Adriano Luiz dos Santos Né

A ANÁLISE DA LINGUAGEM MATEMÁTICA COMO ELEMENTO PARA PENSAR O ENSINO E A APRENDIZAGEM DA PRÁTICA DE ESBOÇO DE CURVAS NO ENSINO SUPERIOR

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do Grau de Mestre em Educação Científica e Tecnológica.
Orientador: Prof. Dr. Méricles Thadeu Moretti.

Florianópolis
2013

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Né, Adriano Luiz dos Santos
A análise da linguagem matemática como elemento para pensar o ensino e a aprendizagem da prática de esboço de curvas no ensino superior [dissertação] / Adriano Luiz dos Santos Né ; orientador, Méricles Thadeu Moretti - Florianópolis, SC, 2013.
157 p. ; 21cm

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas. Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica.

Inclui referências

1. Educação Científica e Tecnológica. 2. Esboço de curvas. 3. Linguagem matemática. 4. Semiótica. 5. Ensino e aprendizagem de matemática. I. Moretti, Méricles Thadeu. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica. III. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
CENTRO DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS BIOLÓGICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
CURSO DE MESTRADO EM EDUCAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA

"A análise da linguagem matemática como elemento para pensar o ensino e a aprendizagem da prática de esboço de curvas no ensino superior."

Dissertação submetida ao Colegiado do Curso de Mestrado em Educação Científica e Tecnológica em cumprimento parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação Científica e Tecnológica

APROVADA PELA COMISSÃO EXAMINADORA em 25/02/2013

Prof. Dr. **Méricles Thadeu Moretti** (CFM/MTM/UFSC – Orientador)________________
Prof. Dr. **Saddo Ag Almouloud** (PUC-SP - Examinador)____________________
Prof. Dr. **David Antonio da Costa** (MEN/CED/UFSC – Examinador)______________
Profª. Drª. **Sônia Elena Palomino Bean** (CFM/MTM/UFSC – Examinadora)__________
Profª. Drª. **Maria Auxiliadora Vilela Paiva** (IFES/EDUCIMAT - Suplente)__________
Profª. Drª. **Cláudia Glavam Duarte** (MEN/CED/UFSC – Suplente)________________

Dr. Carlos Alberto Marques
Coordenador do PPGECT

ADRIANO LUIZ DOS SANTOS NÉ
Florianópolis, Santa Catarina, fevereiro de 2013.

Este trabalho é dedicado aos meus pais, amigos e, especialmente, à minha querida Maria Irene.

AGRADECIMENTOS

Organizar um espaço para fazer agradecimentos de um trabalho como este, que levou muito tempo para ser construído, é algo que considero difícil. Foram muitas pessoas que participaram ativamente, explicitamente ou diretamente durante o desenvolvimento desta pesquisa, entretanto, muitas outras pessoas tiveram participações mais silenciosas ou indiretas, seja em alguma discussão dentro na universidade, num momento de descontração com amigos, numa boa comida que alguém ofereceu após um dia de muito trabalho, algumas palavras amigas ou inclusive alguma “briga”. Entendo que todos estes também, em maior ou menor grau, são merecedores de agradecimentos.

Desta forma, é por este motivo que agradeço profundamente a todos que “conspiraram”, consciente ou inconscientemente, para a realização deste trabalho, a todos estes o meu Muito Obrigado!

E agora, de forma mais pontual, também gostaria de expressar meus agradecimentos ao Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT/UFSC) que ofereceu-me possibilidades para realizar este curso, fornecendo espaço físico, mestres, amizades, bolsa de estudo, etc. Expresso também meus sinceros agradecimentos aos professores membros da banca examinadora que deram atenção à pesquisa que realizei, professores Saddo Ag Almouloud, David Antonio da Costa, Sônia Elena Palomino Bean, Maria Auxiliadora Vilela Paiva e Cláudia Glavam Duarte. Um agradecimento especial vai para meu orientador, professor Méricles Thadeu Moretti, pela confiança em mim e no desenvolvimento do trabalho, além da imensa paciência em me orientar. Ainda no âmbito da UFSC, meu muito obrigado à primeira turma de estudantes de *Cálculo A* do curso de Meteorologia, por aceitaram participar da pesquisa, aos professores do PPGECT pelos valiosos ensinamentos e amizades, particularmente às professoras Cláudia Glavam e Cláudia Flores, e aos colegas de curso pelo carinho, atenção e bom humor.

Por fim, e tão importante quanto os demais, agradeço à minha família e amigos, ao seu Messias e a dona Argentina pelo amor incondicional e confiança, à Irene pela paciência, ternura e amor, e aos amigos pelos incentivos e por entenderem as várias vezes que tive que me ausentar.

Compreender uma frase significa compreender uma linguagem. Compreender uma linguagem significa dominar uma técnica.

(Wittgenstein, *IF* §199, 1953)

RESUMO

Na presente pesquisa tenho a intenção de realizar uma investigação a respeito do processo de ensino e aprendizagem da prática de esboço de curvas do ensino superior, particularmente na disciplina de Cálculo. Para tal tarefa, buscarei estudar o uso que se faz da linguagem matemática em sala de aula, tomando como estudo de caso uma turma de estudantes da disciplina *Cálculo A*, da Universidade Federal de Santa Catarina. Nesta investigação, utilizarei-me de ferramentas teóricas fornecidas pela Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval, e o Enfoque Ontosemiótico, de Juan Dìaz Godino, o que atribui a esta pesquisa uma perspectiva semiótica da atividade matemática. A articulação que pretendo realizar com estas teorias parece fornecer informações importantes a respeito da prática matemática realizada pelos estudantes em sala de aula e a prática que a academia tem a intenção de ensinar, o que possibilita um meio de compará-las para então se intervir no processo de ensino e aprendizado da prática de esboço de curvas.

Palavras-chave: Educação Matemática. Esboço de curvas. Linguagem matemática. Semiótica. Ensino e aprendizagem de matemática.

ABSTRACT

In this research I intend to conduct a investigation about the process of teaching and learning in the sketching curves practice on the higher education, particularly in the Calculus' discipline. For such task, I seek study the use made of mathematical language in the classroom, taking as case study a students' class of *Calculus A* discipline, from the Federal University of Santa Catarina (Brazil). In this research, I will use the theoretical tools provided by the Registers of Semiotic Representation's Theory, by Raymond Duval, and the Ontosemiotic Approach, by Juan Dìaz Godino, which attaches to the research a semiotic perspective of mathematical activity. The articulation that I intend to accomplish with these theories seem to provide important information about the mathematical practice performed by students in the classroom and the practice that the academy intends to teach, which provides a means to compare them and so intervene in the process of teaching and learning on the sketch curves practice.

Keywords: Mathematics Education. Sketch curves. Mathematical language. Semiotics. Mathematics' teaching and learning.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

UFSC – Universidade Federal de Santa Catarina

PPGECT – Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica

TRRS – Teoria dos Registros de Representação Semiótica

EOS – Enfoque Ontosemiótico

TD1ª – Teste da Derivada Primeira

c.p.c. – Côncava para cima

c.p.b. – Côncava para baixo

$V^{-}(x_0)$ – Numa vizinhança à esquerda do ponto x_0 .

$V^{+}(x_0)$ – Numa vizinhança à direita do ponto x_0 .

$V(x_0)$ – Numa vizinhança do ponto x_0 .

SUMÁRIO

ANEXO E – Termo de consentimento livre e esclarecido 157

INTRODUÇÃO

A pesquisa que neste momento apresento insere-se na área do ensino e da aprendizagem de matemática. Tomo como objeto de estudo a prática de esboço de curvas ensinada nas disciplinas referentes ao Cálculo Diferencial e Integral.

Em alguns livros de Cálculo, como também no plano de ensino de algumas disciplinas de Cálculo que abordam o esboço de curvas, o estudo desta prática é motivado por esta poder ser realizada através da aplicação dos conceitos de limites e, principalmente, o de derivada, conceitos estes que possibilitam outras linhas de raciocínio para esta prática, pois sugere-se, por exemplo, a identificação algébrica de intervalos de crescimento e decrescimento da função, dos sentidos das concavidades da curva, entre outros, como aspectos relevantes para a sua realização.

No ensino superior, o esboço de curvas assume maior importância por trazer ferramentas analíticas valiosas para a realização de análises gráficas, que é uma atividade comum a muitos cursos superiores e, com isso, parece trazer relevância para pesquisas que deem atenção ao seu processo de ensino e aprendizagem na academia.

Neste trabalho aproximo-me de meu objeto de estudo utilizando-se de elementos da Semiótica, isso quer dizer que realizo uma análise da prática de esboço de curvas do ponto de vista da criação, comunicação e usos das várias representações que lhe são inerentes, através do uso dos seus vários signos. Uma investigação que pode ser classificada como adotando uma perspectiva semiótica da atividade matemática, que "fornece um meio de conceitualização do ensino e aprendizagem de matemática tomando como foco primário o signo e seu uso." (ERNEST, 2006, p. 68. Tradução minha).

São vários os "entes matemáticos" que são utilizados durante a prática de esboço de curvas, tais como cálculos algébricos de derivadas, limites e equações, identificação de conceitos e propriedades geométricas em gráficos de funções, regras para escrita e expressão, relação entre objetos, entre outros. Manipular toda esta série de objetos que intervêm nesta prática, além de reconhecer outros que possam emergir da mesma, demanda, entre outras coisas, o uso de uma linguagem matemática que sirva tanto de representação quanto de elemento regulador e operativo da atividade matemática.

Desta forma, assumo aqui a linguagem não só como representativa de algo, mas como algo que dá condições de possibilidades à realização das práticas matemáticas, como elemento que cria racionalidades e as “movimenta”. Entender a linguagem desta forma permite pensar na possibilidade de se obter informações a respeito do processo de ensino e aprendizagem de matemática através dos usos que são feitos da linguagem durante a atividade matemática.

Uma vez tendo apresentado estas considerações, apresento a questão que tomei como sendo a que dará um direcionamento para esta pesquisa:

De que maneira uma análise do uso da linguagem matemática na prática de esboço de curvas, no ensino superior, permite intervenções didáticas no processo de ensino e aprendizagem desta prática?

Perceba que refiro-me a “uma análise”, pois entendo que outras análises poderiam ser feitas de várias formas diferentes, obtendo-se resultados diferentes, também não me refiro a “a análise”, por não se tratar de tentar seguir um modelo de análise para obter informações da linguagem e então agir. E preferi mencionar “intervenção”, porque entendo que a análise do uso da linguagem permite tanto ao professor avaliar o desempenho dos estudantes, quanto repensar suas estratégias em sala de aula para efetivar o ensino, desta forma, penso a análise da linguagem como elemento que intervém no processo de ensino e aprendizagem de matemática.

Das várias maneiras que eu poderia me embasar teoricamente para buscar por uma resposta para a questão posta, utilizarei-me das ferramentas teóricas que são fornecidas pela Teoria dos Registros de Representação Semiótica e o Enfoque Ontosemiótico da atividade matemática, teorias estas que melhor apresentarei no próximo capítulo.

Para a realização desta pesquisa, lançando mão dos referenciais teóricos que adotei, obtive dados para análise atuando como professor de uma turma de 40 estudantes de uma disciplina de Cálculo, na Universidade Federal de Santa Catarina. Como busco por maneiras de analisar o uso da linguagem matemática para então inferir no ensino e na aprendizagem, a análise das interações em sala de aula de apenas uma turma parece trazer elementos suficientes para a realização desta investigação.

A organização que pretendo realizar para o desenvolvimento desta pesquisa baseia-se nas seguintes ações:

1. Tomando como referências as ferramentas teóricas apresentadas, elaborar algumas classificações dos usos

que a matemática acadêmica faz da linguagem matemática na prática de esboço de curvas.

2. Com estas classificações, organizar o planejamento das ações que tomarei em sala de aula.
3. Organizar duas sequências de estudos para obter dados referentes ao uso que os estudantes fazem da linguagem matemática na prática de esboço de curvas.
4. Mais uma vez utilizando-se dos referenciais teóricos, organizar classificações dos usos que os estudantes fazem da linguagem matemática e, com isso, analisá-los tomando como base as classificações referentes à academia.
5. Ao identificar conflitos entre os usos da linguagem por parte dos estudantes e do que é partilhado na academia, reorganizar as ações em sala de aula e obter dados referentes ao aprendizado dos estudantes.

No primeiro capítulo deste trabalho apresentarei as ferramentas teóricas que irei tomar como referência para realizar esta investigação. Ainda neste mesmo capítulo apresento uma aproximação entre as duas teorias através de comparações entre alguns de seus princípios e uma combinação entre suas metodologias. Em seguida, no segundo capítulo, apresento as trilhas metodológicas adotadas, informo as condições em que a pesquisa foi realizada, os instrumentos utilizados para a obtenção de dados e opero com as duas teorias para realizar a análise dos dados. E por fim, termino com as minhas considerações finais a respeito da pesquisa.

Passemos, então, ao primeiro capítulo para conhecer a organização feita das teorias que serão utilizadas neste trabalho.

CAPÍTULO 1 – ASPECTOS TEÓRICOS DA PESQUISA

1.1 TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Nesta seção trarei alguns elementos referentes à Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) para que em seguida eu possa organizar algumas argumentações a respeito da prática do esboço de curvas.

Esta teoria vem sendo desenvolvida pelo psicólogo e filósofo francês, pesquisador em Didática da Matemática, Raymond Duval, desde meados dos anos 80 do século passado. Em seus trabalhos, Duval dá muita atenção aos vários registros de representação que são comumente utilizados na prática matemática, tais como as escritas numéricas, algébricas, as figuras geométricas, gráficos cartesianos, esquemas, a língua natural, etc. Registros estes que são comuns na prática de esboço de curvas, ainda mais no ensino superior, onde novas notações, novas argumentações e novas práticas são apresentadas ao se estudar os limites e derivadas de funções[1].

Uma das questões que, me arrisco a dizer, motivou as investigações realizadas por Duval, parece ter sido a seguinte:

> Esse uso de muitos sistemas semióticos de representação e expressão é essencial ou, ao contrário, é apenas um meio cômodo, mas secundário, para o exercício e para o desenvolvimento das atividades cognitivas fundamentais? (DUVAL, 2009, p. 13).

Perceba que Duval se interessa em investigar a relação entre os vários registros semióticos e o funcionamento do pensamento, que neste caso me refiro ao pensamento matemático.

Partindo de uma concepção idealista dos objetos matemáticos, concepção esta que permite entender os objetos matemáticos como *a priori*, ou seja, como entidades existentes num mundo ideal independente do nosso, anterior aos significados que lhe são atribuídos, Duval entende que uma das funções primordiais das representações semióticas é o de permitir se ter acesso à estes objetos, pois, por serem entidades abstratas ou ideais, são as representações que possibilitam que os “alcancemos”.

---

[1] Neste trabalho, estarei sempre me referindo a funções reais de uma variável.

Se pensarmos o objeto matemático 'funções', segundo a TRRS, função é um conceito que só teremos acesso a partir das suas várias representações, tais como uma definição no registro linguístico, uma lei algébrica, um gráfico cartesiano, etc. A partir desta concepção, Duval avança em suas investigações e identifica um fator importante relacionado aos registros semióticos, ele percebe que formas diferentes de representar um mesmo objeto matemático podem trazer informações diferentes a respeito deste objeto. Ideia esta muito importante para sua teoria e que vale apena tomarmos alguns exemplos para melhor entende-la.

Neste momento, vamos nos concentrar no objeto matemático 'função quadrática'. Trago como exemplo particular a representação algébrica $f(x) = x^2 - 4x + 3$, que quando estudada no ensino médio, por exemplo, pode ser escrita na forma $y + 1 = (x - 2)^2$. Por mais que estas duas formas representem o mesmo objeto (função quadrática) e por ser possível, em ambas, se identificar se um ponto pertence ou não a função, se este ponto é coordenada de alguma das raízes, entre outras coisas, particularmente a segunda maneira de representar a função, definida por $y + 1 = (x - 2)^2$, traz de forma explicita as coordenadas de seus vértices[2], que, neste caso, é o ponto $(2, -1)$; informação que o primeiro registro não fornece.

Ainda analisando a mesma função, se pensarmos em outro sistema semiótico de representação, como o seu registro gráfico (ver Figura 1), podemos identificar como a curva (função) se comporta, os intervalos de crescimento e decrescimento de seus valores, a quantidade de raízes que a função possui, a altura em que a curva intercepta o eixo das ordenadas, etc. Informações que os dois primeiros registro nem sempre possibilitam.

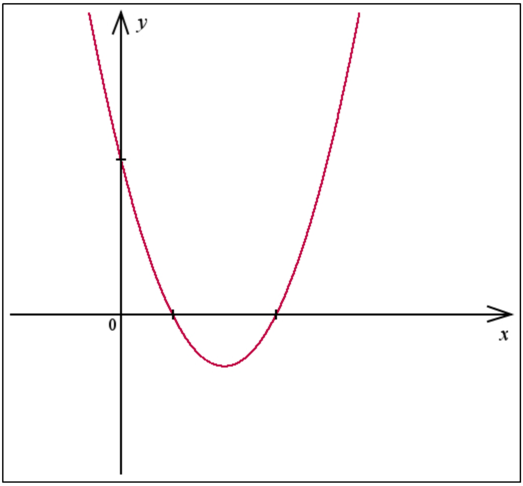
Em suas pesquisas Duval recebeu influência de trabalhos de vários pesquisadores, entretanto, os que serviram de fundamento para sua teoria foram Ferdinand de Saussure, com sua linguística, e a filosofia da linguagem de Gottlob Frege. Particularmente o trabalho de Frege parece ter influenciado Duval em identificar que representações

---

[2] Neste caso, a identificação acontece quando se conhece a representação algébrica geral de uma parábola e se associa tal representação com outros casos particulares, como entre $y + 1 = (x - 2)^2$ (particular) e $2p(y - k) = (x - h)^2$ (geral), em que (h, k) são as coordenadas do vértice e p é a distância entre o foco da parábola e sua reta diretriz.

diferentes de um objeto matemático trazem informações diferentes a respeito do mesmo. Há aí uma importante distinção que deve ser levada em conta entre o sentido e o significado (referência), que já havia sido levantada por Frege "Em seu artigo *Sobre o Sentido e a Referência*, publicado pela primeira vez em 1982." (SIMÕES, 2008, p. 27).

Figura 1 – Registro gráfico da função definida por $f(x) = x^2 - 4x + 3$



Fonte: Autor desta pesquisa.

A filosofia da linguagem de Frege faz uma diferenciação entre o sentido e a referência das proposições, um exemplo "clássico" que pode ser encontrado inclusive em publicações que tomam como base os trabalhos de Duval, são as proposições 'estrela da manhã' e 'estrela da tarde'. Estas proposições têm como referência (significado) o planeta Vênus, elas "apontam o objeto (planeta Vênus) no mundo", no entanto, os sentidos que as proposições possuem são distintos[3]. "Isso mostra que diferentes sentidos podem ter a mesma referência e que a igualdade de

---

[3] Para que fique mais evidente a diferença entre os sentidos das duas proposições, Kirkham (KIRKHAM, R. L. *Teorias da verdade*: Uma introdução crítica. Tradução de Alessandro Zir. São Leopoldo: Editora Unisinos, 2003. apud SIMÕES, 2008, p. 31) propõe a utilização de frases que contenham as proposições para se analisar seus sentidos, como por exemplo, "Ele acordou com a estrela da manhã" e "Ele acordou com a estrela da tarde", na primeira a intenção (sentido) é de indicar alguém que acordou ao alvorecer, já a segunda, a de alguém que acordou ao anoitecer.

referências não pressupõe a igualdade de sentidos.” (SIMÕES, 2008, p. 28).

> A conclusão de Frege é a de que para determinar o valor cognitivo de uma sentença é importante tanto o sentido quanto a referência, ou seja, o pensamento e o valor verdade: ‘Se a=b, então realmente a referência de ‘b’ é a mesma que a de ‘a’ e, portanto, também o valor de ‘a=b’ é o mesmo de ‘a=a’. Apesar disto, o sentido de ‘b’ pode diferir do de ‘a’ e, portanto, o pensamento expresso por ‘a=a’; neste caso, as duas sentenças não têm o mesmo valor cognitivo’ (Frege, 1895:116).’ (SIMÕES, 2008, p. 30)

Com esta filosofia de Frege, Duval levanta algumas considerações importantes a respeito do processo de ensino e aprendizagem de matemática. Uma delas sugere que o professor fique atento para que os estudantes não confundam o objeto matemático com uma de suas representações, pois como pudemos verificar nos exemplos até aqui apresentados, uma só representação não traz todas as informações a respeito de um objeto matemático, e isso pode reduzir a compreensão matemática[4]. Como o autor diz, o objeto matemático deve ser “reconhecido em cada uma de suas representações possíveis” (DUVAL, 1993, p. 40. Tradução minha).

Em sua teoria, Duval também utiliza-se de argumentos cognitivos, ele concorda com a ideia de que “O desenvolvimento das representações mentais efetua-se como uma interiorização das representações semióticas da mesma maneira que as imagens mentais são uma interiorização das percepções” (VYGOTSKY; PIAGET; DENIS apud DUVAL, 2009, p. 17). Desta forma, reconhecer o objeto em outras formas de representação, além de trazer mais informações a respeito do mesmo, também possibilita o desenvolvimento cognitivo para a atividade matemática.

---

[4] É o que Duval chama de “enclausuramento de registro”. Um aluno que conceitua uma função quadrática como sendo o registro algébrico $f(x) = ax^2 + bx + c$ e não a reconhece em outros registros, como o registro gráfico ou registro linguístico, por exemplo, não tem claro o conceito de função quadrática por estar *enclausurado* às informações daquele primeiro registro. Ele confunde o objeto matemático como sendo uma de suas representações, neste caso, o seu registro algébrico.

Com estes elementos apresentados até aqui, entendo que já é possível argumentar que há uma relação entre as representações semióticas e a cognição, pois esta segunda parece estar sujeitada à primeira, são aquelas que dão condições à atividade cognitiva na prática matemática. Duval (2009) apresenta esta ideia quando chama de *semiósis* a apreensão ou produção de uma representação semiótica, e de *noésis* os atos cognitivos como a apreensão conceitual de um objeto, a discriminação de uma diferença ou a compreensão de uma inferência, e, com isso, apresenta uma frase que é muito conhecida pelos que estudam os seus trabalhos: "**não há *noésis* sem *semiósis***, é a *semiósis* que determina as condições de possibilidade e de exercício da *noésis*". (DUVAL, 2009, p. 17. Grifos do autor). Está aí uma argumentação importante para motivar investigações referentes ao ensino e a aprendizagem em matemática tomando como elemento de análise a Semiótica.

Para dar continuidade a apresentação da TRRS, trarei uma classificação feita por Duval referentes a, como ele denomina, duas "operações cognitivas constitutivas da semiose" (DUVAL, 1993, p. 40. Tradução minha), a atividade de *tratamento* e a de *conversão*.

O *tratamento* é uma operação feita sobre um registro semiótico de maneira que não haja uma modificação do sistema em que se atua, ou seja, se o sistema de representação é o registro algébrico, ao receber um tratamento e sofrer algumas modificações em sua forma, o novo registro permanece no sistema algébrico. Vamos tomar como exemplo a função quadrática já representada na forma algébrica, $f(x) = x^2 - 4x + 3$. O tratamento, neste caso, é feito respeitando as regras do sistema algébrico. Então podemos começar fazendo $y = f(x)$.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2 - 4x + 3 \\
y &= x^2 - 4x + 3 \\
y + 1 &= x^2 - 4x + 3 + 1 \\
y + 1 &= x^2 - 4x + 4 \\
y + 1 &= (x-2)^2
\end{aligned}
$$

E desta forma, partimos do registro algébrico $f(x) = x^2 - 4x + 3$ e, com um tratamento, obtemos o registro $y + 1 = (x-2)^2$, também algébrico. Portanto, o tratamento não altera o sistema de representação, ele apenas muda a forma da representação dentro de um mesmo sistema, é uma transformação interna a um registro. (DUVAL, 1993).

A operação de *conversão* é uma transformação externa ao registro inicial, ou seja, eu parto de uma representação num sistema semiótico e chego a uma representação em outro sistema semiótico, diferente do primeiro. Para exemplificar, mais uma vez tomarei a função representada algebricamente por $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Ao representá-la na forma gráfica, como apresentado anteriormente na Figura 1, estamos fazendo uma conversão, pois partimos de um sistema algébrico de representação para um sistema gráfico.

Particularmente, a atividade de conversão foi objeto das investigações de Duval. Ele dá muita importância a ela em sua teoria e busca diferenciá-la de atividades que num primeiro momento parecem próximas.

> Bem que a atividade cognitiva de conversão de uma representação possa, muitas vezes, parecer ser estreitamente ligada a uma interpretação ou a um código, ela lhe é irredutível, porque, por uma lado, ela não se funda sobre alguma analogia, como no caso da interpretação e, por outro, a conversão não pode ser obtida pela aplicação de regras de codificação. Não existe, e não pode existir, regras de conversão como existem regras de conformidade e regras de tratamento. (DUVAL, 1993, p. 43. Tradução minha).

Ao se afirmar que não há regras para conversão, associando-se a constatação de que a atividade matemática é inerente à utilização de vários registros de representação, Duval passou a se interessar pelas dificuldades que os alunos enfrentam ao realizar conversões[5]. Como o próprio autor diz:

> A passagem de um sistema de representação a um outro[,] ou a mobilização simultânea de vários sistemas de representação no decorrer de um mesmo percurso, fenômenos tão familiares e tão frequentes na atividade matemática, **não têm nada de evidente e de espontâneo** para a maior parte dos alunos e dos estudantes. (DUVAL, 2009, p. 18. Grifos meus).

[5] Esta ordem linear que estou apresentando a TRRS foi uma escolha minha, não estou tentando apresentar um desenvolvimento histórico desta teoria.

Esta argumentação de Duval parece-me muito relevante para investigar a prática de esboço de curvas no ensino superior a partir de uma perspectiva semiótica, isso porque uma construção gráfica, ou mesmo uma análise gráfica, ocorre a partir da coordenação de diferentes sistemas semióticos, como o algébrico, linguístico e gráfico.

Ainda se baseando na diferença entre sentido e referência, Duval apresenta mais uma consideração para o ensino e aprendizagem de matemática, a de que a conversão de um registro a outro pode ter maior ou menor dificuldade. Há registros, de sistemas semióticos diferentes, que têm os elementos que formam sua *estrutura* organizados de forma bem parecida, a conversão entre eles parece muito com uma tradução, no entanto, principalmente na atividade matemática, ocorrem muitos casos em que as conversões se realizam entre registros que não possuem suas estruturas tão parecidas assim, ou ainda casos em que estas são totalmente diferentes.

Para elucidar melhor esta ideia, vamos observar algumas conversões do registro linguístico para o registro algébrico[6].

‘*A idade do pai é igual a idade do filho mais 23.*’

Se representarmos por x a idade do pai e y a idade do filho, a conversão para a linguagem simbólica fica assim,

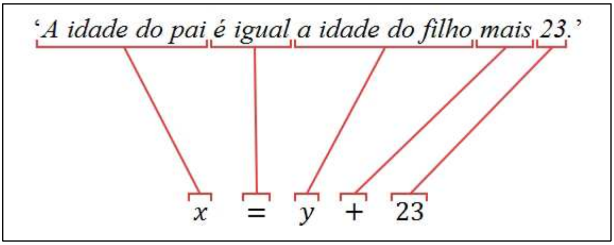
$$x = y + 23$$

Estes dois registros possuem uma mesma ordem de organização das unidades significativas[7], e para deixar isso mais evidente, apresento o esquema a seguir.

[6] Estes exemplos são uma adaptação minha do apresentado por Duval (2012, p. 110).

[7] Estou entendendo como *unidade significativa* um signo, ou uma organização mínima de signos, que é utilizada para representar algo. No registro linguístico apresentado, por exemplo, a organização das palavras 'A idade do pai' está apontando para a idade que o pai tem, o mesmo acontece para o signo 'x', se pensarmos no registro algébrico. Neste caso, ambos são unidades significativas de seus respectivos sistemas de representação.

Figura 2 – Exemplo de uma *congruência semântica* entre registros.



Fonte: Autor desta pesquisa.

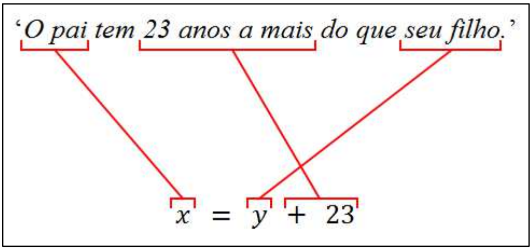
Quando, na conversão de um registro a outro, as unidades significativas de cada um se apresentam na mesma ordem de formação, Duval (2012) classifica tal fenômeno como uma *congruência semântica* entre os registros, ou, que os registros linguístico e algébrico são *semanticamente congruentes*. Perceba que neste exemplo, em particular, parece até uma tradução de uma língua para outra.

Mas como já mencionei, nem sempre há uma congruência semântica na conversão entre dois registros. Vejamos então mais uma situação de conversão para identificar uma não congruência.

'*O pai tem 23 anos a mais do que seu filho.*'

Uma conversão matematicamente correta seria a expressão $x = y + 23$, correta porque possuem a mesma referência (referem-se à mesma situação, ou possuem o mesmo significado), no entanto, a ordem em que as unidades significativas de cada registro se organizam não é a mesma, além de algumas destas não se relacionarem. Por exemplo, o registro algébrico, com o sinal '=', indica claramente uma igualdade entre os objetos da situação, já no registro linguístico não se fala em igualdade, equivalência, ou semelhança, a ideia de igualdade vem ao se pensar numa equação que descreva a situação, ou seja, na conversão. Outra observação é o trecho que diz '*pai tem 23 anos a mais*' que pode parecer fazer sentido se adicionar 23 à idade do pai, ao invés de fazê-lo à idade do filho.

Figura 3 – Exemplo de uma *não congruência semântica* entre registros.

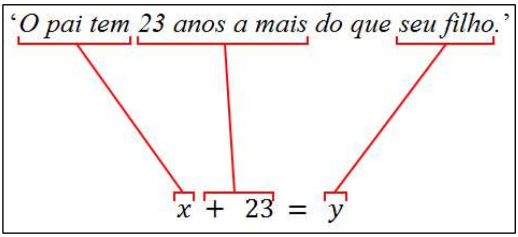


Fonte: Autor desta pesquisa.

Com o esquema da Figura 3 pode-se identificar uma mudança na ordem entre as unidades significativas, bem como o surgimento do sinal de igual, que parece não ter relação com as unidades significativas do registro linguístico. Estes dois registros, como diz Duval (2012), são *não congruentes*, ou, são *semanticamente não congruentes*.

Uma conversão que os alunos poderiam realizar por considerarem que haja uma congruência semântica entre os registros pode ser observada na Figura 4. Tal relação entre as unidades significativas parece ser semanticamente congruente, mas dá ao registro uma outra referência (significado), ou seja, não representam a mesma proposição, por isso não são *referencialmente equivalentes*. Esta conversão tentaria manter o sentido, mas acabaria "apontando" para outro objeto (teria outro significado).

Figura 4 – Exemplo de uma *congruência semântica* entre registros que não mantém a mesma referência.



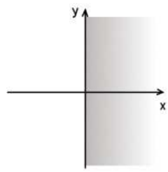
Fonte: Autor desta pesquisa.

Duval identificou o fenômeno de congruência semântica em vários experimentos que realizou. Com o intuito de progredir mais na direção de aspectos relacionados a este fenômeno, trago alguns excertos de um experimento que foi aplicado por este pesquisador numa turma de

105 alunos do segundo ciclo do ensino médio francês[8], que tratava da conversão entre os registros linguístico, algébrico e gráfico.

A situação era a seguinte, primeiramente os estudantes partiam de registros linguísticos referentes a regiões do sistema cartesiano de coordenadas, em que era solicitado que os mesmos hachurassem estas regiões no sistema cartesiano. Esta era a primeira conversão a ser feita – do registro linguístico para o gráfico. Em seguida, a partir da região hachurada no registro gráfico, os alunos tinham que escolher entre uma série de expressões matemáticas, aquela que representasse algebricamente a região hachurada do gráfico – conversão do registro gráfico para o algébrico (DUVAL, 2009, p. 75-76). Vejamos um primeiro excerto.

Quadro 1 – Tarefa 1 de conversão entre registros linguístico, algébrico e gráfico

I	**II**	**III**
1. [Sombrear] o conjunto dos pontos que têm uma abscissa positiva	$x > 0$	

Fonte: DUVAL, 2009, p. 76.

No Quadro 1 estão os três registros. Como mencionado, as conversões eram para serem feitas nos seguintes sentidos, primeiro de I $\rightarrow$ III e depois de III $\rightarrow$ II. Após a realização do experimento, Duval traz os seguintes percentuais de acertos.

Quadro 2 – Percentual de acertos da tarefa 1 de conversão entre registros linguístico, algébrico e gráfico

I $\rightarrow$ III hachurar	**III $\rightarrow$ II escolher a expressão**
67%	51%

Fonte: DUVAL, 2009, p. 76.

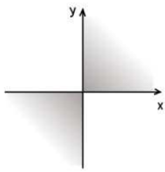
Nas duas conversões (I $\rightarrow$ III e III $\rightarrow$ II) os registros possuem congruência semântica, ou seja, no registro linguístico, '*pontos que têm*

[8] Os alunos participantes cursavam o *Seconde*, nível escolar do sistema de ensino francês. (DUVAL, 2009, p. 117)

uma abscissa positiva' se relaciona com '*hachurar a região onde a coordenada* x *é positiva*', no registro gráfico; e '*hachurar a região onde a coordenada* x *é positiva*' é semanticamente congruente a ter '$x > 0$', no registro algébrico.

Se observarmos um segundo excerto deste mesmo experimento, é possível identificar um resultado diferente quanto ao sucesso dos alunos nas conversões. Observe o quadro a seguir que já está com os percentuais de acertos.

