

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

Clebson Abati Graeff

**MISTURA DE ISOSPIN EM MODELOS DE CAMPO-MÉDIO  
RELATIVÍSTICOS E O ESPALHAMENTO DE ELÉTRONS  
POLARIZADOS**

Florianópolis  
2012



Clebson Abati Graeff

**MISTURA DE ISOSPIN EM MODELOS DE CAMPO-MÉDIO  
RELATIVÍSTICOS E O ESPALHAMENTO DE ELÉTRONS  
POLARIZADOS**

Tese submetida ao Programa de Pós-  
Graduação em Física da Universidade  
Federal de Santa Catarina para a obten-  
ção do Grau de Doutor em Física.  
Orientador: José Ricardo Marinelli

Florianópolis  
2012

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Graeff, Clebson Abati

Mistura de isospin em modelos de campo-médio relativísticos e o espalhamento de elétrons polarizados [tese] / Clebson Abati Graeff ; orientador, José Ricardo Marinelli - Florianópolis, SC, 2012.

194 p. ; 21cm

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas. Programa de Pós-Graduação em Física.

Inclui referências

1. Física. 2. Espalhamento de elétrons polarizados. 3. Interação fraca. 4. Modelo de Walecka. 5. Estrutura Nuclear. I. Marinelli, José Ricardo. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Física. III. Título.

## **Folha de aprovação**

Ao fazer a encadernação, substitua esta folha  
pela folha de aprovação assinada.



## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço aos meus pais pelo incentivo e apoio constantes em todos os aspectos de minha vida. Também ao meu orientador pela valiosa contribuição em minha formação, me acompanhando desde a iniciação científica. Finalmente, à minha esposa e minha filha pela compreensão nos momentos em que as circunstâncias me fizeram ausente.





## RESUMO

Neste trabalho investigamos efeitos de mistura de isospin através da assimetria observada no espalhamento elástico de elétrons polarizados, para vários alvos nucleares ao longo da tabela periódica, desde  ${}^4\text{He}$  até  ${}^{208}\text{Pb}$ . Os cálculos para o espalhamento são realizados em uma aproximação de Born de ondas planas (PWBA) assim como de forma exata, utilizando uma expansão em ondas parciais (DWBA), levando-se em conta os fatores de forma dos nucleons, dados pela parametrização de Galster. Para descrever o núcleo utilizamos o Modelo de Walecka (QHD), onde incluímos os mésons  $\sigma$ ,  $\omega$ ,  $\rho$  e  $\delta$ , além da interação eletromagnética. Os efeitos da inclusão dos mésons  $\rho$  e  $\delta$  são de especial interesse devido a sua influência na mistura de isospin, juntamente com o campo eletromagnético. Comparamos os resultados utilizando dois tipos de lagrangeanas, uma contendo termos não-lineares e outra com acoplamentos dependentes da densidade bariônica. O modelo é resolvido em uma aproximação de Hartree, considerando-se simetria esférica, através de um cálculo auto-consistente utilizando uma expansão das funções de onda e potenciais nucleares em uma base de oscilador harmônico. As implicações da mistura de isospin na obtenção de parâmetros do Modelo Padrão, do fator de forma de estranheza para o nucleon e na determinação da chamada pele de nêutrons do núcleo, usando a técnica de espalhamento de elétrons polarizados, são analisadas.

**Palavras-chave:** Mistura de isospin, espalhamento de elétrons polarizados, interação fraca, méson  $\delta$ .



## ABSTRACT

We investigate isospin mixing effects in the asymmetry as obtained through polarized elastic electron scattering, for selected nuclei from  $^4\text{He}$  to  $^{208}\text{Pb}$ . The scattering analysis is developed within a plane wave Born approximation (PWBA) as well as within a partial wave phase-shift analysis (DWBA), accounting for nucleon form factors, which are given by the Galster parametrization. To describe the nuclear structure, we use Walecka's Model (QHD), including the  $\sigma$ ,  $\omega$ ,  $\rho$  and  $\delta$  mesons as well as the electromagnetic interaction. The  $\rho$  and  $\delta$  meson effects are specially interesting once they should add a contribution for isospin mixing together with the electromagnetic field. We employ two type of lagrangeans, one including non-linear terms and another one which contains density dependent couplings. The model is solved in a Hartree approximation within spherical symmetry using a self-consistent calculation by means of an expansion of the nuclear wave functions and strong potentials in an harmonic oscillator basis. The implications of isospin mixing in the determination of some Standard Model parameters and the extraction of the strange nucleon form factor, as well as in the determination of the so called neutron skin, from polarized elastic electron scattering, is analized and discussed.

**Keywords:** Isospin Admixtures, polarized electron scattering, weak interaction,  $\delta$  meson.



## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>17</b>
1.1	Organização deste trabalho . . . . .	20
<b>2</b>	<b>O Modelo Nuclear</b>	<b>23</b>
2.1	Modelo de Walecka . . . . .	23
2.2	Lagrangeana do modelo . . . . .	24
2.2.1	Lagrangeana com termos não-lineares (NL) . . .	25
2.2.2	Lagrangeana com acoplamentos dependentes da densidade (DD) . . . . .	26
2.3	Equações de movimento . . . . .	27
2.3.1	Equações para lagrangeana com termos não-lineares . . . . .	27
2.3.2	Equações para lagrangeana com acoplamentos dependentes da densidade . . . . .	27
2.4	Aproximação de campo médio . . . . .	28
2.4.1	Equações de movimento simplificadas . . . . .	29
2.5	Propriedades da função de onda nuclear . . . . .	31
2.6	Expressões para as densidades . . . . .	32
2.7	Solução por expansão em uma base de oscilador harmônico . . . . .	34
2.7.1	Solução da equação de Dirac . . . . .	34
2.7.2	Solução das equações de Klein-Gordon . . . . .	37
2.7.3	Solução para o potencial eletromagnético . . . . .	38
2.8	Autoconsistência . . . . .	38
2.8.1	Potencial tentativa . . . . .	39
2.8.2	Cálculo da energia . . . . .	39
2.9	Matéria Nuclear . . . . .	41
2.9.1	Energia de simetria . . . . .	43
<b>3</b>	<b>Espalhamento de Elétrons Polarizados</b>	<b>45</b>
3.1	Cinemática . . . . .	45
3.2	Lagrangeana do elétron . . . . .	47

3.3	Solução em ondas planas (PWBA) . . . . .	48
3.3.1	Cálculo do valor esperado da hamiltoniana de interação . . . . .	48
3.3.2	Tensores leptônico e hadrônico . . . . .	50
3.3.3	Propriedades do tensor eletromagnético . . . . .	51
3.3.4	Propriedades do tensor de interferência . . . . .	54
3.3.5	Seção de choque em função das correntes e a Assimetria . . . . .	57
3.4	Solução em ondas distorcidas (DWBA) . . . . .	58
3.4.1	Efeitos da polarização dos elétrons incidentes . . . . .	59
3.4.2	Cálculo da seção de choque . . . . .	60
<b>4</b>	<b>Correntes Hadrônicas</b>	<b>63</b>
4.1	Corrente eletromagnética . . . . .	63
4.2	Separação em componentes de isospin . . . . .	65
4.3	Desenvolvimento do termo anômalo . . . . .	67
4.4	Transformada de Fourier . . . . .	68
4.5	Corrente neutra . . . . .	70
4.6	Fatores de forma do nucleon . . . . .	70
4.6.1	Fatores de forma em termos dos fatores de forma de Sachs . . . . .	71
4.6.2	Parametrização para os fatores de forma de Sachs . . . . .	72
4.7	Correção do centro de massa . . . . .	73
4.7.1	Correção da densidade . . . . .	74
4.8	Assimetria . . . . .	76
4.8.1	Cálculo na aproximação de ondas planas . . . . .	76
4.8.2	Cálculo em ondas distorcidas . . . . .	78
4.9	Fator de forma de estranheza . . . . .	79
<b>5</b>	<b>Resultados e Conclusões</b>	<b>81</b>
5.1	Parametrizações para o modelo de Walecka . . . . .	81
5.1.1	Resultados para a matéria nuclear . . . . .	82
5.2	Propriedades nucleares . . . . .	86
5.2.1	Raios e energias de ligação . . . . .	86
5.2.2	Densidade de carga e de carga neutra . . . . .	91
5.3	Seções de choque elásticas . . . . .	108
5.4	Assimetria para núcleos com $N = Z$ . . . . .	113
5.4.1	Componente de estranheza . . . . .	124
5.5	Assimetria para núcleos com $N \neq Z$ . . . . .	128
5.6	Precisão experimental . . . . .	137
5.7	Conclusões . . . . .	143

<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>147</b>
<b>Apêndice A Espalhamento na Aproximação de Ondas Planas</b>	<b>151</b>
A.1 Seção de choque . . . . .	151
A.1.1 Densidade de estados para uma onda plana . .	152
A.2 Cálculo do valor esperado da hamiltoniana de interação	153
A.2.1 Parte eletromagnética . . . . .	154
A.2.2 Parte fraca . . . . .	155
A.3 Soma sobre os estados . . . . .	156
A.3.1 Cálculo dos termos das contribuições eletromagnética e fraca . . . . .	157
A.3.2 Termos do tensor leptônico . . . . .	159
A.3.2.1 Termo $\ell^{00}$ . . . . .	159
A.3.2.2 Termos $\ell^{03}$ e $\ell^{33}$ . . . . .	160
A.3.2.3 Termo $\ell_{11} + \ell_{22}$ . . . . .	161
A.3.2.4 Expressão final para $\ell^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu}$ . . . . .	163
A.3.3 Termos do tensor leptônico de interferência . . .	163
A.3.3.1 Termos $\tilde{\ell}^{00}$ , $\tilde{\ell}^{03}$ , $\tilde{\ell}^{30}$ e $\tilde{\ell}^{33}$ . . . . .	163
A.3.3.2 Termos $\tilde{\ell}^{11} + \tilde{\ell}^{22}$ e $\tilde{\ell}^{12} - \tilde{\ell}^{21}$ . . . . .	164
A.3.3.3 Expressão final para $\tilde{\ell}^{\mu\nu}\tilde{\omega}_{\mu\nu}$ . . . . .	165
A.4 Seção de choque em função das correntes . . . . .	166
A.5 Assimetria . . . . .	167
<b>Apêndice B Espalhamento na Aproximação de Ondas Distorcidas</b>	<b>173</b>
B.1 Equação de movimento . . . . .	173
B.2 Análise usando phase-shifts . . . . .	174
B.2.1 Solução para o potencial coulombiano . . . . .	176
B.2.2 Solução para uma distribuição finita de carga . .	177
B.2.3 Seção de choque . . . . .	178
B.3 Solução numérica . . . . .	180
B.4 Cálculo dos phase-shifts . . . . .	181
B.5 Aceleração da convergência . . . . .	182
<b>Apêndice C Cálculo dos Termos Isoescalar e Isovetorial da Corrente Eletromagnética</b>	<b>185</b>
C.1 Cálculo do termo isoescalar . . . . .	185
C.1.1 Cálculo de $I_1$ . . . . .	185
C.1.2 Cálculo de $I_2$ . . . . .	187
C.1.3 Expressão final para a parte isoescalar . . . . .	192
C.2 Cálculo do termo isovetorial . . . . .	193





## 1 INTRODUÇÃO

Historicamente, uma das principais motivações para a utilização de um feixe de elétrons polarizados no espalhamento elástico por núcleos foi a possibilidade de se extrair informações sobre a corrente neutra devida à interação fraca. Embora o peso dessa interação seja desprezível quando comparada aos efeitos da interação eletromagnética no espalhamento por um alvo hadrônico, podemos tirar vantagem do fato de que essa última é independente do estado de polarização do projétil e assim enfatizar os efeitos da primeira. Na verdade, como pretendemos deixar claro adiante, se o alvo nuclear tiver o número de prótons par e igual ao número de nêutrons e estiver em um estado de isospin  $T = 0$ , é possível obter-se informações diretas acerca do ângulo de Weinberg  $\theta_W$  – constante do Modelo Padrão associada à interação eletrofraca. Posteriormente, verificou-se que se incluirmos na corrente hadrônica neutra, além de componentes isoescalares e isovetoriais, componentes associadas à estranheza do núcleo, informações únicas dessa última poderiam ser extraídas usando espalhamento de elétrons polarizados.

Ao analisarmos a interação de um feixe de elétrons polarizados incidindo sobre um alvo nuclear, podemos definir a assimetria  $\mathcal{A}$  como a razão entre a diferença e a soma das seções de choque para polarizações (ou, mais propriamente, *helicidades*) positivas e negativas do feixe. Esta definição é útil uma vez que ela consegue expor propriedades advindas da interação fraca entre as partículas do feixe incidente e as partículas do alvo que, de outra maneira, seriam ofuscadas pela interação eletromagnética, muito mais intensa. Considerando-se o caso de espalhamento elástico por núcleos com  $N = Z$  na aproximação de ondas planas, é possível obter para a assimetria a forma (DONNELLY; DUBACH; SICK, 1989; MUSOLF et al., 1993)

$$\mathcal{A} \propto \sin^2 \theta_W [1 + R_V^{T=0} + \Gamma(q)] + [1 + R_V^0] \frac{G_E^s}{G_E^0}, \quad (1.1)$$

onde os termos  $R_V^{T=0}$  e  $R_V^0$  representam correções oriundas de aproxi-

mações de ordem mais alta no Modelo Padrão e  $\theta_W$  é o ângulo de Weinberg, que está relacionado com as constantes de acoplamento desse modelo. O termo  $\Gamma(q)$  contém contribuições relativas à mistura de isospin, isto é, contribuições relacionadas às diferenças nas distribuições de densidade dos prótons e nêutrons no núcleo. Além disso,  $G_E^s/G_E^0$  representa a razão entre os fatores de forma de estranheza e o fator de forma isoescalar do nucleon. Para separar essas diferentes contribuições para a assimetria e interpretar corretamente resultados obtidos para medidas experimentais, é importante obter um conhecimento teórico preciso sobre tais termos.

Considerando-se que os estados fundamentais iniciais e finais do núcleo são autoestados de isospin com isospin zero, o termo  $\Gamma(q)$  será nulo. Dessa forma, ao desprezarmos as correções de ordens mais altas e a contribuição relacionada à estranheza do núcleo, temos que

$$\mathcal{A} \propto \text{sen}^2 \theta_W \quad (1.2)$$

e a medida da Assimetria pode ser usada como um teste do Modelo Padrão através da determinação do ângulo de Weinberg. Medidas deste tipo utilizando  $^{12}\text{C}$  (SOUDER et al., 1990) já foram realizadas e novas propostas utilizando  $^1\text{H}$  estão em andamento (Q-WEAK... , 2007).

Na presença de interações que diferenciam prótons de nêutrons, no entanto, a simetria de isospin se torna uma simetria aproximada e um estudo do termo que depende da mistura de isospin  $\Gamma(q)$  se torna importante para saber em que condições a Assimetria pode ser usada como um teste para a determinação de  $\theta_W$ . Além disso, podemos utilizar a análise da Assimetria como uma ferramenta para estudar as distribuições de nêutron do núcleo, especialmente para casos em que o número de nêutrons difere do número de prótons. Apesar de as distribuições de próton serem bem conhecidas a partir de experimentos de espalhamento de elétrons não-polarizados, o mesmo não pode ser dito para o caso dos nêutrons. Para estes últimos, esse tipo de espalhamento não constitui uma boa ferramenta de análise, já que eles não têm carga e a interação com seus momentos magnéticos é de difícil separação experimental. No entanto, como destacado na Referência (DONNELLY; DUBACH; SICK, 1989), sob certas condições é possível escrever  $\Gamma(q)$  como a razão entre as densidades de próton e de nêutron do núcleo. Ao se realizar uma medida da Assimetria, dadas as distribuições de prótons, é possível conseguir novas informações acerca da distribuição e dos fatores de forma dos nêutrons. Experi-

mentos nesse sentido estão em andamento no *Jefferson Lab*<sup>1</sup> e pretendem determinar o raio da distribuição de nêutrons para o núcleo de  $^{208}\text{Pb}$  (ABRAHAMYAN et al., 2012).

Ao se tratar as interações dos elétrons com os nucleons, considera-se em geral que estes são compostos somente por quarks  $u$  e  $d$ . Várias propriedades dessas interações a baixos momentos transferidos podem ser explicadas satisfatoriamente dentro dessa aproximação. Para casos envolvendo transferências de momento mais altas, no entanto, podem ocorrer excitações como a criação de pares quark-antiquark. Esses pares partícula-antipartícula podem originar contribuições significativas para a interação do elétron com o nucleon. Devido à menor massa do quark  $s$  quando comparada aos quarks  $c$ ,  $b$  e  $t$ , a presença de pares  $s\bar{s}$  deve ser dominante em relação aos demais pares. Mesmo para baixas energias há indícios (MUSOLF et al., 1993) de que, para explicar algumas propriedades do nucleon, é necessário considerar a existência dos pares  $s\bar{s}$ . A presença dessas excitações dá origem aos fatores de forma  $G^s$  relacionados ao conteúdo de estranheza do nucleon na corrente neutra. Medidas para determinar este fator de forma, já foram realizadas utilizando  $^1\text{H}$  e  $^4\text{He}$  (ACHA, 2007; ANIOL, 2006).

No sentido de ampliar os conhecimentos acerca da mistura de isospin, realizamos neste trabalho um estudo da Assimetria utilizando um modelo relativístico para o alvo hadrônico. Através desse estudo, procuramos analisar o termo de mistura de isospin de forma a entender até que ponto a sua presença pode influenciar a obtenção de propriedades relacionadas ao conteúdo de estranheza dos nucleons e do ângulo de Weinberg. Ignoraremos, no entanto, qualquer efeito relativo à presença de termos de ordem mais alta do Modelo Padrão na determinação da Assimetria.

Como modelo para as interações nucleares, utilizamos o modelo de Walecka (QHD<sup>2</sup>) (SEROT; WALECKA, 1986). Além dos mediadores presentes na QHD-I, isto é, os mésons  $\sigma$  e  $\omega$ , levaremos em conta contribuições da interação coulombiana e dos mésons  $\rho$  (vetorial-isovetorial) e  $\delta$  (escalar-isovetorial), para a interação entre os nucleons. Assim como no caso da interação coulombiana, esses mésons diferenciam prótons de nêutrons e devem trazer contribuições para o termo  $\Gamma(q)$  da Assimetria e são, portanto, de especial interesse. Vamos considerar inicialmente apenas espalhamento elástico em núcleos com  $N = Z$  e assim investigar o papel da quebra de simetria de isospin para a Assimetria.

<sup>1</sup>Thomas Jefferson National Accelerator Facility, EUA. <http://www.jlab.org/>

<sup>2</sup>*Quantum Hadrodynamics* – Hadrodinâmica Quântica.

A extensão desses resultados para núcleos com  $N$  diferente de  $Z$ , naturalmente nos leva à relação entre a Assimetria e a chamada "pele de nêutrons", para a qual medidas experimentais estão em andamento e que têm importantes implicações para a obtenção da distribuição de nêutrons de forma independente de modelo (DONNELLY; DUBACH; SICK, 1989). Assim, vamos explorar essa relação para vários núcleos esféricos ao longo da tabela periódica e sua dependência com certos parâmetros do modelo nuclear associados aos mésons responsáveis pela quebra de simetria de isospin. A contribuição oriunda do méson  $\delta$  tem, teoricamente, o efeito de tornar o potencial total mais atrativo para prótons e menos atrativo para nêutrons. Isso leva a crer que a adição de tal méson deva resultar em uma diminuição da pele de nêutrons. Procuramos encontrar uma sistemática nos resultados para essa grandeza com o intuito de verificar tal hipótese.

O último termo da equação (1.1) contem a informação sobre o fator de forma de estranheza do nucleon. Uma análise mais cuidadosa no entanto, revela que a quebra de simetria de isospin no núcleo pode afetar esse termo e portanto tornar proibitiva a extração daquele fator de forma de maneira "limpa", ou seja, independente de modelo. Usaremos então o modelo nuclear aqui implementado para estimar a importância dessa dependência no termo da Assimetria que carrega a informação sobre a estranheza do nucleon.

Para o cálculo das seções de choque – e, conseqüentemente, da Assimetria – vamos considerar tanto a aproximação de ondas planas (PWBA), como a aproximação de ondas distorcidas (DWBA), mais elaborada e que envolve a solução exata da equação de Dirac para o elétron, sujeito a um potencial estático e esfericamente simétrico e que representa aqui o alvo nuclear em seu estado fundamental. Mostramos que, mesmo para núcleos tão leves como o  ${}^4\text{He}$ , a Assimetria deve ser calculada em DWBA, dependendo da cinemática de interesse. O cálculo em PWBA continua sendo útil no entanto, se queremos visualizar os diferentes tipos de informação contidos na Assimetria.

## 1.1 ORGANIZAÇÃO DESTE TRABALHO

O modelo nuclear será desenvolvido no Capítulo 2, sendo baseado no Modelo de Walecka. Desenvolveremos dois casos, um com termos de autointeração entre os mésons  $\sigma$ , representados por termos não-lineares, e outro usando acoplamentos dependentes da densidade do sistema. A solução para as funções de onda será realizada através de uma expansão em uma base de oscilador harmônico. No Capítulo 3 determinaremos a cinemática do espalhamento e desenvolve-

remos os cálculos para a seção de choque e para a Assimetria. As correntes nucleares serão calculadas no Capítulo 4 a partir das funções de onda obtidas no Capítulo 2. Também apresentaremos uma parametrização para os fatores de forma dos nucleons. Os resultados, conclusões e perspectivas futuras serão descritos no Capítulo 5. Nos Apêndices A, B e C, apresentamos detalhes sobre alguns cálculos desenvolvidos durante os capítulos.



## 2 O MODELO NUCLEAR

*Neste capítulo, a partir de um modelo relativístico para as interações nucleares, estabeleceremos um método para o cálculo das funções de onda e das energias associadas aos estados de partícula do núcleo, bem como das densidades nucleares. Estes resultados serão usados nos capítulos seguintes para calcular as seções de choque de espalhamento de elétrons polarizados, através das quais calcularemos a assimetria. Adotaremos ao longo deste trabalho  $\hbar = c = 1$  e as convenções para as matrizes de Dirac como em (BJORKEN; DRELL, 1964).*

### 2.1 MODELO DE WALECKA

O estudo das propriedades nucleares já vem sendo realizado há bastante tempo e envolve diversos modelos e aproximações. Dentre esses modelos, o *Modelo de Walecka* se destaca por originar-se de um tratamento relativístico para o núcleo. Além disso, a interação das partículas que o compõe se dá de acordo com o *Modelo de Yukawa*, em que – em analogia à eletrodinâmica quântica, em que partículas carregadas interagem através da troca de fótons – os prótons e nêutrons interagem através da troca de mésons. Esta troca de mésons consegue descrever de forma adequada características importantes da interação nucleon-nucleon<sup>1</sup>, como a forte repulsão a curtas distâncias e a atração moderada a médias distâncias e, em decorrência disso, a saturação da energia de ligação por nucleon conforme se aumenta o número de partículas presentes no núcleo.

Outra característica importante da estrutura nuclear e que deve ser devidamente reproduzida é a estrutura de camadas para o núcleo. Em uma analogia bastante próxima à descrição da estrutura atômica, o núcleo exibe configurações cuja estabilidade é notável, conhecidos como *núcleos de camada fechada*. Através do Modelo de Walecka conseguimos reproduzir, em uma aproximação de campo médio, tal estrutura e os espectros energéticos associados a ela.

---

<sup>1</sup>Nucleon é um termo usado para descrever um próton ou um neutron, indistintamente.

Finalmente, o modelo envolve uma quantidade pequena de parâmetros que podem ser relacionados a grandezas bem conhecidas da Matéria Nuclear Infinita e que podem ser ajustadas para reproduzir características gerais bem conhecidas experimentalmente de vários núcleos ao longo da tabela periódica, como energia de ligação por nucleon e raio de carga.

## 2.2 LAGRANGEANA DO MODELO

O modelo de Walecka consiste em tratar o núcleo como um conjunto de bárions que interagem através da troca de mésons. Essa abordagem é muito semelhante à da eletrodinâmica quântica, em que elétrons interagem trocando fótons. Devido a essas semelhanças, esse modelo também é conhecido como *Modelo da Hadrodinâmica Quântica (QHD: Quantum Hadrodynamics)*.

Em sua versão mais simples, conhecida como QHD-I, o modelo considera a interação entre três campos (WALECKA, 1995)

- Um campo bariônico  $\Psi$  para os prótons e nêutrons

$$\Psi = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}; \quad (2.1)$$

- Um campo escalar neutro  $\sigma$  acoplado à densidade escalar  $\bar{\Psi}\Psi$ ;
- Um campo vetorial neutro  $\omega_\mu$  acoplado à densidade bariônica  $\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi$ .

Entre os motivos para a escolha de tais campos, podemos destacar:

- Estes campos e acoplamentos dão origem às interações nucleares médias e, portanto, devem descrever as características dominantes da maioria das propriedades do núcleo;
- A análise do espalhamento nucleon-nucleon mostra empiricamente que as contribuições escalar e vetorial neutras são dominantes;
- Esses campos, com parâmetros apropriados, conseguem descrever a principal característica da interação nucleon-nucleon: atração de longo alcance e repulsão de curto alcance.

Esse modelo simplificado consegue descrever algumas propriedades da matéria nuclear. Para uma descrição mais realista, que inclua núcleos finitos, precisamos ainda adicionar a repulsão coulombiana, através da adição do potencial eletromagnético  $A_\mu$  e de mais um



méson que diferencie prótons de nêutrons: o méson  $\rho$  (campo vetorial-isovetorial carregado). O modelo resultante desse tratamento, conhecido como QHD-II, consegue uma descrição mais satisfatória para os sistemas nucleares. O méson  $\pi$  (campo pseudo-escalar) apesar de ser o mediador mais leve e, portanto, com o maior alcance, não será incluído devido ao fato de que ele não contribui na aproximação normalmente utilizada para resolver o modelo (aproximação de Hartree).

Além dos mésons incluídos na QHD-II, consideraremos aqui o méson  $\delta$  (campo escalar-isovetorial neutro) introduzido inicialmente para ser responsável pela diferenciação de massa entre o próton e o nêutron. Assim, a lagrangeana do sistema será dada por<sup>2</sup>

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} = & \bar{\Psi}\{i\gamma^\mu\partial_\mu - m\}\Psi \\
 & + \frac{1}{2}\partial^\mu\sigma\partial_\mu\sigma - \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2 - g_\sigma\bar{\Psi}\Psi\sigma \\
 & + \frac{1}{2}\partial_\mu\boldsymbol{\delta}\cdot\partial^\mu\boldsymbol{\delta} - \frac{1}{2}m_\delta^2\boldsymbol{\delta}^2 - g_\delta\bar{\Psi}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\delta}\Psi \\
 & - \frac{1}{4}\Omega^{\mu\nu}\Omega_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega^\mu\omega_\mu - g_\omega\bar{\Psi}\boldsymbol{\gamma}^\mu\Psi\omega_\mu \\
 & - \frac{1}{4}\mathbf{R}^{\mu\nu}\mathbf{R}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_\rho^2\mathbf{b}^\mu\mathbf{b}_\mu - g_\rho\bar{\Psi}\boldsymbol{\gamma}^\mu\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{b}_\mu\Psi \\
 & - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \alpha\bar{\Psi}\boldsymbol{\gamma}^\mu\frac{(1+\tau_3)}{2}\Psi A_\mu,
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

onde

$$\Omega_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu\omega_\nu - \partial_\nu\omega_\mu \tag{2.3}$$

$$\mathbf{R}_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu\mathbf{b}_\nu - \partial_\nu\mathbf{b}_\mu \tag{2.4}$$

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{2.5}$$

O operador de isospin  $\boldsymbol{\tau}$  é representado pelas matrizes de Pauli. As constantes  $m$ ,  $m_\sigma$ ,  $m_\omega$ ,  $m_\rho$  e  $m_\delta$  são as massas do nucleon e dos mésons correspondentes, respectivamente. As constantes de acoplamento  $g_\sigma$ ,  $g_\omega$ ,  $g_\rho$  e  $g_\delta$  são ajustadas de forma a reproduzir algumas propriedades da matéria nuclear e de núcleos finitos.

### 2.2.1 Lagrangeana com termos não-lineares (NL)

Para o cálculo correto de algumas propriedades, como a energia de ligação por nucleon em um núcleo finito e a incompressibilidade da

---

<sup>2</sup>Grandezas vetoriais são representadas por caracteres em negrito.

matéria nuclear (GAMBHIR; RING; THIMET, 1990), vamos também levar em conta interações méson-méson para o campo  $\sigma$ . Com isso, a lagrangeana contará com dois termos não-lineares:  $\frac{1}{3}g_2\sigma^3$  e  $\frac{1}{4}g_3\sigma^4$ . Assim,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{NL} = & \bar{\Psi}\{i\gamma^\mu\partial_\mu - m\}\Psi \\
& + \frac{1}{2}\partial^\mu\sigma\partial_\mu\sigma - \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2 - \frac{1}{3}g_2\sigma^3 - \frac{1}{4}g_3\sigma^4 - g_\sigma\bar{\Psi}\Psi\sigma \\
& + \frac{1}{2}\partial_\mu\boldsymbol{\delta}\cdot\partial^\mu\boldsymbol{\delta} - \frac{1}{2}m_\delta^2\boldsymbol{\delta}^2 - g_\delta\bar{\Psi}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\delta}\Psi \\
& - \frac{1}{4}\Omega^{\mu\nu}\Omega_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega^\mu\omega_\mu - g_\omega\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi\omega_\mu \\
& - \frac{1}{4}\mathbf{R}^{\mu\nu}\mathbf{R}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_\rho^2\mathbf{b}^\mu\mathbf{b}_\mu - g_\rho\bar{\Psi}\gamma^\mu\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{b}_\mu\Psi \\
& - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \alpha\bar{\Psi}\gamma^\mu\frac{(1+\tau_3)}{2}\Psi A_\mu,
\end{aligned} \tag{2.6}$$

onde o índice  $NL$  denota “não-linear” e as constantes  $g_2$  e  $g_3$ , assim como as demais constantes, são ajustadas.

### 2.2.2 Lagrangeana com acoplamentos dependentes da densidade (DD)

Outra maneira de reproduzirmos corretamente as propriedades de saturação e incompressibilidade é adicionando uma dependência dos parâmetros de acoplamento com a densidade do núcleo (TYPEL; WOLTER, 1999). Dessa forma, a lagrangeana para o modelo de Wałęcka se torna

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{DD} = & \bar{\Psi}\{i\gamma^\mu\partial_\mu - m\}\Psi \\
& + \frac{1}{2}\partial^\mu\sigma\partial_\mu\sigma - \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2 - \bar{\Psi}\Gamma_\sigma\sigma\Psi \\
& + \frac{1}{2}\partial_\mu\boldsymbol{\delta}\cdot\partial^\mu\boldsymbol{\delta} - \frac{1}{2}m_\delta^2\boldsymbol{\delta}^2 - \bar{\Psi}\Gamma_\delta\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\delta}\Psi \\
& - \frac{1}{4}\Omega_{\mu\nu}\Omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_\mu\omega^\mu - \bar{\Psi}\Gamma_\omega\gamma^\mu\omega_\mu\Psi \\
& - \frac{1}{4}\mathbf{R}_{\mu\nu}\mathbf{R}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_\rho^2\mathbf{b}_\mu\cdot\mathbf{b}^\mu - \bar{\Psi}\Gamma_\rho\gamma^\mu\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{b}_\mu\Psi \\
& - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \alpha\bar{\Psi}\gamma^\mu\frac{(1+\tau_3)}{2}A^\mu\Psi,
\end{aligned} \tag{2.7}$$

onde as funções de acoplamento  $\Gamma$  dependem da densidade bariônica

$\rho$  do sistema (TYPEL; WOLTER, 1999), o que é denotado pelo índice  $DD$  – “dependente da densidade” –. Assim,

$$\Gamma = \Gamma(\rho), \quad (2.8)$$

onde  $\rho = \sqrt{\rho^\mu \rho_\mu}$  e  $\rho^\mu = \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi$ .

### 2.3 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

A obtenção das equações de movimento é feita a partir da lagrangeana utilizando a equação de Euler-Lagrange

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu q_i)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad (2.9)$$

onde  $q_i$  representa o conjunto de coordenadas generalizadas, isto é  $\Psi$ ,  $\sigma$ ,  $\omega_\mu$ ,  $\mathbf{b}_\mu$ ,  $A_\mu$  e  $\delta_\mu$ .

#### 2.3.1 Equações para lagrangeana com termos não-lineares

Para o caso da lagrangeana que inclui termos não-lineares (2.6), obtemos através da equação de Euler-Lagrange para o campo bariônico  $\Psi$

$$\begin{aligned} \{i\gamma^\mu \partial_\mu - m\} \Psi - \left[ g_\sigma \sigma + g_\delta \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\delta} + g_\omega \gamma^\mu \omega_\mu \right. \\ \left. + g_\rho \gamma^\mu \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{b}_\mu + \alpha \gamma^\mu \frac{(1 + \tau_3)}{2} A_\mu \right] \Psi = 0, \end{aligned} \quad (2.10a)$$

e para os campos mesônicos

$$\partial_\mu \partial^\mu \sigma + m_\sigma^2 \sigma = -g_\sigma \bar{\Psi} \Psi - g_2 \sigma^2 - g_3 \sigma^3 \quad (2.10b)$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \boldsymbol{\delta} + m_\delta^2 \boldsymbol{\delta} = -g_\delta \bar{\Psi} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\delta} \Psi \quad (2.10c)$$

$$\partial_\lambda \Omega^{\lambda\mu} + m_\omega^2 \omega^\mu = g_\omega \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi \quad (2.10d)$$

$$\partial_\lambda \mathbf{R}^{\lambda\mu} + m_\rho^2 \mathbf{b}^\mu = g_\rho \bar{\Psi} \gamma^\mu \boldsymbol{\tau} \Psi \quad (2.10e)$$

$$\partial_\lambda F^{\lambda\mu} = \alpha \bar{\Psi} \gamma^\mu \frac{1 + \tau_3}{2} \Psi. \quad (2.10f)$$

#### 2.3.2 Equações para lagrangeana com acoplamentos dependentes da densidade

As equações para o caso com acoplamento dependente da densidade serão basicamente as mesmas, exceto pela ausência dos termos não-lineares e pela substituição das constantes de acoplamento pelas

funções  $\Gamma$ . Além disso, devido à dependência implícita dessas funções em  $\Psi$  através da densidade, surge um novo termo na equação para o campo bariônico que depende das derivadas das funções de acoplamento, conhecido como *termo de rearranjo*. Obtemos então a equação

$$\{i\gamma^\mu \partial_\mu - m\} \Psi - \left[ \Gamma_\sigma(\rho)\sigma + \Gamma_\delta(\rho)\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\delta} + \Gamma_\omega(\rho)\gamma^\mu \omega_\mu + \Gamma_\rho(\rho)\gamma^\mu \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{b}_\mu + \alpha\gamma^\mu \frac{(1 + \tau_3)}{2} A_\mu \right] \Psi + \Sigma_R \Psi = 0 \quad (2.11a)$$

para o campo bariônico  $\Psi$ , onde o termo de rearranjo  $\Sigma_R$  é dado por

$$\Sigma_R = \gamma^\mu \frac{\rho_\mu}{\rho} \left[ \frac{\partial \Gamma_\sigma(\rho)}{\partial \rho} \bar{\Psi} \Psi \sigma + \frac{\partial \Gamma_\delta(\rho)}{\partial \rho} \bar{\Psi} \boldsymbol{\tau} \Psi \cdot \boldsymbol{\delta} + \frac{\partial \Gamma_\omega(\rho)}{\partial \rho} \bar{\Psi} \gamma^\nu \Psi \omega_\nu + \frac{\partial \Gamma_\rho(\rho)}{\partial \rho_B} \bar{\Psi} \gamma^\nu \boldsymbol{\tau} \Psi \cdot \mathbf{b}_\nu \right].$$

Para as equações de movimento dos mésons obtemos

$$\partial_\mu \partial^\mu \sigma + m_\sigma^2 \sigma = -\Gamma_\sigma(\rho) \bar{\Psi} \Psi \quad (2.11b)$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \boldsymbol{\delta} + m_\delta^2 \boldsymbol{\delta} = -\Gamma_\delta(\rho) \bar{\Psi} \boldsymbol{\tau} \Psi \quad (2.11c)$$

$$\partial_\lambda \Omega^{\lambda\mu} + m_\omega^2 \omega^\mu = \Gamma_\omega(\rho) \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi \quad (2.11d)$$

$$\partial_\lambda \mathbf{R}^{\lambda\mu} + m_\rho^2 \mathbf{b}^\mu = \Gamma_\rho(\rho) \bar{\Psi} \gamma^\mu \boldsymbol{\tau} \Psi \quad (2.11e)$$

$$\partial_\lambda F^{\lambda\mu} = \alpha \bar{\Psi} \gamma^\mu \frac{1 + \tau_3}{2} \Psi. \quad (2.11f)$$

## 2.4 APROXIMAÇÃO DE CAMPO MÉDIO

Para resolver os sistemas de equações (2.10) e (2.11) vamos usar a aproximação de campo médio, isto é, vamos substituir os campos  $\sigma$ ,  $\omega_\mu$ ,  $\mathbf{b}_\mu$ ,  $A_\mu$  e  $\boldsymbol{\delta}_\mu$  por seus valores esperados. Além disso, vamos invocar simetria rotacional, o que fará com que somente a componente temporal de cada campo seja diferente de zero. Além disso, uma vez que o núcleo tem carga elétrica bem definida, os mésons  $\rho$  carregados

devem ter valor médio nulo. Assim:

$$\sigma \quad \rightarrow \quad \langle \sigma \rangle \equiv \sigma_0 \quad (2.12)$$

$$\omega_\mu \quad \rightarrow \quad \langle \omega_\mu \rangle \equiv \omega_0 \delta_{\mu 0} \quad (2.13)$$

$$A_\mu \quad \rightarrow \quad \langle A_\mu \rangle \equiv A_0 \delta_{\mu 0} \quad (2.14)$$

$$\mathbf{b}_\mu \quad \rightarrow \quad \langle \mathbf{b}_\mu \rangle \equiv b_0 \delta_{\mu 0} \quad (2.15)$$

$$\delta_\mu \quad \rightarrow \quad \langle \delta_\mu \rangle \equiv \delta_0 \delta_{\mu 0}. \quad (2.16)$$

Por simplicidade, não carregaremos os índices dos campos, agora clássicos, além desse ponto.

Para o caso da matéria nuclear, os campos acima não dependem da posição ou do tempo. Já no caso de núcleos finitos em seu estado fundamental, podemos considerá-los estáticos, isto é, não há dependência temporal, mas não podemos tratá-los como campos uniformes. Haverá, portanto, uma dependência espacial. Podemos escrever as derivadas como

$$\partial_\mu \partial^\mu = \partial_0 \partial^0 - \nabla^2, \quad (2.17)$$

mas devido ao fato de que não temos dependência temporal, o primeiro termo será nulo. Além disso, consideraremos aqui apenas o caso de campos com simetria esférica.

### 2.4.1 Equações de movimento simplificadas

Usando essas simplificações, a equação de movimento para os nucleons – no caso envolvendo termos não-lineares, dado pela Equação (2.10a) – pode ser escrita como

$$[i\gamma^\mu \partial_\mu - m]\Psi - \left[ g_\sigma \sigma(r) + g_\delta \tau_3 \delta(r) + g_\omega \gamma^0 \omega(r) + g_\rho \gamma^0 \tau_3 b(r) + \alpha \gamma^0 \frac{(1 + \tau_3)}{2} A(r) \right] \Psi = 0, \quad (2.18)$$

onde já invocamos simetria esférica do sistema representando os potenciais como dependentes apenas da coordenada radial. Como nos interessam somente as funções de onda estacionárias, isto é, soluções do tipo

$$\Psi(t, \mathbf{r}) = \Psi(\mathbf{r}) e^{-iEt}, \quad (2.19)$$

e

$$\gamma^\mu \partial_\mu = \gamma^0 \partial_0 + \boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla, \quad (2.20)$$

onde  $\boldsymbol{\gamma}$  tem suas componentes dadas pelas matrizes de Dirac  $\gamma^i$ , po-

demos simplificar a Equação de movimento (2.18) para os nucleons obtendo

$$[-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \gamma^0(m + g_\sigma\sigma(r) + g_\delta\tau_3\delta(r))]\Psi(\mathbf{r}) + \left[ g_\omega\omega(r) + g_\rho\tau_3b(r) + \alpha\frac{(1 + \tau_3)}{2}A(r) \right] \Psi(\mathbf{r}) = E\Psi(\mathbf{r}). \quad (2.21a)$$

onde  $\boldsymbol{\alpha} = \gamma^0\boldsymbol{\gamma}$ . As equações para os campos mesônicos podem ser reescritas como:

$$[-\nabla^2 + m_\sigma^2]\sigma(r) = -g_\sigma\rho_s(\mathbf{r}) - g_2\sigma^2(r) - g_3\sigma^3(r) \quad (2.21b)$$

$$[-\nabla^2 + m_\delta^2]\delta(r) = -g_\delta\rho_3^s(\mathbf{r}) \quad (2.21c)$$

$$[-\nabla^2 + m_\omega^2]\omega(r) = g_\omega\rho_B(\mathbf{r}) \quad (2.21d)$$

$$[-\nabla^2 + m_\rho^2]b_0(r) = g_\rho\rho_3(\mathbf{r}) \quad (2.21e)$$

$$-\nabla^2 A(r) = \alpha\rho_B^p(\mathbf{r}), \quad (2.21f)$$

onde usamos as definições

$$\rho_s(\mathbf{r}) \equiv \bar{\Psi}\Psi \quad (2.22a)$$

$$\rho_3^s(\mathbf{r}) \equiv \bar{\Psi}\tau_3\Psi \quad (2.22b)$$

$$\rho_B(\mathbf{r}) \equiv \bar{\Psi}\gamma^0\Psi \quad (2.22c)$$

$$\rho_3(\mathbf{r}) \equiv \bar{\Psi}\gamma^0\tau_3\Psi \quad (2.22d)$$

$$\rho_B^p(\mathbf{r}) \equiv \bar{\Psi}\gamma^0\frac{1 + \tau_3}{2}\Psi. \quad (2.22e)$$

No caso com dependência da densidade – dado pela Equação (2.11a) –, a equação para os nucleons pode ser escrita como

$$[-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \gamma^0(m + \Gamma_\sigma(\rho_B)\sigma(r) + \Gamma_\delta(\rho_B)\tau_3\delta(r))]\Psi(\mathbf{r}) + \left[ \Gamma_\omega(\rho_B)\omega(r) + \Gamma_\rho(\rho_B)\tau_3b(r) + \alpha\frac{(1 + \tau_3)}{2}A(r) \right] \Psi(\mathbf{r}) + \gamma^0 \left[ \frac{\partial\Gamma_\sigma(\rho_B)}{\partial\rho_B} \rho_s(\mathbf{r}) \sigma(r) + \frac{\partial\Gamma_\delta(\rho_B)}{\partial\rho_B} \rho_3^s(\mathbf{r})\delta(r) + \frac{\partial\Gamma_\omega(\rho_B)}{\partial\rho_B} \rho_B(\mathbf{r})\omega(r) + \frac{\partial\Gamma_\rho(\rho_B)}{\partial\rho_B} \rho_3(\mathbf{r})b(r) \right] \Psi(\mathbf{r}) = E\Psi(\mathbf{r}) \quad (2.23a)$$

e as equações para os mésons como

$$-\nabla^2\sigma(r) + m_\sigma^2\sigma(r) = -\Gamma_\sigma(\rho_B) \rho_s(\mathbf{r}) \quad (2.23b)$$

$$-\nabla^2\delta(r) + m_\delta^2\delta(r) = -\Gamma_\delta(\rho_B) \rho_3^s(\mathbf{r}) \quad (2.23c)$$

$$-\nabla^2\omega(r) + m_\omega^2\omega(r) = \Gamma_\omega(\rho_B) \rho_B(\mathbf{r}) \quad (2.23d)$$

$$-\nabla^2b(r) + m_\rho^2b(r) = \Gamma_\rho(\rho_B) \rho_3(\mathbf{r}) \quad (2.23e)$$

$$-\nabla^2A(r) = \alpha\rho_B^p(\mathbf{r}). \quad (2.23f)$$

## 2.5 PROPRIEDADES DA FUNÇÃO DE ONDA NUCLEAR

Como usamos um método do tipo Hartree para resolver o sistema de equações acima, a função de onda é dada por um determinante de Slater. Dessa forma, podemos escrever as equações (2.21a) e (2.23a) para os estados de partícula como uma equação de autovalores, ou seja,

$$h\psi_\alpha = E_\alpha\psi_\alpha, \quad (2.24)$$

onde a hamiltoniana  $h$  será, para o caso com termos não-lineares

$$h_{NL} = [-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \gamma^0(m + g_\sigma\sigma(r) + g_\delta\tau_3\delta(r))] + \left[ g_\omega\omega(r) + g_\rho\tau_3b(r) + \alpha\frac{(1 + \tau_3)}{2}A(r) \right]. \quad (2.25)$$

Para o caso envolvendo dependência da densidade, obtemos

$$h_{DD} = [-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \gamma^0(m + \Gamma_\sigma\sigma(r) + \Gamma_\delta\tau_3\delta(r))] + \left[ \Gamma_\omega\omega(r) + \Gamma_\rho\tau_3b(r) + \alpha\frac{(1 + \tau_3)}{2}A(r) \right] + \left[ \frac{\partial\Gamma_\sigma}{\partial\rho_B} \rho_s(\mathbf{r}) \sigma(r) + \frac{\partial\Gamma_\delta}{\partial\rho_B} \rho_3^s(\mathbf{r})\delta(r) \right] + \left[ \frac{\partial\Gamma_\omega}{\partial\rho_B} \rho_B(\mathbf{r})\omega(r) + \frac{\partial\Gamma_\rho}{\partial\rho_B} \rho_3(\mathbf{r})b(r) \right]. \quad (2.26)$$

Usando a simetria esférica dos potenciais, as soluções para a equação de Dirac definida pelas hamiltonianas acima será dada por (SE-ROT; WALECKA, 1986)

$$\psi_\alpha(\mathbf{r}) = \psi_{n\kappa mt}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} g_{n\kappa t}(r) \phi_{\kappa m}(\theta, \varphi) \\ i f_{n\kappa t}(r) \phi_{-\kappa m}(\theta, \varphi) \end{pmatrix} \zeta_t. \quad (2.27)$$

Na equação acima,  $n$  representa o número quântico principal e  $m$  a projeção do momento angular total. Além disso,  $\kappa$  representa o autovalor do operador de Dirac

$$K = \gamma^0 \left[ \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{J} - \frac{1}{2} \right] = \gamma^0 [\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{L} + 1], \quad (2.28)$$

onde  $\mathbf{L}$  é o operador momento angular e

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Como a hamiltoniana  $h$  comuta com os operadores de isospin  $\tau_3$  e  $\boldsymbol{\tau}^2$ , adicionamos um isospinor de duas componentes  $\zeta_t$ . Podemos assim rotular os estados conforme sua projeção de isospin  $t$ :  $t = 1$  para prótons e  $t = -1$  para nêutrons.

A parte angular e de spin das funções de onda superior e inferior pode ser escrita como harmônicos esféricos de spin:

$$\phi_{\kappa m} = \sum_{m_\ell m_s} \langle \ell, m_\ell, 1/2, m_s | j, m \rangle Y_{\ell m_\ell}(\theta, \varphi) \chi_{m_s}, \quad (2.30)$$

onde  $\ell$  e  $j$  representam os momentos angulares orbital e total, a função  $Y_{\ell m_\ell}(\theta, \varphi)$  representa os harmônicos esféricos e  $\chi_{m_s}$  denota um spinor de Pauli de duas componentes.

Finalmente, os momentos angulares total e orbital estão relacionados com  $\kappa$  de acordo com

$$j = |\kappa| - 1/2 \quad (2.31)$$

e

$$\ell = \begin{cases} \kappa, & \text{se } \kappa > 0 \\ -(\kappa + 1), & \text{se } \kappa < 0, \end{cases} \quad (2.32)$$

o que nos permite rotular os estados utilizando somente  $n$ ,  $\kappa$ ,  $m$  e  $t$ . A função  $\phi_{-\kappa m}$  é definida da mesma forma que  $\phi_{\kappa m}$  substituindo  $\ell$  por  $\bar{\ell} = \ell \pm 1$ , sendo o sinal positivo escolhido quando  $j = \ell + 1/2$ .

## 2.6 EXPRESSÕES PARA AS DENSIDADES

Sabendo que a função de onda do sistema é um determinante de Slater, produtos do tipo  $\Psi^\dagger \Psi'$ , onde  $\Psi'$  é a função  $\Psi$  transformada por



um operador de um corpo qualquer, podemos escrever

$$\Psi^\dagger \Psi' = \sum_{\alpha} \psi_{\alpha}^{\dagger} \psi'_{\alpha} \quad (2.33)$$

onde  $\psi_{\alpha}$  representa um estado de partícula do sistema<sup>3</sup> e  $\alpha$  representa todos os rótulos deste estado. Podemos então calcular as densidades definidas por (2.22). Para a densidade  $\rho_s$  obtemos

$$\rho_s = \bar{\Psi} \Psi \quad (2.34)$$

$$= \Psi^\dagger \gamma^0 \Psi \quad (2.35)$$

$$= \sum_{\alpha} \psi_{\alpha}^{\dagger} \gamma^0 \psi_{\alpha}. \quad (2.36)$$

Usando a equação (2.27) para a função de onda de partícula e a definição de  $\gamma^0$ , obtemos

$$\rho_s = \sum_{\alpha} \begin{pmatrix} g_{n\kappa t}^{\dagger} \phi_{\kappa m}^{\dagger} & -i f_{n\kappa t}^{\dagger} \phi_{-\kappa m}^{\dagger} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{n\kappa t} \phi_{\kappa m} \\ -i f_{n\kappa t} \phi_{-\kappa m} \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

$$= \sum_{\alpha} g_{n\kappa t}^2(r) \phi_{\kappa m}^{\dagger} \phi_{\kappa m} - f_{n\kappa t}^2(r) \phi_{-\kappa m}^{\dagger} \phi_{-\kappa m}. \quad (2.38)$$

O índice  $\alpha$  representa aqui os números quânticos  $n$ ,  $\kappa$ ,  $m$  e  $t$ . Utilizando propriedades dos harmônicos esféricos e dos coeficientes de Clebsch-Gordan, obtemos

$$\rho_s = \sum_{n\kappa t} \frac{2j_{\kappa} + 1}{4\pi} [g_{n\kappa t}^2(r) - f_{n\kappa t}^2(r)], \quad (2.39a)$$

onde  $j_{\kappa}$  é determinado a partir de  $\kappa$  através da equação (2.31) e representa o momento angular do estado de partícula. Usamos ainda, para obter o resultado acima, o fato de que estamos tratando apenas sistemas em que todas as subcamadas  $j$  estão ocupadas.

Seguindo o mesmo procedimento, as outras densidades podem

---

<sup>3</sup>Os estados de partícula são comumente denominados *orbitais*.

ser escritas como

$$\rho_3^s = \sum_{\substack{n\kappa \\ t=1}} \frac{2j_\kappa + 1}{4\pi} [g_{n\kappa t}^2(r) - f_{n\kappa t}^2(r)] - \sum_{\substack{n\kappa \\ t=-1}} \frac{2j_\kappa + 1}{4\pi} [g_{n\kappa t}^2(r) - f_{n\kappa t}^2(r)] \quad (2.39b)$$

$$\rho_B = \sum_{n\kappa t} \frac{2j_\kappa + 1}{4\pi} [g_{n\kappa t}^2(r) + f_{n\kappa t}^2(r)] \quad (2.39c)$$

$$\rho_3 = \sum_{\substack{n\kappa \\ t=1}} \frac{2j_\kappa + 1}{4\pi} [g_{n\kappa t}^2(r) + f_{n\kappa t}^2(r)] - \sum_{\substack{n\kappa \\ t=-1}} \frac{2j_\kappa + 1}{4\pi} [g_{n\kappa t}^2(r) + f_{n\kappa t}^2(r)] \quad (2.39d)$$

$$\rho_B^p = \sum_{\substack{n\kappa \\ t=1}} \frac{2j_\kappa + 1}{4\pi} [g_{n\kappa t}^2(r) + f_{n\kappa t}^2(r)]. \quad (2.39e)$$

As somas  $\sum_{t=1}^{n\kappa}$  e  $\sum_{t=-1}^{n\kappa}$  são realizadas somente sobre estados de próton e nêutron, respectivamente.

## 2.7 SOLUÇÃO POR EXPANSÃO EM UMA BASE DE OSCILADOR HARMÔNICO

Para solucionar as equações de movimento para os nucleons e as equações para os campos, empregaremos expansões das funções  $f_{n\kappa t}(r)$  e  $g_{n\kappa t}(r)$  em uma base de funções radiais de oscilador harmônico. Esse método transformará as equações para os nucleons em equações matriciais, que poderão ser resolvidas como equações de autovalores. Já as equações para os campos poderão ser resolvidas empregando simplesmente o cálculo de uma matriz inversa.

