UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA - UFSC
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS - CFM
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Gabriel de Azevedo Miranda Alboccino Fernandes

REPRESENTAÇÕES SPINORIAIS DO GRUPO DE LORENTZ E EQUAÇÕES DE ONDA RELATIVÍSTICAS

Florianópolis
2012

Gabriel de Azevedo Miranda Alboccino Fernandes

REPRESENTAÇÕES SPINORIAIS DO GRUPO DE LORENTZ E EQUAÇÕES DE ONDA RELATIVÍSTICAS

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física para a a obtenção do Grau de Mestre em Física. Orientador: Prof. Dr. Jeferson de Lima Tomazelli

Florianópolis
2012

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Fernandes, Gabriel de Azevedo Miranda Alboccino
Representações Spinoriais do Grupo de Lorentz e Equações de Onda Relativísticas [dissertação] / Gabriel de Azevedo Miranda Alboccino Fernandes ; orientador, Jeferson de Lima Tomazelli - Florianópolis, SC, 2012.
226 p. ; 21cm

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas. Programa de Pós-Graduação em Física.

Inclui referências

1. Física. 2. Teoria de Spins Altos. 3. Equações de Onda Covariantes. 4. Transformações de Foldy-Wouthuysen. I. Tomazelli, Jeferson de Lima . II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Física. III. Título.

À minha família

Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus pais, Vicente e Silvana, e ao meu irmão, Gustavo, pelo apoio, incentivo e suporte incondicional que tornaram este trabalho possível e prazeroso.

Agradeço ao professor Dr. Jeferson Tomazelli pela orientação zelosa e pela amizade cultivada nestes dois anos de convívio.

Estendo meus agradecimentos também aos meus amigos e colegas do grupo de Teoria de Campos e Física Nuclear, Diego, Renan, Gerson, Leonardo, André, Gabriel, Ubiratãn e Luiz , do Grupo de Mecânica Estatística, Rodrigo, Diego e Maurício, pela convivência harmoniosa e prazerosa nestes dois anos, amenizando as dificuldades encontradas no caminho, e pelas discussões alinhavadas nas horas vagas que me possibilitaram aprender um pouco mais de física (entre outras coisas).

Agradeço ainda aos professores Dr. César Oliveira, Dr. Marco Kneipp e Dra. Tereza Mendes, por gentilmente aceitarem o convite para participar da banca examinadora e por seu interesse em nosso trabalho, bem como por suas valiosas contribuições.

Agradeço também aos demais professores que contribuíram para minha formação acadêmica, tanto na pós-graduação quanto na graduação, e à instituição Universidade Federal de Santa Catarina por nos proporcionar a infraestrutura necessária.

Expresso minha gratidão também ao Antônio, secretário do curso de pós-graduação, por sua prontidão e competência em atender nossos pedidos e nos auxiliar com eventuais percalços de natureza administrativa.

Por fim, agradeço à CAPES pelo providencial apoio financeiro.

"O conhecimento existe de duas formas:
sem vida, armazenado em livros,
e vivo na consciência dos homens.
A segunda forma de existência é, afinal,
a forma essencial; a primeira,
por mais indispensável que seja,
ocupa apenas uma posição inferior".
Albert Einstein

Resumo

Nos últimos anos, em virtude da complexidade crescente das teorias de cordas como candidatas à unificação das interações fundamentais da natureza, tem havido um interesse renovado na teoria quântica de spins altos como um formalismo covariante natural para acomodar o espectro de partículas no Modelo Padrão e teorias quânticas da gravitação, bem como suas contrapartidas supersimétricas.

Nesta dissertação, apresentamos uma revisão sistemática do formalismo subjacente à teoria de spins altos, ancorado no grupo de Poincaré, que corresponde ao grupo de simetria da mecânica quântica relativística. Estudamos as construções de Bargmann-Wigner, Weinberg e Majorana, as quais dão origem a equações de onda covariantes para partículas de spins arbitrários, e examinamos, em particular, os casos referentes a spins 1/2 e 1, enfatizando em especial a equação DKP para bósons massivos de spin 0 e 1 bem como a equação para o fóton proposta por Majorana e Oppenheimer (MO). Neste contexto, propomos uma equação linear análoga a MO, denominada PMO, correspondente às equações de Proca e investigamos sua estrutura algébrica.

Examinamos também o limite não relativístico das equações DKP e PMO através de transformações de Foldy e Wouthuysen, nos cenários de partícula livre e envolvendo acoplamento com um campo eletromagnético externo.

Palavras-Chave: spins altos, equações de Bargmann-Wigner, equações de onda covariantes, transformações de Foldy-Wouthuysen.

Abstract

In the recent past years, in virtue of the increasing complexity of string theories as candidates to the unification of the fundamental interactions of Nature, it has grown a renewed interest in the quantum theory of higher spins as a natural covariant formalism to accommodating the particle spectra in the Standard Model and quantum theories of gravitation, as well as their supersymmetric counterparts.

In this dissertation, we present a sistematic review of the formalism of the theory of higher spins, grounded on the Poincaré group, which corresponds to the symmetry group of relativistic quantum mechanics. We study the constructs of Bargmann-Wigner, Weinberg and Majorana, leading to wave equations for particles of arbitrary spins, and examined, in particular, the cases of spins 1/2 and 1, focusing particularly on the DKP equation for massive bosons of spin zero and unity as well as on the equation proposed by Majorana and Oppenheimer (MO) for the photon. In this context, we propose a linear equation similar to MO, called PMO, corresponding to the Proca equations and investigate its algebraic structure.

Also, we examined the nonrelativistic limit of DKP and PMO equations through the Foldy and Wouthuysen transformations, in the scenarios involving free particles and the coupling with an electromagnetic external field.

Keywords: higher spins, Bargmann-Wigner equations, covariant wave equations, Foldy-Wouthuysen transformations.

Sumário

Introdução

Há quase três décadas a teoria de cordas vem ocupando posição de destaque em física teórica de altas energias como forte candidata à unificação das interações fundamentais, enfatizando em especial a incorporação da gravitação às interações eletromagnética, nuclear fraca e forte. Entretanto, devido à complexidade inerente ao próprio formalismo subjacente a esta teoria, propostas alternativas também vêm sendo investigadas e algumas resgatadas, como a teoria de spins altos.

A teoria de spins altos compreende um formalismo para a descrição de partículas de spins arbitrários, assim como suas interações, alicerçado no grupo de simetria da teoria quântica relativística (grupo de Poincaré). Este formalismo culmina na construção de equações de onda relativísticas lineares que governam a dinâmica das partículas e nos fornece um cenário atraente para o estudo das interações fundamentais, permitindo investigar inclusive a teoria da gravitação, na aproximação linear, sob o prisma do gráviton, o qual corresponde a uma partícula de spin 2 que atua como mediadora da interação gravitacional (análoga ao fóton, na QED)[1].

O primeiro a conjecturar a possibilidade de se construir equações de onda lineares de primeira ordem para partículas de spins quaisquer foi Dirac. Em seu célebre artigo de 1928 [1], Dirac propôs uma equação relativística de primeira ordem para descrever férmions de spin 1/2 através de um método bastante peculiar (e engenhoso), "extraindo as raízes" da equação relativística de energia-momento $E^2 = p^2 + m^2$ (em unidades naturais). O expressivo sucesso da equação de Dirac o incentivou a investigar sua generalização e impulsionou a procura por equações para partículas de spins mais altos, embora não houvesse na época um formalismo adequado para subsidiar este projeto, que só pode ser retomado anos mais tarde.

[1]Contudo, a teoria de spins altos não nos permite discutir a unificação das interações fundamentais, visto que a interação gravitacional é essencialmente não linear e não pode ser acomodada em sua forma geral neste formalismo.

A equação de Dirac revelou a necessidade de se introduzir o formalismo da teoria de grupos no contexto da mecânica quântica relativística, visto que os campos que descrevem os férmions nesta equação são, de fato, spinoriais. Dessa forma, a sistematização da linguagem de representações spinoriais em mecânica quântica adquiriu grande importância para o desenvolvimento da teoria e reuniu os esforços de renomados pesquisadores da época, culminando com os trabalhos de van der Waerden e Weyl [50], [51]. Sob esta perspectiva, Laporte e Uhlenbeck [02] efetuaram em 1931 a análise spinorial da equação de Dirac, reconstruindo a equação de primeiros princípios, no contexto da linguagem de spinores.

Em meio a este período de consolidação da teoria de grupos no cenário da física, Majorana concebeu em 1932 a primeira proposta para a teoria de spins altos [20]. Em seu trabalho pioneiro, Majorana recorreu a representações de dimensões infinitas do grupo de Lorentz homogêneo para construir os estados de partícula e extrair o espectro de massa da teoria[2]. Entretanto, este trabalho permaneceu desconhecido por grande parte da comunidade científica da época, por razões diversas (conforme discutido em [21]).

No mesmo período, em 1931, Majorana e Oppenheimer propuseram de forma independente uma equação para o campo eletromagnético (spin 1) nos mesmos moldes da equação de Dirac [16],[17],[18], seguindo um procedimento construtivo alheio à teoria de spinores. Em 1939, Kemmer também construiu uma equação para mésons (spins 0 e 1) à semelhança da equação de Dirac [09], à luz dos trabalhos de Petiau e Duffin [07], [08], adotando um procedimento empírico e abdicando do formalismo spinorial.

A busca por equações relativísticas para spins arbitrários estendeu-se ainda durante toda a década de 1940, sendo objeto de estudo de pesquisadores ilustres como Pauli, Fierz e de Broglie [03], [04], [05], entre outros. Contudo, a construção de um formalismo padrão para a teoria de spins altos só foi possível após a conclusão de um árduo estudo das representações (unitárias) de dimensão infinita do grupo de Poincaré, iniciado por Majorana, culminando nos trabalhos de Bargmann e Wigner [27], [06].

Em 1964, Weinberg propôs uma abordagem distinta do formalismo padrão de Bargmann e Wigner, examinando a possibilidade de construção de propagadores para partículas de massa não nula e spins arbitrários no contexto da teoria da matriz S [11] e obtendo, como subproduto não menos importante, as equações que governam os campos quânticos representativos das partículas[3].

[2]Contudo, a proposta de Majorana apresentava algumas inconsistências, como o resultado de que a massa das partículas cresce na razão inversa de seus spins, sugerindo que partículas de spins altos são mais estáveis (em contraposição às evidências experimentais).

[3]As equações obtidas por este formalismo de Weinberg são lineares, porém de ordens

Recentemente, novo interesse vem sendo dispensado à investigação do cenário da teoria de spins altos por parte da comunidade científica, principalmente no contexto da teoria quântica de campos e da gravitação. Portanto, nosso objetivo nesta dissertação consiste em efetuarmos uma revisão pontuada da construção dessa teoria, enfatizando em particular os casos massivos de spin 1/2 e 1 e visando contribuir com algumas discussões referentes a temas correlatos.

No capítulo 1, apresentaremos um breve resumo dos principais resultados da teoria de Dirac, que serve de matéria-prima para a construção de equações para spins mais altos, e introduziremos o formalismo de Bargmann e Wigner.

A seguir, no capítulo 2, construiremos a equação DKP (Duffin-Kemmer--Petiau) via Bargmann-Wigner e exibiremos suas principais propriedades. Apresentaremos também uma equação para o fóton, construída de maneira original nesta dissertação (e convergindo para a proposta de Harish-Chandra [10]), que preserva a álgebra das matrizes DKP e discutiremos a inequivalência entre esta equação e a teoria DKP no limite ultrarelativístico (em que $p^2 >> m^2$). Neste mesmo capítulo, abordaremos ainda o formalismo de Weinberg, com o intuito de oferecer uma leitura alternativa (e mais moderna) da teoria de spins altos.

No capítulo 3 apresentaremos a transformação de Foldy-Wouthuysen [12], a qual nos permite acessar o limite não relativístico das equações de onda através de um procedimento iterativo envolvendo uma transformação unitária. Examinaremos as equações de Dirac e DKP através deste procedimento nos cenários de partícula livre e envolvendo a interação com um campo eletromagnético externo (fraco).

Por fim, no capítulo 4, discutiremos a equação proposta por Majorana e Oppenheimer para o fóton e conjecturaremos a respeito de uma possível extensão desta proposta para acomodar as equações de Proca, resultando em uma equação que denominamos de PMO. Investigaremos a estrutura algébrica que emerge desta equação e discutiremos sua interpretação física. Examinaremos ainda o limite não relativístico desta equação através da transformação FW (Foldy-Wouthuysen) nos casos livre e com acoplamento eletromagnético.

Para maior autoconsistência da presente monografia, nos apêndices A e B apresentamos uma breve introdução aos grupos de Lorentz e Poincaré, reunindo apenas os conceitos e resultados necessários para as discussões alinhavadas nos capítulos. No apêndice C abordamos sucintamente algumas propriedades da função de Pauli-Jordan, destacando seu papel no contexto da microcausalidade, discutida na construção do formalismo de Weinberg abordada no capítulo 2. O apêndice D é reservado para a exposição da série BCH (Baker-Campbell--Hausdorff), sobre a qual está ancorado o procedimento iterativo da transformação FW.

---

superiores, sendo o caso de spin 1/2 o único que apresenta equações de primeira ordem.

Capítulo 1

A Equação de Dirac e o Formalismo de Bargmann-Wigner

Nosso objetivo neste capítulo consiste em revisar o formalismo subjacente à equação de onda relativística para partículas de spin 1/2 bem como o procedimento de Bargmann-Wigner para a construção de equações para spins mais altos.

1.1 A Equação de Dirac

A equação de Dirac corresponde à equação de onda linear covariante para férmions de spin 1/2, proposta em 1928. O formalismo de spinores constitui o cenário ideal para a construção desta equação de onda, pois estes objetos geométricos são realizações das representações irredutíveis do **grupo de Lorentz** (homogêneo) que corresponde ao subgrupo principal do **grupo de Poincaré**, o grupo de simetria subjacente à mecânica quântica relativística.

Consideremos, então, uma partícula livre com energia e momento expressos pela relação relativística usual (em unidades naturais):

$$E^2 = p^2 + m^2,$$

ou, definindo o quadrivetor momento $p^\mu = (E, \vec{p})$,

$$p^\mu p_\mu = m^2. \tag{1.1}$$

Assim, o quadrivetor p^μ carrega toda informação cinemática (a menos do momento angular) da partícula e, portanto, como buscamos uma equação linear para descrever uma partícula livre de spin 1/2, o único operador que comparece nesta equação é o operador de quadrimomento $\hat{p}^\mu = i\partial^\mu$. A representação spinorial deste operador pode ser construída com base na equação (A.22):

$$\hat{p}^{\alpha\dot{\beta}} = \sigma_\mu^{\alpha\dot{\beta}}\hat{p}^\mu, \tag{1.2}$$

onde $\alpha, \dot{\beta} = 1, 2$ são índices spinoriais e $\mu = 0, 1, 2, 3$ índice tensorial.

Explicitando as componentes de (1.2) temos

$$\begin{cases} \hat{p}^{1\dot{1}} &=& p^0 + p^3, \\ \hat{p}^{1\dot{2}} &=& p^1 - ip^2, \\ \hat{p}^{2\dot{1}} &=& p^1 + ip^2, \\ \hat{p}^{2\dot{2}} &=& p^0 - p^3. \end{cases}$$

Podemos ainda escrever (1.2) em forma matricial como segue:

$$\hat{p_s} = \hat{p}^0 I + \vec{\sigma}.\hat{\vec{p}}, \tag{1.3}$$

onde o índice s subscrito indica que o operador $\hat{p_s}$ que comparece do lado esquerdo é spinorial, ao passo que os operadores $\hat{p}$ do lado direito são os operadores de quadrimomento usuais.

Utilizando (A.14),(A.18) e (1.2), construímos o operador spinorial covariante $\hat{p}_{\alpha\dot{\beta}}$:

$$\begin{aligned} \hat{p}_{\alpha\dot{\beta}} &= C_{\alpha\mu}C_{\dot{\beta}\dot{\nu}}\hat{p}^{\mu\dot{\nu}} \\ &= C_{\alpha\mu}C_{\dot{\beta}\dot{\nu}}\sigma_\rho^{\mu\dot{\nu}}\hat{p}^\rho. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \hat{p}_{\alpha\dot{\beta}} = \sigma_{\rho;\alpha\dot{\beta}}\hat{p}^\rho, \tag{1.4}$$

ou, em forma matricial

$$\hat{\tilde{p}}_s = \hat{p}^0 I - \vec{\sigma}.\hat{\vec{p}}, \tag{1.5}$$

onde o símbolo til indica que os índices spinoriais de $\hat{\tilde{p}}_s$ são covariantes (conforme convenção introduzida no apêndice A).

Além de exigir invariância sob transformações de Lorentz (TL), é interessante construirmos uma equação de onda invariante também sob **transformações de paridade**. A transformação de paridade consiste na inversão das coordenadas espaciais, i.e., $x^i \to -x^i$. Esta transformação pertence a um setor do grupo de Lorentz desconexo do setor ortócrono próprio (apêndice A), por isso não comuta com as transformações do grupo de Lorentz restrito (L_p).

Assim, as componentes de um quadrispinor ξ^μ não podem ser transformadas em múltiplos do próprio ξ^μ sob a atuação de uma transformação de paridade, o que exige a introdução de outra classe de spinores $\eta^{\dot{\mu}}$ para construirmos um sistema de equações que seja invariante sob este tipo de transformação. Com efeito, supondo que $P\xi^\mu = \lambda\xi^\mu$, então, se L é uma transformação de Lorentz que leva a um referencial com velocidade $\vec{v}$ e $L^{'}$ é uma transformação que leva a um referencial com velocidade $-\vec{v}$, temos que $PL = L^{'}P$ (como pode ser facilmente verificado usando um *boost* de Lorentz infinitesimal na direção z, por exemplo) e, dessa forma, resulta $PL\xi^\mu = \lambda_1(L\xi^\mu)$ e $L^{'}P\xi^\mu = \lambda_2 L^{'}\xi^\mu$, de modo que $L^{'}\xi^\mu = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}L\xi^\mu$, o que não procede pois as transformações $L^{'}$ e L não são proporcionais.

Sendo assim, o quadrispinor ξ^μ deve se transformar, sob paridade, em outro quadrispinor $\eta_{\dot{\mu}}$ cujas propriedades de transformação são diferentes (vide apêndice A e referência [29]):

$$P : \xi^\mu \to i\eta_{\dot{\mu}}, \quad \eta_{\dot{\mu}} \to i\xi^\mu, \tag{1.6}$$

onde o fator i foi escolhido por conveniência.

Precisamos também das leis de transformação dos quadrispinores ξ_μ e $\eta^{\dot{\mu}}$:

$$P : \xi_\beta \to -i\eta^{\dot{\beta}}, \quad \eta^{\dot{\beta}} \to -i\xi_\beta. \tag{1.7}$$

Estas equações seguem naturalmente de (1.6). De fato, observemos que usando (A.14) e (A.18) na primeira relação de (1.6), segue:

$$C^{\mu\beta}\xi_\beta \to i \underbrace{C_{\dot{\mu}\dot{\beta}}}_{=-C^{\dot{\mu}\dot{\beta}}} \eta^{\dot{\beta}}$$

$$\Rightarrow \xi_\beta \to -i\eta^{\dot{\beta}};$$

e, de forma análoga, temos $\eta^{\dot{\beta}} \to -i\xi_\beta$.

Com base nas considerações discutidas nos parágrafos anteriores com relação às simetrias de Lorentz e paridade, propomos o seguinte sistema de equações:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \hat{p}^{\alpha\dot{\beta}}\eta_{\dot{\beta}} & = & m\xi^\alpha, \\ \hat{p}_{\alpha\dot{\beta}}\xi^\alpha & = & m\eta_{\dot{\beta}}, \end{array} \right. \tag{1.8}$$

onde m é um parâmetro dimensional.

Verifica-se facilmente que o sistema (1.8) é covariante por construção e também invariante sob transformação de paridade. Com efeito, usando (A.20) e (A.21), temos para a primeira equação em (1.8):

$$\begin{aligned}
\left(\hat{p}^{\alpha\dot{\beta}}\eta_{\dot{\beta}}\right)' &= A^{\alpha}{}_{\mu}A^{*\dot{\beta}}{}_{\dot{\nu}}\hat{p}^{\mu\dot{\nu}} \underbrace{A^{*}{}_{\dot{\beta}}{}^{\dot{\lambda}}}_{=(A^{*})^{-1\dot{\lambda}}{}_{\dot{\beta}}} \eta_{\dot{\lambda}} \\
&= A^{\alpha}{}_{\mu}(A^{*})^{-1\dot{\lambda}}{}_{\dot{\beta}}A^{*\dot{\beta}}{}_{\dot{\nu}}\hat{p}^{\mu\dot{\nu}}\eta_{\dot{\lambda}} \\
&= A^{\alpha}{}_{\mu}\underbrace{p^{\mu\dot{\lambda}}\eta_{\dot{\lambda}}}_{=m\xi^{\mu}} \\
&= mA^{\alpha}{}_{\mu}\xi^{\mu} \\
&= m\xi'^{\alpha},
\end{aligned}$$

de modo que a equação é invariante sob transformação de Lorentz (a demonstração da covariância da segunda equação do sistema (1.8) é absolutamente similar). Com relação à paridade obtemos:

$$\begin{aligned}
\left(\hat{p}^{\alpha\dot{\beta}}\eta_{\dot{\beta}}\right)' &= \left((-i)i\hat{p}_{\dot{\alpha}\beta}\right)\left(i\xi^{\beta}\right) \\
&= i\,\underbrace{\hat{p}_{\dot{\alpha}\beta}\xi^{\beta}}_{=m\eta_{\dot{\alpha}}} \\
&= m\xi'^{\alpha}.
\end{aligned}$$

Logo, esta equação também é invariante sob esta transformação (mostra-se de modo semelhante que a segunda equação do sistema (1.8) também é invariante por paridade).

Agora, observemos ainda que, eliminando $\eta_{\dot{\beta}}$ no sistema (1.8), temos

$$\hat{p}^{\alpha\dot{\beta}}\hat{p}_{\lambda\dot{\beta}}\xi^{\lambda} = m^2\xi^{\alpha},$$

porém, usando (A.24), segue

$$\hat{p}_{\mu}\hat{p}^{\mu}\xi^{\alpha} = m^2\xi^{\alpha}.$$

Assim, o parâmetro dimensional m deve ser interpretado como a massa da partícula, de modo que a equação acima corresponde à relação relativística de energia-momento (1.1). Efetuando o procedimento padrão de "primeira quantização", a equação acima assume a forma usual conhecida como **equação de Klein-Gordon**:

$$(\partial_{\mu}\partial^{\mu} + m^2)\xi^{\alpha} = 0. \tag{1.9}$$

Naturalmente, o spinor $\eta_{\dot{\beta}}$ também satisfaz a equação de Klein-Gordon.

A partir das equações (1.3) e (1.5) podemos reescrever o sitema (1.8) na forma matricial a seguir:

$$\left\{\begin{array}{rcl}(\hat{p}^0 I + \vec{\sigma}.\vec{\hat{p}})\dot{\tilde{\eta}} & = & m\xi, \\ (\hat{p}^0 I - \vec{\sigma}.\vec{\hat{p}})\xi & = & m\dot{\tilde{\eta}}.\end{array}\right. \tag{1.10}$$

Este sistema de equações compõe a **representação spinorial** da equação de Dirac.

Os quadrispinores ξ^α e $\eta_{\dot{\alpha}}$ são conhecidos como **spinores de Weyl** e as componentes de cada um destes spinores são funções de onda associadas às projeções $\pm 1/2$ da componente z do spin da partícula (ξ^1 e $\eta_{\dot{1}}$ associam-se à projeção $+1/2$; ξ^2 e $\eta_{\dot{2}}$ à projeção $-1/2$).

Embora nosso objetivo neste trabalho esteja voltado à análise do limite não-relativístico das equações de onda para férmions e bósons de spin 1/2 e 1, respectivamente, gostaríamos de enfatizar um resultado para férmions de spin 1/2 no limite ultrarrelativístico.

Com base no sistema (1.10) obtemos, para $m \to 0$ (que corresponde ao regime ultrarrelativístico $p^2 >> m^2$), as **equações de Weyl**:

$$\left\{\begin{array}{rcl}(\hat{p}^0 I + \vec{\sigma}.\vec{\hat{p}})\dot{\tilde{\eta}} & = & 0, \\ (\hat{p}^0 I - \vec{\sigma}.\vec{\hat{p}})\xi & = & 0,\end{array}\right.$$

ou, trabalhando na representação dos momentos

$$\left\{\begin{array}{rcl}(E + \vec{\sigma}.\vec{p})\dot{\tilde{\eta}} & = & 0, \\ (E - \vec{\sigma}.\vec{p})\xi & = & 0,\end{array}\right. \tag{1.11}$$

onde E e $\vec{p}$ são os autovalores de energia e momento.

Porém, a relação de energia-momento neste regime fica expressa por $E = \pm\,|\vec{p}|$. Desta forma, o sistema (1.11) fica:

$$\left\{\begin{array}{rcl}(\vec{\sigma}.\vec{p}/\,|\vec{p}|)\dot{\tilde{\eta}} & = & \mp\dot{\tilde{\eta}}, \\ (\vec{\sigma}.\vec{p}/|\vec{p}|)\xi & = & \pm\xi.\end{array}\right.$$

Definindo o **operador de helicidade** $\hat{\Lambda} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}.\hat{n}$, onde $\hat{n} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$ é o versor na direção de propagação da partícula, observa-se que os quadrispinores $\dot{\tilde{\eta}}$ e ξ são autovetores de helicidade com autovalores $\pm 1/2$, respectivamente. A helicidade da partícula é constante de movimento neste regime ultrarrelativístico!

Nesta discussão a respeito do limite ultrarrelativístico para a equação de Dirac, gostaríamos de ressaltar que, embora seja um fato bastante conhecido, as respectivas equações de Weyl são naturalmente desacopladas com relação aos spinores $\dot{\tilde{\eta}}$ e ξ. No capítulo 3, discutiremos a **transformação de Foldy--Wouthwysen (FW)** e verificaremos que no caso da equação de Dirac para a partícula livre é possível encontrarmos uma transformação unitária que desacopla exatamente os spinores $\dot{\tilde{\eta}}$ e ξ em qualquer escala de energia.

Entretanto, no limite ultrarrelativístico, os spinores permanecem desacoplados inclusive no caso em que temos um campo eletromagnético externo aplicado. De fato, efetuando a substituição clássica de acoplamento mínimo ($\hat{p}^\mu \to \hat{p}^\mu - eA^\mu$, onde $A^\mu = (\varphi, \vec{A})$ é o quadripotencial) nas equações de Weyl resulta:

$$\begin{cases} (\hat{p}^0 - e\varphi + \vec{\sigma}.(\vec{\hat{p}} - e\vec{A}))\dot{\tilde{\eta}} & = & 0, \\ (\hat{p}^0 - e\varphi - \vec{\sigma}.(\vec{\hat{p}} - \vec{A}))\xi & = & 0. \end{cases}$$

Por outro lado, em escalas de energia mais baixas não é possível desacoplarmos exatamente os quadrispinores na presença de interações com campos externos, pois esta interação introduz uma dependência temporal na equação através do quadripotencial. Contudo, discutiremos também no capítulo 3 que, mesmo neste cenário envolvendo interação no limite não relativístico, é possível desacoplarmos iterativamente os quadrispinores através da transformação FW.

1.1.1 Forma Hamiltoniana da Equação de Dirac

Os quadrispinores de Weyl $\eta_{\dot{\alpha}}$ e ξ^α são intercambiados pela transformação de paridade, como vimos na seção anterior. Dessa maneira, formam um objeto de quatro componentes denominado **bispinor** (de grau 1) que representaremos por ψ:

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \dot{\tilde{\eta}} \end{pmatrix}. \tag{1.12}$$

As quatro componentes do bispinor ψ constituem uma realização de uma das representações do **grupo de Lorentz estendido** (que engloba transformações de Lorentz e simetrias discretas como C, P e T).

Dessa forma, podemos buscar uma representação mais compacta do sistema (1.10) da seguinte forma:

$$\hat{p}_\mu \gamma^\mu_{rs} \psi_s - m\psi_r = 0, \tag{1.13}$$

ou, em forma matricial

$$(\hat{p}_\mu \gamma^\mu - m)\psi = 0, \tag{1.14}$$

onde ψ é o bispinor definido por (1.12) e as matrizes γ são escritas na forma

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{bmatrix}.$$

As matrizes σ que comparecem na definição das matrizes γ acima são as matrizes de Pauli. Observemos que a matriz γ^0 é hermitiana e as matrizes γ^i são anti-hermitianas.

Podemos construir outras representações da equação de Dirac através de transformações unitárias. Assim, efetuamos uma "mudança de base" no spinor ψ através da transformação unitária U:

$$\psi^{'} = U\psi. \tag{1.15}$$

Para mantermos a equação (1.14) invariante, as matrizes γ^μ devem se transformar como segue:

$$(\gamma^\mu \hat{p}_\mu - m)\psi = 0 \rightarrow (U\gamma^\mu U^+ \hat{p}_\mu - m)\psi^{'} = 0$$

$$\Rightarrow \gamma^{'\mu} = U\gamma^\mu U^+. \tag{1.16}$$

Escolhendo a transformação particular $U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, obtemos a **representação padrão** das matrizes γ e do spinor ψ:

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \xi + \dot{\eta} \\ \xi - \dot{\eta} \end{pmatrix}, \tag{1.17}$$

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.18}$$

Doravante, em nosso texto, estaremos trabalhando sempre na representação padrão (a menos que mencionemos explicitamente outra representação).

As matrizes γ^μ, em uma representação arbitrária, devem ser consistentes com a relação de energia-momento (1.1). Dessa forma, atuando com o operador $\gamma^\nu \hat{p}_\nu$ em (1.14) temos

$$\gamma^\nu \gamma^\mu \hat{p}_\nu \hat{p}_\mu \psi - m\gamma^\nu \hat{p}_\nu \psi = 0,$$

de modo que, simetrizando o primeiro termo e usando (1.14) no segundo, obtemos

$$\left(\frac{1}{2}(\gamma^\nu\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^\nu)\hat{p}_\mu\hat{p}_\nu - m^2\right)\psi = 0.$$

Logo, as matrizes γ^μ devem satisfazer a **álgebra de Clifford**

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \tag{1.19}$$

onde as chaves denotam o anticomutador entre as respectivas matrizes.

Podemos ainda definir uma matriz auxiliar hermitiana (que exerce papel importante no contexto da simetria quiral) denotada por γ^5:

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.20}$$

Usando as relações de comutação (1.19) pode-se mostrar que

$$\left\{\gamma^5, \gamma^\mu\right\} = 0 \quad \text{e} \quad (\gamma^5)^2 = 1. \tag{1.21}$$

Agora, multiplicando (1.14) à esquerda por γ^0 e usando a representação do operador $\hat{p}_\mu$ no espaço das posições, temos

$$(i\frac{\partial}{\partial t} + i\gamma^0\gamma^i\nabla_i - m\gamma^0)\psi = 0$$

$$\Rightarrow i\frac{\partial}{\partial t}\psi = (\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}} + m\beta)\psi, \tag{1.22}$$

onde $\alpha^i \equiv \gamma^0\gamma^i$, $\beta \equiv \gamma^0$ e $\hat{\vec{p}} = -i\vec{\nabla}$ é o operador momento usual.

A equação (1.22) acima consiste na **representação hamiltoniana** da equação de Dirac e será útil para estudarmos o limite não relativístico da teoria de Dirac através das transformações FW no capítulo 3.

A partir da álgebra de Clifford expressa em (1.19), verifica-se que as matrizes α^i e β satisfazem as seguintes relações algébricas:

$$\left\{\alpha^i, \alpha^j\right\} = 2\delta^i{}_j, \tag{1.23}$$

$$\left\{\alpha^i, \beta\right\} = 0, \tag{1.24}$$

$$\beta^2 = 1. \tag{1.25}$$

As relações de comutação entre as matrizes γ^5 e α^i, β são obtidas a partir de (1.21):

$$[\gamma^5, \alpha^i] = 0, \tag{1.26}$$

$$\left\{\gamma^5, \beta\right\} = 0. \tag{1.27}$$

Além disso, o **operador de spin** (no referencial de repouso) da teoria de Dirac pode ser definido em termos das matrizes γ^5 e α^i

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{\alpha}\gamma^5 = \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\vec{\sigma}}{2} \end{pmatrix}. \tag{1.28}$$

A seguir, gostaríamos de analisar a **quadricorrente conservada** da teoria de Dirac. Para isso, precisamos definir o **(bi)spinor adjunto**:

$$\bar{\psi} = \psi^{+}\gamma^{0}. \tag{1.29}$$

Agora, tomando o conjugado hermitiano de (1.14) e multiplicando à direita por γ^0, verifica-se (observando as propriedades de hermiticidade das matrizes γ e usando (1.19)) que o spinor adjunto satisfaz a seguinte equação:

$$\bar{\psi}(\gamma^{\mu}\hat{p}_{\mu} + m) = 0, \tag{1.30}$$

onde o operador $\hat{p}_\mu$ atua sobre o spinor à esquerda.

Dessa forma, multiplicando (1.14) por $\bar{\psi}$ à esquerda e (1.30) por ψ à direita e somando, resulta:

$$\bar{\psi}\gamma^{\mu}(\hat{p}_{\mu}\psi) + \psi\gamma^{\mu}(\hat{p}_{\mu}\bar{\psi}) = 0,$$
$$\Rightarrow \hat{p}_{\mu}(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi) = 0,$$

que corresponde à equação de continuidade. Assim, a quadricorrente conservada fica expressa, a menos de uma constante multiplicativa, por

$$\Rightarrow j^{\mu} = \bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi. \tag{1.31}$$

Analisando as componentes da quadricorrente temos:

$j^0 \equiv \rho = \psi^{+}(\gamma^0)^2\psi = \psi^{+}\psi,$ que representa a **densidade de probabilidade**;

$j^i = \psi^{+}\underbrace{\gamma^0\gamma^i}_{\alpha^i}\psi = \psi^{+}\alpha^i\psi,$ que representa a **corrente de probabilidade**.

Assim, com base na expressão da corrente de probabilidade, é interessante observarmos que o operador $\vec{\alpha}$ pode ser interpretado como a **"velocidade"** da partícula[1]. Dessa forma, embora seja bastante sugestivo, gostaríamos de registrar que a hamiltoniana (1.22) é composta por dois termos com interpretações bastante claras: $\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}$ é o termo relativo à energia cinética e $m\beta$ é o termo relativo à energia de repouso.

Agora, integrando a equação de continuidade sobre todo espaço obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho dv - \int \vec{\nabla}.\vec{j}dv = 0,$$

[1] Entretanto, deve-se ter cuidado com relação a esta interpretação, pois observa-se facilmente a partir da representação padrão da matriz $\vec{\alpha}$ que seus autovalores são ± 1, o que sugere que as partículas de Dirac propagam-se com velocidade luminar. Na verdade, o operador velocidade genuíno consiste na parte ímpar da matriz $\vec{\alpha}$ conforme discutido nas referências [32] e [34] às quais remetemos o leitor interessado no desenvolvimento detalhado deste tópico que, por questão de concisão deste trabalho, omitiremos.

de modo que, utilizando o teorema de Green e exigindo que a "função de onda" se anule sobre uma superfície que tende a infinito, segue

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho dv - \underbrace{\oint \vec{j}.\hat{n} dS}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\int \psi^{+}\psi dv = 0,$$

e, dessa forma, a **integral invariante** da teoria de Dirac fica expressa por $\int \psi^{+}\psi dv$ que corresponde à probabilidade de encontrarmos a partícula em algum ponto no espaço.

1.1.2 Soluções de Onda Plana

A solução mais simples da equação de Dirac (1.14) consiste em ondas planas. Dessa forma, vamos escrever esta solução da seguinte maneira:

$$\psi^{(r)} = \frac{1}{\sqrt{2E}} u^{(r)} e^{-i\epsilon_r p_\mu x^\mu}, \tag{1.32}$$

onde $r = 1, 2, 3, 4$ identifica as 4 soluções linearmente independentes e

$$\epsilon_r = \begin{cases} +1, & \text{se } r = 1, 2, \\ -1, & \text{se } r = 3, 4. \end{cases}$$

A amplitude da onda é caracterizada pelo bispinor $u^{(r)}$ e o fator de $1/\sqrt{2E}$ (onde E é a energia total da partícula) foi introduzido por conveniência.

A partir de (1.32) verifica-se que as "funções de onda" ψ^1 e ψ^2 apresentam momento $\vec{p}$ e frequência positiva, ao passo que as funções ψ^3 e ψ^4 apresentam momento $-\vec{p}$ e frequência negativa (sendo que as duas últimas estão relacionadas à antipartícula, com energia naturalmente positiva).

Substituindo (1.32) em (1.14) temos a equação satisfeita pela amplitude $u^{(r)}$:

$$\left(i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\gamma^i \nabla_i\right) \frac{1}{\sqrt{2E}} u^{(r)} e^{-i\epsilon_r p_\mu x^\mu} = \frac{m}{\sqrt{2E}} u^{(r)} e^{-i\epsilon_r p_\mu x^\mu}$$

$$\Rightarrow \left(\epsilon_r \gamma^\mu p_\mu - m\right) u^{(r)} = 0, \tag{1.33}$$

onde p_μ são os autovalores do operador $\hat{p}_\mu$.

Definimos a condição de normalização dos bispinores $u^{(r)}$ da seguinte forma:

$$\bar{u}^{(+)} u^{(+)} = 2m, \tag{1.34}$$

$$\bar{u}^{(-)}u^{(-)} = -2m, \tag{1.35}$$

onde $(+)$ e $(-)$ denotam, respectivamente, $r = 1, 2$ e $r = 3, 4$ e $\bar{u}^{(\pm)}$ são bispinores adjuntos a $u^{(\pm)}$ definidos como em (1.29).

Com esta normalização, observemos que, multiplicando (1.33) à esquerda por $\bar{u}^{(r)}$

$$\epsilon_r \bar{u}^{(r)}\gamma^\mu p_\mu u^{(r)} - m \underbrace{\bar{u}^{(r)}u^{(r)}}_{2m\epsilon_r} = 0$$

$$\Rightarrow \bar{u}^{(r)}\gamma^\mu u^{(r)} p_\mu = 2m^2,$$

de modo que, para recuperarmos a relação de energia-momento (1.1) temos

$$\bar{u}^{(r)}\gamma^\mu u^{(r)} = 2p^\mu. \tag{1.36}$$

Logo, analisando o quadrivetor corrente j^μ definido em (1.31), resulta

$$j^\mu = \frac{1}{2E}\bar{u}^{(r)}\gamma^\mu u^{(r)} = \frac{p^\mu}{E}. \tag{1.37}$$

Assim, a densidade de partículas é $j^0 = 1$, ou seja, a condição de normalização definida em (1.34) e (1.35) restringe a densidade a uma partícula por unidade de volume.

Vamos agora especificar a solução de onda plana na representação padrão. Dessa forma, desenvolvendo a equação (1.14) com o auxílio de (1.17) e (1.18), temos

$$\left\{ \begin{array}{rcl} E\phi - \vec{\sigma}.\vec{p}\chi & = & m\phi, \\ -E\chi + \vec{\sigma}.\vec{p}\phi & = & m\chi. \end{array} \right. \tag{1.38}$$

Portanto, temos as seguintes relações equivalentes entre ϕ e χ:

$$\phi = \frac{\vec{\sigma}.\vec{p}}{E-m}\chi, \tag{1.39}$$

$$\chi = \frac{\vec{\sigma}.\vec{p}}{E+m}\phi. \tag{1.40}$$

Dessa maneira, escolhendo $\phi = (\sqrt{E+m})K$, sendo K é um vetor coluna arbitrário (dependente do tempo e das coordenadas espaciais), temos

$$\chi = \left(\frac{\sqrt{E+m}}{E+m}\right)\vec{\sigma}.\vec{p}K = \left(\sqrt{E-m}\right)\vec{\sigma}.\hat{n}K,$$

onde usamos (1.1) para obter a última expressão, sendo $\hat{n} = \vec{p}/\left|\vec{p}\right|$ o versor na direção de propagação da onda. Assim, podemos construir os bispinores $u^{(+)}$ como segue:

$$u^{(+)} = \begin{pmatrix} \sqrt{E+m}K_{(+)} \\ \sqrt{E-m}\vec{\sigma}.\hat{n}K_{(+)} \end{pmatrix}, \tag{1.41}$$

onde $K_{(+)} = \sqrt{2E}Ke^{ip_\mu x^\mu}$.

Agora, usando (1.34) obtemos a relação de normalização para $K_{(+)}$:

$$\bar{u}^{(+)}u^{(+)} = (E+m)K_{(+)}K_{(+)}^{+} - (E-m)K_{(+)}^{+}(\vec{\sigma}.\hat{n})^2K_{(+)} = 2m$$

$$\Rightarrow K_{(+)}K_{(+)}^{+} = 1. \tag{1.42}$$

Os bispinores $u^{(-)}$ podem ser construídos a partir dos bispinores $u^{(+)}$ através da inversão do quadrimomento p^μ ($p^\mu \to -p^\mu$). Observemos que, efetuando esta troca nas equações (1.39) e (1.40), temos um intercâmbio entre os spinores ϕ e χ que compõem a solução $u^{(+)}$ (ou seja, $\chi_{(-)} = \phi_{(+)}$ e $\chi_{(+)} = \phi_{(-)}$) de modo que a solução $u^{(-)}$ fica

$$u^{(-)} = \begin{pmatrix} \sqrt{E-m}\vec{\sigma}.\hat{n}K_{(-)} \\ \sqrt{E+m}K_{(-)} \end{pmatrix}, \tag{1.43}$$

onde $K_{(-)} = \sqrt{2E}Ke^{-ip_\mu x^\mu}$. Usando (1.35) podemos mostrar, de modo análogo ao que fizemos para $u_{(+)}$, a relação de normalização para $K_{(-)}$:

$$K_{(-)}K_{(-)}^{+} = 1. \tag{1.44}$$

As equações (1.41) e (1.43) expressam as amplitudes da solução de onda plana em um referencial inercial genérico. Vamos analisar agora as soluções no referencial de repouso da partícula, pois o procedimento para construção de equações de onda para partículas com spin genérico, devido a Bargmann e Wigner, que discutiremos a seguir, tem como ponto de partida estas soluções. Assim, fazendo $E = m$ em (1.41) e (1.43), temos

$$u^{(+)} = \sqrt{2m}\begin{pmatrix} K_{(+)} \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{1.45}$$

$$u^{(-)} = \sqrt{2m}\begin{pmatrix} 0 \\ K_{(-)} \end{pmatrix}, \tag{1.46}$$

ou seja, as componentes baixas da amplitude de onda de frequência positiva se anulam no referencial de repouso, assim como as componentes altas da amplitude de onda de frequência negativa.

Para construirmos quatro soluções linearmente independentes, associadas às projeções $\pm 1/2$ da componente z do spin das ondas planas de frequências positiva ou negativa, definimos os vetores coluna $K_{(\pm)}$ da seguinte forma:

$$K_1 = K_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \text{associados a } s_z = 1/2, \tag{1.47}$$

$$K_2 = K_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \text{associados a } s_z = -1/2. \tag{1.48}$$

Assim, substituindo (1.47) e (1.48) nos respectivos bispinores definidos em (1.45) e (1.46) e aplicando em (1.32), temos as soluções de onda plana no referencial de repouso:

$$\psi^1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt} \equiv w^1(0)e^{-imt}, \tag{1.49}$$

$$\psi^2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt} \equiv w^2(0)e^{-imt}, \tag{1.50}$$

$$\psi^3(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{imt} \equiv w^3(0)e^{imt}, \tag{1.51}$$

$$\psi^4(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{imt} \equiv w^4(0)e^{imt}. \tag{1.52}$$

Retornando agora às equações (1.41) e (1.43) e aplicando as definições estabelecidas em (1.47) e (1.48), podemos escrever as soluções de onda plana em um referencial inercial arbitrário, como segue:

$$\psi^1(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E+m}{2E}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ p^3/(E+m) \\ p^{(+)}/(E+m) \end{pmatrix} e^{-ip_\mu x^\mu} \equiv \sqrt{\frac{E+m}{2E}} w^1(\vec{p})e^{-ip_\mu x^\mu}, \tag{1.53}$$

$$\psi^2(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E+m}{2E}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ p^{(-)}/(E+m) \\ -p^3/(E+m) \end{pmatrix} e^{-ip_\mu x^\mu} \equiv \sqrt{\frac{E+m}{2E}} w^2(\vec{p}) e^{-ip_\mu x^\mu}, \tag{1.54}$$

$$\psi^3(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E+m}{2E}} \begin{pmatrix} p^3/(E+m) \\ p^{(+)}/(E+m) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ip_\mu x^\mu} \equiv \sqrt{\frac{E+m}{2E}} w^3(\vec{p}) e^{ip_\mu x^\mu}, \tag{1.55}$$

$$\psi^4(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E+m}{2E}} \begin{pmatrix} p^{(-)}/(E+m) \\ -p^3/(E+m) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ip_\mu x^\mu} \equiv \sqrt{\frac{E+m}{2E}} w^4(\vec{p}) e^{ip_\mu x^\mu}, \tag{1.56}$$

onde $p^{(+)} = p^1 + ip^2$ e $p^{(-)} = p^1 - ip^2$.

Por fim, a partir das equações (1.49)-(1.56), pode-se construir a matriz que efetua um *boost* das soluções no referencial de repouso para as soluções num referencial com momento $\vec{p}$, i.e., $\psi(\vec{p}) = S(A(\vec{p}))\psi(0)$, de modo que

$$S(A(\vec{p})) = \sqrt{\frac{E+m}{2E}} \left(w^1(\vec{p}) w^2(\vec{p}) w^3(\vec{p}) w^4(\vec{p}) \right). \tag{1.57}$$

1.2 As Equações de Bargmann-Wigner

A partir das soluções de onda plana da equação de Dirac, é possível construirmos spinores cujas componentes são funções de onda que descrevem partículas com spins mais altos, bem como as equações de onda que governam o comportamento destas partículas. O procedimento para essa construção foi proposto por V. Bargmann e E. P. Wigner (1948)[2] e vamos apresentá-lo a seguir.

As amplitudes das soluções de onda plana da equação de Dirac no referencial de repouso, expressas em (1.49)-(1.52), podem ser escritas de forma compacta como $w_\alpha^{(r)}(0) = \delta^r{}_\alpha$, onde $r, \alpha = 1, 2, 3, 4$. Com base nestas amplitudes, podemos construir um **multispinor** $w^{'(r)}$ definido pelo **produto direto** de $2s$ bispinores $w^{(r)}(0)$:

$$w^{'(r)}(0) = w^{(r_1)}(0) \otimes w^{(r_2)}(0) \otimes ... \otimes w^{(r_{2s})}(0), \tag{1.58}$$

[2]Embora, em 1943, L. de Broglie tenha proposto um procedimento similar denominado método de fusão, utilizado em sua teoria quântica da luz (referências [28], [36] e [37]).

onde $r_1, r_2, ..., r_{2s} = 1, 2, 3, 4$.

Porém, para que possamos trabalhar com **representações irredutíveis**, precisamos simetrizar o multispinor (1.58) (como apresentado no apêndice A). Desta forma, definimos o multispinor simétrico $\breve{w}^{(r)}(0)$ como a soma sobre todas as permutações dos índices de $w'^{(r)}(0)$:

$$\breve{w}^{(r)}(0) = \sum_p w'^{(r)}(0), \tag{1.59}$$

ou, em componentes,

$$\breve{w}^{(r)}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{2s}}(0) = \sum_p w^{(r_1)}_{\alpha_1}(0) w^{(r_2)}_{\alpha_2}(0) ... w^{(r_{2s})}_{\alpha_{2s}}(0). \tag{1.60}$$

Vamos explicitar alguns multispinores $\breve{w}^{(+)}(0)$ associados às amplitudes de onda das soluções de frequência positiva (ou seja, para $r, r_1, ..., r_{2s} = 1, 2$). Para isto, vamos introduzir um contador n que determina o número de bispinores base ($w^{(r)}(0)$) que apresentam $r = 2$ (ou seja, n expressa o número de bispinores $w^2(0)$ que compõe o produto direto em (1.58)):

$$\breve{w}^{(+)}(0; n = 0) = w^1(0) \otimes w^1(0) \otimes ... \otimes w^1(0)$$

$$\breve{w}^{(+)}(0; n = 1) = \sum_p w^2(0) \otimes w^1(0) \otimes ... \otimes w^1(0)$$

$$\vdots$$

Assim, escrevendo alguns dos multispinores $\breve{w}^{(+)}(0, n)$ para ilustração, temos

$$\breve{w}^{(+)}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{2s}}(0; n = 0) = \delta^1{}_{\alpha_1} \delta^1{}_{\alpha_2} ... \delta^1{}_{\alpha_{2s}},$$

$$\begin{aligned} \breve{w}^{(+)}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{2s}}(0; n = 1) \quad = \quad & \delta^2{}_{\alpha_1} \delta^1{}_{\alpha_2} ... \delta^1{}_{\alpha_{2s}} + \delta^1{}_{\alpha_1} \delta^2{}_{\alpha_2} ... \delta^1{}_{\alpha_{2s}} + \\ & ... + \delta^1{}_{\alpha_1} \delta^1{}_{\alpha_2} ... \delta^2{}_{\alpha_{2s}}, \end{aligned}$$

$$\breve{w}^{(+)}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{2s}}(0; n = 2s) = \delta^2{}_{\alpha_1} \delta^2{}_{\alpha_2} ... \delta^2{}_{\alpha_{2s}}.$$

Agora, podemos construir também o **operador de spin** que atua sobre os multispinores $\breve{w}^{(r)}(0)$ com base no operador definido em (1.28):

$$\frac{1}{2}\vec{\Sigma}_{m;\alpha_1\alpha_1'\alpha_2\alpha_2'...\alpha_{2s}\alpha_{2s}'} = \frac{1}{2}\vec{\Sigma}_{\alpha_1\alpha_1'}\delta^{\alpha_2}{}_{\alpha_2'}...\delta^{\alpha_{2s}}{}_{\alpha_{2s}'} + \frac{1}{2}\delta^{\alpha_1}{}_{\alpha_1'}\vec{\Sigma}_{\alpha_2\alpha_2'}...\delta^{\alpha_{2s}}{}_{\alpha_{2s}'} + ...$$
$$... + \frac{1}{2}\delta^{\alpha_1}{}_{\alpha_1'}\delta^{\alpha_2}{}_{\alpha_2'}...\vec{\Sigma}_{\alpha_{2s}\alpha_{2s}'}, \tag{1.61}$$

ou, em forma matricial,

$$\frac{1}{2}\vec{\Sigma}_m = \frac{1}{2}\vec{\Sigma}\otimes I\otimes ...\otimes I + ... + I\otimes I\otimes ...\otimes\frac{1}{2}\vec{\Sigma},$$

onde o índice subscrito m no membro esquerdo diferencia o operador de spin que atua sobre os multispinores do operador $\vec{\Sigma}$ que comparece à direita e atua sobre os bispinores, os quais compõem os multispinores.

Por construção, os multispinores $\breve{w}^{(+)}(0,n)$ são autovetores do operador $S_z \equiv \frac{1}{2}\Sigma_m^{(3)}$, com autovalores $s-n$. Com efeito, temos que o multispinor (não simétrico) $w^{'(+)}(0,n)$ é composto pelo produto direto de $2s-n$ bispinores w^1 e n bispinores w^2. Assim, segue que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Sigma_m^{(3)}w^{'(+)}(0,n) &= \left[(2s-n)\frac{1}{2}+n(\frac{-1}{2})\right]w^{'(+)}(0,n)\\ &= (s-n)w^{'(+)}(0,n).\end{aligned}$$

Logo, para o multispinor simétrico $\breve{w}^{(+)}(0,n)$, temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Sigma_m^{(3)}\breve{w}^{(+)}(0,n) &= \frac{1}{2}\Sigma_m^{(3)}\left(\sum_p w^{'(+)}(0,n)\right)\\ &= \sum_p\left(\frac{1}{2}\Sigma_m^{(3)}w^{'(+)}(0,n)\right)\\ &= (s-n)\sum_p w^{'(+)}(0,n)\\ &= (s-n)\breve{w}^{(+)}(0,n).\end{aligned} \tag{1.62}$$

Assim, o operador $\frac{1}{2}\Sigma_m^{(3)}$ apresenta $2s+1$ autovetores $\breve{w}^{(+)}(0,n)$ e seus autovalores são $-s,-s+1,...,0,...,s-1,s$.

Para assegurarmos que os multispinores $\breve{w}^{(+)}(0,n)$ carregam, efetivamente, toda a informação de uma partícula de spin s, precisamos analisar ainda o operador de spin quadrático $\frac{1}{4}(\vec{\Sigma}_m)^2$. Usando (1.61), escrevemos explicitamente a expressão em componentes para este operador:

$$\frac{1}{4}(\vec{\Sigma}_m)^2_{\alpha_1\alpha_1'\alpha_2\alpha_2'...\alpha_{2s}\alpha_{2s}'} = \frac{1}{4}\left(\vec{\Sigma}_{m;\alpha_1\alpha_1''\alpha_2\alpha_2''...\alpha_{2s}\alpha_{2s}''}\right)\cdot\left(\vec{\Sigma}_{m;\alpha_1''\alpha_1'\alpha_2''\alpha_2'...\alpha_{2s}''\alpha_{2s}'}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\vec{\Sigma}_{\alpha_1\alpha_1''}\delta^{\alpha_2}{}_{\alpha_2''}...\delta^{\alpha_{2s}}{}_{\alpha_{2s}''} + \delta^{\alpha_1}{}_{\alpha_1''}\vec{\Sigma}_{\alpha_2\alpha_2''}...\delta^{\alpha_{2s}}{}_{\alpha_{2s}''} + ... + \delta^{\alpha_1}{}_{\alpha_1''}\delta^{\alpha_2}{}_{\alpha_2''}...\vec{\Sigma}_{\alpha_{2s}\alpha_{2s}''}\right).$$
$$.\left(\vec{\Sigma}_{\alpha_1''\alpha_1'}\delta^{\alpha_2''}{}_{\alpha_2'}...\delta^{\alpha_{2s}''}{}_{\alpha_{2s}'} + \delta^{\alpha_1''}{}_{\alpha_1'}\vec{\Sigma}_{\alpha_2''\alpha_2'}...\delta^{\alpha_{2s}''}{}_{\alpha_{2s}'} + ... + \delta^{\alpha_1''}{}_{\alpha_1'}\delta^{\alpha_2''}{}_{\alpha_2'}...\vec{\Sigma}_{\alpha_{2s}''\alpha_{2s}'}\right)$$

$$\begin{aligned} = \quad & \frac{1}{4}(\underbrace{\vec{\Sigma}_{\alpha_1\alpha_1''}.\vec{\Sigma}_{\alpha_1''\alpha_1'}}_{=(\vec{\Sigma})^2_{\alpha_1\alpha_1'}}\delta^{\alpha_2}{}_{\alpha_2'}...\delta^{\alpha_{2s}}{}_{\alpha_{2s}'} + \vec{\Sigma}_{\alpha_1\alpha_1'}.\vec{\Sigma}_{\alpha_2\alpha_2'}\delta^{\alpha_3}{}_{\alpha_3'}...\delta^{\alpha_{2s}}{}_{\alpha_{2s}'} + ... \\ & +\vec{\Sigma}_{\alpha_1\alpha_1'}.\vec{\Sigma}_{\alpha_{2s}\alpha_{2s}'}\delta^{\alpha_2}{}_{\alpha_2'}...\delta^{\alpha_{2s-1}}{}_{\alpha_{2s-1}'} + ... + \vec{\Sigma}_{\alpha_2\alpha_2'}.\vec{\Sigma}_{\alpha_1\alpha_1'}\delta^{\alpha_3}{}_{\alpha_3'}...\delta^{\alpha_{2s}}{}_{\alpha_{2s}'} \\ & + \underbrace{\vec{\Sigma}_{\alpha_2\alpha_2''}.\vec{\Sigma}_{\alpha_2''\alpha_2'}}_{=(\vec{\Sigma})^2_{\alpha_2\alpha_2'}}\delta^{\alpha_1}{}_{\alpha_1'}...\delta^{\alpha_{2s}}{}_{\alpha_{2s}'} + ... + \vec{\Sigma}_{\alpha_2\alpha_2'}.\vec{\Sigma}_{\alpha_{2s}\alpha_{2s}'}\delta^{\alpha_1}{}_{\alpha_1'}...\delta^{\alpha_{2s-1}}{}_{\alpha_{2s-1}'} + ... \\ & +\vec{\Sigma}_{\alpha_{2s}\alpha_{2s}'}.\vec{\Sigma}_{\alpha_1\alpha_1'}\delta^{\alpha_2}{}_{\alpha_2'}...\delta^{\alpha_{2s-1}}{}_{\alpha_{2s-1}'} + \vec{\Sigma}_{\alpha_{2s}\alpha_{2s}'}.\vec{\Sigma}_{\alpha_2\alpha_2'}\delta^{\alpha_1}{}_{\alpha_1'}...\delta^{\alpha_{2s-1}}{}_{\alpha_{2s-1}'} + ... \\ & + \underbrace{\vec{\Sigma}_{\alpha_{2s}\alpha_{2s}''}.\vec{\Sigma}_{\alpha_{2s}''\alpha_{2s}'}}_{=(\vec{\Sigma})^2_{\alpha_{2s}\alpha_{2s}'}}\delta^{\alpha_1}{}_{\alpha_1'}...\delta^{\alpha_{2s-1}}{}_{\alpha_{2s-1}'}). \end{aligned}$$

Separando os termos cruzados dos termos quadráticos e suprimindo os fatores delta para simplificar a expressão, podemos então escrever

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(\vec{\Sigma})^2_{\alpha_1\alpha_1'\alpha_2\alpha_2'...\alpha_{2s}\alpha_{2s}'} \quad = \quad & \frac{1}{4}((\vec{\Sigma})^2_{\alpha_1\alpha_1'} + (\vec{\Sigma})^2_{\alpha_2\alpha_2'} + ... + (\vec{\Sigma})^2_{\alpha_{2s}\alpha_{2s}'}) + \\ & +\frac{1}{4}(\vec{\Sigma}_{\alpha_1\alpha_1'}.\vec{\Sigma}_{\alpha_2\alpha_2'} + ... + \vec{\Sigma}_{\alpha_1\alpha_1'}.\vec{\Sigma}_{\alpha_{2s}\alpha_{2s}'} + \\ & +\vec{\Sigma}_{\alpha_2\alpha_2'}.\vec{\Sigma}_{\alpha_1\alpha_1'} + ... + \vec{\Sigma}_{\alpha_2\alpha_2'}.\vec{\Sigma}_{\alpha_{2s}\alpha_{2s}'} + ... \\ & +\vec{\Sigma}_{\alpha_{2s}\alpha_{2s}'}.\vec{\Sigma}_{\alpha_1\alpha_1'} + ... + \vec{\Sigma}_{\alpha_{2s}\alpha_{2s}'}.\vec{\Sigma}_{\alpha_{2s-1}\alpha_{2s-1}'}). \end{aligned} \tag{1.63}$$

Atuando este operador sobre o multispinor não simétrico $w^{'(+)}(0,n)$ definido por

$$w^{'(+)}_{\alpha_1...\alpha_{2s}}(0,n) = \delta^1{}_{\alpha_1}\delta^1{}_{\alpha_2}...\delta^1{}_{\alpha_{2s-n}}\delta^2{}_{\alpha_{2s-n+1}}...\delta^2{}_{\alpha_{2s}},$$

obtemos

$$\frac{1}{4}(\vec{\Sigma}_m)^2_{\alpha_1\alpha_1'...\alpha_{2s}\alpha_{2s}'}w^{'(+)}_{\alpha_1'...\alpha_{2s}'}(0,n) = \frac{1}{4}(\vec{\Sigma}_m)^2_{\alpha_1\alpha_1'...\alpha_{2s}\alpha_{2s}'}(\delta^1{}_{\alpha_1'}\delta^1{}_{\alpha_2'}...\delta^1{}_{\alpha_{2s-n}'}...\delta^2{}_{\alpha_{2s}'}).$$

Contudo, para efetuar este cálculo, vamos analisar cuidadosamente cada termo da expressão (1.63) que atua sobre o multispinor não simétrico que acabamos de introduzir. Assim, começamos pelos "termos quadráticos" do primeiro membro:

$$(\vec{\Sigma})^2_{\alpha_i\alpha_i^{'}} w^{'(+)}_{\alpha_1^{'}...\alpha_i^{'}...\alpha_{2s}^{'}}(0,n) = ((\Sigma_1)^2_{\alpha_i\alpha_i^{'}} + (\Sigma_2)^2_{\alpha_i\alpha_i^{'}} + (\Sigma_3)^2_{\alpha_i\alpha_i^{'}}) w^{'(+)}_{\alpha_1^{'}...\alpha_i^{'}...\alpha_{2s}^{'}}(0,n).$$

Porém, da álgebra das matrizes de Pauli, sabemos que $(\Sigma_k)^2_{\alpha_i\alpha_i^{'}} = \delta^{\alpha_i}{}_{\alpha_i^{'}}$, onde $k = 1, 2, 3$. Logo,

$$(\vec{\Sigma})^2_{\alpha_i\alpha_i^{'}} w^{'(+)}_{\alpha_1^{'}...\alpha_i^{'}...\alpha_{2s}^{'}}(0,n) = 3w^{'(+)}_{\alpha_1...\alpha_i...\alpha_{2s}}(0,n). \tag{1.64}$$

No primeiro membro da equação (1.63) temos $2s$ termos deste tipo.

A seguir, vamos analisar a atuação do termo $\vec{\Sigma}_{\alpha_1\alpha_1^{'}}.\vec{\Sigma}_{\alpha_2\alpha_2^{'}}$:

$$\vec{\Sigma}_{\alpha_1\alpha_1^{'}}.\vec{\Sigma}_{\alpha_2\alpha_2^{'}} w^{'(+)}_{\alpha_1^{'}\alpha_2^{'}...\alpha_{2s}^{'}}(0,n) = \Big((\Sigma_1)_{\alpha_1\alpha_1^{'}}(\Sigma_1)_{\alpha_2\alpha_2^{'}} + (\Sigma_2)_{\alpha_1\alpha_1^{'}}(\Sigma_2)_{\alpha_2\alpha_2^{'}} +$$

$$+(\Sigma_3)_{\alpha_1\alpha_1^{'}}(\Sigma_3)_{\alpha_2\alpha_2^{'}}\Big)(\delta^1{}_{\alpha_1^{'}}\delta^1{}_{\alpha_2^{'}}...\delta^1{}_{\alpha_{2s-n}^{'}}\delta^2{}_{\alpha_{2s-n+1}^{'}}...\delta^2{}_{\alpha_{2s}^{'}})$$

$$\begin{aligned}
&= ((\Sigma_1)_{\alpha_1 1}(\Sigma_1)_{\alpha_2 1} + (\Sigma_2)_{\alpha_1 1}(\Sigma_2)_{\alpha_2 1} + (\Sigma_3)_{\alpha_1 1}(\Sigma_3)_{\alpha_2 1}). \\
&\quad .(\delta^1{}_{\alpha_3}...\delta^1{}_{\alpha_{2s-n}}\delta^2{}_{\alpha_{2s-n+1}}...\delta^2{}_{\alpha_{2s}}) \\
&= (\delta^2{}_{\alpha_1}\delta^2{}_{\alpha_2} + (i\delta^2{}_{\alpha_1})(i\delta^2{}_{\alpha_2}) + \delta^1{}_{\alpha_1}\delta^1{}_{\alpha_2}). \\
&\quad .(\delta^1{}_{\alpha_3}...\delta^1{}_{\alpha_{2s-n}}\delta^2{}_{\alpha_{2s-n+1}}...\delta^2{}_{\alpha_{2s}}) \\
&= \delta^1{}_{\alpha_1}\delta^1{}_{\alpha_2}...\delta^1{}_{\alpha_{2s-n}}\delta^2{}_{\alpha_{2s-n+1}}...\delta^2{}_{\alpha_{2s}} \\
&= w^{'(+)}_{\alpha_1...\alpha_{2s}}(0,n).
\end{aligned} \tag{1.65}$$

Observação: enfatizamos que, na expressão acima, os índices suprimidos nos termos entre parênteses estão associados a deltas de Kronecker e explicitamos apenas os índices relacionados aos operadores $\vec{\Sigma}$ em cada termo.

Agora, observemos que este termo envolve o produto de dois operadores que atuam sobre bispinores do tipo $w^1(0)$ que compõem o multispinor $w^{'(+)}(0,n)$ que definimos. De fato, analisando a expressão em componentes do multispinor verificamos que os índices α_1 e α_2 estão associados a $\delta^1{}_{\alpha_1}$ e $\delta^1{}_{\alpha_2}$, que são efetivamente componentes de bispinores $w^1(0)$.

Dessa forma, estudando as componentes do operador (1.63) e do multispinor $w^{'(+)}(0,n)$, verifica-se que temos $2s-n-1$ termos deste tipo em cada uma das $2s-n$ primeiras linhas do segundo membro de (1.63) (que corresponde ao "bloco" dos termos cruzados), de modo que resulta um total de $(2s-n-1)(2s-n)$ termos semelhantes.

Calculemos o termo envolvendo a atuação do operador $\vec{\Sigma}_{\alpha_{2s}\alpha'_{2s}}.\vec{\Sigma}_{\alpha_{2s-1}\alpha'_{2s-1}}$:

$$\vec{\Sigma}_{\alpha_{2s}\alpha'_{2s}}.\vec{\Sigma}_{\alpha_{2s-1}\alpha'_{2s-1}} w'^{(+)}_{\alpha'_1\alpha'_2...\alpha'_{2s}}(0,n) = ((\Sigma_1)_{\alpha_{2s}2}(\Sigma_1)_{\alpha_{2s-1}2}+(\Sigma_2)_{\alpha_{2s}2}(\Sigma_2)_{\alpha_{2s-1}2}+$$

$$+(\Sigma_3)_{\alpha_{2s}2}(\Sigma_3)_{\alpha_{2s-1}2})(\delta^1{}_{\alpha_1}...\delta^1{}_{\alpha_{2s-n}}\delta^2{}_{\alpha_{2s-n+1}}...\delta^2{}_{\alpha_{2s-2}})$$

$$\begin{aligned}
&= (\delta^1{}_{\alpha_{2s}}\delta^1{}_{\alpha_{2s-1}} + (-i\delta^1{}_{\alpha_{2s}})(-i\delta^1{}_{\alpha_{2s-1}}) + (-\delta^2{}_{\alpha_{2s}})(-\delta^2{}_{\alpha_{2s-1}})). \\
&\quad .(\delta^1{}_{\alpha_1}...\delta^1{}_{\alpha_{2s-n}}\delta^2{}_{\alpha_{2s-n+1}}...\delta^2{}_{\alpha_{2s-2}}) \\
&= \delta^1{}_{\alpha_1}...\delta^1{}_{\alpha_{2s-n}}\delta^2{}_{\alpha_{2s-n+1}}...\delta^2{}_{\alpha_{2s-2}}\delta^2{}_{\alpha_{2s-1}}\delta^2{}_{\alpha_{2s}} \\
&= w'^{(+)}_{\alpha_1...\alpha_{2s}}(0,n).
\end{aligned} \tag{1.66}$$

Este termo, de forma semelhante ao que discutimos para $\vec{\Sigma}_{\alpha_1\alpha'_1}.\vec{\Sigma}_{\alpha_2\alpha'_2}$, envolve apenas o produto de dois operadores $\vec{\Sigma}$ que atuam sobre bispinores do tipo $w^2(0)$ que compõem o multispinor $w'^{(+)}(0,n)$ (como podemos verificar pela inspeção das componentes deste multispinor, pois os índices α_{2s} e α_{2s-1} estão associados a $\delta^2{}_{\alpha_{2s}}$ e $\delta^2{}_{\alpha_{2s-1}}$, respectivamente). Analisando o operador (1.63) e o spinor $w'^{(+)}(0,n)$ que definimos, observa-se que temos $n-1$ termos deste tipo em cada uma das n últimas linhas do segundo membro de (1.63), de modo que resultam $n(n-1)$ termos semelhantes a este.

Por fim, analisemos a atuação do operador $\vec{\Sigma}_{\alpha_1\alpha'_1}.\vec{\Sigma}_{\alpha_{2s}\alpha'_{2s}}$:

$$\vec{\Sigma}_{\alpha_1\alpha'_1}.\vec{\Sigma}_{\alpha_{2s}\alpha'_{2s}} w'^{(+)}_{\alpha'_1...\alpha'_{2s}}(0,n) = ((\Sigma_1)_{\alpha_1 1}(\Sigma_1)_{\alpha_{2s}2} + (\Sigma_2)_{\alpha_1 1}(\Sigma_2)_{\alpha_{2s}2}+$$

$$+(\Sigma_3)_{\alpha_1 1}(\Sigma_3)_{\alpha_{2s}2})(\delta^{\alpha_2}{}_1...\delta^{\alpha_{2s-n}}{}_1\delta^{\alpha_{2s-n+1}}{}_2...\delta^{\alpha_{2s-1}}{}_2)$$

$$\begin{aligned}
&= (\delta^{\alpha_1}{}_2\delta^{\alpha_{2s}}{}_1 + (i\delta^{\alpha_1}{}_2)(-i\delta^{\alpha_{2s}}{}_1) + \delta^{\alpha_1}{}_1(-\delta^{\alpha_{2s}}{}_2)). \\
&\quad .(\delta^{\alpha_2}{}_1...\delta^{\alpha_{2s-n}}{}_1\delta^{\alpha_{2s-n+1}}{}_2...\delta^{\alpha_{2s-1}}{}_2) \\
&= (2\delta^{\alpha_1}{}_2\delta^{\alpha_{2s}}{}_1 - \delta^{\alpha_1}{}_1\delta^{\alpha_{2s}}{}_2)(\delta^{\alpha_2}{}_1...\delta^{\alpha_{2s-n}}{}_1\delta^{\alpha_{2s-n+1}}{}_2...\delta^{\alpha_{2s-1}}{}_2) \\
&= 2\underbrace{(\delta^{\alpha_1}{}_2\delta^{\alpha_2}{}_1...\delta^{\alpha_{2s-n}}{}_1\delta^{\alpha_{2s-n+1}}{}_2...\delta^{\alpha_{2s-n}}{}_2\delta^{\alpha_{2s}}{}_1)}_{=w'^{(+)}_p(0,n)} \\
&\quad -\underbrace{(\delta^{\alpha_1}{}_1\delta^{\alpha_2}{}_1...\delta^{\alpha_{2s-n}}{}_1\delta^{\alpha_{2s-n+1}}{}_2...\delta^{\alpha_{2s-n}}{}_2\delta^{\alpha_{2s}}{}_2)}_{=w'^{(+)}(0,n)} \\
&= 2w'^{(+)}_{p;\alpha_1...\alpha_{2s}}(0,n) - w'^{(+)}_{\alpha_1...\alpha_{2s}}(0,n),
\end{aligned} \tag{1.67}$$

onde $w'^{(+)}_p(0,n)$ é o multispinor que resulta da permutação dos índices α_1 e α_{2s} do multispinor $w'^{(+)}(0,n)$ introduzido.