Quadro 3 – Tarefa 3 de conversão entre registros linguístico, algébrico e gráfico

I	II	III	I $\rightarrow$ III hachurar	III $\rightarrow$ II escolher a expressão
3. ... o conjunto dos pontos cuja abscissa e ordenada são de mesmo sinal	$xy \geq 0$		56%	25%

Fonte: DUVAL, 2009, p. 76.

De I $\rightarrow$ III pode-se identificar novamente que há congruência semântica entre '*pontos cuja abscissa e ordenada são de mesmo sinal*' e '*hachurar a região onde as coordenadas têm o mesmo sinal*', pode-se perceber isso se pensarmos nas unidades significativas presentes, ou seja, '*abscissas e ordenadas de mesmo sinal*' e '*coordenadas têm o mesmo sinal*'. No entanto, de III $\rightarrow$ II o percentual de acertos cai mais da metade, e é justamente nesta conversão que se pode identificar uma não congruência entre '*hachurar a região onde as coordenadas têm o mesmo sinal*' e '*o produto das coordenadas ser positivo*'[9]. Para sair do registro III e chegar ao registro II, os estudantes deveriam fazer uma *transformação* na unidade '*tem o mesmo sinal*' para associá-la com '*o produto ser positivo*'.

Com este último excerto, é possível identificar algo importante em relação a não congruência. De III $\rightarrow$ II houve a necessidade de se fazer uma transformação entre as unidades significativas de um registro para associá-lo com a unidade significativa do outro, esse tipo de

[9] Aqui Duval não se preocupou com o caso das coordenadas estarem sobre os eixos, ou seja, o caso em que x ou y são iguais a zero.

transformação é muito comum na atividade matemática, e ainda há casos em que é necessário fazer bem mais do que uma transformação entre unidades significativas para que se possa realizar uma conversão. Isso possibilita se pensar em graus de não congruência entre registros, ou seja, se duas conversões são não congruentes, podemos falar de haver um *grau de não congruência* maior ou menor, mediante ao número de transformações necessárias. Como Duval (2012) diz, “Duas apresentações [ou dois registros] podem ser ditas mais ou menos congruentes, segundo o número de transformações necessárias para tornar as suas sequências internas comparáveis termo a termo”. (p. 103).

Com todos os aspectos apresentado até aqui, torna-se possível apresentar a hipótese tomada como fundamental na TRRS, que diz que

> A compreensão (integral) de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação[,] e esta coordenação manifesta-se pela rapidez e espontaneidade da atividade de conversão. (DUVAL, 1993 apud MORETTI, 2002, p. 349).

Desta forma, a TRRS diz que a conceitualização em matemática acontece mediante a coordenação entre registros semióticos diferentes, coordenação esta que neste trabalho será entendida como conversões em ambos os sentidos, ou seja, quando eu me referir a coordenação entre registros, estarei me referindo à conversão de um registro A para um registro B e vice versa.

Uma vez tendo trazido alguns aspectos mais gerais da TRRS, apresentarei agora alguns elementos desta teoria que se relacionam mais diretamente com a prática de esboço de curvas, os quais, mais adiante, serão utilizados para pensar a metodologia de minha investigação.

1.2 TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E O ESBOÇO DE CURVAS

Quando Duval aborda o esboço de curvas em seus trabalhos[10], ele faz uma crítica a um procedimento que é comumente adotado ao se ensinar tal assunto, procedimento este que inclusive está presente em alguns livros didáticos (SILVA, 2008). Ao se trabalhar com as conversões no sentido *registro algébrico* $\rightarrow$ *registro gráfico*, é comum utilizar-se do procedimento que associa um par de números a um ponto

[10] Duval 2004 e 2011, por exemplo.

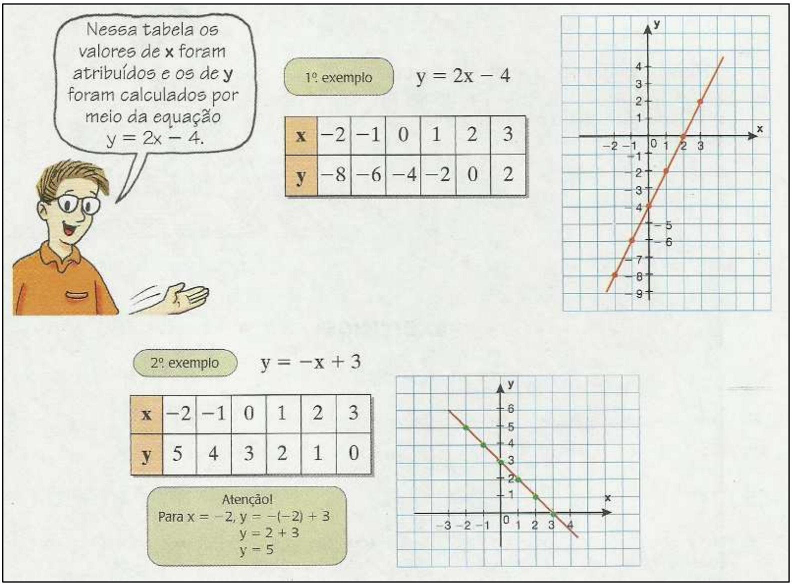
no plano cartesiano. Procedimento que é denominado por Duval (2011) de *abordagem ponto a ponto*. Segundo o autor:

> É por meio desta abordagem que são introduzidas e definidas as representações gráficas. Em referência aos dois eixos graduados, um par de números permite identificar um ponto (e, inversamente, um ponto se traduz por um par de números). Este modo associativo limita-se a alguns valores particulares e aos pontos marcados no plano referencial. Esta abordagem favorece quando se quer TRAÇAR o gráfico correspondente de uma equação do primeiro grau ou o gráfico de uma equação do segundo grau. Favorece ainda quando se quer LER as coordenadas de algum ponto interessante (porque é ponto de intersecção com os eixos ou com alguma reta, porque é máximo, etc.). (DUVAL, 2011, p. 98).

Trago como exemplo dois excertos de um livro[11] do 9º ano (8ª série) do Ensino Fundamental (veja as Figuras 5 e 6) que retratam este procedimento.

[11] Estes excertos foram retirados de SPINELLI & SOUZA (2000), no entanto, não quero dizer que este livro trata o esboço do gráfico de funções, afins e quadráticas, utilizando apenas o procedimento ponto a ponto. Trago um exemplo de como o procedimento pode ser encontrado num livro didático reconhecido pelo MEC.

Figura 5 – Esboço do gráfico de funções afim através da abordagem ponto a ponto


Nessa tabela os valores de **x** foram atribuídos e os de **y** foram calculados por meio da equação $y = 2x - 4$.

1º exemplo $y = 2x - 4$

x	−2	−1	0	1	2	3
y	−8	−6	−4	−2	0	2

2º exemplo $y = -x + 3$

x	−2	−1	0	1	2	3
y	5	4	3	2	1	0

Atenção!
Para $x = -2$, $y = -(-2) + 3$
$y = 2 + 3$
$y = 5$

Fonte: SPINELLI & SOUZA, 2000, p. 287.

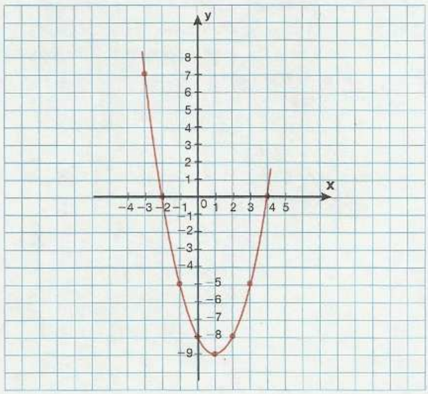
Figura 6 – Esboço do gráfico de uma função quadrática através da abordagem ponto a ponto

Vamos fazer agora o gráfico desta função de 2º grau: $y = x^2 - 2x - 8$. Para isso, completamos uma tabela com valores de **x** e **y**.

x	$y = x^2 - 2x - 8$
-3	$y = (-3)^2 - 2(-3) - 8 = 7$
-2	$y = (-2)^2 - 2(-2) - 8 = 0$
-1	$y = (-1)^2 - 2(-1) - 8 = -5$
0	$y = 0^2 - 2 \cdot 0 - 8 = -8$
1	$y = 1^2 - 2 \cdot 1 - 8 = -9$
2	$y = 2^2 - 2 \cdot 2 - 8 = -8$
3	$y = 3^2 - 2 \cdot 3 - 8 = -5$
4	$y = 4^2 - 2 \cdot 4 - 8 = 0$

Pares ordenados:
$(-3, 7)$
$(-2, 0)$
$(-1, -5)$
$(0, -8)$
$(1, -9)$
$(2, -8)$
$(3, -5)$
$(4, 0)$

Em seguida, anotamos os pontos correspondentes aos pares ordenados no plano cartesiano e desenhamos a curva:



Fonte: SPINELLI & SOUZA, 2000, p. 297.

Uma pesquisa realizada por Madeline Silva (2008), em que se foi feita uma análise em livros didáticos que estavam sendo utilizados em 55 escolas estaduais da Grande Florianópolis, a respeito do tratamento dado ao esboço de curvas no Ensino Médio, trouxe indicativos que estes livros didáticos propõem uma abordagem ponto a ponto para o esboço de curvas. Como diz a pesquisadora,

> A análise realizada em livros didáticos confirmou nossos indicativos de que a maior parte desses livros[,] que são acessíveis tanto aos professores quanto aos alunos, propõem um esboço de curvas baseado em um *procedimento pontual* [ou abordagem ponto a ponto]. (SILVA, 2008, p.131. Grifos meus).

A autora afirma ainda, baseando-se em Duval, que este procedimento pontual “não oferece subsídios para o sentido da conversão inversa, ou seja, que vai do gráfico à expressão algébrica” (Ibidem).

Sob a perspectiva da TRRS, por mais que tal procedimento relacione aspectos entre os registros algébrico e gráfico, esta relação é feita a partir de conversões sempre no sentido do registro algébrico para o registro gráfico, o que parece não convergir para a hipótese fundamental da TRRS apresentada na seção anterior, pois não há uma coordenação de registros. A prática de esboço de curvas demanda, entre outras coisas, a coordenação dos registros algébrico e gráfico e, na maioria dos casos, não há uma congruência semântica nesta coordenação. Como Moretti, Ferraz e Ferreira (2008) comentam:

> Neste modo de operar [na abordagem ponto a ponto] não há ligação entre o gráfico e a expressão analítica da função correspondente. Diversos problemas podem surgir desta forma de proceder devido ao fato de que se há congruência semântica entre um par ordenado e sua representação cartesiana, o mesmo não pode se dizer de um conjunto de pontos no plano cartesiano [uma curva] e uma regra matemática (expressão analítica) a ele equivalente. (p. 99).

O procedimento ponto a ponto sugere um estudo discreto (através de pontos e pares ordenados) de algo que é contínuo (as curvas e as representações analíticas de funções reais), o que pode, entre outras coisas, fazer com que os estudantes não tenham pleno conhecimento do conceito que estão estudando.

Duval (2011), ao identificar que este procedimento não permite uma relação entre a curva e a representação analítica, propõe uma maneira de proceder que possibilita a coordenação dos registros algébrico e gráfico. Sua ideia baseia-se na classificação de características visuais tidas como básicas do registro gráfico, que o autor denomina de *variáveis visuais*[12], em seguida faz-se o mesmo com o registro algébrico, neste caso identificando *unidades simbólicas* básicas que permitam relacionar os dois registros. Desta forma, o que estamos relacionando são características dos registros, isso coloca a dualidade

[12] Duval define *variável visual* com sendo toda modificação que pode ser feita no registro gráfico da função que gera modificações na expressão algébrica correspondente (DUVAL, 2011).

discreto/contínuo num segundo plano. E perceba ainda que esta maneira de proceder se aproxima da hipótese fundamental da TRRS.

Vamos dar uma atenção maior para o entendimento deste procedimento, pois ele será importante para que eu continue a desenvolver este embasamento teórico. Para isso, vamos analisar como Duval o utilizou quando trabalhou com as funções afins.

Primeiramente ele analisou quais as variáveis visuais de uma função afim, e com isso obteve a seguinte classificação: *o sentido da inclinação do traçado*, *o ângulo do traçado com os eixos*[13] e *a posição do traçado em relação à origem do eixo vertical*. Observe no quadro a seguir tais classificações.

Quadro 4 – Variáveis visuais de uma função afim e seus valores

Variáveis visuais	**Valores das variáveis visuais**
- o sentido da inclinação do traçado:	- a linha **sobe** da esquerda para a direita; - a linha **desce** da esquerda para a direita. OBSERVAÇÃO: a referência esquerda/direita é o sentido normal do percurso visual de uma página escrita em caracteres latinos.
- o ângulo do traçado com os eixos:	Há uma **repartição simétrica** do quadrante **percorrido**. - o ângulo formado com o eixo horizontal **é menor que** o formado com o eixo vertical; - o ângulo formado com o eixo horizontal **é maior que** o formado com o eixo vertical. OBSERVAÇÃO: no caso em que o traçado não passa pela origem, basta deslocar o eixo vertical, por exemplo, até o ponto de intersecção da reta com o eixo horizontal.
- a posição do traçado em relação à origem do eixo vertical:	- o traçado passa **abaixo** da origem; - o traçado passa **acima** da origem; - o traçado passa **pela origem**.

Fonte: DUVAL, 2011, p. 101. Grifos do autor.

[13] No trabalho de Duval pode-se perceber que ele não busca pela medida do ângulo no sentido anti-horário em relação ao eixo x, como normalmente se encontra em algumas bibliografias. Ele toma como referência a inclinação da reta $y = x$, caso o sentido da inclinação seja positivo, ou $y = -x$, caso seja negativo, e verifica se a inclinação da reta analisada a deixa mais próxima do eixo x, do eixo y ou sobre a bissetriz do quadrante.

Em seguida ele buscou pelas unidades significativas do registro algébrico, identificando os coeficientes a e b do registro $f(x) = ax + b$ como sendo tais unidades. Observe que pelo fato de serem três variáveis visuais e duas unidades simbólicas, acontece uma não congruência semântica entre os registros. Com isso, para fazer a relação entre estas unidades será preciso alguma transformação, e no caso das funções afins, a transformação é feita em relação ao coeficiente angular da função (o coeficiente a), pois é ele quem pode ser relacionado ao mesmo tempo com *o sentido da inclinação do traçado* e *o ângulo do traçado com os eixos*. O que é feito é analisá-lo duas vezes, uma em relação a 0 e outra em relação a 1, ou seja, primeiro analisa-se se o coeficiente é maior ou menor que zero, o que torna possível a relação com a inclinação da reta, e em seguida verifica-se se tal coeficiente é menor, maior, ou igual a um[14], assim relacionando-o também com o ângulo em relação aos eixos. Observe como Duval organiza a relação entre as unidades significativas no quadro a seguir.

Quadro 5 – Variáveis visuais e unidades simbólicas de uma função afim

Variáveis visuais	Valores	Unidades simbólicas correspondentes	
Sentido da inclinação	ascendente descendente	coeficiente > 0 coeficiente < 0	ausência do sinal [–] presença do símbolo –
Ângulo com os eixos	partição simétrica ângulo menor [45º] ângulo maior [45º]	coefic. variável = 1 coefic. variável < 1 coefic. variável > 1	não há coefic. escrito há coefic. escrito há coefic. escrito
Posição sobre o eixo [y]	corta acima corta abaixo corta na origem	acresce-se [uma] constante subtrai-se [uma] constante sem correção aditiva	sinal + sinal – ausência de sinal

Fonte: DUVAL, 2011, p. 101.

Perceba que esta maneira de proceder possibilita uma coordenação mais espontânea entre os registros, pois agora, como já mencionei anteriormente, relacionam-se qualidades do registro gráfico com qualidades do registro algébrico. Este procedimento é chamado por

---

[14] No caso da reta ser decrescente, o coeficiente a é negativo, então pode-se trabalhar com módulo de a para comparar com o valor 1. Valerá a mesma regra para a relação com o coeficiente de $y = -x$, ou seja, se $|a| > 1$, a inclinação da reta a deixa mais próxima do eixo y, se $|a| < 1$, mais próxima do eixo x, e se $|a| = 1$, tem a mesma inclinação que a bissetriz dos quadrantes ímpares.

Duval (2011) de procedimento de interpretação global das propriedades figurais15 (p. 99), e é descrito como a seguir.

> O conjunto traçado/eixos [O gráfico] forma uma imagem que representa um objeto descrito por uma expressão algébrica. Toda modificação desta imagem, que leva a uma modificação na expressão algébrica correspondente, determina uma variável visual pertinente para a interpretação gráfica. É importante, deste modo, identificar todas as modificações pertinentes possíveis desta imagem, quer dizer, ver as modificações conjuntas da imagem e da expressão algébrica: **isto significa proceder a uma** análise de congruência entre dois registros de apresentação de um objeto ou de uma informação. Com esta abordagem **não estamos mais na presença da associação "um ponto - um par de números", mas na presença da associação "variável visual de representação - unidade significativa da expressão algébrica"**. (DUVAL, 2011, p. 99. Grifos do autor)

Após Duval utilizar o procedimento de interpretação global com as funções afins, outros pesquisadores realizaram estudos que possibilitaram estender este procedimento para outros tipos de funções[16], no entanto, surge aqui um questionamento importante: Será que este procedimento poderia ser utilizado no ensino superior?

Isso porque, neste nível de ensino, as funções que comumente são estudadas não se resumem apenas às "tipologias" abordadas nos ensinos fundamental e médio – como as funções polinomiais de primeiro e segundo grau, funções trigonométricas, logarítmicas, exponenciais, etc. Por mais que estas funções ainda façam parte das práticas matemáticas realizadas na academia, a prática de esboço de curvas que se pretende instituir no ensino superior, mais especificamente num curso de Cálculo, aborda uma generalidade muito maior de curvas – como funções polinomiais de grau maior que 2, funções racionais compostas por funções polinomiais deste tipo, soma, diferença, produto, quociente, composição, etc. entre vários tipos diferentes de funções, entre outros exemplos – o que torna a classificação das unidades básicas dos registros gráfico e algébrico muito complexas.

---

[15] Daqui para frente, para não tornar a leitura muito cansativa, tratarei este procedimento apenas por *interpretação global*.

[16] Confira, por exemplo, Moretti (2003) e Silva (2008).

Porém, vale agora lembrar que toda esta generalidade de funções que se estuda está acompanhada por novas ferramentas, que neste caso são os conceitos de limite e derivada. Nos livros de Cálculo, na maioria das vezes, o esboço de curvas é estudado como uma das aplicações das derivadas, onde parte-se geralmente de registros algébricos, que recebem uma sequência de tratamentos de derivadas e limites, para então se traçar o esboço da curva e obter, assim, o registro gráfico associado. Há inclusive muitos livros de Cálculo que, ao final de suas seções de esboço de curva, trazem uma espécie de tabela com orientações a serem seguidas, referentes a tratamentos de cálculo no registro algébrico, para se traçar o esboço da curva[17].

De maneira um pouco parecida com o que acontece com o procedimento ponto a ponto, esta forma de proceder também parece propiciar a conversão sempre do registro algébrico para o registro gráfico, a intenção parece ser a de dar uma aplicação a toda uma série de cálculos algébricos que se é estudado na disciplina de Cálculo.

Se voltarmos a considerar a grande variedade de funções que são estudadas no ensino superior, fica muito difícil, exceto para alguns casos particulares, realizar uma conversão do registro gráfico para o registro algébrico. Entretanto, conscientes desta situação e tomando o procedimento de interpretação global como instrumento para refletir sobre esta prática, Moretti, Ferraz e Ferreira (2008) entendem que é possível tomar como variáveis visuais elementos do registro gráfico que já são utilizados no Cálculo e são associados aos conceitos de limite e derivada, a saber, as *variações*[18] e *concavidade* das funções, os *extremos relativos*, os *pontos de inflexão*, as *retas assintóticas* e a *continuidade*.

A partir desta concepção, estes autores propõem uma classificação que relaciona estas variáveis visuais[19] com unidades simbólicas referentes às derivadas e limites. Eles chamam esta classificação de *formas básicas*, observe uma delas no quadro a seguir.

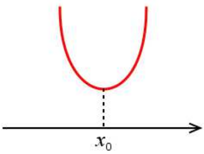
---

[17] Confira, por exemplo, Gonçalves e Flemming (2000, p. 284), Guidorizzi (2008, p. 257), Leithold (1994, p. 256) e Stewart (2009, p. 288).

[18] Entenderei, assim como estes autores, *variações* da função como se referindo aos intervalos de crescimento e decrescimento desta função.

[19] Ao invés de utilizar o termo *variável visual*, estes autores preferem utilizar *unidade básica gráfica*, ou simplesmente, *unidade gráfica*. Também são tomadas como equivalentes as expressões *unidade básica simbólica* (ou *algébrica*) e *unidade simbólica* (ou *algébrica*).

Quadro 6 – Formas básicas: extremos relativos[20]

Unidade básica gráfica	**Unidade básica linguística**	**Unidade básica simbólica**
	Mínimo relativo x_0. Derivada primeira de y muda de sinal negativo para positivo na vizinhança de x_0; ou efetuar o teste da derivada 2ª ou de ordem superior.	$\begin{cases} y'(x_0)=0 \\ y'(x)<0,\ x\in V^-(x_0) \\ y'(x)>0,\ x\in V^+(x_0) \end{cases}$ $y''(x_0)>0$; $y^{(n-1)}(x_0)=0$ e $y^{(n)}>0$, $n>2$, par.

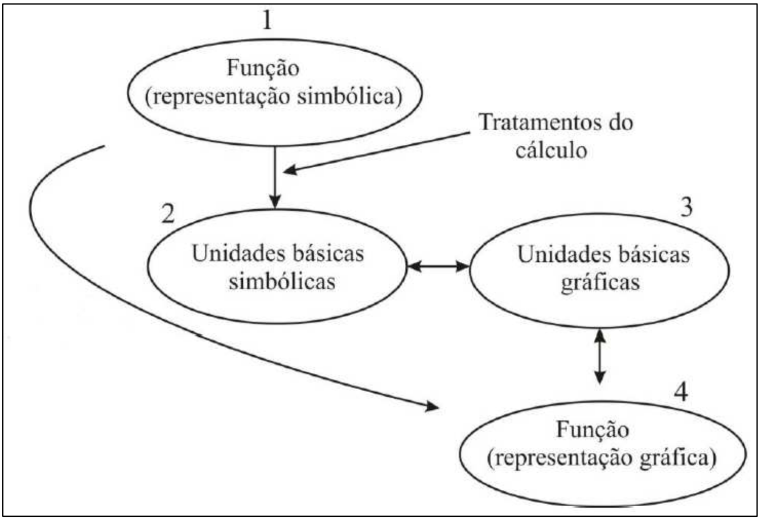
Fonte: MORETTI e LUIZ, 2010, p. 545.

A partir de uma unidade gráfica, temos sua conversão em unidades linguísticas e por último a conversão destas em unidades simbólicas. Perceba que a relação não será sempre de “um para um”, ou seja, não será sempre de uma unidade gráfica para uma unidade simbólica, mas pode acontecer de uma unidade gráfica estar relacionada com mais de uma unidade simbólica.

Com esta maneira de proceder, estes autores trazem um meio para se pensar o procedimento de interpretação global das propriedades figurais no ensino superior, além de também sugerir uma perspectiva semiótica, baseada na TRRS, para analisar o processo de ensino e aprendizagem do esboço de curvas neste nível de ensino. Moretti e Luiz (2010) trazem o esquema a seguir na tentativa de representar a coordenação entre os registros através deste procedimento.

[20] A notação $x\in V^-(x_0)$ e $x\in V^+(x_0)$ significam, respectivamente, ‘x pertencente a uma vizinhança à esquerda de x_0’ e ‘x pertencente a uma vizinhança à direita de x_0’.

Figura 7 – Esquema da coordenação dos registros gráfico e algébrico segundo as formas básicas



Fonte: MORETTI & LUIZ, 2010, p. 531.

A conversão no sentido 1 → 4 é indicada pela seta maior, mas como já comentado o mesmo nem sempre acontece de 4 → 1, ou mesmo de 2 → 1, devido à generalidade de funções estudadas. No entanto, o procedimento de interpretação global como estratégia para a coordenação entre registros acontece mediante as unidades básicas referentes a eles, ou seja, 2 ↔ 3.

Para realizar esta pesquisa, em minhas intervenções em sala de aula, muitas vezes pensarei meu objeto de estudo a partir desta maneira de proceder. No entanto, julgo importante mencionar que não tenho aqui a intenção de avaliar se este procedimento pode ou não ser utilizado no ensino superior, ou se ele traz melhores resultados ao processo de ensino e aprendizagem, pois acredito que já houve pesquisadores que demandaram esforços para isso[21], meu interesse central é em identificar os usos que são feitos da linguagem matemática numa perspectiva da semiótica.

Como já mencionei na apresentação deste trabalho, não será apenas a partir da TRRS que me remeterei ao meu objeto de estudo,

---

[21] Verifique, por exemplo, os trabalhos de Moretti, Ferraz e Ferreira (2008), Luiz (2010) e Moretti e Luiz (2010).

então, passemos agora à próxima seção para falar de outro referencial teórico para este trabalho.

1.3 UMA NOÇÃO DE PRÁTICA MATEMÁTICA E UMA ONTOLOGIA

Nesta seção trago mais algumas conceituações para referir ao meu objeto de estudo, e para tanto, a partir de agora tomarei como embasamento alguns elementos do Enfoque Ontosemiótico (EOS) da atividade matemática, teoria que vem sendo desenvolvida pelo pesquisador, em Didática da Matemática, Juan Díaz Godino em colaboração com outros pesquisadores.

No EOS, a matemática é entendida como uma atividade socialmente compartilhada, de resolução de problemas, que possui linguagem simbólica e sistemas conceituais logicamente organizados (GODINO; BATANERO, 1994). A partir deste entendimento, considera-se como *prática matemática* "toda atuação ou expressão (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguém para resolver problemas matemáticos, comunicar a outros a solução obtida, validá-la ou generalizá-la a outros contextos e problemas". (GODINO; BATANERO; FONT, 2008).

Desta forma, sob esta teoria, o esboço de curvas estudado numa disciplina de Cálculo pode ser entendido como uma prática matemática, compartilhada por aqueles que praticam a matemática acadêmica e, consequentemente, fazem uso de sua linguagem.

A noção de *objeto matemático* adotada pelo EOS não se limita apenas a entes abstratos ou conceitos formais, um objeto matemático é entendido "como tudo aquilo que pode ser indicado, [...] que pode ser notado ou ao que se pode fazer referência quando fazemos, comunicamos ou aprendemos matemática." (GODINO, 2002, p. 5. Tradução minha). Perceba que segundo esta noção, não só a definição de função, por exemplo, é um objeto, mas uma expressão do tipo $y = f(x)$, um gráfico, um procedimento para realizar um tratamento num determinado registro, conversões, propriedades, argumentações, etc., também o são.

Esta conceituação sugere um caráter muito aleatório para os objetos matemáticos, pois parece não existir "fronteiras" bem definidas para delimitá-los, o que, entre outras coisas, torna a análise do processo de ensino e aprendizagem muito complexa, uma vez que qualquer coisa relacionada à atividade matemática parece ser um objeto matemático.

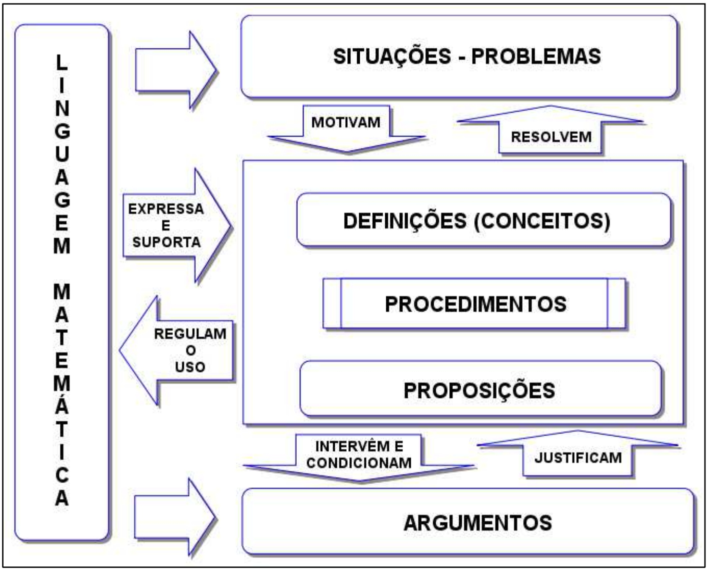
Godino e os pesquisadores que colaboraram para o desenvolvimento desta teoria entendem que é nos contextos em que acontecem os usos desta gama de objetos que os significados se estabelecem, tais contextos são perpassados por organizações sociais e culturais que, entre outras consequências, possibilitam organizações mínimas de objetos para a orientação de práticas matemáticas. A partir desta ideia e da noção de objeto matemático a pouco apresentada, o EOS sugere uma classificação mínima para os objetos matemáticos, denominada de objetos primários, que servem como elementos e uma ontologia para se pensar a atividade matemática. Ele toma como entidades primárias os seguintes objetos:

> - ***Elementos linguísticos*** (termos, expressões, notações, gráficos,...) em seus diversos registros (escrito, oral, gestual,...)
> - ***Situações - problemas*** (aplicações extra-matemática, tarefas, exercícios,...)
> - ***Conceitos - definições*** (introduzidos mediante definições ou descrições) (reta, ponto, número, média, função,...)
> - ***Proposições*** (enunciados sobre conceitos,...)
> - ***Procedimentos*** (algoritmos, operações, técnicas de cálculo,...)
> - ***Argumentos*** (enunciados usados para validar ou explicar as proposições e procedimentos, dedutivos ou de outro tipo,...).
>
> (GODINO et al., 2011, p. 6. Tradução minha.)

Os *elementos linguísticos*, ou a linguagem – como se refere Godino em outras publicações[22]–, “representa[m] as demais entidades e serve[m] de instrumento para a ação” (GODINO; BATANERO; FONT, 2008, p. 14) e as *situações* ou *problemas* são o que justificam e/ou dão origem a atividade matemática. Os *conceitos* ou *definições*, *proposições* e *procedimentos* intervêm e condicionam os *argumentos*, que, por sua vez, justificam estes primeiros. Na Figura 8 trago um esquema de como estas entidades se relacionam segundo o EOS.

[22] Como, por exemplo, Godino (2002) e Godino, Batanero & Font (2008).

Figura 8 – Configuração dos objetos primários



Fonte: GODINO et al., 2011, p. 6. Tradução minha.

Não tenho a intenção de tomar o esquema da Figura 8 como um modelo ou estrutura “rígida” para estabelecer uma relação entre estas entidades, mas uma maneira para entender como estas podem ser configuradas segundo a teoria. Com esta atitude acredito ter possibilidade de pensar outras maneiras de configurá-las, se assim julgar necessário.

Sobre estes objetos, Godino (et al. 2011) diz ainda que

> A consideração de uma entidade como primária não é uma questão absoluta, mas relativa, posto que se trata de entidades funcionais e relativas aos jogos de linguagem[23] (marcos institucionais, comunidade de práticas e contextos de uso) em que participam; tem também um caráter recursivo, no sentido de que cada objeto, dependendo do nível de análise, pode estar composto por

---

[23] Godino diz, em alguns de seus trabalhos, que se utiliza do mesmo conceito de *jogos de linguagem* posto por Wittgenstein em sua obra *Investigações Filosóficas*, de 1953. Ele baseia-se na interpretação feita por Baker e Hacker (BAKER, G. P.; HACKER, P. M. S. Wittgenstein. *Rules, grammar and necessity*. An analytical commentary on the Philosophical Investigations. Glasgow: Basil Blackwell, 1985).

> entidades dos outros tipos (GODINO et al., 2011, p. 7. Tradução minha).

O uso da linguagem matemática, ao se estudar o esboço de curvas, envolve várias práticas – tais como a utilização de vários registros semióticos de representação, tratamentos referentes a cada registro, as conversões, o domínio de algoritmos para resolução de equações e inequações, etc. –, é a partir de uma sistematização destas que o esboço de curvas emerge também como uma prática, ou um *sistema de práticas*.

Com certeza, ao chegar ao ensino superior, os estudantes já trazem consigo alguma prática de esboço de curvas, pois passaram por outros níveis de ensino que, a sua maneira, já a realizava. Entretanto, no ensino superior esta prática acontece mediante a utilização e a relação de objetos matemáticos ainda não conhecidos pelos estudantes, como, por exemplo, as derivadas e os limites, os procedimentos específicos referentes a estes conceitos, as variáveis visuais adotadas neste nível de ensino, etc. Com isso, o EOS traz uma classificação para esta prática que mais adiante permitirá a apresentação de uma noção para ensino e aprendizagem. As práticas que os estudantes realizam – ou que trazem consigo dos outros níveis de ensino – são denominadas de *práticas pessoais*, ou *práticas cognitivas*; já as práticas partilhadas no âmbito de uma instituição são denominadas de *práticas institucionais*, ou *práticas epistêmicas* (GODINO; BATANERO, 1994). A noção de instituição desta teoria é apresentada da seguinte maneira.

> Uma instituição está constituída pelas pessoas envolvidas numa mesma classe de situações problem[as]; compromisso mútuo com a mesma problemática implica na realização de determinadas práticas sociais que frequentemente apresentam características particulares e são, geralmente, condicionadas pelos instrumentos disponíveis na referida instituição, assim como em suas regras e modos de funcionamento. (GODINO; BATANERO; FONT, 2008, p. 11).

É a partir destes elementos apresentados até aqui, referentes ao EOS, que trago um entendimento de ensino e de aprendizagem que será considerado para a realização deste trabalho. Segundo esta teoria, o ensino é entendido como sendo a tentativa de inserir os estudantes em práticas institucionais, de tentar fazer com que eles realizem suas práticas segundo os significados[24] suportados pela instituição que se pretende inseri-lo, no caso do esboço de curvas, os significados suportados pela matemática acadêmica. Já a aprendizagem é entendida como a apropriação, por parte dos estudantes, destes significados partilhados pela comunidade que se tem a intenção de inseri-los.

