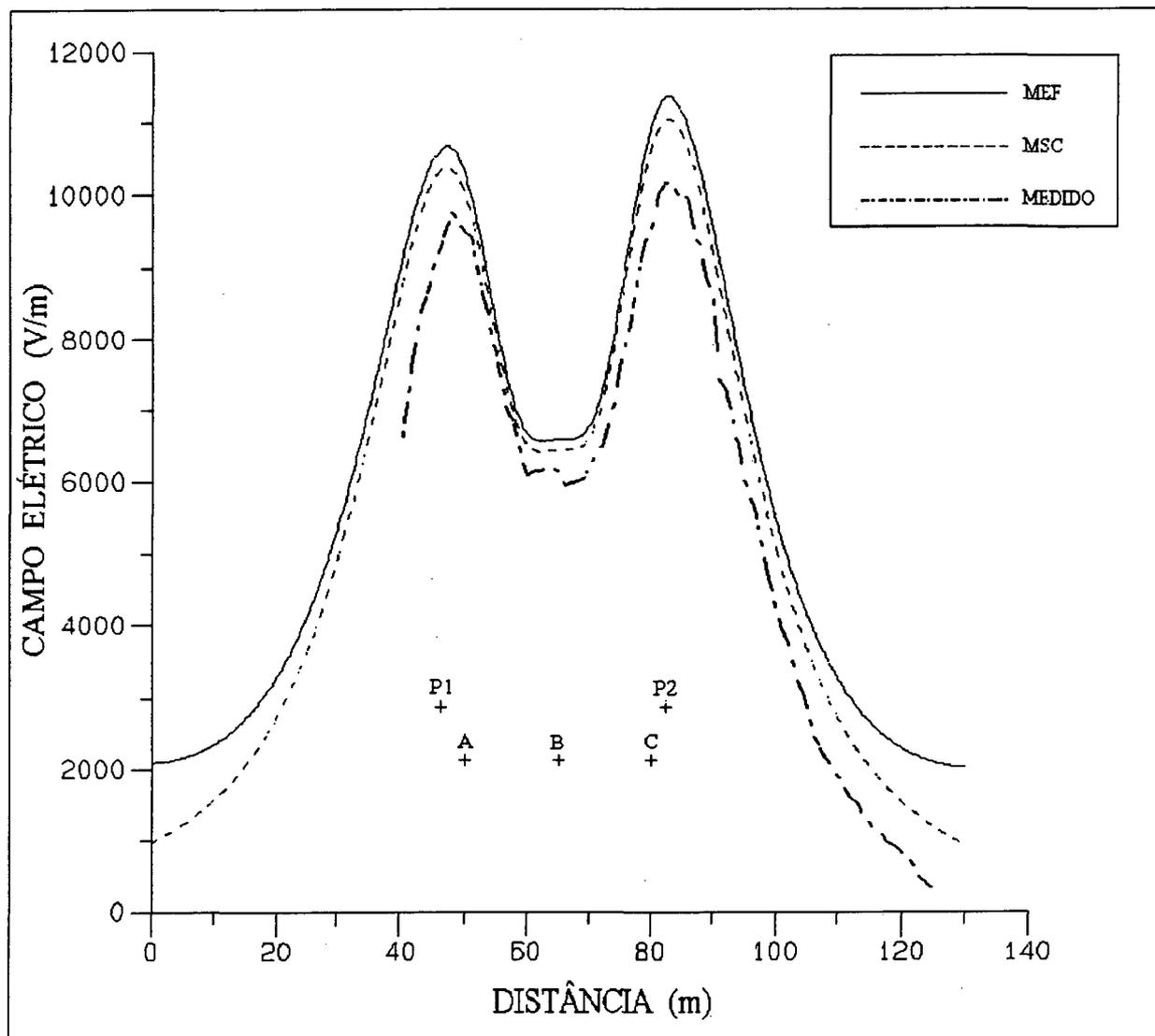


Figura 3.8 - Curvas do perfil lateral do campo elétrico a 1 metro do solo para linha de 1050 kV.

Os valores obtidos através do MEF e MSC, variam de 0 a 130 m segundo o eixo das abscissas e os valores medidos de 40 a 125 m. Observe-se uma boa concordância entre estes valores.

3.4 Linha de 1050 kV na presença de materiais condutores

3.4.1 Características

Neste caso, considera-se a presença de um bloco de material condutor com permissividade nula (B1) e também um bloco de material condutor apresentando uma certa permissividade elétrica (B2), sob as fases da linha de transmissão de 1050 kV analisada anteriormente. Suas características são mostradas na tabela 3.2. Os cabos pára-raios são multiterrados e o terreno onde se encontra o trecho da linha em análise é plano. É admitida nos cálculos seqüência de fase *ABC*, da esquerda para a direita. A figura abaixo, apresenta uma vista no plano do domínio considerado.

