

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA - UFSC
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS - CFM
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

André Felipe Garcia

**TRANSIÇÃO QUIRAL NA MATÉRIA DE QUARKS
MAGNETIZADA**

Florianópolis
2012

André Felipe Garcia

**TRANSIÇÃO QUIRAL NA MATÉRIA DE QUARKS
MAGNETIZADA**

Dissertação submetida ao Curso de Pós-Graduação em Física para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Marcus Benghi Pinto

Florianópolis
Agosto de 2012

Para meus pais.

Agradecimentos

Existem algumas pessoas pelas quais sou extremamente grato pela presença e também pela ajuda durante este curso de mestrado. Neste espaço, gostaria de expressar meus sinceros agradecimentos:

Aos meus pais, André e Jiani Garcia, pela compreensão e apoio durante todos esses anos que estive em Florianópolis.

Ao meu irmão César, por ser também meu melhor amigo.

Aos meus tios, Márcio e Valéria Pocaí, pela companhia durante os finais de semana, em especial nas pizzarias de Balneário Camború.

Aos colegas Gabriel Neves Ferrari, Robson Denke e Juan Camilo Macias pelas discussões durante o mestrado.

Ao Marcus, pela enorme paciência em me orientar desde os tempos de graduação.

Ao Antônio e à Débora do Programa de Pós-Graduação em Física.

Ao CNPq e ao PPGF/UFSC pela concessão da bolsa de estudos. Ao PPGF/UFSC e à SBF pelo financiamento parcial em congressos.

À banca examinadora desta dissertação, composta pelos professores Celso Barros, Débora Menezes e Rudnei Ramos.

Saber muito não lhe torna inteligente. A inteligência se traduz na forma que você recolhe, julga, maneja e, sobretudo, onde e como aplica esta informação. Carl Sagan

Resumo

A física de altas energias é um dos campos de pesquisa mais interessantes da física e de maior atividade atualmente, abrangendo fenômenos físicos desde a cosmologia até a física de partículas elementares. Nesta última, sua atuação se dá principalmente nos modernos aceleradores de partículas, como o Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC) e o Large Hadron Collider (LHC), onde feixes de partículas colidem entre si produzindo inúmeras outras partículas. A Cromodinâmica Quântica é a teoria que descreve a força nuclear forte entre quarks e glúons, que são os formadores dos hádrons e estão confinados no interior dos mesmos. Entretanto, existe a possibilidade de que em regimes de altas energias caracterizados por temperaturas e/ou densidades elevadas estes quarks e glúons passem da fase hadrônica para uma fase desconfinada representada pelo plasma de quarks e glúons. Essa transição de fase tem inúmeras implicações experimentais (algumas delas sendo atualmente testadas no RHIC e no LHC), além de ser importante na descrição dos estágios iniciais do universo e da matéria que compõe as estrelas de nêutrons. Além disso, recentemente tem-se argumentado que espectadores (partículas periféricas que não se envolvem diretamente na colisão) em colisões não centrais de íons pesados podem gerar fortes campos magnéticos na região de colisão, o que pode influenciar as características da transição de fase. No entanto, devido as dificuldades técnicas em se trabalhar diretamente com a QCD, o uso de modelos efetivos que apresentam algumas propriedades e simetrias desta teoria tem crescido significativamente, mostrando-se uma boa alternativa para contornar estas dificuldades. Um dos modelos mais conhecidos é o modelo de Nambu–Jona-Lasinio (NJL), que, na sua versão mais simples, trata a interação entre quarks up e down como sendo pontual, isto é, sem a participação de glúons. Isto facilita em muito os cálculos envolvidos, apesar de restringir o uso do modelo a escalas de energia que sejam compatíveis com esta aproximação. Nesta dissertação faremos uso da versão $SU(2)$ do modelo de NJL em temperaturas e densidades finitas para estudar a transição quiral na matéria de quarks com e sem a influência de um campo magnético externo. Estudaremos com maiores detalhes o diagrama de fases associado ao modelo, em especial a região da transição de primeira ordem onde há coexistência de fases. Veremos como o campo magnético altera a temperatura pseudo-crítica no crossover, o potencial químico de coexistência em baixas temperaturas e a localização do ponto crítico no diagrama de fases. Até o momento a maioria dos trabalhos relacionados com este tema estão restritos ao estudo dos efeitos do campo magnético no plano $T - \mu$. Neste trabalho damos um passo a frente, investigando também os efeitos do campo magnético sobre algumas grandezas termodinâmicas como a pressão, entropia, densidade bariônica, densidade de energia, susceptibilidade do número de quarks, anomalia do traço e curvas isentrópicas. Um dos resultados mais interessantes da dissertação é uma inesperada “deformação” no diagrama de coexistência de fases no plano $T - \rho$ devido às oscilações na curva de coexistência causadas pelo campo magnético. Este comportamento pode ser entendido em termos do preenchimento dos níveis de Landau em temperaturas baixas.

Palavras-chave: Transição Quiral, Diagrama de Fases, Modelo de Nambu–Jona-Lasinio, Campos Magnéticos.

Abstract

High energy physics is one of the most interesting research fields of physics in activity nowadays, covering physical phenomena from cosmology to elementary particle physics. Within the latter, high energy physics is present in modern particle accelerators such as the Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC) and the Large Hadron Collider (LHC), where particle beams collide producing several other particles. Quantum Chromodynamics (QCD) is the theory that describes the strong nuclear force among quarks and gluons, which form the hadrons and are confined in their interior. However, there is the possibility that in high energy regimes characterized by high temperatures and/or densities these quarks and gluons undergo a phase transition, changing from the hadronic phase to a deconfined phase represented by the quark-gluon plasma. This phase transition has several experimental implications (some of them being tested in the RHIC and in the LHC), being also important in the description of the early stages of the universe and in the study of the matter in neutron stars. Furthermore, it has been argued in recent years that spectators (particles at the edge of the beam that do not get involved directly in the collision) in non-central heavy ion collision are responsible for creating a strong magnetic field that could affect the features of the phase transitions. However, due to technical difficulties in dealing with QCD, the use of less fundamental theories that mimic some of the properties and symmetries of the original theory has grown significantly, being a good alternative to face those difficulties. One of the most popular models is the Nambu–Jona-Lasinio (NJL) model, which, in its simplest version, treats the interaction between *up* and *down* quarks as being pontual, with no gluon exchange. This makes calculations a lot easier to perform, but restricts the use of the model to energy scales consistent with this approximation. In this dissertation we make use of the $SU(2)$ NJL model at finite temperatures and densities in order to study the chiral transition in quark matter under the influence or not of an external magnetic field. We study the phase diagram of the model in detail, paying special attention to the first order transition, where the symmetric and non symmetric phases can coexist. We investigate how the magnetic field affects the crossover pseudocritical temperature, the coexisting chemical potential at low temperatures and the location of the critical end point in the phase diagram. So far, most of the works related to this theme are restricted to the investigation of the magnetic field over the $T - \mu$ plane only. We take a step forward in this direction, investigating the effects of the magnetic field over some thermodynamic quantities such as the pressure, entropy, baryonic density, energy density, quark number susceptibility, trace anomaly and the isentropic curves or adiabats. One of the most interesting results of this work is the “deformation” of the coexistence phase diagram in the $T - \rho$ plane caused by the oscillations of the coexistence curve due to the magnetic field. This behavior may be explained in terms of the filling of the Landau levels at low temperatures.

Keywords: Chiral Transition, Phase Diagram, Nambu–Jona-Lasinio Model, Magnetic Field.

Convenções

Antes de iniciarmos, é conveniente fazermos algumas definições e convenções que facilitam significativamente os nossos cálculos e que serão usadas ao longo desta dissertação. A primeira delas diz respeito as unidades naturais,

$$\hbar = c = k_b = 1,$$

onde \hbar é a constante de Planck, c a velocidade de luz no vácuo e k_b a constante de Boltzmann. Nestas unidades é possível mostrar que massa tem dimensão de energia, assim como momento, temperatura e potencial químico. Campo magnético tem dimensão de energia ao quadrado e a carga elementar é adimensional. A unidade de energia que vamos usar é o mega-eletron-volt, MeV ($1\text{MeV} = 10^6\text{eV}$). Também será útil converter MeV para fm, (Fermi, unidade de comprimento definida por $1\text{fm} = 10^{-15}\text{m}$):

$$1\text{MeV}^{-1} = 197\text{fm}.$$

A métrica do espaço-tempo é a métrica de Minkowski,

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Quadrivetores serão representados simplesmente por letras, por exemplo:

$$x = x^\mu = (t, \vec{x}) = (t, x, y, z),$$

$$x_\mu = (t, -\vec{x}) = (t, -x, -y, -z).$$

Um quadrivetor ao quadrado é dado por (soma implícita sobre índices repetidos)

$$x^2 = x_\mu x^\mu = g_{\mu\nu} x^\nu x^\mu = t^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

Convenções

Usaremos a notação "slash" de Feynman para designar a multiplicação de uma matriz gamma por um quadri vetor: $\not{a} = \gamma_\mu a^\mu$. As matrizes gamma escritas na base de Dirac assumem a forma:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sumário

Convenções	v
1. Introdução	9
1.1. O Modelo Padrão	10
1.2. A Transição Quiral e o Diagrama de Fases da QCD	13
1.3. Efeitos do Campo Magnético no Diagrama de Fases da QCD	15
2. Conceitos Básicos em Teoria de Campos	17
2.1. Simetria Quiral	17
2.2. O Potencial Efetivo	19
2.3. O Gás de Férmions Livres	22
2.3.1. Cálculo da Energia Livre	23
2.3.2. Caso $\mu = 0$	27
2.3.3. Caso $T = 0$	29
3. Matéria de Quarks Interagentes	35
3.1. O Modelo de Nambu–Jona-Lasinio	35
3.2. Cálculo da Energia Livre	36
3.3. Quebra da Simetria Quiral	40
3.4. Restauração da Simetria Quiral	42
3.5. O Diagrama de Fases	44
3.6. Relações Termodinâmicas	46
4. Matéria Interagente na Presença de Campo Magnético	59
4.1. Cálculo da Energia Livre	59
4.2. Catálise Magnética	62
4.3. Restauração da Simetria Quiral	63
4.4. O Diagrama de Fases	66
4.5. Relações Termodinâmicas	67
5. Conclusões	81
A. Cálculo do Traço do Logaritmo	85
B. Convergência da Soma Sobre os Níveis de Landau	87

Lista de Figuras

1.1.	Tabela de partículas elementares.	11
1.2.	Ilustração do diagrama de fases da QCD.	14
2.1.	Pressão em função da temperatura no gás de férmions livres em $\mu = 0$. Note que a quantidade P/T^4 é adimensional. Vemos que a pressão cresce rapidamente em baixas temperaturas e satura em temperaturas elevadas, atingindo o limite de Stefan-Boltzmann.	29
2.2.	Entropia em função da temperatura para $\mu = 0$. No quadro a direita temos o comportamento para baixas temperaturas. Note que a quantidade s/T^3 é adimensional.	30
2.3.	Densidade de Energia dividida pela quarta potência da temperatura em função da temperatura para $\mu = 0$. O comportamento é o mesmo observado nas figuras anteriores: rápido crescimento para baixas temperaturas e saturação em seguida.	31
2.4.	Equação de Estado do gás livre em $\mu = 0$. O quadrado da velocidade do som no gás é a inclinação da reta, $v_s^2 = dP/d\epsilon = 1/3$	32
2.5.	Gás livre em $T = 0$: Pressão em função do potencial químico.	32
2.6.	Gás livre em $T = 0$: Densidade de quarks em função do potencial químico.	33
2.7.	Gás livre em $T = 0$: Densidade de energia em função de μ	33
3.1.	Massa efetiva dos quarks em função do acoplamento G em temperatura e potencial químico zero. A linha contínua mostra o caso em que a massa nua dos quarks é de 6 MeV (limite físico), enquanto a linha tracejada mostra o limite quiral. A simetria quiral é quebrada para $G_c\Lambda^2 \simeq 1.41$ no limite físico e $G_c\Lambda^2 = 1.64$ no limite quiral.	42
3.2.	Energia livre em função de M no limite físico, em $\mu = 0$ e para diferentes valores de T em unidades de MeV. A massa efetiva dos quarks é o valor de M que minimiza \mathcal{F} . A medida que T cresce, o mínimo de \mathcal{F} desloca-se para a esquerda, indicando que a massa dos quarks está diminuindo e a simetria quiral está sendo restaurada aos poucos, ou seja, por meio de um crossover.	44
3.3.	Energia livre em função do parâmetro de ordem no limite quiral em $\mu = 0$ para diferentes valores de T em unidades de MeV. O mínimo de \mathcal{F} desloca-se para zero com o aumento da temperatura de modo que a transição é de segunda ordem.	45

3.4. Massa dos quarks em função da temperatura para $\mu = 0$. Linha contínua: limite físico, crossover entre altas e baixas massas. Linha tracejada: limite quiral, transição de 2ª ordem entre as fases massiva e não massiva. 46

3.5. Energia livre em função do parâmetro de ordem no limite físico em $T = 0$ para diferentes valores de μ em unidades de MeV. A massa dos quarks é o valor de M do mínimo global. A medida que μ cresce, surge um mínimo local próximo de $M = 0$. Em $\mu = \mu_c = 380$ MeV o mínimo local passa a ser global e vice-versa, restaurando assim a simetria quiral por meio de uma transição de 1ª ordem. 47

3.6. Energia livre em função do parâmetro de ordem no limite quiral em $T = 0$ para diferentes valores de μ em unidades de MeV. A medida que μ cresce, surge um mínimo local em $M = 0$. Em $\mu = \mu_c = 370$ MeV o mínimo local passa a ser global e vice-versa, restaurando assim a simetria quiral por meio de uma transição de 1ª ordem. 48

3.7. Massa dos quarks em função do potencial químico para $T = 0$. Linha contínua: limite físico, transição de fase de 1ª ordem entre altas e baixas massas. Linha tracejada: limite quiral, transição de 1ª ordem entre as fases massiva e não-massiva. 49

3.8. A Temperatura pseudo-crítica (linha cheia) é a temperatura em que o negativo da derivada da massa efetiva, ou parâmetro de ordem, com relação a T é um máximo. A temperatura crítica, em transições de segunda ordem, é a temperatura em que a derivada da massa efetiva com relação a T diverge (linha tracejada). Em ambas as curvas, $\mu = 0$. 50

3.9. O diagrama de fases no limite quiral. A linha tracejada representa a transição de 2ª ordem que se inicia em $T \cong 218$ MeV e termina no ponto tri-crítico $T = 108$ MeV e $\mu = 289$ MeV, onde começa a transição de 1ª ordem (linha contínua) que vai até $\mu \cong 368$ MeV e $T = 0$ 51

3.10. O diagrama de fases no caso físico. A linha contínua representa a transição de 1ª ordem que se inicia em $\mu = 380$ MeV e termina no ponto crítico $T = 78.6$ MeV, $\mu = 330$ MeV. Em seguida ocorre um crossover representado pela linha tracejada preta. As linhas tracejadas em vermelho são as espinodais, isto é, as linhas que delimitam a região do diagrama em que existem duas fases para o sistema, uma delas sendo metaestável enquanto a outra a fase estável. 52

3.11. Pressão em função da temperatura no limite físico para $\mu = 0$. A razão P/T^4 cresce rapidamente mas satura em altas temperaturas (limite de Stefan-Boltzmann). 53

3.12. Pressão em função da temperatura no limite físico para diferentes valores de μ 54

3.13. Densidade Bariônica em função de μ para diferentes valores de T no limite físico. Em temperaturas baixas, onde a transição é de primeira ordem, temos uma descontinuidade de ρ . Já em temperaturas altas, onde ocorre o crossover, ρ é contínuo. 54

3.14. Diagrama de coexistência de fases. Para a mesma temperatura, duas densidades distintas representando as duas fases da matéria (simetria quiral quebrada e restaurada) coexistem. A densidade bariônica está em unidades de densidade da matéria nuclear, $\rho_0 = 0.17\text{fm}^{-3}$. O ponto crítico está marcado no topo da curva.	55
3.15. Densidade de entropia em função de T para diferentes valores de μ no limite físico. Em μ grande, onde a transição é de primeira ordem, podemos observar um pico próximo à temperatura de transição. Em T grande todas as curvas atingem um ponto de saturação.	55
3.16. Densidade de energia em função de T para diferentes valores de μ no limite físico. O comportamento é análogo ao dos gráficos acima.	56
3.17. Susceptibilidade do número de quarks em unidades de Λ^2 (contornos representados pelas linhas finas). A linha grossa representa a linha de transição de primeira ordem. Os eixos μ e T foram normalizados em termos dos respectivos valores críticos.	56
3.18. Anomalia do traço (ou medida da interação) em função de T para $\mu = 0$ no limite físico.	57
3.19. Anomalia do traço (ou medida da interação) em função de T no limite físico para diferentes valores de μ	57
4.1. Catálise Magnética - Massa efetiva dos quarks em função do campo magnético B em temperatura e potencial químico zero.	63
4.2. Potencial efetivo em $\mu = 0$. O valor do campo magnético externo é de $6m_\pi^2/e$. Com o aumento da temperatura a simetria quiral é restaurada por meio de um crossover.	64
4.3. Potencial efetivo em $T = 0$. O valor do campo magnético externo é de $6m_\pi^2/e$. Com o aumento do potencial químico a simetria quiral é restaurada por meio de uma transição de 1ª ordem.	65
4.4. Potencial efetivo em $\mu = 0$. O valor do campo magnético externo é de $15m_\pi^2/e$. Com o aumento da temperatura a simetria quiral é restaurada por meio de um crossover.	66
4.5. Potencial efetivo em $T = 0$. O valor do campo magnético externo é de $15m_\pi^2/e$. Com o aumento do potencial químico a simetria quiral é restaurada por meio de uma transição de 1ª ordem.	67
4.6. Parâmetro de ordem (massa efetiva dos quarks) para diferentes valores do campo magnético. No quadro da esquerda $\mu = 0$ enquanto que no quadro da direita $T = 0$	68
4.7. Diagrama de fases para $eB = 6m_\pi^2$ (quadro de cima) e $eB = 15m_\pi^2$ (quadro de baixo). A linha cheia representa a transição de primeira ordem, as linhas tracejadas são as linhas espinodais e a linha pontilhada representa o crossover.	69
4.8. Diagrama de fases para $B = 0$, $eB = 6m_\pi^2$ e $eB = 15m_\pi^2$. As linhas cheias representam a transição de primeira ordem e as linhas tracejadas representam o crossover.	70

Lista de Figuras

4.9. Linhas espinodais para $B = 0$ (linha s331lida), $eB = 6m_\pi^2$ (linha tracejada) e $eB = 15m_\pi^2$ (linha traço-ponto). 71

4.10. Press331o em fun331o de T em $\mu = 0$ para $B = 0$ (linha s331lida), $B = 6m_\pi^2/e$ (linha tracejada) e $B = 15m_\pi^2/e$ (linha traço-ponto). 72

4.11. Entropia em fun331o de T em $\mu = 0$ para $B = 0$ (linha s331lida), $B = 6m_\pi^2/e$ (linha tracejada) e $B = 15m_\pi^2/e$ (linha traço-ponto). 73

4.12. Densidade de Energia em fun331o de T em $\mu = 0$ para $B = 0$ (linha s331lida), $B = 6m_\pi^2/e$ (linha tracejada) e $B = 15m_\pi^2/e$ (linha traço-ponto). 74

4.13. Densidade bari331nica em fun331o de μ para $B = 0$ (linha s331lida), $B = 6m_\pi^2/e$ (linha tracejada) e $B = 15m_\pi^2/e$ (linha traço-ponto). 74

4.14. Diagrama de coexist331ncia de fases para $B = 0$ (linha s331lida), $B = 6m_\pi^2/e$ (linha tracejada) e $B = 15m_\pi^2/e$ (linha traço-ponto). Os s331mbolos no topo de cada curva indicam o ponto cr331tico. 75