Para realizar uma análise do uso da linguagem matemática das práticas dos estudantes, usos estes socialmente compartilhados pela academia, esta maneira de entender o processo de ensino e aprendizagem, como um “acoplamento” (GODINO et al., 2011) entre práticas cognitivas e práticas epistêmicas, parece-me ser útil.

Passemos agora para outros elementos do EOS, principalmente para as noções de função semiótica e de configurações de objetos que intervém na prática matemática.

1.4 FUNÇÃO SEMIÓTICA, CONFIGURAÇÕES DE OBJETOS E SISTEMAS SEMIÓTICOS

Por se tratar de uma teoria de perspectiva pragmática, para EOS o significado de um objeto matemático não está em uma definição formal como em nas teorias realistas ou idealistas, o significado está na ação, nos usos que se faz dos objetos matemáticos, no “sistema de práticas (operativas ou discursivas) que um sujeito realiza para resolver certos tipos de problemas em que tal objeto intervém” (GODINO et al., 2011). Esta noção de significado parece-me se aproximar da hipótese fundamental apresentada pela TRRS, pois quando Duval comenta que a conceituação em matemática acontece mediante a coordenação de ao menos dois registros de representação semiótica, ele está dizendo, também, que a conceituação acontece mediante a produção, manipulação e comunicação de signos, o que remete ao conhecimento de práticas matemáticas que possibilitam resolver certos tipos de problemas.

Desta forma, para o EOS, o significado está nas várias relações entre os objetos matemáticos que são manipulados durante a atividade matemática, ou, como sugerem Godino e seus colaboradores, ao se estabelecer *funções semióticas* entre os objetos matemáticos. Para melhor refletir a respeito desta noção, e antes de apresentá-la, trago um exemplo referente ao esboço de curvas.

Nas práticas matemática da academia, o significado atribuído às variações de uma função não está na conceituação de crescimento e

[24] Na próxima seção trarei mais detalhadamente a noção de significado.

decrescimento, mas nas associações que se estabelecem entre os vários objetos matemáticos que são mobilizados ao se falar a respeito de variações de funções. Para se ter uma ideia, na prática de esboço de curvas há uma configuração de várias relações envolvendo objetos matemáticos, como os conceitos relacionados ao ‘crescimento’ e ‘decrescimento’ de funções, as propriedades que envolvem ‘inclinações de retas tangentes a curvas’ no registro gráfico e o ‘sinal que a derivada primeira da função’ no registro algébrico, o procedimento de ‘estudar o sinal da derivada primeira da função’, o argumento que diz que ‘os intervalos em que $f'(x) > 0$, a função é crescente, e os intervalos em que $f'(x) < 0$, a função é decrescente’, entre outros. Portanto o significado está nas relações que uma instituição ou um indivíduo estabelecem entre os objetos que intervém em suas práticas.

Esta associação entre objetos que é adotada pelo EOS é feita baseando-se na noção de *função semiótica* proposta por Umberto Eco[25] e que é apresentada da seguinte maneira:

> Um signo está constituído sempre por um (ou mais) elementos de um PLANO DA EXPRESSÃO colocados convencionalmente em correlação com um (ou mais) elementos de um PLANO DO CONTEÚDO […] Uma função semiótica se realiza quando dois funtivos (expressão e conteúdo) entram em correlação mútua […]” (ECO, 1995[26] apud GODINO; BATANERO; FONT, 2008, p. 15).

Com esta noção, a prática matemática pode ser pensada a partir de configurações de objetos matemáticos, que por serem classificadas como epistêmicas ou cognitivas, também recebem a denominação de *configurações epistêmicas* (ou *institucionais*) e *configurações cognitivas* (ou *pessoais*).

Estas configurações permitem um maior detalhamento dos significados institucionais que se pretende ensinar. Da mesma forma, a partir dos usos que os estudantes fazem da linguagem matemática, configurações cognitivas podem ser criadas pelo professor para reconhecer os significados pessoais estabelecidos pelos estudantes. A

[25] No trabalho intitulado *Marcos teóricos sobre el conocimiento y el aprendizaje matemático* (2010), Godino também aproxima esta noção da noção de *função de signo* de Louis Hjelmslev.

[26] ECO, U. Tratado de semiótica general. Barcelona: Lumen, 1995.

comparação entre estas configurações (epistêmicas e cognitivas) possibilitará que o professor identifique alguma “discordância” entre significados, o que serve tanto de avaliação para o aprendizado dos estudantes, quanto de instrumento para o professor repensar suas estratégias em sala de aula.

Os conflitos entre significados que as configurações permitem identificar são denominados de *conflitos semióticos*. Tal noção será entendida como

> [...] qualquer disparidade ou desacordo entre os significados atribuídos a uma expressão por dois sujeitos (pessoais ou institucionais) em interação comunicativa. Se a disparidade se produz entre significados institucionais falamos de conflitos semióticos do tipo epistêmico, e quando a disparidade se produz entre práticas que formam o significado pessoal de um mesmo sujeito designamos como conflitos semióticos do tipo cognitivo. Quando a disparidade se produz entre as práticas (discursivas e operativas) de dois sujeitos diferentes em interação comunicativa (por exemplo, aluno-aluno ou aluno-professor) falaremos de conflitos (semióticos) inter-relacionais. (GODINO et al., 2011, p.10. Tradução minha).

1.5 PROCESSO E ATRIBUTOS CONCEITUAIS DOS OBJETOS MATEMÁTICOS

O EOS não procura dar uma definição de “processo” por entender que há uma variedade muito grande de processos – cognitivos, metacognitivos, instrucionais, sociais, entre outros –, entretanto, Godino, Batanero e Font (2008) referem-se a processos como uma sequência de práticas.

Se pensarmos nos objetos primários que intervêm e emergem na prática matemática, a mobilização destes objetos acontece mediante processos matemáticos de comunicação, problematização, definição, enunciação, elaboração de procedimentos (execução de algoritmos, rotinas, ...) e argumentação (GODINO; BATANERO; FONT, 2008, p. 16).

Durante a prática matemática, os significados dos objetos matemáticos recebem alguns atributos contextuais, tais atributos relativizam estes significados e podem ser considerados, de acordo com o EOS, a partir de cinco dimensões duais. A classificação entre práticas epistêmicas e cognitivas permite se pensar os objetos matemáticos a partir das facetas *institucional-pessoal* – caso sejam objetos compartilhados por uma instituição ou sejam próprios de uma pessoa –, já a noção de função semiótica atribui ao objeto as dimensões *expressão-conteúdo* – que indica se ele está representando algo ou é o próprio conteúdo.

Os objetos matemáticos podem ainda receber os atributos de *ostensivo-não ostensivo*, *unitário-sistêmico* e *extensivo-intensivo*.

Um objeto matemático que é previamente conhecido recebe o atributo de *unitário*, podemos tomar como exemplo a regra de sinais ao se resolver uma equação do segundo grau, tal regra já é conhecida e, portanto, é entendida como um objeto *unitário*, no entanto, se o contexto é o início dos estudos a respeito do conjunto dos números inteiros, a regra de sinais é decomposta para ser estudada, e neste caso passa a ser um objeto *sistêmico*. As dimensões *extensiva-intensiva* (ou *exemplar-tipo*) refere-se ao objeto estar num contexto em que é um caso particular, neste caso é um objeto *extensivo* – como o cálculo da derivada de $f(x) = 7x^{7/2} - 2x^3 + 4$ – ou uma classe mais geral, objeto *intensivo* – como quando se trata de desenvolver uma regra de derivação para as funções polinomiais de expoente racional.

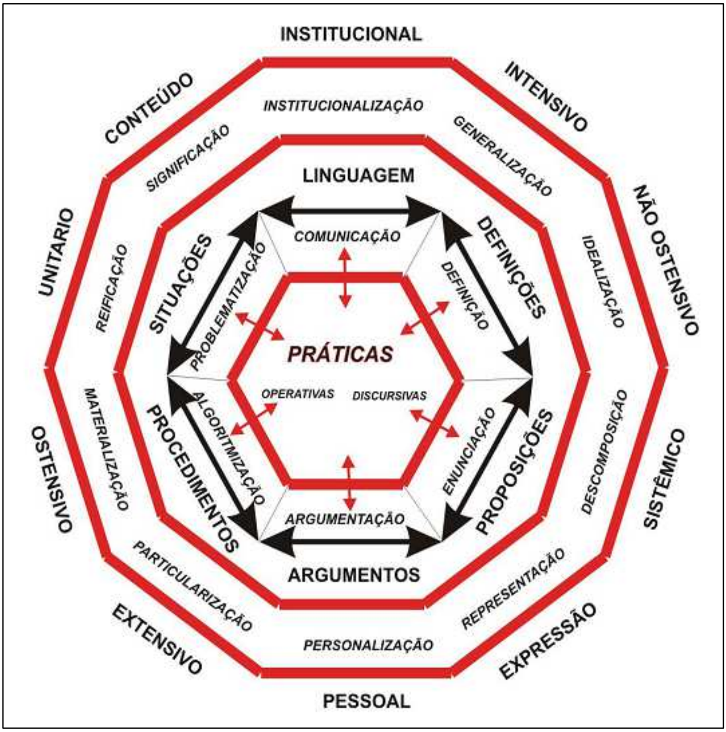
Por *ostensivo*, entende-se qualquer objeto matemático que é público, ou seja, que pode ser mostrado. “Os objetos institucionais e pessoais têm uma natureza *não ostensiva* (não perceptíveis por si mesmos)” (GODINO, BATANERO, FONT, 2008, p.16), mas podem ser utilizados em práticas públicas quando associados a ostensivos como representações algébricas, gráficas, entre outras.

Estes atributos conceituais fornecem ao EOS mais uma classificação para outros processos matemáticos, são os processos *cognitivos* ou *epistêmicos* de:

> institucionalização - personalização; generalização - particularização; análise/decomposição - síntese/reificação; materialização/concreção - idealização/abstração; expressão/representação - significação. (GODINO et al., 2011, p. 8. Tradução minha).

O que Godino e seus colaboradores fazem é “[...] selecionar uma lista de processos que se consideram importantes na atividade matemática [...], sem pretender incluir nela todos os processos implicados" (Ibdem, p. 9. Tradução minha). A representação de todos estes objetos e processos matemáticos pode ser observada na Figura 9.

Figura 9 – Configuração de objetos e processo matemáticos



Fonte: GODINO; BATANERO; FONT, 2008, p. 11.

Na próxima seção irei apresentar como pretendo trabalhar com a TRRS e o EOS para a realização desta pesquisa.

1.6 CONECTANDO DUAS TEORIAS

Acabo de apresentar duas teorias, teorias que foram desenvolvidas por pesquisadores diferentes, com diferentes noções de objeto matemático, possuindo alguns elementos teóricos bem particulares, entre outras diferenciações. Entretanto, após alguma reflexão também é possível detectar proximidades entre estas duas teorias, e é este meu objetivo nesta seção.

Diversidade de teorias é uma das características da Educação Matemática (LERMAN, 2010), esta diversidade tem influenciado diretamente nas fronteiras que delimitam este campo de pesquisa. Várias teorias convivendo num mesmo campo permite se questionar se esta pluralidade gera algum impedimento para o desenvolvimento da área.

Segundo alguns estudos realizados a respeito desta questão[27], tal multiplicidade de teorias não é um fator que possa atrapalhar o desenvolvimento do campo, pelo contrário, é visto como algo valioso. Entre outros argumentos, o fato dos processos de ensino e de aprendizagem serem fenômenos multifacetados, de difícil descrição devido suas complexidades, as várias teorias são vistas como elementos que podem servir de recurso para melhor compreender tais processos, além disso, este "convívio" entre distintas teorias também permite que cada uma delas, ao serem comparadas, contrastadas ou combinadas à outras, possam ter melhor conhecimento de seus próprios limites e compreensão de si mesmas. (BIKNER-AHSBAHS; PREDIGER, 2010; LERMAN, 2010, RADFORD, 2008).

É nesta direção que estou seguindo para a realização deste trabalho, entenderei a pluralidade de teorias como um elemento que pode enriquecer o campo científico e dar possibilidades de se pensar em conexões entre duas ou mais teorias, como pretendo fazer com a TRRS e o EOS. Mas aí surge a seguinte pergunta: É possível realizar conexões, ou estabelecer redes de trabalho, entre teorias?

Não é difícil encontrar pesquisadores do campo da educação matemática que já vêm desenvolvendo pesquisas a partir de duas ou mais teorias, o que possibilitou que a comunidade se interessasse em discutir sobre como estas conexões vem sendo realizadas e que fatores poderiam fornecer alguma legitimidade para tais conexões.

Nesta pesquisa utilizarei dois trabalhos que abordam este tema para organizar uma conexão entre a TRRS e o EOS e então poder operar com os dados de pesquisa. Entretanto, antes de começar qualquer tentativa de conectar estas duas teorias, por ter identificado, entre outras coisas, incompatibilidades entre suas noções de objeto matemático,

[27] Como os de Paul Ernest (ERNEST, P. *A postmodern perspective on research in mathematics education*. In: SIERPINSKA, A.; KILPATRICK, J. (Eds.). Mathematic Education as a Research Domain: a search for identity, Vol. 1, p. 71-85. Dordrecht: Kluwer, 1998) e Angelika Bikner-Ahsbahs e Susanne Prediger (BIKNER-AHSBAHS, A.;PREDIGER, S. Diversity of theory in mathematics educations: how can we deal it? *ZDM*, n. 38, v. 1, p. 52-57, 2006).

questiono se é possível conectar teorias que possuem aspectos incompatíveis como este.

O pesquisador Luis Radford (2008) apresentou alguns exemplos de pesquisas que se desenvolveram a partir da conexão de teorias, e entre elas algumas que foram capazes de operar com referenciais teóricos com considerável grau de incompatibilidade, Angelika Bikner-Ahsbahs e Susanne Prediger (2010) também trazem alguns exemplos deste tipo, o que faz com que pensar uma conexão entre estas duas teorias não seja algo contraditório ou “absurdo” de se pensar.

Nos trabalhos destes três autores que acabo de indicar encontram-se algumas estratégias e parâmetros que podem ser levados em consideração ao se tentar trabalhar em rede de teorias. Bikner-Ahsbahs e Prediger (2010) sugerem algumas estratégias para conexão de abordagens teóricas, estratégias estas que tentam atribuir algum grau às conexões realizadas. Observe na Figura 10.

Figura 10 – Cenário de estratégias para conexões de abordagens teóricas

Fonte: BIKNER-AHSBAHS; PREDIGER, 2010, p. 492. Tradução minha.

Este *cenário de estratégias para conexões de abordagens teóricas* parte de nenhuma interação entre teorias, quando uma teoria *ignora outras teorias*, e tem seu grau de interação aumentado através das seguintes duplas de estratégias, *compreender* e *tornar compreensível*, *comparar* e *contrastar*, *combinar* e *coordenar*, e *integrar localmente* e *sintetizar*, sendo o mais alto grau de integração a *unificação global das teorias*, grau que as autoras têm suas dúvidas quanto a se poder alcançar, pois não acreditam que

> [...] aproximações teóricas com contradições em pressupostos fundamentais de seus núcleos [...] possam ser globalmente unificadas sem que se abandone o núcleo de uma teoria. [...] esta estratégia de unificação global [...] servirá apenas como uma posição virtual. (BIKNER-AHSBAHS; PREDIGER, 2010, p. 491. Tradução minha.).

Ao realizar a conexão entre a TRRS e o EOS utilizarei algumas destas estratégias, no entanto, será a partir de noções apresentadas por Radford (2008) que procederei. O autor comenta que

> [...] uma condição para a implementação de um trabalho com teorias interligadas em rede é a criação de um novo espaço conceitual onde as teorias e suas conexões se tornem objetos de discurso e pesquisa. Este espaço é o local da prática em rede e sua linguagem, ou melhor ainda, sua metalinguagem. (RADFORD, 2008, p. 317. Tradução minha).

Como parâmetros básicos para realizar uma conexão entre teorias o autor faz as seguintes considerações.

> [...] um trabalho em rede *N* de teorias $\tau_1, \tau_2, \tau_3, ...$ pode ser visto como um conjunto de conexões $c_1, c_2, c_3, ...$ onde c_k envolve ao menos duas teorias τ_i, τ_j. Uma conexão c_k vai depender de ao menos dois parâmetros: (1) a *estrutura* das teorias envolvidas na conexão, e (2) o *objetivo* da conexão. (RADFORD, 2008, p. 318. Tradução minha).

Tanto Bikner-Ahsbahs e Prediger (2010) quanto Redford (2008) entendem que a noção de teoria varia de acordo com a visão do pesquisador, suas práticas, além de suas compreensões teóricas. Dentro desta certa “relatividade” quanto à conceituação de teoria, Radford (2008) aponta para três componentes que podem ser encontrados, senão em todas, na maioria das teorias e que podem ser levados em conta ao se pensar a conexão, a saber, um sistema de *princípios básicos P*, uma *metodologia M*, que inclui técnicas de coletas de dados e dá suporte a interpretação dos mesmos, e um conjunto *Q* de *questões de pesquisas* paradigmáticas (p. 320).

Com esta classificação de componentes, uma conexão entre teorias pode acontecer no nível dos princípios, das metodologias, das questões de pesquisa, ou ainda como uma combinação destes.

Para começar a conexão entre a TRRS e o EOS, partirei, como sugere Radford (2008), do *objetivo* da conexão. A intenção de conectar estas duas teorias é para realizar uma investigação a respeito do uso da linguagem matemática, como a coleta de dados será realizada através de sequências de estudos, como irei mencionar no próximo capítulo, estes dados serão as respostas registradas pelos estudantes. Considerando estes aspectos, tanto a TRRS quanto o EOS possuem elementos que permitem uma investigação deste tipo. A TRRS permite a análise sobre as coordenações entre registros semióticos e o EOS as configurações de objetos que toma como elemento de análise o uso da linguagem matemática.

Resta agora analisar aspectos da *estrutura* destas duas teorias. Entendo que para a realização desta pesquisa analisarei dois pontos importantes, as noções de aprendizagem e de ensino.

Pensando uma conexão entre princípios, partirei da concepção de aprendizagem das duas teorias. Na TRRS a hipótese de aprendizagem sugere que o aprendizado acontece a partir da coordenação espontânea entre diferentes registros semióticos, já no EOS, o aprendizado acontece quando os estudantes se apropriam dos significados epistêmicos. Como já apresentado, o significado no EOS é pensado a partir das configurações de objetos que intervêm na prática, que, entre outras coisas, exige a coordenação de diferentes registros semióticos de representação. Perceba que com estas considerações, os registros semióticos podem ser inseridos como elementos das configurações epistêmicas ou cognitivas que forem construídas para realização da análise dos dados, apontando assim para uma conexão entre os princípios de aprendizagem das duas teorias.

Quanto á concepção de ensino, a TRRS sugere a utilização de vários registros de representação, pois como Duval comenta em muito de seus trabalhos, tais registros apresentam apenas algumas facetas do objeto matemático, é preciso reconhecer todas estas facetas e estabelecer as devidas relações (conversões) entre elas. No EOS, o ensino também é entendido a partir das configurações de objetos matemáticos, em que há uma tentativa de inserir os estudantes nas práticas compartilhadas por uma instituição. Quando a TRRS sugere o ensino através das várias representações dos objetos matemáticos e o "trânsito" entre elas, é possível, sem perdas, entender que esta teoria também vê o ensino como a tentativa de inserir os estudantes em práticas institucionais, pois os procedimentos para estas conversões são referentes a uma instituição, em que se avaliará se os estudantes os dominam de acordo como é feito pela comunidade acadêmica. É desta forma que eu estabelecerei uma conexão entre as concepções de ensino das duas teorias.

Quanto à metodologia, a TRRS sugere uma forma de proceder a partir da coordenação de vários registros de representação, então farei uso desta metodologia para organizar as práticas matemáticas de nossos encontros, e para isso irei me utilizar das *Formas básicas* sugeridas por

Moretti, Ferraz e Ferreira (2008), em que as unidades gráficas, linguísticas e algébricas, serão pensadas como parte integrante das configurações de objetos, o que permitirá um melhor refinamento da análise, pois levará em conta não só as relações entre entidades de sistemas semióticos diferentes, mas entre entidades do mesmo sistema semiótico de representação, além de permitir a utilização dos vários processos matemáticos apresentados pelo EOS (significação-representação, decomposição-reificação, etc.).

É a partir da conexão entre estes princípios e metodologia que crio "um novo espaço conceitual onde as teorias e suas conexões se torn[am] objetos de discurso e pesquisa", que a pouco mencionei utilizando-se do trabalho de Radford (2008, p. 317). Quanto à linguagem (ou metalinguagem) que será utilizada neste espaço, acredito que poderei trabalhar com terminologias das duas teorias, apenas reforçando que entenderei objeto matemático como no EOS.

É bem provável que outras conexões entre os componentes possam ser realizadas, no entanto, como não tenho a intenção de tentar chegar a um grau de integração do tipo *síntese* ou *integração global* (BIKNER-AHSBAHS; PREDIGER, 2010), acredito que esta comparação e combinação entre os componentes apresentados darão possibilidades de trabalhar com os dados que serão apresentados no próximo capítulo.

CAPÍTULO 2 – O PERCURSO METODOLOGIA E A ANÁLISE DE DADOS

2.1 INFORMAÇÕES GERAIS A RESPEITO DA INVESTIGAÇÃO REALIZADA

Neste capítulo, começarei a relatar a trilha metodológica que percorri para realizar esta pesquisa. Como já apresentado no capítulo anterior, estarei me referindo ao meu objeto de estudo segundo a TRRS e o EOS, mas antes de operar com tais teorias, apresento algumas informações a respeito dos dados utilizados para pesquisa.

Como a minha intenção é a de conseguir dados para realizar uma pesquisa a respeito do uso da linguagem matemática, particularmente na prática de esboço de curvas no ensino superior, organizei seis encontros, de duas aulas cada, com uma turma de estudantes da disciplina *Cálculo A*, do curso de Meteorologia da UFSC[28].

Estes encontros ocorreram durante meu estágio de docência, portanto, minha participação foi como professor (estagiário) responsável por ministrar as aulas referentes ao estudo das práticas de esboço de curvas, que no plano de ensino aparece como um subtópico de estudo das aplicações das derivadas.

A turma possuía 40 estudantes matriculados, mas não tive a presença constante de todos eles durante nossos encontros, pois a investigação aconteceu no decorrer das aulas que ministrei durante o cumprimento do estágio, a média de presença nestes encontros foi em torno de 30 estudantes. Não entendo que o fato de não estarem todos os estudantes presentes durante nossos encontros como algo que possa limitar os resultados desta pesquisa, isso porque o objeto de análise são os usos que efetivamente aconteceram durante a prática de esboço de curvas. A partir deste contexto, esta quantidade de estudantes parece suficiente para a realização da análise.

Com estas primeiras observações, a pesquisa que apresento pode ser classificada como um *estudo de caso*, que prefiro, neste momento, utilizar-se das palavras das pesquisadoras Menga Lüdke e Marli André para referir-me a ele:

> O estudo de caso é o estudo de *um* caso, seja ele simples e específico [...], ou complexo e abstrato

---

[28] Esta disciplina corresponde a uma primeira parte do Cálculo Diferencial e Integral, parte esta em que o esboço de curva está inserido. Confira o plano de ensino desta disciplina no Anexo A.

> [...]. O caso é sempre bem delimitado, devendo ter seus contornos claramente definidos no desenrolar do estudo. O caso pode ser similar a outros, mas é ao mesmo tempo distinto, pois tem um interesse próprio, singular. (LÜDKE e ANDRÉ, 1986, p. 17).

É uma pesquisa do tipo qualitativa, que neste trabalho será caracterizada como admitindo os seguintes aspectos:

> (a) a transitoriedade de seus resultados; (b) a impossibilidade de uma hipótese a priori, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar; (c) a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, vale-se de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar; (d) que a constituição de suas compreensões dá-se não como resultado, mas numa trajetória em que essas mesmas compreensões e também os meios de obtê-las podem ser (re)configuradas; e (e) a impossibilidade de estabelecer regulamentações, em procedimentos sistemáticos, prévios, estáticos e generalistas (GARNICA, 2004 apud BORBA, 2004, p. 1).

O instrumento para a obtenção dos dados para esta pesquisa foram duas sequências de estudos que abordavam a prática de esboço, as quais apresentarei mais adiante[29]. Agora, tomando como referências as teorias do capítulo anterior, apresentarei as preparações que realizei para os encontros que ministrei as aulas. Começarei apresentando as configurações epistêmicas que criei referentes ao objeto de estudo desta pesquisa.

2.2 ALGUMAS CONFIGURAÇÕES EPISTÊMICAS DOS OBJETOS MATEMÁTICOS QUE INTERVÊM E EMERGEM DA PRÁTICA DE ESBOÇO DE CURVAS

O procedimento que tentei instituir entre os estudantes foi o de interpretação global das propriedades figurais a partir das formas básicas elaboradas por Moretti, Ferraz e Ferreira (2008). Mas para isso organizei

---

[29] O Termo de Consentimento Livre e Esclarecido assinado pelos estudantes encontram-se no Anexo E.

algumas configurações epistêmicas dos objetos matemáticos que fazem parte da prática de esboço de curvas, mais especificamente as conceituações de pontos críticos, variações de funções, Teste da Derivada Primeira para determinar extremos relativos, a concavidade das funções, os pontos de inflexão e as retas assintóticas. Pode-se perceber que o Teste da Derivada Segunda para extremos relativos e a continuidade das funções não foram objetos representados através destas configurações, isso porque, como pode-se perceber na seção anterior, o tempo para a parte empírica desta pesquisa estava limitado em seis encontros, tempo este que incluía, além das aulas, a aplicação de duas sequencias de estudos em dois encontros diferentes.

Ficou combinado com o professor da disciplina que o Teste da Derivada Segunda e a conceituação de continuidade poderiam ser introduzidos por ele ao se estudar os problemas de otimização.

Mais uma limitação que trago para esta pesquisa é que os tipos de funções que mais trabalhamos, ou pelo menos as que trabalhamos nas sequências de estudo que serviram para obtenção dos dados, foram funções polinomiais e as racionais, pois pude identificar algumas dificuldades por parte dos estudantes em relação a tratamentos algébricos de estudo de sinais de funções, em resoluções de equações e inequações, nos cálculos de derivadas e principalmente nos de limites de funções.

Também entendo que esta limitação às funções polinomiais e racionais não traz prejuízo aos resultados obtidos, pois como a intenção é a de analisar o uso da linguagem para então inferir no processo de ensino e aprendizagem, acredito que isso pode ser feito independente das dificuldades que os estudantes possam enfrentar.

Vejamos então as configurações epistêmicas que elaborei para os objetos que intervêm e emergem da prática de esboço de curvas, começando primeiramente com a conceituação de ponto crítico.

Pontos críticos de uma função real

Para elaborar as configurações epistêmicas, busquei destacar os principais conceitos que estão relacionados e tornam possível falar das propriedades que se associam e possibilitam emergir procedimentos e argumentos para legitimar as práticas inerentes ao esboço e curvas. E no caso dos pontos críticos, julguei importante realizar a criação de duas configurações epistêmicas, uma para os pontos críticos que admitem derivadas e outras para os que não admitem. Começo apresentado o primeiro caso.

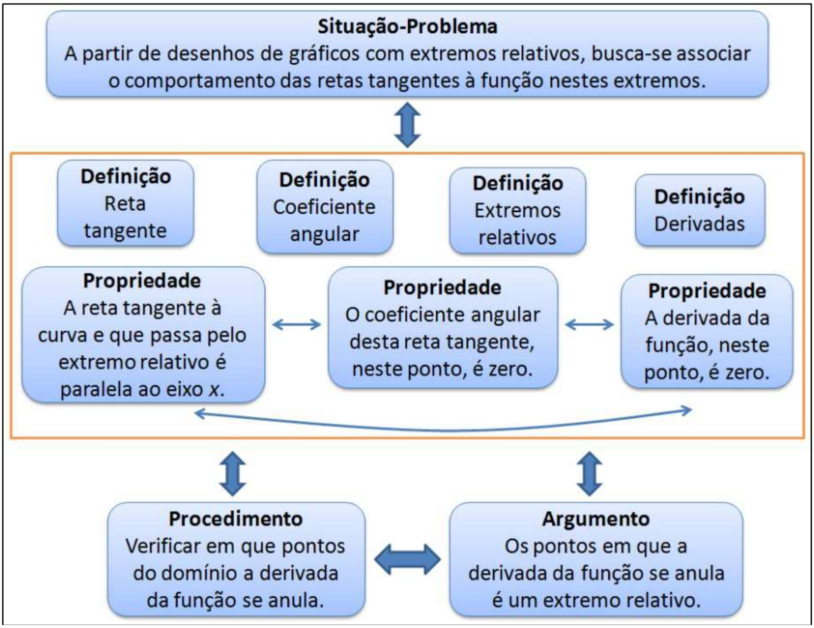
Primeiramente estipulei um objetivo ao se ensinar a conceituação de pontos críticos, objetivo este que entendo como sendo o dos estudantes ‘identificarem que os pontos do domínio da função em que a derivada se anula, ou não existe, são candidatos a máximos ou mínimos relativos da função’. Para se tentar atingir tal objetivo, classifiquei como *situação-problema* a que ‘a partir de desenhos de gráficos com extremos relativos, busca-se associar o comportamento das retas tangentes à função nestes extremos’.

Com isso, os *conceitos* de ‘reta tangente’, ‘coeficiente angular’, ‘extremos relativos’ e ‘derivadas’ são utilizados para permitir que três *propriedades* se relacionem, a saber, ‘A reta tangente à curva e que passa pelo extremo relativo é paralela ao eixo x’, ‘O coeficiente angular desta reta tangente, neste ponto, é zero’ e ‘A derivada da função, neste ponto, é zero’.

Ao se relacionar estas propriedades, emergem o *procedimento* que diz que se deve ‘verificar em que pontos do domínio a derivada da função se anula’ e o *argumento* de que ‘os pontos em que a derivada da função se anula é um extremo relativo’. Argumento este que ainda é muito precipitado, mas que no decorrer das aulas receberá alguns contraexemplos para ser reformulado.

Observe o esquema a seguir em que represento estes objetos.

Figura 11 – Configuração epistêmica de ponto crítico quando existe derivada no ponto

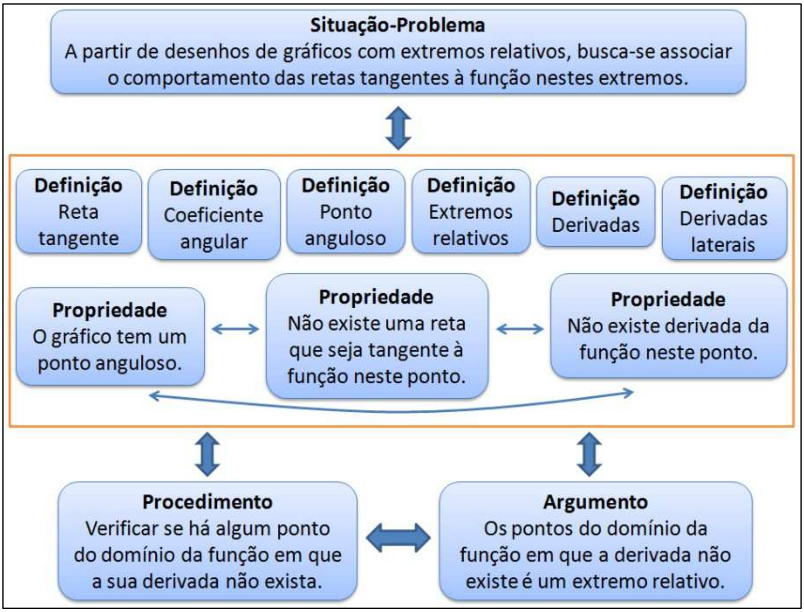


Fonte: Autor desta pesquisa.

Antes de falarmos da linguagem matemática, vejamos a configuração epistêmica referente a pontos críticos que não admitem derivadas. Neste caso, além dos *conceitos* utilizados anteriormente, há também os de ‘ponto anguloso’ e ‘derivadas laterais’. As *propriedades* que se relacionam são as seguintes: ‘A função tem um ponto anguloso’, ‘Não existe uma reta que seja tangente à função neste ponto’ e ‘Não existe derivada da função neste ponto’.

Destas relações emergem também o *procedimento* que sugere ‘verificar se há algum ponto do domínio da função em que a sua derivada não exista’ e o *argumento* que diz que ‘os pontos do domínio da função em que a derivada não existe é um extremo relativo’. Argumento mais uma vez precipitado.

Figura 12 – Configuração epistêmica de ponto crítico quando não existe derivada no ponto



Fonte: Autor desta pesquisa.

Eu indiquei nos dois esquemas os argumentos que me referi como sendo precipitados porque tomei como base as interações que realizaria em sala de aula, em que partiria de registros gráficos de funções com extremos relativos para discutir com os estudantes o comportamento das derivadas nestes extremos, o que, num primeiro momento, possibilitaria estas argumentações, pois ao analisar um registro gráfico de um extremo relativo posso conjecturar que neste ponto ou a derivada é zero ou ela não existe. No entanto, ao se partir do registro algébrico de uma função, esta argumentação nem sempre é válida, ou seja, a partir do registro algébrico de uma função, os pontos de seu domínio em que sua derivada se anula ou não existe não garante um extremo relativo, mas um candidato a extremo relativo. Sob o ponto de vista da TRRS podemos dizer que nesta forma de apresentar o conteúdo acontece uma não congruência semântica entre as conversões registro gráfico $\rightarrow$ registro algébrico e registro algébrico $\rightarrow$ registro gráfico.