Logo, a atuação de operadores mistos (que envolvem o produto de dois operadores $\vec{\Sigma}$ que atuam sobre bispinores diferentes, $w^1(0)$ e $w^2(0)$), como no termo considerado, resulta em combinações dos multispinores $w^{'(+)}(0,n)$ com permutações deste. Examinando mais uma vez a equação (1.63), bem como a definição de nosso multispinor $w^{'(+)}(0,n)$, verifica-se que em cada uma das $2s-n$ primeiras linhas do segundo membro temos n termos deste tipo e, em cada uma das n últimas linhas temos $2s-n$ termos semelhantes, totalizando $2n(2s-n)$ termos.

Assim, com base nos resultados expressos em (1.65)-(1.67) e levando em consideração a contagem de termos semelhantes de cada tipo discutido anteriormente, temos que a atuação do operador de spin quadrático sobre o multispinor (não simétrico) $w^{'(+)}(0,n)$ fornece:

$$\frac{1}{4}(\vec{\Sigma}_m)^2_{\alpha_1\alpha_1^{'}\ldots\alpha_{2s}\alpha_{2s}^{'}}w^{'(+)}_{\alpha_1^{'}\ldots\alpha_{2s}^{'}}(0,n)=\frac{1}{4}[(2s)3w^{'(+)}_{\alpha_1\ldots\alpha_{2s}}(0,n)]+\frac{1}{4}[n(n-1)w^{'(+)}_{\alpha_1\ldots\alpha_{2s}}(0,n)+$$

$$+(2s-n-1)(2s-n)w^{'(+)}_{\alpha_1\ldots\alpha_{2s}}(0,n)+2n(2s-n)(2w^{'(+)}_{p;\alpha_1\ldots\alpha_{2s}}(0,n)-w^{'(+)}_{\alpha_1\ldots\alpha_{2s}}(0,n))]$$

$$=s(s+1)w^{'(+)}_{\alpha_1\ldots\alpha_{2s}}(0,n)-n(2s-n)w^{'(+)}_{\alpha_1\ldots\alpha_{2s}}(0,n)+n(2s-n)w^{'(+)}_{p;\alpha_1\ldots\alpha_{2s}}(0,n),$$

ou, em forma matricial,

$$\frac{1}{4}(\vec{\Sigma}_m)^2w^{'(+)}(0,n)=s(s+1)w^{'(+)}(0,n)-n(2s-n)w^{'(+)}(0,n)+n(2s-n)w^{'(+)}_p(0,n). \tag{1.68}$$

Agora, analisando a atuação deste operador sobre o multispinor simétrico $\breve{w}^{(+)}(0,n)$ construído a partir de todas as permutações dos índices de $w^{'(+)}(0,n)$, temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}(\vec{\Sigma}_m)^2\breve{w}^{(+)}(0,n) &= \frac{1}{4}(\vec{\Sigma}_m)^2\left(\sum_p w^{'(+)}(0,n)\right)\\ &= \sum_p\left(\frac{1}{4}(\vec{\Sigma}_m)^2w^{'(+)}(0,n)\right).\end{aligned}$$

Usando (1.68), segue

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}(\vec{\Sigma}_m)^2\breve{w}^{(+)}(0,n) &= s(s+1)\sum_p w^{'(+)}(0,n)-n(2s-n)\sum_p w^{'(+)}(0,n)\\ &\quad+n(2s-n)\sum_p w^{'(+)}_p(0,n);\end{aligned}$$

contudo, a soma das permutações de $w^{'(+)}(0,n)$ e $w_p^{'(+)}(0,n)$ é a mesma, logo

$$\frac{1}{4}(\vec{\Sigma}_m)^2\breve{w}^{(+)}(0,n) = s(s+1)\breve{w}^{(+)}(0,n). \tag{1.69}$$

Dessa forma, os multispinores simétricos $\breve{w}^{(+)}(0,n)$ são autovetores do operador de spin quadrático com autovalores $s(s+1)$. Este resultado confirma que estes multispinores efetivamente guardam a informação de uma partícula de spin s.

Os resultados que obtivemos até aqui estão relacionados aos multispinores associados às amplitudes de onda das soluções de frequência positiva $\breve{w}^{(+)}(0,n)$. De modo estritamente análogo, podemos construir os multispinores $\breve{w}^{(-)}(0,n)$ a partir das amplitudes de onda das soluções de frequência negativa:

$$\breve{w}^{(-)}_{\alpha_1\ldots\alpha_{2s}}(0,n) = \sum_p w^{'(-)}_{\alpha_1\ldots\alpha_{2s}}(0,n),$$

onde $w^{'(-)}_{\alpha_1\ldots\alpha_{2s}}(0,n) = w^{'(-)}_{\alpha_1}(0)\otimes\ldots\otimes w^{'(-)}_{\alpha_{2s}}(0)$. Os índices $\alpha_1,\ldots,\alpha_{2s}$ assumem os valores 3 e 4 e o contador n marca o número de bispinores $w^{(-)}_{\alpha}(0)$ presentes no produto direto com índice $r=4$ (lembrando que, para compactar a notação, estamos representando o índice $r=3$ ou 4 com o sinal $(-)$).

Escrevendo em componentes alguns multispinores $\breve{w}^{(-)}(0,n)$, temos

$$\breve{w}^{(-)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2s}}(0;n=0) = \delta^3{}_{\alpha_1}\delta^3{}_{\alpha_2}\ldots\delta^3{}_{\alpha_{2s}},$$

$$\begin{aligned}\breve{w}^{(-)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2s}}(0;n=1) \quad &= \quad \delta^4{}_{\alpha_1}\delta^3{}_{\alpha_2}\ldots\delta^3{}_{\alpha_{2s}}+\delta^3{}_{\alpha_1}\delta^4{}_{\alpha_2}\ldots\delta^3{}_{\alpha_{2s}}+\\ &\quad\ \ldots+\delta^3{}_{\alpha_1}\delta^3{}_{\alpha_2}\ldots\delta^4{}_{\alpha_{2s}},\end{aligned}$$

$$\breve{w}^{(-)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2s}}(0;n=2s) = \delta^4{}_{\alpha_1}\delta^4{}_{\alpha_2}\ldots\delta^4{}_{\alpha_{2s}}.$$

A análise feita para os multispinores $\breve{w}^{(+)}(0,n)$ em relação aos operadores de spin e spin quadrático aplica-se igualmente aos multispinores $\breve{w}^{(-)}(0,n)$, bastando trocar os índices 1 e 2 por 3 e 4, respectivamente.

Podemos agora construir multispinores para um referencial inercial arbitrário $\breve{w}^{(r)}(\vec{p},n)$ a partir dos multispinores para o referencial de repouso da partícula, $\breve{w}^{(r)}(0,n)$. Assim, definimos o operador $S_{\alpha_1}{}^{\alpha_1^{'}}\ldots_{\alpha_{2s}}{}^{\alpha_{2s}^{'}}(\vec{p})$, que efetua o *boost*, da seguinte forma:

$$S_{\alpha_1}{}^{\alpha_1^{'}}\ldots_{\alpha_{2s}}{}^{\alpha_{2s}^{'}}(\vec{p}) = S_{\alpha_1}{}^{\alpha_1^{'}}(A(\vec{p}))\ldots S_{\alpha_{2s}}{}^{\alpha_{2s}^{'}}(A(\vec{p})), \tag{1.70}$$

ou, em forma matricial,

$$S_m(\vec{p}) = S(A(\vec{p})) \otimes ... \otimes S(A(\vec{p})),$$

onde o índice m subscrito no membro esquerdo diferencia o operador $S_m(\vec{p})$ que atua sobre o multispinor. As matrizes $S(A(\vec{p}))$, que atuam sobre os bispinores que compõem o multispinor, estão definidas em (1.57).

Desta forma, construímos os multispinores $\breve{w}^{(r)}(\vec{p}, n)$ com o auxílio de (1.60) e (1.70):

$$\begin{aligned}
\breve{w}^{(r)}_{\alpha_1...\alpha_{2s}}(\vec{p}, n) &= S_{\alpha_1}{}^{\alpha_1^{'}}...{}_{\alpha_{2s}}{}^{\alpha_{2s}^{'}}(\vec{p})\breve{w}^{(r)}_{\alpha_1^{'}...\alpha_{2s}^{'}}(0, n) \\
&= S_{\alpha_1}{}^{\alpha_1^{'}}(A(\vec{p}))...S_{\alpha_{2s}}{}^{\alpha_{2s}^{'}}(A(\vec{p}))\sum_p w^{(r_1)}_{\alpha_1^{'}}(0, n)...w^{(r_{2s})}_{\alpha_{2s}^{'}}(0, n) \\
&= \sum_p w^{(r_1)}_{\alpha_1}(\vec{p}, n)...w^{(r_{2s})}_{\alpha_{2s}}(\vec{p}, n) \\
&= \sum_p w^{'(r)}_{\alpha_1...\alpha_{2s}}(\vec{p}, n). \qquad (1.71)
\end{aligned}$$

Portanto, o multispinor simétrico $\breve{w}^{(r)}(\vec{p}, n)$ é construído através da soma sobre todas as permutações dos índices do multispinor (não simétrico) $w^{'(r)}(\vec{p}, n)$ composto pelo produto direto de $2s$ bispinores $w^{(r)}(\vec{p}, n)$, que correspondem às amplitudes das soluções de onda plana da equação de Dirac em um referencial inercial arbitrário, expressas em (1.53)-(1.56).

Por construção, os multispinores $\breve{w}^{(r)}(\vec{p}, n)$ satisfazem a equação de Dirac em cada componente. Com efeito, consideremos os multispinores $\breve{w}^{(+)}(\vec{p}, n)$, de forma que

$$\begin{aligned}
(\gamma^\mu p_\mu - m)_{\alpha_i}{}^{\alpha_i^{'}}\breve{w}^{(+)}_{\alpha_1...\alpha_i^{'}...\alpha_{2s}}(\vec{p}, n) &= (\gamma^\mu p_\mu - m)_{\alpha_i}{}^{\alpha_i^{'}}. \\
&\quad .\sum_p w^{(+)}_{\alpha_1}(\vec{p}, n)...w^{(+)}_{\alpha_i^{'}}(\vec{p}, n)...w^{(+)}_{\alpha_1}(\vec{p}, n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_p w^{(+)}_{\alpha_1}(\vec{p}, n)...\underbrace{(\gamma^\mu p_\mu - m)_{\alpha_i}{}^{\alpha_i^{'}} w^{(+)}_{\alpha_i^{'}}(\vec{p}, n)}_{=0}...w^{(+)}_{\alpha_1}(\vec{p}, n) \\
&= 0, \qquad (1.72)
\end{aligned}$$

onde usamos (1.33) na última passagem.

De modo similar, mostra-se que os multispinores $\breve{w}^{(-)}(\vec{p},n)$ também satisfazem a equação de Dirac componente a componente:

$$(\gamma^\mu p_\mu + m)_{\alpha_i}{}^{\alpha_i'} \breve{w}^{(-)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_i' \ldots \alpha_{2s}}(\vec{p},n) = 0. \tag{1.73}$$

As equações (1.72) e (1.73) podem ser reescritas de forma compacta da seguinte maneira:

$$(\epsilon_r \gamma^\mu p_\mu - m)_{\alpha_i}{}^{\alpha_i'} \breve{w}^{(r)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_i' \ldots \alpha_{2s}}(\vec{p},n) = 0, \tag{1.74}$$

onde $\epsilon_r = \begin{cases} 1, & \text{se } r = 1;2 = (+); \\ -1, & \text{se } r = 3;4 = (-). \end{cases}$

Observação: é importante salientarmos que as equações de Bargmann--Wigner também são válidas para os multispinores não simétricos $w'^{(r)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{2s}}(\vec{p},n)$.

A partir dos multispinores $\breve{w}^{+}(\vec{p},n)$ e $\breve{w}^{-}(\vec{p},n)$ podemos construir um **campo de spin** s:

$$\psi_{\alpha_1 \ldots \alpha_{2s}}(\vec{r}) = \sum_{r=1}^{4} \sum_{n=0}^{2s} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} c^{(r)}(\vec{p},n) \left(\sqrt{\frac{E+m}{2E}} \breve{w}^{(r)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{2s}}(\vec{p},n) e^{-i\epsilon_r p_\mu x^\mu} \right), \tag{1.75}$$

onde $c^{(r)}(\vec{p},n)$ são coeficientes da expansão que, em segunda quantização (na representação de Fock), tornam-se os operadores de criação e aniquilação.

O campo $\psi(\vec{r})$ é conhecido como **função de onda de Bargmann-Wigner** e, naturalmente, satifaz a equação de Dirac:

$$\left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m \right)_{\alpha_i}^{\alpha_i'} \psi_{\alpha_1 \ldots \alpha_i' \ldots \alpha_{2s}}(\vec{r}) = \sum_{r=1}^{4} \sum_{n=0}^{2s} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} c^{(r)}(\vec{p},n) \sqrt{\frac{E+m}{2E}}.$$

$$.\left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m \right)_{\alpha_i}^{\alpha_i'} \breve{w}^{(r)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_i' \ldots \alpha_{2s}}(\vec{p},n) e^{-i\epsilon_r p_\mu x^\mu}$$

$$= \sum_{r=1}^{4} \sum_{n=0}^{2s} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} c^{(r)}(\vec{p},n) \sqrt{\frac{E+m}{2E}}.$$

$$.(\epsilon_r \gamma^\mu p_\mu - m)_{\alpha_i}{}^{\alpha_i'} \breve{w}^{(r)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_i' \ldots \alpha_{2s}}(\vec{p},n) e^{-i\epsilon_r p_\mu x^\mu},$$

de modo que, usando (1.74) segue,

$$\left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m \right)_{\alpha_i}^{\alpha_i'} \psi_{\alpha_1 \ldots \alpha_i' \ldots \alpha_{2s}}(\vec{r}) = 0. \tag{1.76}$$

As equações (1.76) são denominadas **equações de Bargmann-Wigner**.

Além disso, por construção, cada componente da função de onda ψ também satisfaz a equação de Klein-Gordon. Podemos verificar este resultado atuando o operador $(i\gamma^\nu\partial_\nu + m)$ à esquerda em (1.76):

$$\left(i\gamma^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} + m\right)_{\beta_i}^{\;\;\alpha_i} \left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m\right)_{\alpha_i}^{\;\;\alpha_i^{'}} \psi_{\alpha_1\ldots\alpha_i^{'}\ldots\alpha_{2s}}(\vec{r}) = 0,$$

$$\left(-(\gamma^\nu\gamma^\mu)_{\beta_i}^{\;\;\alpha_i^{'}} \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - m^2 I_{\beta_i}^{\;\;\alpha_i^{'}}\right) \psi_{\alpha_1\ldots\alpha_i^{'}\ldots\alpha_{2s}}(\vec{r}) = 0;$$

porém, simetrizando o primeiro termo, resulta

$$\left(-\frac{1}{2}\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}_{\beta_i}^{\;\;\alpha_i^{'}} \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - m^2 I_{\beta_i}^{\;\;\alpha_i^{'}}\right) \psi_{\alpha_1\ldots\alpha_i^{'}\ldots\alpha_{2s}}(\vec{r}) = 0,$$

de modo que, usando (1.19),

$$(\partial^\mu\partial_\mu + m^2)_{\beta_i}^{\;\;\alpha_i^{'}} \psi_{\alpha_1\ldots\alpha_i^{'}\ldots\alpha_{2s}}(\vec{r}) = 0. \tag{1.77}$$

Assim, a essência do procedimento proposto por Bargmann e Wigner para se construir equações de onda para partículas com spins arbitrários (inteiros e semi-inteiros) consiste, portanto, em definirmos multispinores $\breve{w}^{(r)}(\vec{p},n)$ a partir de produtos diretos das soluções de onda plana da equação de Dirac e, dessa forma, construirmos a função de onda $\psi(\vec{r})$ que representa um campo de spins s. Fisicamente, podemos interpretar este procedimento (à luz do método de fusão de de Broglie) como um processo de construção de um campo de spin s a partir de $2s$ campos de spin 1/2 idênticos.

1.3 Referências do Capítulo

Elencamos abaixo as referências bibliográficas referentes a este capítulo:

[01] Dirac, P. A. M. *"The Quantum Theory of the Electron"*. Proc. Roy. Soc. Lond. A **117**, p. 610, 1928.

[05] de Broglie, L. *"Théorie Générale des Particules à Spin"*. Gauthier--Villars, Paris, 1943.

[06] Bargmann, V.; Wigner, E. P. *"Group Theoretical Discussion of Relativistic Wave Equations"*. Proc. Natn. Acad. Sci. USA **34**, p. 211, 1948.

[29] Berestetskii, V. B.; Pitaevskii, L. P.; Lifshitz, E. M. *"Quantum Electrodynamics"*. Segunda edição, Butterworth-Heinemann, 1982.

[31] Novozhilov, Y. V. *"Introduction to Elementary Particle Theory"*. Pergamon Press, 1975.

[32] Greiner, W. *"Relativistic Quantum Mechanics: Wave Equations"*. Terceira edição, Springer, 2000.

Capítulo 2

A Equação DKP e o Formalismo de Weinberg

Neste capítulo vamos introduzir a equação DKP para mésons de spins 0 e 1, no contexto do formalismo de Bargmann e Wigner, bem como estudar sua relação com uma equação para o fóton. Discutiremos ainda um formalismo alternativo, proposto por Weinberg (1964), para descrever partículas de spin arbitrário no âmbito da teoria da matriz S.

2.1 A Equação DKP

No capítulo anterior vimos que o formalismo de Bargmann-Wigner nos permite definir um campo $\Psi_{\alpha_1 \ldots \alpha_{2s}}$ (1.75) associado a uma partícula de spin s bem como construir equações de onda a partir de multispinores simétricos $\breve{w}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{2s}}$, conforme expresso em (1.74).

Dessa forma, analisando o caso de uma partícula de **spin 1**, consideremos um **spinor de grau 2** arbitrário (não necessariamente simétrico) $\Phi_{\alpha\beta}$ expresso em uma base completa das matrizes $(\gamma^r_{\alpha\beta})$:

$$\Phi_{\alpha\beta} = \left(\frac{1}{2} G_{\mu\nu}\gamma_5\gamma^{\mu\nu} + \phi_{5\mu}\gamma_5\gamma^{\mu} + \phi_{\mu}\gamma^{\mu} + \phi_5\gamma_5 + i\phi\right)_{\alpha\beta}, \qquad (2.1)$$

onde $G_{\mu\nu}$ é um **(pseudo)tensor antissimétrico**, $\phi_{\mu 5}$ corresponde a um **pseudovetor**, ϕ_μ representa um **vetor**, ϕ_5 consiste em um **pseudoescalar**, ϕ um **escalar** e definimos $\gamma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$. Escrevendo explicitamente cada termo da expansão de $\Phi_{\alpha\beta}$ em componentes, temos

$$(\gamma_5\gamma^{\mu\nu})_{\alpha\beta} = \gamma_{5\alpha}{}^{\beta'}\gamma^{\mu\nu}{}_{\beta'}{}^{\beta''}C_{\beta''\beta},$$

$$(\gamma_5\gamma^{\mu})_{\alpha\beta} = \gamma_{5\alpha}{}^{\beta'}\gamma^{\mu}{}_{\beta'}{}^{\beta''}C_{\beta''\beta},$$

$$\gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} = \gamma^{\mu}{}_{\alpha}{}^{\beta''}C_{\beta''\beta},$$

$$\gamma_{5\alpha\beta} = \gamma_{5\alpha}{}^{\beta''}C_{\beta''\beta},$$

$$I_{\alpha\beta} = I_{\alpha}{}^{\beta'}C_{\beta'\beta},$$

onde $C_{\mu\nu}$ são os elementos do "spinor métrico" dado por

$$\check{C}_{**} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & -C \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

sendo C o spinor definido em (A.12).

Observação: na equação (2.2) acima denotamos a matriz por $\check{C}_{**}$ para enfatizar, através da simbologia (*), o caráter covariante dos índices spinoriais da matriz. Ressaltamos ainda que as matrizes γ^r, definidas no capítulo anterior, exibem índices spinoriais mistos ($\gamma^r{}_*{}^*$), conforme verifica-se nas relações expressas acima.

Assim, a equação (2.1) pode ser traduzida em forma matricial como segue:

$$\Phi_{**} = \left(\frac{1}{2}G_{\mu\nu}\gamma_5\gamma^{\mu\nu} + \phi_{\mu 5}\gamma_5\gamma^{\mu} + \phi_{\mu}\gamma^{\mu} + \phi_5\gamma_5 + i\phi\right)\check{C}. \tag{2.3}$$

Agora, recordando a equação (1.76) (que permanece válida inclusive para spinores não simétricos, conforme comentamos anteriormente) podemos escrever

$$(\gamma^{\mu}\hat{p}_{\mu} - m)_{\alpha}{}^{\alpha'}\Phi_{\alpha'\beta} = 0,$$

ou, em componentes,

$$(\gamma^{\mu}{}_{\alpha}{}^{\alpha'}\hat{p}_{\mu}\delta_{\beta}{}^{\beta'} - m\delta_{\alpha}{}^{\alpha'}\delta_{\beta}{}^{\beta'})\Phi_{\alpha'\beta'} = 0. \tag{2.4}$$

Temos também

$$(\gamma^{\mu}\hat{p}_{\mu} - m)_{\beta}{}^{\beta'}\Phi_{\alpha\beta'} = 0,$$

de forma que, em componentes, segue

$$(\delta_{\alpha}{}^{\alpha'}\gamma^{\mu}{}_{\beta}{}^{\beta'}\hat{p}_{\mu} - m\delta_{\alpha}{}^{\alpha'}\delta_{\beta}{}^{\beta'})\Phi_{\alpha'\beta'} = 0. \tag{2.5}$$

Adicionando (2.4) e (2.5), resulta

$$\frac{1}{2}\hat{p}_\mu({\gamma^\mu}_\alpha{}^{\alpha'}{\delta_\beta}^{\beta'} + {\delta_\alpha}^{\alpha'}{\gamma^\mu}_\beta{}^{\beta'})\Phi_{\alpha'\beta'} = m\Phi_{\alpha\beta}.$$

Esta equação acima admite a representação matricial

$$\frac{1}{2}(\gamma^\mu\hat{p}_\mu^{(r)}\Phi_{**} + \Phi_{**}\gamma^{\mu T}\hat{p}_\mu^{(l)}) = m\Phi_{**}, \tag{2.6}$$

ou, escrevendo de forma mais compacta,

$$(\beta^\mu\hat{p}_\mu - m)\Phi = 0, \tag{2.7}$$

onde a matriz β^μ é definida por

$$\beta^\mu = \frac{1}{2}(\gamma^\mu \otimes I + I \otimes \gamma^\mu), \tag{2.8}$$

sendo expressa em componentes como

$$\beta^\mu{}_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'} = \frac{1}{2}({\gamma^\mu}_\alpha{}^{\alpha'}{\delta_\beta}^{\beta'} + {\delta_\alpha}^{\alpha'}{\gamma^\mu}_\beta{}^{\beta'}). \tag{2.9}$$

Observação: na expressão (2.6) acima, o operador $\hat{p}_\mu^{(r)}$ atua sobre o spinor à sua direita, ao passo que o operador $\hat{p}_\mu^{(l)}$ atua à esquerda. Este ordenamento deve ser subentendido em (2.7).

A equação (2.7) é conhecida como **equação DKP** (Duffin-Kemmer-Petiau) e foi proposta em 1939 no contexto da **teoria de mésons livres**[1]. Esta equação consistirá em nosso objeto de estudo nas próximas seções e será retomada no capítulo 3, onde introduziremos um acoplamento com campo externo e estudaremos o limite não relatívístico do sistema, com o auxílio das transformações FW.

Para prosseguirmos nossa análise da equação DKP, vamos examinar as equações de movimento subjacentes. Para isso, multiplicamos (2.6) à direita por $\check{C}^{-1}$:

$$\frac{1}{2}(\gamma^\mu\hat{p}_\mu^{(r)}\underbrace{\Phi_{**}\check{C}^{-1}}_{=\Phi_*{}^*} + \Phi_{**}\underbrace{\gamma^{\mu T}\check{C}^{-1}}_{=\check{C}^{-1}\gamma^\mu}\hat{p}_\mu^{(l)}) = m\underbrace{\Phi_{**}\check{C}^{-1}}_{=\Phi_*{}^*}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(\gamma^\mu\hat{p}_\mu^{(r)}\Phi_*{}^* + \Phi_*{}^*\gamma^\mu\hat{p}_\mu^{(l)}) = m\Phi_*{}^*. \tag{2.10}$$

[1] Esta equação foi proposta originalmente por Kemmer de forma empírica e construtiva, acomodando ao cenário da teoria de mésons resultados puramente algébricos, desenvolvidos anteriormente por Duffin (alheio ao contexto físico).

Porém, observemos que

$$\gamma^\mu \hat{p}_\mu^{(r)} \Phi_*{}^* = \hat{p}_\mu \left(\frac{1}{2} G_{\alpha\beta} \gamma^\mu \gamma_5 \gamma^{\alpha\beta} + \phi_{5\alpha} \gamma^\mu \gamma_5 \gamma^\alpha + \phi_\alpha \gamma^\mu \gamma^\alpha + \phi_5 \gamma^\mu \gamma_5 + i\phi\gamma^\mu \right),$$

$$\Phi_*{}^* \gamma^\mu \hat{p}_\mu^{(l)} = \hat{p}_\mu \left(\frac{1}{2} G_{\alpha\beta} \gamma_5 \gamma^{\alpha\beta} \gamma^\mu + \phi_{5\alpha} \gamma_5 \gamma^\alpha \gamma^\mu + \phi_\alpha \gamma^\alpha \gamma^\mu + \phi_5 \gamma_5 \gamma^\mu + i\phi\gamma^\mu \right).$$

Assim, obtemos

$$\frac{1}{2}\hat{p}_\mu \left(\frac{1}{2} G_{\alpha\beta} \left\{ \gamma^\mu, \gamma_5 \gamma^{\alpha\beta} \right\} + \phi_{5\alpha} \left\{ \gamma^\mu, \gamma_5 \gamma^\alpha \right\} + \phi_\alpha \left\{ \gamma^\mu, \gamma^\alpha \right\} + \phi_5 \left\{ \gamma^\mu, \gamma_5 \right\} + 2i\phi\gamma^\mu \right)$$

$$= m \left(\frac{1}{2} G_{\alpha\beta} \gamma_5 \gamma^{\alpha\beta} + \phi_{\alpha 5} \gamma_5 \gamma^\alpha + \phi_\alpha \gamma^\alpha + \phi_5 \gamma_5 + i\phi \right). \tag{2.11}$$

Agora, explorando a álgebra de Clifford (1.19) das matrizes γ^μ, bem como as relações expressas em (1.21), podemos desenvolver os termos do primeiro membro da equação acima:

$$\begin{aligned} \left\{ \gamma^\mu, \gamma_5 \gamma^{\alpha\beta} \right\} &= \underbrace{\gamma^\mu \gamma_5}_{=-\gamma_5\gamma^\mu} \gamma^{\alpha\beta} + \gamma_5 \gamma^{\alpha\beta} \gamma^\mu; \\ &= \gamma_5 [\gamma^{\alpha\beta}, \gamma^\mu]. \end{aligned}$$

Entretanto,

$$\begin{aligned} [\gamma^{\alpha\beta}, \gamma^\mu] &= \frac{i}{2}[[\gamma^\alpha, \gamma^\beta], \gamma^\mu] \\ &= \frac{i}{2}(\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\mu - \gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta) - \frac{i}{2}(\gamma^\beta\gamma^\alpha\gamma^\mu - \gamma^\mu\gamma^\beta\gamma^\alpha) \\ &= \frac{i}{2}\gamma^\mu \underbrace{(\gamma^\beta\gamma^\alpha - \gamma^\alpha\gamma^\beta)}_{=2g^{\beta\alpha} - 2\gamma^\alpha\gamma^\beta} + \frac{i}{2} \underbrace{(\gamma^\alpha\gamma^\beta - \gamma^\beta\gamma^\alpha)}_{=2\gamma^\alpha\gamma^\beta - 2g^{\beta\alpha}} \gamma^\mu \\ &= i(\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\mu - \gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta) \\ &= i(\gamma^\alpha(2g^{\beta\mu} - \gamma^\mu\gamma^\beta) - \gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta) \\ &= i(2g^{\beta\mu}\gamma^\alpha - (2g^{\alpha\mu} - \gamma^\mu\gamma^\alpha)\gamma^\beta - \gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta) \\ &= 2ig^{\beta\mu}\gamma^\alpha - 2ig^{\alpha\mu}\gamma^\beta, \end{aligned} \tag{2.12}$$

de modo que, substituindo (2.12) na relação de anticomutação anterior,

$$\left\{ \gamma^\mu, \gamma_5 \gamma^{\alpha\beta} \right\} = 2i\gamma_5 (g^{\beta\mu}\gamma^\alpha - g^{\alpha\mu}\gamma^\beta). \tag{2.13}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\{\gamma^\mu, \gamma_5\gamma^\alpha\} &= \gamma^\mu\gamma_5\gamma^\alpha + \gamma_5\gamma^\alpha\gamma^\mu \\
&= -\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\alpha + \gamma_5\gamma^\alpha\gamma^\mu \\
&= \gamma_5 \underbrace{[\gamma^\alpha, \gamma^\mu]}_{=-2i\gamma^{\alpha\mu}} \\
&= -2i\gamma_5\gamma^{\alpha\mu}. \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

Os anticomutadores remanescentes correspondem precisamente a (1.19) e (1.21), respectivamente:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\alpha\} = 2g^{\mu\alpha}, \qquad (2.15)$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0. \qquad (2.16)$$

De posse destes resultados, retornamos a (2.11) como segue:

$$\frac{1}{2}\hat{p}_\mu \left(iG_{\alpha\beta}\gamma_5(g^{\beta\mu}\gamma^\alpha - g^{\alpha\mu}\gamma^\beta) - 2i\phi_{5\alpha}\gamma_5\gamma^{\alpha\mu} + 2\phi_\alpha g^{\mu\alpha} + 2i\phi\gamma^\mu\right)$$

$$= m\left(\frac{1}{2}G_{\alpha\beta}\gamma_5\gamma^{\alpha\beta} + \phi_{5\alpha}\gamma_5\gamma^\alpha + \phi_\alpha\gamma^\alpha + \phi_5\gamma_5 + i\phi\right);$$

de modo que, usando a antissimetria de $G^{\mu\nu}$ e $\gamma^{\mu\nu}$ resulta

$$-\frac{1}{2}\left(i(\hat{p}_\nu\phi_{5\mu} - \hat{p}_\mu\phi_{5\nu}) + mG_{\mu\nu}\right)\gamma_5\gamma^{\mu\nu} + (i\hat{p}_\mu G^{\nu\mu} - m{\phi_5}^\nu)\gamma_5\gamma_\nu + (i\hat{p}_\mu\phi - m\phi_\mu)\gamma^\mu$$

$$-m(\phi_5)\gamma_5 + (\hat{p}_\mu\phi^\mu - im\phi)I = 0.$$

Logo, explorando a independência linear dos elementos da base, obtemos as **equações de movimento**:

$$\begin{cases} \hat{p}_\nu\phi_{5\mu} - \hat{p}_\mu\phi_{5\nu} = imG_{\mu\nu}, \\ \hat{p}_\mu G^{\nu\mu} = -im{\phi_5}^\nu. \end{cases} \quad \textbf{(spin 1)} \qquad (2.17)$$

$$\begin{cases} \hat{p}_\mu\phi^\mu = im\phi, \\ \hat{p}_\mu\phi = -im\phi_\mu. \end{cases} \quad \textbf{(spin 0)} \qquad (2.18)$$

$$\phi_5 = 0. \quad \textbf{(elemento trivial)} \qquad (2.19)$$

As equações que compõem o primeiro par (2.17) correspondem às **equações de Proca** para bósons de spin 1. O segundo par de equações (2.18) consiste nas **equações de Klein-Gordon** e referem-se a um campo escalar (spin 0) e a última equação nos fornece um **elemento trivial** da base ($\phi_5 = 0$).

Investigando um pouco mais (2.17), podemos extrair algumas informações adicionais. Assim, substituindo a segunda relação do sistema na primeira

$$\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu \phi_{5\nu} - \hat{p}^\mu \hat{p}_\nu \phi_{5\mu} = im \underbrace{\hat{p}^\mu G_{\nu\mu}}_{=-im\phi_{5\nu}} ,$$

$$\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu \phi_{5\nu} - \hat{p}_\nu \hat{p}^\mu \phi_{5\mu} = m^2 \phi_{5\nu}$$
$$\Rightarrow (\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu - m^2)\phi_{5\nu} - \hat{p}_\nu \hat{p}^\mu \phi_{5\mu} = 0,$$

de modo que, impondo a **condição de gauge** $\hat{p}^\mu \phi_{5\mu} = 0$ (necessária para garantir a conservação da carga), o pseudovetor $\phi_{5\nu}$ satisfaz à equação de Klein--Gordon (1.9) para uma partícula livre:

$$(\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu - m^2)\phi_{5\nu} = 0.$$

Aplicando ainda o operador $\hat{p}_\nu$ na segunda equação do sistema e usando a condição de gauge, obtemos a equação para o tensor antissimétrico $G^{\mu\nu}$:

$$\hat{p}_\nu \hat{p}_\mu G^{\nu\mu} = 0.$$

Dessa maneira, as equações (2.17) são decorrentes da **parte simétrica** do spinor Φ_{**} e exibem **10 parâmetros independentes** (4 relativos ao pseudovetor e 6 associados ao tensor antissimétrico). Este sistema é responsável pelo **setor pseudovetorial** da equação DKP.

Estudando agora as equações (2.18), vamos verificar que o segundo sistema efetivamente guarda a informação da equação de Klein-Gordon para o escalar ϕ. De fato, aplicando $\hat{p}^\mu$ na segunda relação e recorrendo à primeira, temos

$$\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu \phi = -im \underbrace{\hat{p}^\mu \phi_\mu}_{=im\phi},$$

$$(\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu - m^2)\phi = 0.$$

De modo estritamente análogo, atuando $\hat{p}^\nu$ na primeira equação e usando a segunda, verifica-se:

$$\hat{p}^\nu \hat{p}_\mu \phi^\mu - m^2 \phi^\nu = 0.$$

Assim, o sistema (2.18) decorre da **parte antissimétrica** do spinor Φ_{**} e apresenta **5 parâmetros independentes** (4 referentes ao quadrivetor e 1 relativo ao escalar). Estas equações são responsáveis pelo **setor escalar** da equação DKP.

Vimos portanto que, expandindo o spinor Φ_{**} na base $\gamma^{r}_{\alpha\beta}$ expressa em (2.3), foi possível identificar um campo escalar-pseudovetorial, associado ao mesón descrito pela equação DKP. Podemos ainda construir um campo pseudo-escalar-vetorial definindo o "spinor dual"[2] $\Phi^{'}_{**} = \gamma_5 \Phi_{**}$:

$$\Phi^{'}_{**} = \left(\frac{1}{2} G^{'}{}_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta} + \phi^{'}{}_{\alpha}\gamma^{\alpha} + \phi^{'}_{5\alpha}\gamma_5\gamma^{\alpha} + i\phi^{'}_{5}\gamma_5 + \phi^{'} \right) \breve{C}. \tag{2.20}$$

Dessa forma, a equação DKP para este campo dual pode ser obtida com o auxílio de (2.10). De fato, multiplicando (2.10) por γ_5 à esquerda temos

$$\frac{1}{2}(\underbrace{\gamma_5\gamma^{\mu}}_{=-\gamma^{\mu}\gamma_5} \hat{p}^{(r)}_{\mu} \Phi_*{}^* + \underbrace{\gamma_5 \Phi_*{}^*}_{=\Phi^{'}_*{}^*} \gamma^{\mu}\hat{p}^{(l)}_{\mu}) = m \underbrace{\gamma_5 \Phi_*{}^*}_{=\Phi^{'}_*{}^*}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(-\gamma^{\mu}\hat{p}^{(r)}_{\mu}\Phi^{'}_*{}^* + \Phi^{'}_*{}^*\gamma^{\mu}\hat{p}^{(l)}_{\mu}) = m\Phi^{'}_*{}^*. \tag{2.21}$$

Agora, seguindo um procedimento absolutamente análogo ao efetuado anteriormente para obter as equações de movimento do méson escalar-pseudovetorial, podemos extrair as equações de movimento da teoria dual expandindo $\Phi^{'}_*{}^*$ na base (2.20). Assim, após manipulações algébricas simples, obtemos

$$\frac{1}{2}\hat{p}_{\mu} \left(\frac{1}{2} G^{'}{}_{\alpha\beta}[\gamma^{\alpha\beta}, \gamma^{\mu}] + \phi^{'}_{5\alpha}[\gamma^{\alpha}, \gamma^{\mu}] + \phi^{'}_{5\alpha}[\gamma_5\gamma^{\alpha}, \gamma^{\mu}] + i\phi^{'}_{5}[\gamma_5, \gamma^{\mu}] \right)$$

$$= m \left(\frac{1}{2} G^{'}{}_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta} + \phi^{'}_{\alpha}\gamma^{\alpha} + \phi^{'}_{5\alpha}\gamma_5\gamma^{\alpha} + i\phi^{'}_{5}\gamma_5 + \phi^{'} \right).$$

Os comutadores que comparecem nesta expressão seguem naturalmente das relações (2.12), (2.15) e (2.16):

$$\begin{aligned} [\gamma_5\gamma^{\alpha}, \gamma^{\mu}] &= \gamma_5\gamma^{\alpha}\gamma^{\mu} - \gamma^{\mu}\gamma_5\gamma^{\alpha} \\ &= \gamma_5(\gamma^{\alpha}\gamma^{\mu} + \gamma^{\mu}\gamma^{\alpha}) \\ &= 2g^{\alpha\mu}\gamma_5. \end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned} [\gamma_5, \gamma^{\mu}] &= \gamma_5\gamma^{\mu} - \gamma^{\mu}\gamma_5 \\ &= 2\gamma_5\gamma^{\mu}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

[2]Neste caso, $G^{'}_{\alpha\beta}$ é um tensor antissimétrico genuíno.

Logo, de posse destes comutadores,

$$-\frac{1}{2}\left(i(\hat{p}_\nu\phi'_\mu-\hat{p}_\mu\phi'_\nu)+mG'_{\mu\nu}\right)\gamma^{\mu\nu}+\left(\frac{i}{2}\hat{p}_\mu(G'^{\nu\mu}-G'^{\mu\nu})-m\phi'^{\nu}\right)\gamma_\nu+$$

$$+(i\hat{p}_\nu\phi'_5-m\phi'_{5\nu})\gamma_5\gamma^\nu+(\hat{p}_\mu\phi_5'^{\mu}-im\phi'_5)\gamma_5-m(\phi')I=0,$$

dando origem às equações de movimento

$$\begin{cases}\hat{p}_\nu\phi'_\mu-\hat{p}_\mu\phi'_\nu=imG'_{\mu\nu},\\ \hat{p}_\mu G'^{\nu\mu}=-im\phi'^{\nu}.\end{cases}\quad \textbf{(spin 1)} \tag{2.24}$$

$$\begin{cases}\hat{p}_\mu\phi_5'^{\mu}=im\phi'_5,\\ \hat{p}_\nu\phi'_5=-im\phi'_{5\nu}.\end{cases}\quad \textbf{(spin 0)} \tag{2.25}$$

$$\phi'=0.\quad \textbf{(elemento trivial)} \tag{2.26}$$

Assim, o sistema (2.24) corresponde ao **setor vetorial** da teoria ao passo que (2.25) refere-se ao **setor pseudoescalar** e, novamente, temos um **elemento trivial** $\phi'=0$. Portanto, expressando o spinor Φ_{**} na base definida em (2.20), obtemos um méson pseudoescalar-vetorial descrito pela versão dual (2.21) da equação DKP.

2.1.1 Álgebra das Matrizes β^μ

Vamos analisar agora a álgebra associada à teoria DKP. Verifica-se que as matrizes β^μ definidas em (2.8) satisfazem a relação trilinear

$$\beta^\mu\beta^\nu\beta^\lambda+\beta^\lambda\beta^\nu\beta^\mu=g^{\mu\nu}\beta^\lambda+g^{\nu\lambda}\beta^\mu. \tag{2.27}$$

Com efeito, recorrendo a (2.9), podemos escrever β^μ em componentes:

$$\beta^{\mu}{}_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'}=\frac{1}{2}(\gamma^\mu{}_\alpha{}^{\alpha'}\delta_\beta{}^{\beta'}+\delta_\alpha{}^{\alpha'}\gamma^\mu{}_\beta{}^{\beta'}).$$

Desta forma, temos

$$\begin{aligned}\beta^{\mu}{}_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'}\beta^{\nu}{}_{\alpha'\beta'}^{\rho'\sigma'} &= \frac{1}{4}(\gamma^\mu{}_\alpha{}^{\alpha'}\delta_\beta{}^{\beta'}+\delta_\alpha{}^{\alpha'}\gamma^\mu{}_\beta{}^{\beta'})(\gamma^\nu{}_{\alpha'}{}^{\rho'}\delta_{\beta'}{}^{\sigma'}+\delta_{\alpha'}{}^{\rho'}\gamma^\nu{}_{\beta'}{}^{\sigma'})\\ &= \frac{1}{4}\Big((\gamma^\mu\gamma^\nu)_\alpha{}^{\rho'}\delta_\beta{}^{\sigma'}+\gamma^\mu{}_\alpha{}^{\rho'}\gamma^\nu{}_\beta{}^{\sigma'}+\\ &\quad +\gamma^\nu{}_\alpha{}^{\rho'}\gamma^\mu{}_\beta{}^{\sigma'}+\delta_\alpha{}^{\rho'}(\gamma^\mu\gamma^\nu)_\beta{}^{\sigma'}\Big),\end{aligned}$$

enquanto que, para o produto de 3 matrizes,

$$\begin{aligned}
\beta^{\mu}{}_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'}\beta^{\nu}{}_{\alpha'\beta'}^{\rho'\sigma'}\beta^{\lambda}{}_{\rho'\sigma'}^{\eta\epsilon} &= \frac{1}{8}\Big((\gamma^\mu\gamma^\nu)_\alpha{}^{\rho'}\delta_\beta{}^{\sigma'} + \gamma^\mu{}_\alpha{}^{\rho'}\gamma^\nu{}_\beta{}^{\sigma'} + \gamma^\nu{}_\alpha{}^{\rho'}\gamma^\mu{}_\beta{}^{\sigma'} + \\
&\quad +\delta_\alpha{}^{\rho'}(\gamma^\mu\gamma^\nu)_\beta{}^{\sigma'}\Big)(\gamma^\lambda{}_{\rho'}{}^\eta\delta_{\sigma'}{}^\epsilon + \delta_{\rho'}{}^\eta\gamma^\lambda{}_{\sigma'}{}^\epsilon) \\
&= \frac{1}{8}\Big((\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda)_\alpha{}^\eta\delta_\beta{}^\epsilon + (\gamma^\mu\gamma^\nu)_\alpha{}^\eta\gamma^\lambda{}_\beta{}^\epsilon + (\gamma^\mu\gamma^\lambda)_\alpha{}^\eta\gamma^\nu{}_\beta{}^\epsilon + \\
&\quad \gamma^\mu{}_\alpha{}^\eta(\gamma^\nu\gamma^\lambda)_\beta{}^\epsilon + (\gamma^\nu\gamma^\lambda)_\alpha{}^\eta\gamma^\mu{}_\beta{}^\epsilon + \gamma^\nu{}_\alpha{}^\eta(\gamma^\mu\gamma^\lambda)_\beta{}^\epsilon + \\
&\quad \gamma^\lambda{}_\alpha{}^\eta(\gamma^\mu\gamma^\nu)_\beta{}^\epsilon + \delta_\alpha{}^\eta(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda)_\beta{}^\epsilon\Big).
\end{aligned}$$

Assim, estudando a última relação acima, podemos traduzir em forma matricial o produto $\beta^\mu\beta^\nu\beta^\lambda$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\beta^\mu\beta^\nu\beta^\lambda &= \frac{1}{8}\big((\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda)\otimes I + (\gamma^\mu\gamma^\nu)\otimes\gamma^\lambda + (\gamma^\mu\gamma^\lambda)\otimes\gamma^\nu + \gamma^\mu\otimes(\gamma^\nu\gamma^\lambda) \\
&\quad +(\gamma^\nu\gamma^\lambda)\otimes\gamma^\mu + \gamma^\nu\otimes(\gamma^\mu\gamma^\lambda) + \gamma^\lambda\otimes(\gamma^\mu\gamma^\nu) + I\otimes(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda)\big).
\end{aligned} \tag{2.28}$$

De posse dessa relação, podemos desenvolver a soma dos termos $\beta^\mu\beta^\nu\beta^\lambda$ e $\beta^\lambda\beta^\nu\beta^\mu$, de modo que, após algumas manipulações algébricas,

$$\begin{aligned}
\beta^\mu\beta^\nu\beta^\lambda + \beta^\lambda\beta^\nu\beta^\mu &= \frac{1}{8}\big((\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda + \gamma^\lambda\gamma^\nu\gamma^\mu)\otimes I + (\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu)\otimes\gamma^\lambda \\
&\quad +(\gamma^\lambda\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\lambda)\otimes\gamma^\mu + (\gamma^\mu\gamma^\lambda + \gamma^\lambda\gamma^\mu)\otimes\gamma^\nu \\
&\quad +\gamma^\lambda\otimes(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu) + \gamma^\mu\otimes(\gamma^\nu\gamma^\lambda + \gamma^\lambda\gamma^\nu) \\
&\quad +\gamma^\nu\otimes(\gamma^\mu\gamma^\lambda + \gamma^\lambda\gamma^\mu) + I\otimes(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda + \gamma^\lambda\gamma^\nu\gamma^\mu)\big).
\end{aligned}$$

Entretanto, recorrendo à álgebra de Clifford (1.19), a expressão acima é conduzida à seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\beta^\mu\beta^\nu\beta^\lambda + \beta^\lambda\beta^\nu\beta^\mu &= \frac{1}{8}\big((\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda + \gamma^\lambda\gamma^\nu\gamma^\mu)\otimes I + I\otimes(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda + \gamma^\lambda\gamma^\nu\gamma^\mu) \\
&\quad +2g^{\mu\nu}(I\otimes\gamma^\lambda + \gamma^\lambda\otimes I) + 2g^{\nu\lambda}(I\otimes\gamma^\mu + \gamma^\mu\otimes I) \\
&\quad +2g^{\mu\lambda}(I\otimes\gamma^\nu + \gamma^\nu\otimes I)\big).
\end{aligned}$$

Porém,

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda &= \gamma^\mu(2g^{\nu\lambda} - \gamma^\lambda\gamma^\nu) \\
&= 2g^{\nu\lambda}\gamma^\mu - (2g^{\mu\lambda} - \gamma^\lambda\gamma^\mu)\gamma^\nu \\
&= 2g^{\nu\lambda}\gamma^\mu - 2g^{\mu\lambda}\gamma^\nu + \gamma^\lambda(2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu\gamma^\mu) \\
&= 2g^{\nu\lambda}\gamma^\mu - 2g^{\mu\lambda}\gamma^\nu + 2g^{\mu\nu}\gamma^\lambda - \gamma^\lambda\gamma^\nu\gamma^\mu
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda + \gamma^\lambda\gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\nu\lambda}\gamma^\mu - 2g^{\mu\lambda}\gamma^\nu + 2g^{\mu\nu}\gamma^\lambda. \tag{2.29}$$

Assim, substituindo este resultado na expressão anterior referente à soma envolvendo produtos de matrizes β^μ, resulta

$$\beta^\mu\beta^\nu\beta^\lambda + \beta^\lambda\beta^\nu\beta^\mu = \frac{1}{8}\left(4g^{\nu\lambda}\underbrace{(I\otimes\gamma^\mu + \gamma^\mu\otimes I)}_{=2\beta^\mu} + 4g^{\mu\nu}\underbrace{(I\otimes\gamma^\lambda + \gamma^\lambda\otimes I)}_{=2\beta^\lambda}\right),$$

seguindo a relação (2.27),

$$\beta^\mu\beta^\nu\beta^\lambda + \beta^\lambda\beta^\nu\beta^\mu = g^{\nu\lambda}\beta^\mu + g^{\mu\nu}\beta^\lambda.$$

Esta relação define a álgebra subjacente à equação de primeira ordem que descreve bósons de spin 0 e 1 e será importante para a construção de um operador unitário que nos permite estudar o limite não relativístico da equação DKP livre e na presença de um campo externo, via transformações FW, conforme discutiremos no capítulo 3.

A seguir, discutiremos ainda algumas propriedades das matrizes β^μ que serão úteis no decorrer de nossas discussões.

Propriedades das Matrizes β

A partir de (2.27) podemos extrair algumas informações referentes às matrizes β^μ. De fato, fazendo $\nu = \lambda = \mu$, temos

$$(\beta^\mu)^3 = g^{\mu\mu}\beta^\mu \quad \text{(sem soma nos índices)}. \tag{2.30}$$

Por outro lado, fazendo $\lambda = \mu$ segue:

$$\beta^\mu\beta^\nu\beta^\mu = g^{\mu\nu}\beta^\mu \quad \text{(sem soma nos índices)},$$

de forma que, para $\mu \neq \nu$,

$$\beta^\mu\beta^\nu\beta^\mu = 0. \tag{2.31}$$

Calculando o determinante de (2.31) acima, obtemos

$$\det(\beta^\mu\beta^\nu\beta^\mu) = 0$$

$$\Rightarrow \det(\beta^\mu) = 0 \quad \text{ou} \quad \det(\beta^\nu) = 0,$$

mas, como μ e ν são arbitrários (embora distintos), resulta que as matrizes β^α são **singulares**:

$$\det(\beta^\alpha) = 0. \tag{2.32}$$

Agora, observemos ainda que se b^μ é um quadrivetor arbitrário,

$$\begin{aligned}(\beta_\mu b^\mu)\beta_\nu(\beta_\rho b^\rho) &= b^\mu b^\rho \beta_\mu\beta_\nu\beta_\rho \\ &= \frac{1}{2}b^\mu b^\rho(\beta_\mu\beta_\nu\beta_\rho + \beta_\rho\beta_\nu\beta_\mu) \\ &= \frac{1}{2}b^\mu b^\rho(\beta_\mu g_{\nu\rho} + \beta_\rho g_{\nu\mu}) \\ &= \frac{1}{2}b^\mu\beta_\mu b_\nu + \frac{1}{2}b^\rho\beta_\rho b_\nu \\ &= b^\mu\beta_\mu b_\nu. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}(\vec{\beta}.\vec{b})\beta_0(\vec{\beta}.\vec{b}) &= \beta_i b_i\beta_0\beta_j b_j \\ &= b_i b_j(\beta_i\beta_0\beta_j) \\ &= \frac{1}{2}b_i b_j(\beta_i\beta_0\beta_j + \beta_j\beta_0\beta_i) \\ &= \frac{1}{2}b_i b_j(\beta_i \underbrace{g_{0j}}_{=0} + \beta_j \underbrace{g_{0i}}_{=0}) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.34}$$

As matrizes β^μ, de ordem 16×16, podem ser decompostas em **representações irredutíveis** de ordens 5×5, relativa ao setor de spin 0, 10×10, referente ao setor de spin 1, e uma representação unidimensional trivial, associada ao elemento nulo da base γ^r. Em outras palavras, podemos "diagonalizar" as matrizes β^μ em blocos 5×5, 10×10 e 1×1 preservando a álgebra (2.27).

Dessa forma, vamos apresentar a seguir uma representação matricial particular que será útil na seção 2.2 (entretanto, esta representação está associada à métrica pseudoeuclidiana $g^{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu}$, comum em algumas aplicações envolvendo a teoria DKP):

SPIN 0

$$\beta_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\beta_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\beta_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

SPIN 1

$$\beta_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\beta_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\beta_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A representação matricial do spinor Φ sobre o qual atuam as matrizes β pode ser construída em termos de uma matriz coluna, perfilando suas componentes associadas aos setores de spin 0 e 1 de modo consistente com as matrizes β^μ representadas acima.

2.1.2 Forma Hamiltoniana da Equação DKP e Operador de Spin

Para implementarmos o formalismo FW no estudo do limite de baixas energias da teoria DKP no capítulo 3, precisamos escrever a equação (2.7) na forma hamiltoniana.

Assim, multiplicamos (2.7) à esquerda por $\beta^\nu \hat{p}_\nu \beta^\rho$:

$$(\beta^\nu \hat{p}_\nu \beta^\rho \beta^\mu \hat{p}_\mu - m\hat{p}_\nu \beta^\nu \beta^\rho)\Phi = 0,$$

de forma que, usando (2.33),

$$\underbrace{\beta^\alpha \hat{p}_\alpha \hat{p}^\rho \Phi}_{=m\hat{p}^\rho \Phi} - m\hat{p}_\nu \beta^\nu \beta^\rho \Phi = 0$$

$$\Rightarrow \hat{p}^{\rho}\Phi = \hat{p}_{\nu}\beta^{\nu}\beta^{\rho}\Phi, \tag{2.35}$$

onde usamos a equação (2.7) na última passagem acima.

Por outro lado, multiplicando (2.7) por β^0 à esquerda, temos

$$(\beta^0\beta^{\mu}\hat{p}_{\mu} - m\beta^0)\Phi = 0.$$

Dessa forma, fazendo $\rho = 0$ em (2.35) e somando com a relação acima,

$$(\hat{p}^0 + (\beta^0\beta^{\mu} - \beta^{\mu}\beta^0)\hat{p}_{\mu} - m\beta^0)\Phi = 0,$$

$$(i\partial_0 + \underbrace{(\beta^0\beta^j - \beta^j\beta^0)}_{=\alpha^j} i\partial_j - m\beta^0)\Phi = 0,$$

$$i\partial_0\Phi = \underbrace{-i\alpha^j\partial_j}_{=\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}}\Phi + m\beta^0\Phi$$

$$\Rightarrow i\partial_0\Phi = (\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}} + m\beta^0)\Phi. \tag{2.36}$$

Esta equação consiste na **forma hamiltoniana** da equação DKP, sendo a hamiltoniana expressa por

$$H = \vec{\alpha}.\hat{\vec{p}} + m\beta^0. \tag{2.37}$$

Para concluirmos esta seção, vamos definir o **operador de spin** da teoria DKP:

$$S_{ij} = i(\beta_i\beta_j - \beta_j\beta_i). \tag{2.38}$$

Este operador será útil para a interpretação física dos termos de acoplamento que obteremos para a interação entre o méson e um campo externo, no capítulo 3.

Na próxima seção, discutiremos a relação entre a equação DKP que apresentamos até aqui e a equação de Harish-Chandra para o campo eletromagnético, buscando evidenciar a inequivalência entre ambas.

2.2 A Equação DKP e as Equações de Maxwell

Para finalizarmos a discussão referente à equação DKP, vamos buscar acessar as equações de Maxwell para o campo eletromagnético com base em uma equação análoga a (2.7).

Para isso, definimos as matrizes auxiliares η_{μ}:

$$\eta_i = 2(\beta_i)^2 - 1, \tag{2.39}$$

$$\eta_4 = -i\left(2(\beta_4)^2 - 1\right), \tag{2.40}$$

bem como a matriz η_5:

$$\eta_5 = i\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \tag{2.41}$$

onde não há contração dos índices nas expressões acima; as matrizes β_i correspondem às matrizes beta do setor de spin 1 da teoria DKP, introduzidas na seção (2.1.1), e definimos a matriz $\beta_4 = i\beta_0$ (tendo definido β_4 em (2.1.1), embora tenha sido designada como β_0 naquela oportunidade)[3].

As matrizes η_5 e β_μ acima referidas satisfazem a seguinte relação de anticomutação, como se pode verificar efetuando diretamente os produtos:

$$\{\eta_5, \beta^\mu\} = 0. \tag{2.42}$$

Definimos também o spinor Φ como segue:

$$\Phi = \begin{pmatrix} iE^1/k \\ iE^2/k \\ iE^3/k \\ iB^1/k \\ iB^2/k \\ iB^3/k \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \\ \varphi \end{pmatrix}, \tag{2.43}$$

onde E^i e B^i são as componentes dos campos elétrico e magnético, A^i e φ correspondem às componentes do quadripotencial e k é um parâmetro de dimensão de massa, introduzido para conferir a dimensão correta ao spinor.

[3]As matrizes β_μ definidas nesta seção satisfazem a álgebra (2.27) com a métrica $g^{\mu\nu} = diag(-1, 1, 1, 1)$, tradicionalmente empregada na literatura para abordar a teoria DKP, a qual adotaremos excepcionalmente nesta seção.

Este spinor pode ser decomposto em dois setores, que denominaremos sugestivamente por Φ_R e Φ_L, definidos a seguir:

$$\Phi_R = \frac{1}{2}(1+\eta_5)\Phi, \tag{2.44}$$

$$\Phi_L = \frac{1}{2}(1-\eta_5)\Phi. \tag{2.45}$$

De posse dessas definições, propomos o seguinte par de equações para os spinores (2.44) e (2.45):

$$i\beta_\mu \partial^\mu \Phi_R = 0, \tag{2.46}$$

$$i\beta_\mu \partial^\mu \Phi_L - k\Phi_R = 0. \tag{2.47}$$

Desenvolvendo explicitamente a equação (2.46), obtemos a informação referente às **equações de Maxwell** (sem fontes):

$$\begin{cases} \vec{\nabla}.\vec{E} = 0, \quad \text{(lei de Gauss)} \\ \vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \text{(lei de Faraday)} \end{cases}$$

de modo que o spinor Φ_R é responsável pela dinâmica do sistema.

Além disso, analisando também a equação (2.47), verificam-se as **equações constitutivas** para os campos elétrico e magnético:

$$\begin{cases} \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}, \\ \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}, \end{cases}$$

de forma que, tomando o rotacional da primeira equação anterior e o divergente da segunda, segue o par de **equações geométricas** do eletromagnetismo:

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}, \quad \text{(lei de Ampère-Maxwell)} \\ \vec{\nabla}.\vec{B} = 0. \quad \text{(ausência de monopólos magnéticos)} \end{cases}$$

Atuando o operador $i\beta_\nu\partial^\nu$ à esquerda em (2.47) e usando (2.46), obtemos ainda

$$\beta_\nu\beta_\mu\partial^\nu\partial^\mu\Phi_L = 0,$$

sendo que, efetuando explicitamente o cálculo acima, recuperamos as **equações de onda** para o quadripotencial:

$$\begin{cases} (\partial_t^2\vec{A} - \nabla^2\vec{A}) + \vec{\nabla}(\partial_\mu A^\mu) = 0, \\ (\partial_t^2\varphi - \nabla^2\varphi) - \partial_t(\partial_\mu A^\mu) = 0. \end{cases}$$

Assim, o sistema de equações (2.46) e (2.47) contém efetivamente toda a informação referente ao campo eletromagnético livre. Adicionando estas equações e usando (2.44) e (2.45), obtemos

$$i\beta_\mu \partial^\mu (\Phi_L + \Phi_R) - k\Phi_R = 0,$$

$$i\beta_\mu \partial^\mu \Phi - \underbrace{\frac{k}{2}(1+\eta_5)}_{=\gamma} \Phi = 0$$

$$\Rightarrow i\beta_\mu \partial^\mu \Phi - \gamma\Phi = 0, \tag{2.48}$$

onde a matriz γ é definida por

$$\gamma = \frac{k}{2}(1+\eta_5). \tag{2.49}$$

Esta última satisfaz as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= \frac{k^2}{4}(1 + 2\eta_5 + \underbrace{\eta_5^2}_{=1}) \\ &= \frac{k^2}{2}(1+\eta_5) \\ &= k\gamma, \end{aligned} \tag{2.50}$$

$$\begin{aligned} \{\gamma, \beta^\mu\} &= \gamma\beta^\mu + \beta^\mu\gamma \\ &= \frac{k}{2}(2\beta^\mu + \underbrace{\{\eta_5, \beta^\mu\}}_{=0}) \\ &= k\beta^\mu. \end{aligned} \tag{2.51}$$

Dessa forma, observemos que a equação (2.48) acima exibe a mesma estrutura da equação DKP (2.7), <u>preservando a álgebra</u> das matrizes β^μ, porém <u>substituindo o termo de massa</u> pela matriz γ definida por (2.48). A equação (2.48) corresponde à **equação de Harish-Chandra**, proposta em 1946 (referência [10]) em um estudo referente à correspondência entre as teorias do méson (DKP) e do fóton[4].

[4]Salientamos que, na equação originalmente proposta por Harish-Chandra, a matriz γ que substitui o termo de massa satisfaz relações iguais a (2.50) e (2.51), exceto pela presença do parâmetro k que surge em nossa construção.

Portanto, verifica-se que é possível acessarmos o conteúdo referente ao campo eletromagnético explorando a mesma estrutura algébrica da teoria DKP; entretanto, as teorias do méson e do fóton não são de fato equivalentes tendo em vista que a equação (2.7) deve ser modificada para a forma (2.48) através da introdução de uma "matriz de massa", para acomodar as equações de Maxwell.

Cabe enfatizar que a construção original que efetuamos nesta seção não segue daquela proposta por Harish-Chandra, mas corresponde a uma abordagem alternativa, em que almejamos investigar a teoria do fóton estabelecendo uma analogia com a simetria quiral. Dessa forma, a decomposição do spinor Φ, definido por (2.43), em duas componentes Φ_R e Φ_L, expressas em (2.44) e (2.45), foi idealizada com o intuito de evidenciarmos os estados de polarização *"right"* e *"left"*, respectivamente, de modo que esta abordagem nos permite ainda buscar a construção de um operador de polarização da luz. De fato, temos:

$$\eta_5\Phi_R = \Phi_R,$$
$$\eta_5\Phi_L = -\Phi_L,$$

onde utilizamos $(\eta_5)^2 = 1$, o que sugere que η_5 é o operador de quiralidade do fóton. Seus autoestados são:

$$\Phi_R = p_+\Phi,$$
$$\Phi_L = p_-\Phi,$$

em que

$$p_\pm \equiv \frac{1}{2}(1 \pm \eta_5)$$

correspondem aos projetores de quiralidade tais que

$$p_\pm^2 = p_\pm;$$

$$p_+p_- = 0 = p_-p_+$$

e

$$p_+ + p_- = 1.$$

2.3 O Formalismo de Weinberg

Em 1964, S. Weinberg propôs um formalismo ancorado na **teoria da matriz de espalhamento** (matriz S)[5] para a construção de propagadores para partículas de massa não nula e spins arbitrários (inteiros e semi-inteiros)[6].

[5]Em nosso estudo, não discutiremos a teoria da matriz S, pois foge ao escopo de nosso objetivo (recomendamos ao leitor interessado o estudo das referências [29] e [34]).

[6]Este trabalho de Weinberg permaneceu, de certa forma, desconhecido devido à subsequente formulação do Modelo Padrão das interações fundamentais.

Como consequência da construção, obtêm-se equações de onda associadas aos campos que descrevem as partículas, de modo que esta proposta culmina em uma formulação alternativa ao trabalho de Bargmann e Wigner, discutido no capítulo anterior, no âmbito da teoria de spins altos.

Postulados

Na construção de Weinberg, foram assumidas as seguintes premissas:

1. a matriz S pode ser calculada a partir da fórmula de Dyson:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 ... dt_n T(H^{'}(t_1)...H^{'}(t_n)), \tag{2.52}$$

   onde a hamiltoniana H é separável em uma parte livre H_0 e uma parte interagente $H^{'}$, sendo expressa na representação de interação,

$$H^{'}(t) = e^{iH_0 t} H^{'} e^{-iH_0 t}; \tag{2.53}$$

2. a matriz S deve ser invariante sobre transformações de Lorentz ortócronas. Uma condição necessária para esta invariância é tal que possamos escrever $H^{'}(t)$ como

$$H^{'}(t) = \int d^3 x h(\vec{x}, t), \tag{2.54}$$

   onde a densidade hamiltoniana $h(x^\mu)$ apresenta as seguintes propriedades:

   a) sob uma transformação de Poincaré, $h(x^\mu)$ comporta-se de acordo com

$$U(a, \Lambda) h(x^\mu) U^{-1}(a, \Lambda) = h(\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu), \tag{2.55}$$

   onde $U(a, \Lambda)$ é um operador unitário do grupo de Poincaré (vide apêndice B);

   b) para um intervalo $(x^\mu - y^\mu)$ tipo-espaço temos

$$[h(x^\mu), h(y^\nu)] = 0, \tag{2.56}$$

   de forma que as funções de Heaviside $\theta(x_i - x_j)$, implícitas no operador de ordenamento temporal T em (2.52), apresentem apenas intervalos tipo-luz ou tipo-tempo em seus argumentos, garantindo a invariância das mesmas;

3. a densidade hamiltoniana $h(x^\mu)$ deve ser construída a partir dos operadores de criação e aniquilação de partículas livres expressas por H_0. Para que esta definição de $h(x^\mu)$ seja compatível com as propriedades elencadas acima, podemos escrevê-la como função de um ou mais campos $\psi_n(x^\mu)$, construídos a partir dos operadores de criação e aniquilação e exibindo as seguintes propriedades:

   a) sob transformações de Poincaré, os campos $\psi_n(x^\mu)$ comportam-se de acordo com

$$U(a, A(\Lambda))\psi_n(x^\mu)U^{-1}(a, A(\Lambda)) = \sum_m D^j_{nm}(A^{-1})\psi_m(\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu), \tag{2.57}$$

   onde $D_{nm}(A)$ é uma representação do grupo de Lorentz homogêneo;

   b) para um intervalo $(x^\mu - y^\mu)$ tipo-espaço exigimos

$$[\psi_n(x^\mu), \psi_m(y^\mu)]_\pm = 0, \tag{2.58}$$

   onde os sinais $+$ e $-$ acima referem-se ao anticomutador e ao comutador entre os campos, respectivamente. Esta condição assegura a validade de (2.56) para a densidade hamiltoniana $h(x^\mu)$ se temos um número par de campos fermiônicos.

Nas seções a seguir, vamos nos ater à discussão do formalismo de Weinberg em nível de representações do grupo de Poincaré, enfatizando particularmente as representações spinoriais de $2j+1$ e $2(2j+1)$ componentes, onde obtemos as equações de onda para os campos associados às partículas.

2.3.1 Campos Spinoriais na Representação $2j+1$

Conforme discutido no apêndice B, a representação unitária $U(a, A)$ do grupo de Poincaré é dependente do momento. Entretanto, gostaríamos de construir uma base de spinores cuja lei de transformação sob a atuação de elementos do grupo de Lorentz homogêneo seja simples e independente do momento. Assim, vamos definir os estados a seguir:

$$|\vec{p}, m_s; s) = \sum_{m_s'} \left|\vec{p}, m_s'; s\right\rangle D^j_{m_s' m_s}(\alpha^{-1}(p_s)), \tag{2.59}$$

onde $\alpha(p_s)$ é o operador de Wigner (B-31), p_s é a matriz hermitiana relativa ao quadrimomento definida em (A-7) e D^j é uma representação do grupo SU(2).