4.15. Massa efetiva (representada pelos quadrados, com valores no eixo da direita) no valor mais baixo durante a transi331o, M^L , e o valor mais alto da densidade bari331nica na coexist331ncia de fases (pontos, eixo da esquerda) em fun331o de eB/m_π^2 75

4.16. Calor latente, $\Delta\varepsilon$ em fun331o de eB/m_π^2 . O comportamento oscilat331rio 331 o mesmo observado em ρ_B^H 76

4.17. Susceptibilidade do n331mero de quarks em unidades de Λ^2 para eB/m_π^2 . Observamos o mesmo padr331o de comportamento do caso $B = 0$ 76

4.18. Anomalia do Tra331o em fun331o de T em $\mu = 0$ para diferentes valores de eB 77

4.19. Anomalia do Tra331o em fun331o de T em $\mu = 328\text{MeV}$ (o valor de μ_c em $B = 0$) para diferentes valores de eB 77

4.20. Entropia por b331rion, S/A em $B = 0$ (quadro de cima) e $eB = 15m_\pi^2$ (quadro de baixo). As curvas finas correspondem a $S/A = 5, 10, 15, 20, 40, 100$. A linha grossa s331lida representa a transi331o de primeira ordem enquanto a linha tracejada representa o crossover. 78

4.21. Diagrama de fases no plano $P - T$ para diferentes valores de eB mostrando as regi331es de simetria quebrada (SQQ) e restaurada (SQR), que correspondem 331s fases de “g331s” e “l331quido” na analogia l331quido-g331s. As linhas representam transi331es de primeira ordem que terminam nos respectivos pontos cr331ticos, representados pelos s331mbolos no final das curvas. 79

4.22. Diagrama de fases no plano $P - T$ em unidades do Sistema Internacional. 79

4.23. Diagrama de fases da 331gua. Retirado de [6]. 80

B.1. Potencial efetivo em $T \rightarrow 0$ para $eB = 5m_\pi^2$. A forma do potencial muda conforme o valor de k_{max} , mas converge rapidamente a partir de $k_{max} = 2$ 88

B.2. Potencial efetivo em $T = 190$ MeV para $eB = 5m_\pi^2$ e $\mu = 0$. A forma do potencial muda conforme o valor de k_{max} , mas converge em $k_{max} \approx 50$. De cima para baixo: $k_{max} = 0$, $k_{max} = 5$, $k_{max} = 10$, $k_{max} = 50$ e $k_{max} = 100$ (estas duas últimas linhas são coincidentes). 88

1. Introdução

A física de altas energias é uma das áreas da física que considera diretamente o estudo de partículas elementares tanto no âmbito teórico, por meio das teorias quânticas de campos que englobam, por exemplo, o Modelo Padrão, quanto no âmbito experimental, por meio de experimentos com raios cósmicos e também com modernos aceleradores de partículas. As escalas de comprimento envolvidas nestes fenômenos físicos são tipicamente da ordem de $10^{-15}\text{m} = 1\text{fm}$, que é a ordem de grandeza de núcleos atômicos. Isto é cerca de dez mil vezes menor que o tamanho do átomo de hidrogênio. Os núcleos de átomos pesados são o que há de mais denso na Terra, com densidade nuclear e raio típicos de, aproximadamente, $0.16/\text{fm}^3$ e 0.8fm , respectivamente [1]. Além disso, os núcleos são os únicos constituintes da matéria que interagem através da força nuclear forte na Terra.

Entretanto, prótons e nêutrons (ou simplesmente nucleons) não são partículas elementares. Isto significa que eles são formados por partículas mais fundamentais, chamadas quarks, que interagem por meio da troca de glúons. Quando as temperaturas e/ou as densidades se tornam extremamente elevadas, quarks e glúons que compõem toda a matéria fortemente interagente passam para uma nova fase da matéria conhecida como plasma de quarks e glúons. Acredita-se que nos instantes iniciais do universo, quando as condições de temperatura e densidade eram muito elevadas, o plasma de quarks e glúons era predominante. A expansão atual do universo, conforme verificada pela lei de Hubble, nos permite estimar a sua densidade em tempos remotos, próximos ao Big Bang. A relação entre a idade do universo e sua densidade de energia é dada por [1]

$$t = \frac{1}{H(t)} = \sqrt{\frac{3}{8\pi G\epsilon(t)}}, \quad (1.1)$$

onde $H(t)$ é o parâmetro de Hubble, G é a constante gravitacional e $\epsilon(t)$ a densidade de energia cósmica. Considerando o Big Bang como o instante inicial, podemos calcular o tempo necessário para a densidade de energia cósmica atingir o valor $\epsilon \simeq 0.5\text{GeV}/\text{fm}^3$,

1. Introdução

que é a densidade de energia de um nucleon [1]. Com o valor $G = 6.708 \times 10^{-39} \text{GeV}^{-2}$, encontramos

$$t_q \simeq 10^{-5} \text{s}, \quad (1.2)$$

de modo que nos seus primeiros dez microsegundos, o universo estava num estado em que a existência de hádrons da forma como os conhecemos hoje era inconcebível. O estado primordial do universo era formado por quarks e glúons desconfiados até o instante t_q (período que ficou conhecido como a era dos quarks). Somente então os hádrons foram formados.

A transição do plasma de quarks e glúons para hádrons (e vice-versa) é um dos assuntos mais estudados na física de altas energias. A determinação do diagrama de fases correspondente à essa transição (o diagrama de fases da Cromodinâmica Quântica, ou simplesmente QCD, do inglês Quantum Chromodynamics), tem sido alvo de numerosos estudos tanto no âmbito teórico quanto no experimental. Com o intuito de entender melhor o significado deste diagrama no atual cenário da física, vamos fazer uma breve descrição do Modelo Padrão das partículas elementares e das principais características da QCD.

1.1. O Modelo Padrão

O Modelo Padrão das partículas elementares engloba três teorias de gauge (ou de calibre, em português) que descrevem a interação de três gerações de partículas que compõem a matéria por meio de três forças fundamentais da natureza: eletromagnetismo, força nuclear forte e força nuclear fraca. Completa o Modelo Padrão o chamado “setor de Higgs”, onde um bóson (o bóson de Higgs) interage com as demais partículas conferindo-lhes massa. A quarta força fundamental da natureza, a gravitação, é também a mais fraca delas e não é abordada no Modelo Padrão.

A matéria ordinária do nosso cotidiano é composta por átomos. Átomos são compostos por um núcleo de prótons e nêutrons cercado por uma núvem de elétrons. Prótons e nêutrons, por sua vez, são compostos pelos quarks *up* (u) e *down* (d). Estes quarks, o elétron e o neutrino eletrônico são férmions de spin $1/2$ e juntos formam a primeira geração de partículas constituintes da matéria do Modelo Padrão. Ao todo, são três gerações de partículas constituintes da matéria. Existem ainda os

bósons mediadores de força, que são responsáveis pela interação entre as partículas. A figura 1 mostra um resumo com as três gerações de partículas e também as partículas mediadoras das forças fundamentais.

Elementary Particles						
Quarks	u up	c charm	t top	g gluon	Force Carriers	
	d down	s strange	b bottom	γ photon		
Leptons	ν_e e neutrino	ν_μ μ neutrino	ν_τ τ neutrino	W W boson		
	e electron	μ muon	τ tau	Z Z boson		
3 \rightarrow	I	II	III	\leftarrow Generations		

Figura 1.1.: Tabela de partículas elementares.

Cada quark (up, down ou qualquer outro sabor) pode existir em três diferentes cores: vermelho, verde e azul. A interação forte que mantém os quarks ligados no interior dos prótons e nêutrons se dá devido a carga de cor dos quarks (por isso o nome Cromodinâmica Quântica). As partículas mediadoras da força forte são os glúons, que também carregam carga de cor, o que faz da QCD uma teoria não-Abeliana. Este comportamento é totalmente diferente do eletromagnetismo em que o fóton (partícula mediadora da força eletromagnética) não possui carga elétrica (fótons não interagem entre si) e a teoria é dita Abeliana.

Três características da QCD merecem destaque:

- **Confinamento:** a força forte que liga os quarks no interior dos hádrons aumenta de intensidade a medida que eles se afastam uns dos outros. Como consequência, não é possível separá-los, o que significa que eles estão confinados.
- **Liberdade Assintótica:** em escalas de energia muito altas (equivalente a escalas de distâncias pequenas) a constante de acoplamento da QCD diminui, fazendo com que a interação entre quarks e glúons fique assintoticamente fraca e o livre caminho médio destas partículas aumente consideravelmente. O plasma de quarks e glúons é formado por quarks e glúons assintoticamente livres nestes regimes de altas energias, sendo um dos principais alvos de estudo em experimentos realizados em colisores de

1. Introdução

íons pesados como o RHIC e o LHC [2, 3].

- Simetria Quiral: é uma simetria da QCD no limite em que a massa dos quarks vai para zero. Está diretamente associada ao conceito de quiralidade e a conservação (parcial) da corrente axial. No capítulo 2 desta dissertação vamos explorar com mais detalhes esta simetria da natureza.

Estas características, juntamente com o fato dos glúons portarem carga de cor, fazem da QCD uma teoria difícil de se tratar diretamente devido a impossibilidade de se usar teoria de perturbação convencional em seus cálculos (isto se deve porque a constante de acoplamento da QCD é maior que um em regimes de baixas energias, o que impossibilita a expansão perturbativa no acoplamento). Por isso existem inúmeros modelos que descrevem a interação forte de modo mais simples que a QCD, facilitando a obtenção de resultados teóricos que podem ser usados para entender algumas características específicas da teoria. Estes modelos efetivos como o modelo de Nambu–Jona-Lasinio (NJL), o Modelo Sigma Linear (MSL) e o modelo de sacola do MIT, por exemplo, têm sido empregados com êxito na descrição fenomenológica da interação forte para baixas energias, levando a resultados que podem ser comparados com cálculos de QCD na rede.

Massa no Modelo Padrão

No Modelo Padrão a massa das partículas é uma propriedade dinâmica, e não um atributo intrínseco como na mecânica Newtoniana. Partículas adquirem massa via quebra da simetria de calibre induzida pelo campo de Higgs. Daí diz-se que a partícula de Higgs, muito provavelmente recém encontrada no LHC [4], é a que gera massa para todas as demais. No entanto, a massa de hádrons compostos por quarks leves como u e d pouco tem haver com o campo de Higgs e até mesmo com a própria massa de seus quarks constituintes. Por exemplo o próton é composto pelos quarks uud (com massas aproximadamente de 4 e 6 MeV, respectivamente), mas possui massa de 938 MeV. De fato, a maior parte da massa de bárions e mésons emerge de um outro tipo de quebra de simetria: a quebra da simetria quiral. Uma abordagem mais ampla sobre o assunto pode ser encontrada em [5].

1.2. A Transição Quiral e o Diagrama de Fases da QCD

Tanto o próton quanto o nêutron possuem massa aproximada de 939 MeV, o que significa que no atual estágio do universo a simetria quiral está quebrada. Como bárions são formados por três quarks, cada quark no interior dos prótons e dos nêutrons possui massa efetiva de, aproximadamente, $1/3$ da massa destas partículas, o que é um valor bem acima da massa de corrente dos quarks *up* e *down*. A questão é: poderia existir alguma situação específica na qual a massa efetiva dos quarks fosse reduzida até que a simetria quiral fosse (parcialmente) restaurada?

A resposta é sim, e a condição para que isto ocorra é submeter os hádrons a altas energias (altas temperaturas e/ou densidades). Em termos práticos é isso o que acontece em colisores de íons pesados como o RHIC (Relativistic Heavy Ion Collider) e o LHC (Large Hadron Collider)[2, 3]. Nestes experimentos, feixes de partículas colidem com velocidades próximas a da luz e liberam grande quantidade de energia. Devido a contração de Lorentz na direção do movimento, os núcleos assumem uma forma achatada para observadores no laboratório. Na colisão, eles se superpõem para formar um sistema de muitos quarks contidos num pequeno disco, formando um meio quente, denso e colorido (no sentido de carga de cor). Então este meio se expande, mantendo o seu caráter colorido, até que é formado o plasma de quarks e glúons, onde a simetria quiral é aproximadamente restaurada¹. Finalmente, este plasma resfria produzindo hádrons que serão detectados no experimento. Diversos vídeos explicando o processo de colisão de íons e a formação do plasma de quarks e glúons podem ser encontrados em [2].

A figura 1.2 mostra um esquema do que seria o diagrama de fases da QCD com a fase hadrônica em temperaturas e densidades baixas, a fase de plasma de quarks e glúons em altas energias e uma fase em baixas temperaturas e altas densidades onde quarks poderiam formar estados ligados aos pares (diquarks coloridos) que poderiam dar origem a uma fase de supercondutividade de cor. Este último caso não será abordado nesta dissertação. A determinação precisa do diagrama de fases da QCD é alvo constante de pesquisas, tanto no campo experimental quanto no teórico. Simulações na rede para valor nulo do potencial químico, μ , encontraram que não há de fato uma transição de fase da matéria hadrônica para o plasma de quarks e glúons, mas sim um rápido aumento na densidade de energia, o que indica um crossover caracterizado por

¹Aproximadamente porque a massa de corrente dos quarks é pequena mas diferente de zero.

1. Introdução

uma temperatura pseudo-crítica (T_{pc}) de aproximadamente 160 MeV [6]. A situação não é tão clara para o caso de μ diferente de zero porque, até o momento, os cálculos de QCD na rede estão limitados devido ao famoso “problema do sinal” [7]. Entretanto, modelos efetivos, como o NJL, apontam para uma transição de primeira ordem entre a fase hadrônica e o plasma de quarks e glúons em baixas temperaturas, de modo que deve existir um ponto crítico onde termina a linha de transição de primeira ordem e começa o crossover. Além disso, a maioria das extrapolações na rede para μ finito também indicam a possibilidade de existência de um ponto crítico [8].

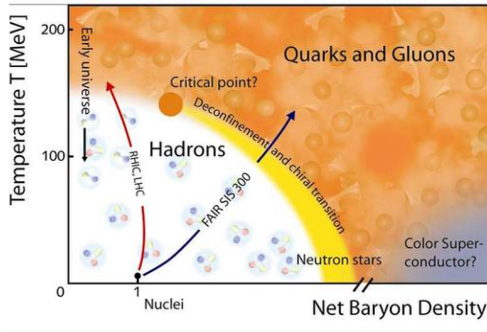


Figura 1.2.: Ilustração do diagrama de fases da QCD.

A região de alta densidade bariônica (ou potencial químico) e baixa temperatura é de particular interesse para a astrofísica devido a possibilidade de formação de estrelas de quarks a partir das estrelas de nêutrons. A densidade de uma estrela de nêutrons cresce no sentido da crosta para o núcleo, e as estimativas de densidade do núcleo superam em até cinco vezes a densidade nuclear normal [1]. Esta estimativa, juntamente com a possibilidade da matéria estranha ser estável em altas densidades (conjectura de Bodmer-Witten [9]), levanta a questão de se a estrela é realmente formada por nucleons ou por quarks desconfinados.

Nesta dissertação faremos uso do modelo de Nambu–Jona-Lasinio para quarks *up* e *down* com o objetivo de estudar a transição quiral e o seu respectivo diagrama de fases, além de diversas outras grandezas físicas que podem nos ajudar a entender melhor o caráter desta transição. Os principais resultados da dissertação estão relacionados com os efeitos causados por um campo magnético externo na transição quiral. A

seguir explicaremos brevemente a importância do campo magnético neste processo.

1.3. Efeitos do Campo Magnético no Diagrama de Fases da QCD

Em colisões não centrais de íons pesados, onde as partículas mais periféricas do feixe de partículas não participam diretamente da colisão, existe a possibilidade de que campos magnéticos extremamente elevados sejam produzidos [10] e possam influenciar as características da transição quiral. Além disso, campos magnéticos dessa magnitude também estariam presentes em magnetares [11] e no universo primordial [12]. Desse modo, entender como esses campos influenciam o diagrama de fases da QCD tornou-se uma questão importante. Até o momento a maioria das investigações aborda essa questão por meio de modelos efetivos como o MSL [13] e o NJL [14, 15] na aproximação de campo médio. O consenso geral é de que a temperatura pseudo-crítica do crossover em $\mu = 0$ cresce com o campo magnético. A primeira tentativa de resolver o problema na rede considerou dois sabores de quarks e a massa do pión no intervalo $m_\pi = 200 - 400$ MeV, encontrando também um aumento de T_{pc} com B [16]. Entretanto, uma simulação mais precisa considerando $2 + 1$ sabores de quarks, a massa do pión no seu valor físico ($m_\pi = 140$ MeV) e uma extrapolação para o limite contínuo encontrou que T_{pc} diminui com B [17]. O modelo de sacolas do MIT (MIT bag model) também observa queda na T_{pc} [18]. A resposta definitiva para esta questão ainda não existe.

No outro lado do diagrama, em altas densidades e temperaturas baixas, os efeitos do campo magnético ainda não foram totalmente explorados, mesmo no contexto de modelos efetivos. Do ponto de vista experimental, este regime de temperaturas intermediárias tem importância para colisões de baixas energias no RHIC e, no futuro, para exploração da possível região do ponto crítico com os experimentos FAIR [19] e NICA [20].

Apesar de todo o progresso feito até o momento para investigar a influência de B sobre o diagrama de fases no plano $T - \mu$, pouco tem sido feito no sentido de estudar aspectos particulares da transição de primeira ordem, como as linhas de coexistência de fases e os limites espinodais. Além disso, a análise de grandezas como a susceptibilidade do número de quarks, a anomalia do traço, as linhas adiabáticas ou isentrópicas e o calor latente podem ajudar na compreensão do diagrama de fases sob influência de um campo magnético. O principal objetivo desta dissertação é ir

1. Introdução

além da simples análise do diagrama de fases no plano $T - \mu$, investigando também essas grandezas físicas em detalhes.

A dissertação está organizada da seguinte maneira: no capítulo 2 faremos uma breve introdução aos conceitos de quiralidade, simetria quiral, potencial efetivo em teoria de campos e uma aplicação simples no modelo de férmions livres. No capítulo 3 introduziremos o modelo de Nambu–Jona-Lasinio na versão $SU(2)$, discutiremos a quebra e restauração da simetria quiral e calcularemos diversas grandezas físicas na ausência de campo magnético. No capítulo 4 consideraremos o campo magnético e investigaremos seus efeitos sobre as grandezas físicas já mencionadas, discutindo o efeito da catálise magnética e estudando, com detalhes, o diagrama de coexistência de fases. No capítulo 5 apresentaremos nossas conclusões.

2. Conceitos Básicos em Teoria de Campos

Neste capítulo faremos uma breve descrição do conceito de quiralidade e simetria quiral. Em seguida discutiremos o potencial efetivo em teoria de campos e usaremos o modelo de férmions livres em temperatura e densidade finitas como forma de aplicação destes conceitos.

2.1. Simetria Quiral

A simetria quiral é uma simetria da QCD no limite em que a massa dos quarks vai para zero. Entretanto, sabemos que a massa de corrente dos quarks é pequena comparada com a escala de massa dos hádrons, mas ainda assim diferente de zero. Desse modo, a simetria quiral pode ser considerada uma simetria aproximada da interação forte.

A quiralidade é uma propriedade (caracterizada por um número quântico) de partículas de massa zero. Partículas de massa zero podem ser de mão esquerda ou de mão direita dependendo se a projeção do spin sobre o momento, a chamada helicidade, for -1 ou $+1$, isto é, se o spin for anti-paralelo ou paralelo ao momento. A quiralidade é então definida como

$$Quiralidade = \begin{cases} +1 & \text{se a partícula é de mão direita/antipartícula de mão esquerda} \\ -1 & \text{se a partícula é de mão esquerda/antipartícula de mão direita} \end{cases}$$

Partículas massivas não tem quiralidade bem definida pois suas helicidades não são bem definidas. Uma partícula massiva pode ter seu momento linear invertido por meio de um boost de Lorentz, o que muda o valor da helicidade. Por outro lado, partículas de massa nula se movem na velocidade da luz e, portanto, não é possível encontrar um referencial que inverta o momento. Como consequência, a helicidade é um invariante.