### 2.7.1 Solução da equação de Dirac

Utilizando a forma (2.27), podemos transformar a equação de movimento para os nucleons em um sistema acoplado de equações envolvendo as funções radiais  $f_{n\kappa t}(r)$  e  $g_{n\kappa t}(r)$ . Obtemos então

$$- \left[ \frac{d}{dr} - \frac{\kappa - 1}{r} \right] g_{n\kappa t}(r) + [(m + \varphi(r)) - E + V(r)] f_{n\kappa t}(r) = 0 \quad (2.40a)$$

$$\left[ \frac{d}{dr} + \frac{\kappa + 1}{r} \right] f_{n\kappa t}(r) - [(m + \varphi(r)) + E - V(r)] g_{n\kappa t}(r) = 0, \quad (2.40b)$$

onde, para o caso com termos não-lineares,

$$\varphi(r) = g_\sigma \sigma(r) + g_\delta \tau_3 \delta(r) \quad (2.41)$$

e

$$V(r) \equiv g_\omega \omega(r) + g_\rho \tau_3 b(r) + \alpha \frac{(1 + \tau_3)}{2} A(r). \quad (2.42)$$

Para o caso envolvendo dependência da densidade, os potenciais  $\varphi(r)$  e  $V(r)$  serão dados por

$$\varphi(r) = \Gamma_\sigma \sigma(r) + \Gamma_\delta \tau_3 \delta(r) \quad (2.43)$$

e

$$\begin{aligned} V(r) = & \left[ \Gamma_\omega \omega(r) + \Gamma_\rho \tau_3 b(r) + \alpha \frac{(1 + \tau_3)}{2} A(r) \right] \\ & + \left[ \frac{\partial \Gamma_\sigma}{\partial \rho_B} \rho_s(\mathbf{r}) \sigma(r) + \frac{\partial \Gamma_\delta}{\partial \rho_B} \rho_3^s(\mathbf{r}) \delta(r) \right] \\ & + \left[ \frac{\partial \Gamma_\omega}{\partial \rho_B} \rho_B(\mathbf{r}) \omega(r) + \frac{\partial \Gamma_\rho}{\partial \rho_B} \rho_3(\mathbf{r}) b(r) \right]. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Para resolver este sistema, vamos usar uma expansão em uma base de oscilador harmônico, isto é, vamos escrever as funções de onda radiais  $f_{n\kappa t}(r)$  e  $g_{n\kappa t}(r)$  como uma soma de funções radiais de oscilador harmônico (GAMBHIR; RING; THIMET, 1990):

$$f_{n\kappa t}(r) = \sum_{n_f=1}^{n_f^{max}} f_{n_f} R_{n_f \bar{\ell}} \quad (2.45a)$$

$$g_{n\kappa t}(r) = \sum_{n_g=1}^{n_g^{max}} g_{n_g} R_{n_g \ell}. \quad (2.45b)$$

Como os momentos angulares orbitais das funções  $f_{n\kappa t}(r)$  e  $g_{n\kappa t}(r)$  diferem por uma unidade (SEROT; WALECKA, 1986), teremos que  $\bar{\ell} = \ell + 1$ . O parâmetro  $b$  associado ao oscilador harmônico será dado por (GAMBHIR; RING; THIMET, 1990)

$$b = \frac{1}{2\pi\sqrt{mA^{-1/3}}}. \quad (2.46)$$

Substituindo as expansões para as funções de onda radiais  $f_{n\kappa t}(r)$

e  $g_{n\kappa t}(r)$  na equação (2.40) e usando a propriedade de ortogonalidade das funções de onda radiais do oscilador harmônico, isto é,

$$\int_0^\infty R_{n\ell}^*(r)R_{n'\ell'}(r) r^2 dr = \delta_{nn'}\delta_{\ell\ell'}, \quad (2.47)$$

podemos escrevê-la como uma equação de autovalores:

$$H\mathbf{v} = E\mathbf{v}, \quad (2.48)$$

onde

$$H = \begin{pmatrix} A_{n'n} & B_{n'n} \\ C_{n',n} & D_{n'n} \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

e

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (2.50)$$

As submatrizes de  $H$  são dadas por

$$A_{n'n} = m\delta_{n'n} + \int_0^\infty R_{n'\ell}^*(r)[\varphi(r) + V(r)]R_{n\ell}(r) r^2 dr \quad (2.51a)$$

$$B_{n'n} = - \int_0^\infty R_{n'\ell}^*(r) \left[ \frac{d}{dr} - \frac{\kappa - 1}{r} \right] R_{n\bar{\ell}}(r) r^2 dr \quad (2.51b)$$

$$C_{n'n} = \int_0^\infty R_{n'\bar{\ell}}^*(r) \left[ \frac{d}{dr} + \frac{\kappa + 1}{r} \right] R_{n\ell}(r) r^2 dr \quad (2.51c)$$

$$D_{n'n} = -M\delta_{n'n} - \int_0^\infty R_{n'\bar{\ell}}^*(r)[\varphi(r) - V]R_{n\ell}(r) r^2 dr \quad (2.51d)$$

e têm dimensões  $n_f^{max} \times n_f^{max}$ ,  $n_f^{max} \times n_g^{max}$ ,  $n_g^{max} \times n_f^{max}$  e  $n_g^{max} \times n_g^{max}$ , respectivamente.<sup>4</sup> Podemos então utilizar técnicas de diagonalização de matrizes para obter os autovetores, que conterão os coeficientes necessários para o cálculo das funções de onda através das equações (2.45), e os autovalores, que representam as energias associadas

<sup>4</sup>As expansões são truncadas em  $n_g^{max} = 10$  e  $n_f^{max} = 11$ .

aos estados.

## 2.7.2 Solução das equações de Klein-Gordon

Também podemos resolver as equações de Klein-Gordon utilizando uma expansão em base de oscilador harmônico. Neste caso, podemos escrever todas as equações, exceto a do campo eletromagnético, na forma geral

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - m^2 \right] \phi(r) = \rho_\phi(r), \quad (2.52)$$

onde  $\phi(r)$  representa o potencial em questão e  $\rho_\phi(r)$  o termo de fonte correspondente. Fazemos então a expansão

$$\phi(r) = \sum_{i=1}^{i_{max}} \phi_i R_{i0}(r), \quad (2.53)$$

onde usamos  $\ell = 0$ , pois os campos têm simetria esférica. Usando novamente a propriedade de ortogonalidade das funções radiais do oscilador harmônico dada pela equação (2.47), podemos escrever a equação de Klein-Gordon geral (2.52) como

$$I\phi = \rho_\phi. \quad (2.54)$$

A matriz  $I$  é dada por

$$I_{i'i} = -\frac{1}{b^2} \left[ (2i - 1/2)\delta_{i'i} + \sqrt{i(i+1/2)}\delta_{i',i+1} \right. \\ \left. \sqrt{i'(i'+1/2)}\delta_{i',i-1} \right] - m^2\delta_{i'i} \quad (2.55)$$

e onde  $b$  é o parâmetro do oscilador harmônico. As componentes do vetor  $\rho_\phi$  são definidas através de

$$\rho_\phi^{i'} = \int_0^\infty R_{i'0}\rho_\phi(r) r^2 dr. \quad (2.56)$$

Para resolver a equação (2.54), basta calcularmos a inversa de  $I$  e multiplicá-la em ambos os membros da equação. Assim, o vetor  $\phi$ , que contém os coeficientes necessários para a obtenção do potencial

através da equação (2.53), fica completamente determinado:

$$\phi = I^{-1} \rho_\phi. \quad (2.57)$$

### 2.7.3 Solução para o potencial eletromagnético

O potencial eletromagnético depende da distância como

$$A(r) \propto \frac{1}{r} \quad (2.58)$$

e sua solução não é numericamente eficiente usando o mesmo método aplicado aos outros campos. Para encontrá-lo, vamos utilizar o método mais usual da função de Green:

$$A(r) = \int G(r, r') \rho_B^p(r) r'^2 dr', \quad (2.59)$$

onde a função de Green é dada por

$$G(r, r') = \frac{1}{r_>}. \quad (2.60)$$

Aqui  $r_>$  denota o maior valor entre as variáveis  $r$  e  $r'$ .

## 2.8 AUTOCONSISTÊNCIA

As equações para os bárions e para os mésons nos conjuntos com termos não-lineares (2.21) e com dependência da densidade (2.23) formam um sistema interdependente. Isso significa que não há uma forma de escrevermos as funções de onda em termos dos potenciais, uma vez que estes dependem das densidades (2.22) e estas, por sua vez, dependem das próprias funções de onda.

Para resolvermos esse problema, vamos realizar o cálculo auto-consistentemente, isto é, vamos resolver as equações utilizando como dado de entrada uma certa função aproximada escolhida arbitrariamente. Após isso, vamos utilizar os resultados obtidos a partir de tal escolha para redefinir as funções iniciais, retornando ao ponto de partida. Aplicando esse método recursivamente, esperamos obter resultados melhores a cada iteração, ou seja, até obtermos convergência entre o valor de entrada e o de saída em uma dada iteração.

### 2.8.1 Potencial tentativa

A escolha mais simples para solucionar o sistema determinado pelos conjuntos de equações (2.21) e (2.23) é usar potenciais aproximados para calcular as funções de onda do sistema e, a partir delas, calcular os novos potenciais. A forma que utilizaremos para esses potenciais iniciais é conhecida como *potencial de Woods-Saxon* e é dada por

$$V(r) = \frac{d}{1 + e^{(r-w)/e_w}} \quad (2.61)$$

onde os parâmetros  $d$ ,  $w$  e  $e_w$  determinam a profundidade, a largura média e a largura da borda do potencial. Cada um dos potenciais iniciais pode ser escolhido independentemente utilizando um conjunto de parâmetros específico.

Durante o cálculo iterativo, eventualmente podem ocorrer mudanças muito bruscas no potencial calculado, o que pode levar o sistema a divergir. Para diminuir as possibilidades de divergência, no processo iterativo utilizaremos sempre uma parte do potencial da iteração anterior e uma parte do novo potencial, isto é,

$$V(r) = AV_{i-1}(r) + BV_i(r), \quad (2.62)$$

onde  $A > B$  e  $A + B = 1$ .

### 2.8.2 Cálculo da energia

Para determinar a convergência do sistema, podemos observar a energia total a cada iteração. Quando for observada uma variação menor do que um certo percentual previamente definido, dizemos que o sistema convergiu e interrompemos o cálculo.

A energia total do sistema pode ser calculada através do elemento  $T_{00}$  do tensor momento-energia (SEROT; WALECKA, 1986):

$$\begin{aligned} E = \int \frac{1}{2} \left\{ [(\nabla\sigma)^2 + m_\sigma^2\sigma^2(r) + \frac{1}{3}g_2\sigma^3(r) + \frac{1}{4}g_3\sigma^4(r) \right. \\ \left. + (\nabla\delta)^2 + m_\delta^2\delta^2] - [(\nabla\omega(r))^2 + m_\omega^2\omega^2(r)] \right. \\ \left. - (\nabla A(r))^2 - [(\nabla b(r))^2 + m_\rho^2b^2(r)] \right\} dr + E_{\text{part}}, \end{aligned} \quad (2.63)$$

onde  $E_{\text{part}}$  é a soma das energias dos estados de partícula. O cálculo desse termo consiste simplesmente em somar as energias – isto é, os

autovalores obtidos através da diagonalização da equação (2.48) – dos estados ocupados, devidamente multiplicados pelas suas degenerescências.

Podemos separar as integrais relativas aos mésons. Para o campo  $\sigma$  obtemos então

$$E_\sigma = \frac{1}{2} \int \left[ (\nabla\sigma)^2 + m_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{1}{3} g_2 \sigma^3 + \frac{1}{4} g_3 \sigma^4 \right] dr. \quad (2.64)$$

Usando uma integração por partes e a equação de movimento para o campo  $\sigma$ , obtemos

$$E_\sigma = 2\pi \int \left[ -g_\sigma \rho_s(r) - \frac{2}{3} g_2 \sigma^2(r) - \frac{3}{4} g_3 \sigma^3(r) \right] \sigma(r) r^2 dr. \quad (2.65a)$$

De maneira similar, podemos escrever as contribuições dos campos  $\delta$ ,  $\omega$ ,  $b$  e  $A$  como

$$E_\delta = -2\pi \int g_\delta \rho_3^s(r) \delta(r) r^2 dr \quad (2.65b)$$

$$E_\omega = -2\pi \int g_\omega \rho_B(r) \omega(r) r^2 dr \quad (2.65c)$$

$$E_b = 2\pi \int g_\rho \rho_3(r) b(r) r^2 dr \quad (2.65d)$$

$$E_A = 2\pi \alpha \int \rho_B^p(r) A(r) r^2 dr. \quad (2.65e)$$

Para o caso envolvendo acoplamentos dependentes da densidade, as constantes  $g_\sigma$ ,  $g_\omega$ ,  $g_\rho$  e  $g_\delta$  se transformam nas funções de acoplamento  $\Gamma_\sigma(\rho_B)$ ,  $\Gamma_\omega(\rho_B)$ ,  $\Gamma_\rho(\rho_B)$  e  $\Gamma_\delta(\rho_B)$ . Além disso, neste caso as constantes  $g_2$  e  $g_3$  se anulam. Finalmente, para este último caso, precisamos adicionar à energia de partícula, o termo abaixo.

$$E_R = \frac{1}{2} \int \left[ \frac{\partial \Gamma_\sigma(\rho_B)}{\partial \rho_B} \rho_s(r) \sigma(r) + \frac{\partial \Gamma_\delta(\rho_B)}{\partial \rho_B} \rho_3^s(r) \delta(r) + \frac{\partial \Gamma_\rho(\rho_B)}{\partial \rho_B} \rho_3(r) b(r) + \frac{\partial \Gamma_\omega(\rho_B)}{\partial \rho_B} \rho_B(r) \omega(r) \right] \rho_B(r) r^2 dr. \quad (2.66)$$



## 2.9 MATÉRIA NUCLEAR

Os sistemas nucleares são caracterizados por serem sistemas saturados, isto é, ao adicionarmos mais nucleons, a densidade central não aumenta. Essa característica tem origem na interação complexa entre os nucleons devido à Força Forte, caracterizada por uma forte repulsão de curto alcance e uma atração moderada de médio alcance. Essa característica deu origem à fórmula semi-empírica de massa, desenvolvida independentemente por Bethe e Weizsäcker, dada por (CHUNG, 2001)

$$M(Z, A) = Zm_H + Nm_n - B(Z, A), \quad (2.67)$$

onde  $m_H$  e  $m_n$  representam as massas do átomo de hidrogênio e do nêutron, e  $B(Z, A)$  representa a energia de ligação, dada por

$$B(Z, A) = a_V - a_s A^{2/3} - a_C \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_{sim} \frac{(N-Z)^2}{A}. \quad (2.68)$$

Nesta fórmula, o primeiro termo é proporcional ao volume e considera que a densidade é constante em todo o núcleo e o segundo adiciona uma correção para a região superficial – onde os nucleons não estão completamente cercados e por isso a energia de ligação deve ser diferente daquela da região central –. O terceiro termo é responsável pela contribuição oriunda da repulsão coulombiana devida aos prótons. Outro fator importante para os sistemas nucleares é a assimetria entre a quantidade de nêutrons e prótons, representada pelo último termo. Sabe-se que os sistemas com  $N = Z$  são mais estáveis, isto é, energia de ligação total menores que os núcleos com  $N \neq Z$ . Como a interação forte é independente da carga, esse termo deve ter potência par na diferença entre prótons e nêutrons. As constantes presentes na fórmula podem então ser calculadas a partir de dados experimentais<sup>5</sup>.

A partir do ajuste de dados experimentais com a fórmula semi-empírica de massa, podemos fazer  $A \rightarrow \infty$  e obter os resultados para a matéria nuclear infinita (GLENDENNING, 2000):

$$\rho_B^{sat} = 0,153 \text{ fm}^{-3} \quad (2.69)$$

$$\frac{B}{A} = -16,3 \text{ MeV}, \quad (2.70)$$

onde  $\rho_B^{sat}$  denota a densidade de saturação da matéria nuclear e  $B/A$  a energia de ligação por nucleon. Esta última pode ser relacionada à

---

<sup>5</sup>Outras correções, como o termo de emparelhamento, não são relevantes nesse contexto e serão deixadas de fora.

equação de estado para a densidade de energia da matéria nuclear – isto é, a equação que relaciona a densidade de energia com a densidade bariônica do sistema – através de (GLENDENNING, 2000)

$$\frac{B}{A} = \left( \frac{\epsilon}{\rho_B} \right)_{\rho_B = \rho_B^{sat}} - m, \quad (2.71)$$

o que nos dá um parâmetro de ajuste para a equação de estado para a densidade de energia. Também podemos, a partir da fórmula semi-empírica de massa, escrever

$$a_{sim} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2(\epsilon/\rho_B)}{\partial t^2} \right]_{t=0}, \quad (2.72)$$

onde

$$t \equiv \frac{\rho_B^n - \rho_B^p}{\rho_B}, \quad (2.73)$$

nos dando outro parâmetro para o ajuste da equação de estado para a densidade de energia, cujo valor é  $a_{sim} = 32,5$  MeV.

Outra propriedade importante da matéria nuclear é a compressibilidade  $K$ , dada por

$$K = 9 \left[ \rho_B^2 \frac{d^2}{d\rho_B^2} \left( \frac{\epsilon}{\rho_B} \right) \right]_{\rho_B = \rho_B^{sat}}. \quad (2.74)$$

Este parâmetro define a curvatura da equação de estado para a densidade de energia no ponto de saturação e possibilita a extrapolação da equação de estado para valores maiores da densidade. O comportamento para densidades altas é conhecido como “dureza”<sup>6</sup> da equação de estado e aumenta com o valor de  $K$ , isto é, quanto maior o valor de  $K$ , mais rápido a densidade de energia cresce com a densidade bariônica. O valor desse parâmetro situa-se na faixa de 200 a 300 MeV, no entanto seu valor depende dos dados usados para sua extração. Relacionando-o com valores experimentais da energia de ressonância gigante de monopolo isoescalar resulta em  $K = 234$  MeV. Se forem incluídos dados experimentais de massas nucleares,  $K \approx 220$  MeV.

Finalmente, a massa efetiva  $m^* = m - g_s\sigma + g_\delta\tau_3\delta$  também pode ser usada como um parâmetro, estando também relacionada à “dureza” da equação de estado. Seu valor não é conhecido com precisão para a densidade de saturação, no entanto espera-se que esteja na faixa

<sup>6</sup>Em inglês *stiffness* – dureza – ou mesmo *softness* – moleza – da equação.

$$m^*/m \approx 0,7 \text{ a } 0,8. \quad (2.75)$$

Para o caso da lagrangeana não-linear sem a inclusão do méson delta, é possível encontrar uma relação fechada entre as constantes de acoplamento  $g_\sigma$ ,  $g_2$ ,  $g_3$ ,  $g_\omega$  e  $g_\rho$ , e as propriedades da matéria nuclear descritas acima (GLEDENNING, 2000). Os resultados obtidos através desse método não são completamente adequados para a reprodução de resultados para núcleos finitos, no entanto, servem como um ponto de partida para a elaboração de uma parametrização viável. Além disso, ao se ajustar um conjunto de parâmetros para reproduzir os resultados nucleares, é importante que os resultados para a matéria nuclear continuem aceitáveis.

### 2.9.1 Energia de simetria

Para o caso não-linear, é útil encontrarmos uma relação entre a energia de simetria  $a_{sim}$  e as constantes de acoplamento que diferenciam prótons de nêutrons. Isto pode ser feito através da equação de estado para a energia

$$\begin{aligned} \epsilon = \frac{1}{\pi^2} & \left[ \int_0^{k_p} k^2 dk e(k) + \int_0^{k_n} k^2 dk e(k) \right] \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{g_\omega}{m_\omega} \right)^2 \rho_B^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{g_\rho}{m_\rho} \right)^2 \rho_3^2 + \frac{1}{2} m_\sigma \sigma^2 + 2g_2 \sigma^3 + 2g_3 \sigma^4, \end{aligned} \quad (2.76)$$

onde  $e(k) = g_\omega \omega_0 + g_\rho \tau_3 b_0 + \sqrt{k^2 + m^*}$ ,  $m^* = m - g_\sigma \sigma - g_\delta \tau_3 \delta_0$ ,  $k_p$  representa o momento de Fermi dos prótons e  $k_n$  o momento de Fermi dos nêutrons. Na densidade de saturação da matéria nuclear simétrica, temos

$$k_p = k_F (1 - t)^{1/3} \quad (2.77)$$

$$k_n = k_F (1 + t)^{1/2} \quad (2.78)$$

onde o momento de Fermi  $k_F$  é dado por

$$k_F = \left( \frac{3\pi^2 \rho_B^{sat}}{2} \right)^{1/3}. \quad (2.79)$$

Podemos então calcular a energia de simetria de acordo com a equa-

ção (2.72), obtendo (LIU et al., 2002)

$$a_{sim} = \left(\frac{g_\rho}{m_\rho}\right)^2 \frac{k_F^3}{3\pi^2} - \left(\frac{g_\delta}{m_\delta}\right)^2 \left(\frac{m^*}{\sqrt{k_F^2 + m^{*2}}}\right)^2 \frac{k_F^3}{3\pi^2} + \frac{k_F^2}{6\sqrt{k_F^2 + m^{*2}}}. \quad (2.80)$$

Através dessa relação, podemos então ajustar os valores das constantes de acoplamento  $g_\rho$  e  $g_\delta$  de forma que a energia de simetria não se altere. Com isso, podemos tomar uma parametrização que contenha o méson  $\rho$  e ajustá-la para incluir também o méson  $\delta$ , mantendo a energia de simetria inalterada. Para a parametrização dependente da densidade essa condição só pode ser obtida, em geral, numericamente.

### 3 ESPALHAMENTO DE ELÉTRONS POLARIZADOS

*Neste capítulo calcularemos a seção de choque para o espalhamento de elétrons polarizados por um alvo hadrônico tanto na aproximação de ondas planas, quanto na aproximação de ondas distorcidas. Em ambos os casos, a expressão resultante dependerá das propriedades nucleares através das correntes eletromagnética e fraca do núcleo, que serão explicitadas no capítulo subsequente. A partir dos resultados para as seções de choque, definiremos a Assimetria, particularizando para o caso de espalhamento elástico por um alvo nuclear com número par de prótons e de nêutrons.*

#### 3.1 CINEMÁTICA

Na figura 3.1 temos uma representação esquemática do espalhamento. Um elétron incidente colide com momento inicial  $\mathbf{p}$  e energia inicial  $\epsilon$  em um núcleo em repouso. Após a colisão, o elétron tem momento final  $\mathbf{p}'$  e energia final  $\epsilon'$ .

Consideraremos aqui, somente o caso de espalhamento elástico, logo a energia inicial e final do elétron será a mesma. Por completudeza vamos, no entanto, considerar o caso mais geral. Em notação de quadrivetores temos

$$p^\mu \equiv (\epsilon, \mathbf{p}) \quad (3.1a)$$

$$p'^\mu \equiv (\epsilon', \mathbf{p}') \quad (3.1b)$$

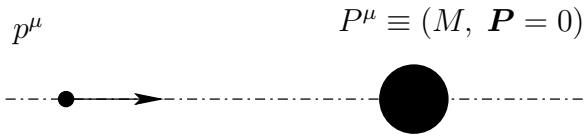
$$P^\mu \equiv (E, \mathbf{P}) \quad (3.1c)$$

$$P'^\mu \equiv (E', \mathbf{P}'). \quad (3.1d)$$

Além disso, definimos o quadrivetor momento transferido

$$\begin{aligned} q^\mu &= (q_0, \mathbf{q}) \\ &= (\epsilon' - \epsilon, \mathbf{p}' - \mathbf{p}). \end{aligned} \quad (3.1e)$$

Antes da colisão



Depois da colisão

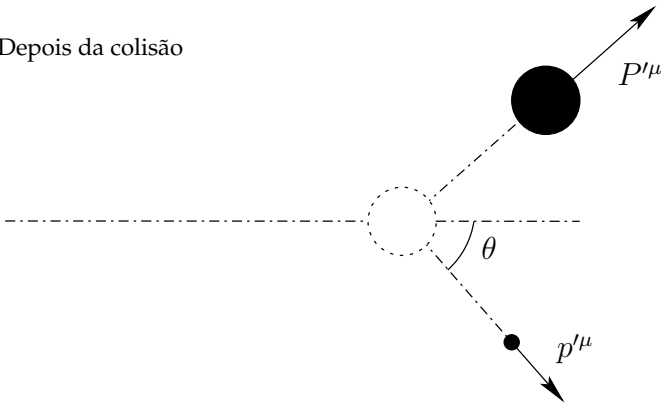


FIGURA 3.1: Definição das variáveis cinemáticas para o espalhamento de elétrons.

### 3.2 LAGRANGEANA DO ELÉTRON

O movimento do elétron é dado pela densidade lagrangeana (GREINER; MÜLLER, 1996):

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_e [\gamma_\mu (i\partial^\mu + \alpha A^\mu + (a + b\gamma^5)W^\mu) - m_e c] \psi_e. \quad (3.2)$$

Utilizando-se a equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \bar{\psi} / \partial x^\mu)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = 0, \quad (3.3)$$

obtemos a equação de movimento

$$[\gamma_\mu (i\partial^\mu + \alpha A^\mu + (a + b\gamma^5)W^\mu) - m_e] \psi_e = 0, \quad (3.4)$$

onde  $a$  e  $b$  são constantes características da interação fraca. Para o elétron (GREINER; MÜLLER, 1996),

$$a = -0,08 \quad (3.5a)$$

$$b = -1. \quad (3.5b)$$

Os potenciais eletromagnético  $A^\mu$  e fraco  $W^\mu$ , gerados pelo núcleo, são dados por

$$\partial^\mu \partial_\mu A^\nu(t, \mathbf{r}) = -4\pi J^\nu(t, \mathbf{r}) \quad (3.6)$$

e

$$W^\nu(t, \mathbf{r}) = -\frac{G}{\sqrt{2}} \mathfrak{J}^\nu(t, \mathbf{r}), \quad (3.7)$$

onde  $G = 1,166 \times 10^{-11}$  (MeV<sup>-2</sup>) é a constante de Fermi para a interação fraca. As correntes  $J^\nu(t, \mathbf{r})$  e  $\mathfrak{J}^\nu(t, \mathbf{r})$  representam respectivamente a corrente eletromagnética e a corrente neutra do núcleo. A expressão para  $W^\nu(t, \mathbf{r})$  só é válida dentro da aproximação de “força de contato”, justificada pelo curto alcance da força fraca a baixas energias do espalhamento (comparadas à massa de repouso dos bósons de *gauge* da interação).

### 3.3 SOLUÇÃO EM ONDAS PLANAS (PWBA)

A seção de choque para os elétrons espalhados pode ser calculada, usando teoria de perturbação em primeira ordem<sup>1</sup>, através de

$$d\sigma = \overline{\sum_{i,f}} \frac{w_{f,i}}{F_{inc}} \quad (3.8)$$

onde  $\overline{\sum_{i,f}}$  representa a soma sobre os estados finais e média sobre os estados iniciais do sistema e  $F_{inc}$  representa o fluxo incidente de elétrons. O termo  $w_{f,i}$  é dado pela regra de ouro de Fermi:

$$w_{f,i} = 2\pi\rho |\langle f|H_{int}|i\rangle|^2, \quad (3.9)$$

sendo  $\rho$  a densidade de estados finais e  $H_{int}$  a hamiltoniana de interação, que pode ser lida de (3.4) e dada por

$$H_{int} = -\alpha\gamma_\mu \hat{A}^\mu - \gamma_\mu (a + b\gamma^5) \hat{W}^\mu, \quad (3.10)$$

Dessa forma, a seção de choque pode ser escrita em função da energia  $\epsilon$  e do momento  $p$  incidentes como

$$d\sigma = 2\pi \frac{p}{\epsilon} \frac{\rho}{V} \overline{\sum_{i,f}} |\langle f|H_{int}|i\rangle|^2. \quad (3.11)$$

A densidade de estados para uma onda plana com momento  $p$  pode ser escrita como

$$\rho = \frac{V}{(2\pi)^3} \quad (3.12)$$

e podemos escrever a seção de choque como

$$d\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{p}{\epsilon} \overline{\sum_{i,f}} |\langle f|H_{int}|i\rangle|^2, \quad (3.13)$$

onde desprezamos o recuo do núcleo. Nas expressões acima,  $V$  é o volume de normalização, do qual a seção de choque não depende.

#### 3.3.1 Cálculo do valor esperado da hamiltoniana de interação

Podemos separar o cálculo da hamiltoniana de interação em duas partes, uma devida à interação eletromagnética e a outra devida à in-

---

<sup>1</sup>Tal aproximação é conhecida como *Plane Wave Born Approximation – PWBA*, ou seja, “aproximação de ondas planas de Born”. Mais detalhes sobre os cálculos efetuados nesta seção podem ser encontrados no Apêndice A.



teração fraca:

$$\langle em \rangle = \langle f | \gamma_\mu \hat{A}^\mu | i \rangle \quad (3.14)$$

$$\langle W \rangle = \langle f | \gamma_\mu (a + b\gamma^5) \hat{W}^\mu | i \rangle, \quad (3.15)$$

que podem ser escritas em função das correntes eletromagnética e neutra como

$$\langle em \rangle = -\frac{4\pi(2\pi)^2}{V} \bar{\mu}(\mathbf{p}') \gamma_\mu \mu(\mathbf{p}) \frac{J^\mu(q_0, \mathbf{q})}{q^2 - q_0^2} \quad (3.16)$$

$$\langle W \rangle = -(2\pi)^2 \frac{\sqrt{2}G}{2V} \bar{\mu}(\mathbf{p}') \gamma_\mu (a + b\gamma^5) \mu(\mathbf{p}) \mathfrak{J}^\mu(q_0, \mathbf{q}). \quad (3.17)$$

Para efetuar a soma sobre os estados finais e média sobre os estados iniciais, precisamos de

$$|\langle f | H_{int} | i \rangle|^2 = |-\alpha \langle em \rangle - \langle W \rangle|^2, \quad (3.18)$$

que pode ser escrita como

$$\begin{aligned} |\langle f | H_{int} | i \rangle|^2 &= \frac{16\pi^2(2\pi)^4}{V^2} \frac{\alpha^2}{(q^2 - q_0^2)^2} |\bar{\mu}(\mathbf{p}') \gamma_\mu J^\mu(q_0, \mathbf{q}) \mu(\mathbf{p})|^2 \\ &+ \frac{4\pi(2\pi)^4 \sqrt{2}G\alpha}{V^2(q^2 - q_0^2)} \Re \left\{ [\bar{\mu}(\mathbf{p}') \gamma_\mu J^\mu(q_0, \mathbf{q}) \mu(\mathbf{p})] \right. \\ &\quad \left. \times [\bar{\mu}(\mathbf{p}') \gamma_\mu (a + b\gamma^5) \mathfrak{J}^\mu(q_0, \mathbf{q}) \mu(\mathbf{p})]^* \right\}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde desprezamos o termo proporcional a  $G^2$ , já que esta constante é muito menor que a constante de estrutura fina  $\alpha$ . Além disso, para calcularmos a assimetria, precisamos introduzir o operador de projeção de helicidade

$$h_\pm = (1 + h\gamma^5); \quad h = \pm 1. \quad (3.20)$$

Este operador deve atuar somente nos elétrons incidentes, o que corresponde a polarizá-los (GREINER; MÜLLER, 1996). Podemos então escrever a soma sobre os estados como

$$\overline{\sum}_{i,f} |\langle f | H_{int} | i \rangle|^2 = \frac{16\pi^2(2\pi)^4}{V^2} \frac{\alpha^2}{(q^2 - q_0^2)^2} S_{em} + \frac{4\pi(2\pi)^4 \sqrt{2}G\alpha}{V^2(q^2 - q_0^2)} S_w, \quad (3.21)$$

onde

$$S_{em} \equiv \overline{\sum_{i,f}} |\bar{\mu}(\mathbf{p}') \gamma_\mu J^\mu(q_0, \mathbf{q})(1 + h\gamma^5) \mu(\mathbf{p})|^2 \quad (3.22)$$

e

$$S_W \equiv \overline{\sum_{i,f}} [\bar{\mu}(\mathbf{p}') \gamma_\mu J^\mu(q_0, \mathbf{q})(1 + h\gamma^5) \mu(\mathbf{p})] \times [\bar{\mu}(\mathbf{p}') \gamma_\mu (a + b\gamma^5) \mathfrak{J}^\mu(q_0, \mathbf{q})(1 + h\gamma^5) \mu(\mathbf{p})]^*. \quad (3.23)$$

### 3.3.2 Tensores leptônico e hadrônico

Podemos separar as somas nas equações (3.22) e (3.23) em uma parte relativa ao feixe de elétrons espalhado e outra relativa ao núcleo. Dessa forma, podemos escrever

$$S_{em} = \ell^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} \quad (3.24a)$$

$$S_W = \tilde{\ell}^{\mu\nu} \tilde{\omega}_{\mu\nu}, \quad (3.24b)$$

onde

$$\ell^{\mu\nu} = \overline{\sum_{i,f}} |\bar{\mu}(\mathbf{p}') \gamma^\mu (1 + h\gamma^5) \mu(\mathbf{p})|^2 \quad (3.25a)$$

$$\tilde{\ell}^{\mu\nu} = \overline{\sum_{i,f}} [\bar{\mu}(\mathbf{p}') \gamma^\nu (1 + h\gamma^5) \mu(\mathbf{p})] [\bar{\mu}(\mathbf{p}') \gamma^\mu (a + b\gamma^5) (1 + h\gamma^5) \mu(\mathbf{p})]^* \quad (3.25b)$$

$$\omega_{\mu\nu} = \overline{\sum_{i,f}} J_\mu(q_0, \mathbf{q}) J_\nu^*(q_0, \mathbf{q}) \quad (3.25c)$$

$$\tilde{\omega}_{\mu\nu} = \overline{\sum_{i,f}} \mathfrak{J}_\mu(q_0, \mathbf{q}) J_\nu^*(q_0, \mathbf{q}). \quad (3.25d)$$

O núcleo tem momento angular total  $J$  bem definido, porém em um experimento de espalhamento usual, a projeção do momento angular total  $M$  não é bem definida. Dessa forma, as somas sobre as projeções finais e médias sobre as projeções iniciais para os tensores  $\omega_{\mu\nu}$  e  $\tilde{\omega}_{\mu\nu}$  podem ser escritas como

$$\omega_{\mu\nu} = \frac{1}{2J+1} \sum_{\substack{M \\ M'}} J_\mu(q_0, \mathbf{q}) J_\nu^*(q_0, \mathbf{q}) \quad (3.26a)$$

$$\tilde{\omega}_{\mu\nu} = \frac{1}{2J+1} \sum_{\substack{M \\ M'}} \mathfrak{J}_\mu(q_0, \mathbf{q}) J_\nu^*(q_0, \mathbf{q}). \quad (3.26b)$$

O cálculo dos tensores  $\ell^{\mu\nu}$  e  $\tilde{\ell}^{\mu\nu}$  pode ser realizado usando (GRIF-FITHS, 1987)

$$\overline{\sum_{i,f}} [\bar{\mu}(a)\Gamma_1\mu(b)][\bar{\mu}(a)\Gamma_2\mu(b)]^* = \text{Tr}[\Gamma_1(\not{p}_b + m_b c)\bar{\Gamma}_2(\not{p}_a + m_a c)] \quad (3.27)$$

e as propriedades para o traço de matrizes  $\gamma$  de Dirac. Aqui  $\not{p} = \gamma_\mu p^\mu$ ,  $\bar{\Gamma} = \gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0$  e as matrizes  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  são produtos de matrizes  $\gamma$ . Obtemos assim

$$\ell^{\mu\nu} = \{4(1 + h^2)(p^\mu p'^\nu + p^\nu p'^\mu - p^\lambda p'_\lambda g^{\mu\nu}) - 8h(i\epsilon^{\mu\lambda\nu\sigma})p_\lambda p'_\sigma + 4(1 - h^2)m^2 g^{\mu\nu}\} \quad (3.28a)$$

$$\tilde{\ell}^{\mu\nu} = \{4(a + h^2 a + 2hb)(p^\mu p'^\nu + p^\nu p'^\mu - p_\lambda p'^\lambda g^{\mu\nu}) + (4am^2 - 4h^2 am^2)g^{\mu\nu} - 4(b + h^2 b + 2ha)(i\epsilon^{\mu\lambda\nu\sigma})p_\lambda p'_\sigma\}. \quad (3.28b)$$

Como  $h = \pm 1$ , temos que  $h^2 = 1$  e obtemos

$$\ell^{\mu\nu} = \{8(p^\mu p'^\nu + p^\nu p'^\mu - p^\lambda p'_\lambda g^{\mu\nu}) - 8h(i\epsilon^{\mu\lambda\nu\sigma})p_\lambda p'_\sigma\} \quad (3.29a)$$

$$\tilde{\ell}^{\mu\nu} = \{8(a + hb)(p^\mu p'^\nu + p^\nu p'^\mu - p_\lambda p'^\lambda g^{\mu\nu}) - 8(b + ha)(i\epsilon^{\mu\lambda\nu\sigma})p_\lambda p'_\sigma\}. \quad (3.29b)$$

Precisamos ainda calcular as somas implícitas nos índices  $\mu$  e  $\nu$  nas expressões (3.24). Para isso, vamos analisar as propriedades das correntes  $J_\mu(q_0, \mathbf{q})$  e  $\tilde{J}_\mu(q_0, \mathbf{q})$  que compõe os tensores hadrônicos  $\omega_{\mu\nu}$  e  $\tilde{\omega}_{\mu\nu}$ .

### 3.3.3 Propriedades do tensor eletromagnético

Através da análise das propriedades da corrente eletromagnética, podemos encontrar relações entre os elementos do tensor  $\omega_{\mu\nu}$  que reduzem o número de termos que precisam ser calculados na soma implícita.

Tomando a transformada de Fourier da equação da continuidade

$$\partial^\mu J_\mu(t, \mathbf{r}) = 0, \quad (3.30)$$

obtemos

$$\mathcal{F}[\partial^\mu J_\mu] = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint \partial^\mu J_\mu(t, \mathbf{r}) e^{iq_0 t - i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} dt = 0. \quad (3.31)$$

Fazendo uma integração por partes, temos

$$\mathcal{F}[\partial^\mu J_\mu] = \frac{1}{(2\pi)^2} \left\{ \left[ J_0(t, \mathbf{r}) - \mathbf{J}(t, \mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{r}} \right] e^{iq_0 t - i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \right\}_{-\infty}^{\infty} - iq^\mu \iint J_\mu(t, \mathbf{r}) e^{iq_0 t - i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} dt. \quad (3.32)$$

Na integral acima, o primeiro termo é zero, pois a corrente deve ser nula no infinito. A integral do segundo termo juntamente com o fator  $1/(2\pi)^2$  é a transformada de Fourier da corrente. Portanto

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\partial^\mu J_\mu] &= -iq^\mu J_\mu(q_0, \mathbf{q}) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

e podemos escrever

$$q^0 J_0(q_0, \mathbf{q}) - \mathbf{q} \cdot \mathbf{J}(q_0, \mathbf{q}) = 0. \quad (3.34)$$

Podemos decompor a parte vetorial da corrente em suas componentes longitudinal  $\mathbf{J}_\ell$  e transversal  $\mathbf{J}_t$  (relativas à direção  $\hat{\mathbf{q}}$ ):

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_\ell + \mathbf{J}_t. \quad (3.35)$$

Além disso, assumimos  $\hat{\mathbf{q}} \parallel \hat{\mathbf{z}}$ , conseqüentemente o módulo de  $\mathbf{J}_\ell$  deve ser equivalente a  $J_3$ . Dessa forma

$$q^0 J_0(q_0, \mathbf{q}) - q J_3(q_0, \mathbf{q}) = 0. \quad (3.36)$$

Determina-se, portanto, uma relação entre as componentes  $J_3$  e  $J_0$  e precisamos calcular somente três componentes de  $J^\mu$ . Levando-se em conta esta propriedade, os elementos de  $\omega_{\mu\nu}$  que envolvem  $J_0$  e  $J_3$  poderão ser escritos como:

$$\omega_{00} = \frac{1}{2J+1} \sum_{\substack{m \\ m'}} J_0 J_0^* \quad (3.37)$$

$$\omega_{03} = \omega_{30} = \frac{q_0}{q} \omega_{00} \quad (3.38)$$

$$\omega_{33} = \left[ \frac{q_0}{q} \right]^2 \omega_{00}. \quad (3.39)$$

Definindo agora para as outras duas componentes da corrente

$$J_+ = -\frac{1}{\sqrt{2}}(J_1 + iJ_2) \quad (3.40a)$$

$$J_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(J_1 - iJ_2), \quad (3.40b)$$

os termos de  $\omega_{\mu\nu}$  que envolvem as componentes 1 e 2 podem ser escritos como

$$\omega_{11} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(2J+1)} \sum_{\substack{m \\ m'}} (J_+ J_+^* - J_+ J_-^* - J_- J_+^* + J_- J_-^*) \right] \quad (3.41)$$

$$\omega_{22} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(2J+1)} \sum_{\substack{m \\ m'}} (J_+ J_+^* + J_+ J_-^* + J_- J_+^* + J_- J_-^*) \right] \quad (3.42)$$

$$\omega_{12} = \frac{i}{2} \left[ \frac{1}{(2J+1)} \sum_{\substack{m \\ m'}} (J_+ J_+^* + J_+ J_-^* - J_- J_+^* - J_- J_-^*) \right] \quad (3.43)$$

$$\omega_{21} = -\frac{i}{2} \left[ \frac{1}{(2J+1)} \sum_{\substack{m \\ m'}} (J_+ J_+^* - J_+ J_-^* + J_- J_+^* - J_- J_-^*) \right]. \quad (3.44)$$

A corrente eletromagnética do alvo é definida através de

$$J_\mu = \langle J_f M_f | \hat{J}_\mu | J_i M_i \rangle, \quad (3.45)$$

onde  $|JM\rangle$  representa o núcleo no estado de momento angular total  $J$  com projeção  $M$ . O fóton, no entanto, tem spin igual a 1 e suas projeções são, portanto,  $\pm 1$  ou zero. Assim, o núcleo terá projeção final dada ou por  $M_f = M_i \pm 1$  ou  $M_f = M_i$ .

Ao calcularmos os termos cruzados

$$\sum_{\substack{m \\ m'}} J_+ J_-^* = \sum_{\substack{m \\ m'}} \langle J_f M_f | \hat{J}_+ | J_i M_i \rangle \langle J_f M_f | \hat{J}_- | J_i M_i \rangle \quad (3.46)$$

e

$$\sum_{\substack{m \\ m'}} J_- J_+^* = \sum_{\substack{m \\ m'}} \langle J_f M_f | \hat{J}_- | J_i M_i \rangle \langle J_f M_f | \hat{J}_+ | J_i M_i \rangle, \quad (3.47)$$

sabendo que os operadores  $\hat{J}_+$  e  $\hat{J}_-$  aumentam ou diminuem a projeção do momento angular de uma unidade, nunca teremos uma situação em que ambos os termos dentro do somatório sejam diferentes de

zero. Assim, os elementos de  $\omega_{\mu\nu}$  se tornam:

$$\omega_{11} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(2J+1)} \sum_{\substack{m \\ m'}} (J_+ J_+^* + J_- J_-^*) \right] \quad (3.48)$$

$$\omega_{22} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(2J+1)} \sum_{\substack{m \\ m'}} (J_+ J_+^* + J_- J_-^*) \right] \quad (3.49)$$

$$\omega_{12} = \frac{i}{2} \left[ \frac{1}{1(2J+1)} \sum_{\substack{m \\ m'}} (J_+ J_+^* - J_- J_-^*) \right] \quad (3.50)$$

$$\omega_{21} = -\frac{i}{2} \left[ \frac{1}{(2j+1)} \sum_{\substack{m \\ m'}} (J_+ J_+^* - J_- J_-^*) \right]. \quad (3.51)$$

Pela mesma razão, os termos  $\omega_{01}$ ,  $\omega_{10}$ ,  $\omega_{02}$  e  $\omega_{20}$ , bem como os termos relacionados a estes através da equação da continuidade, também são nulos. Além disso, usando o teorema de Wigner-Eckart temos que

$$\frac{1}{2J_i+1} \sum_{M_i M_f} J_+ J_+^* = \frac{1}{2J_i+1} \sum_{M_i M_f} J_- J_-^*, \quad (3.52)$$

do que resulta que  $\omega_{12}$  e  $\omega_{21}$  são nulos e

$$\omega_{11} = \omega_{22} = \omega_{++}, \quad (3.53)$$

onde

$$\omega_{++} \equiv \frac{1}{2J+1} \sum_{\substack{m \\ m'}} J_+ J_+^*. \quad (3.54)$$

Utilizando as propriedades acima para os tensores leptônico e hadrônico, podemos finalmente mostrar que

$$S_{em} \equiv \ell^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} = 16pp' \left[ \left( \frac{q_\mu^A}{q^A} \right) \omega_{00} - \left( \frac{q_\mu^2}{2q^2} - \tan^2 \theta/2 \right) \omega_{++} \right] \cos^2 \theta/2. \quad (3.55)$$

### 3.3.4 Propriedades do tensor de interferência

Da mesma forma que reduzimos o número de termos a serem calculados para  $\ell^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu}$ , podemos analisar as propriedades das correntes  $J_\mu$  e  $\mathfrak{J}_\mu$  que compõem  $\tilde{\omega}_{\omega\nu}$  para determinarmos quais componentes se-

rão nulas ou iguais entre si. Vamos novamente usar as definições para a corrente eletromagnética, dadas pelas equações (3.40), e definir para a corrente neutra:

$$\mathfrak{J}_+ = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathfrak{J}_1 + i\mathfrak{J}_2) \quad (3.56a)$$

$$\mathfrak{J}_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathfrak{J}_1 - i\mathfrak{J}_2). \quad (3.56b)$$

Dessa forma, podemos reescrever os termos de  $\tilde{\omega}_{\mu\nu}$  como

$$\tilde{\omega}_{11} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(2J+1)} \sum_{m'} (J_+ \mathfrak{J}_+^* - J_+ \mathfrak{J}_-^* - J_- \mathfrak{J}_+^* + J_- \mathfrak{J}_-^*) \right] \quad (3.57a)$$

$$\tilde{\omega}_{22} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(2J+1)} \sum_{m'} (J_+ \mathfrak{J}_+^* + J_+ \mathfrak{J}_-^* + J_- \mathfrak{J}_+^* + J_- \mathfrak{J}_-^*) \right] \quad (3.57b)$$

$$\tilde{\omega}_{12} = \frac{i}{2} \left[ \frac{1}{(2J+1)} \sum_{m'} (J_+ \mathfrak{J}_+^* + J_+ \mathfrak{J}_-^* - J_- \mathfrak{J}_+^* - J_- \mathfrak{J}_-^*) \right] \quad (3.57c)$$

$$\tilde{\omega}_{21} = -\frac{i}{2} \left[ \frac{1}{(2J+1)} \sum_{m'} (J_+ \mathfrak{J}_+^* - J_+ \mathfrak{J}_-^* + J_- \mathfrak{J}_+^* - J_- \mathfrak{J}_-^*) \right]. \quad (3.57d)$$

Os termos envolvendo produtos do tipo  $+$  e  $-$ , como vimos anteriormente, são nulos. Assim:

$$\tilde{\omega}_{11} = \tilde{\omega}_{22} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(2J+1)} \sum_{m'} (J_+ \mathfrak{J}_+ + J_- \mathfrak{J}_-) \right] \quad (3.58a)$$

$$\tilde{\omega}_{12} = -\tilde{\omega}_{21} = \frac{i}{2} \left[ \frac{1}{(2J+1)} \sum_{m'} (J_+ \mathfrak{J}_+ - J_- \mathfrak{J}_-) \right]. \quad (3.58b)$$

A corrente neutra pode agora ser decomposta em duas partes:

$$\mathfrak{J}_\mu = \mathfrak{J}_\mu^v + \mathfrak{J}_\mu^a, \quad (3.59)$$

onde a primeira componente é vetorial, enquanto a segunda é pseudo-vetorial<sup>2</sup>. A parte vetorial da corrente fraca, obedece à equação da con-

---

<sup>2</sup>Esta componente também pode ser denominada "axial".

tinuidade (hipótese CVC: *conserved vector current*):

$$\mathfrak{J}_v^3 = \frac{q_0}{q} \mathfrak{J}_v^0. \quad (3.60)$$

Levando em conta essa separação das componentes da corrente neutra, podemos escrever (DONNELLY; DUBACH; SICK, 1989; DONNELLY; PECCEL, 1979)

$$\sum_{M_i M_f} (J_+ \mathfrak{J}_+^* + J_- \mathfrak{J}_-^*) = \sum_{M_i M_f} (J_+ \mathfrak{J}_{+,v}^* + J_- \mathfrak{J}_{-,v}^*) \quad (3.61)$$

$$\sum_{M_i M_f} (J_+ \mathfrak{J}_+^* - J_- \mathfrak{J}_-^*) = \sum_{M_i M_f} (J_+ \mathfrak{J}_{+,a}^* - J_- \mathfrak{J}_{-,a}^*) \quad (3.62)$$

e teremos dessa forma contribuições separadas envolvendo a parte vetorial e a parte axial da corrente fraca. Da mesma forma que fizemos no caso eletromagnético, podemos escrever – usando as propriedades acima – a expressão para  $\tilde{\ell}^{\mu\nu} \tilde{\omega}_{\mu\nu}$  como

$$\begin{aligned} S_w &\equiv \tilde{\ell}_{\mu\nu} \tilde{\omega}^{\mu\nu} \\ &= 16pp' \left\{ (a + hb) \left( \frac{q_\mu^4}{q^4} \right) \tilde{\omega}_{00}^v \right. \\ &\quad + (a + hb) \left[ \left( 1 - \frac{q_0}{q} \right) \tilde{\omega}_{00}^a + \left( -\frac{q_0}{q} + \frac{q_0^3}{q^3} \right) \tilde{\omega}_{03}^a \right] \\ &\quad - (a + hb) \left[ \frac{q_\mu^2}{2q^2} - \tan^2 \theta/2 \right] (\tilde{\omega}_{++}^v + \tilde{\omega}_{--}^v) \\ &\quad \left. + (b + ha) \left[ \tan \theta/2 \sqrt{-\frac{q_\mu^2}{q^2} + \tan^2 \theta/2} \right] (\tilde{\omega}_{++}^a - \tilde{\omega}_{--}^a) \right\} \\ &\quad \times \cos^2 \theta/2, \end{aligned} \quad (3.63)$$



onde

$$\tilde{\omega}_{00}^v = \frac{1}{2J+1} \sum_{m'} J_0 \tilde{\mathfrak{J}}_0^{v*} \quad \tilde{\omega}_{03}^a = \frac{1}{2J+1} \sum_{m'} J_0 \tilde{\mathfrak{J}}_3^{a*} \quad (3.64a)$$

$$\tilde{\omega}_{++}^v = \frac{1}{2J+1} \sum_{m'} J_+ \tilde{\mathfrak{J}}_{+,v}^* \quad \tilde{\omega}_{++}^a = \frac{1}{2J+1} \sum_{m'} J_+ \tilde{\mathfrak{J}}_+^{a*} \quad (3.64b)$$

$$\tilde{\omega}_{--}^v = \frac{1}{2J+1} \sum_{m'} J_- \tilde{\mathfrak{J}}_-^{v*} \quad \tilde{\omega}_{--}^a = \frac{1}{2J+1} \sum_{m'} J_- \tilde{\mathfrak{J}}_-^{a*} \quad (3.64c)$$

### 3.3.5 Seção de choque em função das correntes e a Assimetria

Utilizando os resultados das Equações (3.11), (3.21), (3.55) e (3.63), podemos finalmente escrever a seção de choque para os elétrons como

$$\begin{aligned} d\sigma = 2\pi \frac{p}{\epsilon} \frac{\rho}{V} \left\{ \frac{16\pi^2 (2\pi)^4}{V^2} \frac{\alpha^2}{(q^2 - q_0^2)^2} 16pp' \right. \\ \times \left[ \left( \frac{q_\mu^4}{q^4} \right) \omega_{00} - \left( \frac{q_\mu^2}{q^2} - 2 \tan^2 \theta/2 \right) \omega_{++} \right] \\ + \frac{4\pi (2\pi)^4}{V^2} \frac{\sqrt{2} G\alpha}{(q^2 - q_0^2)} 16pp' \Re \left[ (a + hb) \left( \frac{q_\mu^4}{q^4} \right) \tilde{\omega}_{00}^v \right. \\ + \left[ \left( 1 - \frac{q_0}{q} \right) \tilde{\omega}_{00}^a + \left( -\frac{q_0}{q} + \frac{q_0^3}{q^3} \right) \tilde{\omega}_{03}^a \right] \\ - (a + hb) \left( \frac{q_\mu^2}{2q^2} - \tan^2 \theta/2 \right) [\tilde{\omega}_{++}^v + \tilde{\omega}_{--}^v] \\ + (b + ha) \left( \sqrt{-\frac{q_\mu^2}{q^2} + \tan^2 \theta/2} \tan \theta/2 \right) \\ \left. \left. \times [\tilde{\omega}_{++}^a - \tilde{\omega}_{--}^a] \right] \right\} \cos^2 \theta/2. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Utilizando a equação acima e a definição da Assimetria  $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A} = \frac{d\sigma_+/d\Omega - d\sigma_-/d\Omega}{d\sigma_+/d\Omega + d\sigma_-/d\Omega}, \quad (3.66)$$

onde os sinais denotam helicidade positiva ou negativa para o feixe, podemos então escrever em ondas planas

$$\begin{aligned}
 \frac{\mathcal{A}^{\text{PWBA}}}{\sqrt{2}G/8\pi} &= \frac{q^2 - q_0^2}{\alpha} \Re \left\{ 2b \left( \frac{q_\mu^4}{q^4} \right) \tilde{\omega}_{00}^v \right. \\
 &\quad + 2b \left[ \left( 1 - \frac{q_0}{q^2} \right) \tilde{\omega}_{00}^a + \left( -\frac{q_0}{q} + \frac{q_0^3}{q^3} \right) \tilde{\omega}_{03}^a \right] \\
 &\quad - 2b \left( \frac{q_\mu^2}{2q^2} - \tan^2 \theta/2 \right) [\tilde{\omega}_{++}^v + \tilde{\omega}_{--}^v] \\
 &\quad \left. + 2a \left[ \sqrt{-\frac{q_\mu^2}{q^2} + \tan^2 \theta/2} \tan \theta/2 \right] [\tilde{\omega}_{++}^a - \tilde{\omega}_{--}^a] \right\} \\
 &\quad \times \left[ \left( \frac{q_\mu^4}{q^4} \right) \omega_{00} - \left( \frac{q_\mu^2}{q^2} - 2 \tan^2 \theta/2 \right) \omega_{++} \right]^{-1}.
 \end{aligned} \tag{3.67}$$

No caso em que iremos aqui analisar, isto é, espalhamento elástico de elétrons por núcleos par-par – núcleos com momento angular zero e paridade positiva – podemos simplificar a expressão acima. Primeiramente, o espalhamento elástico implica que  $q_0 = 0$ . Como não há transferência de energia nesse tipo de espalhamento, o estado final do núcleo deve ser igual ao inicial, logo todos os termos que envolvem transferência de momento angular devem ser nulos. Além disso, devido ao fato de que a corrente axial não conserva a paridade, a contribuição dos termos proporcionais a  $\mathfrak{J}^a$  também deve ser nula. Assim, a expressão para a assimetria torna-se simplesmente

$$\mathcal{A}^{\text{PWBA}} = \frac{\sqrt{2}Gb}{4\pi\alpha} q^2 \frac{\mathfrak{J}_0^v(q)}{J_0(q)}, \tag{3.68}$$

onde  $J_0(q)$  e  $\mathfrak{J}_0^v(q)$  representam as correntes eletromagnética e neutra, cujos cálculos serão discutidos no Capítulo 4.