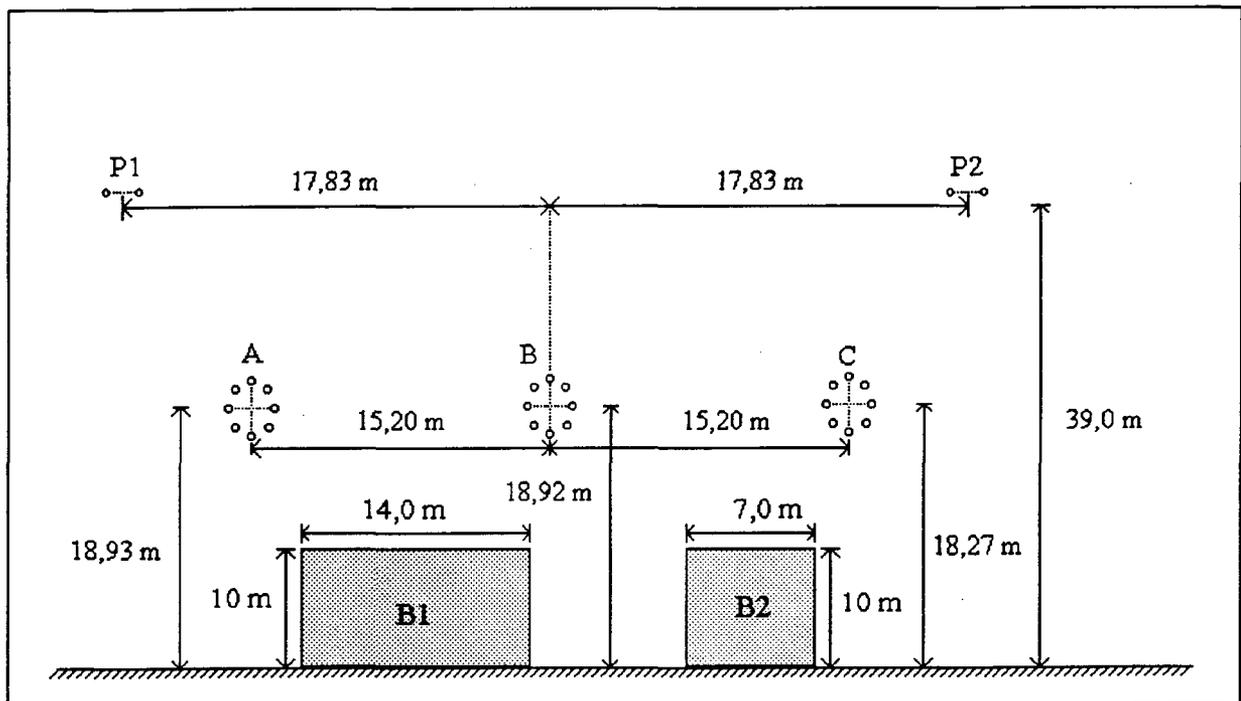


Figura 3.9 - Vista no plano do domínio de estudo.

Os blocos apresentam uma profundidade de 10 metros. O bloco B1 representa o material condutor, apresentando condutividade de $10^7 (\Omega m)^{-1}$ e o bloco B2, representa o material com uma condutividade de $100 (\Omega m)^{-1}$ e uma permissividade elétrica relativa igual a 10.

3.4.2 Malha de elementos finitos

Neste caso, a malha é a mesma da figura 3.6 apresentada no item 3.2.2. No entanto, aqui, foram necessárias 132 iterações no método COCG para se obter a convergência e um tempo de cálculo de 10 minutos e 32 segundos, em uma estação Sun SparkStation 2.

3.4.3 Linhas equipotenciais

A figura abaixo, apresenta as linhas equipotenciais, obtidas pelo MEF.

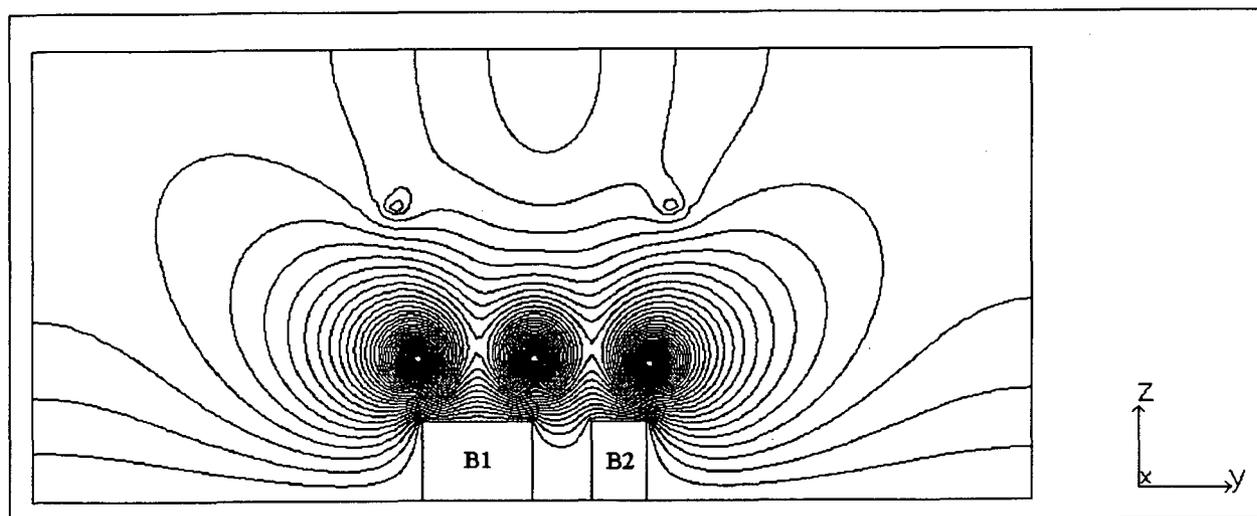


Figura 3.10 - Linhas equipotenciais.

Aqui, observa-se a influência dos objetos considerados sob a linha, na distribuição do potencial e conseqüentemente na distribuição do campo elétrico no domínio.

3.4.4 Linhas equicampos

A figura abaixo, apresenta as linhas equicampos, obtidas pelo MEF, para o caso considerado.

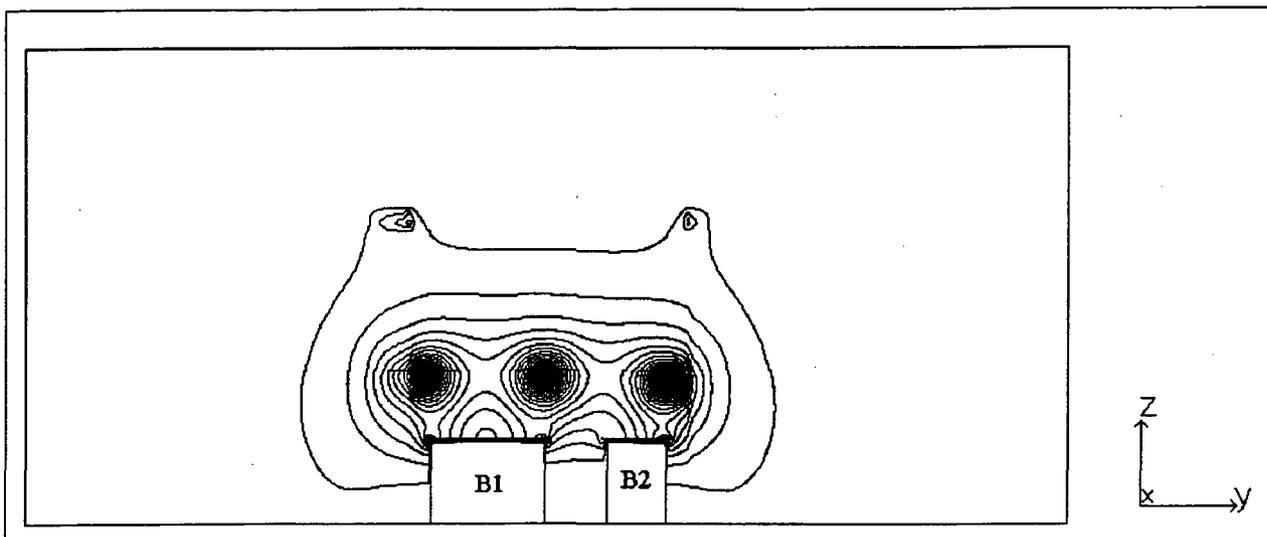


Figura 3.11 - Linhas equicampos.