Recorrendo a (B.39), obtemos a lei de transformação destes estados sob transformações homogêneas:

$$\begin{aligned}
U(0,A)\,|\vec{p},m_s;s) &= \sum_{m_s^{'}} U(0,A)\left|\vec{p},m_s^{'};s\right\rangle D^j_{m_s^{'}m_s}(\alpha^{-1}(p_s)) \\
&= \sum_{m_s^{'}}(\sum_{m_s^{''}}\left|\vec{p}^{'},m_s^{''};s\right\rangle D^j_{m_s^{''}m_s^{'}}(\bar{A}(\breve{p}_s)))D^j_{m_s^{'}m_s}(\alpha^{-1}(p_s)) \\
&= \sum_{m_s^{''}}\left|\vec{p}^{'},m_s^{''};s\right\rangle(\sum_{m_s^{'}} D^j_{m_s^{''}m_s^{'}}(\bar{A}(\breve{p}_s))D^j_{m_s^{'}m_s}(\alpha^{-1}(p_s))),
\end{aligned}$$

onde $\bar{A}(\breve{p}_s)$ é elemento do *little group* ($L(\breve{p}_s)$). Usando (B.27), bem como a lei de composição para elementos do SU(2) (A.43), obtemos

$$\begin{aligned}
U(0,A)\,|\vec{p},m_s;s) &= \sum_{m_s^{''}}\left|\vec{p}^{'},m_s^{''};s\right\rangle(\sum_{m_s^{'}} D^j_{m_s^{''}m_s^{'}}(\alpha^{-1}(p_s^{'})A\alpha(p_s)). \\
&\quad .D^j_{m_s^{'}m_s}(\alpha^{-1}(p_s))) \\
&= \sum_{m_s^{''}}\left|\vec{p}^{'},m_s^{''};s\right\rangle(\sum_{m_s^{'''}} D^j_{m_s^{''}m_s^{'''}}(\alpha^{-1}(p_s^{'})). \\
&\quad .D^j_{m_s^{'''}m_s}(A\alpha(p_s)\alpha^{-1}(p_s))) \\
&= \sum_{m_s^{'''}}\underbrace{\sum_{m_s^{''}}\left|\vec{p}^{'},m_s^{''};s\right\rangle D^j_{m_s^{''}m_s^{'''}}(\alpha^{-1}(p_s^{'}))}_{=\left|\vec{p}^{'},m_s^{'''};s\right)} D^j_{m_s^{'''}m_s}(A) \\
&= \sum_{m_s^{'''}}\left|\vec{p}^{'},m_s^{'''};s\right) D^j_{m_s^{'''}m_s}(A). \qquad (2.60)
\end{aligned}$$

Observemos que, de fato, a lei de transformação dos estados (2.59) expressa acima é independente do momento. Precisamos, agora, examinar as condições de **ortogonalidade** e **completeza** para estes estados:

$$\begin{aligned}
(\vec{p}^{'},m_s^{'};s|\vec{p},m_s;s) &= \sum_{m_s^{'''}}\left\langle\vec{p}^{'},m_s^{'''};s\right| D^{j+}_{m_s^{'}m_s^{'''}}(\alpha^{-1}(p_s^{'})). \\
&\quad .\sum_{m_s^{''}}\left|\vec{p},m_s^{''};s\right\rangle D^j_{m_s^{''}m_s}(\alpha^{-1}(p_s))
\end{aligned}$$

$$= \sum_{m_s'''}\sum_{m_s''}\left\langle \vec{p'}, m_s'''; s|\vec{p}, m_s''; s\right\rangle D^j_{m_s' m_s'''}((\alpha^{-1}(p_s'))^+)D^j_{m_s'' m_s}(\alpha^{-1}(p_s)).$$

Recorrendo a (B.33), segue

$$\begin{aligned}
(\vec{p'}, m_s'; s|\vec{p}, m_s; s) &= \sum_{m_s'''}\sum_{m_s''}(2p_0\delta(\vec{p}-\vec{p'})\delta_{m_s''' m_s''})D^j_{m_s' m_s'''}((\alpha^{-1}(p_s'))^+). \\
&\quad .D^j_{m_s'' m_s}(\alpha^{-1}(p_s)) \\
&= 2p_0\delta(\vec{p}-\vec{p'})\sum_{m_s''} D^j_{m_s' m_s''}((\alpha^{-1}(p_s'))^+)D^S_{m_s'' m_s}(\alpha^{-1}(p_s)) \\
&= 2p_0\delta(\vec{p}-\vec{p'})D^j_{m_s' m_s}((\alpha^{-1}(p_s'))^+\alpha^{-1}(p_s));
\end{aligned}$$

contudo, devido a presença da função delta de Dirac, sob o sinal de integração a matriz D^j contribui apenas quando $p_s = p_s'$. Logo, usando a hermiticidade do operador de Wigner,

$$\begin{aligned}
(\vec{p'}, m_s'; s|\vec{p}, m_s; s) &= 2p_0\delta(\vec{p}-\vec{p'})D^j_{m_s' m_s}((\alpha^{-1}(p_s))^+\alpha^{-1}(p_s)) \\
&= 2p_0\delta(\vec{p}-\vec{p'})D^j_{m_s' m_s}((\alpha^2(p_s))^{-1}).
\end{aligned}$$

Porém, recordando a relação $\alpha^2(p_s) = p_s/m$, segue que $(\alpha^2(p_s))^{-1} = mp_s^{-1}$. Ainda, com o auxílio de (A.13), obtemos $p_s^{-1} = \frac{p^0\sigma_0 - \vec{p}.\vec{\sigma}}{m^2}$.

Dessa forma, substituindo este resultado na expressão anterior, resulta a relação de "ortogonalidade":

$$(\vec{p'}, m_s'; s|\vec{p}, m_s; s) = 2p_0\delta(\vec{p}-\vec{p'})D^j_{m_s' m_s}(mp_s^{-1}). \tag{2.61}$$

Observemos que os estados definidos em (2.59) não são ortogonais. Para a relação de completeza, temos:

$$\sum_{m_s}\sum_{m_s'}\int |\vec{p}, m_s; s)\, D^j_{m_s m_s'}\left(\frac{p_s}{m}\right)\left(\vec{p}, m_s'; s\right|\frac{d^3p}{2p_0} = 1. \tag{2.62}$$

Operadores de Criação e Aniquilação

Para construirmos um sistema de muitas partículas, vamos introduzir o **operador de criação** a^+:

$$|\vec{p}, m_s; s, m\rangle = a^+(\vec{p}, m_s; s, m)\,|0\rangle\,; \tag{2.63}$$

onde $|0\rangle$ representa o **vácuo**, que consiste no estado homogêneo e isotrópico de menor energia.

Assim, podemos verificar a lei de transformação do operador de criação sobre transformações de Lorentz a partir de (B.39)[7]:

$$U(0,A)\underbrace{|\vec{p},m_s;s,m\rangle}_{=a^+(\vec{p},m_s)|0\rangle} = \sum_{m_s^{'}} \left|\vec{p}^{'},m_s^{'}\right\rangle D^s_{m_s^{'}m_s}(\bar{A}(\breve{p}_s)),$$

$$U(0,A)a^+(\vec{p},m_s)U^{-1}(0,A)\underbrace{U(0,A)\,|0\rangle}_{=|0\rangle} = \sum_{m_s^{'}} \underbrace{\left|\vec{p}^{'},m_s^{'}\right\rangle}_{=a^+(\vec{p}^{'},m_s^{'})|0\rangle} D^s_{m_s^{'}m_s}(\alpha^{-1}(p_s^{'})A\alpha(p_s)),$$

$$U(0,A)a^+(\vec{p},m_s)U^{-1}(0,A)\,|0\rangle = \sum_{m_s^{'}} a^+(\vec{p}^{'},m_s^{'})D^s_{m_s^{'}m_s}(\alpha^{-1}(p_s^{'})A\alpha(p_s))\,|0\rangle$$

$$\Rightarrow U(0,A)a^+(\vec{p},m_s)U^{-1}(0,A) = \sum_{m_s^{'}} a^+(\vec{p}^{'},m_s^{'})D^s_{m_s^{'}m_s}(\alpha^{-1}(p_s^{'})A\alpha(p_s)). \tag{2.64}$$

O **operador de aniquilação** a é definido por:

$$a(\vec{p},m_s;s,m)\,|\vec{p},m_s;s,m\rangle = |0\rangle\,. \tag{2.65}$$

Tomando o conjugado hermitiano de (2.64), segue a lei de transformação do operador de aniquilação sob transformações de Lorentz:

$$\underbrace{(U^{-1}(0,A))^+}_{=U(0,A)} a(\vec{p},m_s)\underbrace{U^+(0,A)}_{=U^{-1}(0,A)} = \sum_{m_s^{'}} \underbrace{D^{j+}_{m_s^{'}m_s}(\alpha^{-1}(p_s^{'})A\alpha(p_s))}_{=(D^j_{m_s^{'}m_s}(\alpha^{-1}(p_s^{'})A\alpha(p_s)))^{-1}}\ a(\vec{p}^{'},m_s^{'})$$

$$\Rightarrow U(0,A)a(\vec{p},m_s)U^{-1}(0,A) = \sum_{m_s^{'}} D^j_{m_s^{'}m_s}(\alpha^{-1}(p_s)A^{-1}\alpha(p_s^{'}))a(\vec{p}^{'},m_s^{'}). \tag{2.66}$$

As **relações de comutação** entre os operadores de criação e aniquilação são expressas por:

$$[a(\vec{p},m_s),a^+(\vec{p}^{'},m_s^{'})]_\pm = 2p_0\delta_{m_sm_s^{'}}\delta(\vec{p}-\vec{p}^{'}), \tag{2.67}$$

[7] O vácuo $|0\rangle$ é invariante sob transformações de Poincaré:

$$U(a,A)\,|0\rangle = |0\rangle\,,$$

visto que, por definição, é um estado homogêneo e isotrópico.

onde os sinais (+) e (−) referem-se a campos fermiônicos e bosônicos, respectivamente.

Agora, levando em conta $A^{-1} = C^{-1}A^T C$ (vide apêndice A), podemos substituir a lei de transformação (2.64) para o operador de criação por uma relação mais conveniente, expressa abaixo[8]:

$$\sum_{m_s^{'}} U(0,A) D^j_{m_s m_s^{'}}(C^{-1}) a^+(\vec{p}, m_s^{'}) U^{-1}(0,A) =$$

$$\sum_{m_s^{'}} \sum_{m_s^{''}} D^j_{m_s m_s^{'}}(\alpha^{-1}(p_s) A^{-1} \alpha(p_s^{'})) D^j_{m_s^{'} m_s^{''}}(C^{-1}) a^+(\vec{p^{'}}, m_s^{''}). \tag{2.68}$$

Como podemos notar, a lei de transformação acima é a mesma do operador de aniquilação.

A relação (2.68) sugere a seguinte redefinição dos operadores de criação e aniquilação:

$$\begin{cases} a^+ \to D^j(\alpha C^{-1}) a^+, \\ a \to D^j(\alpha) a. \end{cases} \tag{2.69}$$

Estes novos operadores transformam-se localmente sob transformações de Lorentz homogêneas da seguinte forma:

$$U(0,A) D^j(\alpha(p_s) C^{-1}) a^+(\vec{p}) U^{-1}(0,A) = D^j(A^{-1}) D^j(\alpha(p_s^{'}) C^{-1}) a^+(\vec{p^{'}}) \tag{2.70}$$

e

$$U(0,A) D^j(\alpha(p_s)) a(\vec{p}) U^{-1}(0,A) = D^j(A^{-1}) D^j(\alpha(p_s^{'})) a(\vec{p^{'}}). \tag{2.71}$$

De posse dos operadores (2.69), podemos definir os campos $\phi^{(+)}(x^\mu)$ e $\phi^{(-)}(x^\mu)$ de $2s+1$ componentes que compõem uma base para os operadores de criação e aniquilação:

$$\phi^{(-)}(x^\mu) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{2p_0} \sum_{m_s^{'}} D^j_{m_s m_s^{'}}(\alpha C^{-1}) a^+(\vec{p}, m_s^{'}) e^{ip_\mu x^\mu}, \tag{2.72}$$

$$\phi^{(+)}(x^\mu) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{2p_0} \sum_{m_s^{'}} D^j_{m_s m_s^{'}}(\alpha) a(\vec{p}, m_s^{'}) e^{-ip_\mu x^\mu}. \tag{2.73}$$

Entretanto, levando em consideração também as **antipartículas**, precisamos definir os operadores $D^j(\alpha C^{-1}) b^+(\vec{p})$ e $D^j(\alpha) b(\vec{p})$ referentes à criação e

---

[8]Vide referências [11] e [31].

aniquilação destas partículas, respectivamente. Dessa forma, os campos associados às antipartículas apresentam a mesma forma dos campos definidos em (2.72) e (2.73), substituindo-se os operadores $a(\vec{p})$ por $b(\vec{p})$.

Face ao exposto, o campo mais geral que podemos construir é expresso por

$$\phi(x^\mu) = \phi_a^{(+)}(x^\mu) + \eta\phi_b^{(-)}(x^\mu),$$

ou, escrevendo explicitamente,

$$\begin{aligned}\phi(x^\mu) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{d^3p}{2p_0}\sum_{m_s'}(D^j_{m_s m_s'}(\alpha)a(\vec{p},m_s')e^{-ip_\mu x^\mu} + \\ &\quad +\eta D^j_{m_s m_s'}(\alpha C^{-1})b^+(\vec{p},m_s')e^{ip_\mu x^\mu}),\end{aligned} \tag{2.74}$$

onde η é um <u>fator de fase</u>.

Observemos que, por construção, este campo transforma-se localmente sob transformações de Lorentz homogêneas de acordo com

$$\begin{aligned}U(0,A)\phi(x^\mu)U^{-1}(0,A) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{d^3p}{2p_0}(\underbrace{U(0,A)D^j(\alpha(p_s))a(\vec{p})U^{-1}(0,A)}_{=D^j(A^{-1})D^j(\alpha(p_s'))a(\vec{p'})}e^{-ip_\mu x^\mu} \\ &\quad +\eta\underbrace{U(0,A)D^j(\alpha(p_s)C^{-1})b^+(\vec{p})U^{-1}(0,A)}_{=D^j(A^{-1})D^j(\alpha(p_s')C^{-1})b^+(\vec{p'})}e^{ip_\mu x^\mu}) \\ &= D^j(A^{-1})\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{d^3p'}{2p_0'}(D^j(\alpha(p_s'))a(\vec{p'})e^{-ip'_\mu x'^\mu} + \\ &\quad +\eta D^j(\alpha(p_s')C^{-1})b^+(\vec{p'})e^{ip'_\mu x'^\mu}) \\ &= D^j(A^{-1})\phi(\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu).\end{aligned} \tag{2.75}$$

Dessa maneira, (2.75) é consistente com a exigência (2.57).

Relações de Comutação e Causalidade

Examinemos agora a relação de comutação entre os campos ϕ e ϕ^+:

$$\begin{aligned}[\phi_{m_s}(x^\mu),\phi^+_{m_s'}(y^\mu)]_{(\pm)} &= [\phi_a^{(+)}{}_{m_s}(x^\mu)+\eta\phi_b^{(-)}{}_{m_s}(x^\mu),\phi_a^{(+)+}{}_{m_s'}(y^\mu)+\eta^*\phi_b^{(-)+}{}_{m_s'}(y^\mu)]_{(\pm)} \\ &= [\phi_a^{(+)}{}_{m_s}(x^\mu),\phi_a^{(+)+}{}_{m_s'}(y^\mu)]_{(\pm)} + \eta[\phi_b^{(-)}{}_{m_s}(x^\mu),\phi_a^{(+)+}{}_{m_s'}(y^\mu)]_{(\pm)} + \\ &\quad +\eta^*[\phi_a^{(+)}{}_{m_s}(x^\mu),\phi_b^{(-)+}{}_{m_s'}(y^\mu)]_{(\pm)} + |\eta|^2[\phi_b^{(-)}{}_{m_s}(x^\mu),\phi_b^{(-)+}{}_{m_s'}(y^\mu)]_{(\pm)}.\end{aligned} \tag{2.76}$$

Desenvolvendo separadamente cada termo do segundo membro, temos

$[\phi_a^{(+)}{}_{m_s}(x^\mu), \phi_a^{(+)}{}^{+}_{m_s'}(y^\mu)]_{(\pm)} = \phi_a^{(+)}{}_{m_s}(x^\mu)\phi_a^{(+)}{}^{+}_{m_s'}(y^\mu) \pm \phi_a^{(+)}{}^{+}_{m_s'}(y^\mu)\phi_a^{(+)}{}_{m_s}(x^\mu)$;

todavia, observemos que

$$\begin{aligned}
\phi_a^{(+)}{}_{m_s}(x^\mu)\phi_a^{(+)}{}^{+}_{m_s'}(y^\mu) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\int \frac{d^3p d^3p'}{2p_0 2p_0'}\sum_{m_s''}\sum_{m_s'''} D^j_{m_s m_s''}(\alpha(p_s)). \\
&.D^{j+}_{m_s''' m_s'}(\alpha(p_s'))a(\vec{p}, m_s'')a^+(\vec{p'}, m_s''')e^{-ip_\mu x^\mu + ip'_\mu y^\mu},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_a^{(+)}{}^{+}_{m_s'}(y^\mu)\phi_a^{(+)}{}_{m_s}(x^\mu) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\int \frac{d^3p d^3p'}{2p_0 2p_0'}\sum_{m_s''}\sum_{m_s'''} D^{j+}_{m_s''' m_s'}(\alpha(p_s')). \\
&.D^j_{m_s m_s''}(\alpha(p_s))a^+(\vec{p'}, m_s''')a(\vec{p}, m_s'')e^{-ip_\mu x^\mu + ip'_\mu y^\mu}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$[\phi_a^{(+)}{}_{m_s}(x^\mu), \phi_a^{(+)}{}^{+}_{m_s'}(y^\mu)]_{(\pm)} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\int \frac{d^3p d^3p'}{2p_0 2p_0'}\sum_{m_s''}\sum_{m_s'''} D^j_{m_s m_s''}(\alpha(p_s)).$$

$$.D^{j+}_{m_s''' m_s'}(\alpha(p_s'))\underbrace{[a(\vec{p}, m_s''), a^+(\vec{p'}, m_s''')]_{(\pm)}}_{=2p_0\delta_{m_s'' m_s'''}\delta(\vec{p}-\vec{p'})} e^{-ip_\mu x^\mu + ip'_\mu y^\mu}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p'}{2p_0'} D^j_{m_s m_s'}(\alpha(p_s')\alpha^+(p_s'))e^{-ip'_\mu(x^\mu - y^\mu)} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p'}{2p_0'} D^j_{m_s m_s'}\left(\frac{p_s'}{m}\right) e^{-ip'_\mu(x^\mu - y^\mu)} \qquad (2.77)
\end{aligned}$$

e

$[\phi_b^{(-)}{}_{m_s}(x^\mu), \phi_b^{(-)}{}^{+}_{m_s'}(y^\mu)]_{(\pm)} = \phi_b^{(-)}{}_{m_s}(x^\mu)\phi_b^{(-)}{}^{+}_{m_s'}(y^\mu) \pm \phi_b^{(-)}{}^{+}_{m_s'}(y^\mu)\phi_b^{(-)}{}_{m_s}(x^\mu)$;

entretanto,

$$\begin{aligned}
\phi_b^{(-)}{}_{m_s}(x^\mu)\phi_b^{(-)}{}^{+}_{m_s'}(y^\mu) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\int \frac{d^3p d^3p'}{2p_0 2p_0'}\sum_{m_s''}\sum_{m_s'''} D^j_{m_s m_s''}(\alpha(p_s)C^{-1}). \\
&.D^{j+}_{m_s''' m_s'}(\alpha(p_s')C^{-1})b^+(\vec{p}, m_s'')b(\vec{p'}, m_s''')e^{ip_\mu x^\mu - ip'_\mu y^\mu},
\end{aligned}$$

$$\phi_b^{(-)}{}^{+}_{m_s'}(y^\mu)\phi_b^{(-)}{}_{m_s}(x^\mu) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\int \frac{d^3pd^3p'}{2p_0 2p_0'}\sum_{m_s''}\sum_{m_s'''} D^{j+}_{m_s''' m_s'}(\alpha(p_s')C^{-1}).$$
$$.D^j_{m_s m_s''}(\alpha(p_s)C^{-1})b(\vec{p'},m_s''')b^+(\vec{p},m_s'')e^{ip_\mu x^\mu - ip_\mu' y^\mu}.$$

Portanto,

$$[\phi_b^{(-)}{}_{m_s}(x^\mu),\phi_b^{(-)}{}^{+}_{m_s'}(y^\mu)]_{(\pm)} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\int \frac{d^3pd^3p'}{2p_0 2p_0'}\sum_{m_s''}\sum_{m_s'''} D^j_{m_s m_s''}(\alpha(p_s)C^{-1}).$$

$$.D^{j+}_{m_s''' m_s'}(\alpha(p_s')C^{-1})\underbrace{[b^+(\vec{p},m_s''),b(\vec{p'},m_s''')]_{(\pm)}}_{=\pm 2p_0\delta_{m_s'' m_s'''}\delta(\vec{p}-\vec{p'})}e^{ip_\mu x^\mu - ip_\mu' y^\mu}$$

$$= \pm\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p'}{2p_0'}D^j_{m_s m_s'}\underbrace{(\alpha(p_s')C^{-1}C^{-1+}\alpha^+(p_s'))}_{=\frac{p_s'}{m}}e^{ip_\mu'(x^\mu-y^\mu)}$$
$$= \pm\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p'}{2p_0'}D^j_{m_s m_s'}\left(\frac{p_s'}{m}\right)e^{ip_\mu'(x^\mu-y^\mu)}, \tag{2.78}$$

onde exploramos o caráter unitário de C (vide apêndice A).

Os termos envolvendo relações de comutação entre os campos associados às partículas ($\phi_a^{(+)}(x^\mu)$) e os campos relacionados às antipartículas ($\phi_b^{(-)}(x^\mu)$) se anulam, pois os operadores $a(\vec{p})$ e $b^+(\vec{p})$ comutam (assim como $a(\vec{p})$ e $b(\vec{p})$). De fato, observemos que

$$[\phi_a^{(+)}{}_{m_s}(x^\mu),\phi_b^{(-)}{}^{+}_{m_s'}(y^\mu)]_{(\pm)} = \phi_a^{(+)}{}_{m_s}(x^\mu)\phi_b^{(-)}{}^{+}_{m_s'}(y^\mu)\pm\phi_b^{(-)}{}^{+}_{m_s'}(y^\mu)\phi_a^{(+)}{}_{m_s}(x^\mu);$$

porém,

$$\phi_a^{(+)}{}_{m_s}(x^\mu)\phi_b^{(-)}{}^{+}_{m_s'}(y^\mu) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\int \frac{d^3pd^3p'}{2p_0 2p_0'}\sum_{m_s''}\sum_{m_s'''} D^j_{m_s m_s''}(\alpha(p_s)).$$
$$.D^{j+}_{m_s''' m_s'}(\alpha(p_s')C^{-1})a(\vec{p},m_s'')b(\vec{p'},m_s''')e^{-ip_\mu x^\mu - ip_\mu' y^\mu}$$

e

$$\begin{aligned}\phi_b^{(-)+}{}_{m_s'}(y^\mu)\phi_a^{(+)}{}_{m_s}(x^\mu) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\int\frac{d^3pd^3p'}{2p_0 2p_0'}\sum_{m_s''}\sum_{m_s'''}D^{j+}_{m_s''' m_s'}(\alpha(p_s')C^{-1}).\\ &.D^j_{m_s m_s''}(\alpha(p_s))b(\vec{p}',m_s''')a(\vec{p},m_s'')e^{-ip_\mu x^\mu-ip'_\mu y^\mu}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}[\phi_a^{(+)}{}_{m_s}(x^\mu),\phi_b^{(-)+}{}_{m_s'}(y^\mu)]_{(\pm)} &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\int\frac{d^3pd^3p'}{2p_0 2p_0'}\sum_{m_s''}\sum_{m_s'''}D^j_{m_s m_s''}(\alpha(p_s)).\\ &.D^{j+}_{m_s''' m_s'}(\alpha(p_s'))\underbrace{[a(\vec{p},m_s''),b(\vec{p}',m_s''')]}_{=0}e^{-ip_\mu x^\mu-ip'_\mu y^\mu}\\ &= 0.\end{aligned} \tag{2.79}$$

Analogamente, verifica-se que

$$[\phi_b^{(-)}{}_{m_s}(x^\mu),\phi_a^{(+)+}{}_{m_s'}(y^\mu)]_{(\pm)} = 0. \tag{2.80}$$

Dessa forma, de posse dos resultados (2.77)-(2.80), retomamos o desenvolvimento de (2.76):

$$[\phi_{m_s}(x^\mu),\phi^+_{m_s'}(y^\mu)]_{(\pm)} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{2p_0}D^j_{m_s m_s'}\left(\frac{p_s}{m}\right)\left(e^{-ip_\mu(x^\mu-y^\mu)}\pm|\eta|^2e^{ip_\mu(x^\mu-y^\mu)}\right).$$

Agora, observemos que a matriz p_s/m que comparece no argumento de D^j corresponde a um elemento do SL(2,C) (mais precisamente ao setor hermitiano do grupo), visto que consiste em uma matriz 2×2 (hermitiana) cujo determinante é 1. Assim, recordando que um elemento A_b do SL(2,C) é expresso por (A-76), pode-se construir uma representação para $D^j(p_s/m)$ como:

$$D^j\left(\frac{p_s}{m}\right) = e^{-\frac{\beta}{|\vec{p}|}(\vec{S}.\vec{p})}, \tag{2.81}$$

onde $\operatorname{senh}(\beta) = -\frac{|\vec{p}|}{m}$ e $\vec{S}$ é o operador de spin.

Portanto, podemos reescrever o comutador anterior sob a forma conveniente

$$[\phi_{m_s}(x^\mu),\phi^+_{m_s'}(y^\mu)]_{(\pm)} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{2p_0}e^{-\frac{\beta}{|\vec{p}|}(\vec{S}.\vec{p})}\left(e^{-ip_\mu(x^\mu-y^\mu)}\pm|\eta|^2e^{ip_\mu(x^\mu-y^\mu)}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \underbrace{e^{-\frac{\beta}{|\vec{p}|}(\vec{S}.\hat{\vec{p}})}}_{=D^j_{m_s m'_s}\left(\frac{\hat{p}_s}{m}\right)} \int \frac{d^3p}{2p_0} \left(e^{-ip_\mu(x^\mu - y^\mu)} \pm |\eta|^2 (-1)^{2j} e^{ip_\mu(x^\mu - y^\mu)}\right) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} D^j_{m_s m'_s}\left(\frac{\hat{p}_s}{m}\right) \int \frac{d^3p}{2p_0} \left(e^{-ip_\mu(x^\mu - y^\mu)} \pm |\eta|^2 (-1)^{2j} e^{ip_\mu(x^\mu - y^\mu)}\right).
\end{aligned}
\tag{2.82}
$$

Analisando (2.82), observa-se que o comutador se anula em um intervalo tipo-espaço $(x^\mu - y^\mu)^2 < 0$, se a integral involve apenas a diferença entre as exponenciais (vide apêndice C), isto é,

$$
-1 = \pm |\eta|^2 (-1)^{2j}.
$$

Esta condição é satisfeita se

$$
|\eta|^2 = 1, \quad \pm(-1)^{2j} = -1. \tag{2.83}
$$

As relações (2.83) acima sintetizam a **condição de causalidade** para os campos, de forma que o **teorema spin-estatística** segue naturalmente desta condição:

se $j \in Z$ temos relações de comutação (estatística de Bose-Einstein);

se $2j \in Z$ temos relações de anticomutação (estatística de Fermi-Dirac).

Portanto, aplicando (2.83) em (2.82) resulta a relação de comutação causal entre os campos

$$
\begin{aligned}
[\phi_{m_s}(x^\mu), \phi^+_{m'_s}(y^\mu)]_{(\pm)} &= D^j_{m_s m'_s}\left(\frac{\hat{p}_s}{m}\right) \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2p_0} \left(e^{-ip_\mu(x^\mu - y^\mu)} - e^{ip_\mu(x^\mu - y^\mu)}\right)}_{=i\Delta(x^\mu - y^\mu)} \\
&= iD^j_{m_s m'_s}\left(\frac{\hat{p}_s}{m}\right) \Delta(x^\mu - y^\mu),
\end{aligned}
\tag{2.84}
$$

onde $\Delta(x^\mu - y^\mu)$ é a função de Pauli-Jordan (apêndice C),

$$
\Delta(x^\mu - y^\mu) = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2p_0} \left(e^{-ip_\mu(x^\mu - y^\mu)} - e^{ip_\mu(x^\mu - y^\mu)}\right).
$$

Equação de Klein-Gordon

Para finalizarmos esta seção referente aos campos spinoriais na representação $2j+1$, vamos examinar as equações de onda satisfeitas por estes campos.

Naturalmente, por descrever partículas livres, o campo (2.74) (com $\eta = 1$ devido a (2.83)) deve satisfazer a **equação de Klein-Gordon** em cada uma de suas componentes. Com efeito, observemos que

$$\begin{aligned}
\partial_\nu \partial^\nu \phi_{m_s} &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{2p_0} \sum_{m_s'} (D^j_{m_s m_s'}(\alpha) a(\vec{p}, m_s')((-ip^0)^2 - (i|\vec{p}|)^2) e^{-ip_\mu x^\mu} \\
&+ D^j_{m_s m_s'}(\alpha C^{-1}) b^+(\vec{p}, m_s')((ip^0)^2 - (-i|\vec{p}|)^2) e^{ip_\mu x^\mu}) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{2p_0} (-(p^0)^2 + |\vec{p}|^2) \sum_{m_s'} (D^j_{m_s m_s'}(\alpha) a(\vec{p}, m_s') e^{-ip_\mu x^\mu} \\
&+ D^j_{m_s m_s'}(\alpha C^{-1}) b^+(\vec{p}, m_s') e^{ip_\mu x^\mu})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow (\partial_\nu \partial^\nu + m^2)\phi_{m_s} &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{2p_0} \underbrace{(-(p^0)^2 + (|\vec{p}|)^2 + m^2)}_{=0} \cdot \\
&\cdot \sum_{m_s'} (D^j_{m_s m_s'}(\alpha) a(\vec{p}, m_s') e^{-ip_\mu x^\mu} + \\
&+ D^j_{m_s m_s'}(\alpha C^{-1}) b^+(\vec{p}, m_s') e^{ip_\mu x^\mu}) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{2.85}$$

Além disso, verifica-se em detalhe na referência [11] que o campo $\phi(x^\mu)$ transforma-se adequadamente sob transformações de reversão temporal (T) e sob a composição da conjugação de carga e paridade (CP), de modo que a representação $2j+1$ constitui um cenário apropriado para o estudo da **interação fraca**[9].

Entretanto, os campos de $2j+1$ componentes não fornecem um cenário apropriado ao estudo de processos que conservam paridade (vide referência [11]) e não satisfazem outra equação de onda à exceção de (2.85).

Podemos construir campos que preservam paridade e exibem equações de onda complementares à equação de Klein-Gordon se estendermos a dimensão

[9]Não reproduziremos aqui os cálculos referentes às simetrias T e CP mencionadas acima, pois tal abordagem foge do escopo deste trabalho.

da "representação" para $2(2j+1)$ componentes, como veremos na próxima seção.

2.3.2 Campos Spinoriais na Representação $2(2j+1)$

Na seção anterior, os campos de $2j+1$ componentes que definimos em (2.74) transformam-se de acordo com a representação $(j,0)$ do grupo de Lorentz homogêneo como expresso em (2.75). Conforme discutido no capítulo 1, para que a simetria de paridade seja conservada, precisamos construir um campo $\psi(x^\mu)$ que se transforme segundo a representação $(j,j)=(j,0)\oplus(0,j)$ do grupo homogêneo.

Assim, introduzimos um campo $\chi(x^\mu)$:

$$\begin{aligned}\chi_{m_s}(x^\mu) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{d^3p}{2p_0}\sum_{m_s^{'}}(D^j_{m_s m_s^{'}}(\alpha^{-1^+}(p_s))a(\vec{p},m_s^{'})e^{-ip_\mu x^\mu}\\ &+(-1)^{2j}D^j_{m_s m_s^{'}}(\alpha^{-1^+}(p_s)C^{-1})b^+(\vec{p},m_s^{'})e^{ip_\mu x^\mu}),\end{aligned} \tag{2.86}$$

onde o fator $(-1)^{2j}$ foi introduzido com o intuito de garantir relações de comutação causais entre $\chi(x^\mu)$ e $\phi(x^\mu)$.

A lei de transformação deste campo é definida segundo a representação $(0,j)$ em analogia com (2.75),

$$U(0,A)\chi(x^\mu)U^{-1}(0,A)=D^{j+}(A)\chi(\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu). \tag{2.87}$$

Examinando a relação de comutação entre $\chi(x^\mu)$ e $\phi^+(y^\mu)$, temos

$$[\chi_{m_s}(x^\mu),\phi^+_{m_s^{'}}(y^\mu)]_{(\pm)}=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\int\frac{d^3pd^3p^{'}}{2p_0 2p_0^{'}}\sum_{m_s^{''}}\sum_{m_s^{'''}}(D^j_{m_s m_s^{''}}(\alpha^{-1^+}(p_s)).$$

$$.D^j_{m_s^{''}m_s^{'}}(\alpha^+(p_s^{'}))\underbrace{[a(\vec{p},m_s{''}),a^+(\vec{p^{'}},m_s^{'''})]_{(\pm)}}_{=2p_0\delta(\vec{p}-\vec{p^{'}})\delta_{m_s^{''}m_s^{'''}}}e^{-ip_\mu x^\mu+ip_\mu^{'}y^\mu}+$$

$$+(-1)^{2j}D^j_{m_s m_s^{''}}(\alpha^{-1^+}(p_s)C^{-1})D^j_{m_s^{'''}m_s^{'}}(C^{-1^+}\alpha^+(p_s^{'})).$$

$$.\underbrace{[b^+(\vec{p},m_s^{''}),b(\vec{p^{'}},m_s^{'''})]_{(\pm)}}_{=\pm 2p_0\delta(\vec{p}-\vec{p^{'}})\delta_{m_s^{''}m_s^{'''}}}e^{ip_\mu x^\mu-ip_\mu^{'}y^\mu})$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2p_0}\sum_{m_s''}(D^j_{m_s m_s''}(\alpha^{-1^+}(p_s))D^j_{m_s'' m_s'}(\alpha^+(p_s))e^{-ip_\mu(x^\mu-y^\mu)} \\
&\pm(-1)^{2j}D^j_{m_s m_s''}(\alpha^{-1^+}(p_s)C^{-1})D^j_{m_s'' m_s'}(C^{-1^+}\alpha^+(p_s))e^{ip_\mu(x^\mu-y^\mu)}) \\
&= \delta_{m_s m_s'}\frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2p_0}(e^{-ip_\mu(x^\mu-y^\mu)} \pm (-1)^{2j}e^{ip_\mu(x^\mu-y^\mu)}),
\end{aligned}
$$

de modo que, recorrendo à condição (2.83), a integral acima se anula para intervalos tipo-espaço (vide apêndice C) e, portanto, temos efetivamente a **causalidade preservada**. Logo, podemos escrever a relação de comutação acima como

$$[\chi_{m_s}(x^\mu), \phi^+_{m_s'}(y^\mu)]_{(\pm)} = i\delta_{m_s m_s'}\Delta(x^\mu - y^\mu). \tag{2.88}$$

De forma completamente similar ao que foi feito para o campo $\phi(x^\mu)$, mostra-se que o campo $\chi(x^\mu)$ satisfaz à equação de Klein-Gordon em cada uma de suas componentes:

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\chi_{m_s}(x^\mu) = 0. \tag{2.89}$$

Agora, de posse dos campos $\phi(x^\mu)$ e $\chi(x^\mu)$, podemos definir o **spinor de** $2(2j+1)$ componentes da seguinte forma:

$$\Psi(x^\mu) = \left(\begin{array}{c}\phi(x^\mu)\\ \chi(x^\mu)\end{array}\right). \tag{2.90}$$

A partir de (2.75) e (2.87), estabelecemos a lei de transformação de Ψ sob transformações de Lorentz

$$U(0,A)\Psi(x^\mu)U^{-1}(0,A) = S(A^{-1})\Psi(\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu), \tag{2.91}$$

onde $S(A)$ é a matriz de $2(2j+1)\times 2(2j+1)$ componentes definida por

$$S(A) = \left[\begin{array}{cc} D^j(A) & 0 \\ 0 & D^{j+}(A^{-1})\end{array}\right]. \tag{2.92}$$

Assim como na teoria de Dirac, podemos definir também o spinor adjunto:

$$\bar{\Psi} = \Psi^+\gamma_0, \tag{2.93}$$

onde $\gamma_0 = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{array}\right]$ é a matriz definida no capítulo 1, segundo a representação spinorial da equação de Dirac, porém com cada elemento correspondendo a uma matriz coluna de $2j+1$ componentes.

Observemos que a "forma quadrática" $\bar{\Psi}\Psi$ é covariante. De fato, temos

$$U(0,A)\bar{\Psi}(x^\mu)\Psi(x^\mu)U^{-1}(0,A) = \underbrace{U(0,A)\Psi^+(x^\mu)U^{-1}(0,A)}_{=\Psi^+(\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu)S^+(A^{-1})}\underbrace{U(0,A)\gamma_0 U^{-1}(0,A)}_{=\gamma_0}.$$

$$.\underbrace{U(0,A)\Psi(x^\mu)U^{-1}(0,A)}_{=S(A^{-1})\Psi(\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu)}$$

$$= \Psi^+(\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu)S^+(A^{-1})\gamma_0 S(A^{-1})\Psi(\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu).$$

Entretanto, efetuando explicitamente o produto, observa-se que a matriz $S(A)$ exibe a seguinte propriedade:

$$\gamma_0 S^+(A^{-1})\gamma_0 = S(A). \tag{2.94}$$

Assim, retomando o desenvolvimento anterior (e lembrando que $(\gamma_0)^2 = I$),

$$\begin{aligned} U(0,A)\bar{\Psi}(x^\mu)\Psi(x^\mu)U^{-1}(0,A) &= \underbrace{\Psi^+(\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu)(\gamma_0)^2 S^+(A^{-1})\gamma_0}_{=\bar{\Psi}(\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu)\gamma_0 S^+(A^{-1})\gamma_0} S(A^{-1})\Psi(\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu) \\ &= \bar{\Psi}(\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu)\underbrace{S(A)S(A^{-1})}_{=I}\Psi(\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu) \\ &= \bar{\Psi}(\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu)\Psi(\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu). \end{aligned} \tag{2.95}$$

O spinor Ψ claramente satisfaz à equação de Klein-Gordon em cada componente, visto que seus campos constituintes ϕ e χ satisfazem esta equação. Porém, o campo Ψ está vinculado a outra equação de onda, a qual examinaremos a seguir.

Para isto, recordemos a equação (1.41) para as soluções de frequência positiva da teoria de Dirac. Efetuando uma transformação unitária, podemos escrever $u^{(+)}(\vec{p})$ como segue:

$$u^{(+)}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \alpha(p_s)K_{(+)} \\ \alpha^{-1+}(p_s)K_{(+)} \end{pmatrix},$$

onde $\alpha(p)$ é o operador de Wigner definido em (B.31). Analogamente, as soluções de frequência negativa $u^{(-)}(\vec{p})$ expressas em (1.43) podem ser escritas na mesma representação unitariamente equivalente, da seguinte maneira:

$$u^{(-)}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \alpha(p_s)C^{-1}K_{(-)} \\ -\alpha^{-1+}(p_s)C^{-1}K_{(-)} \end{pmatrix}.$$

Dessa forma, exportando estes resultados para o cenário do formalismo de $2(2j+1)$ componentes (que, no caso $j = 1/2$, deve recuperar a teoria de Dirac), propomos as **"soluções de frequência positiva"** para a teoria de Weinberg

$$u^{(+)}(\vec{p}) = \left(\begin{array}{c} D^j(\alpha(p_s))\vartheta^j \\ D^j(\alpha^{-1+}(p_s))\vartheta^j \end{array} \right), \tag{2.96}$$

onde ϑ^j é um campo de $(2j+1)$ componentes arbitrário.

Agora, no referencial de repouso, o spinor $u^{(+)}$ acima satisfaz a relação

$$(\gamma_0 - 1)u^{(+)}(0) = 0.$$

Com efeito, observando que no referencial de repouso o operador de Wigner corresponde à identidade e usando (A.40), a relação acima segue imediatamente. Assim, explorando o fato de que $u^{(+)}(p_s) = S(\alpha(p))u^{(+)}(0)$ obtemos a seguinte equação:

$$S(\alpha(p_s))(\gamma_0 - 1)S^{-1}(\alpha(p_s))u^{(+)}(\vec{p}) = 0. \tag{2.97}$$

Com o auxílio de (2.94), podemos desenvolver o operador $S(\alpha(p_s))\gamma_0 S^{-1}(\alpha(p_s))$ que comparece em (2.97)

$$S(\alpha(p_s)) = \gamma_0 S^+(\alpha^{-1}(p_s))\gamma_0$$

$$\Rightarrow S(\alpha(p_s))\gamma_0 S^{-1}(\alpha(p_s)) = \gamma_0 S^+(\alpha^{-1}(p_s))S^{-1}(\alpha(p_s)).$$

Porém, observemos que $S^+(\alpha^{-1}(p_s)) = S(\alpha^{-1}(p_s))$ e $S^{-1}(\alpha(p_s)) = S(\alpha^{-1}(p_s))$, como se pode verificar diretamente de (2.92) recorrendo à hermiticidade de $\alpha(p_s)$ e às propriedades das representações $D^j(A)$ discutidas no apêndice A.

Logo,

$$S(\alpha(p_s))\gamma_0 S^{-1}(\alpha(p_s)) = \gamma_0 S(\underbrace{(\alpha^{-1}(p_s))^2}_{=mp_s^{-1}}).$$

Entretanto, escrevendo explicitamente a matriz $S(mp_s^{-1})$, temos

$$\begin{aligned}
S(mp_s^{-1}) &= \begin{bmatrix} D^j(mp_s^{-1}) & 0 \\ 0 & D^{j+}(\frac{p_s}{m}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} D^j(m)D^j(\frac{p^0 I - \vec{\sigma}.\vec{p}}{m^2}) & 0 \\ 0 & D^j(m^{-1})D^j(p^0 I + \vec{\sigma}.\vec{p}) \end{bmatrix} \\
&= m^{-2j} \begin{bmatrix} D^j(p^0 I - \vec{\sigma}.\vec{p}) & 0 \\ 0 & D^j(p^0 I + \vec{\sigma}.\vec{p}) \end{bmatrix} \\
&= \frac{m^{-2j}}{2}(1+\gamma_5)D^j(p^0 I - \vec{\sigma}.\vec{p}) + \frac{m^{-2j}}{2}(1-\gamma_5)D^j(p^0 I + \vec{\sigma}.\vec{p}),
\end{aligned}$$

onde usamos (A.46) e introduzimos a matriz $\gamma_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ que, a exemplo de γ_0, corresponde à generalização $2(2j+1) \times 2(2j+1)$ da respectiva matriz introduzida na formulação spinorial da equação de Dirac.

Portanto, retornando à expressão para $S(\alpha(p_s))\gamma_0 S^{-1}(\alpha(p_s))$,

$$\begin{aligned} S(\alpha(p_s))\gamma_0 S^{-1}(\alpha(p_s)) &= \frac{m^{-2j}}{2}\gamma_0(1+\gamma_5)D^j(p^0 I - \vec{\sigma}.\vec{p}) + \\ &+ \frac{m^{-2j}}{2}\gamma_0(1-\gamma_5)D^j(p^0 I + \vec{\sigma}.\vec{p}). \end{aligned} \tag{2.98}$$

Assim, substituindo o resultado acima em (2.97), segue a equação satisfeita pelos "spinores de frequência positiva":

$$\left(\frac{1}{2}\gamma_0(1+\gamma_5)D^j(p^0 I - \vec{\sigma}.\vec{p}) + \frac{1}{2}\gamma_0(1-\gamma_5)D^j(p^0 I + \vec{\sigma}.\vec{p}) - m^{2j}\right) u^{(+)}(p) = 0. \tag{2.99}$$

Particularizando o resultado acima para o cenário de spin 1/2, como $D^{\frac{1}{2}}(p^0 I \pm \vec{\sigma}.\vec{p}) = p^0 I \pm \vec{\sigma}.\vec{p}$, verifica-se que

$$(\gamma_\mu p^\mu - m)u^{(+)}(\vec{p}) = 0,$$

equação que corresponde precisamente a (1.33) e, portanto, esta construção é de fato compatível com a teoria de Dirac.

Similarmente, estudando agora as "soluções de frequência negativa", propomos o spinor $u^{(-)}(\vec{p})$ novamente em analogia à teoria de Dirac:

$$u^{(-)}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} D^j(\alpha(p_s)C^{-1})\vartheta^{j*} \\ D^j(\alpha^{-1^+}(p_s)C^{-1})(-1)^{2j}\vartheta^{j*} \end{pmatrix}. \tag{2.100}$$

Seguindo o mesmo procedimento que efetuamos para o "spinor de frequência positiva", verifica-se que, no referencial de repouso, o spinor $u^{(-)}(\vec{p})$ satisfaz a relação

$$(\gamma_0 - (-1)^{2j})u^{(-)}(0) = 0.$$

Dessa forma, passando a um referencial inercial arbitrário $u^{(-)}(p) = S(\alpha(p))u^{(-)}(0)$, a equação acima torna-se

$$S(\alpha(p_s))(\gamma_0 - (-1)^{2j})S^{-1}(\alpha(p_s))u^{(-)}(\vec{p}) = 0,$$

de modo que, à luz de (2.98),

$$\begin{aligned} (\frac{1}{2}\gamma_0(1+\gamma_5)D^j(p^0 I - \vec{\sigma}.\vec{p}) + \frac{1}{2}\gamma_0(1-\gamma_5)D^j(p^0 I + \vec{\sigma}.\vec{p}) - \\ -(-1)^{2j}m^{2j})u^{(-)}(\vec{p}) = 0. \end{aligned} \tag{2.101}$$

Analisando novamente o caso particular de spin 1/2, a última equação fornece

$$(\gamma_\mu p^\mu + m)u^{(-)}(\vec{p}) = 0,$$

que coincide exatamente com a relação (1.33).

As equações (2.99) e (2.101) acima correspondem, no espaço das posições, à seguinte equação para $\Psi(x^\mu)$:

$$\begin{bmatrix} -m^{2j} & D^j(\hat{p_s}) \\ D^j(\hat{\bar{p}}_s) & -m^{2j} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \phi(x^\mu) \\ \chi(x^\mu) \end{pmatrix} = 0, \tag{2.102}$$

onde $\hat{p_s}$ é o operador definido em (1.3) e $\hat{\bar{p}}_s$ é expresso em (1.5).

Para verificarmos a validade de (2.102), observemos que

$$D^j_{m_s m_s'}(\hat{p_s})\chi_{m_s'}(x^\mu) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{2p_0} \sum_{m_s''} (D^j_{m_s' m_s''}(\alpha^{-1+}(p))a(\vec{p}, m_s'').$$

$$.D^j_{m_s m_s'}(\hat{p_s})e^{-ip_\mu x^\mu} + (-1)^{2j} D^j_{m_s' m_s''}(\alpha^{-1+}(p)C^{-1})b^+(\vec{p}, m_s'')D^j_{m_s m_s'}(\hat{p_s})e^{ip_\mu x^\mu}).$$

Todavia, como $D^j_{m_s m_s'}(\hat{p_s})e^{\pm ip_\mu x^\mu} = D^j_{m_s m_s'}(\mp p_s)$,

$$D^j_{m_s m_s'}(\hat{p_s})\chi_{m_s'}(x^\mu) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{2p_0} \sum_{m_s''} (D^j_{m_s' m_s''}(\alpha^{-1+}(p))a(\vec{p}, m_s'').$$

$$.D^j_{m_s m_s'}(p_s)e^{-ip_\mu x^\mu} + (-1)^{2j} D^j_{m_s' m_s''}(\alpha^{-1+}(p)C^{-1})b^+(\vec{p}, m_s'')D^j_{m_s m_s'}(-p_s)e^{ip_\mu x^\mu})$$

$$\begin{aligned} = \quad & \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{2p_0} (\underbrace{D^j(p_s)D^j(\alpha^{-1+}(p))}_{=D^j(p_s\alpha^{-1+})} a(\vec{p})e^{-ip_\mu x^\mu} + \\ & +(-1)^{2j} \underbrace{D^j(-p_s)D^j(\alpha^{-1+}(p)C^{-1})}_{=(-1)^{2j}D^j(p_s\alpha^{-1+})D^j(C^{-1})} b^+(\vec{p})e^{ip_\mu x^\mu})_{m_s}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} D^j_{m_s m_s'}(\hat{p_s})\chi_{m_s'}(x^\mu) \quad = \quad & \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{2p_0} (D^j(p_s\alpha^{-1+})a(\vec{p})e^{-ip_\mu x^\mu} \\ & + D^j(p_s\alpha^{-1+})D^j(C^{-1})b^+(\vec{p})e^{ip_\mu x^\mu})_{m_s}. \end{aligned}$$

Entretanto,

$$\begin{aligned} D^j(p_s\alpha^{-1^+}) &= D^j\left(m\frac{p_s}{m}\alpha^{-1^+}\right) \\ &= D^j(m)D^j(\alpha\alpha^+\alpha^{-1^+}) \\ &= m^{2j}D^j(\alpha). \end{aligned}$$

Portanto, retornando ao desenvolvimento anterior, segue

$$\begin{aligned} D^j_{m_s m_s'}(\hat{p_s})\chi_{m_s'}(x^\mu) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{d^3p}{2p_0}(m^{2j}D^j(\alpha)a(\vec{p})e^{-ip_\mu x^\mu} \\ &\quad +m^{2j}D^j(\alpha C^{-1})b^+(\vec{p})e^{ip_\mu x^\mu})_{m_s} \\ &= m^{2j}\phi_{m_s}(x^\mu), \end{aligned}$$

que corresponde à primeira equação do sistema (2.102).

Analogamente, para a segunda equação,

$$D^j_{m_s m_s'}(\hat{\tilde{p}}_s)\phi_{m_s'}(x^\mu) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{d^3p}{2p_0}\sum_{m_s''}(D^j_{m_s' m_s''}(\alpha)a(\vec{p},m_s'').$$

$$.\underbrace{D^j_{m_s m_s'}(\hat{\tilde{p}}_s)e^{-ip_\mu x^\mu}}_{=D^j_{m_s m_s'}(\tilde{p_s})e^{-ip_\mu x^\mu}} + D^j_{m_s' m_s''}(\alpha C^{-1})b^+(\vec{p},m_s'')\underbrace{D^j_{m_s m_s'}(\hat{\tilde{p}}_s)e^{ip_\mu x^\mu}}_{=D^j_{m_s m_s'}(-\tilde{p_s})e^{ip_\mu x^\mu}})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{d^3p}{2p_0}(D^j(\tilde{p_s})D^j(\alpha)a(\vec{p})e^{-ip_\mu x^\mu} \\ &\quad +D^j(-\tilde{p_s})D^j(\alpha C^{-1})b^+(\vec{p})e^{ip_\mu x^\mu})_{m_s} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{d^3p}{2p_0}(D^j(\tilde{p_s}\alpha)a(\vec{p})e^{-ip_\mu x^\mu} \\ &\quad +(-1)^{2j}D^j(\tilde{p_s}\alpha)D^j(C^{-1})b^+(\vec{p})e^{ip_\mu x^\mu})_{m_s}. \end{aligned}$$

Porém, de forma semelhante ao desenvolvimento anterior, observemos que

$$\begin{aligned} D^j(\tilde{p_s}\alpha) &= D^j\left(m\frac{\tilde{p_s}}{m}\alpha\right) \\ &= D^j(m)D^j(\alpha^{-1^+}\alpha^{-1}\alpha) \\ &= m^{2j}D^j(\alpha^{-1^+}). \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} D^j_{m_s m_s'}(\hat{\vec{p}}_s)\phi_{m_s'}(x^\mu) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{d^3p}{2p_0}(m^{2j}D^j(\alpha^{-1+})a(\vec{p})e^{-ip_\mu x^\mu} \\ &\quad +(-1)^{2j}m^{2j}D^j(\alpha^{-1+}C^{-1})b^+(\vec{p})e^{ip_\mu x^\mu})_{m_s} \\ &= m^{2j}\chi_{m_s}(x^\mu). \end{aligned}$$

Portanto, o sistema (2.102) é efetivamente válido e fornece a equação de onda para o campo de $2(2j+1)$ componentes da teoria de Weinberg. Observemos ainda que, particularizando para o caso $j = 1/2$, (2.102) corresponde precisamente ao sistema (1.10), que consiste na forma spinorial da equação de Dirac, confirmando assim a consistência da proposta de Weinberg com a teoria de Dirac.

Dessa maneira, o formalismo $2(2j+1)$ de Weinberg fornece uma abordagem bastante convidativa para a teoria de spins altos, baseando-se na **soma direta de representações do grupo de Lorentz** $(j,j) = (j,0)\oplus(0,j)$ e tendo como plano de fundo a **teoria da matriz S**. Para finalizarmos, convidamos o leitor a estudar o artigo original de Weinberg[10] [11], com ênfase no apêndice B, onde o autor desenvolve em detalhe os casos particulares de spin 1/2 e 1, bem como o artigo complementar do mesmo autor [49], em que é discutida uma extensão deste formalismo para acomodar partículas de massa nula.

2.4 Referências do Capítulo

Destacamos a seguir as referências deste capítulo:

[07] Petiau, G. *"Contribution à la Théorie des Équations d'Ondes Corpusculaires"*. Tese da Universidade de Paris, publicada em Acad. Roy. de Belg., Classe Sci., Mém. in **816**, No. 2, 1936.

[08] Duffin, R. J. *"On the Characteristic Matrices of Covariant Systems"*. Phys. Rev. **54**, p. 1114, 1938.

[09] Kemmer, N. *"The Particle Aspect of Meson Theory"*. Proc. Roy. Soc. Lond. A **173**, p. 91, 1939.

[10]Alertamos o leitor com relação à métrica $g_{\mu\nu} = (-1,1,1,1)$ adotada nesse artigo, que difere da métrica usual, empregada em nosso texto. A análise dos cenários de spin 1/2 e 1 contribui para as discussões reservadas aos capítulos posteriores, porém não a reproduziremos aqui por motivo de concisão deste trabalho.

[10] Harish-Chandra. *"The Correspondence Between the Particle and Wave Aspects of the Meson and the Photon"*. Proc. Roy. Soc. A **186**, p. 502, 1946.

[11] Weinberg, S. *"Feynman Rules for Any Spin"*. Phys. Rev. **133**, p. B1318, 1964.

[28] Corson, E. M. *"Introduction to tensors, spinors and relativistic wave equations"*. Segunda edição, Chelsea Publishing Company, 1953.

[31] Novozhilov, Y. V. *"Introduction to Elementary Particle Theory"*. Pergamon Press, 1975.

[32] Greiner, W. *"Relativistic Quantum Mechanics: Wave Equations"*. Terceira edição, Springer, 2000.

[36] Visconti, A. *"Quantum Field Theory"*. Volume 1, Pergamon Press, 1969.

[37] Umezawa, H. *"Quantum Field Theory"*. North-Holland Publishing, 1956.

[49] Weinberg, S. *"Feynman Rules for Any Spin II. Massless Particles"*. Phys. Rev. **134**, p. B882, 1964.

Capítulo 3

As Transformações de Foldy-Wouthuysen

Neste capítulo apresentaremos as **transformações FW**, propostas em 1950 por Foldy-Wouthuysen, que consistem em transformações unitárias cujo objetivo é eliminar os operadores ímpares da hamiltoniana de Dirac (que acoplam os quadrispinores φ e χ) e nos permitem acessar o **limite não-relativísti- co** da teoria. Estudaremos o caso livre e o caso que envolve a interação com um campo eletromagnético externo, para as equações de Dirac e DKP.

3.1 As Transformações FW para a Equação de Dirac Livre

Conforme discutimos no capítulo 1, escrevendo a equação de Dirac na representação spinorial (1.10), observa-se que os quadrispinores ξ e $\dot{\tilde{\eta}}$ estão acoplados pelas equações de Weyl. Este acoplamento manifesta-se na representação hamiltoniana (1.22) através dos operadores $\vec{\alpha}$, que acoplam, i. e., "misturam" os quadrispinores φ e χ que compõem as componentes altas e baixas, respectivamente, do bispinor ψ. Os operadores que misturam as componentes altas e baixas são denominados ímpares, ao passo que aqueles que não acoplam estas componentes são denominados pares.

Para contornarmos este acoplamento, buscamos uma representação da equação de Dirac que suprime os operadores ímpares. Assim, a proposta de Foldy e Wouthuysen consiste em construirmos um **operador unitário** que "diagonaliza" a hamiltoniana (no sentido em que elimina os operadores ímpares) e preserva a forma da integral invariante obtida no capítulo 1.

Assim, vamos analisar primeiramente a equação de Dirac livre na representação hamiltoniana (1.22)

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = (\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}} + \beta m)\psi,$$

onde os operadores $\alpha^i = \gamma^0\gamma^i$ são ímpares, o operador $\beta = \gamma^0$ é par e as relações de comutação entre estes operadores são expressas em (1.23)-(1.25).

Procuramos um operador unitário, independente do tempo, da forma $U = e^{iM}$ que forneça uma representação da equação de Dirac a qual elimina os operadores $\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}$. Dessa forma, o bispinor ψ transforma-se sob esta "mudança de base" de acordo com

$$\psi^{'} = U\psi, \tag{3.1}$$

de modo que o operador hamiltoniano transformado fica

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi \rightarrow i\frac{\partial}{\partial t}\psi^{'} = UHU^{-1}\psi^{'}$$

$$\Rightarrow H^{'} = UHU^{-1}. \tag{3.2}$$

Agora, para obtermos uma expressão para a matriz unitária M, podemos remeter a uma situação análoga em mecânica quântica não relativística, que corresponde à diagonalização de uma hamiltoniana para o sistema de um elétron em um campo magnético bidimensional $\vec{B} = (B_1, 0, B_3)$ (referência [34]). Neste caso, a hamiltoniana é expressa por $H = \sigma_1 B_1 + \sigma_3 B_3$, onde as matrizes $\vec{\sigma}$ são as matrizes de Pauli, as quais satisfazem a relação de anticomutação usual $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 0$ (assim como as matrizes α_i e β da hamiltoniana de Dirac). Pode-se eliminar o operador ímpar σ_1 efetuando uma rotação em torno do eixo y através do operador $U = e^{i\frac{\sigma_2}{2}\theta}$, onde $\mathrm{tg}(\theta) = \frac{B_1}{B_3}$; verifica-se facilmente, após efetuar a expansão do operador, que a hamiltoniana transformada assume efetivamente a forma "diagonalizada" expressa por $H^{'} = \pm\left|\vec{B}\right|\sigma_3$.

Dessa maneira, a matriz M para o problema bidimensional descrito acima é $M = \frac{\sigma_2}{2}\theta = -\frac{i}{2}\sigma_3\sigma_1\theta$ (onde usamos a álgebra de momento angular satisfeita pelas matrizes de Pauli, para obter a última expressão). Portanto, podemos propor uma expressão similar para a matriz M no caso da teoria de Dirac livre

$$M = -i\beta\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}\theta(\vec{p}), \tag{3.3}$$

de forma que o operador unitário U que executa a mudança de base da hamiltoniana de Dirac fica expresso por

$$U = e^{\beta\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}\theta(\vec{p})}. \tag{3.4}$$

Expandindo U em termos de $\theta(\vec{p})$, temos

$$\begin{aligned}
U &= e^{\beta\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}\theta(\vec{p})} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\beta\alpha^i\hat{p}^i\theta(\vec{p}))^n \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}(\beta\alpha^i p]^i)^{2k}\theta^{2k}(\vec{p}) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}\hat{}(\beta\alpha^i\hat{p}^i)^{2k+1}\theta^{2k+1}(\vec{p}).
\end{aligned}$$

Porém, observemos que, usando as relações (1.23)-(1.25), segue

$$\begin{aligned}
(\beta\alpha^i\hat{p}^i)^2\psi(\vec{p}) &= \beta\,\underbrace{\alpha^i\beta}_{-\beta\alpha^i}\,\alpha^j\hat{p}^i\hat{p}^j\psi(\vec{p}) \\
&= -\beta^2\alpha^i\alpha^j\hat{p}^i\hat{p}^j\psi(\vec{p}) \\
&= -(\alpha^i)^2(\hat{p}^i)^2\psi(\vec{p}) - \underbrace{\alpha^k\alpha^l\hat{p}^k\hat{p}^l}_{k\neq l}\psi(\vec{p}) \\
&= -\left|\vec{p}\right|^2\psi(\vec{p}) - \frac{1}{2}\underbrace{\left\{\alpha^k,\alpha^l\right\}}_{=0}\hat{p}^k\hat{p}^l\psi(\vec{p}) \\
&= -\left|\vec{p}\right|^2\psi(\vec{p}),
\end{aligned}$$

onde $|\vec{p}|$ é o autovalor do operador momento (pois estamos trabalhando com ψ na representação dos momentos).

Logo,

$$(\beta\alpha^i\hat{p}^i)^{2k}\psi(\vec{p}) = (-1)^k\left|\vec{p}\right|^{2k}\psi(\vec{p}), \quad \text{onde } k \in N.$$

Substituindo este resultado na expansão do operador unitário, temos

$$\begin{aligned}
U &= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}(|\vec{p}|\,\theta(\vec{p}))^{2k}}_{=\cos(|\vec{p}|\theta)} + \beta\frac{\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}}{|\vec{p}|}\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(|\vec{p}|\,\theta(\vec{p}))^{2k+1}}_{=\operatorname{sen}(|\vec{p}|\theta)} \\
&= \cos(|\vec{p}|\,\theta) + \beta\frac{\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}}{|\vec{p}|}\operatorname{sen}(|\vec{p}|\,\theta). \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

Para a inversa de U, escrevemos

$$U^{-1} = U^{+} = \cos(|\vec{p}|\,\theta) + \frac{(\beta\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}})^{+}}{|\vec{p}|}\operatorname{sen}(|\vec{p}|\,\theta).$$

Entretanto, lembrando que na representação dos momentos o operador $\hat{\vec{p}}$ possui autovalores reais e usando (1.24), bem como o fato de que as matrizes $\vec{\alpha}$ e β são hermitianas, segue $(\beta\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}})^{+} = -\beta\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}$ e, assim,

$$U^{-1} = \cos(|\vec{p}|\,\theta) - \beta\frac{\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}}{|\vec{p}|}\mathrm{sen}(|\vec{p}|\,\theta). \tag{3.6}$$

Retornando à expressão (3.2) para a hamiltoniana transformada, temos

$$\begin{aligned}
H^{'} &= (\cos(|\vec{p}|\,\theta) + \beta\frac{\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}}{|\vec{p}|}\mathrm{sen}(|\vec{p}|\,\theta))(\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}} + m\beta)(\cos(|\vec{p}|\,\theta) - \beta\frac{\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}}{|\vec{p}|}\mathrm{sen}(|\vec{p}|\,\theta)) \\
&= \cos^2(|\vec{p}|\,\theta)(\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}} + m\beta) + \frac{\cos(|\vec{p}|\,\theta)\mathrm{sen}(|\vec{p}|\,\theta)}{|\vec{p}|}\left[\beta\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}, \vec{\alpha}.\hat{\vec{p}} + m\beta\right] \\
&\quad -\frac{\mathrm{sen}^2(|\vec{p}|\,\theta)}{|\vec{p}|^2}\beta\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}(\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}} + m\beta)\beta\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}.
\end{aligned}$$

Contudo, observemos que

$$\begin{aligned}
\left[\beta\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}, \vec{\alpha}.\hat{\vec{p}} + m\beta\right]\psi(\vec{p}) &= \left[\beta\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}, \vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}\right]\psi(\vec{p}) + m\left[\beta\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}, \beta\right]\psi(\vec{p}) \\
&= (\beta\alpha^i\alpha^j\hat{p}^i\hat{p}^j - \alpha^j\beta\alpha^i\hat{p}^j\hat{p}^i)\psi(\vec{p}) + \\
&\quad +m(\beta\alpha^i\beta\hat{p}^i - \beta^2\alpha^i\hat{p}^i)\psi(\vec{p}) \\
&= \beta(\alpha^i\alpha^j + \alpha^j\alpha^i)\hat{p}^i\hat{p}^j\psi(\vec{p}) - 2m\alpha^i\hat{p}^i\psi(\vec{p}) \\
&= 2\beta\,|\vec{p}|^2\,\psi(\vec{p}) + \beta\underbrace{\left\{\alpha^k, \alpha^l\right\}\hat{p}^k\hat{p}^l}_{=0,(k\neq l)}\psi(\vec{p}) - 2m\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}\psi(\vec{p}) \\
&= 2\,|\vec{p}|^2\,\beta\psi(\vec{p}) - 2m\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}\psi(\vec{p}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}(\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}} + m\beta)\beta\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}\psi(\vec{p}) &= \underbrace{\beta(\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}})^2\beta\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}}_{=(\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}})^3}\psi(\vec{p}) + m\underbrace{\beta(\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}})^2}_{=-\beta(\beta\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}})^2}\psi(\vec{p}) \\
&= \underbrace{(\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}})^3}_{=-\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}(\beta\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}})^2}\psi(\vec{p}) - m\beta\underbrace{(\beta\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}})^2\psi(\vec{p})}_{=-|\vec{p}|^2\psi(\vec{p})} \\
&= |\vec{p}|^2\,\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}\psi(\vec{p}) + m\,|\vec{p}|^2\,\beta\psi(\vec{p}) \\
&= |\vec{p}|^2\,(\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}} + m\beta)\psi(\vec{p}).
\end{aligned}$$

Assim, retornando à expressão para $H^{'}$, obtemos

$$\begin{aligned}
H^{'} &= \cos^2(|\vec{p}|\,\theta)(\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}+m\beta)+\frac{\cos(|\vec{p}|\,\theta)\mathrm{sen}(|\vec{p}|\,\theta)}{|\vec{p}|}(2\,|\vec{p}|^2\,\beta-2m\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}) \\
&\quad -\frac{\mathrm{sen}^2(|\vec{p}|\,\theta)}{|\vec{p}|^2}\,|\vec{p}|^2\,(\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}+m\beta)\psi(\vec{p}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H^{'} &= \underbrace{(\cos^2(|\vec{p}|\,\theta)-\mathrm{sen}^2(|\vec{p}|\,\theta))}_{=\cos(2|\vec{p}|\theta)}(\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}+m\beta)+\frac{\mathrm{sen}(2\,|\vec{p}|\,\theta)}{|\vec{p}|}(|\vec{p}|^2\,\beta-m\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}) \\
&= (\cos(2\,|\vec{p}|\,\theta)-\frac{m}{|\vec{p}|}\mathrm{sen}(2\,|\vec{p}|\,\theta))\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}+(m\cos(2\,|\vec{p}|\,\theta)+|\vec{p}|\,\mathrm{sen}(2\,|\vec{p}|\,\theta))\beta.
\end{aligned}$$

Portanto, para eliminarmos o operador ímpar $\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}$, escolhemos o parâmetro $\theta(\vec{p})$ como

$$\theta(\vec{p})=\frac{1}{2\,|\vec{p}|}\mathrm{arctg}\left(\frac{|\vec{p}|}{m}\right) \tag{3.7}$$

e, dessa forma, a hamiltoniana fica expressa por

$$H^{'}=\left(m+\frac{|\vec{p}|^2}{m}\right)\cos(2\,|\vec{p}|\,\theta)\beta.$$

Podemos ainda reescrever a hamiltoniana acima de uma forma mais conveniente, desenvolvendo a função cosseno. Com o auxílio da relação trigonométrica $\sec^2(x)=1+\mathrm{tg}^2(x)$, obtemos $\cos(2\,|\vec{p}|\,\theta)=\pm\frac{m}{\sqrt{m^2+|\vec{p}|^2}}$, de modo que, escolhendo o sinal positivo (pois a energia da partícula deve ser positiva), segue

$$H^{'}=\sqrt{m^2+|\vec{p}|^2}\beta. \tag{3.8}$$

A equação (3.8) exprime, de forma bastante sugestiva, a relação de energia-momento relativística (1.1) que deve ser satisfeita pela partícula livre. Observa-se ainda que conseguimos "diagonalizar" exatamente a hamiltoniana livre para qualquer ordem de energia. Na próxima seção, estudaremos o caso envolvendo interação com um campo eletromagnético externo e constataremos que, neste cenário, não será possível obter uma expressão exata para a hamiltoniana em qualquer escala de energia.

3.2 FW para a Equação de Dirac com Campo Externo

Podemos introduzir um **campo eletromagnético externo** a partir da substituição clássica invariante de calibre $p^\mu \to p^\mu - eA^\mu$, onde $A^\mu = (\varphi, \vec{A})$ é o **quadripotencial**. Dessa maneira, a hamiltoniana livre, expressa em (1.22), torna-se

$$H = \underbrace{\vec{\alpha}.(\hat{\vec{p}} - e\vec{A})}_{=O} + \underbrace{e\varphi}_{=\epsilon} + m\beta. \tag{3.9}$$

O termo O detém a informação da energia cinética e de parte da energia de interação com o campo externo (devido ao termo envolvendo o potencial vetor $\vec{A}$), o termo ϵ corresponde à interação eletrostática e o último termo refere-se à energia de repouso.

A interação com o campo externo introduz uma **dependência temporal** na hamiltoniana através do quadripotencial A^μ e, assim, torna-se impossível a construção de um operador unitário que remova os operadores ímpares O para todas as ordens de energia, como no caso livre. Portanto, vamos nos restringir à análise do **limite não-relativístico** com o objetivo de extrair da hamiltoniana alguma informação com relação ao acoplamento da partícula de Dirac com o campo eletromagnético, em baixas energias, com o auxílio de sucessivas transformações FW que "diagonalizam" iterativamente esta hamiltoniana.

Sendo assim, propomos um operador unitário $U = e^{iM(t)}$ de modo que a lei de transformação do spinor ψ permanece expressa por (3.1). Porém, devido à dependência temporal de U, a equação de Dirac transformada à nova representação fica

$$i\left(U\frac{\partial}{\partial t}U^{-1}\right)\psi' = \left(UHU^{-1}\right)\psi'. \tag{3.10}$$

Podemos desenvolver os operadores $U\frac{\partial}{\partial t}U^{-1}$ e UHU^{-1} através da expansão BCH (D.3)

$$e^{iS}Ae^{-iS} = A + i[S,A] + \frac{i^2}{2!}[S,[S,A]] + ... + \underbrace{\frac{i^n}{n!}[S,[S,...[S,A]...]]}_{n \text{ comutadores}} + ... \tag{3.11}$$

De fato, temos

$$(e^{iM(t)}He^{-iM(t)}) = H + i[M(t),H] + ... + \frac{i^n}{n!}\underbrace{[M(t),[M(t),...[M(t),H]...]]}_{n \text{ comutadores}} + ..., \tag{3.12}$$

$$(e^{iM(t)}\partial_t e^{-iM(t)}) = \partial_t + i[M(t),\partial_t] + ... + \frac{i^n}{n!}\underbrace{[M(t),[M(t),...[M(t),\partial_t]...]]}_{n \text{ comutadores}} + ...$$

Todavia, aplicando a expansão em série de $U\partial_t U^{-1}$ sobre um "spinor teste" ς e analisando cuidadosamente cada termo da série, segue

$$[M(t),\partial_t]\varsigma = M(t)\dot{\varsigma} - \partial_t(M(t)\varsigma) = -\dot{M}(t)\varsigma,$$

$$[M(t),[M(t),\partial_t]]\varsigma = -[M(t),\dot{M}(t)]\varsigma,$$
$$[M(t),[M(t),[M(t),\partial_t]]]\varsigma = -[M(t),[M(t),\dot{M}(t)]]\varsigma,$$

e assim sucessivamente.