### 3.4 SOLUÇÃO EM ONDAS DISTORCIDAS (DWBA)

Apesar de o espalhamento em ondas planas nos dar uma relação mais direta com as propriedades do alvo nuclear, suas limitações podem esconder resultados importantes. Em virtude disso, também realizaremos os cálculos utilizando a aproximação de ondas distorcidas.

Devido à interação entre o elétron incidente e o núcleo, ocorre uma deformação das ondas incidentes e emergentes do elétron que pode ser melhor descrita por uma soma de ondas parciais<sup>3</sup> e, a partir delas, calculamos a seção de choque. Em nosso caso, esse tipo de correção é tão mais importante quanto maior for a carga elétrica do alvo.

### 3.4.1 Efeitos da polarização dos elétrons incidentes

Para o cálculo da assimetria, precisamos calcular a seção de choque para feixes de elétrons com helicidade positiva e negativa. Para fazer isso de forma compatível com a solução em ondas distorcidas, tomamos a Equação de movimento (3.4) para a interação elétron-núcleo

$$[\gamma_\mu(i\partial^\mu + V^\mu(\mathbf{r})) - m_e]\psi_e = 0, \quad (3.69)$$

onde  $V^\mu(\mathbf{r}) = \alpha A^\mu(\mathbf{r}) + (a + b\gamma^5)W^\mu(\mathbf{r})$ . Os potenciais  $A^\mu(\mathbf{r})$  e  $W^\mu(\mathbf{r})$  gerados pelo núcleo, são dados em termos das correntes nucleares  $J_0(q)$  e  $\mathfrak{J}_0^v(q)$  através das Equações (3.6) e (3.7)<sup>4</sup>. Como estamos interessados em espalhamento com energias desde da ordem de algumas centenas de MeV até em torno de 1 GeV, podemos desprezar a massa do elétron. Além disso, nos restringiremos ao caso estático e com simetria esférica. Nesse caso, assumindo soluções estacionárias, podemos escrever a equação acima como

$$[-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \alpha A^0(r) + (a + b\gamma^5)W^0(r)]\psi_e = E\psi_e. \quad (3.70)$$

Ao polarizarmos o feixe, temos

$$\psi_+ = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)\psi_e \quad (3.71)$$

$$\psi_- = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)\psi_e, \quad (3.72)$$

onde o primeiro caso descreve um feixe com helicidade positiva e o segundo um feixe com helicidade negativa. A partir dessas definições, fica evidente que  $\psi_e = \psi_+ + \psi_-$  e podemos separar a equação em dois casos distintos, um para cada estado de polarização do feixe:

$$[-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \alpha A^0(r) + aW^0(r) + b\gamma^5 W^0(r)]\psi_\pm = E\psi_\pm. \quad (3.73)$$

<sup>3</sup>Esta aproximação é conhecida como *Distorted Wave Born Approximation* – DWBA, isto é, “aproximação de ondas distorcidas de Born”. Mais detalhes acerca dos cálculos dessa seção podem ser encontrados no Apêndice B

<sup>4</sup>Novamente, tais correntes serão discutidas no Capítulo 4.

A partir das definições de  $\psi_+$  e  $\psi_-$  e da propriedade  $(\gamma^5)^2 = I$ , temos que

$$\gamma^5 \psi_+ = \psi_+ \quad (3.74)$$

$$\gamma^5 \psi_- = -\psi_- \quad (3.75)$$

e podemos escrever

$$[-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \alpha A^0(r) + aW^0(r) \pm bW^0(r)]\psi_{\pm} = E\psi_{\pm}. \quad (3.76)$$

Portanto, para calcularmos a seção de choque para polarizações diferentes do feixe, basta resolvermos a equação acima levando em conta as duas possibilidades para o sinal do potencial fraco proporcional à constante  $b$ .

Estamos interessados no cálculo da assimetria, dada por

$$\mathcal{A} = \frac{d\sigma_+/d\Omega - d\sigma_-/d\Omega}{d\sigma_+/d\Omega + d\sigma_-/d\Omega}. \quad (3.77)$$

Nesta expressão,  $d\sigma_+/d\Omega$  representa a seção de choque com helicidade positiva – portanto com o sinal positivo para o termo proporcional a  $b$  – e  $d\sigma_-/d\Omega$  a seção de choque para helicidade negativa. Devido à independência da interação eletromagnética com a helicidade, no numerador teremos uma exposição das propriedades oriundas da interação fraca. Além disso, como a interação eletromagnética é muito mais intensa que a interação fraca, no denominador teremos uma minimização dos efeitos do potencial  $W^0(r)$ . Finalmente, a constante  $a$  é muito menor do que  $b$ , portanto podemos levar em conta somente os efeitos do termo proporcional a esta última. Assim, podemos simplificar a equação de movimento para o elétron ainda mais uma vez, obtendo finalmente

$$[-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \alpha A^0(r) \pm bW^0(r)]\psi_{\pm} = E\psi_{\pm}. \quad (3.78)$$

### 3.4.2 Cálculo da seção de choque

A Equação de movimento (3.78) acima, pode ser interpretada como um caso especial de

$$[-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + V^0(r) + \gamma_0 m_e]\psi_e = E\psi_e, \quad (3.79)$$

onde  $V^0(r) = \alpha A^0(r) \pm bW^0(r)$  e  $m_e = 0$ . Para resolvê-la, utilizamos

uma expansão em ondas parciais:

$$\psi_{m_s}(\mathbf{r}) = 4\pi \sqrt{\frac{E + m_e}{2m_e}} \sum_{\kappa m_\ell m} e^{i\delta_\kappa} i^\ell \langle \ell, m_\ell, 1/2, m_s | j m \rangle Y_{\ell m_\ell}^*(\hat{p}) \psi_{\kappa m}(\mathbf{r}), \quad (3.80)$$

onde

$$\psi_{\kappa m}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} (u_\kappa(r)/r)\phi_{\kappa m}(\hat{r}) \\ (i l_\kappa(r)/r)\phi_{-\kappa m}(\hat{r}) \end{pmatrix}, \quad (3.81a)$$

e

$$\phi_{\kappa m}(\hat{r}) = \sum_{m_\ell m_s} \langle \ell, m_\ell, 1/2, m_s | j, m \rangle Y_{\ell m_\ell}(\hat{r}) \chi_{m_s}. \quad (3.81b)$$

Se substituirmos a expressão para  $\psi_{m_s}$  acima na Equação (3.79), obtemos

$$\frac{\partial}{\partial r} l_\kappa(r) = \frac{\kappa - 1}{r} l_\kappa(r) + [V(r) - E + m_e] u_\kappa(r) = 0 \quad (3.82a)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} u_\kappa(r) = -\frac{\kappa + 1}{r} u_\kappa(r) - [V(r) - E - m_e] l_\kappa(r) = 0. \quad (3.82b)$$

O sistema de equações acima tem duas soluções analíticas para o caso de um potencial coulombiano pontual, uma regular e outra irregular – isto é, uma finita e outra infinita na origem –. Para uma distribuição finita de cargas de raio  $R$ , se  $r > R$ , as soluções obtidas para o potencial gerado pela distribuição de cargas devem coincidir com as soluções para o potencial pontual. Podemos então escrever

$$u_\kappa(r) = A_\kappa u_\kappa^{CR}(r) + B_\kappa u_\kappa^{CI}(r) \quad (3.83a)$$

$$l_\kappa(r) = A_\kappa l_\kappa^{CR}(r) + B_\kappa l_\kappa^{CI}(r). \quad (3.83b)$$

Utilizando as formas assintóticas para as funções  $u(r)$  e  $l(r)$ , podemos calcular a seguinte expressão para os phase-shifts:

$$\delta_\kappa = \delta_\kappa^R + \arctan\left(\frac{\text{sen } \theta}{A_\kappa/B_\kappa + \cos \theta_\kappa}\right), \quad (3.84)$$

onde  $\theta_\kappa \equiv \delta_\kappa^I - \delta_\kappa^R$  e  $\delta_\kappa^{R,I}$  são os phase-shifts coulombianos, cuja forma é bem conhecida. A razão  $A_\kappa/B_\kappa$  pode ser calculada através do sistema (3.83) utilizando-se soluções numéricas para as funções  $u(r)$  e  $l(r)$ , e as soluções analíticas regulares e irregulares para o potencial coulombiano.

Finalmente, podemos calcular a seção de choque através de

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 + |g(\theta)|^2, \quad (3.85)$$

onde

$$f(\theta) = \frac{1}{2ip} \sum_{\kappa>0} \kappa e^{2i\delta_\kappa} [P_\kappa(\cos \theta) + e^{2i\Delta_\kappa} P_{\kappa-1}(\cos \theta)] \quad (3.86a)$$

$$g(\theta) = \frac{1}{\sin \theta} \left[ \frac{1}{2ip} \sum_{\kappa>0} \kappa e^{2i\delta_\kappa} (1 + e^{2i\Delta_\kappa}) [P_\kappa(\cos \theta) + P_{\kappa-1}(\cos \theta)] - (1 + \cos \theta) f(\theta) \right]. \quad (3.86b)$$

Aqui  $\Delta_\kappa \equiv \delta_{-\kappa} - \delta_\kappa$ ,  $P_\kappa$  são os polinômios de Legendre e  $\theta$  é o ângulo formado entre o feixe incidente e o espalhado. É importante observar que, tanto as funções radiais como os phase-shifts  $\delta_\kappa$  devem ser calculados para cada um dos dois sinais que ocorrem na equação (3.78). Como os efeitos da interação fraca sobre os phase-shifts são bem pequenos, isso exige uma precisão numérica bastante grande.

## 4 CORRENTES HADRÔNICAS

No Capítulo 3 obtivemos uma expressão para a assimetria que depende da razão entre as correntes fraca e eletromagnética do núcleo. Neste capítulo desenvolveremos essas correntes utilizando os resultados obtidos no Capítulo 2 e as expressaremos a partir das funções de onda dos estados de partícula independente do núcleo. Além disso, vamos discutir correções para o tamanho finito dos nucleons, para o movimento do centro de massa e para o conteúdo de estranheza do núcleo.

### 4.1 CORRENTE ELETROMAGNÉTICA

A corrente eletromagnética  $J_\mu$  para o núcleo é dada por

$$J_\mu = \langle \Psi | \hat{J}_\mu | \Psi \rangle, \quad (4.1)$$

onde  $|\Psi\rangle$  representa a função de onda do núcleo. Essa função, no entanto, é extremamente complexa, pois envolve a interação de muitos nucleons simultaneamente. Tal fato se reflete também na definição do operador  $\hat{J}_\mu$ . Podemos obter uma expressão mais simples ao escrever o operador  $\hat{J}_\mu$  como uma soma de operadores de um corpo (coerente com a aproximação de Hartree aqui utilizada), isto é:

$$J_\mu = \langle \Psi | \hat{J}_\mu | \Psi \rangle \quad (4.2)$$

$$\equiv \sum_\alpha \langle \psi_\alpha | \hat{J}_\mu^i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) | \psi_\alpha \rangle. \quad (4.3)$$

A soma se dá sobre os rótulos<sup>1</sup> dos  $A$  nucleons que compõem o sistema. As funções de onda de partícula são representadas por  $|\psi_\alpha\rangle$  enquanto  $\hat{J}_\mu^i$  representa o operador corrente de um corpo.<sup>2</sup>

Usando o fato de que o operador corrente é um vetor podemos

<sup>1</sup>Nominalmente:  $n, \kappa, m$  e  $t; j$  e  $l$  são determinados a partir de  $\kappa$ .

<sup>2</sup>O índice  $i$  denota o "i-ésimo" corpo, isto é, aquele que ocupa o estado  $|\psi_\alpha\rangle$  e cujos números quânticos são os representados por um dado conjunto de autovalores  $\alpha$ .

escrevê-lo de forma geral como (CHENG; O'NEILL, 1979)

$$\hat{J}_\mu^i = \gamma_\mu K_1(q^2) + i\sigma_{\mu\nu}(p' - p)^\nu K_2(q^2) + i\sigma_{\mu\nu}(p' + p)^\nu K_3(q^2) + (p' - p)_\mu K_4(q^2) + (p' + p)_\mu K_5(q^2). \quad (4.4)$$

Os fatores de forma  $K$  são funções de  $q^2$  somente, pois a quantidade  $(p' + p)^2$  pode ser sempre expressa como uma função de  $q^2$  e das massas envolvidas. Os termos envolvendo  $(p' + p)$  podem ser incorporados aos outros fatores de forma usando as identidades (CHENG; O'NEILL, 1979)

$$\bar{\mu}(\mathbf{p}')[(p' + p)_\mu]\mu(\mathbf{p}) = \bar{\mu}(\mathbf{p}')[-i\sigma_{\mu\nu}(p' - p)^\nu + (m' + m)\gamma_\mu]\mu(\mathbf{p}) \quad (4.5)$$

$$\bar{\mu}(\mathbf{p}')[i\sigma_{\mu\nu}(p' + p)^\nu]\mu(\mathbf{p}) = \bar{\mu}(\mathbf{p}')[-(p' - p)_\mu + (m' - m)\gamma_\mu]\mu(\mathbf{p}), \quad (4.6)$$

onde  $\mu(\mathbf{p})$  é um spinor de Dirac, resultando em

$$\hat{J}_\mu^i = \gamma_\mu F_1(q^2) + i\frac{[\kappa F_2(q^2)]}{2m}\sigma_{\mu\nu}q^\nu + q_\mu F_3(q^2), \quad (4.7)$$

onde  $\kappa$  é uma constante,  $m$  é a massa do nucleon e

$$F_1(q^2) = K_1(q^2) + (m' - m)K_3(q^2) + (m' + m)K_5(q^2) \quad (4.8)$$

$$\frac{\kappa F_2(q^2)}{2m} = K_2(q^2) - K_5(q^2) \quad (4.9)$$

$$F_3(q^2) = K_4(q^2) - K_5(q^2). \quad (4.10)$$

O fator  $\kappa/2m$  é inserido de forma que  $F_2(q^2)$  coincida com a definição convencional do fator de forma eletromagnético. Podemos ainda impor a condição de conservação da corrente:

$$q^\mu J_\mu^i(p, p') = 0 \quad (4.11)$$

$$= \langle \mu | q_\mu \gamma^\mu F_1(q^2) + i\frac{[\kappa F_2(q^2)]}{2m} q^\mu \sigma_{\mu\nu} q^\nu + q^2 F_3(q^2) | \mu \rangle. \quad (4.12)$$

Usando a equação de Dirac

$$(\gamma^\mu p_\mu - mc)\mu(\mathbf{p}) = 0, \quad (4.13)$$

podemos reduzir o primeiro termo a  $(m' - m)F_1(q^2)$ . O segundo termo



se anula devido à propriedade de anti-simetria dos tensores  $\sigma_{\mu\nu}$ . Além disso, para o nucleon no seu estado fundamental,  $m' = m$ , o que resulta

$$q^\mu J_\mu^i(p, p') = 0 \quad (4.14)$$

$$= \langle \mu | q^2 F_3(q^2) | \mu \rangle. \quad (4.15)$$

Temos, portanto, que o fator de forma  $F_3(q^2)$  é zero. Logo, nos restam somente dois fatores de forma desconhecidos e o operador  $\hat{J}_\mu$  será

$$\hat{J}_\mu^i = F_1(q^2)\gamma_\mu + i\frac{[\kappa F_2(q^2)]}{2m}\sigma_{\mu\nu}q^\nu. \quad (4.16)$$

Finalmente, destacamos que os fatores de forma  $F_1(q^2)$ ,  $F_2(q^2)$  e a constante  $\kappa$  têm valores diferentes para prótons e nêutrons.

## 4.2 SEPARAÇÃO EM COMPONENTES DE ISOSPIN

Os fatores de forma  $F_1$  e  $F_2$ , bem como a constante  $\kappa$  podem ser escritos em uma forma geral utilizando o operador  $\tau_3$ , que tem autovalor +1 quando atua em estados de próton e -1 quando atua em estados de nêutrons, e definindo um fator de forma  $F'_2$  de forma que

$$F_2'^p = \kappa^p F_2^p \quad (4.17a)$$

$$F_2'^n = \kappa^n F_2^n. \quad (4.17b)$$

Assim, os fatores de forma serão dados por

$$F_1 = F_1^p \frac{1 + \tau_3}{2} + F_1^n \frac{1 - \tau_3}{2} \quad (4.18a)$$

$$F_2' = F_2'^p \frac{1 + \tau_3}{2} + F_2'^n \frac{1 - \tau_3}{2}, \quad (4.18b)$$

ou

$$F_1 = F_1^0 + F_1^1 \tau_3 \quad (4.19a)$$

$$F_2' = F_2'^0 + F_2'^1 \tau_3, \quad (4.19b)$$

onde

$$F_1^0 = \frac{F_1^p + F_1^n}{2} \quad (4.20a)$$

$$F_1^1 = \frac{F_1^p - F_1^n}{2} \quad (4.20b)$$

$$F_2'^0 = \frac{F_2'^p + F_2'^n}{2} \quad (4.20c)$$

$$F_2'^1 = \frac{F_2'^p - F_2'^n}{2}. \quad (4.20d)$$

Usando a equação (4.3), a expressão para o operador corrente (4.16) e os fatores de forma acima, podemos escrever

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \hat{J}_\mu | \Psi \rangle &= \sum_\alpha \langle \psi_\alpha | F_1^0(q^2) \gamma_\mu \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) | \psi_\alpha \rangle \\ &\quad + \langle \psi_\alpha | i \frac{F_2'^0(q^2)}{2m} \sigma_{\mu\nu} q^\nu \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) | \psi_\alpha \rangle \\ &\quad + \sum_\alpha \langle \psi_\alpha | F_1^1(q^2) \gamma_\mu \tau_3 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) | \psi_\alpha \rangle \\ &\quad + \langle \psi_\alpha | i \frac{F_2'^1(q^2)}{2m} \sigma_{\mu\nu} q^\nu \tau_3 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) | \psi_\alpha \rangle. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Escrevendo a equação acima em termos de integrais no espaço de posição, obtemos

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \hat{J}_\mu | \Psi \rangle &= \sum_\alpha \left[ F_1^0(q^2) \int \bar{\psi}_\alpha(\mathbf{r}_i) \gamma_\mu \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \psi_\alpha(\mathbf{r}_i) d\mathbf{r}_i \right. \\ &\quad \left. + i \frac{F_2'^0}{2m} \int \bar{\psi}_\alpha(\mathbf{r}_i) \sigma_{\mu\nu} q^\nu \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \psi_\alpha(\mathbf{r}_i) d\mathbf{r}_i \right] \\ &\quad + \sum_\alpha \left[ F_1^1(q^2) \int \bar{\psi}_\alpha(\mathbf{r}_i) \gamma_\mu \tau_3 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \psi_\alpha(\mathbf{r}_i) d\mathbf{r}_i \right. \\ &\quad \left. + i \frac{F_2'^1}{2m} \int \bar{\psi}_\alpha(\mathbf{r}_i) \sigma_{\mu\nu} q^\nu \tau_3 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \psi_\alpha(\mathbf{r}_i) d\mathbf{r}_i \right], \end{aligned} \quad (4.22)$$

o que resulta em

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \hat{J}_\mu | \Psi \rangle &= \sum_\alpha \left[ F_1^0(q^2) \bar{\psi}_\alpha(\mathbf{r}) \gamma_\mu \psi_\alpha(\mathbf{r}) + i \frac{F_2^{\prime 0}}{2m} \bar{\psi}_\alpha(\mathbf{r}) \sigma_{\mu\nu} q^\nu \psi_\alpha(\mathbf{r}) \right] \\ &+ \sum_\alpha \left[ F_1^1(q^2) \bar{\psi}_\alpha(\mathbf{r}) \gamma_\mu \tau_3 \psi_\alpha(\mathbf{r}) + i \frac{F_2^{\prime 1}}{2m} \bar{\psi}_\alpha(\mathbf{r}) \sigma_{\mu\nu} q^\nu \tau_3 \psi_\alpha(\mathbf{r}) \right]. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Conforme discutido no Capítulo 3, vamos calcular somente a componente  $J_0$  da corrente, que é dada por

$$\begin{aligned} J_0 &= \langle \Psi | \hat{J}_0 | \Psi \rangle \\ &= \sum_\alpha \left[ F_1^0(q^2) \bar{\psi}_\alpha(\mathbf{r}) \gamma_0 \psi_\alpha(\mathbf{r}) + i \frac{F_2^{\prime 0}}{2m} \bar{\psi}_\alpha(\mathbf{r}) \sigma_{0\nu} q^\nu \psi_\alpha(\mathbf{r}) \right] \\ &+ \sum_\alpha \left[ F_1^1(q^2) \bar{\psi}_\alpha(\mathbf{r}) \gamma_0 \tau_3 \psi_\alpha(\mathbf{r}) + \frac{F_2^{\prime 1}}{2m} \bar{\psi}_\alpha(\mathbf{r}) \sigma_{0\nu} q^\nu \tau_3 \psi_\alpha(\mathbf{r}) \right]. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Efetuaremos o cálculo dessa componente nas seções subsequentes.

### 4.3 DESENVOLVIMENTO DO TERMO ANÔMALO

Para obtermos a densidade de carga, precisamos desenvolver o termo  $\bar{\psi}_\alpha(\mathbf{r}) \sigma_{0\nu} q^\nu \psi_\alpha(\mathbf{r})$  de forma que possamos realizar o cálculo das partes relativas aos isospins  $T = 0$  e  $T = 1$  da expressão (4.24) para o valor esperado da corrente. Para isso, precisamos usar a definição de  $\sigma_{\mu\nu}$

$$\sigma_{0\nu} = \frac{i}{2} (\gamma_0 \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_0), \quad (4.25)$$

Expandindo a soma implícita, obtemos

$$\bar{\psi}_\alpha(\mathbf{r}) \sigma_{0\nu} q^\nu \psi_\alpha(\mathbf{r}) = \frac{i}{2} \bar{\psi}_\alpha(\mathbf{r}) [(\gamma_0 \gamma_0 - \gamma_0 \gamma_0) q^0 - (\gamma_0 \gamma - \gamma \gamma_0) \cdot \mathbf{q}] \psi_\alpha(\mathbf{r}). \quad (4.26)$$

Como

$$\gamma \gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} = -\boldsymbol{\alpha}, \quad (4.27)$$

podemos reescrever (4.26) como

$$\bar{\psi}_\alpha(\mathbf{r})\sigma_{0\nu}q^\nu\psi_\alpha(\mathbf{r}) = -i\bar{\psi}_\alpha(\mathbf{r})\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{q}\psi_\alpha(\mathbf{r}). \quad (4.28)$$

O operador momento transferido pode ser escrito na representação de coordenadas como

$$\mathbf{q} = i(\nabla + \nabla), \quad (4.29)$$

onde  $\nabla$  é o gradiente atuando na função de onda à direita e  $\nabla$  o gradiente atuando na função de onda à esquerda. Assim

$$\bar{\psi}_\alpha(\mathbf{r})\sigma_{0\nu}q^\nu\psi_\alpha(\mathbf{r}) = -i^2[\bar{\psi}_\alpha(\mathbf{r})\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla\psi_\alpha(\mathbf{r}) + \bar{\psi}_\alpha(\mathbf{r})\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla\psi_\alpha(\mathbf{r})]. \quad (4.30)$$

Desenvolvendo os termos  $\bar{\psi}_\alpha\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla\psi_\alpha$  e  $\bar{\psi}_\alpha\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla\psi_\alpha$ , obtemos

$$\bar{\psi}_\alpha(\mathbf{r})\sigma_{0\nu}q^\nu\psi_\alpha(\mathbf{r}) = \nabla\cdot[\bar{\psi}_\alpha(\mathbf{r})\boldsymbol{\alpha}\psi_\alpha(\mathbf{r})]. \quad (4.31)$$

Podemos então reescrever a expressão (4.24) como

$$\begin{aligned} \langle\Psi|\hat{J}_0|\Psi\rangle &= \sum_\alpha \left[ F_1^0(q^2)\bar{\psi}_\alpha(\mathbf{r})\gamma_0\psi_\alpha(\mathbf{r}) \right. \\ &\quad \left. + i\frac{F_2'^0(q^2)}{2m}\nabla\cdot[\bar{\psi}_\alpha(\mathbf{r})\boldsymbol{\alpha}\psi_\alpha(\mathbf{r})] \right] \\ &+ \sum_\alpha \left[ F_1^1(q^2)\bar{\psi}_\alpha(\mathbf{r})\gamma_0\tau_3\psi_\alpha(\mathbf{r}) \right. \\ &\quad \left. + i\frac{F_2'^1(q^2)}{2m}\nabla\cdot[\bar{\psi}_\alpha(\mathbf{r})\boldsymbol{\alpha}\tau_3\psi_\alpha(\mathbf{r})] \right]. \end{aligned} \quad (4.32)$$

#### 4.4 TRANSFORMADA DE FOURIER

Para o cálculo da assimetria, precisamos do valor esperado do operador corrente no espaço de momento transferido  $\mathbf{q}$ . A expressão obtida até então é uma função da posição. No entanto, é possível transformá-la em uma função do momento através de uma transformada de Fourier:

$$\langle\Psi|\hat{J}_0|\Psi\rangle_{\mathbf{q}} = \mathfrak{F} \left[ \langle\Psi|\hat{J}_0|\Psi\rangle_{\mathbf{r}} \right] \quad (4.33)$$

$$\equiv \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \langle\Psi|\hat{J}_0|\Psi\rangle_{\mathbf{r}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r}. \quad (4.34)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\langle \Psi | \hat{J}_0 | \Psi \rangle_{\mathbf{q}}}{(2\pi)^{-3/2}} &= \int \left\{ \sum_{\alpha} \left[ F_1^0(q^2) \bar{\psi}_{\alpha}(\mathbf{r}) \gamma_0 \psi_{\alpha}(\mathbf{r}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + i \frac{F_2^{\prime 0}}{2m} \nabla \cdot [\bar{\psi}_{\alpha}(\mathbf{r}) \boldsymbol{\alpha} \psi_{\alpha}(\mathbf{r})] \right] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\alpha} \left[ F_1^1(q^2) \bar{\psi}_{\alpha}(\mathbf{r}) \gamma_0 \tau_3 \psi_{\alpha}(\mathbf{r}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + i \frac{F_2^{\prime 1}}{2m} \nabla \cdot [\bar{\psi}_{\alpha}(\mathbf{r}) \boldsymbol{\alpha} \tau_3 \psi_{\alpha}(\mathbf{r})] \right] \right\} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Vamos denotar a transformada dos somatórios como  $\langle \Psi | \hat{J}_0^{T=0} | \Psi \rangle_{\mathbf{q}}$  e  $\langle \Psi | \hat{J}_0^{T=1} | \Psi \rangle_{\mathbf{q}}$ , respectivamente:

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \hat{J}_0^{T=0} | \Psi \rangle_{\mathbf{q}} &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sum_{\alpha} \left[ F_1^0(q^2) \bar{\psi}_{\alpha}(\mathbf{r}) \gamma_0 \psi_{\alpha}(\mathbf{r}) \right. \\ &\quad \left. + i \frac{F_2^{\prime 0}}{2m} \nabla \cdot [\bar{\psi}_{\alpha}(\mathbf{r}) \boldsymbol{\alpha} \psi_{\alpha}(\mathbf{r})] \right] e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \hat{J}_0^{T=1} | \Psi \rangle_{\mathbf{q}} &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sum_{\alpha} \left[ F_1^1(q^2) \bar{\psi}_{\alpha}(\mathbf{r}) \gamma_0 \tau_3 \psi_{\alpha}(\mathbf{r}) \right. \\ &\quad \left. + i \frac{F_2^{\prime 1}}{2m} \nabla \cdot [\bar{\psi}_{\alpha}(\mathbf{r}) \boldsymbol{\alpha} \tau_3 \psi_{\alpha}(\mathbf{r})] \right] e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Tais termos podem ser escritos como<sup>3</sup>

$$\langle \Psi | \hat{J}_0^{T=0} | \Psi \rangle_{\mathbf{q}} = F_1^0(q^2) [\rho_B^p(q) + \rho_B^n(q)] + \frac{F_2^{\prime 0}(q^2)}{2m} [\varrho^p(q) + \varrho^n(q)] \quad (4.38a)$$

$$\langle \Psi | \hat{J}_0^{T=1} | \Psi \rangle_{\mathbf{q}} = F_1^1(q^2) [\rho_B^p(q) - \rho_B^n(q)] + \frac{F_2^{\prime 1}(q^2)}{2m} [\varrho^p(q) - \varrho^n(q)], \quad (4.38b)$$

e, portanto, a expressão para o valor esperado do operador corrente

---

<sup>3</sup>O cálculo em detalhes pode ser acompanhado no Apêndice C.

no espaço de momento transferido será:

$$\langle \Psi | \hat{J}_0 | \Psi \rangle_{\mathbf{q}} = \langle \Psi | \hat{J}_0^{T=0} | \Psi \rangle_{\mathbf{q}} + \langle \Psi | \hat{J}_0^{T=1} | \Psi \rangle_{\mathbf{q}} \quad (4.39)$$

Aqui a densidade bariônica  $\rho_B$  e a correção  $\varrho$  são dadas por (ver Apêndice C)

$$\rho_B(q) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int \rho_B(r) j_0(qr) r^2 dr. \quad (4.40)$$

$$\varrho(q) = -\frac{2}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\alpha} (2j+1) \int j_1(qr) f_{n\kappa t}(r) g_{n\kappa t}(r) r^2 dr, \quad (4.41)$$

onde as funções  $f_{n\kappa t}(r)$  e  $g_{n\kappa t}(r)$  são as componentes radiais superior e inferior dos orbitais dos nucleons. A soma em  $\alpha$  se dá sobre todos os estados de nêutron, no caso de  $\rho_B^n(q)$  e  $\varrho^n(q)$ , ou sobre todos os estados de próton, no caso de  $\rho_B^p(q)$  e  $\varrho^p(q)$ .

#### 4.5 CORRENTE NEUTRA

A parte vetorial da corrente neutra pode ser escrita em termos das componentes de isospin da corrente eletromagnética (DONNELLY; DUBACH; SICK, 1989). No espaço de momento, temos

$$\langle \Psi | \hat{\mathfrak{J}}_0 | \Psi \rangle_{\mathbf{q}} = \beta_v^0 \langle \Psi | \hat{J}_0^{T=0} | \Psi \rangle_{\mathbf{q}} + \beta_v^1 \langle \Psi | \hat{J}_0^{T=1} | \Psi \rangle_{\mathbf{q}}, \quad (4.42)$$

onde as constantes são dadas por

$$\beta_v^0 = -2 \sin^2 \theta_W \quad (4.43a)$$

$$\beta_v^1 = 1 - 2 \sin^2 \theta_W \quad (4.43b)$$

e o ângulo de Weinberg (DONNELLY; DUBACH; SICK, 1989) é dado por

$$\sin^2 \theta_W = 0,230 \pm 0,005. \quad (4.44)$$

#### 4.6 FATORES DE FORMA DO NUCLEON

As correntes eletromagnética  $J_0(q)$  e fraca  $\mathfrak{J}_0(q)$  estão agora completamente determinadas a partir das densidades nucleares, exceto pelo conjunto de fatores de forma dos nucleons, isto é,  $F_1^0$ ,  $F_2^0$ ,  $F_1^1$  e  $F_2^1$ . Podemos, no entanto, determiná-los usando uma parametrização obtida com base em dados para espalhamento elástico de elétrons não polarizados em núcleos de hidrogênio e deutério. Usaremos aqui a parametrização de Galster (GALSTER et al., 1971), que é dada para

os fatores de forma de Sachs, os quais reescreveremos em termos dos fatores de forma de Dirac  $F$ .

#### 4.6.1 Fatores de forma em termos dos fatores de forma de Sachs

Os fatores de forma de Sachs para próton e nêutron estão relacionados com os fatores de forma  $F_1^T$  e  $F_2^T$  através de (MUSOLF et al., 1993)

$$G_E^T(q^2) = F_1^T(q^2) - \tau(q)F_2^T(q^2) \quad (4.45)$$

$$G_M^T(q^2) = F_1^T(q^2) + F_2^T(q^2), \quad (4.46)$$

onde  $G_E$  e  $G_M$  denotam os fatores de forma elétrico e magnético de Sachs,  $T = 0$  ou  $T = 1$  e

$$\tau(q) = \frac{|q^2|}{4m^2}. \quad (4.47)$$

Podemos escrever os fatores de forma em termos de  $G_E^T$  e  $G_M^T$  como:

$$F_1^T = \frac{G_E^T + \tau(q)G_M^T}{1 + \tau(q)} \quad (4.48a)$$

$$F_2^T = \frac{G_M^T - G_E^T}{1 + \tau(q)}. \quad (4.48b)$$

Por sua vez,  $G_E^T$  e  $G_M^T$  são dados por

$$G_E^1 = \frac{1}{2}[G_E^p - G_E^n] \quad G_M^1 = \frac{1}{2}[G_M^p - G_M^n] \quad (4.49)$$

$$G_E^0 = \frac{1}{2}[G_E^p + G_E^n] \quad G_M^0 = \frac{1}{2}[G_M^p + G_M^n]. \quad (4.50)$$

Assim, podemos reescrever os fatores de forma em termos de  $G_E^p$ ,

$G_E^n, G_M^p$  e  $G_M^n$ :

$$F_1^0 = \frac{[G_E^p + G_E^n] + \tau(q)[G_M^p + G_M^n]}{2(1 + \tau(q))} \quad (4.51a)$$

$$F_2'^0 = \frac{[G_M^p + G_M^n] - [G_E^p + G_E^n]}{2(1 + \tau(q))} \quad (4.51b)$$

$$F_1^1 = \frac{[G_E^p - G_E^n] + \tau(q)[G_M^p - G_M^n]}{2(1 + \tau(q))} \quad (4.51c)$$

$$F_2'^1 = \frac{[G_M^p - G_M^n] - [G_E^p - G_E^n]}{2(1 + \tau(q))} \quad (4.51d)$$

#### 4.6.2 Parametrização para os fatores de forma de Sachs

Os fatores de forma  $G$  para próton e nêutron são dados, na parametrização de Galster, por

$$G_E^p = G_D^v \quad (4.52)$$

$$G_E^n = -\mu_n \tau(q) G_D^v \xi_n(q) \quad (4.53)$$

$$G_M^p = \mu_p G_D^v \quad (4.54)$$

$$G_M^n = \mu_n G_D^v, \quad (4.55)$$

onde

$$G_D^v = (1 + \lambda_D^v \tau(q))^{-2} \quad (4.56)$$

$$\xi(q) = (1 + \lambda_n \tau(q))^{-1} \quad (4.57)$$

e as constantes têm os seguintes valores:

$$\lambda_n = 5,6 \quad \lambda_D^v = 4,97 \quad (4.58)$$

$$\mu_p = \kappa^p + 1 = 2,79 \quad \mu_n = \kappa^n = -1,91. \quad (4.59)$$

Utilizando essas expressões, podemos escrever os fatores de forma (4.51)



como

$$F_1^0 = [1 + [(\mu_p + \mu_n) - \mu_n \xi(q)]\tau(q)] \frac{G_D^v(q)}{2(1 + \tau(q))} \quad (4.60a)$$

$$F_1^1 = [1 + [(\mu_p - \mu_n) + \mu_n \xi(q)]\tau(q)] \frac{G_D^v(q)}{2(1 + \tau(q))} \quad (4.60b)$$

$$F_2^{\prime 0} = [(\mu_p + \mu_n) + \mu_n \tau(q)\xi(q) - 1] \frac{G_D^v(q)}{2(1 + \tau(q))} \quad (4.60c)$$

$$F_2^{\prime 1} = [(\mu_p - \mu_n) - (1 + \mu_n \tau(q)\xi(q))] \frac{G_D^v(q)}{2(1 + \tau(q))}. \quad (4.60d)$$

#### 4.7 CORREÇÃO DO CENTRO DE MASSA

Como as funções de onda resultantes para o modelo de camadas não são autofunções do operador momento linear total (LIPKIN, 1958), é necessária a sua correção para eliminar propriedades espúrias dessas funções que prejudicam a obtenção de resultados adequados para descrever os diferentes observáveis nucleares. Esse tipo de correção, no entanto, não é única e só há um consenso entre os resultados para o caso de um potencial de oscilador harmônico. Vamos utilizar essa correção como uma solução aproximada para o problema.

De uma forma geral, podemos escrever a função de onda do orbital resultante do modelo de camadas como

$$\psi = \psi(\mathbf{X}, q^\alpha), \quad (4.61)$$

onde  $\mathbf{X}$  representa a coordenada do centro de massa e  $q^\alpha$  as coordenadas relativas do sistema. Desejamos então criar a partir de  $\psi$  uma função de onda  $\psi_0$  cujo momento total seja zero, o que pode ser descrito como (LIPKIN, 1958)

$$P\psi_0 = -i \frac{\partial \psi_0}{\partial \mathbf{X}} = 0, \quad (4.62)$$

onde  $P$  representa o operador de momento linear do centro de massa. De forma geral, podemos construir tal orbital a partir de

$$\psi_0(q^\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{X})\psi(\mathbf{X}, q^\alpha)d\mathbf{X}. \quad (4.63)$$

Aqui  $G(\mathbf{X})$  é uma função arbitrária. Devido a tal arbitrariedade, existem diferentes possibilidades para uma função de onda independente

das coordenadas do centro de massa, produzindo resultados diferentes para as propriedades dos orbitais. Para o caso do oscilador harmônico, no entanto, a função de onda  $\psi$  pode ser separada em uma parte contendo a dependência nas coordenadas do centro de massa e em outra contendo a dependência nas coordenadas relativas. Dessa forma, a função de onda  $\psi_0$  é independente da forma adotada para  $G(\mathbf{X})$ .

#### 4.7.1 Correção da densidade

A função de onda nuclear deve ter a forma (ÜBERALL, 1971)

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A) = e^{i\mathbf{P} \cdot \mathbf{R}} \phi(\mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_{A-1}), \quad (4.64)$$

isto é, uma onda plana na coordenada do centro de massa  $\mathbf{R}$ , dada por

$$\mathbf{R} = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^A \mathbf{r}_i, \quad (4.65)$$

que multiplica uma função de onda  $\phi$  que depende das coordenadas relativas  $\mathbf{r}'_i$ , dadas por

$$\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{R} \quad \text{com } i = 1, 2, 3, \dots, (A - 1). \quad (4.66)$$

Devido à ausência de simetria translacional da hamiltoniana do modelo de camadas, a função de onda correspondente em geral não pode ser escrita na forma (4.64). No caso do potencial de oscilador, no entanto, a hamiltoniana pode ser separada em uma parte correspondente às coordenadas do centro de massa e outra correspondente às coordenadas relativas. Assim, podemos escrever a função de onda para o modelo de camadas como

$$\Psi_{MC}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A) = \phi_{CM}(\mathbf{R}) \phi_{MC}(\mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_{A-1}) \quad (4.67)$$

onde  $\phi_{MC}$  representa a função de onda “interna” para o modelo de camadas, que depende somente das coordenadas relativas, e  $\phi_{CM}$  a função de onda do centro de massa, dada por

$$\phi_{CM}(\mathbf{R}) = (A^3 b^6 / \pi^3)^{1/4} e^{AR^2 / (2b^2)}. \quad (4.68)$$

Para calcularmos adequadamente  $\rho_B(\mathbf{q})$ , devemos utilizar a forma

(4.64)<sup>4</sup>:

$$\rho_B(\mathbf{q}) = \int \Psi^\dagger(\mathbf{r}_i)\Psi(\mathbf{r}_i)e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_i} d\mathbf{r}_i \quad (4.69)$$

$$= \iint \phi^\dagger(\mathbf{r}'_i)e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}'_i+\mathbf{R})}\phi(\mathbf{r}'_i) e^{-i\mathbf{P}_f\cdot\mathbf{R}}e^{i\mathbf{P}_i\cdot\mathbf{R}} d\mathbf{r}'_i d\mathbf{R}, \quad (4.70)$$

que, considerando o núcleo inicialmente em repouso – e, portanto,  $\mathbf{P}_i = 0$  –, pode ser escrita como

$$\rho_B(\mathbf{q}) = \left[ \int \phi^\dagger(\mathbf{r}'_i)e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}'_i}\phi(\mathbf{r}'_i) d\mathbf{r}'_i \right] \times \int e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{P}_f)\cdot\mathbf{R}} d\mathbf{R}. \quad (4.71)$$

A segunda integral resulta em  $(2\pi)^3\delta(\mathbf{q}-\mathbf{P})$ , ou seja, impõe a conservação do momento linear total.

Em contrapartida, se usarmos a forma (4.67), obtemos

$$\rho_{B,MC}(\mathbf{q}) = \left[ \int \phi_{MC}^\dagger(\mathbf{r}'_i)e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}'_i}\phi_{MC}(\mathbf{r}'_i) d\mathbf{r}'_i \right] \times \int |\phi_{CM}(\mathbf{R})|^2 e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}} d\mathbf{R}. \quad (4.72)$$

Para o movimento interno, esperamos que as funções  $\phi$  e  $\phi_{MC}$  sejam equivalentes, portanto podemos igualar as integrais envolvendo tais funções nas expressões para  $\rho_B(q)$  e  $\rho_{B,MC}(q)$ . Além disso,

$$\int |\phi_{CM}(\mathbf{R})|^2 e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}} d\mathbf{R} = e^{-b^2q^2/4A}, \quad (4.73)$$

e podemos escrever

$$\rho_B(q) = e^{b^2q^2/4A}\rho_{B,MC}(q). \quad (4.74)$$

Apesar de esse ser um resultado válido para o caso do potencial de oscilador harmônico, podemos utilizá-lo como uma correção aproximada para os demais potenciais. O parâmetro do oscilador harmônico  $b$  é dado pela Equação (2.46).

---

<sup>4</sup>Usamos a notação  $\mathbf{r}_i$  para representar o conjunto de coordenadas  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_A$  e  $\mathbf{r}'_i$  para representar o conjunto  $\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \mathbf{r}'_3, \dots, \mathbf{r}'_{A-1}$ .

## 4.8 ASSIMETRIA

### 4.8.1 Cálculo na aproximação de ondas planas

De acordo com os resultados obtidos nas seções anteriores, podemos calcular a razão entre as correntes neutra e eletromagnética no espaço de momento

$$\frac{\tilde{J}_0(\mathbf{q})}{J_0(\mathbf{q})} = \frac{\beta_v^0 \langle \Psi | \hat{J}_0^{T=0} | \Psi \rangle_{\mathbf{q}} + \beta_v^1 \langle \Psi | \hat{J}_0^{T=1} | \Psi \rangle_{\mathbf{q}}}{\langle \Psi | \hat{J}_0^{T=0} | \Psi \rangle_{\mathbf{q}} + \langle \Psi | \hat{J}_0^{T=1} | \Psi \rangle_{\mathbf{q}}}. \quad (4.75)$$

Substituindo as expressões (4.38) na equação acima, e agrupando os termos relativos aos prótons e aos nêutrons, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{J}_0(q)}{J_0(q)} = & \left\{ \left[ (\beta_v^0 F_1^0 + \beta_v^1 F_1^1) \rho_B^p(q) + \frac{(\beta_v^0 F_2'^0 + \beta_v^1 F_2'^1)}{2m} \varrho^p(q) \right] \right. \\ & \left. + \left[ (\beta_v^0 F_1^0 - \beta_v^1 F_1^1) \rho_B^n(q) + \frac{(\beta_v^0 F_2'^0 - \beta_v^1 F_2'^1)}{2m} \varrho^n(q) \right] \right\} \\ & \times \left\{ \left[ (F_1^0 + F_1^1) \rho_B^p + \frac{(F_2'^0 + F_2'^1)}{2m} \varrho^p(q) \right] \right. \\ & \left. + \left[ (F_1^0 - F_1^1) \rho_B^n + \frac{(F_2'^0 - F_2'^1)}{2m} \varrho^n(q) \right] \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (4.76)$$

A seguir, substituímos as expressões (4.60) para os fatores de forma no numerador da expressão acima e obtemos:

$$\begin{aligned} N = \frac{G_D^v(q)}{2(1 + \tau(q))} & \left\{ \left[ [\beta_v^0 A(q) + \beta_v^1 B(q)] \rho_B^p(q) \right. \right. \\ & \left. \left. + [\beta_v^0 C(q) + \beta_v^1 D(q)] \frac{\varrho^p(q)}{2m} \right] \right. \\ & \left. + \left[ [\beta_v^0 A(q) - \beta_v^1 B(q)] \rho_B^n(q) \right. \right. \\ & \left. \left. + [\beta_v^0 C(q) - \beta_v^1 D(q)] \frac{\varrho^n(q)}{2m} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.77)$$

onde

$$A(q) = 1 + [(\mu_p + \mu_n) - \mu_n \xi(q)] \tau(q) \quad (4.78a)$$

$$B(q) = 1 + [(\mu_p - \mu_n) + \mu_n \xi(q)] \tau(q) \quad (4.78b)$$

$$C(q) = -1 + [(\mu_p + \mu_n) + \mu_n \tau(q) \xi(q)] \quad (4.78c)$$

$$D(q) = -1 + [(\mu_p - \mu_n) - \mu_n \tau(q) \xi(q)]. \quad (4.78d)$$

Já o denominador será:

$$D = \frac{G_D^v(q)}{1 + \tau(q)} \left\{ \left[ [1 + \tau(q) \mu_p] \rho_B^p(q) + [\mu_p - 1] \frac{\varrho^p(q)}{2m} \right] + \left[ [(1 - \xi(q)) \mu_n \tau(q)] \rho_B^n(q) + [(1 + \tau(q) \xi(q)) \mu_n] \frac{\varrho^n(q)}{2m} \right] \right\}. \quad (4.79)$$

Assim a razão entre as correntes será, finalmente:

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{J}_0(q)}{J_0(q)} &= \frac{1}{2} \left\{ \left[ [\beta_v^0 A(q) + \beta_v^1 B(q)] \rho_B^p(q) + [\beta_v^0 C(q) + \beta_v^1 D(q)] \frac{\varrho^p(q)}{2m} \right] + \left[ [\beta_v^0 A(q) - \beta_v^1 B(q)] \rho_B^n(q) + [\beta_v^0 C(q) - \beta_v^1 D(q)] \frac{\varrho^n(q)}{2m} \right] \right\} \\ &\times \left\{ \left[ [1 + \tau(q) \mu_p] \rho_B^p(q) + [\mu_p - 1] \frac{\varrho^p(q)}{2m} \right] + \left[ [(1 - \xi(q)) \mu_n \tau(q)] \rho_B^n(q) + [(1 + \tau(q) \xi(q)) \mu_n] \frac{\varrho^n(q)}{2m} \right] \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (4.80)$$

A partir dessa expressão, podemos escrever a assimetria como

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}^{\text{PWBA}} &= \frac{\sqrt{2}Gb}{4\pi\alpha} q^2 \frac{\mathfrak{J}_0(q)}{J_0(q)} \\
 &= \frac{\sqrt{2}Gb}{4\pi\alpha} q^2 \frac{1}{2} \left\{ \left[ [\beta_v^0 A(q) + \beta_v^1 B(q)] \rho_B^p(q) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + [\beta_v^0 C(q) + \beta_v^1 D(q)] \frac{\rho^p(q)}{2m} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \left[ [\beta_v^0 A(q) - \beta_v^1 B(q)] \rho_B^n(q) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + [\beta_v^0 C(q) - \beta_v^1 D(q)] \frac{\rho^n(q)}{2m} \right] \right\} \quad (4.81) \\
 &\quad \times \left\{ \left[ [1 + \tau(q)\mu_p] \rho_B^p(q) + [\mu_p - 1] \frac{\rho^p(q)}{2m} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \left[ [(1 - \xi(q))\mu_n \tau(q)] \rho_B^n(q) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + [(1 + \tau(q)\xi(q))\mu_n] \frac{\rho^n(q)}{2m} \right] \right\}^{-1}.
 \end{aligned}$$

Tomando o caso em que  $q^2 \ll m^2$ , podemos desprezar os termos onde a massa aparece explicitamente no denominador – o que também significa  $\tau(q) \rightarrow 0$  – e podemos escrever

$$\mathcal{A}_{q^2 \ll m^2}^{\text{PWBA}} = \frac{\sqrt{2}Gb}{4\pi\alpha} q^2 \frac{1}{2} \left[ (1 - 4 \sin^2 \theta_W) - \frac{\rho_B^n(q)}{\rho_B^p(q)} \right], \quad (4.82)$$

onde usamos as Equações (4.43). Temos, portanto, uma relação simples entre a assimetria e a densidade bariônica de nêutrons, uma vez que a densidade bariônica de prótons seja bem conhecida. Esse resultado deu origem à tentativa de se utilizar a medida experimental da assimetria como uma forma de se obter a chamada pele de nêutrons do núcleo, de forma independente de modelo.

#### 4.8.2 Cálculo em ondas distorcidas

Para o cálculo da Assimetria em DWBA, precisamos dos potenciais definidos pelas Equações (3.6) e (3.7), ou seja, os potenciais eletromagnético e fraco. Esses, por sua vez, dependem dos termos de fonte dados por  $J_0(r)$  e  $\mathfrak{J}_0(r)$ . Uma vez que já obtivemos acima  $J_0(q)$

e  $\tilde{\mathcal{J}}_0(q)$ , basta então tomarmos as transformadas de Fourier inversas

$$\begin{aligned} J_0(r) &= \mathfrak{F}^{-1} [J_0(q)] \\ &\equiv \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int J_0(q) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (4.83)$$

e

$$\tilde{\mathcal{J}}_0(r) = \mathfrak{F}^{-1} [\tilde{\mathcal{J}}_0(q)]. \quad (4.84)$$

Com isso, é possível resolver a equação de Dirac (3.78) para o elétron  $e$ , a partir daí, obter as seções de choque – conforme a Seção 3.4.2. Note-se que esse procedimento engloba tanto a correção do centro de massa, quanto os fatores de forma do nucleon no cálculo em DWBA.

#### 4.9 FATOR DE FORMA DE ESTRANHEZA

Da mesma forma que corrigimos as densidades de prótons e de nêutrons utilizando fatores de forma, podemos descrever a estranheza no núcleo através desse mesmo método. Isso dá origem a um fator de forma de estranheza que também segue, em tese, uma parametrização que pode ser obtida experimentalmente. Nesse caso, no entanto, as informações são muito mais escassas e imprecisas. Apesar disso, como as medidas não são conclusivas, podemos avaliar a influência da estranheza usando estimativas extremas.

A corrente neutra tem a mesma forma que a Eq. (4.16), no entanto substituindo os fatores de forma  $F_1$  e  $F_2$  por seus correspondentes  $\tilde{F}_1$  e  $\tilde{F}_2$ , isto é,

$$\hat{\mathcal{J}}_\mu^i = \tilde{F}_1(q^2)\gamma_\mu + i \frac{[\kappa\tilde{F}_2(q^2)]}{2m} \sigma_{\mu\nu} q^\nu. \quad (4.85)$$

Na forma de Sachs tais fatores de forma são descritos agora por (MUSOLF et al., 1993)

$$\tilde{G}_{E,M} = 2\beta_v^0 G_{E,M}^{T=0} + 2\beta_v^1 G_{E,M}^{T=1} \tau_3 + \xi_V^{(0)} G_{E,M}^s, \quad (4.86)$$

onde  $\xi_V^{(0)} = -[1 + R_V^0]$ . O fator  $R_V^0$  é uma correção de ordem mais alta do modelo padrão e será desprezada. Além disso, usamos a seguinte parametrização para os fatores de forma de estranheza:

$$G_E^s = \rho_s \tau(q) G_D^V \xi_E^s \quad (4.87)$$

$$G_M^s = \mu_s G_D^V \xi_M^s \quad (4.88)$$

onde  $G_D^V$  é dado pela parametrização de Galster e

$$\xi_{E,M}^s = (1 + \lambda_{E,M}^s \tau(q))^{-1}. \quad (4.89)$$

As constantes são escolhidas como  $\lambda_M^s = 0$ ,  $\lambda_E^s = 5,6$ ,  $\rho_s = 1,5$  e  $\mu_s = -0,31$  (MORENO et al., 2009).

Podemos então escrever, seguindo o mesmo tipo de cálculo usado anteriormente, porém desprezando a contribuição proporcional ao termo  $\tilde{F}_2$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{J}}_0 = & 2\beta_v^0 \frac{G_E^{T=0} + \tau(q)G_M^{T=0}}{1 + \tau(q)} \rho_B(q) + 2\beta_v^1 \frac{G_E^{T=1} + \tau(q)G_M^{T=1}}{1 + \tau(q)} \rho_3(q) \\ & + \xi_V^{(0)} \frac{G_E^s + \tau(q)G_M^s}{1 + \tau(q)} \rho_B(q), \end{aligned} \quad (4.90)$$

onde o último termo representa a contribuição devido à estranheza na corrente neutra. Utilizando a forma acima e – novamente tomando o limite  $q^2 \ll m^2$ , podemos escrever a assimetria – a partir da Equação (4.82) – como

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{q^2 \ll m^2}^{\text{PWBA},S} = & \frac{\sqrt{2}Gb}{4\pi\alpha} q^2 \left[ (1 - 4 \sin^2 \theta_W) - \frac{\rho_B^n(q)}{\rho_B^p(q)} \right. \\ & \left. + \xi_V^0 \frac{G_E^s}{G_E^p} \frac{\rho_B(q)}{\rho_B^p(q)} \right]. \end{aligned} \quad (4.91)$$

Vemos assim que a extração do fator de forma de estranheza depende também do grau de simetria de isospin apresentado pelo alvo, através da razão  $\rho_B(q)/\rho_B^p(q)$ . Essa última, para um alvo com  $N = Z$  que possui simetria de isospin exata, se reduz a um fator 2.



## 5 RESULTADOS E CONCLUSÕES

*Neste capítulo apresentamos e discutimos os resultados numéricos obtidos. Além de energias e raios, calculamos a pele de nêutrons, a assimetria, a mistura de isospin e a Figure of Merit. Exploramos em tais grandezas suas relações com parâmetros dos modelos e com fatores cinemáticos. Ao final, apresentamos as conclusões.*

### 5.1 PARAMETRIZAÇÕES PARA O MODELO DE WALECKA

Os parâmetros presentes no modelo de Walecka são ajustados de forma a reproduzir propriedades da matéria nuclear, energias de ligação e raios de carga de núcleos finitos. As massas dos mésons, quando possível, são escolhidas em acordo com valores obtidos experimentalmente.

Neste trabalho, usamos dois tipos de lagrangeanas: uma que inclui termos não-lineares no méson  $\sigma$  e outra que utiliza acoplamentos dependentes da densidade do sistema. Para cada uma dessas lagrangeanas, utilizamos dois conjuntos de parâmetros, um incluindo o méson  $\delta$  e outro sem a inclusão desse méson.