Verifica-se aqui a deformação das linhas equicampos, pela presença dos blocos de materiais condutores.

Devido à continuidade da componente tangencial do campo elétrico, observa-se a existência de campo na parte superficial interna dos blocos condutores, o que implica no surgimento de uma densidade de corrente elétrica. [38].

3.5 Caso hipotético do cruzamento entre duas linhas de transmissão

3.5.1 Características

Neste caso é suposto o cruzamento a 90° entre duas linhas de transmissão, uma de 138 kV e outra de 500 kV acima desta, a fim de demonstrar as potencialidades do método empregado. Na literatura, não foi encontrado nenhum caso semelhante a este, o que se justifica pela dificuldade ou até mesmo impossibilidade de se fazer tal análise, com os métodos até então disponíveis. As tabelas a seguir, indicam as características de cada uma das linhas consideradas.

Tabela 3.3 - Características da linha de transmissão de 138 kV.

Tensão da linha (kV)	138
Número de condutores por fase	1
Diâmetro dos condutores (m)	0,03195
Distância entre as fases (m)	7
Altura das fases (m)	10

Tabela 3.4 - Características da linha de transmissão de 500 kV.

Tensão da linha (kV)	500
Número de condutores por fase	2
Diâmetro dos condutores (m)	0,03195
Espaçamento entre subcondutores (m)	0,40
Distância entre as fases (m)	15,0
Altura das fases (m)	18,0

É admitida nos cálculos, seqüência de fase *ABC*, da esquerda para a direita, para as duas linhas em análise. A figura a seguir apresenta uma vista no espaço do

domínio em estudo. As fases indicadas por A, B e C formam a linha de 500 kV e as indicadas por A', B' e C' formam a linha de 138 kV.

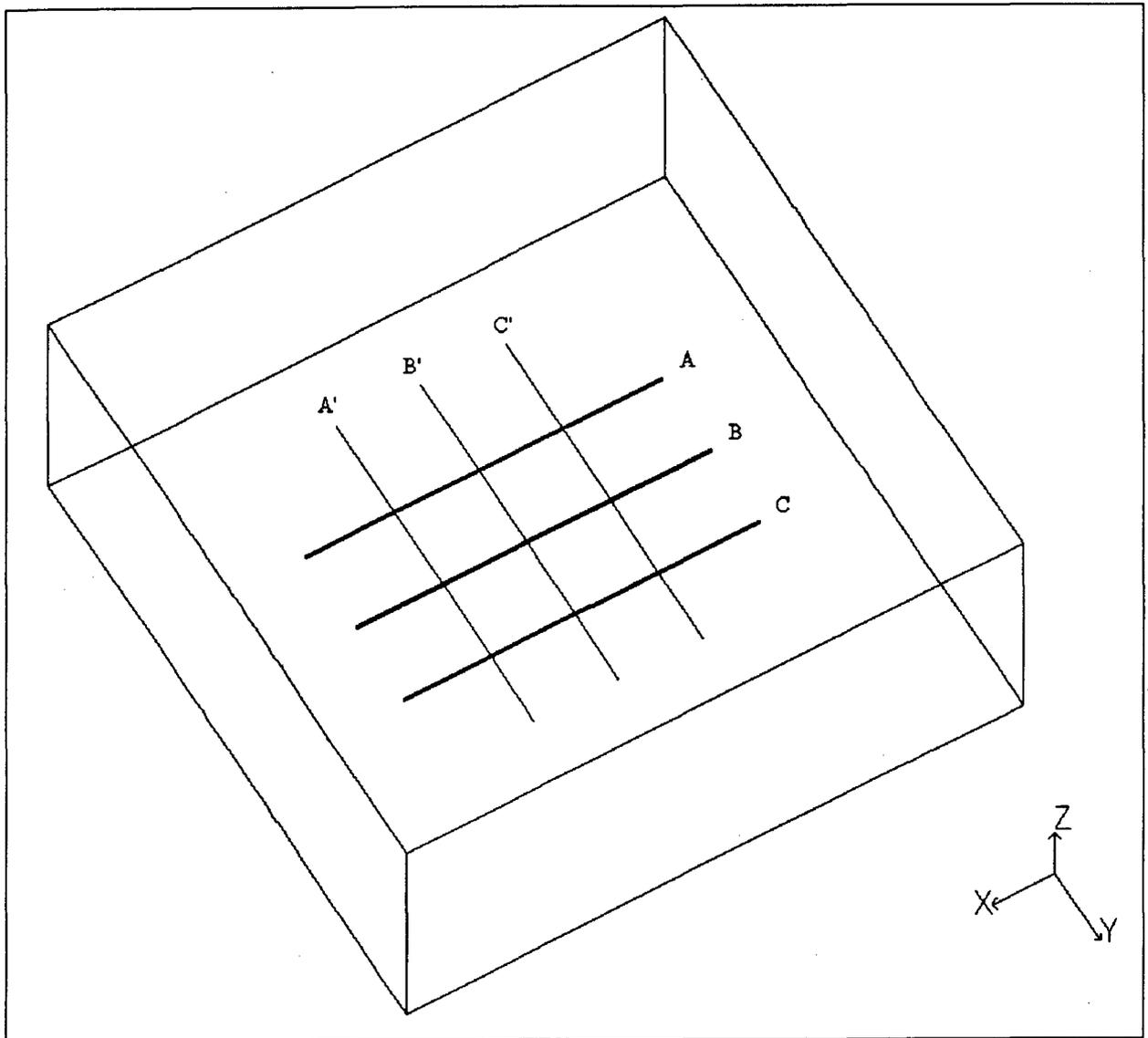


Figura 3.12 - Trecho do cruzamento entre duas linhas de transmissão.