Propomos $\underbrace{[M(t),[M(t),...[M(t),\partial_t]...]]}_{n \text{ comutadores}} = \underbrace{-[M(t),[M(t),...[M(t),\dot{M}(t)]...]]}_{n-1 \text{ comutadores}}$ para $n \geq 2$. Por indução, verifica-se a validade desta proposição analisando o resultado para $n+1$ comutadores:

$$\begin{aligned}
\underbrace{[M(t),[M(t),...[M(t),\partial_t]...]]}_{n+1 \text{ comutadores}}\varsigma &= M(t)\underbrace{[M(t),[M(t),...[M(t),\partial_t]...]]}_{n \text{ comutadores}}\varsigma \\
&\quad - \underbrace{[M(t),[M(t),...[M(t),\partial_t]...]]}_{n \text{ comutadores}} M(t)\varsigma \\
&= M(t)\underbrace{(-[M(t),[M(t),...[M(t),\dot{M}(t)]...]])}_{n-1 \text{ comutadores}}\varsigma \\
&\quad - \underbrace{(-[M(t),[M(t),...[M(t),\dot{M}(t)]...]])}_{n-1 \text{ comutadores}} M(t)\varsigma \\
&= \underbrace{-[M(t),[M(t),...[M(t),\dot{M}(t)]...]]}_{n \text{ comutadores}}\varsigma.
\end{aligned}$$

Dessa forma, obtemos uma expressão em série mais adequada para o operador $U\partial_t U^{-1}$:

$$\begin{aligned}
\left(e^{iM(t)}\partial_t e^{-iM(t)}\right) &= \partial_t - i\dot{M}(t) - \frac{i^2}{2!}[M(t),\dot{M}(t)] - ... \\
&\quad - \frac{i^n}{n!}\underbrace{[M(t),[M(t),...[M(t),\dot{M}(t)]...]]}_{n-1 \text{ comutadores}} - ... \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

Substituindo (3.12) e (3.13) em (3.10), resulta

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi^{'} = \Bigg(H + i[M(t),H] + ... + \frac{i^n}{n!}\underbrace{[M(t),[M(t),...[M(t),H]...]]}_{n \text{ comutadores}} + ...$$

$$+i^2\dot{M}(t) + \frac{i^3}{2!}[M(t),\dot{M}(t)] + ... + \frac{i^{n+1}}{n!}\underbrace{[M(t),[M(t),...[M(t),\dot{M}(t)]...]]}_{n-1 \text{ comutadores}} + ... \Bigg)\psi^{'}. \tag{3.14}$$

Assim, o operador hamiltoniano transformado $H^{'}$ é expresso pelo termo entre parênteses no membro à direita de (3.14).

Por outro lado, como estamos interessados no limite não-relativístico, a energia de repouso da partícula (que corresponde à massa m em nosso sistema de unidades) deve ser preponderante sobre os termos de energia cinética (O) e de interação com o campo externo (O e ϵ), pois estamos considerando **campos fracos**. Desejamos, então, obter uma expansão em série de $1/m$ para a hamiltoniana expressa em (3.14), de modo que a contribuição de cada termo torna-se cada vez menor à medida que as potências de $1/m$ aumentam.

Assim, com base no operador M_l proposto no caso livre, construímos o operador M na presença de um campo externo da seguinte maneira:

$$M = -\frac{i}{2m}\beta\vec{\alpha}.(\hat{\vec{p}} - e\vec{A}),$$

ou, de forma mais compacta,

$$M = -\frac{i}{2m}\beta O. \tag{3.15}$$

Observemos que este operador é adimensional, visto que β não apresenta dimensão e tanto O quanto m carregam dimensão de energia (mais precisamente $O/m \approx$ enegia cinética/energia de repouso), e de ordem $1/m$ em relação à energia de repouso.

Substituindo M em (3.14) obtemos a expansão de $H^{'}$ em relação a $1/m$ que desejávamos. Vamos reter nessa expansão apenas termos até ordem $(E_c/m)^3$ e $(E_cE_p)/m^2$ (onde E_c corresponde à energia cinética, E_p corresponde à energia potencial eletrostática $e\varphi$ e m é a energia de repouso, conforme mencionado anteriormente), que corresponde a nosso domíno de interesse, no regime de baixas energias.

Sendo assim, vamos efetuar a seguir um "balanço energético" (em relação a E_c, E_p e m) dos termos que surgem em $H^{'}$:

$$[M,H] = \underbrace{[M,O]}_{\approx(\frac{E_c}{m})E_c} + \underbrace{[M,\epsilon]}_{\approx(\frac{E_c}{m})E_p} + \underbrace{[M,m\beta^0]}_{\approx E_c},$$

$$[M,[M,H]] = \underbrace{[M,[M,O]]}_{\approx(\frac{E_c}{m})^2 E_c} + \underbrace{[M,[M,\epsilon]]}_{\approx(\frac{E_c E_p}{m^2})E_c} + \underbrace{[M,[M,m\beta^0]]}_{\approx(\frac{E_c}{m})E_c},$$

$$[M,[M,[M,H]]] = \underbrace{[M,[M,[M,O]]]}_{\approx(\frac{E_c}{m})^3 E_c} + \underbrace{[M,[M,[M,\epsilon]]]}_{\approx(\frac{E_c}{m})^3 E_p} + \underbrace{[M,[M,[M,m\beta^0]]]}_{\approx(\frac{E_c}{m})^2 E_c},$$

$$\begin{aligned}[M,[M,[M,[M,H]]]] &= \underbrace{[M,[M,[M,[M,O]]]]}_{\approx(\frac{E_c}{m})^4 E_c \to 0} + \underbrace{[M,[M,[M,[M,\epsilon]]]]}_{\approx(\frac{E_c}{m})^4 E_p \to 0} \\ &\quad + \underbrace{[M,[M,[M,[M,m\beta^0]]]]}_{\approx(\frac{E_c}{m})^3 E_c}.\end{aligned}$$

Os termos envolvendo mais de quatro comutadores do tipo expresso acima não satisfazem os critérios que estabelecemos anteriormente (são de ordem superior a $(\frac{E_c}{m})^3$ e $\frac{E_c E_p}{m^2}$) e, portanto, serão desprezados nesta aproximação.

Além disso, temos ainda os termos envolvendo $\dot{M}$:

$$[M,\dot{M}] \approx (\frac{E_c}{m})^2,$$

$$[M,[M,\dot{M}]] \approx (\frac{E_c}{m})^3.$$

À semelhança da análise anterior, como os termos com mais de 2 comutadores desta espécie extrapolam nossos critérios de aproximação, estes não serão incluídos na expansão de $H^{'}$.

Dessa maneira, retendo apenas os operadores de ordem coerente com nossa aproximação, a hamiltoniana $H^{'}$ fica expressa por

$$\begin{aligned}H^{'} &= H + i[M,H] - \frac{1}{2}[M,[M,H]] - \frac{i}{3!}[M,[M,[M,H]]] + \frac{1}{4!}[M,[M,[M,[M,m\beta]]]] \\ &\quad - \dot{M} - \frac{i}{2}[M,\dot{M}] + \frac{1}{3!}[M,[M,\dot{M}]]. \qquad (3.16)\end{aligned}$$

A seguir, vamos calcular explicitamente cada um dos comutadores que comparecem na expressão de $H^{'}$ em termos dos operadores O, ϵ e β. Entretanto, é conveniente escrevermos algumas relações entre estes operadores, antes de procedermos a estes cálculos:

$$\begin{aligned} O\beta &= \vec{\alpha}.(\hat{\vec{p}} - e\vec{A})\beta \\ &= -\beta\vec{\alpha}.(\hat{\vec{p}} - e\vec{A}) \\ &= -\beta O \\ &\Rightarrow \{O, \beta\} = 0, \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$[\epsilon, \beta] = 0, \tag{3.18}$$

onde usamos (1.24) para obter (3.17), ao passo que a relação (3.18) segue naturalmente do fato de que os operadores ϵ e β são independentes.

Podemos agora efetuar os cálculos dos comutadores em (3.16):

$$\begin{aligned} [M, H] &= -\frac{i}{2m}[\beta O, O + \epsilon + m\beta] \\ &= -\frac{i}{2m}([\beta O, O] + [\beta O, \epsilon] + m[\beta O, \beta]) \\ &= -\frac{i}{2m}(\beta O^2 - O\beta O) - \frac{i}{2m}(\beta O\epsilon - \epsilon\beta O) - \frac{i}{2}(\beta O\beta - \beta^2 O) \\ &= -\frac{i}{m}\beta O^2 - \frac{i}{2m}\beta[O, \epsilon] + iO, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [M, [M, H]] &= -\frac{i}{2m}[\beta O, [M, H]] \\ &= -\frac{1}{2m^2}[\beta O, \beta O^2] - \frac{1}{4m^2}[\beta O, \beta[O, \epsilon]] + \frac{1}{2m}[\beta O, O] \\ &= -\frac{1}{2m^2}(-2\beta^2 O^3) - \frac{1}{4m^2}(-\beta^2 O[O, \epsilon] + \beta^2[O, \epsilon]O) + \frac{1}{2m}(2\beta O^2) \\ &= \frac{1}{m^2}O^3 + \frac{1}{4m^2}[O, [O, \epsilon]] + \frac{1}{m}\beta O^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [M, [M, [M, H]]] &= -\frac{i}{2m}[\beta O, [M, [M, H]]] \\ &= -\frac{i}{2m^3}[\beta O, O^3] - \frac{i}{8m^3}[\beta O, [O, [O, \epsilon]]] - \frac{i}{2m^2}[\beta O, \beta O^2] \\ &= -\frac{i}{2m^3}(2\beta O^4) - \frac{i}{8m^3}(\beta O[O, [O, \epsilon]] - \beta[O, [O, \epsilon]]O) - \\ &\quad -\frac{i}{2m^2}(-2O^3) \end{aligned}$$

$$= -\frac{i}{m^3}\beta O^4 - \frac{i}{8m^3}\beta[O,[O,[O,\epsilon]]] + \frac{i}{m^2}O^3,$$

$$\begin{aligned}
[M,[M,[M,[M,m\beta]]]] &= -\frac{i}{2m}[\beta O,[M,[M,[M,m\beta]]]] \\
&= -\frac{i}{2m}[\beta O,\frac{i}{m^2}O^3] \\
&= \frac{1}{2m^3}(2\beta O^4) \\
&= \frac{1}{m^3}\beta O^4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[M,\dot{M}] &= \left(\frac{-i}{2m}\right)^2[\beta O,\beta\dot{O}] \\
&= -\frac{1}{4m^2}(-\beta^2 O\dot{O} + \beta^2\dot{O}O) \\
&= \frac{1}{4m^2}[O,\dot{O}],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[M,[M,\dot{M}]] &= -\frac{i}{2m}[\beta O,\frac{1}{4m^2}[O,\dot{O}]] \\
&= -\frac{i}{8m^3}\beta(O[O,\dot{O}] - [O,\dot{O}]O) \\
&= -\frac{i}{8m^3}\beta[O,[O,\dot{O}]].
\end{aligned}$$

Aplicando estes resultados em (3.16), segue

$$H^{'} = (O+\epsilon+m\beta)+i\left(-\frac{i}{m}\beta O^2 - \frac{i}{2m}\beta[O,\epsilon] + iO\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m^2}O^3 + \frac{1}{4m^2}[O,[O,\epsilon]] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{m}\beta O^2\right) - \frac{i}{6}\left(-\frac{i}{m^3}\beta O^4 - \frac{i}{8m^3}\beta[O,[O,[O,\epsilon]]] + \frac{i}{m^2}O^3\right) + \frac{1}{24}\left(\frac{1}{m^3}\beta O^4\right) -$$

$$-\left(-\frac{i}{2m}\beta\dot{O}\right) - \frac{i}{2}\left(\frac{1}{4m^2}[O,\dot{O}]\right) + \frac{1}{6}\left(-\frac{i}{8m^3}\beta[O,[O,\dot{O}]]\right),$$

$$H^{'} = m\beta + \underbrace{\left(\epsilon + \frac{1}{2m}\beta(O^2 - \frac{1}{4m^2}O^4) - \frac{1}{8m^2}[O,[O,\epsilon]] - \frac{i}{8m^2}[O,\dot{O}]\right)}_{=\epsilon'} +$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{1}{2m}\beta[O,\epsilon] - \frac{1}{48m^3}\beta[O,[O,[O,\epsilon]]] - \frac{1}{3m^2}O^3 + \frac{i}{2m}\beta\dot{O} - \frac{i}{48m^3}\beta[O,[O,\dot{O}]]\right)}_{=O'}. \tag{3.19}$$

Observemos que o <u>operador ímpar</u> O (de ordem zero relativa à energia de repouso) presente na hamiltoniana original H é <u>eliminado</u> pela transformação unitária, de modo que na expressão de $H^{'}$ o novo operador ímpar $O^{'}$ (composto pela coleção de termos de potências ímpares em O) é agora de ordem (máxima) $1/m$ com relação à energia de repouso. Isto significa que conseguimos "diagonalizar" a hamiltoniana até ordem $1/m$ através do operador unitário $U = e^{iS}$.

O operador $\epsilon^{'}$ que escrevemos em (3.19) corresponde ao <u>operador par</u> composto pelo conjunto de termos de potência par em O e é de ordem (máxima) zero com relação à energia de repouso.

Prosseguimos com a análise do limite não relativístico, efetuando novamente uma transformação FW para eliminarmos o operador ímpar em ordem $1/m$. Definimos, então, o operador unitário $U = e^{iM^{'}}$ onde $M^{'}$ é proposto conforme (3.15),

$$M^{'} = -\frac{i}{2m}\beta O^{'}. \tag{3.20}$$

Dessa forma, a hamiltoniana $H^{''}$ é expressa em termos da série infinita correspondente a (3.14), observando-se as devidas substituições ($H^{'} \to H^{''}$ e $M \to M^{'}$):

$$H^{''} = H^{'} + i[M^{'}(t), H^{'}] + ... + \frac{i^n}{n!}\underbrace{[M^{'}(t),[M^{'}(t),...[M^{'}(t),H^{'}]...]]}_{n \text{ comutadores}} + ...$$

$$+ i^2\dot{M}^{'}(t) + \frac{i^3}{2!}[M^{'}(t),\dot{M}^{'}(t)] + ... + \frac{i^{n+1}}{n!}\underbrace{[M^{'}(t),[M^{'}(t),...[M^{'}(t),\dot{M}^{'}(t)]...]]}_{n-1 \text{ comutadores}} + ...$$

Façamos novamente o "balanço energético", termo a termo, para verificarmos quais comutadores contribuem dentro da aproximação que estabelecemos previamente. Nesta análise, cada termo apresenta diversas "ordens de grandeza" pois os operadores $O^{'}$ e $\epsilon^{'}$ envolvem combinações dos operadores O, $\dot{O}$ e ϵ. Por isso, identificaremos apenas a "ordem de grandeza" mais alta que se enquadra dentro de nossa aproximação para cada termo da série de comutadores que compõem $H^{''}$.

Podemos verificar que os operadores $O^{'}$, $\epsilon^{'}$ e $M^{'}$ são de ordem (máxima):

$$O^{'} \approx \frac{E_c E_p}{m},$$

$$\epsilon^{'} \approx E_p,$$

$$M^{'} \approx \frac{E_c E_p}{m^2}.$$

Investigando agora os comutadores, temos

$$[M^{'}, H^{'}] = \underbrace{[M^{'}, O^{'}]}_{\approx \frac{E_c E_p}{m^2} \frac{E_c E_p}{m} \to 0} + \underbrace{[M^{'}, \epsilon^{'}]}_{\approx \frac{E_c E_p}{m^2} E_p} + \underbrace{[M^{'}, m\beta]}_{\approx \frac{E_c E_p}{m}} \approx \frac{E_c E_p}{m},$$

$$[M^{'}, [M^{'}, H^{'}]] \cong \underbrace{[M^{'}, [M^{'}, \epsilon^{'}]]}_{\approx (\frac{E_c E_p}{m^2})^2 E_p \to 0} + \underbrace{[M^{'}, [M^{'}, m\beta]]}_{\approx \frac{E_c^2 E_p^2}{m^3} \to 0} \approx 0.$$

Operadores envolvendo mais de um comutador desta espécie serão desprezados na expansão para $H^{''}$, pois extrapolam a ordem de grandeza que desejamos. De forma similar, estudando os comutadores que envolvem $\dot{M}^{'}$, obtemos

$$[M^{'}, \dot{M}^{'}] \approx (\frac{E_c E_p}{m^2})^2 \to 0,$$

e, portanto, os termos que envolvem estes comutadores também serão descartados.

Dessa maneira, a expressão para $H^{''}$ se resume a

$$H^{''} = H^{'} + i[M^{'}, H^{'}] - \dot{M}^{'}. \tag{3.21}$$

Precisamos efetuar, então, apenas o cálculo do comutador remanescente em (3.21). Para isso, usaremos as relações $\left\{\beta, O^{'}\right\} = 0$ e $[\beta, \epsilon^{'}] = 0$, que seguem naturalmente de (3.17) e (3.18). Assim,

$$\begin{aligned} [M^{'}, H^{'}] &= [M^{'}, \epsilon^{'}] + [M^{'}, m\beta] \\ &= -\frac{i}{2m}[\beta O^{'}, \epsilon^{'}] - \frac{i}{2}[\beta O^{'}, \beta] \\ &= -\frac{i}{2m}\beta[O^{'}, \epsilon^{'}] + iO^{'}. \end{aligned}$$

No cálculo acima, desprezamos o termo $[M^{'}, O^{'}]$, pois verificamos através do "balanço energético" feito anteriormente que o mesmo não contribui na ordem de aproximação em que estamos interessados.

Aplicando este resultado em (3.21), segue

$$\begin{aligned} H^{''} &= (O^{'} + \epsilon^{'} + m\beta) + i\left(iO^{'} - \frac{i}{2m}\beta[O^{'}, \epsilon^{'}]\right) + \frac{i}{2m}\beta\dot{O}^{'} \\ &= \underbrace{\frac{1}{2m}\beta(i\dot{O}^{'} + [O^{'}, \epsilon^{'}])}_{=O''} + \epsilon^{'} + m\beta. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Eliminamos, portanto, o operador $O^{'}$ e agora o novo operador ímpar $O^{''}$ (composto pelos termos de potência ímpar em $O^{'}$) é de ordem $1/m^2$ em relação à energia de repouso.

Para alcançarmos a ordem de aproximação que desejamos, faremos uma última iteração, que elimina o operador ímpar até ordem $1/m^3$. Definimos novamente um operador $M^{''}$ de forma similar a (3.15) e (3.20):

$$M^{''} = -\frac{i}{2m}\beta O^{''}. \tag{3.23}$$

Agora, conforme vimos em (3.21), é sufuciente retermos apenas o termo $[M^{''}, H^{''}]$ na expansão em série de comutadores para $H^{'''}$, de modo que

$$H^{'''} = H^{''} + i[M^{''}, H^{''}] - \dot{M}^{''}. \tag{3.24}$$

De fato, fazendo novamente o "balanço energético", porém, desta vez analisando apenas em termos da <u>energia de repouso</u> (m), e mantendo somente termos até ordem $1/m^3$ (explicitando em cada termo unicamente a ordem máxima), obtemos

$$O^{''} \approx \frac{1}{m^2},$$

$$M^{''} \approx \frac{1}{m^3},$$

$$[M^{''}, H^{''}] = \underbrace{[M^{''}, O^{''}]}_{\approx 1/m^5 \to 0} + \underbrace{[M^{''}, \epsilon^{'}]}_{\approx 1/m^3} + \underbrace{[M^{''}, m\beta]}_{\approx 1/m^2}.$$

Logo, os sucessivos comutadores deste tipo visivelmente extrapolam a ordem $1/m^3$ desejada e, portanto, devem ser efetivamente desconsiderados. Além disso, estudando os comutadores envolvendo $\dot{M}^{''}$ temos

$$[M^{''}, \dot{M}^{''}] \approx 1/m^6 \to 0,$$

de modo que a série de comutadores desta espécie deve ser, com efeito, desprezada e, dessa maneira, justificamos a expressão (3.24).

Assim, calculando o comutador que comparece em (3.24), resulta

$$\begin{aligned} [M^{''}, H^{''}] &= [M^{''}, \epsilon^{'}] + [M^{''}, m\beta] \\ &= -\frac{i}{2m}[\beta O^{''}, \epsilon^{'}] - \frac{i}{2}[\beta O^{''}, \beta] \\ &= -\frac{i}{2m}\beta[O^{''}, \epsilon^{'}] + iO^{''}, \end{aligned}$$

onde desprezamos o termo $[M^{''}, O^{''}]$, conforme indicado previamente no "balanço energético", e usamos as relações $\left\{\beta, O^{''}\right\} = 0$ e $[\beta, \epsilon^{'}] = 0$, que seguem diretamente de (3.17), (3.18) e das definições dos operadores $O^{''}$ e $\epsilon^{'}$.

Substituindo em (3.24), chegamos à expressão

$$\begin{aligned} H^{'''} &= (O^{''} + \epsilon^{'} + m\beta) + i\left(iO^{''} - \frac{i}{2m}\beta[O^{''}, \epsilon^{'}]\right) - \left(-\frac{i}{2m}\beta\dot{O}^{''}\right) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2m}\beta(i\dot{O}^{''} + [O^{''}, \epsilon^{'}])}_{=O^{'''}\approx 1/m^3} + \epsilon^{'} + m\beta. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Dessa maneira, eliminamos todos os operadores ímpares da hamiltoniana até ordem $1/m^3$ em relação à energia de repouso, no limite não relativístico.

Precisamos, agora, desenvolver os operadores remanescentes em (3.25) para extrair informações com relação à interação da partícula de Dirac com o campo eletromagnético externo no regime de baixas energias. Para isso, vamos desprezar os termos de ordem (máxima) igual ou superior a $1/m^3$ na hamiltoniana:

$$H^{'''} \cong \epsilon^{'} + m\beta.$$

Substituindo, então, $\epsilon^{'}$ na expressão acima, segue

$$H^{'''} = \left(\epsilon + \frac{1}{2m}\beta(O^2 - \frac{1}{4m^2}O^4) - \frac{1}{8m^2}[O, [O, \epsilon]] - \frac{i}{8m^2}[O, \dot{O}]\right) + m\beta.$$

Nota-se que o operador $\epsilon^{'}$ substituído acima contém também termos de ordem $1/m^3$, tais como O^4/m^3 e $\beta[O, [O, \dot{O}]]/m^3$. Contudo, estes operadores podem evidenciar a interpretação física de alguns termos do acoplamento com o campo externo (como veremos a seguir) e, portanto, vamos mantê-los provisoriamente na expansão da hamiltoniana.

Estudaremos, então, cada operador presente em $H^{'''}$, individualmente:

$$\begin{aligned}
O^2\varsigma &= (\vec{\alpha}.(\hat{\vec{p}} - e\vec{A}))^2\varsigma \\
&= \alpha^i\alpha^j\hat{p}^i\hat{p}^j\varsigma - e\alpha^i\alpha^j\hat{p}^iA^j\varsigma - e\alpha^i\alpha^jA^i\hat{p}^j\varsigma + e^2\alpha^i\alpha^jA^iA^j\varsigma \\
&= \alpha^i\alpha^j(\hat{p}^i\hat{p}^j\varsigma - eA^j\hat{p}^i\varsigma - e(\hat{p}^iA^j)\varsigma - eA^i\hat{p}^j\varsigma + e^2A^iA^j\varsigma),
\end{aligned}$$

onde ς é um "spinor teste". Contudo, para desenvolvermos o comutador acima (e os que o sucedem), precisamos avaliar o produto $\alpha^i\alpha^j$. Para fazer isso de forma mais simples, vamos partir da representação padrão das matrizes $\vec{\alpha}$,

$$\begin{aligned}
\alpha^i\alpha^j &= \gamma^0\gamma^i\gamma^0\gamma^i \\
&= -\gamma^i\gamma^j \\
&= \begin{bmatrix} \sigma^i\sigma^j & 0 \\ 0 & \sigma^i\sigma^j \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Assim, usando a álgebra de momento angular satisfeita pelas matrizes de Pauli (i.e.,$\sigma^i\sigma^j = \delta^i{}_j + i\epsilon^{ijk}\sigma^k$), obtemos

$$\alpha^i\alpha^j = \delta^i{}_jI_{4\times4} + i\epsilon^{ijk}\sigma^kI_{4\times4}, \tag{3.26}$$

onde $I_{4\times4}$ é a matriz identidade de ordem 4.

Então, com o auxílio de (3.26), segue

$$\begin{aligned}
O^2\varsigma &= \underbrace{(\hat{\vec{p}}^2 - 2e\vec{A}.\hat{\vec{p}} - e(\hat{\vec{p}}.\vec{A}) + e^2\vec{A}^2)}_{=(\hat{\vec{p}}-e\vec{A})^2}\varsigma - ie\underbrace{\epsilon^{ijk}\sigma^k(\hat{p}^iA^j)}_{=\vec{\sigma}.(\hat{\vec{p}}\times\vec{A})}\varsigma \\
&= (\hat{\vec{p}} - e\vec{A})^2\varsigma - e\vec{\sigma}.\underbrace{(\vec{\nabla}\times\vec{A})}_{=\vec{B}}\varsigma \\
&= ((\hat{\vec{p}} - e\vec{A})^2 - e\vec{\sigma}.\vec{B})\varsigma.
\end{aligned}$$

Observação: na expressão acima, suprimimos a matriz identidade para compactar a notação. Daqui em diante, neste capítulo, adotaremos a convenção de explicitar apenas a matriz $\vec{\sigma}$, de forma que a matriz identidade deve ser naturalmente subentendida.

Temos também

$$\begin{aligned}
O^4 &= ((\hat{\vec{p}} - e\vec{A})^2 - e\vec{\alpha}.\vec{B})^2 \\
&= (\hat{\vec{p}} - e\vec{A})^4 - e(\hat{\vec{p}} - e\vec{A})^2\vec{\alpha}.\vec{B} - e\vec{\alpha}.\vec{B}(\hat{\vec{p}} - e\vec{A})^2 + e^2(\vec{\alpha}.\vec{B})^2 \\
&= \hat{\vec{p}}^4 + \text{termos extras},
\end{aligned}$$

onde os termos extras acima referidos correspondem a operadores que não apresentam interpretação física evidente e, portanto, não serão explicitados (embora já os tenhamos escrito no desenvolvimento do cálculo acima). Além disso,

$$[O,[O,\epsilon]] = [\vec{\alpha}.(\hat{\vec{p}} - e\vec{A}),[\vec{\alpha}.(\hat{\vec{p}} - e\vec{A}),\epsilon]].$$

Calcularemos o comutador acima termo a termo. Para isso, analisaremos primeiramente o comutador interno:

$$\begin{aligned}
[\vec{\alpha}.(\hat{\vec{p}} - e\vec{A}),\epsilon]\varsigma &= [\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}},\epsilon]\varsigma - e\underbrace{[\vec{\alpha}.\vec{A},\epsilon]}_{=0}\varsigma \\
&= \alpha^i(\hat{p}^i(\epsilon\varsigma) - \epsilon\hat{p}^i\varsigma) \\
&= \alpha^i(\hat{p}^i\epsilon)\varsigma \\
&= -ie\vec{\alpha}.\underbrace{(\vec{\nabla}\varphi)}_{=-\vec{E}-\partial_t\vec{A}}\varsigma \\
&= ie\vec{\alpha}.(\vec{E} + \partial_t\vec{A})\varsigma.
\end{aligned}$$

Agora, retornando ao comutador completo,

$$\begin{aligned}
[O,[O,\epsilon]] &= ie[\vec{\alpha}.(\hat{\vec{p}} - e\vec{A}),\vec{\alpha}.(\vec{E} + \partial_t\vec{A})] \\
&= ie[\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}},\vec{\alpha}.\vec{E}] - ie^2[\vec{\alpha}.\vec{A},\vec{\alpha}.\vec{E}] + ie[O,\vec{\alpha}.\dot{\vec{A}}].
\end{aligned}$$

Calculando separadamente os dois primeiros termos do segundo membro da equação acima (novamente com o auxílio de (3.26)), temos

$$\begin{aligned}
[\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}},\vec{\alpha}.\vec{E}]\varsigma &= \alpha^i\alpha^j(\hat{p}^iE^j\varsigma) - \alpha^j\alpha^iE^j\hat{p}^i\varsigma \\
&= \alpha^i\alpha^j(\hat{p}^iE^j)\varsigma + E^j\hat{p}^i(\alpha^i\alpha^j - \alpha^j\alpha^i) \\
&= (\hat{\vec{p}}.\vec{E})\varsigma + i\epsilon^{ijk}\sigma^k(\hat{p}^iE^j)\varsigma + E^j\hat{p}^i(i\epsilon^{ijk}\sigma^k - i\epsilon^{jik}\sigma^k) \\
&= -i\vec{\nabla}.\vec{E}\varsigma + \vec{\sigma}.(\vec{\nabla}\times\vec{E})\varsigma - 2i\vec{\sigma}.(\vec{E}\times\hat{\vec{p}})\varsigma,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\vec{\alpha}.\vec{A},\vec{\alpha}.\vec{E}]\varsigma &= \alpha^i\alpha^jA^iE^j\varsigma - \alpha^j\alpha^iE^jA^i\varsigma \\
&= A^iE^j(\alpha^i\alpha^j - \alpha^j\alpha^i)\varsigma \\
&= 2iA^iE^j\epsilon^{ijk}\sigma^k\varsigma \\
&= 2i\vec{\sigma}.(\vec{A}\times\vec{E})\varsigma.
\end{aligned}$$

Assim, voltando novamente ao comutador completo, segue

$$[O,[O,\epsilon]] = e\vec{\nabla}.\vec{E} + ie\vec{\sigma}.(\vec{\nabla}\times\vec{E}) + 2e\vec{\sigma}.(\vec{E}\times\hat{\vec{p}}) + 2e^2\vec{\sigma}.(\vec{A}\times\vec{E}) + ie[O,\vec{\alpha}.\dot{\vec{A}}],$$

$$\begin{aligned} [O,\dot{O}] &= [O,\vec{\alpha}.(\dot{\hat{\vec{p}}} - e\dot{\vec{A}})] \\ &= [O,\vec{\alpha}.\dot{\hat{\vec{p}}}] - e[O,\vec{\alpha}.\dot{\vec{A}}]. \end{aligned}$$

A hamiltoniana no limite não-relativístico fica, então, expressa por

$$H^{'''} = e\varphi + \frac{1}{2m}\beta((\hat{\vec{p}} - e\vec{A})^2 - e\vec{\sigma}.\vec{B}) - \frac{1}{8m^3}\beta\hat{\vec{p}}^4 - \frac{1}{8m^2}(e\vec{\nabla}.\vec{E} + ie\vec{\sigma}.(\vec{\nabla}\times\vec{E}) +$$

$$+2e\vec{\sigma}.(\vec{E}\times\hat{\vec{p}}) + \underbrace{2e^2\vec{\sigma}.(\vec{A}\times\vec{E})) - \frac{i}{8m^2}[O,\vec{\sigma}.\dot{\hat{\vec{p}}}]}_{\text{termos extras!}} + m\beta.$$

Suprimindo os termos que não apresentam uma interpretação concreta (que correspondem basicamente a correções de ordem superior à hamiltoniana) e recolecionando os outros termos de modo propício a evidenciar a interpretação física subjacente a cada um deles, temos

$$H^{'''} \cong \beta(m + \frac{1}{2m}(\hat{\vec{p}} - e\vec{A})^2 - \frac{1}{8m^3}\hat{\vec{p}}^4) + e\varphi - \frac{e}{2m}\beta\vec{\sigma}.\vec{B} - \frac{e}{8m^2}\vec{\nabla}.\vec{E} -$$

$$-i\frac{e}{8m^2}\vec{\sigma}.(\vec{\nabla}\times\vec{E}) - \frac{e}{4m^2}\vec{\sigma}.(\vec{E}\times\hat{\vec{p}}). \tag{3.27}$$

O primeiro termo da hamiltoniana acima corresponde à expansão de $\sqrt{(\hat{\vec{p}} - e\vec{A})^2 + m^2}$, que basicamente guarda a **informação cinemática** da hamiltoniana. O segundo e o terceiro termos representam claramente a **interação eletrostática** e o **acoplamento dipolar com o campo magnético**, respectivamente. O quarto termo é conhecido como **termo de Darwin** e relaciona-se ao efeito *zitterbewegung*, que corresponde a uma correção ao potencial coulombiano devido às flutuações quânticas da posição da partícula em torno da trajetória clássica, o que origina uma distribuição da carga eletrônica. O último par de termos está relacionado à **interação spin-órbita**, como pode ser visto de forma simples se considerarmos um campo magnético estático, de modo que $\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$, e propusermos um potencial central esfericamente simétrico:

$$
\begin{aligned}
-\frac{e}{4m^2}\vec{\sigma}.(\vec{E}\times\hat{\vec{p}}) &= \frac{e}{4m^2}\vec{\sigma}.(\underbrace{\vec{\nabla}\varphi(r)}_{=\frac{\partial\varphi}{\partial r}\hat{r}}\times\hat{\vec{p}}) \\
&= \frac{e}{4m^2}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\vec{\sigma}.\underbrace{(\hat{r}\times\hat{\vec{p}})}_{=\frac{1}{r}\hat{\vec{L}}} \\
&= \frac{e}{4m^2}\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\vec{\sigma}.\hat{\vec{L}}.
\end{aligned}
$$

Gostaríamos de enfatizar a relação entre a hamiltoniana expressa em (3.27) e a **equação de Pauli**, responsável por descrever justamente o acoplamento de um elétron com um campo eletromagnético (fraco) externo, no limite não--relativístico:

$$H_{pauli} = \frac{1}{2m}(\vec{p}-e\vec{A})^2 - \frac{1}{2m}\vec{\sigma}.\vec{B} + e\varphi.$$

Observa-se que, na equação de Pauli, as correções de ordem superior, como o acoplamento spin-órbita e o termo de Darwin, estão ausentes.

O fato de recuperarmos os termos de acoplamento entre a partícula de Dirac e o campo externo que comparecem na equação de Pauli (bem como algumas correções de ordem superior) através da transformação FW enfatiza a interpretação de que esta transformação nos remete, neste cenário com interação, a um referencial inercial próximo ao **referencial de repouso** e, assim, nos permite efetivamente acessar o **limite não-relativístico** da teoria!

Sugerimos ao leitor interessado na relação entre as transformações de Foldy--Wouthuysen e as transformações de Lorentz a leitura do artigo citado na referência [15], que versa de forma mais detalhada a respeito desta conexão. Esta discussão será omitida aqui por critério de concisão de nosso trabalho, mas entendemos que a abordagem deste assunto completa a revisão sobre as transformações FW que propusemos neste capítulo.

3.3 FW para a Equação DKP Livre

No capítulo 2 construímos a **equação DKP livre** (2.7) a partir do formalismo de Bargmann-Wigner e observamos que os operadores que a compõem satisfazem a **álgebra trilinear** fechada (2.27). Nossa proposta nesta seção consiste em buscar uma forma "diagonal" para a hamiltoniana de DKP, tal como fizemos para a teoria de Dirac, através de uma transformação FW, explorando a estrutura algébrica mais envolvente desta equação.

À luz do procedimento que adotamos até aqui, definimos um operador unitário $U = e^{iM}$ de modo que a lei de transformação do spinor de DKP fica expressa por (3.1) e a hamiltoniana transforma-se segundo (3.2). Assim, propomos para o operador M, independente do tempo, a seguinte expressão:

$$M = -\frac{i}{|\vec{p}|}\vec{\beta}.\hat{\vec{p}}\theta. \tag{3.28}$$

Agora, para efetuarmos a expansão em série do operador unitário U, precisamos primeiramente desenvolver algumas relações para extrair as potências do operador $\vec{\beta}.\hat{\vec{p}}$. Com o auxílio de (2.27), observemos que

$$\begin{aligned}
(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^3\varsigma &= \beta^i\beta^j\beta^k\hat{p}^i\hat{p}^j\hat{p}^k\varsigma \\
&= \frac{1}{2}(\beta^i\beta^j\beta^k + \beta^k\beta^j\beta^i)\hat{p}^i\hat{p}^j\hat{p}^k\varsigma \\
&= \frac{1}{2}(\beta^i \underbrace{g^{jk}}_{-\delta^j{}_k} + \beta^k \underbrace{g^{ji}}_{-\delta^j{}_i})\hat{p}^i\hat{p}^j\hat{p}^k\varsigma \\
&= -\vec{\beta}.\hat{\vec{p}}\underbrace{(\hat{\vec{p}})^2\varsigma}_{=|\vec{p}|^2\varsigma} \\
&= -|\vec{p}|^2\,\vec{\beta}.\hat{\vec{p}}\varsigma,
\end{aligned} \tag{3.29}$$

onde consideramos o "spinor teste" na <u>representação dos momentos</u> ao escrevermos a última igualdade. Doravante, nesta seção, a representação dos momentos deve ser subentendida, a menos que mencionemos explicitamente outra representação.

Da relação acima, segue naturalmente

$$\begin{aligned}
((\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^2 + |\vec{p}|^2)(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})\varsigma &= ((\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^2 + |\vec{p}|^2)\underbrace{(\beta^i\hat{p}^i)}_{=\beta^0\hat{p}^0-\beta_\mu\hat{p}^\mu}\varsigma \\
&= ((\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^2 + |\vec{p}|^2)(\underbrace{\beta^0\hat{p}^0\varsigma}_{=E\beta^0\varsigma} - \underbrace{\beta_\mu\hat{p}^\mu\varsigma}_{=m\varsigma}) \\
&= ((\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^2 + |\vec{p}|^2)(E\beta^0 - m)\varsigma,
\end{aligned}$$

onde usamos (2.7) para obtermos a última expressão.

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^2\beta^0\varsigma &= \hat{p}^i\hat{p}^j\beta^i\beta^j\beta^0\varsigma \\
&= \hat{p}^i\hat{p}^j(-\beta^0\beta^j\beta^i + g^{j0}\beta^i + g^{ij}\beta^0)\varsigma
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\beta^0(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^2\varsigma - \underbrace{\hat{p}^i\hat{p}^i\beta^0\varsigma}_{=|\vec{p}|^2\beta^0\varsigma} \\
&= -\beta^0(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^2\varsigma - |\vec{p}|^2\,\beta^0\varsigma. \qquad (3.30)
\end{aligned}
$$

Portanto, substituindo a expressão acima na relação anterior,

$$
\underbrace{(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^2\beta^0 E}_{=-\beta^0(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^2E-|\vec{p}|^2E\beta^0} \qquad -m(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^2 + E\,|\vec{p}|^2\,\beta^0 - m\,|\vec{p}|^2 = 0
$$

$$
\Rightarrow (m + E\beta^0)(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^2 = -m\,|\vec{p}|^2\,.
$$

Agora, multiplicando esta equação à esquerda por $(m - E\beta^0)$, resulta

$$
(m^2 - E^2(\beta^0)^2)(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^2 = -(m^2 - mE\beta^0)\,|\vec{p}|^2\,,
$$

de forma que, multiplicando agora à esquerda por β^0,

$$
(m^2\beta^0 - E^2(\beta^0)^3)(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^2 = -\beta^0(m^2 - mE\beta^0)\,|\vec{p}|^2\,.
$$

Porém, usando (2.30) e (1.1),

$$
\beta^0\underbrace{(m^2 - E^2)}_{=-|\vec{p}|^2}(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^2 = -((\beta^0)^3E^2 - |\vec{p}|^2\,\beta^0 - mE(\beta^0)^2)\,|\vec{p}|^2\,,
$$

$$
\begin{aligned}
-\beta^0\,|\vec{p}|^2\,(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^2 &= -\beta^0\,|\vec{p}|^2\,(E^2(\beta^0)^2 - |\vec{p}|^2 - mE\beta^0) \\
\Rightarrow (\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^2 &= -\,|\vec{p}|^2 - mE\beta^0 + E^2(\beta^0)^2. \qquad (3.31)
\end{aligned}
$$

Entretanto, para que possamos desenvolver o cálculo das potências do operador $(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})$, precisamos de vínculos adicionais que não podem ser obtidos a partir da representação hamiltoniana (2.36), visto que esta equação foi obtida pela multiplicação da representação padrão da equação DKP (2.7) pela <u>matriz singular</u> β^0 e, portanto, não contém toda informação do sistema.

Assim, para obter as relações adicionais, vamos manipular a representação padrão (2.7), multiplicando-a à esquerda por $(1 - (\beta^0)^2)$:

$$
(1 - (\beta^0)^2)(\beta^\mu\hat{p_\mu} - m)\psi = 0,
$$

$$
[\beta^\mu\hat{p_\mu} - (\beta^0)^2\beta^\mu\hat{p_\mu} + m((\beta^0)^2 - 1)]\psi = 0,
$$

$$
[\beta^i\hat{p_i} - \underbrace{(\beta^0)^2\beta^i}_{=-\beta^i(\beta^0)^2+g^{00}\beta^i}\hat{p_i} + m((\beta^0)^2 - 1)]\psi = 0,
$$

$$[\underbrace{\beta^i(\beta^0)^2\hat{p}_i}_{=-\vec{\beta}.\hat{\vec{p}}(\beta^0)^2} + m((\beta^0)^2 - 1)]\psi = 0$$

$$\Rightarrow (\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})(\beta^0)^2 + m(1 - (\beta^0)^2) = 0. \tag{3.32}$$

Agora, multiplicando (3.31) à esquerda por $(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})$, usando (3.29) e novamente (3.31),

$$(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^3 = -|\vec{p}|^2(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}}) - mE(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})\beta^0 + E^2(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})(\beta^0)^2,$$

$$-|\vec{p}|^2(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}}) = -|\vec{p}|^2(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}}) - mE(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})\beta^0 - E^2 m(1 - (\beta^0)^2),$$

$$(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})\beta^0 = -E(1 - (\beta^0)^2). \tag{3.33}$$

Com o auxílio de (3.31)-(3.33) podemos, enfim, extrair as potências de $(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})$ e desenvolver o operador unitário U em série. Com efeito, multiplicando (3.31) à esquerda por $(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^2$, segue

$$\begin{aligned}(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^4 &= -|\vec{p}|^2(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^2 - mE(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^2\beta^0 + E^2(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^2(\beta^0)^2 \\ &= -|\vec{p}|^2(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^2 + mE^2(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})(1 - (\beta^0)^2) - mE^2(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})(1 - (\beta^0)^2) \\ &= -|\vec{p}|^2(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^2\end{aligned}$$

e assim sucessivamente:

$$\begin{aligned}(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^5 &= -|\vec{p}|^2(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^3 \\ &= |\vec{p}|^4(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}}),\end{aligned}$$

$$(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^6 = |\vec{p}|^4(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^2,$$

$$\vdots$$

Podemos propor, então, o termo geral de potência par:

$$(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^{2k} = (-1)^{k+1}|\vec{p}|^{2k-2}(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^2, \quad \text{k=2,3,...}$$

Dessa forma, por indução, verificamos a validade da proposta acima, analisando o termo $k+1$,

$$\begin{aligned}(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^{2(k+1)} &= (-1)^{k+1}|\vec{p}|^{2k-2}(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^4 \\ &= (-1)^{k+2}|\vec{p}|^{2k}(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^2 \\ &= (-1)^{(k+1)+1}|\vec{p}|^{2(k+1)-2}(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^2.\end{aligned}$$

De posse desses resultados, desenvolvemos o operador unitário em série:

$$U\varsigma = e^{\frac{\vec{\beta}.\hat{\vec{p}}}{|\vec{p}|}\theta}\varsigma,$$

$$U\varsigma = I\varsigma + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^{2k}\left(\frac{\theta}{|\vec{p}|}\right)^{2k}\varsigma + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^{2k+1}\left(\frac{\theta}{|\vec{p}|}\right)^{2k+1}\varsigma$$

$$= I\varsigma + \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{|\vec{p}|}\right)^{2}(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^2 + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!}\left(\frac{\theta}{|\vec{p}|}\right)^{2k}|\vec{p}|^{2k-2}(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^2\right)\varsigma +$$

$$+(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})\left(\frac{\theta}{|\vec{p}|} + \frac{1}{3!}\left(\frac{\theta}{|\vec{p}|}\right)^{3}(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^2 + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!}\left(\frac{\theta}{|\vec{p}|}\right)^{2k+1}|\vec{p}|^{2k-2}(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^2\right)\varsigma$$

$$= I\varsigma + \frac{1}{|\vec{p}|^2}\left(\frac{\theta^2}{2} - \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\theta^{2k}\right)(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^2\varsigma +$$

$$+\left(\frac{\theta}{|\vec{p}|}(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}}) + \frac{1}{3!}\left(\frac{\theta}{|\vec{p}|}\right)^{3}(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^3 + \frac{1}{|\vec{p}|^3}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!}\theta^{2k+1}(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^3\right)\varsigma$$

$$= I\varsigma + \frac{1}{|\vec{p}|^2}\underbrace{(1 - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\theta^{2k})}_{=1-\cos\theta}(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^2\varsigma +$$

$$+\underbrace{\left(\frac{\theta}{|\vec{p}|}(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}}) - \frac{1}{3!}\frac{\theta^3}{|\vec{p}|}(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}}) + \frac{1}{|\vec{p}|}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(\theta)^{2k+1}(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})\right)\varsigma}_{=\frac{\mathrm{sen}\theta}{|\vec{p}|}(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})}$$

$$\Rightarrow U = 1 + \frac{\mathrm{sen}\theta}{|\vec{p}|}\vec{\beta}.\hat{\vec{p}} + \frac{1-\cos\theta}{|\vec{p}|^2}(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^2. \tag{3.34}$$

O operador inverso fica

$$U^{-1} = 1 - \frac{\mathrm{sen}\theta}{|\vec{p}|}\vec{\beta}.\hat{\vec{p}} + \frac{1-\cos\theta}{|\vec{p}|^2}(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^2.$$

Dessa maneira, a hamiltoniana transformada é expressa por

$$\begin{aligned} H' &= UHU^{-1} \\ &= \left(1 + \frac{\mathrm{sen}\theta}{|\vec{p}|}\vec{\beta}.\hat{\vec{p}} + \frac{1-\cos\theta}{|\vec{p}|^2}(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^2\right)(\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}} + m\beta^0). \\ &\quad .\left(1 - \frac{\mathrm{sen}\theta}{|\vec{p}|}\vec{\beta}.\hat{\vec{p}} + \frac{1-\cos\theta}{|\vec{p}|^2}(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^2\right). \end{aligned}$$

Contudo, antes de desenvolvermos os produtos que compõem $H^{'}$, observemos o seguinte resultado

$$\begin{aligned}(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})(\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}})(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}}) &= (\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})(\beta_0\vec{\beta}.\hat{\vec{p}} - \vec{\beta}.\hat{\vec{p}}\beta_0)(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}}) \\ &= (\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})\beta_0(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^2 - (\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^2\beta_0(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}}),\end{aligned}$$

de modo que, usando (2.34),

$$(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})(\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}})(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}}) = 0. \tag{3.35}$$

Portanto, desenvolvendo os produtos e retendo apenas os termos que não se anulam em virtude de (3.35), obtemos

$$H^{'} = m\beta^0 + \vec{\alpha}.\hat{\vec{p}} + \frac{\mathrm{sen}\theta}{|\vec{p}|}([\vec{\beta}.\hat{\vec{p}}, \vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}] + m(\underbrace{\vec{\beta}.\hat{\vec{p}}\beta^0 - \beta^0\vec{\beta}.\hat{\vec{p}}}_{=-\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}})) +$$

$$+\frac{1-\cos\theta}{|\vec{p}|^2}(\left\{\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}, (\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^2\right\} + m(\underbrace{(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^2\beta^0 + \beta^0(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^2}_{=-|\vec{p}|^2\beta^0})),$$

em que utilizamos (3.30) no último termo.

Calculamos, então, os termos remanescentes da expressão acima:

$$\begin{aligned}[\vec{\beta}.\hat{\vec{p}}, \vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}]\varsigma &= (\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})(\beta^0\vec{\beta}.\hat{\vec{p}} - \vec{\beta}.\hat{\vec{p}}\beta^0)\varsigma - (\beta^0\vec{\beta}.\hat{\vec{p}} - \vec{\beta}.\hat{\vec{p}}\beta^0)(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})\varsigma \\ &= \underbrace{(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})\beta^0(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})}_{=0}\varsigma - (\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^2\beta^0\varsigma - \beta^0(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^2\varsigma + \underbrace{(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})\beta^0(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})}_{=0}\varsigma \\ &= -(\beta^i\beta^j\beta^0 + \beta^0\beta^j\beta^i)\hat{p}^i\hat{p}^j\varsigma \\ &= -(g^{ij}\beta^0 + \underbrace{g^{j0}}_{=0}\beta^i)\hat{p}^i\hat{p}^j\varsigma \\ &= |\vec{p}|^2\beta^0\varsigma,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\{\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}, (\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^2\right\}\varsigma &= (\beta^0\vec{\beta}.\hat{\vec{p}} - \vec{\beta}.\hat{\vec{p}}\beta^0)(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^2\varsigma + (\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^2(\beta^0\vec{\beta}.\hat{\vec{p}} - \vec{\beta}.\hat{\vec{p}}\beta^0)\varsigma \\ &= \beta^0(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^3\varsigma - \underbrace{(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})\beta^0(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^2}_{=0}\varsigma + \underbrace{(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^2\beta^0(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})}_{=0}\varsigma - (\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})^3\beta^0\varsigma \\ &= -|\vec{p}|^2\beta^0(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})\varsigma + |\vec{p}|^2(\vec{\beta}.\hat{\vec{p}})\beta^0\varsigma \\ &= -|\vec{p}|^2(\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}})\varsigma.\end{aligned}$$

Substituindo os resultados acima na última expressão para $H^{'}$, temos

$$\begin{aligned} H^{'} &= m\beta^0 + \vec{\alpha}.\hat{\vec{p}} + \frac{\text{sen}\theta}{|\vec{p}|}(|\vec{p}|^2\beta^0 - m\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}) - \frac{1-\cos\theta}{|\vec{p}|^2}(|\vec{p}|^2(\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}) + m|\vec{p}|^2\beta^0) \\ &= (\cos\theta - \frac{m}{|\vec{p}|}\text{sen}\theta)\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}} + (m\cos\theta + |\vec{p}|\,\text{sen}\theta)\beta^0. \end{aligned}$$

Portanto, para eliminar o operador ímpar $\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}$, escolhemos o parâmetro $\theta(\vec{p})$ como

$$\theta(\vec{p}) = \text{arctg}(\frac{|\vec{p}|}{m}). \tag{3.36}$$

Assim,

$$H^{'} = (m + \frac{|\vec{p}|^2}{m})\cos\theta\beta^0,$$

de modo que, usando novamente a relação trigonométrica $\sec^2 x = 1 + \text{tg}^2 x$, bem como (1.1), e escolhendo o sinal positivo para o cosseno (pois a energia da partícula livre deve ser positiva), resulta $\cos\theta = \frac{m}{E}$. Obtemos então a hamiltoniana

$$H^{'} = \frac{(m^2 + |\vec{p}|^2)}{E}\beta^0 = E\beta^0. \tag{3.37}$$

Observa-se que, assim como visto no caso da teoria de Dirac livre, é possível "diagonalizar" exatamente a equação DKP livre através da transformação unitária proposta. Para finalizarmos este capítulo, vamos discutir na seção seguinte a equação DKP na presença de um campo eletromagnético (fraco) externo, novamente sob o prisma das transformações FW, com o intuito de diagonalizarmos iterativamente a hamiltoniana (como feito na seção 3.2 para a teoria de Dirac), explorando ainda a estrutura algébrica desta teoria.

3.4 FW para DKP com Campo Externo

A introdução de um campo eletromagnético externo fraco será efetuada novamente através da prescrição clássica de acoplamento mínimo $p_\mu \to \pi_\mu = p_\mu - eA_\mu$, de modo que, neste cenário com interação, a equação (2.7) torna-se

$$(\beta_\mu\pi^\mu - m)\psi = 0. \tag{3.38}$$

A relação de comutação entre os operadores de momento generalizados π^μ será bastante útil nos cálculos a seguir, de modo que a desenvolvemos abaixo:

$$[\pi^\mu, \pi^\nu]\varsigma = \pi^\mu\pi^\nu\varsigma - \pi^\nu\pi^\mu\varsigma$$

$$
\begin{aligned}
&= \hat{p}^\mu \hat{p}^\nu \varsigma - e\hat{p}^\mu (A^\nu \varsigma) - eA^\mu \hat{p}^\nu \varsigma + e^2 A^\mu A^\nu \varsigma - \\
&\quad -(\hat{p}^\nu \hat{p}^\mu \varsigma - e\hat{p}^\nu (A^\mu \varsigma) - eA^\nu \hat{p}^\mu \varsigma + e^2 A^\nu A^\mu \varsigma) \\
&= -e(\hat{p}^\mu A^\nu - \hat{p}^\nu A^\mu)\varsigma \\
&= -ie\underbrace{(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)}_{=F^{\mu\nu}}\varsigma
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow [\pi^\mu, \pi^\nu] = -ieF^{\mu\nu}, \tag{3.39}
$$

onde $F^{\mu\nu}$ é o **tensor do campo eletromagnético**[1].

Para que possamos aplicar o procedimento FW e extrair alguma informação a respeito da interação entre o mesón descrito pela equação DKP e o campo externo no **limite de baixas energias**, precisamos da forma hamiltoniana da equação (3.38). Assim, seguindo o mesmo procedimento efetuado no capítulo 2 no contexto da equação DKP livre, multiplicamos (3.38) à esquerda por $\beta_\rho \pi^\rho \beta_\nu$,

$$
(\beta_\rho \pi^\rho \beta_\nu \beta_\mu \pi^\mu - m\beta_\rho \pi^\rho \beta_\nu)\psi = 0. \tag{3.40}
$$

Contudo, observemos que

$$
\begin{aligned}
\beta_\rho \pi^\rho \beta_\nu \beta_\mu \pi^\mu &= \beta_\rho \beta_\nu \beta_\mu \pi^\rho \pi^\mu \\
&= (-\beta_\mu \beta_\nu \beta_\rho + g_{\nu\mu}\beta_\rho + g_{\rho\nu}\beta_\mu)(\pi^\mu \pi^\rho - ieF^{\rho\mu}) \\
&= -\beta_\mu \pi^\mu \beta_\nu \beta_\rho \pi^\rho + ieF^{\rho\mu}\beta_\mu \beta_\nu \beta_\rho + g_{\nu\mu}\pi^\mu \beta_\rho \pi^\rho \\
&\quad -ieg_{\nu\mu}F^{\rho\mu}\beta_\rho + g_{\rho\nu}\beta_\mu \pi^\mu \pi^\rho - ieg_{\rho\nu}\underbrace{F^{\rho\mu}}_{=-F^{\mu\rho}}\beta_\mu.
\end{aligned}
$$

Redefinindo os índices mudos no primeiro termo da última igualdade e explorando a antissimetria do tensor $F^{\mu\rho}$ para cancelar o quarto e o sexto termos, resulta

$$
2\beta_\rho \pi^\rho \beta_\nu \beta_\mu \pi^\mu = ieF^{\rho\mu}\beta_\mu \beta_\nu \beta_\rho + \pi_\nu \beta_\rho \pi^\rho + \beta_\mu \pi^\mu \pi_\nu.
$$

Entretanto, analisando os dois últimos termos da equação acima, temos

$$
\begin{aligned}
\beta_\mu \pi^\mu \pi_\nu &= \beta_\mu g_{\nu\alpha}\pi^\mu \pi^\alpha \\
&= \beta_\mu g_{\nu\alpha}(\pi^\alpha \pi^\mu - ieF^{\mu\alpha}) \\
&= \pi_\nu \beta_\mu \pi^\mu - ieg_{\nu\alpha}F^{\mu\alpha}\beta_\mu.
\end{aligned}
$$

[1] O tensor do campo eletromagnético é definido por $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ e admite a representação matricial

$$
F^{**} = \begin{bmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{bmatrix}.
$$

Logo, substituindo o resultado acima na equação anterior e manipulando os índices mudos,

$$\beta_\rho \pi^\rho \beta_\nu \beta_\mu \pi^\mu = \pi_\nu \beta_\rho \pi^\rho + \frac{ie}{2} F^{\rho\mu} (\beta_\mu \beta_\nu \beta_\rho - \beta_\rho g_{\nu\mu}).$$

Retornando então à (3.40), com o auxílio da última expressão podemos escrever

$$\underbrace{\pi_\nu \beta_\rho \pi^\rho \psi}_{=m\pi_\nu \psi} + \frac{ie}{2} F^{\rho\mu} (\beta_\mu \beta_\nu \beta_\rho - \beta_\rho g_{\nu\mu}) \psi - m \beta_\rho \pi^\rho \beta_\nu \psi = 0$$

$$\Rightarrow \pi_\nu \psi = \beta_\rho \pi^\rho \beta_\nu \psi - \frac{ie}{2m} F^{\rho\mu} (\beta_\mu \beta_\nu \beta_\rho - \beta_\rho g_{\nu\mu}) \psi, \tag{3.41}$$

onde usamos (3.38).

Fazendo $\nu = 0$ em (3.41) e somando com (3.38) multiplicada à esquerda por β_0, obtemos a hamiltoniana do sistema,

$$(\beta_0 \beta_\alpha \pi^\alpha + \pi_0) \psi = (m\beta_0 + \beta_\alpha \pi^\alpha \beta_0 - \frac{ie}{2m} F^{\rho\mu} (\beta_\mu \beta_0 \beta_\rho - \beta_\rho g_{0\mu})) \psi,$$

$$\begin{aligned}
i\frac{\partial}{\partial t}\psi &= (m\beta_0 + e\varphi - (\beta_0\beta_\alpha - \beta_\alpha\beta_0)\pi^\alpha - \frac{ie}{2m} F^{\rho\mu} (\beta_\mu \beta_0 \beta_\rho - \beta_\rho g_{0\mu}))\psi \\
&= (m\beta_0 + e\varphi - \underbrace{\alpha_i \pi^i}_{=-\vec{\alpha}.\vec{\pi}} - \frac{ie}{2m} F^{\rho\mu} (\beta_\mu \beta_0 \beta_\rho - \beta_\rho g_{0\mu}))\psi \\
&= \underbrace{(m\beta_0 + e\varphi + \vec{\alpha}.\vec{\pi} - \frac{ie}{2m} F^{\rho\mu} (\beta_\mu \beta_0 \beta_\rho - \beta_\rho g_{0\mu}))}_{=H(t)}\psi
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow H(t) = m\beta_0 + e\varphi + \vec{\alpha}.\vec{\pi} - \frac{ie}{2m} F^{\rho\mu} (\beta_\mu \beta_0 \beta_\rho - \beta_\rho g_{0\mu}). \tag{3.42}$$

Observemos que, assim como discutido na seção 3.2 para o caso da teoria de Dirac com campo externo, a hamiltoniana (3.42) para a equação DKP interagente também exibe dependência temporal devido à introdução do quadripotencial A^μ.

Desejamos novamente buscar uma representação da hamiltoniana em que o operador $\vec{\alpha}.\vec{\pi}$ esteja ausente e obter, a partir desta, informações do acoplamento entre o méson e o campo eletromagnético externo no **limite não-relativístico**.

Sendo assim, definimos um operador unitário $U = e^{iM}$ em analogia ao caso da teoria DKP livre, de forma que

$$M = -\frac{i}{m}\vec{\beta}.\vec{\pi}. \tag{3.43}$$

Com o auxílio da expansão BCH (3.11), podemos escrever a expressão em série (3.14) para a hamiltoniana transformada:

$$H' = H(t) + i[M(t), H(t)] + ... + \frac{i^n}{n!}\underbrace{[M(t), [M(t), ...[M(t), H(t)]...]]}_{n \text{ comutadores}} + ...$$

$$+ i^2\dot{M}(t) + \frac{i^3}{2!}[M(t), \dot{M}(t)] + ... + \frac{i^{n+1}}{n!}\underbrace{[M(t), [M(t), ...[M(t), \dot{M}(t)]...]]}_{n-1 \text{ comutadores}} + ...$$

Agora, neste cálculo, faremos um "balanço energético" menos detalhado do que o efetuado na seção 3.2, apenas em termos da energia de repouso. Assim, para o estudo do acoplamento em baixas energias em que estamos interessados, é suficiente mantermos na expansão acima apenas termos até ordem $1/m^2$ (em relação à energia de repouso),

$$H' = H(t) + i[M, H(t)] - \frac{1}{2}[M, [M, H(t)]] - \frac{i}{6}[M, [M, [M, m\beta_0]]] - \dot{M} - \frac{i}{2}[M, \dot{M}]. \tag{3.44}$$

Precisamos, então, efetuar o cálculo dos comutadores que comparecem na equação acima. Porém, antes de prosseguirmos com estes cálculos, apresentaremos algumas relações vetoriais envolvendo o tensor $F^{\mu\nu}$, as quais serão úteis ao desenvolvermos os comutadores:

$$\begin{aligned}
F^{\mu\nu}\beta_\mu\beta_0\beta_\nu &= F^{0i}\beta_0\beta_0\beta_i + F^{i0}\beta_i\beta_0\beta_0 + F^{ij}\beta_i\beta_0\beta_j \\
&= -E^i\beta_0\beta_0\beta_i + E^i\beta_i\beta_0\beta_0 + F^{ij}\beta_i\beta_0\beta_j \\
&= -E^i(-\beta_i\beta_0\beta_0 + g_{0i}\beta_0 + g_{00}\beta_i) + E^i\beta_i\beta_0\beta_0 + F^{ij}\beta_i\beta_0\beta_j \\
&= 2\underbrace{E^i\beta_i}_{=-\vec{E}.\vec{\beta}}\beta_0^2 - \underbrace{E^i\beta_i}_{=-\vec{E}.\vec{\beta}} + F^{ij}\beta_i\beta_0\beta_j \\
&= -2\vec{E}.\vec{\beta}\beta_0^2 + \vec{E}.\vec{\beta} + F^{ij}\beta_i\beta_0\beta_j,
\end{aligned} \tag{3.45}$$

$$\begin{aligned}
F^{\mu\nu}\beta_\mu g_{0\nu} &= F^{\mu 0}\beta_\mu g_{00} + F^{\mu i}\beta_\mu g_{0i} \\
&= F^{i0}\beta_i \\
&= E^i\beta_i \\
&= -\vec{E}.\vec{\beta},
\end{aligned} \tag{3.46}$$

$$\begin{aligned}F^{ij}\beta_i\beta_0\beta_j &= F^{ij}\beta_i\beta_0\beta_j + (F^{ij}\beta_j\beta_0\beta_i - F^{ij}\beta_j\beta_0\beta_i) + (F^{ij}\beta_i\beta_j\beta_0 - F^{ij}\beta_i\beta_j\beta_0) \\ &\quad + (F^{ij}\beta_j\beta_i\beta_0 - F^{ij}\beta_j\beta_i\beta_0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= F^{ij}(\beta_i(\beta_0\beta_j - \beta_j\beta_0) - \beta_j(\beta_0\beta_i - \beta_i\beta_0)) + F^{ij}(\beta_i\beta_j\beta_0 - \beta_j\beta_i\beta_0) + F^{ij}\beta_j\beta_0\beta_i \\ &= F^{ij}(\beta_i\alpha_j - \beta_j\alpha_i) + F^{ij}(-\beta_0\beta_j\beta_i + g_{j0}\beta_i + g_{ij}\beta_0 + \beta_0\beta_i\beta_j - g_{i0}\beta_j - g_{ji}\beta_0) \\ &\quad + \underbrace{F^{ij}\beta_j\beta_0\beta_i}_{=-F^{ji}\beta_j\beta_0\beta_i} \\ &= F^{ij}(\beta_i\alpha_j - \beta_j\alpha_i) + F^{ij}\beta_0(\beta_i\beta_j - \beta_j\beta_i) - F^{ji}\beta_j\beta_0\beta_i.\end{aligned}$$

Entretanto, usando a definição do operador de spin (2.38) e manipulando os índices mudos do último termo, segue

$$2F^{ij}\beta_i\beta_0\beta_j = F^{ij}(\beta^i\alpha^j - \beta^j\alpha^i) - iF^{ij}\beta_0 S^{ij},$$

$$\begin{aligned}F^{ij}\beta_i\beta_0\beta_j &= \frac{1}{2}\underbrace{F^{ij}(\beta^i\alpha^j - \beta^j\alpha^i)}_{=-2\vec{B}.(\vec{\beta}\times\vec{\alpha})} - \frac{i}{2}\beta_0\underbrace{F^{ij}S^{ij}}_{=-2\vec{B}.\vec{S}} \\ &= -\vec{B}.(\vec{\beta}\times\vec{\alpha}) + i\beta_0\vec{B}.\vec{S}.\end{aligned} \tag{3.47}$$

Observemos que, usando (3.45)-(3.46), podemos desenvolver o último termo da expressão (3.42) para a hamiltoniana dependente do tempo:

$$\begin{aligned}F^{\rho\mu}(\beta_\mu\beta_0\beta_\rho - \beta_\rho g_{0\mu}) &= 2\vec{E}.\vec{\beta}\beta_0^2 - \vec{E}.\vec{\beta} - (-\vec{B}.(\vec{\beta}\times\vec{\alpha}) + i\beta_0\vec{B}.\vec{S}) + \vec{E}.\vec{\beta} \\ &= 2\vec{E}.\vec{\beta}\beta_0^2 + \vec{B}.(\vec{\beta}\times\vec{\alpha}) - i\beta_0\vec{B}.\vec{S}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow H(t) = m\beta_0 + e\varphi + \vec{\alpha}.\vec{\pi} - \frac{ie}{m}\vec{E}.\vec{\beta}\beta_0^2 - \frac{ie}{2m}\vec{B}.(\vec{\beta}\times\vec{\alpha}) - \frac{e}{2m}\beta_0\vec{B}.\vec{S}. \tag{3.48}$$

Com o auxílio das relações vetoriais expressas acima, desenvolveremos abaixo o cálculo dos comutadores presentes na expansão de $H^{'}$:

$$\begin{aligned}[M(t), \beta_0] &= -\frac{i}{m}[\vec{\beta}.\vec{\pi}, \beta_0] \\ &= -\frac{i}{m}(\beta_i\pi_i\beta_0 - \beta_0\beta_i\pi_i) \\ &= \frac{i}{m}\underbrace{(\beta_0\beta_i - \beta_i\beta_0)}_{\alpha_i}\pi_i \\ &= \frac{i}{m}\vec{\alpha}.\vec{\pi},\end{aligned} \tag{3.49}$$

$$
\begin{aligned}
[M(t),\varphi]\varsigma &= -\frac{i}{m}\beta_i(\pi_i\varphi-\varphi\pi_i)\varsigma \\
&= -\frac{i}{m}\beta_i((\hat{p}_i-eA_i)(\varphi\varsigma)-\varphi\pi_i\varsigma) \\
&= -\frac{i}{m}\beta_i((\hat{p}_i\varphi)\varsigma+\underbrace{\varphi\hat{p}_i\varsigma-eA_i\varphi\varsigma}_{=\varphi\pi_i\varsigma}-\varphi\pi_i\varsigma) \\
&= -\frac{i}{m}\beta_i(\hat{p}_i\varphi)\varsigma \\
&= \frac{1}{m}\underbrace{\beta_i}_{=-\beta^i}(\nabla_i\varphi)\varsigma \\
&= -\frac{1}{m}\vec{\beta}.(\vec{\nabla}\varphi)\varsigma,
\end{aligned}
$$

onde, na última expressão, o operador $\vec{\nabla}$ atua apenas sobre o potencial escalar φ, de forma que, suprimindo o spinor teste,

$$[M(t),\varphi]=-\frac{1}{m}\vec{\beta}.\vec{\nabla}\varphi, \tag{3.50}$$

$$
\begin{aligned}
[M(t),\vec{\alpha}.\vec{\pi}] &= -\frac{i}{m}(\beta_i\alpha_j\pi_i\pi_j-\alpha_j\beta_i\pi_j\pi_i) \\
&= -\frac{i}{m}(\beta_i\alpha_j\pi_i\pi_j-\alpha_j\beta_i(\pi_i\pi_j+ieF^{ij})) \\
&= -\frac{i}{m}(\beta_i\alpha_j-\alpha_j\beta_i)\pi_i\pi_j-\frac{e}{m}F^{ij}\alpha_j\beta_i \\
&= -\frac{i}{m}(\underbrace{(\beta_i\beta_0\beta_j+\beta_j\beta_0\beta_i)}_{=g_{0j}\beta_i+g_{i0}\beta_j=0}-\underbrace{(\beta_i\beta_j\beta_0+\beta_0\beta_j\beta_i)}_{=g_{j0}\beta_i+g_{ij}\beta_0})\pi_i\pi_j- \\
&\quad -\frac{e}{m}F^{ij}(\beta_0\beta_j\beta_i-\beta_j\beta_0\beta_i) \\
&= \frac{i}{m}\beta_0\underbrace{g_{ij}}_{=-\delta^i{}_j}\pi_i\pi_j-\frac{e}{2m}\beta_0(\beta_j\beta_iF^{ij}+\beta_i\beta_jF^{ji})+\frac{e}{m}\underbrace{\beta_j\beta_0\beta_iF^{ij}}_{=-\beta_j\beta_0\beta_iF^{ji}} \\
&= -\frac{i}{m}\beta_0(\vec{\pi})^2-\frac{e}{2m}\beta_0\underbrace{(\beta_j\beta_i-\beta_i\beta_j)}_{=-iS_{ji}}F^{ij}-\frac{e}{m}\beta_j\beta_0\beta_iF^{ji}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{i}{m}\beta_0(\vec{\pi})^2 - i\frac{e}{2m}\beta_0 \underbrace{S_{ji}F^{ji}}_{=-2\vec{B}.\vec{S}} - \frac{e}{m}\left(-\vec{B}.(\vec{\beta}\times\vec{\alpha}) + i\beta_0\vec{B}.\vec{S}\right) \\
&= -\frac{i}{m}\beta_0(\vec{\pi})^2 + \frac{e}{m}\vec{B}.(\vec{\beta}\times\vec{\alpha}), \qquad (3.51)
\end{aligned}
$$

onde usamos (3.39) e (3.47).

$$
\begin{aligned}
[M,(\vec{E}.\vec{\beta})\beta_0^2]\varsigma &= -\frac{i}{m}(\beta_i\beta_j\beta_0^2\pi_iE_j\varsigma - \beta_j\beta_0^2\beta_iE_j\pi_i\varsigma) \\
&= -\frac{i}{m}((\beta_i\beta_j-\beta_j\beta_i)\beta_0^2\pi_iE_j\varsigma + \beta_j\beta_i\beta_0^2\pi_iE_j\varsigma - \beta_j\beta_0^2\beta_iE_j\pi_i\varsigma) \\
&= -\frac{1}{m}S_{ij}\beta_0^2(\pi_iE_j)\varsigma - \frac{1}{m}S_{ij}\beta_0^2E_j\hat{p}_i\varsigma - \\
&\quad -\frac{i}{m}(\beta_j\beta_i\beta_0^2\pi_iE_j\varsigma - \beta_j\beta_0^2\beta_iE_j\pi_i\varsigma) \\
&= -\frac{1}{m}S_{ij}\beta_0^2(\pi_iE_j)\varsigma - \frac{1}{m}S_{ij}\beta_0^2E_j\hat{p}_i\varsigma - \\
&\quad -\frac{i}{m}(\beta_j\beta_i\beta_0^2\pi_iE_j\varsigma + \beta_j\beta_i\beta_0^2E_j\pi_i\varsigma - \beta_j\beta_iE_j\pi_i\varsigma) \\
&= -\frac{1}{m}S_{ij}\beta_0^2(\pi_iE_j)\varsigma - \frac{1}{m}S_{ij}\beta_0^2E_j\hat{p}_i\varsigma + \frac{i}{m}\beta_j\beta_iE_j\pi_i\varsigma - \\
&\quad -\frac{i}{m}\beta_j\beta_i\beta_0^2(\pi_iE_j\varsigma + E_j\pi_i\varsigma) \\
&= -\frac{1}{m}S_{ij}\beta_0^2(\pi_iE_j)\varsigma - \frac{1}{m}S_{ij}\beta_0^2E_j\hat{p}_i\varsigma + \frac{i}{m}\beta_j\beta_iE_j\pi_i\varsigma - \\
&\quad -2\frac{i}{m}\beta_j\beta_i\beta_0^2E_j\pi_i\varsigma - \frac{i}{m}\beta_j\beta_i\beta_0^2(\hat{p}_iE_j)\varsigma \\
&= -\frac{1}{m}\vec{S}.(\vec{p}\times\vec{E})\beta_0^2\varsigma + \frac{i}{m}(\vec{\beta}.\vec{E})(\vec{\beta}.\vec{\pi})(1-2\beta_0^2)\varsigma + \\
&\quad +\frac{1}{m}\vec{S}.(\vec{E}\times\hat{\vec{p}})\beta_0^2\varsigma \underbrace{+\frac{e}{m}\vec{S}.(\vec{A}\times\vec{E})\beta_0^2\varsigma - \frac{i}{m}\beta_j\beta_i\beta_0^2(\hat{p}_iE_j)\varsigma}_{=R\varsigma}.
\end{aligned}
$$

Suprimindo o spinor teste e denotando por R as "contribuições residuais" do comutador (que discutiremos após a análise da expressão final para a hamiltoniana $H^{'}$), resulta

$$
[M,(\vec{E}.\vec{\beta})\beta_0^2] = -\frac{1}{m}\vec{S}.(\hat{\vec{p}}\times\vec{E} - \vec{E}\times\hat{\vec{p}})\beta_0^2 + \frac{i}{m}(\vec{\beta}.\vec{E})(\vec{\beta}.\vec{\pi})(1-2\beta_0^2) + R, \quad (3.52)
$$

$$
[M,\dot{M}] = -\frac{1}{m^2}(\beta_i\beta_j\pi_i\dot{\pi}_j - \beta_j\beta_i\dot{\pi}_j\pi_i);
$$

porém, adotando um procedimento absolutamente similar ao que conduziu a (3.39), mostra-se facilmente que

$$[\pi_i, \dot{\pi}_j] = -e(\hat{p}_i \dot{A}_j - \hat{\dot{p}}_j A_i), \tag{3.53}$$

onde os operadores $\hat{p}_i$ e $\hat{\dot{p}}_j$ atuam somente sobre os potenciais vetores $\dot{A}_j$ e A_i, respectivamente.