Para a lagrangeana com termos não-lineares, dada pela Equação (2.6), utilizamos os conjuntos de parâmetros NL3 (LALAZISSIS; KÖNIG; RING, 1997) e NL3 $\delta$  (AVANCINI et al., 2009), descritos nas Tabelas 5.1. Já para o caso com acoplamentos dependentes da densidade, dado pela Equação (2.7), utilizamos os conjuntos de parâmetros TW (TYPEL; WOLTER, 1999) e DDH $\delta_1$ . Esta última parametrização obtivemos realizando um ajuste para a energia de ligação e o raio de carga de um núcleo finito para vários elementos ao longo da tabela periódica.

As parametrizações com dependência da densidade apresentam também dependência na forma funcional dos acoplamentos. Para o conjunto de parâmetros TW, temos para os mésons  $\sigma$  e  $\omega$

$$\Gamma_i(\rho_B) = \Gamma_i(\rho_B^{sat})f_i(x) \quad (5.1)$$

onde  $i = \sigma, \omega$  e

$$f_i(x) = a_i \frac{1 + b_i(x + d_i)^2}{1 + c_i(x + d_i)^2}. \quad (5.2)$$

Aqui  $x = \rho_B/\rho_B^{sat}$ , sendo  $\rho_B^{sat}$  a densidade de saturação para a matéria nuclear. Para o méson  $\rho$ , a dependência funcional é dada por

$$\Gamma_\rho(\rho_B) = \Gamma_\rho(\rho_B^{sat})e^{-a_\rho(x-1)} \quad (5.3)$$

As Tabelas 5.1 e 5.2 descrevem os valores dos parâmetros para o conjunto TW. Para a parametrização DDH $\delta_1$ , a dependência funcional para os mésons  $\sigma$  e  $\omega$  é a mesma da parametrização TW. Para os mésons  $\rho$  e  $\delta$  usamos no entanto (AVANCINI et al., 2009)

$$\Gamma_i(\rho_B) = \Gamma_i(\rho_B^{sat})h_i(x) \quad (5.4)$$

onde

$$h_i(x) = a_i e^{-b_i(x-1)} - c_i(x - d_i). \quad (5.5)$$

Novamente,  $x = \rho_B/\rho_B^{sat}$  e  $i = \rho, \delta$ . Os parâmetros correspondentes são dados nas Tabelas 5.3.

Parâmetro	NL3	NL3 $\delta$	Parâmetro	TW	DDH $\delta_1$
$M$ (MeV)	939,0	939,0	$M$ (MeV)	939,0	939,0
$m_\sigma$ (MeV)	508,194	508,194	$m_\sigma$ (MeV)	550,0	550,0
$m_\omega$ (MeV)	782,501	782,501	$m_\omega$ (MeV)	783,0	783,0
$m_\rho$ (MeV)	763,0	763,0	$m_\rho$ (MeV)	763,0	763,0
$m_\delta$ (MeV)	–	980,0	$m_\delta$ (MeV)	–	980,0
$g_\sigma$	10,217	10,217			
$g_2$ (fm $^{-1}$ )	10,431	10,431	$\rho_B^{sat}$ (fm $^{-3}$ )	0,153	0,153
$g_3$	-28,885	-28,885	$\Gamma_\sigma(\rho_B^{sat})$	10,72854	10,72685
$g_\omega$	12,868	12,868	$\Gamma_\omega(\rho_B^{sat})$	13,29015	13,28819
$g_\rho$	4,474	7,145	$\Gamma_\rho(\rho_B^{sat})$	3,66098	3.38401
$g_\delta$	–	7,85	$\Gamma_\delta(\rho_B^{sat})$	–	7,58355

TABELA 5.1: Parametros para as lagrangeanas com termos não-lineares (esquerda) e com acoplamentos dependentes da densidade (direita).

### 5.1.1 Resultados para a matéria nuclear

Conforme discutido na Seção 2.9, esperamos que tais parametrizações sejam capazes de reproduzir adequadamente os resultados

Parâmetro	$\sigma$	$\omega$	$\rho$
<i>a</i>	1,365469	1,402488	0,515
<i>b</i>	0,226061	0,172577	
<i>c</i>	0,409704	0,344293	
<i>d</i>	0,901995	0,983955	

TABELA 5.2: Valores para as constantes das funções de acoplamento para a parametrização TW.

Parâmetro	$\sigma$	$\omega$	$\rho$	$\delta$
<i>a</i>	1,37380	1,40334	0,17424	0,01991
<i>b</i>	0,22288	0,17137	1,61884	3,74086
<i>c</i>	0,40953	0,34296	0,049148	-0,09076
<i>d</i>	0,90190	0,98400	17,80109	-9,79701

TABELA 5.3: Valores para as constantes das funções de acoplamento para a parametrização DDH $\delta_1$ .

para a matéria nuclear. Temos aqui especial interesse nos valores para a energia de simetria, já que ela está ligada à diferença entre o raio de nêutrons e o raio de prótons e, portanto, na descrição das diferenças das distribuições de densidade dessas partículas (FURNSTAHL, 2002). Os resultados para tais propriedades são dados na Tabela 5.4.

Para o caso das parametrizações não-lineares, percebemos que as energias de simetria apresentam valores relativamente elevados, o que parece ser uma tendência para modelos regidos pela lagrangeana do tipo definido pela Equação (2.6). A faixa de valores considerados adequados para esta energia é razoavelmente ampla, indo de 28 MeV a 36 MeV. No entanto, o valor em geral mais usado é de 32,5 MeV.

Utilizando a Equação (2.80), ajustamos os parâmetros  $g_\rho$  e  $g_\delta$  de forma a alterar os valores para a energia de simetria. Com isso, reproduzimos de maneira aproximada os valores de 32 MeV e de 30,5 MeV – cobrindo assim as regiões inferior, média e superior do espectro de valores mais aceitáveis, além de aproximar esse valor do que é obtido por parametrizações dependentes da densidade. As parametrizações resultantes são apresentadas na Tabela 5.5, cujos resultados para a matéria nuclear são apresentados na Tabela 5.6.

	$\rho_B^{sat}$ (fm <sup>-3</sup> )	$(E/A)_\infty$ (MeV)	$K$ (MeV)	$a_{sym}$ (MeV)	$m_p^*/m_N$	$m_n^*/m_N$
NL3	0.148	-16.2404	270.7396	37.3443	0.5953585481	
NL3 $\delta$	0.148	-16.2391	271.1713	37.9762	0.5964451875	0.5964453547
TW	0.153	-16.2471	240.1126	32.7645	0.5547683143	
DDH $\delta_1$	0.147	-16.2589	233.2746	32.1464	0.5562897515	0.5562899137

TABELA 5.4: Resultados para a densidade de saturação, energia de simetria e compressibilidade da matéria nuclear.

	$g_\rho$	$g_\delta$
NL3 <sub>32</sub>	3.8957	–
NL3 $\delta$ <sub>32</sub>	6.74	7.853
NL3 <sub>30</sub>	3.6233	–
NL3 $\delta$ <sub>30</sub>	6.6	7.753

TABELA 5.5: Valores dos parâmetros  $g_\rho$  e  $g_\delta$  para as parametrizações baseadas em NL3 e NL3 $\delta$ .

	$\rho_{sat}$ (fm <sup>-3</sup> )	$(E/A)_\infty$ (MeV)	$K$ (MeV)	$a_{sim}$ (MeV)
NL3 <sub>32</sub>	0.148	-16.2405	270.7396	32.6171
NL3 $\delta$ <sub>32</sub>	0.148	-16.2391	271.1720	32.4617
NL3 <sub>30</sub>	0.148	-16.2405	270.7396	30.6168
NL3 $\delta$ <sub>30</sub>	0.148	-16.2391	271.1720	30.6378

TABELA 5.6: Resultados para as propriedades da matéria nuclear para as parametrizações dadas na Tabela 5.5.

## 5.2 PROPRIEDADES NUCLEARES

A partir do modelo descrito no Capítulo 2 e das parametrizações acima, podemos calcular as funções de onda dos orbitais nucleares e suas energias correspondentes. Além disso, obtemos também os potenciais correspondentes aos campos mesônicos. Com esses resultados, podemos então calcular as densidades nucleares, seus raios e a energia de ligação por nucleon.

Para calcularmos as densidades de próton e nêutron, utilizamos a Equação (2.39c), efetuando a soma sobre os estados de nêutrons e de prótons separadamente. Desta forma, obtemos

$$\rho_B^p(r) = \sum_{t=1}^{n\kappa} \frac{2j_\kappa + 1}{4\pi} [g_{n\kappa t}^2(r) + f_{n\kappa t}^2(r)] \quad (5.6a)$$

$$\rho_B^n(r) = \sum_{t=-1}^{n\kappa} \frac{2j_\kappa + 1}{4\pi} [g_{n\kappa t}^2(r) + f_{n\kappa t}^2(r)]. \quad (5.6b)$$

No cálculo das funções de onda radiais  $f_{n\kappa t}(r)$  e  $g_{n\kappa t}(r)$ , no entanto, não se leva em conta o fato de que os prótons e nêutrons são partículas não pontuais. Nas seções subsequentes, discutiremos uma maneira simples de corrigir as densidades obtidas a partir das Equações (5.6) acima, com o intuito de obter resultados adequados para os raios de próton e de nêutron.

### 5.2.1 Raios e energias de ligação

Os raios das distribuições de próton e nêutron podem ser calculados através de

$$r^2 = \frac{1}{N_i} \int r^2 \rho_B^i(r) r^2 dr, \quad (5.7)$$

onde  $\rho_B^i(r)$  representa as densidades de prótons ou de nêutrons discutidas acima e  $N_i$  representa o número de prótons ou nêutrons. As Tabelas 5.7 a 5.10 apresentam nossos resultados para a energia de ligação por nucleon ( $E/A$ ) e para os raios de próton e de nêutron conforme definido nas equações acima, assim como sua diferença, para uma série de núcleos. Os valores experimentais para as energias foram também incluídos.

Para núcleos com  $N = Z$ , como se deve esperar devido à repulsão Coulombiana, o raio de prótons é ligeiramente maior que o de nêutrons. Quanto às possíveis mudanças devidas à inclusão do méson  $\delta$ , esta apresenta de modo geral, um comportamento errático, ora au-

mentando a pele de nêutrons, ora diminuindo-a, dependendo do tipo de parametrização usada e também do núcleo, como pode ser melhor observado para núcleos com  $N \neq Z$ . Voltaremos a discutir esse ponto nas seções subsequentes.

	$E/A$ (MeV)	$r_B^p$ (fm)	$r_B^n$ (fm)	$r_B^n - r_B^p$ (fm)	
${}^4\text{He}$	NL3	-6.8332	1.9771	1.9630	-0.0142
	NL3 $\delta$	-6.8333	1.9779	1.9622	-0.0157
	NL3 $_{30}$	-6.8332	1.9779	1.9622	-0.0157
	NL3 $\delta_{30}$	-6.8334	1.9789	1.9612	-0.0177
	NL3 $_{32}$	-6.8332	1.9776	1.9625	-0.0152
	NL3 $\delta_{32}$	-6.8334	1.9787	1.9614	-0.0174
	TW	-6.5757	1.9441	1.9299	-0.0141
	DDH $\delta_1$	-6.7077	1.9693	1.9536	-0.0158
	Exp.	-7.0739			
${}^{12}\text{C}$	NL3	-7.591	2.2127	2.1918	-0.0209
	NL3 $\delta$	-7.591	2.2132	2.1915	-0.0217
	NL3 $_{30}$	-7.591	2.2138	2.1907	-0.0231
	NL3 $\delta_{30}$	-7.591	2.2144	2.1903	-0.0241
	NL3 $_{32}$	-7.591	2.2135	2.1911	-0.0224
	NL3 $\delta_{32}$	-7.591	2.2142	2.1905	-0.0237
	TW	-7.0246	2.3455	2.3202	-0.0253
	DDH $\delta_1$	-7.0893	2.3919	2.3633	-0.0286
	Exp.	-7.6801			
${}^{16}\text{O}$	NL3	-7.9617	2.6045	2.5770	-0.0275
	NL3 $\delta$	-7.9618	2.6052	2.5763	-0.0289
	NL3 $_{30}$	-7.9621	2.6061	2.5754	-0.0307
	NL3 $\delta_{30}$	-7.9622	2.6073	2.5746	-0.0324
	NL3 $_{32}$	-7.9620	2.6056	2.5759	-0.0297
	NL3 $\delta_{32}$	-7.9622	2.6067	2.5749	-0.0318
	TW	-7.7362	2.5653	2.5362	-0.0291
	DDH $\delta_1$	-7.8592	2.6046	2.5734	-0.0313
	Exp.	-7.9762			

TABELA 5.7: Resultados para as propriedades nucleares. Dados experimentais de (AUDI; WAPSTRA; THIBAULT, 2003)

	$E/A$ (MeV)	$r_B^p$ (fm)	$r_B^n$ (fm)	$r_B^n - r_B^p$ (fm)	
$^{40}\text{Ca}$	NL3	-8.5084	3.3786	3.3301	-0.0485
	NL3 $\delta$	-8.6031	3.3684	3.3186	-0.0498
	NL3 $_{30}$	-8.5093	3.3818	3.3271	-0.0547
	NL3 $\delta_{30}$	-8.6042	3.3717	3.3154	-0.0563
	NL3 $_{32}$	-8.5090	3.3808	3.3281	-0.0526
	NL3 $\delta_{32}$	-8.6040	3.3711	3.3160	-0.0552
	TW	-8.3450	3.3273	3.2759	-0.0514
	DDH $\delta_1$	-8.4815	3.3750	3.3209	-0.0540
Exp.	-8.5513				
$^{48}\text{Ca}$	NL3	-8.6171	3.3812	3.6071	0.2259
	NL3 $\delta$	-8.6700	3.3801	3.6040	0.2239
	NL3 $_{30}$	-8.7135	3.3853	3.5884	0.2031
	NL3 $\delta_{30}$	-8.7655	3.3844	3.5861	0.2018
	NL3 $_{32}$	-8.6842	3.3839	3.5940	0.2101
	NL3 $\delta_{32}$	-8.7509	3.3835	3.5890	0.2055
	TW	-8.5610	3.3508	3.5377	0.1869
	DDH $\delta_1$	-8.6607	3.4075	3.5781	0.1707
Exp.	-8.6665				

TABELA 5.8: (continuação) Resultados para as propriedades nucleares. Dados experimentais de (AUDI; WAPSTRA; THIBAULT, 2003).



	$E/A$ (MeV)	$r_B^p$ (fm)	$r_B^n$ (fm)	$r_B^n - r_B^p$ (fm)	
$^{56}\text{Ni}$	NL3	-8.6814	3.6166	3.5676	-0.0490
	NL3 $\delta$	-8.6819	3.6179	3.5665	-0.0515
	NL3 $_{30}$	-8.6826	3.6198	3.5645	-0.0554
	NL3 $\delta_{30}$	-8.6832	3.6215	3.5630	-0.0585
	NL3 $_{32}$	-8.6822	3.6188	3.5655	-0.0533
	NL3 $\delta_{32}$	-8.6830	3.6209	3.5636	-0.0573
	TW	-8.4782	3.6046	3.5529	-0.0517
	DDH $\delta_1$	-8.6077	3.6727	3.6167	-0.0560
	Exp.	-8.6427			
$^{66}\text{Ni}$	NL3	-8.7058	3.7632	3.9669	0.2037
	NL3 $\delta$	-8.7272	3.7557	3.9759	0.2202
	NL3 $_{30}$	-8.7463	3.7792	3.9523	0.1731
	NL3 $\delta_{30}$	-8.7637	3.7705	3.9636	0.1931
	NL3 $_{32}$	-8.7227	3.7760	3.9586	0.1826
	NL3 $\delta_{32}$	-8.7521	3.7687	3.9668	0.1981
	TW	-8.5549	3.7390	3.8909	0.1519
	DDH $\delta_1$	-8.6652	3.7942	3.9463	0.1522
	Exp.	-8.7395			
$^{68}\text{Ni}$	NL3	-8.6587	3.7878	4.0488	0.2610
	NL3 $\delta$	-8.6908	3.7786	4.0582	0.2796
	NL3 $_{30}$	-8.8742	3.7799	4.0077	0.2278
	NL3 $\delta_{30}$	-8.7882	3.7876	4.0360	0.2485
	NL3 $_{32}$	-8.8434	3.7762	4.0154	0.2391
	NL3 $\delta_{32}$	-8.7729	3.7856	4.0400	0.2544
	TW	-8.5372	3.7600	3.9579	0.1979
	DDH $\delta_1$	-8.7302	3.8218	4.0119	0.1901
	Exp.	-8.6825			

TABELA 5.9: (continuação) Resultados para as propriedades nucleares. Dados experimentais de (AUDI; WAPSTRA; THIBAUT, 2003).

	$E/A$ (MeV)	$r_B^p$ (fm)	$r_B^n$ (fm)	$r_B^n - r_B^p$ (fm)	
$^{90}\text{Zr}$	NL3	-8.3880	4.2432	4.3553	0.1122
	NL3 $\delta$	-8.4128	4.2442	4.3545	0.1103
	NL3 $_{30}$	-8.4404	4.2500	4.3422	0.0922
	NL3 $\delta_{30}$	-8.4648	4.2514	4.3415	0.0901
	NL3 $_{32}$	-8.4245	4.2478	4.3463	0.0985
	NL3 $\delta_{32}$	-8.4567	4.2501	4.3437	0.0936
	TW	-8.6552	4.1608	4.2451	0.0843
	DDH $\delta_1$	-8.7548	4.2266	4.2978	0.0712
	Exp.	-8.7099			
$^{132}\text{Sn}$	NL3	-8.5094	4.5445	4.9179	0.3734
	NL3 $\delta$	-8.4146	4.6423	5.0075	0.3652
	NL3 $_{30}$	-8.5562	4.6545	4.9545	0.3000
	NL3 $\delta_{30}$	-8.6250	4.6458	4.9716	0.3258
	NL3 $_{32}$	-8.4900	4.6525	4.9665	0.3140
	NL3 $\delta_{32}$	-8.5921	4.6447	4.9778	0.3331
	TW	-8.3236	4.6318	4.8828	0.2509
	DDH $\delta_1$	-8.4153	4.7312	4.9658	0.2346
	Exp.	-8.3549			
$^{208}\text{Pb}$	NL3	-7.7837	5.4852	5.7620	0.2768
	NL3 $\delta$	-7.9712	5.4454	5.7472	0.3018
	NL3 $_{30}$	-7.9668	5.4923	5.7224	0.2301
	NL3 $\delta_{30}$	-8.1372	5.4547	5.7140	0.2593
	NL3 $_{32}$	-7.9114	5.4896	5.7344	0.2448
	NL3 $\delta_{32}$	-8.1110	5.4527	5.7199	0.2672
	TW	-7.7946	5.4211	5.6166	0.1956
	DDH $\delta_1$	-7.9122	5.4961	5.6805	0.1844
	Exp.	-7.8675			

TABELA 5.10: (continuação) Resultados para as propriedades nucleares. Dados experimentais de (AUDI; WAPSTRA; THIBAULT, 2003).

## 5.2.2 Densidade de carga e de carga neutra

Os resultados obtidos na Seção 4.8.1 nos dão as densidades de carga e a parte temporal da corrente neutra devidamente corrigidas pelos fatores de forma do nucleon correspondentes, ou seja, respectivamente as Equações (4.77) e (4.79). Se multiplicarmos cada uma dessas equações pela correção de CM indicada na Equação (4.74) e calcularmos a transformada de Fourier inversa como explicado na Subseção 4.8.2, teremos as densidades de carga e de corrente neutra no espaço de configurações devidamente corrigidas e que podem ser usadas para calcular o que chamamos de raio de carga e raio de carga neutra do núcleo.

Por outro lado, como mostrado no Capítulo 4, o valor esperado da componente temporal da corrente eletromagnética do núcleo tem a estrutura geral

$$\langle \Psi | \hat{J}_0 | \Psi \rangle = \sum_{i=1}^A \langle \psi_\alpha | \left[ F_1(q^2) \gamma_0 + i \frac{[\kappa F_2(q^2)]}{2m} \sigma_{0\nu} q^\nu \right] | \psi_\alpha \rangle. \quad (5.8)$$

onde os fatores de forma  $F_1$  e  $F_2$  guardam informações sobre a estrutura interna dos prótons e nêutrons. Tais fatores foram reescritos utilizando a parametrização de Galster, discutida na Seção 4.6.2, em termos dos fatores de forma de Sachs, discutidos na Seção 4.6.1. Escolhemos então os núcleos de  ${}^4\text{He}$  e  ${}^{48}\text{Ca}$  como exemplos representativos para estudar a contribuição relativa desses dois fatores de forma, para cada componente de isospin da corrente. Conforme pode ser visto nas Figuras 5.1 a 5.4, o termo proporcional ao fator de forma  $F_2$  só tem influência notável no caso de um núcleo leve. Considerando então os valores mostrados, em uma primeira aproximação, podemos desprezá-lo.

Utilizando agora a relação (4.48a), obtemos

$$\langle \Psi | \hat{J}_0 | \Psi \rangle_q = \frac{G_E^p(q^2) + \tau(q) G_M^p(q^2)}{1 + \tau(q)} \rho_B^p(q) + \frac{G_E^n(q^2) + \tau(q) G_M^n(q^2)}{1 + \tau(q)} \rho_B^n(q). \quad (5.9)$$

Como  $\tau(q) = |q^2|/4m^2$ , em geral  $\tau(q) \ll 1$  e o próprio fator de forma elétrico de Sachs do nêutron é proporcional a  $\tau(q)$ , podemos escrever com boa aproximação para a distribuição de carga no espaço de momentos

$$\rho_B^c(q) = G_E^p(q^2) \rho_B^p(q). \quad (5.10)$$

A transição entre o espaço de momento e o de posição pode ser feita de maneira relativamente simples através da equação<sup>1</sup>

$$\rho_B^c(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int F_{CM}(q) \langle \Psi | \hat{J}_0 | \Psi \rangle_q j_0(qr) q^2 dq, \quad (5.11)$$

onde  $F_{CM}(q)$  é a correção de centro de massa, dada por:

$$F_{CM}(q^2) = e^{b^2 q^2 / 4A}. \quad (5.12)$$

Essa aproximação para a densidade de carga é bem razoável se nos restringimos a situações em que apenas as componentes de baixos valores de  $q$  são relevantes. A mesma aproximação feita para a corrente neutra, fornece

$$\rho_B^N(q) = \langle \Psi | \hat{J}_0 | \Psi \rangle_q = \frac{G_E^p(q)}{2} \left\{ [\beta_v^0 + \beta_v^1] \rho_B^p(q) + [\beta_v^0 - \beta_v^1] \rho_B^n(q) \right\}, \quad (5.13)$$

e assim, podemos definir a densidade de carga neutra como:

$$\rho_B^N(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int F_{CM}(q) \rho_B^N(q) j_0(qr) q^2 dq. \quad (5.14)$$

Tomando os resultados dados pelas Equações(4.43), apresentados na Seção 4.5, fica claro novamente que a distribuição acima é dominada pela distribuição de nêutrons no núcleo, porém agora devidamente corrigida. Nos resultados que se seguem desprezamos a contribuição proporcional a  $\rho_B^p(q)$  na densidade de carga neutra. As Figuras 5.5 a 5.8 apresentam os efeitos que o fator de forma do nucleon e a correção de CM têm sobre as densidades de próton e de nêutron para alguns núcleos selecionados.

Usando novamente as definições para o raio, dadas na Subseção 5.2.1, e as densidades corrigidas dadas pelas Equações (5.11) e (5.14), calculamos o que chamamos de *raios corrigidos de prótons e de nêutrons* ( $r'_p$  e  $r'_n$ ), bem como a pele. Tais resultados podem ser vistos nas Tabelas 5.11 a 5.14. Podemos verificar que, exceto para o núcleo de  ${}^4\text{He}$ , há um aumento sistemático nos raios corrigidos em relação aos apresentados anteriormente.

Notamos ainda que as correções oferecidas pelos fatores de forma  $F_1(q^2)$  e  $F_{CM}(q^2)$  às distribuições de densidade se compensam parcialmente, provocando uma diminuição (exceto para  ${}^4\text{He}$ ) do ritmo de

---

<sup>1</sup>Para mais detalhes, veja o Apêndice C.

queda da densidade com a distância à origem – explicando, portanto, o aumento nos valores dos raios. Apesar desse aumento sistemático, observamos uma diminuição sistemática nos valores obtidos para a pele de nêutrons. Isso se deve ao fato de que o aumento para o raio de nêutrons é menor que o aumento para o raio de prótons.

Uma vez que temos os raios de prótons e de nêutrons devidamente corrigidos, na Figura 5.9 procuramos verificar a linearidade do valor da pele de nêutrons em função da energia de simetria, como sugerido em (FURNSTAHL, 2002). Incluímos no gráfico somente os resultados para as parametrizações não-lineares apresentadas anteriormente, já que os valores obtidos com as parametrizações com acoplamentos dependentes da densidade não apresentam nenhuma correlação linear com as demais aqui analisadas. Tal diferenciação sugere assim que a relação entre a pele de nêutrons e a energia de simetria não é independente de modelo. Os coeficientes de correlação para cada caso são mostrados na legenda da figura.

Na Subseção 2.9 discutimos as diferentes parametrizações do modelo com relação a certas propriedades da matéria nuclear. No entanto, queremos comparar essas parametrizações na obtenção de seções de choque e da assimetria, ou seja, para núcleos finitos. Assim, é importante, antes de prosseguirmos, comparar a qualidade dos resultados obtidos para a energia de ligação e raio de carga para os núcleos aqui considerados. O resultado está mostrado na Tabela 5.15, onde definimos

$$\chi^2 = \sum (x_{\text{Experimental}} - x_{\text{Teórico}})^2 / |x_{\text{Experimental}}|, \quad (5.15)$$

onde  $x$  representa a grandeza de interesse e a soma se dá sobre todos os núcleos em que tal grandeza tem valores experimentais disponíveis. Na tabela vemos os resultados separados para a energia de ligação por nucleon, para o raio de carga e o valor total para cada parametrização. Vemos que em todos os casos o acordo é muito bom, com uma pequena excessão para o raio de carga na parametrização TW, mas que não chega a ser importante. Esse resultado nos dá uma boa confiabilidade de que as parametrizações e o modelo escolhido têm um bom acordo com dados experimentais associados a propriedades médias do núcleo, conhecidas com grande precisão, ao longo da tabela periódica. Na média, podemos dizer que tanto a energia quanto o raio de carga são igualmente bem descritos por todas as parametrizações que escolhemos.

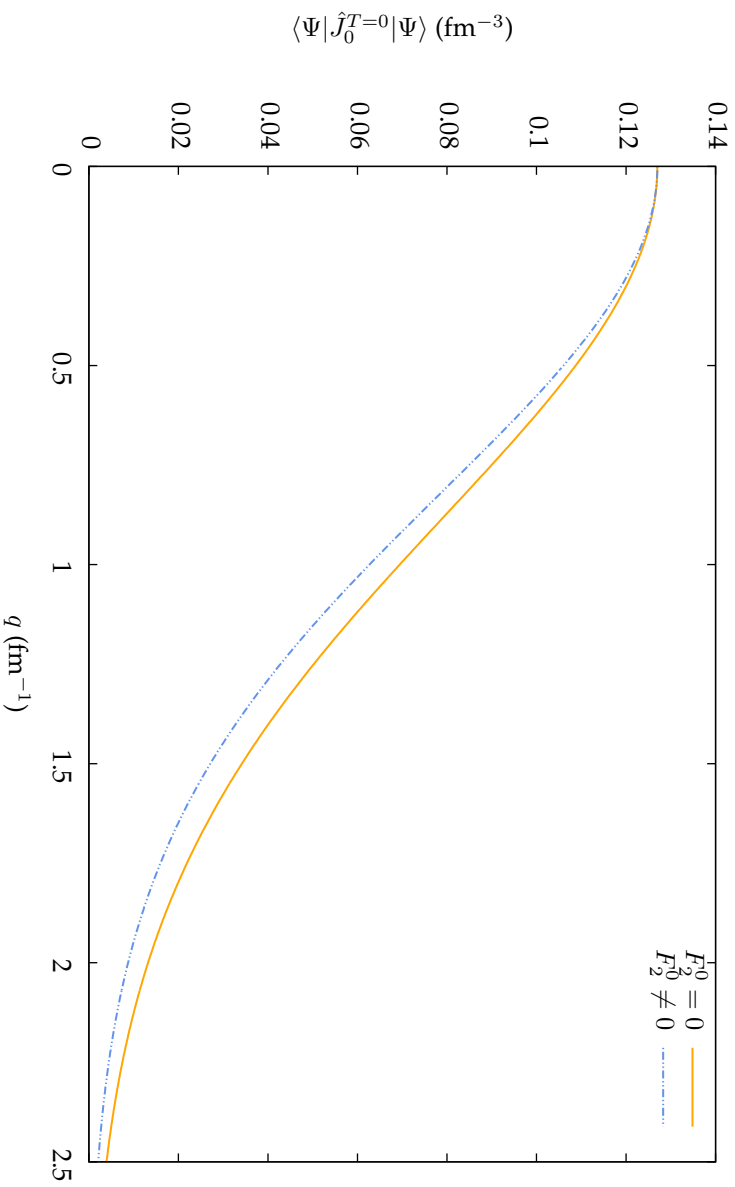


FIGURA 5.1: Comparação entre resultados para  $\langle \Psi | \hat{J}_0^{T=0} | \Psi \rangle_q$  com e sem a inclusão do termo proporcional ao fator de forma  $F_2^0(q^2)$  para o núcleo de  ${}^4\text{He}$ , utilizando a parametrização DDH $\delta_1$ .

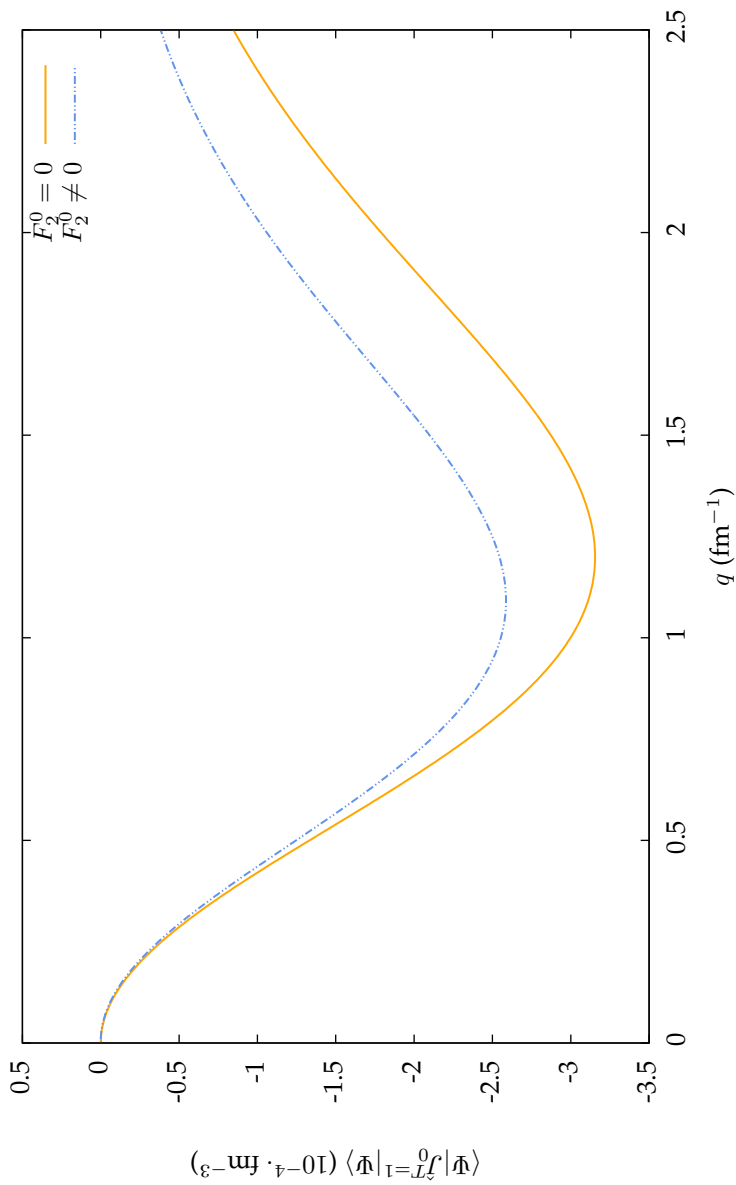


FIGURA 5.2: Comparação entre resultados para  $\langle \Psi | \hat{J}_0^T = 1 | \Psi \rangle_{\sigma}$  com e sem a inclusão do termo proporcional ao fator de forma  $F_2^0(q^2)$  para o núcleo de  ${}^4\text{He}$ , utilizando a parametrização  $\text{DDH}\delta_1$ .

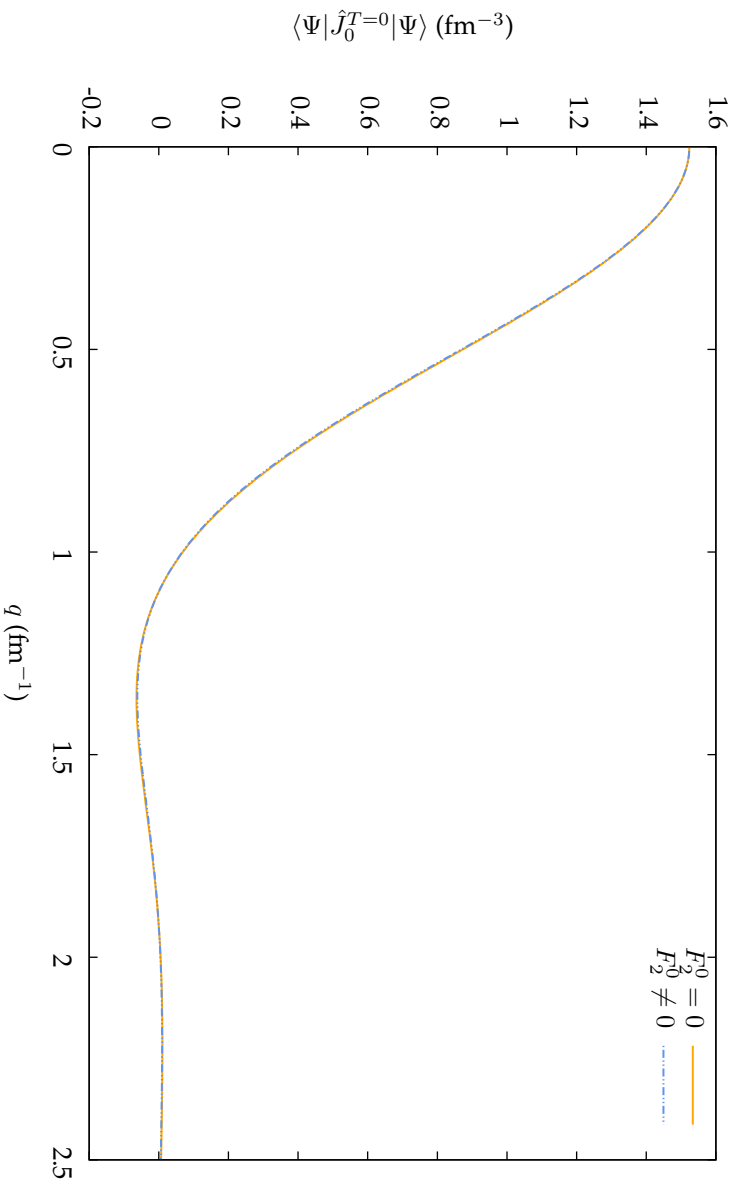


FIGURA 5.3: O mesmo que na Figura 5.1 para o núcleo de  $^{48}\text{Ca}$ , parametrização DDH $\delta_1$ .



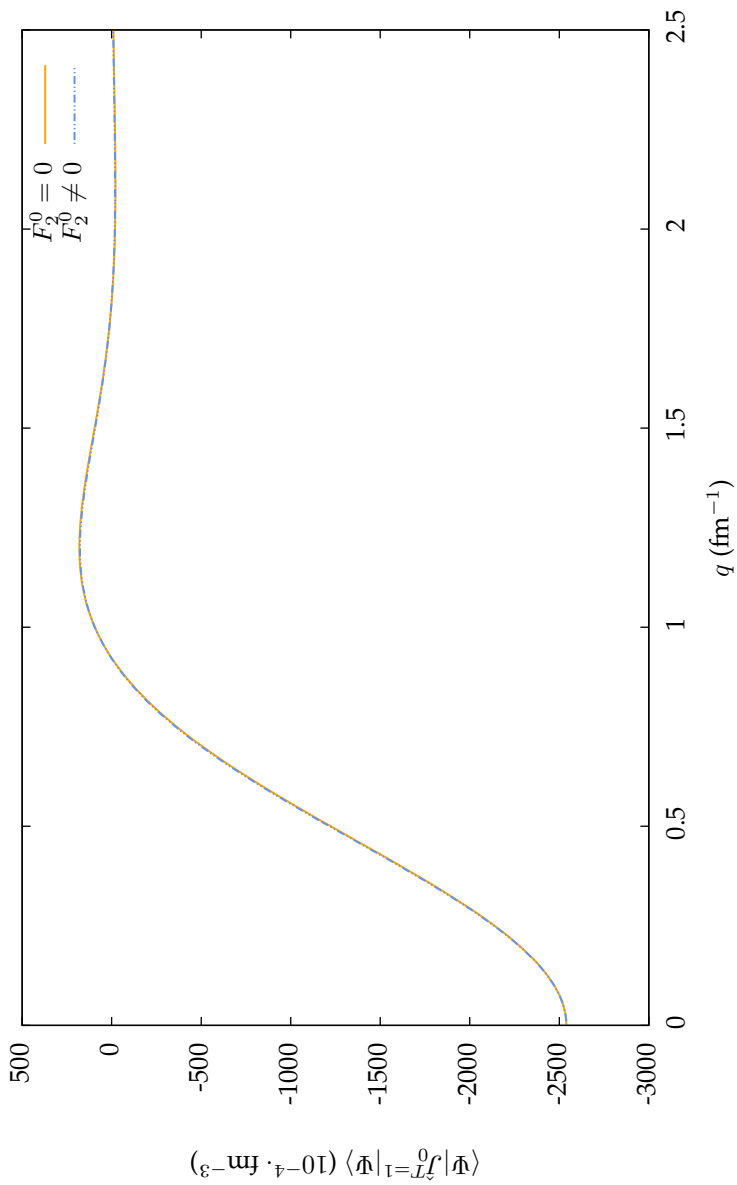


FIGURA 5.4: O mesmo que na Figura 5.2 para o núcleo de  $^{48}\text{Ca}$ , parametrização DDH $\delta_1$ .

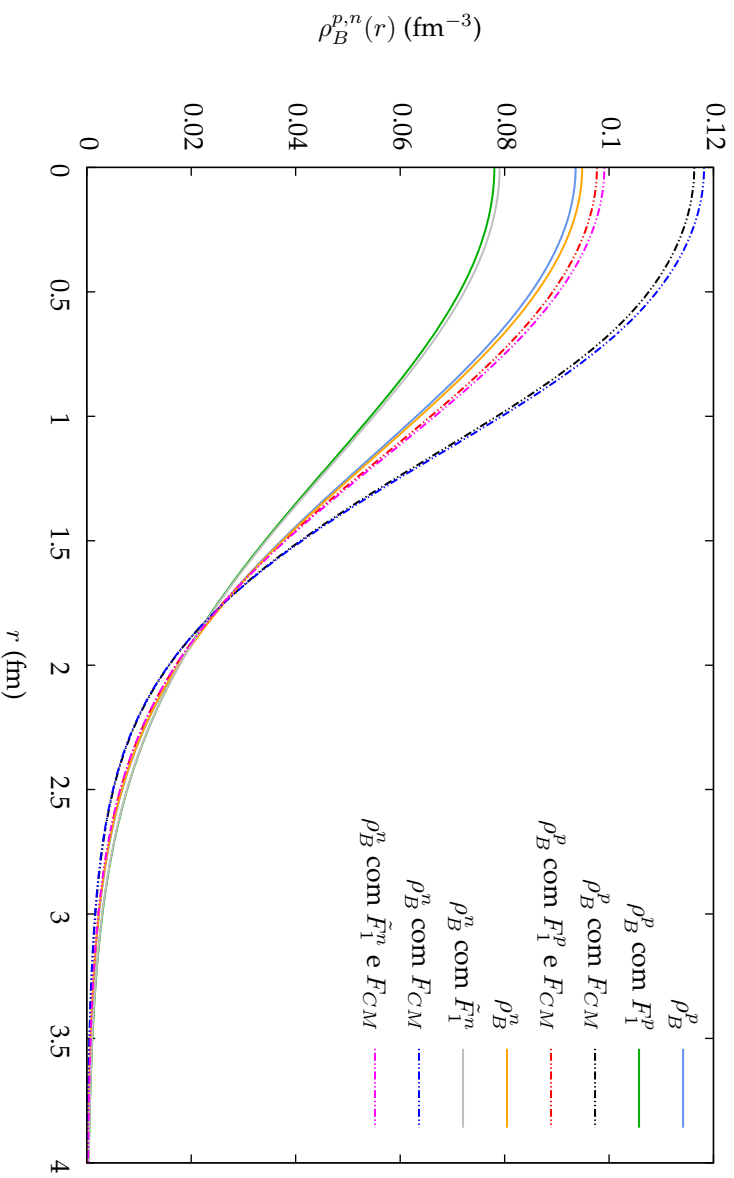


FIGURA 5.5: Densidades bariônicas de prótons e de nêutrons obtidas para o núcleo de  ${}^4\text{He}$  utilizando o conjunto de parâmetros NL3. As curvas mostram a influência das correções dadas pelos fatores de forma  $F_1^p(q)$ ,  $\tilde{F}_1^n(q)$  e  $F_{CM}(q)$ .

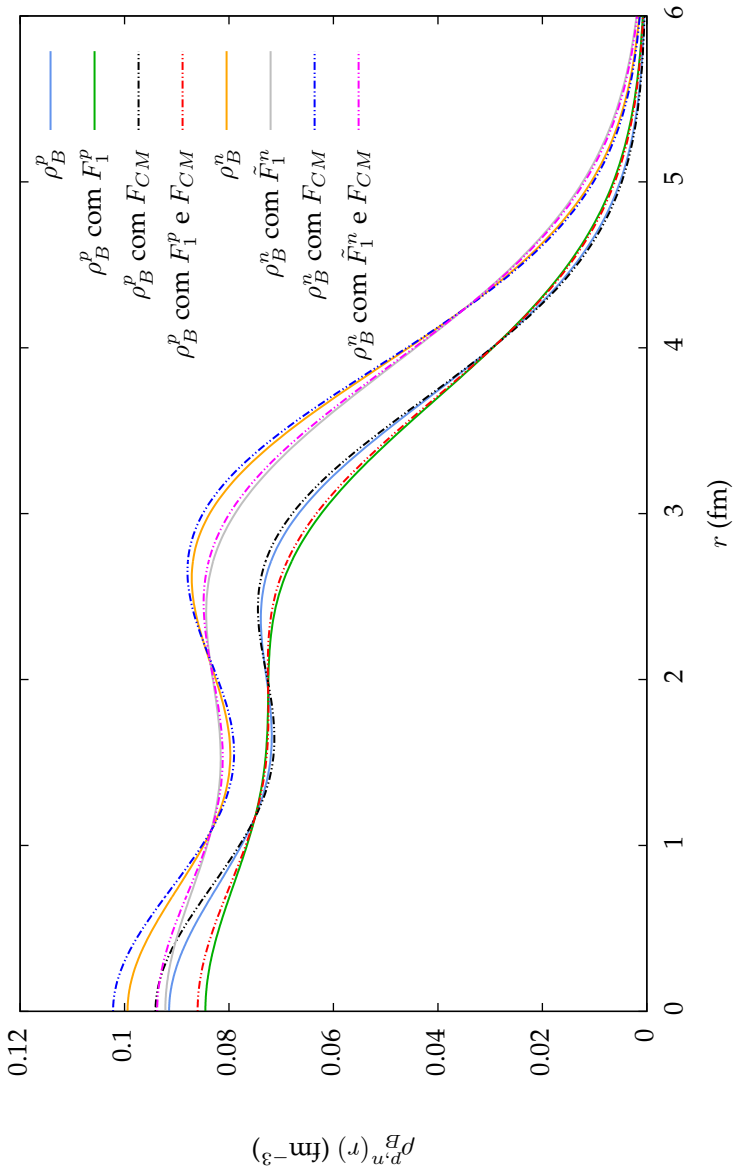


FIGURA 5.6: O mesmo que na Figura 5.5 para  $^{48}\text{Ca}$ , parametrização NL3.

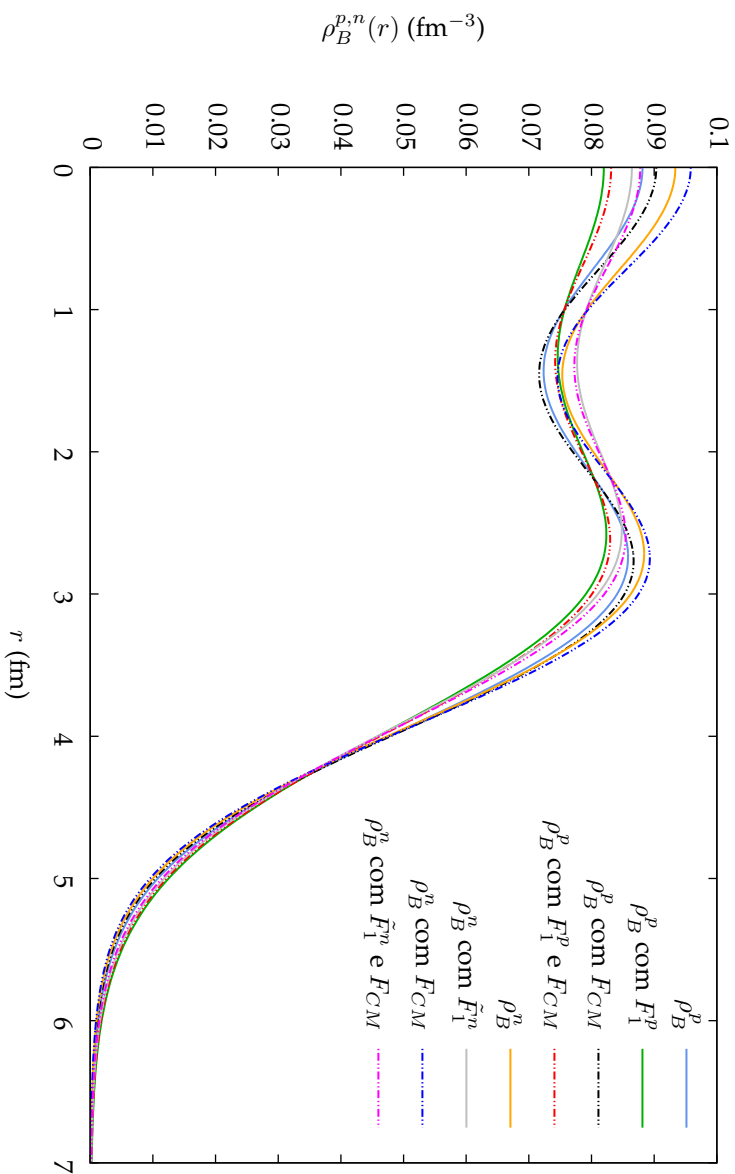


FIGURA 5.7: O mesmo que na Figura 5.5 para  $^{56}\text{Ni}$ , parametrização NL3.

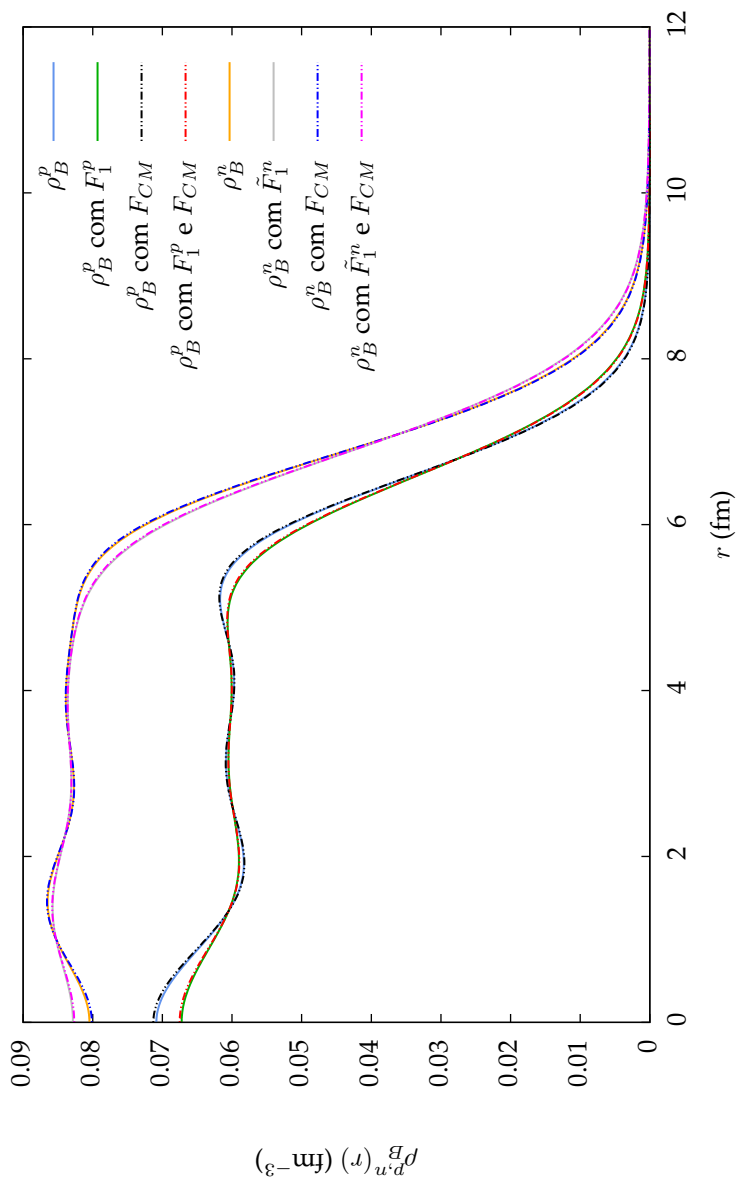


FIGURA 5.8: O mesmo que na Figura 5.5 para  $^{208}\text{Pb}$ , parametrização NL3.

	${}^4\text{He}$			${}^{12}\text{C}$			${}^{16}\text{O}$		
	$r'_p$	$r'_n$	$r'_n - r'_p$	$r'_p$	$r'_n$	$r'_n - r'_p$	$r'_p$	$r'_n$	$r'_n - r'_p$
NL3	1.9553	1.9410	-0.0143	2.2664	2.2460	-0.0204	2.6598	2.6329	-0.0269
NL3 $\delta$	1.9561	1.9402	-0.0159	2.2669	2.2457	-0.0212	2.6605	2.6323	-0.0282
NL3 $\delta$ <sub>30</sub>	1.9561	1.9402	-0.0159	2.2675	2.2450	-0.0225	2.6615	2.6314	-0.0301
NL3 $\delta$ <sub>30</sub>	1.9571	1.9392	-0.0179	2.2680	2.2445	-0.0235	2.6623	2.6306	-0.0318
NL3 $\delta$ <sub>32</sub>	1.9558	1.9405	-0.0154	2.2671	2.2453	-0.0218	2.6609	2.6319	-0.0290
NL3 $\delta$ <sub>32</sub>	1.9569	1.9394	-0.0176	2.2678	2.2447	-0.0231	2.6620	2.6309	-0.0312
TW	1.9218	1.9075	-0.0143	2.3959	2.3711	-0.0248	2.6215	2.5930	-0.0285
DDH $\delta$ <sub>1</sub>	1.9474	1.9314	-0.0159	2.4413	2.4133	-0.0280	2.600	2.6294	-0.0306
Exp.	1.6758			2.4704			2.7061		

TABELA 5.11: Resultados para os raios de próton e nêutron corrigidos pelo fator de forma do nucleon e correção de CM. Dados experimentais de (ANGELL, 1999).

	$^{40}\text{Ca}$			$^{48}\text{Ca}$		
	$r'_p$	$r'_n$	$r'_n - r'_p$	$r'_p$	$r'_n$	$r'_n - r'_p$
NL3	3.4380	3.3904	-0.0476	3.4427	3.6648	0.2221
NL3 $\delta$	3.4279	3.3790	-0.0489	3.4417	3.6618	0.2201
NL3 $_{30}$	3.4411	3.3874	-0.0537	3.4468	3.6465	0.1996
NL3 $\delta_{30}$	3.4312	3.3759	-0.0553	3.4459	3.6442	0.1984
NL3 $_{32}$	3.4401	3.3884	-0.0517	3.4454	3.6520	0.2066
NL3 $\delta_{32}$	3.4306	3.3765	-0.0542	3.4451	3.6471	0.2020
TW	3.3875	3.3371	-0.0504	3.4129	3.5966	0.1837
DDH $\delta_1$	3.4344	3.3813	-0.0531	3.4686	3.6364	0.1678
Exp.	3.4766			3.4737		

TABELA 5.12: Resultados para os raios de próton e nêutron corrigidos pelo fator de forma do nucleon e correção de CM. Dados experimentais de (ANGELL, 1999).

	$^{56}\text{Ni}$			$^{66}\text{Ni}$			$^{68}\text{Ni}$		
	$r'_p$	$r'_n$	$r'_n - r'_p$	$r'_p$	$r'_n$	$r'_n - r'_p$	$r'_p$	$r'_n$	$r'_n - r'_p$
NL3	3.6758	3.6276	-0.0482	3.8216	4.0224	0.2008	3.8461	4.1034	0.2573
NL3 $\delta$	3.6771	3.6265	-0.0506	3.8142	4.0312	0.2170	3.8370	4.1126	0.2756
NL3 $\delta_{30}$	3.6790	3.6245	-0.0545	3.8374	4.0080	0.1699	3.8383	4.0628	0.2246
NL3 $\delta_{30}^*$	3.6807	3.6231	-0.0576	3.8288	4.0191	0.1903	3.8458	4.0908	0.2449
NL3 $\delta_{32}$	3.6779	3.6256	-0.0524	3.8342	4.0141	0.1799	3.8347	4.0704	0.2357
NL3 $\delta_{32}^*$	3.6801	3.6237	-0.0563	3.8270	4.0223	0.1953	3.8439	4.0946	0.2508
TW	3.6640	3.6132	-0.0508	3.7978	3.9474	0.1497	3.8187	4.0137	0.1950
DDH $\delta_1$	3.7311	3.6760	-0.0551	3.8521	4.0020	0.1500	3.8796	4.0670	0.1874

TABELA 5.13: Resultados para os raios de próton e nêutron corrigidos pelo fator de forma do nucleon e correção de CM.