3.5.2 Malha de elementos finitos

A figura a seguir apresenta uma vista, no plano, da malha de elementos finitos usada neste caso. As dimensões do domínio são: 0 a 110 metros na horizontal (eixo y), 0 a 40 metros na vertical (eixo z) e 0 a 110 metros na longitudinal (eixo x).

A malha apresenta 39600 elementos e 43214 nós. Neste caso foram necessárias 35 iterações no método COCG para se obter a convergência e um tempo de cálculo de 5 minutos e 23 segundos em uma estação Sun SparkStation 2.

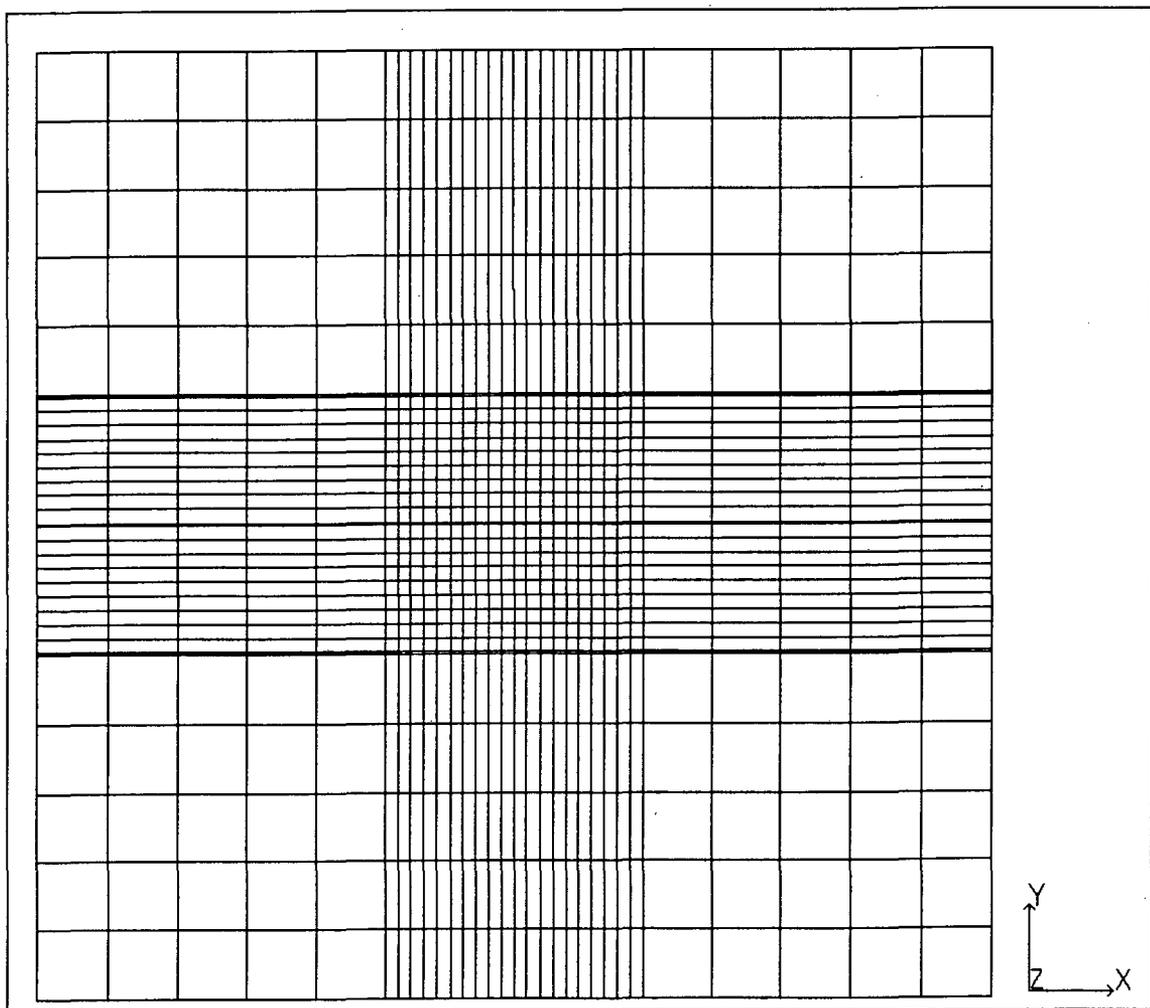


Figura 3.13 - Malha de elementos finitos.

3.5.3 Linhas equipotenciais

A figura abaixo, mostra as linhas equipotenciais, obtidas pelo MEF, no cruzamento entre as linhas de transmissão.