Para reformular estas argumentações é necessário apresentar alguns contraexemplos para que então o professor sugira uma nova argumentação. Um dos contraexemplos que trouxe em sala de aula foi a função definida por $f(x) = x^3$, que tem por derivada $f'(x) = 3x^2$ e, consequentemente, $f'(0) = 0$, o que sugeriria, segundo os argumentos precipitados, que zero é um extremo relativo. Mas como o registro gráfico desta função já era conhecido pelos estudantes, visualmente foi possível identificar que tal argumentação precisava ser reformulada.

Nesta prática, a linguagem matemática se manifesta através das várias representações nos registros gráficos, algébricos e linguísticos, entretanto, pensando a linguagem como constitutiva de um discurso matemático, com estas configurações posso identificar que o uso da linguagem, através das várias representações e procedimentos, permite instituir a prática de que para identificar os pontos que são candidatos a extremos relativos, ou seja, os pontos críticos, basta derivar a função e identificar se sua derivada se anula ou não existe em algum ponto de seu domínio.

A identificação de um extremo relativo acontecerá mediante o Teste da Derivada Primeira, e para isso será preciso realizar um estudo das variações das funções.

Variações das funções reais

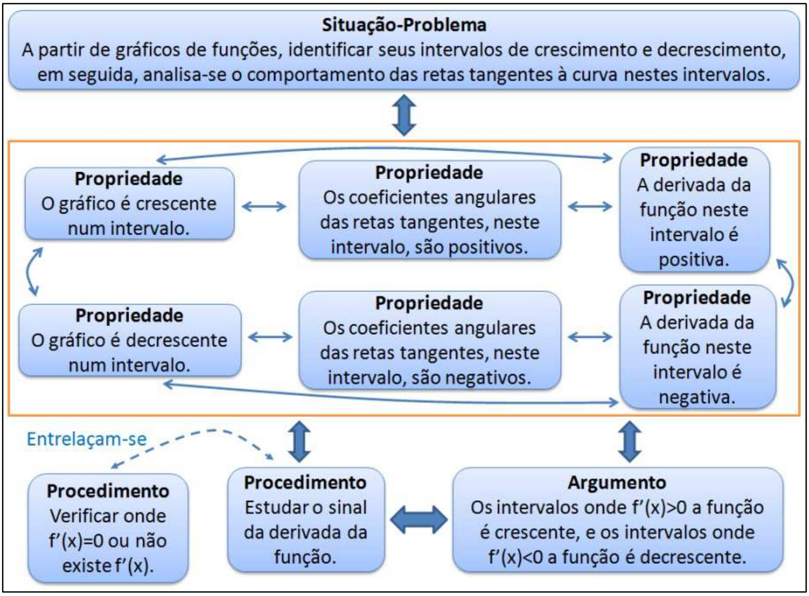
O que entendo como objetivo para esta prática é que os estudantes sejam capazes de 'identificar que os intervalos onde f' é positiva, a função é crescente, e os intervalos onde f' é negativa, a função é decrescente'.

Como *situação-problema* para motivar o estudo dos intervalos de crescimento e decrescimentos das funções, identifico a que 'a partir de gráficos de funções, procura-se identificar seus intervalos de crescimento e decrescimento e, em seguida, analisa-se o comportamento das retas tangentes à curva nestes intervalos'. Os *conceitos* são os mesmos das configurações elaboradas pelos pontos críticos, então prefiro indicar diretamente as relações entre as *propriedades*, que seriam: 'A função é crescente num intervalo', 'Os coeficientes angulares das retas tangentes, neste intervalo, são positivos' e 'A derivada da função neste intervalo é positiva', da mesma forma se relacionam 'A função é decrescente num intervalo', 'Os coeficientes angulares das retas tangentes, neste intervalo, são negativos' e 'A derivada da função neste intervalo é negativa'.

O que emerge destas propriedades são o *procedimento* de 'estudar o sinal da derivada da função', que se entrelaça com o procedimento dos pontos críticos que diz para se ‘verificar onde $f'(x)=0$ ou não existe $f'(x)$’, e o *argumento* de que ‘os intervalos em que $f'(x)>0$, a função é crescente, e os intervalos em que $f'(x)<0$, a função é decrescente’.

Observe no esquema a seguir.

Figura 13 – Configuração epistêmica das variações de funções



Fonte: Autor desta pesquisa.

Com esta configuração, a linguagem matemática legitima mais uma prática, a de realizar o estudo de sinais da derivada da função para então se inferir sobre os intervalos em que a função cresce ou decresce. Está maneira de proceder acaba por se entrelaçar com a que foi instituída ao se estudar os pontos críticos, pois o tratamento algébrico de estudar os sinais de uma função leva em consideração os zeros ou pontos em que esta não existe.

E para finalizar as configurações referentes ao uso da derivada primeira de uma função, vejamos o Teste da Derivada Primeira para identificação de extremos relativos.

Teste da Derivada Primeira

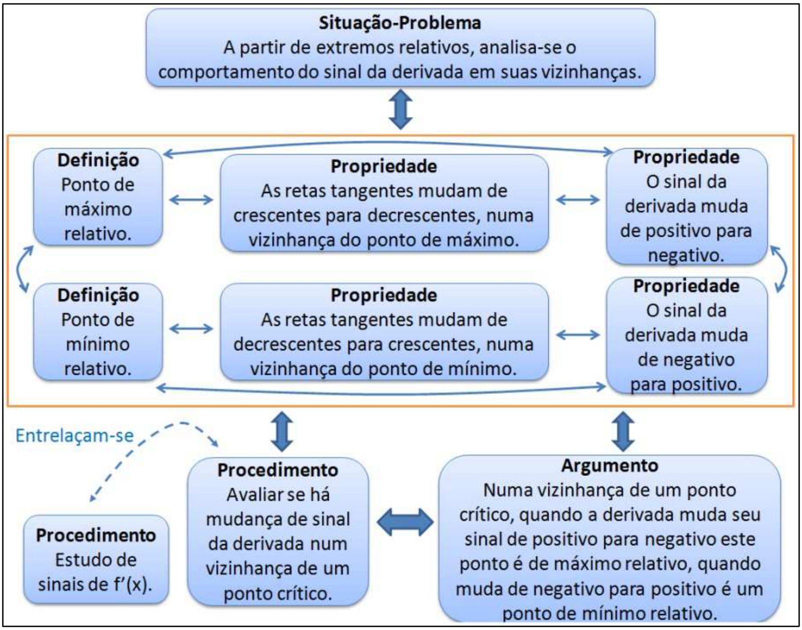
O que tomo como objetivo ao se ensinar esta prática é que os estudantes sejam capazes de ‘identificar que quando, numa vizinhança de um ponto crítico, a derivada muda de sinal, este ponto é um extremo relativo’.

A *situação-problema* que motiva a atividade matemática é a que, ‘a partir de registros gráficos de extremos relativos, analisa-se o comportamento do sinal da derivada em suas vizinhanças’.

Aqui também continua-se com os mesmo *conceitos* já estudados, porém, destaquei nesta configuração os conceitos de ‘ponto de máximo e mínimo relativos’, as *propriedades* são ‘As retas tangentes mudam de crescentes para decrescentes, numa vizinhança do ponto de máximo’ e ‘O sinal da derivada muda de positivo para negativo na vizinhança deste ponto’, que se relacionam a partir do conceito de ponto de máximo relativo, além das propriedades ‘As retas tangentes mudam de decrescentes para crescentes, numa vizinhança do ponto de mínimo’ e ‘O sinal da derivada muda de negativo para positivo na vizinhança deste ponto’, que também se entrelaçam a partir do conceito de ponto de mínimo relativo.

O *procedimento* que emerge é o de ‘Avaliar se há mudança de sinal da derivada numa vizinhança de um ponto crítico’, que dá mais importância ao procedimento de estudo de sinais da derivada da função. Já a *argumentação* que surge é a que garante que ‘Numa vizinhança de um ponto crítico, quando a derivada muda seu sinal de positivo para negativo, este ponto é de máximo, quando muda de negativo para positivo, é ponto de mínimo’.

Figura 14 – Configuração epistêmica do Teste da Derivada Primeira



Fonte: Autor desta pesquisa.

Uma vez apresentado este teste, o estudo de sinal torna-se uma prática fundamental para o esboço de curvas no ensino superior, pois através dele, além de ser possível realizar a identificação dos pontos críticos da função e das variações da mesma, agora institui-se também uma análise da variação dos sinais de f' numa vizinhança dos pontos críticos identificados.

Perceba que com as relações estabelecidas a partir das várias formas que a linguagem matemática é utilizada, ou seja, a partir das relações que se estabelecem entre as várias representações dos objetos matemáticos através dos tratamentos e conversões realizados, institui-se uma forma de se olhar, operar e comunicar o esboço de curvas baseando-se no uso das derivadas de primeira ordem de uma função. Vejamos agora como pode ser organizado o uso das derivadas de segunda ordem.

Estudo da concavidade de uma função real

O objetivo deste estudo é o de que os estudantes possam ‘identificar que a concavidade da função está associada ao sinal de sua derivada segunda’. Como *situação-problema* apresento a que ‘A partir de gráficos de curvas côncavas para cima e para baixo[30], busca-se identificar, numa vizinhança do ponto de tangência, a posição relativa das retas tangentes em relação à curva’.

A *definição* que recebe destaque é a de ‘concavidade de uma função’, que se associa com as *propriedades* ‘Se as retas que tangenciam a curva posicionam-se abaixo da mesma, a função é c.p.c. neste intervalo’, ‘Se as retas que tangenciam a curva posicionam-se acima da mesma, a função é c.p.b. neste intervalo’ e estas, por sua vez, são relacionadas com o Teste da Concavidade[31], que nesta configuração dividi em duas propriedades, ‘Se $f''(x) > 0$ num intervalo, então f é c.p.c. neste intervalo’ e ‘Se $f''(x) < 0$ num intervalo, então f é c.p.b. neste intervalo’.

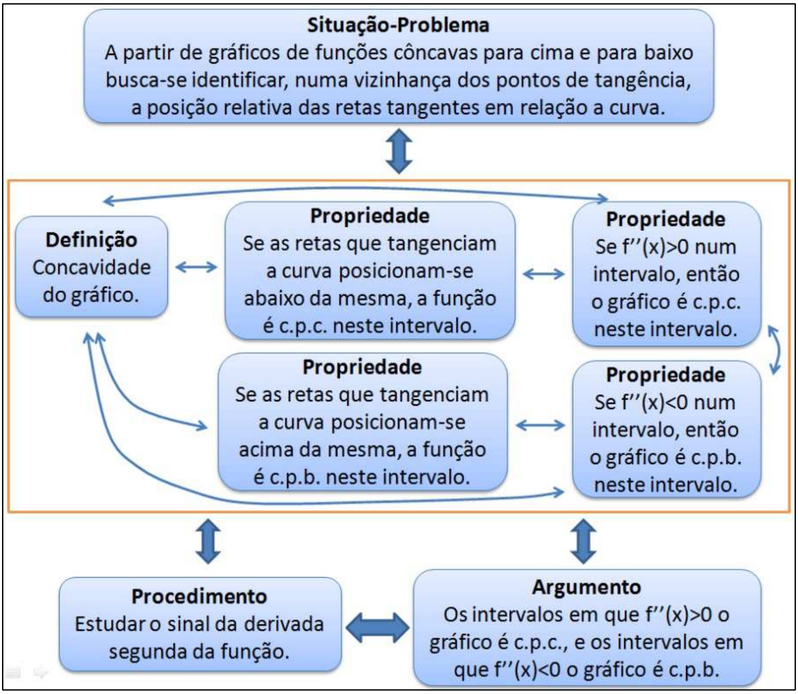
O *procedimento* que emerge sugere ‘Estudar o sinal da derivada segunda da função’ e a *argumentação* garante que ‘Os intervalos em que $f''(x) > 0$, a função é c.p.c., e os intervalos em que $f''(x) < 0$, a função é c.p.b.’

---

[30] No estudo das concavidades de funções as classificações utilizadas são *côncava para cima* ou *côncava para baixo*, que neste trabalho, visando economizar na escrita, utilizarei, respectivamente, a abreviação c.p.c. e c.p.b.

[31] Ver Stewart (2009), p. 272.

Figura 15 – Configuração epistêmica do estudo da concavidade da função



Fonte: Autor desta pesquisa.

Mais uma vez se institui a prática de realizar o estudo de sinais da derivada para então obter informações a respeito da concavidade da função, só que neste caso, trata-se do estudo de sinais da derivada segunda. Vamos agora aos pontos de inflexão.

Pontos de inflexão

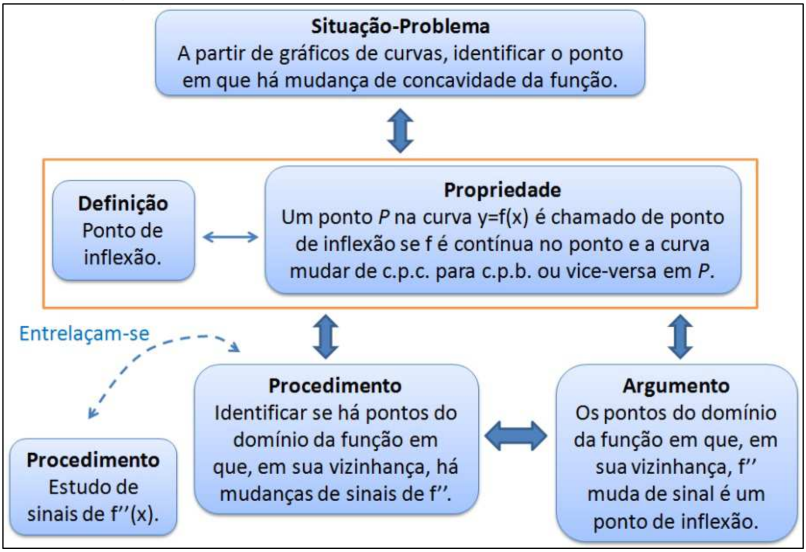
O conceito de ponto de inflexão é apresentado como uma definição, com o objetivo de que os estudantes possam ‘classificar os pontos onde a concavidade da função sofre mudança como sendo um ponto de inflexão’.

A *situação-problema* que apresento é a que ‘A partir de gráficos de curvas, identificar o ponto em que há mudança de concavidade da função’. A *definição* principal é a de ‘ponto de inflexão’ que pode ser visto segundo a *propriedade* que enuncia que ‘Um ponto P na curva

$y = f(x)$ é chamado de ponto de inflexão se f é contínua no ponto e a curva mudar de c.p.c. para c.p.b. ou vice-versa em P ’.

Destes obtem-se o *procedimento* que está entrelaçado com o da configuração anterior, que sugere que ‘Ao realizar o estudo de sinais de $f''(x)$, identificar pontos do domínio em que, em sua vizinhança, há mudança de sinal’. E como *argumento* o que diz que ‘Os pontos do domínio da função em que, em sua vizinhança, $f''(x)$ muda de sinal é um ponto de inflexão’.

Figura 16 – Configuração epistêmica dos pontos de inflexão



Fonte: Autor desta pesquisa.

Mais uma vez o estudo de sinais, agora da derivada segunda, é um aspecto importante para o esboço de curvas. Destas configurações apresentadas até aqui podemos identificar uma maneira de proceder que, por mais que se parta de propriedades que são identificadas no registro gráfico, parece instituir procedimentos baseados nos registros algébricos para se pensar a conversão para o registro gráfico, e não ao contrário.

2.3 OS PRIMEIROS QUATRO ENCONTROS EM SALA DE AULA

Dos seis encontros que realizei em sala de aula com a turma de estudantes, os três primeiros foram mais teóricos, pois trabalhei os conteúdos referentes a todas estas configurações epistêmicas apresentadas até aqui, onde sempre busquei trazer elementos geométricos para as argumentações, vários exemplos e algumas vezes incentivei o raciocínio que poderia permitir conversões, mesmo que ainda de forma argumentativa, no sentido gráfico para o algébrico.

Após toda esta quantidade de conteúdo, julguei importante realizar uma atividade em sala de aula visando inserir os estudantes na prática de esboço de curvas que eu pretendia ensinar, desta maneira, já poderia colocá-los diante da necessidade de mobilizar todos os objetos matemáticos estudados, verificar se são capazes de relacionar algumas unidades gráficas das curvas e associá-las com unidades algébricas, além de tentar identificar algum conflito semiótico durante a prática dos estudantes.

Para isso, no quarto encontro, avisando antecipadamente aos estudantes, apliquei uma sequência de estudos contendo duas atividades (confira no Anexo B). A resolução destas atividades foi realizada de maneira que os estudantes pudessem discutir com seus colegas e também comigo os procedimentos necessários, durante a atividade eu andava pela sala de aula auxiliando-os no que era possível, respondendo e lançando questionamentos.

A seguir apresento a análise das *Atividades 1* e *2* da primeira sequência de estudo.

Atividade 1

A primeira atividade da sequência de estudos foi como apresentado no Quadro 7 – *Atividade 1*.

Quadro 7 – *Atividade 1*

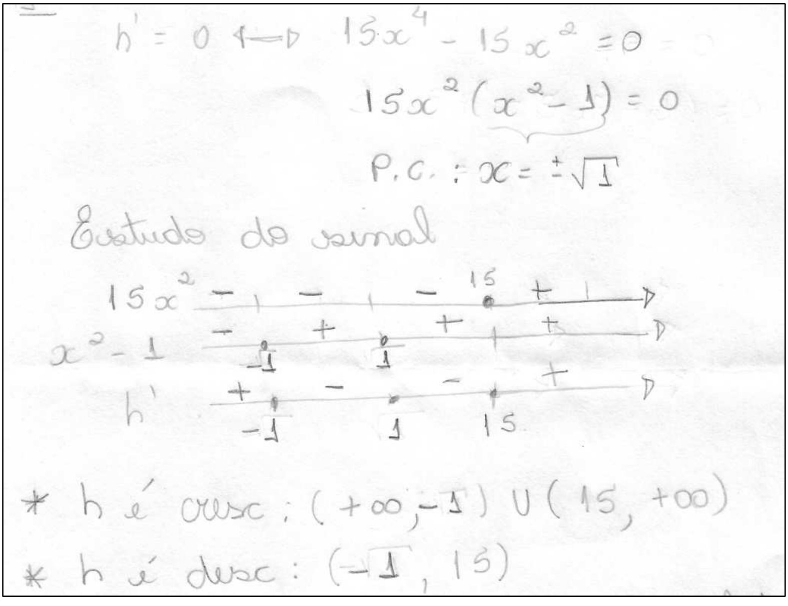
Atividade 1
Considere a função $h(x) = 3x^5 - 5x^3 + 3$. Calcule os intervalos de crescimento e decrescimento da função *h*, seus pontos de máximo e mínimo relativos, pontos de inflexão e a concavidade. Em seguida faça um esboço do gráfico de *h*.
(*Observação:* Para esboçar o gráfico, verifique como a função se comporta quando *x* tende a $+\infty$ e $-\infty$)

Fonte: Autor desta pesquisa.

Para a realização desta atividade os tratamentos algébricos referentes ao cálculo das derivadas primeira e segunda, o estudo de sinais destas (que na prática se resumiam a estudo de sinais de funções polinomiais) e o cálculo dos limites da função em questão eram entendidos como objetos matemáticos *unitários*[32], ou seja, por já terem sido estudados desde o início da disciplina eram entendidos como procedimentos algébricos já dominados pelos estudantes. E, durante esta primeira atividade, iriam servir de ferramentas para prática do esboço de curvas.

É importante trazer tal observação porque no desenvolvimento da atividade pude perceber que alguns dos estudantes ainda não dominavam muito bem os procedimentos de estudo de sinais das derivadas, como se pode verificar nas Figuras 17 e 18 a seguir.

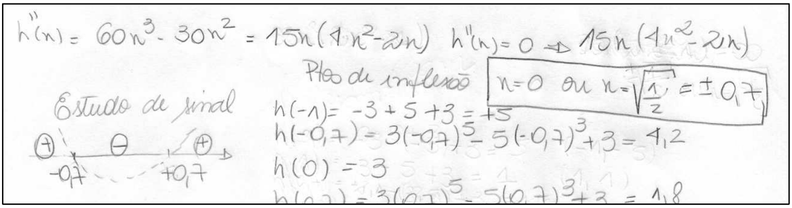
Figura 17 – Estudo de sinais da derivada primeira realizado na Atividade 1



Fonte: Estudante, sujeito desta pesquisa.

[32] Confira a seção 1.5 deste trabalho.

Figura 18 – Estudo de sinais da derivada segunda realizado na Atividade 1



Fonte: Estudante, sujeito desta pesquisa.

A análise desta atividade será feita em três passos, a saber, os estudos referentes à derivada primeira, à derivada segunda e ao cálculo dos limites da função. Primeiramente apresento algumas configurações epistêmicas a respeito das práticas acadêmicas esperadas na resolução da atividade para então falar das práticas pessoais dos estudantes e, com isso, tentar elaborar algumas configurações cognitivas dos mesmos. Nestas configurações, tanto epistêmicas quanto cognitivas, buscarei indicar também os processos que são propostos pelo EOS, sempre entrelaçando com os conceitos da TRRS.

Estudo da derivada primeira

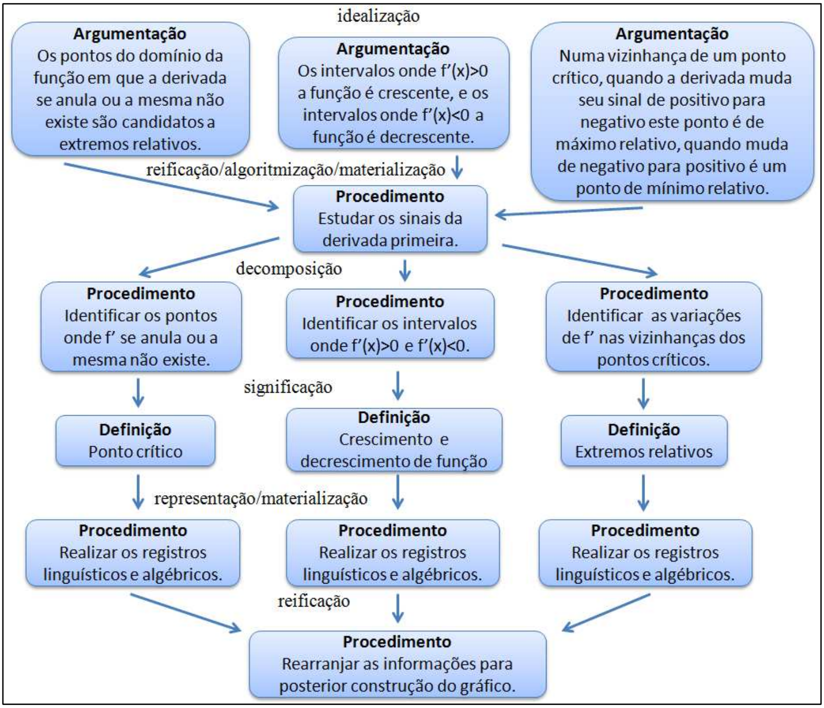
A primeira sequência de tratamentos algébricos deve estar baseada em algumas das argumentações vistas em sala de aula, as quais devem ser relembradas pelos estudantes, desta forma, no contexto da resolução da *Atividade 1* estas argumentações são objetos não ostensivos, pois por estar no campo do ideal (sendo relembrado pelos estudantes) ainda não são públicas e podem receber características pessoais dos estudantes. As argumentações são as seguintes: ‘Os pontos do domínio da função em que a derivada se anula ou a mesma não existe são candidatos a extremos relativos’, ‘Os intervalos onde $f'(x) > 0$ a função é crescente, e os intervalos onde $f'(x) < 0$ a função é decrescente’ e ‘Numa vizinhança de um ponto crítico, quando a derivada muda seu sinal de positivo para negativo este ponto é de máximo relativo, quando muda de negativo para positivo é um ponto de mínimo relativo’. É a partir destas argumentações que o procedimento de calcular a derivada primeira da função e seu respectivo estudo de sinais é mobilizado. A realização de tais tratamentos permite emergir três objetos *sistêmicos*, que seriam os pontos críticos, as variações e os extremos relativos.

Na Figura 19 apresento a configuração epistêmica referente a este estudo da derivada primeira juntamente com seus processos.

Estudo da derivada segunda

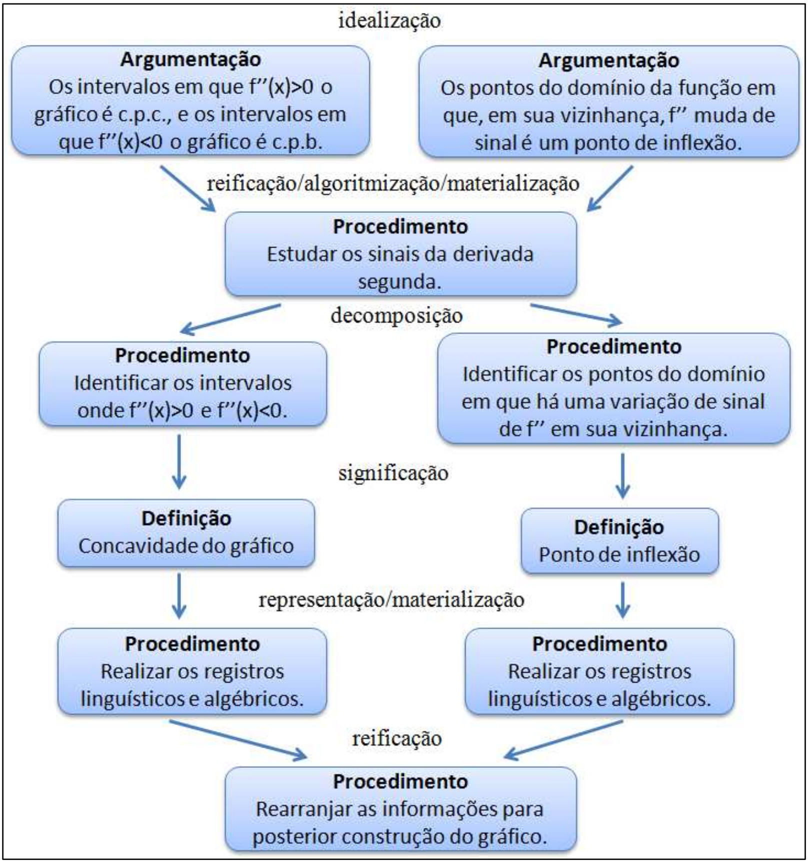
Mais uma vez parte-se de argumentações estudadas em aula: 'Os intervalos em que $f''(x) > 0$ o gráfico é c.p.c., e os intervalos em que $f''(x) < 0$ o gráfico é c.p.b.' e 'Os pontos do domínio da função em que, em sua vizinhança, f'' muda de sinal é um ponto de inflexão'. Tais argumentações sugerem que a próxima sequência de ações é o cálculo da derivada segunda e o estudo de sinais da mesma. Deste estudo emergem mais dois objetos *sistêmicos*, o comportamento da concavidade do gráfico e a identificação de pontos de inflexão. A configuração epistêmica referente a este estudo encontra-se na Figura 20.

Figura 19 – Configuração epistêmica referente ao estuda da derivada primeira



Fonte: Autor desta pesquisa.

Figura 20 – Configuração epistêmica referente ao estuda da derivada segunda

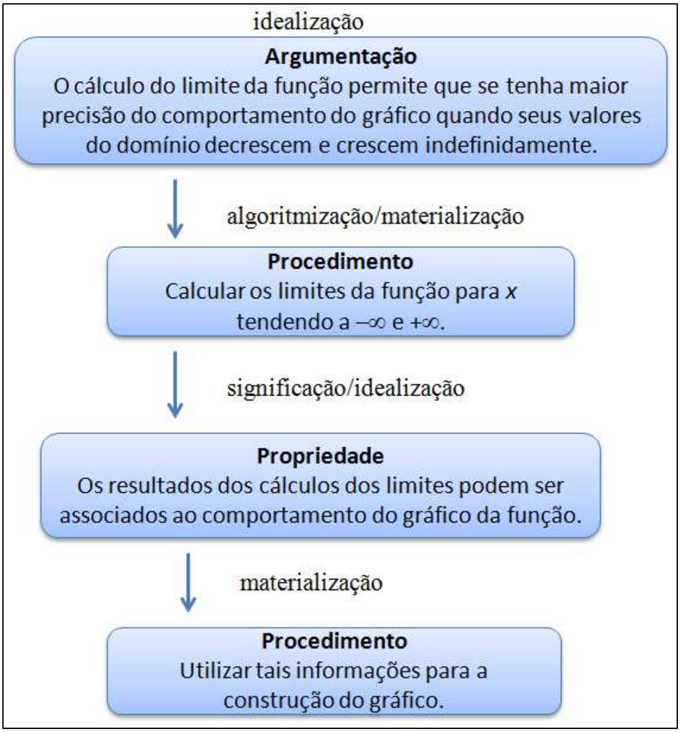


Fonte: Autor desta pesquisa.

Cálculo dos limites da função

Após todos os cálculos das derivadas e respectivos estudos de sinais, é preciso ter certa precisão quanto ao comportamento do gráfico em relação a seus pontos do domínio decrescerem e crescerem indefinidamente, e é por este motivo que o cálculo dos limites se torna necessário. Com isso apresento na Figura 21 a última configuração epistêmica referente a esta atividade.

Figura 21 – Configuração epistêmica referente ao cálculo dos da função



Fonte: Autor desta pesquisa.

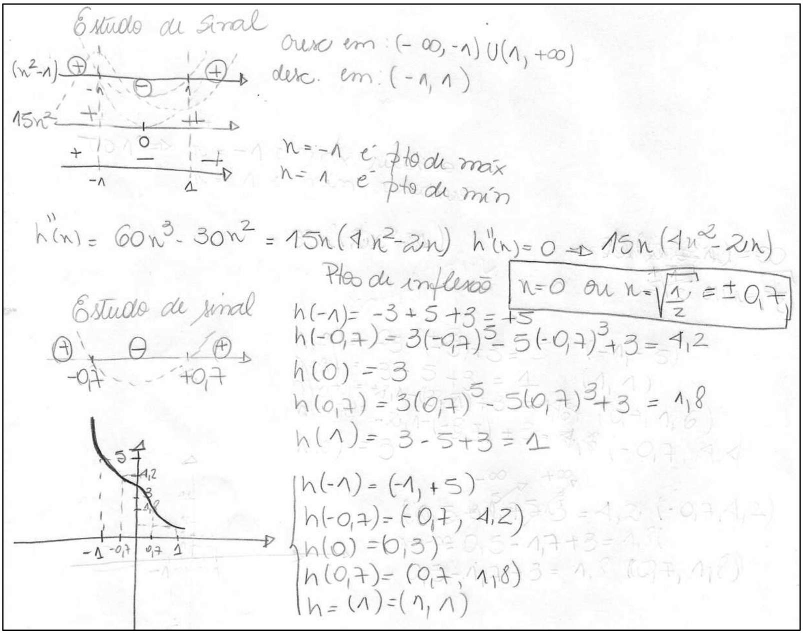
Análise das respostas dos estudantes

Ao avaliar as repostas fornecidas à *Atividade 1* através da sequência de estudo, além das observações que registrei em sala de aula, pude identificar que houve estudantes que tiveram um desempenho muito bom no desenvolvimento da atividade, os quais não demonstraram, em seus registros, conflitos semióticos algum, houve também um grupo, menor em relação a este primeiro, que mostrou dificuldades conceituais muito “radicais”, pois parecia não conseguir interpretar muito bem procedimentos de resolução de equações, fatorações, intersecções entre conjuntos numéricos, entre outros.

Desta forma, as configurações cognitivas que apresentarei mais adiante não são específicas de um estudante, também não são do grupo que teve o “melhor” ou o “pior” desempenho, mas são configurações cognitivas que acreditei que pudessem ser atribuídas a grupos de estudantes para que o processo de ensino fosse repensado. E antes de apresentar estas configurações trarei algumas considerações que julgo importantes.

Durante minha análise identifiquei que houve casos em que não aconteceu um processo de reificação das informações obtidas com o estudo da derivada primeira. Apresento a seguir dois excertos para detalhar mais esta constatação.

Figura 22 – Resolução de uma estudante de parte da Atividade 1

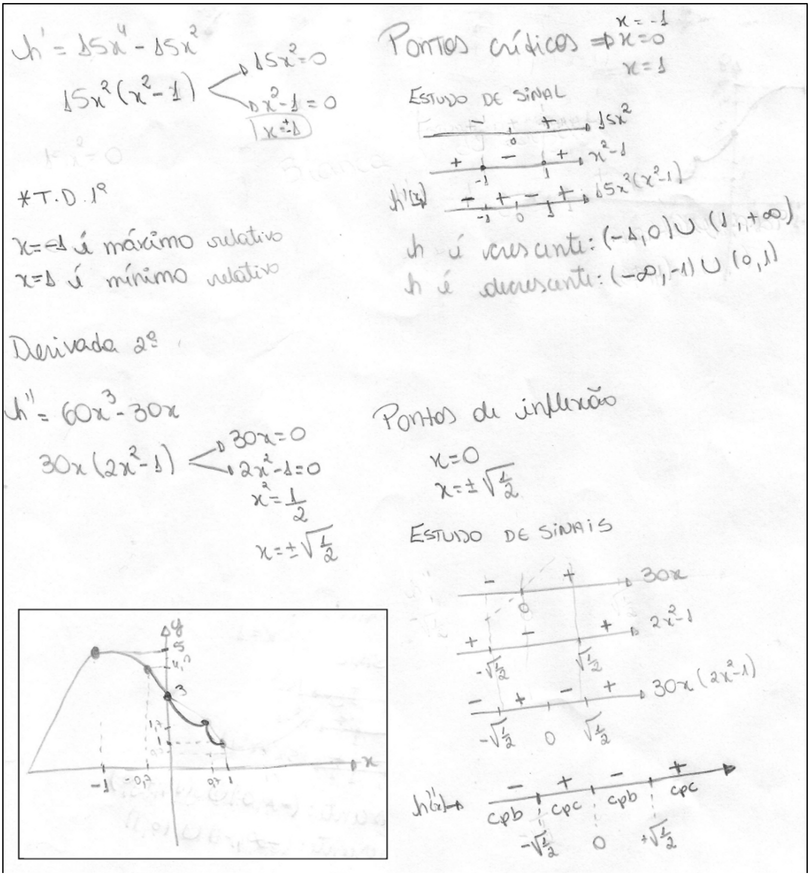


Fonte: Estudante, sujeito desta pesquisa.