	$^{90}\text{Zr}$			$^{132}\text{Sn}$			$^{208}\text{Pb}$		
	$r'_p$	$r'_n$	$r'_n - r'_p$	$r'_p$	$r'_n$	$r'_n - r'_p$	$r'_p$	$r'_n$	$r'_n - r'_p$
NL3	4.2971	4.4079	0.1108	4.5969	4.9663	0.3694	5.5300	5.8045	0.2745
NL3 $\delta$	4.2981	4.4071	0.1090	4.6935	5.0550	0.3615	5.4906	5.7898	0.2993
NL3 $_{30}$	4.3039	4.3949	0.0910	4.7056	5.0025	0.2969	5.5370	5.7653	0.2282
NL3 $\delta_{30}$	4.3052	4.3943	0.0890	4.6970	5.0194	0.3225	5.4998	5.7569	0.2572
NL3 $_{32}$	4.3017	4.3990	0.0973	4.7036	5.0144	0.3108	5.5344	5.7772	0.2428
NL3 $\delta_{32}$	4.3040	4.3965	0.0925	4.6959	5.0256	0.3297	5.4978	5.7628	0.2650
TW	4.2158	4.2990	0.0832	4.6832	4.9315	0.2483	5.4664	5.6603	0.1939
DDH $\delta_1$	4.2808	4.3511	0.0703	4.7815	5.0137	0.2322	5.5409	5.7237	0.1828
Exp.	4.2692						5.5010		

TABELA 5.14: Resultados para os raios de próton e nêutron corrigidos pelo fator de forma do nucleon e correção de CM. Dados experimentais de (ANGELI, 1999).

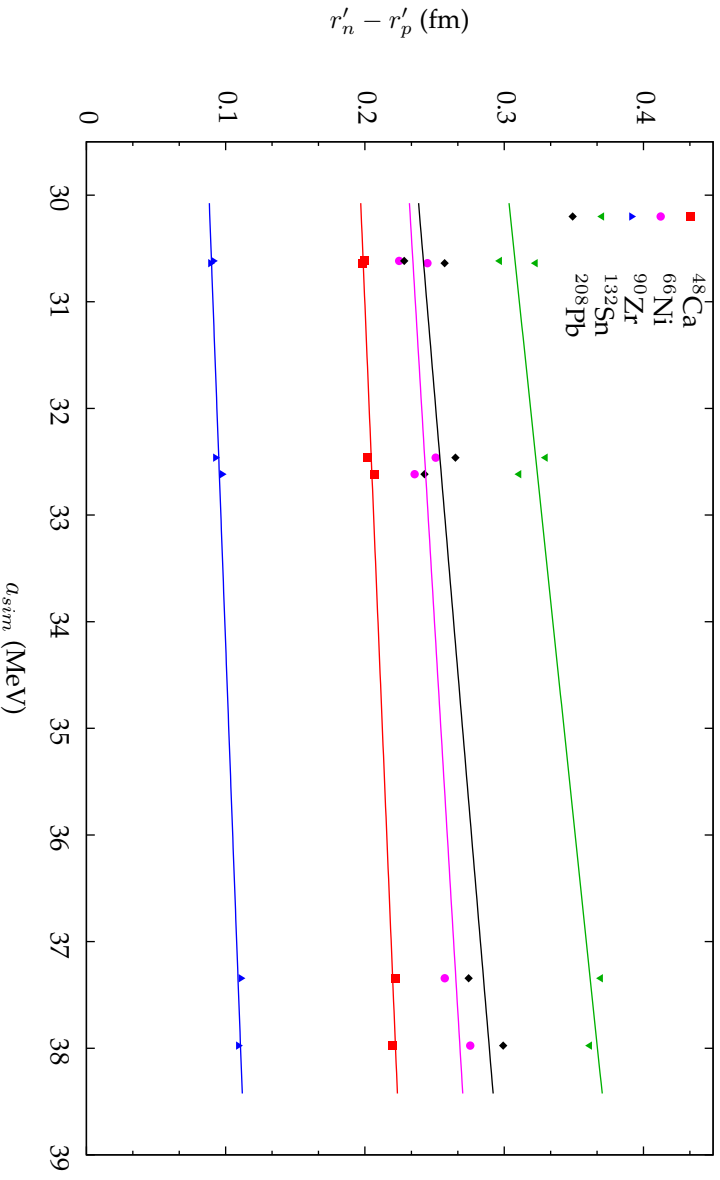


FIGURA 5.9 : Pele calculada a partir dos raios corrigidos de prótons e nêutrons para as parametrizações NL. Os resultados são, em ordem crescente de  $a_{sim}$ , para NL $_{30}$ , NL $_{30}$ , NL $_{30}$ , NL $_{30}$ , NL $_{30}$ , NL $_{30}$ , NL $_{30}$ , NL $_{30}$ , NL $_{30}$  e NL $_{30}$ . Os coeficientes de correlação das retas são  $R^2 = 0.842$  ( $^{132}\text{Sn}$ ),  $R^2 = 0.708$  ( $^{208}\text{Pb}$ ),  $R^2 = 0.714$  ( $^{66}\text{Ni}$ ),  $R^2 = 0.967$  ( $^{48}\text{Ca}$ ),  $R^2 = 0.959$  ( $^{90}\text{Zr}$ ).

	$\chi^2$		
	Energia	Raio de Carga	Total
NL3	0.065	0.026	0.091
NL3 $\delta$	0.066	0.022	0.087
NL3 <sub>30</sub>	0.065	0.029	0.094
NL3 $\delta$ <sub>30</sub>	0.066	0.037	0.103
NL3 <sub>32</sub>	0.065	0.024	0.090
NL3 $\delta$ <sub>32</sub>	0.066	0.033	0.099
TW	0.045	0.115	0.160
DDH $\delta$ <sub>1</sub>	0.049	0.069	0.118

TABELA 5.15: Valores para  $\chi^2$  calculados para todos os núcleos e parametrizações deste trabalho.

### 5.3 SEÇÕES DE CHOQUE ELÁSTICAS

Antes de analisarmos os resultados para a assimetria, é importante compararmos os resultados do modelo aqui utilizado com os dados experimentais para a seção de choque elástica, que é conhecida com grande precisão para alguns dos núcleos estudados e que depende fortemente da distribuição de carga do alvo. Além disso, o dados experimentais puderam ser obtidos em alguns casos para uma faixa larga de momentos transferidos, o que nos permite testar as distribuições de carga em detalhes. Ao reproduzir os resultados experimentais, podemos ainda avaliar se os resultados das correções para os fatores de forma do nucleon são adequados. A seção de choque total pode ser obtida das seções de choque polarizadas através de

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma_+/d\Omega + d\sigma_-/d\Omega}{2}. \quad (5.16)$$

Nas Figuras 5.10 a 5.13, mostramos os resultados em DWBA – bem como os dados experimentais – para os núcleos de  $^{12}\text{C}$ ,  $^{16}\text{O}$ ,  $^{48}\text{Ca}$  e  $^{208}\text{Pb}$ . Destacamos que a diferenciação entre as parametrizações com acoplamentos dependentes das densidades é muito mais notável que entre as parametrizações não-lineares e que a adição do méson  $\delta$  tende a melhorar a descrição das seções de choque experimentais. Além disso, o ajuste com o experimento é notável em todos os casos, com exceção do  $^{12}\text{C}$ . Nesse caso, os efeitos devidos ao fato de termos um núcleo com camada aberta parecem ficar relevantes, indicando a necessidade de uma melhor descrição da estrutura desse núcleo do que a aqui utilizada.

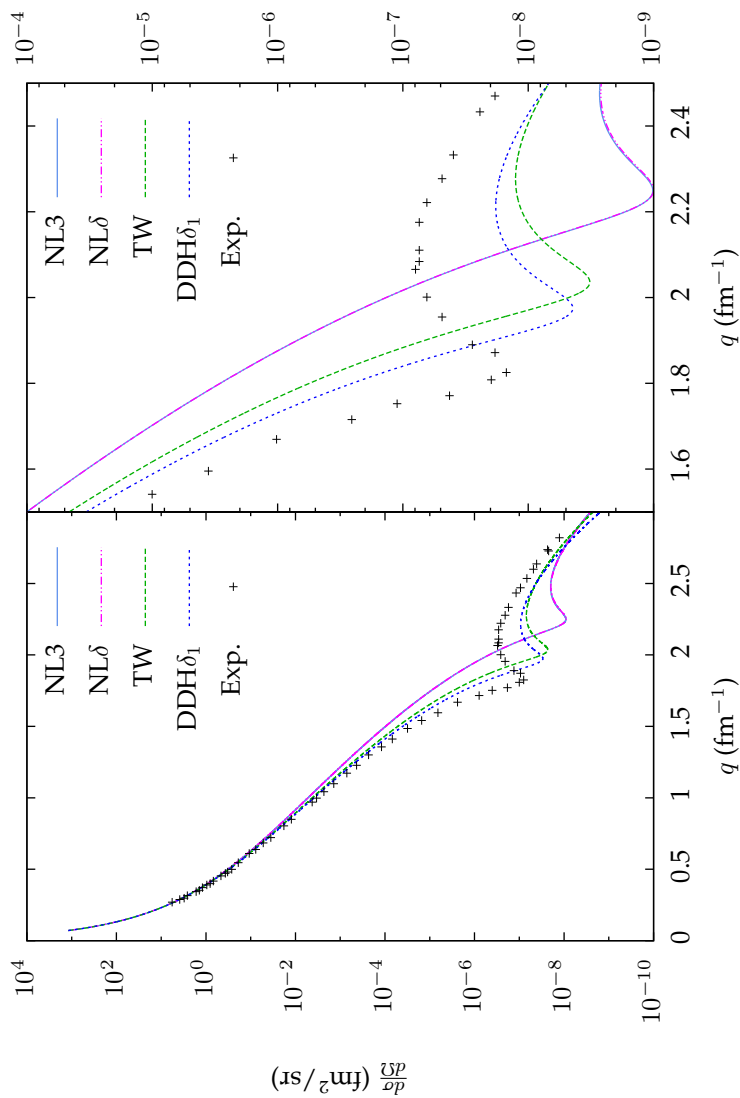


FIGURA 5.10: Comparação entre os resultados para a seção de choque para o espalhamento elástico de elétrons pelo núcleo de  $^{12}\text{C}$  com  $\epsilon = 400$  MeV (energia incidente do elétron). À direita mostramos uma ampliação da região do primeiro mínimo. Os dados experimentais de (CRANNELL, 1966).

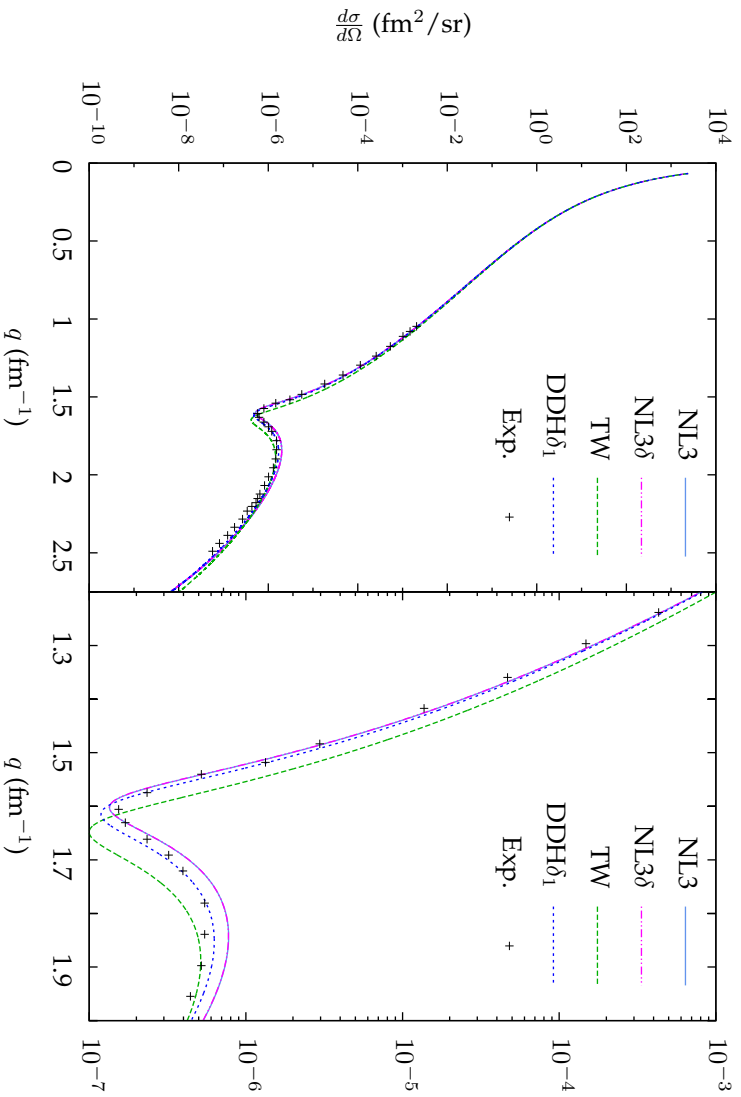


FIGURA 5.11: O mesmo que na Figura 5.10 para o núcleo de  $^{16}\text{O}$  e  $\epsilon = 374$  MeV. Dados experimentais de (CRANNELL, 1966).

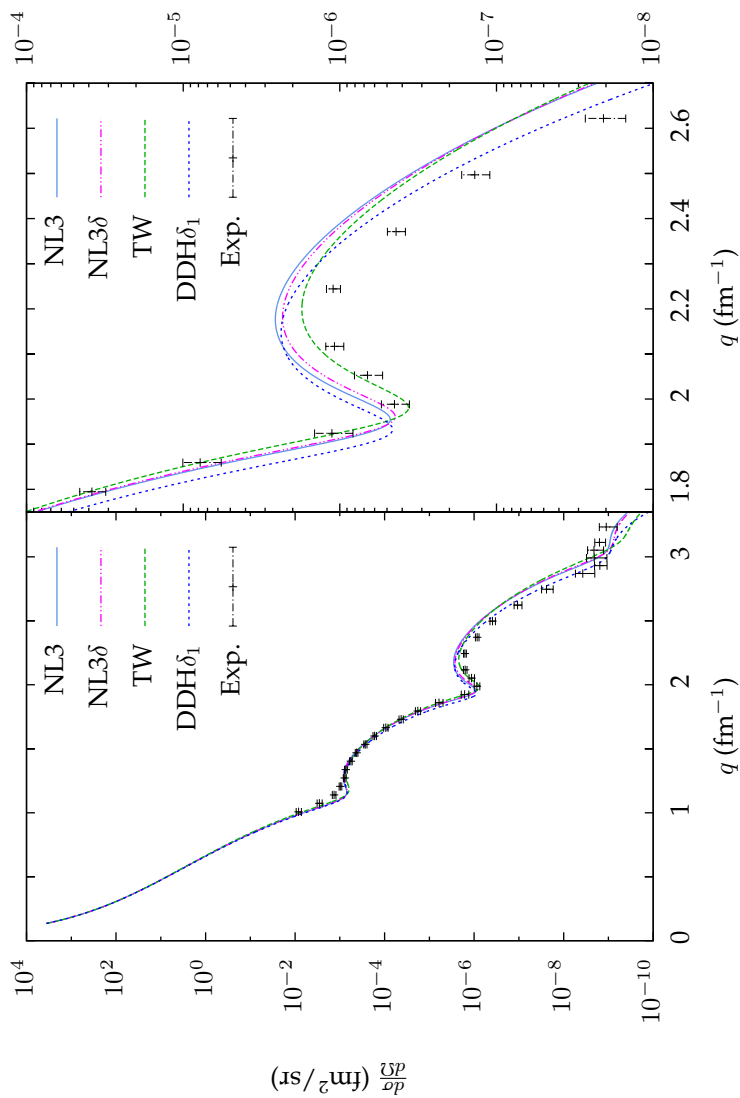
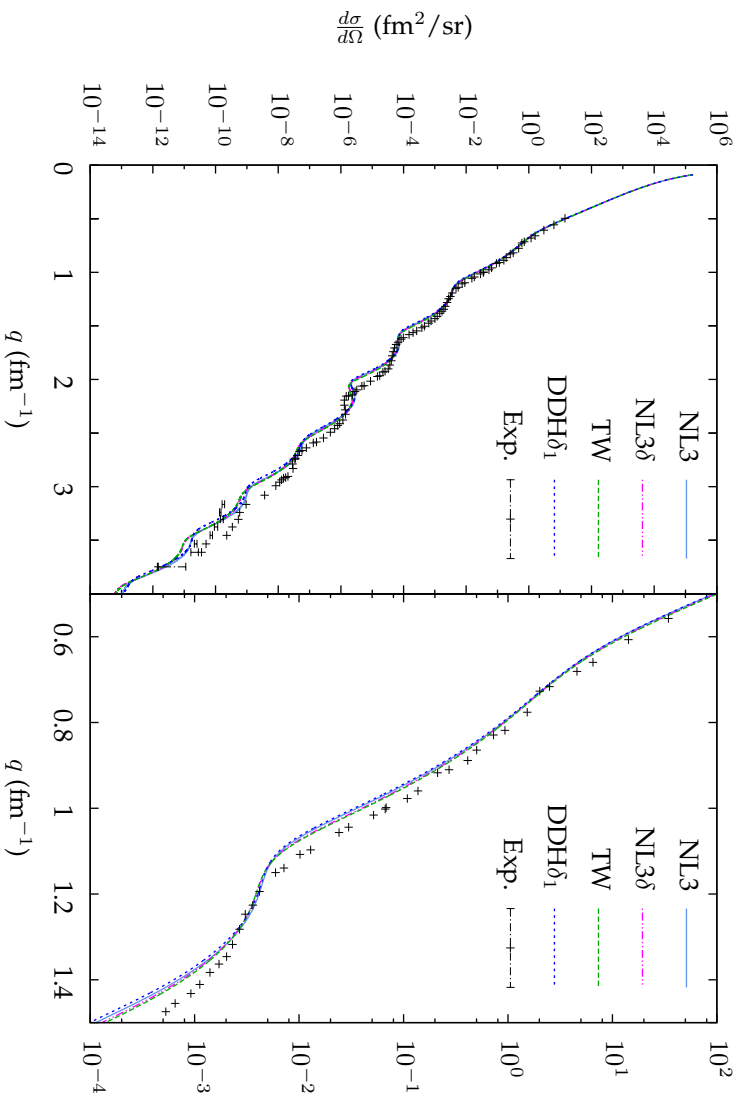


FIGURA 5.12: O mesmo que na Figura 5.10 para o núcleo de  $^{48}\text{Ca}$  e  $\epsilon = 757,5$  MeV. Dados experimentais de (BELLICARD et al., 1980)

FIGURA 5.13: O mesmo que na Figura 5.10 para o núcleo de  $^{208}\text{Pb}$  e  $\epsilon = 502$  MeV. Dados experimentais de (FROIS et al., 1977)





#### 5.4 ASSIMETRIA PARA NÚCLEOS COM $N = Z$

Como discutido na Introdução, o espalhamento de elétrons polarizados foi originalmente proposto como um teste para a determinação de constantes do Modelo Padrão. Para isso devemos utilizar alvos nucleares simétricos no número de prótons e nêutrons, supondo simetria de isospin. Um dos nossos objetivos aqui é investigar quantitativamente a validade dessa última hipótese na interpretação da assimetria, calculada através do modelo nuclear discutido no Capítulo 2. Assim, vamos inicialmente considerar o cálculo da assimetria para núcleos par-par com  $N = Z$ .

Conforme discutido no Capítulo 3, podemos calcular a assimetria tanto em PWBA – dada pela Equação (4.81) –, quanto em DWBA. Neste último caso, é necessário utilizar a definição da assimetria dada pela Equação (3.66). No primeiro caso, a correção do centro de massa se cancela exatamente e o fator de forma do nucleon parcialmente. Já em DWBA, tais efeitos devem ser investigados numericamente. Os resultados para  ${}^4\text{He}$  e  ${}^{12}\text{C}$  podem ser vistos em ambas as aproximações nas Figuras 5.14 e 5.15. Os resultados em DWBA aqui apresentados foram calculados para o espalhamento de elétrons com energia incidente  $\epsilon = 1$  GeV.

A escolha desses núcleos foi baseada no fato de que experimentos para a medida da assimetria desses dois alvos já foram realizados (SOUDER et al., 1990; ANIOL, 2006). Nessas figuras são mostradas curvas onde os efeitos do fator de forma do nucleon são totalmente desprezados (indicado por  $q^2 \ll m^2$ ), assim como a contribuição do fator de forma  $F_2$  (comparação entre as curvas indicadas por  $F_2 = 0$  e  $F_2 \neq 0$ ). Comparamos ainda os resultados tanto em PWBA como em DWBA. Vemos que, mesmo para núcleos leves, o cálculo em DWBA deve ser utilizado se queremos uma avaliação quantitativa dos efeitos de isospin para núcleos com  $N = Z$ . A curva denotada por  $\rho_B^p = \rho_B^n$  corresponde ao caso em que temos simetria exata de isospin (ver Equação (4.82)). Tanto os efeitos de estrutura como os de diferenças entre PWBA e DWBA começam a ser notáveis, no entanto, para  $q = 2,5 \text{ fm}^{-1}$  em diante.

Podemos visualizar melhor os efeitos de estrutura e das várias aproximações e parametrizações utilizadas, definindo o que chamaremos de Mistura de Isospin. Restringindo a expressão (3.66) para a assimetria ao caso de núcleos com  $N = Z$  com  $\rho_B^p = \rho_B^n$ , temos

$$A_0 = \frac{\sqrt{2} G b}{4\pi\alpha} \beta_v^0 q^2. \quad (5.17)$$

Nesse caso, a assimetria não depende da estrutura do alvo. Entretanto, devido à presença da interação coulombiana e dos mésons  $\rho$  e  $\delta$ , as diferenças entre as densidades de prótons e de nêutrons não são desprezíveis. Podemos então definir a Mistura de Isospin  $\Gamma(q)$  de forma que

$$\mathcal{A}(q) = \mathcal{A}_0(q)[1 + \Gamma(q)], \quad (5.18)$$

ou seja

$$\Gamma(q) = \frac{\mathcal{A}(q)}{\mathcal{A}_0(q)} - 1. \quad (5.19)$$

Dessa forma, este termo carregará as informações acerca das diferenças entre as distribuições de prótons e nêutrons do sistema. Para a aproximação de ondas planas, a expressão acima pode ser reduzida a

$$\Gamma^{\text{PWBA}}(q) = \frac{1}{\beta_v^0} \frac{\mathfrak{J}_0^{v*}(q)}{J_0(q)} - 1. \quad (5.20)$$

Já para a aproximação de ondas distorcidas, utilizamos a expressão

$$\Gamma^{\text{DWBA}}(q) = \frac{\mathcal{A}(q)}{\mathcal{A}_0^{\text{DWBA}}(q)} - 1, \quad (5.21)$$

onde  $\mathcal{A}_0^{\text{DWBA}}$  é o resultado do cálculo em ondas distorcidas assumindo  $\rho_B^p = \rho_B^n$ .

Nas figuras 5.16 e 5.17, novamente para  ${}^4\text{He}$  e  ${}^{12}\text{C}$ , comparamos a mistura de isospin obtida em PWBA e DWBA, com e sem correções para o fator de forma do nucleon e com e sem o fator de forma  $F_2$ , para uma dada parametrização do modelo de Walecka. Já as figuras 5.18 a 5.22 mostram os resultados em DWBA para todos os núcleos com  $N = Z$  considerados e para as quatro parametrizações investigadas nesse trabalho: NL3, NL3 $\delta$ , TW e DDH $\delta_1$ . A principal diferença observada entre as várias parametrizações está na posição dos mínimos e máximos entre as parametrizações TW e DDH $\delta_1$ . Essa diferença é mais pronunciada para os núcleos mais leves e vai se tornando sistematicamente menor para núcleos mais pesados na região do primeiro mínimo. Assim, constatamos que a influência do méson  $\delta$  é mais intensa no caso das parametrizações com acoplamentos dependentes da densidade.

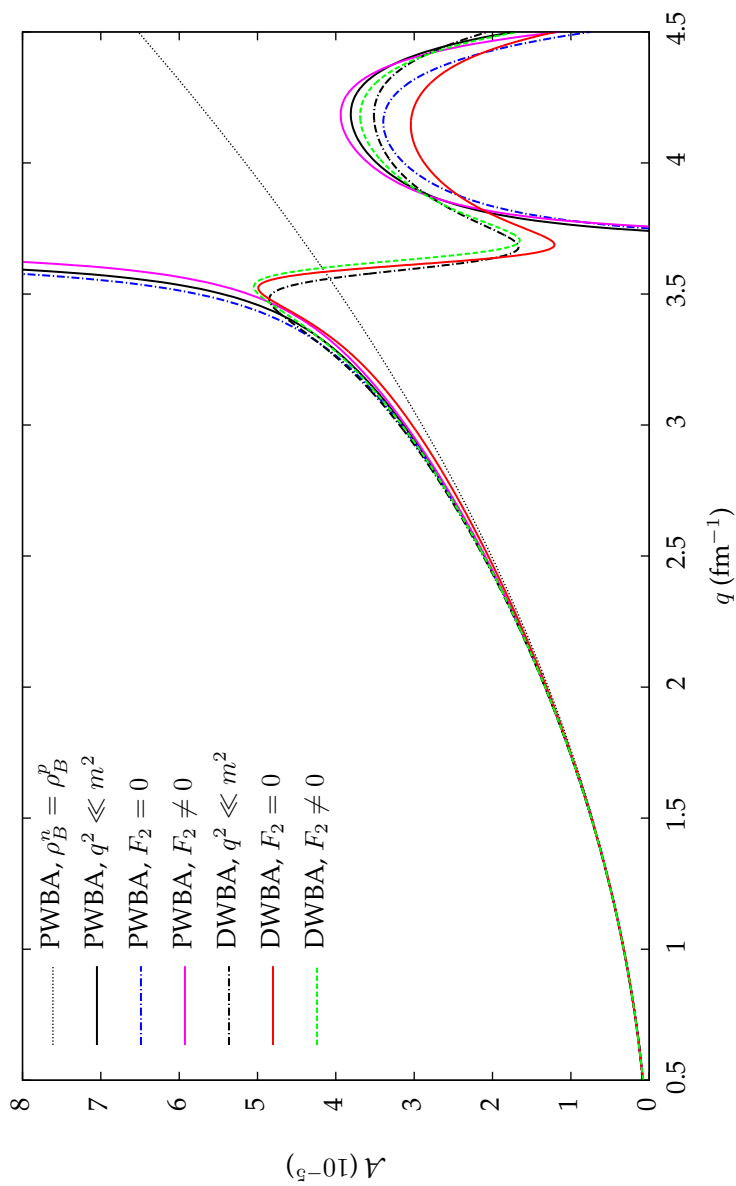


FIGURA 5.14: Comparação entre os resultados obtidos para a assimetria em ondas planas e distorcidas para o núcleo de  ${}^4\text{He}$ , parametrização  $\text{DDH}\delta_1$ .

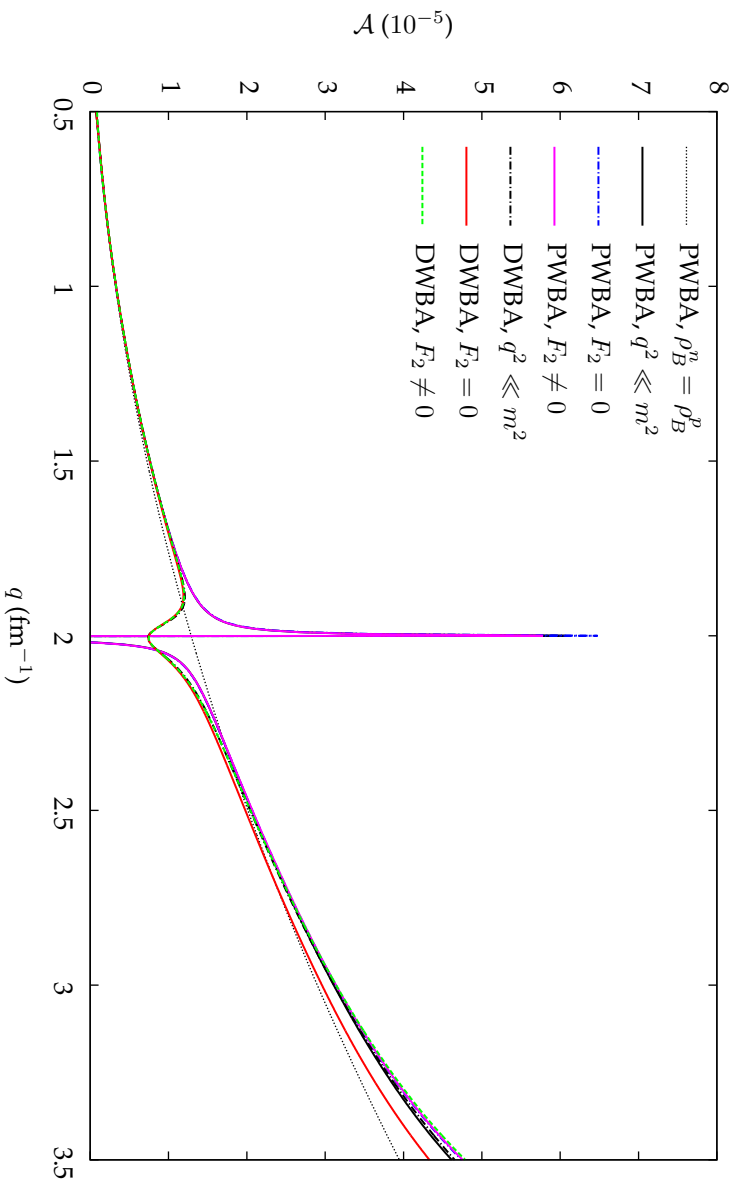


FIGURA 5.15: O mesmo que na Figura 5.14 para o núcleo de  $^{12}\text{C}$ , parametrização DDH $\delta_1$ .

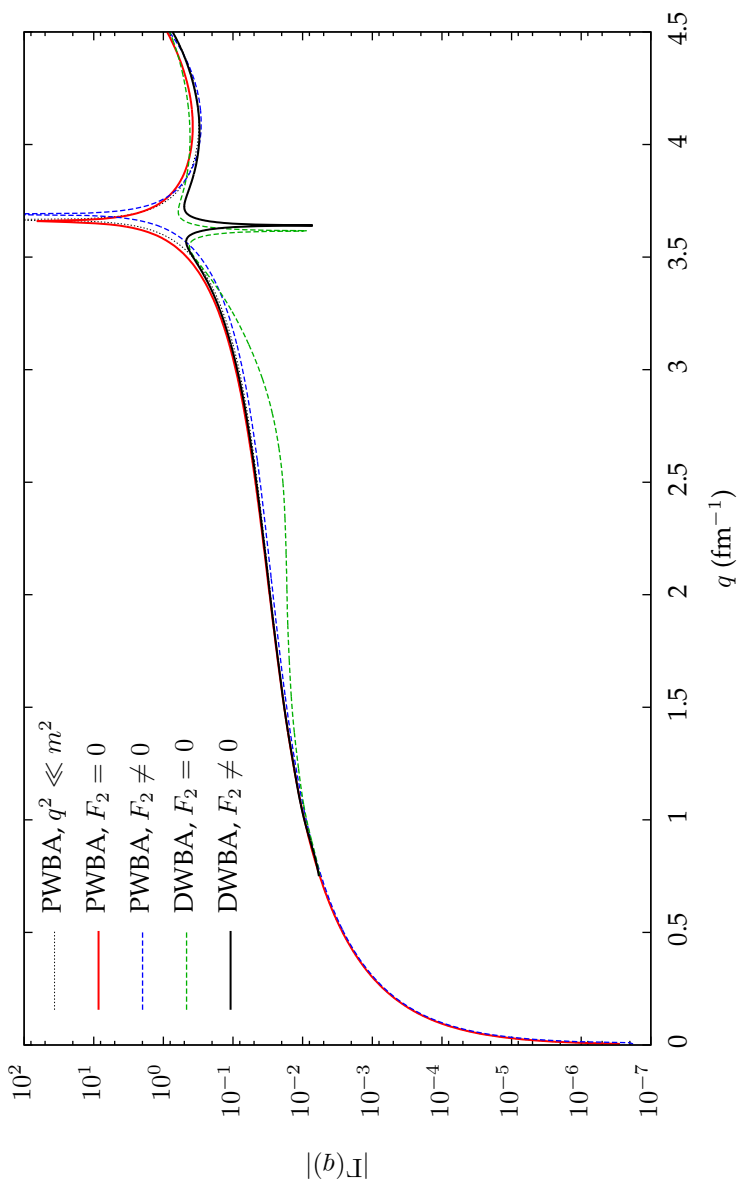


FIGURA 5.16: Mistura de isospin em ondas planas e distorcidas para o núcleo de  ${}^4\text{He}$ , segundo a parametrização DDH $\delta$ 1.

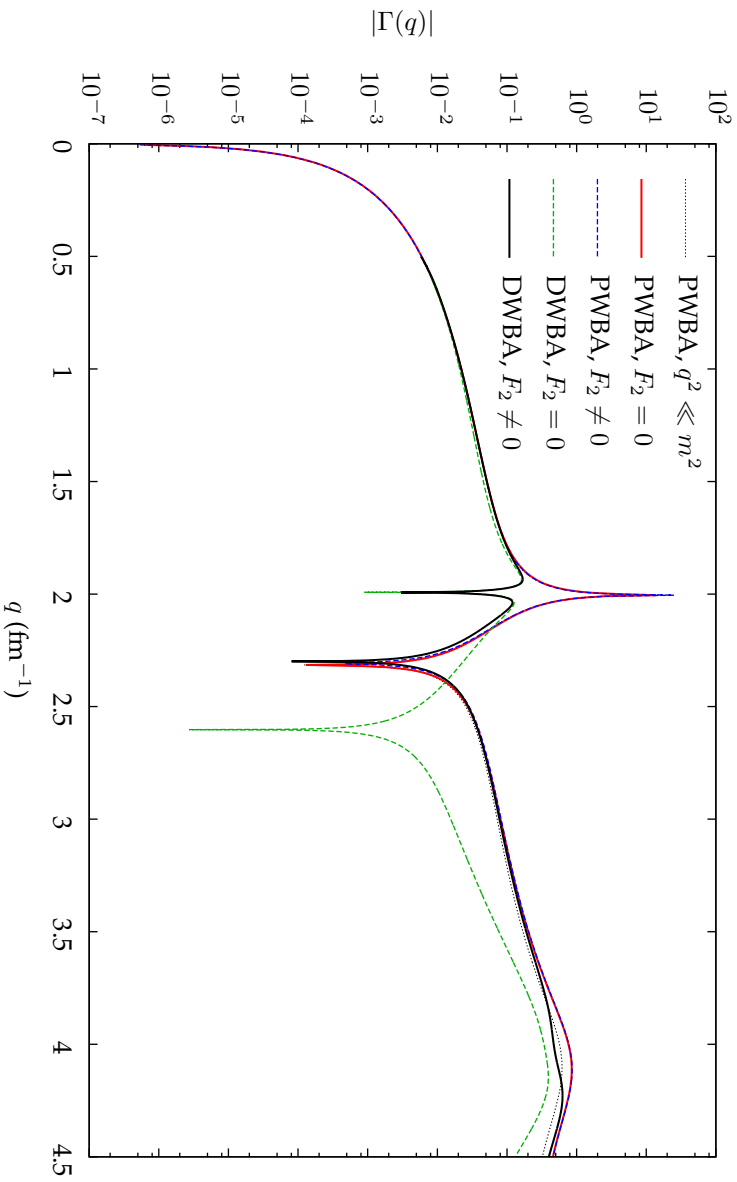


FIGURA 5.17: Mistura de isospin em ondas planas e distorcidas para o núcleo de  $^{12}\text{C}$ , segundo a parametrização DDH $\delta_1$ .

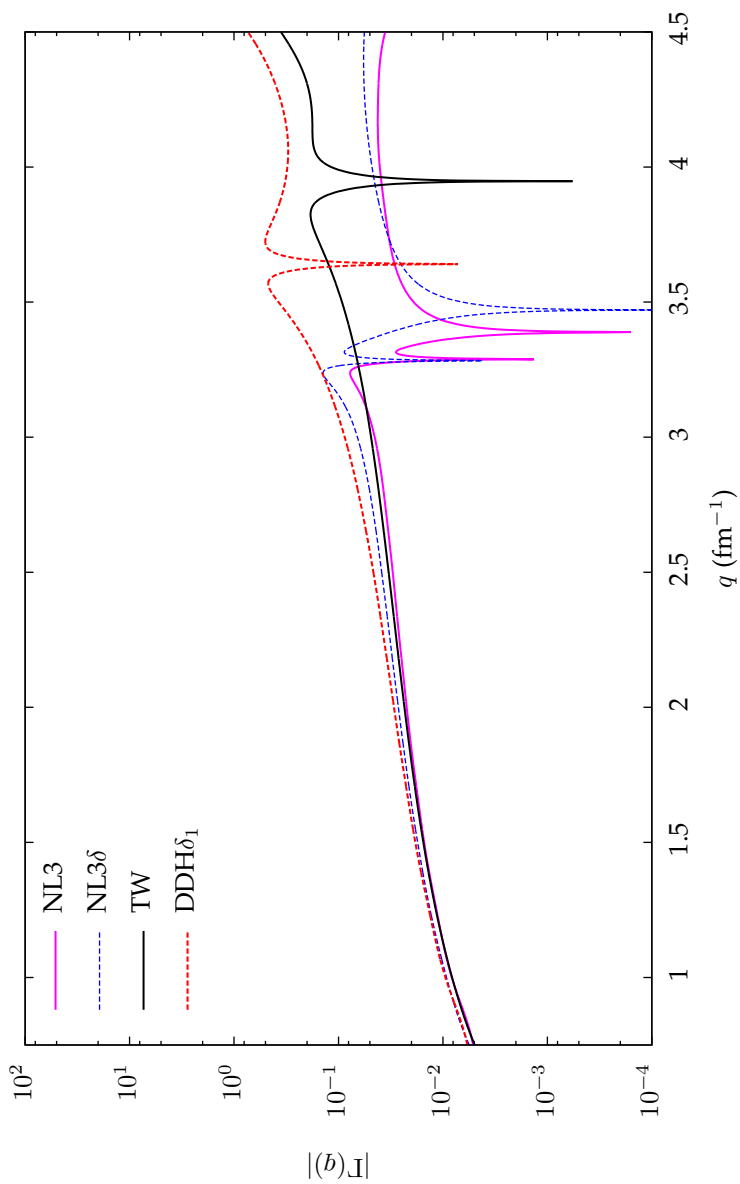


FIGURA 5.18: Mistura de isospin em ondas distorcidas para o núcleo de  ${}^4\text{He}$ .

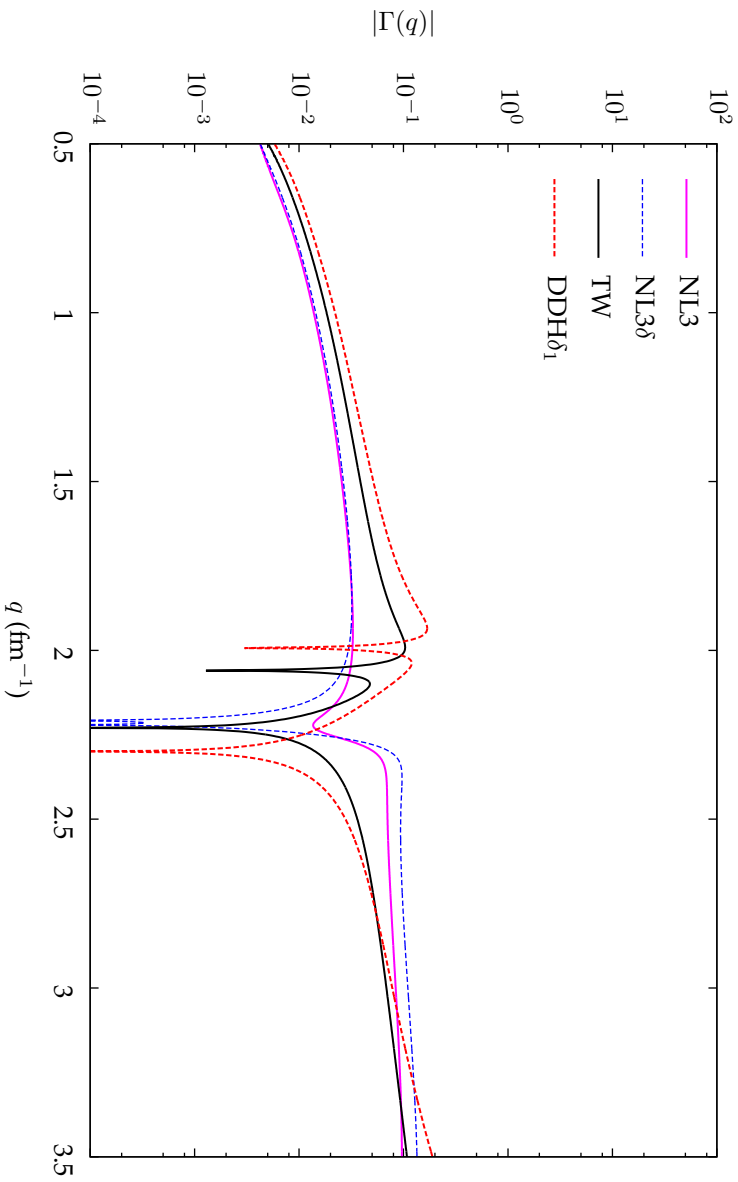


FIGURA 5.19: Mistura de isospin em ondas distorcidas para o núcleo de  $^{12}\text{C}$ .



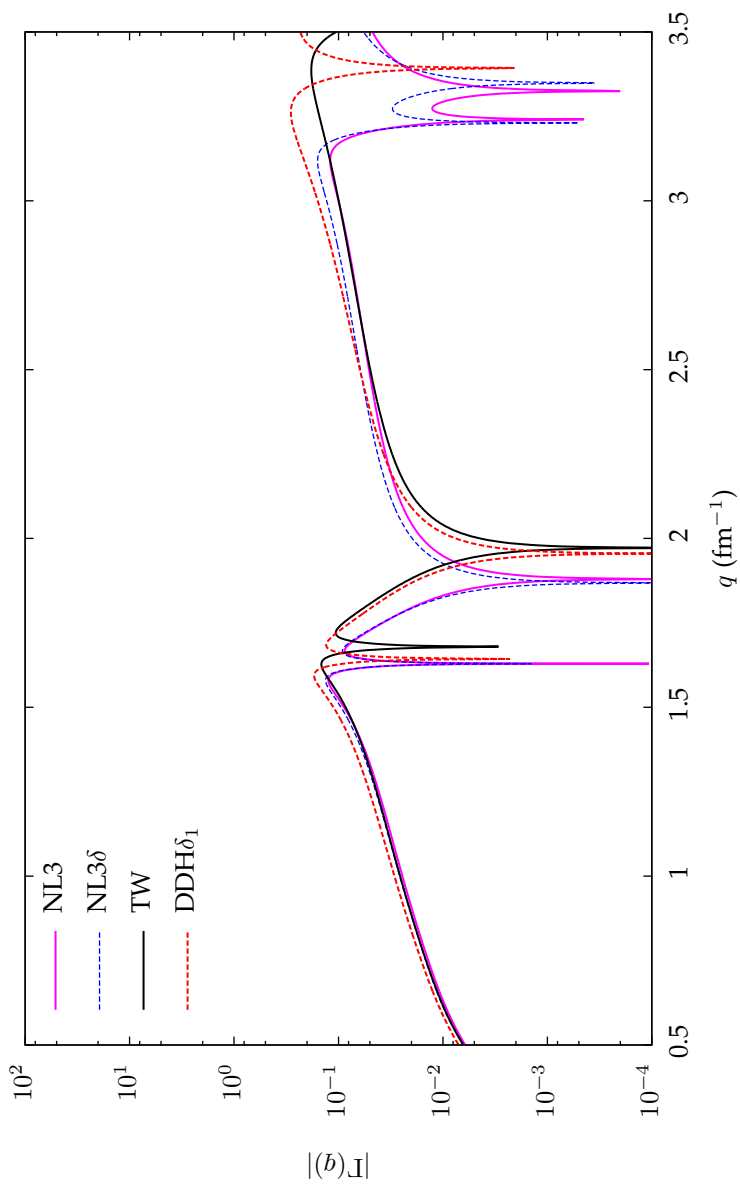


FIGURA 5.20: Mistura de isospin em ondas distorcidas para o núcleo de  $^{16}\text{O}$ .

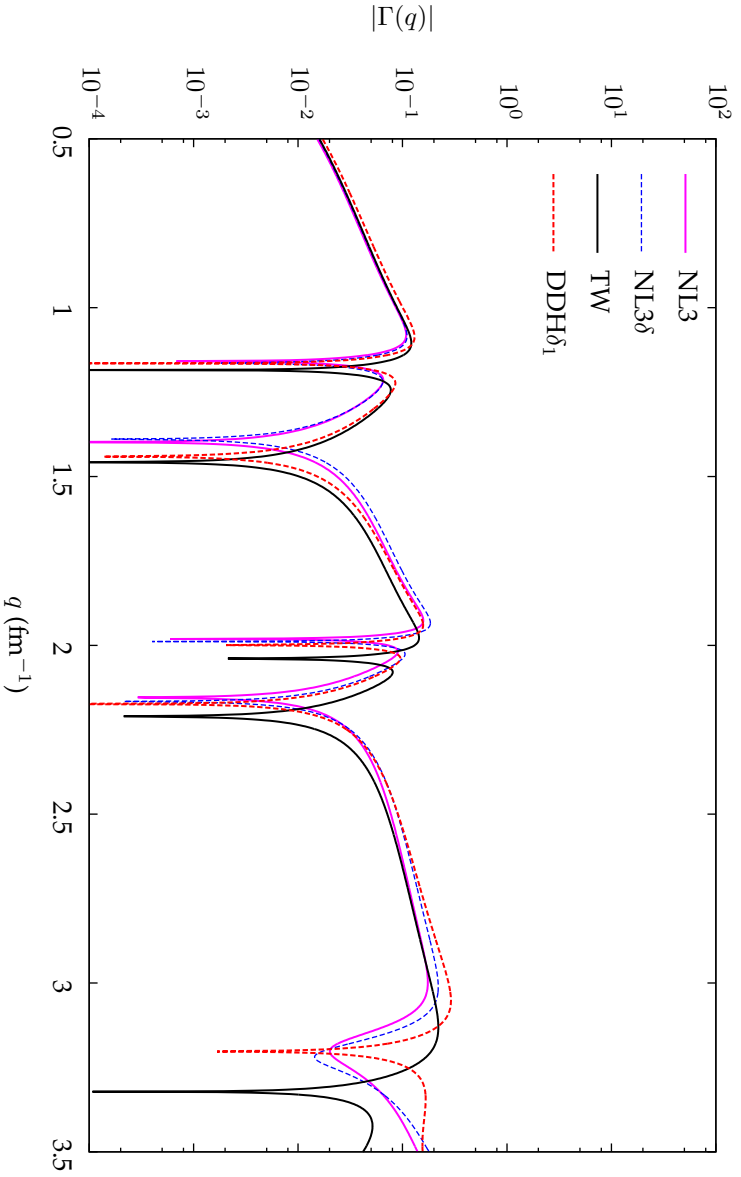


FIGURA 5.21 : Mistura de isospin em ondas distorcidas para o núcleo de  $^{40}\text{Ca}$ .

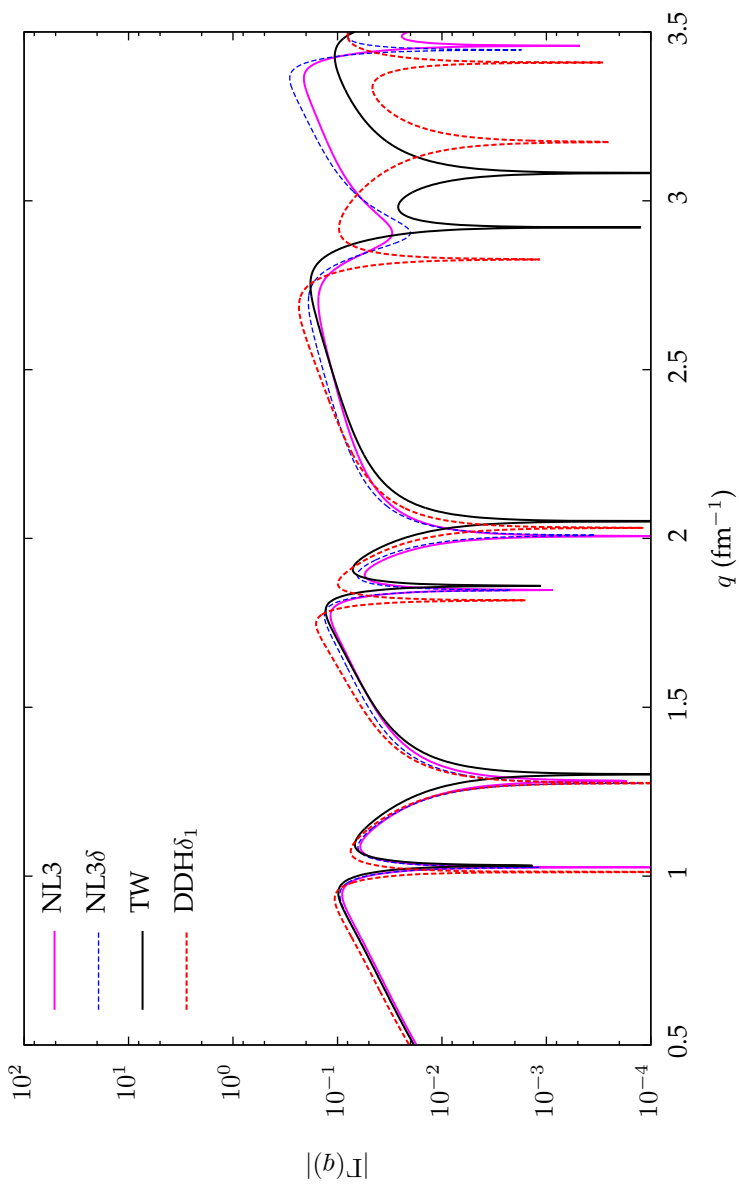


FIGURA 5.22: Mistura de isospin em ondas distorcidas para o núcleo de  $^{56}\text{Ni}$ .

### 5.4.1 Componente de estranheza

A adição de um termo que carrega as informações sobre o conteúdo de estranheza no núcleo, discutida na Seção 4.9, implica no aparecimento de novos termos na corrente neutra e na assimetria. Tais termos apresentam dependência nas densidades nucleares e, por isso, devem sofrer influência da mistura de isospin.

Podemos avaliar a importância de cada um dos três termos na expressão (4.90), que chamamos respectivamente de termo isoescalar, isovetorial e de estranheza ( $S \neq 0$ ). O resultado dessa avaliação é mostrado na Figura 5.23 para  ${}^4\text{He}$ , núcleo objeto de experimentos que visam extrair informações acerca do conteúdo de estranheza. Os termos relativos ao conteúdo de estranheza em tais gráficos foram elaborados utilizando os valores dos parâmetros contidos na Tabela 5.16 (MORENO et al., 2009). Vemos que o termo que representa o conteúdo de estranheza é, para baixos valores de  $q$ , mais importante que o do fator de forma isovetorial. A Figura 5.24 mostra a contribuição do termo de estranheza na assimetria (ver Equação (4.91)) usando diferentes parametrizações. Finalmente, a assimetria para o  ${}^4\text{He}$  é apresentada na figura 5.25 para vários valores do parâmetro  $\rho_s$ .

Parâmetro	valor
$\lambda_M^s$	0
$\lambda_E^s$	5.6
$\rho_s$	-1.5 a 1.5
$\mu_s$	-0.31

TABELA 5.16: Parâmetros utilizados para o fator de forma de estranheza.

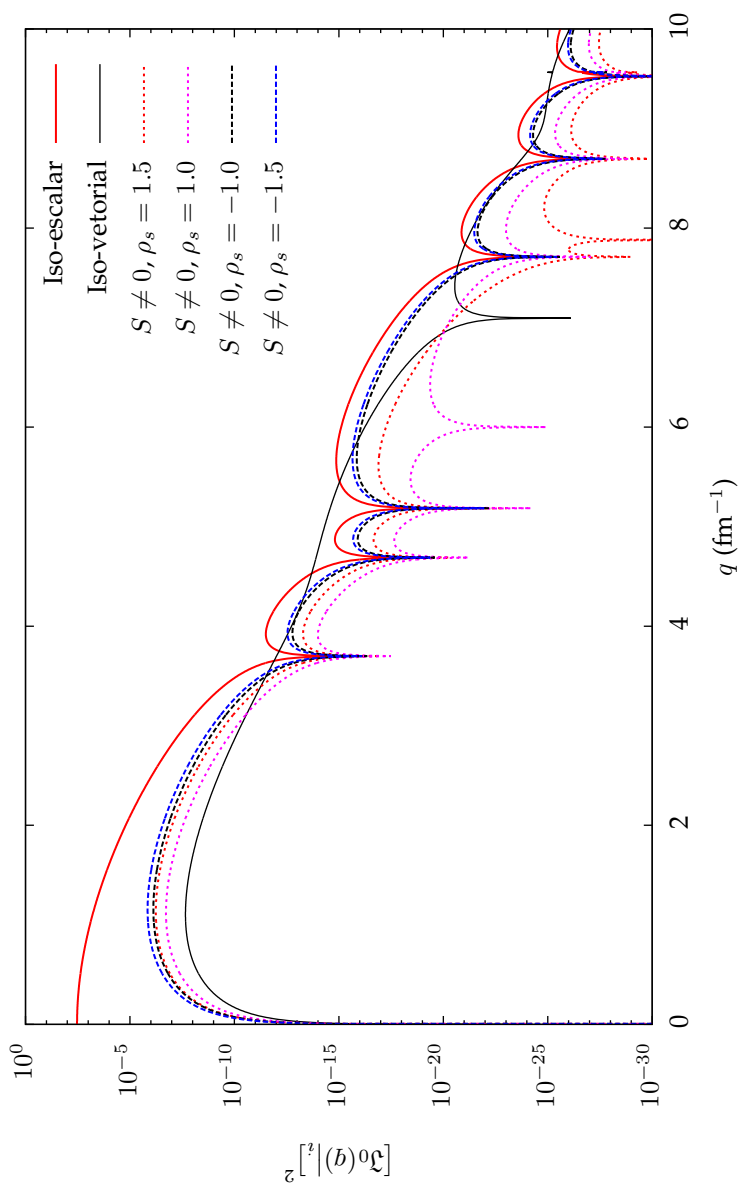


FIGURA 5.23: Comparação entre os termos da expressão para a corrente neutra para o núcleo de  ${}^4\text{He}$  segundo a parametrização  $\text{DDH}\delta_1$ .