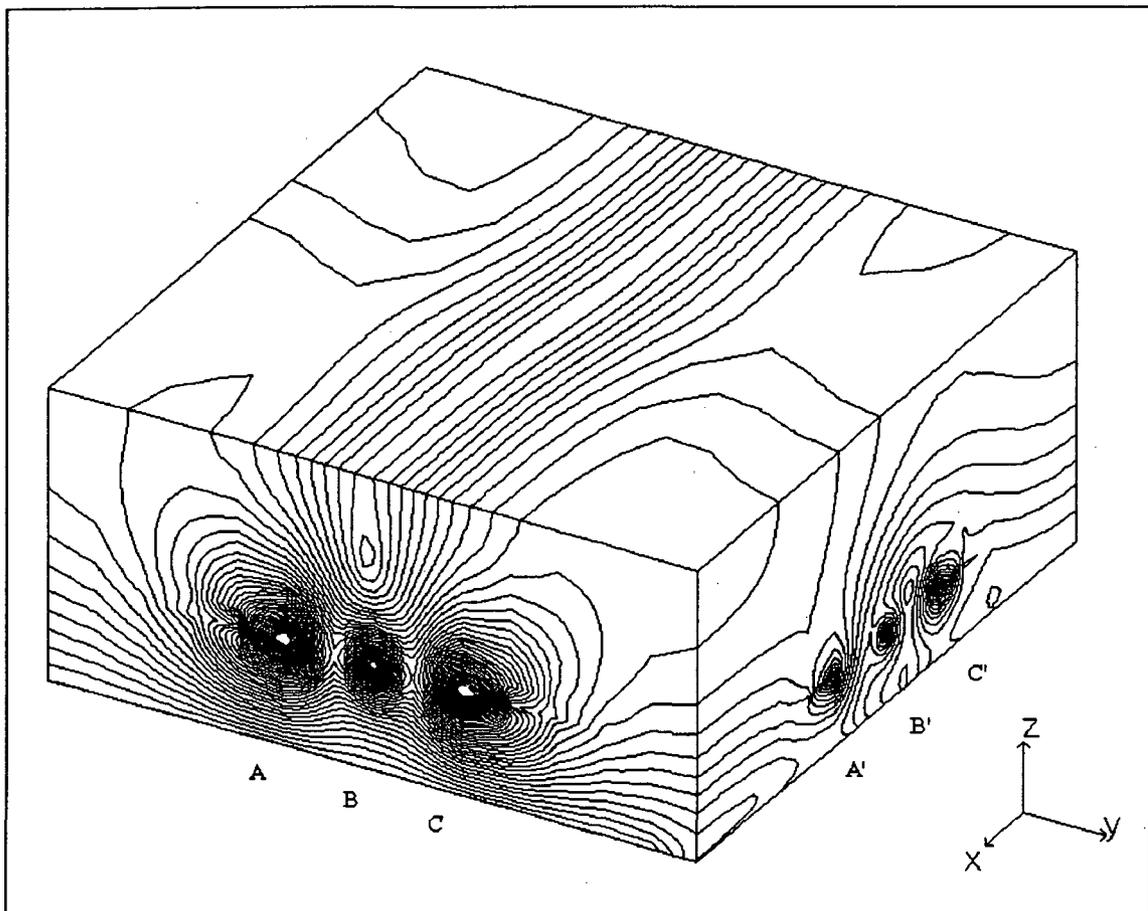


Figura 3.14 - Equipotenciais no cruzamento entre duas linhas de transmissão.

3.5.4 Curva de campo elétrico

Neste caso apresenta-se duas curvas do perfil lateral do campo elétrico sob o cruzamento entre as duas linhas de transmissão, uma segundo o eixo y e outra segundo o eixo x.

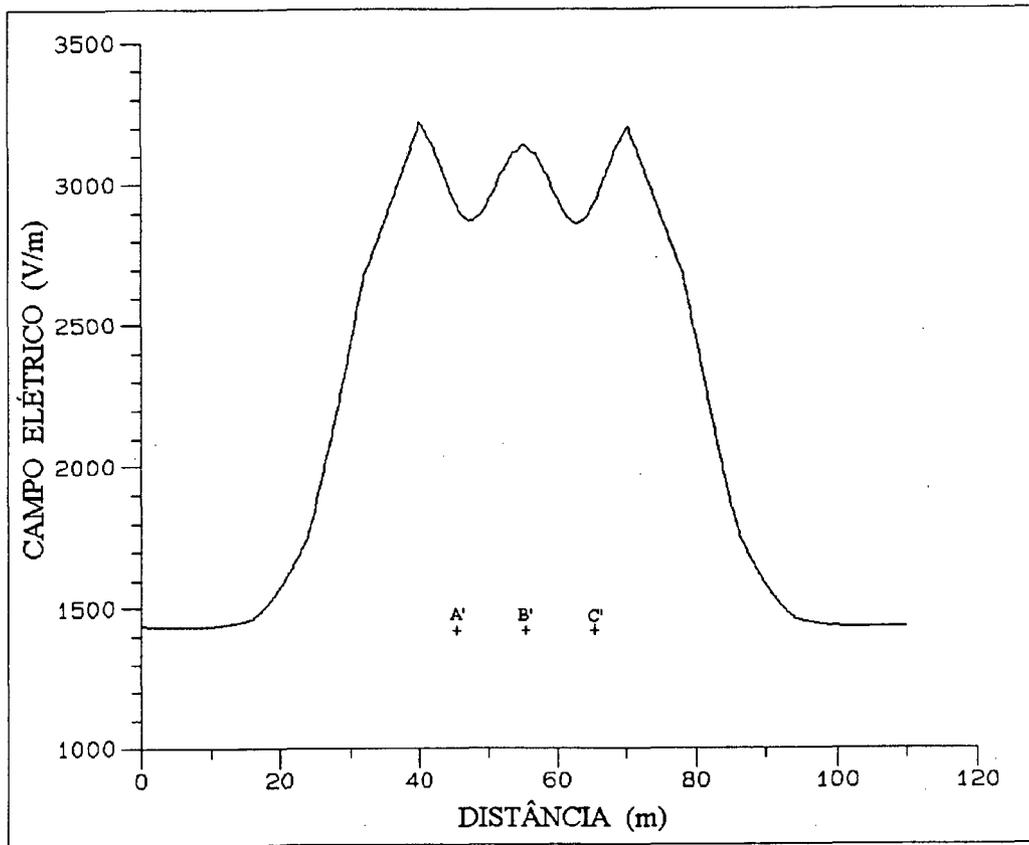


Figura 3.15 - Curva do perfil lateral do campo elétrico segundo o eixo y.