Assim, recorrendo a esta relação, prosseguimos com o cálculo do comutador anterior:

$$\begin{aligned}
[M, \dot{M}]\varsigma &= -\frac{1}{m^2}\left\{\beta_i\beta_j\pi_i\dot{\pi}_j - \beta_j\beta_i(\pi_i\dot{\pi}_j + e(\hat{p}_i\dot{A}_j - \hat{\dot{p}}_j A_i))\right\}\varsigma \\
&= -\frac{1}{m^2}(\beta_i\beta_j - \beta_j\beta_i)\pi_i\dot{\pi}_j\varsigma + \frac{e}{m^2}\beta_j\beta_i(\hat{p}_i\dot{A}_j - \hat{\dot{p}}_j A_i)\varsigma \\
&= \frac{i}{m^2}S_{ij}\pi_i\dot{\pi}_j\varsigma + \frac{e}{m^2}\beta_j\beta_i(\hat{p}_i\dot{A}_j - \hat{\dot{p}}_j A_i)\varsigma \\
&= \frac{i}{m^2}S_{ij}\pi_i\hat{\dot{p}}_j\varsigma - \frac{ie}{m^2}S_{ij}\pi_i(\dot{A}_j\varsigma) + \frac{e}{m^2}\beta_j\beta_i(\hat{p}_i\dot{A}_j - \hat{\dot{p}}_j A_i)\varsigma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{ie}{m^2}S_{ij}(\hat{p}_i\dot{A}_j)\varsigma - \frac{ie}{m^2}S_{ij}\dot{A}_j\hat{p}_i\varsigma + \frac{ie^2}{m^2}S_{ij}A_i\dot{A}_j\varsigma + \frac{i}{m^2}S_{ij}\pi_i\hat{\dot{p}}_j\varsigma + \\
&\quad + \frac{e}{m^2}\beta_j\beta_i(\hat{p}_i\dot{A}_j - \hat{\dot{p}}_j A_i)\varsigma \\
&= -\frac{ie}{m^2}\underbrace{S_{ij}(\pi_i\dot{A}_j)}_{=\vec{S}.(\vec{\pi}\times\dot{\vec{A}})}\varsigma + i\frac{e}{m^2}\vec{S}.(\dot{\vec{A}}\times\hat{\vec{p}})\varsigma + \underbrace{\left(\frac{i}{m^2}\vec{S}.(\vec{\pi}\times\hat{\dot{\vec{p}}}) + \frac{e}{m^2}\beta_j\beta_i(\hat{p}_i\dot{A}_j - \hat{\dot{p}}_j A_i)\right)}_{=R'}\varsigma
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow [M, \dot{M}] = -i\frac{e}{m^2}\vec{S}.(\vec{\pi}\times\dot{\vec{A}} - \dot{\vec{A}}\times\vec{p}) + R', \tag{3.54}$$

$$\begin{aligned}
[M, [M, \beta_0]] &= \frac{i}{m}[M, \vec{\alpha}.\vec{\pi}] \\
&= \frac{i}{m}\left(-\frac{i}{m}\beta_0(\vec{\pi})^2 + \frac{e}{m}\vec{B}.(\vec{\beta}\times\vec{\alpha})\right) \\
&= \frac{1}{m^2}\beta_0(\vec{\pi})^2 + \frac{ie}{m^2}\vec{B}.(\vec{\beta}\times\vec{\alpha}),
\end{aligned} \tag{3.55}$$

$$\begin{aligned}
[M,[M,\varphi]]\varsigma &= \frac{i}{m^2}[\vec{\beta}.\vec{\pi},\vec{\beta}.\vec{\nabla}\varphi]\varsigma \\
&= \frac{i}{m^2}(\beta_i\beta^j\pi_i(\nabla_j\varphi)-\beta^j\beta_i(\nabla_j\varphi)\pi_i)\varsigma \\
&= \frac{i}{m^2}(\beta_j\beta_i(\nabla_j\varphi)\pi_i\varsigma-\beta_i\beta_j\pi_i((\nabla_j\varphi)\varsigma)) \\
&= \frac{i}{m^2}(\beta_j\beta_i(\nabla_j\varphi)\hat{p}_i\varsigma-e\beta_j\beta_i(\nabla_j\varphi)A_i\varsigma-\beta_i\beta_j\pi_i((\nabla_j\varphi)\varsigma)) \\
&= \frac{i}{m^2}(\beta_j\beta_i\hat{p}_i((\nabla_j\varphi)\varsigma)-\beta_j\beta_i(\hat{p}_i(\nabla_j\varphi))\varsigma-e\beta_j\beta_i(\nabla_j\varphi)A_i\varsigma)- \\
&\quad -\frac{i}{m^2}\beta_i\beta_j\pi_i((\nabla_j\varphi)\varsigma) \\
&= \frac{i}{m^2}(\beta_j\beta_i\pi_i((\nabla_j\varphi)\varsigma)-\beta_i\beta_j\pi_i((\nabla_j\varphi)\varsigma)-\beta_j\beta_i(\hat{p}_i(\nabla_j\varphi))\varsigma) \\
&= -\frac{i}{m^2}(\beta_i\beta_j-\beta_j\beta_i)\pi_i((\nabla_j\varphi)\varsigma)-\frac{i}{m^2}\beta_j\beta_i(\hat{p}_i(\nabla_j\varphi))\varsigma \\
&= -\frac{1}{m^2}S_{ij}(\pi_i(\nabla_j\varphi))\varsigma-\frac{1}{m^2}S_{ij}(\nabla_j\varphi)\hat{p}_i\varsigma-\frac{i}{m^2}\beta_j\beta_i(\hat{p}_i(\nabla_j\varphi))\varsigma \\
&= -\frac{1}{m^2}\vec{S}.(\hat{\vec{p}}\times\vec{\nabla}\varphi)\varsigma+\frac{1}{m^2}\vec{S}.(\vec{\nabla}\varphi\times\hat{\vec{p}})\varsigma+ \\
&\quad \underbrace{+\frac{e}{m^2}\vec{S}.(\vec{A}\times\vec{\nabla}\varphi)\varsigma-\frac{i}{m^2}\beta_j\beta_i(\hat{p}_i(\nabla_j\varphi))\varsigma}_{=R''\varsigma} \\
&= -\frac{1}{m^2}\vec{S}.(\hat{\vec{p}}\times\vec{\nabla}\varphi-\vec{\nabla}\varphi\times\hat{\vec{p}})\varsigma+R''\varsigma
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow [M,[M,\varphi]] = -\frac{1}{m^2}\vec{S}.(\hat{\vec{p}}\times\vec{\nabla}\varphi-\vec{\nabla}\varphi\times\vec{p})+R'', \tag{3.56}$$

$$\begin{aligned}
[M,[M,\vec{\alpha}.\vec{\pi}]] &= -\frac{i}{m}[\vec{\beta}.\vec{\pi},-\frac{i}{m}\beta_0(\vec{\pi})^2+\frac{e}{m}\vec{B}.(\vec{\beta}\times\vec{\alpha})] \\
&= -\frac{1}{m^2}[\vec{\beta}.\vec{\pi},\beta_0(\vec{\pi})^2]-\frac{ie}{m^2}[\vec{\beta}.\vec{\pi},\vec{B}.(\vec{\beta}\times\vec{\alpha})].
\end{aligned}$$

Porém, notemos que

$$\begin{aligned}
[\vec{\beta}.\vec{\pi},\beta_0(\vec{\pi})^2]\varsigma &= \beta_i\beta_0\pi_i\pi_j^2\varsigma-\beta_0\beta_i\pi_j^2\pi_i\varsigma \\
&= \beta_i\beta_0(\pi_j\pi_i-ieF^{ij})\pi_j\varsigma-\beta_0\beta_i\pi_j^2\pi_i\varsigma
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \beta_i\beta_0\pi_j(\pi_j\pi_i - ieF^{ij})\varsigma - ie\beta_i\beta_0F^{ij}\pi_j\varsigma - \beta_0\beta_i\pi_j^2\pi_i\varsigma \\
&= \underbrace{(\beta_i\beta_0 - \beta_0\beta_i)}_{=-\alpha_i}\pi_j^2\pi_i\varsigma - ie\beta_i\beta_0\pi_j(F^{ij}\varsigma) - ie\beta_i\beta_0F^{ij}\pi_j\varsigma \\
&= -(\vec{\pi})^2\vec{\alpha}.\vec{\pi}\varsigma - 2ie\ \underbrace{\beta_i\beta_0F^{ij}\pi_j}_{=-\vec{B}.(\vec{\beta}\times\vec{\pi})\beta_0}\ \varsigma - ie\underbrace{\beta_i\beta_0(\hat{p}_jF^{ij})}_{=-(\vec{\beta}\times\hat{\vec{p}}).\vec{B}\beta_0}\varsigma \\
&= -(\vec{\pi})^2\vec{\alpha}.\vec{\pi}\varsigma + 2ie\vec{B}.(\vec{\beta}\times\vec{\pi})\beta_0\varsigma + ie((\vec{\beta}\times\hat{\vec{p}}).\vec{B})\beta_0\varsigma,
\end{aligned}
$$

onde, no último termo, o operador $\hat{\vec{p}}$ atua somente sobre $\vec{B}$.

Logo, substituindo na expressão para o comutador anterior,

$$
\begin{aligned}
[M,[M,\vec{\alpha}.\vec{\pi}]] &= \frac{1}{m^2}(\vec{\pi})^2\vec{\alpha}.\vec{\pi}\underbrace{-2i\frac{e}{m^2}\vec{B}.(\vec{\beta}\times\vec{\pi})\beta_0 - i\frac{e}{m^2}((\vec{\beta}\times\hat{\vec{p}}).\vec{B})\beta_0 -} \\
&\quad \underbrace{-i\frac{e}{m^2}[\vec{\beta}.\vec{\pi},\vec{H}.(\vec{\beta}\times\vec{\alpha})]}_{=R'''} \\
&= \frac{1}{m^2}(\vec{\pi})^2\vec{\alpha}.\vec{\pi} + R^{'''}. \qquad (3.57)
\end{aligned}
$$

De posse das relações (3.45)-(3.57), vamos analisar a hamiltoniana nesta nova representação, desenvolvendo os termos da expansão em série (3.44),

$$
H^{'} = H(t) + i[M,m\beta_0] + ie[M,\varphi] + i[M,\vec{\alpha}.\vec{\pi}] + \frac{e}{m}[M,\vec{E}.\vec{\beta}\beta_0^2] +
$$

$$
+i[M,-\frac{ie}{2m}\vec{H}.(\vec{\beta}\times\vec{\alpha}) - \frac{e}{2m}\beta_0\vec{B}.\vec{S}] - \frac{1}{2}[M,[M,m\beta_0]] - \frac{e}{2}[M,[M,\varphi]] -
$$

$$
-\frac{1}{2}[M,[M,\vec{\alpha}.\vec{\pi}]] - \frac{i}{6}[M,[M,[M,m\beta_0]]] - \dot{M} - \frac{i}{2}[M,\dot{M}],
$$

$$
H^{'} = m\beta_0 + e\varphi + \vec{\alpha}.\vec{\pi} - \frac{ie}{m}\vec{E}.\vec{\beta}\beta_0^2 - \frac{ie}{2m}\vec{B}.(\vec{\beta}\times\vec{\alpha}) - \frac{e}{2m}\beta_0\vec{B}.\vec{S} - \vec{\alpha}.\vec{\pi} - \frac{ie}{m}\vec{\beta}.\vec{\nabla}\varphi + \frac{1}{m}\beta_0(\vec{\pi})^2 +
$$

$$
+i\frac{e}{m}\vec{B}.(\vec{\beta}\times\vec{\alpha}) - \frac{e}{m^2}\vec{S}.(\hat{\vec{p}}\times\vec{E} - \vec{E}\times\hat{\vec{p}})\beta_0^2 + i\frac{e}{m^2}(\vec{\beta}.\vec{E})(\vec{\beta}.\vec{\pi})(1-2\beta_0^2) + \frac{e}{m}R +
$$

$$
+i[M,-\frac{ie}{2m}\vec{B}.(\vec{\beta}\times\vec{\alpha}) - \frac{e}{2m}\beta_0\vec{B}.\vec{S}] - \frac{1}{2m}\beta_0(\vec{\pi})^2 - \frac{ie}{2m}\vec{B}.(\vec{\beta}\times\vec{\alpha}) + \frac{e}{2m^2}\vec{S}.(\hat{\vec{p}}\times\vec{\nabla}\varphi - \vec{\nabla}\varphi\times\hat{\vec{p}}) -
$$

$$
-\frac{e}{2}R^{''} - \frac{1}{2m^2}(\vec{\pi})^2\vec{\alpha}.\vec{\pi} - \frac{1}{2}R^{'''} - \frac{i}{6}[M,[M,[M,m\beta_0]]] + \frac{i}{m}\vec{\beta}.\dot{\vec{\pi}} - \frac{e}{2m^2}\vec{S}.(\vec{\pi}\times\dot{\vec{A}} - \dot{\vec{A}}\times\hat{\vec{p}}) - \frac{i}{2}R^{'}.
$$

Observemos que o operador $\vec{\alpha}.\vec{\pi}$ é eliminado nesta representação (até ordem $1/m^2$), como desejávamos. Agora, reordenando os termos de modo a evidenciar a interpretação física subjacente a cada um deles, obtemos

$$H^{'} = m\beta_0 + \frac{1}{2m}(\vec{\pi})^2(\beta_0 - \frac{1}{m}\vec{\alpha}.\vec{\pi}) + e\varphi - \frac{e}{2m}\beta_0(\vec{S}.\vec{B}) - \frac{e}{2m^2}\vec{S}.(\hat{\vec{p}}\times\vec{E} - \vec{E}\times\hat{\vec{p}})(1+2\beta_0^2)+$$
$$+i\frac{e}{m^2}(\vec{E}.\vec{\beta})\left(\vec{\beta}.\vec{\pi}(1-2\beta_0^2) - m\beta_0^2\right) + \left(\frac{i}{m}\vec{\beta}.\dot{\vec{\pi}} - \frac{e}{m^2}\vec{S}.(\hat{\vec{p}}\times\dot{\vec{A}} - \dot{\vec{A}}\times\hat{\vec{p}})+\right.$$
$$+\frac{e^2}{2m^2}\vec{S}.(\vec{A}\times\dot{\vec{A}}) + i[M, -\frac{ie}{2m}\vec{B}.(\vec{\beta}\times\vec{\alpha}) - \frac{e}{2m}\beta_0\vec{B}.\vec{S}] - \frac{i}{6}[M,[M,[M,m\beta_0]]] -$$
$$\left. -i\frac{e}{m}\vec{\beta}.\vec{\nabla}\varphi + \frac{e}{m}R - \frac{i}{2}R^{'} - \frac{e}{2}R^{''} - \frac{1}{2}R^{'''}\right). \qquad (3.58)$$

Os dois primeiros termos de (3.58) detêm as **informações cinemáticas** do sistema. O par de termos seguinte corresponde à **interação eletrostática** e ao **acoplamento dipolar magnético**. O quinto termo representa a **interação spin-órbita** com o campo elétrico externo e o sexto relaciona-se ao **termo de Darwin** (efeito *zitterbewegung*, discutido na seção 3.2).

Os termos remanescentes, não discutidos acima (que compreendem o conjunto de operadores a partir do sétimo termo, inclusive), correspondem a correções ao acoplamento com o campo externo, até ordem $1/m^2$, que não apresentam interpretação física concreta em termos das interações usualmente presentes no regime de baixas energias que analisamos.

Concluímos este capítulo remetendo o leitor ao artigo citado na referência [14], em que se desenvolve, entre outros tópicos, a análise do limite não-relativístico da teoria de Weinberg, no caso particular de bósons de spin 1, através de um procedimento muito similar a FW. Neste caso, os autores introduzem a interação da partícula de spin 1 com um campo eletromagnético externo de forma um pouco mais abrangente do que o acoplamento mínimo que discutimos neste capítulo, incluindo também correções referentes à interação quadrupolar com o campo elétrico externo, por exemplo. O detalhe interessante do referido artigo consiste no fato de que a transformação da hamiltoniana para uma "representação diagonal" não é executada através de um operador unitário, pois a integral invariante do sistema não é unitária, de modo que os autores utilizam um procedimento alternativo, porém análogo, para eliminar os termos ímpares. Por este motivo, entendemos que a leitura deste trabalho complementa a revisão referente à proposta de Foldy-Wouthuysen que apresentamos neste capítulo e ilustra a aplicação do formalismo 2(2J+1) de Weinberg, em um cenário particular, com interpretação física concreta.

3.5 Referências do Capítulo

As referências pertinentes a este capítulo são destacadas a seguir:

[12] Foldy, L. L.; Wouthuysen, S. A. *"On the Dirac Theory of Spin 1/2 Particles and Its Non-Relativistic Limit"*. Phys. Rev. **78**, p. 29, 1950.

[13] Moshin, P. Y.; Tomazelli, J. L. *"On the Non-Relativistic Limit of Linear Wave Equations for Zero and Unity Spin Particles"*. Modern Physics Letters A **23**, p. 129, 2008.

[14] Shay, D.; Good, R. H. *"Spin-One Particle in an External Electromagnetic Field"*. Phys. Rev. **179**, p. 1410, 1969.

[15] Sesma, J.; Biel, J.; Garrido, L. M. *"Relation between Generalized Foldy--Wouthuysen and Lorentz Transformations"*. Am. Jour. Phys. **32**, p. 559, 1964.

[34] Bjorken, J. D.; Drell, S. D. *"Relativistic Quantum Mechanics"*. McGraw--Hill, 1964.

[35] Itzykson, C.; Zuber, J. *"Quantum Field Theory"*. McGraw-Hill, 1980.

Capítulo 4

A Equação de Proca-
-Majorana-Oppenheimer (PMO)

Neste capítulo, apresentaremos a equação linear para o campo eletromagnético proposta por Majorana e Oppenheimer na década de trinta e discutiremos a equação PMO, que construímos originalmente neste trabalho segundo a proposta de Majorana.

4.1 A Equação de Majorana para o Campo Eletromagnético

Majorana[1] e Oppenheimer[2] formularam, de forma independente, uma **equação linear de primeira ordem** para o campo eletromagnético análoga à equação de Dirac:

$$\alpha^{\mu}\hat{p}_{\mu}\psi = 0. \tag{4.1}$$

[1]Este trabalho de Majorana não foi publicado na época, mas manuscritos de sua obra científica, escritos entre 1928 e 1932 e recentemente divulgados, apresentam os cálculos e ideias nele contidas.

[2]Esta proposta foi apresentada por Oppenheimer em seu artigo referente à teoria quântica da luz [16].

Esta equação foi derivada (por Majorana) a partir das **equações homogêneas de Maxwell** em termos do "spinor"

$$\psi = \begin{pmatrix} B^1 - iE^1 \\ B^2 - iE^2 \\ B^3 - iE^3 \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

onde B^i e E^i são as componentes dos campos magnético e elétrico, respectivamente. Observemos que a "densidade de probabilidade" $|\psi|^2$ é expressa por $E^2 + B^2$, que corresponde precisamente à **densidade de energia associada ao campo eletromagnético**, conferindo uma **interpretação física** transparente à "amplitude de probabilidade" ψ.

As matrizes α_μ presentes em (4.1) são expressas por

$$\alpha^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.3}$$

$$\alpha^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.4}$$

$$\alpha^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.5}$$

$$\alpha^3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

Pode-se mostrar, efetuando simplesmente os produtos, que estas matrizes α^i satisfazem a **relação de momento angular**

$$[\alpha^i, \alpha^j] = i\epsilon^{ijk}\alpha^k. \tag{4.7}$$

De posse dessas informações, verifiquemos explicitamente que as equações de Maxwell homogêneas são efetivamente recuperadas a partir de (4.1) (com o auxílio de uma condição subsidiária). Com efeito, desenvolvendo esta equação, obtemos o seguinte sistema

$$\begin{pmatrix} \partial_t(iB^1 + E^1) + \partial_2(-B^3 + iE^3) + \partial_3(B^2 - iE^2) \\ \partial_t(iB^2 + E^2) + \partial_1(B^3 - iE^3) + \partial_3(-B^1 + iE^1) \\ \partial_t(iB^3 + E^3) + \partial_1(-B^2 + iE^2) + \partial_2(B^1 - iE^1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de modo que as leis de **Faraday** e **Ampère-Maxwell** seguem naturalmente, separando as partes real e imaginária em cada componente do sistema acima[3]:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{B} &= \partial_t \vec{E} \quad \text{(lei de Ampère-Maxwell)}, \\
\vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\partial_t \vec{B} \quad \text{(lei de Faraday)}.
\end{aligned}$$

Agora, para assegurarmos as leis de **Gauss** e da ausência de **monopólos magnéticos**, precisamos definir o operador

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} \hat{p}^1 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{p}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{p}^3 \end{pmatrix}$$

e exigir uma **condição de transversalidade**, expressa por

$$\hat{P}\psi = 0,$$

ou, em componentes,

$$\hat{\vec{p}}.\vec{\psi} = 0. \tag{4.8}$$

Dessa forma, verifica-se claramente que a condição (4.8) impõe as relações

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}.\vec{E} &= 0 \quad \text{(lei de Gauss)}, \\
\vec{\nabla}.\vec{B} &= 0 \quad \text{(ausência de monopólos magnéticos)}.
\end{aligned}$$

Podemos definir também o **operador de spin** da teoria da seguinte maneira:

$$\vec{S} = -i\vec{\alpha} \times \vec{\alpha},$$

ou, em componentes,

$$\begin{aligned}
S^k &= -i\epsilon^{klm}\alpha^l\alpha^m \\
&= -\frac{i}{2}(\epsilon^{klm}\alpha^l\alpha^m + \epsilon^{kml}\alpha^m\alpha^l) \\
&= -\frac{i}{2}\epsilon^{klm}\underbrace{[\alpha^l, \alpha^m]}_{=i\epsilon^{lmn}\alpha^n} \\
&= \frac{1}{2}\underbrace{\epsilon^{klm}\epsilon^{lmn}}_{=2\delta^k{}_n}\alpha^n \\
&= \alpha^k.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

[3] Devemos relembrar que estamos adotando aqui o **sistema de unidades de Heavyside--Lorentz** composto com o **sistema de unidades naturais**.

Assim, os autovalores das matrizes α^i são ± 1 e 0 (este último com multiplicidade 2), de modo que o operador de spin apresenta autovalores apropriados à descrição do fóton, como uma partícula de spin 1.

Porém, com o intuito de garantir a legitimidade do conteúdo de partícula desta teoria, precisamos também examinar o **operador de spin quadrático** $(\vec{S})^2$:

$$\begin{aligned}(\vec{S})^2 &= (\alpha^1)^2 + (\alpha^2)^2 + (\alpha^3)^2 \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\vec{S})^2 \psi = 2\psi. \tag{4.10}$$

A equação acima assegura que o campo ψ é autovetor do operador de spin quadrático com autovalor 2, em acordo com a relação $(\vec{S})^2\psi = s(s+1)\psi$, no caso particular em que $s = 1$. Portanto, estes resultados evidenciam que o operador de spin expresso em (4.9) é bem definido e que a teoria de Majorana--Oppenheimer é adequada para descrevermos partículas de spin 1, como o fóton.

Prosseguindo em direção à quantização do campo, pode-se definir o spinor adjunto $\bar{\psi}$ e construir o tensor energia-momento do sistema. Entretanto, como este procedimento foge ao escopo de nossa proposta, remetemos aos artigos [17] e [18], onde este estudo é efetuado de maneira sistemática, para reservarmos espaço em favor da análise que pretendemos fazer neste capítulo.

Desta forma, a construção elaborada por Majorana e Oppenheimer com base na teoria de Dirac para o elétron recupera efetivamente toda informação relativa ao campo eletromagnético e constitui um cenário elegante para abordarmos a eletrodinâmica quântica (QED), sendo, até certo ponto, intuitivo no sentido em que o campo ψ é definido em termos dos campos elétrico e magnético (em contraponto à abordagem tradicional em que a QED é construída em termos do quadripotencial)[4].

A seguir, apresentaremos uma "versão estendida" da formulação MO que nos permite recuperar inclusive as **equações de Maxwell não homogêneas** e exclui a exigência da condição de transversalidade.

[4]Convidamos o leitor interessado a ler também o artigo [19], de cunho especulativo, que versa a respeito da construção de uma equação para um campo não abeliano carregado, em analogia à teoria de Majorana e Oppenheimer para o campo eletromagnético, investigando uma possível abordagem para a cromodinâmica quântica (QCD).

Para isso, precisamos redefinir o spinor (4.2),

$$\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ B^1 - iE^1 \\ B^2 - iE^2 \\ B^3 - iE^3 \end{pmatrix}, \tag{4.11}$$

e construir um "spinor fonte"

$$\Phi = \begin{pmatrix} \rho \\ j^1 \\ j^2 \\ j^3 \end{pmatrix} \quad \text{(spinor fonte).} \tag{4.12}$$

Dessa maneira, a equação (4.1) na presença de fontes é reescrita como

$$\alpha^\mu \hat{p}_\mu \psi = -\Phi, \tag{4.13}$$

onde as matrizes α^μ, de dimensão 4, são definidas como

$$\alpha^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.14}$$

$$\alpha^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.15}$$

$$\alpha^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.16}$$

$$\alpha^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.17}$$

Ressaltamos que existe uma arbitrariedade com relação aos elementos da primeira coluna das matrizes α^μ, relacionada à escolha do elemento nulo na primeira componente de ψ. De fato, verificaremos a seguir que as equações de Maxwell são recuperadas independentemente destes elementos; porém, para preservar a propriedade de hermiticidade exibida pelas matrizes 3×3 de Majorana e pelas matrizes α^μ de Dirac, os elementos indeterminados foram escolhidos de forma conveniente.

Desenvolvendo os produtos, podemos mostrar que as matrizes α^i $(i = 1, 2, 3)$ definidas acima satisfazem a relação algébrica

$$\alpha^i \alpha^j = i\epsilon_{ijk}\alpha^k + \delta^i{}_j, \tag{4.18}$$

de forma que a **relação de anticomutação** satisfeita por estas matrizes é expressa por

$$\left\{\alpha^i, \alpha^j\right\} = 2\delta^i{}_j. \tag{4.19}$$

Levando em consideração a matriz $\alpha^0 = I$, temos também a seguinte **relação de comutação**

$$[\alpha^0, \alpha^i] = 0. \tag{4.20}$$

Verifiquemos, então, que a equação linear (4.13) contém efetivamente a informação relativa às equações de Maxwell <u>na presença de fontes</u>. Com efeito, desenvolvendo (4.13), encontramos o seguinte sistema:

$$\begin{pmatrix} -i(\partial_1 B^1 + \partial_2 B^2 + \partial_3 B^3) - (\partial_1 E^1 + \partial_2 E^2 + \partial_3 E^3) \\ i(\partial_t B^1 + \partial_2 E^3 - \partial_3 E^2) + (\partial_t E^1 - \partial_2 B^3 + \partial_3 B^2) \\ i(\partial_t B^2 - \partial_1 E^3 + \partial_3 E^1) + (\partial_t E^2 + \partial_1 B^3 - \partial_3 B^1) \\ i(\partial_t B^3 + \partial_1 E^2 - \partial_2 E^1) + (\partial_t E^3 - \partial_1 B^2 + \partial_2 B^1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho \\ -j^1 \\ -j^2 \\ -j^3 \end{pmatrix}.$$

A primeira equação evidencia as leis de **Gauss** e de ausência de **monopólos magnéticos** (prescindindo, portanto, da condição de transversalidade):

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}.\vec{E} &= \rho \quad \text{(lei de Gauss)}, \\ \vec{\nabla}.\vec{B} &= 0 \quad \text{(ausência de monopólos magnéticos)}. \end{aligned}$$

As três últimas equações manifestam as leis de **Faraday** e **Ampère--Maxwell**:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \vec{j} + \partial_t \vec{E} \quad \text{(lei de Ampère-Maxwell)}, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\partial_t \vec{B} \quad \text{(lei de Faraday)}. \end{aligned}$$

Pode-se ainda extrair mais informações de (4.13) multiplicando-a à esquerda por $\breve{\alpha}^\mu \hat{p}_\mu$, onde a matriz $\breve{\alpha}^\mu$ é definida por $\breve{\alpha}^\mu = -\alpha^\nu g^{\mu\nu}$:

$$-\breve{\alpha}^\beta \hat{p}_\beta \Phi = \breve{\alpha}^\beta \hat{p}_\beta \alpha^\mu \hat{p}_\mu \psi$$

$$
\begin{aligned}
&= -g^{\beta\nu}\alpha^{\nu}\hat{p}_{\beta}\alpha^{\mu}\hat{p}_{\mu}\psi \\
&= -g^{0\nu}\alpha^{\nu}\hat{p}_{0}\alpha^{0}\hat{p}_{0}\psi - g^{0\nu}\alpha^{\nu}\hat{p}_{0}\alpha^{i}\hat{p}_{i}\psi - g^{j\nu}\alpha^{\nu}\hat{p}_{j}\alpha^{0}\hat{p}_{0}\psi - g^{j\nu}\alpha^{\nu}\hat{p}_{j}\alpha^{i}\hat{p}_{i}\psi \\
&= -(\alpha^{0})^{2}\hat{p}_{0}\hat{p}_{0}\psi \underbrace{-\alpha^{0}\alpha^{i}\hat{p}_{0}\hat{p}_{i}\psi + \alpha^{j}\alpha^{0}\hat{p}_{j}\hat{p}_{0}\psi}_{=[\alpha^{i},\alpha^{0}]\hat{p}_{i}\hat{p}_{0}\psi=0} + \alpha^{j}\alpha^{i}\hat{p}_{j}\hat{p}_{i}\psi \\
&= -\hat{p}_{0}\hat{p}_{0}\psi + \alpha^{j}\alpha^{i}\hat{p}_{j}\hat{p}_{i}\psi,
\end{aligned}
$$

em que manipulamos, na penúltima expressão, os índices mudos do segundo e do terceiro termo e utilizamos (4.20) (bem como o fato de que os operadores de quadrimomento comutam entre si e que as matrizes α^{μ} estão normalizadas à unidade) para obter a última expressão. Simetrizando o último termo e usando (4.19), resulta

$$
\begin{aligned}
-\breve{\alpha}^{\beta}\hat{p}_{\beta}\Phi &= -\hat{p}_{0}\hat{p}_{0}\psi + \frac{1}{2}\underbrace{(\alpha^{j}\alpha^{i} + \alpha^{i}\alpha^{j})}_{=2\delta^{j}{}_{i}}\hat{p}_{j}\hat{p}_{i}\psi \\
&= -\hat{p}_{0}\hat{p}_{0}\psi + \hat{p}_{j}\hat{p}_{j}\psi \\
&= (\partial_t^2 - \nabla^2)\psi
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow (\partial_t^2 - \nabla^2)\psi = -\breve{\alpha}^{\beta}\hat{p}_{\beta}\Phi. \tag{4.21}
$$

Esta última relação corresponde à **equação de onda** para os campos elétrico e magnético e detém ainda a informação referente à **equação de continuidade**. De fato, executando os produtos em (4.21), obtemos o sistema de equações

$$
\begin{pmatrix}
0 \\
(\partial_t^2 - \nabla^2)B^1 - i(\partial_t^2 - \nabla^2)E^1 \\
(\partial_t^2 - \nabla^2)B^2 - i(\partial_t^2 - \nabla^2)E^2 \\
(\partial_t^2 - \nabla^2)B^3 - i(\partial_t^2 - \nabla^2)E^3
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
-i(\partial_t\rho + \vec{\nabla}.\vec{j}) \\
-(\partial_2 j^3 - \partial_3 j^2) - i(\partial_t j^1 + \partial_1\rho) \\
-(\partial_3 j^1 - \partial_1 j^3) - i(\partial_t j^2 + \partial_2\rho) \\
-(\partial_1 j^2 - \partial_2 j^1) - i(\partial_t j^3 + \partial_3\rho)
\end{pmatrix}.
$$

Assim, seguem naturalmente as relações:

$$
\begin{aligned}
\partial_t\rho + \vec{\nabla}.\vec{j} &= 0 \quad \text{(equação da continuidade)}, \\
(\partial_t^2 - \nabla^2)\vec{B} &= -\vec{\nabla}\times\vec{j}, \\
(\partial_t^2 - \nabla^2)\vec{E} &= \partial_t\vec{j} + \vec{\nabla}\rho.
\end{aligned}
$$

Agora, embora esta "formulação estendida" da proposta de Majorana e Oppenheimer para o campo eletromagnético nos permita recuperar as equações de Maxwell não homogêneas e também as equações de onda e da continuidade sem a necessidade de condições subsidiárias, esta abordagem obscurece o conteúdo de partícula da teoria pois, devido à extensão da dimensão das matrizes e à incorporação de novos vínculos associados às equações de movimento (neste caso, as equações de Maxwell com fontes), a álgebra dessas matrizes é modificada em relação àquela da teoria original 3×3, de modo que o operador de spin (4.9), por exemplo, não está bem definido nesta versão estendida, tendo em vista que a relação $(\vec{S})^2\psi = 2\psi$ não é satisfeita.

Em analogia a esta formulação para o campo eletromagnético, buscamos construir uma equação para o **campo de Proca**, ampliando as dimensões do "spinor" ψ para acomodar os termos de massa. Esta proposta, que será nosso objeto de estudo na próxima seção, mesmo que a princípio ingênua, fornece uma estrutura algébrica convidativa e nos permite definir um operador de spin consistente (a partir de relações de comutação), embora invoque uma interpretação física sutil.

Concluindo esta seção, propomos ao leitor o estudo do artigo destacado na referência [20], bem como dos artigos de revisão [21] e [22] relacionados com o último. Estes trabalhos examinam o formalismo pioneiro de Majorana, desenvolvido com o intuito de descrever partículas de spins arbitrários através de **representações de dimensão infinita do grupo de Poincaré**. Seu estudo (principalmente do artigo [21], que analisa tal proposta sob uma perspectiva atual) complementa de forma substancial a revisão referente à teoria de spins altos, que consiste no principal objetivo desta dissertação.

4.2 A Equação PMO

Nesta seção construiremos uma equação similar a (4.13) para o **campo de Proca**, a qual será designada, por simplicidade, **equação PMO** (Proca-Majorana-Oppenheimer). Redefinimos então os **"spinores" de campo** (ψ) **e fonte** (Φ), expressos em (4.11) e (4.12), respectivamente, da seguinte maneira:

$$\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ B^1 - iE^1 \\ B^2 - iE^2 \\ B^3 - iE^3 \\ -m\varphi \\ -mA^1 \\ -mA^2 \\ -mA^3 \end{pmatrix}, \tag{4.22}$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \rho \\ j^1 \\ j^2 \\ j^3 \end{pmatrix}. \tag{4.23}$$

Para introduzirmos o termo de massa na equação (4.13), propomos uma relação similar, expressa por

$$(\alpha^\mu \hat{p}_\mu - m)\psi = \Phi, \tag{4.24}$$

onde as matrizes α^μ de <u>ordem 8</u> são definidas a seguir:

$$\alpha^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.25}$$

$$\alpha^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.26}$$

$$\alpha^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.27}$$

$$\alpha^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.28}$$

Novamente, existe uma arbitrariedade com relação à primeira coluna das matrizes α^μ, devido à escolha do elemento nulo na primeira componente de ψ. Suprimindo a primeira coluna de cada uma dessas matrizes, observa-se que a matriz α^0 exibe uma estrutura **simétrica**, ao passo que as matrizes α^i apresentam estrutura **anti-hermitiana**. Portanto, com o propósito de preservar estas simetrias, escolhemos os elementos da primeira coluna de forma apropriada.

De posse das definições apresentadas acima, podemos verificar que as equações de Proca (2.17) (com $G^{\mu\nu} = F^{\mu\nu}$) são recuperadas a partir de (4.24). Com efeito, desenvolvendo esta equação obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{pmatrix} -im(\partial_t\varphi + \partial_1 A^1 + \partial_2 A^2 + \partial_3 A^3) \\ im(E^1 + \partial_t A^1 + \partial_1\varphi) + m(\partial_2 A^3 - \partial_3 A^2 - B^1) \\ im(E^2 + \partial_t A^2 + \partial_2\varphi) + m(\partial_3 A^1 - \partial_1 A^3 - B^2) \\ im(E^3 + \partial_t A^3 + \partial_3\varphi) + m(\partial_1 A^2 - \partial_2 A^1 - B^3) \\ i(\partial_1 B^1 + \partial_2 B^2 + \partial_3 B^3) + (\partial_1 E^1 + \partial_2 E^2 + \partial_3 E^3 + m^2\varphi) \\ i(\partial_3 E^2 - \partial_2 E^3 - \partial_t B^1) + (\partial_2 B^3 - \partial_3 B^2 - \partial_t E^1 + m^2 A^1) \\ i(\partial_1 E^3 - \partial_3 E^1 - \partial_t B^2 + m^2 A^2) + (\partial_3 B^1 - \partial_1 B^3 - \partial_t E^2) \\ i(\partial_2 E^1 - \partial_1 E^2 - \partial_t B^3 + m^2 A^3) + (\partial_1 B^2 - \partial_2 B^1 - \partial_t E^3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \rho \\ j^1 \\ j^2 \\ j^3 \end{pmatrix}.$$

A primeira relação do sistema acima corresponde à **condição de calibre**, que assegura a conservação da carga na teoria de Proca, sendo o calibre adequado para efetuarmos o procedimento de segunda quantização,

$$\partial_t\varphi + \vec{\nabla}.\vec{A} = 0.$$

As linhas 2, 3 e 4 do sistema definem os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ em termos dos potenciais,

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \partial_t\vec{A},$$
$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}.$$

A quinta linha corresponde às leis de **Gauss** e da ausência de **monopólos magnéticos** da teoria de Proca,

$$\vec{\nabla}.\vec{E} + m^2\varphi = \rho,$$

$$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0;$$

já as três últimas, recuperam as leis de **Faraday** e **Ampère-Maxwell** para a teoria do campo eletromagnético massivo,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B},$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} + m^2 \vec{A} = \vec{j} + \partial_t \vec{E}.$$

Observemos ainda que, em <u>nível de equações de movimento</u>, se fizermos $m = 0$ em (4.22) e (4.24) recuperamos a informação referente à equação de Majorana-Oppenheimer estendida (4.13), conforme esperado.

4.2.1 Propriedades das Matrizes α^μ

Conforme mencionado anteoriormente, a matriz α^0 é <u>hermitiana</u> (por ser real e simétrica) e as matrizes α^i são <u>anti-hermitianas</u> (simetrias semelhantes às exibidas pelas matrizes γ^μ de Dirac).

Desenvolvendo os produtos necessários, mostra-se que as matrizes α^i satisfazem a seguinte **relação algébrica**:

$$\alpha^i \alpha^j = -\delta^i{}_j + \epsilon^{ijk} \Theta \alpha^k, \tag{4.29}$$

onde Θ é a matriz definida por

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.30}$$

Pode-se ainda escrever uma expressão para a matriz Θ acima em termos das matrizes α^i, multiplicando (4.29) à direita por α^l

$$\alpha^i \alpha^j \alpha^l = -\delta^i{}_j \alpha^l + \epsilon^{ijk} \Theta \alpha^k \alpha^l,$$

de forma que, para o último termo não se anular, os índices i, j e k devem ser diferentes. Escolhendo $(i, j, k) = (1, 2, 3)$, respectivamente, e $l = 3$, temos

$$\alpha^1 \alpha^2 \alpha^3 = \epsilon^{123} \Theta \underbrace{(\alpha^3)^2}_{=-1}$$

$$\Rightarrow \Theta = -\alpha^1\alpha^2\alpha^3. \tag{4.31}$$

Examinando também a matriz α^0, verifica-se a "relação de normalização"

$$(\alpha^0)^2 = 1, \tag{4.32}$$

e a seguinte relação de anticomutação:

$$\left\{\alpha^0, \alpha^i\right\} = 0. \tag{4.33}$$

A partir de (4.29), (4.32) e (4.33), resulta que as matrizes α^μ, assim como as matrizes γ^μ de Dirac, satisfazem a **álgebra de Clifford**:

$$\{\alpha^\mu, \alpha^\nu\} = 2g^{\mu\nu}. \tag{4.34}$$

A matriz α^0 exibe uma **estrutura algébrica simplética**, como se pode verificar, definindo a matriz

$$\Omega = i\sigma_2^{(8\times 8)} = \begin{pmatrix} 0_{4\times 4} & 1_{4\times 4} \\ -1_{4\times 4} & 0_{4\times 4} \end{pmatrix}. \tag{4.35}$$

Assim, efetuando simplesmente os produtos, obtemos

$$(\alpha^0)^T = \Omega\alpha^0\Omega, \tag{4.36}$$

o que define uma estrutura simplética.

Por sua vez, as matrizes α^i satisfazem uma álgebra **antissimplética**,

$$(\alpha^i)^T = -\Omega\alpha^i\Omega. \tag{4.37}$$

Analisando um pouco mais detalhadamente a matriz Θ, obtemos a "condição de normalização" e as relações de comutação expressas abaixo, com o auxílio de (4.33) e (4.34):

$$\begin{aligned} \Theta^2 &= (-\alpha^1\alpha^2\alpha^3)^2 \\ &= \alpha^1\alpha^2\alpha^3\alpha^1\alpha^2\alpha^3 \\ &= -(\alpha^1)^2(\alpha^2)^2(\alpha^3)^2 \\ &= 1, \end{aligned} \tag{4.38}$$

$$\begin{aligned} [\alpha^i, \Theta] &= -\alpha^i\alpha^1\alpha^2\alpha^3 + \alpha^1\alpha^2\alpha^3\alpha^i \\ &= -(-\alpha^1\alpha^i + 2g^{i1})\alpha^2\alpha^3 + \alpha^1\alpha^2\alpha^3\alpha^i \\ &= \alpha^1(-\alpha^2\alpha^i + 2g^{i2})\alpha^3 - 2g^{i1}\alpha^2\alpha^3 + \alpha^1\alpha^2\alpha^3\alpha^i \\ &= -\alpha^1\alpha^2(-\alpha^3\alpha^i + 2g^{i3}) + 2g^{i2}\alpha^1\alpha^3 - 2g^{i1}\alpha^2\alpha^3 + \alpha^1\alpha^2\alpha^3\alpha^i \\ &= 2\alpha^1\alpha^2\alpha^3\alpha^i - 2g^{i3}\alpha^1\alpha^2 + 2g^{i2}\alpha^1\alpha^3 - 2g^{i1}\alpha^2\alpha^3 \\ &= 2\alpha^1\alpha^2\alpha^3\alpha^i + 2\delta^i{}_3\alpha^1\alpha^2 - 2\delta^i{}_2\alpha^1\alpha^3 + 2\delta^i{}_1\alpha^2\alpha^3, \end{aligned}$$

de modo que, particularizando para os casos $i = 1, 2, 3$ individualmente, tem-se (novamente com o auxílio de (4.34))

$$[\alpha^i, \Theta] = 0. \tag{4.39}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\{\alpha^0, \Theta\} &= -\alpha^0\alpha^1\alpha^2\alpha^3 - \alpha^1\alpha^2\alpha^3\alpha^0 \\ &= \alpha^1\alpha^2\alpha^3\alpha^0 - \alpha^1\alpha^2\alpha^3\alpha^0 \\ &= 0.\end{aligned} \tag{4.40}$$

Com base em (4.36), observa-se também que a matriz Θ satisfaz a álgebra simplética:

$$\begin{aligned}\Omega\Theta\Omega &= -\Omega\alpha^1\alpha^2\alpha^3\Omega \\ &= -\Omega\alpha^1\underbrace{\Omega^{-1}}_{=-\Omega}\Omega\alpha^2\underbrace{\Omega^{-1}}_{=-\Omega}\Omega\alpha^3\Omega \\ &= (\alpha^1)^T(\alpha^2)^T(\alpha^3)^T \\ &= (\underbrace{\alpha^3\alpha^2\alpha^1}_{=-\alpha^1\alpha^2\alpha^3})^T \\ &= \Theta^T,\end{aligned} \tag{4.41}$$

em que usamos (4.34) na penúltima passagem.

Por fim, para encerrarmos esta análise da estrutura algébrica subjacente à equação PMO, podemos ainda examinar as propriedades da composição das matrizes Θ e α^μ. Dessa forma, à luz de (4.29) e (4.39), temos

$$\begin{aligned}\Theta\alpha^i\Theta\alpha^j &= \underbrace{\Theta^2}_{=1}\alpha^i\alpha^j \\ &= -\delta^i{}_j + \epsilon^{ijk}\Theta\alpha^k.\end{aligned} \tag{4.42}$$

A partir da relação algébrica acima, verifica-se a validade da relação de comutação a seguir

$$[\Theta\alpha^i, \Theta\alpha^j] = 2\epsilon^{ijk}\Theta\alpha^k. \tag{4.43}$$

Analogamente, considerando agora o produto envolvendo a matriz α^0 obtemos, com o auxílio de (4.33), (4.39) e (4.40),

$$\begin{aligned}[\Theta\alpha^0, \Theta\alpha^i] &= \Theta\alpha^0\Theta\alpha^i - \Theta\alpha^i\Theta\alpha^0 \\ &= -(\Theta)^2\alpha^0\alpha^i - (\Theta)^2\alpha^i\alpha^0 \\ &= -(\alpha^0\alpha^i + \alpha^i\alpha^0) \\ &= 0.\end{aligned} \tag{4.44}$$

Notemos ainda que

$$\begin{aligned}
\Omega\Theta\alpha^0\Omega &= \Omega\Theta\underbrace{\Omega^{-1}}_{=-\Omega}\Omega\alpha^0\Omega \\
&= -(\Theta)^T(\alpha^0)^T \\
&= -(\underbrace{\alpha^0\Theta}_{=-\Theta\alpha^0})^T \\
&= (\Theta\alpha^0)^T,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Omega\Theta\alpha^i\Omega &= \Omega\Theta\underbrace{\Omega^{-1}}_{=-\Omega}\Omega\alpha^i\Omega \\
&= (\Theta)^T(\alpha^i)^T \\
&= (\underbrace{\alpha^i\Theta}_{=\Theta\alpha^i})^T \\
&= (\Theta\alpha^i)^T.
\end{aligned}$$

Portanto, as matrizes $\Theta\alpha^\mu$ constituem os geradores de uma **álgebra simplética** Sp(8,C),

$$(\Theta\alpha^\mu)^T = \Omega\Theta\alpha^\mu\Omega. \tag{4.45}$$

4.2.2 Operador de Spin

Vamos analisar agora o conteúdo de partícula da teoria PMO através da construção de um **operador de spin**.

Examinando a álgebra das matrizes α^i expressa em (4.29), é notório que o operador de spin da teoria de Majorana e Oppenheimer, definido em (4.9), não é adequado à teoria PMO, pois a relação $(\vec{S})^2\psi = s(s+1)\psi$ não é satisfeita neste caso (tal como ocorre para a teoria MO estendida, conforme comentamos). De fato, definindo o operador de spin de acordo com (4.9), temos (em componentes)

$$\begin{aligned}
S^k &= -\frac{i}{2}\epsilon^{ijk}[\alpha^i,\alpha^j] \\
&= -i\epsilon^{ijk}\alpha^i\alpha^j \\
&= -i\epsilon^{ijk}(-\delta^i{}_j + \epsilon^{ijl}\Theta\alpha^l) \\
&= -i\underbrace{\epsilon^{ijk}\epsilon^{ijl}}_{=2\delta^k{}_l}\Theta\alpha^l \\
&= -2i\Theta\alpha^k.
\end{aligned}$$

Portanto, os autovalores deste operador correspondem a ± 2 (sendo que cada um possui multiplicidade 4); examinando o operador de spin quadrático, temos

$$\begin{aligned} (S^k)^2 &= -4(\Theta\alpha^k)^2 \\ &= -4(\Theta)^2(\alpha^k)^2 \\ &= 4I \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\vec{S})^2\psi = 12\psi.$$

Assim, este operador de spin não é consistente, pois apresenta autovalores associados a partículas de spin 2 (não correspondendo, portanto, à teoria de Proca), embora estejam ausentes as projeções ± 1 e 0. O operador de spin quadrático não condiz, também, com esta interpretação (neste caso, o operador $(\vec{S})^2$ deveria satisfazer a relação $(\vec{S})^2\psi = 6\psi$).

Na tentativa de recuperarmos os autovalores de spin 1, propusemos ainda o seguinte operador

$$\begin{aligned} S^k &= -\frac{1}{4}\epsilon^{ijk}[\alpha^i, \alpha^j] \\ &= -i\Theta\alpha^k. \end{aligned}$$

Entretanto, este operador de spin padece dos mesmos problemas que o anterior pois, embora apresente os autovalores ± 1 (cada um com multiplicidade 4, de modo que a projeção $s = 0$ está ausente), temos agora $(\vec{S})^2\psi = 3\psi$, em desacordo com a relação $(\vec{S})^2\psi = 2\psi$, que deve ser satisfeita para que o operador de spin seja compatível com $s = 1$.

Com base nas duas propostas anteriores, definimos um operador de spin consistente da seguinte forma:

$$\begin{aligned} S^k &= -\frac{1}{8}\epsilon^{ijk}[\alpha^i, \alpha^j] \\ &= -\frac{i}{2}\Theta\alpha^k. \end{aligned} \tag{4.46}$$

Este operador apresenta autovalores $\pm 1/2$ (cada um com multiplicidade 4), não havendo projeções ausentes neste caso, e o operador de spin quadrático satisfaz a relação $(\vec{S})^2\psi = 3/4\psi$, de modo que (4.46) é coerente com $s = 1/2$.

O fato do operador de spin que construímos estar associado a $s = 1/2$ indica que o **conteúdo de partícula** da teoria PMO é **fermiônico**, embora as equações de movimento de partida sejam as equações de Proca. Desta forma, a interpretação física desta teoria requer uma análise mais detalhada.

Na literatura, destacamos três artigos que acrescentam elementos importantes à presente discussão, versando a respeito do mapeamento entre soluções da equação de Dirac e soluções das equações de Proca e DKP. Estes artigos ajudam a esclarecer o cenário que encontramos para a equação PMO e nos permitem conjecturar a respeito de interpretações plausíveis para esta teoria. Recomendamos ao leitor os artigos [24], [25] e [26], citados nas referências.

Os dois últimos discorrem a respeito de uma representação da **equação de Breit**[5] para **dois férmions** de mesma massa em que se recuperam as equações de **Proca/Klein-Gordon** e **DKP** (spin 0 e 1, em ambos os casos), respectivamente. Em linhas gerais, os dois artigos verificam que é possível reduzirmos as equações de Dirac para dois férmions de mesma massa, que formam um estado ligado, a uma única equação que governa o comportamento dos estados coletivos de spin 0 e 1, utilizando representações adequadas das equações para os férmions (como, por exemplo, analisando o sistema no referencial do centro de massa).

O primeiro artigo discute este mesmo mapeamento entre campos de Dirac para estados ligados de férmions de mesma massa e campos bosônicos de spins 0 e 1, porém, sob a perspectiva da **invariância sob o grupo de Poincaré**[6].

Sendo assim, os trabalhos acima mencionados sugerem uma interpretação para a teoria PMO, em termos de uma equação que descreve um **estado composto por 2 férmions não interagentes** relativísticos de mesma massa (em acordo com o conteúdo de partícula fermiônico que verificamos através da análise do operador de spin (4.46)), de forma que o sistema de **equações de movimento** subjacentes (equações de Proca) governa a **evolução coletiva do sistema composto**.

Para finalizarmos o estudo da equação PMO que construímos neste capítulo, vamos examinar seu comportamento sob transformações FW e investigar seu limite não relativístico, quando incluímos a interação com um campo eletromagnético externo fraco.

4.3 FW para a Equação PMO Livre

Vamos analisar primeiramente a equação PMO livre, com o intuito de encontrarmos uma representação mais conveniente, através de transformações FW, seguindo o mesmo procedimento executado para as teorias de Dirac e

[5] A equação de Breit (referência [29]) descreve um estado ligado composto por dois férmions de Dirac, como o positrônio, por exemplo.

[6] Este artigo discute também o mapeamento entre soluções da equação de Dirac para $m = 0$ e soluções das equações de Maxwell homogêneas.

DKP, no capítulo 3. Assim, precisamos escrever (4.24) na **forma hamiltoniana**

$$
\begin{gathered}
(\alpha^0 \hat{p}_0 + \alpha^i \hat{p}_i - m)\psi = 0, \\
i\partial_t \psi = \underbrace{-i\alpha^0 \alpha^i \nabla_i}_{=\alpha^0 \vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}} \psi + m\alpha^0 \psi \\
\Rightarrow i\partial_t \psi = (\alpha^0 \vec{\alpha}.\hat{\vec{p}} + m\alpha^0)\psi. \qquad (4.47)
\end{gathered}
$$

Logo, a <u>hamiltoniana</u> fica expressa por

$$
H = \alpha^0 \vec{\alpha}.\hat{\vec{p}} + m\alpha^0. \qquad (4.48)
$$

Nosso objetivo consiste, então, em buscarmos uma nova representação para H em que o operador $\alpha^0 \vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}$ está ausente.

Explorando a semelhança entre a álgebra de Clifford (4.34) das matrizes α^μ desta teoria com a álgebra (1.23)-(1.25) satisfeita pelas matrizes α^i e β de Dirac, podemos propor um operador unitário $U = e^{iM}$ similar a (3.3), tal que

$$
\begin{aligned}
M &= -i\alpha^0(\alpha^0 \vec{\alpha}.\hat{\vec{p}})\phi(\vec{p}) \\
&= -i\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}\phi(\vec{p}). \qquad (4.49)
\end{aligned}
$$

Observemos que o operador definido acima é <u>independente do tempo</u>, pois, na teoria livre, a própria hamiltoniana (4.48) exibe naturalmente esta simetria.

Expandindo em série o operador U, temos

$$
\begin{aligned}
U &= e^{\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}\phi(\vec{p})} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\alpha^i \hat{p}^i \phi(\vec{p}))^n \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} (\alpha^i \hat{p}^i)^{2k} \phi^{2k}(\vec{p}) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} (\alpha^i \hat{p}^i)^{2k+1} \phi^{2k+1}(\vec{p}).
\end{aligned}
$$

Porém, com o auxílio de (4.34), podemos extrair as potências de $\alpha^i \hat{p}^i$ que comparecem na expressão acima

$$
\begin{aligned}
(\alpha^i \hat{p}^i)^2 \varsigma(\vec{p}) &= \alpha^i \hat{p}^i \alpha^j \hat{p}^j \varsigma(\vec{p}) \\
&= \frac{1}{2} \underbrace{(\alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i)}_{=2g^{ij}} \hat{p}^i \hat{p}^j \varsigma(\vec{p}) \\
&= -\delta^i{}_j \hat{p}^i \hat{p}^j \varsigma(\vec{p}) \\
&= -\left|\vec{p}\right|^2 \varsigma(\vec{p}),
\end{aligned}
$$

onde $\vec{p}$ é autovalor do operador $\hat{\vec{p}}$ e $\varsigma(\vec{p})$ é um spinor teste na <u>representação dos momentos</u>. Nesta seção, trabalharemos sempre com esta representação. Prosseguindo,

$$(\alpha^i \hat{p}^i)^3 \varsigma(\vec{p}) = -|\vec{p}|^2 \alpha^i \hat{p}^i \varsigma(\vec{p}),$$

$$(\alpha^i \hat{p}^i)^4 \varsigma(\vec{p}) = |\vec{p}|^4 ,$$

$$\vdots$$

Logo, podemos propor a relação

$$(\alpha^i \hat{p}^i)^{2k} = (-1)^k |\vec{p}|^{2k}, \quad k = 1, 2, 3... \tag{4.50}$$

Para verificarmos a validade desta proposição, precisamos examinar a relação para $k+1$:

$$\begin{aligned} (\alpha^i \hat{p}^i)^{2(k+1)} &= (\alpha^i \hat{p}^i)^{2k} (\alpha^i \hat{p}^i)^2 \\ &= ((-1)^k |\vec{p}|^{2k})(-|\vec{p}|^2) \\ &= (-1)^{k+1} |\vec{p}|^{2(k+1)}, \end{aligned}$$

de modo que, por indução, comprovamos o *ansatz* (4.50).

Dessa forma, utilizando (4.50) na expressão em série para U,

$$\begin{aligned} U &= \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (|\vec{p}|\, \phi)^{2k}}_{=\cos(|\vec{p}|\phi)} + \frac{\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}}{|\vec{p}|} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (|\vec{p}|\, \phi)^{2k+1}}_{=\mathrm{sen}(|\vec{p}|\phi)} \\ &= \cos(|\vec{p}|\, \phi) + \frac{\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}}{|\vec{p}|} \mathrm{sen}(|\vec{p}|\, \phi). \end{aligned} \tag{4.51}$$

O operador inverso é dado por

$$\begin{aligned} U^{-1} &= \cos(|\vec{p}|\, \phi) + \frac{1}{|\vec{p}|} \underbrace{(\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}})^{+}}_{=-\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}} \mathrm{sen}(|\vec{p}|\, \phi) \\ &= \cos(|\vec{p}|\, \phi) - \frac{\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}}{|\vec{p}|} \mathrm{sen}(|\vec{p}|\, \phi), \end{aligned}$$

onde usamos o fato de que as matrizes α^i são anti-hermitianas e comutam com o operador $\hat{p}^i$.

A lei de transformação do spinor ψ sob a atuação do operador unitário U é definida por (3.1),

$$\psi^{'} = U\psi,$$

e, para a hamiltoniana, a lei de transformação é expressa por (3.2)

$$H^{'} = UHU^{-1}.$$

Assim, com o auxílio de (4.51) e sua inversa, podemos determinar a nova hamiltoniana

$$\begin{aligned}
H^{'} &= \left(\cos(|\vec{p}|\,\phi) + \frac{\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}}{|\vec{p}|}\mathrm{sen}(|\vec{p}|\,\phi)\right) H \left(\cos(|\vec{p}|\,\phi) - \frac{\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}}{|\vec{p}|}\mathrm{sen}(|\vec{p}|\,\phi)\right) \\
&= \cos^2(|\vec{p}|\,\phi)H + \frac{\cos(|\vec{p}|\,\phi)\mathrm{sen}(|\vec{p}|\,\phi)}{|\vec{p}|}[\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}, H] - \frac{\mathrm{sen}^2(|\vec{p}|\,\phi)}{|\vec{p}|^2}(\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}})H(\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}).
\end{aligned}$$

Recorrendo a (4.34), desenvolvemos a expressão acima:

$$\begin{aligned}
[\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}, H]\varsigma(\vec{p}) &= [\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}, \alpha^0\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}]\varsigma(\vec{p}) + m[\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}, \alpha^0]\varsigma(\vec{p}) \\
&= (\underbrace{\alpha^i\alpha^0}_{=-\alpha^0\alpha^i}\alpha^j - \alpha^0\alpha^j\alpha^i)\hat{p}^i\hat{p}^j\varsigma(\vec{p}) + m(\alpha^i\alpha^0 - \alpha^0\alpha^i)\hat{p}^i\varsigma(\vec{p}) \\
&= -\alpha^0\left\{\alpha^i, \alpha^j\right\}\hat{p}^i\hat{p}^j\varsigma(\vec{p}) - 2m\alpha^0\alpha^i\hat{p}^i\varsigma(\vec{p}) \\
&= -2\underbrace{g^{ij}}_{=-\delta^i{}_j}\alpha^0\hat{p}^i\hat{p}^j\varsigma(\vec{p}) - 2m\alpha^0\alpha^i\hat{p}^i\varsigma(\vec{p}) \\
&= (2\,|\vec{p}|^2\,\alpha^0 - 2m\alpha^0\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}})\varsigma(\vec{p}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}})H(\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}})\varsigma(\vec{p}) &= (\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}})((\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}})H - 2\,|\vec{p}|^2\,\alpha^0 + 2m\alpha^0\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}})\varsigma(\vec{p}) \\
&= (\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}})^2H\varsigma(\vec{p}) - 2\,|\vec{p}|^2\,(\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}})\alpha^0\varsigma(\vec{p}) + 2m(\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}})\alpha^0(\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}})\varsigma(\vec{p}) \\
&= \frac{1}{2}(\alpha^i\alpha^j + \alpha^j\alpha^i)\hat{p}^i\hat{p}^jH\varsigma(\vec{p}) - 2\,|\vec{p}|^2\,(\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}})\alpha^0\varsigma(\vec{p}) + \\
&\quad +2m\alpha^i\alpha^0\alpha^j\hat{p}^i\hat{p}^j\varsigma(\vec{p}) \\
&= g^{ij}\hat{p}^i\hat{p}^jH\varsigma(\vec{p}) + 2\,|\vec{p}|^2\,\alpha^0(\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}})\varsigma(\vec{p}) - \\
&\quad -m\alpha^0(\alpha^i\alpha^j + \alpha^j\alpha^i)\hat{p}^i\hat{p}^j\varsigma(\vec{p}) \\
&= -\,|\vec{p}|^2\,(\alpha^0\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}} + m\alpha^0)\varsigma(\vec{p}) + 2\,|\vec{p}|^2\,\alpha^0(\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}})\varsigma(\vec{p}) + \\
&\quad +2m\,|\vec{p}|^2\,\alpha^0\varsigma(\vec{p}) \\
&= |\vec{p}|^2\,\alpha^0(\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}})\varsigma(\vec{p}) + m\,|\vec{p}|^2\,\alpha^0\varsigma(\vec{p}).
\end{aligned}$$

Obtemos assim a expressão para $H^{'}$:

$$
\begin{aligned}
H^{'} &= \cos^2(|\vec{p}|\,\phi)(\alpha^0\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}+m\alpha^0)+\frac{\cos(|\vec{p}|\,\phi)\mathrm{sen}(|\vec{p}|\,\phi)}{|\vec{p}|}(2\,|\vec{p}|^2\,\alpha^0-2m\alpha^0\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}) \\
&\quad -\frac{\mathrm{sen}^2(|\vec{p}|\,\phi)}{|\vec{p}|^2}(|\vec{p}|^2\,\alpha^0\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}+m\,|\vec{p}|^2\,\alpha^0) \\
&= \underbrace{(\cos^2(|\vec{p}|\,\phi)-\mathrm{sen}^2(|\vec{p}|\,\phi))}_{=\cos(2|\vec{p}|\phi)}(\alpha^0\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}+m\alpha^0) \\
&\quad +\underbrace{\frac{\cos(|\vec{p}|\,\phi)\mathrm{sen}(|\vec{p}|\,\phi)}{|\vec{p}|}}_{=\frac{1}{2|\vec{p}|}\mathrm{sen}(2|\vec{p}|\phi)}(2\,|\vec{p}|^2\,\alpha^0-2m\alpha^0\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}) \\
&= \left(\cos(2\,|\vec{p}|\,\phi)-\frac{m}{|\vec{p}|}\mathrm{sen}(2\,|\vec{p}|\,\phi)\right)\alpha^0\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}+(m\cos(2\,|\vec{p}|\,\phi)+|\vec{p}|\,\mathrm{sen}(2\,|\vec{p}|\,\phi))\alpha^0.
\end{aligned}
$$

Então, para eliminarmos o operador $\alpha^0\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}$, devemos escolher o parâmetro $\phi(\vec{p})$ de forma adequada, a saber

$$\phi(\vec{p})=\frac{1}{2\,|\vec{p}|}\mathrm{arctg}(\frac{|\vec{p}|}{m}). \tag{4.52}$$

Retornando à equação anterior, obtemos

$$H^{'}=\frac{m^2+|\vec{p}|^2}{m}\cos(2\,|\vec{p}|\,\phi)\alpha^0,$$

ou, usando a relação trigonométrica $\sec^2(x)=1+\mathrm{tg}^2(x)$ e escolhendo o sinal positivo para $\cos(2\,|\vec{p}|\,\phi)=\pm\frac{m}{\sqrt{m^2+|\vec{p}|^2}}$ (pois, para a partícula livre, a energia é estritamente positiva),

$$H^{'}=\sqrt{m^2+|\vec{p}|^2}\alpha^0. \tag{4.53}$$

Portanto, assim como visto nos casos da teoria de Dirac e DKP, a hamiltoniana livre da equação PMO também é "diagonalizada" pela atuação de uma transformação FW exata.

4.4 FW para PMO com Campo Externo

Para examinarmos o comportamento de ψ em um campo externo, introduzimos novamente, via <u>substituição mínima</u> ($\hat{p}_\mu\to\hat{p}_\mu-eA_\mu$), um acoplamento com um campo eletromagnético (fraco). Dessa forma, a partir de (4.24) (na ausência de fontes) obtemos a hamiltoniana do sistema interagente:

$$(\alpha^\mu(\hat{p}_\mu - eA_\mu) - m)\psi = 0,$$

$$i\partial_t\psi = \underbrace{(\alpha^0\vec{\alpha}.(\hat{\vec{p}} - e\vec{A}) + e\varphi + m\alpha^0)}_{=H(t)}\psi$$

$$\Rightarrow H(t) = \underbrace{\alpha^0\vec{\alpha}.(\hat{\vec{p}} - e\vec{A})}_{=O} + \underbrace{e\varphi}_{=\epsilon} + m\alpha^0. \tag{4.54}$$

O operador O acima corresponde à parte cinética da energia, ao passo que ϵ representa a interação eletrostática com o campo externo e o termo $m\alpha^0$ relaciona-se à energia de repouso.

Conforme mencionamos no capítulo 3, o quadripotencial $A^\mu = (\varphi, \vec{A})$ introduz uma dependência temporal na hamiltoniana e impede que encontremos uma representação exata para $H(t)$ que suprime o operador O em quaisquer ordens de energia, via transformação FW. Assim, vamos recorrer novamente ao procedimento iterativo para eliminarmos este operador O no **limite não--relativístico**, até ordem $(E_c/m)^3$ e $(E_cE_p)/m^2$, onde E_c é a energia cinética, E_p é a energia potencial eletrostática e m corresponde à energia de repouso em nosso sistema de unidades naturais.