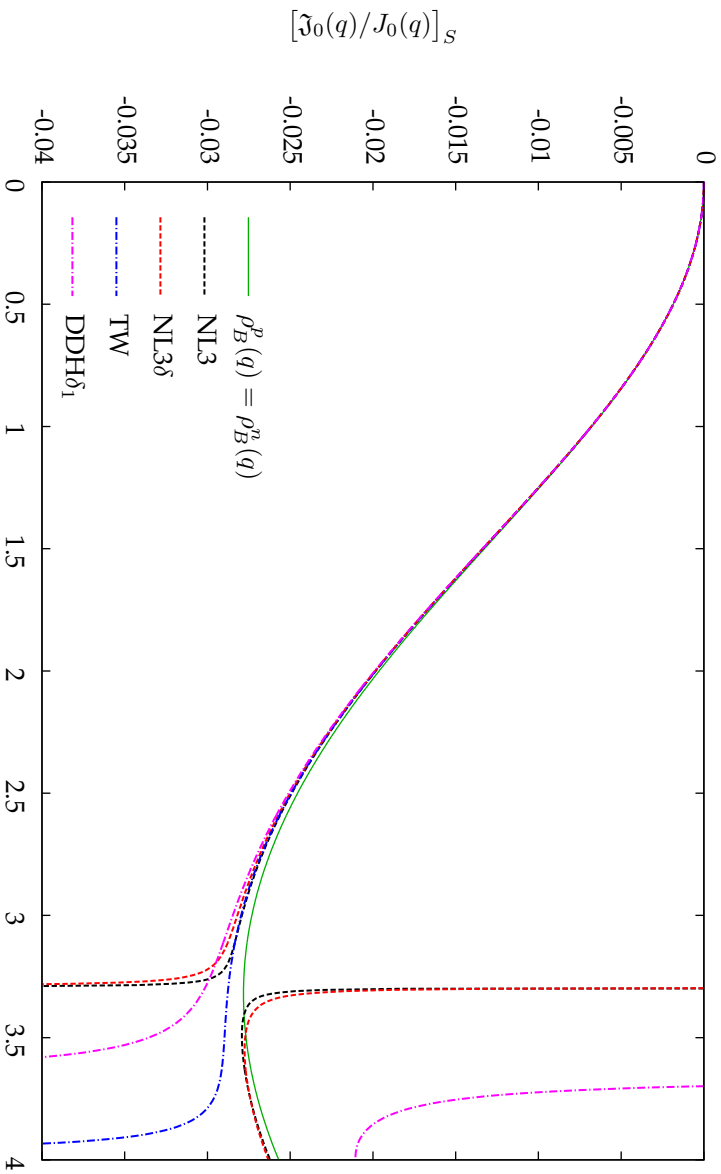


FIGURA 5.24: Resultados para o termo de estranheza da razão  $\hat{J}_0/J_0$  para o núcleo de  ${}^4\text{He}$  com  $\rho_s = 1,0$ .

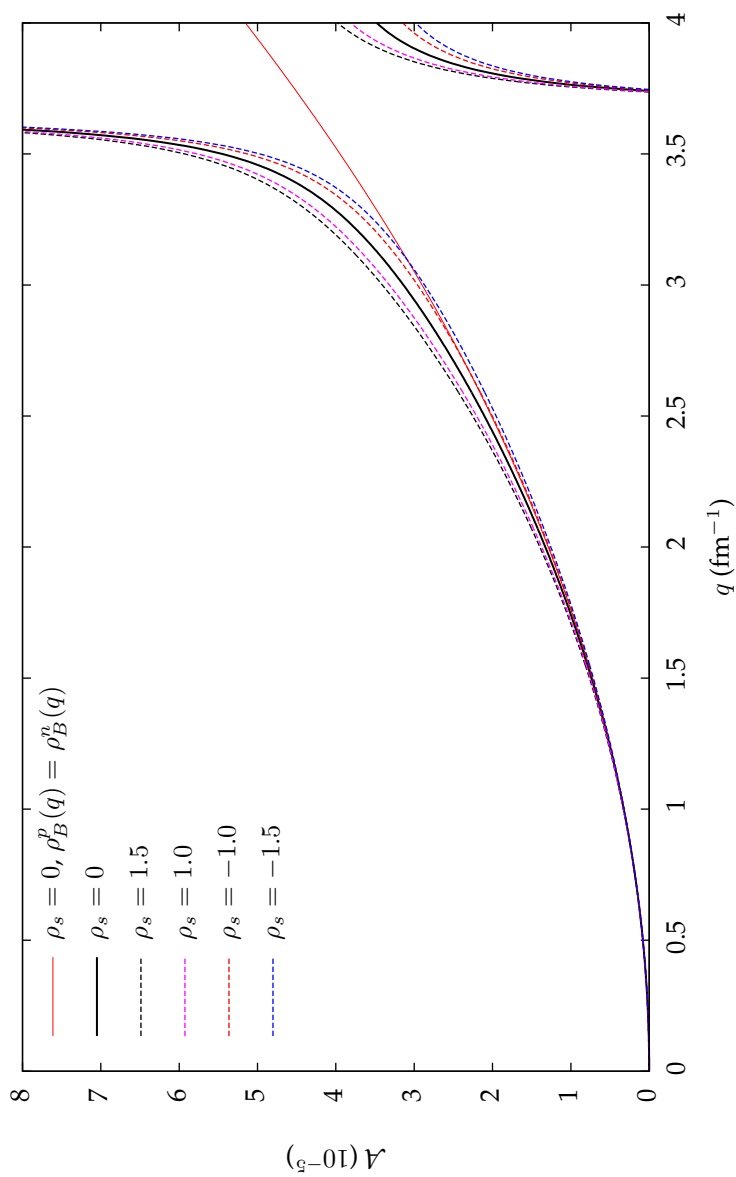


FIGURA 5.25: Comparação entre os resultados obtidos para a assimetria para o núcleo de  ${}^4\text{He}$  utilizando a parametrização  $\text{DDH}\delta_1$ , no regime de ondas planas, para vários valores do parâmetro  $\rho_s$  e tomando a aproximação  $q^2 \ll m^2$ .

## 5.5 ASSIMETRIA PARA NÚCLEOS COM $N \neq Z$

Do ponto de vista teórico e experimental, a determinação da assimetria para núcleos com  $N \neq Z$  tem um grande interesse atual. No momento está em andamento no Jefferson Lab um experimento, batizado de "Lead Radius Parity Experiment" (PREX), cujo objetivo é determinar o raio de nêutrons do núcleo de  $^{208}\text{Pb}$  através da medida experimental da assimetria para espalhamento elástico de elétrons incidentes com aproximadamente 1 GeV de energia, a um ângulo de espalhamento de 5 graus. A estimativa é de que isso seja feito com uma precisão em torno de um por cento. É evidente que a possibilidade futura de medidas para outras energias e ângulos pode, a princípio, tornar possível não apenas a obtenção do raio de nêutrons, mas também da distribuição dos nêutrons no núcleo atômico. As implicações desse resultado para o conhecimento da estrutura nuclear, assim como suas implicações em problemas correlatos, como a Física de estrelas de nêutrons, foi amplamente discutido no passado recente (ver por exemplo a Referência (HOROWITZ, 2010)).

Por essa razão incluímos aqui nossos resultados para alguns núcleos com excesso de nêutrons. As Figuras 5.26 a 5.30 correspondem à assimetria calculada em DWBA usando quatro diferentes parametrizações para uma série de núcleos, além de uma curva calculada em PWBA assumindo  $\rho_B^n = N/Z \rho_B^p$ . Pode-se ver agora as diferenças entre os modelos que incluem o meson  $\delta$  e os que não o fazem, de forma bastante ampliada, sendo tais diferenças consistentemente maiores para parametrizações dependentes da densidade. Assim, a obtenção da assimetria mostra-se potencialmente num método bastante seletivo na determinação da distribuição de nêutrons no núcleo. No caso do  $^{208}\text{Pb}$ , Figura 5.30, incluímos uma curva que corresponde ao cálculo em DWBA supondo uma distribuição fenomenológica de carga e que as distribuições de próton e de nêutron são tais que  $\rho_B^n = N/Z \rho_B^p$ .

Os objetivos do PREX são no entanto bem mais modestos, uma vez que os resultados se resumem a um momento transferido próximo a  $0.45 \text{ fm}^{-1}$ . Para baixos valores de  $q$ , o termo da assimetria em PWBA que depende da estrutura, pode ser escrito aproximadamente como:

$$\frac{\rho_B^n(q)}{\rho_B^p(q)} = \frac{N}{Z} \left[ 1 - \frac{q^2}{6} (r_n + r_p)(r_n - r_p) \right]. \quad (5.22)$$

Isso mostra que, em primeira aproximação, a assimetria para baixo  $q$  é aproximadamente linear com a pele. De fato, ao menos para o  $^{208}\text{Pb}$ , verificamos usando nossos resultados que o desvio máximo entre di-



ferentes modelos (parametrizações), para o valor médio de  $(r_n + r_p)$  é da ordem de um por cento, enquanto que para  $(r_n - r_p)$  chega a vinte e cinco por cento. Conclusões semelhantes considerando um número bem maior de modelos e parametrizações foram obtidas em (ROCA-MAZZA et al., 2011). No entanto, o experimento pretende determinar a pele de nêutrons com grande precisão, portanto – tendo em vista os resultados mostrados anteriormente – para uma correta interpretação dos mesmos, a assimetria deve ser calculada em DWBA.

A Figura 5.31 apresenta a assimetria em função da pele para o  $^{208}\text{Pb}$ . Os resultados apresentados foram calculados em DWBA na cinemática do PREX ( $\epsilon = 1063$  MeV,  $\theta = 5^\circ$ ), para as quatro principais parametrizações aqui estudadas – isto é, NL3, NL3 $\delta$ , TW e DDH $\delta_1$  – e mais duas usualmente utilizadas na literatura para cálculos de estrutura nuclear no Modelo de Walecka, quais sejam, DDME1 (NIKŠIĆ et al., 2002) e NLSH (LALAZISSIS; KÖNIG; RING, 1997). Concluimos que, mesmo em ondas distorcidas, observamos uma dependência linear da assimetria com a pele de nêutrons, de acordo com as observações feitas para a aproximação de ondas planas.

Já a Figura 5.32 mostra um resultado parcial do experimento e uma projeção estimada para uma segunda rodada de medidas (SOU-DER, 2011). Na mesma figura são mostrados os resultados para todas as parametrizações usadas nesse trabalho e, como referência, o valor obtido supondo simetria de isospin. Concluimos que, caso o valor para a assimetria obtido inicialmente seja confirmado dentro do erro estimado, a pele de nêutrons do  $^{208}\text{Pb}$  deve ser ligeiramente maior que todos os resultados por nós obtidos. Por outro lado, dentro da barra de erro estimada, poderá ser possível distinguir entre os resultados com parametrização dependente da densidade e as não-lineares.

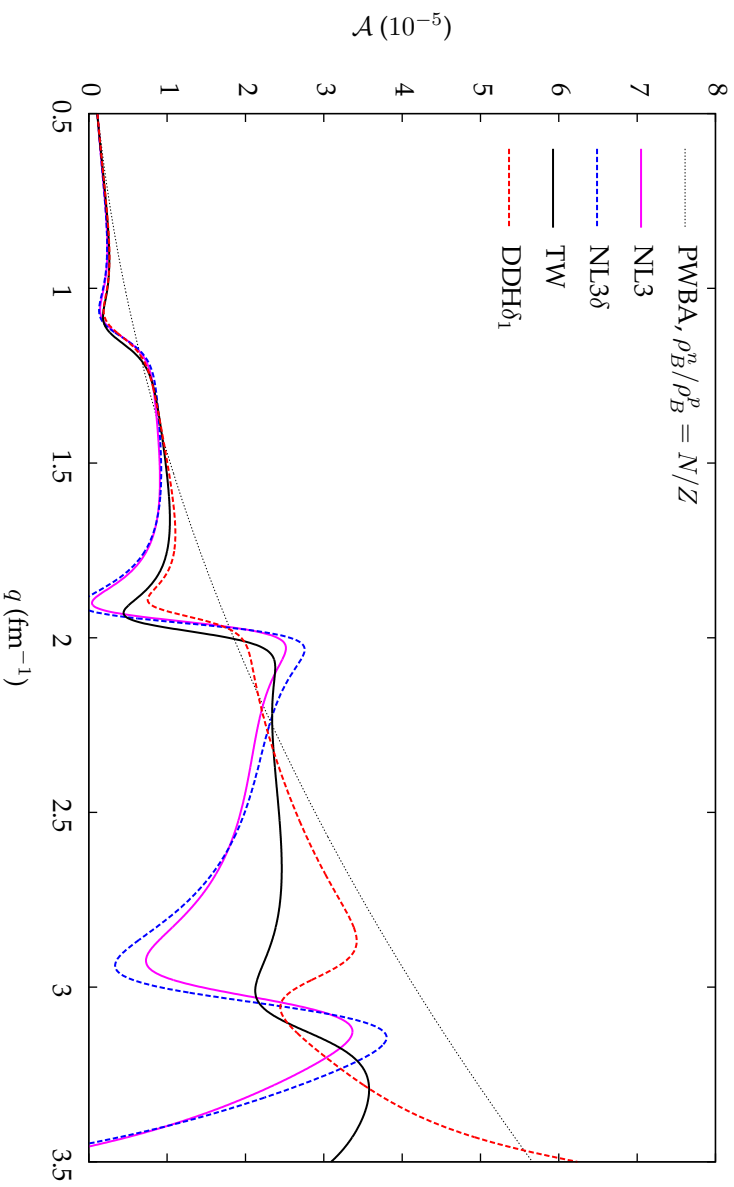


FIGURA 5.26: Comparação entre os resultados obtidos para a assimetria em ondas distorcidas para o núcleo de  $^{48}\text{Ca}$ . Os resultados incluem as correções dadas pelos fatores de forma  $F_{11}$ ,  $F_{22}$  e  $F_{CM}$ .

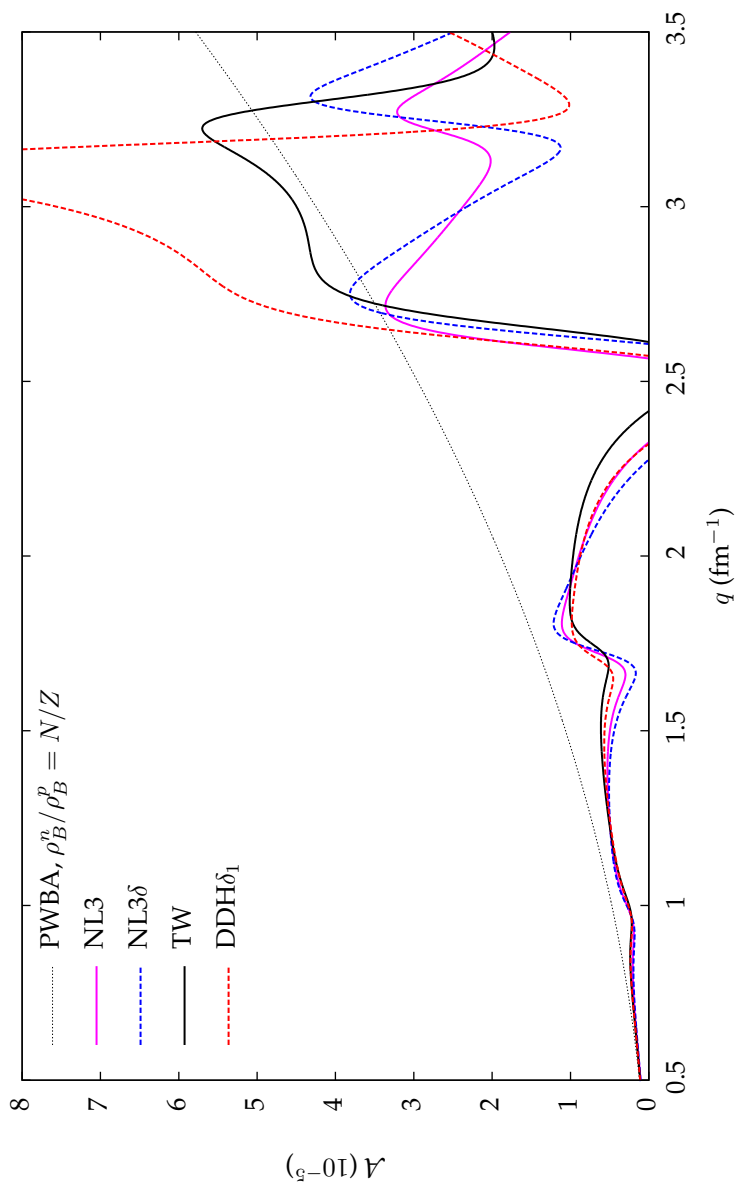


FIGURA 5.27: O mesmo que na Figura 5.26 para  $^{68}\text{Ni}$ .

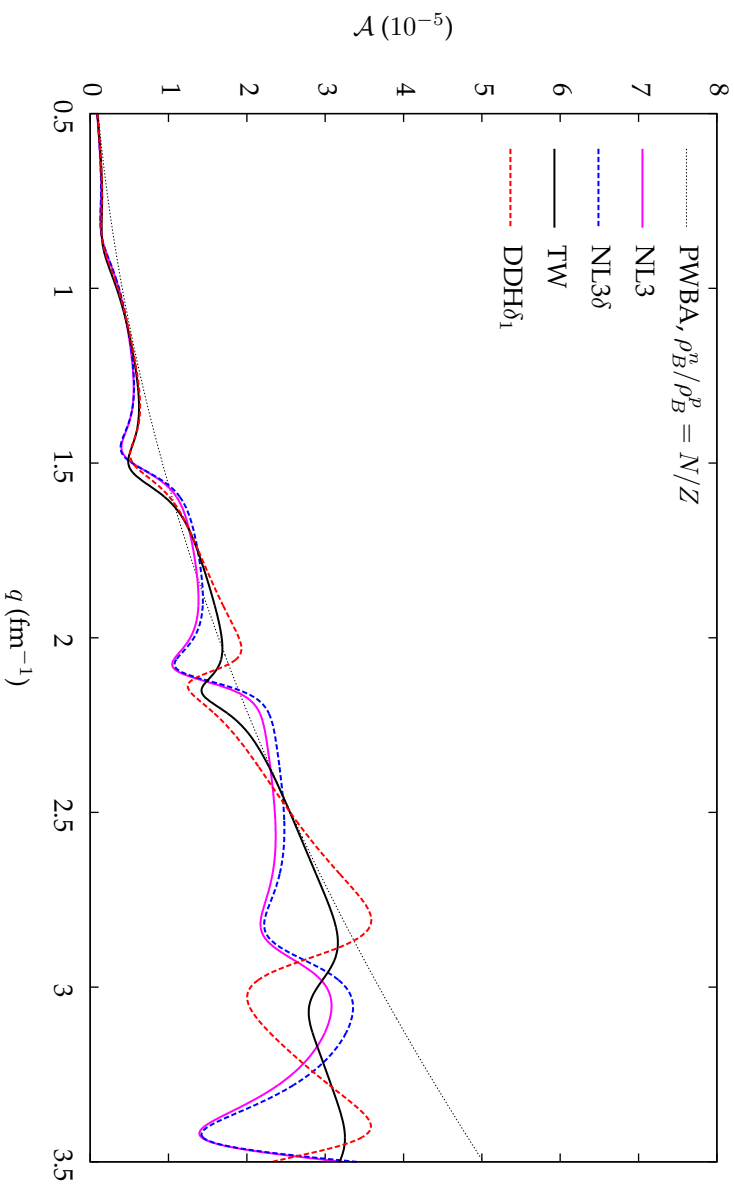


FIGURA 5.28: O mesmo que na Figura 5.26 para  $^{90}\text{Zr}$ .

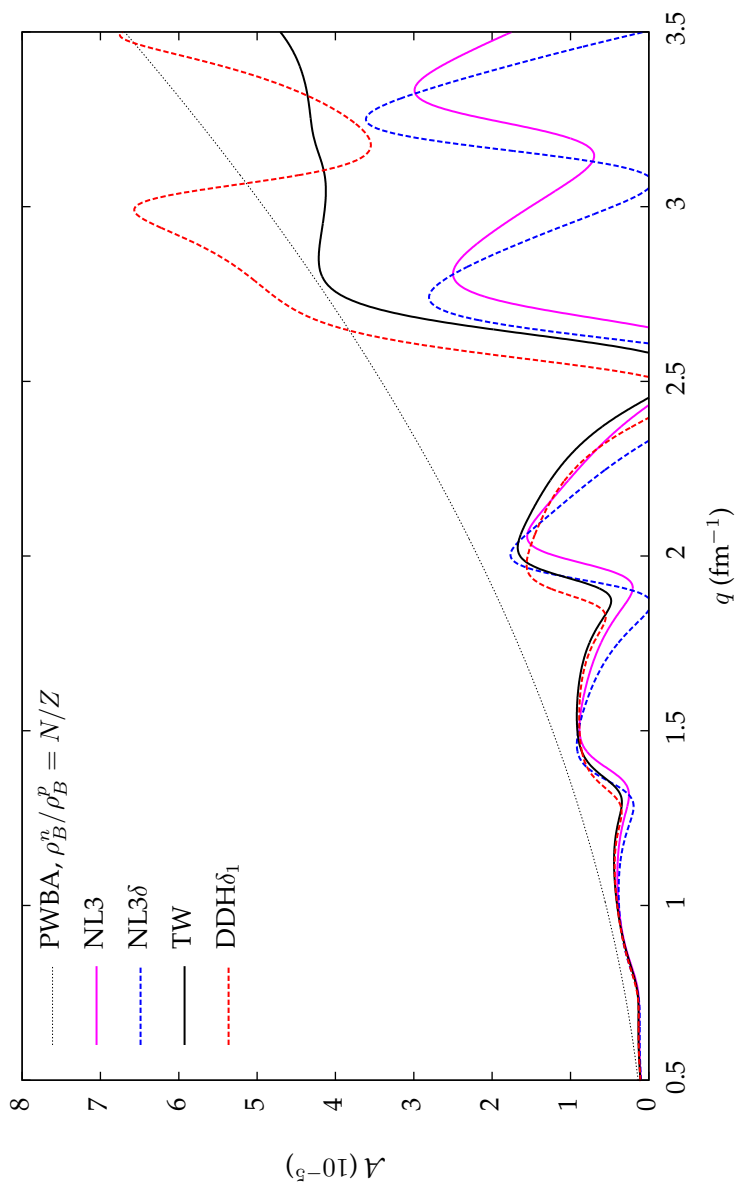


FIGURA 5.29: O mesmo que na Figura 5.26 para  $^{132}\text{Sn}$ .

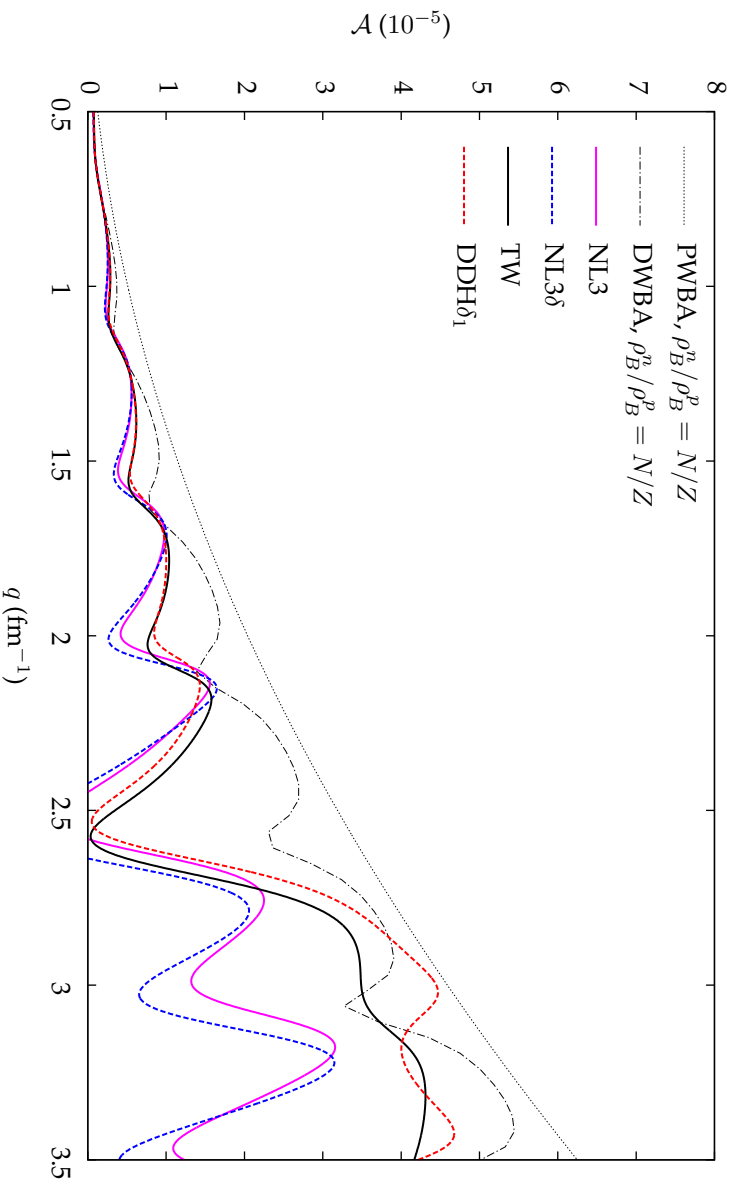


FIGURA 5.30: O mesmo que na Figura 5.26 para  $^{208}\text{Pb}$ . A curva ponto-tracejada resulta do cálculo em DWBA supondo  $\rho_B^n = (N/Z)\rho_B^p$ , com  $\rho_B^p$  dado por uma distribuição de Fermi a três parâmetros.

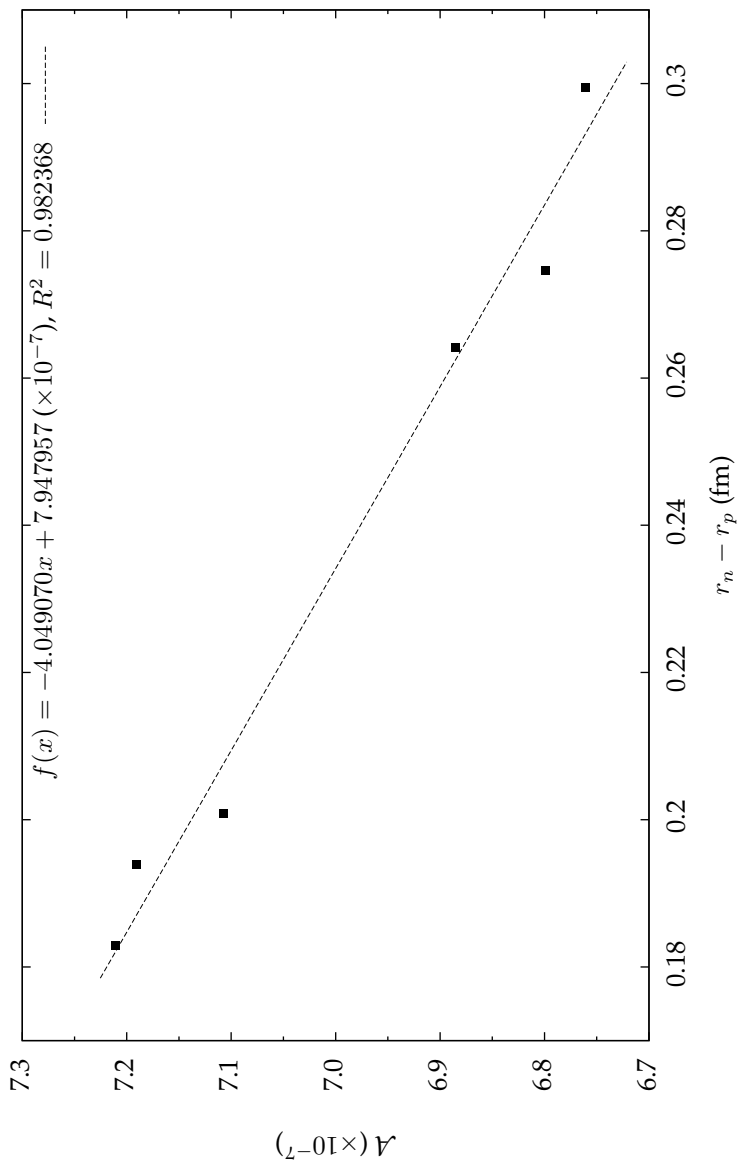


FIGURA 5.31: Comparação entre os resultados obtidos para a assimetria como função da pele de nêutrons. As parametrizações usadas para gerar cada um dos resultados são, em ordem crescente no eixo das abcissas: DDH $\delta_1$ , TW, DDME1, NL-SH, NL3 e NL3 $\delta$ . Os valores de  $A$  foram calculados de maneira que o momento transferido correspondesse à cinemática do PREX.

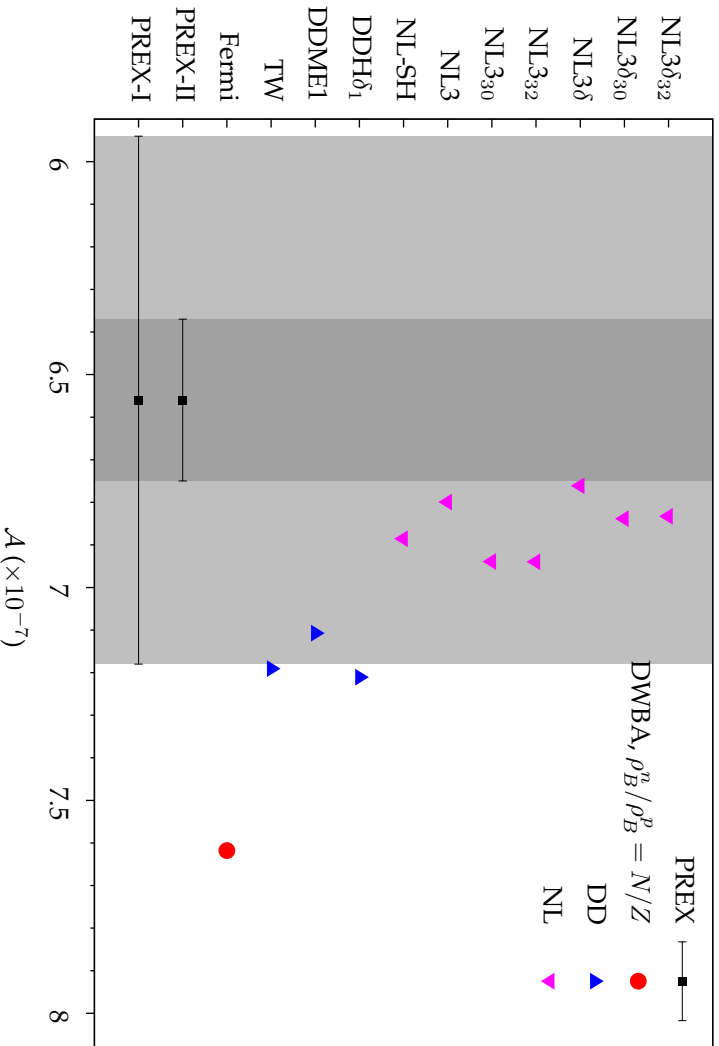


FIGURA 5.32: Resultados teóricos obtidos para a assimetria em DWBA para o núcleo de  $^{208}\text{Pb}$ . O primeiro quadrado (PREX-I) se refere à medida realizada pelo PREX, enquanto o segundo (PREX-II) ilustra a diminuição esperada no erro em uma segunda execução do experimento, assumindo que o valor da medida se confirme. O círculo é o resultado em DWBA assumindo  $\rho_B^n / \rho_B^p = N/Z$ , com  $\rho_B^p$  dado por uma distribuição de Fermi a três parâmetros.



## 5.6 PRECISÃO EXPERIMENTAL

Ao considerarmos medidas experimentais, uma série de fatores cinemáticos e estatísticos influem na precisão com que é possível se obter os resultados. O ajuste de tais fatores deve criar intervalos específicos que otimizam a precisão da grandeza medida. Para a assimetria, a precisão possível para a medida está relacionada à grandeza  $\mathcal{F}$ , denominada *Figure of Merit*, e que representa a contribuição das propriedades intrínsecas do alvo e das variáveis cinemáticas do projétil ao erro relativo na medida da assimetria. Formalmente ela é dada por (MUSOLF et al., 1993)

$$\frac{\delta\mathcal{A}}{\mathcal{A}} = (\mathcal{F} X_0)^{-1/2}, \quad (5.23)$$

onde  $X_0$  depende apenas das condições experimentais,  $\delta\mathcal{A}$  é o erro estatístico na medida da assimetria e

$$\mathcal{F} = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right) \mathcal{A}^2. \quad (5.24)$$

Dessa forma, valores grandes da *Figure of Merit* minimizam o erro estatístico. A seção de choque  $(d\sigma/d\Omega)$  é a seção de choque elástica para elétrons não polarizados.

As figuras 5.33 a 5.37 mostram os resultados obtidos para a *Figure of Merit* utilizando espalhamento com energia incidente de 1 GeV e usando a aproximação PWBA. A região ideal para a realização das medidas, conforme visto nesses gráficos, implica em valores pequenos de  $q$  e está compreendida antes do primeiro mínimo de difração. Para o caso dos núcleos de  ${}^4\text{He}$  e  ${}^{12}\text{C}$ , esta região fica em torno de  $1 \text{ fm}^{-1}$  e diminui para núcleos mais pesados. Os resultados mostram que tais conclusões são praticamente independentes das parametrizações usadas aqui.

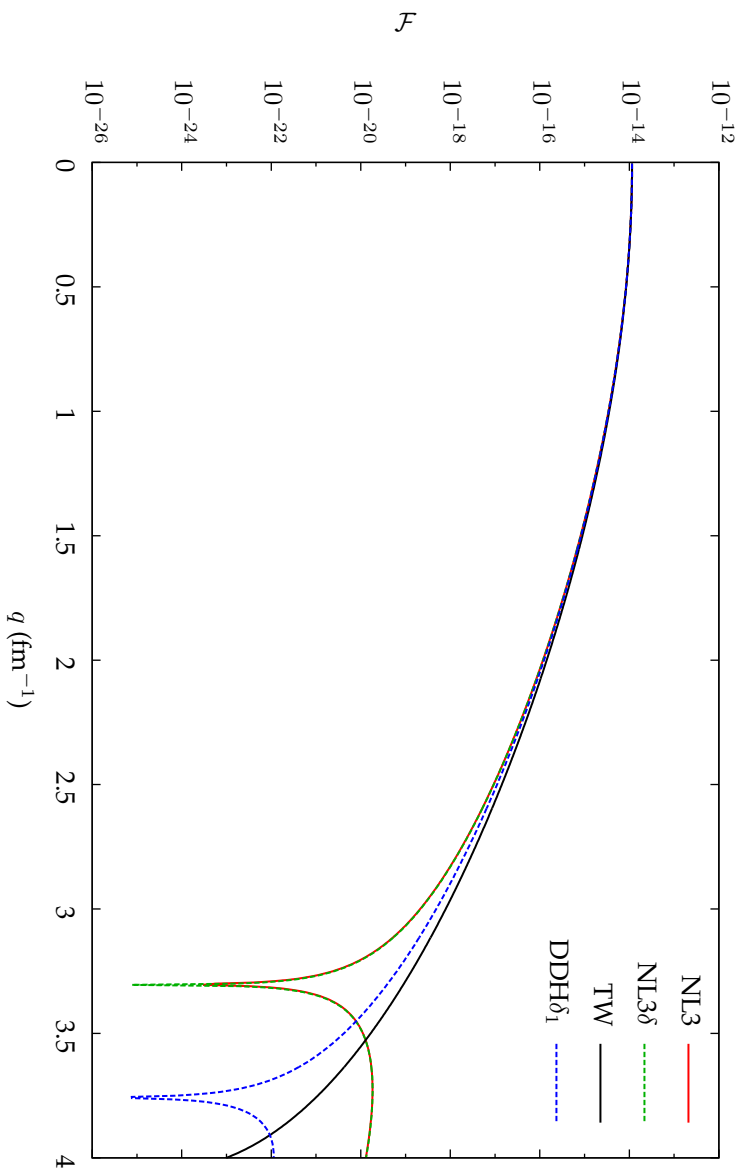
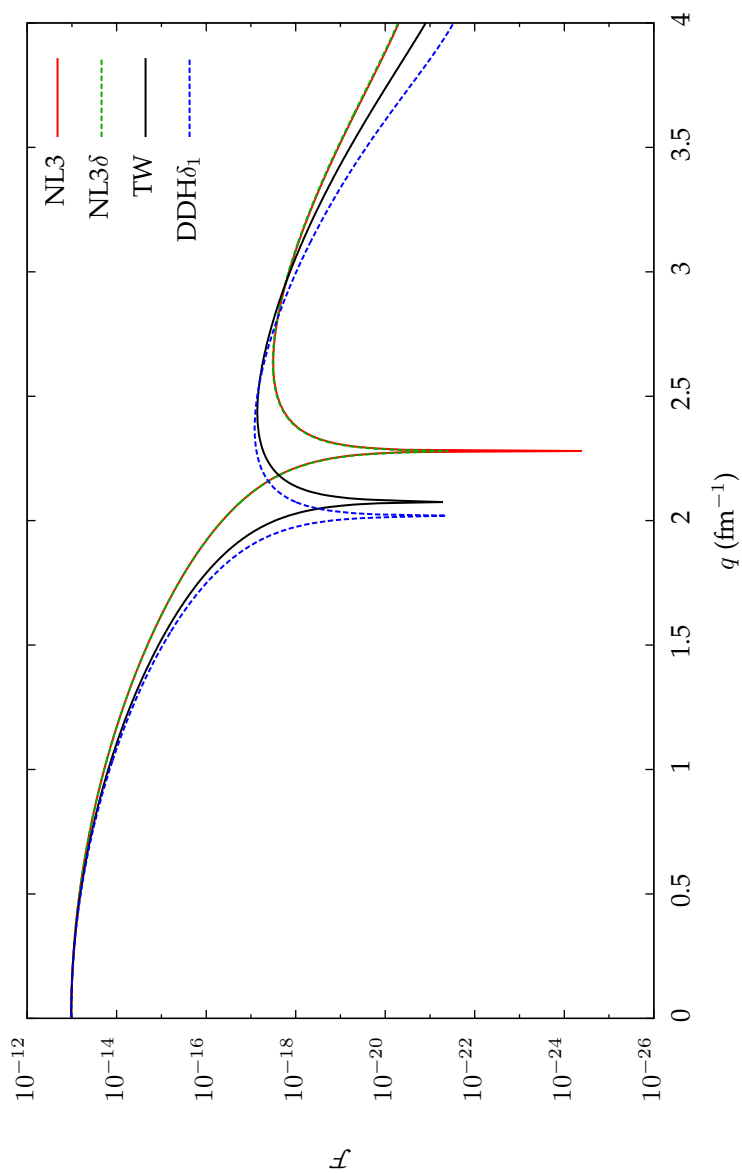


FIGURA 5.33: *Figure of Merit* para  ${}^4\text{He}$ .

FIGURA 5.34: Figure of Merit para  $^{12}\text{C}$ .

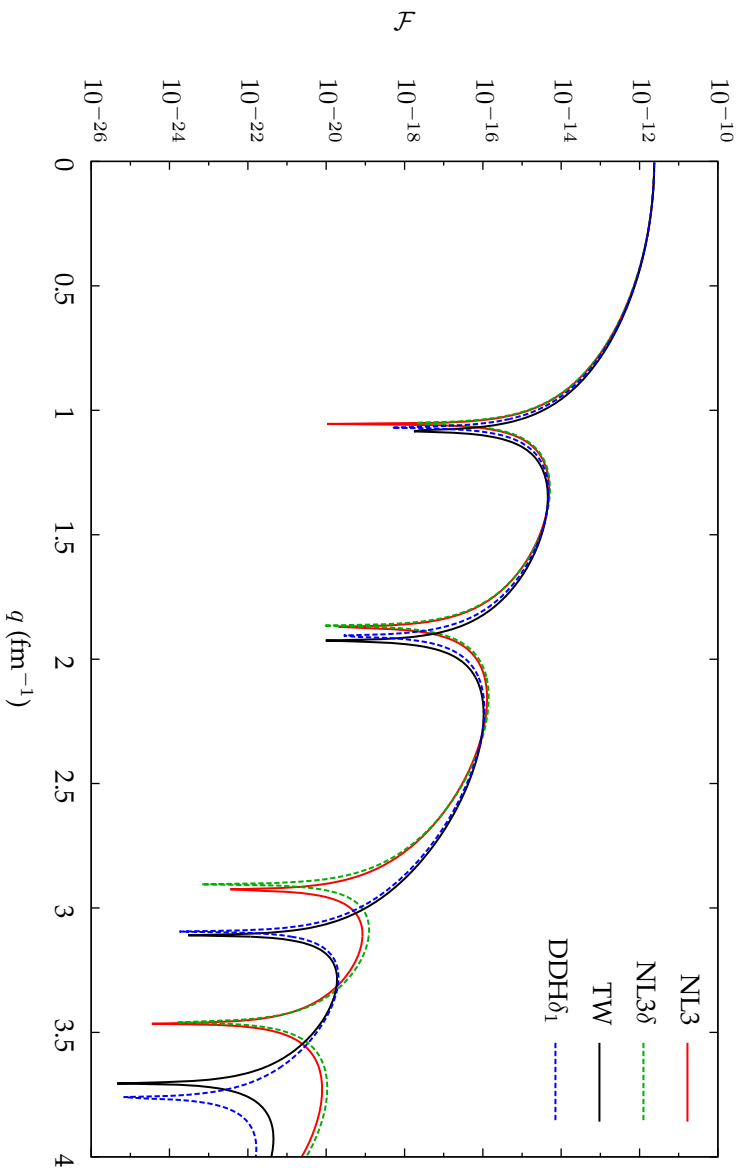
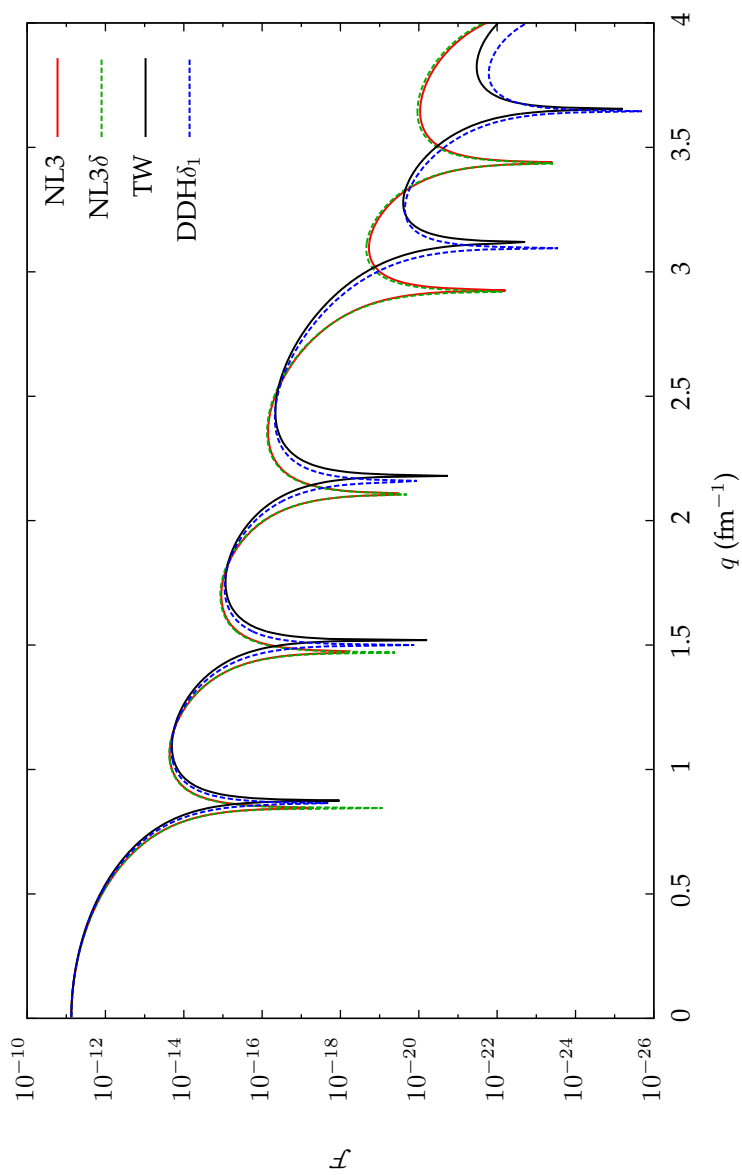


FIGURA 5.35: *Figure of Merit* para  $^{48}\text{Ca}$ .

FIGURA 5.36: Figure of Merit para  $^{90}\text{Zr}$ .

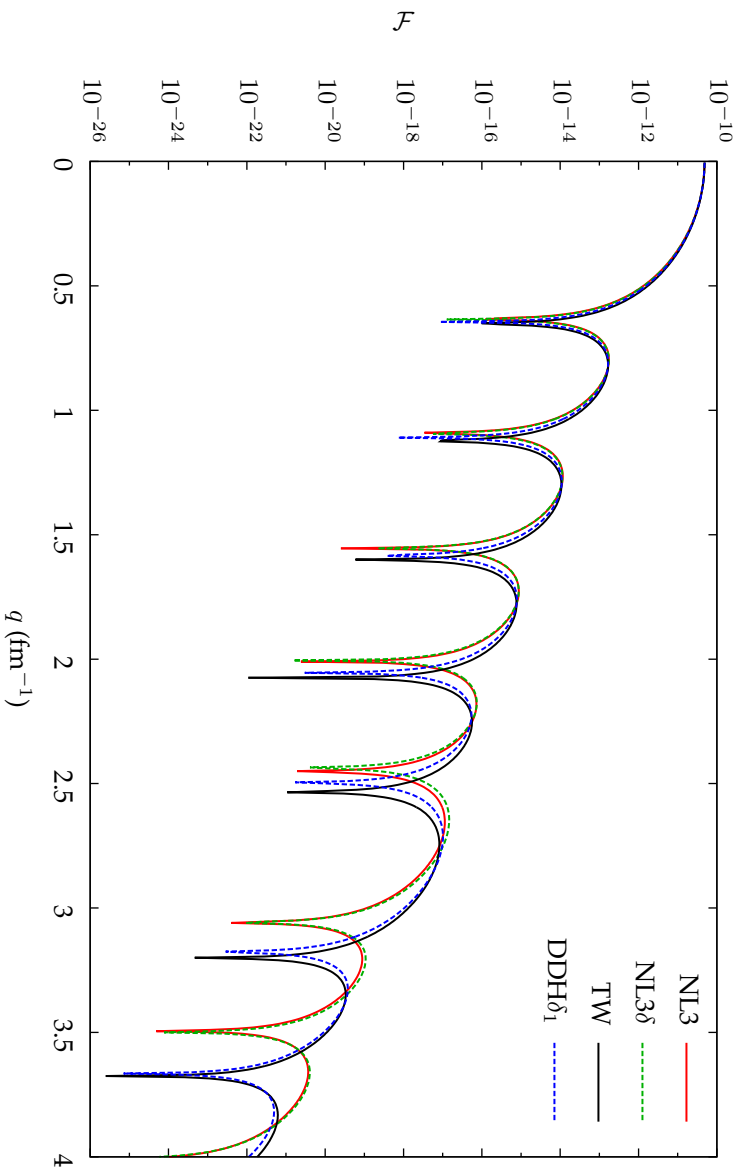


FIGURA 5.37: *Figure of Merit* para  $^{208}\text{Pb}$ .

## 5.7 CONCLUSÕES

A análise da assimetria obtida do espalhamento elástico de elétrons, possibilita a extração de informações únicas a respeito do alvo, uma vez que sua origem se deve à interação fraca. Nesse trabalho apenas um dos aspectos da Física envolvida nesse tipo de processo foi explorado, qual seja, as diferenças entre as distribuições de nêutrons e prótons no núcleo. Uma vez que a distribuição de prótons é conhecida com bastante precisão, a contribuição devida aos nêutrons torna-se de fácil separação (do ponto de vista teórico), possibilitando o estudo de propriedades relacionadas à distribuição destas partículas no núcleo. Por outro lado, em condições ideais, também podemos utilizar medidas da assimetria como fonte de informação acerca de constantes do Modelo Padrão, a qual tem como fator limitante a quebra de simetria de isospin no núcleo.

A fim de estudar as relações entre as propriedades dos alvos nucleares e a assimetria, escolhemos o Modelo de Walecka, o qual tem tido grande sucesso na descrição do núcleo a partir de uma teoria relativística. Uma larga gama de propriedades tanto da matéria nuclear como de núcleos finitos são descritos de maneira satisfatória por parametrizações amplamente utilizadas na literatura, além do fato de que diferentes características da força nuclear podem ser evidenciadas pela introdução dos graus de liberdade mesônicos. A esse respeito, os mésons  $\rho$  e  $\delta$ , isovetoriais, juntamente com a interação de Coulomb, têm um papel relevante no problema aqui estudado. Todas as parametrizações utilizadas aqui, tanto no caso de lagrangeanas com termos não lineares como com acoplamentos dependentes da densidade, conseguem reproduzir igualmente bem as energias e raios de carga para núcleos com camadas (ou sub-camadas) fechadas. No caso do espalhamento de elétrons não-polarizados, as seções de choque experimentais são bem reproduzidas por essas mesmas parametrizações, mas notamos que para altos momentos transferidos (acima do primeiro mínimo de difração), algumas diferenças importantes aparecem, com um acordo melhor no caso de parametrizações dependentes da densidade.

Em todos os nossos cálculos, tanto o tamanho finito do nucleon como correções devidas ao movimento do centro de massa, foram incluídos, ainda que de forma aproximada. A esse respeito, embora apenas a componente temporal das correntes eletromagnética e fraca tenham sido calculadas, devido ao tipo de alvo escolhido, o termo da corrente proporcional ao fator de forma de Dirac  $F_2$ , conhecido como termo anômalo - ou de spin-órbita - foi incluído explicitamente. Con-

cluimos que, com excessão de núcleos leves, como  ${}^4\text{He}$ , e para momentos transferidos acima de  $3 \text{ fm}^{-1}$ , a contribuição para a assimetria é desprezível, mas, como visto no caso do  ${}^{12}\text{C}$ , pode afetar significativamente a posição dos mínimos de difração da mistura de isospin para núcleos mais pesados. Já a correção devida ao movimento do centro de massa, embora introduzido de forma aproximada, é cancelado na obtenção da assimetria. No entanto, se pretendemos usar a assimetria para extrair a distribuição  $\rho_B^n$  a partir do conhecimento prévio da distribuição  $\rho_B^p$ , tal correção não pode ser esquecida e deve até mesmo ser melhor investigada.

Os resultados obtidos para a assimetria para núcleos com  $N = Z$  mostram que os efeitos devidos às diferenças entre as distribuições de prótons e nêutrons tornam-se cada vez maiores para valores respectivamente menores do momento transferido, à medida que o número de nucleons aumenta. O papel da distorção coulombiana para o elétron não pode ser desprezado, mesmo para núcleos com baixo valor de  $Z$  e tendem a diminuir significativamente a assimetria nas proximidades dos mínimos de difração. Finalmente, a dependência de modelo só é grande para momentos transferidos acima do aparecimento do primeiro mínimo de difração e não deve afetar as conclusões se pretendemos medir a assimetria como teste para o Modelo Padrão para valores de  $q$  abaixo desse limite.

Ao incluir o fator de forma de estranheza na descrição da corrente neutra, nossa análise permite concluir que, para um núcleo leve como o  ${}^4\text{He}$ , a contribuição do termo correspondente só se torna aparente na assimetria a partir de  $q \gtrsim 1,5 \text{ fm}^{-1}$ , apresentando a partir desse valor uma sensibilidade importante ao valor do parâmetro de estranheza  $\rho_s$  escolhido. Em média, podemos dizer que a contribuição do termo de estranheza para esse núcleo, é intermediária entre os termos isoscalar e isovetorial e que a dependência de modelo só é importante para valores de  $q$  acima de  $3 \text{ fm}^{-1}$ . A esse respeito, vale notar que, ao contrário de um cálculo anterior usando um modelo não-relativístico (MORENO et al., 2009), os efeitos de mistura de isospin sobre a contribuição de estranheza foram explicitamente considerados. Deve-se lembrar no entanto que tal estudo tem caráter amplamente exploratório, dada a ausência de informações acerca dessa contribuição. Os parâmetros aqui utilizados para o fator de forma de estranheza cobrem a faixa de hipóteses permitidas por resultados experimentais preliminares (MORENO et al., 2009), sendo que as medidas efetuadas apontam para resultados consistentes com conteúdo de estranheza nulo (ANIOL, 2006). Mais recentemente, a análise de medi-



das do fator de forma do nucleon usando pontas de prova eletrofracas e tomando como alvo o núcleo de  $^1\text{H}$ , juntamente com os resultados obtidos a partir da assimetria medida para o  $^4\text{He}$ , permitiram obter um ajuste global cujo valor da constante é  $\rho_s = 0.13 \pm 0.21$  (PATE; SCHAUB, 2010). Infelizmente, efeitos de mistura de isospin não foram discutidos na análise.

A assimetria para núcleos com  $N \neq Z$  está ligada de forma bastante direta à pele de nêutrons, sendo tal relação praticamente linear para valores pequenos de  $q$  na aproximação de ondas planas – conforme visto na Seção 5.5. Todavia, mesmo para núcleos leves, essa aproximação não é adequada. Os efeitos da distorção coulombiana para os elétrons espalhados crescem com o aumento da carga nuclear e são muito importantes para os núcleos com  $N \neq Z$  aqui estudados. Esses efeitos podem ser vistos claramente para o caso do núcleo de  $^{208}\text{Pb}$  (Figura 5.30), onde a curva em DWBA sem mistura de isospin encontra-se significativamente abaixo de sua equivalente em PWBA. Em DWBA a linearidade entre assimetria e a pele não é óbvia, entretanto verificamos numericamente que é possível estabelecer uma relação aproximadamente linear na cinemática em que o experimento está sendo realizado, conforme pode ser visto na Figura 5.31.