Uma teoria que seja invariante sob uma transformação quiral deve contar apenas com partículas de massa zero. Mais do que isso, a invariância quiral é um pré-requisito para teorias com partículas de massa nula. Portanto, quando a simetria

2. Conceitos Básicos em Teoria de Campos

quiral é quebrada, o resultado é o surgimento de uma massa efetiva para as partículas envolvidas na teoria. Matematicamente podemos entender esse conceito da seguinte maneira. Considere o campo fermiônico $\Psi = (u, d)$ e os operadores de projeção

$$T_L = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5), \quad (2.1)$$

e

$$T_R = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5), \quad (2.2)$$

onde $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$. Exigimos que T_L e T_R satisfaçam as propriedades

$$T_L^2 = T_L,$$

$$T_R^2 = T_R,$$

$$T_L T_R = 0,$$

e $I = T_L + T_R$, de modo que

$$\Psi_L = T_L \Psi, \quad (2.3)$$

$$\Psi_R = T_R \Psi, \quad (2.4)$$

$$\Psi = \Psi_L + \Psi_R. \quad (2.5)$$

A lagrangiana de férmions livres, também conhecida como lagrangiana de Dirac,

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\cancel{\partial} - m)\Psi, \quad (2.6)$$

pode ser reescrita em termos dos campos Ψ_L e Ψ_R como

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}_L(i\cancel{\partial})\Psi_L + \bar{\Psi}_R(i\cancel{\partial})\Psi_R - m\bar{\Psi}_L\Psi_R - m\bar{\Psi}_R\Psi_L. \quad (2.7)$$

Podemos ver que se $m = 0$ os termos representando partículas de mão esquerda e direita na lagrangiana (2.7) se desacoplam, de modo que ela torna-se invariante frente às transformações

$$\Psi_L \rightarrow L\Psi_L, \quad (2.8)$$

$$\Psi_R \rightarrow R\Psi_R, \quad (2.9)$$

onde L e R são transformações do grupo $SU(2)$. Desse modo podemos fazer uma transformação nos quarks de mão esquerda sem influenciar os de mão direita. Uma transformação completa envolvendo ambos os tipos de quarks deve ser da forma $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$. Isso é o que se entende por simetria quiral. Entretanto, se a massa é diferente de zero as transformações acima não são válidas e não existe invariância quiral. Em outras palavras a presença de massa quebra a simetria quiral.

Indícios fenomenológicos da existência da simetria quiral vindos do estudo do decaimento β já eram conhecidos antes mesmo da existência da QCD. No decaimento β as constantes de acoplamento para as correntes hadrônicas vetorial e axial, C_V e C_A , não diferem das correspondentes correntes leptônicas (no caso da corrente axial a diferença existe mas é inferior a 25% [21]). Consequentemente, não há correções quânticas para as “cargas” correspondentes as correntes vetorial e axial vindas da interação forte. Sabemos que o mesmo acontece no caso de cargas elétricas, onde não existem correções radiativas justamente devido à conservação da carga. De modo análogo, espera-se que as correntes vetorial e axial sejam conservadas devido a alguma simetria da interação forte.

No caso da corrente vetorial podemos identificar a simetria envolvida como sendo a simetria de isospin da interação forte, ou seja, a corrente vetorial hadrônica é identificada com a corrente de isospin. No caso da corrente axial, a simetria envolvida é a simetria quiral. Uma revisão detalhada sobre o tema pode ser encontrada em [21].

2.2. O Potencial Efetivo

O conhecimento do potencial efetivo em teoria de campos é extremamente útil no estudo de quebras dinâmicas de simetrias, como bem apontou Jona-Lasinio [22]. Isto se deve porque o potencial efetivo leva em conta correções radiativas que podem quebrar uma simetria mesmo quando a lagrangiana original da teoria apresenta tal simetria. Entretanto, exceto em modelos triviais, não é possível calcular exatamente o potencial efetivo, de modo que uma aproximação adequada deve ser usada.

2. Conceitos Básicos em Teoria de Campos

A análise que faremos a seguir foi baseada em [23]. Consideramos uma teoria de campo escalar cuja dinâmica é dada pela densidade lagrangiana $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$. Adicionamos à lagrangiana uma fonte externa $j(x)$ acoplada ao campo ϕ ,

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \rightarrow \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) + j(x)\phi(x). \quad (2.10)$$

O gerador funcional das funções de Green, $Z[j]$, é dado em termos da amplitude de transição entre o vácuo num passado remoto e o vácuo num futuro remoto na presença da fonte $j(x)$:

$$Z[j] = \langle 0|T \exp \left[i \int d^n x \phi(x)j(x) \right] |0 \rangle = \langle 0^+|0^- \rangle_j. \quad (2.11)$$

O gerador funcional das funções de Green conectadas é definido [24] como o logaritmo do gerador funcional de todas as funções de Green

$$W[j] = -i \ln Z[j]. \quad (2.12)$$

Podemos expandir $W[j]$ em série de Taylor

$$W[j] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^n x_1 \dots d^n x_n G_c^n(x_1, \dots, x_n) j(x_1) \dots j(x_n), \quad (2.13)$$

onde $G_c^n(x_1, \dots, x_n)$ representa as funções de Green de todos os diagramas de Feynman conectados de n pernas externas.

O campo clássico é definido como sendo o valor esperado do operador $\phi(x)$ no vácuo na presença da fonte $j(x)$

$$\phi_c(x) = \frac{\delta W[j]}{\delta j(x)} = \left[\frac{\langle 0^+|\phi(x)|0^- \rangle}{\langle 0^+|0^- \rangle} \right]_j. \quad (2.14)$$

O gerador funcional das funções de Green irreduzíveis (de uma partícula) é a transformada de Legendre $\Gamma[\phi_c]$ do gerador das funções de Green conectadas [22],

$$\Gamma[\phi_c] = W[j] - \int d^n x j(x)\phi_c(x). \quad (2.15)$$

Diferenciando a equação acima com relação a ϕ_c obtemos

$$\frac{\delta\Gamma[\phi_c]}{\delta\phi_c(x)} = -j(x). \quad (2.16)$$

Esta equação é extremamente importante no estudo da quebra dinâmica de simetria.

A ação efetiva pode ser expandida de modo análogo ao que fizemos em (2.13)

$$\Gamma[\phi_c] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^n x_1 \dots d^n x_n \Gamma^n(x_1, \dots, x_n) \phi_c(x_1) \dots \phi_c(x_n), \quad (2.17)$$

onde Γ^n é a soma de todos os diagramas de Feynman de uma partícula irreduzíveis (one-particle-irreducible, 1PI) com n pernas externas. Um diagrama de Feynman de uma partícula irreduzível é um diagrama conectado que não pode ser desconectado cortando uma única linha. Por convenção, diagramas 1PI são calculados sem propagadores nas pernas externas.

Existe uma maneira alternativa de expandir a ação efetiva em potências do momento (em torno do ponto onde os momentos se anulam) ao invés de potências do campo clássico ϕ_c . No espaço de posições essa expansão assume a forma

$$\Gamma[\phi_c] = \int d^n x \left[-V_{eff}(\phi_c) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_c)^2 Z(\phi_c) + \dots \right], \quad (2.18)$$

onde $V_{eff}(\phi_c)$ é uma função chamada *potencial efetivo*. Note a semelhança da equação (2.18) com a densidade de energia funcional de Landau de um ferromagneto com magnetização \vec{M} [29],

$$F = \int d^3 x \left[\mathcal{F}(\vec{M}) + \frac{1}{2}K_L(\vec{M})(\nabla \cdot \vec{M})^2 + \frac{1}{2}K_T(\vec{M})(\nabla \times \vec{M})^2 + \dots \right], \quad (2.19)$$

onde

$$\mathcal{F}(\vec{M}) = N \left(\frac{T - T_c}{T_c} \vec{M}^2 + \xi(\vec{M}^2)^2 + \dots \right), \quad (2.20)$$

é a densidade de energia livre do modelo. N é um fator de normalização e $\xi > 0$.

2. Conceitos Básicos em Teoria de Campos

Supondo que a nossa lagrangiana tenha uma simetria interna, a quebra dinâmica dessa simetria ocorre se o campo quântico $\phi(x)$ assume um valor esperado no vácuo diferente de zero, mesmo quando a fonte externa $j(x)$ desaparece. Por simplicidade, denotamos $\langle 0^+ | \phi(x) | 0^- \rangle = \langle \phi \rangle_0$. Podemos ver das equações (2.14) e (2.16) que, se $j(x) = 0$, então $\langle \phi \rangle_0$ é solução de

$$\left. \frac{\delta \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c(x)} \right|_{\langle \phi \rangle_0} = 0. \quad (2.21)$$

Estaremos interessados somente nos casos onde o valor esperado no vácuo é um invariante translacional, de modo que podemos escrever a equação (2.18) como

$$\Gamma[\phi_c] = -\mathcal{V}V_{eff}(\phi_c), \quad (2.22)$$

onde \mathcal{V} é o elemento de volume. Assim, obtemos para a equação (2.21)

$$\left. \frac{dV_{eff}}{d\phi_c} \right|_{\langle \phi \rangle_0} = 0. \quad (2.23)$$

Com o potencial efetivo é possível determinar o verdadeiro estado fundamental de uma teoria após levar em conta as correções quânticas.

2.3. O Gás de Férmions Livres

Antes de começarmos com o modelo de Nambu–Jona-Lasinio para quarks interagentes, vamos fazer uma aplicação prática do formalismo que vimos acima e que será usado para estudar as transições de fase em teoria quântica de campos. Nossa abordagem será por meio do cálculo do potencial efetivo, ou energia livre de Landau, que é uma função dos parâmetros externos (como temperatura, potencial químico, campo magnético, etc) e do parâmetro de ordem (variável ou grandeza física usada para identificar uma transição de fase; maiores detalhes e termos técnicos sobre transições de fase podem ser encontrados em [25, 26, 27]). Nesta seção faremos o cálculo da energia livre de Landau de um gás relativístico de férmions não interagentes em temperatura e densidade diferentes de zero. Apesar de não haver transição de fase no modelo de gás livre, o formalismo usado será útil mais tarde no cálculo da energia livre no modelo de Nambu–Jona-Lasinio.

2.3.1. Cálculo da Energia Livre

Partimos da densidade lagrangiana de Dirac:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}_a(x)(i\cancel{\partial} - m)\Psi_a(x), \quad (2.24)$$

onde $\Psi_a(x)$ é o campo representando férmions da espécie a com massa m (a soma sobre todas as espécies está implícita e, a partir de agora, abandonamos o índice a e a dependência espaço-temporal com o intuito de não sobrecarregar a notação: $\Psi_a(x) = \Psi$). Nossa abordagem será por meio do formalismo de integrais de trajetória. Nesse formalismo, o gerador funcional, Z , contém toda a informação sobre o sistema, de modo que sua identificação com a função de partição em mecânica estatística é imediata. Desse modo é possível considerar sistemas físicos com temperatura e densidade finitas e calcular a energia livre de modo relativamente simples. De modo geral o gerador funcional é escrito como [28, 29, 31]

$$Z = N \int \mathcal{D}\bar{\Psi}\mathcal{D}\Psi \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L} \right], \quad (2.25)$$

onde N é um fator de normalização, \mathcal{L} é uma densidade lagrangiana, que no nosso caso é dada pela eq. (2.24), e $\mathcal{D}\Psi$ indica que estamos lidando com integrais funcionais (ou integrais de trajetória) sobre os campos Ψ e $\bar{\Psi}$.

A temperatura pode ser introduzida por meio do formalismo de tempo imaginário, ou formalismo de Matsubara [32, 33, 34, 35], onde a variável $\tau = it = ix_0$ substitui o tempo real em (2.25). Tomamos ainda os limites de integração em $d\tau$ variando de $\tau' = 0$ até $\tau'' = T^{-1} = \beta$ (T é a temperatura), de modo que

$$Z = N \int \mathcal{D}\bar{\Psi}\mathcal{D}\Psi \exp \left[\int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L} \right]. \quad (2.26)$$

Levando em conta a troca da variável x_0 e a lagrangiana (2.24), podemos escrever o gerador funcional na seguinte forma:

$$Z = N(\beta) \int \mathcal{D}\bar{\Psi}\mathcal{D}\Psi \exp \left[- \int_0^\beta d\tau' \int d^3x' \int_0^\beta d\tau \int d^3x \bar{\Psi}(\vec{x}') A(\vec{x}', \vec{x}) \Psi(\vec{x}) \right], \quad (2.27)$$

2. Conceitos Básicos em Teoria de Campos

onde identificamos

$$\bar{x} = (-i\tau, \vec{x}) \quad \text{e} \quad A(\bar{x}', \bar{x}) = (-i\bar{\not{\partial}} + m)\delta(\bar{x}' - \bar{x}),$$

$$\bar{\not{\partial}} = \gamma^\mu \bar{\partial}_\mu = \left(i\gamma_0 \frac{\partial}{\partial \tau}, \gamma^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right),$$

$$\delta(\bar{x}' - \bar{x}) = \delta(\tau' - \tau)\delta(\vec{x}' - \vec{x}).$$

Agora o campo Ψ deve ser entendido como uma função antiperiódica de τ e x no intervalo $0 < \tau < \beta$ (pois Ψ representa férmions; no caso de bósons as condições de contorno devem ser periódicas),

$$\Psi(\tau = 0, \vec{x}) = -\Psi(\tau = \beta, \vec{x}). \quad (2.28)$$

A integral nos campos da eq.(2.27) pode ser resolvida por técnicas de integração funcional encontradas em livros-texto de teoria de campos [28, 29, 31]. O resultado é:

$$Z = N(\beta) \exp(\text{tr} \ln A), \quad (2.29)$$

onde tr denota o traço.

Para avaliarmos o operador $A(\bar{x}', \bar{x})$, primeiro escrevemos a função $\delta(\bar{x}' - \bar{x})$ na sua representação integral

$$\delta(\bar{x}' - \bar{x}) = \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-i\bar{p}_n(\bar{x}' - \bar{x})}, \quad (2.30)$$

onde $\bar{p}_n = (i\omega_n + \mu, \vec{p})$ e a integral no tempo $d\tau$ foi substituída por uma soma sobre as frequências de Matsubara, ω_n , devido as condições de contorno impostas anteriormente (tendo isto em mente, abandonamos o subíndice n no quadri-vetor momento, \bar{p}_n , para não sobrecarregar a notação). O potencial químico, μ , é introduzido como um desvio na componente zero do quadri-momento, ou seja, na energia, após adicionarmos o termo $\mu\bar{\Psi}\gamma^0\Psi = \mu\Psi^\dagger\Psi$ na lagrangiana. No caso de férmions, as frequências de Matsubara são dadas pela relação [29, 32]

$$\omega_n = \frac{(2n+1)\pi}{\beta}. \quad (2.31)$$

Desse modo, obtemos para o operador A

$$A(\bar{x}', \bar{x}) = \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (-i\gamma^\mu \bar{\partial}_\mu^{\bar{x}'} + m) e^{-i\bar{p}(\bar{x}' - \bar{x})}. \quad (2.32)$$

O sobreíndice em $\bar{\partial}_\mu^{\bar{x}'}$ é para lembrar que a derivada deve ser tomada na variável \bar{x}' . Assim,

$$A(\bar{x}', \bar{x}) = \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (-\gamma^\mu \bar{p}_\mu + m) e^{-i\bar{p}(\bar{x}' - \bar{x})} \quad (2.33)$$

de modo que,

$$\text{tr} \ln A = \int_0^\beta d\tau \int d^3 x \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \text{tr} \ln(-\bar{\boldsymbol{p}} + m). \quad (2.34)$$

Usando a relação $\text{tr} \ln(-\bar{\boldsymbol{p}} + m) = 2 \ln(m^2 - \bar{p}^2)$ (Apêndice A) e lembrando que $\bar{p} = (i\omega_n + \mu, \vec{p})$, obtemos

$$\text{tr} \ln A = 2 \int d^3 x \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \ln[-(i\omega_n + \mu)^2 + E^2], \quad (2.35)$$

onde $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$. A soma sobre as frequências de Matsubara pode ser encontrada em [29] e resulta na seguinte equação:

$$\sum_n \ln[-(i\omega_n + \mu)^2 + x^2] = \beta x + \ln[1 - e^{-\beta(x-\mu)}] + \ln[1 - e^{-\beta(x+\mu)}]. \quad (2.36)$$

No lado direito da equação 2.36 o sinal do potencial químico (na exponencial em cada logaritmo) representa, se negativo, partículas e, se positivo, anti-partículas. Finalmente, a equação 2.34 pode ser escrita como

2. Conceitos Básicos em Teoria de Campos

$$\text{tr} \ln A = 2 \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left\{ \beta E + \ln \left[1 + \exp \left(\frac{-E - \mu}{T} \right) \right] + \ln \left[1 + \exp \left(\frac{-E + \mu}{T} \right) \right] \right\}. \quad (2.37)$$

No formalismo de integral de trajetória, o gerador funcional é uma integral sobre todas as possíveis trajetórias da exponencial da ação dos campos em questão. Nesse sentido ele contém toda a informação sobre o sistema, da mesma forma que em mecânica estatística a função de partição contém toda a informação relevante para a termodinâmica do sistema. De fato, essa analogia pode ser levada adiante e o gerador funcional pode ser visto como uma função de partição, da qual é possível extrair informações termodinâmicas do sistema, como o potencial efetivo, ou a energia livre, que vimos na seção anterior. A mecânica estatística nos diz que a relação entre a função de partição Z e a energia livre F do sistema é [27, 30]

$$Z = e^{-\beta F}. \quad (2.38)$$

Levando em conta a equação (2.29) podemos escrever essa relação como

$$-\beta F = \text{tr} \ln A. \quad (2.39)$$

Se deixarmos que o nosso sistema de férmions tenha mais graus de liberdade, por exemplo o número de sabores e cores no caso de quarks, devemos considerá-los ao tomar o traço de A . Como exemplo, mostramos o caso de quarks com N_f sabores e N_c cores. A densidade de energia livre de Landau¹, neste caso, assume a forma

$$\mathcal{F} = -2N_c N_f \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left\{ E + T \ln \left[1 + \exp \left(\frac{-E - \mu}{T} \right) \right] + T \ln \left[1 + \exp \left(\frac{-E + \mu}{T} \right) \right] \right\}. \quad (2.40)$$

Esta equação nos permite estudar a termodinâmica do gás de férmions. Como não há interação entre as partículas, não há diferença entre a massa de corrente e a massa

¹Densidade de energia livre é o nome mais correto para esta grandeza, uma vez que estamos dividindo a energia livre F pelo volume dado pela integral em d^3x na eq. (2.37). No entanto, nesta dissertação, vamos frequentemente chamar a densidade de energia livre apenas de energia livre, por vício de linguagem.

efetiva das mesmas e \mathcal{F} não depende dos campos. Além disso, como já mencionamos, não há transições de fase no gás livre.

A conexão com a termodinâmica pode ser feita ao relacionarmos (a menos de um sinal) a energia livre de Landau, eq. (2.40), com a pressão do gás:

$$P = -\mathcal{F}. \quad (2.41)$$

Assim as demais grandezas termodinâmicas como a densidade líquida de quarks e a densidade de entropia podem ser calculadas imediatamente:

$$\rho(T, \mu) = \frac{\partial P}{\partial \mu} = 2N_c N_f \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} [f^-(T, \mu) - f^+(T, \mu)], \quad (2.42)$$

$$s(T, \mu) = \frac{\partial P}{\partial T} = 2N_c N_f \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left\{ \ln \left[\frac{1}{f^-(T, \mu) f^+(T, \mu)} \right] + \frac{\mu}{T} [f^+(T, \mu) - f^-(T, \mu)] \right\}, \quad (2.43)$$

onde

$$f^\pm(T, \mu) = \frac{1}{e^{(E \pm \mu)/T} + 1} \quad (2.44)$$

é a distribuição de Fermi-Dirac. A densidade de energia é

$$\epsilon = -P + \mu\rho + Ts, \quad (2.45)$$

de modo que a equação de estado do gás, $P = P(\epsilon)$ pode ser calculada. Como um exemplo de aplicação destas relações, vamos estudar rapidamente dois casos simples mas de particular interesse: os casos $\mu = 0$ e $T = 0$, que correspondem aos extremos do diagrama de fases da QCD.