Construímos, então, um operador unitário $U = e^{iM(t)}$ que guarda analogia com o caso livre, propondo para $M(t)$ a seguinte forma:

$$M(t) = -\frac{i}{2m}\alpha^0 O. \tag{4.55}$$

Agora, com o auxílio da expansão BCH (D.3), a nova representação da hamiltoniana, após a transformação unitária induzida por U, é dada por (3.14),i. e.,

$$H^{'} = H + i[M(t), H] + ... + \frac{i^n}{n!}\underbrace{[M(t), [M(t), ...[M(t), H]...]]}_{n \text{ comutadores}} + ...$$

$$+ i^2\dot{M}(t) + \frac{i^3}{2!}[M(t), \dot{M}(t)] + ... + \frac{i^{n+1}}{n!}\underbrace{[M(t), [M(t), ...[M(t), \dot{M}(t)]...]]}_{n-1 \text{ comutadores}} + ...$$

Tendo em vista que $M(t)$ é de ordem E_c/m, podemos fazer um "balanço energético" dos comutadores que surgem na expressão acima com o intuito de reter apenas aqueles que contribuem dentro da escala de energia em que estamos interessados. Portanto,

$$[M,H] = \underbrace{[M,O]}_{\approx(\frac{E_c}{m})E_c} + \underbrace{[M,\epsilon]}_{\approx(\frac{E_c}{m})E_p} + \underbrace{[M,m\alpha^0]}_{\approx E_c},$$

$$[M,[M,H]] = \underbrace{[M,[M,O]]}_{\approx(\frac{E_c}{m})^2E_c} + \underbrace{[M,[M,\epsilon]]}_{\approx(\frac{E_cE_p}{m^2})E_c} + \underbrace{[M,[M,m\alpha^0]]}_{\approx(\frac{E_c}{m})E_c},$$

$$[M,[M,[M,H]]] = \underbrace{[M,[M,[M,O]]]}_{\approx(\frac{E_c}{m})^3E_c} + \underbrace{[M,[M,[M,\epsilon]]]}_{\approx(\frac{E_c}{m})^3E_p} + \underbrace{[M,[M,[M,m\alpha^0]]]}_{\approx(\frac{E_c}{m})^2E_c},$$

$$[M,[M,[M,[M,H]]]] = \underbrace{[M,[M,[M,[M,O]]]]}_{\approx(\frac{E_c}{m})^4E_c\to 0} + \underbrace{[M,[M,[M,[M,\epsilon]]]]}_{\approx(\frac{E_c}{m})^4E_p\to 0}$$

$$+ \underbrace{[M,[M,[M,[M,m\alpha^0]]]]}_{\approx(\frac{E_c}{m})^3E_c}.$$

Notemos que os termos com mais de quatro comutadores do mesmo tipo expresso acima não satisfazem os critérios que fixamos anteriormente, de modo que se tratam de correções de ordem superior para a hamiltoniana e serão descartados em nossa aproximação. Estudando ainda os "comutadores pontuados", temos

$$[M,\dot{M}] \approx \left(\frac{E_c}{m}\right)^2,$$

$$[M,[M,\dot{M}]] \approx \left(\frac{E_c}{m}\right)^3.$$

Os termos com mais de três comutadores desta espécie também extrapolam os limites de aproximação que estabelecemos e serão desconsiderados.

Com base na análise efetuada acima, a expressão para a hamiltoniana transformada, retendo apenas os termos relevantes, é dada por

$$H^{'}(t) = H + i[M,H] - \frac{1}{2}[M,[M,H]] - \frac{i}{6}[M,[M,[M,H]]]$$

$$+\frac{1}{24}[M,[M,[M,[M,m\alpha^0]]]] - \dot{M} - \frac{i}{2}[M,\dot{M}] + \frac{1}{6}[M,[M,\dot{M}]]. \qquad (4.56)$$

Antes de prosseguirmos com o cálculo de cada um dos comutadores que comparecem em (4.56), vamos escrever algumas relações de comutação úteis envolvendo a matriz α^0 e os operadores O e ϵ:

$$\begin{aligned} \alpha^0 O &= \alpha^0 \underbrace{\alpha^0 \alpha^i}_{=-\alpha^i\alpha^0} (\hat{p}^i - eA^i) \\ &= -\alpha^0 \alpha^i (\hat{p}^i - eA^i)\alpha^0 \\ &= -O\alpha^0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left\{\alpha^0, O\right\} = 0 \tag{4.57}$$

e

$$[\alpha^0, \epsilon] = 0, \tag{4.58}$$

sendo que, no desenvolvimento acima, usamos (4.34) para obter a primeira relação e o fato de que α^0 e ϵ são independentes, para obtermos a segunda.

De posse de (4.57) e (4.58), e com o auxílio da álgebra de Clifford (4.34), vamos efetuar agora o cálculo dos comutadores que compõem a hamiltoniana (4.56), em termos dos operadores O e ϵ:

$$\begin{aligned} [M, H] &= -\frac{i}{2m}[\alpha^0 O, O + \epsilon + m\alpha^0] \\ &= -\frac{i}{2m}[\alpha^0 O, O] - \frac{i}{2m}[\alpha^0 O, \epsilon] - \frac{i}{2}[\alpha^0 O, \alpha^0] \\ &= -\frac{i}{2m}(\alpha^0 O^2 - O\alpha^0 O) - \frac{i}{2m}(\alpha^0 O\epsilon - \epsilon\alpha^0 O) - \frac{i}{2}(\alpha^0 O\alpha^0 - O) \\ &= -\frac{i}{m}\alpha^0 O^2 - \frac{i}{2m}\alpha^0[O, \epsilon] + iO, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [M, [M, H]] &= -\frac{i}{2m}[\alpha^0 O, [M, H]] \\ &= -\frac{1}{2m^2}[\alpha^0 O, \alpha^0 O^2] - \frac{1}{4m^2}[\alpha^0 O, \alpha^0[O, \epsilon]] + \frac{1}{2m}[\alpha^0 O, O] \\ &= -\frac{1}{2m^2}(\alpha^0 O\alpha^0 O^2 - \alpha^0 O^2\alpha^0 O) - \frac{1}{4m^2}\big(\alpha^0 O\alpha^0[O, \epsilon] - \\ &\quad -\alpha^0[O, \epsilon]\alpha^0 O\big) + \frac{1}{2m}(2\alpha^0 O^2) \\ &= \frac{1}{m^2}O^3 + \frac{1}{4m^2}[O, [O, \epsilon]] + \frac{1}{m}\alpha^0 O^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[M,[M,[M,H]]] &= -\frac{i}{2m}[\alpha^0 O,[M,[M,H]]] \\
&= -\frac{i}{2m^3}[\alpha^0 O,O^3] - \frac{i}{8m^3}[\alpha^0 O,[O,[O,\epsilon]]] \\
&\quad -\frac{i}{2m^2}[\alpha^0 O,\alpha^0 O^2] \\
&= -\frac{i}{2m^3}(\alpha^0 O^4 - O^3\alpha^0 O) \\
&\quad -\frac{i}{8m^3}(\alpha^0 O[O,[O,\epsilon]] - [O,[O,\epsilon]]\alpha^0 O) - \frac{i}{2m^2}(-2O^3) \\
&= -\frac{i}{m^3}\alpha^0 O^4 - \frac{i}{8m^3}\alpha^0[O,[O,[O,\epsilon]]] + \frac{i}{m^2}O^3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[M,[M,[M,[M,m\alpha^0]]]] &= -\frac{i}{2m}[\alpha^0 O,[M,[M,[M,m\alpha^0]]]] \\
&= \frac{1}{2m^3}[\alpha^0 O,O^3] \\
&= \frac{1}{2m^3}(\alpha^0 O^4 - O^3\alpha^0 O) \\
&= \frac{1}{m^3}\alpha^0 O^4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[M,\dot{M}] &= -\frac{1}{4m^2}[\alpha^0 O,\alpha^0\dot{O}] \\
&= -\frac{1}{4m^2}(\alpha^0 O\alpha^0\dot{O} - \alpha^0\dot{O}\alpha^0 O) \\
&= \frac{1}{4m^2}[O,\dot{O}],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[M,[M,\dot{M}]] &= -\frac{i}{2m}[\alpha^0 O,[M,\dot{M}]] \\
&= -\frac{i}{8m^3}[\alpha^0 O,[O,\dot{O}]] \\
&= -\frac{i}{8m^3}(\alpha^0 O[O,\dot{O}] - [O,\dot{O}]\alpha^0 O) \\
&= -\frac{i}{8m^3}\alpha^0[O,[O,\dot{O}]].
\end{aligned}$$

Nas últimas duas relações, usamos o resultado $[\alpha^0, \dot{O}] = 0$, que segue diretamente da equação (4.57) se a diferenciarmos com relação ao tempo.

Retornando a (4.56) e substituindo os resultados encontrados para os comutadores acima, obtemos

$$H^{'} = (m\alpha^0 + \epsilon + O) + i\left(-\frac{i}{m}\alpha^0 O^2 - \frac{i}{2m}\alpha^0[O,\epsilon] + iO\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m^2}O^3 + \frac{1}{4m^2}[O,[O,\epsilon]]\right.$$
$$\left.+\frac{1}{m}\alpha^0 O^2\right) - \frac{i}{6}\left(-\frac{i}{m^3}\alpha^0 O^4 - \frac{i}{8m^3}\alpha^0[O,[O,[O,\epsilon]]] + \frac{i}{m^2}O^3\right) + \frac{1}{24}\left(\frac{1}{m^3}\alpha^0 O^4\right)$$
$$+\frac{i}{2m}\alpha^0\dot{O} - \frac{i}{2}\left(\frac{1}{4m^2}[O,\dot{O}]\right) + \frac{1}{6}\left(-\frac{i}{8m^3}\alpha^0[O,[O,\dot{O}]]\right),$$

$$H^{'} = m\alpha^0 + \underbrace{\left(\frac{i}{2m}\alpha^0\dot{O} - \frac{1}{3m^2}O^3 + \frac{1}{2m}\alpha^0[O,\epsilon] - \frac{i}{48m^3}\alpha^0[O,[O,\dot{O}]] - \frac{1}{48m^3}\alpha^0[O,[O,[O,\epsilon]]]\right)}_{=O'} + \underbrace{\left(\epsilon + \frac{1}{2m}\alpha^0 O^2 - \frac{1}{8m^3}\alpha^0 O^4 - \frac{i}{8m^2}[O,\dot{O}] - \frac{1}{8m^2}[O,[O,\epsilon]]\right)}_{=\epsilon'}. \tag{4.59}$$

Observa-se que o operador O, de ordem zero em relação à energia de repouso, é eliminado pela transformação unitária e a nova hamiltoniana apresenta agora um operador $O^{'}$ (composto pelos termos de potência ímpar em O) de ordem máxima $1/m$. O operador $\epsilon^{'}$ compreende os termos de potência par em O e é de ordem máxima zero relativa à energia de repouso.

Dando continuidade ao nosso estudo do acoplamento eletromagnético em baixas energias para a teoria PMO, vamos efetuar novamente uma transformação FW para eliminarmos o operador $O^{'}$. Sob esta perspectiva, definimos novamente um operador $M^{'}(t)$, de forma similar a (4.55), para construirmos o operador unitário $U^{'} = e^{iM^{'}(t)}$:

$$M^{'}(t) = -\frac{i}{2m}\alpha^0 O^{'}. \tag{4.60}$$

Tendo em vista que os operadores $O^{'}$ e $M^{'}(t)$ são agora de ordem inferior com respeito à energia de repouso m, em relação aos respectivos operadores sem linha, é suficiente mantermos apenas os comutadores presentes em (4.56) (observando-se as substituições $M \to M^{'}$, $H \to H^{'}$) para escrevermos a expressão em série da hamiltoniana $H^{''}(t)$, resultante da nova transformação unitária:

$$H^{''}(t) = H^{'} + i[M^{'}, H^{'}] - \frac{1}{2}[M^{'}, [M^{'}, H^{'}]] - \frac{i}{6}[M^{'}, [M^{'}, [M^{'}, H^{'}]]]$$

$$+\frac{1}{24}[M^{'}, [M^{'}, [M^{'}, [M^{'}, m\alpha^0]]]] - \dot{M}^{'} - \frac{i}{2}[M^{'}, \dot{M}^{'}] + \frac{1}{6}[M^{'}, [M^{'}, \dot{M}^{'}]].$$

Como $O^{'} \approx E_c/m$, $\epsilon^{'} \approx E_p$ e $M^{'} \approx E_c/m^2$ (onde estamos explicitando a ordem máxima de cada operador), faremos novamente o "balanço energético" de cada termo da série acima para determinar quais contribuem efetivamente no limite não relativístico que fixamos previamente:

$$[M^{'}, H^{'}] = \underbrace{[M^{'}, O^{'}]}_{\approx \frac{E_c^2}{m^3}} + \underbrace{[M^{'}, \epsilon^{'}]}_{\approx \frac{E_c E_p}{m^2}} + \underbrace{[M^{'}, m\alpha^0]}_{\approx \frac{E_c}{m}},$$

$$[M^{'}, [M^{'}, H^{'}] = \underbrace{[M^{'}, [M^{'}, O^{'}]]}_{\approx (\frac{E_c}{m})^3 \frac{1}{m^2} \to 0} + \underbrace{[M^{'}, [M^{'}, \epsilon^{'}]]}_{\approx (\frac{E_c E_p}{m^2}) \frac{E_c}{m^2} \to 0} + \underbrace{[M^{'}, [M^{'}, m\alpha^0]]}_{\approx \frac{E_c^2}{m^3}}.$$

Logo, os termos com mais de dois comutadores do tipo expresso acima não satisfazem os critérios que estabelecemos anteriormente e, por isso, não serão incluídos em nossos cálculos. Examinando também os "comutadores pontuados", tem-se

$$[M^{'}, \dot{M}^{'}] \approx \frac{E_c^2}{m^4} \to 0,$$

de modo que as contribuições destes comutadores extrapolam a escala de aproximação em que estamos interessados e, portanto, vamos desconsiderá-las em nossa análise.

Assim, a expressão para $H^{''}$ se resume à forma

$$H^{''}(t) = H^{'} + i[M^{'}, H^{'}] - \frac{1}{2}[M^{'}, [M^{'}, H^{'}]] - \dot{M}^{'}. \qquad (4.61)$$

A seguir, efetuaremos o cálculo dos comutadores que comparecem acima em termos dos operadores $O^{'}$ e $\epsilon^{'}$. Para isso, notemos que as relações (4.57) e (4.58) permanecem válidas se substituirmos $O \to O^{'}$ e $\epsilon \to \epsilon^{'}$, pois $O^{'}$ é composto por termos que envolvem potências ímpares de O e $\epsilon^{'}$ por potências pares de O, de forma que as relações de comutação se preservam.

Portanto,

$$\begin{aligned}[M^{'},H^{'}] &= [M^{'},O^{'}]+[M^{'},\epsilon^{'}]+[M^{'},m\alpha^0] \\ &= -\frac{i}{2m}[\alpha^0O^{'},O^{'}]-\frac{i}{2m}[\alpha^0O^{'},\epsilon^{'}]-\frac{i}{2}[\alpha^0O^{'},\alpha^0] \\ &= -\frac{i}{m}\alpha^0O^{'2}-\frac{i}{2m}\alpha^0[O^{'},\epsilon^{'}]+iO^{'},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[M^{'},[M^{'},H^{'}]] &= -\frac{1}{2m^2}[\alpha^0O^{'},\alpha^0O^{'2}]-\frac{1}{4m^2}[\alpha^0O^{'},\alpha^0[O^{'},\epsilon^{'}]]+\frac{1}{2m}[\alpha^0O^{'},O^{'}] \\ &= \frac{1}{m^2}O^{'3}+\frac{1}{4m^2}[O^{'},[O^{'},\epsilon^{'}]]+\frac{1}{m}\alpha^0O^{'2}.\end{aligned}$$

Aplicando estes resultados em (4.61), resulta

$$H^{''}(t)=(m\alpha^0+\epsilon^{'}+O^{'})+i\left(-\frac{i}{m}\alpha^0O^{'2}-\frac{i}{2m}\alpha^0[O^{'},\epsilon^{'}]+iO^{'}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\left(\underbrace{\frac{1}{m^2}O^{'3}}_{\approx\frac{E_c^3}{m^5}\to 0}+\underbrace{\frac{1}{4m^2}[O^{'},[O^{'},\epsilon^{'}]]}_{\approx\frac{E_cE_p}{m^2}\frac{E_c}{m^2}\to 0}+\frac{1}{m}\alpha^0O^{'2}\right)+\frac{i}{2m}\alpha^0\dot{O}^{'},$$

$$H^{''}(t)=m\alpha^0+\underbrace{(\epsilon^{'}+\frac{1}{2m}\alpha^0O^{'2})}_{=\epsilon^{''}}+\underbrace{(\frac{1}{2m}\alpha^0[O^{'},\epsilon^{'}]+\frac{i}{2m}\alpha^0\dot{O}^{'})}_{=O^{''}}. \qquad (4.62)$$

Examinando a expressão acima, verifica-se que o operador $O^{'}$ não comparece na nova representação da hamiltoniana. O novo operador $O^{''}$ é agora de ordem (máxima) E_c/m^2 e o operador $\epsilon^{''}$ permanece com ordem (máxima) zero em relação à energia de repouso. Para alcançarmos o nível de aproximação que desejamos, vamos efetuar uma última transformação unitária, que elimina também este operador $O^{''}$.

Então, definimos o operador $M^{''}(t)$, que compõe o operador unitário, com base em (4.55) e (4.60):

$$M^{''}(t)=-\frac{i}{2m}\alpha^0O^{''}. \qquad (4.63)$$

Observemos que $M^{''}$ e $O^{''}$ são inferiores, em termos de m, em relação aos operadores $M^{'}$ e $O^{'}$. Assim, na expressão em série para a nova hamiltoniana que resulta da tranformação unitária, basta escrevermos apenas os termos que comparecem em (4.61) (observadas as devidas substituições $M^{'} \to M^{''}$ e $H^{'} \to H^{''}$):

$$H^{'''}(t) = H^{''} + i[M^{''}, H^{''}] - \frac{1}{2}[M^{''}, [M^{''}, H^{''}]] - \dot{M}^{''}.$$

Agora, vamos efetuar novamente o "balanço energético" dos termos acima, para identificarmos aqueles que estão dentro da ordem de aproximação que desejamos. Porém, faremos uma análise menos minuciosa, estudando a ordem de grandeza dos comutadores somente em relação à energia de repouso, de modo que serão mantidos apenas termos de ordem (máxima) até $1/m^3$:

$$[M^{''}, H^{''}] = \underbrace{[M^{''}, O^{''}]}_{\approx \frac{1}{m^5} \to 0} + \underbrace{[M^{''}, \epsilon^{''}]}_{\approx \frac{1}{m^3}} + \underbrace{[M^{''}, m\alpha^0]}_{\approx \frac{1}{m^2}}.$$

Logo, o termo que apresenta dois comutadores extrapola o critério que estabelecemos e, portanto, será desprezado.

Dessa maneira, visto que as relações (4.57) e (4.58) permanecem válidas pela substituição de O por $O^{''}$ e de ϵ por $\epsilon^{''}$, podemos calcular o único comutador que contribui na expressão de $H^{'''}$:

$$\begin{aligned}
[M^{''}, H^{''}] &= \underbrace{[M^{''}, O^{''}]}_{\approx 0} + [M^{''}, \epsilon^{''}] + [M^{''}, m\alpha^0] \\
&= -\frac{i}{2m}[\alpha^0 O^{''}, \epsilon^{''}] - \frac{i}{2}[\alpha^0 O^{''}, \alpha^0] \\
&= -\frac{i}{2m}\alpha^0[O^{''}, \epsilon^{''}] + iO^{''},
\end{aligned}$$

onde desprezamos o termo $[M^{''}, O^{''}]$, de acordo com o "balanço energético" efetuado anteriormente.

Assim, a nova representação da hamiltoniana é dada por

$$\begin{aligned}
H^{'''}(t) &= (m\alpha^0 + \epsilon^{''} + O^{''}) + i\left(-\frac{i}{2m}\alpha^0[O^{''}, \epsilon^{''}] + iO^{''}\right) + \frac{i}{2m}\alpha^0\dot{O}^{''} \\
&= m\alpha^0 + \epsilon^{''} + \underbrace{\frac{1}{2m}\alpha^0[O^{''}, \epsilon^{''}] + \frac{i}{2m}\alpha^0\dot{O}^{''}}_{=O^{'''}} \\
&= m\alpha^0 + \epsilon^{''} + O^{'''}. \qquad (4.64)
\end{aligned}$$

Na hamiltoniana acima, verifica-se que o operador $O^{''}$ foi eliminado conforme desejávamos e o operador remanescente $O^{'''}$ é de ordem (máxima) $1/m^3$ em relação à energia de repouso.

Nosso objetivo agora consiste em extrairmos da hamiltoniana informações referentes à interação da partícula com um campo eletromagnético externo no limite não relativístico. Para isso, vamos desprezar termos de ordem (máxima) igual ou superior a $1/m^3$ em (4.64), de forma que a expressão para a hamiltoniana fica

$$\begin{aligned} H^{'''}(t) &= m\alpha^0 + \epsilon^{''} \\ &= m\alpha^0 + (\underbrace{\frac{1}{2m}\alpha^0 O^{'2}}_{\approx \frac{1}{m^3}\to 0} + \epsilon^{'}) \\ &= m\alpha^0 + \epsilon + \frac{1}{2m}\alpha^0 O^2 - \frac{1}{8m^3}\alpha^0 O^4 \\ &\quad - \frac{i}{8m^2}[O,\dot{O}] - \frac{1}{8m^2}[O,[O,\epsilon]], \end{aligned} \tag{4.65}$$

em que usamos as definições de $\epsilon^{''}$ e $\epsilon^{'}$ expressas em (4.62) e (4.59), respectivamente.

Devemos notar que, na expressão acima, o termo que envolve O^4 ainda é de ordem $1/m^3$; porém, este operador contribui para evidenciar a interpretação física de alguns termos do acoplamento com o campo externo e, portanto, vamos mantê-lo provisoriamente na expansão da hamiltoniana.

A seguir, com o auxílio de (4.29) e (4.34), desenvolvemos os cálculos referentes a cada termo presente em (4.65):

$$\begin{aligned} O^2\varsigma &= (\alpha^0\vec{\alpha}.(\hat{\vec{p}} - e\vec{A}))^2\varsigma \\ &= (-(\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}})^2 + e(\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}})(\vec{\alpha}.\vec{A}) + e(\vec{\alpha}.\vec{A})(\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}}) - e^2(\vec{\alpha}.\vec{A})^2)\varsigma \\ &= (-\alpha^i\alpha^j\hat{p}^i\hat{p}^j\varsigma + e\alpha^i\alpha^j\hat{p}^iA^j\varsigma + e\alpha^i\alpha^jA^i\hat{p}^j\varsigma - e^2\alpha^i\alpha^jA^iA^j\varsigma) \\ &= (-\alpha^i\alpha^j\hat{p}^i\hat{p}^j\varsigma + e\alpha^i\alpha^j(\hat{p}^iA^j)\varsigma + e\alpha^i\alpha^jA^j\hat{p}^i\varsigma + e\alpha^i\alpha^jA^i\hat{p}^j\varsigma - \\ &\quad -e^2\alpha^i\alpha^jA^iA^j\varsigma) \\ &= \left(-\frac{1}{2}\underbrace{(\alpha^i\alpha^j + \alpha^j\alpha^i)}_{=2g^{ij}}\hat{p}^i\hat{p}^j + e\alpha^i\alpha^j(\hat{p}^iA^j) + e\underbrace{(\alpha^i\alpha^j + \alpha^j\alpha^i)}_{=2g^{ij}}A^i\hat{p}^j\right. \\ &\quad \left. -\frac{e^2}{2}\underbrace{(\alpha^i\alpha^j + \alpha^j\alpha^i)}_{=2g^{ij}}A^iA^j\right)\varsigma \\ &= \left((\hat{\vec{p}})^2 + e\alpha^i\alpha^j(\hat{p}^iA^j) - 2eA^i\hat{p}^i + e^2(\vec{A})^2\right)\varsigma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \Big((\hat{\vec{p}})^2 + e(-\delta^i{}_j + \epsilon^{ijk}\Theta\alpha^k)(\hat{p}^i A^j) - 2eA^i\hat{p}^i + e^2(\vec{A})^2\Big)\varsigma \\
&= \Big((\hat{\vec{p}})^2 - e(\hat{p}^i A^i) + e\epsilon^{ijk}\Theta\alpha^k(\hat{p}^i A^j) - 2eA^i\hat{p}^i + e^2(\vec{A})^2\Big)\varsigma \\
&= \left(\underbrace{(\hat{\vec{p}})^2 - 2e\vec{A}.\hat{\vec{p}} - e(\hat{\vec{p}}.\vec{A}) + e^2(\vec{A})^2}_{=(\hat{\vec{p}}-e\vec{A})^2} + e\Theta\vec{\alpha}.\underbrace{(\hat{\vec{p}}\times\vec{A})}_{=-i\vec{\nabla}\times\vec{A}}\right)\varsigma \\
&= \left((\hat{\vec{p}} - e\vec{A})^2 - ie\Theta\vec{\alpha}.\underbrace{(\vec{\nabla}\times\vec{A})}_{=\vec{B}}\right)\varsigma,
\end{aligned}$$

de modo que, suprimindo o spinor teste ς, podemos escrever

$$O^2 = (\hat{\vec{p}} - e\vec{A})^2 - ie\Theta\vec{\alpha}.\vec{B}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
O^4 &= \Big((\hat{\vec{p}} - e\vec{A})^2 - ie\Theta\vec{\alpha}.\vec{B}\Big)^2 \\
&= (\hat{\vec{p}} - e\vec{A})^4 - ie(\hat{\vec{p}} - e\vec{A})^2\Theta\vec{\alpha}.\vec{B} - ie\Theta\vec{\alpha}.\vec{B}(\hat{\vec{p}} - e\vec{A})^2 - e^2(\Theta\vec{\alpha}.\vec{B})^2 \\
&= (\hat{\vec{p}})^4 + \text{termos extras}.
\end{aligned}$$

Os termos extras a que nos referimos acima correspondem aos operadores que comparecem neste último desenvolvimento, mas que não apresentam interpretação física direta na expressão para o acoplamento. Temos ainda

$$[O, \dot{O}] = [O, \alpha^0\vec{\alpha}.\dot{\hat{\vec{p}}}] - e[O, \alpha^0\vec{\alpha}.\partial_t\vec{A}],$$
$$[O, [O, \epsilon]] = [\alpha^0\vec{\alpha}.(\hat{\vec{p}} - e\vec{A}), [\alpha^0\vec{\alpha}.(\hat{\vec{p}} - e\vec{A}), \epsilon]].$$

Para desenvolvermos a última expressão acima, vamos examinar primeiro o comutador interno:

$$\begin{aligned}
[\alpha^0\vec{\alpha}.(\hat{\vec{p}} - e\vec{A}), \epsilon]\varsigma &= \alpha^0\vec{\alpha}.(\hat{\vec{p}} - e\vec{A})(e\varphi\varsigma) - e\varphi\alpha^0\vec{\alpha}.(\hat{\vec{p}} - e\vec{A})\varsigma \\
&= e\alpha^0\vec{\alpha}.(\hat{\vec{p}}\varphi)\varsigma + e\varphi\alpha^0\vec{\alpha}.(\hat{\vec{p}}\varsigma) - e^2\alpha^0\vec{\alpha}.\vec{A}\varphi\varsigma \\
&\quad - e\varphi\alpha^0\vec{\alpha}.(\hat{\vec{p}}\varsigma) + e^2\varphi\alpha^0\vec{\alpha}.\vec{A}\varsigma \\
&= e\alpha^0\vec{\alpha}.\underbrace{(\hat{\vec{p}}\varphi)}_{=-i\vec{\nabla}\varphi}\varsigma \\
&= -ie\alpha^0\vec{\alpha}.\vec{\nabla}\varphi\varsigma \\
&= ie\alpha^0\vec{\alpha}.(\vec{E} + \partial_t\vec{A})\varsigma.
\end{aligned}$$

Retornando ao comutador completo, segue

$$\begin{aligned}
[O,[O,\epsilon]] &= ie[\alpha^0\vec{\alpha}.(\hat{\vec{p}}-e\vec{A}),\alpha^0\vec{\alpha}.(\vec{E}+\partial_t\vec{A})] \\
&= ie[\alpha^0\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}},\alpha^0\vec{\alpha}.\vec{E}]-ie^2[\alpha^0\vec{\alpha}.\vec{A},\alpha^0\vec{\alpha}.\vec{E}]+ie[O,\alpha^0\vec{\alpha}.\partial_t\vec{A}].
\end{aligned}$$

Assim, calculando separadamente os dois primeiros termos da expressão anterior,

$$\begin{aligned}
[\alpha^0\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}},\alpha^0\vec{\alpha}.\vec{E}]\varsigma &= (\alpha^0\alpha^i\alpha^0\alpha^j\hat{p}^iE^j-\alpha^0\alpha^j\alpha^0\alpha^iE^j\hat{p}^i)\varsigma \\
&= -\alpha^i\alpha^j(\hat{p}^iE^j)\varsigma-\alpha^i\alpha^jE^j\hat{p}^i\varsigma+\alpha^j\alpha^iE^j\hat{p}^i\varsigma \\
&= -(-\delta^i{}_j+\epsilon^{ijk}\Theta\alpha^k)(\hat{p}^iE^j)\varsigma+(\alpha^j\alpha^i-\alpha^i\alpha^j)E^j\hat{p}^i\varsigma \\
&= (\hat{p}^iE^i)\varsigma-\epsilon^{ijk}\Theta\alpha^k(\hat{p}^iE^j)\varsigma+2\epsilon^{jik}\Theta\alpha^kE^j\hat{p}^i\varsigma \\
&= (\hat{\vec{p}}.\vec{E})\varsigma-\Theta\vec{\alpha}.(\hat{\vec{p}}\times\vec{E})\varsigma+2\Theta\vec{\alpha}.(\vec{E}\times\hat{\vec{p}})\varsigma \\
&= \Big(-i(\vec{\nabla}.\vec{E})+i\Theta\vec{\alpha}.(\vec{\nabla}\times\vec{E})+2\Theta\vec{\alpha}.(\vec{E}\times\hat{\vec{p}})\Big)\varsigma,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\alpha^0\vec{\alpha}.\vec{A},\alpha^0\vec{\alpha}.\vec{E}] &= (\alpha^0\alpha^i\alpha^0\alpha^jA^iE^j-\alpha^0\alpha^j\alpha^0\alpha^iE^jA^i) \\
&= (\alpha^j\alpha^i-\alpha^i\alpha^j)A^iE^j \\
&= 2\epsilon^{jik}\Theta\alpha^kA^iE^j \\
&= 2\Theta\vec{\alpha}.(\vec{E}\times\vec{A}).
\end{aligned}$$

Substituindo os resultados acima na expressão para o comutador completo, resulta

$$\begin{aligned}
\Rightarrow [O,[O,\epsilon]] &= e(\vec{\nabla}.\vec{E})-e\Theta\vec{\alpha}.(\vec{\nabla}\times\vec{E})+2ie\Theta\vec{\alpha}.(\vec{E}\times\hat{\vec{p}})-2ie^2\Theta\vec{\alpha}.(\vec{E}\times\vec{A})+ \\
&\quad +ie[O,\alpha^0\vec{\alpha}.\partial_t\vec{A}].
\end{aligned}$$

De posse dos resultados obtidos para os comutadores examinados acima, retornamos a (4.65) para escrevermos a expressão final da hamiltoniana no limite não relativístico:

$$\begin{aligned}
H^{'''}(t) &= m\alpha^0+\epsilon+\frac{1}{2m}\alpha^0((\hat{\vec{p}}-e\vec{A})^2-ie\Theta\vec{\alpha}.\vec{B})-\frac{1}{8m^3}\alpha^0((\hat{\vec{p}})^4) \\
&\quad -\frac{i}{8m^2}\Big([O,\alpha^0\vec{\alpha}.\dot{\hat{\vec{p}}}]-e[O,\alpha^0\vec{\alpha}.\partial_t\vec{A}]\Big)-\frac{1}{8m^2}\Big(e(\vec{\nabla}.\vec{E})-e\Theta\vec{\alpha}.(\vec{\nabla}\times\vec{E}) \\
&\quad +2ie\Theta\vec{\alpha}.(\vec{E}\times\hat{\vec{p}})-2ie^2\Theta\vec{\alpha}.(\vec{E}\times\vec{A})+ie[O,\alpha^0\vec{\alpha}.\partial_t\vec{A}]\Big),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H^{'''}(t) &= \alpha^0(m + \frac{1}{2m}(\hat{\vec{p}} - e\vec{A})^2 - \frac{(\hat{\vec{p}})^4}{8m^3}) + e\varphi + \frac{e}{m}\alpha^0\vec{S}.\vec{B} \\ &\quad -\frac{e}{8m^2}\vec{\nabla}.\vec{E} + i\frac{e}{4m^2}\vec{S}.(\vec{\nabla}\times\vec{E}) + \frac{e}{2m^2}\vec{S}.(\vec{E}\times\hat{\vec{p}}) \\ &\quad -\frac{i}{m^2} \underbrace{(\frac{1}{8}[O,\alpha^0\vec{\alpha}.\dot{\hat{\vec{p}}}] - i\frac{e^2}{2}\vec{S}.(\vec{E}\times\vec{A}))}_{\text{correções sem interpretação física!}} \quad . \end{aligned} \tag{4.66}$$

Explorando a semelhança entre os termos de acoplamento obtidos para a teoria PMO e os correspondentes à teoria de Dirac, podemos examinar individualmente cada termo que compõe a hamiltoniana acima. Verifica-se que o primeiro corresponde à **informação cinemática** do sistema (descrevendo a correção relativística da massa), os dois termos seguintes relacionam-se às **interações eletrostática** e **dipolar magnética** com o campo externo, o quarto termo refere-se ao **termo de Darwin** (efeito *zitterbewegung*) e o último par de termos manifesta a **interação spin-órbita**. Novamente, assim como visto no estudo do acoplamento em baixas energias das teorias de Proca e DKP, através de transformações FW, tem-se a presença de "termos extras" que correspondem a correções de ordem $1/m^2$ para a hamiltoniana, mas que não apresentam interpretação física concreta em termos dos acoplamentos bem conhecidos no limite não relativístico.

Podemos entender a informação sobre o limite não relativístico, que obtivemos nesta seção via transformação FW, à luz da possível interpretação que conferimos para a equação PMO em termos da descrição de um estado composto de dois férmions, ou seja, a hamiltoniana $H^{'''}$ manifesta os acoplamentos entre os férmions e o campo externo no regime de baixas energias, embora não identifiquemos interação <u>entre</u> os mesmos, pois não foi introduzido nenhum potencial de interação férmion-férmion, que corresponderia à equação PMO com autoacoplamento.

4.5 Referências do Capítulo

Exibimos a seguir as referências relativas a este capítulo:

[16] Oppenheimer, J. R. *"Note on Light Quanta and the Electromagnetic Field"*. Phys. Rev. **38**, p. 725, 1931.

[17] Giannetto, E. *"A Majorana-Oppenheimer Formulation of Quantum Electrodynamics"*. Nuovo Cim. **44**, p. 140, 1985.

[18] Mignani, R.; Recami, E.; Baldo, M. *"About a Dirac-Like Equation for the Photon according to Ettore Majorana"*. Nuovo Cim. **11**, p. 568, 1974.

[19] Giannetto, E. *"A Majorana-Dirac-Like Equation for a Non-Abelian Gauge Field"*. Nuovo Cim. **44**, p. 145, 1985.

[20] Majorana, E. *"Teoria relativistica di particelle con momento intrinseco arbitrario"*. Nuovo Cim. **9**, p. 335, 1932.

[21] Fradkin, D. M. *"Comments on a Paper by Majorana Concerning Elementary Particles"*. Am. Jour. Phys. **34**, p. 314, 1966.

[22] Bassani, G. F. *"Ettore Majorana Scientific Papers"*. Springer, 2006.

[23] Esposito, S.; Recami, E.; van der Merwe, A.; Battiston, R. *"Ettore Majorana: Unpublished Research Notes on Theoretical Physics"*. Springer, 2009.

[24] Fushchich, W. I.; Shtelen, W. M.; Spichak, S. V. *"On the connection between solutions of Dirac and Maxwell equations, dual Poincaré invariance and superalgebras of invariance and solutions of nonlinear Dirac equations"*. J. Phys. A: Math. Gen. **24**, p. 1683, 1991.

[25] Kälbermann, G. *"Kemmer-Duffin-Petiau equations from two-body Dirac equations"*. Phys. Rev. C **37**, p. 25, 1988.

[26] Królikowski, W. *"Tensor Form of the Breit Equation"*. Acta Phys. Pol. **B14**, p. 109, 1983.

[32] Greiner, W. *"Relativistic Quantum Mechanics: Wave Equations"*. Terceira edição, Springer, 2000.

Considerações Finais

Tendo em vista o crescente interesse na teoria de spins altos no contexto da teoria quântica de campos, efetuamos uma revisão crítica deste formalismo, em nível clássico, ancorada no grupo de Poincaré, enfatizando em particular o caso de spin 1/2, que fornece a matéria-prima para a construção de representações para spins de ordem superior, e o caso de spin 1, que compreende os campos de Proca bem como de mésons (pseudo) escalares, além de acomodar o campo eletromagnético.

Sob tal perspectiva, nos capítulos iniciais apresentamos uma revisão do formalismo padrão desenvolvido por Bargmann e Wigner [06] para a teoria de spins altos com base no produto direto de representações (irredutíveis) do grupo de Lorentz homogêneo e destacamos a construção da equação DKP [07], [08], [09] através deste procedimento. Discutimos a inequivalência entre esta equação e a equação de Harish-Chandra [10] para o fóton, no limite em que $m \to 0$, a partir de uma construção que elaboramos neste trabalho, em que a equação para o fóton é obtida preservando a álgebra DKP (2.27) e introduzindo campos auxiliares ϕ_R e ϕ_L, bem como um parâmetro dimensional que deve comparecer na construção da matriz que substitui o termo de massa da equação. Esta proposta de decomposição da equação de Harish-Chandra em dois setores, “right” e “left”, foi concebida com o intuito de investigarmos uma possível “representação quiral” para o campo eletromagnético e nos fornece uma perspectiva de construir o operador de polarização do fóton bem como seus autoestados em uma análise futura, relacionando-o com o operador de projeção de spin.

Delineamos também no capítulo 2 o formalismo alternativo proposto por Weinberg [11] para a descrição de partículas de massa não nula e spin arbitrário via soma direta de representações do grupo de Poincaré, que fornece as equações satisfeitas pelos campos e permite a construção de propagadores, conferindo uma abordagem convidativa à teoria de spins altos no âmbito da teoria da matriz S.

Com o objetivo de extrair informações referentes à interação de mésons com um campo eletromagnético externo no regime de baixas energias, introduzimos, no capítulo 3, as transformações unitárias de Foldy e Wouthuysen [12] e examinamos o limite não relativístico da equação DKP nos cenários de partícula livre e na presença de um campo externo [13]. Nesse contexto, descortina-se como perspectiva futura a possibilidade de investigarmos uma proposta de executar a transformação unitária FW de forma mais sistemática explorando os anéis da álgebra das matrizes γ que compõem a álgebra DKP, segundo a construção de Bargmann-Wigner.

No último capítulo, apresentamos a equação proposta por Majorana e Oppenheimer para o fóton [16], [17], [18] e examinamos a possibilidade de generalização desta abordagem para acomodar as equações de Proca. Com este intuito, construímos uma equação linear de primeira ordem, denominada PMO, estendendo o número de componentes dos campos e redefinindo as matrizes da teoria MO para introduzir massa à equação. Examinamos a álgebra subjacente a esta nova equação, verificando uma estrutura simplética, e construímos um operador de spin. Em base a este operador, investigamos o conteúdo de partícula da equação PMO, propondo uma possível interpretação física para a mesma, que a princípio descreveria um sistema composto por dois férmions não interagentes (convergindo para alguns resultados conhecidos da literatura, [23], [24], [25], em tratamentos de sistemas físicos envolvendo a equação DKP e a equação de Breit para um estado ligado de dois férmions). Estudamos ainda o limite não relativístico da equação PMO via transformações FW, nos casos livre e com interação com um campo eletromagnético externo, observando a semelhança entre os termos de acoplamento obtidos para esta teoria e os encontrados no caso da equação de Dirac.

Interpretando as equações de Proca como vínculos <u>lineares</u> entre as componentes do spinor que representaria um campo fermiônico, pretendemos ainda investigar a teoria PMO no contexto da <u>bosonização</u> de sistemas fermiônicos com autointeração, como o modelo de Thirring, em segunda quantização [47], [48].

Apêndice A

O Grupo de Lorentz e Representações Spinoriais

O grupo de Lorentz ocupa posição central na construção das equações de onda relativísticas para a descrição de partículas tanto na teoria clássica quanto na mecânica quântica, tendo em vista que estas equações devem ser covariantes. A seguir, apresentaremos de forma sucinta suas principais características.

Inicialmente, vamos introduzir o **espaço de Minkowski**, o qual consiste em um espaço real (métrico) quadridimensional que apresenta um invariante, denominado **"cone-de-luz"** (cujo vértice é a origem do sistema de coordenadas), definido da seguinte forma:

$$g_{\mu\nu}x^{\mu}x^{\nu} = 0, \tag{A.1}$$

onde $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, $x^{\mu} = (t, x, y, z)$ é um quadrivetor contravariante (em unidades naturais) e $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico definido por

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{A.2}$$

Os quadrivetores x^{μ} podem ser classificados de acordo com a região do cone-de-luz onde estão contidos:

$$g_{\mu\nu}x^{\mu}x^{\nu} = 0; \qquad \text{quadrivetor tipo-luz,}$$

$$g_{\mu\nu}x^{\mu}x^{\nu} < 0; \qquad \text{quadrivetor tipo-espaço,}$$

$$g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu > 0; \qquad \text{quadrivetor tipo-tempo.}$$

Analisando geometricamente as definições estabelecidas acima, observamos que quadrivetores tipo-luz correspondem a eventos mapeados sobre o cone-de--luz (estes eventos podem ser conectados à origem através de um sinal luminoso e intervalos que correspondem a quadrivetores deste tipo estão relacionados a trajetórias possíveis de partículas sem massa). Os quadrivetores tipo-tempo e tipo-espaço correspondem a eventos situados em 3 regiões desconexas:

$$\text{futuro absoluto;} \qquad g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu > 0; x^0 > 0,$$

$$\text{passado absoluto;} \qquad g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu > 0; x^0 < 0,$$

$$\text{região complementar;} \qquad g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu < 0,$$

sendo que os quadrivetores tipo-tempo são mapeados nas duas primeiras regiões (os intervalos que correspondem a quadrivetores deste tipo estão relacionados a possíveis caminhos percorridos por partículas de massa não nula) e os quadrivetores tipo-espaço são mapeados na região complementar (e não representam eventos físicos, pois violam causalidade).

A.1 Transformações de Lorentz

Uma **transformação de Lorentz** (TL) é uma transformação linear real que preserva a forma quadrática fundamental $g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$ e não mistura passado e futuro. Os quadrivetores x^μ se comportam, sob TL, da seguinte forma:

$$x^{\mu'} = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \tag{A.3}$$

onde $\Lambda^\mu{}_\nu$ são os elementos da matriz 4x4 que representa as TL.

Agora, como $g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$ é invariante,

$$g_{\alpha\beta}x^{\alpha'}x^{\beta'} = g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu,$$

$$g_{\alpha\beta}\Lambda^\alpha{}_\mu\Lambda^\beta{}_\nu x^\mu x^\nu = g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu,$$

$$g_{\alpha\beta}\Lambda^\alpha{}_\mu\Lambda^\beta{}_\nu = g_{\mu\nu}, \tag{A.4}$$

ou, em forma matricial,

$$\Lambda^T g\Lambda = g. \tag{A.5}$$

A equação (A.5) (bem como sua versão em componentes (A.4)) define uma transformação de Lorentz e permite-nos observar que transformações deste tipo são caracterizadas por **6 parâmetros independentes**.

Observação: multiplicando a equação (A.5) à esquerda por g temos

$$g\Lambda^T g\Lambda = g^2 = I;$$

logo, $g\Lambda^T$ é a inversa de $g\Lambda$. Assim, como a inversa à esquerda deve coincidir com a inversa à direita, segue

$$g\Lambda g\Lambda^T = I;$$

multiplicando a equação acima à esquerda por g, resulta

$$\Lambda g\Lambda^T = g,$$

ou, em componentes,

$$g^{\alpha\beta}\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta} = g^{\mu\nu},$$

que corresponde a uma relação equivalente a (A.5) e será útil quando fizermos a análise do setor ortócrono do grupo de Lorentz.

A partir de (A.5) podemos ver que as TL são **unimodulares**:

$$\det(\Lambda^T g\Lambda) = \det(g),$$

$$(\det(\Lambda))^2 \det(g) = \det(g),$$

$$\det(\Lambda) = \pm 1, \tag{A.6}$$

onde usamos $\det(\Lambda) = \det(\Lambda^T)$.

Com base na equação (A.6), pode-se classificar as TL em dois tipos: as transformações **próprias**(Λ_+), cujo determinante é +1, e as transformações **impróprias**(Λ_-), cujo determinante é -1.

Podemos também definir outras duas classes de TL: as transformações **ortócronas** ($\Lambda^{\uparrow}$) e as **não-ortócronas** ($\Lambda^{\downarrow}$). Para isso, fixamos em (A.4) os índices $\mu = 0$ e $\nu = 0$:

$$g_{00} = g_{\alpha\beta}\Lambda^{\alpha}{}_{0}\Lambda^{\beta}{}_{0},$$

de modo que

$$1 = (\Lambda^0{}_0)^2 - (\Lambda^1{}_0)^2 - (\Lambda^2{}_0)^2 - (\Lambda^3{}_0)^2,$$

$$(\Lambda^0{}_0)^2 = 1 + (\Lambda^1{}_0)^2 + (\Lambda^2{}_0)^2 + (\Lambda^3{}_0)^2 \geq 1$$

$$\Rightarrow \Lambda^0{}_0 \geq 1 \quad \text{ou} \quad \Lambda^0{}_0 \leq -1.$$

Assim, uma TL é dita **ortócrona** se $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ e **não-ortócrona** se $\Lambda^0{}_0 \leq -1$.

A.2 O Grupo de Lorentz Homogêneo

O conjunto de todas as transformações de Lorentz constitui um grupo denominado **grupo de Lorentz homogêneo** $L \equiv \{\Lambda\}$ onde Λ são as matrizes definidas por (A.5).

Para verificarmos que estas transformações satisfazem as propriedades de grupo, observemos que:

1. existe uma transformação de identidade $I^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$ tal que

$$\begin{aligned}(I^T g I)_{\mu\nu} &= (I^T)^\mu{}_\alpha g_{\alpha\beta} I^\beta{}_\nu \\ &= g_{\alpha\beta} I^\alpha{}_\mu I^\beta{}_\nu \\ &= g_{\alpha\beta} \delta^\alpha{}_\mu \delta^\beta{}_\nu \\ &= g_{\mu\nu};\end{aligned}$$

2. como $det(\Lambda) \neq 0$, as transformações são inversíveis, ou seja, existe uma transformação inversa Λ^{-1} tal que $\Lambda^{-1}\Lambda = I$,

$$\Lambda^T g \Lambda = g,$$

$$\Lambda^T g = g\Lambda^{-1},$$

$$g = (\Lambda^{-1})^T g \Lambda^{-1},$$

onde usamos $(\Lambda^T)^{-1} = (\Lambda^{-1})^T$ na última passagem;

3. o produto $\Lambda_1\Lambda_2$ de duas TL satisfaz a relação (A.5):

$$\begin{aligned}(\Lambda_1\Lambda_2)^T g(\Lambda_1\Lambda_2) &= \Lambda_2^T \underbrace{\Lambda_1^T g \Lambda_1}_{=g} \Lambda_2 \\ &= \Lambda_2^T g \Lambda_2 \\ &= g.\end{aligned}$$

Assim, temos que a transformação identidade, a transformação inversa e a composição de duas TL satisfazem a equação (A.5) e, portanto, são transformações de Lorentz; dessa forma, o conjunto de transformações definidas por (A.5) efetivamente constitui um grupo.

As transformações próprias constituem um subgrupo (L_+) do grupo de Lorentz homogêneo, pois:

1. $\det I = +1$, de modo que o elemento identidade é uma transformação própria;

2. se Λ é uma transformação própria, então

$$\det(\Lambda^{-1}\Lambda) = \det I$$
$$\det(\Lambda^{-1})\underbrace{\det(\Lambda)}_{=1} = 1$$
$$\Rightarrow \det(\Lambda^{-1}) = 1;$$

assim, a inversa de uma transformação própria também é própria;

3. se Λ_1 e Λ_2 são transformações próprias,

$$\det(\Lambda_1\Lambda_2) = \underbrace{\det(\Lambda_1)}_{=1}\underbrace{\det(\Lambda_2)}_{=1} = 1;$$

portanto, a composição de duas transformações próprias é própria.

O conjunto das TL impróprias (L_-) não constitui um subgrupo, pois não contém o elemento identidade e a composição de duas transformações impróprias resulta em uma transformação própria.

De modo semelhante às transformações próprias, o conjunto das transformações ortócronas ($L^\uparrow$) constitui um subgrupo do grupo de Lorentz homogêneo pois:

1. a transformação de identidade $I^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$ apresenta $I^0{}_0 = 1$ e, portanto, é ortócrona;

2. se Λ é uma transformação ortócrona, então, usando (A.5),

$$\Lambda^T g \Lambda = g,$$
$$\Lambda^T g = g\Lambda^{-1},$$
$$\Lambda^{-1} = g\Lambda^T g,$$

ou, em componentes,

$$(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = g^{\mu\alpha}(\Lambda^T)^\alpha{}_\beta g_{\beta\nu};$$

fazendo $\mu = \nu = 0$, temos

$$(\Lambda^{-1})^0{}_0 = \underbrace{g^{0\alpha}\Lambda^\beta{}_\alpha g_{\beta 0},}_{=\Lambda^0{}_0}$$
$$(\Lambda^{-1})^0{}_0 = \Lambda^0{}_0 > 0;$$

logo, a inversa é ortócrona;

3. se Λ_1 e Λ_2 são transformações ortócronas, então

$$(\Lambda_1\Lambda_2)^\mu{}_\nu = (\Lambda_1)^\mu{}_\alpha(\Lambda_2)^\alpha{}_\nu,$$

$$(\Lambda_1\Lambda_2)^0{}_0 = (\Lambda_1)^0{}_0(\Lambda_2)^0{}_0 + (\Lambda_1)^0{}_i(\Lambda_2)^i{}_0.$$

Definindo os vetores $\vec{\Lambda_1} = ((\Lambda_1)^0{}_1, (\Lambda_1)^0{}_2, (\Lambda_1)^0{}_3)$ e $\vec{\Lambda_2} = ((\Lambda_2)^1{}_0, (\Lambda_2)^2{}_0, (\Lambda_2)^3{}_0)$, podemos reescrever a equação acima como

$$(\Lambda_1\Lambda_2)^0{}_0 = (\Lambda_1)^0{}_0(\Lambda_2)^0{}_0 + \vec{\Lambda_1}.\vec{\Lambda_2}.$$

Agora, usando a desigualdade de Schwarz, temos

$$(\vec{\Lambda_1}.\vec{\Lambda_2})^2 \leq (\vec{\Lambda_1})^2(\vec{\Lambda_2})^2,$$

$$\left|\vec{\Lambda_1}.\vec{\Lambda_2}\right| \leq \sqrt{(\vec{\Lambda_1})^2(\vec{\Lambda_2})^2},$$

$$-\sqrt{(\vec{\Lambda_1})^2(\vec{\Lambda_2})^2} \leq \vec{\Lambda_1}.\vec{\Lambda_2} \leq \sqrt{(\vec{\Lambda_1})^2(\vec{\Lambda_2})^2};$$

portanto,

$$(\Lambda_1\Lambda_2)^0{}_0 \geq (\Lambda_1)^0{}_0(\Lambda_2)^0{}_0 - \sqrt{(\vec{\Lambda_1})^2(\vec{\Lambda_2})^2}.$$

Porém, utilizando a equação (A.5),

$$g_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta}{\Lambda_2}^\alpha{}_\mu{\Lambda_2}^\beta{}_\nu,$$

$$1 = {\Lambda_2}^0{}_0{\Lambda_2}^0{}_0 - \underbrace{{\Lambda_2}^i{}_0{\Lambda_2}^i{}_0}_{=(\vec{\Lambda_2})^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(\vec{\Lambda_2})^2} = \sqrt{({\Lambda_2}^0{}_0)^2 - 1}.$$

De forma semelhante, usando a forma alternativa da equação (A.5) (discutida na observação da seção A.1),

$$g^{\alpha\beta}{\Lambda_1}^\mu{}_\alpha{\Lambda_1}^\nu{}_\beta = g^{\mu\nu},$$

$${\Lambda_1}^0{}_0{\Lambda_1}^0{}_0 - \underbrace{{\Lambda_1}^0{}_i{\Lambda_1}^0{}_i}_{=(\vec{\Lambda_1})^2} = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{(\vec{\Lambda_1})^2} = \sqrt{({\Lambda_1}^0{}_0)^2 - 1}.$$

Assim, podemos escrever

$$(\Lambda_1\Lambda_2)^0{}_0 \geq (\Lambda_1)^0{}_0(\Lambda_2)^0{}_0 - \sqrt{((\Lambda_1{}^0{}_0)^2-1)((\Lambda_2{}^0{}_0)^2-1)}.$$

Entretanto, desenvolvendo o último termo, temos

$$\sqrt{((\Lambda_1{}^0{}_0)^2-1)((\Lambda_2{}^0{}_0)^2-1)} = \sqrt{(\Lambda_1{}^0{}_0)^2(\Lambda_2{}^0{}_0)^2+1-(\Lambda_1{}^0{}_0)^2-(\Lambda_2{}^0{}_0)^2};$$

completando o quadrado, segue

$$\sqrt{((\Lambda_1{}^0{}_0)^2-1)((\Lambda_2{}^0{}_0)^2-1)} = \underbrace{\sqrt{(1\pm\Lambda_1{}^0{}_0\Lambda_2{}^0{}_0)^2-(\Lambda_1{}^0{}_0\pm\Lambda_2{}^0{}_0)^2}}_{\geq\sqrt{(1\pm\Lambda_1{}^0{}_0\Lambda_2{}^0{}_0)^2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{((\Lambda_1{}^0{}_0)^2-1)((\Lambda_2{}^0{}_0)^2-1)} \geq \sqrt{(1\pm\Lambda_1{}^0{}_0\Lambda_2{}^0{}_0)^2}.$$

A expressão acima guarda um detalhe sutil, pois o sinal da igualdade só é válido se escolhermos o sinal negativo no radicando. De fato, se escolhermos o sinal positivo, a igualdade $\sqrt{(1+\Lambda_1{}^0{}_0\Lambda_2{}^0{}_0)^2-(\Lambda_1{}^0{}_0+\Lambda_2{}^0{}_0)^2}$ $=\sqrt{(1+\Lambda_1{}^0{}_0\Lambda_2{}^0{}_0)^2}$ é efetiva se, e somente se, $\Lambda_1{}^0{}_0=-\Lambda_2{}^0{}_0$, o que não é possível visto que Λ_1 e Λ_2 são transformações ortócronas (no caso da escolha do sinal negativo, tal problema não ocorre, pois a condição de igualdade neste caso é $\Lambda_1{}^0{}_0=\Lambda_2{}^0{}_0$, o que não viola a hipótese das transformações serem ortócronas). Assim, o sinal de igualdade na expressão acima está presente se escolhermos o sinal negativo no radicando, mas deve ser desconsiderado se escolhermos o sinal positivo.

Tendo em conta a discussão acima, podemos escrever

$$(\Lambda_1\Lambda_2)^0{}_0 \geq (\Lambda_1)^0{}_0(\Lambda_2)^0{}_0 - \sqrt{(1\pm\Lambda_1{}^0{}_0\Lambda_2{}^0{}_0)^2},$$

de modo que, desenvolvendo o lado direito da desigualdade,

$$(\Lambda_1\Lambda_2)^0{}_0 \geq (\Lambda_1)^0{}_0(\Lambda_2)^0{}_0 - \left|1\pm\Lambda_1{}^0{}_0\Lambda_2{}^0{}_0\right|.$$

Entretanto, como Λ_1 e Λ_2 são transformações ortócronas,

$$\left|1\pm\Lambda_1{}^0{}_0\Lambda_2{}^0{}_0\right| = \begin{cases} 1+\Lambda_1{}^0{}_0\Lambda_2{}^0{}_0, & \text{se escolhemos o sinal +;} \\ -1+\Lambda_1{}^0{}_0\Lambda_2{}^0{}_0, & \text{se escolhemos o sinal -.} \end{cases}$$

Assim, no caso em que o sinal negativo é escolhido, temos

$$(\Lambda_1\Lambda_2)^0{}_0 \geq (\Lambda_1)^0{}_0(\Lambda_2)^0{}_0 - (-1+\Lambda_1{}^0{}_0\Lambda_2{}^0{}_0)$$

$$\Rightarrow \quad (\Lambda_1\Lambda_2)^0{}_0 \geq 1.$$

Agora, se o sinal positivo é escolhido,

$$(\Lambda_1\Lambda_2)^0{}_0 > (\Lambda_1)^0{}_0(\Lambda_2)^0{}_0 - (1 + \Lambda_1{}^0{}_0\Lambda_2{}^0{}_0)$$

$$\Rightarrow \quad (\Lambda_1\Lambda_2)^0{}_0 > -1;$$

como visto no ínicio desta seção, a composição de duas TL (não necessariamente ortócronas) também consiste em uma TL, de modo que $(\Lambda_1\Lambda_2)^0{}_0 \geq 1$ ou $(\Lambda_1\Lambda_2)^0{}_0 \leq -1$. Assim, comparando com o resultado acima (em que se escolheu o sinal positivo) temos, obrigatoriamente, que $(\Lambda_1\Lambda_2)^0{}_0 \geq 1$, também neste caso.

Portanto, a composição de duas transformações ortócronas é também ortócrona, o que conclui a demostração das propriedades de grupo satisfeitas pelo conjunto das transformações ortócronas.

O conjunto das transformações não-ortócronas ($L^{\downarrow}$) não constitui um subgrupo, pois o elemento identidade não pertence a este conjunto e a composição de duas transformações não-ortócronas é ortócrona.

Dessa forma, os **setores do grupo de Lorentz homogêneo** são construídos a partir da intersecção dos conjuntos de transformações discutidos acima: $(L_+), (L_-), (L^{\uparrow}), (L^{\downarrow})$. Assim, temos os seguintes setores: $(\Lambda_+^{\uparrow})$, setor ortócrono próprio; $(\Lambda_+^{\downarrow})$, setor não-ortócrono próprio; $(\Lambda_-^{\uparrow})$, setor ortócrono impróprio; $(\Lambda_-^{\downarrow})$, setor não-ortócrono impróprio.

O **setor ortócrono próprio**, por ser formado pela intersecção de tranformações próprias e ortócronas, forma um subgrupo do grupo de Lorentz homogêneo e será nosso objeto de estudo nas seções subsequentes. Este subgrupo é denominado **grupo de Lorentz restrito** (L_p). Os demais setores não constituem subgrupos, pois envolvem transformações impróprias e não-ortócronas as quais, como discutido, não satisfazem propriedades de grupo. Estes setores, entretanto, estão relacionados a transformações de simetria importantes, como paridade e reversão temporal.

A.3 Homomorfismo entre SL(2,C) e L_p

Vamos destacar agora uma correspondência importante entre o grupo de Lorentz restrito L_p e o grupo de transformações lineares unimodulares bidimensionais $SL(2, C)$. Essa relação, i.e., um homomorfismo, exerce papel importante na construção de representações spinoriais para L_p, a qual discutiremos na próxima seção.

Um **isomorfismo** entre dois grupos G e $G^{'}$ é uma relação em que, para cada elemento $a \in G$, corresponde um, e somente um, elemento $a^{'} \in G^{'}$, de modo que a correspondência entre a e $a^{'}$ se preserva sob a lei de multiplicação, ou seja, $(ab)^{'} = a^{'}b^{'}$. Um **homomorfismo** entre os grupos G e $G^{'}$ é uma relação similar, que preserva produtos; porém, mais de um elemento de G pode corresponder ao mesmo elemento de $G^{'}$ (ou seja, a correspondência não é necessariamente bijetiva, como no isormofismo).

O grupo SL(2,C) é constituído por transformações lineares da forma:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

de modo que $ad - bc = 1$, onde $a, b, c, d \in C$.

Dessa forma, as transformações que compõem este grupo são caracterizadas por **6 parâmetros independentes**, assim como as transformações pertencentes ao L_p.

Vamos mostrar agora que podemos associar a uma transformação $\Lambda \in L_p$ os elementos $\pm A \in SL(2, c)$, de tal forma que a lei de multiplicação a seguir é preservada:

$$\pm(AB) \to \Lambda(AB) = \Lambda(A)\Lambda(B),$$

ou seja, temos um homomorfismo do tipo 2 para 1 entre $SL(2, C)$ e L_p.

Com este intuito, vamos construir uma matriz hermitiana

$$M = \sigma_\mu x^\mu, \tag{A.7}$$

onde σ_0 é a matriz identidade 2x2, σ_i são as matrizes de Pauli (i=1,2,3) e x^μ é um quadrivetor contravariante.

Tomando o determinante de M, temos

$$\begin{aligned} \det(M) &= \det(\sigma_\mu x^\mu) \\ &= (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 \\ &= g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu, \end{aligned}$$

que corresponde à forma quadrática invariante.

Se $A \in SL(2, C)$, temos que a transformação

$$M^{'} = AMA^{+} \tag{A.8}$$

resulta em uma matriz hermitiana $M^{'} = \sigma_\mu x^{\mu'}$.

Agora, observemos que

$$\begin{aligned}\det(M^{'}) &= \det(AMA^{+})\\ &= \underbrace{|\det A|^2}_{=1}\det(M)\\ &= \det M,\end{aligned}$$

ou seja, $g_{\mu\nu}(x^{\mu})^{'}(x^{\nu})^{'} = g_{\mu\nu}x^{\mu}x^{\nu}$.

Assim, a transformação em que as matrizes A atuam sobre M induz uma transformação dos quadrivetores, a qual mantém a forma quadrática $g_{\mu\nu}x^{\mu}x^{\nu}$ invariante, correspondendo, dessa maneira, a uma transformação de Lorentz. Esta relação entre as transformações efetuadas sobre M e as induzidas sobre os quadrivetores pode ser determinada de forma explícita a partir da equação (A.8):

$$\begin{gathered} M^{'} = AMA^{+},\\ \sigma_{\mu}x^{\mu^{'}} = A\sigma_{\nu}x^{\nu}A^{+},\\ \sigma_{\mu}(\Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}) = A\sigma_{\nu}A^{+}x^{\nu}\\ \Rightarrow \sigma_{\mu}\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = A\sigma_{\nu}A^{+}. \end{gathered} \tag{A.9}$$

Multiplicando a última equação por σ_{ρ} à esquerda e tomando o traço, obtemos

$$\begin{gathered}\sigma_{\rho}\sigma_{\mu}\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \sigma_{\rho}A\sigma_{\nu}A^{+},\\ \Lambda^{\mu}{}_{\nu}Tr(\sigma_{\rho}\sigma_{\mu}) = Tr(\sigma_{\rho}A\sigma_{\nu}A^{+}).\end{gathered}$$

Todavia, utilizando a propriedade $Tr(\sigma_{\alpha}\sigma_{\beta}) = 2\delta^{\alpha}{}_{\beta}$, resulta

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \frac{1}{2}Tr(\sigma_{\mu}A\sigma_{\nu}A^{+}). \tag{A.10}$$

Analisando a relação acima, podemos observar que os elementos A e $-A \in SL(2,C)$ correspondem à mesma transformação de Lorentz $\Lambda(A)$; por isso, dizemos que esta é uma correspondência do tipo 2 para 1.

Para concluir a demostração do homomorfismo, precisamos verificar que $\Lambda(A)$ pertence ao grupo de Lorentz restrito e que a lei de multiplicação é preservada (ou seja, $(AB) \rightarrow \Lambda(A)\Lambda(B) = \Lambda(AB)$).

De fato, observemos que:

1. dado o quadrivetor $x^{\mu} = (1,0,0,0)$ segue

$$M = \sigma_{\mu}x^{\mu} = \sigma_0$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow M' &= AMA^+ = AA^+ \\
&= \begin{bmatrix} |a|^2 + |b|^2 & ac^* + bd^* \\ ca^* + db^* & |c|^2 + |d|^2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
M' &= \sigma_\nu x^{\nu'} \\
&= \begin{bmatrix} x^{0'} + x^{3'} & x^{1'} - ix^{2'} \\ x^{1'} + ix^{2'} & x^{0'} - x^{3'} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Igualando as duas expressões matriciais para M', temos um sistema de equações que nos fornece, em particular, as seguintes relações:

$$\begin{cases} x^{0'} + x^{3'} = |a|^2 + |b|^2 > 0, \\ x^{0'} - x^{3'} = |c|^2 + |d|^2 > 0, \end{cases}$$

de onde resulta $x^{0'} > 0$. Entretanto, temos que $x^{0'} = \Lambda^0{}_\nu x^\nu = \Lambda^0{}_0$; portanto $\Lambda^0{}_0 > 0$ e, assim, $\Lambda(A)$ é naturalmente ortócrona;

2. a demonstração de que $\Lambda(A)$ é própria será apresentada ao final da próxima seção, pois a análise formal desta propriedade é facilitada com a introdução de spinores. De qualquer modo, podemos inferir que $\det(\Lambda(A)) = 1$ apelando ao fato de que o SL(2,C) é um **grupo conexo**[1], de modo que seus elementos A podem variar continuamente. Assim, analisando a equação (A.10), observamos que os elementos de matriz de $\Lambda(A)$ também podem variar continuamente e, portanto, a transformação $\Lambda(A)$ deve pertencer ao setor conexo do grupo de Lorentz homogêneo, que corresponde ao grupo de Lorentz restrito e, consequentemente, $\det(\Lambda(A)) = 1$;

3. considerando uma composição AB de elementos de SL(2,C) obtemos, com o auxílio da equação (A.9), a relação

$$\begin{aligned}
\sigma_\mu \Lambda^\mu{}_\nu(AB) &= (AB)\sigma_\nu(AB)^+ \\
&= A\underbrace{(B\sigma_\nu B^+)}_{=\sigma_\alpha \Lambda^\alpha{}_\nu(B)}A^+ \\
&= \underbrace{(A\sigma_\alpha A^+)}_{=\sigma_\mu \Lambda^\mu{}_\alpha(A)}\Lambda^\alpha{}_\nu(B) \\
&= \sigma_\mu \Lambda^\mu{}_\alpha(A)\Lambda^\alpha{}_\nu(B)
\end{aligned}$$

[1] Um grupo conexo é tal que, dado um elemento $g \in G$, podemos obter o elemento identidade a partir da variação contínua dos r parâmetros do grupo.

$$\Rightarrow \Lambda^{\mu}{}_{\nu}(AB) = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}(A)\Lambda^{\alpha}{}_{\nu}(B).$$

Logo, um produto AB em SL(2,C) induz uma composição $\Lambda(AB) = \Lambda(A)\Lambda(B)$ em L_p; portanto, temos efetivamente um mapeamento homomórfico entre os grupos SL(2,C) e L_p.

A.4 Representações Spinoriais do Grupo de Lorentz Restrito

As representações spinoriais do grupo de Lorentz restrito exercem papel fundamental na construção das equações de onda relativísticas que descrevem o comportamento de partículas. Por esta razão, vamos introduzir nesta seção o conceito de **representações de grupo** e definir **spinores**.

Consideremos, então, um grupo G com elementos $(a, b, c, ...)$. Se a cada elemento $a \in G$ podemos associar uma transformação $D(a)$ em um espaço vetorial linear, chamado de **espaço de representação**, de modo que a composição (ab) de dois elementos de G corresponde ao produto $D(a)D(b) = D(ab)$ no espaço de representação, ou seja, $ab \leftrightarrow D(a)D(b) = D(ab)$, então o conjunto de transformações $\{D(a)\}$ é chamado de **representação** do grupo G.

Dessa forma, como vimos na seção anterior, os elementos $A \in SL(2, C)$ formam uma representação bidimensional do grupo de Lorentz restrito L_p (esta representação, no entanto, é do tipo 2 para 1, pois as matrizes A e $-A$ estão relacionadas à mesma TL (Λ), como visto). Os vetores deste espaço de representação bidimensional, denotados por

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{bmatrix}, \quad \text{onde } \xi^1, \xi^2 \in C,$$

transformam-se de acordo com a lei:

$$\xi^{'} = A(\Lambda)\xi, \quad \text{onde } detA = 1. \tag{A.11}$$

Estes objetos geométricos do espaço de representação que se transformam sob a TL de acordo com (A.11), são chamados de **quadrispinores**. Em outras palavras, os quadrispinores são realizações das representações (irredutíveis) do grupo de Lorentz[2].

Vamos agora construir um invariante para spinores, análogo ao invariante $x_\mu x^\mu = g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$ para quadrivetores, introduzindo o "spinor métrico" $C_{\alpha\beta}$:

$$\xi^\alpha C_{\alpha\beta}\xi^\beta \equiv \text{invariante}.$$

[2]**Observação:** doravante, vamos nos referir aos quadrispinores apenas como spinores.

Dessa maneira, usando a lei de transformação (A.11), obtemos

$$\begin{aligned}\xi^\mu C_{\mu\nu}\xi^\nu &= \xi'^\alpha C_{\alpha\beta}\xi'^\beta \\ &= A^\alpha{}_\mu \xi^\mu C_{\alpha\beta} A^\beta{}_\nu \xi^\nu\end{aligned}$$

$$\Rightarrow C_{\mu\nu} = (A^T)^\mu{}_\alpha C_{\alpha\beta} A^\beta{}_\nu,$$

ou, em forma matricial,

$$C = A^T C A.$$

Esta equação matricial constitui um sistema possível e indeterminado, tal que uma solução possível é uma <u>matriz antissimétrica arbitrária</u>. De fato, assumindo que C é antissimétrica, temos

$$\begin{aligned}C_{\mu\nu} &= (A^T)^\mu{}_\alpha \underbrace{C_{\alpha\beta}}_{=-C_{\beta\alpha}} A^\beta{}_\nu \\ &= -\underbrace{(A^T)^\mu{}_\alpha}_{=A^\alpha{}_\mu} C_{\beta\alpha} \underbrace{A^\beta{}_\nu}_{=(A^T)^\nu{}_\beta} \\ &= -\underbrace{(A^T)^\nu{}_\beta C_{\beta\alpha} A^\alpha{}_\mu}_{=C_{\nu\mu}} \\ &= -C_{\nu\mu}.\end{aligned}$$

Logo, a equação matricial é consistente com a hipótese de que C é antissimétrica.