Um dos objetivos de nosso trabalho é o de tentar estabelecer uma sistemática para o papel do méson  $\delta$  nos valores para a pele de nêutrons. Uma vez que o potencial gerado por este méson contribui com sinal positivo para os prótons, gerando assim um potencial médio menos atrativo e com sinal oposto para os nêutrons (potencial médio mais atrativo), poderíamos esperar uma diminuição sistemática da pele devida à inclusão desse méson. No entanto, uma vez que ao incluir o  $\delta$  temos que reparametrizar o modelo a fim de continuar a ajustar a energia de ligação e o raio de carga, além de satisfazer os vínculos impostos pelos parâmetros da matéria nuclear, não foi possível estabelecer tal conexão, como podemos verificar por uma análise cuidadosa dos resultados apresentados nas Tabelas 5.13 e 5.14, especialmente no caso das parametrizações NL. No caso das parametrizações DD pudemos observar uma pequena diminuição sistemática. Porém, nas condições cinemáticas do PREX, a inclusão ou não do méson delta, não deverá ser possível de ser discriminada, como pudemos concluir observando a Figura 5.32. A observação da assimetria para um núcleo como o  $^{208}\text{Pb}$  em cinemáticas que correspondam a valores mais altos de  $q$ , certamente poderia estabelecer uma diferenciação mais seletiva entre os diferentes modelos e parametrizações – como podemos ver nas Figuras 5.26 a 5.30 – e assim permitir, em princípio, o mapeamento

da distribuição de nêutrons, da mesma forma que foi possível mapear a distribuição de carga usando o espalhamento elástico convencional. No entanto, os resultados para a *Figure of Merit* mostrados na subseção anterior, deixam claro que existe uma grande limitação experimental para medidas a altos valores de  $q$ , uma vez que trata-se de obter experimentalmente uma pequena diferença entre duas quantidades que são, por si só, extremamente pequenas.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABRAHAMYAN, S. et al. Measurement of the neutron radius of  $^{208}\text{Pb}$  through parity violation in electron scattering. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 108, p. 112502, Mar 2012.

ACHA, A. e. Precision measurements of the nucleon strange form factors at  $q^2 \sim 0.1 \text{ GeV}^2$ . *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 98, n. 3, p. 032301, Jan 2007.

ANGELI, I. *Table of Nuclear Root Mean Square Charge Radii, International Nuclear Data Committee*. 1999. <http://www-nds.iaea.org/reports-new/indc-reports/indc-hun/indc-hun-0033.pdf>.

ANIOL, K. A. e. Parity-violating electron scattering from  $^4\text{He}$  and the strange electric form factor of the nucleon. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 96, n. 2, p. 022003, Jan 2006.

AUDI, G.; WAPSTRA, A.; THIBAULT, C. The ame2003 atomic mass evaluation: (ii). tables, graphs and references. *Nuclear Physics A*, v. 729, n. 1, p. 337 – 676, 2003. ISSN 0375-9474.

AVANCINI, S. S. et al. Nuclear “pasta” phase within density dependent hadronic models. *Phys. Rev. C*, American Physical Society, v. 79, p. 035804, Mar 2009.

BELLICARD, J. B. et al. Elastic cross sections for  $e^- + ^{48}\text{Ca}$  at 757.5 mev. *Phys. Rev. C*, American Physical Society, v. 21, p. 1652–1652, Apr 1980.

BJORKEN, J. D.; DRELL, S. D. *Relativistic Quantum Mechanics*. [S.l.]: McGraw-Hill, 1964.

CHENG, D. C.; O’NEILL, G. K. *Elementary Particle Physics*. [S.l.]: Addison-Wesley, 1979.

CHUNG, K. C. *Introdução à Física Nuclear*. [S.l.]: EdUERJ, 2001.

CRANNELL, H. Elastic and inelastic electron scattering from  $^{12}\text{C}$  and  $^{16}\text{O}$ . *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 148, p. 1107–1118, Aug 1966.

DONNELLY, T. W.; DUBACH, J.; SICK, I. Isospin dependences in parity-violating electron scattering. *Nuclear Physics A*, v. 503, n. 3-4, p. 589 – 631, 1989. ISSN 0375-9474.

DONNELLY, T. W.; PECCEI, R. D. Neutral current effects in nuclei. *Physics Reports*, v. 50, n. 1, p. 1 – 85, 1979. ISSN 0370-1573.

FROIS, B. et al. High-momentum-transfer electron scattering from  $^{208}\text{Pb}$ . *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 38, p. 152–155, Jan 1977.

FURNSTAHL, R. Neutron radii in mean-field models. *Nuclear Physics A*, v. 706, n. 1-2, p. 85 – 110, 2002. ISSN 0375-9474.

GALSTER, S. et al. Elastic electron-deuteron scattering and the electric neutron form factor at four-momentum transfers  $5 \text{ fm}^{-2} < q^2 < 14 \text{ fm}^{-2}$ . *Nuclear Physics B*, v. 32, n. 1, p. 221 – 237, 1971. ISSN 0550-3213.

GAMBHIR, Y. K.; RING, P.; THIMET, A. Relativistic mean field theory for finite nuclei. *Annals of Physics*, v. 198, n. 1, p. 132 – 179, 1990. ISSN 0003-4916.

GLENDENNING, N. K. *Compact Stars, 2nd Edition*. [S.l.]: Springer, 2000.

GREINER, W.; MÜLLER, B. *Gauge Theory of Weak Interaction*. [S.l.]: Springer, 1996.

GRIFFITHS, D. *Introduction to Elementary Particles*. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc, 1987.

HOROWITZ, C. J. Neutron rich matter, neutron stars, and their crusts. *arXiv:1008.0402v1 [astro-ph.SR]*, 2010.

LALAZISSIS, G. A.; KÖNIG, J.; RING, P. New parametrization for the lagrangian density of relativistic mean field theory. *Phys. Rev. C*, American Physical Society, v. 55, n. 1, p. 540–543, Jan 1997.

LIPKIN, H. J. Center-of-mass motion in the nuclear shell model. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 110, p. 1395–1397, Jun 1958.

LIU, B. et al. Asymmetric nuclear matter: The role of the isovector scalar channel. *Phys. Rev. C*, American Physical Society, v. 65, n. 4, p. 045201, Mar 2002.

MORENO, O. et al. Nuclear isospin mixing and elastic parity-violating electron scattering. *Nuclear Physics A*, v. 828, n. 3-4, p. 306 – 332, 2009. ISSN 0375-9474.

MUSOLF, M. J. et al. *Intermediate energy semileptonic probes of the hadronic neutral current*. [S.l.], 1993.

NIKŠIĆ, T. et al. Relativistic hartree-bogoliubov model with density-dependent meson-nucleon couplings. *Phys. Rev. C*, American Physical Society, v. 66, n. 2, p. 024306, Aug 2002.

PATE, S. F.; SCHAUB, J. Strange quark contribution to the nucleon spin from electroweak elastic scattering data. *arXiv:1012.2991v1 [hep-ex]*, 2010.

PREWITT, J. F.; WRIGHT, L. E. Elastic electron scattering and the nuclear magnetization distribution. *Phys. Rev. C*, American Physical Society, v. 9, n. 5, p. 2033–2045, Mar 1974.

Q-WEAK: A Precision Test of the Standard Model and Determination of the Weak Charges of the Quarks through Parity-Violating Electron Scattering. 2007. <http://www.jlab.org/qweak/>.

ROCA-MAZZA, X. et al. Neutron skin of  $^{208}\text{Pb}$ , nuclear symmetry energy, and the parity radius experiment. *arXiv:1103.1762v1 [nucl-th]*, Mar 2011.

SCHNEIDER, A. da S. *Uma Aproximação Relativística para as Densidades de Corrente de Transição Nuclear no Espalhamento Quasielástico de Elétrons por Núcleos*. Tese (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC, 2006.

SEROT, B. D.; WALECKA, J. D. *The Relativistic Nuclear Many-Body Problem*. [S.l.]: Plenum, Nova Iorque, 1986. (Advances in Nuclear Physics, v. 16).

SOUDER, P. A. et al. Measurement of parity violation in the elastic scattering of polarized electrons from  $^{12}\text{C}$ . *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 65, n. 6, p. 694–697, Aug 1990.

SOUDER, P. A. e. *PREX II: Precision Parity-Violating Measurement of the Neutron Skin of Lead, Proposal to JLAB PAC 38*. 2011.  
<http://hallaweb.jlab.org/parity/prex>.

TYPEL, S.; WOLTER, H. H. Relativistic mean field calculations with density-dependent meson-nucleon coupling. *Nuclear Physics A*, v. 656, n. 3-4, p. 331 – 364, 1999. ISSN 0375-9474.

ÜBERALL, H. *Electron Scattering From Complex Nuclei, Part A*. [S.l.]: Academic Press, 1971.

WALECKA, J. D. *Theoretical Nuclear and Subnuclear Physics*. [S.l.]: Oxford University Press, 1995.

## APÊNDICE A — Espalhamento na Aproximação de Ondas Planas

### A.1 SEÇÃO DE CHOQUE

A seção de choque para os elétrons espalhados pode ser calculada, usando teoria de perturbação em primeira ordem, através de

$$d\sigma = \overline{\sum_{i,f}} \frac{w_{f,i}}{F_{inc}} \quad (\text{A.1})$$

onde  $\overline{\sum_{i,f}}$  representa a soma sobre os estados finais e média sobre os estados iniciais do sistema. O termo  $w_{f,i}$  é dado pela regra de ouro de Fermi:

$$w_{f,i} = 2\pi\rho |\langle f | H_{int} | i \rangle|^2, \quad (\text{A.2})$$

sendo  $\rho$  a densidade de estados finais.

O fluxo de elétrons incidente  $F_{inc}$  é dado por

$$F_{inc} = \frac{v_e}{V_n}. \quad (\text{A.3})$$

onde  $v_e$  é a velocidade do elétron incidente e  $V_n$  é um volume arbitrário contendo o feixe incidente. A velocidade pode ser escrita em termos da energia e do momento incidentes através de

$$v_e = \frac{|p|}{\epsilon}. \quad (\text{A.4})$$

Assim,

$$F_{inc} = \frac{p}{\epsilon} \frac{1}{V}. \quad (\text{A.5})$$

Dessa forma, temos para a seção de choque

$$d\sigma = 2\pi \frac{p}{\epsilon} \frac{\rho}{V} \overline{\sum_{i,f}} |\langle f | H_{int} | i \rangle|^2. \quad (\text{A.6})$$

### A.1.1 Densidade de estados para uma onda plana

Para o cálculo da densidade de estados  $\rho$ , vamos considerar uma região limitada do espaço sem potencial (um cubo de aresta  $a$  e volume  $V$ ). Como não há potencial dentro do cubo, a função de onda é uma onda plana. Vamos considerar que a função de onda vai a zero nos limites do cubo (na prática, consideramos o potencial externo como infinito). Assim, como a função de onda é (em uma dimensão) da forma

$$\psi(x) = e^{ikx}, \quad (\text{A.7})$$

dadas as condições de contorno

$$\psi(0) = \psi(a) = 0, \quad (\text{A.8})$$

temos

$$k = \frac{2\pi}{a}n; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A.9})$$

Em três dimensões,

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (\text{A.10})$$

e

$$k_i = \frac{2\pi}{a}n_i; \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{e} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A.11})$$

De agora em diante, devido à nossa escolha para os valores de  $\hbar$  e  $c$ , usaremos a notação  $\mathbf{p}$  ao invés de  $\mathbf{k}$ . Do resultado acima, temos que o momento mínimo em uma dada direção é  $p_i = 2\pi/a$ . Dessa forma, no espaço de fase dos momentos, o menor volume que contém um estado é  $V_{min} = (2\pi/a)^3$ . Em um certo volume  $dV$ , haverá, portanto, um número de estados  $dN$  dado por

$$dN = \frac{dV}{V_{min}}. \quad (\text{A.12})$$

O diferencial de volume pode ser escrito em função do módulo do momento através de

$$dV = p^2 dp d\Omega, \quad (\text{A.13})$$

que nada mais é do que o volume de um diferencial de casca esférica



de espessura  $dp$ . O número de estados contidos no volume  $dV$  é então

$$dN = \frac{p^2}{(2\pi/a)^3} dp d\Omega \quad (\text{A.14})$$

$$= \frac{a^3}{(2\pi)^3} p^2 dp d\Omega \quad (\text{A.15})$$

$$\equiv \rho p^2 dp d\Omega, \quad (\text{A.16})$$

onde

$$\rho = \frac{a^3}{(2\pi)^3} \equiv \frac{V}{(2\pi)^3} \quad (\text{A.17})$$

pode ser interpretada como uma densidade de estados por unidade de momento e  $dN$  como o número de estados com módulo do momento entre  $p$  e  $p + dp$ . A função de onda associada a essa densidade de estados, normalizada no volume  $V$  será dada por

$$\psi_e = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} e^{-i\epsilon t} \mu(\mathbf{p}) \quad (\text{A.18a})$$

$$\bar{\psi}_e = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} e^{i\epsilon t} \bar{\mu}(\mathbf{p}) \quad (\text{A.18b})$$

onde  $\mu(\mathbf{p})$  representa o spinor do elétron com momento linear  $\mathbf{p}$ .

## A.2 CÁLCULO DO VALOR ESPERADO DA HAMILTONIANA DE INTERAÇÃO

A hamiltoniana de interação  $H_{int}$  é dada a partir de (3.4) por:

$$H_{int} = -\alpha\gamma_\mu \hat{A}^\mu - \gamma_\mu (a + b\gamma^5) \hat{W}^\mu, \quad (\text{A.19})$$

portanto:

$$\langle f | H_{int} | i \rangle = \langle f | -\alpha\gamma_\mu \hat{A}^\mu - \gamma_\mu (a + b\gamma^5) \hat{W}^\mu | i \rangle \quad (\text{A.20})$$

$$= -\alpha \langle f | \gamma_\mu \hat{A}^\mu | i \rangle - \langle f | \gamma_\mu (a + b\gamma^5) \hat{W}^\mu | i \rangle. \quad (\text{A.21})$$

ou

$$\langle f | H_{int} | i \rangle = -\alpha \langle em \rangle - \langle W \rangle, \quad (\text{A.22})$$

onde

$$\langle em \rangle = \langle f | \gamma_\mu \hat{A}^\mu | i \rangle \quad (\text{A.23a})$$

e

$$\langle W \rangle = \langle f | \gamma_\mu (a + b\gamma^5) \hat{W}^\mu | i \rangle. \quad (\text{A.23b})$$

Vamos calcular esses dois termos nas seções seguintes.

### A.2.1 Parte eletromagnética

Podemos escrever o termo eletromagnético (A.23a) na forma integral

$$\langle em \rangle = \langle f | \gamma_\mu \hat{A}^\mu | i \rangle \quad (\text{A.24})$$

$$= \iint \bar{\psi}_e \gamma_\mu A^\mu \psi_e \, d\mathbf{r} \, dt, \quad (\text{A.25})$$

onde a função de onda do elétron é dada por (A.18). Substituindo a expressão para a função de onda, obtemos

$$\langle em \rangle = \frac{1}{V} \iint \bar{\mu}(\mathbf{p}') \gamma_\mu A^\mu(\mathbf{p}) e^{-i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}} e^{i(\epsilon' - \epsilon)t} \, d\mathbf{r} \, dt \quad (\text{A.26})$$

$$= \frac{1}{V} \bar{\mu}(\mathbf{p}') \gamma_\mu \mu(\mathbf{p}) \iint A^\mu e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} e^{iq_0 t} \, d\mathbf{r} \, dt. \quad (\text{A.27})$$

Tomando a equação (3.6) e multiplicando ambos os membros por

$$\frac{1}{(2\pi)^2} e^{iq^\nu x_\nu} = \frac{1}{(2\pi)^2} e^{iq_0 t - i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \quad (\text{A.28})$$

e integrando em  $\mathbf{r}$  e  $t$ , obtemos:

$$\iint \partial_\mu \partial^\mu \frac{A^\nu(t, \mathbf{r})}{(2\pi)^2} e^{iq_0 t - i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \, d\mathbf{r} \, dt = \frac{(-4\pi)}{(2\pi)^2} \iint J^\nu(t, \mathbf{r}) e^{iq_0 t - i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \, d\mathbf{r} \, dt. \quad (\text{A.29})$$

A integral à direita é simplesmente a transformada de Fourier da corrente e podemos escrevê-la como:

$$\bar{J}^\nu(q_0, \mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint J^\nu(t, \mathbf{r}) e^{iq_0 t - i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \, d\mathbf{r} \, dt. \quad (\text{A.30})$$

Podemos então escrever a equação (A.29) usando

$$\partial^\mu \partial_\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \quad (\text{A.31})$$

como

$$\left[ \frac{1}{(2\pi)^2} \iint \frac{\partial^2}{\partial t^2} A^\nu(t, \mathbf{r}) e^{iq_0 t - i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} dt - \frac{1}{(2\pi)^2} \iint \nabla^2 A^\nu(t, \mathbf{r}) e^{iq_0 t - i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} dt \right] = -4\pi J^\nu(q_0, \mathbf{q}). \quad (\text{A.32})$$

Fazendo as integrais por partes obtemos

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \left[ -q_0^2 \iint A^\nu(t, \mathbf{r}) e^{iq_0 t - i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} dt + q^2 \iint A^\nu(t, \mathbf{r}) e^{iq_0 t - i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} dt \right] = -4\pi J^\nu(q_0, \mathbf{q}), \quad (\text{A.33})$$

o que resulta em

$$\iint A^\nu(t, \mathbf{r}) e^{iq_0 t - i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} dt = -\frac{4\pi(2\pi)^2}{(q^2 - q_0^2)} J^\nu(q_0, \mathbf{q}). \quad (\text{A.34})$$

Substituindo o resultado acima na expressão para  $\langle em \rangle$ , obtemos

$$\langle em \rangle = -\frac{4\pi(2\pi)^2}{V} \bar{\mu}(\mathbf{p}') \gamma_\mu \mu(\mathbf{p}) \frac{J^\nu(q_0, \mathbf{q})}{(q^2 - q_0^2)}. \quad (\text{A.35})$$

## A.2.2 Parte fraca

Resta ainda determinar a expressão para a parte fraca (A.23b), que é dada na forma integral por:

$$\langle W \rangle = \langle f | \gamma_\mu (a + b\gamma^5) \hat{W}^\mu | i \rangle \quad (\text{A.36})$$

$$= \iint \bar{\psi}_e \gamma_\mu (a + b\gamma^5) W^\mu(t, \mathbf{r}) \psi_e d\mathbf{r} dt. \quad (\text{A.37})$$

Substituindo a função de onda do elétron (A.18), obtemos

$$\langle W \rangle = \frac{1}{V} \bar{\mu}(\mathbf{p}') \gamma_\mu (a + b\gamma^5) \mu(\mathbf{p}) \iint W^\mu(t, \mathbf{r}) e^{iq_0 t - i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} dt. \quad (\text{A.38})$$

Usando a expressão (3.7) para o potencial  $W^\mu$ , podemos então escre-

ver

$$\langle W \rangle = \frac{1}{V} \bar{\mu}(\mathbf{p}') \gamma_{\mu}(a + b\gamma^5) \mu(\mathbf{p}) \iint e^{-q_0 t} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \left( \frac{-G}{\sqrt{2}} \mathfrak{J}^{\mu}(\mathbf{r}) \right) d\mathbf{r} dt \quad (\text{A.39})$$

$$= -\frac{\sqrt{2}G}{2V} \bar{\mu}(\mathbf{p}') \gamma_{\mu}(a + b\gamma^5) \mu(\mathbf{p}) \iint \mathfrak{J}^{\mu}(t, \mathbf{r}) e^{iq_0 t - i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} dt. \quad (\text{A.40})$$

Assim como no caso para a força eletromagnética, a integral na expressão acima pode ser escrita como a transformada de Fourier da corrente. Obtemos então

$$\langle W \rangle = -(2\pi)^2 \frac{\sqrt{2}G}{2V} \bar{\mu}(\mathbf{p}') \gamma_{\mu}(a + b\gamma^5) \mu(\mathbf{p}) \mathfrak{J}^{\mu}(q_0, \mathbf{q}), \quad (\text{A.41})$$

onde  $J^{\mu}(q_0, \mathbf{q})$  e  $\mathfrak{J}^{\mu}(q_0, \mathbf{q})$  são correntes de transição do alvo no espaço  $\mathbf{q}$ .

### A.3 SOMA SOBRE OS ESTADOS

Precisamos calcular a soma

$$\sum_{i,f} |\langle f | H_{int} | i \rangle|^2 \quad (\text{A.42})$$

onde o termo  $\langle f | H_{int} | i \rangle$  é dado por  $\langle f | H_{int} | i \rangle = -\alpha \langle em \rangle - \langle W \rangle$ . Substituindo os resultados (A.35) e (A.41) para  $\langle em \rangle$  e  $\langle W \rangle$ , obtemos

$$\begin{aligned} \langle f | H_{int} | i \rangle &= \frac{4\pi(2\pi)^2 \alpha}{V} \bar{\mu}(\mathbf{p}') \gamma_{\mu} \mu(\mathbf{p}) \frac{J^{\mu}(q_0, \mathbf{q})}{(q^2 - q_0^2)} \\ &+ (2\pi)^2 \frac{\sqrt{2}G}{2V} \bar{\mu}(\mathbf{p}') \gamma_{\mu}(a + b\gamma^5) \mu(\mathbf{p}) \mathfrak{J}^{\mu}(q_0, \mathbf{q}). \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

Assim, o módulo ao quadrado será:

$$\begin{aligned}
 |\langle f|H_{int}|i\rangle|^2 &= \frac{16\pi^2(2\pi)^4}{V^2} \frac{\alpha^2}{(q^2 - q_0^2)^2} |\bar{\mu}(\mathbf{p}')\gamma_\mu J^\mu(q_0, \mathbf{q})\mu(\mathbf{p})|^2 \\
 &+ (2\pi)^4 \frac{G^2}{2V^2} |\bar{\mu}(\mathbf{p}')\gamma_\mu(a + b\gamma^5)\mathfrak{J}^\mu(q_0, \mathbf{q})\mu(\mathbf{p})|^2 \\
 &+ \frac{4\pi(2\pi)^4\sqrt{2}G\alpha}{V^2(q^2 - q_0^2)} \Re\{[\bar{\mu}(\mathbf{p}')\gamma_\mu J^\mu(q_0, \mathbf{q})\mu(\mathbf{p})] \\
 &\quad \times [\bar{\mu}(\mathbf{p}')\gamma_\mu(a + b\gamma^5)\mathfrak{J}^\mu(q_0, \mathbf{q})\mu(\mathbf{p})]^*\}.
 \end{aligned} \tag{A.44}$$

Devido ao fato de que a constante  $G$  é muito menor que a constante de estrutura fina  $\alpha$ , podemos desprezar o termo proporcional a  $G^2$  e retemos, em primeira ordem, o termo proporcional a  $G$ . Para calcularmos a assimetria, é necessário introduzir o operador de projeção de helicidade:

$$h_\pm = (1 + h\gamma^5); \quad h = \pm 1. \tag{A.45}$$

Este operador deve atuar somente nos elétrons incidentes, o que corresponde a polarizá-los (GREINER; MÜLLER, 1996). Podemos então escrever a soma sobre os estados como

$$\overline{\sum}_{i,f} |\langle f|H_{int}|i\rangle|^2 = S_{em} + S_w, \tag{A.46}$$

onde

$$S_{em} \equiv \overline{\sum}_{i,f} |\bar{\mu}(\mathbf{p}')\gamma_\mu J^\mu(q_0, \mathbf{q})(1 + h\gamma^5)\mu(\mathbf{p})|^2 \tag{A.47}$$

e

$$\begin{aligned}
 S_w \equiv \overline{\sum}_{i,f} &[\bar{\mu}(\mathbf{p}')\gamma_\mu J^\mu(q_0, \mathbf{q})(1 + h\gamma^5)\mu(\mathbf{p})] \\
 &\times [\bar{\mu}(\mathbf{p}')\gamma_\mu(a + b\gamma^5)\mathfrak{J}^\mu(q_0, \mathbf{q})(1 + h\gamma^5)\mu(\mathbf{p})]^*.
 \end{aligned} \tag{A.48}$$

### A.3.1 Cálculo dos termos das contribuições eletromagnética e fraca

Podemos separar as somas nas equações (A.47) e (A.48) em uma parte relativa ao feixe de elétrons espalhado e outra relativa ao núcleo.

Dessa forma, podemos escrever

$$S_{em} = \ell_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} \quad (\text{A.49a})$$

$$S_W = \tilde{\ell}_{\mu\nu}\tilde{\omega}^{\mu\nu}, \quad (\text{A.49b})$$

onde

$$\ell^{\mu\nu} = \overline{\sum}_{i,f} |\bar{\mu}(\mathbf{p}')\gamma^\mu(1+h\gamma^5)\mu(\mathbf{p})|^2 \quad (\text{A.50a})$$

$$\tilde{\ell}^{\mu\nu} = \overline{\sum}_{i,f} [\bar{\mu}(\mathbf{p}')\gamma^\nu(1+h\gamma^5)\mu(\mathbf{p})][\bar{\mu}(\mathbf{p}')\gamma^\mu(a+b\gamma_5)(1+h\gamma^5)\mu(\mathbf{p})]^* \quad (\text{A.50b})$$

$$\omega_{\mu\nu} = \overline{\sum}_{i,f} J_\mu(q_0, \mathbf{q})J_\nu^*(q_0, \mathbf{q}) \quad (\text{A.50c})$$

$$\tilde{\omega}_{\mu\nu} = \overline{\sum}_{i,f} \tilde{\mathcal{J}}_\mu(q_0, \mathbf{q})J_\nu^*(q_0, \mathbf{q}). \quad (\text{A.50d})$$

O núcleo tem momento angular total bem definido, porém em um experimento de espalhamento usual, a projeção do momento angular total não é bem definida. Dessa forma, as somas sobre as projeções finais e médias sobre as projeções iniciais para os tensores  $\omega_{\mu\nu}$  e  $\tilde{\omega}_{\mu\nu}$  podem ser escritas como

$$\omega_{\mu\nu} = \frac{1}{2J+1} \sum_{\substack{M \\ M'}} J_\mu(q_0, \mathbf{q})J_\nu^*(q_0, \mathbf{q}) \quad (\text{A.51a})$$

$$\tilde{\omega}_{\mu\nu} = \frac{1}{2J+1} \sum_{\substack{M \\ M'}} \tilde{\mathcal{J}}_\mu(q_0, \mathbf{q})J_\nu^*(q_0, \mathbf{q}). \quad (\text{A.51b})$$

O cálculo dos tensores  $\ell^{\mu\nu}$  e  $\tilde{\ell}^{\mu\nu}$  pode ser realizado usando (GRIFITHS, 1987)

$$\overline{\sum}_{i,f} [\bar{\mu}(a)\Gamma_1\mu(b)][\bar{\mu}(a)\Gamma_2\mu(b)]^* = \text{Tr}[\Gamma_1(\not{p}_b + m_b c)\bar{\Gamma}_2(\not{p}_a + m_a c)] \quad (\text{A.52})$$

e as propriedades para o traço de matrizes  $\gamma$  de Dirac. Aqui  $\not{p} = \gamma_\mu p^\mu$ ,  $\bar{\Gamma} = \gamma^0\Gamma^\dagger\gamma^0$  e as matrizes  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  são produtos de matrizes  $\gamma$ . Obtemos

assim

$$\ell^{\mu\nu} = \{4(1 + h^2)(p^\mu p'^\nu + p^\nu p'^\mu - p^\lambda p'_\lambda g^{\mu\nu}) - 8h(i\epsilon^{\mu\lambda\nu\sigma})p_\lambda p'_\sigma + 4(1 - h^2)m_e^2 g^{\mu\nu}\} \quad (\text{A.53a})$$

$$\tilde{\ell}^{\mu\nu} = \{4(a + h^2 a + 2hb)(p^\mu p'^\nu + p^\nu p'^\mu - p_\lambda p'^\lambda g^{\mu\nu}) + (4am_e^2 - 4h^2 am_e^2)g^{\mu\nu} - 4(b + h^2 b + 2ha)(i\epsilon^{\mu\lambda\nu\sigma})p_\lambda p'_\sigma\}. \quad (\text{A.53b})$$

Como  $h \pm 1$ , temos que  $h^2 = 1$  e obtemos

$$\ell^{\mu\nu} = \{8(p^\mu p'^\nu + p^\nu p'^\mu - p^\lambda p'_\lambda g^{\mu\nu}) - 8h(i\epsilon^{\mu\lambda\nu\sigma})p_\lambda p'_\sigma\} \quad (\text{A.54a})$$

$$\tilde{\ell}^{\mu\nu} = \{8(a + hb)(p^\mu p'^\nu + p^\nu p'^\mu - p_\lambda p'^\lambda g^{\mu\nu}) - 8(b + ha)(i\epsilon^{\mu\lambda\nu\sigma})p_\lambda p'_\sigma\}. \quad (\text{A.54b})$$

Precisamos ainda calcular as somas implícitas nos índices  $\mu$  e  $\nu$  nas expressões (A.49). Para isso, utilizamos as propriedades das correntes  $J_\mu(q_0, \mathbf{q})$  e  $\tilde{J}_\mu(q_0, \mathbf{q})$  que compõe os tensores hadrônicos  $\omega_{\mu\nu}$  e  $\tilde{\omega}_{\mu\nu}$  e que foram discutidas nas Seções 3.3.3 e 3.3.4.

### A.3.2 Termos do tensor leptônico

Calcularemos agora os termos do tensor leptônico  $\ell^{\mu\nu}$  que correspondem aos termos de  $\omega_{\mu\nu}$  que não são nulos.

#### A.3.2.1 Termo $\ell^{00}$

O termo  $\ell^{00}$  será dado por

$$\ell^{00} = 8(p^0 p'^0 + p^0 p'^0 - p^\lambda p'_\lambda) - 8h(i\epsilon^{0\lambda 0\sigma})p_\lambda p'_\sigma. \quad (\text{A.55})$$

O tensor  $\epsilon^{\mu\lambda\nu\sigma}$ , no entanto, é zero sempre que dois índices se repetirem. Além disso,  $g^{00} = 1$  e podemos escrever a equação acima como

$$\ell^{00} = 8(p^0 p'^0 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}'). \quad (\text{A.56})$$

Desprezando a massa do elétron, temos que

$$|\mathbf{p}| \equiv p = \epsilon \quad (\text{A.57})$$

e, pela definição do quadrivetor  $p^\mu$ , temos que  $p_0 = \epsilon$ . Portanto, temos

que  $p = p_0$  e podemos escrever

$$\ell^{00} = 8pp'(1 + \cos \theta) \quad (\text{A.58})$$

$$= 16pp' \cos^2 \theta / 2. \quad (\text{A.59})$$

### A.3.2.2 Termos $\ell^{03}$ e $\ell^{33}$

Temos que a corrente para o elétron incluindo o operador de projeção de helicidade é dada por

$$j'(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \bar{\mu}(\mathbf{p}') \gamma^\mu (1 + h\gamma^5) \mu(\mathbf{p}), \quad (\text{A.60})$$

o que resulta para o tensor leptônico

$$\begin{aligned} \ell'^{\mu\nu} &= \overline{\sum_{i,f}} |j'_\mu|^2 \\ &= 4(p_\mu p'_\mu + p_\nu p'_\nu - p^\lambda p'_\lambda g_{\mu\nu}) \\ &\quad - 2h(4i\epsilon^{\mu\lambda\nu\sigma}) p^\lambda p'^\sigma + 4(1 - h^2)m_e^2 g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{A.61})$$

Por outro lado, para a corrente sem a inclusão do operador de projeção de helicidade,

$$j_\mu(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \bar{\mu}(\mathbf{p}) \gamma_\mu \mu(\mathbf{p}'), \quad (\text{A.62})$$

temos

$$\ell^{\mu\nu} = \overline{\sum_{i,f}} |j^\mu|^2 \quad (\text{A.63})$$

$$= 4(p_\mu p'_\mu + p_\nu p'_\nu - p^\lambda p'_\lambda g_{\mu\nu}) + 4m_e^2 g_{\mu\nu}. \quad (\text{A.64})$$

A corrente eletromagnética dos elétrons  $j_\mu$  também é conservada, o que resulta em uma relação entre a componente  $j_0$  e  $j_3$  que tem a mesma forma que a Equação (3.36):

$$j_3(q_0, \mathbf{q}) = \frac{q_0}{q} j_0(q_0, \mathbf{q}), \quad (\text{A.65})$$

da qual resultam as propriedades

$$\ell^{03} = \frac{q_0}{q} \ell^{00} \quad (\text{A.66})$$

$$\ell^{33} = \left[ \frac{q_0}{q} \right]^2 \ell^{00}, \quad (\text{A.67})$$

Como desprezamos a massa do elétron, o último termo dos ten-



sores  $\ell^{\mu\nu}$  e  $\ell'^{\mu\nu}$  não contribui. Além disso, o segundo termo deste último, isto é,  $-2h(4i\epsilon^{\mu\lambda\nu\sigma})p^\lambda p'^\sigma$ , assume para as componentes  $\ell'^{03}$  e  $\ell'^{33}$  os seguintes valores

$$\xi^{03} = -8hi(\epsilon^{0\sigma 3\lambda} p_\sigma p'_\lambda) \quad (\text{A.68})$$

$$\xi^{33} = -8hi(\epsilon^{3\sigma 3\lambda} p_\sigma p'_\lambda). \quad (\text{A.69})$$

Este último é nulo devido às propriedades do tensor  $\epsilon^{\mu\sigma\nu\lambda}$ , que é zero se dois índices se repetem, negativo para permutações pares de 0123 e positivo para permutações ímpares. Levando-se em conta estas propriedades, também podemos escrever a soma implícita envolvendo o tensor que aparece no termo  $\xi^{03}$  como

$$\epsilon^{0\sigma 3\lambda} p_\sigma p'_\lambda = p_1 p'_2 - p_2 p'_1. \quad (\text{A.70})$$

Tal expressão pode ser reconhecida como a componente  $z$  do produto vetorial de  $\mathbf{p}$  por  $\mathbf{p}'$ :

$$p_1 p'_2 - p_2 p'_1 = (\mathbf{p} \times \mathbf{p}')_z, \quad (\text{A.71})$$

ou, lembrando que  $\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$

$$p_1 p'_2 - p_2 p'_1 = (\mathbf{p} \times \mathbf{q})_z. \quad (\text{A.72})$$

No entanto, o vetor  $\mathbf{q}$  foi escolhido como sendo na direção  $\hat{z}$ , logo o produto vetorial não pode ter componente nessa direção. Com isso, ambos os tensores têm o mesmo valor e podemos usar as propriedades (A.66) para  $\ell'^{\mu\nu}$ .

### A.3.2.3 Termo $\ell_{11} + \ell_{22}$

Como  $\sum_{mm'} J_1 J_1^* = \sum_{mm'} J_2 J_2^* = \sum_{mm'} J_+ J_+^*$ , podemos escrever

$$\ell^{11} \omega_{11} + \ell^{22} \omega_{22} = (\ell^{11} + \ell^{22}) \omega_{++} \quad (\text{A.73})$$

e calcular a soma dos dois termos do tensor leptônico:

$$\begin{aligned} \ell^{11} + \ell^{22} &= 16[p^1 p'^1 + p^2 p'^2 - (p^0 p_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}') g^{11}] \\ &= 16(p^1 p'^1 + p^2 p'^2 + pp'(1 - \cos \theta)), \end{aligned} \quad (\text{A.74})$$

onde usamos  $g^{11} = -1$  e  $p_0 = p$ .

Podemos, utilizando-se do fato que  $\hat{q} \parallel \hat{z}$ , escrever

$$p^3 = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}}{q} \quad (\text{A.75})$$

e, conseqüentemente

$$p^1 p'^1 + p^2 p'^2 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' - p^3 p'^3 \quad (\text{A.76})$$

$$= \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' - \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}}{q} \frac{\mathbf{p}' \cdot \mathbf{q}}{q}. \quad (\text{A.77})$$

Usando ainda a definição do momento transferido  $\mathbf{q} \equiv \mathbf{p}' - \mathbf{p}$ , temos

$$p^1 p'^1 + p^2 p'^2 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' - \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' - |\mathbf{p}|^2)}{q} \frac{(|\mathbf{p}'|^2 - \mathbf{p}' \cdot \mathbf{p})}{q} \quad (\text{A.78})$$

$$= pp' \cos \theta - \frac{(pp' \cos \theta - |\mathbf{p}'|^2)(|\mathbf{p}|^2 - pp' \cos \theta)}{q^2}. \quad (\text{A.79})$$

Usando o resultado acima e somando e subtraindo  $pp' \cos \theta/q^2$ , podemos escrever a equação (A.74) como<sup>1</sup>

$$\ell^{11} + \ell^{22} = -16 \left[ \frac{pp'(p'^2 + p^2 - 2pp' \cos \theta) \cos \theta}{q^2} - \frac{(pp')^2 - p^2 p'^2 \cos^2 \theta}{q^2} - pp' \right]. \quad (\text{A.80})$$

Lembrando que  $q^2 = p'^2 + p^2 - 2pp' \cos \theta$ ,  $q_0^2 = p^2 + p'^2 - 2pp'$  e usando relações trigonométricas, obtemos

$$\ell^{11} + \ell^{22} = -16pp' \left[ \frac{q_0^2}{q^2} \cos^2 \theta/2 - (1 + \sin^2 \theta/2) \right]. \quad (\text{A.81})$$

Finalmente, usando  $q_\mu^2 = q_0^2 - q^2$  e relações trigonométricas, obtemos

$$\ell^{11} + \ell^{22} = -16pp' \left[ \frac{q_\mu^2}{q^2} \cos^2 \theta/2 - 2 \sin^2 \theta/2 \right]. \quad (\text{A.82})$$

---

<sup>1</sup>Aqui  $p^2$  e  $p'^2$  não representam a segunda componente dos vetores  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{p}'$ , mas sim os módulos ao quadrado desses vetores.

### A.3.2.4 Expressão final para $\ell^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu}$

A soma  $\ell^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu}$  pode ser escrita como

$$\ell^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu} \equiv (\ell^\mu J_\mu)(\ell^\nu J_\nu)^*. \quad (\text{A.83})$$

Podemos reescrever a equação acima como

$$\ell^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu} = (\ell^0 J_0 - \boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{J})(\ell^0 J_0 - \boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{J})^*. \quad (\text{A.84})$$

Efetuando o produto, levando em consideração os termos que são nulos, podemos escrever o produto dos tensores leptônico e hadrônico como

$$\ell^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu} = \ell^{00}\omega_{00} - \ell^{03}\omega_{03} - \ell^{30}\omega_{30} + \ell^{33}\omega_{33} + [\ell^{11} + \ell^{22}]\omega_{++} \quad (\text{A.85})$$

$$\begin{aligned} &= 16 pp' \left[ 1 - 2 \frac{q_0^2}{q^2} + \frac{q_0^4}{q^4} \right] \omega_{00} \cos^2 \theta/2 \\ &\quad - 16 pp' \left[ \frac{q_\mu^2}{2q^2} - \tan^2 \theta/2 \right] \omega_{++} \cos^2 \theta/2 \end{aligned} \quad (\text{A.86})$$

Reagrupando os termos,

$$\ell^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu} = 16 pp' \left[ \left( \frac{q_0^4}{q^4} \right) \omega_{00} - \left( \frac{q_\mu^2}{2q^2} - \tan^2 \theta/2 \right) \omega_{++} \right] \cos^2 \theta/2. \quad (\text{A.87})$$

## A.3.3 Termos do tensor leptônico de interferência

Podemos descartar os elementos  $\tilde{\omega}^{10}$ ,  $\tilde{\omega}^{01}$ ,  $\tilde{\omega}^{13}$ ,  $\tilde{\omega}^{31}$ ,  $\tilde{\omega}^{23}$  e  $\tilde{\omega}^{32}$  com os mesmos argumentos da seção anterior (parte eletromagnética). Além disso, devido às equações (3.58), podemos calcular a soma dos termos  $\tilde{\ell}^{11}$  e  $\tilde{\ell}^{22}$  e a diferença entre  $\tilde{\ell}^{12}$  e  $\tilde{\ell}^{21}$ .

### A.3.3.1 Termos $\tilde{\ell}^{00}$ , $\tilde{\ell}^{03}$ , $\tilde{\ell}^{30}$ e $\tilde{\ell}^{33}$

Exceto pelas constantes  $(a+hb)$  e  $(b+ha)$ ,  $\tilde{\ell}^{\mu\nu}$  tem a mesma forma que  $\ell^{\mu\nu}$ . Teremos, portanto, os mesmos resultados que para o caso

eletromagnético, devidamente multiplicados por essas constantes:

$$\tilde{\ell}^{00} = 16(a + hb)pp' \cos^2 \theta/2 \quad (\text{A.88})$$

$$\tilde{\ell}^{03} = \tilde{\ell}^{30} = \frac{q_0}{q} \tilde{\ell}^{00} \quad (\text{A.89})$$

$$\tilde{\ell}^{33} = \frac{q_0^2}{q^2} \tilde{\ell}^{00}. \quad (\text{A.90})$$

### A.3.3.2 Termos $\tilde{\ell}^{11} + \tilde{\ell}^{22}$ e $\tilde{\ell}^{12} - \tilde{\ell}^{21}$

A soma dos termos  $\tilde{\ell}^{11}$  e  $\tilde{\ell}^{22}$  também é igual ao caso eletromagnético, exceto pelas constantes:

$$\tilde{\ell}^{11} + \tilde{\ell}^{22} = -32pp'(a + hb) \left[ \frac{q_\mu^2}{2q^2} \cos^2 \theta/2 - \sin^2 \theta/2 \right]. \quad (\text{A.91})$$

A diferença entre  $\tilde{\ell}^{12}$  e  $\tilde{\ell}^{21}$  não tem análogo eletromagnético e precisamos calcular os termos envolvidos. Para  $\tilde{\ell}^{12}$  obtemos

$$\tilde{\ell}^{12} = 8\{(a + hb)[p^1 p'^2 + p^2 p'^1] - i(b + ha)[p_0 p'_3 - p_3 p'_0]\} \quad (\text{A.92})$$

e para

$$\tilde{\ell}^{21} = 8\{(a + hb)[p^2 p'^1 + p^1 p'^2] + i(b + ha)[p_0 p'_3 - p_3 p'_0]\}. \quad (\text{A.93})$$

A diferença entre esses dois termos será então

$$\tilde{\ell}^{12} - \tilde{\ell}^{21} = -i 16(b + ha)[p_0 p'_3 - p_3 p'_0] \quad (\text{A.94})$$

Usando a equação (A.75) e  $\mathbf{q} \equiv \mathbf{p}' - \mathbf{p}$ , podemos escrever a equação acima como<sup>2</sup>

$$\tilde{\ell}^{12} - \tilde{\ell}^{21} = i 16 \frac{(b + ha)}{q} [p_0(p'^2 - pp' \cos \theta) - p'_0(pp' \cos \theta - p^2)], \quad (\text{A.95})$$

que após algumas manipulações algébricas e trigonométricas pode ser escrita como

$$\tilde{\ell}^{12} - \tilde{\ell}^{21} = -i 32 \frac{(b + ha)}{q} pp'(p' + p) \sin^2 \theta/2. \quad (\text{A.96})$$

---

<sup>2</sup>Novamente  $p^2$  e  $p'^2$  representam o módulo dos vetores  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{p}'$  ao quadrado, respectivamente, ao invés da segunda componente desses vetores.

Podemos usar as relações

$$q^2 = p^2 + p'^2 - 2pp' \cos \theta \quad (\text{A.97})$$

$$(p' + p)^2 = p'^2 + p^2 + 2pp' \quad (\text{A.98})$$

e relações trigonométricas para escrever

$$\tilde{\ell}^{12} - \tilde{\ell}^{21} = -i 32 \frac{(b + ha)}{q} pp' \sqrt{q^2 + 4pp' \cos^2 \theta/2} \sin^2 \theta/2. \quad (\text{A.99})$$

Substituindo

$$q_\mu^2 = q_0^2 - q^2 \quad (\text{A.100})$$

$$= -4kk' \sin^2 \theta/2 \quad (\text{A.101})$$

e usando, novamente, relações trigonométricas, obtemos finalmente

$$\tilde{\ell}^{12} - \tilde{\ell}^{21} = -i 32(b + ha)pp' \left[ \tan \theta/2 \sqrt{-\frac{q_\mu^2}{q^2} + \tan^2 \theta/2} \right] \cos^2 \theta/2. \quad (\text{A.102})$$

### A.3.3.3 Expressão final para $\tilde{\ell}^{\mu\nu} \tilde{\omega}_{\mu\nu}$

A expressão final para a soma dos termos de  $\tilde{\ell}^{\mu\nu} \tilde{\omega}_{\mu\nu}$  será:

$$\begin{aligned} \tilde{\ell}_{\mu\nu} \tilde{\omega}^{\mu\nu} = & 16pp' \left\{ (a + hb) \left( \frac{q_\mu^4}{q^4} \right) \tilde{\omega}_{00}^v \right. \\ & + (a + hb) \left[ \left( 1 - \frac{q_0}{q} \right) \tilde{\omega}_{00}^a + \left( -\frac{q_0}{q} + \frac{q_0^3}{q^3} \right) \tilde{\omega}_{03}^a \right] \\ & - (a + hb) \left[ \frac{q_\mu^2}{2q^2} - \tan^2 \theta/2 \right] (\tilde{\omega}_{++}^v + \tilde{\omega}_{--}^v) \\ & \left. + (b + ha) \left[ \tan \theta/2 \sqrt{-\frac{q_\mu^2}{q^2} + \tan^2 \theta/2} \right] (\tilde{\omega}_{++}^a - \tilde{\omega}_{--}^a) \right\} \\ & \times \cos^2 \theta/2, \end{aligned} \quad (\text{A.103})$$

onde

$$\tilde{\omega}_{00}^v = \frac{1}{2J+1} \sum_{\frac{m}{m'}} J_0 \mathfrak{J}_0^{v*} \quad \tilde{\omega}_{03}^a = \frac{1}{2J+1} \sum_{\frac{m}{m'}} J_0 \mathfrak{J}_3^{a*} \quad (\text{A.104a})$$

$$\tilde{\omega}_{++}^v = \frac{1}{2J+1} \sum_{\frac{m}{m'}} J_+ \mathfrak{J}_{+,v}^* \quad \tilde{\omega}_{++}^a = \frac{1}{2J+1} \sum_{\frac{m}{m'}} J_+ \mathfrak{J}_+^{a*} \quad (\text{A.104b})$$

$$\tilde{\omega}_{--}^v = \frac{1}{2J+1} \sum_{\frac{m}{m'}} J_- \mathfrak{J}_-^{v*} \quad \tilde{\omega}_{--}^a = \frac{1}{2J+1} \sum_{\frac{m}{m'}} J_- \mathfrak{J}_-^{a*} \quad (\text{A.104c})$$

#### A.4 SEÇÃO DE CHOQUE EM FUNÇÃO DAS CORRENTES

Substituindo o resultado (A.44) na expressão (A.6) para a seção de choque, temos

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{2\pi p \rho / \epsilon V} = \sum_{i,f} \left\{ \frac{16\pi^2 (2\pi)^4}{V^2} \frac{\alpha^2}{(q^2 - q_0^2)^2} |\bar{\mu}(\mathbf{p}') \gamma_\mu J^\mu \mu(\mathbf{p})|^2 \right. \\ \left. + \frac{4\sqrt{2} G \alpha \pi (2\pi)^4}{V^2 (q^2 - q_0^2)} \Re \left[ \bar{\mu}(\mathbf{p}') \gamma_\mu J^\mu \mu(\mathbf{p}) \right] \right. \\ \left. \times [\bar{\mu}(\mathbf{p}') \gamma_\mu (a + b\gamma^5) \mathfrak{J}^\mu \mu(\mathbf{p})]^* \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.105})$$

onde já descartamos o termo proporcional a  $G^2$ . A soma atua nos termos que envolvem os spinores  $\mu(\mathbf{p})$  dos elétrons, resultando em  $S_{em}$  e  $S_W$ . Usando os resultados (A.87) e (A.103) para os produtos tensoriais

$S_{em} = \ell^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu}$  e  $S_W = \tilde{\ell}^{\mu\nu} \tilde{\omega}_{\mu\nu}$  obtemos

$$\begin{aligned}
 d\sigma = 2\pi \frac{p}{\epsilon} \frac{\rho}{V} & \left\{ \frac{16\pi^2 (2\pi)^4}{V^2} \frac{\alpha^2}{(q^2 - q_0^2)^2} 16pp' \right. \\
 & \times \left[ \left( \frac{q_\mu^4}{q^4} \right) \omega_{00} - \left( \frac{q_\mu^2}{q^2} - 2 \tan^2 \theta/2 \right) \omega_{++} \right] \\
 & + \frac{4\pi (2\pi)^4}{V^2} \frac{\sqrt{2} G\alpha}{(q^2 - q_0^2)} 16pp' \Re \left[ (a + hb) \left( \frac{q_\mu^4}{q^4} \right) \tilde{\omega}_{00}^v \right. \\
 & + \left[ \left( 1 - \frac{q_0}{q} \right) \tilde{\omega}_{00}^a + \left( -\frac{q_0}{q} + \frac{q_0^3}{q^3} \right) \tilde{\omega}_{03}^a \right] \\
 & - (a + hb) \left( \frac{q_\mu^2}{2q^2} - \tan^2 \theta/2 \right) [\tilde{\omega}_{++}^v + \tilde{\omega}_{--}^v] \\
 & + (b + ha) \left( \sqrt{-\frac{q_\mu^2}{q^2} + \tan^2 \theta/2} \tan \theta/2 \right) \\
 & \left. \times [\tilde{\omega}_{++}^a - \tilde{\omega}_{--}^a] \right\} \times \cos^2 \theta/2.
 \end{aligned} \tag{A.106}$$

## A.5 ASSIMETRIA

A assimetria é definida como

$$\mathcal{A} = \frac{d\sigma_+/d\Omega - d\sigma_-/d\Omega}{d\sigma_+/d\Omega + d\sigma_-/d\Omega}, \tag{A.107}$$

onde o sinal indica a helicidade do feixe de elétrons espalhado. Substituindo a expressão (A.6) para a seção de choque, temos

$$\mathcal{A}^{\text{PWBA}} = \frac{2\pi(p\rho/\epsilon V) \left[ \overline{\sum}_{i,f} |\langle f|H_{int}|i \rangle|^2 \Big|_+ - \overline{\sum}_{i,f} |\langle f|H_{int}|i \rangle|^2 \Big|_- \right]}{2\pi(p\rho/\epsilon V) \left[ \overline{\sum}_{i,f} |\langle f|H_{int}|i \rangle|^2 \Big|_+ + \overline{\sum}_{i,f} |\langle f|H_{int}|i \rangle|^2 \Big|_- \right]}. \tag{A.108}$$

Substituindo a expressão (A.44) obtemos para o numerador (despre-

zando o termo proporcional a  $G^2$ ):

$$N = \left[ \frac{16\pi^2(2\pi)^4}{V^2} \frac{\alpha^2}{(q^2 - q_0^2)^2} S_{em}|_+ + \frac{4\pi(2\pi)^4}{V^2} \frac{\sqrt{2} G\alpha}{(q^2 - q_0^2)} \Re[S_W]_+ \right] - \left[ \frac{16\pi^2(2\pi)^4}{V^2} \frac{\alpha^2}{(q^2 - q_0^2)^2} S_{em}|_- + \frac{4\pi(2\pi)^4}{V^2} \frac{\sqrt{2} G\alpha}{(q^2 - q_0^2)} \Re[S_W]_- \right]. \quad (\text{A.109})$$

O termo eletromagnético não depende da helicidade e, por isso, se cancela. Assim,

$$N = \frac{4\pi(2\pi)^4}{V^2} \frac{\sqrt{2} G\alpha}{q^2 - q_0^2} \left[ \Re[S_W]_+ - \Re[S_W]_- \right]. \quad (\text{A.110})$$

Para o denominador, a substituição de (A.44) (novamente desprezando o termo proporcional a  $G^2$ ) leva a

$$D = \left[ \frac{16\pi^2(2\pi)^4}{V^2} \frac{\alpha^2}{(q^2 - q_0^2)^2} S_{em}|_+ + \frac{4\pi(2\pi)^4}{V^2} \frac{\sqrt{2} G\alpha}{(q^2 - q_0^2)} \Re[S_W]_+ \right] + \left[ \frac{16\pi^2(2\pi)^4}{V^2} \frac{\alpha^2}{(q^2 - q_0^2)^2} S_{em}|_- + \frac{4\pi(2\pi)^4}{V^2} \frac{\sqrt{2} G\alpha}{(q^2 - q_0^2)} \Re[S_W]_- \right]. \quad (\text{A.111})$$

No entanto, o termo eletromagnético é dominante e podemos desprezar a interação fraca. Obtemos assim

$$D = 2 \left[ \frac{16\pi^2(2\pi)^4}{V^2} \frac{\alpha^2}{(q^2 - q_0^2)^2} S_{em} \right]. \quad (\text{A.112})$$

A assimetria pode então ser descrita como

$$A^{\text{PWBA}} = \frac{\frac{4\pi(2\pi)^4}{V^2} \frac{\sqrt{2} G\alpha}{q^2 - q_0^2} \left[ \Re[S_W]_+ - \Re[S_W]_- \right]}{2 \left[ \frac{16\pi^2(2\pi)^4}{V^2} \frac{\alpha^2}{(q^2 - q_0^2)^2} S_{em} \right]} \quad (\text{A.113})$$

$$= \frac{\sqrt{2} G}{8\pi} \frac{q^2 - q_0^2}{\alpha} \frac{\Re[S_W]_+ - \Re[S_W]_-}{S_{em}}. \quad (\text{A.114})$$