2.3.2. Caso $\mu = 0$

O conceito de potencial químico em teoria quântica de campos pode ser associado à diferença entre partículas e anti-partículas no sistema físico. Portanto, quando consideramos um sistema em que $\mu = 0$, estamos dizendo que o número de partículas

2. Conceitos Básicos em Teoria de Campos

nesse sistema é igual ao número de anti-partículas. Consequentemente a densidade líquida do número de quarks é zero, como mostra a equação (2.42). Fazendo $\mu = 0$ na eq. (2.40) obtemos para a energia livre

$$\mathcal{F} = -2N_c N_f \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left\{ E + 2T \ln \left[1 + \exp \left(-\frac{E}{T} \right) \right] \right\}. \quad (2.46)$$

A densidade de energia é simplesmente $\epsilon = -P + Ts$, onde P e s são dados pelas equações (2.41) e (2.43). Os parâmetros usados para gerar os resultados numéricos são os seguintes: $N_c = 3$ (correspondente aos três graus de liberdade de cor dos quarks), $N_f = 2$ (correspondente aos sabores u e d) e $m = 6 \text{ MeV}$ (consideramos a mesma massa para quarks u e d). O primeiro termo no integrando da equação (2.46), chamado termo de vácuo, apresenta uma divergência ultra-violeta, isto é, no limite de altos momentos. Podemos ter uma ideia desta divergência notando que

$$\int E \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} = \int_0^\infty p^2 \sqrt{p^2 + m^2} dp \sim \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_0^\Lambda p^3 dp \sim \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \Lambda^4. \quad (2.47)$$

Temos, portanto, uma divergência de quarta potência. Esta divergência pode ser regularizada se introduzirmos um cutoff no limite superior da integral na eq. (2.46), o que, na prática, significa fazer Λ finito na equação (2.47). Veremos o processo de regularização por cutoff com mais detalhes no próximo capítulo. Por hora o termo de vácuo representa apenas um desvio no valor da energia livre, de modo que podemos ignorá-lo sem maiores problemas (no caso do gás interagente o termo de vácuo deve ser levado em conta, obrigatoriamente). Os demais termos no integrando da equação (2.46) convergem mesmo quando o limite superior da integral é infinito, devido à amortização causada pela temperatura.

A figura 2.1 mostra o comportamento da pressão (dividida pela quarta potência da temperatura, de modo que a grandeza seja adimensional) como função da temperatura. Vemos que para pequenas temperaturas a razão P/T^4 cresce rapidamente mas logo satura, atingindo um valor limite a medida que a temperatura aumenta.

A figura 2.2 mostra a entropia (dividida pelo cubo da temperatura) como função da temperatura, onde também ocorre um aumento rápido da razão s/T^3 para pequenas temperaturas e a saturação para temperaturas mais altas. A figura 2.3 mostra o gráfico da densidade de energia em função da temperatura, enquanto a figura 2.4

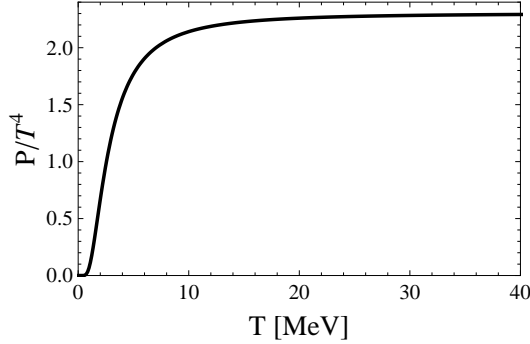


Figura 2.1.: Pressão em função da temperatura no gás de férmions livres em $\mu = 0$. Note que a quantidade P/T^4 é adimensional. Vemos que a pressão cresce rapidamente em baixas temperaturas e satura em temperaturas elevadas, atingindo o limite de Stefan-Boltzmann.

mostra a equação de estado do gás, que é simplesmente $P = \epsilon/3$ para o gás livre. A velocidade do som no gás, em unidades da velocidade da luz, c , é dada por

$$v_s^2 = \frac{dP}{d\epsilon} = \frac{1}{3}. \quad (2.48)$$

2.3.3. Caso $T = 0$

Outro caso de interesse no gás de férmions livres é o limite em que a temperatura vai a zero. Este caso tem relevância no estudo de objetos estelares compactos como as estrelas de nêutrons, onde o efeito da temperatura pode ser desprezado. Como a estrela é feita majoritariamente de matéria (e não de anti-matéria), o potencial químico é diferente de zero, pois o número de partículas é muito maior que o número de anti-partículas. Para calcular a energia livre fazemos $T \rightarrow 0$ na equação (2.40). O termo de vácuo permanece inalterado. O segundo termo no integrando vai a zero, pois

$$\lim_{T \rightarrow 0} \exp\left(\frac{-E - \mu}{T}\right) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{T \rightarrow 0} T \ln(1 + 0) = 0.$$

2. Conceitos Básicos em Teoria de Campos

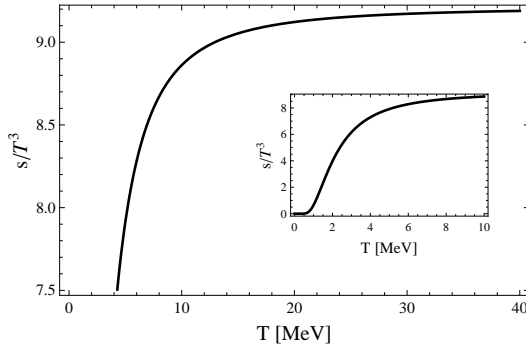


Figura 2.2.: Entropia em função da temperatura para $\mu = 0$. No quadro a direita temos o comportamento para baixas temperaturas. Note que a quantidade s/T^3 é adimensional.

O último termo no integrando da eq.(2.40) exibe dois comportamentos distintos dependendo se μ é maior ou menor que E . Se $\mu < E$, temos o mesmo resultado da equação acima, de modo que apenas o termo de vácuo permanece na energia livre. Entretanto, se $\mu > E$ temos

$$\lim_{T \rightarrow 0} \exp\left(\frac{-E + \mu}{T}\right) \rightarrow \infty, \quad (2.49)$$

de modo que

$$T \ln \left[1 + \exp\left(\frac{-E + \mu}{T}\right) \right] \approx T \ln \left[\exp\left(\frac{-E + \mu}{T}\right) \right] = -E + \mu, \quad (2.50)$$

e a energia livre assume a forma

$$\mathcal{F} = -2N_c N_f \int \mu \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}. \quad (2.51)$$

Uma forma compacta de escrever \mathcal{F} para os dois casos ($\mu < E$ e $\mu > E$) é introduzindo a função θ de Heaviside:

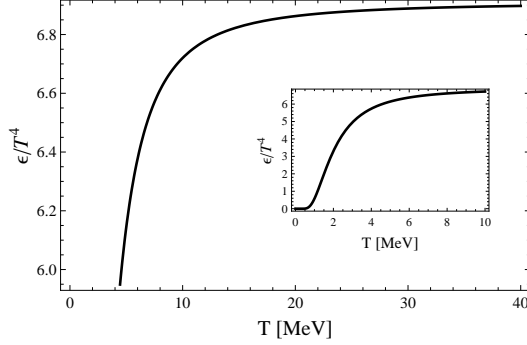


Figura 2.3.: Densidade de Energia dividida pela quarta potência da temperatura em função da temperatura pra $\mu = 0$. O comportamento é o mesmo observado nas figuras anteriores: rápido crescimento para baixas temperaturas e saturação em seguida.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F} &= -2N_c N_f \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} [E + (\mu - E)\theta(\mu - E)] \\
 &= -2N_c N_f \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} [\max(E, \mu)]
 \end{aligned} \tag{2.52}$$

onde $\theta(\mu - E) = 0$ se $\mu < E$ ou $\theta(\mu - E) = \mu - E$ se $\mu > E$.

A conexão com a termodinâmica pode ser feita através das equações (2.41) e (2.42). Como exemplo de aplicação destas relações na energia livre dada pela eq. (2.52), mostramos o gráfico da pressão, densidade de quarks e densidade de energia em função do potencial químico nas figuras 2.5, 2.6 e 2.7 respectivamente.

2. Conceitos Básicos em Teoria de Campos

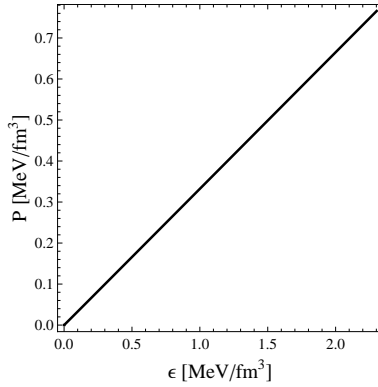


Figura 2.4.: Equação de Estado do gás livre em $\mu = 0$. O quadrado da velocidade do som no gás é a inclinação da reta, $v_s^2 = dP/d\epsilon = 1/3$.

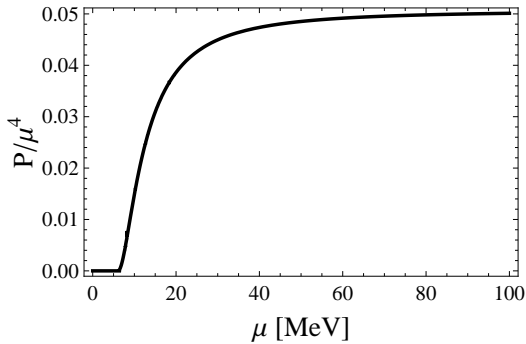


Figura 2.5.: Gás livre em $T = 0$: Pressão em função do potencial químico.

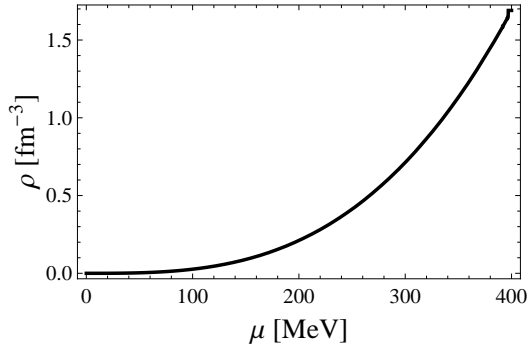


Figura 2.6.: Gás livre em $T = 0$: Densidade de quarks em função do potencial químico.

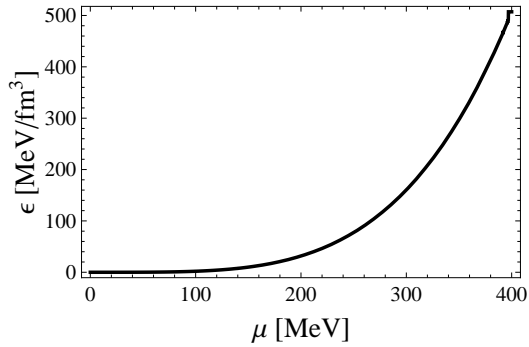


Figura 2.7.: Gás livre em $T = 0$: Densidade de energia em função de μ .

3. Matéria de Quarks Interagentes

Neste capítulo usaremos o mesmo formalismo de integral de trajetórias do capítulo anterior, mas desta vez aplicado ao modelo de Nambu–Jona-Lasinio para matéria de quarks com a finalidade de estudar o comportamento da transição quiral e suas implicações no contexto da física de altas energias. O mesmo formalismo de tempo imaginário (Matsubara) será usado para introduzir a temperatura e o potencial químico no nosso sistema, o que nos permite calcular a energia livre na aproximação de campo médio e estudar o comportamento do parâmetro de ordem, que está diretamente relacionado à massa dos quarks. Calcularemos assim o diagrama de fases associado à transição quiral no plano $T - \mu$ e também diversas grandezas termodinâmicas que podem ser usadas no estudo desta transição de fase.

3.1. O Modelo de Nambu–Jona-Lasinio

O modelo de Nambu–Jona-Lasinio (NJL) data de 1961 [36, 37], antes mesmo da existência da QCD e da descoberta dos quarks. Na versão original do modelo, os autores Yoichiro Nambu (1921 -) e Giovanni Jona-Lasinio (1932 -) propuseram um mecanismo análogo ao da teoria BCS da supercondutividade para explicar a elevada massa do nucleon, sem quebrar explicitamente a simetria quiral da lagrangiana do modelo (a conservação parcial da corrente vetorial axial que implicava na simetria quiral já era conhecida naquela época, conforme vimos no capítulo 2).

Depois do desenvolvimento da QCD nos anos 70, o modelo de NJL foi reinterpretado como um modelo efetivo para quarks [38, 39, 40], apesar de ignorar completamente o confinamento dos mesmos, uma das principais características da QCD. Entretanto, em muitas situações a característica mais relevante da QCD é a simetria quiral, de modo que o confinamento fica em segundo plano. Nessas circunstâncias, o modelo de NJL tem obtido relativo sucesso ao ser empregado diretamente aos quarks. Existe a possibilidade de forçar o confinamento no modelo de NJL por meio da inserção do “loop de Polyakov” nos chamados modelos de Polyakov–Nambu–Jona-Lasinio (PNJL)

[41, 42, 43], mas não faremos uso desta ferramenta nesta dissertação.

3.2. Cálculo da Energia Livre

O estudo da simetria quiral na matéria hadrônica será feito por meio do modelo de Nambu–Jona-Lasinio na versão SU(2), isto é, para quarks *up* e *down* com três graus de liberdade de cor. Nossa abordagem será pelo cálculo do potencial efetivo, ou energia livre de Landau, na aproximação de campo médio (em termos práticos a aproximação de campo médio fornece os mesmos resultados que as aproximações de Hartree e de N grande), o que nos permite investigar a quebra de simetria quiral e sua posterior restauração em temperatura e densidade finitas. Iniciamos com a lagrangiana do modelo [37, 44]:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_f (i \not{\partial} - m) \psi_f + G [(\bar{\psi}_f \psi_f)^2 + (\bar{\psi}_f i\gamma_5 \vec{\tau} \psi_f)^2], \quad (3.1)$$

onde ψ_f representa o campo fermiônico de sabor f (soma implícita entre diferentes sabores e cores), $\not{\partial} = \gamma^\mu \partial / \partial x^\mu$ sendo γ^μ as matrizes de Dirac, $m = 6 \text{ MeV}$ é a massa de corrente dos quarks, G a constante de acoplamento (de efeito atrativo) e $\vec{\tau}$ as matrizes de Pauli. O primeiro termo do lado direito da equação (3.1) representa a parte livre, o segundo termo é o canal escalar da interação e o terceiro termo o canal pseudo-escalar (responsável pela existência de píons na teoria). Dada a lagrangiana (3.1) o gerador funcional pode ser calculado de maneira usual [28, 29, 31].

$$Z = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L} \right], \quad (3.2)$$

onde \mathcal{N} é um fator de normalização (tendo isto em mente, podemos deixar de escrevê-lo sem nenhum prejuízo) e $\int \mathcal{D}\psi$ representa a integral de trajetória do campo ψ . O subíndice f nos campos ψ está subentendido, de modo que vamos suprimi-lo para não carregar a notação. Antes de prosseguir com o cálculo da eq. (3.2) vamos bosonizar a teoria introduzindo os campos auxiliares σ e $\vec{\pi}$ por meio da transformada de Hubbard-Stratanovich, onde os seguintes termos são adicionados à lagrangiana:

$$\Theta^2 = -\frac{1}{G} \left[\frac{\sigma}{2} + G(\bar{\psi}\psi) \right]^2 \quad \text{e} \quad \Omega^2 = -\frac{1}{G} \left[\frac{\vec{\pi}}{2} + G(\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi) \right]^2, \quad (3.3)$$

de modo que a nova lagrangiana assume a forma [45]

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i \not{\partial} - m) \psi - \frac{1}{4G} (\sigma^2 + \vec{\pi}^2) - (\sigma \bar{\psi} \psi + \bar{\psi} i \gamma_5 \vec{\pi} \cdot \vec{\tau} \psi) . \quad (3.4)$$

Os campos σ e $\vec{\pi}$ são campos auxiliares que facilitam o tratamento algébrico do cálculo do potencial efetivo. Se aplicarmos as equações de Euler-Lagrange na sua forma contínua,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0 , \quad (3.5)$$

para os campos σ e $\vec{\pi}$ obtemos

$$\sigma = -2G\bar{\psi}\psi \quad \text{e} \quad \vec{\pi} = -2G\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi , \quad (3.6)$$

de modo que $\Theta^2 = 0$ e $\Omega^2 = 0$. Portanto, as lagrangianas dadas pelas equações (3.1) e (3.4) são equivalentes, o que significa que a física envolvida nas duas é a mesma. Dessa forma o gerador funcional pode ser escrito como

$$Z = \exp \left[-\frac{i}{4G} (\sigma^2 + \vec{\pi}^2) \mathcal{V} \right] \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left[i \int d^4x \bar{\psi} (i \not{\partial} - m - \sigma - i \gamma_5 \vec{\pi} \cdot \vec{\tau}) \psi \right] , \quad (3.7)$$

onde consideramos uma aproximação de *campo médio* para σ e $\vec{\pi}$, de modo que eles possam sair da integral funcional nos campos ψ e $\bar{\psi}$. Os campos σ e $\vec{\pi}$ tampouco possuem dependência espaço-temporal, o que nos permite definir o elemento de volume quadridimensional $\int d^4x = \mathcal{V}$. Definimos ainda

$$Z_1 = \exp \left[\frac{-i}{4G} (\sigma^2 + \vec{\pi}^2) \int d^4x \right] ,$$

$$Z_2 = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left[i \int d^4x \bar{\psi} (i \not{\partial} - m - \sigma - i \gamma_5 \vec{\pi} \cdot \vec{\tau}) \psi \right] ,$$

de modo que $Z = Z_1 Z_2$. Podemos usar técnicas padrão de teoria de campos encontradas em livros-texto[28, 29, 31] para escrever Z_2 como

3. Matéria de Quarks Interagentes

$$Z_2 = \exp \text{Tr} \ln A, \quad (3.8)$$

com

$$A(x', x) = (i \not{\partial}_{x'} - m - \sigma - i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi}) \delta(x' - x), \quad (3.9)$$

onde $\not{\partial}_{x'}$ significa que a diferenciação é em relação a variável x' . Usando a representação integral da função delta e aplicando o logaritmo natural na equação acima obtemos

$$\begin{aligned} \ln A &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \ln (i \not{\partial}_{x'} - m - \sigma - i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi}) e^{-ip(x'-x)} \\ &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \ln (\not{p} - m - \sigma - i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi}) e^{-ip(x'-x)}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$. Tomando o traço¹

$$\text{Tr} \ln A = N_c N_f \int d^4 x \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} \ln (\not{p} - m - \sigma - i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi}), \quad (3.11)$$

onde $N_c = 3$ e $N_f = 2$ são os graus de liberdade de cor e sabor, respectivamente.