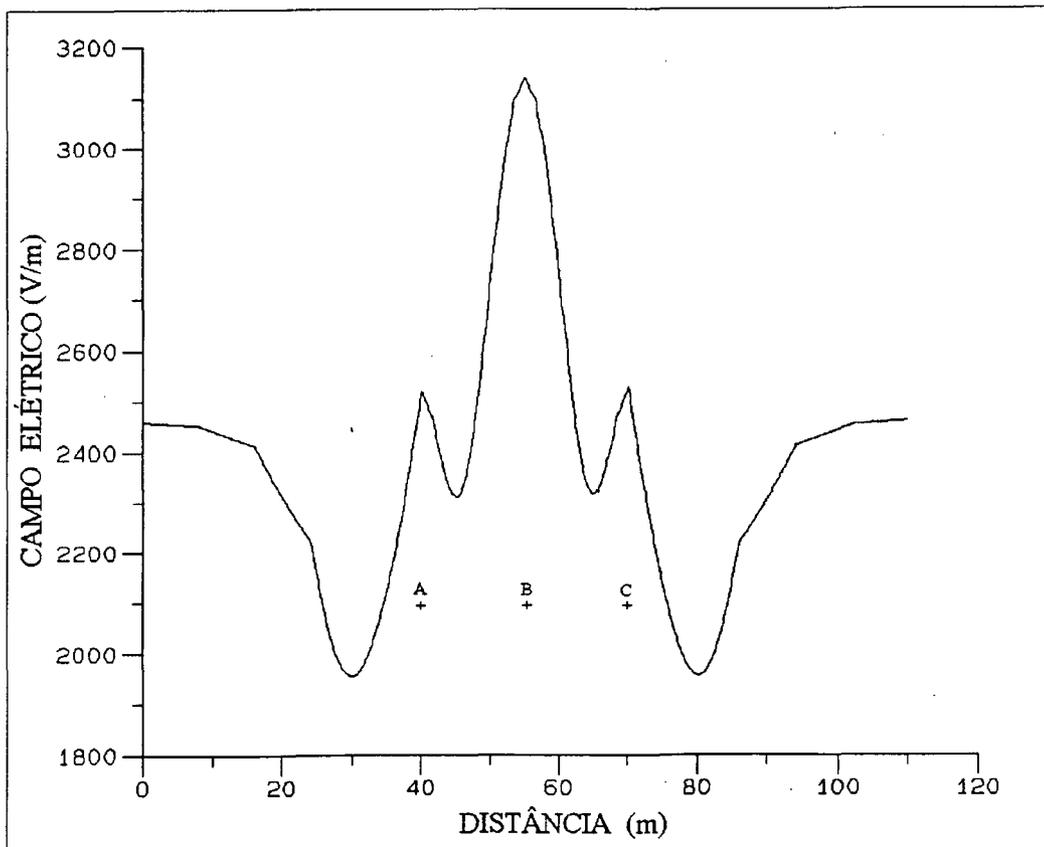


Figura 3.16 - Curva do perfil lateral do campo elétrico segundo o eixo x.

CONCLUSÃO FINAL

No decorrer deste trabalho, foram apresentados dois métodos para o cálculo de campos elétricos produzidos por linhas de transmissão. Inicialmente, apresentou-se, no capítulo I, o método de simulação de cargas para domínios bidimensionais possuindo apenas um meio dielétrico. Este é um método clássico para o cálculo de campos elétricos e baseia-se na substituição do potencial dos condutores por cargas elétricas equivalentes.

Um inconveniente deste método é o fato de que para se modelar diferentes meios dielétricos no domínio de estudo, é necessária a utilização de equações auxiliares para representar o potencial e o campo elétrico em cada um deles. Outra limitação é o fato de não se poder considerar no domínio de estudo materiais condutores.

Sabe-se ainda que sua aplicação a domínios de cálculo tridimensional é uma tarefa difícil e, dependendo da geometria a ser analisada, pode ser até mesmo inviável em termos computacionais.

Em seguida, no capítulo II, apresentou-se o método de elementos finitos aplicado ao cálculo tridimensional do campo elétrico de linhas de transmissão. Neste método foi utilizado o conceito de potencial escalar elétrico complexo que permite representar as variações de módulo e fase das grandezas na solução de problemas em regime permanente senoidal. Este método permite com facilidade considerar vários meios dielétricos no domínio de estudo tridimensional, e também vários materiais condutores, sem prejuízo algum de memória computacional ou tempo de cálculo. Isto permite a análise de uma série de situações práticas interessantes.

No capítulo III, foram apresentadas algumas curvas do perfil lateral do campo elétrico a 1 metro do solo, obtidas com o MSC, com o MEF e também a partir de valores medidos. Comparando-se estas curvas, mostradas nas figuras 3.15 e 3.16, conclui-

se que os valores de campo elétrico obtidos com o MEF apresentam uma boa concordância com os valores obtidos pelo MSC e também com os valores medidos. Assim comprova-se que o MEF aliado ao conceito de potencial escalar elétrico complexo é adequado ao cálculo do campo elétrico, gerado por linhas de transmissão.

As diferenças observadas entre os valores calculados e os valores medidos são decorrentes tanto das simplificações assumidas no cálculo como também das limitações de medição. A precisão dos valores medidos é afetada por uma série de fatores, entre eles cita-se: distorção do campo elétrico pelo corpo da pessoa que segura o cabo de suporte do instrumento, condutividade do cabo, dificuldade de se posicionar o centro do aparelho na mesma orientação do eixo de medição, erros de leitura do instrumento, temperatura ambiente, umidade relativa do ar, a vegetação existente no local, variação da tensão da linha, variação da altura e da posição angular dos condutores no momento da medição.

Já a precisão dos valores calculados é afetada pelas simplificações assumidas no cálculo, tais como: supor o solo plano e com potencial nulo, admitir os condutores a um potencial constante e não se considerar os efeitos das condições atmosféricas, como temperatura, umidade relativa do ar e ventos. Além dos próprios erros inerentes ao MEF (densidade e topologia da malha, limitação do domínio pela imposição da condição de contorno de Neumann).

A metodologia apresentada no capítulo II, permite com facilidade a análise de uma série de situações importantes, tais como a obtenção dos valores e da distribuição do campo elétrico sob um cruzamento entre duas ou mais linhas de transmissão, a influência de objetos (metálicos e/ou dielétricos) localizados nas proximidades das linhas de transmissão, na distribuição do campo elétrico, entre outros.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [01] DOMINGUES, L. A. M. C.; "O Método de Simulação de Cargas e Sua Aplicação em Problemas de Engenharia de Alta Tensão". Seminário Sobre Cálculo de Campos Elétricos Com Métodos Numéricos, São Paulo, 1985, pp. 229-244.
- [02] ORTIZ, L.; PORTELA, C. M.; "Modelo Tridimensional das Linhas de Transmissão para o Cálculo do Campo Elétrico e Comparação com Valores Medidos". Congresso Brasileiro de Eletromagnetismo Aplicado, Belo Horizonte, 1982, pp. 243-252.
- [03] FRANÇA, A. M.; "Efeitos dos Campos Eletrostáticos - Aplicações e Medições". I Seminário Sobre Pesquisas Aplicáveis em Sistemas de Transmissão, Rio de Janeiro, 1983.
- [04] IESA (Internacional Engenharia S. A.); Campo Elétrico, Vol.I-B, 1987.
- [05] FERNANDES, C.; "Estudos de Efeitos Eletrostáticos em Objetos Localizados Próximos ou Embaixo de Linhas Aéreas de Transmissão". Encontro Pan-Americano de Engenharia Eletrostática e Eletrônica, Salvador, 1978, pp.1-20
- [06] STEINBIGLER, H.; "Charge Simulation Methods for the Calculation of Electrostatic Fields in High Voltage Engineering". Seminário Sobre Cálculo de Campos Elétricos com Métodos Numéricos, São Paulo, 1985, pp. 1-24.
- [07] FUCHS, R. D.; Transmissão de Energia Elétrica. Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., 2ª Edição, Rio de Janeiro, 1979.