Assim, definimos nosso **spinor métrico** (C) como sendo

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = i\sigma_2. \tag{A.12}$$

Como $\det(C) \neq 0$, a matriz C é inversível e temos

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -i\sigma_2.$$

Tendo definido o spinor métrico, demonstraremos agora uma relação geral envolvendo matrizes 2x2, que será útil no transcorrer de nossos cálculos. Assim, se M é uma matriz 2x2 arbitrária, então

$$C^{-1}M^T C = M^{-1}\det(M), \quad \text{onde } C \text{ é o spinor métrico.} \tag{A.13}$$

Com efeito, escrevendo o primeiro membro da igualdade em componentes, multiplicado à esquerda por M,

$$\begin{aligned}
(MC^{-1}M^TC)_{ij} &= M_{ik}\underbrace{(C^{-1})_{kl}}_{=C_{lk}}(M^T)_{ln}C_{nj} \\
&= \underbrace{C_{lk}}_{=\epsilon_{lk}}\underbrace{C_{nj}}_{=\epsilon_{nj}}M_{ik}M_{nl} \\
&= \epsilon_{lk}\epsilon_{nj}M_{ik}M_{nl},
\end{aligned}$$

onde os termos ϵ_{ij} correspondem ao tensor de Levi-Civita de duas componentes.

Desenvolvendo a soma acima, temos

$$\begin{aligned}
(MC^{-1}M^TC)_{ij} &= \underbrace{\epsilon_{1j}}_{=\delta^2{}_j}(M_{i2}M_{11} - M_{i1}M_{12}) + \underbrace{\epsilon_{2j}}_{=-\delta^1{}_j}(M_{i2}M_{21} - M_{i1}M_{22}) \\
&= \delta^2{}_j(M_{i2}M_{11} - M_{i1}M_{12}) + \delta^1{}_j(M_{i1}M_{22} - M_{i2}M_{21}).
\end{aligned}$$

Se $i \neq j$, então $(MC^{-1}M^TC)_{ij} = 0$. Caso contrário, para $i = j$,

$$(MC^{-1}M^TC)_{ii} = \delta^2{}_i(M_{i2}M_{11} - M_{i1}M_{12}) + \delta^1{}_i(M_{i1}M_{22} - M_{i2}M_{21}),$$

de modo que, para $i = 1$ ou $i = 2$, resulta

$$(MC^{-1}M^TC)_{ii} = M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21} = \det(M).$$

Assim,

$$(MC^{-1}M^TC)_{ij} = \det(M)\delta^i{}_j,$$

ou, em forma matricial,

$$MC^{-1}M^TC = I\det(M),$$

de forma que, multiplicando à esquerda pela inversa de M, concluímos que

$$C^{-1}M^TC = M^{-1}\det(M).$$

Com o auxílio do spinor métrico, definamos agora os **spinores covariantes**:

$$\xi_\alpha = C_{\alpha\beta}\xi^\beta. \tag{A.14}$$

A lei de transformação destes spinores pode ser obtida a partir da lei de transformação dos contravariantes, expressa em (A.11),

$$
\begin{aligned}
\xi'_{\alpha} &= C_{\alpha\beta}\xi'^{\beta} \\
&= C_{\alpha\beta}A^{\beta}{}_{\nu}\xi^{\nu} \\
&= C_{\alpha\beta}A^{\beta}{}_{\nu}C^{\nu\mu}\xi_{\mu}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \xi'_{\alpha} = A_{\alpha}{}^{\mu}\xi_{\mu}. \tag{A.15}
$$

Em forma matricial, temos

$$
\begin{aligned}
\tilde{\xi}' &= C\xi' \\
&= CA\xi \\
&= \underbrace{CAC^{-1}}_{=C^{-1}AC}\tilde{\xi},
\end{aligned}
$$

ou ainda, lembrando que $\det A = 1$ e usando (A.13),

$$
\tilde{\xi}' = (A^T)^{-1}\tilde{\xi}. \tag{A.16}
$$

Observação: conforme já expresso acima, denotaremos os spinores covariantes em forma matricial com um til.

Gostaríamos de chamar a atenção para o fato de que o mapeamento homomórfico entre L_p e $SL(2,C)$ estabelece que o conjunto das matrizes $(A^T)^{-1}(\Lambda)$ também constitui uma representação de L_p (assim como as matrizes $A(\Lambda)$), pois estas matrizes são elementos de $SL(2,C)$. As representações $A(\Lambda)$ e $(A^T)^{-1}(\Lambda)$ são equivalentes, pois estão relacionadas por uma transformação de similaridade (como se observa no cálculo acima), sendo o mapeamento $A \to (A^T)^{-1}$ um automorfismo.

Observação: é possível construir uma forma bilinear invariante de Lorentz a partir dos spinores ξ e $\tilde{\eta}$:

$$
\begin{aligned}
\xi^{T'}\tilde{\eta}' &= \xi^T A^T (A^T)^{-1}\tilde{\eta} \\
&= \xi^T\tilde{\eta}.
\end{aligned}
$$

Sabendo que as componentes dos spinores ξ e $\tilde{\eta}$ podem ser relacionadas às componentes da função de onda de um férmion de spin 1/2 (cap.1), este invariante bilinear pode ser interpretado como uma partícula de spin 0, constituída por duas partículas de spin 1/2.

Da mesma forma que as matrizes A e $(A^T)^{-1}$ formam representações do grupo de Lorentz restrito, as matrizes A^* e $(A^+)^{-1}$ também exercem esse papel (pois todas são elementos do SL(2,C)). Essas duas novas representações também são equivalentes entre si, como se verifica com o auxílio de (A.13):

$$C^{-1}A^*C = [(A^*)^T]^{-1}\underbrace{\det((A^*)^T)}_{=1} = (A^+)^{-1}.$$

Entretanto, as representações A^* (ou $(A^+)^{-1}$) e A (ou $(A^T)^{-1}$) não são equivalentes, visto que não há transformação de similaridade que as conecta. Podemos então construir novos spinores, os quais denotaremos por **spinores pontuados**, associados ao espaço de representação referente às transformações $A^*(\Lambda)$,

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} \xi^{\dot{1}} \\ \xi^{\dot{2}} \end{bmatrix}.$$

A lei de transformação destes spinores é expressa por

$$\dot{\xi}' = A^*\dot{\xi}, \tag{A.17}$$

ou seja, spinores pontuados transformam-se como o conjugado dos spinores não pontuados.

Podemos determinar o tensor métrico pontuado a partir do invatiante bilinear $\xi^{\dot{\alpha}}C_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\xi^{\dot{\beta}}$:

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}^T\dot{C}\dot{\xi} &= (\dot{\xi}')^T\dot{C}\dot{\xi}' \\
&= (A^*\dot{\xi})^T\dot{C}(A^*\dot{\xi}) \\
&= \dot{\xi}^T(A^*)^T\dot{C}A^*\dot{\xi}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (A^*)^T\dot{C}A^* = \dot{C}.$$

Contudo, tomando o conjugado da equação acima, obtemos a mesma equação satisfeita pelo spinor métrico não pontuado,

$$A^T\dot{C}^*A = \dot{C}^*,$$

de modo que $\dot{C}^* = C$; como C é real, resulta que os spinores métricos pontuado e não pontuado coincidem ($\dot{C} = C$).

Seguindo o mesmo procedimento que utilizamos para definir os spinores covariantes não pontuados, podemos introduzir os **spinores covariantes pontuados** através da relação

$$\xi_{\dot{\alpha}} = C_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\xi^{\dot{\beta}}. \tag{A.18}$$

A lei de transformação dos spinores $\xi_{\dot{\alpha}}$ segue de (A.17):

$$\begin{aligned}(\tilde{\dot{\xi}})' &= C\dot{\xi}' \\ &= CA^*\dot{\xi} \\ &= CA^*C^{-1}\tilde{\dot{\xi}},\end{aligned}$$

ou, utilizando (A.13),

$$(\tilde{\dot{\xi}})' = (A^+)^{-1}\tilde{\dot{\xi}}. \tag{A.19}$$

Em componentes, a equação acima fica

$$\xi'_{\dot{\alpha}} = A^*{}_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}}\xi_{\dot{\beta}}. \tag{A.20}$$

Salientamos que os quadrispinores pontuados e não pontuados introduzidos correspondem a spinores de grau 1 . Podemos construir spinores de maior grau a partir da composição (produto) de spinores de grau 1, sendo que estes novos spinores podem apresentar índices pontuados e não pontuados. Assim, o grau de um spinor composto não o define completamente e, para especificá-lo, usamos um par de índices (k, l), onde k corresponde ao número de índices não pontuados e l ao número de índices pontuados:

$$\underbrace{\eta^{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2...\dot{\beta}_l}}_{(k,l)} = \xi^{\alpha_1}\omega^{\alpha_2}...\theta^{\alpha_k}\zeta^{\dot{\beta}_1}\lambda^{\dot{\beta}_2}...\delta^{\dot{\beta}_l}.$$

Os spinores mistos de maior grau, como este último, transformam-se seguindo as leis de transformação (A.17) e (A.20) dos spinores não pontuados e pontuados que os compõem,

$$\eta^{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2...\dot{\beta}_l} = A^{\alpha_1}{}_{\hat{\alpha_1}}A^{\alpha_2}{}_{\hat{\alpha_2}}...A^{\alpha_k}{}_{\hat{\alpha_k}}A^{*\dot{\alpha}_1}{}_{\hat{\dot{\alpha}}_1}A^{*\dot{\alpha}_2}{}_{\hat{\dot{\alpha}}_2}...A^{*\dot{\alpha}_l}{}_{\hat{\dot{\alpha}}_l}\eta^{\hat{\alpha_1}\hat{\alpha_2}...\hat{\alpha_k}\hat{\dot{\beta}}_1\hat{\dot{\beta}}_2...\hat{\dot{\beta}}_l}. \tag{A.21}$$

Por fim, retomemos o item 2 da demonstração do homomorfismo entre o $SL(2, C)$ e o L_p, encaminhada na seção anterior. Devemos mostrar que a transformação de Lorentz $\Lambda(A)$ definida pela equação (A.9) é ortócrona, sustentando nossa argumentação em termos das propriedades de grupo de L_p e $SL(2, C)$.

Para isso, reescrevamos (A.9) em termos das componentes spinoriais (a matriz σ corresponde a um spinor misto de grau 2 e, portanto, (A.9) é uma equação spinorial):

$$\sigma_\mu^{\alpha\dot{\alpha}}\Lambda^\mu{}_\nu = A^\alpha{}_\beta\sigma_\nu^{\beta\dot{\beta}}A^{*\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}.$$

Esta equação pode ser escrita ainda de uma forma mais conveniente se introduzirmos uma nova matriz T e um produto direto[3] envolvendo as matrizes A e A^*,

$$T\Lambda = (A \otimes A^*)T,$$

onde T é a matriz definida por

$$T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

De fato, podemos verificar que a equação acima corresponde à equação anterior, componente a componente. Fazendo $\nu = 0$ na equação, temos

$$\sigma_0^{\alpha\dot{\alpha}}\Lambda^0{}_0 + \sigma_1^{\alpha\dot{\alpha}}\Lambda^1{}_0 + \sigma_2^{\alpha\dot{\alpha}}\Lambda^2{}_0 + \sigma_3^{\alpha\dot{\alpha}}\Lambda^3{}_0 = A^\alpha{}_\beta \sigma_0^{\beta\dot{\beta}} A^{*\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}$$

de modo que

$$(\delta^\alpha{}_1\delta^{\dot{\alpha}}{}_1 + \delta^\alpha{}_2\delta^{\dot{\alpha}}{}_2)\Lambda^0{}_0 + (\delta^\alpha{}_1\delta^{\dot{\alpha}}{}_2 + \delta^\alpha{}_2\delta^{\dot{\alpha}}{}_1)\Lambda^1{}_0 + (-i\delta^\alpha{}_1\delta^{\dot{\alpha}}{}_2 + i\delta^\alpha{}_2\delta^{\dot{\alpha}}{}_1)\Lambda^2{}_0$$

$$+(\delta^\alpha{}_1\delta^{\dot{\alpha}}{}_1 - \delta^\alpha{}_2\delta^{\dot{\alpha}}{}_2)\Lambda^3{}_0 = A^\alpha{}_\beta A^{*\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}(\delta^\beta{}_1\delta^{\dot{\beta}}{}_1 + \delta^\beta{}_2\delta^{\dot{\beta}}{}_2),$$

resultando o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \Lambda^0{}_0 + \Lambda^3{}_0 &=& A^1{}_1 A^{*1}{}_1 + A^1{}_2 A^{*1}{}_2, \\ \Lambda^1{}_0 - i\Lambda^2{}_0 &=& A^1{}_1 A^{*2}{}_1 + A^1{}_2 A^{*2}{}_2, \\ \Lambda^1{}_0 + i\Lambda^2{}_0 &=& A^2{}_1 A^{*1}{}_1 + A^2{}_2 A^{*1}{}_2, \\ \Lambda^0{}_0 - \Lambda^3{}_0 &=& A^2{}_1 A^{*2}{}_1 + A^2{}_2 A^{*2}{}_2. \end{cases}$$

Porém, este mesmo sistema de equações é fornecido pela equação matricial equivalente proposta acima, pois

$$(A \otimes A^*)T_{11} = T\Lambda_{11} \quad \to \Lambda^0{}_0 + \Lambda^3{}_0 = A^1{}_1 A^{*1}{}_1 + A^1{}_2 A^{*1}{}_2,$$

$$(A \otimes A^*)T_{21} = T\Lambda_{21} \quad \to \Lambda^1{}_0 - i\Lambda^2{}_0 = A^1{}_1 A^{*2}{}_1 + A^1{}_2 A^{*2}{}_2,$$

[3] O produto direto de duas matrizes A e B pode ser definido como

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \cdots & a_{nn}B \end{bmatrix},$$

ou, em componentes, $(A \otimes B)_{ij,kl} = A_{ik}B_{jl}$.

$$(A \otimes A^*)T_{31} = T\Lambda_{31} \quad \rightarrow \Lambda^1{}_0 + i\Lambda^2{}_0 = A^2{}_1 A^{*1}{}_1 + A^2{}_2 A^{*1}{}_2,$$

$$(A \otimes A^*)T_{41} = T\Lambda_{41} \quad \rightarrow \Lambda^0{}_0 - \Lambda^3{}_0 = A^2{}_1 A^{*2}{}_1 + A^2{}_2 A^{*2}{}_2.$$

De forma similar, verifica-se que os outros sistemas oriundos de (A.9) (associados a $\nu = 1, 2, 3$) são reproduzidos pela equação matricial proposta, o que garante a equivalência entre as equações. Assim, a demonstração de que Λ definida em (A.9) é uma transformação própria torna-se bastante simples, visto que, tomando o determinante da equação equivalente,

$$\det[(A \otimes A^*)T] = \det(T\Lambda),$$

$$\det(A \otimes A^*) \det T = \det T \det \Lambda;$$

contudo, como $\det T = -4i \neq 0$,

$$\det \Lambda = \det(A \otimes A^*).$$

Uma vez que $\det(A \otimes A^*) = (\det A)^{\dim(A^*)} (\det A^*)^{\dim(A)}$ e $\det A = \det A^* = 1$, resulta

$$\det \Lambda = 1,$$

concluindo a demonstração do homomorfismo entre $SL(2, C)$ e L_p.

A.4.1 Relação entre Spinores e Quadrivetores

Consideremos o spinor $\zeta^{\alpha\dot{\beta}}$ o qual, assim como um quadrivetor, apresenta quatro componentes independentes (duas associadas ao índice α e duas associadas ao índice $\dot{\beta}$). Dessa maneira, um quadrivetor x^μ e um spinor $\zeta^{\alpha\dot{\beta}}$ constituem realizações de representações (irredutíveis) equivalentes do grupo de Lorentz restrito e, portanto, é possível encontrarmos uma relação entre suas componentes.

Para isso, observemos que a lei de transformação (A.8) da matriz hermitiana M, definida por (A.7), pode ser escrita em componentes como

$$M'^{\alpha\dot{\alpha}} = A^\alpha{}_\beta A^{*\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} M^{\beta\dot{\beta}}.$$

Esta lei de transformação corresponde precisamente à lei que define a transformação de um spinor misto $\zeta^{\alpha\dot{\beta}}$, conforme expresso em (A.21). Assim, renomeando M por ζ em (A.7), temos a seguinte relação entre o quadrivetor x^μ e o spinor $\zeta^{\alpha\dot{\beta}}$:

$$\zeta^{\alpha\dot{\beta}} = \sigma_\mu^{\alpha\dot{\beta}} x^\mu. \tag{A.22}$$

Multiplicando à esquerda por σ_ρ e tomando o traço (suprimindo os índices spinoriais), obtemos a relação inversa

$$Tr(\sigma_\rho \zeta) = x^\mu \underbrace{Tr(\sigma_\rho \sigma_\mu)}_{=2\delta^\rho{}_\mu},$$

isto é,

$$x^\mu = \frac{1}{2} Tr(\sigma_\mu \zeta). \tag{A.23}$$

Vamos verificar agora uma relação bastante útil entre os spinores mistos $\zeta^{\alpha\dot{\beta}}$, dada por

$$\zeta^{\alpha\dot{\beta}} \zeta_{\lambda\dot{\beta}} = \delta^\alpha{}_\lambda x^\mu x_\mu. \tag{A.24}$$

De fato, temos

$$\begin{aligned}
\zeta^{\alpha\dot{\beta}} \zeta_{\lambda\dot{\beta}} &= \zeta^{\alpha\dot{\beta}} C_{\lambda\mu} C_{\dot{\beta}\dot{\nu}} \zeta^{\mu\dot{\nu}} \\
&= (C_{1\dot{\nu}} \zeta^{\alpha\dot{1}} + C_{2\dot{\nu}} \zeta^{\alpha\dot{2}})(C_{\lambda 1} \zeta^{1\dot{\nu}} + C_{\lambda 2} \zeta^{2\dot{\nu}}) \\
&= (\delta^2{}_{\dot{\nu}} \zeta^{\alpha\dot{1}} - \delta^1{}_{\dot{\nu}} \zeta^{\alpha\dot{2}})(-\delta^2{}_\lambda \zeta^{1\dot{\nu}} + \delta^1{}_\lambda \zeta^{2\dot{\nu}}) \\
&= (\zeta^{\alpha\dot{2}} \zeta^{1\dot{1}} - \zeta^{\alpha\dot{1}} \zeta^{1\dot{2}}) \delta^2{}_\lambda + (\zeta^{\alpha\dot{1}} \zeta^{2\dot{2}} - \zeta^{\alpha\dot{2}} \zeta^{2\dot{1}}) \delta^1{}_\lambda \\
&= (\zeta^{2\dot{2}} \zeta^{1\dot{1}} - \zeta^{2\dot{1}} \zeta^{1\dot{2}}) \delta^\alpha{}_2 \delta^2{}_\lambda + (\zeta^{1\dot{1}} \zeta^{2\dot{2}} - \zeta^{1\dot{2}} \zeta^{2\dot{1}}) \delta^\alpha{}_1 \delta^1{}_\lambda \\
&= \underbrace{(\zeta^{2\dot{2}} \zeta^{1\dot{1}} - \zeta^{2\dot{1}} \zeta^{1\dot{2}})}_{=det\zeta = x^\mu x_\mu} \delta^\alpha{}_\lambda \\
&= x^\mu x_\mu \delta^\alpha{}_\lambda.
\end{aligned}$$

Concluindo esta seção, gostaríamos de convidar o leitor interessado em uma interpretação geométrica dos spinores a estudar a referência [44] que aborda, de forma primorosa, a análise spinorial sob uma linguagem geométrica bastante envolvente.

A.5 Representações Irredutíveis

Spinores simétricos constituem a base das representações de ordens mais altas de $SL(2, C)$. Podemos então construir estes espaços lineares através de **monômios**, que são objetos construídos a partir de spinores de ordem 1 pontuados e não pontuados $(\xi_\alpha, \eta_{\dot{\alpha}})$ como segue:

$$\Theta_{mm'}(j, j') = a(j, j'; m, m') \xi_1^{j+m} \xi_2^{j-m} \eta_{\dot{1}}^{j'+m'} \eta_{\dot{2}}^{j'-m'}, \tag{A.25}$$

onde $j, j^{'} = 0, 1/2, 1, 3/2, ...,\ m = -j, -j+1, ..., j-1, j,\ m^{'} = -j^{'}, -j^{'} + 1, ..., j^{'} - 1, j^{'}$ e $a(j, j^{'}; m, m^{'})$ é uma constante de normalização.

Assim, os índices j e $j^{'}$ comportam-se como os autovalores de spin (são inteiros e semi-inteiros não negativos) e os índices m e $m^{'}$ como as projeções de spin na direção z.

Os monômios $\Theta_{mm'}(j, j^{'})$ definidos em (A.25) são as componentes de um spinor simétrico covariante $\tilde{\Theta}$. Podemos construir, de forma análoga, um spinor contravariate Φ:

$$\Phi^{mm^{'}}(j, j^{'}) = a(j, j^{'}; m, m^{'}) \psi^{1^{j+m}} \psi^{2^{j-m}} \kappa^{\dot{1}^{j^{'}+m^{'}}} \kappa^{\dot{2}^{j^{'}-m^{'}}}. \tag{A.26}$$

Contraindo os spinores $\tilde{\Theta}$ e Φ temos

$$\Theta_{mm'} \Phi^{mm^{'}} = a^2 (\xi_1 \psi^1)^{j+m} (\xi_2 \psi^2)^{j-m} (\eta_{\dot{1}} \kappa^{\dot{1}})^{j^{'}+m^{'}} (\eta_{\dot{2}} \kappa^{\dot{2}})^{j^{'}-m^{'}}; \tag{A.27}$$

porém, para que esta expressão seja invariante ela deve assumir a forma

$$\Theta_{mm'} \Phi^{mm^{'}} = c(j, j^{'}) (\xi_\mu \psi^\mu)^{2j} (\eta_{\dot{\nu}} \kappa^{\dot{\nu}})^{2j^{'}},$$

onde $c(j, j^{'})$ é uma constante e, como vimos anteriormente, $\xi_\nu \psi^\mu$ e $\eta_{\dot{\eta}} \kappa^{\dot{\nu}}$ são formas bilineares invariantes. Assim, efetuando a expansão binomial[4] de $\xi_\nu \psi^\mu$ e $\eta_{\dot{\eta}} \kappa^{\dot{\nu}}$, obtemos

$$\begin{aligned} \Theta_{mm'} \Phi^{mm^{'}} \quad = \quad & \frac{c(j, j^{'})(2j)!(2j^{'})!}{(j+m)!(j-m)!(j'+m')!(j'-m')!} (\xi_1 \psi^1)^{j+m} (\xi_2 \psi^2)^{j-m}. \\ & .(\eta_{\dot{1}} \kappa^{\dot{1}})^{j^{'}+m^{'}} (\eta_{\dot{2}} \kappa^{\dot{2}})^{j^{'}-m^{'}}. \end{aligned} \tag{A.28}$$

Dessa forma, comparando (A.27) e (A.28) obtemos uma expressão para o fator de normalização,

$$a(j, j^{'}; m, m^{'}) = \left[\frac{c(j, j^{'})(2j)!(2j^{'})!}{(j+m)!(j-m)!(j'+m')!(j'-m')!} \right]^{1/2}.$$

O fator $c(j, j^{'})(2j)!(2j^{'})!$ é comum a todas as componentes dos spinores $\tilde{\Theta}(j, j^{'})$ e $\Phi(j, j^{'})$, pois depende apenas de j e $j^{'}$, de modo que podemos suprimi--lo fazendo $c(j, j^{'}) = [(2j)!(2j^{'})!]^{-1}$.

[4]Expansão Binomial

$$(p+q)^n = \sum_{x=0}^{n} \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}.$$

Com isso, os spinores simétricos covariantes (A.25), que constituem a base dos espaços de representação de ordens superiores, podem ser expressos por

$$\Theta_{mm'}(j,j^{'}) = \frac{1}{[(j+m)!(j-m)!(j'+m')!(j'-m')!]^{1/2}} \xi_1^{j+m} \xi_2^{j-m} \eta_{\dot{1}}^{j^{'}+m^{'}} \eta_{\dot{2}}^{j^{'}-m^{'}} . \tag{A.29}$$

Similarmente, para os spinores simétricos contravariantes (A.26), obtemos

$$\Phi^{mm^{'}}(j,j^{'}) = \frac{1}{[(j+m)!(j-m)!(j'+m')!(j'-m')!]^{1/2}} \psi^{1^{j+m}} \psi^{2^{j-m}} \kappa^{\dot{1}^{j^{'}+m^{'}}} \kappa^{\dot{2}^{j^{'}-m^{'}}} . \tag{A.30}$$

Observemos que, para j e $j^{'}$ fixos, o spinor $\Phi(j,j^{'})$ apresenta $(2j+1)(2j^{'}+1)$ componentes, o que corresponde à dimensão do espaço linear gerado por este spinor. Além disso, notemos que, fazendo $j=1/2$ e $j^{'}=0$, temos $\Phi(1/2,0)=\psi$ e, analogamente, fazendo $j=0$ e $j^{'}=1/2$, segue $\Phi(0,1/2)=\dot{\kappa}$.

Agora, sob a influência de TL, os spinores $\Phi(j,j^{'})$ se transformam por intermédio de matrizes $(2j+1)(2j^{'}+1)\times(2j+1)(2j^{'}+1)$, as quais denotaremos por $D^{jj^{'}}(A)$, da seguinte forma:

$$\Phi^{'jj^{'}} = (D^{jj^{'}}(A))^{mm^{'}}{}_{nn^{'}} \Phi^{nn^{'}}(j,j^{'}). \tag{A.31}$$

As matrizes $D^{jj^{'}}$ são parametrizadas exclusivamente pelas matrizes $A(\Lambda)$, como indicado.

Para construirmos os elementos da matriz $D^{jj^{'}}(A)$ basta desenvolvermos a equação (A.31); entretanto, como este procedimento é padrão, embora tedioso, apenas o descreveremos aqui. Assim, utilizam-se as leis de transformação dos quadrispinores ψ^{μ} e $\kappa^{\dot{\mu}}$ (equações (A.11) e (A.17), respectivamente) e a expansão binomial para desenvolvermos o lado esquerdo da equação e, desse modo, relacionamos os elementos de $D^{jj^{'}}(A)$ do lado direito da equação com os respectivos coeficientes de A e A^* que surgem do lado esquerdo, após recolecionarmos os termos oriundos da expansão binomial. Como os polinômios envolvendo os elementos de ψ e $\dot{\kappa}$ são independentes, os elementos de $D^{jj^{'}}(A)$ referentes a índices pontuados e não pontuados são obtidos separadamente (o que indica que D^{jj} pode ser expresso como um produto direto de representações D^{j0} e D^{0j}).

Dessa maneira, fazendo $j^{'}=0$, obtemos a matriz $D^{j0}(A)$ que transforma apenas spinores não pontuados contravariantes:

$$\chi^m(j) = \frac{1}{[(j+m)!(j-m)!(j'+m')!(j'-m')!]^{1/2}} \psi^{1^{j+m}} \psi^{2^{j-m}}; \tag{A.32}$$

similarmente, fazendo $j = 0$, obtemos a matriz $D^{0j'}(A)$ que transforma apenas spinores pontuados contravariantes:

$$\chi^{m'}(j') = \frac{1}{[(j+m)!(j-m)!(j'+m')!(j'-m')!]^{1/2}} \kappa^{\dot{1}^{j'+m'}} \kappa^{\dot{2}^{j'-m'}}. \quad (A.33)$$

No caso geral, a matriz $D^{jj'}(A)$ é obtida pelo produto direto das matrizes $D^{j0}(A)$ e $D^{0j'}(A)$:

$$D^{jj'}(A) = D^{j0}(A) \otimes D^{0j'}(A), \quad (A.34)$$

atuando sobre spinores contravariantes da forma:

$$\Phi^{mm'}(j, j') = \chi^m(j)\dot{\chi}^{m'}(j').$$

Em suma, temos que as matrizes $D^{jj'}(A)$ constituem representações irredutíveis finitas do grupo $SL(2, C)$. Essas representações são caracterizadas pelos números j e j', os quais podem assumir valores positivos inteiros ou semi-inteiros, de modo que a dimensão de uma representação (j, j') é dada por $(2j + 1)(2j' + 1)$. As matrizes $D^{jj'}(A)$ podem ser expressas como um produto direto das matrizes $D^{j0}(A)$ e $D^{0j'}(A)$, de acordo com (A.34). Em geral, a representação $D^{jj'}(A)$ não é unitária.

A.5.1 Propriedades das Matrizes $D^{jj'}(A)$

A seguir, faremos uma breve análise das principais características das matrizes $D^{jj'}(A)$.

Consideremos, então, as representações $D^{j0}(A)$ e $D^{0j}(A)$. Os spinores $\chi(j)$ e $\dot{\chi}(j)$ são construídos a partir das componentes dos spinores ψ e $\dot{\kappa}$ que, por sua vez, transformam-se mediante a atuação das matrizes A e A^*, respectivamente, de acordo com (A.11) e (A.17). Dessa maneira, as leis de transformação dos spinores $\chi(j)$ e $\dot{\chi}(j)$ ficam expressas por

$$\chi'^m(j) = \frac{1}{[(j+m)!(j-m)!]^{1/2}} (A^1{}_n \psi^n)^{j+m} (A^2{}_l \psi^l)^{j-m}, \quad (A.35)$$

$$\dot{\chi}'^m(j) = \frac{1}{[(j+m)!(j-m)!]^{1/2}} (A^{*\dot{1}}{}_{\dot{n}} \kappa^{\dot{n}})^{j+m} (A^{*\dot{2}}{}_{\dot{l}} \kappa^{\dot{l}})^{j-m}. \quad (A.36)$$

Por outro lado, as TL são induzidas sobre os spinores $\chi(j)$ e $\dot{\chi}(j)$ através das matrizes $D^{j0}(A)$ e $D^{0j}(A)$, respectivamente,

$$\chi' = D^{j0}(A)\chi(j), \quad (A.37)$$

$$\dot{\chi}'(j) = D^{0j}(A)\dot{\chi}(j). \tag{A.38}$$

Assim, a partir de (A.35) e (A.36), verifica-se que, fazendo a troca $A \to A^*$, as componentes de χ se transformam como as componentes de $\dot{\chi}$ e vice-versa, de modo que, transcrevendo esta informação para as equações (A.37) e (A.38), obtemos

$$D^{j0}(A^*) = D^{0j}(A) \quad \text{e} \quad D^{0j}(A) = D^{j0^*}(A).$$

Temos então a propriedade

$$D^{j0}(A^*) = D^{j0^*}(A).$$

Portanto, as matrizes $D^{jj'}(A)$ e $D^{j'j}(A)$ formam um <u>par conjugado</u> entre si:

$$D^{jj'}(A) = (D^{j'j}(A))^*. \tag{A.39}$$

Logo, se $j = j'$, então a transformação é real.

Como as matrizes $D^{j0}(A)$ e $D^{0j}(A)$ estão relacionadas entre si por (A.39), é suficiente estudarmos apenas as propriedades de D^{j0}, pois as propriedades de $D^{jj'}$ decorrem de forma natural.

Examinemos então as principais propriedades das transformações $D^{j0}(A)$, que denotaremos doravante por $D^j(A)$.

Consideremos a transformação identidade $A = I$ atuando sobre o spinor ψ, cujas componentes formam os elementos de $\chi(j)$. Assim,

$$\chi'^m(j) = \frac{1}{[(j+m)!(j-m)!]^{1/2}}(\delta^1{}_n\psi^n)^{j+m}(\delta^2{}_l\psi^l)^{j-m}$$

$$\Rightarrow \chi'^m(j) = \chi^m(j).$$

Utilizando (A.37), verifica-se que a matriz $D^j(I)$ corresponde à própria identidade,

$$D^{j\mu}{}_\nu(I) = \delta^\mu{}_\nu. \tag{A.40}$$

Analogamente, consideremos a atuação de uma composição de transformações A_2A_1 sobre ψ, de modo que o efeito sobre as componentes de $\chi(j)$ é

$$\chi'^m(j) = \frac{1}{[(j+m)!(j-m)!]^{1/2}}(A_2{}^1{}_nA_1{}^n{}_k\psi^k)^{j+m}(A_2{}^2{}_aA_1{}^a{}_b\psi^b)^{j-m}, \tag{A.41}$$

o que, por outro lado, corresponde à transformação induzida por $D^j(A_2A_1)$:

$$\chi'^m = D^j(A_2A_1)^m{}_n\chi^n(j). \tag{A.42}$$

Todavia, podemos construir este mesmo spinor $\chi^{'m}(j)$ através da atuação sucessiva das transformações A_1 e A_2 sobre os quadrispinores:

$$\begin{aligned}
\chi^{''a}(j) &= \frac{1}{[(j+m)!(j-m)!]^{1/2}}(\underbrace{A_1{}^1{}_n\psi^n}_{=\eta^1})^{j+a}(\underbrace{A_1{}^2{}_l\psi^l}_{=\eta^2})^{j-a} \\
&= \frac{1}{[(j+m)!(j-m)!]^{1/2}}(\eta^1)^{j+a}(\eta^2)^{j-a},
\end{aligned}$$

correspondendo a

$$\chi^{''a}(j) = D^j(A_1)^a{}_n\chi^n(j),$$

$$\begin{aligned}
\chi^{'m}(j) &= \frac{1}{[(j+m)!(j-m)!]^{1/2}}(A_2{}^1{}_n\eta^n)^{j+m}(A_2{}^2{}_l\eta^l)^{j-m} \\
&= \frac{1}{[(j+m)!(j-m)!]^{1/2}}(A_2{}^1{}_nA_1{}^n{}_a\psi^a)^{j+m}(A_2{}^2{}_lA_1{}^l{}_b\psi^b)^{j-m},
\end{aligned}$$

o que corresponde a

$$\begin{aligned}
\chi^{'m}(j) &= D^j(A_2)^m{}_a\chi^{''a}(j) \\
&= D^j(A_2)^m{}_aD^j(A_1)^a{}_n\chi^\nu(j).
\end{aligned}$$

Comparando a última equação com (A.42), segue

$$D^j(A_2)D^j(A_1) = D^j(A_2A_1). \tag{A.43}$$

Como consequência imediata de (A.40) e (A.43), temos

$$D^j(A^{-1})D^j(A) = D^j(A^{-1}A) = I$$

$$\Rightarrow D^j(A^{-1}) = D^j(A)^{-1}. \tag{A.44}$$

De modo semelhante, temos

$$D^j(A^T) = D^j(A)^T. \tag{A.45}$$

Consideremos ainda uma transformação dos quadrispinores da forma $\psi \to aA\psi$, onde a é uma constante complexa e A uma transformação de Lorentz; o efeito desta transformação sobre o spinor $\chi(j)$ manifesta-se como segue:

$$\begin{aligned}
\chi^{'m}(j) &= \frac{1}{[(j+m)!(j-m)!]^{1/2}}(aA^1{}_n\psi^n)^{j+m}(aA^2{}_l\psi^l)^{j-m} \\
&= a^{2j}\frac{1}{[(j+m)!(j-m)!]^{1/2}}(A^1{}_n\psi^n)^{j+m}(A^2{}_l\psi^l)^{j-m} \\
&= a^{2j}D^j(A)^m{}_n\chi^n(j)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow D^j(aA) = a^{2j} D^j(A). \tag{A.46}$$

Assim,

$$\begin{aligned} D^{j_1 j_2}(aA) &= D^{j_1 0}(aA) \otimes D^{0 j_2}(aA) \\ &= D^{j_1 0}(aA) \otimes D^{j_2 0}(aA)^* \\ &= a^{2j_1} a^{2j_2 *} D^{j_1 j_2}(A). \end{aligned}$$

Fazendo $a = -1$ na expressão acima, observa-se que, se $j_1 + j_2$ é inteiro, a representação (j_1, j_2) de $SL(2, C)$ é *single-valued* e, se $j_1 + j_2$ é semi-inteiro, a representação é *double-valued*.

Sabemos que A^{-1} e A^T estão relacionadas através de (A.13). Usando (A.43), (A.44) e (A.45) (e lembrando que $A^T, A^{-1} \in SL(2, C)$), encontramos uma relação de equivalência entre as matrizes $D^j(A)^{-1}$ e $D^j(A)^T$:

$$D^j(C^{-1}) D^j(A)^T D^j(C) = D^j(A)^{-1}. \tag{A.47}$$

Consideremos, por fim, as matrizes $D^j(C)$ e $D^j(C^{-1})$, responsáveis pelo levantamento e abaixamento dos índices. A partir de (A.14) e de sua inversa, obtemos

$$\begin{aligned} \chi_m(j) &= \frac{1}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} \xi_1^{j+m} \xi_2^{j-m} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} (C_{1k}\xi^k)^{j+m} (C_{2l}\xi^l)^{j-m} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} (\xi^2)^{j+m} (-\xi^1)^{j-m} \\ &= (-1)^{j-m} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} (\xi^1)^{j-m} (\xi^2)^{j+m}}_{=\chi^{-m}(j)} \\ &= (-1)^{j-m} \delta^{-m}{}_n \chi^n(j) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (D^j(C))_{mn} = (-1)^{j-m} \delta^{-m}{}_n, \tag{A.48}$$

$$\begin{aligned} \chi^m(j) &= \frac{1}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} (\xi^1)^{j+m} (\xi^2)^{j-m} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} (C^{1k}\xi_k)^{j+m} (C^{2l}\xi_l)^{j-m} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}(-\xi^2)^{j+m}(\xi^1)^{j-m} \\
&= (-1)^{j+m}\delta_{-m}{}^{n}\chi_n(j)
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow (D^j(C^{-1}))_{mn} = (-1)^{j+m}\delta_{-m}{}^{n}. \tag{A.49}
$$

Para as matrizes $D^{0j}(A) \equiv D^j(A^*)$, responsáveis pela transformação dos spinores pontuados $\dot{\chi}(j)$, as propriedades são as mesmas que encontramos para $D^{j0}(A)$.

A.6 Os Geradores do Grupo de Lorentz

Uma transformação de Lorentz infinitesimal é expressa por

$$
\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} + w^{\mu}{}_{\nu}, \tag{A.50}
$$

onde $w^{\mu}{}_{\nu}$ deve ser antissimétrico para que (A.4) seja satisfeita. Dessa forma, os $w^{\mu}{}_{\nu}$ constituem os 6 parâmetros que caracterizam uma TL: $w^0{}_1, w^0{}_2, w^0{}_3, w^1{}_2$, $w^2{}_3$ e $w^3{}_1$. Conforme ilustrado a seguir, os $w^0{}_i$ estão relacionados aos *boosts* e os $w^i{}_j$ às rotações espaciais.

De fato, consideremos um *boost* na direção z:

$$
\left\{
\begin{array}{lcl}
x^{'0} &=& \gamma(x^0 - \beta x^3), \\
x^{'3} &=& \gamma(x^3 - \beta x^0),
\end{array}
\right.
$$

onde $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$ e $\beta = v/c$.

Fazendo β infinitesimal, segue

$$
\left\{
\begin{array}{lcl}
x^{'0} &=& x^0 - \beta x^3, \\
x^{'3} &=& x^3 - \beta x^0.
\end{array}
\right.
$$

Por outro lado, substituindo (A.50) em (A.3),

$$
x^{'\mu} = x^{\mu} + w^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}. \tag{A.51}
$$

Assim, comparando (A.51) com o *boost* em z logo acima, os únicos termos não nulos envolvem $w^0{}_3$ (i.e. $w^0{}_3 = -\beta$).

Analogamente, considerando uma rotação infinitesimal em torno do eixo z:

$$
\left\{
\begin{array}{lcl}
x^{'1} &=& x^1 + \alpha x^2, \\
x^{'2} &=& -\alpha x^1 + x^2.
\end{array}
\right.
$$

Comparando com (A.51), os únicos termos não nulos envolvem ${w^1}_2$ (i.e. ${w^1}_2 = \alpha$).

Construiremos a seguir os geradores associados aos *boosts* e às rotações.

Para que as equações de movimento preservem sua forma sob transformações de Lorentz homogêneas, devemos exigir que a **densidade lagrangiana** $\check{L}$ do sistema seja um escalar de Lorentz, pois as equações de movimento são obtidas a partir desta função, via princípio variacional:

$$\check{L}(\phi_r^{'}, \partial_\alpha(x^{'\mu})) = \check{L}(\phi_r, \partial_\alpha(x^\mu)), \tag{A.52}$$

onde $\phi_r(x^\mu)$ são os r campos que descrevem o sistema.

Sob uma transformação infinitesimal, definimos a **variação total** do campo $\phi_r(x^\mu)$ por

$$\delta_T\phi_r(x^\mu) = \phi_r^{'}(x^{'\mu}) - \phi_r(x^\mu). \tag{A.53}$$

Então, se $S_{rs}(w^{\mu\nu})$ é a matriz antissimétrica que induz a transformação infinitesimal sobre os campos $\phi_r(x^\mu)$,

$$\begin{aligned}
\phi_r^{'}(x^{'\mu}) &= S_{rs}(w^{\alpha\beta})\phi_s(x^\mu) \\
&= \left({\delta^r}_s + \frac{1}{2}S_{rs}^{\alpha\beta}w_{\alpha\beta}\right)\phi_s(x^\mu) \\
&= \phi_r(x^\mu) + \frac{1}{2}S_{rs}^{\alpha\beta}w_{\alpha\beta}\phi_s(x^\mu).
\end{aligned} \tag{A.54}$$

Logo,

$$\delta_T\phi_r(x^\mu) = \frac{1}{2}S_{rs}^{\alpha\beta}w_{\alpha\beta}\phi_s(x^\mu). \tag{A.55}$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}
\delta_T\phi_r(x^\mu) &= \phi_r^{'}(x^{'\mu}) - \phi_r(x^\mu) \\
&= \underbrace{(\phi_r^{'}(x^{'\mu}) - \phi_r(x^{'\mu}))}_{=\delta\phi_r(x^{'\mu})} + \underbrace{(\phi_r(x^{'\mu}) - \phi_r(x^\mu))}_{=\partial_\alpha\phi_r\delta x^\alpha} \\
&= \delta\phi_r(x^{'\mu}) + \partial_\alpha\phi_r \underbrace{\delta x^\alpha}_{=w^{\alpha\beta}x_\beta} \\
&= \delta\phi_r(x^{'\mu}) + w^{\alpha\beta}x_\beta\partial_\alpha\phi_r,
\end{aligned}$$

onde expandimos $\phi_r(x^{'\mu})$ em série de Taylor até primeira ordem em δx^μ e usamos (A.50). Porém, sob transformações infinitesimais, a variação da forma funcional do campo (mantendo-se as coordenadas constantes) deve ser a mesma nos referenciais inerciais com e sem linha, ou seja, $\delta\phi_r(x'^\mu) \approx \delta\phi_r(x^\mu)$, tal que podemos reescrever a expressão acima como

$$\delta_T\phi_r(x^\mu) = \delta\phi_r(x^\mu) + w^{\alpha\beta}x_\beta\partial_\alpha\phi_r. \tag{A.56}$$

De posse dessas relações, podemos explorar a invariância da densidade lagrangiana:

$$\delta_T\check{L} = \delta\check{L}(x^\mu) + (\partial_\alpha\check{L})\delta x^\alpha = 0. \tag{A.57}$$

Contudo, observemos que

$$\delta\check{L}(x^\mu) = \frac{\partial\check{L}}{\partial\phi_r}\delta\phi_r + \frac{\partial\check{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\delta(\partial_\mu\phi_r),$$

de forma que, recorrendo às equações de Euler-Lagrange[5] satisfeitas pelos campos ϕ_r, segue

$$\begin{aligned}
\delta\check{L}(x^\mu) &= \partial_\mu\left(\frac{\partial\check{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\right)\delta\phi_r + \frac{\partial\check{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\delta(\partial_\mu\phi_r) \\
&= \partial_\mu\left(\frac{\partial\check{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\delta\phi_r\right) \\
&= \partial_\mu\left(\frac{\partial\check{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}(\delta_T\phi_r - w^{\alpha\beta}x_\beta\partial_\alpha\phi_r)\right) \\
&= \partial_\mu\left(\frac{\partial\check{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\left(\frac{1}{2}S^{\alpha\beta}_{rs}w_{\alpha\beta}\phi_s - w^{\alpha\beta}x_\beta\partial_\alpha\phi_r\right)\right),
\end{aligned}$$

onde usamos (A.55) e (A.56), lembrando que a variação dos campos e de suas derivadas se dá a ponto fixo.

Em contrapartida, temos também

$$\begin{aligned}
(\partial_\alpha\check{L})\delta x^\alpha &= \partial_\alpha(\check{L}\delta x^\alpha) - \check{L}\partial_\alpha(\delta x^\alpha) \\
&= \partial_\alpha(\check{L}w^{\alpha\beta}x_\beta) - \check{L}w^{\alpha\beta}\underbrace{\partial_\alpha x_\beta}_{=g_{\alpha\beta}},
\end{aligned}$$

[5] A **ação** é a função definida por

$$S = \int \check{L}(\phi_r, \partial_\mu\phi_r, x^\mu)d^4x,$$

de forma que, exigindo que a ação seja um extremo (princípio variacional), determinamos as equações de movimento conhecidas como equações de Euler-Lagrange:

$$\delta S = 0 \Rightarrow \partial_\mu\left(\frac{\partial\check{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi)}\right) - \frac{\partial\check{L}}{\partial_\alpha\phi} = 0.$$

sendo que, explorando a antissimetria de $w^{\mu\nu}$, o segundo termo se anula e, então,

$$(\partial_\alpha \check{L})\delta x^\alpha = \partial_\alpha(\check{L} w^{\alpha\beta} x_\beta).$$

Portanto, compondo as duas relações acima, retornamos a (A.57) e obtemos a <u>relação de continuidade</u>

$$\partial_\alpha \left(\frac{\partial \check{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi_r)} \left(\frac{1}{2} S_{\mu\nu,rs} w^{\mu\nu} \phi_s - w^{\mu\nu} x_\nu \partial_\mu \phi_r \right) + \check{L} w^{\alpha\beta} x_\beta \right) = 0.$$

Usando a antissimetria de $w^{\mu\nu}$, podemos desenvolver a expressão acima:

$$\partial_\alpha \left[\frac{1}{2} w^{\mu\nu} \left(\frac{\partial \check{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi_r)} (S_{\mu\nu,rs}\phi_s + (x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)\phi_r) + \check{L}(\delta^\alpha{}_\mu x_\nu - \delta^\alpha{}_\nu x_\mu) \right) \right] = 0$$

$$\partial_\alpha \left[w^{\mu\nu} \left(\frac{\partial \check{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi_r)} S_{\mu\nu,rs}\phi_s + x_\mu \underbrace{\left(\frac{\partial \check{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi_r)} \partial_\nu \phi_r - \check{L}\delta^\alpha{}_\nu \right)}_{=\tau^\alpha{}_\nu} - x_\nu \underbrace{\left(\frac{\partial \check{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi_r)} \partial_\mu \phi_r - \check{L}\delta^\alpha{}_\mu \right)}_{=\tau^\alpha{}_\mu} \right) \right] = 0$$

$$\partial_\alpha \left[w_{\mu\nu} \left(\frac{\partial \check{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi_r)} S^{\mu\nu}{}_{rs}\phi_s + (x^\mu \tau^{\alpha\nu} - x^\nu \tau^{\alpha\mu}) \right) \right] = 0$$

ou, como $w_{\mu\nu}$ é arbitrário,

$$\partial_\alpha M^{\alpha\mu\nu} = 0, \tag{A.58}$$

onde o **tensor de energia-momento** $\tau^{\mu\nu}$ é definido por

$$\tau^{\mu\nu} = \frac{\partial \check{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)} \partial^\nu \phi_r - \check{L} g^{\mu\nu}, \tag{A.59}$$

sendo a **quadricorrente conservada** (corrente de Noether) expressa por

$$M^{\alpha\mu\nu} = \frac{\partial \check{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi_r)} S^{\mu\nu,rs}\phi_s + (x^\mu \tau^{\alpha\nu} - x^\nu \tau^{\alpha\mu}). \tag{A.60}$$

A partir da equação de continuidade, podemos determinar as **cargas conservadas** (cargas de Noether). Assim, assumindo que os campos $\phi_r(x^\mu)$ evanescem para $\vec{x} \to \infty$, integramos (A.58) sobre todo o espaço e recorremos ao teorema de Gauss:

$$\partial_t \int_{V\to\infty} M^{0\mu\nu} d^3x + \underbrace{\int_{V\to\infty} \partial_i M^{i\mu\nu} d^3x}_{=\int_{S\to\infty} M^{i\mu\nu} n^i dS \to 0} = 0$$

$$\Rightarrow \partial_t \int_{V\to\infty} M^{0\mu\nu} d^3x = 0.$$

Deste modo, as cargas conservadas são escritas como

$$M^{\mu\nu} = \int_{V\to\infty} M^{0\mu\nu} d^3x. \tag{A.61}$$

As cargas de Noether (A.61) definem os geradores (clássicos) das transformações homogêneas, visto que podemos determinar a varição $\delta\phi_r$ dos campos sob transformações de Lorentz infinitesimais através dos parênteses de Poisson entre as cargas conservadas e os campos:

$$\left\{\phi_r(x^\rho), \frac{1}{2} w_{\mu\nu} M^{\mu\nu}\right\}_{\text{clássico}} = \delta\phi_r(x^\rho).$$

Recorrendo a (A.55) e (A.56),

$$\{\phi_r(x^\mu), M^{\mu\nu}\}_{\text{clássico}} = S^{\mu\nu}_{rs}\phi_s(x^\rho) + (x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu)\phi_r(x^\rho). \tag{A.62}$$

Agora, para acessarmos o cenário da teoria quântica, efetuamos o procedimento de primeira quantização de forma que os parêntes de Poisson traduzem-se em comutadores, enquanto os campos $\phi_r(x^\mu)$ correspondem a operadores que atuam sobre os vetores de estado. Assim, com base na relação (A.62), podemos propor os **geradores das transformações de Lorentz homogêneas** no contexto quântico da seguinte forma:

$$M_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) + i\hat{S}_{\mu\nu}. \tag{A.63}$$

Os geradores definidos acima, assim como os parâmetros $w^{\mu\nu}$, são antissimétricos e compõem um conjunto de 6 geradores independentes. Podemos classificar os geradores em duas categorias:

$$J_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} M_{jk}, \tag{A.64}$$

$$N_i = M_{0i}, \tag{A.65}$$

onde $i, j, k = (1, 2, 3)$.

Os geradores J_i estão associados a rotações espaciais e os geradores N_i relacionam-se a *boosts* de Lorentz.

As relações de comutação que definem a álgebra dos geradores $M_{\mu\nu}$ são expressas por[6]

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -i(g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} - g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma}). \tag{A.66}$$

Dessa forma, a partir de (A.66), obtêm-se as relações de comutação para J_i e N_i:

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k, \tag{A.67}$$

$$[J_i, N_j] = i\epsilon_{ijk}N_k, \tag{A.68}$$

$$[N_i, N_j] = -i\epsilon_{ijk}J_k. \tag{A.69}$$

Observação: notemos que a equação (A.67) evidencia o fato de que os geradores J_k obedecem à álgebra de momento angular e, portanto, são efetivamente os geradores de rotações.

A partir da composição de TL infinitesimais, podemos construir transformações finitas. Assim, consideremos uma transformação infinitesimal da forma

$$l = 1 - \frac{1}{2}\vec{M}.\hat{n}\delta\varphi,$$

onde $\vec{M}$ é a matriz geradora da transformação, $\hat{n}$ é o versor que define o eixo da rotação e $\delta\varphi$ é o "ângulo" de rotação. Assim, para construir uma transformação finita parametrizada por um "ângulo" φ, efetuamos $\varphi/\delta\varphi$ transformações infinitesimais:

$$L = (1 - \frac{1}{2}\vec{M}.\hat{n}\delta\varphi)^{\varphi/\delta\varphi}.$$

Tomando o limite em que $\delta\varphi \to 0$,

$$L = [\lim_{\delta\varphi\to 0}(1 - \frac{1}{2}\vec{M}.\hat{n}\delta\varphi)^{1/\delta\varphi}]^{\varphi},$$

de modo que, realizando a mudança de variáveis $\delta a = -\frac{1}{2}\vec{M}.\hat{n}\delta\varphi$, segue

$$L = [\underbrace{\lim_{\delta a\to 0}(1 + \delta a)^{1/\delta a}}_{=e}]^{\varphi}$$

[6] Estas relações são demonstradas no apêndice B.

$$\Rightarrow L = e^{-\frac{1}{2}\vec{M}.\hat{n}\varphi}. \tag{A.70}$$

Portanto, podemos construir *boosts* e rotações finitas a partir dos operadores

$$L_b = e^{-\frac{1}{2}\vec{N}.\hat{n}\chi}, \tag{A.71}$$

$$L_r = e^{-\frac{1}{2}\vec{J}.\hat{n}\theta}, \tag{A.72}$$

respectivamente, onde χ é um ângulo hiperbólico que parametriza o *boost* e θ um ângulo trigonométrico que parametriza a rotação.

Para finalizar, vamos construir os geradores de $SL(2,C)$ associados aos geradores N e J de L_p.

Consideremos, primeiramente, um *boost* Λ infinitesimal que leva a um referencial com "velocidade" $\vec{\beta}$ em relação ao referencial inercial de repouso:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x^{'0} & = & x^0 - \vec{\beta}.\vec{x}, \\ x^{'i} & = & x^i - \beta^i x^0. \end{array} \right.$$

Sabemos que o efeito desta transformação sobre os spinores mistos $\zeta^{\alpha\dot{\beta}} = \xi^\alpha \eta^{\dot{\beta}}$ é dado por (A.21) (escrita abaixo em forma matricial)

$$\zeta^{'} = A\xi\dot{\eta}A^{+}.$$

Entretanto, A deve ser da forma $A(\Lambda) = 1 + \delta$, onde δ é um elemento infinitesimal. Então, desprezando termos de ordem quadrática em δ, segue

$$\zeta^{'} = \zeta + \delta\zeta + \zeta\delta^{+}. \tag{A.73}$$

Agora, usando (A.22) em forma matricial e o *boost* definido acima,

$$\begin{array}{lcl} \zeta^{'} & = & \vec{\sigma}.\vec{x}^{'} + x^{0'} I \\ & = & \vec{\sigma}.(\vec{x} - \vec{\beta}x^0) + (x^0 - \vec{\beta}.\vec{x}) \end{array}$$

$$\Rightarrow \zeta^{'} = \zeta - (\vec{\sigma}x^0 + \vec{x}).\vec{\beta}. \tag{A.74}$$

Comparando (A.73) e (A.74), temos

$$\delta\zeta + \zeta\delta^{+} = -(\vec{\sigma}x^0 + \vec{x}).\vec{\beta},$$

de modo que, substituindo ζ na expressão acima,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \delta + \delta^{+} & = & -\vec{\sigma}.\vec{\beta}, \\ \delta\vec{\sigma} + \vec{\sigma}\delta^{+} & = & -\vec{\beta}. \end{array} \right.$$

A solução deste sistema de equações consiste em

$$\delta = \delta^{+} = -\frac{1}{2}\vec{\sigma}.\vec{\beta}.$$

Dessa maneira, a matriz de transformação $A(\Lambda)$ é da forma

$$A(\Lambda) = 1 - \frac{1}{2}\vec{\sigma}.\vec{\beta}, \tag{A.75}$$

onde $\vec{\beta}$ é infinitesimal.

Seguindo o mesmo procedimento que nos levou a (A.70), podemos construir a matriz de transformação finita $A(\Lambda)$ de $SL(2,C)$ a partir de (A.75)

$$A_b(\Lambda) = e^{-\frac{1}{2}\vec{\sigma}.\hat{n}\eta}. \tag{A.76}$$

Esta matriz $A_b(\Lambda)$ corresponde ao gerador, no $SL(2,C)$, de um *boost* de Lorentz finito ao longo do eixo $\hat{n}$ e é parametrizado por η (parâmetro denominado rapidez).

Observemos que, usando a propriedade das matrizes de Pauli

$$(\vec{\sigma}.\hat{n})^{l} = \begin{cases} 1, & \text{se } l\text{=par}, \\ \vec{\sigma}.\hat{n}, & \text{se } l\text{=ímpar}, \end{cases}$$

podemos reescrever (A.76) expandindo a exponencial,

$$A_b(\Lambda) = \cosh(\frac{\eta}{2}) - \vec{\sigma}.\hat{n}\text{senh}(\frac{\eta}{2}). \tag{A.77}$$

De modo rigorosamente análogo ao que fizemos acima para um *boost* de Lorentz, podemos construir o gerador de rotações no $SL(2,C)$, resultando em

$$A_r(\Lambda) = e^{\frac{i}{2}\vec{\sigma}.\hat{n}\theta}, \tag{A.78}$$

onde θ é um ângulo trigonométrico que parametriza a rotação e $\hat{n}$ define o eixo de rotação.

Expandindo a exponencial em (A.78), e usando novamente a propriedade das matrizes de Pauli indicada anteriormente, obtemos

$$A_r(\Lambda) = \cos(\frac{\theta}{2}) + i\vec{\sigma}.\hat{n}\text{sen}(\frac{\theta}{2}). \tag{A.79}$$

Devemos enfatizar que as matrizes A_b definidas em (A.76) são hermitianas e as matrizes A_r definidas em (A.78) são unitárias, ou seja, o conjunto dos *boosts* de Lorentz constituem o setor hermitiano de $SL(2,C)$, ao passo que o conjunto de rotações compõe o setor unitário. Por isso, podemos ver que as representações $D^{jj'}(\Lambda)$, em geral, não são unitárias, conforme comentamos anteriormente.

A.7 Referências do Apêndice

As referências deste capítulo são elencadas a seguir:

[28] Corson, E. M. *"Introduction to tensors, spinors and relativistic wave equations"*. Segunda edição, Chelsea Publishing Company, 1953.

[29] Berestetskii, V. B.; Pitaevskii, L. P.; Lifshitz, E. M. *"Quantum Electrodynamics"*. Segunda edição, Butterworth-Heinemann, 1982.

[31] Novozhilov, Y. V. *"Introduction to Elementary Particle Theory"*. Pergamon Press, 1975.

[32] Greiner, W. *"Relativistic Quantum Mechanics: Wave Equations"*. Terceira edição, Springer, 2000.

[33] Greiner, W.; Reinhardt, J. *"Field Quantization"*. Springer, 1996.

[38] Mandl, F.; Shaw, G. *"Quantum Field Theory"*. John Wiley and Sons, 1984.

[39] Ryder, L. H. *"Quantum Field Theory"*. Segunda edição, Cambridge University Press, 1996.

[40] Barut, A. O. *"Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles"*. Dover Publications, 1980.

[41] Stancu, F. *"Group Theory in Subnuclear Physics"*. Oxford University Press, 1996.

[43] Ohnuki, Y. *"Unitary Representations of the Poincaré Group and Relativistic Wave Equations"*. World Scientific Publishing, 1988.

[44] Penrose, R.; Rindler, W. *"Spinors And Space-Time"*. Volume 1, Cambridge University Press, 1984.

[45] DeWitt, B. S. et all, *"Relativity, Groups and Topology"*. Gordon and Breach Science Publishers, 1964.

[46] Naimark, M. A. *"Linear Representations of the Lorentz Group"*. Pergamon Press, 1964.

Apêndice B

Representações Unitárias do Grupo de Poincaré

Nosso objetivo neste apêndice consiste em fazer uma breve digressão de alguns tópicos referentes ao **grupo de Poincaré**, que consiste no grupo de simetria principal da mecânica quântica relativística e exerce papel fundamental na elaboração do formalismo subjacente à teoria de spins altos. Vamos enfatizar em particular as **representações unitárias** deste grupo, no contexto envolvendo partículas de massa não nula, fornecendo os subsídios necessários para o estudo do formalismo desenvolvido por Weinberg (discutido no capítulo 2).

B.1 O Grupo de Poincaré Clássico

No apêndice A discutimos o grupo de Lorentz homogêneo, que compreende rotações (hiperbólicas e trigonométricas) no espaço-tempo de Minkowski e preserva a forma quadrática invariante $(x^\mu - y^\mu)^2$. Pode-se, porém, estender este grupo homogêneo para acomodar também **translações** no espaço-tempo $x^{'\mu} = a^\mu + \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$, construindo assim o **grupo de Poincaré** (ou grupo de Lorentz não homogêneo).

Conforme vimos anteriormente, o grupo de Lorentz pode ser particionado em setores desconexos: $\Lambda^\uparrow_+$ (ortócrono próprio), $\Lambda^\downarrow_+$ (não-ortócrono próprio), $\Lambda^\uparrow_-$ (ortócrono impróprio) e $\Lambda^\downarrow_-$ (não-ortócrono impróprio). Esta divisão permanece válida também para o grupo não homogêneo, de modo que podemos representar o grupo de Poincaré (D) esquematicamente como segue:

$$D = D_+^\uparrow + \underbrace{PTD_+^\uparrow}_{=D_+^\downarrow} + \underbrace{PD_+^\uparrow}_{=D_-^\uparrow} + \underbrace{TD_+^\uparrow}_{=D_-^\downarrow};$$

onde P e T representam as transformações de paridade e reversão temporal, respectivamente.

O **setor ortócrono próprio** $D_+^\uparrow$ é o único que constitui um subgrupo do grupo de Poincaré (como visto no contexto do grupo de Lorentz homogêneo); portanto, doravante estaremos sempre trabalhando com este setor em nossa discussão e faremos a seguir uma breve análise deste grupo.

Um elemento $g = (a, \Lambda)$ de $D_+^\uparrow$ é definido por uma translação espaço-temporal a^μ e uma transformação de Lorentz ortócrona e própria $\Lambda^\mu{}_\nu$. Dessa forma, cada elemento g é caracterizado por **10 parâmetros** independentes: 4 associados à translação e 6 relativos às transformações de Lorentz (conforme visto para o grupo homogêneo no apêndice A).

A **lei de composição** entre elementos pertencentes a $D_+^\uparrow$ é expressa por:

$$(a_1, \Lambda_1)(a_2, \Lambda_2) = (a_1 + \Lambda_1 a_2, \Lambda_1 \Lambda_2); \tag{B.1}$$

onde os índices 1 e 2 acima referem-se aos elementos abstratos g_1 e g_2 (não correspondem a índices de Lorentz, os quais foram suprimidos na expressão)[1].

Observa-se que fazendo a_1 e a_2 nulos, naturalmente recupera-se a lei de composição para o grupo de Lorentz, que corresponde ao grupo homogêneo, conforme comentamos anteriormente. Agora, fazendo $\Lambda_1 = I$ e $a_2 = 0$, obtemos

$$(a_1, I)(0, \Lambda_2) = (a_1, \Lambda_2),$$

de modo que uma **transformação de Poincaré**[2] arbitrária compreende o produto ordenado de uma **transformação de Lorentz** e uma **translação**, nesta sequência.

---

[1]Esta lei de composição entre elementos de $D_+^\uparrow$ pode ser expressa matricialmente se introduzirmos uma representação não unitária:

$$(a, \Lambda) \to \begin{pmatrix} \Lambda & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[2]Daqui em diante, por simplicidade, vamos nos referir às transformações $g = (a, \Lambda)$ pertencentes a $D_+^\uparrow$ como transformações de Poincaré.

B.1.1 Geradores do Grupo de Poincaré ($D_+^\uparrow$)

No apêndice anterior, examinamos os geradores do grupo de Lorentz através da análise de transformações infinitesimais e obtivemos os operadores $M_{\mu\nu}$ definidos em (A.63). Estes operadores compõem um conjunto de 6 geradores independentes J_i e N_i, expressos em (A.64) e (A.65) respectivamente, responsáveis por **rotações e *boosts***, os quais correspondem às transformações homogêneas do grupo de Poincaré $D_+^\uparrow$. Dessa forma, necessitamos construir apenas os geradores relativos às transformações não homogêneas do grupo (translações).

Seguindo o mesmo procedimento adotado no apêndice A, definimos uma **translação infinitesimal** como segue:

$$x^{'\mu} = x^\mu + \epsilon^\mu. \tag{B.2}$$

Diferentemente do caso envolvendo transformações homogêneas, abordado no apêndice anterior, os campos $\phi_r(x^\mu)$ preservam-se sob translações, ou seja $\phi_r^{'}(x^{'\mu}) = \phi_r(x^\mu)$, de forma que a variação total do campo é nula:

$$\delta_T \phi_r(x^\mu) = 0.$$

Dessa maneira, observemos que

$$\delta_T \phi_r(x^\alpha) = \delta\phi_r(x^\alpha) + \delta x^\mu \partial_\mu \phi_r(x^\alpha) = 0,$$

de modo que a variação da forma funcional dos campos fica expressa por

$$\delta\phi_r(x^\alpha) = -\epsilon^\mu \partial_\mu \phi_r(x^\alpha).$$

Recorrendo agora à invariância da lagrangiana, temos

$$\delta\check{L}(x^\mu) + (\partial_\mu \check{L})\delta x^\mu = 0,$$

de forma que, desenvolvendo esta relação de modo similar ao que foi feito no apêndice anterior (com o auxílio das equações de Euler-Lagrange), segue a corrente de Noether

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \check{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)} \delta\phi_r \right) + (\partial_\alpha \check{L})\delta x^\alpha = 0,$$

$$\partial_\mu \left(-\epsilon^\nu \frac{\partial \check{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)} \partial_\nu \phi_r(x^\alpha) + \epsilon^\mu \check{L} \right) = 0,$$

$$-\epsilon^\nu \partial_\mu \left(\frac{\partial \check{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)} \partial_\nu \phi_r(x^\alpha) - g_\nu{}^\mu \check{L} \right) = 0,$$

$$\partial_\mu \underbrace{\left(\frac{\partial \check{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)} \partial^\nu \phi_r(x^\alpha) - g^{\nu\mu} \check{L} \right)}_{=\tau^{\mu\nu}} = 0$$

$$\Rightarrow \partial_\mu \tau^{\mu\nu} = 0,$$

onde $\tau^{\mu\nu}$ é o tensor de energia momento (A.59).

A partir da corrente conservada, determinamos as cargas de Noether integrando sobre todo espaço, obtendo

$$P^\nu = \int_{V\to\infty} \tau^{0\nu} d^3x,$$

que corresponde, naturalmente, ao **quadrivetor energia-momento**.

Portanto, o quadrivetor energia-momento constitui o **gerador de translações**. Examinando os parênteses de Poisson entre P^ν e os campos ϕ_r, verificamos que

$$\{\phi_r(x^\mu), -\epsilon_\nu P^\nu\}_{\text{clássico}} = \delta\phi_r(x^\mu)$$

$$\Rightarrow \{\phi_r(x^\mu), P^\nu\}_{\text{clássico}} = \partial^\nu \phi_r(x^\mu).$$

Dessa maneira, efetuando o procedimento de primeira quantização conforme discutimos no apêndice A, propomos os **operadores de quadrimomento** $\hat{p}_\mu$ no contexto da teoria quântica de acordo com

$$\hat{p}_\mu = i\partial_\mu. \tag{B.3}$$

De posse dos geradores de translação expressos acima, podemos construir o **operador de translação finita** (unitário) a partir da composição de translações infinitesimais de forma análoga ao que foi feito no apêndice A para rotações e *boosts*. Deste modo, após avaliarmos o limite envolvendo sucessivas transformações infinitesimais, resulta

$$U(a, I) = e^{i\hat{p}_\mu a^\mu}. \tag{B.4}$$

Assim, os geradores do grupo de Poincaré ($D_+^\uparrow$) correspondem ao conjunto expresso abaixo, composto por 4 operadores de translação ($\hat{p}^\mu$), 3 de rotação ($\vec{J}$) e 3 relativos aos *boosts* ($\vec{N}$):

$$\begin{cases} \hat{p}_\mu = i\partial_\mu, & \mu = 1,2,3,4; \\ J_l = \frac{1}{2}\epsilon_{lmn} M_{mn} = i(x_m\partial_n - x_n\partial_m), & l,m,n = 1,2,3; \\ N_k = M_{0k} = i(x_0\partial_k - x_k\partial_0), & k = 1,2,3. \end{cases}$$

As relações de comutação que definem a álgebra dos geradores homogêneos são dadas por (A.67), (A.68) e (A.69), ao passo que os operadores de quadrimomento satisfazem a relação bem conhecida

$$[\hat{p}^\mu, \hat{p}^\nu] = 0. \tag{B.5}$$

Completando a estrutura algébrica do grupo de Poincaré, temos ainda uma relação de comutação entre os geradores $M_{\mu\nu}$ (que compreende $\vec{J}$ e $\vec{N}$) e $\hat{p}_\mu$:

$$[M_{\mu\nu}, \hat{p}_\rho] = i(g_{\nu\rho}\hat{p}_\mu - g_{\mu\rho}\hat{p}_\nu). \tag{B.6}$$

Esta relação, bem como (A.66), pode ser demonstrada de forma simples com o auxílio de representações unitárias do grupo de Poincaré. Portanto, reservamos a demonstração destas identidades para a seção em que as representações unitárias são discutidas.

B.1.2 Operadores de Casimir

A partir dos geradores discutidos nos parágrafos anteriores, podemos construir os **operadores de Casimir** do grupo ($D_+^\uparrow$). Estes operadores comutam com todos os geradores do grupo e correspondem, portanto, às **quantidades conservadas** frente a transformações relativísticas.

Um candidato natural a operador de Casimir consiste na massa da partícula, que é um escalar sob transformações de Lorentz. De fato, conforme discutimos no apêndice A, a forma quadrática $\hat{p}_\mu\hat{p}^\mu$ corresponde a um escalar de Lorentz e, recorrendo à relação de energia momento (1.1), verifica-se que este invariante consiste no quadrado da massa (m^2). Assim, o **operador quadrimomento quadrático** comuta com todos os geradores do grupo de Poincaré (pois corresponde a um escalar) e, portanto, constitui em um operador de Casimir:

$$C_1 = \hat{p}_\mu\hat{p}^\mu. \tag{B.7}$$

Em contraponto ao invariante que obtivemos acima exclusivamente a partir do operador quadrimomento, não é possível construirmos um operador de Casimir partindo apenas do gerador $M_{\mu\nu}$. Dessa forma, vamos definir a seguir um novo objeto através da composição de $\hat{p}_\mu$ e $M_{\mu\nu}$:

$$w_\mu = -\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}M^{\nu\rho}\hat{p}^\sigma, \tag{B.8}$$

onde

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1, & \text{para permutações pares da sequência de índices (1,2,3,4),} \\ 0, & \text{para índices repetidos,} \\ -1, & \text{para permutações ímpares dessa sequência.} \end{cases}$$

O operador (B.8) acima é denominado **vetor de Pauli-Lubanski** e carrega a informação física referente ao **spin** da partícula, conforme verificaremos em breve.