Para calcular o traço do logaritmo no lado direito da eq. (3.11) usamos a identidade $\text{tr} \ln = \ln \det$ e o resultado $\det(\not{p} - m - \sigma - i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi}) = [-p^2 + (m + \sigma)^2 + \vec{\pi}^2]^2$ (Apêndice A), de modo que

$$\ln \det(\not{p} - m - \sigma - i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi}) = 2 \ln[-p^2 + (m + \sigma)^2 + \vec{\pi}^2], \quad (3.12)$$

o que resulta em

$$Z_2 = \exp \left[2N_c N_f \int d^4 x \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \ln (-p^2 + (m + \sigma)^2 + \vec{\pi}^2) \right]. \quad (3.13)$$

Temos assim uma expressão para o gerador funcional $Z = Z_1 Z_2$. No formalismo de integral de trajetórias, o gerador funcional Z está relacionado com o potencial efetivo, ou energia livre do sistema, como vimos no capítulo 2. Desse modo podemos escrever

¹No contínuo podemos escrever o traço de um operador H como $\text{Tr} H = \int d^4 x \int d^4 x' H \delta(x - x')$.

$$Z = Z_1 Z_2 = \exp \left[-i \int d^4 x \mathcal{F} \right], \quad (3.14)$$

onde i vem do espaço de Minkowski, $\int d^4 x$ é um volume quadridimensional e \mathcal{F} é a energia livre de Landau.

Note que Z (consequentemente a energia livre) é simétrico em relação a $\vec{\pi}$ (temos apenas termos quadráticos envolvendo $\vec{\pi}$) mas não em relação a σ . Isto nos permite negligenciar $\vec{\pi}$ fazendo $\vec{\pi} = 0$. A massa efetiva dos quarks, M , está relacionada com o valor esperado de σ (e, portanto, com o valor esperado do condensado de quarks), por meio da seguinte equação [44]

$$M = m + \langle \sigma \rangle = m - 2G \langle \bar{\psi} \psi \rangle. \quad (3.15)$$

Desse modo, ao invés de termos \mathcal{F} como função de $\langle \sigma \rangle$, passamos a trabalhar com a energia livre como função da massa efetiva, M . Isto nos permite olhar somente para o plano $\mathcal{F} - M$ ao analisar a forma da energia livre, seguindo uma análise mais intuitiva apresentada por [44]. Usando a equação (3.15) e comparando as equações (3.7), (3.13) e (3.14) obtemos para a energia livre

$$\mathcal{F} = \frac{1}{4G} [(M - m)^2] + 2iN_c N_f \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \ln(-p^2 + M^2). \quad (3.16)$$

Em seguida introduzimos a temperatura e o potencial químico por meio do formalismo de Matsubara, de forma análoga ao que fizemos no gás livre do capítulo 2. Esse formalismo pode ser encontrado em alguns livros-texto de teoria quântica de campos em temperatura finita como [32, 33] e nos leva as seguintes substituições, conhecidas como regras de Feynman para temperatura finita²:

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \rightarrow iT \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}, \quad (3.17)$$

$$p \rightarrow (i\omega_n + \mu, \vec{p}), \quad (3.18)$$

²Estas regras são válidas para condições de equilíbrio, que assumimos ser o caso.

3. Matéria de Quarks Interagentes

de modo que $-p^2 = -p_0^2 + p_i^2 = (\omega_n - i\mu)^2 + \vec{p}^2$. As quantidades ω_n são as frequências de Matsubara para férmions, $\omega_n = T(2n + 1)\pi$, com T a temperatura e μ o potencial químico. Assim podemos escrever a energia livre em termos de M , T e μ :

$$\mathcal{F}(M, T, \mu) = \frac{1}{4G} [(M - m)^2] - 2N_c N_f T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \ln [(\omega_n - i\mu)^2 + \vec{p}^2 + M^2]. \quad (3.19)$$

Efetuada ainda o somatório sobre as frequências de Matsubara [29, 32] na equação acima obtemos a “versão final” da energia livre de Landau na aproximação de campo médio:

$$\mathcal{F}(M, T, \mu) = \frac{1}{4G} (M - m)^2 - 2N_c N_f \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left\{ E + T \ln[1 + e^{-(E-\mu)/T}] + T \ln[1 + e^{-(E+\mu)/T}] \right\}, \quad (3.20)$$

onde $E^2 = \vec{p}^2 + M^2$. O primeiro termo no lado direito da equação (3.20) é o termo clássico do potencial. Os demais termos surgem devido às correções quânticas, de modo que o primeiro termo dentro da integral é o termo de vácuo, enquanto o segundo e terceiro termos são as correções de temperatura e densidade finitas, de modo análogo ao caso do gás livre. Estamos agora em condições de analisar a quebra da simetria quiral no vácuo (isto é, em $T = \mu = 0$) e sua posterior restauração em temperatura e densidade finitas.

3.3. Quebra da Simetria Quiral

A quebra da simetria quiral, identificada por um aumento substancial da massa efetiva dos quarks, ocorre em $T = \mu = 0$, de modo que apenas os termos clássico e de vácuo da eq. (3.20) contribuem. Entretanto, para obter qualquer resultado numérico precisamos definir os valores dos parâmetros m e G . Além disso a integral de vácuo da eq. (3.20) apresenta divergência ultra-violeta e o modelo de NJL não é renormalizável em $3 + 1$ dimensões. Desse modo precisamos recorrer a um método de regularização: vamos introduzir um parâmetro Λ (cutoff tri-dimensional) no limite superior da integral de vácuo da eq. (3.20) de modo a cortar a integração em valores de energia maiores que o de Λ e evitar assim qualquer divergência. O parâmetro Λ não deve ser

entendido como um parâmetro original do modelo (como m e G), mas sim como um parâmetro introduzido devido ao nosso método de regularização.

Temos assim três parâmetros para fixar: a massa de corrente dos quarks, m , a constante de acoplamento, G , e o cutoff, Λ . Normalmente estes parâmetros são fitados de modo a reproduzir a massa do pión $m_\pi = 135.0 \text{ MeV}$ [46], a constante de decaimento do pión $f_\pi = 92.4 \pm 0.2 \text{ MeV}$ [47] e o condensado de quarks $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$, que estão relacionados por meio da relação de Gell-Mann Oakes Renner [48]

$$f_\pi^2 m_\pi^2 = -m \langle \bar{\psi}\psi \rangle + \mathcal{O}(m^2), \quad (3.21)$$

onde a relação entre a massa efetiva e o condensado de quarks é dada pela equação (3.15).

A quebra da simetria quiral ocorre para algum valor crítico da constante G . Podemos então fixar os parâmetros m e Λ e varrer G para identificar o valor crítico da constante de acoplamento para o qual ocorre a quebra de simetria. Em temperatura e potencial químico zero o potencial efetivo, eq. (3.20), pode ser escrito da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(M, 0, 0) &= \frac{(M - m)^2}{4G} - 2N_c N_f \int_0^\Lambda \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E \\ &= \frac{(M - m)^2}{4G} - \frac{N_c N_f}{8\pi^2} \left[\Lambda \sqrt{M^2 + \Lambda^2} (M^2 + 2\Lambda^2) \right. \\ &\quad \left. - M^4 \ln \left(\frac{\Lambda}{M} + \sqrt{1 + \frac{\Lambda^2}{M^2}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

A equação para a massa dos quarks como função do acoplamento G , conhecida como equação do gap, é obtida derivando a eq.(3.22) e igualando a zero:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial M} &= \frac{M - m}{2G} - 2N_c N_f \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} M(\vec{p}^2 + M^2)^{-1/2} \\ &= \frac{(M - m)}{2G} - \frac{N_c N_f}{2\pi^2} \left[M \Lambda \sqrt{M^2 + \Lambda^2} - M^3 \ln \left(\frac{\Lambda}{M} + \sqrt{1 + \frac{\Lambda^2}{M^2}} \right) \right] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Como resultado, obtemos a seguinte equação auto-consistente para M :

3. Matéria de Quarks Interagentes

$$M = m + \frac{GN_c N_f}{\pi^2} \left[M\Lambda\sqrt{M^2 + \Lambda^2} - M^3 \ln \left(\frac{\Lambda}{M} + \sqrt{1 + \frac{\Lambda^2}{M^2}} \right) \right]. \quad (3.24)$$

Resolvendo numericamente a equação (3.24) com $\Lambda = 590$ MeV [49] obtemos as soluções mostradas na figura 3.1 para os casos $m = 0$ (limite quiral, onde a simetria é exata) e $m = 6$ MeV (caso físico, onde a simetria é aproximada). A massa efetiva M dos quarks é (aproximadamente) zero no limite quiral (caso físico) para $G\Lambda^2$ pequeno, mas a simetria é quebrada para valores maiores que $G_c\Lambda^2 \simeq 1.64$ ($G_c\Lambda^2 = 1.41$). Podemos assim fixar o acoplamento G , de modo que a massa efetiva e, conseqüentemente, o condensado de quarks obedeçam a relação de Gell-Mann Oakes Renner, eq. (3.21). Seguindo [49], fixamos $m = 6$ MeV, $\Lambda = 590$ MeV e $G = 2.435/\Lambda^2$, de modo que $m_\pi = 140.2$ MeV, $f_\pi = 92.6$ MeV e $\langle\bar{\psi}\psi\rangle = (-241.5 \text{ MeV})^3$. Outras parametrizações podem ser encontradas em [44].

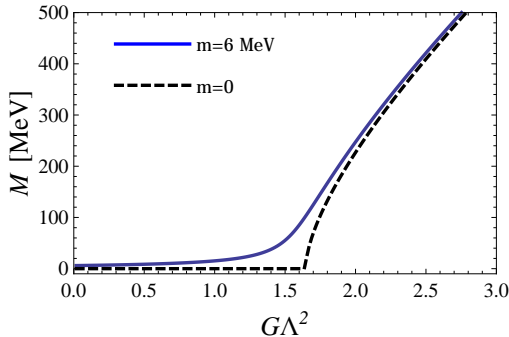


Figura 3.1.: Massa efetiva dos quarks em função do acoplamento G em temperatura e potencial químico zero. A linha contínua mostra o caso em que a massa nua dos quarks é de 6 MeV (limite físico), enquanto a linha tracejada mostra o limite quiral. A simetria quiral é quebrada para $G_c\Lambda^2 \simeq 1.41$ no limite físico e $G_c\Lambda^2 = 1.64$ no limite quiral.

3.4. Restauração da Simetria Quiral

Uma vez fixado $G = 2.435/\Lambda^2$ de acordo com a seção acima, podemos utilizar a equação (3.20) para analisar a restauração da simetria quiral, ou seja, a redução da

massa dos quarks para zero ou muito próximo de zero com o aumento da temperatura e/ou do potencial químico. Vimos na seção anterior que a massa efetiva dos quarks é dada pelo mínimo da equação (3.20), de modo que, se quisermos obter informação a respeito dela, tudo o que temos que fazer é procurar o valor de M que minimiza a energia livre, ou seja, o parâmetro de ordem³, a medida que variamos a temperatura e o potencial químico.

A figura 3.2 mostra o comportamento da energia livre para o caso $m = 6 \text{ MeV}$ em $\mu = 0$ em função da temperatura. Vemos que o mínimo do potencial desloca-se de maneira contínua de valores altos para valores baixos de M , chegando assintoticamente à massa de corrente em altas temperaturas. A figura 3.3 mostra o mesmo esquema no limite quiral, $m = 0$, onde o mínimo da energia livre efetivamente se desloca para zero em T grande. Pela equação (3.20) a unidade de energia livre é o MeV^4 , mas é conveniente passarmos essa unidade para MeV/fm^3 , ou seja, energia por volume (MeV por Fermi ao cubo). Essa relação é dada por

$$1 \text{ MeV}^4 = 1,308 \times 10^{-7} \text{ MeV}/\text{fm}^3.$$

Com base nas figuras 3.2 e 3.3 podemos analisar o comportamento do parâmetro de ordem M em função da temperatura. A figura 3.4 mostra esse comportamento nos dois casos $m = 6 \text{ MeV}$ e $m = 0$. No primeiro deles, representado pela linha cheia, a massa efetiva dos quarks decresce de forma contínua e suave (derivada contínua), o que indica um crossover entre as fases de simetria quebrada e aproximadamente restaurada. O mesmo não acontece no limite quiral representado pela linha tracejada, onde a massa efetiva até decresce de forma contínua, mas a curva não é suave (derivada descontínua) em $T = 220 \text{ MeV}$. Este é o comportamento típico de uma transição de fase de 2^a ordem.

No outro extremo, em $T = 0$, temos a aparição de um novo mínimo na energia livre a medida que μ aumenta (figuras 3.5 e 3.6 - limites físico e quiral, respectivamente). O máximo local próximo da origem torna-se um ponto de inflexão (dando origem à linha espinodal), criando um novo estado metaestável. Isto significa que temos dois estados possíveis para o sistema. O verdadeiro estado de equilíbrio (estado fundamental) corresponde ao mínimo global da energia livre, enquanto o mínimo local é na verdade

³A massa dos quarks não é um observável físico, portanto é um abuso de linguagem chamá-la de parâmetro de ordem. Entretanto, ela está diretamente relacionada com o verdadeiro parâmetro de ordem, o condensado de quarks $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$, por meio da equação (3.15).

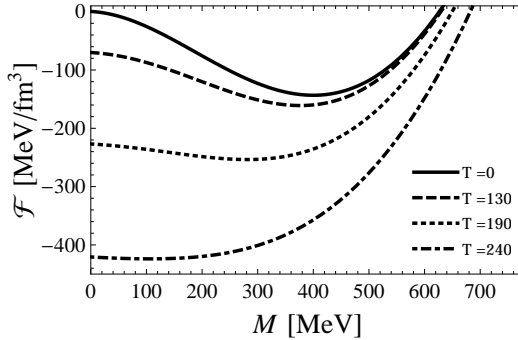


Figura 3.2.: Energia livre em função de M no limite físico, em $\mu = 0$ e para diferentes valores de T em unidades de MeV. A massa efetiva dos quarks é o valor de M que minimiza \mathcal{F} . A medida que T cresce, o mínimo de \mathcal{F} desloca-se para a esquerda, indicando que a massa dos quarks está diminuindo e a simetria quiral está sendo restaurada aos poucos, ou seja, por meio de um crossover.

uma fase metaestável. A massa efetiva dos quarks é dada sempre pelo mínimo global da energia livre, isto é, pelo verdadeiro estado de equilíbrio. Sendo assim, podemos ver que ela salta de maneira descontínua de um valor alto para um valor próximo de zero (exatamente zero no limite quiral) a medida que μ aumenta (figura 3.7).

A descontinuidade no parâmetro de ordem em $T = 0$ mostrada na figura 3.7 indica que a transição é de primeira ordem, tanto no caso físico quanto no limite quiral. Este comportamento é distinto do caso $\mu = 0$, onde o parâmetro de ordem é contínuo e a transição é de segunda ordem no limite quiral ou crossover no limite físico.

3.5. O Diagrama de Fases

Na seção anterior vimos a restauração da simetria quiral na matéria de quarks em dois casos extremos: $T = 0$ ou $\mu = 0$. No eixo da temperatura ($\mu = 0$) encontramos um crossover entre altas e baixas massas (transição de 2ª ordem no limite quiral) enquanto que no eixo do potencial químico ($T = 0$) encontramos uma transição de 1ª ordem. Se estendermos essa análise para todo o plano $T - \mu$ podemos obter o diagrama de fases associado à transição quiral do modelo.

Na figura 3.9 mostramos o diagrama de fases do modelo no limite quiral. Vemos

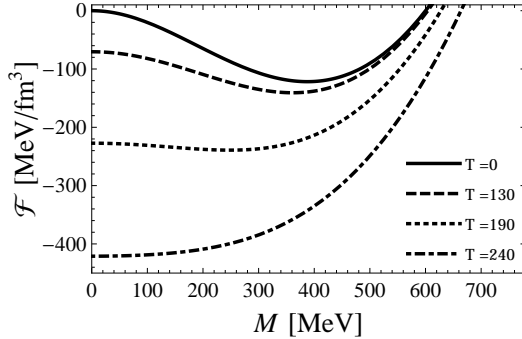


Figura 3.3.: Energia livre em função do parâmetro de ordem no limite quiral em $\mu = 0$ para diferentes valores de T em unidades de MeV. O mínimo de \mathcal{F} desloca-se para zero com o aumento da temperatura de modo que a transição é de segunda ordem.

uma transição de segunda ordem começando em $T \cong 218$ MeV e $\mu = 0$ e se estendendo até o ponto tri-crítico⁴ ($T = 108$ MeV, $\mu = 289$ MeV), onde a transição passa a ser de primeira ordem até encontrar o ponto $T = 0$, $\mu \cong 368$ MeV. A fase de simetria quebrada é toda a região inferior esquerda desta linha, enquanto que a fase de simetria restaurada é toda a região superior direita.

No limite físico, figura 3.10, temos uma transição de primeira ordem começando em $T = 0$ e $\mu = 380$ MeV e terminando no ponto crítico⁵ $T = 82$ MeV, $\mu = 327$ MeV (linha contínua). Para temperaturas mais altas e potenciais químicos mais baixos temos um crossover, representado pela linha pontilhada preta. No crossover não existe uma temperatura crítica bem definida para a transição, diferentemente do caso da transição de segunda ordem. Desse modo, para definir a linha de crossover na figura 3.10, usamos o conceito de temperatura pseudo-crítica, que é a temperatura para a qual o negativo da derivada do parâmetro de ordem com relação a T é um máximo (figura 3.8).

As linhas tracejadas adjacentes à linha de primeira ordem na figura 3.10 são as chamadas *espinodais*, que indicam o aparecimento de fases metaestáveis, ou seja, os mínimos locais da figura 3.5. A linha espinodal da esquerda representa o aparecimento

⁴O ponto tri-crítico é o ponto onde termina uma linha de transição de primeira ordem e começa uma linha de transição de segunda ordem.

⁵O ponto crítico é o ponto onde uma linha de transição de primeira ordem termina.

3. Matéria de Quarks Interagentes

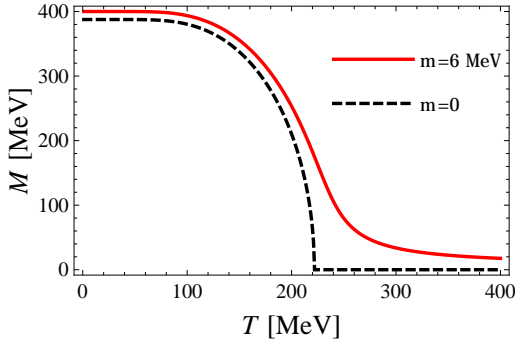


Figura 3.4.: Massa dos quarks em função da temperatura para $\mu = 0$. Linha contínua: limite físico, crossover entre altas e baixas massas. Linha tracejada: limite quiral, transição de 2^a ordem entre as fases massiva e não massiva.

da fase metaestável de simetria restaurada (a fase de simetria quebrada é estável e predominante) e a linha espinodal da direita representa o desaparecimento por completo da fase de simetria quebrada.

3.6. Relações Termodinâmicas

Além de permitir o cálculo do diagrama de fases da seção anterior, a energia livre dada pela eq. (3.20) pode ser usada para estabelecer uma conexão com grandezas físicas muito comuns na termodinâmica de equilíbrio, como pressão, densidade bariônica, entropia e densidade de energia por exemplo, de modo análogo ao que fizemos no gás livre. Se considerarmos nosso gás de quarks interagentes como infinito em extensão (de modo que efeitos de borda possam ser desconsiderados) e em equilíbrio térmico, podemos usufruir destas relações para estudar algumas de suas características. O ponto de partida para esta análise é a relação entre a energia livre e a pressão do gás, dada por

$$P(T, \mu) = -\mathcal{F}(T, \mu, M)|_{M=\bar{M}}, \quad (3.25)$$

onde \bar{M} é o valor de M que minimiza a energia livre, ou seja, o parâmetro de ordem. Na figura 3.2, onde $\mu = 0$, a pressão para a linha $T = 0$ é de, aproximadamente,

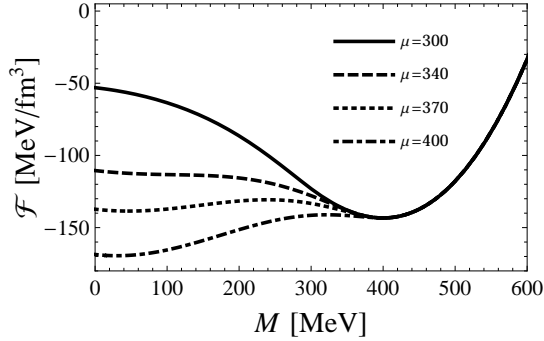


Figura 3.5.: Energia livre em função do parâmetro de ordem no limite físico em $T = 0$ para diferentes valores de μ em unidades de MeV . A massa dos quarks é o valor de M do mínimo global. A medida que μ cresce, surge um mínimo local próximo de $M = 0$. Em $\mu = \mu_c = 380$ MeV o mínimo local passa a ser global e vice-versa, restaurando assim a simetria quiral por meio de uma transição de 1ª ordem.