Na Figura 22, é possível observar que os registros algébricos e linguísticos referentes aos intervalos de crescimento e decrescimento, além dos pontos de máximo e mínimo relativos, não fizeram parte do processo de reificação para a construção do gráfico da função, pois não há uma relação destes registros com o esboço construído – a curva é toda decrescente e sem extremos relativos. A estudante também não inseriu a expressão $15x$ em seu estudo de sinais da derivada segunda, desta forma, excluindo o ponto de inflexão de abscissa $x = 0$.

Baseando-se nos registros da estudante, parece que apenas o estudo de sinais da derivada segunda foi levado em conta para a construção do esboço. Também os cálculos dos limites da função não foram realizados, algo que mais adiante trarei algumas considerações a respeito.

Figura 23 – Resolução de uma estudante de parte da Atividade 1



Fonte: Estudante, sujeito desta pesquisa.

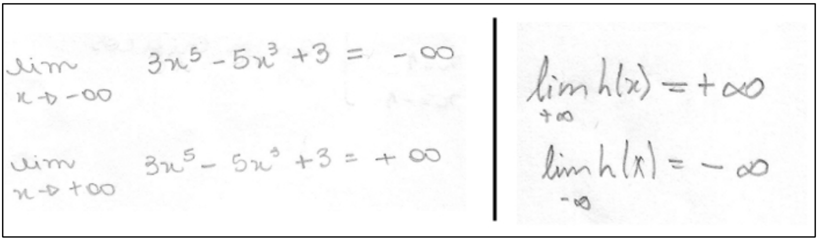
Neste segundo excerto[33] (Figura 23) é possível identificar um equívoco da estudante quanto ao estudo de sinais da derivada primeira e também um conflito semiótico referente à interpretação do resultado deste estudo (mesmo não estando correto) através do Teste da Derivada

[33] O gráfico está destacado num retângulo por ter sido feito pela estudante no verso da folha da *Atividade 1*.

Primeira. Pelo estudo de sinais apresentado pela estudante, além de não serem apenas $x=-1$ e $x=1$ os extremos relativos, pois $x=0$ mostra-se como um ponto crítico em que há uma mudança de sinais em sua vizinhança, portanto é um extremo relativo, $x=-1$ seria um ponto de mínimo relativo e $x=0$ um ponto de máximo relativo. E mais uma vez podemos identificar que a estudante não associou seus registros algébricos e linguísticos ao esboçar o gráfico. Parece não ter ocorrido uma "triangulação" entre as variações do gráfico, seus extremos relativos e sua concavidade, que, em termos de processos, pode ser dito que não houve uma reificação dos resultados obtidos. E mais uma vez os limites não foram calculados.

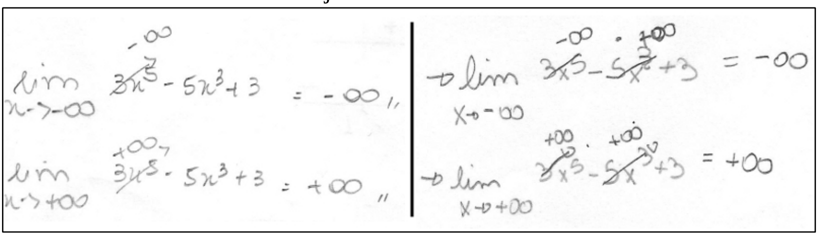
Quanto ao cálculo dos limites, além de ter havido um número considerável de casos em que este não foi realizado, houve ainda alguns em que apenas se indicou o resultado final sem os cálculos (Figura 24) ou as indicações apresentadas pareceram não justificar o resultado (Figura 25). Observe alguns destes casos.

Figura 24 – Dois excertos de indicação dos resultados dos limites sem o cálculo



Fonte: Estudantes, sujeitos desta pesquisa.

Figura 25 – Dois excertos de indicação dos resultados dos limites que parecem não justificar o resultado



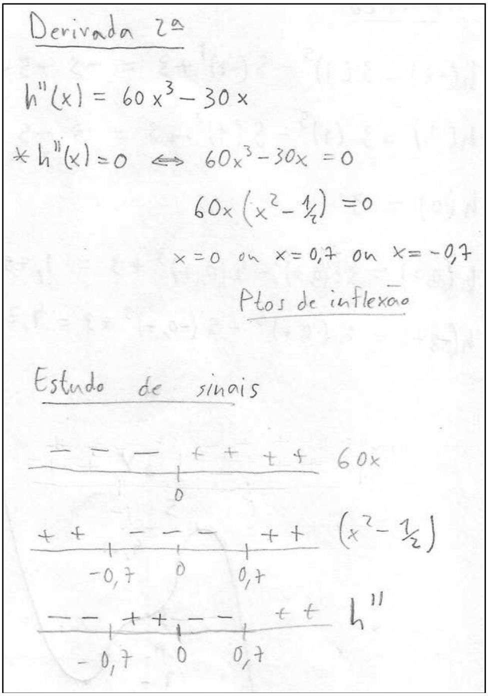
Fonte: Estudantes, sujeitos desta pesquisa.

Determinar com exatidão os intervalos da variação e concavidade da função, além de pontos importantes como os de extremos relativos e inflexões, não é uma ação intuitiva, pois, entre outras coisas, frequentemente nos deparamos com valores fracionários ou irracionais, no entanto, julgo importante considerar que após se obter todas estas informações provenientes do estudo das derivadas da função, já é possível de se levantar certa suspeita de como a curva se comportará quando os valores do domínio tendem a mais e menos infinito.

Desta forma, em relação aos procedimentos de cálculo de derivadas, o cálculo dos limites da função parece servir mais de argumentação do que operabilidade para a construção de gráficos. Tomarei esta como sendo uma das razões pela qual parte dos estudantes não tenham dado muita atenção ao cálculo dos limites, até porque esta atividade foi a primeira tentativa, em sala de aula, dos mesmos esboçarem o gráfico de uma função de maneira mais autônoma.

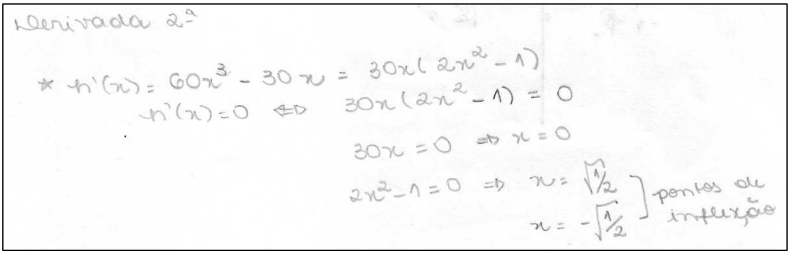
Ainda nesta atividade pude perceber que uma argumentação um pouco diferente da que trabalhamos em sala de aula emergiu. Havíamos desenvolvido a argumentação de que ‘Os pontos do domínio da função em que, em sua vizinhança, f'' muda de sinal é um ponto de inflexão’, no entanto, em muitas resoluções pareceu que a argumentação para se determinar os pontos de inflexão foi a seguinte: ‘Os pontos do domínio da função em que a derivada segunda se anula são pontos de inflexão’. Observe mais alguns excertos.

Figura 26 – Identificação dos pontos de inflexão



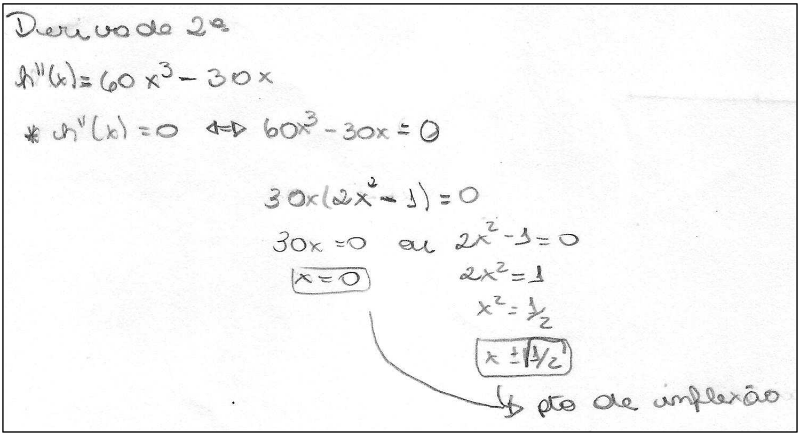
Fonte: Estudante, sujeito desta pesquisa.

Figura 27 – Identificação dos pontos de inflexão



Fonte: Estudante, sujeito desta pesquisa.

Figura 28 – Identificação dos pontos de inflexão


Derivada 2ª

$h''(x) = 60x^3 - 30x$

$* \; h''(x) = 0 \iff 60x^3 - 30x = 0$

$30x(2x^2 - 1) = 0$

$30x = 0$ ou $2x^2 - 1 = 0$

$\boxed{x = 0}$ $\quad 2x^2 = 1$

$x^2 = \frac{1}{2}$

$\boxed{x = \pm\sqrt{1/2}}$

→ pto de inflexão

Fonte: Estudante, sujeito desta pesquisa.

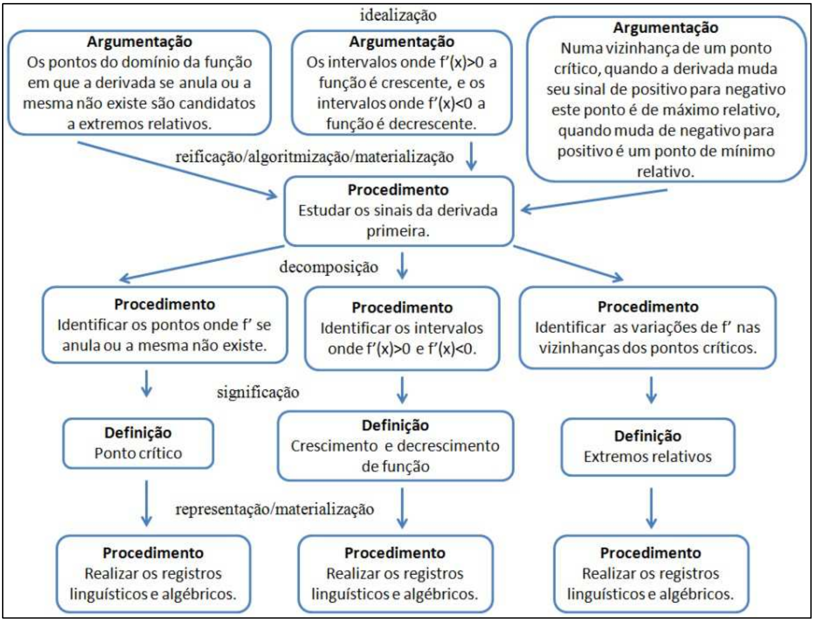
Nos três casos que apresento é possível identificar que os estudantes registram os pontos de inflexão antes mesmo do estudo de sinais da derivada segunda, o que dá indícios desta outra argumentação que acabo de mencionar.

Quando trabalhamos com funções polinomiais esta argumentação pode ser considerada válida, no entanto, há vários outros tipos de funções nos quais ela não “funciona” muito bem. Stewart (2009, p. 274) apresenta uma função que pode nos servir de exemplo para tal constatação.

A função definida por $f(x) = x^{2/3}(6-x)^{1/3}$ possui como derivadas as funções representadas por $f'(x) = \dfrac{4-x}{x^{1/3}(6-x)^{2/3}}$ e $f''(x) = \dfrac{-8}{x^{4/3}(6-x)^{5/3}}$. Observe que para a derivada segunda, não há casos em que $f''(x) = 0$ e $\nexists\, f''(x)$ para $x = 0$ e $x = 6$. Com uma argumentação do tipo que identifiquei nestes três excertos que acabo de apresentar, tal função não teria pontos de inflexão, no entanto, a partir de um estudo de sinais que considere este dois pontos em que f'' não existe, observa-se que $x = 6$ é o único ponto de inflexão de f, pois pertence ao domínio da função e há uma variação do sinal de f'' em sua vizinhança.

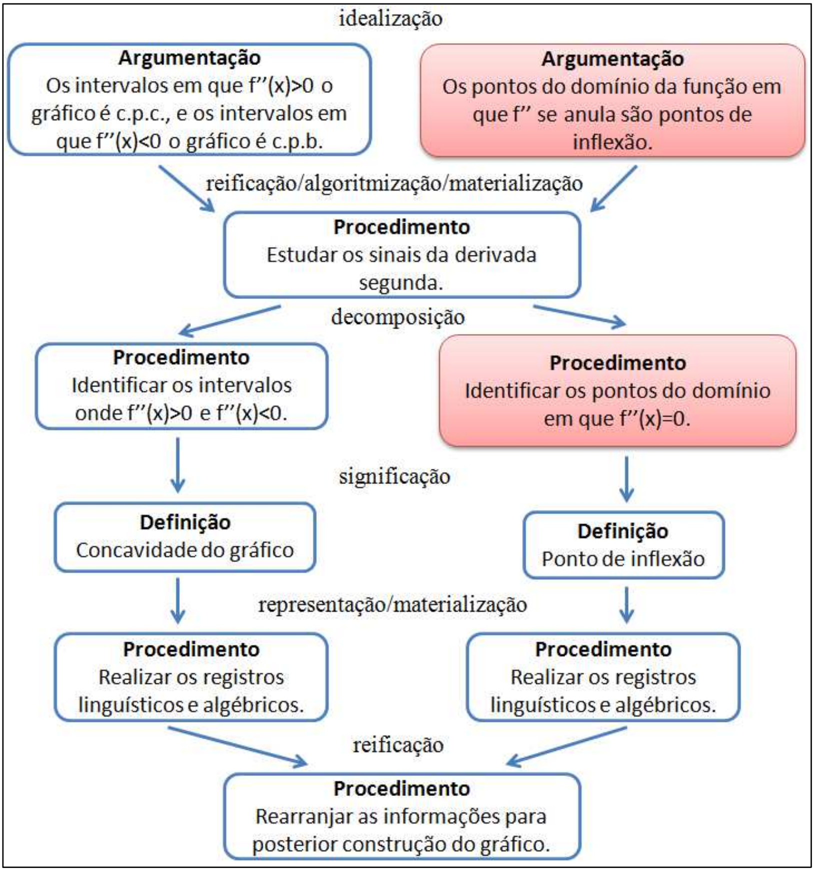
Uma vez trazido todas estas considerações a respeito do desenvolvimento dos estudantes na *Atividade 1*, apresento nas Figuras 29 e 30 as configurações cognitivas dos estudantes referentes ao estudo das derivadas primeira e segunda.

Figura 29 – Configuração cognitiva referente ao estudo da derivada primeira



Fonte: Autor desta pesquisa.

Figura 30 – Configuração cognitiva referente ao estuda da derivada segunda



Fonte: Autor desta pesquisa.

Na configuração referente ao estudo da derivada primeira, não indico o processo de reificação entre os pontos críticos, as variações e os extremos relativos (confira na Figura 19) para a construção do gráfico, pois pelos excertos que apresentei entendo que este processo não ocorreu. Segundo Duval, a conversão das representações algébricas destes objetos em representações gráficas (para a construção do gráfico) não se efetivou.

Já na configuração cognitiva do estudo da derivada segunda, indico que houve o processo de reificação entre concavidade e o ponto de inflexão para a construção da curva, porém indico, em destaque, a argumentação que emergiu através de um processo de *personalização* dos estudantes, e consequentemente sugeriu o procedimento que está em destaque.

Quanto ao cálculo dos limites, pelo que apresentei nos excertos anteriores, não senti-me capaz de sugerir uma configuração cognitiva que pudesse representar o desempenho dos estudantes, entretanto irei reforçar a argumentação sobre a necessidade deste cálculo e recomendar que exercitem seus procedimentos para as próximas práticas.

Atividade 2

Nesta atividade a intenção era tentar verificar o desempenho dos estudantes quanto à conversão do registro gráfico para o registro algébrico. Algumas questões foram formuladas para que se pudesse direcionar a prática que demandava associações entre conceitos, propriedades ou argumentos, tanto geométricos quanto algébricos, referentes às derivadas primeira e segunda.

É importante destacar que durante nossos encontros os estudantes não trabalharam outras atividades parecidas com esta, diferentemente do que aconteceu na *Atividade 1*, que foi muitas vezes abordada em exemplos de aula. Associações entre elementos gráficos e algébricos foram abordadas ao se introduzir as primeiras aplicações de derivadas para o esboço de curvas, como se pode constatar nas configurações epistêmicas apresentadas nas Figuras 11 a 16. Desta forma, as conversões do registro gráfico para o algébrico fizeram parte apenas das exposições teóricas em sala de aula.

Para organizar a *Atividade 2* tomei como base, principalmente, o trabalho de Moretti, Ferraz e Ferreira (2008) a respeito das conversões do registro gráfico para o registro algébrico, em que considerei as unidade gráficas e simbólicas que estes pesquisadores apresentaram[34]. Aqui também não tomei o trabalho destes autores como um modelo rígido a ser seguido, mas como uma forma de racionalidade muito interessante e eficaz, como visto na seção 1.2 deste trabalho, para operar a conversão de registros gráficos para registros algébricos nas práticas de esboço de curvas do ensino superior.

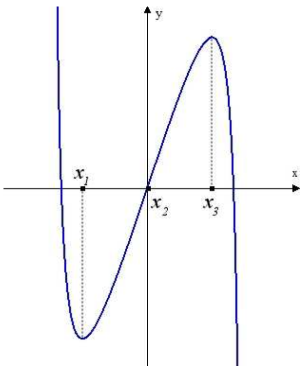
A atividade toma o gráfico de uma função, sem a sua lei algébrica, como registro gráfico que deverá ser analisado através de algumas de suas unidades gráficas para que posteriormente se realize

[34] Para melhor esclarecimento reveja a Figura 7 deste trabalho.

suas conversões em unidades algébricas, tal função é apresentada no Quadro 8[35].

Quadro 8 – Excerto do enunciado da *Atividade 2*

Observe o gráfico à direita da função f e responda:



Fonte: Autor desta pesquisa.

Para o desenvolvimento foram lançados sete questionamentos em forma de itens – do item (a) ao (g) –, os quais buscavam colocar os estudantes frente a situações em que conversões do registro gráfico para o registro algébrico faziam-se necessárias. A seguir, em pares e através das indicações dos processos e das configurações epistêmicas e cognitivas, como procedi na análise da *Atividade 1*, apresentarei tais questões.

Do item (a) ao (f) a *situação-problema* que motivou a prática matemática foram os questionamentos que suscitavam a necessidade de se realizar conversões de unidades gráficas – como as variações da função, máximos e mínimos relativos, e o comportamento da concavidade – em unidades simbólicas[36]. É importante comentar que ao entregar a atividade alertei os estudantes de que os itens (b), (d) e (f) deveriam ser respondidos através de registros algébricos, ou seja, utilizando as notações matemáticas que são partilhadas pela matemática acadêmica. Já o item (g) se tratava de uma questão conceitual a respeito do Teste da Derivada Primeira e poderia ser respondida sem o auxílio do

---

[35] A *Atividade 2* pode ser vista integralmente na segunda página do Anexo B deste trabalho.

[36] Destaco aqui que adotei as *variações* e a *concavidade* como sendo, cada um delas, uma unidade gráfica distinta, diferentemente de como Moretti, Ferraz e Ferreira (2008) sugerem em suas *Formas básicas*.

gráfico da função, por mais que este pudesse dar uma boa ideia da resposta, e sem a necessidade de utilizarem o registro algébrico.

A análise desta atividade será realizada através de três pares de itens que possuíam relações entre si, a saber, itens (a) e (b), (c) e (d), (e) e (f), e o item (g) será analisado isoladamente.

Análise dos itens (a) e (b)

Nos itens (a) e (b) foram lançados os questionamentos apresentados no Quadro 9:

Quadro 9 – Excerto da *Atividade 2* – itens (a) e (b)

(a) Quais os intervalos de crescimento e decrescimento da função f?

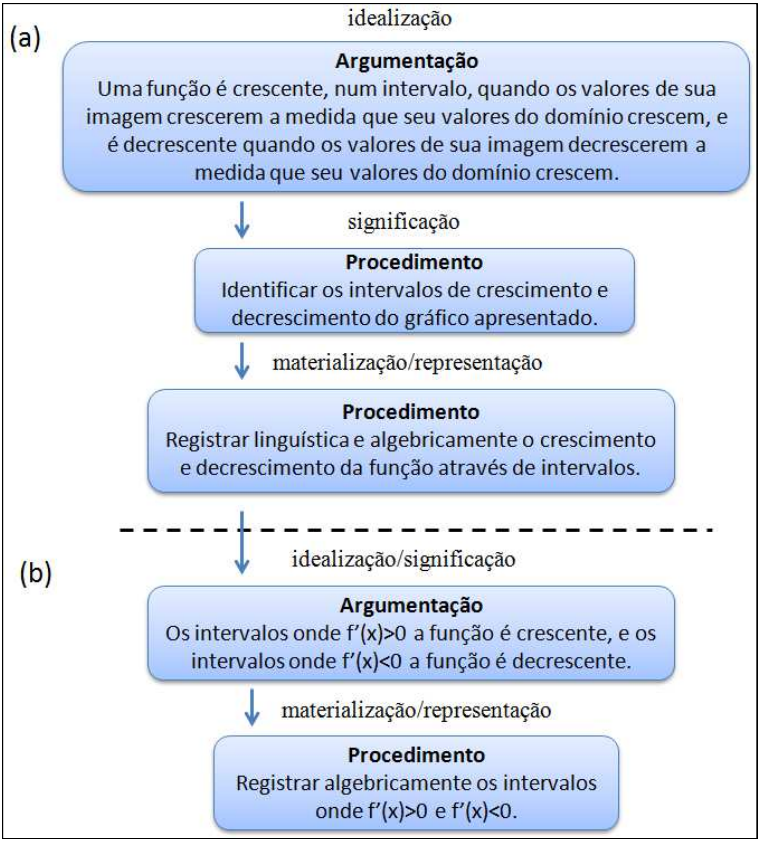
(b) O que você pode dizer da derivada primeira de f nestes intervalos identificados no item (a)?

Fonte: Autor desta pesquisa.

O questionamento do item (a) sugere uma análise do gráfico da função em termos de crescimento e decrescimento, assunto já abordado no início da disciplina de Cálculo ao se estudar funções reais e, portanto, é entendido como um objeto *unitário*. Com esta análise é possível realizar uma classificação das variações da função através de intervalos do domínio, para que então sejam realizados os devidos registros linguísticos e algébricos.

É a partir destes registros que parte o questionamento do item (b), em que se busca uma associação com a argumentação já estudada referente ao sinal da derivada primeira, 'Os intervalos onde $f'(x) > 0$ a função é crescente, e os intervalos onde $f'(x) < 0$ a função é decrescente'. Uma vez feita tal associação espera-se que se realizem, através da notação de intervalos, os registros algébricos referentes ao sinal da derivada primeira.

Figura 31 – Configuração epistêmica dos itens (a) e (b)



Fonte: Autor desta pesquisa.

Análise dos itens (c) e (d)

Nestes itens foram lançados os seguintes questionamentos apresentados no quadro a seguir.

Quadro 10 – Excerto da *Atividade 2* – itens (c) e (d)

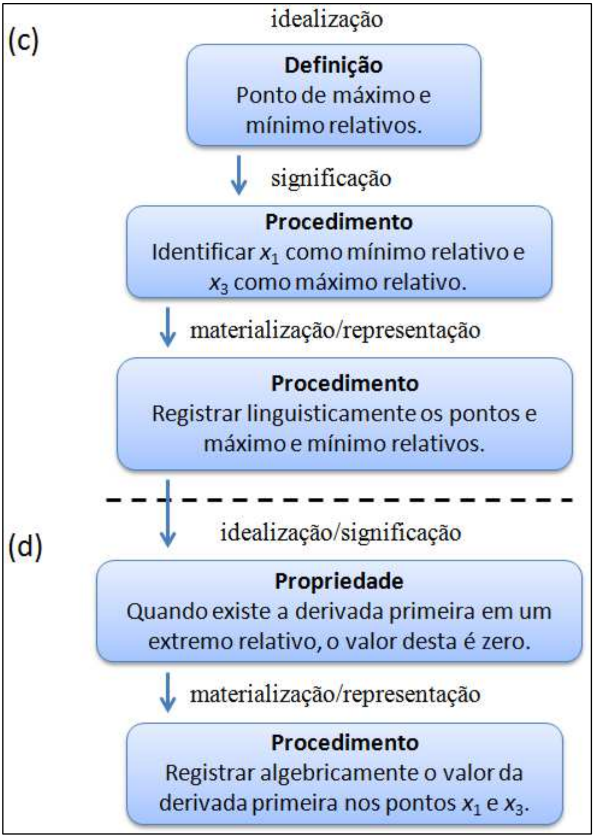
(c) A função possui pontos de máximo ou mínimo relativos? Quais?
(d) O que se pode dizer da derivada primeira nestes pontos do item (c)?

Fonte: Autor desta pesquisa.

A definição de ponto de máximo e mínimo relativos é necessário para resolução do item (c), a partir deste conceito torna-se possível identificar o ponto x_1 como mínimo relativo e x_3 como máximo relativo, para então serem feitos os registros linguísticos.

A questão do item (d) busca por uma associação entre os extremos relativos identificados e o valor da derivada nestes pontos, que por não serem pontos angulosos, existe e é igual a zero. Feita esta associação, mais uma vez deve-se realizar os registros algébricos da derivada primeira nestes pontos.

Figura 32 – Configuração epistêmica dos itens (c) e (d)



Fonte: Autor desta pesquisa.

Análise dos itens (e) e (f)

Quadro 11 – Excerto da *Atividade 2* – itens (e) e (f)

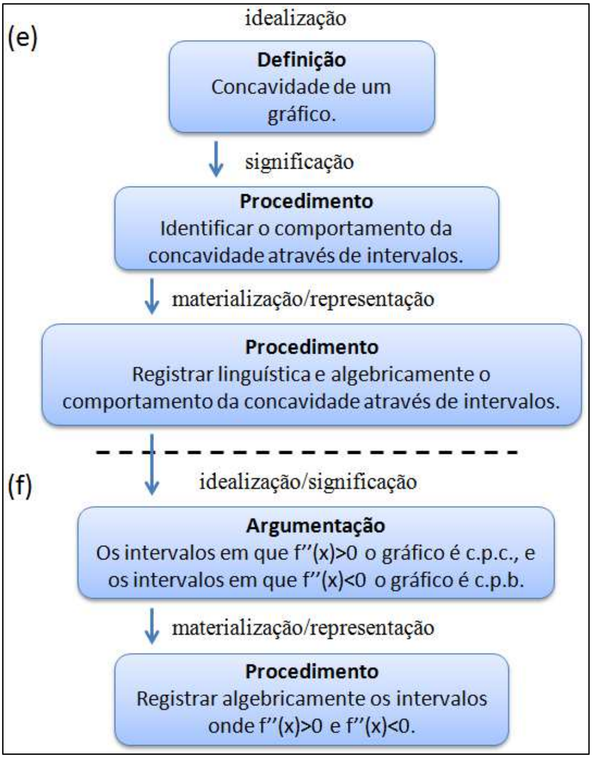
(e) Como se comporta a concavidade da função f ? (Classifique utilizando-se de intervalos) (f) O que se pode dizer da derivada segunda de f nestes intervalos que você indicou no item (e)?

Fonte: Autor desta pesquisa.

O item (e) busca mobilizar a definição de concavidade do gráfico de uma função para que se classifique o comportamento da concavidade de f e seu posterior registro linguístico e algébrico através de intervalos do domínio.

A conexão deste item com o item (f) acontece mediante ao argumento que associa a concavidade de f ao sinal de sua derivada segunda, ‘Os intervalos em que $f''(x) > 0$ o gráfico é c.p.c., e os intervalos em que $f''(x) < 0$ o gráfico é c.p.b.’. De onde se espera que se realizem os registros algébricos associando os intervalos da concavidade aos sinais da derivada segunda.

Figura 33 – Configuração epistêmica dos itens (e) e (f)



Fonte: Autor desta pesquisa.

Análise do item (g)

Quadro 12 – Excerto da *Atividade 2* – itens (g)

(g) Nos pontos x_1 e x_3, de que maneira o Testa da Derivada Primeira (TD1ª) pode ser utilizado e o que ele indica?

Fonte: Autor desta pesquisa.

Este último item, como já mencionado, não visava conversões do registro gráfico para o registro algébrico. Por mais que o gráfico poderia ser utilizado para se pensar em termos do sinal da derivada primeira, o que se tentava reconhecer era o entendimento que os estudantes tinham a respeito do Teste da Derivada Primeira.

Com isso, neste item não elaborei uma configuração epistêmica, uma vez que já foram apresentados, tanto no capítulo 1 deste trabalho quanto na análise da *Atividade 1*, objetos matemáticos que poderiam ser mobilizados para a responder esta questão.

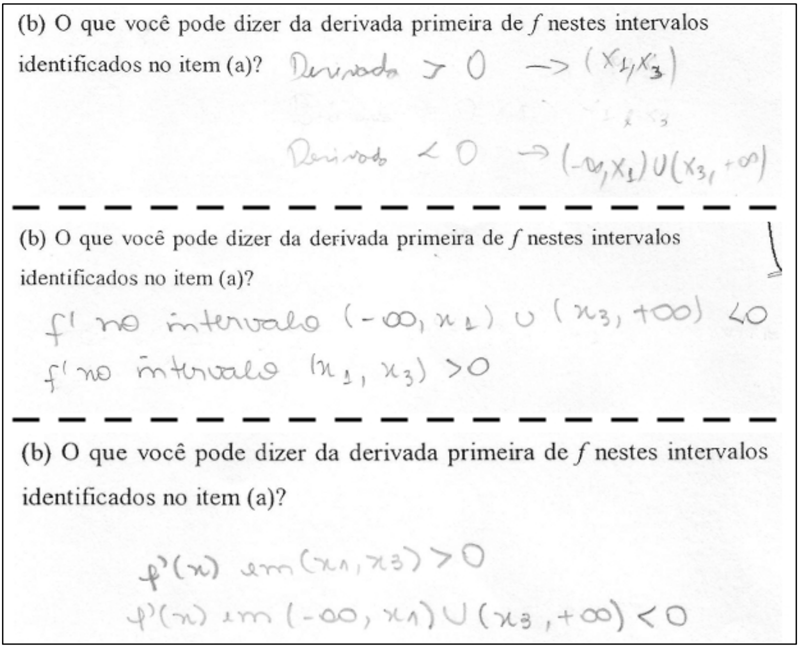
Análise das respostas dos estudantes

Ao analisar as respostas dadas à *Atividade 2*, entendo que os estudantes conseguem identificar os intervalos de crescimento e decrescimento da função e realizar os registros linguísticos e algébricos que eram solicitados no item (a), no entanto, mesmo que muitos tenham conseguido relacionar estes últimos registros com a argumentação esperada no item (b) – que associa o crescimento e o decrescimento ao sinal da derivada primeira –, um grupo considerável de estudantes mostrou ainda não partilhar do uso das notações matemáticas como deve ser feito na academia, os excertos da Figura 34 dão uma ideia de alguns destes usos, neles é possível observar que os estudantes, cada um a sua maneira, fizeram "composições" particulares entre os registros linguísticos e algébricos para expressarem suas respostas.

Ainda em relação ao item (b) outra resposta, não esperado, apareceu com certa regularidade. Ao se perguntar sobre a derivada primeira nos intervalos indicados pelos estudantes no item anterior, o item (a), muitas respostas foram "x_1 e x_3 são pontos críticos". Na Figura 35 apresento alguns casos.

Recorrendo ao EOS, entendo-as como um indício de estar havendo um conflito semiótico envolvendo, entre outros objetos, o conceito de ponto crítico. Estas respostas mostram que os estudantes estão realizando associações entre objetos matemáticos de maneiras diferentes das realizadas nas práticas estudadas em aula – o que não é um problema –, mas ao mesmo tempo são associações que no âmbito da instituição (a matemática acadêmica) não estão corretas.

Figura 34 – Uso de notações não partilhadas pela instituição para dar as respostas do item (b)



(b) O que você pode dizer da derivada primeira de f nestes intervalos identificados no item (a)? Derivada $> 0 \to (x_1, x_3)$

Derivada $< 0 \to (-\infty, x_1) \cup (x_3, +\infty)$

(b) O que você pode dizer da derivada primeira de f nestes intervalos identificados no item (a)?

f' no intervalo $(-\infty, x_1) \cup (x_3, +\infty) < 0$

f' no intervalo $(x_1, x_3) > 0$

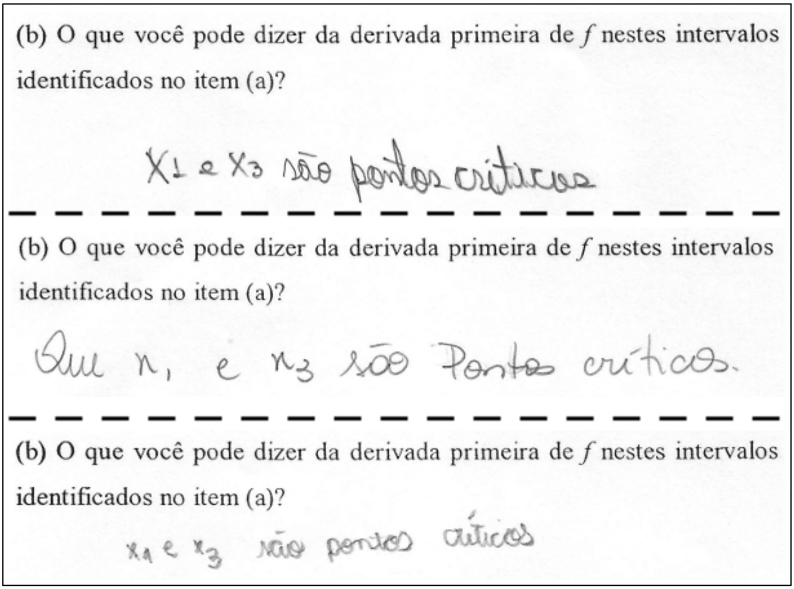
(b) O que você pode dizer da derivada primeira de f nestes intervalos identificados no item (a)?