- [08] CAMARGO, C. C. B.; Transmissão de Energia Elétrica - Aspectos Fundamentais. Editora da UFSC, 2ª Edição, Florianópolis, 1991.
- [09] DENO, D. W.; "Transmission Line Fields". IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-95, No. 5, September/October, 1976, pp. 1600-1611.
- [10] PINHO, A. C.; O Cálculo do Campo Elétrico em 2D Gerado por Linhas de Transmissão e o Efeito em Seres Vivos. Dissertação de Mestrado, UFSC, Florianópolis, 1994.
- [11] DOMINGUES, L. A. M. C.; "Campo Elétrico e Potencial". I Seminário Sobre Pesquisas Aplicáveis em Sistemas de Transmissão, Rio de Janeiro, 1983, pp. 1-32.
- [12] VILLAS, J. E. T.; MAIA, F. C.; COSTA, V. S.; " Cálculo do Campo Elétrico pelo Método de Simulação de Cargas - Sua Aplicação a Subestações e Linhas de Transmissão em EAT". VII Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica, Grupo VII - Planejamento de Sistemas Elétricos, Brasília, 1983.
- [13] DOMINGUES, L. A. M. C.; "Cálculo de Campo Elétrico pelo Método de Simulação de Cargas". II Seminário Sobre Pesquisas Aplicáveis a Sistemas de Transmissão, Rio de Janeiro, 1985.
- [14] PORTELA, C.; "Cálculo de Campo Elétrico em Subestações". I Simpósio Franco-Brasileiro sobre Cálculo de Campos Elétricos e Magnéticos, Florianópolis, 1987, pp. 107-122.
- [15] GARY C.; "Le Champ Electrique des Ouvrages a tres Haute Tension et ses Effets". I Simpósio Franco-Brasileiro sobre Cálculo de Campos Elétricos e Magnéticos, Florianópolis, 1987, pp. 199-220.

- [16] MARZULLO, J. P.; "Campo Elétrico Gerado por Linhas de Transmissão - Cálculo com o Uso de Microcomputadores". I Simpósio Franco-Brasileiro Sobre Cálculo de Campos Elétricos e Magnéticos, Florianópolis, 1987, pp. 286-298.
- [17] DOMINGUES, A. M. C.; FERNANDES, C.; FRANÇA, A. M.; YAMAGUTI, K.; "Cálculo e Medições do Campo Elétrico em Configurações Complexas Tridimensionais e Polifásicas bem como Suas Aplicações em Projetos e nos Parâmetros que Caracterizam os Efeitos de Indução". VII Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica, Grupo VIII - Subestações, Equipamentos Elétricos e Materiais, Brasília, 1984.
- [18] DOMINGUES, L. A. M. C.; FERNANDES, C.; "Aplicação do Método de Simulação de Cargas ao Cálculo de Campos Eletrostáticos Tridimensionais". II Simpósio Franco-Brasileiro Sobre Cálculo de Campos Elétricos e Magnéticos, São Paulo, 1989.
- [19] FRANÇA, A. M.; DOMINGUES, L. A. M. C.; FERNANDES, C.; YAMAGUTI, K.; "Aplicaciones de Estudios de Campo Electrico en Ingenieria de Alta Tension". I RENASE - Reunion Nacional de Sistemas Electricos, 1985.
- [20] FRANÇA, A. M.; MPALANTINOS, A.; GONÇALVES, L. C.; "Estrutura Compacta em 230 kV - Cálculo e Medições do Campo Elétrico e Análise Dosimétrica no Pessoal de Manutenção". XII COPIMERA, Colombia, 1989.
- [21] FRANÇA, A. M.; FERNANDES, C.; YAMAGUTI, K.; "Estudo Paramétrico do Campo Elétrico em Estruturas Convencionais e Não Convencionais em UAT". VI Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica, Grupo III - Linhas de Transmissão, Balneário Camboriú, 1981.

- [22] DOMINGUES, L. A. M. C.; FRANÇA, A. M.; FERNANDES, C.; "Calculation and Measurement of Electric Field in Windows of 500 kV Compact Towers". Laticon'88 - Conferência Latinoamericana IEEE, Argentina, 1988.
- [23] FERNANDES, C.; BRASIL, D. O. C.; JARDINI, J. A.; VIAN, A.; "Investigações Sobre os Efeitos Eletrostáticos nas Linhas de 800 kV de Itaipu". IV Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica, Grupo III - Linhas de Transmissão, Rio de Janeiro, 1977.
- [24] FRANÇA, A. M.; RIBEIRO, C. M.; DART, F. C.; "Campo Elétrico - Medidor Digital Prático para Regiões de Campo Não Uniforme". XII Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica, Grupo XI - Sobretensões, Coordenação de Isolamento e Interferências, Recife, 1983.
- [25] PORTELA, M. C.; ORTIZ, L. N.; " Determinação do Erro de Medição e Erro de Cálculo do Campo Elétrico Nas Linhas Elétricas à Frequência Industrial". I SIDEE - Seminário Internacional de Distribuição de Energia Elétrica, Belo Horizonte, 1990, pp. 160-166.
- [26] PORTELA, M. C.; ORTIZ, L. N.; " Determinação do Erro no Cálculo do Campo Elétrico em Subestações Pelo Método de Simulação de Carga". Congresso Brasileiro de Eletromagnetismo Aplicado, Belo Horizonte, 1982, pp. 275-284.
- [27] ISSICABA, J.; Transformação de Uma Linha de Transmissão Circuito Duplo Trifásica em Linha de Transmissão Hexafásica, Dissertação de Mestrado, UFSC, Florianópolis, 1988.
- [28] BEASLEY, M. D. R. et al; " Comparative Study of Three Methods for Computing Electric Fields". PROC. IEE, Vol.126, No.1, January, 1979, pp. 126-134.