$100 \text{ MeV}/\text{fm}^3$. Esta é a pressão de ponto zero, $P(0, 0)$. É conveniente subtrairmos esse valor (que é apenas uma constante) das demais pressões em temperaturas e potenciais químicos diferentes de zero, definindo uma pressão normalizada:

$$P_N(T, \mu) = P(T, \mu) - P(0, 0), \quad (3.26)$$

de modo que $P_N(0, 0) = 0$. De agora em diante sempre que nos referirmos a pressão teremos em mente a pressão normalizada e vamos abandonar o subíndice N para não carregar a notação.

A figura 3.11 é um gráfico da pressão dividida pela quarta potência da temperatura (de modo que a grandeza seja adimensional) em função da temperatura para $\mu = 0$. Isto corresponde ao caso da figura 3.2 em que o valor mínimo da energia livre varia com T . Observe que a pressão é zero para baixas temperaturas, cresce rapidamente em temperaturas intermediárias e satura em altas temperaturas, atingindo o limite de Stefan-Boltzmann⁶.

O comportamento da razão P/T^4 para diferentes valores de μ é mostrado na figura

⁶O limite de Stefan-Boltzmann é atingido porque a integral térmica da equação (3.20) é calculada de 0 até ∞ , e não somente até Λ .

3. Matéria de Quarks Interagentes

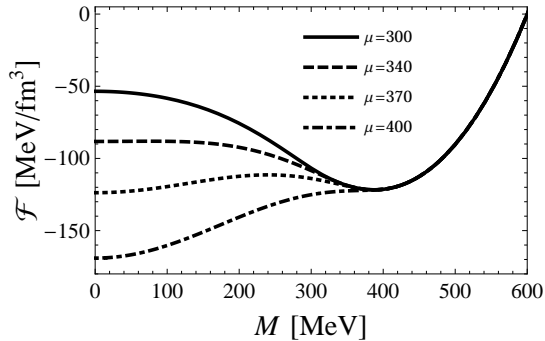


Figura 3.6.: Energia livre em função do parâmetro de ordem no limite quiral em $T = 0$ para diferentes valores de μ em unidades de MeV. A medida que μ cresce, surge um mínimo local em $M = 0$. Em $\mu = \mu_c = 370$ MeV o mínimo local passa a ser global e vice-versa, restaurando assim a simetria quiral por meio de uma transição de 1ª ordem.

3.12. Podemos notar um certo “calombo” em μ 's elevados e T 's baixos, justamente onde ocorre a transição de primeira ordem, conforme a seção anterior. Para μ pequeno a curva segue o padrão do caso $\mu = 0$ na figura 3.11. Em todos os casos, porém, as razões P/T^4 convergem para o limite de Stefan-Boltzmann em altas temperaturas.

Todas as outras grandezas termodinâmicas podem ser obtidas através de derivadas da pressão com relação aos parâmetros externos, ou seja, temperatura e potencial químico, como no caso do gás livre. As densidades de entropia e bariônica são dadas, respectivamente, por

$$s(T, \mu) = \left. \frac{\partial P(T, \mu)}{\partial T} \right|_{\mu}, \quad (3.27)$$

e

$$\rho_B(T, \mu) = \left. \frac{\partial P(T, \mu)}{3\partial\mu} \right|_T = \frac{\rho(T, \mu)}{3}. \quad (3.28)$$

onde $\rho(T, \mu)$ é a densidade do número de quarks que vimos no gás livre. Lembramos também que a densidade bariônica, ρ_B , está relacionada à diferença entre partículas e anti-partículas. Na figura 3.13 mostramos gráficos da densidade bariônica no limite

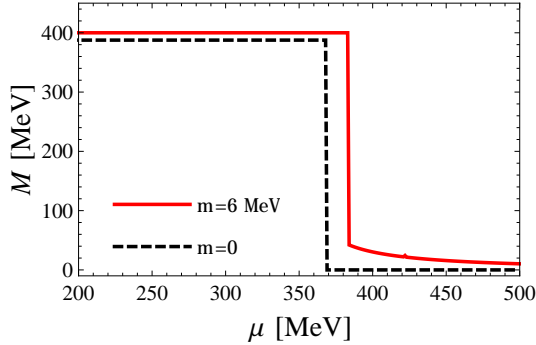


Figura 3.7.: Massa dos quarks em função do potencial químico para $T = 0$. Linha contínua: limite físico, transição de fase de 1^a ordem entre altas e baixas massas. Linha tracejada: limite quiral, transição de 1^a ordem entre as fases massiva e não-massiva.

físico em função de μ para diferentes valores de T . Podemos ver que para T pequeno a densidade é zero até que, em determinado potencial químico de coexistência (onde as fases simétrica e não-simétrica coexistem), μ_{coe} , ela salta para um valor finito, evidenciando o comportamento típico de uma transição de primeira ordem. Os pontos em destaque na figura 3.13 indicam os dois valores possíveis para ρ_B em $\mu = \mu_{coe}$: ρ^L , representando o menor valor, e ρ^H , representando o maior valor. No caso de valores altos de T esse comportamento dá lugar a uma “passagem” suave entre densidade nula e finita, evidenciando o crossover.

Com a densidade bariônica dada pela eq. (3.28) podemos estudar o diagrama de coexistência de fases no plano $T - \rho_B$. Nesse diagrama, a linha de transição de primeira ordem do diagrama de fases, figura 3.10, é mapeada no plano $T - \rho_B$, o que facilita a visualização da região de coexistência de fases. Na transição de primeira ordem duas fases da matéria coexistem ao mesmo tempo, dando origem às duas densidades distintas, ρ^L e ρ^H , para o mesmo valor de T , μ e P , como pode ser observado na figura 3.14. A densidade bariônica está em unidades de densidade da matéria nuclear, $\rho_0 = 0.17\text{fm}^{-3}$. O ponto crítico no topo da figura 3.14 (é o mesmo do diagrama de fases) une as duas curvas de densidades.

A figura 3.15 mostra um gráfico da densidade de entropia em função de T para diferentes valores de μ . Podemos ver que, em todos os casos, $s \rightarrow 0$ quando $T \rightarrow 0$

3. Matéria de Quarks Interagentes

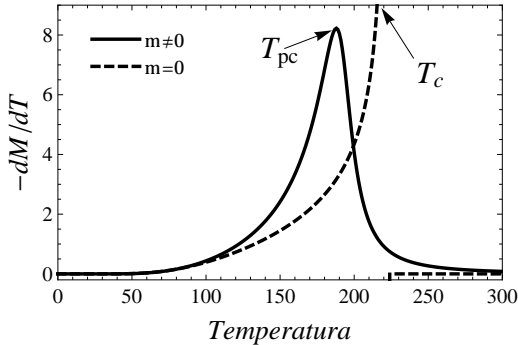


Figura 3.8.: A Temperatura pseudo-crítica (linha cheia) é a temperatura em que o negativo da derivada da massa efetiva, ou parâmetro de ordem, com relação a T é um máximo. A temperatura crítica, em transições de segunda ordem, é a temperatura em que a derivada da massa efetiva com relação a T diverge (linha tracejada). Em ambas as curvas, $\mu = 0$.

como requer a 3ª lei da Termodinâmica, mas que s cresce rapidamente com T e satura em T grande, atingindo o limite de Stefan-Boltzmann. Para μ grande podemos observar que a densidade de entropia apresenta um pico próximo à temperatura de transição de primeira ordem, comportamento este que não ocorre em μ pequeno, onde temos o crossover.

Outra importante grandeza termodinâmica é a densidade de energia, que se relaciona com as demais grandezas por meio da seguinte equação:

$$\epsilon(T, \mu) = -P(T, \mu) + \mu\rho(T, \mu) + Ts(T, \mu). \quad (3.29)$$

Um gráfico da densidade de energia dividida por T^4 em função de T para diferentes valores de μ é mostrado na figura 3.16. Podemos observar o mesmo comportamento da entropia na densidade de energia: para μ grande, onde ocorre a transição de primeira ordem, temos um pico próximo à temperatura de transição, mas o mesmo não ocorre em μ pequeno (crossover).

As duas últimas grandezas termodinâmicas de interesse para o nosso trabalho são a susceptibilidade do número de quarks, χ_q , e a anomalia do traço, Δ , definidas, respectivamente, por

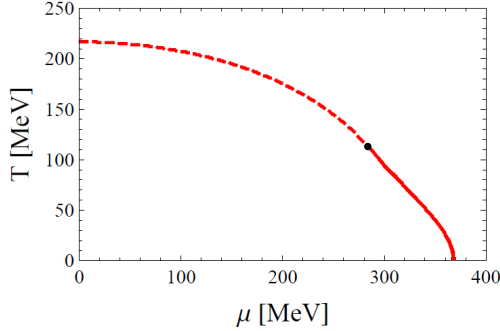


Figura 3.9.: O diagrama de fases no limite quiral. A linha tracejada representa a transição de 2ª ordem que se inicia em $T \cong 218$ MeV e termina no ponto tri-crítico $T = 108$ MeV e $\mu = 289$ MeV, onde começa a transição de 1ª ordem (linha contínua) que vai até $\mu \cong 368$ MeV e $T = 0$.

$$\chi_q(T, \mu) = \left. \frac{3\partial\rho_B(T, \mu)}{\partial\mu} \right|_T,$$

e

$$\Delta = \frac{\epsilon - 3P}{T^4}.$$

A susceptibilidade do número de quarks mede a resposta (reação) da densidade de quarks com a variação de μ , ou seja, com a diferença entre partículas e anti-partículas. A figura 3.17 mostra um gráfico de contorno de χ_q em unidades de Λ^2 no plano $T - \mu$ (normalizado pelos valores críticos da temperatura e potencial químico). Podemos observar o prolongamento das curvas na região do ponto crítico devido ao fortalecimento de χ_q nas proximidades da transição de primeira ordem, denotada pela linha grossa. De acordo com Schaefer e Wambach [50], isto ocorre porque, ao longo da trajetória assintoticamente paralela à linha de primeira ordem, a susceptibilidade do número de quarks responde com o expoente crítico γ_q , que na aproximação de campo médio assume o valor $\gamma_q = 1$, enquanto que, em qualquer outra trajetória, a divergência responde com o expoente crítico $\epsilon \propto \ln(\chi_q)/\ln(|\mu - \mu_c|)$, que em campo médio vale $\epsilon = 2/3 < \gamma_q$ [50].

3. Matéria de Quarks Interagentes

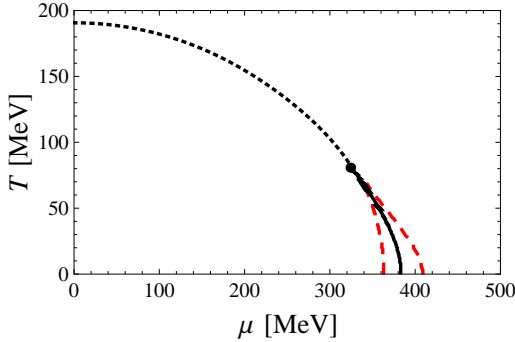


Figura 3.10.: O diagrama de fases no caso físico. A linha contínua representa a transição de 1^a ordem que se inicia em $\mu = 380$ MeV e termina no ponto crítico $T = 78.6$ MeV, $\mu = 330$ MeV. Em seguida ocorre um crossover representado pela linha tracejada preta. As linhas tracejadas em vermelho são as espinodais, isto é, as linhas que delimitam a região do diagrama em que existem duas fases para o sistema, uma delas sendo metaestável enquanto a outra a fase estável.

A anomalia da traço, às vezes, é chamada de medida da interação, pois mede justamente o quão interagente é o sistema. Para um gás livre $\Delta = 0$ pois, como vimos no capítulo 2, a equação de estado do gás livre é $\epsilon = 3P$. Desse modo podemos dizer que Δ mede o quão diferente um sistema é de um gás livre. Nas figuras 3.18 e 3.19 temos os gráficos de Δ em função da temperatura para $\mu = 0$ e para diferentes valores de μ , respectivamente. O valor máximo de Δ , isto é, o ponto onde o gás é mais interagente, ocorre nos pontos de transição de fase (ou crossover), de modo que também podemos obter a temperatura pseudo-crítica usada na seção anterior a partir da anomalia do traço.

Neste capítulo nos concentramos em introduzir o modelo de NJL na versão $SU(2)$ e calcular a energia livre de Landau na aproximação de campo médio, sem a influência de um campo magnético externo. É importante ressaltar que tratamentos além de campo médio, como, por exemplo, o método de teoria de perturbação otimizada (OPT), mostram resultados diferentes dos estudados neste capítulo, como a existência de dois pontos críticos [51]. Note também que o termo vetorial da interação,

$$-G_v(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^2,$$

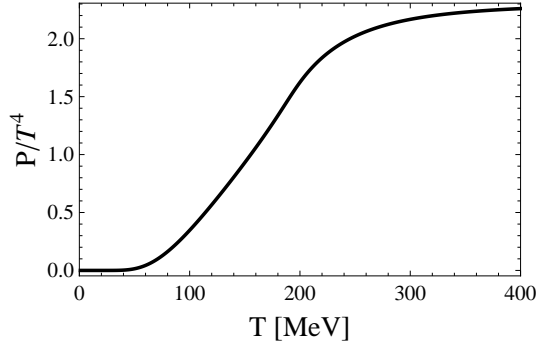


Figura 3.11.: Pressão em função da temperatura no limite físico para $\mu = 0$. A razão P/T^4 cresce rapidamente mas satura em altas temperaturas (limite de Stefan-Boltzmann).

não foi incluído nos nossos cálculos. Este termo tende, de modo geral, a reduzir a linha de transição de primeira ordem. Uma revisão detalhada pode ser encontrada em [44]. Enfatizamos que, mesmo com toda a simplicidade da aproximação de campo médio e da lagrangiana que usamos, equação (3.1), ainda existe espaço para explorar esta versão do modelo na presença de campos magnéticos fortes. O próximo capítulo desta dissertação tem como finalidade preencher este espaço, investigando os efeitos do campo magnético sobre o diagrama de fases do modelo e também sobre as grandezas termodinâmicas estudadas neste capítulo.

3. Matéria de Quarks Interagentes

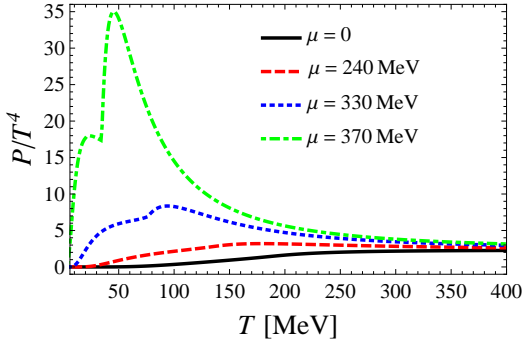


Figura 3.12.: Pressão em função da temperatura no limite físico para diferentes valores de μ .

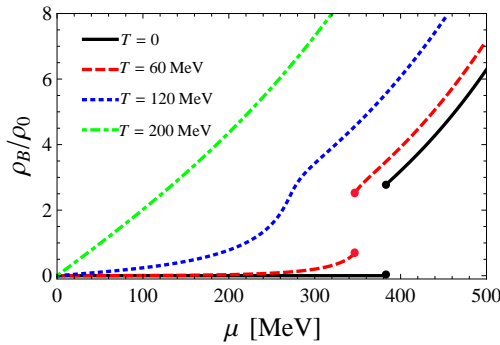


Figura 3.13.: Densidade Bariônica em função de μ para diferentes valores de T no limite físico. Em temperaturas baixas, onde a transição é de primeira ordem, temos uma descontinuidade de ρ . Já em temperaturas altas, onde ocorre o crossover, ρ é contínuo.

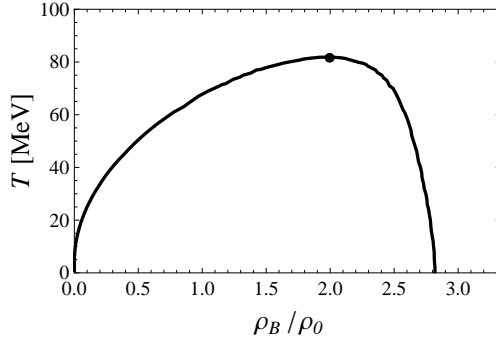


Figura 3.14.: Diagrama de coexistência de fases. Para a mesma temperatura, duas densidades distintas representando as duas fases da matéria (simetria quiral quebrada e restaurada) coexistem. A densidade bariônica está em unidades de densidade da matéria nuclear, $\rho_0 = 0.17\text{fm}^{-3}$. O ponto crítico está marcado no topo da curva.

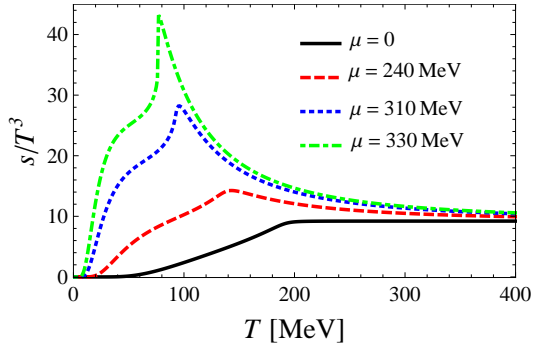


Figura 3.15.: Densidade de entropia em função de T para diferentes valores de μ no limite físico. Em μ grande, onde a transição é de primeira ordem, podemos observar um pico próximo à temperatura de transição. Em T grande todas as curvas atingem um ponto de saturação.

3. Matéria de Quarks Interagentes

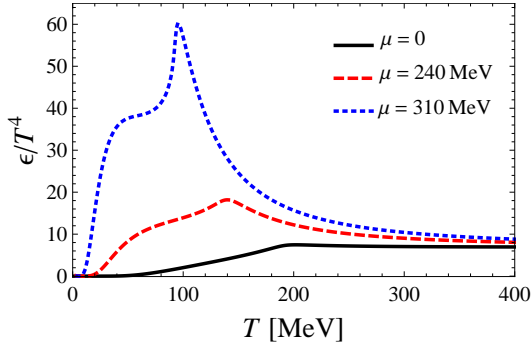


Figura 3.16.: Densidade de energia em função de T para diferentes valores de μ no limite físico. O comportamento é análogo ao dos gráficos acima.

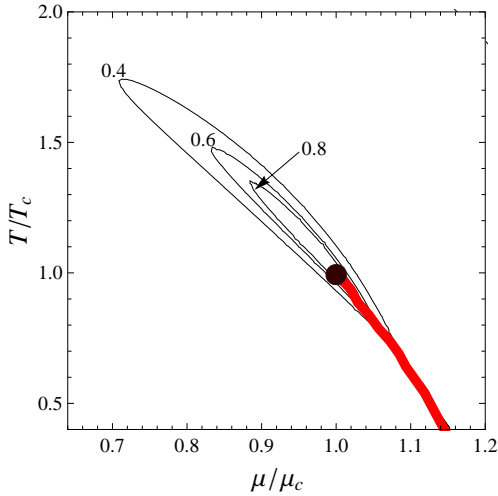


Figura 3.17.: Susceptibilidade do número de quarks em unidades de Λ^2 (contornos representados pelas linhas finas). A linha grossa representa a linha de transição de primeira ordem. Os eixos μ e T foram normalizados em termos dos respectivos valores críticos.