$f'(x)$ em $(x_1, x_3) > 0$

$f'(x)$ em $(-\infty, x_1) \cup (x_3, +\infty) < 0$

Fonte: Estudantes, sujeitos desta pesquisa.

Figura 35 – Excertos que indicam um conflito semiótico envolvendo o conceito de ponto crítico


(b) O que você pode dizer da derivada primeira de *f* nestes intervalos identificados no item (a)?

X_1 e X_3 são pontos críticos

(b) O que você pode dizer da derivada primeira de *f* nestes intervalos identificados no item (a)?

Que x_1 e x_3 são Pontos críticos.

(b) O que você pode dizer da derivada primeira de *f* nestes intervalos identificados no item (a)?

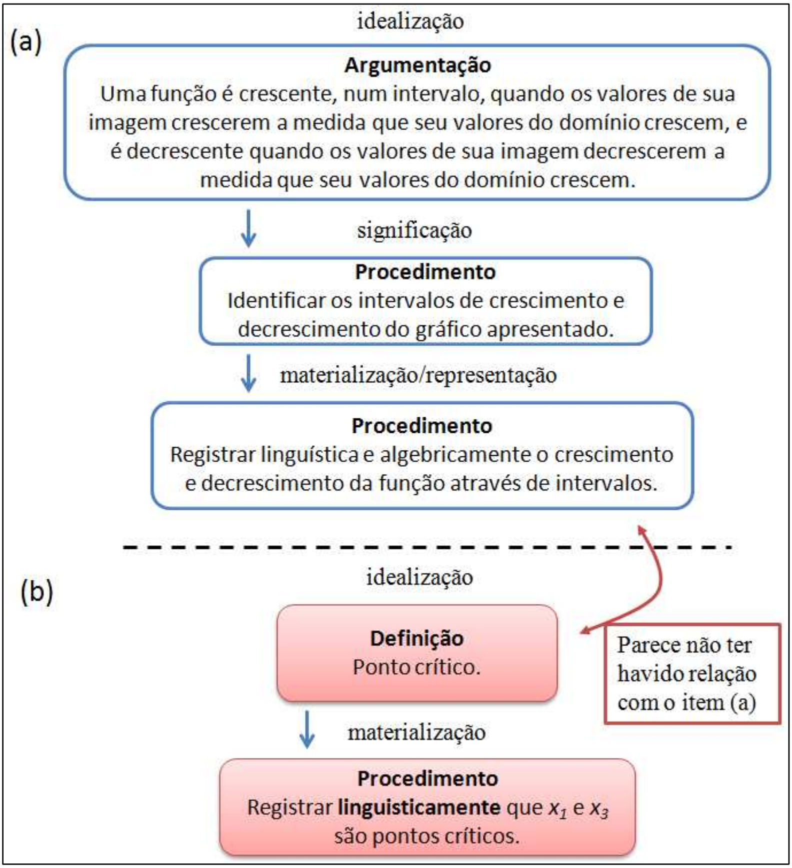
x_1 e x_3 são pontos críticos

Fonte: Estudantes, sujeitos desta pesquisa.

Entre as várias maneiras que estas respostas poderiam ser interpretadas – seja como falta de compreensão/interpretação do que está sendo questionado, seja falta de atenção, ou ainda dificuldades em decidir/reconhecer qual das várias regras estudadas se aplica à situação em questão, entre outras –, segundo os aportes teóricos que estou adotando nesta pesquisa, identifico que parece não ter se efetivado o processo de significação que associa as propriedades '*ser crescente*' $\leftrightarrow$ '*ter* $f'(x) > 0$' e '*ser decrescente*' $\leftrightarrow$ '*ter* $f'(x) < 0$', e, consequentemente, não houve uma idealização da argumentação que relaciona o sinal da derivada primeira e as variações da função. Tais respostas ainda permitem se pensar que os estudantes desconhecem o uso do registro algébrico.

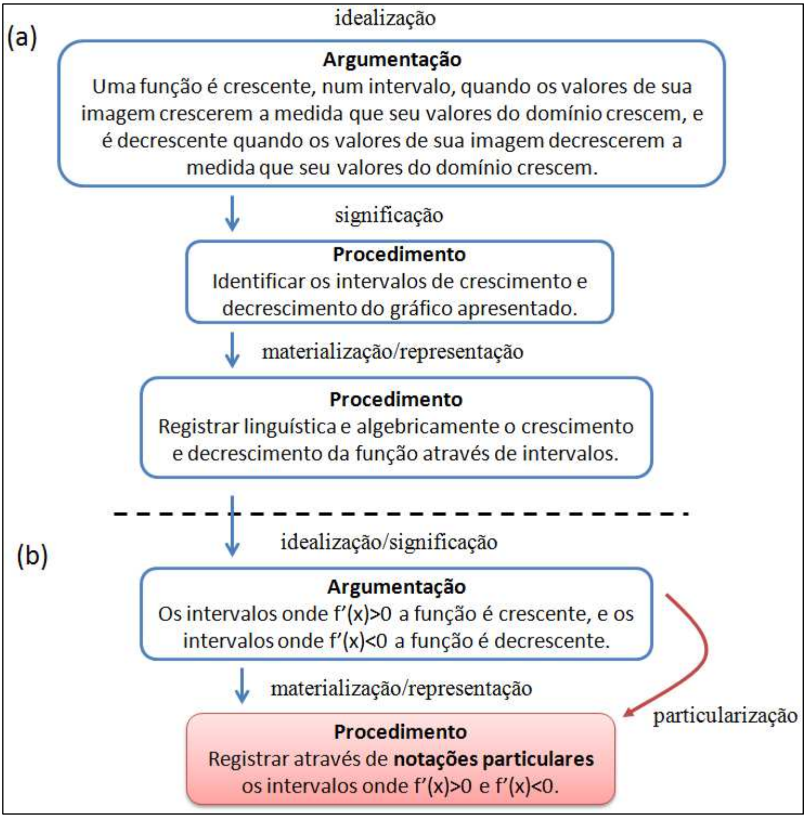
Destas primeiras observações criei duas configurações cognitivas para representar os conflitos identificados. Na primeira (Figura 36) eu indico que não houve uma associação entre a resposta do item (a) e o conceito utilizado para iniciar o item (b), já na segunda configuração (Figura 37) aponto para o processo de particularização que parece ter havido quanto à notação utilizada pelos estudantes para representar suas respostas.

Figura 36 – Configuração cognitiva que aponta para um conflito semiótico envolvendo o conceito de ponto crítico



Fonte: Autor desta pesquisa.

Figura 37 – Configuração cognitiva que indica um processo de particularização no procedimento de registro da resposta



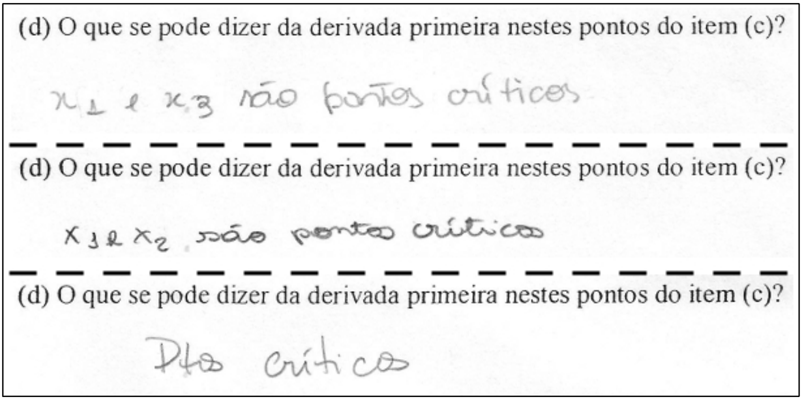
Fonte: Autor desta pesquisa.

As respostas referentes ao item (c) foram satisfatórias, a identificação e os registros dos extremos relativos foram realizados pelos estudantes como organizado na configuração epistêmica da Figura 32. Quanto ao item (d), mais uma vez apareceram algumas respostas do tipo "x_1 e x_3 são pontos críticos" (ver Figura 38[37]). Num

[37] No excerto do meio da Figura 38, x_2 é indicado como um ponto crítico. Entretanto, por eu ter entendido que a estudante teve um bom desenvolvimento ao responder os três primeiros itens – pois, entre outras coisas, ela utilizou devidamente o ponto x_3 nos itens (a) e (b) para demarcar os intervalos referentes às variações de f, e também indicou o mesmo ponto x_3 como ponto

questionamento como o apresentado neste item, tal resposta tem certo sentido, pois os extremos relativos apresentados são, também, pontos críticos da função, porém mais uma vez questionava-se sobre a derivada primeira e esperava-se pelo uso dos registros algébricos para a resposta.

Figura 38 – Mais uma mobilização do conceito de ponto crítico como resposta


(d) O que se pode dizer da derivada primeira nestes pontos do item (c)?

x_1 e x_3 são pontos críticos

(d) O que se pode dizer da derivada primeira nestes pontos do item (c)?

x_1 e x_2 são pontos críticos

(d) O que se pode dizer da derivada primeira nestes pontos do item (c)?

Ptos críticos

Fonte: Estudantes, sujeitos desta pesquisa.

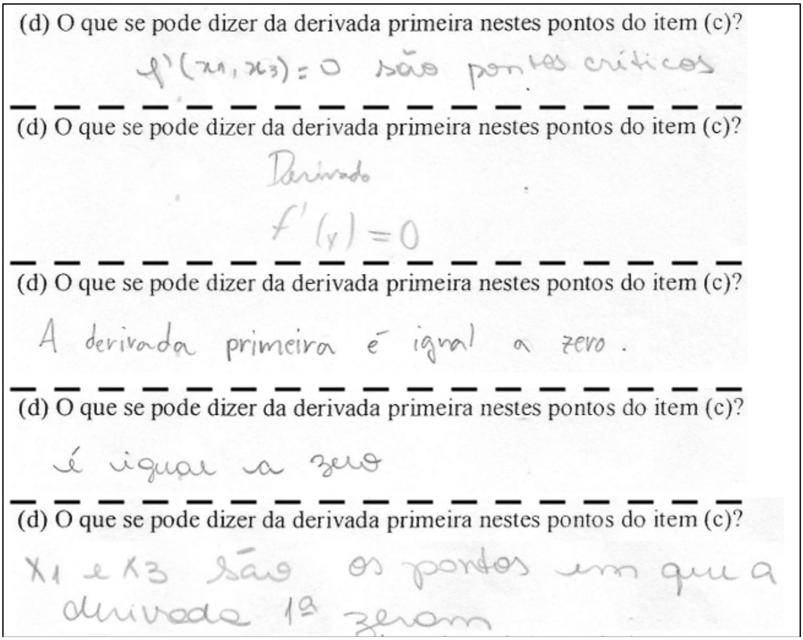
Apenas com a resposta "x_1 e x_3 são pontos críticos" não me parece possível avaliar se os estudantes tem o entendimento de que o valor da derivada nos extremos relativos questionados é nulo.

E mais uma vez pude identificar problemas no uso dos registros algébricos, inclusive houve mais casos em que este registro perdeu lugar para o registro linguístico, como mostro através de mais alguns excertos na Figura 39.

---

de máximo no item (c) –, entendi que não fazia sentido a estudante utilizar o registro 'x_2' para responder o item (d), possivelmente foi uma falta de atenção da mesma no momento de registrar a resposta, ainda mais que tal resposta se baseava no que foi registrado no item anterior, item (c), em que foi mencionado o ponto x_3. Desta forma, ao analisar a atividade desta estudante eu entendi que a expressão 'x_2' está se referindo, na verdade, ao ponto crítico x_3, em termos de *função semiótica*, eu diria que nesta relação x_2 está no PLANO DA EXPRESSÃO e o ponto crítico x_3, que se apresenta através do gráfico da função, está no PLANO DO CONTEÚDO (ECO, 1997, p. 39). Por este motivo resolvi inserir este excerto à Figura 38.

Figura 39 – Uso de notações não partilhadas pela instituição e de registros linguísticos



(d) O que se pode dizer da derivada primeira nestes pontos do item (c)?

$f'(x_1, x_3) = 0$ são pontos críticos

(d) O que se pode dizer da derivada primeira nestes pontos do item (c)?

Derivado

$f'(x) = 0$

(d) O que se pode dizer da derivada primeira nestes pontos do item (c)?

A derivada primeira é igual a zero.

(d) O que se pode dizer da derivada primeira nestes pontos do item (c)?

é igual a zero

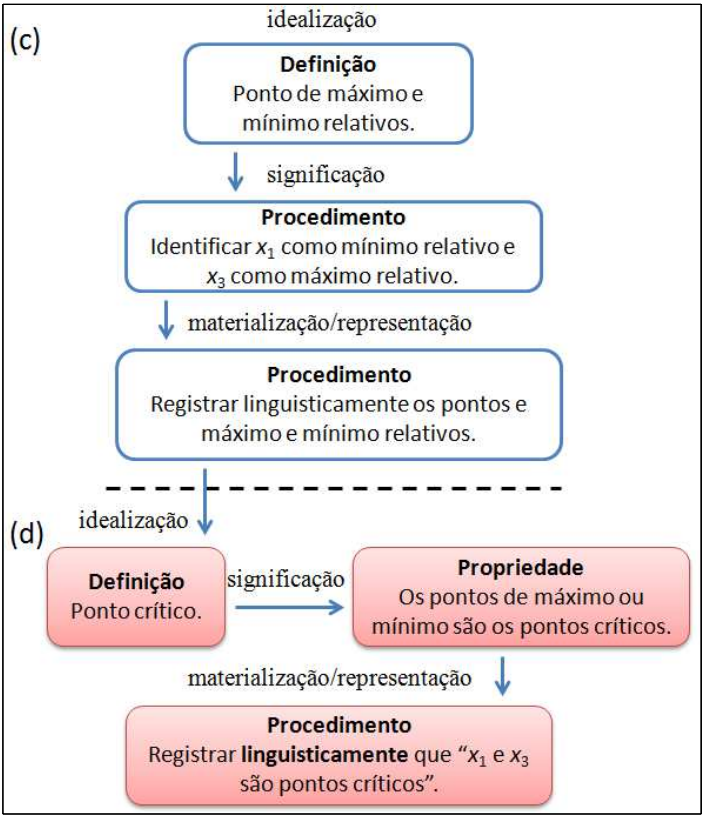
(d) O que se pode dizer da derivada primeira nestes pontos do item (c)?

x_1 e x_3 são os pontos em que a derivada 1ª zeram

Fonte: Estudantes, sujeitos desta pesquisa.

Com mais estas observações criei outras duas configurações cognitivas para representar as associações que os estudantes estão realizando entre os objetos matemáticos nas práticas que envolvem extremos relativos, a primeira (Figura 40) representa uma associação entre os registros dos extremos relativos indicados no item (c) com o conceito de ponto crítico mobilizado no item (d). Ao realizarem a associação ‘pontos de máximo e mínimo relativos’ $\rightarrow$ ‘são pontos críticos’, não há indícios de que entendem que nestes pontos a derivada primeira da função f é zero, no entanto, tal associação permite se pensar que uma propriedade do tipo ‘pontos de máximo e mínimo relativos são pontos críticos’ circule entre os estudantes, o que pode ser trabalhado em aula para que não se interprete da forma contrária ‘os ponto crítico são os máximos e mínimos relativos’, o que poderia gerar outros conflitos semióticos.

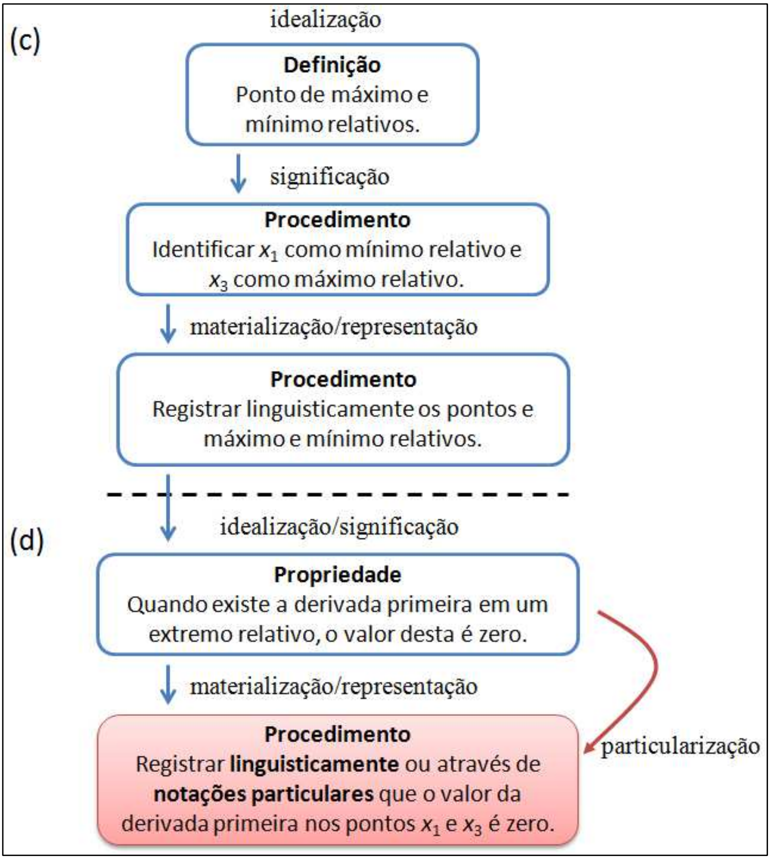
Figura 40 – Configuração cognitiva que mostra uma associação entre os conceitos de extremos relativos e ponto crítico



Fonte: Autor desta pesquisa.

Já a segunda configuração cognitiva (Figura 41) indica mais uma vez um processo de particularização da notação usada pelos estudantes, tanto nesta configuração quanto na que foi apresentada na Figura 37, é possível de se ter um entendimento do conteúdo que os estudantes estão querendo expressar, não são notações indecifráveis, mas a maneira de registrá-las mostra que não houve um processo de institucionalização, por parte dos estudantes, no momento de utilizar os registros algébricos.

Figura 41 – Configuração cognitiva que indica um processo de particularização no procedimento de registro da resposta

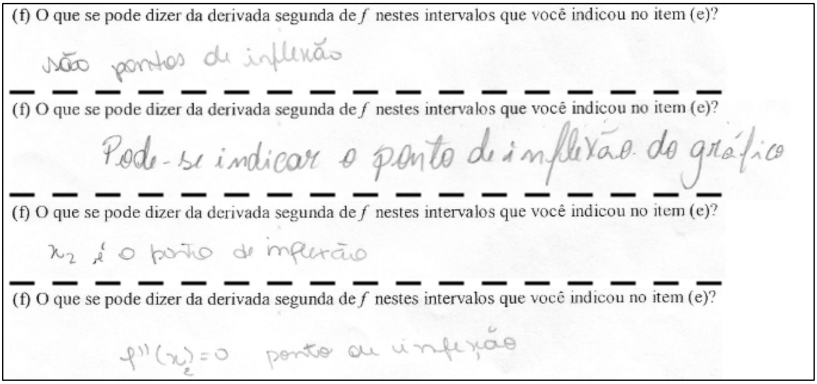


Fonte: Autor desta pesquisa.

O comportamento da concavidade questionado no item (e) não trouxe muitas dificuldades para os estudantes, tanto a identificação da unidade gráfica quando a classificação através da notação de intervalos foram devidamente realizadas.

Quanto à relação entre a concavidade e a derivada segunda, questionada no item (f), houve muitas respostas que apontavam para o conceito de ponto de inflexão (Figura 42). Isso sugere que estes estudantes não associaram a derivada segunda ao comportamento da concavidade da curva, além de indicar mais uma vez[38] que parece haver estudantes que não estão dando atenção aos questionamentos se referiam às derivadas sobre pontos isolados ou sobre intervalos, pois as respostas fornecidas não fazem sentido para esta questão uma vez que se pergunta sobre a derivada segunda em intervalos.

Figura 42 – Excertos que indicam um conflito semiótico envolvendo o conceito de ponto de inflexão


(f) O que se pode dizer da derivada segunda de f nestes intervalos que você indicou no item (e)?

não pontos de inflexão

(f) O que se pode dizer da derivada segunda de f nestes intervalos que você indicou no item (e)?

Pode-se indicar o ponto de inflexão do gráfico

(f) O que se pode dizer da derivada segunda de f nestes intervalos que você indicou no item (e)?

x_2 é o ponto de inflexão

(f) O que se pode dizer da derivada segunda de f nestes intervalos que você indicou no item (e)?

$f''(x_2)=0$ ponto de inflexão

Fonte: Estudantes, sujeitos desta pesquisa.

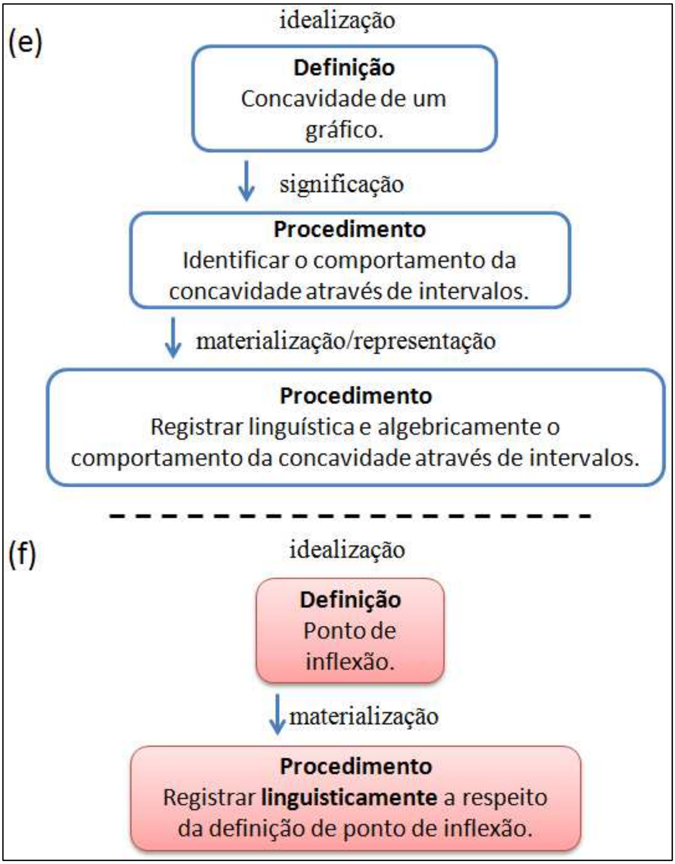
Ainda no quarto excerto da Figura 42 pode-se identificar um “vestígio” da argumentação indicada na configuração cognitiva que criei, durante a análise da *Atividade 1*, referente ao estudo da derivada segunda. Tal argumentação sugere que ‘Os pontos do domínio da função em que f'' se anula são os pontos de inflexão’.

A configuração cognitiva que elaborei na Figura 43 mostra que para alguns estudantes não houve uma relação entre os itens (e) e (f), ou seja, entre o comportamento da concavidade da curva e o sinal da derivada segunda.

---

[38] A prática de fornecer respostas referentes ao comportamento da derivada em pontos isolados quando se perguntava sobre a derivada em intervalos, confusão entre o *discreto* e o *contínuo*, também pode ser constatado na Figura 35.

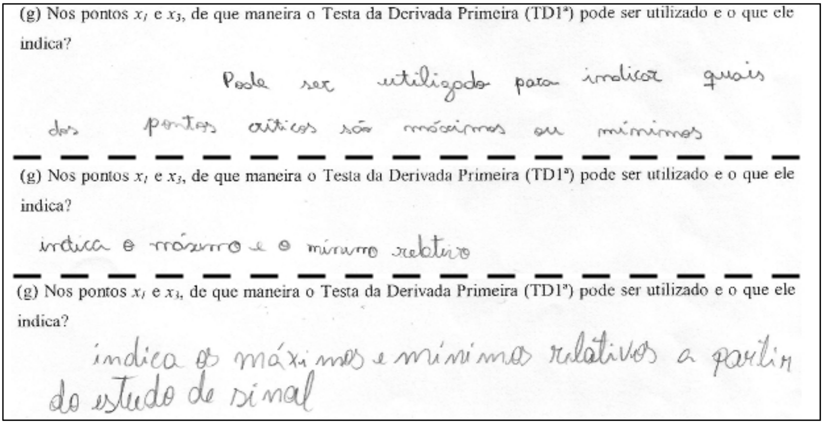
Figura 43 – Configuração cognitiva que mostra não ter havido uma associação entre o comportamento da concavidade da curva e o sinal da derivada segunda



Fonte: Autor desta pesquisa.

Por fim, as respostas fornecidas no item (g) permitiram que eu criasse um panorama a respeito do entendimento que os estudantes estavam fazendo a repeito do Teste da Derivada Primeira (TD1ª), ao analisá-las pude classificar as respostas em três tipos (Figura 44). O primeiro é o que mencionava que o TD1ª "pode ser utilizado para indicar quais dos pontos críticos são máximos ou mínimos", resposta que mostra que reconhecem em quais pontos o teste pode ser utilizado e o que ele indica, porém não há indícios da maneira de proceder. A segunda classificação diz que o TD1ª "indica o máximo e o mínimo relativo[s]”, dando sinais apenas de que reconhecem o que o teste aponta. E por fim, um terceiro tipo de respostas que afirma que o TD1ª “indica os máximos e mínimos relativos a partir de um estudo de sinais”, respostas que mostram conhecimento, por parte destes estudantes, de para que serve o teste e o que ele indica, além de dar indicio de que entendem que o teste se realiza através do estudo de sinais, mas não deixa explicito que se trata dos sinais da derivada primeira.

Figura 44 – Excertos que indicam três maneiras que foram utilizadas para conceituar o TD1ª


(g) Nos pontos x_1 e x_3, de que maneira o Testa da Derivada Primeira (TD1ª) pode ser utilizado e o que ele indica?

Pode ser utilizado para indicar quais dos pontos críticos são máximos ou mínimos

(g) Nos pontos x_1 e x_3, de que maneira o Testa da Derivada Primeira (TD1ª) pode ser utilizado e o que ele indica?

indica o máximo e o mínimo relativo

(g) Nos pontos x_1 e x_3, de que maneira o Testa da Derivada Primeira (TD1ª) pode ser utilizado e o que ele indica?

indica os máximos e mínimos relativos a partir do estudo de sinal

Fonte: Estudantes, sujeitos desta pesquisa.

Algumas considerações a respeito das Atividades 1 e 2

Após a análise da *Atividade 1*, no que diz respeito a derivada primeira, foi possível identificar que os estudantes adotaram a prática de derivar a função e realizar o estudo de sinais da mesma, no entanto, após todos estes tratamentos algébricos parece ter havido casos em que não houve uma articulação (reificação) entre as unidades algébricas obtidas – que seriam os pontos em que h' se anula, a classificação de seus sinais a partir de intervalos e as variações de sinais em vizinhanças de pontos críticos – para a construção do gráfico. Agora, com a análise da *Atividade 2*, foi possível identificar também que há estudantes que não estão convertendo algumas unidades gráficas em unidades algébricas, pois ocorreram casos em que mesmo identificando os intervalos de crescimento e decrescimento do gráfico da função f, estes não foram relacionados ao sinal de sua derivada primeira (Figura 35), da mesma forma houve casos em que o conceito de extremos relativos não foi associado ao do valor da derivada primeira nestes pontos ser zero, ou não existir (Figura 38). E ainda as respostas dadas à questão (g) desta atividade indica que há estudantes que parecem não entender que o TD1ª busca por uma variação dos sinais da derivada primeira nas vizinhanças dos pontos críticos (Figura 44).

No que diz respeito à derivada segunda, na *Atividade 1* pude identificar que os estudantes entendem que é preciso derivar uma segunda vez a função e novamente realizar um estudo de sinais desta derivada para identificação do comportamento da concavidade da curva e de possíveis pontos de inflexão, no entanto, como já mencionei, a associação entre as unidades algébrica e gráfica que se relaciona com o conceito de ponto de inflexão parece estar sendo feita da seguinte maneira: 'Os pontos do domínio da função em que h'' se anula são os pontos de inflexão'. Ao analisar a *Atividade 2*, identifiquei estudantes que não relacionam o comportamento da concavidade do gráfico de f ao sinal de f'' (Figura 42).

Com estas observações considero que os estudantes ainda não se apropriaram completamente das práticas institucionalizadas pela academia para o esboço de curvas, o que mostra, segundo o EOS, que o processo de aprendizagem ainda não se efetivou plenamente, porém já é possível traçar alguns direcionamentos para as próximas atuações no processo de ensino. Pensada segundo as unidades básicas, a coordenação entre os registros algébricos e gráficos ainda não foi contemplada, e de acordo com a hipótese fundamental de aprendizagem de Duval, os estudantes ainda não têm uma conceituação integral da prática de esboço de curvas com o uso das derivadas.

Todas estas constatações permitem uma reorganização de nosso próximo encontro. Primeiramente identifico que é importante alertar alguns estudantes da necessidade de resgatarem conceitos já estudados, como o estudo de sinais de funções reais, resolução de equações e inequações, e o cálculo de limites de funções, todos estes objetos *unitário*s, pois já foram estudos antes e são "pré-requisitos" para a realização das práticas que estamos estudando. Outro elemento importante que deve receber atenção é o uso dos registros algébricos, há muitos estudantes que parecem ainda não dominar o uso de tais registros, os quais serão importantes para avaliar o processo de aprendizagem em termos da coordenação de registros semióticos. Por fim organizarei uma exposição dos principais conflitos semióticos identificados nas duas atividades visando que os estudantes reorganizem suas funções semióticas entre os objetos matemáticos, principalmente no que se refere à diferenciação que se deve dar a aspectos do registro algébrico sobre intervalos e sobre pontos isolados, a relação entre os sinais das derivadas, as variações e concavidades, a necessidade de articular todas unidades algébricas para traçar o esboço do gráfico, além de apontar a necessidade de uma argumentação com mais propriedade em relação ao TD1ª. Também buscarei apresentar contraexemplos da propriedade que pareceu ter emergido referente à derivada segunda nula garantir um ponto de inflexão.

2.4 OS DOIS ÚLTIMOS ENCONTROS EM SALA DE AULA

Após os quatro encontros já realizados – três envolvendo aulas expositivas e dialogadas e o quarto sendo trabalhado uma sequência de estudos –, iniciei o penúltimo encontro apresentando aos estudantes os conflitos semióticos que identifiquei ao avaliar seus desempenhos nas *Atividades 1* e *2*. Inicialmente dei maior atenção aos conflitos referentes às associações realizadas entre unidades algébricas e gráficas que envolviam as derivadas, também comentei e apresentei contraexemplos a respeito da argumentação mencionada na seção anterior, 'Os pontos do domínio da função em que f'' se anula são os pontos de inflexão'.

Em seguida, frente aos estudantes, também argumentei sobre a importância do cálculo dos limites da função para se ter precisão a respeito do comportamento de sua curva quando seus pontos do domínio tendem para mais ou menos infinito. E por já estar abordando limites de função, tracei no quadro alguns esboços de gráficos que me permitissem apresentar as definições de retas assintóticas horizontais e verticais partilhadas na academia.

Depois de resolver alguns exemplos envolvendo retas assíntotas, entreguei a cada estudante uma folha impressa contendo gráficos de quatro funções[39], todas sem os seus registros algébricos. Estes gráficos serviram para que pudéssemos dar particular atenção à prática de conversão do registro gráfico para o registro algébrico.

A análise das *Atividades 1* e *2* deu indícios de que os estudantes ainda não conhecem, ou não dominam, muito bem o uso dos registros algébricos, que, entre outras coisas, será importante para que eu possa operar com a TRRS na análise da prática dos estudantes na próxima sequência de estudos. A "coordenação de ao menos dois registros" que

---

[39] Confira os gráficos no Anexo D deste trabalho.

Duval se refere em sua hipótese fundamental de aprendizagem, será analisada segundo a coordenação entre registros algébricos e gráficos, tomando como base as *Formas básicas* de Moretti, Ferraz e Ferreira (2008).

O desenvolvimento da atividade aconteceu da seguinte maneira, cada gráfico foi trabalhado isoladamente – a ordem adotada foi função f, g, h e t –, nos preocupamos em identificar cada uma das unidades gráficas estudadas para em seguida registrá-las algebricamente. O desenvolvimento das funções f, g e t foi realizado por mim no quadro em constante diálogo com os estudantes, já a função h foi trabalhada pelos próprios estudantes, em sala, para posterior conferência e discussão no quadro.

Quando os estudantes resolvem problemas como o proposto na *Atividade 1*, é preciso realizar uma série de cálculo de derivadas e limites para se identificar as unidades algébricas da função e então organizá-las para esboçar seu gráfico, já esta atividade de sala se tratava do caminho inverso. A partir dos gráficos das funções, cada um a sua vez, faz-se uma decomposição da curva através de suas unidades gráficas e, por fim, cada unidade gráfica é associada as suas respectivas unidades algébricas através de notações de derivadas e limites.

A decomposição da curva foi realizada tomando como unidades: as variações, os extremos relativos, a concavidade e as retas assintóticas. Durante o desenvolvimento também indicamos o conjunto domínio de cada função e discutimos sobre a continuidade da curva.

Portanto, com este quinto encontro foi possível comentar pontualmente os conflitos semióticos apresentados pelos estudantes nas atividades realizadas, sugerir alguns direcionamentos de estudo para o grupo de estudantes que demonstrou ter certa dificuldade em alguns dos objetos *unitários* que faziam parte da prática de esboço de curvas – como estudo de sinais de funções, resolução de equações e inequações, etc. – além de ter realizado uma importante discussão e prática a respeito do uso dos registros algébricos.