- [22] DOMINGUES, L. A. M. C.; FRANÇA, A. M.; FERNANDES, C.; "Calculation and Measurement of Electric Field in Windows of 500 kV Compact Towers". Laticon'88 - Conferência Latinoamericana IEEE, Argentina, 1988.
- [23] FERNANDES, C.; BRASIL, D. O. C.; JARDINI, J. A.; VIAN, A.; "Investigações Sobre os Efeitos Eletrostáticos nas Linhas de 800 kV de Itaipu". IV Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica, Grupo III - Linhas de Transmissão, Rio de Janeiro, 1977.
- [24] FRANÇA, A. M.; RIBEIRO, C. M.; DART, F. C.; "Campo Elétrico - Medidor Digital Prático para Regiões de Campo Não Uniforme". XII Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica, Grupo XI - Sobretensões, Coordenação de Isolamento e Interferências, Recife, 1983.
- [25] PORTELA, M. C.; ORTIZ, L. N.; "Determinação do Erro de Medição e Erro de Cálculo do Campo Elétrico Nas Linhas Elétricas à Frequência Industrial". I SIDEE - Seminário Internacional de Distribuição de Energia Elétrica, Belo Horizonte, 1990, pp. 160-166.
- [26] PORTELA, M. C.; ORTIZ, L. N.; "Determinação do Erro no Cálculo do Campo Elétrico em Subestações Pelo Método de Simulação de Carga". Congresso Brasileiro de Eletromagnetismo Aplicado, Belo Horizonte, 1982, pp. 275-284.
- [27] ISSICABA, J.; Transformação de Uma Linha de Transmissão Circuito Duplo Trifásica em Linha de Transmissão Hexafásica, Dissertação de Mestrado, UFSC, Florianópolis, 1988.
- [28] BEASLEY, M. D. R. et al; "Comparative Study of Three Methods for Computing Electric Fields". PROC. IEE, Vol.126, No.1, January, 1979, pp. 126-134.

- [29] SINGER, H.; STEINBIGLER, H.; WEISS, P.; "A Charge Simulation Method for Calculation of High Voltage Fields". IEEE Trans. on PAS., Vol. 73, 1974, pp. 1660-1668.
- [30] SENDAULA, H. M.; WILSON, D. W.; MEYER, R. C.; JOHNSON, R. R.; "Electric Fields Induced by EHV Transmission over Irregular Terrain". IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-102, No.5, May, 1983, pp.1452-1458.
- [31] DIPLACIDO, J.; SHIH, C. H.; WARE, B. J.; " Analysis of Proximity Effects in Electric Field Measurements". IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-97, No.6, Nov/Dec, 1978, pp. 2167-2177.
- [32] DART, F. C.; FERNANDES, C.; FRANÇA, A. M.; YAMAGUTI, K.; "Verificação dos Níveis de Campo Elétrico nos Arranjos de Barramento Rígido Projetados para as Novas Subestações de 500 kV de Furnas". V Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica, Grupo VIII - Grupo de Estudos de Subestações, Recife, 1979.
- [33] ORTIZ, L. N.; LORENZO, P. B.; "Application of Charge Simulated Method for Calculating Substation and Transmission Line Electric Field". 9th COMPUMAG Conference of the Computation of Electromagnetic Fields, October, 1993, pp. 210-211.
- [34] GUILLEN, M.; KRÄHENBÜHL, L.; NICOLAS,A.; AUCOURT, C.; "Hybrid Charge Simulation and Boundary Element Methods For 3D Electrostatic Field Computation". 9th COMPUMAG Conference of the Computation of Electromagnetic Fields, October, 1993, pp. 180-181.

- [35] PINHO, A. C.; RAIZER, A. ; "Calculation of Tri and Hexa-Phase Transmission Line Electric Field By Finite Element Method and Charge Simulation Method". International Symposium on Electromagnetic Compatibility, Session III - Power System EMC - Paper 11, São Paulo, December, 1994.
- [36] TELLÓ, M.; HAFFNER, S. L.; BASTOS, J. P. A.; "Determinação do Campo Elétrico e da Densidade de Corrente no Ser Humano, Utilizando o MEF-3D". X Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica, Grupo VIII - Subestações, Recife, 1993.
- [37] ANDERSON, O. W.; "Finite Element Solution of Complex Potential Electric Fields". IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-96, pp. 1156 - 1161, July/August, 1977.
- [38] BASTOS, J. P. A.; Eletromagnetismo e Cálculo de Campos, Florianópolis, Editora da UFSC, 1ª Edição, Florianópolis, 1989.
- [39] BECKER, E. B.; CAREY, G. F.; ODEN, J. T.; Finite Elements: an Introduction, Vol. I in the Texas Finite Element Series, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, Printice Hall, 1981.
- [40] MESQUITA, R. C.; Cálculo de Campos Eletromagnéticos Tridimensionais Utilizando Elementos Finitos: Magnetostática, Quase-estática e Aquecimento Indutivo, Tese de Doutorado, UFSC, Florianópolis, 1990.
- [41] ZIENCIEWICZ, O. C.; MORGAN, K.; Finite Elements and Approximation, John Wiley & Sons, New York, 1983.
- [42] MEDEIROS, L. H. A.; Elementos Infinitos Mapeados e Elementos Virtuais no Cálculo de Campos Eletromagnéticos em Problemas com Fronteiras Abertas pelo

- Método de Elementos Finitos, Dissertação de Mestrado, UFSC, Florianópolis, 1994.
- [43] RAIZER, A.; Contribuição à Elaboração de um Sistema Tridimensional de Cálculo de Campos Elétricos e Magnéticos, Utilizando a Técnica de Elementos Finitos, Dissertação de Mestrado, UFSC, Florianópolis, 1987.
- [44] SABONNADIÈRE, J. C. & COULOMB, J. F.; Éléments Finis et CAO, Paris, France. Hermes Publishing, 1986.
- [45] VANTI, M. G.; Um Sistema Automático para Geração de Malhas Adaptativas, Dissertação de Mestrado, UFSC, Florianópolis, 1992.
- [46] ZIENKIEWICZ, O. C.; The Finite Element Method, New Delhi, Tata McGraw-Hill, 1989.
- [47] DHATT, G.; TOUZOT, G.; The Finite Element Method Displayed, 1985.
- [48] TELLÓ, M.; Dimensionamento de Sistemas de Aterramento, em Baixas Freqüências, Usando o Método de Elementos Finitos em Três Dimensões, Dissertação de Mestrado, UFSC, Florianópolis, 1991.
- [49] SILVESTER, R. P.; FERRARI, R. L.; Finite Elements for Electrical Engineers, Second Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [50] BOSSAVIT, A.; EMSON, C.; MAYERGOYZ, I. D.; Méthodes Numériques en Électromagnétisme, Editions Eyrolles, Paris, 1991.
- [51] BASTOS, J. P. A; "Aplicação do Método de Elementos Finitos em Problemas de Difusão de Campos Elétricos e Magnéticos". 6º Congresso Brasileiro de Automática, Belo Horizonte, 1986.