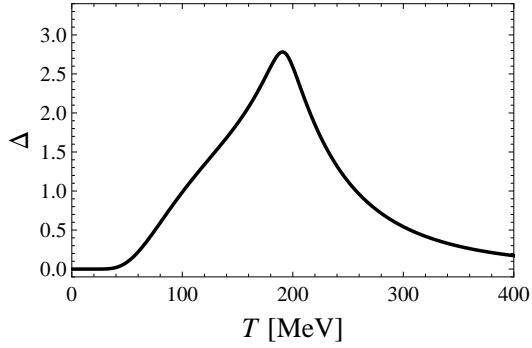


Figura 3.18.: Anomalia do traço (ou medida da interação) em função de T para $\mu = 0$ no limite físico.

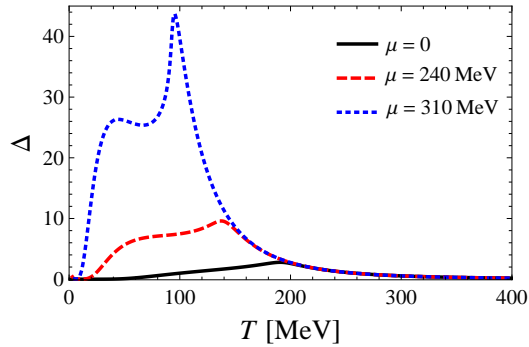


Figura 3.19.: Anomalia do traço (ou medida da interação) em função de T no limite físico para diferentes valores de μ .

4. Matéria Interagente na Presença de Campo Magnético

Neste capítulo apresentaremos nossos resultados originais [52] para o comportamento da matéria de quarks descrita pelo modelo de NJL na presença de um campo magnético externo. É de conhecimento comum [53, 54] que campos magnéticos extremamente fortes produzem o efeito da catálise magnética, isto é, o aumento da massa efetiva dos quarks com o campo magnético. Esse mecanismo pode alterar o diagrama de fases que estudamos na seção anterior, modificando as linhas de transição e espinodais. O estudo da matéria de quarks/hádrons na presença de campos magnéticos extremos encontra diversas aplicações em física de altas energias, como no caso de colisões de íons pesados [55, 56] onde expectadores são responsáveis por gerar o campo, em astrofísica no estudo de estrelas de nêutrons [57, 58] e também no estudo do universo primordial [59, 60, 61, 62].

4.1. Cálculo da Energia Livre

Introduzimos o campo magnético na matéria de quarks adicionando o tensor eletromagnético à lagrangiana do modelo NJL

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_f (i \not{\partial} - q_f \gamma_\mu A^\mu - m) \psi_f + G [(\bar{\psi}_f \psi_f)^2 + (\bar{\psi}_f i \gamma_5 \vec{\tau} \psi_f)^2] - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (4.1)$$

onde q_f é a carga do quark de espécie f (a soma entre espécies está implícita), A^μ é o quadri-vetor potencial e $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. O último termo da lagrangiana (4.1) resulta apenas em uma constante (proporcional ao quadrado do campo magnético), de modo que, nos casos estudados nesta dissertação, vamos ignorá-lo.

Calculamos o potencial efetivo de forma análoga ao caso sem campo magnético, onde, após uma aproximação de campo médio, obtemos

4. Matéria Interagente na Presença de Campo Magnético

$$\mathcal{F} = \frac{(M - m)^2}{4G} + \frac{i}{2} \text{tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \ln[-p^2 + M^2]. \quad (4.2)$$

Para estudar o efeito do campo magnético na matéria de quarks em temperatura e potencial químico finitos, fazemos as seguintes substituições que vem da relação de dispersão entre quarks [63, 64]

$$p_0 \rightarrow i(\omega_\nu - i\mu),$$

$$p^2 \rightarrow p_z^2 + (2n + 1 - s)qB, \quad \text{com } s = \pm 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \rightarrow i \frac{T|q_f|B}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{dp_z}{2\pi},$$

onde $\omega_\nu = (2\nu + 1)\pi T$, com $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ representa as frequências de Matsubara para férmions, n representa os níveis de Landau e T e μ são a temperatura e potencial químico, como usualmente. Note que a integral acima, que antes era em quatro dimensões, agora é feita apenas em p_z , devido à redução dimensional causada pela temperatura e pelo campo magnético. Uma revisão deste efeito pode ser encontrada em [54]. Obtemos assim o potencial efetivo (ou energia livre de Landau):

$$\mathcal{F} = \frac{(M - m)^2}{4G} - \frac{N_c}{2\pi} \sum_{s,n,f} (|q_f|B) \int \frac{dp_z}{2\pi} \left\{ E_p(B) + T \ln[1 + e^{-[E_p(B) + \mu]/T}] + T \ln[1 + e^{-[E_p(B) - \mu]/T}] \right\}. \quad (4.3)$$

Na equação acima $E_p(B) = \sqrt{p_z^2 + (2n + 1 - s)|q_f|B + M^2}$ e a soma em s, n e f se referem ao spin, níveis de Landau e sabores de quarks, respectivamente. Note que consideramos o mesmo potencial químico para os quarks up e down. Podemos ainda usar a degenerescência dos níveis de Landau para escrever $E_{p,k}(B) = \sqrt{p_z^2 + 2k|q_f|B + M^2}$ substituindo n por k , somando $s = \pm 1$ em (4.3). É fácil ver que o nível zero de Landau é não degenerado, mas todos os demais níveis são duplamente degenerados, de modo que devemos multiplicar a soma na equação (4.3) pelo termo $\alpha_k = 2 - \delta_{k,0}$ que leva em conta este fato. O resultado é

$$\mathcal{F} = \frac{(M-m)^2}{4G} - \frac{N_c}{2\pi} \sum_{f=u}^d \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(|q_f|B) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \left\{ E_{p,k}(B) + T \ln[1 + e^{-[E_{p,k}(B)+\mu]/T}] \right. \\ \left. + T \ln[1 + e^{-[E_{p,k}(B)-\mu]/T}] \right\}. \quad (4.4)$$

Seguindo [64], separamos a contribuição divergente do vácuo da contribuição finita do campo magnético de modo que

$$\mathcal{F} = \frac{(M-m)^2}{4G} + \mathcal{F}_{vac} + \mathcal{F}_{mag} + \mathcal{F}_{med}, \quad (4.5)$$

com

$$\mathcal{F}_{vac} = -2N_c N_f \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p, \quad (4.6)$$

onde $E_p = \sqrt{p^2 + M^2}$ e N_f é o número de sabores, ou seja, $N_f = 2$. Como a integral acima é divergente, introduzimos um cutoff não covariante Λ no limite superior, de forma análoga ao caso sem campo magnético do capítulo anterior. A contribuição finita do campo magnético pode ser escrita como [64]

$$\mathcal{F}_{mag} = - \sum_{f=u}^d \frac{N_c(|q_f|B)^2}{2\pi^2} \left\{ \zeta'[-1, x_f] - \frac{1}{2}[x_f^2 - x_f] \ln(x_f) + \frac{x_f^2}{4} \right\}, \quad (4.7)$$

onde $x_f = M^2/(2|q_f|B)$ e $\zeta'[-1, x_f] = d\zeta(z, x_f)/dz|_{z=-1}$ com $\zeta(z, x_f)$ sendo a função zeta de Riemann-Hurwitz. Separamos assim a contribuição de vácuo regularizada por um cutoff ultra-violeta da contribuição finita do campo magnético. A contribuição do meio quente e denso assume a forma

$$\mathcal{F}_{med} = - \frac{N_c}{2\pi} \sum_{f=u}^d \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(|q_f|B) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \left\{ T \ln[1 + e^{-[E_{p,k}(B)+\mu]/T}] \right. \\ \left. + T \ln[1 + e^{-[E_{p,k}(B)-\mu]/T}] \right\}. \quad (4.8)$$

Desse modo a eq (4.5) fornece uma expressão para o potencial efetivo do modelo na aproximação de campo médio e na presença de campo magnético externo. A equação do gap assume a seguinte forma:

4. Matéria Interagente na Presença de Campo Magnético

$$\begin{aligned}
0 = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial M} &= \frac{M - m}{2G} - \frac{N_c N_f M}{2\pi^2} \left\{ \Lambda \sqrt{\Lambda^2 + M^2} - \frac{M^2}{2} \ln \left[\frac{(\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + M^2})^2}{M^2} \right] \right\} \\
&- \frac{N_c M}{2\pi^2} \sum_{f=u}^d |q_f| B \left\{ \ln[\Gamma(x_f)] - \frac{1}{2} \ln(2\pi) + x_f - \frac{1}{2} (2x_f - 1) \ln(x_f) \right\} \\
&+ \frac{N_c M}{4\pi^2} \sum_{f=u}^d \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k |q_f| B \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_z}{E_{p,k}(B)} \{f_+ + f_-\}, \tag{4.9}
\end{aligned}$$

onde

$$f_{\pm} = \frac{1}{e^{[E_{p,k}(B) \pm \mu]/T} + 1}. \tag{4.10}$$

4.2. Catálise Magnética

Podemos agora estudar o comportamento da massa dos quarks em diferentes condições de temperatura, potencial químico e campo magnético aplicado. Começamos por estudar o efeito do campo magnético na massa efetiva dos quarks em temperatura e potencial químico nulos, de modo que $\mathcal{F}_{med} = 0$. Podemos usar a eq. (4.9), excluindo a parte do meio quente e denso, para escrever a massa efetiva M como

$$\begin{aligned}
M &= m + \frac{N_c N_f M G}{\pi^2} \left\{ \Lambda \sqrt{\Lambda^2 + M^2} - \frac{M^2}{2} \ln \left[\frac{(\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + M^2})^2}{M^2} \right] \right\} \\
&+ \frac{N_c M G}{\pi^2} \sum_{f=u}^d |q_f| B \left\{ \ln[\Gamma(x_f)] - \frac{1}{2} \ln(2\pi) + x_f - \frac{1}{2} (2x_f - 1) \ln(x_f) \right\}. \tag{4.11}
\end{aligned}$$

Podemos ver na figura 4.1 que a massa efetiva dos quarks aumenta com campos magnéticos extremos, acima de $6m_{\pi}^2/e \sim 10^{18}G$, efeito conhecido como catálise magnética [53, 54]. Isto significa que o campo magnético fortalece o condensado de quarks e, conseqüentemente, a massa efetiva dos mesmos, em total contraste com o que ocorre na supercondutividade. Uma razão para esta diferença é que, no estado fundamental do nosso condensado de quarks, não há efeito Meissner [54]. Isso ocorre porque o condensado de quarks é formado por um par férmion-antiférmion, e não por um par de Cooper eletricamente carregado que origina super correntes. Além disso, no par de Cooper, os elétrons tem spins opostos e, portanto, momentos magnéticos

também opostos, de modo que somente um dos momentos magnéticos pode se alinhar com o campo. Entretanto, no par eletricamente neutro do condensado de quarks, os momentos magnéticos da partícula (com carga e spin fixos) e da anti-partícula (com carga e spin opostos) apontam na mesma direção, fortalecendo assim a ligação. A essência da catálise magnética está intimamente relacionada com a redução dimensional, $D \rightarrow D - 2$, de férmions eletricamente carregados na presença de campos magnéticos constantes. Uma revisão detalhada deste assunto pode ser encontrada em [54].

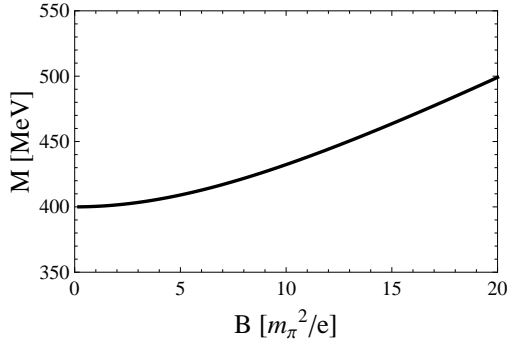


Figura 4.1.: Catálise Magnética - Massa efetiva dos quarks em função do campo magnético B em temperatura e potencial químico zero.

Para obter a figura 4.1 e os demais resultados numéricos deste capítulo usamos os mesmos valores para os parâmetros do capítulo 3: $m = 6 \text{ MeV}$, $\Lambda = 590 \text{ MeV}$ e $G = 2.435/\Lambda^2$, de modo que $m_\pi = 140.2 \text{ MeV}$, $f_\pi = 92.6 \text{ MeV}$ e $\langle \bar{\psi}\psi \rangle = (-241.5 \text{ MeV})^3$, conforme [49].

4.3. Restauração da Simetria Quiral

Para estudar a restauração da simetria quiral precisamos fixar um valor de B e varrer o plano $T - \mu$ observando a forma do potencial efetivo. A soma sobre os níveis de Landau k na eq. (4.8) deve ser carregada até que se verifique a convergência da série. De modo geral, a série converge logo nos primeiros termos se $T \rightarrow 0$ ou se B é muito grande ($B > 10m_\pi^2/e$). Entretanto, a medida que T aumenta, mais e mais níveis de Landau são necessários para assegurar a convergência da série. Enfatizamos

4. Matéria Interagente na Presença de Campo Magnético

que nos nossos resultados a série foi truncada sempre que a adição de mais níveis de Landau não alterava os resultados obtidos, ou seja, sempre que havia um sinal de convergência. Maiores detalhes podem ser encontrados no apêndice B.

Como primeiro caso de estudo, escolhemos $B = 6m_\pi^2/e$ por ser, aproximadamente, o limite superior do RHIC. No limite $\mu = 0$ o mínimo global desloca-se de maneira contínua de $M = 412 \text{ MeV}$ em $T = 0$ para próximo de zero com o aumento de T , sem a aparição de outros mínimos locais (figura 4.2). Este comportamento indica que a restauração de simetria ocorre por meio de um crossover. A temperatura pseudo-crítica, T_{pc} é de 191.6 MeV .

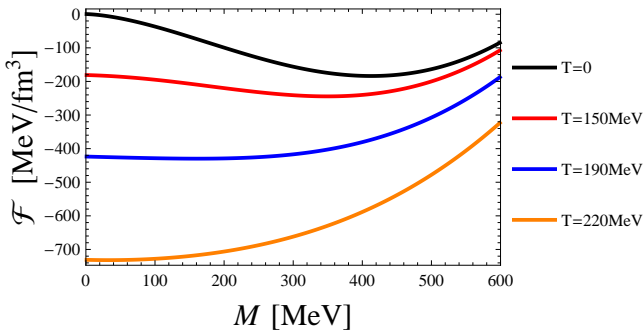


Figura 4.2.: Potencial efetivo em $\mu = 0$. O valor do campo magnético externo é de $6m_\pi^2/e$. Com o aumento da temperatura a simetria quiral é restaurada por meio de um crossover.

No eixo $T = 0$ temos a aparição de mínimos locais no potencial efetivo representando estados metaestáveis, como mostra a figura 4.3. O mínimo global representa o estado fundamental da matéria de quarks e passa de maneira descontínua de $M = 412 \text{ MeV}$ para M próximo de zero em $\mu = 370 \text{ MeV}$, caracterizando assim uma transição de fase de primeira ordem.

Aumentando o valor do campo magnético para $B = 15m_\pi^2/e$ (aproximadamente o limite superior do LHC) observamos o mesmo tipo de comportamento do potencial efetivo. Na figura 4.4 mostramos o caso $\mu = 0$, onde a simetria é restaurada por meio de um crossover. O caso $T = 0$ é mostrado na figura 4.5, onde é possível identificar a transição de primeira ordem em $\mu = 340 \text{ MeV}$.

Podemos notar que o efeito do campo magnético não muda o padrão de restauração

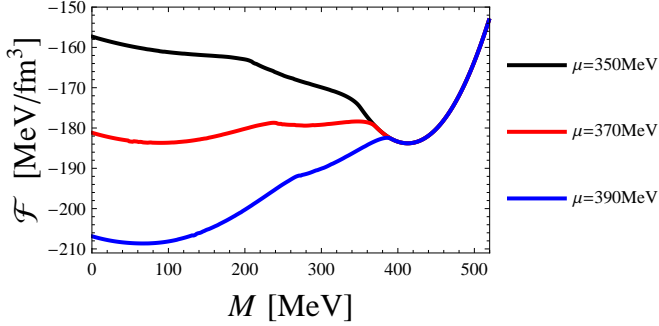


Figura 4.3.: Potencial efetivo em $T = 0$. O valor do campo magnético externo é de $6m_\pi^2/e$. Com o aumento do potencial químico a simetria quiral é restaurada por meio de uma transição de 1^a ordem.

da simetria quiral que tínhamos na ausência de campo: em altas temperaturas continuamos com um crossover enquanto temos transição de primeira ordem em temperaturas baixas e potencial químico alto. Apenas os valores da temperatura pseudo-crítica e do potencial químico de coexistência é que são alterados. Isso pode ser facilmente visualizado na figura 4.6, onde mostramos o parâmetro de ordem (M) como função de T (à esquerda) e de μ (à direita) para os três valores de campo estudados: $B = 0$, $eB = 6m_\pi^2$ e $eB = 15m_\pi^2$.

4. Matéria Interagente na Presença de Campo Magnético

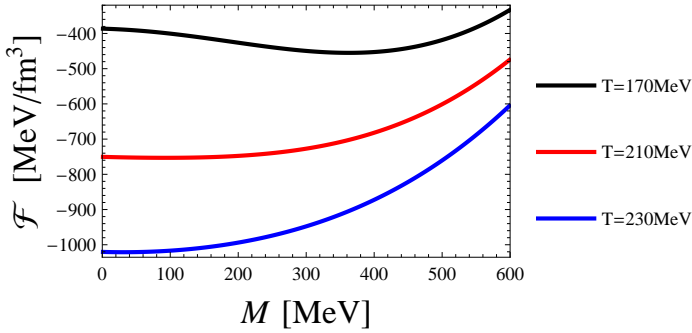


Figura 4.4.: Potencial efetivo em $\mu = 0$. O valor do campo magnético externo é de $15m_\pi^2/e$. Com o aumento da temperatura a simetria quiral é restaurada por meio de um crossover.

4.4. O Diagrama de Fases

Como vimos na seção anterior, o campo magnético mantém o padrão de restauração da simetria quiral que havia na ausência dele. Desse modo o diagrama de fases para $eB = 6m_\pi^2$ e $eB = 15m_\pi^2$ matém a mesma estrutura do caso $B = 0$, com diferença apenas no valor da temperatura pseudo-crítica, do potencial químico de coexistência (μ_{coe}) e na localização do ponto crítico. A figura 4.7 mostra o diagrama da fases para os casos $eB = 6m_\pi^2$ e $eB = 15m_\pi^2$, incluindo também as espinodais. No caso $eB = 6m_\pi^2$ temos que $T_{pc} = 191.6$ MeV, $\mu_{coe} = 370$ MeV e o ponto crítico está localizado em $T_c = 81.7$ MeV e $\mu_c = 318$ MeV. Em $eB = 15m_\pi^2$ temos $T_{pc} = 203.7$ MeV, $\mu_{coe} = 339.6$ MeV e o ponto crítico está localizado em $T_c = 115.6$ MeV e $\mu_c = 279.3$ MeV.