Passaremos agora para o último encontro, em que apliquei mais uma sequência de estudos contendo três atividades envolvendo o esboço de curvas. Dando continuidade a numeração da última sequência de estudos, esta nova sequência continha as *Atividades 3*, *4* e *5*[40]. Particularmente as *Atividades 4* e *5* possuíam duas versões (Tipo A e

[40] A segunda sequência de estudos pode ser encontrada no Anexo C deste trabalho.

Tipo B) que eu acredito terem o mesmo “grau de dificuldade”, fiz esta diferenciação porque havia certa proximidade entre as carteiras na sala de aula e, sendo um momento de trabalho individual, para diminuir as chances de qualquer circulação de informação a respeito destas duas atividades. E uma última observação é que na *Atividade 5*, em um dos tipos, eu forneci a derivada primeira e seu estudo de sinais, enquanto que para o outro eu forneci a derivada segunda e seu estudo de sinais, isso porque havia o receio do tempo destinado à atividade ser pouco.

A seguir comentarei cada uma das atividades e apresentarei suas análises.

Atividade 3

Esta primeira atividade foi organizada em quatro itens, de (a) à (d), sendo que alguns continham duas ou três partes de gráficos de funções. O objetivo foi que os estudantes iniciassem com conversões do registro gráfico para o registro algébrico, em que em cada item era solicitada a conversão de uma ou duas unidades gráficas em unidades algébricas, procedimento parecido com o realizado no encontro anterior, na atividade de sala.

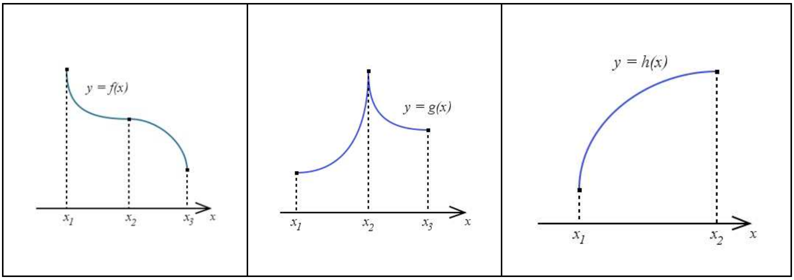
Assim como feito com a *Atividade 2*, realizarei primeiramente uma análise da atividade separadamente por item para, em seguida, analisar as respostas dos estudantes.

Análise do item (a)

Neste primeiro item duas unidades gráficas foram questionadas, as variações e a concavidade, observe no Quadro 13.

Quadro 13 – Excerto da *Atividade 3* – item (a)

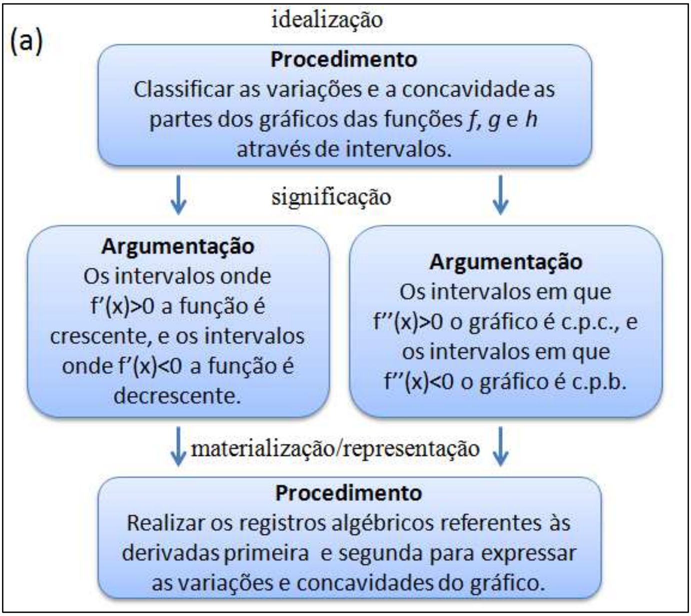
(a) A seguir são indicados três partes de gráficos diferentes. Utilize a linguagem matemática simbólica (ou registro algébrico) para expressar as *variações e concavidades* destas.



Fonte: Autor desta pesquisa.

Na Figura 45 – Configuração epistêmica da *Atividade 3* – item (a) organizo uma configuração epistêmica para o item (a). Nela indico que o primeiro processo envolvido é de idealização, pois é preciso observar as partes de f, g e h e classificar suas variações e concavidades a partir de intervalos do domínio. Há um processo de significação quando estas unidades gráficas são associadas, devidamente, às argumentações que envolvem as derivadas primeira e segunda. E todo este processo é materializado, e a significação é representada, quando o estudante realiza os registros algébricos das funções semióticas estabelecidas.

Figura 45 – Configuração epistêmica da *Atividade 3* – item (a)



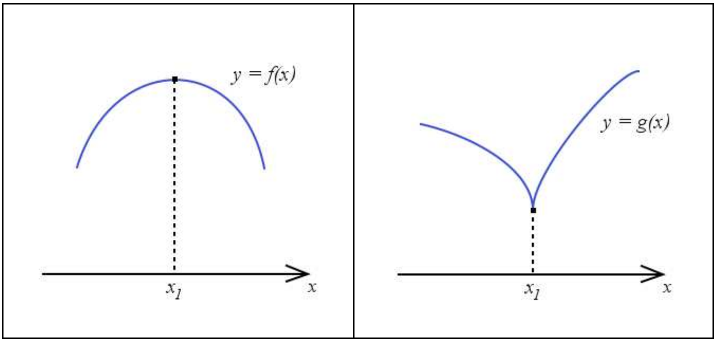
Fonte: Autor desta pesquisa.

Análise do item (b)

Duas partes de gráficos, uma delas contendo um máximo relativo e a outra um mínimo relativo, faziam parte deste item, como apresento no Quadro 14 – Excerto da *Atividade 3* – item (b). Para justificar tais pontos como extremo relativos, a única argumentação que temos até o momento é o Teste da Derivada Primeira, que deverá ser registrado algebricamente para responder este item.

Quadro 14 – Excerto da *Atividade 3* – item (b)

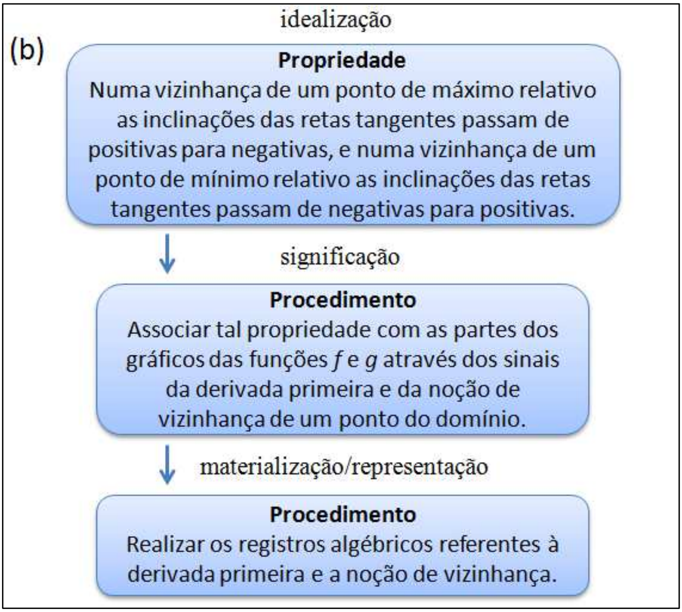
(b) A seguir são indicados duas partes de gráficos diferentes. Utilize a linguagem matemática simbólica para expressar os *extremos relativos*. Justifique o porquê de um ponto ser de máximo ou de mínimo relativo.



Fonte: Autor desta pesquisa.

A configuração epistêmica que apresento na Figura 46 aponta para uma idealização da propriedade que relaciona os extremos relativos ao comportamento das inclinações das retas tangentes à curva nas vizinhanças destes pontos. Entendo que acontece um processo de significação quando esta propriedade estabelece relação com os sinais da derivada primeira, que, em seguida, materializa-se na forma de registro algébrico.

Figura 46 – Configuração epistêmica da *Atividade 3* – item (b)



Fonte: Autor desta pesquisa.

Análise do item (c)

Este item lançava um questionamento baseando-se nas partes de gráficos apresentadas no item (b). Para respondê-lo é preciso realizar o registro algébrico do comportamento da derivada primeira nos extremos relativos apresentados no item anterior, observe o enunciado no Quadro 15.

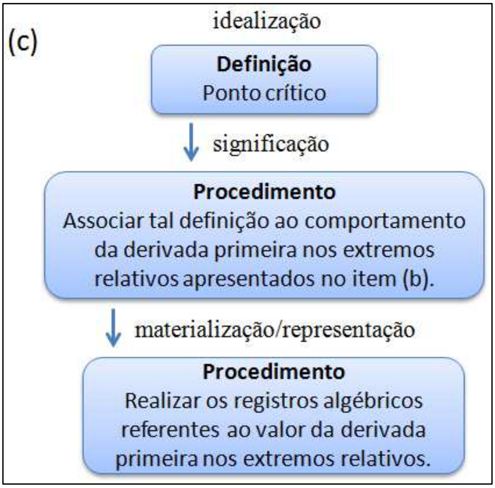
Quadro 15 – Excerto da *Atividade 3* – item (c)

(c) O que acontece com a derivada primeira nos pontos x_1 em cada função do item (b)?

Fonte: Autor desta pesquisa.

Nesta questão o conceito de ponto crítico precisava ser mobilizado. Há uma significação quando se relaciona este conceito com o comportamento da derivada primeira sobre os extremos relativos de f e g, que deve ser representada através de unidades algébricas indicando que, nestes extremos, a derivada primeira de f é nula e a de g não existe (Figura 47).

Figura 47 – Configuração epistêmica da *Atividade 3* – item (c)

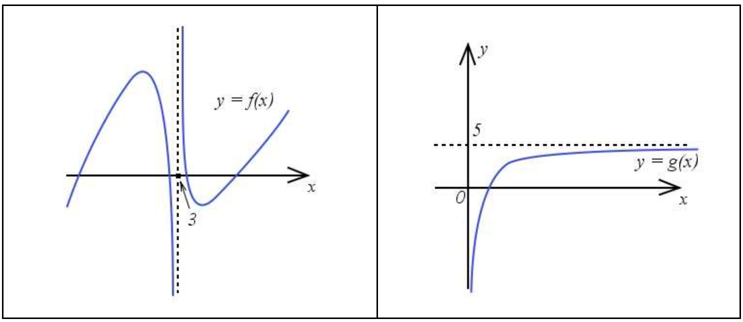


Fonte: Autor desta pesquisa.

Análise do item (d)

Quadro 16 – Excerto da *Atividade 3* – item (d)

(d) Represente algebricamente as assíntotas nos pedaços de gráficos a seguir:



Fonte: Autor desta pesquisa.

O último item envolvia o conceito de retas assintóticas verticais e horizontais (Quadro 16), em que se deve realizar uma associação entre tais retas e o comportamento de limites das funções f e g, para posterior representação algébrica destes limites, como apresento na configuração epistêmica da Figura48.

Figura 48 – Configuração epistêmica da *Atividade 3* – item (d)

Fonte: Autor desta pesquisa.

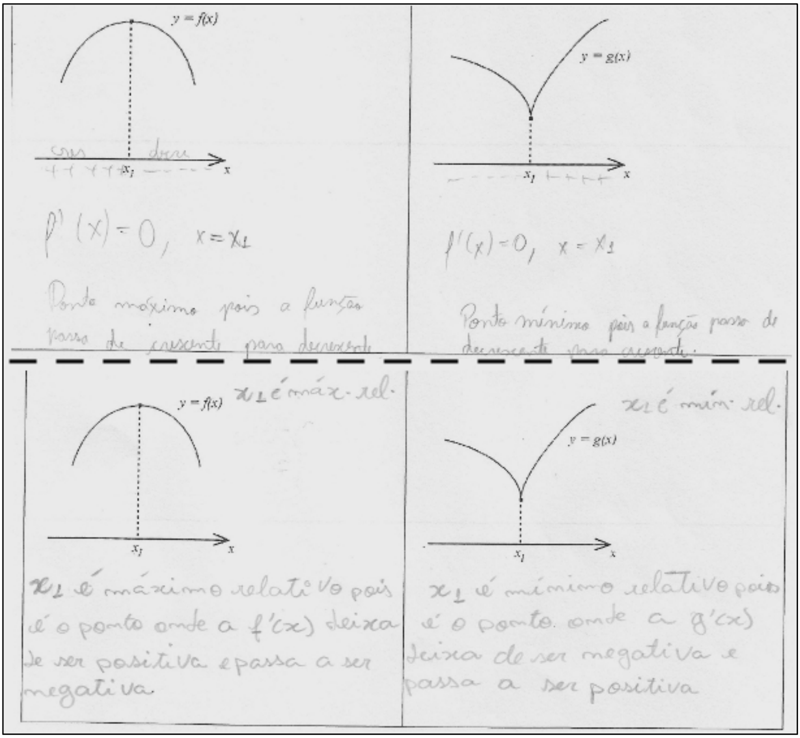
A partir da apresentação destas últimas quatro configurações epistêmicas, passarei para a análise das respostas dos estudantes nesta atividade.

Análise das respostas dos estudantes

Ao analisar o desenvolvimento dos estudantes nesta atividade pude observar que a grande maioria realiza associações entre as variações da função e o sinal de sua derivada primeira – ou seja, entre as propriedades '*ser crescente*' ↔ '*ter* $f'(x) > 0$' e '*ser decrescente*' ↔ '*ter* $f'(x) < 0$' –, e entre o comportamento da concavidade e o sinal de sua derivada segunda – '*ser c.p.c.*' ↔ '*ter* $f''(x) > 0$' e '*ser c.p.b.*' ↔ '*ter* $f''(x) < 0$'. Tais associações pareciam ainda não fazer parte das práticas pessoais de alguns estudantes quando eu analisei os desempenhos na *Atividade 2*, como pode-se constatar nos excertos apresentados nas Figuras 35 e 42.

A mobilização do Teste da Derivada Primeira para registrar os extremos relativos apresentados no item (b) parece ter sido realizada conforme a configuração epistêmica da Figura 14, entretanto houveram casos em que a justificativa foi feita através do registro linguístico, como apresento nos excertos da Figura 49. Nestes é possível perceber que há uma maneira de proceder que se justifica na variação entre crescimento e decrescimento da função nas vizinhanças dos extremos relativos apresentados e outra que associa as variações do sinal derivada primeira a estas vizinhanças.

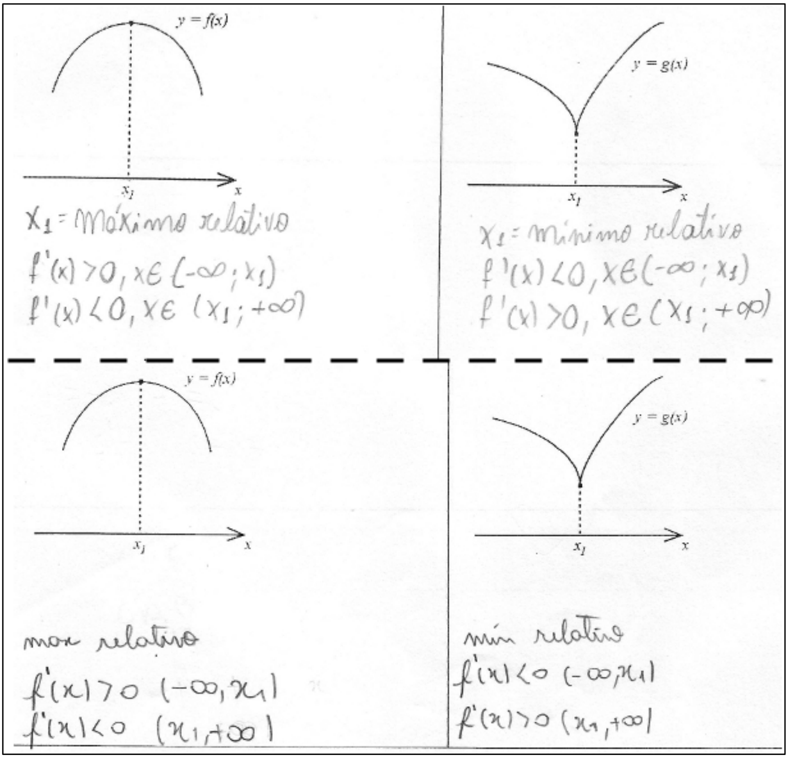
Figura 49 – Justificativa dos extremos relativos através do TD1ª no registro linguístico



Fonte: Estudantes, sujeitos desta pesquisa.

O uso da notação de vizinhança também mostrou não ser bem entendida por alguns estudantes, alguns acabaram por tentar representar uma noção de vizinhança através de intervalos, como apresento em mais uns excertos na Figura 50.

Figura 50 – Noção de vizinhança através de outras notações



Fonte: Estudantes, sujeitos desta pesquisa.

A respeito do comportamento da derivada primeira nos extremos relativos do item (b), como era questionado no item (c), houveram muitas respostas em branco, o que dá indícios de que não se efetivou uma associação entre a unidade gráfica dos extremos relativo e a derivada primeira nestes pontos, ser zero ou não existir. Nos casos em que o comportamento da derivada no ponto foi considerado, muitos estudantes expressaram que $g'(x_1) = 0$ quando na verdade $\nexists\, g'(x_1)$. Observe nos excertos da Figura 51.

Ainda com estes excertos (Figura 51) identifico que alguns estudantes ainda não identificam graficamente um ponto anguloso, tal objeto é considerado *unitário* na prática de esboço de curvas, pois é trabalhado nos estudos das derivadas. Desta forma, entendo que estes estudantes partilham apenas da configuração epistêmica da Figura 11 no que se refere à conceituação de ponto crítico, enquanto a configuração da Figura 12, que envolve pontos angulosos, ainda não faz parte de suas práticas.

Figura 51 – Conflito semiótico envolvendo extremos relativos em pontos angulosos

(c) O que acontece com a derivada primeira nos pontos x_1 em cada função do item (b)?

$f'(x) = 0,\ x = x_1$

$g'(x) = 0,\ x = x_1$

(c) O que acontece com a derivada primeira nos pontos x_1 em cada função do item (b)?

Em ambas as funções a derivada primeira tem seu valor igualado a zero nos pontos x_1.

(c) O que acontece com a derivada primeira nos pontos x_1 em cada função do item (b)?

$f'(x_1) = 0$

$g'(x_1) = 0$

(c) O que acontece com a derivada primeira nos pontos x_1 em cada função do item (b)?

a derivada primeira da função nos pontos x_1 é igual a zero. isso ocorre nos pontos extremos.

(c) O que acontece com a derivada primeira nos pontos x_1 em cada função do item (b)?

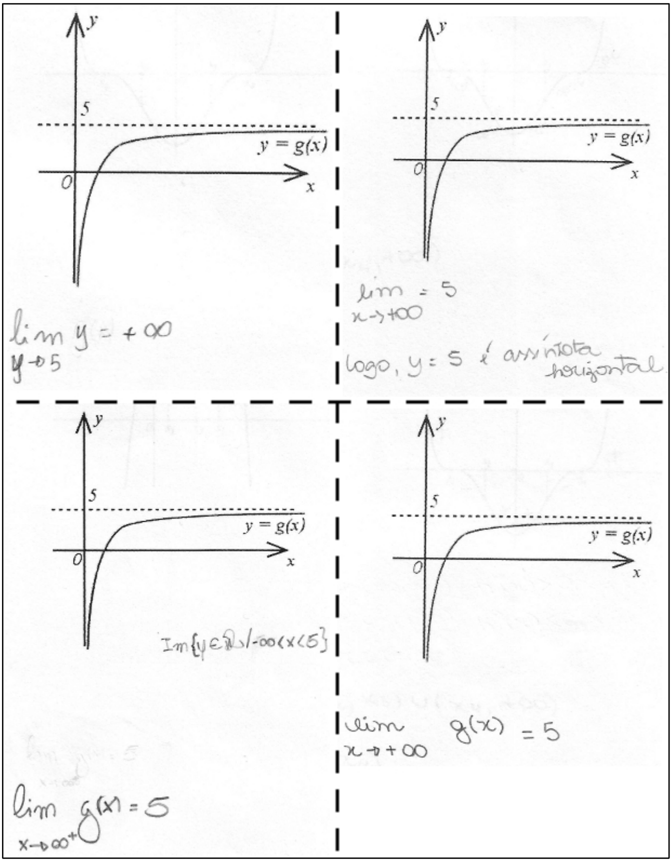
$f'(x_2) = 0$

$g'(x_2) = 0$

Fonte: Estudantes, sujeitos desta pesquisa.

A conversão das retas assíntotas apresentadas nos gráficos de f e g do item (d) em notações algébricas de limites foram devidamente efetuadas, mas vale considerar alguns casos que estudantes pareceram não identificar a assíntota vertical $x = 0$ do gráfico de g, como indico nos excertos na Figura 52. Esta assíntota era a única que não estava tracejada, o que dá indícios de que estes estudantes realizaram uma função semiótica do tipo '*r é uma reta assintótica*' $\leftrightarrow$ '*r é expressa de forma tracejada*'.

Figura 52 – Excertos de estudantes que não identificaram a assíntota $x = 0$ da função g



Fonte: Estudantes, sujeitos desta pesquisa.

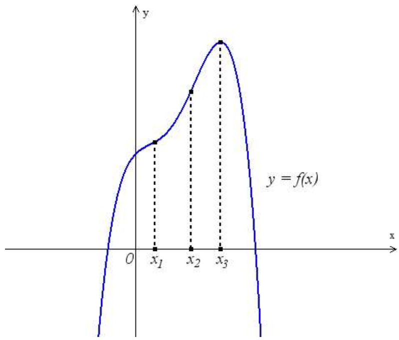
Passemos agora para a próxima atividade.

Atividade 4

Esta atividade também trata da conversão do registro gráfico para o registro algébrico, no entanto, agora serão os próprios estudantes que precisarão decompor o gráfico de f nas seguintes unidades significativas: variações, extremos relativos, concavidade e pontos de inflexão, classificação que ficou exposta no quadro durante a realização da atividade. Nos gráficos apresentados nos dois tipos de atividade (Tipo A e Tipo B), não haviam retas assintóticas, no entanto, esperava-se por uma representação do comportamento da função quando seus valores tendiam para mais e menos infinito através do uso das notações algébricas de limites. Observe o enunciado da atividade nos Quadro 17 e Quadro 18.

Quadro 17 – *Atividade 4* – Tipo A

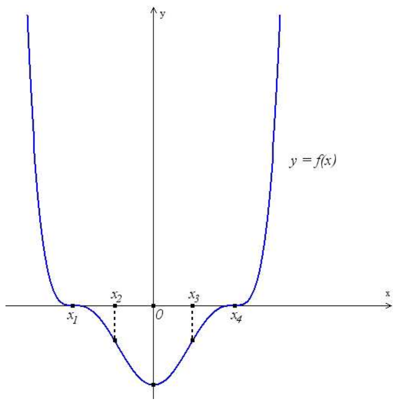
Observe o gráfico à direita e utilize os registros algébricos de derivadas e limites para representar as unidades significativas do mesmo.



Fonte: Autor desta pesquisa.

Quadro 18 – *Atividade 4* – Tipo B

Observe o gráfico à direita e utilize os registros algébricos de derivadas e limites para representar as *unidades significativas* do mesmo.



Fonte: Autor desta pesquisa.

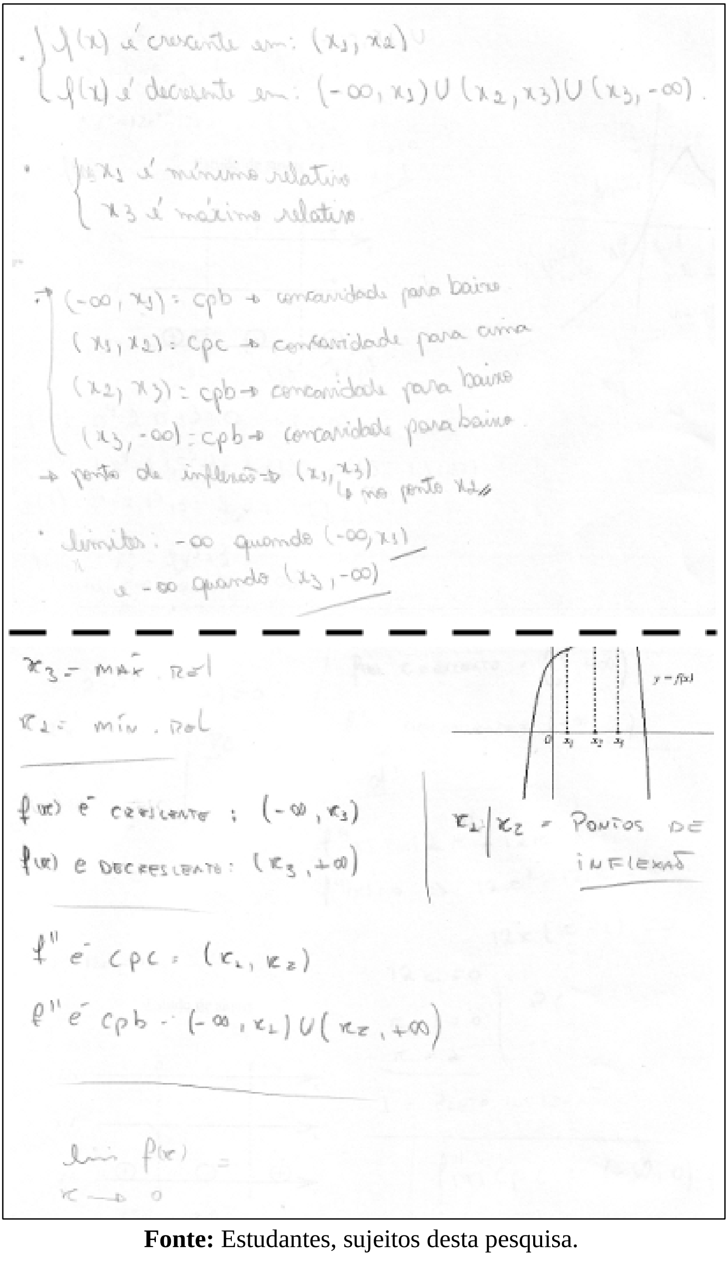
Para esta atividade eu não tentei criar configurações epistêmicas, acredito que muitas delas ficariam como as organizada na *Atividade 3*, com isso tomarei como referência as configurações epistêmicas da atividade anterior e passarei para a análise das respostas dos estudantes.

Análise das respostas dos estudantes

A maioria dos estudantes teve um bom desenvolvimento nesta atividade, a indicação, no quadro, das unidades básicas que estavam sendo procuradas foi fundamental para dar direcionamento às práticas dos estudantes.

Entre as dificuldades que pude identificar no desenvolvimento desta atividade, indico um grupo de estudantes que não realizaram as conversões de unidades gráficas em unidades algébricas, ou quando as realizaram não foram de todas as unidades. O reconhecimento das unidades gráficas parece estar sendo partilhada por estes estudantes, no entanto, as conversões foram feitas em unidades linguísticas e não algébricas, como apresento nos excertos da Figura 53.

Figura 53 – Estudantes que reconheceram as unidades gráficas da curva, mas não as converteram, ou converteram algumas, em unidades algébricas



Fonte: Estudantes, sujeitos desta pesquisa.

Observe que particularmente o primeiro excerto mostra uma estudante que identificou todas as unidades gráficas, no entanto, todo o registro foi feito linguisticamente, ou seja, não pude observar nenhuma relação entre estas unidades e o comportamento das derivadas, inclusive na escrita dos limites ela tendeu a usar registro linguístico.

Houve ainda um pequeno grupo de estudantes que demonstrou não identificar e/ou classificaram corretamente as unidades gráficas da curva, o que comprometeu seriamente suas práticas.

Atividade 5

A última atividade desta sequência de estudos é um "resgate" do que foi feito na *Atividade 1* da primeira sequência de estudos, esta atividade visa conversões do registro algébrico para o registro gráfico (Quadros 19 e 20). Mais uma vez irei utilizar configurações epistêmicas já apresentadas anteriormente, neste caso, as apresentadas na *Atividade 1*. Passemos então a análise das respostas dos estudantes.

Quadro 19 – *Atividade 5* – Tipo A

Esboce o gráfico da curva $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3$.

Fonte: Autor desta pesquisa.

Quadro 20 – *Atividade 5* – Tipo B

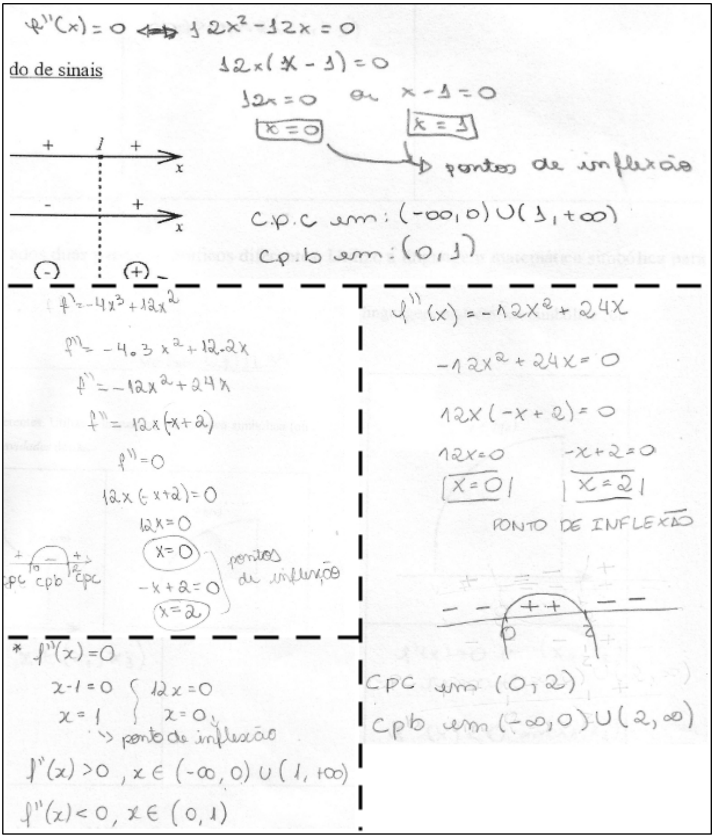
Esboce o gráfico da curva $f(x) = -x^4 + 4x^3 - 5$.

Fonte: Autor desta pesquisa.

Análise das respostas dos estudantes

O aproveitamento nesta atividade também foi muito bom, diferentemente do que aconteceu na *Atividade 1* (Figura 29), a grande maioria dos estudantes realizaram o processo de reificação das informações referentes a derivada primeira para realizar o esboço do gráfico. Ainda houveram casos em que os estudantes cometeram erros ao realizar o estudo de sinais de alguma das derivadas ou mesmo no desenvolvimento de alguma equação, mas foram poucas ocorrências. Quanto à derivada segunda posso dizer que os estudantes associaram o seu sinal à concavidade da função, no entanto, houveram ainda alguns casos que o discurso ‘Os pontos do domínio da função em que a derivada segunda se anula são pontos de inflexão’ parece ter circulado, como mostro em alguns excertos da Figura 54.

Figura 54 – Associações entre a derivada segunda nula e o ponto de inflexão



Fonte: Estudantes, sujeitos desta pesquisa.

Nestes excertos, por mais que se tenha tido a representação do estudo de sinais da derivada segunda, mais uma vez parece que as argumentações para indicar os pontos de inflexão se basearam diretamente em procurar pelos pontos em que derivada segunda se anula. O estudo de sinal parece ter servido apenas para classificação da concavidade da função.

Algumas considerações a respeito das Atividades 3, 4 e 5

Mais uma vez menciono que as funções e conflitos semióticos que identifiquei nesta sequência de estudo são referentes ou a uma maioria de estudantes, ou a grupos que pareciam estar fazendo o mesmo uso da linguagem em determinados aspectos. Sem dúvida encontrei conflitos semióticos que não expus durante a análise, mas isso ocorreu porque foram casos particulares a um estudante, e/ou então por serem conflitos que indicavam ter origens em práticas mais “elementares” que os estudantes ainda não dominavam, como os já comentados estudos de sinais de funções, resolução de equações e cálculo de limites, além de notações de intervalos, determinação de domínio, conceituação de limites laterais, etc.

Após toda esta análise, em termos de aprendizagem, afirmo que os estudantes partilham das configurações epistêmicas apresentadas nas Figuras 11, 13 e 15 – referentes a pontos críticos em que existe a derivada da função no ponto, variações e concavidade –, quanto à configuração da Figura 12 – envolvendo o conceito de pontos críticos em que não existe a derivada – os estudantes parecem não serem capazes de reconhecer um ponto anguloso, ou se o reconhecem ainda não associam ao fato de que neste ponto não existe uma reta tangente, e, consequentemente, a derivada primeira não existe.

A configuração referente ao Teste da Derivada Primeira apresentada na Figura 14 também parece ser partilhada pelos estudantes, mas pelos desenvolvimentos que pude analisar ainda há grupos de estudantes que precisam realizar práticas envolvendo os registros algébricos para poderem classificar suas práticas como acadêmicas. E, por fim, ainda foi possível identificar alguns estudantes que justificaram os pontos de inflexão procurando por valores do domínio da função que anulam a derivada segunda, o que me permite concluir que não associam o conceito de ponto de inflexão e a propriedade indicada na configuração epistêmica da Figura 16.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Optei por uma organização das considerações finais separando-as em três partes, como apresento a seguir. Esta separação foi feita de maneira que eu pudesse melhor argumentar a respeito da resposta que forneço a questão de pesquisa inicialmente formulada.