Analisaremos agora algumas propriedades exibidas por este operador, considerando a contração

$$w_\mu \hat{p}^\mu = -\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} M^{\nu\rho} \hat{p}^\sigma \hat{p}^\mu;$$

de (B.5), temos que $\hat{p}^\sigma \hat{p}^\mu$ é simétrico nos índices σ e μ enquanto $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ é antissimétrico nesses índices, resultando a "relação de ortogonalidade"

$$w_\mu \hat{p}^\mu = 0. \tag{B.9}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
[w_\mu, \hat{p}_\nu] &= -\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\alpha\beta\lambda} M^{\alpha\beta} \hat{p}^\lambda \hat{p}_\nu + \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\alpha\beta\lambda} \hat{p}_\nu M^{\alpha\beta} \hat{p}^\lambda \\
&= -\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\alpha\beta\lambda} M^{\alpha\beta} \hat{p}^\lambda \hat{p}_\nu + \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\alpha\beta\lambda} g_{\nu\sigma} \hat{p}^\sigma M^{\alpha\beta} \hat{p}^\lambda.
\end{aligned}$$

Porém, com o auxílio de (B.6), podemos desenvolver o segundo termo do segundo membro acima:

$$\begin{aligned}
[w_\mu, \hat{p}_\nu] &= -\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\alpha\beta\lambda} M^{\alpha\beta} \hat{p}^\lambda \hat{p}_\nu + \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\alpha\beta\lambda} g_{\nu\sigma} \left(M^{\alpha\beta} \hat{p}^\sigma - i(g^{\beta\sigma} \hat{p}_\alpha - g^{\alpha\sigma} \hat{p}_\beta) \right) \hat{p}^\lambda \\
&= -\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\alpha\beta\lambda} M^{\alpha\beta} \hat{p}^\lambda \hat{p}_\nu + \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\alpha\beta\lambda} M^{\alpha\beta} \hat{p}_\nu \hat{p}^\lambda - \frac{i}{2}\epsilon_{\mu\alpha\beta\lambda} g_{\nu\sigma} (g^{\beta\sigma} \hat{p}_\alpha - g^{\alpha\sigma} \hat{p}_\beta) \hat{p}^\lambda \\
&= -\frac{i}{2}\epsilon_{\mu\alpha\beta\lambda} \underbrace{g_{\nu\sigma} g^{\beta\sigma}}_{\delta_\nu{}^\beta} \hat{p}_\alpha \hat{p}^\lambda + \frac{i}{2}\epsilon_{\mu\alpha\beta\lambda} \underbrace{g_{\nu\sigma} g^{\alpha\sigma}}_{\delta_\nu{}^\alpha} \hat{p}_\beta \hat{p}^\lambda \\
&= -\frac{i}{2}\epsilon_{\mu\alpha\nu\lambda} \hat{p}_\alpha \hat{p}^\lambda + \frac{i}{2}\epsilon_{\mu\nu\beta\lambda} \hat{p}_\beta \hat{p}^\lambda \\
&= -i\epsilon_{\mu\alpha\nu\lambda} \hat{p}_\alpha \hat{p}^\lambda.
\end{aligned}$$

Agora, observemos novamente que $\epsilon_{\mu\alpha\nu\lambda}$ é antissimétrico nos índices α e λ, em contraste com o produto $\hat{p}_\alpha \hat{p}^\lambda$, que é simétrico. Portanto, a contração é nula e obtemos a relação de comutação

$$[w_\mu, \hat{p}_\nu] = 0. \tag{B.10}$$

De posse do vetor de Pauli-Lubanski, é possível construirmos a forma quadrática

$$w_\mu w^\mu = \frac{1}{4}\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} \epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} M^{\nu\lambda} \hat{p}^\sigma M_{\alpha\beta} \hat{p}_\gamma.$$

O operador acima pode ser conduzido a uma expressão mais conveniente com o auxílio da seguinte relação:

$$\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}\epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} = - \begin{vmatrix} \delta^{\alpha}{}_{\nu} & \delta^{\alpha}{}_{\lambda} & \delta^{\alpha}{}_{\sigma} \\ \delta^{\beta}{}_{\nu} & \delta^{\beta}{}_{\lambda} & \delta^{\beta}{}_{\sigma} \\ \delta^{\gamma}{}_{\nu} & \delta^{\gamma}{}_{\lambda} & \delta^{\gamma}{}_{\sigma} \end{vmatrix} . \tag{B.11}$$

Assim, desenvolvendo o produto $w_\mu w^\mu$ com o auxílio de (B.6), (B.8) e (B.11) e explorando a antissimetria de $M^{\mu\nu}$ resulta

$$\begin{aligned} w_\mu w^\mu &= \frac{1}{4}(-\delta^{\alpha}{}_{\nu}\delta^{\beta}{}_{\lambda}\delta^{\gamma}{}_{\sigma} - \delta^{\alpha}{}_{\lambda}\delta^{\beta}{}_{\sigma}\delta^{\gamma}{}_{\nu} - \delta^{\alpha}{}_{\sigma}\delta^{\beta}{}_{\nu}\delta^{\gamma}{}_{\lambda} \\ &\quad +\delta^{\gamma}{}_{\nu}\delta^{\beta}{}_{\lambda}\delta^{\alpha}{}_{\sigma} + \delta^{\gamma}{}_{\lambda}\delta^{\beta}{}_{\sigma}\delta^{\alpha}{}_{\nu} + \delta^{\gamma}{}_{\sigma}\delta^{\beta}{}_{\nu}\delta^{\alpha}{}_{\lambda})M^{\nu\lambda}\hat{p}^{\sigma}M_{\alpha\beta}\hat{p}_{\gamma} \\ &= \frac{1}{4}(-2M^{\alpha\beta}\hat{p}^{\gamma}M_{\alpha\beta}\hat{p}_{\gamma} + 4M^{\gamma\beta}\hat{p}^{\alpha}M_{\alpha\beta}\hat{p}_{\gamma}) \\ &= -\frac{1}{2}M^{\alpha\beta}g^{\gamma\mu}\left(M_{\alpha\beta}\hat{p}_{\mu} - i(g_{\beta\mu}\hat{p}_{\alpha} - g_{\alpha\mu}\hat{p}_{\beta})\right)\hat{p}_{\gamma} \\ &\quad +M^{\gamma\beta}g^{\alpha\mu}\left(M_{\alpha\beta}\hat{p}_{\mu} - i(g_{\beta\mu}\hat{p}_{\alpha} - g_{\alpha\mu}\hat{p}_{\beta})\right)\hat{p}_{\gamma} \\ &= -\frac{1}{2}M^{\alpha\beta}M_{\alpha\beta}\hat{p}^{\gamma}\hat{p}_{\gamma} + \frac{i}{2}M^{\alpha\beta}(\delta_{\beta}{}^{\gamma}\hat{p}_{\alpha} - \delta_{\alpha}{}^{\gamma}\hat{p}_{\beta})\hat{p}_{\gamma} + M^{\gamma\beta}M_{\alpha\beta}\hat{p}^{\alpha}\hat{p}_{\gamma} \\ &\quad -iM^{\gamma\beta}(\delta_{\beta}{}^{\alpha}\hat{p}_{\alpha} - 4\hat{p}_{\beta})\hat{p}_{\gamma} \\ &= -\frac{1}{2}M^{\alpha\beta}M_{\alpha\beta}\hat{p}^{\gamma}\hat{p}_{\gamma} + M^{\gamma\beta}M_{\alpha\beta}\hat{p}^{\alpha}\hat{p}_{\gamma} + 2iM^{\gamma\beta}\hat{p}_{\beta}\hat{p}_{\gamma}. \end{aligned}$$

Entretanto, o operador $M^{\gamma\beta}$ é antissimétrico nos índices γ e β e, novamente, a contração com o operador simétrico $\hat{p}_\beta\hat{p}_\gamma$ é nula, de forma que o último termo da expressão acima se anula e a forma quadrática do vetor de Pauli-Lubanski fica expressa por

$$w_\mu w^\mu = M_{\gamma\alpha}M^{\beta\alpha}\hat{p}^{\gamma}\hat{p}_{\beta} - \frac{1}{2}M_{\alpha\beta}M^{\alpha\beta}\hat{p}_{\gamma}\hat{p}^{\gamma}. \tag{B.12}$$

Este operador, assim como $\hat{p}_\mu\hat{p}^\mu$, é um escalar sob transformações relativísticas. Dessa forma, (B.12) comuta com todos os geradores do grupo de Poincaré e, portanto, também corresponde a um operador de Casimir do grupo:

$$C_2 = w_\mu w^\mu. \tag{B.13}$$

Com o intuito de depreendermos o conteúdo físico inerente ao invariante acima, vamos examinar os autovalores de (B.13) no estado que corresponde ao referencial de repouso da partícula:

$$\begin{aligned}
w_\mu w^\mu \left|\vec{p}=0\right\rangle &= M_{\gamma\alpha}M^{\beta\alpha} \underbrace{\hat{p}^\gamma \hat{p}_\beta \left|\vec{p}=0\right\rangle}_{=m^2 \delta^\gamma{}_0 \delta^\beta{}_0 \left|\vec{p}=0\right\rangle} - \frac{1}{2} M_{\alpha\beta}M^{\alpha\beta} \underbrace{\hat{p}_\gamma \hat{p}^\gamma \left|\vec{p}=0\right\rangle}_{=m^2\left|\vec{p}=0\right\rangle} \\
&= \left(m^2 M_{0\alpha}M^{0\alpha} - \frac{m^2}{2} M_{\alpha\beta}M^{\alpha\beta} \right) \left|\vec{p}=0\right\rangle .
\end{aligned}$$

Explorando a antissimetria do operador $M_{\mu\nu}$ para desenvolver o termo entre parênteses e recordando a relação (A.64), segue

$$\begin{aligned}
w_\mu w^\mu \left|\vec{p}=0\right\rangle &= -\frac{1}{2} m^2 \underbrace{M_{ij}M^{ij}}_{=2\vec{S}^2} \left|\vec{p}=0\right\rangle \\
&= -m^2 \vec{S}^2 \left|\vec{p}=0\right\rangle \\
&= -m^2 s(s+1) \left|\vec{p}=0\right\rangle . \qquad \text{(B.14)}
\end{aligned}$$

Assim, conforme mencionamos anteriormente, o invariante C_2 carrega a informação referente ao **spin** da partícula que, assim como a massa, é uma quantidade conservada.

A partir dos operadores de Casimir C_1 e C_2 podemos identificar as **representações irredutíveis** do grupo de Poincaré, de forma que os invariantes m e s associados a estes operadores compõem os rótulos destas representações. Os **vetores de estado** (responsáveis pela informação referente ao sistema quântico) pertencentes a uma determinada classe de representações são rotulados através dos <u>autovalores</u> de um <u>conjunto completo</u> de operadores, construídos a partir dos geradores $\hat{p}_\mu$ e $M_{\mu\nu}$, os quais comutam com os operadores de Casimir. Em particular, à luz das relações (B.5) e (B.10), podemos adotar o conjunto completo constituído pelos operadores $\hat{p}_\mu$ e w_3, este último associado à projeção z do spin no referencial de repouso, de forma que os vetores de estado que constituem a base desta representação, conhecida como **base canônica**, são identificados como segue:

$$\left|\vec{p}, m_s; m, s\right\rangle ,$$

onde $\vec{p}$ e m_s correspondem aos autovalores correspondentes aos operadores do conjunto completo para esta representação e m e s referem-se aos invariantes associados aos operadores de Casimir do grupo[3].

[3]Doravante adotaremos sempre a representação padrão dos vetores de estado (a menos

B.1.3 Representações Unitárias do Grupo Clássico

Na teoria quântica, sabemos que a forma quadrática definida por $|\langle\alpha_1|\alpha_2\rangle|^2$ representa a densidade de probabilidade de transição entre os estados $|\alpha_1\rangle$ e $|\alpha_2\rangle$. Assim, para preservarmos a probabilidade ao efetuarmos uma mudança de representação dos vetores de estado, recorremos a **transformações unitárias** $U(g)$.

Dessa forma, os vetores pertencentes a representações distintas do grupo de Poincaré são conectados através de uma transformação unitária conforme

$$\left|\alpha^{'}\right\rangle = U\left|\alpha\right\rangle, \tag{B.15}$$

de modo que a densidade de probabilidade nas duas representações efetivamente se preserva,

$$\begin{aligned} \left|\left\langle\alpha_1^{'}|\alpha_2^{'}\right\rangle\right|^2 &= \left|\left\langle\alpha_1^{'}\right|U^{+}U\left|\alpha_2^{'}\right\rangle\right|^2 \\ &= \left|\langle\alpha_1|\alpha_2\rangle\right|^2. \end{aligned}$$

A seguir, definiremos as leis de transformação dos geradores do grupo mediante a atuação de operadores unitários. Entretanto, é conveniente discutirmos primeiramente algumas propriedades dessas transformações.

A partir da lei de composição definida em (B.1), obtemos a regra do produto para as transformações $U(g)$:

$$U(a_1,\Lambda_1)U(a_2,\Lambda_2) = U(a_1+\Lambda_1 a_2, \Lambda_1\Lambda_2). \tag{B.16}$$

Esta relação sugere uma expressão para o elemento inverso do conjunto de transformações unitárias da seguinte forma:

$$U^{-1}(a,\Lambda) = U(-\Lambda^{-1}a, \Lambda^{-1}). \tag{B.17}$$

Dessa maneira, com base em (B.16) e (B.17), obtemos a relação

$$U^{-1}(0,\Lambda)U(a,\Lambda) = U(\Lambda^{-1}a, I). \tag{B.18}$$

Analogamente, podemos escrever a seguinte identidade:

$$U^{-1}(0,\Lambda_1)U(0,\Lambda_2)U(0,\Lambda_1) = U(0,\Lambda_1^{-1}\Lambda_2\Lambda_1). \tag{B.19}$$

---

que outra representação seja mencionada explicitamente) e, por conveniência, denotaremos os vetores de forma mais compacta como $|\vec{p}, m_s\rangle$, onde omitimos os rótulos referentes à massa e ao spin da partícula pois, neste apêndice, estamos interessados em construir as representações unitárias para estados de partícula única e estes valores são fixados pelo próprio contexto, devendo ser subentendidos.

De posse desses resultados, passemos agora a examinar as transformações infinitesimais que nos conduziram aos geradores do grupo. Assim, analisando a translação infinitesimal (B.2), podemos escrever

$$U(\epsilon, I) = 1 + i\epsilon^\mu \hat{p}_\mu.$$

Com o auxílio da relação (B.18), desenvolvemos a expressão acima da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
U(\Lambda^{-1}\epsilon, I) &= U^{-1}(0,\Lambda) \underbrace{U(\epsilon,\Lambda)}_{=U(\epsilon,I)U(0,\Lambda)}, \\
1 + i(\Lambda^{-1})^\nu{}_\rho \epsilon^\rho \hat{p}_\nu &= U^{-1}(0,\Lambda)(1 + i\epsilon^\mu \hat{p}_\mu)U(0,\Lambda), \\
(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \epsilon^\mu \hat{p}_\nu &= \epsilon^\mu U^{-1}(0,\Lambda)\hat{p}_\mu U(0,\Lambda).
\end{aligned}$$

Entretanto, usando a relação $(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = g^{\mu\alpha}(\Lambda^T)^\alpha{}_\beta g_{\beta\nu}$, obtida no apêndice A, resulta a lei de transformação do operador momento sob representações unitárias do grupo de Poincaré

$$\begin{aligned}
\epsilon^\mu U^{-1}(0,\Lambda)\hat{p}_\mu U(0,\Lambda) &= \epsilon^\mu g^{\nu\alpha}\Lambda^\beta{}_\alpha g_{\beta\mu}\hat{p}_\nu \\
&= \epsilon^\mu \Lambda_\mu{}^\nu \hat{p}_\nu
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow U^{-1}(0,\Lambda)\hat{p}_\mu U(0,\Lambda) = \Lambda_\mu{}^\nu \hat{p}_\nu. \tag{B.20}$$

De modo semelhante, efetuamos a análise de uma transformação de Lorentz infinitesimal (A.63):

$$U(0,\Lambda) = 1 - \frac{i}{2} w^{\mu\nu} M_{\mu\nu}.$$

Observação: cabe ressaltar o fato de que embora as transformações de Lorentz finitas não sejam necessariamente unitárias, conforme discutimos no apêndice anterior, as transformações infinitesimais exibem este caráter unitário.

Assim, substituindo esta transformação infinitesimal em (B.19), obtemos

$$U^{-1}(0,\Lambda)\left(1 - \frac{i}{2} w'^{\mu\nu} M_{\mu\nu}\right) U(0,\Lambda) = U(0, \Lambda^{-1}\Lambda'\Lambda).$$

Contudo, precisamos desenvolver separadamente o lado direito desta expressão. Para isto, recorremos à relação (A.50) para transformações infinitesimais:

$$\begin{aligned}
(\Lambda^{-1}\Lambda'\Lambda)^\mu{}_\nu &= (\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha \underbrace{\Lambda^\alpha{}_\beta}_{=\delta^\alpha{}_\beta + w'^\alpha{}_\beta} \Lambda^\beta{}_\nu \\
&= \delta^\mu{}_\nu + (\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha w'^\alpha{}_\beta \Lambda^\beta{}_\nu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow U(0,\Lambda^{-1}\Lambda'\Lambda) &= 1-\frac{i}{2}\underbrace{(\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\alpha}}_{=\Lambda_{\alpha}{}^{\mu}} w'^{\alpha\beta}\Lambda_{\beta}{}^{\nu}M_{\mu\nu} \\
&= 1-\frac{i}{2}\Lambda_{\alpha}{}^{\mu}\Lambda_{\beta}{}^{\nu}w'^{\alpha\beta}M_{\mu\nu}.
\end{aligned}$$

De posse desse resultado, podemos retornar ao desenvolvimento da relação da qual partimos logo acima para construir a lei de transformação dos geradores homogêneos $M_{\mu\nu}$, induzida pelas representações unitárias do grupo:

$$U^{-1}(0,\Lambda)\left(1-\frac{i}{2}w'^{\mu\nu}M_{\mu\nu}\right)U(0,\Lambda) = 1-\frac{i}{2}\Lambda_{\mu}{}^{\alpha}\Lambda_{\nu}{}^{\beta}w'^{\mu\nu}M_{\alpha\beta}$$

$$\Rightarrow U^{-1}(0,\Lambda)M_{\mu\nu}U(0,\Lambda) = \Lambda_{\mu}{}^{\alpha}\Lambda_{\nu}{}^{\beta}M_{\alpha\beta}. \tag{B.21}$$

Para finalizar esta seção, vamos efetuar agora a demonstração das relações de comutação (B.6) e (A.66), que deixamos em aberto no texto e que decorrem de maneira natural das leis de transformação dos geradores sob transformações unitárias. Assim, explorando as transformações infinitesimais (A.50) e recorrendo às relações (B.20) e (B.21), obtemos

$$\begin{gathered}
U^{-1}(0,\Lambda)\hat{p}_{\rho}U(0,\Lambda) = \Lambda_{\rho}{}^{\sigma}\hat{p}_{\sigma}, \\
\left(1+\frac{i}{2}w^{\mu\nu}M_{\mu\nu}\right)\hat{p}_{\rho}\left(1-\frac{i}{2}w^{\alpha\beta}M_{\alpha\beta}\right) = (\delta_{\rho}{}^{\sigma}+w_{\rho}{}^{\sigma})\hat{p}_{\sigma}, \\
\hat{p}_{\rho}+\frac{i}{2}w^{\mu\nu}M_{\mu\nu}\hat{p}_{\rho}-\frac{i}{2}w^{\alpha\beta}\hat{p}_{\rho}M_{\alpha\beta}+\underbrace{\frac{1}{4}w^{\mu\nu}w^{\alpha\beta}M_{\mu\nu}\hat{p}_{\rho}M_{\alpha\beta}}_{\approx 0} = \hat{p}_{\rho}+\underbrace{w_{\rho}{}^{\sigma}}_{=g_{\rho\mu}w^{\mu\sigma}}\hat{p}_{\sigma}, \\
\frac{i}{2}w^{\mu\nu}[M_{\mu\nu},\hat{p}_{\rho}] = \frac{1}{2}(g_{\rho\mu}w^{\mu\nu}\hat{p}_{\nu}+g_{\rho\nu}w^{\nu\mu}\hat{p}_{\mu}), \\
iw^{\mu\nu}[M_{\mu\nu},\hat{p}_{\rho}] = w^{\mu\nu}(g_{\rho\mu}\hat{p}_{\nu}-g_{\rho\nu}\hat{p}_{\mu});
\end{gathered}$$

onde desprezamos contribuições de segunda ordem nos parâmetros infinitesimais e usamos a antissimetria de $w^{\mu\nu}$, conduzindo-nos à relação (B.6),

$$[M_{\mu\nu},\hat{p}_{\rho}] = i(g_{\rho\nu}\hat{p}_{\mu}-g_{\rho\mu}\hat{p}_{\nu}). \tag{B.22}$$

Similarmente, examinando os geradores homogêneos, temos

$$\begin{gathered}
U^{-1}(0,\Lambda)M_{\rho\sigma}U(0,\Lambda) = \Lambda_{\rho}{}^{\alpha}\Lambda_{\sigma}{}^{\beta}M_{\alpha\beta}, \\
\left(1+\frac{i}{2}w^{\mu\nu}M_{\mu\nu}\right)M_{\rho\sigma}\left(1-\frac{i}{2}w^{\eta\gamma}M_{\eta\gamma}\right) = (\delta_{\rho}{}^{\alpha}+w_{\rho}{}^{\alpha})(\delta_{\sigma}{}^{\beta}+w_{\sigma}{}^{\beta})M_{\alpha\beta},
\end{gathered}$$

$$M_{\rho\sigma} + \frac{i}{2}w^{\mu\nu}M_{\mu\nu}M_{\rho\sigma} - \frac{i}{2}w^{\eta\gamma}M_{\rho\sigma}M_{\eta\gamma} + \underbrace{\frac{1}{4}w^{\mu\nu}w^{\eta\gamma}M_{\mu\nu}M_{\rho\sigma}M_{\eta\gamma}}_{\approx 0} =$$

$$M_{\rho\sigma} + w_{\sigma}{}^{\beta}M_{\rho\beta} + w_{\rho}{}^{\alpha}M_{\alpha\sigma} + \underbrace{w_{\rho}{}^{\alpha}w_{\sigma}{}^{\beta}M_{\alpha\beta}}_{\approx 0},$$

$$\frac{i}{2}w^{\mu\nu}[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = g_{\sigma\mu}w^{\mu\nu}M_{\rho\nu} + g_{\rho\mu}w^{\mu\nu}M_{\nu\sigma},$$

de forma que, explorando novamente a antissimetria de $w^{\mu\nu}$, resulta a relação (A.66),

$$\frac{i}{2}w^{\mu\nu}[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = \frac{1}{2}w^{\mu\nu}(g_{\sigma\mu}M_{\rho\nu} - g_{\sigma\nu}M_{\rho\mu}) + \frac{1}{2}w^{\mu\nu}(g_{\rho\mu}M_{\nu\sigma} - g_{\rho\nu}M_{\mu\sigma})$$

$$\Rightarrow [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -i(g_{\sigma\mu}M_{\rho\nu} - g_{\sigma\nu}M_{\rho\mu} + g_{\rho\mu}M_{\nu\sigma} - g_{\rho\nu}M_{\mu\sigma}).$$

Nas seções subsequentes, vamos buscar as representações explícitas para as transformações unitárias, enfatizando em particular as transformações associadas a partículas de massa não nula ($m^2 > 0$).

B.2 O Grupo de Poincaré Quântico

Os resultados que obtivemos nas seções anteriores referem-se ao grupo de Poincaré clássico (embora tenhamos feito referência, em algumas situações, a aspectos da teoria quântica); todavia, para acomodarmos a teoria de spins altos neste formalismo, necessitamos recorrer à versão quântica do grupo. Esta necessidade é oriunda do fato de que o grupo clássico exibe um espaço de parâmetros duplamente conexo (esta característica se manifesta na relação homomórfica entre o $SL(2, C)$ e o L_p discutida no apêndice A), o que dificulta a transição para o cenário de sistemas quânticos. Desta forma, o **grupo de Poincaré quântico** $\check{D}_+^{\uparrow}$ corresponde ao **grupo de recobrimento** do correspondente clássico, exibindo um espaço de parâmetros simplesmente conexo, e constitui o plano de fundo para as seções seguintes[4].

Os elementos do grupo $\check{D}_+^{\uparrow}$ são definidos a partir dos elementos $g = (a^{\mu}, \Lambda^{\mu}{}_{\nu})$ do grupo clássico, explorando a relação (homomorfismo) entre L_p e $SL(2, C)$ discutida no apêndice anterior. Assim, as transformações de Lorentz $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ são mapeadas em elementos $A \in SL(2, C)$ e os quadrivetores associados à

[4] A discussão referente ao espaço de parâmetros dos grupos clássico e quântico e às técnicas formais para a transição de um grupo multiplamente conexo para um grupo de recobrimento simplesmente conexo, foge ao escopo deste trabalho e, portanto, será omitida. Para maiores detalhes, remetemos o leitor às referências [31] e [43].

translação são expressos através da matriz hermitiana $a = \sigma_\mu a^\mu$ de acordo com (A.7), de modo que um elemento do grupo de Poincaré quântico é definido por estes dois objetos: $\check{g} = (a, A)$.

Com o auxílio da relação (A.8), que define a lei de transformação de a induzida por uma transformação de Lorentz A no $SL(2, C)$, podemos escrever a **lei de composição** (B.1) do grupo clássico em sua versão quântica de acordo com

$$(a_1, A_1)(a_2, A_2) = (a_1 + A_1 a_2 A_1^+, A_1 A_2). \tag{B.23}$$

Naturalmente, fazendo $A_1 = I$ e $a_2 = 0$ verifica-se que um elemento arbitrário $\check{g}$ pode ser decomposto em uma transformação de Lorentz seguida de uma translação, assim como ocorre no caso clássico:

$$(a, I)(0, \Lambda) = (a, \Lambda).$$

Essa separabilidade do grupo nos permite investigar de forma independente as representações unitárias associadas às transformações de Lorentz ($U(0, \Lambda)$) e as relativas a translações ($U(a, I)$).

Dessa maneira, examinando o **setor de translações** com o auxílio de (A.7), verifica-se que há um mapeamento injetivo entre as matrizes a e os quadrivetores a^μ sobre todo o conjunto $\{a^\mu\}$. Portanto, devido a essa bijeção, as representações deste setor do grupo quântico coincidem com as representações do respectivo setor de translações do grupo clássico, de modo que as transformações unitárias de $\check{D}_+^\uparrow$ associadas a translações ficam expressas por (B.4):

$$U(a, I) = e^{i\hat{p}_\mu a^\mu}.$$

Precisamos agora analisar as representações unitárias do subgrupo homogêneo de $\check{D}_+^\uparrow$, associado às transformações de Lorentz. Para isso, vamos definir primeiramente o grupo estacionário (ou, mais comumente denominado *little group*), seguindo a proposta pioneira devida a Wigner em seu estudo referente às transformações unitárias do grupo de Poincaré.

B.2.1 O *Little Group* e o Operador de Wigner

De acordo com o exposto no apêndice A, a matriz p_s referente ao quadrivetor momento p^μ (i.e.,(A.7)) transforma-se conforme (A.8) sob transformações de Lorentz:

$$p_s^{'} = A p_s A^+.$$

Consideremos, então, as matrizes $\bar{A}(p_s)$ que deixam invariante o momento p_s:

$$p_s = \bar{A}(p_s) p_s \bar{A}^+(p_s). \tag{B.24}$$

Estas matrizes constituem um subgrupo $L(p_s)$ de $SL(2,C)$, denominado ***little group* (ou grupo estacionário)** de momento p_s. De fato, tendo em vista que as matrizes $\bar{A}(p_s)$ pertencem ao $SL(2,C)$ e que o produto $\bar{A}_1(p_s)\bar{A}_2(p_s)$ também preserva o operador momento p_s, temos

$$\begin{aligned}
\bar{A}_1(p_s)\bar{A}_2(p_s)p_s(\bar{A}_1(p_s)\bar{A}_2(p_s))^+ &= \bar{A}_1(p_s)\underbrace{\bar{A}_2(p_s)p_s\bar{A}_2^+(p_s)}_{=p_s}\bar{A}_1^+(p_s) \\
&= \bar{A}_1(p_s)p_s\bar{A}_1^+(p_s) \\
&= p_s,
\end{aligned}$$

de modo que a propriedade de fechamento é satisfeita, bem como as demais propriedades de grupo. Assim, o conjunto de matrizes $\bar{A}(p_s)$ efetivamente constitui um subgrupo.

Agora, considerando dois momentos distintos p_s e $\breve{p}_s$ conectados via transformação de Lorentz $\alpha(p_s,\breve{p}_s)$[5] segundo (A.8),

$$p_s = \alpha(p_s,\breve{p}_s)\breve{p}_s\alpha^+(p_s,\breve{p}_s), \tag{B.25}$$

pode-se investigar a relação entre os grupos estacionários $L(p_s)$ e $L(\breve{p}_s)$. Com efeito, se $\bar{A}(p_s) \in SL(2,C)$ então $\bar{A}(\breve{p}_s) = \alpha^{-1}(p_s,\breve{p}_s)\bar{A}(p_s)\alpha(p_s,\breve{p}_s)$ pertence a $L(\breve{p}_s)$, como podemos verificar diretamente:

$$\begin{aligned}
\bar{A}(\breve{p}_s)\breve{p}_s\bar{A}^+(\breve{p}_s) &= \alpha^{-1}(p_s,\breve{p}_s)\bar{A}(p_s)\underbrace{\alpha(p_s,\breve{p}_s)\breve{p}_s\alpha^+(p_s,\breve{p}_s)}_{=p_s}\bar{A}^+(p_s)\alpha^{-1+}(p_s,\breve{p}_s) \\
&= \alpha^{-1}(p_s,\breve{p}_s)p_s\alpha^{-1+}(p_s,\breve{p}_s) \\
&= \breve{p}_s.
\end{aligned}$$

Portanto, fixando o operador $\alpha(p_s,\breve{p}_s)$, denominado **operador de Wigner**, podemos construir uma relação unívoca entre as matrizes $\bar{A}(p_s)$ e $\bar{A}(\breve{p}_s)$, pertencentes aos grupos $L(p_s)$ e $L(\breve{p}_s)$, respectivamente, expressa por

$$\bar{A}(p_s) = \alpha(p_s,\breve{p}_s)\bar{A}(\breve{p}_s)\alpha^{-1}(p_s,\breve{p}_s), \tag{B.26}$$

sendo os grupos $L(p_s)$ e $L(\breve{p}_s)$ **isomorfos**. Assim, é suficiente considerarmos apenas um *little group* $L(\breve{p}_s)$ associado a um momento padrão $\breve{p}_s$ escolhido convenientemente.

Podemos, então, construir agora um mapeamento unívoco entre elementos A do grupo de Lorentz homogêneo e elementos pertencentes ao *little group*

[5] Neste caso, denotamos a matriz que executa a transformação de Lorentz por $\alpha(p_s,\breve{p}_s)$ para distinguir a transformação que conecta um momento arbitrário p_s ao momento padrão $\breve{p}_s$ que definiremos em breve.

padrão $L(\breve{p}_s)$. Sendo assim, consideremos uma transformação homogênea induzida por A sobre um quadrivetor p_s,

$$p_s^{'} = A p_s A^{+}.$$

De acordo com (B.25),[6] temos

$$\begin{cases} p_s & = \alpha(p_s, \breve{p}_s)\breve{p}_s \alpha^{+}(p_s, \breve{p}_s), \\ p_s^{'} & = \alpha(p_s^{'}, \breve{p}_s)\breve{p}_s \alpha^{+}(p_s^{'}, \breve{p}_s). \end{cases}$$

Logo, aplicando na relação anterior, segue

$$\alpha(p_s^{'}, \breve{p}_s)\breve{p}_s \alpha^{+}(p_s^{'}, \breve{p}_s) = A\alpha(p_s, \breve{p}_s)\breve{p}_s \alpha^{+}(p_s, \breve{p}_s)A^{+},$$

de modo que, multiplicando à esquerda por $\alpha^{-1}(p_s^{'}, \breve{p}_s)$ e à direita por $\alpha^{-1+}(p_s^{'}, \breve{p}_s)$,

$$\breve{p}_s = \left(\alpha^{-1}(p_s^{'}, \breve{p}_s)A\alpha(p_s, \breve{p}_s)\right)\breve{p}_s\left(\alpha^{+}(p_s, \breve{p}_s)A^{+}\alpha^{-1+}(p_s^{'}, \breve{p}_s)\right);$$

dessa maneira, a matriz $\bar{A}(\breve{p}_s, A) \in L(\breve{p}_s)$ deve ser expressa por

$$\bar{A}(\breve{p}_s, A) = \alpha^{-1}(p_s^{'}, \breve{p}_s)A\alpha(p_s, \breve{p}_s).$$

Portanto, ao fixarmos o operador de Wigner $\alpha(p_s, \breve{p}_s) \equiv \alpha(p_s)$ obtemos uma relação bijetiva entre as matrizes $A \in SL(2, C)$ e as matrizes $\bar{A} \in L(\breve{p}_s)$:

$$A = \alpha(p_s^{'})\bar{A}(A)\alpha^{-1}(p_s). \tag{B.27}$$

Este mapeamento entre as matrizes A e $\bar{A}$ exerce papel central na construção de representações unitárias do grupo de Poincaré, de modo que precisamos agora determinar uma forma funcional concreta para o operador de Wigner. Assim, restringiremos nosso estudo ao contexto de partículas de massa não nula ($m^2 > 0$) e examinar mais detalhadamente o grupo estacionário neste caso.

Neste cenário, é conveniente adotarmos o **momento padrão** como o quadrimomento no referencial de repouso: $\breve{p}_s = mI$ (onde I denota a matriz identidade). Assim, explorando (B.24), temos

$$\bar{A}(\breve{p}_s)m\bar{A}^{+}(\breve{p}_s) = m$$

[6] Existe uma arbitrariedade na lei de transformação expressa em (B.25), que consiste no fato de as matrizes $\alpha(p_s, \breve{p}_s)$ e $\alpha(p_s, \breve{p}_s)\bar{A}(\breve{p}_s)$ conduzirem ao mesmo resultado:

$$p_s = \alpha(p_s, \breve{p}_s)\underbrace{\bar{A}(\breve{p}_s)\breve{p}_s\bar{A}^{+}(\breve{p}_s)}_{=\breve{p}_s}\alpha^{+}(p_s, \breve{p}_s) = \alpha(p_s, \breve{p}_s)\breve{p}_s\alpha^{+}(p_s, \breve{p}_s).$$

Assim, para estabelecermos uma relação injetiva entre os momentos p_s e $\breve{p}_s$, precisamos propor uma forma fixa para o operador de Wigner (a qual discutiremos em breve).

$$\Rightarrow \bar{A}(\breve{p}_s)\bar{A}^{+}(\breve{p}_s) = I. \tag{B.28}$$

Portanto, a relação acima evidencia que o *little group* $L(\breve{p}_s)$ para um quadrimomento tipo-tempo é mapeado em $SU(2)$:

$$\bar{A} \to R \in SU(2).$$

De posse deste resultado e com o auxílio de (B.25), é possível então construir o operador de Wigner para partículas de massa não nula. De fato, podemos escolher (explorando a liberdade a que nos referimos anteriormente entre as matrizes α e αR) a matriz $\alpha(p_s)$ como um *boost* de Lorentz que conecta o referencial de repouso com um referencial inercial de momento p^{μ}. Estes *boosts* pertencem ao <u>setor hermitiano</u> do grupo homogêneo, conforme discutimos no apêndice anterior, de forma que

$$\alpha^{+}(p_s) = \alpha(p_s).$$

Dessa maneira, retornando a (B.25),

$$\alpha^2(p_s) = \frac{p_s}{m}.$$

Porém, de acordo com (A.77), podemos escrever $\alpha(p_s)$ como

$$\alpha(p_s) = \cosh\left(\frac{\eta}{2}\right) - \vec{\sigma}.\hat{n}\mathrm{senh}\left(\frac{\eta}{2}\right), \tag{B.29}$$

de modo que, substituindo na relação anterior,

$$\underbrace{\left(\cosh^2\left(\frac{\eta}{2}\right) + \mathrm{senh}^2\left(\frac{\eta}{2}\right)\right)}_{=\cosh(\eta)} - \underbrace{\left(2\mathrm{senh}\left(\frac{\eta}{2}\right)\cosh\left(\frac{\eta}{2}\right)\right)}_{=\mathrm{senh}(\eta)}\vec{\sigma}.\hat{n} = \underbrace{\frac{p_s}{m}}_{=\frac{1}{m}\sigma_{\mu}p^{\mu}},$$

$$\cosh(\eta) - \mathrm{senh}(\eta)\vec{\sigma}.\hat{n} = \frac{p^0}{m} + \frac{\vec{\sigma}.\vec{p}}{m}.$$

Assim,

$$\begin{cases} \cosh(\eta) & = p^0/m, \\ \mathrm{senh}(\eta) & = -\left|\vec{p}\right|/m, \end{cases}$$

ou seja,

$$\eta = -\mathrm{arctgh}\left(\frac{\left|\vec{p}\right|}{p^0}\right). \tag{B.30}$$

Efetuando manipulações algébricas simples, obtemos $\cosh\left(\frac{\eta}{2}\right)=\sqrt{\frac{p^0+m}{2m}}$ e $\operatorname{senh}\left(\frac{\eta}{2}\right)=-\sqrt{\frac{p^0-m}{2m}}$ e reescrevemos (B.29) na forma

$$\begin{aligned}\alpha(p_s) &= \sqrt{\frac{p^0+m}{2m}}+\vec{\sigma}.\hat{n}\sqrt{\frac{p^0-m}{2m}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2m(m+p^0)}}(m+p^0+\vec{\sigma}.\hat{n}\underbrace{\sqrt{(p^0-m)(p^0+m)}}_{=|\vec{p}|})\\ &= \frac{m+p^0+\vec{\sigma}.\vec{p}}{\sqrt{2m(m+p^0)}}, \end{aligned} \tag{B.31}$$

onde usamos a relação relativística de energia-momento (1.1).

Para finalizar esta revisão acerca das representações unitárias do grupo de Poincaré quântico, vamos determinar a forma explícita destas representações no cenário de partículas de massa não nula.

B.2.2 Representações Unitárias no caso $m^2 > 0$

Consideremos uma partícula livre de massa m e spin s. Os vetores que constituem a base (canônica) dos estados acessíveis a esta partícula (desconsiderando variáveis não referentes à estrutura espaço-temporal) são designados por $|\vec{p}, m_s\rangle$ conforme discutimos anteriormente, de modo que a relação de completeza para este conjunto de estados pode ser definida no espaço dos momentos por

$$\sum_{m_s}\int\frac{d^3p}{2p^0}\,|\vec{p},m_s\rangle\,\langle\vec{p},m_s| = 1, \tag{B.32}$$

sendo a condição de ortogonalidade expressa como

$$\left\langle \vec{p}^{\,'}, m_s^{'}|\vec{p},m_s\right\rangle = 2p^0\delta(\vec{p}-\vec{p}^{\,'})\delta_{m_s,m_s^{'}}. \tag{B.33}$$

Assim, um vetor de estado arbitrário $|\Psi\rangle$ pode ser construído em termos dos vetores de base $|\vec{p}, m_s\rangle$ com o auxílio de (B.32):

$$|\Psi\rangle = \sum_{m_s}\int\frac{d^3p}{2p^0}\,|\vec{p},m_s\rangle\,\langle\vec{p},m_s|\Psi\rangle, \tag{B.34}$$

onde a quantidade definida por $\langle\vec{p}, m_s|\Psi\rangle = \psi(\vec{p}, m_s)$ é denominada **função de onda de Wigner**. As funções de onda devem ser de quadro integrável para que exista o **produto escalar**

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \sum_{m_s} \int \frac{d^3p}{2p^0} \varphi^*(\vec{p}, m_s)\psi(\vec{p}, m_s). \tag{B.35}$$

Agora, sob a atuação de uma transformação de Lorentz A, um vetor de estado $|\vec{p}, m_s\rangle$ da base canônica transforma-se de acordo com

$$|\vec{p}, m_s\rangle \rightarrow U(0, A) |\vec{p}, m_s\rangle .$$

Dessa forma, examinando a atuação do operador momento sobre o novo estado, com o auxílio de (B.20), temos

$$\begin{aligned} \hat{p}_\mu U(0, A) |\vec{p}, m_s\rangle &= U(0, A)\Lambda_\mu{}^\nu \underbrace{\hat{p}_\nu |\vec{p}, m_s\rangle}_{=p_\nu|\vec{p}, m_s\rangle} \\ &= \Lambda_\mu{}^\nu p_\nu U(0, A) |\vec{p}, m_s\rangle \\ &= p'_\mu U(0, A) |\vec{p}, m_s\rangle . \end{aligned}$$

O novo estado é, naturalmente, autoestado de momento com autovalor p'_μ.

Ao efetuarmos a transformação de Lorentz, as projeções de spin também se modificam. Portanto, o vetor de estado transformado deve ser escrito em uma base de autoestados de spin da seguinte forma:

$$U(0, A) |\vec{p}, m_s\rangle = \sum_{m'_s} \left| \vec{p}', m'_s \right\rangle V_{m'_s m_s}(\vec{p}, A), \tag{B.36}$$

onde $V_{m'_s m_s}(\vec{p}, A)$ são matrizes que atuam sobre as variáveis de spin.

Assim, a relação (B.36) exibe a forma funcional do operador unitário, de modo que nossa tarefa agora consiste em determinar as matrizes $V_{m'_s m_s}$. Para isso, exploramos a própria característica unitária de $U(0, A)$ e recorremos à relação de completeza (B.32):

$$\begin{aligned} U(0, A)U^+(0, A) &= \int \frac{d^3p}{2p^0} \sum_{m_s} U(0, A) |\vec{p}, m_s\rangle \langle \vec{p}, m_s| U^+(0, A) \\ &= \int \frac{d^3p'}{2p'^0} \sum_{m_s} \sum_{m'_s} \sum_{m''_s} \left| \vec{p}', m'_s \right\rangle V_{m'_s m_s} V^+_{m_s m''_s} \left\langle \vec{p}', m''_s \right|; \end{aligned}$$

entretanto, para recuperarmos a matriz identidade do lado direito da expressão acima, as <u>matrizes</u> $V_{m'_s m_s}$ devem ser <u>unitárias</u>:

$$V_{m'_s m_s} V^+_{m_s m''_s} = \delta_{m'_s m''_s}. \tag{B.37}$$

Agora, observemos que uma transformação de Lorentz $\bar{A}(p_s)$ pertencente a um grupo estacionário de momento p_s $(L(p_s))$ induz uma transformação unitária sobre um estado $|\vec{p}, m_s\rangle$:

$$U(0, \bar{A}(p_s))\,|\vec{p}, m_s\rangle = \sum_{m_s'} \left|\vec{p}, m_s'\right\rangle V_{m_s', m_s}(p_s, \bar{A}(p_s)), \tag{B.38}$$

de modo que as matrizes $V(\bar{A}(p_s))$ correspondem a representações do *little group* $L(p_s)$.

Contudo, conforme mencionamos anteriormente, os grupos estacionários correspondentes a momentos distintos são isomorfos e seus elementos podem ser conectados através do operador de Wigner $\alpha(p_s)$ ao *little group* padrão $L(\breve{p}_s)$. Dessa forma, definindo $L(\breve{p}_s)$ como o grupo estacionário relativo ao quadrimomento no referencial de repouso e fixando o operador de Wigner como (B.31), é suficiente estudarmos as matrizes $V(\breve{p}_s)$.

De fato, definindo os vetores da base canônica associados ao momento $\vec{p}$ em termos dos vetores da base relacionada ao momento canônico $\breve{p}$ de forma que as variáveis internas da partícula (referentes a spin) sejam preservadas, temos

$$|\vec{p}, m_s\rangle = U(0, \alpha(p_s))\,|\breve{p}, m_s\rangle\,.$$

Assim, investiguemos as matrizes $V(p_s, A)$ para uma transformação arbitrária A em termos das matrizes referentes ao *little group* $V(\breve{p}_s, \bar{A}(\breve{p}_s))$. Multiplicando (B.36) à esquerda por $U^{-1}(0, \alpha(p_s'))$, obtemos

$$\begin{aligned}
U^{-1}(0, \alpha(p_s'))U(0, A)\,|\vec{p}, m_s\rangle &= U^{-1}(0, \alpha(p_s')) \sum_{m_s'} \left|\vec{p}', m_s'\right\rangle V_{m_s' m_s}(p_s, A) \\
&= \sum_{m_s'} \underbrace{U^{-1}(0, \alpha(p_s'))\left|\vec{p}', m_s'\right\rangle}_{=\left|\breve{p}, m_s'\right\rangle} V_{m_s' m_s}(p_s, A) \\
&= \sum_{m_s'} \left|\breve{p}, m_s'\right\rangle V_{m_s' m_s}(p_s, A).
\end{aligned}$$

Em contrapartida, desenvolvendo o lado esquerdo da expressão acima tendo em vista (B.23), (B.27) e (B.38),

$$\begin{aligned}
U^{-1}(0, \alpha(p_s'))U(0, A)\,|\vec{p}, m_s\rangle &= U^{-1}(0, \alpha(p_s'))U(0, A)U(0, \alpha(p_s))\,|\breve{p}, m_s\rangle \\
&= U(0, \underbrace{\alpha^{-1}(p_s')A\alpha(p_s)}_{=\bar{A}})\,|\breve{p}, m_s\rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= U(0, \bar{A}(\breve{p}_s))\,|\breve{p}, m_s\rangle \\
&= \sum_{m_s'} \left|\breve{p}, m_s'\right\rangle V_{m_s', m_s}(\breve{p}_s, \bar{A}(p_s)).
\end{aligned}
$$

Comparando os dois últimos desenvolvimentos acima, verifica-se que as matrizes $V(p_s, A)$ e $V(\breve{p}_s, \bar{A})$ coincidem, de forma que basta examinarmos as matrizes referentes ao *little group*.

Na seção anterior, vimos que o *little group* que definimos para o caso de partículas de massa não nula admitia um mapeamento entre seus elementos e os elementos de $SU(2)$. Assim, como as matrizes $V(\bar{A})$ constituem uma representação deste *little group*, estas são expressas como as representações unitárias $D^j(\bar{A})$ do próprio $SU(2)$:

$$V_{m_s' m_s} = D^j_{m_s', m_s}.$$

Dessa maneira, obtemos finalmente as **representações unitárias (irredutíveis)** de $\check{D}_+^{\uparrow}$ para partículas de massa não nula ($m^2 > 0$) e spin j através das expressões (B.4) e (B.36):

$$U(a, A)\,|\vec{p}, m_s\rangle = e^{i\hat{p}'^{\mu} a_{\mu}} \sum_{m_s'} \left|\vec{p}', m_s'\right\rangle D^j_{m_s' m_s}(\bar{A}(\breve{p}_s)). \tag{B.39}$$

Convidamos o leitor interessado no estudo de representações unitárias do grupo de Poincaré para partículas de massa nula a consultar as refêrencias [31] e [43].

B.3 Referências do Apêndice

Destacamos as referências deste apêndice abaixo:

[27] Wigner, E. P. *"On Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorentz Group"*. Ann. Math. **40**, p. 149, 1939.

[28] Corson, E. M. *"Introduction to tensors, spinors and relativistic wave equations"*. Segunda edição, Chelsea Publishing Company, 1953.

[31] Novozhilov, Y. V. *"Introduction to Elementary Particle Theory"*. Pergamon Press, 1975.

[33] Greiner, W.; Reinhardt, J. *"Field Quantization"*. Springer, 1996.

[35] Itzykson, C.; Zuber, J. *"Quantum Field Theory"*. McGraw-Hill, 1980.

[39] Ryder, L. H. *"Quantum Field Theory"*. Segunda edição, Cambridge University Press, 1996.

[41] Stancu, F. *"Group Theory in Subnuclear Physics"*. Oxford University Press, 1996.

[43] Ohnuki, Y. *"Unitary Representations of the Poincaré Group and Relativistic Wave Equations"*. World Scientific Publishing, 1988.

Apêndice C

A Função de Pauli-Jordan

O **princípio de causalidade** exerce papel fundamental em toda teoria física. Em particular, na mecânica quântica relativística, este princípio denominado **microcausalidade** determina os observáveis físicos que podem ser mensurados independentemente, ou seja, estabelece que medidas efetuadas em pontos conectados via quadrivetores tipo-espaço não exercem influência entre si. A **função de Pauli-Jordan** manifesta a informação referente ao caráter causal da teoria e, para complementar a discussão a respeito da covariância das equações de onda estudadas, apresentamos neste apêndice as principais características desta função.

A função de Pauli-Jordan é definida por:

$$\Delta(x^\mu - y^\mu) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2p^0} \left(e^{ip_\mu(x^\mu - y^\mu)} - e^{-ip_\mu(x^\mu - y^\mu)} \right), \tag{C.1}$$

onde $p^0 = \sqrt{p^2 + m^2}$ e a integração é efetuada sobre todo o espaço dos momentos.

Agora, fazendo $y^\mu = 0$, observemos que esta função satisfaz as seguintes <u>condições de contorno</u>:

1. em $x^\mu = (0, \vec{x})$, temos

$$\begin{aligned} \Delta(0, \vec{x}) &= \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2p^0} \left(e^{-i\vec{p}.\vec{x}} - e^{i\vec{p}.\vec{x}} \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{\sqrt{p^2 + m^2}} \mathrm{sen}(\vec{p}.\vec{x}), \end{aligned}$$

porém, como o integrando é ímpar com relação ao intervalo de integração, a função se anula

$$\Delta(0,\vec{x}) = 0. \tag{C.2}$$

2. avaliando a variação temporal da função em $t = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial \Delta(x^\mu)}{\partial t}\right|_{t=0} &= \frac{i}{(2\pi)^3}\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{d^3p}{2p^0}\left.\left(e^{ip_\mu x^\mu} - e^{-ip_\mu x^\mu}\right)\right|_{t=0} \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2}\left.\left(e^{ip_\mu x^\mu} + e^{-ip_\mu x^\mu}\right)\right|_{t=0} \\
&= \underbrace{-\frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2}\left(e^{i\vec{p}.\vec{x}} + e^{-i\vec{p}.\vec{x}}\right)}_{=\delta(\vec{x})} \\
&= -\delta(\vec{x}).
\end{aligned} \tag{C.3}$$

Além disso, a função de Pauli-Jordan é solução da equação de onda não homogênea:

$$(\hat{p}_\mu \hat{p}^\mu + m^2)\Delta(x^\mu) = 0. \tag{C.4}$$

Com efeito, temos

$$\begin{aligned}
\hat{p}_\nu \hat{p}^\nu \Delta(x^\mu) &= \frac{i}{(2\pi)^3}(\partial_t^2 - \nabla^2)\int \frac{d^3p}{2p^0}\left(e^{ip_\mu x^\mu} - e^{-ip_\mu x^\mu}\right) \\
&= \frac{i}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2p^0}\underbrace{(-(p^0)^2 + (\vec{p})^2)}_{=-m^2}\left(e^{ip_\mu x^\mu} - e^{-ip_\mu x^\mu}\right) \\
&= -m^2\Delta(x^\mu),
\end{aligned}$$

de forma que segue a relação (C.4). Esta equação, munida das condições de contorno (C.2) e (C.3), determina a <u>unicidade</u> da função de Pauli-Jordan.

Podemos ainda reescrever a função $\Delta(x^\mu - y^\mu)$ de forma a evidenciar sua característica <u>covariante</u>. De fato, redefinindo a componente temporal do quadrivetor como w^0, temos

$$\Delta(x^\mu - y^\mu) = \frac{i}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2w^0}\left(e^{iw^0(x^0-y^0)-i\vec{p}.(\vec{x}-\vec{y})} - e^{-iw^0(x^0-y^0)+i\vec{p}.(\vec{x}-\vec{y})}\right).$$

Assim, introduzindo uma variável tipo-tempo p^0 e estendendo a integração para quatro dimensões, segue

$$\begin{aligned}
\Delta(x^\mu - y^\mu) &= -\frac{i}{(2\pi)^3}\int d^3p \int \frac{dp^0}{2p^0}\Big(\delta(p^0+w^0)e^{-ip^0(x^0-y^0)-i\vec{p}.(\vec{x}-\vec{y})}+ \\
&\quad +\delta(p^0-w^0)e^{-ip^0(x^0-y^0)+i\vec{p}.(\vec{x}-\vec{y})}\Big) \\
&= -\frac{i}{(2\pi)^3}\overbrace{\int d^3p \int \frac{dp^0}{2p^0}\delta(p^0+w^0)e^{-ip^0(x^0-y^0)-i\vec{p}.(\vec{x}-\vec{y})}}^{=I_1} \\
&\quad -\frac{i}{(2\pi)^3}\int d^3p \int \frac{dp^0}{2p^0}\delta(p^0-w^0)e^{-ip^0(x^0-y^0)+i\vec{p}.(\vec{x}-\vec{y})}.
\end{aligned}$$

Agora, efetuando a mudança de variáveis $p^\mu \to p'^\mu = (p^0, -\vec{p})$, manipulamos a primeira integral que comparece na expressão acima (I_1):

$$\begin{aligned}
I_1 &= -\int_{+\infty}^{-\infty}\int_{+\infty}^{-\infty}\int_{+\infty}^{-\infty} d^3p' \int \frac{dp'^0}{2p'^0}\delta(p'^0+w^0)e^{-ip'^0(x^0-y^0)+i\vec{p'}.(\vec{x}-\vec{y})} \\
&= \int \frac{d^4p'}{2p'^0}\delta(p'^0+w^0)e^{-ip'_\mu(x^\mu-y^\mu)}.
\end{aligned}$$

Assim, retornando à relação anterior (e suprimindo os índices linha), segue:

$$\begin{aligned}
\Delta(x^\mu - y^\mu) &= -\frac{i}{(2\pi)^3}\int \frac{d^4p}{2p^0}\delta(p^0+w^0)e^{-ip_\mu(x^\mu-y^\mu)} \\
&\quad -\frac{i}{(2\pi)^3}\int \frac{d^4p}{2p^0}\delta(p^0-w^0)e^{-ip_\mu(x^\mu-y^\mu)} \\
&= -\frac{i}{(2\pi)^3}\int \frac{d^4p}{2\left|w^0\right|}\mathrm{sgn}(p^0)(\delta(p^0+w^0)+\delta(p^0-w^0))e^{-ip_\mu(x^\mu-y^\mu)},
\end{aligned} \tag{C.5}$$

onde introduzimos a função sinal da variável tipo tempo p^0:

$$\mathrm{sgn}(p^0) = \begin{cases} 1; & \text{se } p^0 > 0, \\ -1; & \text{se } p^0 < 0. \end{cases}$$

Pode-se ainda reescrever a soma das funções delta que surge no integrando da função de Pauli-Jordan de forma mais conveniente utilizando a identidade distribucional

$$\frac{1}{2\left|w^0\right|}(\delta(p^0+w^0)+\delta(p^0-w^0)) = \delta((p^0)^2-(w^0)^2). \tag{C.6}$$

De posse deste resultado, retornamos a (C.5) e obtemos:

$$\begin{aligned}\Delta(x^\mu - y^\mu) &= -\frac{i}{(2\pi)^3}\int d^4p\,\big(\mathrm{sgn}(p^0)\big)\,\underbrace{\delta((p^0)^2-(w^0)^2)}_{=\delta(p_\mu p^\mu - m^2)}\,e^{-ip_\mu(x^\mu-y^\mu)} \\ &= -\frac{i}{(2\pi)^3}\int d^4p\,\big(\mathrm{sgn}(p^0)\big)\,\delta(p_\mu p^\mu - m^2)e^{-ip_\mu(x^\mu-y^\mu)}. \qquad (C.7)\end{aligned}$$

A relação (C.7) acima corresponde à expressão <u>manifestamente covariante</u> da função de Pauli-Jordan, visto que é composta exclusivamente por termos escalares de Lorentz.

Para finalizarmos esta breve discussão referente à função de Pauli-Jordan, vamos ressaltar sua propriedade fundamental: **sob intervalos tipo-espaço** $(x^\mu - y^\mu) < 0$ **a função se anula**. De fato, recorrendo à covariância desta função e à relação (C.2) (sob transformações de Loretz ortócronas), segue naturalmente que, para qualquer intervalo tipo-espaço, a função de Pauli-Jordan é efetivamente nula.

Este fato estabelece uma correlação íntima entre a função de Pauli-Jordan e o príncipio de microcausalidade, conforme comentamos anteriormente, pois eventos separados por intervalos tipo-espaço não podem ter relação causal entre si (devido à finitude da velocidade de propagação de sinais) de forma que, no cenário da teoria quântica, os comutadores envolvendo observáveis físicos separados por intervalos desta natureza devem se anular, sendo expressos em termos de $\Delta(x^\mu - y^\mu)$ para garantir causalidade.

C.1 Referências do Apêndice

Exibimos a seguir as referências relativas a este apêndice:

[33] Greiner, W.; Reinhardt, J. *"Field Quantization"*. Springer, 1996.

[35] Itzykson, C.; Zuber, J. *"Quantum Field Theory"*. McGraw-Hill, 1980.

[38] Mandl, F.; Shaw, G. *"Quantum Field Theory"*. John Wiley and Sons, 1984.

Apêndice D

A Série BCH (Baker--Campbell-Hausdorff)

A série de Baker-Campbell-Hausdorff consiste em uma **expressão geral** para operadores da forma $e^{iS}Ae^{-iS}$, onde A e S são operadores quaisquer, **em termos de comutadores**. Este resultado é central no procedimento iterativo introduzido a partir da **transformação FW**, discutida no capítulo 3.

Consideremos então um operador da forma $F(\kappa) = e^{i\kappa S}Ae^{-i\kappa S}$ tal que possa ser expandido em uma série de Taylor envolvendo o parâmetro κ:

$$F(\kappa) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial^n F(\kappa)}{\partial \kappa^n} \right)_{(\kappa=0)} \kappa^n. \tag{D.1}$$

Entretanto, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F(\kappa)}{\partial \kappa} &= \frac{\partial}{\partial \kappa}(e^{i\kappa S}Ae^{-i\kappa S}) \\
&= iSe^{i\kappa S}Ae^{-i\kappa S} + e^{i\kappa S}\underbrace{\frac{\partial A}{\partial \kappa}}_{=0}e^{-\kappa S} + e^{i\kappa S}A(-iSe^{-i\kappa S}) \\
&= e^{i\kappa S}(i[S, A])e^{-i\kappa S},
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 F(\kappa)}{\partial \kappa^2} = \frac{\partial}{\partial \kappa}\left(\frac{\partial F(\kappa)}{\partial \kappa}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= i\frac{\partial}{\partial\kappa}\left(e^{i\kappa S}[S,A]e^{-i\kappa S}\right)\\
&= i\left(iSe^{i\kappa S}[S,A]e^{-i\kappa S} - ie^{i\kappa S}[S,A]Se^{-i\kappa S}\right)\\
&= i^2 e^{i\kappa S}\left(S[S,A]-[S,A]S\right)e^{-i\kappa S}\\
&= e^{i\kappa S}(i^2[S,[S,A]])e^{-i\kappa S}
\end{aligned}
$$

e assim sucessivamente.

Desta maneira, propomos a expressão

$$
\frac{\partial^n F(\kappa)}{\partial\kappa^n} = e^{i\kappa S}(i^n \underbrace{[S,[S,...[S,A]...]]}_{n \text{ comutadores}})e^{-i\kappa S}; \quad n \geq 1. \tag{D.2}
$$

Examinando o termo $n+1$, segue:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^{n+1}F(\kappa)}{\partial\kappa^{n+1}} &= \frac{\partial}{\partial\kappa}\left(e^{i\kappa S}(i^n \underbrace{[S,[S,...[S,A]...]]}_{n \text{ comutadores}})e^{-i\kappa S}\right)\\
&= iSe^{i\kappa S}(i^n[S,[S,...[S,A]...]])e^{-i\kappa S} - ie^{i\kappa S}(i^n[S,[S,...[S,A]...]])Se^{-i\kappa S}\\
&= i^{n+1}e^{i\kappa S}(S[S,[S,...[S,A]...]] - [S,[S,...[S,A]...]]S)e^{-i\kappa S}\\
&= e^{i\kappa S}(i^{n+1} \underbrace{[S,[S,[S,...[S,A]...]]]}_{n+1 \text{ comutadores}})e^{-i\kappa S},
\end{aligned}
$$

de modo que, por indução, verificamos a validade do *ansatz* (D.2).

Portanto, substituindo (D.2) em (D.1), temos

$$
\begin{aligned}
F(\kappa) &= F(0) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(e^{i\kappa S}(i^n[S,[S,...[S,A]...]])e^{-i\kappa S}\right)_{(\kappa=0)}\kappa^n\\
&= A + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\underbrace{[S,[S,...[S,A]...]]}_{n \text{ comutadores}}\kappa^n.
\end{aligned}
$$

Fazendo agora $\kappa = 1$ na expressão acima, resulta a expansão BCH que desejávamos demostrar:

$$
F(1) = A + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\underbrace{[S,[S,...[S,A]...]]}_{n \text{ comutadores}}
$$

$$
\Rightarrow e^{iS}Ae^{-iS} = A + i[S,A] - \frac{1}{2!}[S,[S,A]] + ... + \frac{i^n}{n!}\underbrace{[S,[S,...[S,A]...]]}_{n \text{ comutadores}} + ... \tag{D.3}
$$

D.1 Referências do Apêndice

As referências deste apêndice são expressas abaixo:

[34] Bjorken, J. D.; Drell, S. D. *"Relativistic Quantum Mechanics"*. McGraw--Hill, 1964.

[35] Itzykson, C.; Zuber, J. *"Quantum Field Theory"*. McGraw-Hill, 1980.

Referências Bibliográficas

[01] Dirac, P. A. M. *"The Quantum Theory of the Electron"*. Proc. Roy. Soc. Lond. A **117**, p. 610, 1928.

[02] Laporte, O.; Uhlenbeck, G. E. *"Application of Spinor Analysis to the Maxwell and Dirac Equations"*. Phys. Rev. **37**, p. 1380, 1931.

[03] Fierz, M. *"Über die Relativistische Theorie Kräftefreier Teilchen mit Beliebigem Spin"*. Helv. Phys. Acta. **12**, p. 3, 1939.

[04] Fierz, M.; Pauli, W. *"On relativistic Wave Equations of Particles of Arbitrary Spin in an Electromagnetic Field"*. Proc. Roy. Soc. Lond. A **173**, p. 211, 1939.

[05] de Broglie, L. *"Théorie Générale des Particules à Spin"*. Gauthier--Villars, Paris, 1943.

[06] Bargmann, V.; Wigner, E. P. *"Group Theoretical Discussion of Relativistic Wave Equations"*. Proc. Natn. Acad. Sci. USA **34**, p. 211, 1948.

[07] Petiau, G. *"Contribution à la Théorie des Équations d'Ondes Corpusculaires"*. Tese da Universidade de Paris, publicada em Acad. Roy. de Belg., Classe Sci., Mém. in **816**, No. 2, 1936.

[08] Duffin, R. J. *"On the Characteristic Matrices of Covariant Systems"*. Phys. Rev. **54**, p. 1114, 1938.

[09] Kemmer, N. *"The Particle Aspect of Meson Theory"*. Proc. Roy. Soc. Lond. A **173**, p. 91, 1939.

[10] Harish-Chandra. *"The Correspondence Between the Particle and Wave Aspects of the Meson and the Photon"*. Proc. Roy. Soc. A **186**, p. 502, 1946.

[11] Weinberg, S. *"Feynman Rules for Any Spin"*. Phys. Rev. **133**, p. B1318, 1964.

[12] Foldy, L. L.; Wouthuysen, S. A. *"On the Dirac Theory of Spin 1/2 Particles and Its Non-Relativistic Limit"*. Phys. Rev. **78**, p. 29, 1950.

[13] Moshin, P. Y.; Tomazelli, J. L. *"On the Non-Relativistic Limit of Linear Wave Equations for Zero and Unity Spin Particles"*. Modern Physics Letters A **23**, p. 129, 2008.

[14] Shay, D.; Good, R. H. *"Spin-One Particle in an External Electromagnetic Field"*. Phys. Rev. **179**, p. 1410, 1969.

[15] Sesma, J.; Biel, J.; Garrido, L. M. *"Relation between Generalized Foldy--Wouthuysen and Lorentz Transformations"*. Am. Jour. Phys. **32**, p. 559, 1964.

[16] Oppenheimer, J. R. *"Note on Light Quanta and the Electromagnetic Field"*. Phys. Rev. **38**, p. 725, 1931.

[17] Giannetto, E. *"A Majorana-Oppenheimer Formulation of Quantum Electrodynamics"*. Nuovo Cim. **44**, p. 140, 1985.

[18] Mignani, R.; Recami, E.; Baldo, M. *"About a Dirac-Like Equation for the Photon according to Ettore Majorana"*. Nuovo Cim. **11**, p. 568, 1974.

[19] Giannetto, E. *"A Majorana-Dirac-Like Equation for a Non-Abelian Gauge Field"*. Nuovo Cim. **44**, p. 145, 1985.

[20] Majorana, E. *"Teoria relativistica di particelle con momento intrinseco arbitrario"*. Nuovo Cim. **9**, p. 335, 1932.

[21] Fradkin, D. M. *"Comments on a Paper by Majorana Concerning Elementary Particles"*. Am. Jour. Phys. **34**, p. 314, 1966.

[22] Bassani, G. F. *"Ettore Majorana Scientific Papers"*. Springer, 2006.

[23] Esposito, S.; Recami, E.; van der Merwe, A.; Battiston, R. *"Ettore Majorana: Unpublished Research Notes on Theoretical Physics"*. Springer, 2009.

[24] Fushchich, W. I.; Shtelen, W. M.; Spichak, S. V. *"On the connection between solutions of Dirac and Maxwell equations, dual Poincaré invariance and superalgebras of invariance and solutions of nonlinear Dirac equations"*. J. Phys. A: Math. Gen. **24**, p. 1683, 1991.

[25] Kälbermann, G. *"Kemmer-Duffin-Petiau equations from two-body Dirac equations"*. Phys. Rev. C **37**, p. 25, 1988.

[26] Królikowski, W. *"Tensor Form of the Breit Equation"*. Acta Phys. Pol. **B14**, p. 109, 1983.

[27] Wigner, E. P. *"On Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorentz Group"*. Ann. Math. **40**, p. 149, 1939.

[28] Corson, E. M. *"Introduction to tensors, spinors and relativistic wave equations"*. Segunda edição, Chelsea Publishing Company, 1953.

[29] Berestetskii, V. B.; Pitaevskii, L. P.; Lifshitz, E. M. *"Quantum Electrodynamics"*. Segunda edição, Butterworth-Heinemann, 1982.

[30] Akhiezer, A. I.; Berestetskii, V. B. *"Quantum Electrodynamics"*. Segunda edição, Jonh Wiley, 1965.

[31] Novozhilov, Y. V. *"Introduction to Elementary Particle Theory"*. Pergamon Press, 1975.

[32] Greiner, W. *"Relativistic Quantum Mechanics: Wave Equations"*. Terceira edição, Springer, 2000.

[33] Greiner, W.; Reinhardt, J. *"Field Quantization"*. Springer, 1996.

[34] Bjorken, J. D.; Drell, S. D. *"Relativistic Quantum Mechanics"*. McGraw--Hill, 1964.

[35] Itzykson, C.; Zuber, J. *"Quantum Field Theory"*. McGraw-Hill, 1980.

[36] Visconti, A. *"Quantum Field Theory"*. Volume 1, Pergamon Press, 1969.

[37] Umezawa, H. *"Quantum Field Theory"*. North-Holland Publishing, 1956.

[38] Mandl, F.; Shaw, G. *"Quantum Field Theory"*. John Wiley and Sons, 1984.

[39] Ryder, L. H. *"Quantum Field Theory"*. Segunda edição, Cambridge University Press, 1996.

[40] Barut, A. O. *"Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles"*. Dover Publications, 1980.

[41] Stancu, F. *"Group Theory in Subnuclear Physics"*. Oxford University Press, 1996.

[42] Hamermesh, M. *"Group Theory and its Application to Physical Problems"*. Dover Publications, 1989.

[43] Ohnuki, Y. *"Unitary Representations of the Poincaré Group and Relativistic Wave Equations"*. World Scientific Publishing, 1988.

[44] Penrose, R.; Rindler, W. *"Spinors And Space-Time"*. Volume 1, Cambridge University Press, 1984.

[45] DeWitt, B. S. et all, *"Relativity, Groups and Topology"*. Gordon and Breach Science Publishers, 1964.

[46] Naimark, M. A. *"Linear Representations of the Lorentz Group"*. Pergamon Press, 1964.

[47] Zinn-Justin, J. *"Quantum Field Theory and Critical Phenomena"*. Quarta edição, Oxford University Press, 2002.

[48] Tomazelli, J. L.; Manzoni, L. A.; Pimentel, B. M. *"Causal Theory for the Gauged Thirring Model"*. Eur. Phys. Jour. C, **8**, p. 353, 1999.

[49] Weinberg, S. *"Feynman Rules for Any Spin II. Massless Particles"*. Phys. Rev. **134**, p. B882, 1964.

[50] van der Waerden, B. L. *"Group Theory and Quantum Mechanics"*. Springer-Verlag, 1974.

[51] Weyl, H. *"The Theory of Groups and Quantum Mechanics"*. Dover Publications, 1950.