Substituindo as expressões para  $S_W$  com helicidades positiva e nega-



tiva dadas pela equação (A.103), obtemos:

$$\begin{aligned}
 & \left[ \Re[S_W]_+ \right. \\
 & \left. - \Re[S_W]_- \right] = 16pp' \Re \left\{ (a+b) \left( \frac{q_\mu^4}{q^4} \right) \tilde{\omega}_{00}^v \right. \\
 & \quad + (a+b) \left[ \left( 1 - \frac{q_0}{q} \right) \tilde{\omega}_{00}^a + \left( -\frac{q_0}{q} + \frac{q_0^3}{q^3} \right) \tilde{\omega}_{03}^a \right] \\
 & \quad - (a+b) \left[ \frac{q_\mu^2}{2q^2} - \tan^2 \theta/2 \right] (\tilde{\omega}_{++}^v + \tilde{\omega}_{--}^v) \\
 & \quad + (b+a) \left[ \sqrt{-\frac{q_\mu^2}{q^2} + \tan^2 \theta/2} \tan \theta/2 \right] \\
 & \quad \quad \left. \times (\tilde{\omega}_{++}^a - \tilde{\omega}_{--}^a) \right\} \cos^2 \theta/2 \\
 & - 16pp' \Re \left\{ (a-b) \left( \frac{q_\mu^4}{q^4} \right) \tilde{\omega}_{00}^v \right. \\
 & \quad + (a-b) \left[ \left( 1 - \frac{q_0}{q} \right) \tilde{\omega}_{00}^a + \left( -\frac{q_0}{q} + \frac{q_0^3}{q^3} \right) \tilde{\omega}_{03}^a \right] \\
 & \quad - (a-b) \left[ \frac{q_\mu^2}{2q^2} - \tan^2 \theta/2 \right] (\tilde{\omega}_{++}^v + \tilde{\omega}_{--}^v) \\
 & \quad + (b-a) \left[ \sqrt{-\frac{q_\mu^2}{q^2} + \tan^2 \theta/2} \tan \theta/2 \right] \\
 & \quad \quad \left. \times (\tilde{\omega}_{++}^a - \tilde{\omega}_{--}^a) \right\} \cos^2 \theta/2,
 \end{aligned} \tag{A.115}$$

o que resulta

$$\begin{aligned}
 & \left[ \Re[S_W]_+ \right. \\
 & \left. - \Re[S_W]_- \right] = 16pp' \Re \left\{ 2b \left( \frac{q_\mu^4}{q^4} \right) \tilde{\omega}_{00}^v \right. \\
 & \quad + 2b \left[ \left( 1 - \frac{q_0}{q^2} \right) \tilde{\omega}_{00}^a + \left( -\frac{q_0}{q} + \frac{q_0^3}{q^3} \right) \tilde{\omega}_{03}^a \right] \\
 & \quad - 2b \left[ \frac{q_\mu^2}{2q^2} - \tan^2 \theta/2 \right] (\tilde{\omega}_{++}^v + \tilde{\omega}_{--}^v) \\
 & \quad + 2a \left[ \sqrt{-\frac{q_\mu^2}{q^2} + \tan^2 \theta/2} \tan \theta/2 \right] \\
 & \quad \left. \times (\tilde{\omega}_{++}^a - \tilde{\omega}_{--}^a) \right\} \cos^2 \theta/2.
 \end{aligned} \tag{A.116}$$

Substituindo a equação acima e a equação (A.87) para  $S_{em}$  na expressão (A.114) para a assimetria obtemos:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}^{\text{PWBA}} &= \frac{\sqrt{2}G}{8\pi} \frac{q^2 - q_0^2}{\alpha} \left\{ 16pp' \Re \left[ 2b \left( \frac{q_\mu^4}{q^4} \right) \tilde{\omega}_{00}^v \right. \right. \\
 & \quad + 2b \left[ \left( 1 - \frac{q_0}{q^2} \right) \tilde{\omega}_{00}^a + \left( -\frac{q_0}{q} + \frac{q_0^3}{q^3} \right) \tilde{\omega}_{03}^a \right] \\
 & \quad - 2b \left[ \frac{q_\mu^2}{2q^2} - \tan^2 \theta/2 \right] (\tilde{\omega}_{++}^v + \tilde{\omega}_{--}^v) \\
 & \quad + 2a \left[ \sqrt{-\frac{q_\mu^2}{q^2} + \tan^2 \theta/2} \tan \theta/2 \right] \\
 & \quad \left. \times (\tilde{\omega}_{++}^a - \tilde{\omega}_{--}^a) \right] \cos^2 \theta/2 \left. \right\} \\
 & \quad \times \left\{ 16pp' \left[ \left( \frac{q_\mu^4}{q^4} \right) \omega_{00} - \left( \frac{q_\mu^2}{2q^2} - \tan^2 \theta/2 \right) \omega_{++} \right] \cos^2 \theta/2 \right\}^{-1}.
 \end{aligned} \tag{A.117}$$

Os fatores  $16pp' \cos^2 \theta/2$  se cancelam e obtemos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}^{\text{PWBA}} = & \frac{\sqrt{2}G}{8\pi} \frac{q^2 - q_0^2}{\alpha} \Re \left[ 2b \left( \frac{q_\mu^4}{q^4} \right) \tilde{\omega}_{00}^v \right. \\
 & + 2b \left[ \left( 1 - \frac{q_0}{q^2} \right) \tilde{\omega}_{00}^a + \left( -\frac{q_0}{q} + \frac{q_0^3}{q^3} \right) \tilde{\omega}_{03}^a \right] \\
 & - 2b \left( \frac{q_\mu^2}{2q^2} - \tan^2 \theta/2 \right) [\tilde{\omega}_{++}^v + \tilde{\omega}_{--}^v] \\
 & + 2a \left[ \sqrt{-\frac{q_\mu^2}{q^2} + \tan^2 \theta/2} \tan \theta/2 \right] \\
 & \quad \times [\tilde{\omega}_{++}^a - \tilde{\omega}_{--}^a] \\
 & \left. \times \left[ \left( \frac{q_\mu^4}{q^4} \right) \omega_{00} - \left( \frac{q_\mu^2}{q^2} - 2 \tan^2 \theta/2 \right) \omega_{++} \right]^{-1} \right].
 \end{aligned} \tag{A.118}$$

No caso em que iremos aqui analisar, isto é, espalhamento elástico de elétrons por núcleos par-par – núcleos com momento angular zero e paridade positiva – podemos simplificar a expressão acima. Primeiramente, o espalhamento elástico implica que  $q_0 = 0$ . Como não há transferência de energia nesse tipo de espalhamento, o estado final do núcleo deve ser igual ao inicial, logo todos os termos que envolvem transferência de momento angular devem ser nulos. Além disso, devido ao fato de que a corrente axial não conserva a paridade, a contribuição dos termos proporcionais a  $\mathfrak{J}^a$  também deve ser nula. Assim, a expressão para a assimetria torna-se

$$\mathcal{A}^{\text{PWBA}} = \frac{\sqrt{2}Gb}{4\pi\alpha} q^2 \frac{\mathfrak{J}_0^{v*}}{J_0}. \tag{A.119}$$



## APÊNDICE B — Espalhamento na Aproximação de Ondas Distorcidas

### B.1 EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

Tomando a equação de movimento

$$[\gamma_\mu(i\partial^\mu + V^\mu(\mathbf{r})) - m_e]\psi_e = 0 \quad (\text{B.1})$$

e assumindo que a função de onda é estacionária, e portanto separável,

$$\psi_e(t, \mathbf{r}) = \psi_e(\mathbf{r})e^{-iEt}, \quad (\text{B.2})$$

obtemos

$$[\gamma_\mu(i\partial^\mu + V^\mu) - m_e]\psi_e(\mathbf{r})e^{-iEt} = 0. \quad (\text{B.3})$$

Substituindo  $\gamma_\mu\partial^\mu = \gamma_0[\partial/\partial t] + \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla}$ , obtemos

$$[i\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \gamma_\mu V^\mu - m_e]\psi_e e^{-iEt} = -\gamma_0 E \psi_e e^{-iEt}, \quad (\text{B.4})$$

que pode ser reescrita, utilizando  $\boldsymbol{\alpha} = \gamma_0 \boldsymbol{\gamma}$  e  $(\gamma_0)^2 = 0$ , como

$$[-\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \gamma_0 \gamma_\mu V^\mu + \gamma_0 m_e]\psi_e = E\psi_e. \quad (\text{B.5})$$

Considerando o caso estático para um potencial central, temos que  $\gamma_\mu V^\mu(\mathbf{r}) \rightarrow \gamma_0 V^0(r)$ , resultando em

$$[-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + V^0(r) + \gamma_0 m_e]\psi_e = E\psi_e. \quad (\text{B.6})$$

Tomando a equação acima, podemos usar a propriedade (ÜBERALL, 1971)

$$i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} = -i\gamma_5 \boldsymbol{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}} \left[ \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{L}}{r} \right] \quad (\text{B.7})$$

e a definição de K dada pela Equação (2.28) para escrever

$$\{i\gamma_5 \boldsymbol{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}} \left[ \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} - \gamma_0 \frac{K}{r} \right] - E + \gamma_0 m_e + V(r)\} \psi_{\kappa m} = 0. \quad (\text{B.8})$$

Substituindo a expressão para  $\psi_{\kappa m}$  dada pelas Equações (3.81) na equação acima, usando  $K\psi = -\kappa\psi$  e a propriedade (ÜBERALL, 1971)

$$(\Sigma \cdot \hat{r})\phi_{\kappa m}(\hat{r}) = -\phi_{-\kappa m}(\hat{r}), \quad (\text{B.9})$$

obtemos o sistema de equações

$$\frac{\partial}{\partial r} l_{\kappa}(r) = \frac{\kappa - 1}{r} l_{\kappa}(r) + [V(r) - E + m_e] u_{\kappa}(r) = 0 \quad (\text{B.10a})$$

$$\frac{\partial}{\partial r} u_{\kappa}(r) = -\frac{\kappa + 1}{r} u_{\kappa}(r) - [V(r) - E - m_e] l_{\kappa}(r) = 0. \quad (\text{B.10b})$$

Fazendo a substituição

$$l'_{\kappa}(r) = r l_{\kappa}(r) \quad (\text{B.11})$$

$$u'_{\kappa}(r) = r u_{\kappa}(r) \quad (\text{B.12})$$

obtemos o sistema

$$\left[ \frac{d}{dr} - \frac{\kappa}{r} \right] l'_{\kappa}(r) - [V(r) - E + m_e] u'_{\kappa}(r) = 0 \quad (\text{B.13a})$$

$$\left[ \frac{d}{dr} + \frac{\kappa}{r} \right] u'_{\kappa}(r) + [V(r) - E - m_e] l'_{\kappa}(r) = 0. \quad (\text{B.13b})$$

## B.2 ANÁLISE USANDO PHASE-SHIFTS

O sistema de Equações (B.10), pode ser resolvido para o caso de um potencial nulo obtendo-se

$$\psi_{\kappa m}^{\text{livre}}(\mathbf{r}) = \left( i S_{\kappa} [p / (E + m_e)] j_{\bar{\ell}}(pr) \phi_{-\kappa m}(\hat{r}) \right), \quad (\text{B.14})$$

onde  $S_{\kappa} = \kappa / |\kappa|$  e  $j_{\ell}$  é a função de Bessel esférica e

$$\bar{\ell} = \begin{cases} \kappa - 1, & \kappa > 0 \\ -\kappa, & \kappa < 0 \end{cases}. \quad (\text{B.15})$$

A partir dos spinores esféricos livres, é possível se descrever uma onda

plana como

$$\psi_{m_s}^{\text{OP}}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = 4\pi \sqrt{\frac{E + m_e}{2m_e}} \sum_{\kappa m_\ell m} i^\ell \langle \ell, m_\ell, 1/2, m_s | jm \rangle Y_{\ell m_\ell}^*(\hat{p}) \psi_{\kappa m}^{\text{livre}}(\mathbf{r}). \quad (\text{B.16})$$

Para um potencial não nulo, no entanto, devemos substituir  $\psi_{\kappa m}^{\text{livre}}(\mathbf{r})$  pelo spinor  $\psi_{\kappa m}(\mathbf{r})$ , dado pelas Equações (3.81) e solução do sistema (B.10) para o potencial em questão. Fazendo isso, obtemos

$$\psi_{m_s}(\mathbf{r}) = 4\pi \sqrt{\frac{E + m_e}{2m_e}} \sum_{\kappa m_\ell m} e^{i\delta_\kappa} i^\ell \langle \ell, m_\ell, 1/2, m_s | jm \rangle Y_{\ell m_\ell}^*(\hat{p}) \psi_{\kappa m}(\mathbf{r}), \quad (\text{B.17})$$

que é uma onda estacionária que pode ser decomposta em uma onda plana incidente e uma onda emergente esférica. Usando-se a condição de normalização

$$\int \bar{\psi}_E(\mathbf{r}) \psi_{E'}(\mathbf{r}) d^3r = \delta(E - E') \quad (\text{B.18})$$

e as formas assintóticas

$$u_\kappa(r) \rightarrow \sqrt{\frac{E}{m_e} \frac{E + m_e}{\pi p}} \frac{\cos(pr + \delta'_\kappa)}{r} \quad (\text{B.19})$$

$$l_\kappa(r) \rightarrow -\sqrt{\frac{E}{m_e} \frac{E - m_e}{\pi p}} \frac{\text{sen}(pr + \delta'_\kappa)}{r} \quad (\text{B.20})$$

obtemos

$$\psi_{\kappa m}^{\text{livre}} = \sqrt{p \frac{E}{m} \frac{E + m}{\pi}} \left( \begin{array}{c} j_\ell(pr) \phi_{\kappa m}(\hat{r}) \\ [iS_\kappa p / (E + m_e)] j_{\bar{\ell}}(pr) \phi_{-\kappa m}(\hat{r}) \end{array} \right) \quad (\text{B.21})$$

$$\psi_{m_s}^{\text{OP}}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = 4\pi \sqrt{\frac{\pi}{2pE}} \sum_{\kappa m_\ell m} i^\ell \langle \ell, m_\ell, 1/2, m_s | jm \rangle Y_{\ell m_\ell}(\hat{k}) \psi_{\kappa m}^{\text{livre}}(\mathbf{r}) \quad (\text{B.22})$$

$$\psi_{m_s}(\mathbf{r}) = 4\pi \sqrt{\frac{\pi}{2pE}} \sum_{\kappa m_\ell m} e^{i\delta_\kappa} i^\ell \langle \ell, m_\ell, 1/2, m_s | jm \rangle Y_{\ell, m_s}^*(\hat{k}) \psi_{\kappa m}(\mathbf{r}). \quad (\text{B.23})$$

### B.2.1 Solução para o potencial coulombiano

Tomando novamente o sistema (B.10) e resolvendo desta vez para o potencial coulombiano

$$V(r) = -\frac{Z\alpha}{r}, \quad (\text{B.24})$$

obtemos (ÜBERALL, 1971)

$$u'_\kappa{}^{C R, I}(r) = \sqrt{\frac{E}{m_e} \frac{E + m_e}{p\pi}} \Re [V_{\pm\gamma}(pr)] \quad (\text{B.25a})$$

$$l'_\kappa{}^{C R, I}(r) = -\sqrt{\frac{E}{m_e} \frac{E - m_e}{p\pi}} \Im [V_{\pm\gamma}(pr)], \quad (\text{B.25b})$$

onde

$$V_\gamma(pr) = e^{\pi y/2} \frac{|\Gamma(\gamma + iy)|}{\Gamma(2\gamma + 1)} (2pr)^\gamma (\gamma + iy) e^{i[\eta_\kappa(\gamma) - pr]} \times {}_1F_1(1 + \gamma + iy; 2\gamma + 1; 2ipr) \quad (\text{B.26})$$

e

$$\gamma = \sqrt{\kappa^2 - \alpha^2 Z^2} \quad (\text{B.27})$$

$$y = \frac{\alpha Z E}{p}. \quad (\text{B.28})$$

A função  ${}_1F_1(1 + \gamma + iy; 2\gamma + 1; 2ipr)$  na expressão para  $V_\gamma(pr)$  é a função hipergeométrica confluyente. As soluções regulares e irregulares de Coulomb na Equação (B.25) acima são dadas pelos sinais superior e inferior, respectivamente. A fase  $\eta_\kappa(\gamma)$  é dada por

$$\eta_\kappa(\gamma) = -\frac{\pi}{2} \left( \frac{1 + S_\kappa}{2} \right) - \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{y(\kappa + \gamma_e/E)}{\kappa\gamma - y^2 m_e/E} \right). \quad (\text{B.29})$$

Finalmente, utilizando as formas assintóticas, chegamos na seguinte expressão para os phase-shifts coulombianos:

$$\delta'_\kappa{}^C = y \ln(2kr) - \arg \Gamma(\pm\gamma + iy) + \eta_\kappa(\pm\gamma) - \pi \frac{\pm\gamma}{2} \quad (\text{B.30})$$

onde o sinal positivo resulta no phase-shift para a solução regular, enquanto o negativo resulta no phase-shift para a solução irregular.



Tomando o spinor livre  $\psi_{\kappa m}^{\text{livre}}(\mathbf{r})$ , temos que no limite assintótico,

$$j_\ell(pr) \rightarrow (pr)^{-1} \cos(pr - (\ell + 1)\pi/2) \quad (\text{B.31})$$

$$j_{\bar{\ell}}(pr) \rightarrow -(pr)^{-1} S_\kappa \text{sen}(pr - (\ell + 1)\pi/2), \quad (\text{B.32})$$

de onde vem que para o limite de um potencial nulo, o valor mínimo do phase-shift será

$$\delta'_\kappa{}^0 = -\frac{(\ell + 1)}{2}\pi. \quad (\text{B.33})$$

Portanto, podemos escrever a contribuição “externa” devida ao potencial coulombiano como

$$\delta_\kappa^C = \eta_\kappa(\pm\gamma) - \pi \frac{\pm\gamma}{2} - \arg \Gamma(\pm\gamma + iy) + \pi \frac{(\ell + 1)}{2} \quad (\text{B.34})$$

$$= \delta'_\kappa{}^C - y \ln(2pr) - \delta'_\kappa{}^0, \quad (\text{B.35})$$

onde, os sinais positivo e negativo denotam os phase-shifts regulares e irregulares, respectivamente.

## B.2.2 Solução para uma distribuição finita de carga

Se considerarmos uma distribuição finita de carga, cujo potencial seja da forma

$$V(r) = -\frac{Z\alpha}{r} + \bar{V}(r) \quad (\text{B.36})$$

de tal forma que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} [r\bar{V}(r)] = 0, \quad (\text{B.37})$$

então o potencial será o de uma carga puntual para um valor de  $r$  distante da distribuição. Nesse caso, as soluções para  $u_\kappa(r)$  e  $l_\kappa(r)$  deverão ser calculadas numericamente e, para um valor de  $r$  arbitrário situado na região onde o potencial se comporta como puntual – denominado *raio de extração* –, temos

$$u_\kappa(r) = A_\kappa u_\kappa^{CR}(r) + B_\kappa u_\kappa^{CI}(r) \quad (\text{B.38a})$$

$$l_\kappa(r) = A_\kappa l_\kappa^{CR}(r) + B_\kappa l_\kappa^{CI}(r). \quad (\text{B.38b})$$

Usando novamente a forma assintótica (B.19), é possível escrever

$$\delta'_\kappa = \delta'_\kappa{}^C + \bar{\delta}_\kappa. \quad (\text{B.39})$$

O último termo na equação acima representa a contribuição devida ao

potencial  $\bar{V}(r)$ . Essa contribuição deve aparecer novamente na expressão para a contribuição externa

$$\delta_\kappa = \delta_\kappa^C + \bar{\delta}_\kappa, \quad (\text{B.40})$$

portanto a relação (B.35) continua valendo:

$$\delta_\kappa = \delta'_\kappa - y \ln(2pr) - \delta'^0_\kappa. \quad (\text{B.41})$$

### B.2.3 Seção de choque

Para obtermos a seção de choque, exigimos que a Equação (B.23) tenha a forma assintótica (ÜBERALL, 1971)

$$\psi_{m_s}(\mathbf{r}) \rightarrow \psi_{m_s}^{\text{OP}}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) + r^{-1} w_{m_s}(\hat{r}) e^{i(pr+y \ln(2pr))}. \quad (\text{B.42})$$

Se decomposermos a Equação (B.23) em uma onda plana incidente e uma onda esférica emergente, podemos descrever seu comportamento assintótico como

$$\begin{aligned} \psi_{m_s}(\mathbf{r}) \rightarrow & \psi_{m_s}^{\text{OP}}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) - 2\pi i \sqrt{\frac{E+m_e}{2m_e}} \frac{e^{i(pr+y \ln(2pr))}}{pr} \\ & \times \sum_{\kappa m_\ell m} (e^{2i\delta_\kappa} - 1) \langle \ell, m_\ell, 1/2, m_s | j, m \rangle Y_{\ell m_\ell}^*(\hat{p}) \\ & \times \begin{pmatrix} \phi_{\kappa m}(\hat{r}) \\ [-p/(E+m_e)] \phi_{-\kappa m}(\hat{r}) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.43})$$

e temos que  $\delta_\kappa$  obedece a relação (B.41).

Tomando a direção  $\hat{p} \parallel \hat{z}$  e considerando somente a componente dominante – isto é, a superior –, podemos escrever a amplitude de espalhamento para uma onda incidente cuja componente superior seja normalizada a 1 como

$$a_{m_s}(\hat{r}) = \sqrt{\frac{2m_e}{E+m_e}} w_{m_s}^{\text{sup}}(\hat{r}). \quad (\text{B.44})$$

Das expressões assintóticas para  $\psi_{m_s}(\mathbf{r})$  vem que

$$\begin{aligned} a_{m_s}(\mathbf{r}) = & \frac{\sqrt{\pi}}{ip} \sum_{\kappa} (e^{2i\delta_\kappa} - 1) \ell \langle \ell, 0, 1/2, m_s | j m_s \rangle \\ & \times \sum_{\tau} \langle \ell, m_s - \tau, 1/2, \tau | j m_s \rangle Y_{\ell, m_s - \tau}(\hat{r}) \chi_{\tau}. \end{aligned} \quad (\text{B.45})$$

Para elétrons incidentes com spin na direção do movimento,  $m_s = 1/2$ , a amplitude será dada por

$$a_{1/2}(\hat{r}) = f(\theta)\chi_{1/2} + g(\theta)e^{i\varphi}\chi_{-1/2}, \quad (\text{B.46})$$

onde as funções com e sem *spin-flip* são dadas respectivamente por

$$f(\theta) = \frac{1}{2ip} \sum_{\kappa>0} \kappa [e^{2i\delta_\kappa} P_\kappa(\cos \theta) + e^{2i\delta_{-\kappa}} P_{\kappa-1}(\cos \theta)] \quad (\text{B.47})$$

$$g(\theta) = \frac{1}{2ip} \sum_{\kappa>0} [e^{2i\delta_\kappa} P_\kappa^1(\cos \theta) - e^{2i\delta_{-\kappa}} P_{\kappa-1}^1(\cos \theta)]. \quad (\text{B.48})$$

Para elétrons incidentes com spin na direção contrária ao movimento, temos

$$a_{-1/2}(\hat{r}) = f(\theta)\chi_{-1/2} - g(\theta)e^{-i\varphi}\chi_{1/2}. \quad (\text{B.49})$$

A seção de choque de espalhamento será então dada por

$$\frac{d\sigma_{m_s}}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 + |g(\theta)|^2, \quad (\text{B.50})$$

com  $m_s = \pm 1/2$ , correspondendo às helicidades positiva e negativa dos elétrons incidentes, cuja dependência se origina no potencial total  $V^0(r) = \alpha A^0(r) \pm bW^0(r)$ .

Podemos definir  $\Delta_\kappa \equiv \delta_{-\kappa} - \delta_\kappa$  e usar as relações

$$P_{\kappa-1}^1(\cos \theta) = -\frac{\kappa [P_\kappa(\cos \theta) - (\cos \theta) P_{\kappa-1}(\cos \theta)]}{\text{sen } \theta} \quad (\text{B.51})$$

$$P_\kappa^1(\cos \theta) = -\frac{\kappa [(\cos \theta) P_\kappa(\cos \theta) - P_{\kappa-1}(\cos \theta)]}{\text{sen } \theta} \quad (\text{B.52})$$

para escrever as amplitudes em uma forma simplificada:

$$f(\theta) = \frac{1}{2ip} \sum_{\kappa > 0} \kappa e^{2i\delta_\kappa} [P_\kappa(\cos \theta) + e^{2i\Delta_\kappa} P_{\kappa-1}(\cos \theta)] \quad (\text{B.53a})$$

$$g(\theta) = \frac{1}{\text{sen } \theta} \left[ \frac{1}{2ip} \sum_{\kappa > 0} \kappa e^{2i\delta_\kappa} (1 + e^{2i\Delta_\kappa}) [P_\kappa(\cos \theta) + P_{\kappa-1}(\cos \theta)] \right. \quad (\text{B.53b})$$

$$\left. - (1 + \cos \theta) f(\theta) \right]. \quad (\text{B.53c})$$

### B.3 SOLUÇÃO NUMÉRICA

Para encontrar as soluções para as funções de onda superiores e inferiores, vamos tomar o sistema (B.13) e fazer as mudanças de variáveis

$$u'_\kappa(r) = r^{|\kappa|} \mathcal{U}_\kappa(r) \quad (\text{B.54})$$

$$l'_\kappa(r) = r^{|\kappa|} \mathcal{L}_\kappa(r), \quad (\text{B.55})$$

obtendo para  $\kappa > 0$

$$\begin{cases} \frac{d}{dr} \mathcal{U}_\kappa(r) = [E + m_e - V(r)] \mathcal{L}_\kappa(r) - \frac{2|\kappa|}{r} \mathcal{U}_\kappa(r) \\ \frac{d}{dr} \mathcal{L}_\kappa(r) = -[E - m_e - V(r)] \mathcal{U}_\kappa(r) \end{cases} \quad (\text{B.56})$$

com condições de contorno dadas por

$$\mathcal{U}_\kappa(0) = 0 \quad \left. \frac{d}{dr} \mathcal{U}_\kappa(r) \right|_{r=0} = C \frac{E + m_e - V(r)}{2|\kappa| + 1} \quad (\text{B.57a})$$

$$\mathcal{L}_\kappa(r) = C \quad \left. \frac{d}{dr} \mathcal{L}_\kappa(r) \right|_{r=0} = 0 \quad (\text{B.57b})$$

onde  $C = 1/(2|\kappa| - 1)!!$  e  $n!! = n \cdot (n - 2) \cdot (n - 4) \cdot \dots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1$  com  $n$

ímpar. Para  $\kappa < 0$  temos

$$\begin{cases} \frac{d}{dr}\mathcal{U}_\kappa(r) = [E + m_e - V(r)]\mathcal{L}_\kappa(r) \\ \frac{d}{dr}\mathcal{L}_\kappa(r) = -[E - m_e - V(r)]\mathcal{U}_\kappa(r) - \frac{2|\kappa|}{r}\mathcal{U} \end{cases} \quad (\text{B.58})$$

com condições de contorno

$$\mathcal{U}_\kappa(0) = 0 \quad \left. \frac{d}{dr}\mathcal{U}_\kappa(r) \right|_{r=0} = 0 \quad (\text{B.59a})$$

$$\mathcal{L}_\kappa(0) = 0 \quad \left. \frac{d}{dr}\mathcal{L}_\kappa(r) \right|_{r=0} = C \frac{E - m_e - V(0)}{2|\kappa| + 1} \quad (\text{B.59b})$$

Podemos agora solucionar os sistemas acima numericamente utilizando um algoritmo para resolver equações diferenciais. Em  $r = 1$ , voltamos às variáveis originais, usando como condições de contorno os resultados numéricos para as funções  $\mathcal{U}_\kappa(1)$ ,  $\mathcal{L}_\kappa(1)$ ,  $d\mathcal{U}_\kappa(r)/dr|_{r=1}$  e  $d\mathcal{L}_\kappa(r)/dr|_{r=1}$ .

#### B.4 CÁLCULO DOS PHASE-SHIFTS

A partir da Equação (B.38) e das formas assintóticas (B.19), podemos derivar a relação

$$\delta_\kappa = \delta_\kappa^R + \arctan\left(\frac{\text{sen } \theta}{A_\kappa/B_\kappa + \cos \theta}\right), \quad (\text{B.60})$$

onde  $\theta_\kappa \equiv \delta_\kappa^I - \delta_\kappa^R$ .

Para encontrar  $\delta_{\kappa,I}$  precisamos encontrar a razão  $A_\kappa/B_\kappa$ . Para isso, basta resolvermos o sistema formado pelas Equações (B.38), resultando em

$$\frac{A_\kappa}{B_\kappa} = \frac{l_\kappa(r)u_\kappa^{CI}(r) - u_\kappa(r)l_\kappa^{CI}(r)}{u_\kappa(r)l_\kappa^{CR}(r) - l_\kappa(r)u_\kappa^{CR}(r)} \quad (\text{B.61})$$

Os valores para  $u_\kappa(r)$  e  $l_\kappa(r)$  são provenientes da solução numérica das Equações B.13. Para os valores das funções coulombianas, podemos calculá-los numericamente escrevendo (PREWITT; WRIGHT, 1974)

$$V_\gamma(pr) = \frac{e^{\pi y/2} e^{i\eta_\kappa(\gamma)}}{2pr} [(\gamma + iy)U_\gamma(pr) + i|\gamma + iy|U_{\gamma+1}(pr)], \quad (\text{B.62})$$

onde

$$U_\gamma(pr) = \frac{|\Gamma(\gamma + iy)|}{\Gamma(2\gamma)} (2pr)e^{-ipr} {}_1F_1(\gamma + iy; 2\gamma; 2ipr). \quad (\text{B.63})$$

Para efetuar o cálculo da expressão acima, é necessário fazer uma expansão em série de potências em torno da origem, obtendo-se

$$U_\gamma(pr) = \frac{|\Gamma(\gamma + iy)|}{\Gamma(2\gamma)} (2pr)^\gamma \sum_{n=0}^{\infty} a_n (pr)^n. \quad (\text{B.64})$$

onde os termos  $a_n$  são dados por

$$a_n = \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = -y/\gamma \\ a_n = -\frac{2ya_{n-1} + a_{n-2}}{n(n + 2\gamma - 1)}, \quad n \geq 2. \end{cases} \quad (\text{B.65})$$

Esta expansão é adequada até  $pr \lesssim 15$ , a partir de onde podemos usar a seguinte série assintótica:

$$U_\gamma(pr) = 2\Re \left[ \frac{|\Gamma(\gamma + iy)|}{\Gamma(\gamma + iy)} e^{ipr} e^{-\pi/[2(y+\gamma)]} e^{iy \ln(2pr)} \sum_n b_n (pr)^{-n} \right] \quad (\text{B.66})$$

onde os termos  $b_n$  são dados por

$$b_n = \begin{cases} b_0 = 1 \\ b_n = \frac{(\gamma - iy + n - 1)(n - \gamma - iy)}{2in} b_{n-1}, \quad n \geq 1. \end{cases} \quad (\text{B.67})$$

## B.5 ACELERAÇÃO DA CONVERGÊNCIA

As amplitudes de espalhamento com e sem inversão de spin, dadas pelas Equações (B.53), podem ter suas convergências aceleradas no intervalo  $[\pi/2, \pi]$  através de uma fórmula de recorrência. Para isso, tomamos uma série com a forma

$$h(\theta) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} a_\kappa^0 P_\kappa(\cos \theta), \quad (\text{B.68})$$

satisfeita por ambas as amplitudes, e multiplica ambos os membros

por  $(1 - \cos \theta)$ . Usamos então a fórmula de recursão

$$(n + 1)P_{n+1}(x) = (2n + 1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x) \quad (\text{B.69})$$

para reescrever a série como

$$(1 - \cos \theta)h(\theta) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} a_{\kappa}^0 \left[ P_{\kappa}(\cos \theta) - \frac{\kappa + 1}{2\kappa + 1} P_{\kappa+1}(\cos \theta) - \frac{\kappa}{2\kappa + 1} P_{\kappa-1}(\cos \theta) \right]. \quad (\text{B.70})$$

Podemos separar a soma acima em três partes:

$$s_1 = \sum_{\kappa=0}^{\infty} a_{\kappa}^0 P_{\kappa}(\cos \theta) \quad (\text{B.71})$$

$$s_2 = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{\kappa + 1}{2\kappa + 1} a_{\kappa}^0 P_{\kappa+1}(\cos \theta) \quad (\text{B.72})$$

$$s_3 = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{\kappa}{2\kappa + 1} a_{\kappa}^0 P_{\kappa-1}(\cos \theta). \quad (\text{B.73})$$

Na segunda soma, podemos realizar a substituição de variável  $\kappa' = \kappa + 1$  e reescrevê-la como

$$s_2 = \sum_{\kappa'=1}^{\infty} \frac{\kappa'}{2\kappa' - 1} a_{\kappa'-1}^0 P_{\kappa'}(\cos \theta). \quad (\text{B.74})$$

Podemos mudar o índice de soma inicial para  $\kappa' = 0$ , já que o termo correspondente é nulo. Assim:

$$s_2 = \sum_{\kappa'=0}^{\infty} \frac{\kappa'}{2\kappa' - 1} a_{\kappa'-1}^0 P_{\kappa'}(\cos \theta). \quad (\text{B.75})$$

Para a soma  $s_3$ , podemos mudar o índice inicial para 1, já que o primeiro termo é zero. Fazemos então a substituição  $\kappa' = \kappa - 1$ , assim

$$s_3 = \sum_{\kappa'=0}^{\infty} \frac{\kappa' + 1}{2\kappa' + 3} a_{\kappa'+1}^0 P_{\kappa'}(\cos \theta). \quad (\text{B.76})$$

Como as variáveis  $\kappa$  e  $\kappa'$  são índices de soma, podemos reescrever a

série como

$$(1 - \cos \theta)h(\theta) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} a_{\kappa}^1 P_{\kappa}(\cos \theta), \quad (\text{B.77})$$

onde

$$a_{\kappa}^1 = a_{\kappa}^0 - \frac{\kappa}{2\kappa - 1} a_{\kappa-1}^0 - \frac{\kappa + 1}{2\kappa + 3} a_{\kappa+1}^0. \quad (\text{B.78})$$

O termo à direita tem a mesma forma que o termo original da série. Logo, se usarmos o mesmo procedimento  $n$  vezes, temos:

$$h(\theta) = \frac{1}{(1 - \cos \theta)^n} \sum_{\kappa=0}^{\infty} a_{\kappa}^n P_{\kappa}(\cos \theta), \quad (\text{B.79})$$

onde

$$a_{\kappa}^n = a_{\kappa}^{n-1} - \frac{\kappa}{2\kappa - 1} a_{\kappa-1}^{n-1} - \frac{\kappa + 1}{2\kappa + 3} a_{\kappa+1}^{n-1}. \quad (\text{B.80})$$

A aplicação dessa técnica recursivamente por três vezes resulta em uma aceleração bastante apreciável da convergência da seção de choque para o intervalo  $[\pi/2; \pi]$ .



## APÊNDICE C — Cálculo dos Termos Isoescalar e Isovetorial da Corrente Eletromagnética

### C.1 CÁLCULO DO TERMO ISOESCALAR

Integrando o segundo termo da expressão (4.36) por partes, obtemos:

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \hat{J}_0^{T=0} | \Psi \rangle_{\mathbf{q}} &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sum_{\alpha} \left\{ F_1^0(q^2) \bar{\psi}_{\alpha}(\mathbf{r}) \gamma_0 \psi_{\alpha}(\mathbf{r}) \right. \\ &\quad \left. + i \frac{F_2'^0}{2m} \nabla \cdot [\bar{\psi}_{\alpha}(\mathbf{r}) \boldsymbol{\alpha} \psi_{\alpha}(\mathbf{r})] \right\} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

$$\begin{aligned} &= F_1^0(q^2) \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sum_{\alpha} \bar{\psi}_{\alpha}(\mathbf{r}) \gamma_0 \psi_{\alpha}(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} \\ &\quad - i^2 \frac{F_2'^0}{2m} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \mathbf{q} \cdot \int \sum_{\alpha} \bar{\psi}_{\alpha} \boldsymbol{\alpha} \psi_{\alpha} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Vamos nomear as integrais na expressão acima como

$$I_1 = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sum_{\alpha} \bar{\psi}_{\alpha}(\mathbf{r}) \gamma_0 \psi_{\alpha}(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad (\text{C.3})$$

$$I_2 = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \mathbf{q} \cdot \int \sum_{\alpha} \bar{\psi}_{\alpha} \boldsymbol{\alpha} \psi_{\alpha} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r}. \quad (\text{C.4})$$

#### C.1.1 Cálculo de $I_1$

Conforme discutido no Capítulo 2, a densidade bariônica  $\rho_B$  é dada por

$$\rho_B = \bar{\Psi} \gamma_0 \Psi \quad (\text{C.5})$$

$$= \sum_{\alpha} \bar{\psi}_{\alpha} \gamma_0 \psi_{\alpha} \quad (\text{C.6})$$

e podemos escrever

$$I_1 = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \rho_B(r) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r}. \quad (\text{C.7})$$

A integral acima representa nada mais que a transformada de Fourier da densidade bariônica no espaço de posição, resultando na densidade bariônica no espaço de momento. Usando as funções de onda dadas pela equação (2.27), obtivemos no espaço de posição

$$\rho_B(r) = \sum_{\alpha} \frac{2j+1}{4\pi} [g_{n\kappa t}^2(r) + f_{n\kappa t}^2(r)] \quad (\text{C.8})$$

o que resulta em

$$I_1 \equiv \rho_B(q) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sum_{\alpha} \frac{2j+1}{4\pi} [g_{n\kappa t}^2(r) + f_{n\kappa t}^2(r)] e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r}. \quad (\text{C.9})$$

Para calcularmos a transformada de Fourier, podemos escrever a exponencial como

$$e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} = 4\pi \sum_{L,M} i^L j_L(qr) Y_{L,M}^*(\hat{q}) Y_{L,M}(\hat{r}), \quad (\text{C.10})$$

onde  $j_L(qr)$  é a função de Bessel esférica de ordem  $L$  e  $\hat{q}$  e  $\hat{r}$  representam os ângulos dos vetores em coordenadas esféricas nos espaços de momento e posição, respectivamente. Assim,

$$\begin{aligned} \rho_B(q) = \frac{4\pi}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{n\kappa t} \int \frac{2j+1}{4\pi} [g_{n\kappa t}^2(r) + f_{n\kappa t}^2(r)] \\ \times \sum_{L,M} i^L j_L(qr) Y_{L,M}^*(\hat{q}) Y_{L,M}(\hat{r}) d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Como nos restringiremos a sistemas com simetria esférica, podemos

separar as integrais em  $r$  e  $\Omega$ :

$$\rho_B(q) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n\kappa t} \int \frac{2j+1}{4\pi} [g_{n\kappa t}^2(r) + f_{n\kappa t}^2(r)] \left[ \sum_{L,M} i^L j_L(qr) \int Y_{L,M}^*(\hat{q}) Y_{L,M}(\hat{r}) d\Omega_{\hat{r}} \right] r^2 dr. \quad (\text{C.12})$$

A integral nos ângulos de  $\hat{r}$  deve ser zero para  $L \neq M \neq 0$ . Para  $L = M = 0$ , ela resulta  $\sqrt{4\pi}$ , restando então somente o termo que envolve  $j_0(qr)$ . Além disso,  $Y_{00}^*(\hat{q}) = 1/\sqrt{4\pi}$ . Assim,

$$\rho_B(q) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int \left\{ \sum_{n\kappa t} \frac{2j+1}{4\pi} [g_{n\kappa t}^2(r) + f_{n\kappa t}^2(r)] \right\} j_0(qr) r^2 dr, \quad (\text{C.13})$$

ou seja,

$$\rho_B(q) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int \rho_B(r) j_0(qr) r^2 dr. \quad (\text{C.14})$$

### C.1.2 Cálculo de $I_2$

Para  $I_2$ , precisamos calcular  $\bar{\psi}_\alpha \alpha \psi_\alpha$ :

$$\bar{\psi}_\alpha \alpha \psi_\alpha = \psi_\alpha^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \alpha \psi_\alpha \quad (\text{C.15})$$

$$= \begin{pmatrix} g_{n\kappa t}(r) \phi_{\kappa m}^\dagger & -i f_{n\kappa t}(r) \phi_{\kappa m}^\dagger \\ -\sigma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{n\kappa t}(r) \phi_{\kappa m} \\ i f_{n\kappa t}(r) \phi_{-\kappa m} \end{pmatrix} \quad (\text{C.16})$$

$$= \begin{pmatrix} g_{n\kappa t}(r) \phi_{\kappa m}^\dagger & -i f_{n\kappa t}(r) \phi_{-\kappa m}^\dagger \\ -\sigma & \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma i f_{n\kappa t}(r) \phi_{-\kappa m} \\ -\sigma g_{n\kappa t}(r) \phi_{\kappa m} \end{pmatrix} \quad (\text{C.17})$$

$$= i g_{n\kappa t}(r) f_{n\kappa t}(r) \phi_{\kappa m}^\dagger \sigma \phi_{-\kappa m} + i f_{n\kappa t}(r) g_{n\kappa t}(r) \phi_{-\kappa m}^\dagger \sigma \phi_{\kappa m} \quad (\text{C.18})$$

$$= i f_{n\kappa t}(r) g_{n\kappa t}(r) [\phi_{\kappa m}^\dagger \sigma \phi_{-\kappa m} + \phi_{-\kappa m}^\dagger \sigma \phi_{\kappa m}] \quad (\text{C.19})$$

Usando a equação acima, podemos escrever  $I_2$  como

$$I_2 \equiv \varrho(q) \quad (\text{C.20})$$

$$\equiv \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\alpha} \int (\mathbf{q}e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}) \cdot (\bar{\psi}_{\alpha}(\mathbf{r})\boldsymbol{\alpha}\psi_{\alpha}(\mathbf{r})) d\mathbf{r} \quad (\text{C.21})$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\alpha} \int (\mathbf{q}e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}) \cdot (if_{n\kappa t}(r)g_{n\kappa t}(r)[\phi_{\kappa m}^{\dagger}\boldsymbol{\sigma}\phi_{-\kappa m} \quad (\text{C.22})$$

$$+ \phi_{-\kappa m}^{\dagger}\boldsymbol{\sigma}\phi_{\kappa m}]) d\mathbf{r} \quad (\text{C.23})$$

Como a integral  $I_1$  é a densidade bariônica no espaço de momento, denominamos a integral acima como  $\varrho(q)$  por analogia. Usando as expressões para  $e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$  em coordenadas circulares:

$$e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}(\hat{e}_q)_{\lambda} = -\sqrt{2\pi} \sum_{L \geq 1} i^L \sqrt{2L+1} \left\{ \lambda j_L(qr) \mathbf{Y}_{L,L}^{\lambda}(\hat{r}) \right. \\ \left. + \frac{1}{q} \nabla \times [j_L(qr) \mathbf{Y}_{L,L}^{\lambda}(\hat{r})] \right\}, \quad (\text{C.24})$$

para  $\lambda \pm 1$ , onde os harmônicos esféricos vetoriais  $\mathbf{Y}_{J,L}^M$  são dados por

$$\mathbf{Y}_{J,L}^M(\theta, \phi) = \sum_{m, \sigma} \langle L, m, 1, \sigma | J, M \rangle Y_{L,m}(\theta, \phi), \quad (\text{C.25})$$

com  $J \geq 0$ ,  $L = J, J \pm 1$  e  $M = -J, -J+1, \dots, 0, \dots, J-1, J$ , e

$$e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}(\hat{e}_q)_0 = -\sqrt{4\pi} \sum_L i^L \sqrt{2L+1} \frac{i}{q} \nabla [j_L(qr) Y_{L,0}(\hat{r})], \quad (\text{C.26})$$

é possível reescrever a integral (lembrando que  $q \parallel \hat{z}$  e, portanto, so-

mente a expressão para a coordenada  $e_0$  será utilizada) como:

$$\begin{aligned} \varrho(q) = & \frac{\sqrt{4\pi}}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\alpha} \sum_L i^L \sqrt{2L+1} \\ & \times \int \nabla \{j_L(qr)Y_{L,0}(\hat{r})\} \cdot \{f_{n\kappa t}(r)g_{n\kappa t}(r) \\ & [\phi_{\kappa m}^\dagger \boldsymbol{\sigma} \phi_{-\kappa} + \phi_{-\kappa m}^\dagger \boldsymbol{\sigma} \phi_{\kappa m}] \} d\mathbf{r}; \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

Usando a propriedade

$$\begin{aligned} \nabla [f(r)Y_{L,M}(\hat{r})] = & \sqrt{\frac{L}{2L+1}} \left( \frac{d}{dr} + \frac{L+1}{r} \right) f(r) \mathbf{Y}_{L,L-1}^M(\hat{r}) \\ & - \sqrt{\frac{L+1}{2L+1}} \left( \frac{d}{dr} - \frac{L}{r} \right) f(r) \mathbf{Y}_{L,L+1}^M(\hat{r}) \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

para os harmônicos esféricos e as propriedades para as derivadas das funções de Bessel esféricas

$$\left( \frac{n+1}{z} + \frac{d}{dz} \right) j_n(z) = j_{n-1}(z) \quad (\text{C.29})$$

$$\left( \frac{n}{z} - \frac{d}{dz} \right) j_n(z) = j_{n+1}(z) \quad (\text{C.30})$$

obtemos:

$$\begin{aligned} \nabla [j_L(qr)Y_{L,0}(\hat{r})] = & \sqrt{\frac{L}{2L+1}} j_{L-1}(qr) \mathbf{Y}_{L,L-1}^0(\hat{r}) \\ & + \sqrt{\frac{L+1}{2L+1}} j_{L+1}(qr) \mathbf{Y}_{L,L+1}^0(\hat{r}). \end{aligned} \quad (\text{C.31})$$

Substituindo a expressão (C.31) acima em  $\varrho(q)$ , obtemos

$$\begin{aligned} \varrho(q) = & \sqrt{4\pi} \sum_{\alpha} \sum_L i^L \sqrt{2L+1} \\ & \times \int \left[ \sqrt{\frac{L}{2L+1}} j_{L-1}(qr) \mathbf{Y}_{L,L-1}^0 + \sqrt{\frac{L+1}{2L+1}} j_{L+1}(qr) \mathbf{Y}_{L,L+1}^0 \right] \\ & \cdot [f_{n\kappa t}(r) g_{n\kappa t}(r) (\phi_{\kappa m}^{\dagger} \boldsymbol{\sigma} \phi_{-\kappa m} + \phi_{-\kappa m}^{\dagger} \boldsymbol{\sigma} \phi_{\kappa m})] dr \end{aligned} \quad (\text{C.32})$$

Podemos separar a integral acima em duas integrais e também separar as variáveis de integração em  $r$  e  $\Omega$ :

$$\begin{aligned} \varrho(q) = & \frac{\sqrt{4\pi}}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\alpha} \sum_L i^L \sqrt{2L+1} \\ & \times \left\{ \sqrt{\frac{L}{2L+1}} \int j_{L-1}(qr) f_{n\kappa t}(r) g_{n\kappa t}(r) r^2 dr \right. \\ & \times \left[ \int \phi_{\kappa m}^{\dagger} \mathbf{Y}_{L,L-1}^0 \cdot \boldsymbol{\sigma} \phi_{-\kappa m} d\Omega + \int \phi_{-\kappa m}^{\dagger} \mathbf{Y}_{L,L-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \phi_{\kappa m} d\Omega \right] \\ & + \sqrt{\frac{L+1}{2L+1}} \int j_{L+1}(qr) f_{n\kappa t}(r) g_{n\kappa t}(r) r^2 dr \\ & \left. \times \left[ \int \phi_{\kappa m}^{\dagger} \mathbf{Y}_{L,L+1}^0 \cdot \boldsymbol{\sigma} \phi_{-\kappa} d\Omega + \int \phi_{-\kappa m}^{\dagger} \mathbf{Y}_{L,L+1}^0 \cdot \boldsymbol{\sigma} \phi_{\kappa m} d\Omega \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.33})$$

Agora podemos usar as propriedades (SCHNEIDER, 2006)

$$\int \phi_{\kappa,m}^{\dagger} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Y}_{L,L-1}^M \phi_{\kappa',m'} d\Omega = \frac{\kappa + \kappa' - L}{\sqrt{L(2L+1)}} \int \phi_{\kappa,m}^{\dagger} Y_{L,M} \phi_{-\kappa',m'} d\Omega \quad (\text{C.34a})$$

$$\int \phi_{\kappa,m}^{\dagger} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Y}_{L,L}^M \phi_{\kappa',m'} d\Omega = \frac{\kappa' - \kappa}{\sqrt{L(L+1)}} \int \phi_{\kappa,m}^{\dagger} Y_{L,M} \phi_{\kappa',m'} d\Omega \quad (\text{C.34b})$$

$$\int \phi_{\kappa,m}^\dagger \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Y}_{L,L+1}^M \phi_{\kappa',m'} d\Omega = \frac{\kappa + \kappa' + L + 1}{\sqrt{(L+1)(2L+1)}} \int \phi_{\kappa,m}^\dagger Y_{L,M} \phi_{-\kappa',m'} d\Omega \quad (\text{C.34c})$$

e obter, levando em conta que  $\boldsymbol{\sigma}$  e  $\mathbf{Y}_{l,m}$  comutam:

$$\begin{aligned} \varrho(q) = & \frac{\sqrt{4\pi}}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\alpha} \sum_L i^L \sqrt{2L+1} \\ & \times \left\{ \left[ -\frac{L}{2L+1} \int j_{L-1}(qr) f_{n\kappa t}(r) g_{n\kappa t}(r) r^2 dr \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{L+1}{2L+1} \int j_{L+1}(qr) f_{n\kappa t}(r) g_{n\kappa t}(r) r^2 dr \right] \right. \\ & \left. \times \left[ \int \phi_{\kappa,m}^\dagger Y_{L,0} \phi_{\kappa,m} d\Omega + \int \phi_{-\kappa,m}^\dagger Y_{L,0} \phi_{-\kappa,m} d\Omega \right] \right\}. \quad (\text{C.35}) \end{aligned}$$

As integrais angulares podem ser calculadas através de

$$\begin{aligned} \int \phi_{\kappa,m}^\dagger Y_{L,M} \phi_{\kappa',m'} d\Omega = & (-1)^{m'+m-1} \frac{1 + (-1)^{L+l'+l}}{2} \\ & \times \sqrt{\frac{(2j+1)(2L+1)}{4\pi(2j'+1)}} \\ & \times \langle j, -m, L, M | j', -m' \rangle \langle j, 1/2, L, 0 | j', 1/2 \rangle. \quad (\text{C.36}) \end{aligned}$$

Ao somar em todos os rótulos a soma em  $m$  só atua na integral na parte angular. Além disso,  $\kappa' = \kappa$ ,  $m = m'$ ,  $j = j'$  e  $M = 0$ , nos levando a

$$\begin{aligned} \sum_m \int \phi_{\kappa,m}^\dagger Y_{L,M} \phi_{\kappa,m} d\Omega = & \sqrt{\frac{(2L+1)}{4\pi}} \frac{1 + (-1)^{L+2l}}{2} (-1)^{2m-1} \\ & \times \langle j, 1/2, L, 0 | j, 1/2 \rangle \\ & \times \sum_m \langle j, -m, L, 0 | j, -m \rangle. \quad (\text{C.37}) \end{aligned}$$

A soma sobre os coeficientes de Clebsch-Gordan pode ser calculada

através da propriedade

$$\sum_m \langle j, m, j', 0 | j, m \rangle = (2j + 1) \delta_{j', 0}. \quad (\text{C.38})$$

Substituindo esse resultado em  $\varrho(q)$  temos

$$\begin{aligned} \varrho(q) &= \frac{\sqrt{4\pi}}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\alpha} \int j_1(qr) f_{n\kappa t}(r) g_{n\kappa t}(r) r^2 dr \\ &\times 2 \left[ (-1)^{2m-1} \frac{1 + (-1)^{2l}}{2} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} (2j + 1) \langle j, 1/2, 0, 0 | j, 1/2 \rangle \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.39})$$

Como  $2m - 1$  é sempre ímpar,  $2l$  sempre par e

$$\langle j, 1/2, 0, 0 | j, 1/2 \rangle = 1, \quad (\text{C.40})$$

obtemos finalmente

$$\varrho(q) = -\frac{2}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\alpha} (2j + 1) \int j_1(qr) f_{n\kappa t}(r) g_{n\kappa t}(r) r^2 dr. \quad (\text{C.41})$$

### C.1.3 Expressão final para a parte isoescalar

Finalmente, o valor esperado da corrente para  $T = 0$  pode ser escrito como

$$\langle \Psi | \hat{j}_0^{T=0} | \Psi \rangle_{\mathbf{q}} = F_1^0(q^2) \rho_B(q) + \frac{F_2'^0(q^2)}{2m} \varrho(q). \quad (\text{C.42})$$

A densidade bariônica é dada por

$$\rho_B(q) = \sum_{\alpha} \frac{2j + 1}{4\pi} \int e^{iq \cdot r} [f_{n\kappa t}^2(r) + g_{n\kappa t}^2(r)] dr, \quad (\text{C.43})$$

onde podemos separar a soma em duas partes: uma sobre os estados



de próton e outra sobre os estados de nêutron. Assim,

$$\begin{aligned} \rho_B(q) &= \sum_{\substack{n\kappa \\ t=1}} \frac{2j+1}{4\pi} \int [f_{n\kappa t}^2(r) + g_{n\kappa t}^2(r)] e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} dr \\ &+ \sum_{\substack{n\kappa \\ t=-1}} \frac{2j+1}{4\pi} \int [f_{n\kappa t}^2(r) + g_{n\kappa t}^2(r)] e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} dr \end{aligned} \quad (\text{C.44})$$

$$= \rho_B^p(q) + \rho_B^n(q). \quad (\text{C.45})$$

A expressão (C.41) também pode ser separada em dois termos, um relativo a prótons e outro a nêutrons:

$$\begin{aligned} \varrho(q) &= -\frac{2}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\substack{n\kappa \\ t=1}} (2j+1) \int j_1(qr) f_{n\kappa t}(r) g_{n\kappa t}(r) r^2 dr \\ &- \frac{2}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\substack{n\kappa \\ t=-1}} (2j+1) \int j_1(qr) f_{n\kappa t}(r) g_{n\kappa t}(r) r^2 dr \end{aligned} \quad (\text{C.46})$$

$$= \varrho^p(q) + \varrho^n(q). \quad (\text{C.47})$$

Assim, podemos finalmente escrever

$$\langle \Psi | \hat{J}_0^{T=0} | \Psi \rangle_{\mathbf{q}} = F_1^0(q^2) [\rho_B^p(q) + \rho_B^n(q)] + \frac{F_2^0(q^2)}{2m} [\varrho^p(q) + \varrho^n(q)]. \quad (\text{C.48})$$

## C.2 CÁLCULO DO TERMO ISOVETORIAL

O cálculo do valor esperado da corrente para o caso  $T = 1$  é o mesmo efetuado para o caso  $T = 0$ , exceto pelo operador  $\tau_3$ . Este operador, no entanto, tem como único resultado um sinal negativo quando atua em estados de nêutron e positivo quando atua em estados de próton. Assim, o termo  $\langle \Psi | \hat{J}_0^{T=1} | \Psi \rangle_{\mathbf{q}}$  será dado por:

$$\langle \Psi | \hat{J}_0^{T=1} | \Psi \rangle_{\mathbf{q}} = F_1^1(q^2) [\rho_B^p(q) - \rho_B^n(q)] + \frac{F_2^1(q^2)}{2m} [\varrho^p(q) - \varrho^n(q)] \quad (\text{C.49})$$