Considerações a respeito do processo de aprendizagem

Tomar como objeto de análise o uso da linguagem matemática permitiu a identificação de muitos aspectos do processo de aprendizagem. Entender o significado a partir de configurações de objetos matemáticos, como sugere o EOS, possibilitou um "mapeamento" das práticas dos estudantes em sala de aula, mapeamento este que permitiu gerar uma descrição pontual dos significados pessoais dos mesmos.

Durante a análise dos dados, foi possível articular as concepções de aprendizagem das duas teorias. A concepção que Duval apresenta, baseada na coordenação de mais de um registro semiótico de representação, pôde ser integrada à concepção que entende a aprendizagem como uma apropriação de significados institucionais, proposta pelo EOS. Coordenar vários registros semióticos de representação é uma atividade inerente às práticas acadêmicas de esboço de curvas, e ao adotar a noção de aprendizagem do EOS, os vários registros de representação são pensados, cada um deles, como objetos matemáticos. Fazer esta consideração permitiu que tais registros fossem parte integrante das configurações epistêmicas e cognitivas sugeridas por Godino e seus colaboradores, e assim sendo analisados não apenas em termos de tratamentos e conversões, mas também através das funções semióticas que podem ser estabelecidas com os entes sugeridos pela ontologia desta teoria.

Como mencionarei mais adiante quando apresentar as considerações sobre o ensino, a metodologia que foi adotada nas práticas em sala de aula baseavam-se principalmente na coordenação dos registros gráficos e algébricos. Foi dando atenção para o uso que os estudantes fizeram da linguagem matemática em suas práticas que pude identificar aspectos do processo de aprendizagem.

As configurações epistêmicas serviram de base de comparação para tentar entender os significados pessoais dos estudantes, elas apontaram para conflitos semióticos bem pontuais em tais significados envolvendo unidades gráficas e algébricas, e forneceram um panorama do aprendizado dos mesmos.

Após trabalhar as duas sequências de estudos, no que diz respeito à prática de esboço de curvas, ainda identifico que os estudantes apresentam dois conflitos semióticos que devem ser superados, o primeiro diz respeito aos sistemas de práticas relacionadas aos pontos críticos. De acordo com a análise apresentada no capítulo anterior, foi estabelecida uma função semiótica[41] entre as unidades ‘ $f'(x_0) = 0$ ’ $\leftrightarrow$ ‘ x_0 é um ponto crítico’, mas não aconteceu o mesmo entre ‘ $\nexists\ f'(x_0)$ ’ $\leftrightarrow$ ‘ x_0 é um ponto crítico’. Num outro sentido, pude ainda verificar as associações ‘ x_0 é um extremo relativo’ $\rightarrow$ ‘ x_0 é um ponto crítico’ $\rightarrow$ ‘ $f'(x_0) = 0$ ’ (Figura 51). Isso mostra que o reconhecimento da existência ou não de derivadas em ponto angulosos a partir de gráficos de funções, entre outras conceituações, não fazem parte dos significados pessoais dos estudantes.

O segundo conflito semiótico está relacionado às práticas referentes aos pontos de inflexão. Muitas vezes no decorrer da análise mencionei que parece ter emergido o discurso ‘Os pontos do domínio da função em que f'' se anula são os pontos de inflexão’, que pode ser representado, em unidades algébricas e linguísticas, através da associação ‘ $f''(x_0) = 0$ ’ $\rightarrow$ ‘ x_0 é um ponto de inflexão’[42].

O que tentarei fazer agora é levantar uma hipótese de alguns fatores que podem estar contribuindo para tal discurso circular entre os estudantes e, para tanto, irei tentar mais uma vez operar com a TRRS e o EOS.

Na seção 1.1 (p. 23), quando apresentei alguns dos elementos da TRRS, apresentei o conceito de *congruência semântica* entre registros, no entanto, referi-me a ele mencionando registros pertencentes a sistemas semióticos diferentes, além de mencionar que há uma congruência semântica entre dois registros quando as *unidades significativas* destes estivessem **organizadas de maneira muito**

---

[41] Considere x_0 como um ponto do domínio da função f.

[42] Não indico que houve a conversão no sentido oposto porque não entendo que as atividades aplicadas nas sequências de estudo pudessem me garantir isso. No entanto, a associação ‘ x_0 é um ponto do gráfico em que a há mudança do comportamento da concavidade’ $\leftrightarrow$ ‘ x_0 é um ponto de inflexão’ parece ter sido efetivada, como mostram os desempenhos dos estudantes na *Atividade 4*.

semelhante. A conceituação que eu trouxe de unidade significativa baseava-se em um signo ou numa organização mínima de signos que serviriam para representar alguma coisa.

Entretanto, ao analisar o trabalho dos estudantes na *Atividade 1* e identificar a argumentação ‘Os pontos do domínio da função em que a derivada segunda se anula são pontos de inflexão’, o conceito de congruência semântica veio-me a mente de maneira muito instantânea, o que não me trouxe surpresas, uma vez que, além do EOS, é através das “lentes” teóricas da TRRS que estou me colocando frente aos dados desta pesquisa.

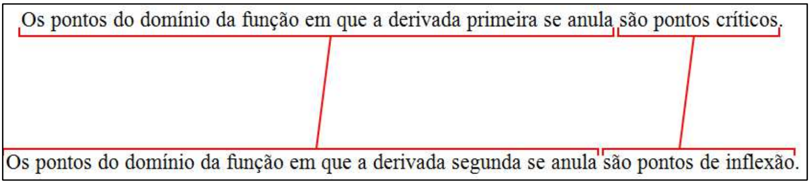
O conceito de congruência semântica não pode ser utilizado na argumentação apresentada acima por não se tratar de uma conversão entre registros, no entanto, gostaria de chamar atenção para alguns procedimentos que comumente são adotados pelos estudantes em suas práticas.

Para a realização do estudo de sinais da derivada primeira o procedimento adotado é o de se começar igualando a expressão da derivada à zero – além de procurar por pontos do domínio em que a mesma não exista – para então se identificar os pontos críticos. Observe que a dinâmica parece ser: ‘derivo a função e igualo a zero para identificar algum ponto crítico’.

De maneira muito semelhante, para se realizar o estudo de sinais da derivada segunda o mesmo procedimento de igualar a derivada à zero é adotado, o que me permitiu pensar que esta semelhança entre os procedimentos, possa ser tratada como uma “*congruência entre procedimentos*” (verifique as Figuras 27, 28, 29).

A linha de racionalidade que quero apresentar é a seguinte, ‘se ao calcular os pontos em que a derivada primeira se anula eu obtenho pontos críticos, então ao calcular os pontos em que a derivada segunda se anula eu encontro os pontos de inflexão’. É o que tento esboçar com a Figura 55.

Figura 55 – "Congruência entre procedimentos" que parecem gerar conflitos semióticos



Fonte: Autor desta pesquisa.

Não se trata de criar (ou cunhar) um novo elemento teórico, o que faço é utilizar a qualidade "organizadas de maneira muito semelhante" da noção de congruência semântica para tentar expressar o grau de semelhança entre os procedimentos algébricos adotados.

Após a aplicação da segunda sequência de estudos não houve mais encontros de aula com a turma, no entanto, caso houvesse, seria a partir de tal hipótese que eu pensaria os próximos encaminhamentos para o ensino, assunto que passarei a trata a seguir.

Considerações a respeito do processo de ensino

A TRRS foi importante para a organização dos encontros, pois permitiu que ficasse definida a metodologia que seria utilizada para a realização das práticas em sala de aula. As considerações a respeito do uso de várias representações foram fundamentais para optar por trabalhar, principalmente, através das coordenações entre registros algébricos e gráficos.

Uma vez decidido como proceder, as *Formas básicas* de Moretti, Ferraz e Ferreira (2008) tornaram-se importantes unidades para a organização das configurações epistêmicas. Estas configurações possibilitaram a elaboração de configurações cognitivas que, como já mencionei, mapearam os significados cognitivos e apontaram para conflitos semióticos particulares.

Trabalhar a partir da construção de configurações de objetos matemáticos faz com que o processo de ensino se realize através de constantes replanejamentos, cada configuração cognitiva pode indicar um ou mais conflitos semióticos, o que demandaria a busca de novas estratégias de ensino que possibilitem superar tais conflitos.

Particularmente nos dois conflitos semióticos apresentados nas considerações a respeito do processo de aprendizagem, o primeiro deles envolvendo ponto críticos, pontos angulosos e extremos relativos mostra a necessidade de um resgate das práticas que relacionam pontos angulosos e a não existência de derivadas nestes pontos – revisando principalmente as propriedades, procedimentos e argumentos referentes a retas tangentes a curvas e derivadas laterais. Com isso creio que seria possível estabelecer as associações

$$\text{‘ } x_0 \text{ é um extremo relativo’} \rightarrow \text{‘ } x_0 \text{ é um ponto crítico’} \leftrightarrow \begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ \quad \text{ou} \\ \nexists\ f'(x_0) \end{cases}$$

Quanto ao segundo conflito – envolvendo derivada segunda nula e o conceito de ponto de inflexão –, pude perceber que alterações importantes são necessárias para a condução do processo de ensino. Segundo a interpretação que fiz deste conflito a partir da TRRS e o EOS – momentaneamente classificando de uma “congruência entre procedimentos” –, entendo que houve um processo de significação baseado na comparação entre procedimentos. Ao refletir sobre motivos que pudessem ter levado a este tipo de significação, identifico que a maneira que organizei as práticas em sala de aula influenciou fortemente este processo.

Para realizar o processo de ensino optei por adotar a seguinte sequência para estudar os conteúdos programáticos da disciplina: pontos críticos, variações, extremos relativos, concavidade e pontos de inflexão. E por ter tomado esta sequência, parece que dei possibilidade para que o procedimento de derivar a função e igualar à zero já pudesse ser associado à obtenção de alguma informação a respeito do gráfico da função, neste caso, obter algum ponto crítico. Este procedimento foi várias vezes repetido para se estudar as variações, os extremos relativos e, finalmente, a concavidade. Começar a prática trabalhando com funções polinomiais também é um fator que entendo ter legitimado ainda mais o conflito.

Uma reorganização que poderia ser adotada para que este conflito não aconteça, ou pelo menos diminua seu impacto no processo de aprendizagem, é adotar outra sequência para o estudo dos conteúdos nas primeiras aulas, sequência esta que partiria das variações e concavidades da função atreladas ao estudo de sinais das derivadas primeira e segunda, para somente depois realizar as análises pontuais para identificar pontos críticos, extremos relativos e pontos e inflexão. Trabalhar juntamente estas três classificações de pontos também permite uma associação do tipo ‘ x_0 é ponto de inflexão’ $\leftrightarrow$ ‘ x_0 é ponto crítico’, as sequências de estudo que utilizei-me não me pareceram permitir alguma conclusão a respeito disso.

Ao revisar como o esboço de curvas é apresentado em livros de Cálculo, é nítida uma separação que parece seguir uma ordenação do tipo: primeiro se deve estudar sobre as informações que a derivada primeira fornece a respeito do gráfico da função, para, em seguida, estudar sobre as informações que a derivada segunda fornece a respeito do mesmo gráfico.

Considerações gerais

Ainda na introdução deste trabalho apresentei a questão que serviu de direcionamento para as ações adotadas: “De que maneira uma análise do uso da linguagem matemática na prática de esboço de curvas, no ensino superior, permite intervenções didáticas no processo de ensino e aprendizagem desta prática?”. Entendo que as duas considerações que acabo de apresentar neste capítulo me permitem sugerir algumas respostas para ela.

Analisando o uso que os estudantes fizeram da linguagem matemática identifiquei muitos fragmentos a respeito de seus aprendizados, estes fragmentos foram expressos através de configurações cognitivas e forneceram alguns rastros das linhas de racionalidades dos estudantes durante muitas de suas práticas, o que provoca reformulações na condução do processo de ensino.

Para pensar o ensino das práticas referentes ao esboço de curvas, as configurações epistêmicas construídas serviram de parâmetro para comparação e redirecionamento das práticas dos estudantes visando que os mesmos se inserissem nas práticas acadêmicas.

Portanto, entendo que as intervenções que uma análise do uso da linguagem matemática, em práticas de esboço de curvas, fornece ao processo de aprendizagem são um mapeamento e uma interpretação dos processos de significação que vem ocorrendo em sala de aula, mapeamento este organizado a partir do uso que os estudantes fazem da linguagem matemática que, neste trabalho, puderam ser traçadas através das configurações cognitivas; e para o processo de ensino, as intervenções aconteceram através da precisão e pontualidade que as configurações cognitivas forneceram para se realizar reformulações neste processo.

O objetivo de realizar um estudo a respeito dos processos de ensino e aprendizagem de matemática através dos usos que são feitos da linguagem foi alcançado. As ferramentas teóricas utilizadas, a TRRS e o

EOS, permitiram elaborar importantes classificações dos usos da linguagem que, por sua vez, forneceram maior compreensão a respeito destes processos.

Em relação à prática do esboço de curvas, esta pesquisa traz contribuições que indicam a possibilidade de conflitos semióticos relacionando pontos críticos, extremos relativos e pontos de inflexão quando trabalhados conforme algumas abordagens que vem sendo adotadas por bibliografias na área de Cálculo referentes a este assunto, ela ainda sugere outra maneira de proceder que visa minimizar estes conflitos.

REFERÊNCIAS

BIKNER-AHSBAHS, A.; PREDIGER, S. Networking of Theories: an approach for exploiting the diversity of theorical approachs. In: SRIRAMAN, B.; ENGLISH, L. (Eds.). *Theories of Mathematics Education: seeking new frontiers*, p. 483-505. Berlin: Springer, 2010.

BORBA, M. C. A pesquisa qualitativa em educação matemática. Publicado em CD nos *Anais da 27ª reunião anual da Anped*, Caxambu - MG. 2004.

DUVAL, R . *Registre de répresentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, IREM – ULP, Strasbourg, v. 5, p. 37-64, 1993.

______. *Semiosis y Pensamento Humano:* Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Santiago de Cali, Colômbia: Universidad del Valle, Instituto de Educación e Pedagogía, Grupo de Educación Matemática, 2004.

______. *Semiósis e Pensamento Humano:* Registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Fascículo I. Trad. Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

______ . Gráficos e equações: a articulação de dois registros. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. *REVEMAT*, v. 6, n. 2, p. 96-112, 2011.

______. Diferenças semânticas e coerência matemática: introdução aos problemas de congruência. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. *REVEMAT*, v. 7, n. 1, p. 97-117, 2012.

ECO, U. *Tratado geral de semiótica*. São Paulo: Editora Perspectiva, 1997.

ERNEST, P. A semiotic perspective of mathematical activity: The case of number. *Educational Studies in Mathematics*. v. 61, n. 1/2, p. 67-101, 2006.

GODINO, J. D. Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, v. 22, n. 2.3, p. 237-284, 2002. Disponível em: <http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm>. Acesso em 12 de fev. de 2011.

______. *Marcos teóricos sobre el conocimiento y el aprendizaje matemático*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, 2010. Disponível em: <http://www.ugr.es/~jgodino/indice_fundamentos.htm>. Acesso em 12 de fev. de 2011.

GODINO, J. D.; BATANERO, C. Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 14, n. 3, p. 325-355, 1994. Disponível em: <http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm>. Acesso em 15 de dez. de 2011.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. Um enfoque onto-semiótico do conhecimento e a instrução matemática. Trad. Edson Crisóstomo dos Santos e Claudia Lisete Oliveira Groenwald. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, v. 10, n. 2, p. 7-37, jul/dez 2008. Disponível em: <http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm>. Acesso em 12 de fev. de 2011.

GODINO, J. D.; FONT, V.; WILHELMI, M. R.; LURDUY, O. Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics*, v. 77, n. 2, p. 247-265, 2011. (Versão em espanhol) Disponível em: <http://www.ugr.es/~jgodino/eos/sistemas/semioticos/24junio2009.pdf>. Acesso em 20 de jun. de 2012.

GONÇALVES, M. B.; FLEMMING, D. M. Cálculo A. São Paulo: Makron Books, 2000.

GUIDORIZZI, H. L. *Um Curso de Cálculo*. 5ª ed. Vol. 1. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

LEITHOLD, L. *O cálculo com geometria analítica*. 3ª ed. Vol. 1. São Paulo: Harbra, 1994.

LERMAN, Stephen. Theories of Mathematics Education: Is Plurality a Problem? In: SRIRAMAN, B.; ENGLISH, L. (Eds.). *Theories of Mathematics Education: seeking new frontiers*, p. 97-117. Berlin: Springer, 2010.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. *A Pesquisa em educação*: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

LUIZ, L. S. *Esboço de curvas no ensino superior*: uma proposta baseada na interpretação global de propriedades figurais e uso de tecnologias. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina.

MORETTI, M. T. O papel dos Registros de representação na aprendizagem de Matemática. *Contrapontos* (UNIVALI), Itajaí, v. 1, n. 1, p. 343-362, 2002.

______. A Translação como recurso no esboço de curvas por meio da interpretação global de propriedades figurais. In: Sílvia Dias Alcântara Machado. (Org.). *Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica*. 1 ed. Campinas: Papirus, v. 1, p. 149-160, 2003.

MORETTI, M. T.; FERRAZ, G. A.; FERREIRA, V. G. G. Estudo da conversão de funções entre registros simbólico e gráfico no ensino universitário. *Revista Quadrante*, v. 17, n. 2, p. 97-122, 2008.

MORETTI, M. T.; LUIZ, L. S. O procedimento informático de interpretação global no esboço de curvas no ensino universitário. *Educação Matemática Pesquisa*. v.12, n.3, p. 529-547 2010.

RADFORD, L. Connecting theories in mathematics education: challenges and possibilities. *ZDM Mathematics Education*, V. 40, p. 317-327, 2008.

SILVA, M. O. *Esboço de curvas: uma análise sob a perspectiva dos registros de representação semiótica*. 2008. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina.

SIMÕES, E. *Wittgenstein e o problema da verdade*. Belo Horizonte: Argvmentvm, 2008.

SPINELLI, W; SOUZA, M. H. *Matemática*. São Paulo: Editora Ática, 8ª série, 2000.

STEWART, J. Cálculo. Vol. 1. 5ª ed. São Paulo: CENGAGE Learning, 2009.

WITTGENSTEIN, L. *Investigações Filosóficas*. Trad. José Carlos Bruni. 2. ed. São Paulo: Abril Cultural, 1979. (Os pensadores).

ANEXO A – Plano de Ensino da disciplina de Cálculo A

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

<table>
<tr><th colspan="5">SEMESTRE - 2012/1</th></tr>
<tr><th colspan="5">I. IDENTIFICAÇÃO DA DISCIPLINA</th></tr>
<tr><th rowspan="2">Código</th><th rowspan="2">Nome da disciplina</th><th colspan="2">Horas/aula semanais</th><th rowspan="2">Horas/aula semestrais</th></tr>
<tr><td>Teóricas</td><td>Práticas</td></tr>
<tr><td>MTM 5161</td><td>CÁLCULO A</td><td>72</td><td>-</td><td>72</td></tr>
<tr><th colspan="5">II. PROFESSORES MINISTRANTES</th></tr>
<tr><td colspan="5">Cleverson Roberto da Luz, Fernando de Lacerda Mortari, Flavia Tereza Giordani, Jardel Morais Pereira, Jauber Cavalcante de Oliveira, Mara Jane Neves Lima Freire, Marcelo Ferreira Lima Carvalho, Melissa Weber Mendonça, Mericles Thadeu Moretti e Paul Krause.</td></tr>
<tr><th colspan="5">III. PRÉ-REQUISITOS</th></tr>
<tr><th colspan="2">Código da disciplina</th><th colspan="3">Nome da disciplina</th></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><th colspan="5">IV. CURSOS PARA OS QUAIS A DISCIPLINA É OFERECIDA</th></tr>
<tr><td colspan="5">Engenharia Elétrica; Engenharia Mecânica; Engenharia Civil; Engenharia Sanitária; Engenharia de Alimentos; Engenharia Química; Engenharia de Produção Elétrica; Engenharia de Produção Mecânica; Engenharia de Produção Civil; Engenharia de Produção e Sistemas; Ciências da Computação; Eng. de Controle e Automação.</td></tr>
<tr><th colspan="5">V. EMENTA</th></tr>
<tr><td colspan="5">Funções reais de variável real; funções elementares do cálculo; noções sobre limite e continuidade; a derivada; aplicações da derivada; integral definida e indefinida.</td></tr>
<tr><th colspan="5">VI. OBJETIVOS</th></tr>
<tr><td colspan="5">Identificar algumas funções quando apresentadas sob formas algébricas ou sob a forma de gráficos; Definir limites; Calcular limites; Analisar a continuidade de funções; Resolver problemas geométricos de cálculo de equações de retas tangentes e normais às curvas, utilizando a interpretação geométrica da derivada; Encontrar a derivada de funções diversas aplicando, sempre que possível, em situações contextualizadas; Calcular velocidade e aceleração usando derivada; Resolver problemas práticos de taxa de variação; Aplicar derivadas no cálculo de limites; Analisar o comportamento de funções determinando os valores máximos e mínimos e esboçar gráficos; Resolver problemas práticos de maximização e minimização; Conceituar a integral definida; Calcular integral definida e indefinida através dos métodos apresentados; Calcular áreas através de integral definida.</td></tr>
</table>

VII. CONTEÚDO PROGRAMÁTICO
Unidade 1 – Funções reais de variável real e funções elementares do cálculo. Definição, domínio e imagem. Gráficos. Funções: linear, modular, quadrática, polinomial, racional. Função par e função ímpar. Função composta. Função inversa. Funções elementares (exponencial, logarítmica, trigonométricas, trigonométricas inversas, hiperbólicas) **Unidade 2 – Noções sobre limite e continuidade.** Limites: noção intuitiva, definição e propriedades. Limites laterais. Limites no infinito e limite infinitos. Limites fundamentais. Assíntotas horizontais e verticais. Continuidade: definição e propriedades. **Unidade 3 – A derivada.** Definição. Interpretação geométrica. Derivadas laterais. Regras de derivação. Derivada de função composta (regra da cadeia). Derivada da função inversa. Derivada de funções elementares. Derivadas sucessivas. Derivação implícita. **Unidade 4 – Aplicações da derivada.** Taxa de variação. Teorema de Rolle e Teorema do valor médio. Análise do comportamento de funções: extremos de uma função, funções crescentes e decrescentes. Critérios para determinar os extremos de uma função. Concavidade e ponto de inflexão. Esboço de gráficos. Problemas de otimização. Diferencial. Regra de L'Hospital. **Unidade 5 – Integral definida e indefinida.** Integral definida: definição e propriedades. Teorema Fundamental do Cálculo. Integral indefinida: definição e propriedades. Integrais imediatas. Integração por substituição e por partes. Aplicação da integral definida: cálculo de área.
VIII. METODOLOGIA DE ENSINO / DESENVOLVIMENTO DO PROGRAMA
A metodologia se baseará em encontros semanais e de acordo ao art. 62 da Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, nos quais ocorrerão aulas expositivas, resolução de problemas e listas de exercícios.
IX. METODOLOGIA DE AVALIAÇÃO
O professor da disciplina discutirá com os alunos o plano da disciplina e definirá o número de avaliações que deverá ser de no mínimo três. Combinará com os alunos, sempre com antecedência, o dia e hora de cada prova. A média semestral **M** será composta por estas avaliações. Estará aprovado o aluno com frequência suficiente e que obtiver média **M** maior ou igual a 5,75. O aluno com frequência suficiente e que apresentar média **M** menor que 5,75 e maior ou igual a 3,0 terá direito a realizar uma prova final (**Pf**) sobre todo o conteúdo. Neste caso, a média final, **Mf** será dada por **Mf = (M + Pf)/2** e estará aprovado aquele aluno com média maior ou igual a 5,75.
X. AVALIAÇÃO FINAL
Será considerado aprovado o aluno com frequência suficiente e média **M** ou **Mf** igual ou superior a 5,75.

XI. CRONOGRAMA TEÓRICO	
Data	**Atividade**
	Uma vez que as turmas têm os seus próprios horários, cada professor segue um cronograma específico da sua turma.
XII. CRONOGRAMA PRÁTICO	
Data	**Atividade**
XIII. BIBLIOGRAFIA BÁSICA	
FLEMMING, D. M. & GONÇALVES, M. B. Cálculo A. São Paulo: Makron, 19 GUIDORIZZI, H. L. Um Curso de Cálculo. Vol. 1, 2ª Edição. Rio de Janeiro: LCT, 1985. (Também disponibilizado pelo autor em versão eletrônica). KUELKAMP, Nilo. Cálculo I, Florianópolis: Editora da UFSC, 2001. STEWART, James. Cálculo. V.1. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.	
XIV. BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR	
THOMAS JR, G. B. & FINNEY, R. L. Cálculo e geometria analítica. V. 1. Rio de Janeiro: Editora LTC, 1988.	

Florianópolis, 13 de fevereiro de 2012

Flávia Tereza Giordani
Coord. da disciplina

ANEXO B – Primeira sequência de estudos – Atividades 1 e 2

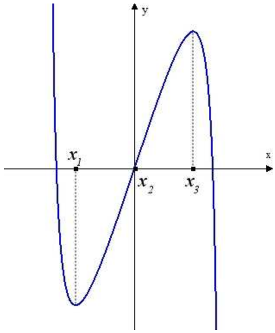
Estudante: ________________________________ Matrícula: _________

Atividade 1

Considere a função $h(x) = 3x^5 - 5x^3 + 3$. Calcule os intervalos de crescimento e decrescimento da função *h*, seus pontos de máximo e mínimo relativos, pontos de inflexão e a concavidade. Em seguida faça um esboço do gráfico de *h*.
(*Observação:* Para esboçar o gráfico, verifique como a função se comporta quando *x* tende a $+\infty$ e $-\infty$)

Atividade 2

Observe o gráfico à direita da função *f* e responda:



(a) Quais os intervalos de crescimento e decrescimento da função *f* ?

(b) O que você pode dizer da derivada primeira de *f* nestes intervalos identificados no item (a)?

(c) A função possui pontos de máximo ou mínimo relativos? Quais?

(d) O que se pode dizer da derivada primeira nestes pontos do item (c)?

(e) Como se comporta a concavidade da função *f* ? (Classifique utilizando-se de intervalos)

(f) O que se pode dizer da derivada segunda de *f* nestes intervalos que você indicou no item (e)?

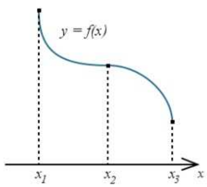
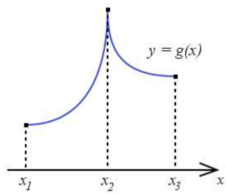
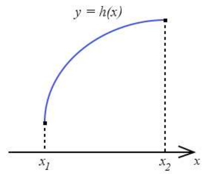
(g) Nos pontos x_1 e x_3, de que maneira o Testa da Derivada Primeira (TD1ª) pode ser utilizado e o que ele indica?

ANEXO C – Segunda sequência de estudos – Atividades 3, 4 e 5

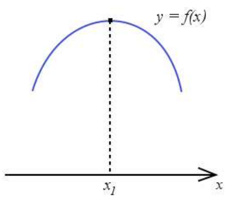
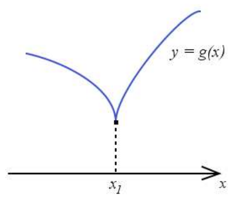
Estudante: __________________________________ Matrícula: _________

Atividade 3

(a) A seguir são indicados três partes de gráficos diferentes. Utilize a linguagem matemática simbólica (ou registro algébrico) para expressar as *variações e concavidades* destas.

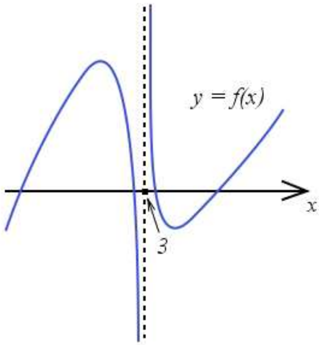
		

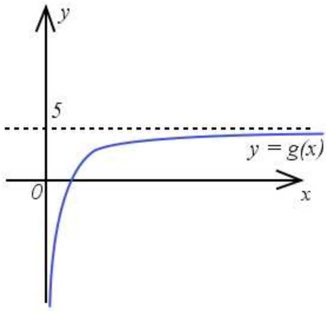
(b) A seguir são indicados duas partes de gráficos diferentes. Utilize a linguagem matemática simbólica para expressar os *extremos relativos*. Justifique o porquê de um ponto ser de máximo ou de mínimo relativo.

(c) O que acontece com a derivada primeira nos pontos x_1 em cada função do item (b)?

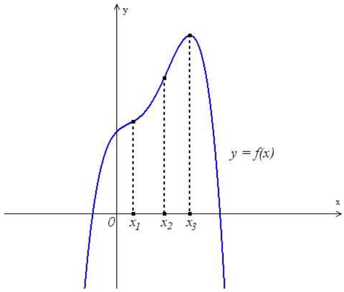
(d) Represente algebricamente as assíntotas nos pedaços de gráficos a seguir:





Atividade 4 – [Tipo A]

Observe o gráfico à direita e utilize os registros algébricos de derivadas e limites para representar as *unidades significativas* do mesmo.

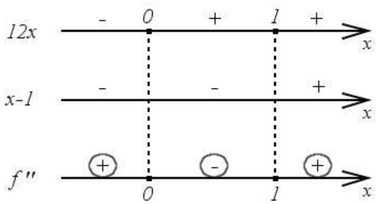


Atividade 5 – [Tipo A]

Esboce o gráfico da curva $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3$.

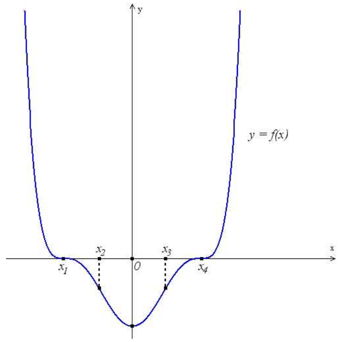
* $f'' = 12x^2 - 12x =$

<u>Estudo de sinais</u>



Atividade 4 – [Tipo B]

Observe o gráfico à direita e utilize os registros algébricos de derivadas e limites para representar as *unidades significativas* do mesmo.

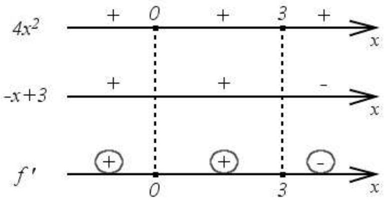


Atividade 5 – [Tipo B]

Esboce o gráfico da curva $f(x) = -x^4 + 4x^3 - 5$.

* $f' = -4x^3 + 12x^2 =$

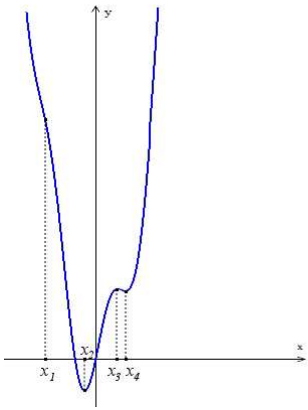
<u>Estudo de sinais</u>



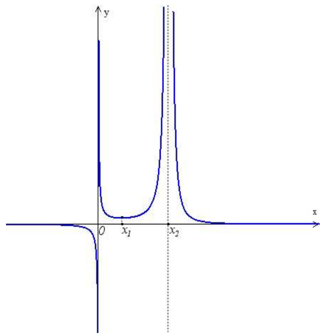
ANEXO D – Gráficos impressos para trabalho de conversões no quinto encontro

Atividade em Sala – Cálculo A

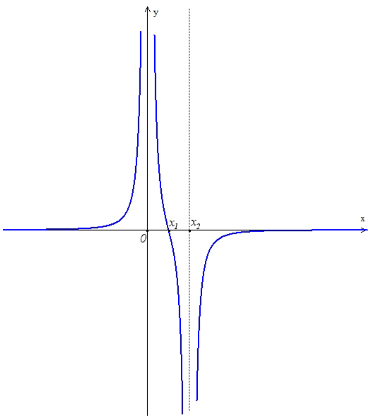
$y = f(x)$



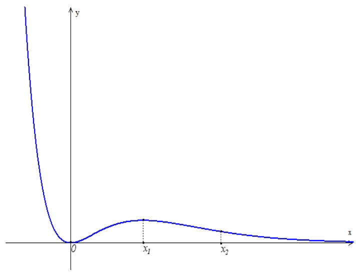
$y = h(x)$



$y = g(x)$



$y = t(x)$



ANEXO E – Termo de consentimento livre e esclarecido

Universidade Federal de Santa Catarina
Programa de Pós-Graduação em
Educação Científica e Tecnológica

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Eu, Adriano Luiz dos Santos Né, estou desenvolvendo um Trabalho de Dissertação de Mestrado para o Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica da Universidade Federal de Santa Catarina sob orientação do Prof. Dr. Méricles Thadeu Moretti.

O objetivo desta pesquisa é o de tentar caracterizar os usos que são feitos da linguagem matemática no processo de ensino e aprendizado do esboço de curvas de funções no ensino superior, visando, com isso, identificar elementos que favoreçam a realização de tal processo.

A coleta de dados será feita através de sequências de estudo e registros de observações referentes às práticas em sala de aula. Os dados coletados serão utilizados exclusivamente na presente pesquisa e em publicações na área de Educação Matemática relacionadas ao assunto. **Fica garantido o caráter anônimo e sigiloso de sua participação, uma vez que seu nome e qualquer outro dado que o(a) identifique não serão divulgados**. Você terá liberdade para desistir de sua participação a qualquer momento, mesmo depois de ter assinado este consentimento, bastando para isso comunicar ao pesquisador pelo endereço de e-mail professor.adriano@gmail.com.

Eu, ____, declaro que fui devidamente esclarecido(a) sobre a pesquisa e estou ciente dos objetivos e metodologias da mesma, bem como de meus direitos de anonimato, sigilo dos dados e desistência a qualquer momento.

____________________________ ____________________________

Adriano Luiz dos Santos Né
Mestrando responsável pela pesquisa

Assinatura do Participante

Florianópolis, _______ de _______________ de 2012.