A fim de comparar os resultados obtidos com e sem campo magnético mostramos a figura 4.8, onde temos os diagramas de fase (as respectivas linhas espinodais são mostradas na figura 4.9) para os diferentes valores de B estudados até aqui. Podemos observar uma tendência de aumento da T_{pc} com o aumento de B , em acordo com as expectativas do modelo. Entretanto, por volta de $\mu \approx 285$ MeV o valor da T_{pc} em $eB = 6m_\pi^2$ é menor do que em $B = 0$, efeito também observado por [65, 66, 67]. Além disso, podemos notar que B provoca um aumento na linha de transição de primeira ordem que faz com que o valor da temperatura crítica aumente e o valor do potencial

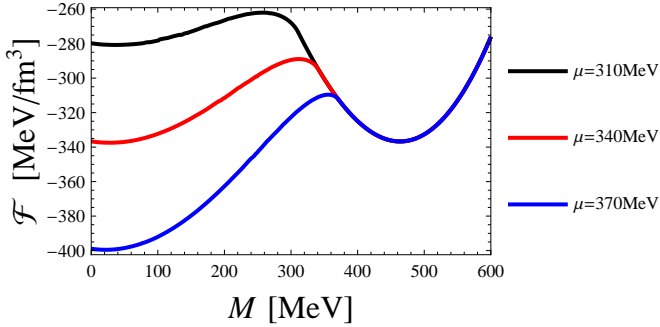


Figura 4.5.: Potencial efetivo em $T = 0$. O valor do campo magnético externo é de $15m_\pi^2/e$. Com o aumento do potencial químico a simetria quiral é restaurada por meio de uma transição de 1ª ordem.

químico crítico diminua. De modo geral, podemos concluir que o campo magnético fortalece a transição de primeira ordem. Em temperaturas baixas, o valor do potencial químico de coexistência diminui com o aumento de B (apesar de voltar a crescer para $eB \gtrsim 16m_\pi^2 \approx \Lambda^2$ [65, 66] mas não consideraremos estes casos nesta dissertação). As linhas espinodais (figura 4.9) apresentam comportamentos distintos para cada valor de B . No caso $eB = 6m_\pi^2$ vemos um estreitamento das linhas em relação ao caso $B = 0$, enquanto que para $eB = 15m_\pi^2$ temos um considerável alargamento em relação aos demais, resultando num aumento da área de metaestabilidade.

4.5. Relações Termodinâmicas

Com o potencial efetivo dado pela eq (4.5) e considerando a matéria de quarks em equilíbrio térmico e infinitamente extensa podemos estudar a termodinâmica do sistema de forma análoga ao capítulo anterior. As grandezas termodinâmicas que vamos calcular são as mesmas do caso sem campo magnético: pressão, densidade de entropia, densidade bariônica, densidade de energia, susceptibilidade do número de quarks e anomalia do traço. Deste modo podemos comparar estas grandezas nos casos com e sem campo magnético. Conforme visto na seção 3.6, a pressão é o negativo do potencial efetivo avaliado no mínimo, com a diferença agora de ser também função do campo magnético

4. Matéria Interagente na Presença de Campo Magnético

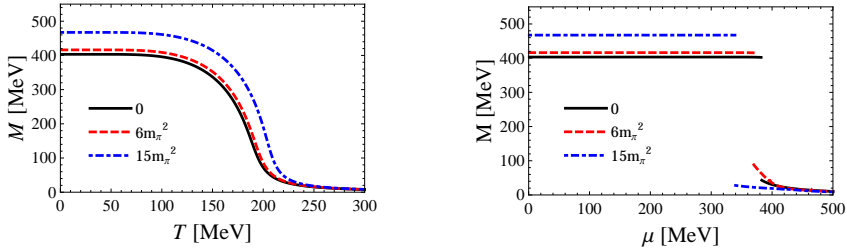


Figura 4.6.: Parâmetro de ordem (massa efetiva dos quarks) para diferentes valores do campo magnético. No quadro da esquerda $\mu = 0$ enquanto que no quadro da direita $T = 0$.

$$P(T, \mu, B) = -\mathcal{F}(T, \mu, B, M)|_{M=\bar{M}}, \quad (4.12)$$

de modo que a pressão normalizada é $P_N(T, \mu, B) = P(T, \mu, B) - P(0, 0, B)$ (o subíndice N será suprimido em futuras referências à pressão normalizada). As demais grandezas termodinâmicas são derivadas diretamente da pressão de modo análogo ao da seção 3.6 (eqs. 3.27-3.30). A figura 4.10 mostra a pressão (dividida por T^4) em $\mu = 0$ para os três valores de campo magnético estudados aqui, $B = 0$, $eB = 6m_\pi^2$ e $eB = 15m_\pi^2$, para fins de comparação (a legenda da figura indica o valor de eB). Podemos notar que o campo magnético tem pouca influência nessa grandeza, ou seja, as curvas com $B \neq 0$ apresentam o mesmo comportamento da curva $B = 0$, convergindo para o limite de Stephan-Boltzmann em altas temperaturas.

Na figura 4.11 temos o gráfico da densidade de entropia em função de T em $\mu = 0$. Comparando os diferentes valores de B podemos notar pouca diferença entre eles, mas com uma notável acentuação do máximo de s/T^3 para $eB = 15m_\pi^2$. O mesmo padrão se repete na figura 4.12, onde temos a densidade de energia, ϵ , em função de T .

No limite $T \rightarrow 0$ podemos comparar a densidade bariônica como função de μ , figura 4.13. A descontinuidade nesta grandeza em todos os valores de B indica que a transição de fase é de primeira ordem, conforme já havíamos visto nos diagramas de fases. Uma característica importante que deve ser ressaltada é a densidade bariônica no momento da transição. Como vimos no capítulo 3 (figura 3.14), em $T = 0$ temos

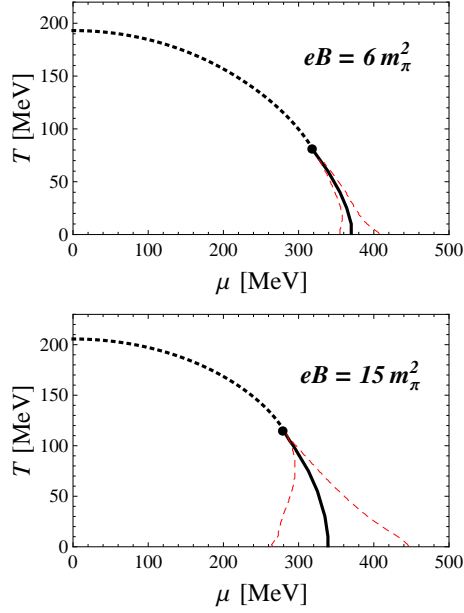


Figura 4.7.: Diagrama de fases para $eB = 6m_\pi^2$ (quadro de cima) e $eB = 15m_\pi^2$ (quadro de baixo). A linha cheia representa a transição de primeira ordem, as linhas tracejadas são as linhas espinodais e a linha pontilhada representa o crossover.

$\rho_B^L = 0$ mas $\rho_B^H \neq 0$ em $\mu = \mu_{coe}$. Na presença de campo magnético ρ_B^L continua sendo nulo, mas ρ_B^H apresenta um comportamento curioso, oscilando em torno do seu valor em $B = 0$, como pode ser visto na figura 4.13 e no diagrama de coexistência de fases (em baixas temperaturas), figura 4.14.

O decréscimo em ρ_H para $eB = 6m_\pi^2$ em baixas temperaturas pode ser explicado em termos do preenchimento dos níveis de Landau que ocorre de modo diferente em diferentes valores de B . Para entender melhor esse comportamento, vamos escrever a densidade bariônica no limite em que $T \rightarrow 0$ [64],

$$\rho_B(\mu, B) = \theta(k_F^2) \sum_{f=u}^d \sum_{k=0}^{k_{max}} \alpha_k \frac{|q_f| B N_c}{6\pi^2} k_F, \quad (4.13)$$

4. Matéria Interagente na Presença de Campo Magnético

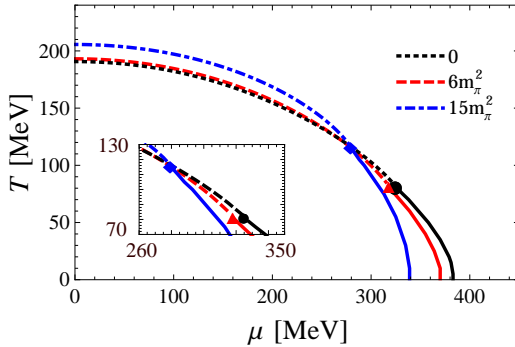


Figura 4.8.: Diagrama de fases para $B = 0$, $eB = 6m_\pi^2$ e $eB = 15m_\pi^2$. As linhas cheias representam a transição de primeira ordem e as linhas tracejadas representam o crossover.

onde $k_F = \sqrt{\mu^2 - 2|q_f|kB - M^2}$, θ é a função degrau de Heaviside e

$$k_{max} = \frac{\mu^2 - M^2}{2|q_f|B}, \quad (4.14)$$

ou o inteiro mais próximo.

Na transição de primeira ordem a equação 4.13 fornece dois valores para ρ_B , dependendo do valor da massa efetiva M usado (lembramos que na transição de primeira ordem existem dois valores possíveis para M : M^L para a fase restaurada e M^H para a fase de simetria quebrada; ver figura 4.5 por exemplo). Para $M = M^H$ obtemos $\rho_B = \rho_B^L = 0$, como pode ser observado na figura 4.14. Portanto, para entender as oscilações, vamos nos concentrar em ρ_B^H e M^L , grandezas cujo comportamento é mostrado na figura 4.15, onde é possível ver claramente que ambas possuem um comportamento oscilatório oposto. A origem destas oscilações está no fato de que k_{max} (o último nível de Landau preenchido) diminui com o aumento do campo magnético. O primeiro e segundo picos de M^L (e os correspondentes vales de ρ_B^H) dizem respeito à troca de $k_{max} = 1$ para $k_{max} = 0$ para os quarks *up* e *down*, respectivamente. Conforme havíamos visto, o valor de μ_{coe} diminui com B em temperaturas próximas de zero (figura 4.7), de modo que, em geral, k_{max} e M precisam variar e, quando k_{max} diminui, M aumenta. Segue da equação 4.13 que ρ_B precisa diminuir. Quando $k_{max} = 0$ para ambos os sabores de quarks não há mais mudanças no preenchimento dos níveis de Landau e as oscilações desaparecem em $eB \gtrsim 9.5m_\pi^2$.

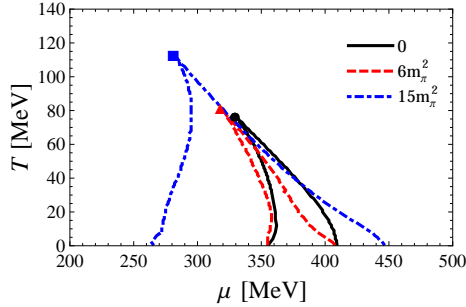


Figura 4.9.: Linhas espinodais para $B = 0$ (linha sólida), $eB = 6m_\pi^2$ (linha tracejada) e $eB = 15m_\pi^2$ (linha traço-ponto).

O campo magnético causa uma deformação na forma da região de coexistência. Os resultados sugerem que a densidade mais alta é atingida em temperaturas próximas de T_c , ao contrário do que acontece no caso $B = 0$, onde isso ocorre em $T = 0$. Outra grandeza física de interesse que apresenta o mesmo comportamento oscilatório é o calor latente, $\Delta\varepsilon$, que em $T = 0$ é dado simplesmente por $\Delta\varepsilon = \mu(\rho^H - \rho^L)$, pois as duas densidades (de coexistência) ocorrem na mesma pressão e potencial químico. A figura 4.16 mostra este comportamento do calor latente em função de B .

A susceptibilidade do número de quarks, χ_q , para $eB = 15m_\pi^2$ em unidades de Λ^2 é mostrada na figura 4.17. Conforme havíamos discutido no capítulo 3, χ_q apresenta uma forma alongada paralela à linha de transição de primeira ordem. O mesmo comportamento é observado no caso de $B \neq 0$, sem que haja mudanças significativas, de modo que assumimos ser válida a mesma discussão apresentada na seção 3.6 e na ref. [50], isto é, os expoentes críticos γ_q e ϵ , que são os responsáveis pela forma das curvas, não são afetados pelo campo magnético, pois seus valores têm origem na aproximação de campo médio (onde $\gamma_q = 1$ e $\epsilon = 2/3$).

Podemos ainda comparar a anomalia do traço, Δ , dada pela equação (3.30), para diferentes valores de B . Mostramos o caso $\mu = 0$ na figura 4.18 para $eB = 0$, $eB = 6m_\pi^2$ e $eB = 15m_\pi^2$, onde é possível visualizar o comportamento do crossover. Para ver o efeito do campo magnético sobre a transição de primeira ordem, mostramos o comportamento de Δ em $\mu = 328$ MeV (ou seja, o potencial químico crítico, μ_c em $B = 0$), figura 4.19. Podemos notar que o campo magnético fortalece conside-

4. Matéria Interagente na Presença de Campo Magnético

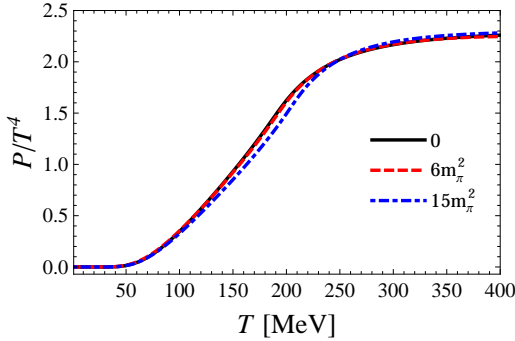


Figura 4.10.: Pressão em função de T em $\mu = 0$ para $B = 0$ (linha sólida), $B = 6m_\pi^2/e$ (linha tracejada) e $B = 15m_\pi^2/e$ (linha traço-ponto).

ravelmente a transição de primeira ordem, acentuando o pico nas proximidades da temperatura crítica em cada valor de B .

Uma última grandeza física de interesse para o nosso trabalho é a entropia por bárion, que pode ser obtida das grandezas estudadas acima,

$$\frac{S}{A} = 3 \frac{(\varepsilon + P - \mu\rho)}{T\rho}. \quad (4.15)$$

Em $B = 0$ a entropia por bárion foi calculada na Ref. [68] para verificar uma eventual convergência das curvas adiabáticas na direção do ponto crítico, conforme sugerido por [69]. Entretanto, este efeito não foi observado por [68]. O resultado pode ser explicado lembrando que não há mudanças nos graus de liberdade das duas fases e, portanto, o efeito de “focagem” das adiabáticas não ocorre. No nosso caso, as adiabáticas mostram o típico comportamento de uma transição “líquido-gás”, representada pela fase de simetria quiral restaurada e quebrada [70], respectivamente. Nossos resultados (figura 4.20) mostram que o campo magnético não produz nenhum efeito notável no comportamento das adiabáticas, que apresentam um padrão similar tanto em $B = 0$ quanto em $eB = 15m_\pi^2$. A explicação é, naturalmente, que o campo magnético não provoca mudanças nos graus de liberdade das duas fases em questão. A figura 4.21 mostra o diagrama de fases no plano $P - T$, onde podemos visualizar a região de simetria quiral quebrada (SQQ), que corresponde à fase do “gás” na analogia

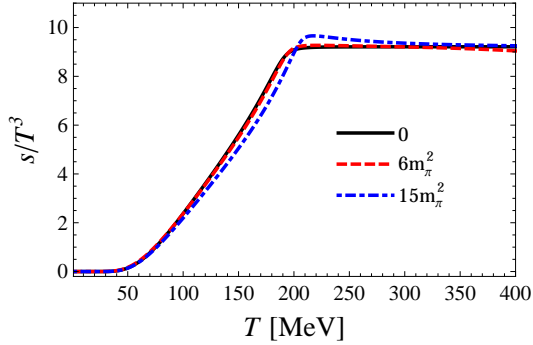


Figura 4.11.: Entropia em função de T em $\mu = 0$ para $B = 0$ (linha sólida), $B = 6m_\pi^2/e$ (linha tracejada) e $B = 15m_\pi^2/e$ (linha traço-ponto).

líquido-gás, e a região de simetria quiral restaurada (SQR), que corresponde à fase “líquida”.

Para uma comparação com valores do nosso cotidiano, apresentamos a figura 4.22, o mesmo diagrama $P - T$ da figura 4.21 mas em unidades de graus Kelvin e pressão atmosférica. Podemos notar que as escalas de temperatura e pressão são gigantescas, incomparáveis com as escalas do diagrama de fases da água (onde também temos a transição “líquido-gás”), figura 4.23, por exemplo.

4. Matéria Interagente na Presença de Campo Magnético

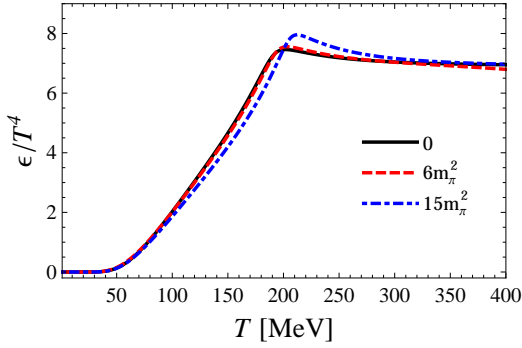


Figura 4.12.: Densidade de Energia em função de T em $\mu = 0$ para $B = 0$ (linha sólida), $B = 6m_\pi^2/e$ (linha tracejada) e $B = 15m_\pi^2/e$ (linha traço-ponto).

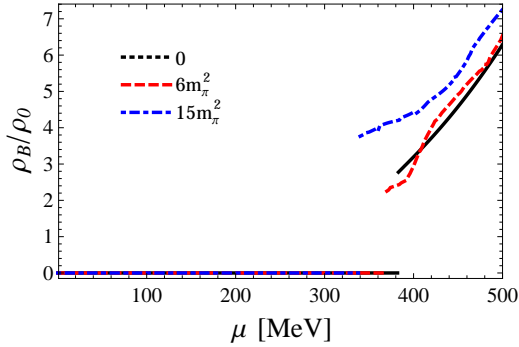


Figura 4.13.: Densidade bariônica em função de μ para $B = 0$ (linha sólida), $B = 6m_\pi^2/e$ (linha tracejada) e $B = 15m_\pi^2/e$ (linha traço-ponto).

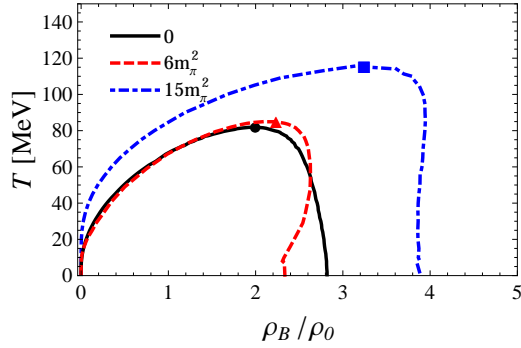


Figura 4.14.: Diagrama de coexistência de fases para $B = 0$ (linha sólida), $B = 6m_\pi^2/e$ (linha tracejada) e $B = 15m_\pi^2/e$ (linha traço-ponto). Os símbolos no topo de cada curva indicam o ponto crítico.

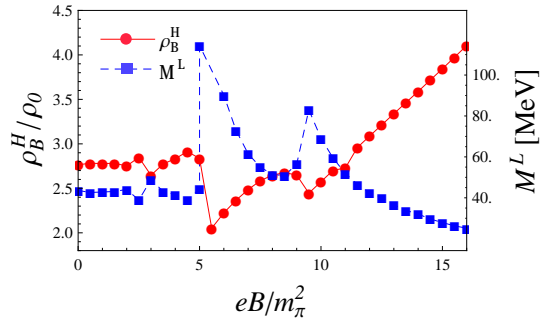


Figura 4.15.: Massa efetiva (representada pelos quadrados, com valores no eixo da direita) no valor mais baixo durante a transição, M^L , e o valor mais alto da densidade bariônica na coexistência de fases (pontos, eixo da esquerda) em função de eB/m_π^2 .

4. Matéria Interagente na Presença de Campo Magnético

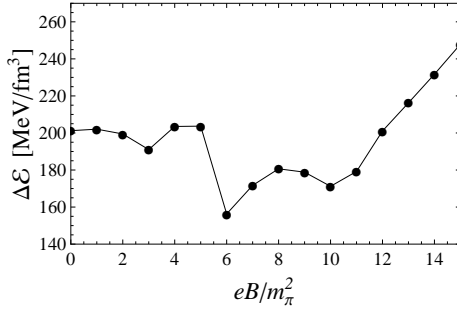


Figura 4.16.: Calor latente, $\Delta\epsilon$ em função de eB/m_π^2 . O comportamento oscilatório é o mesmo observado em ρ_B^H .

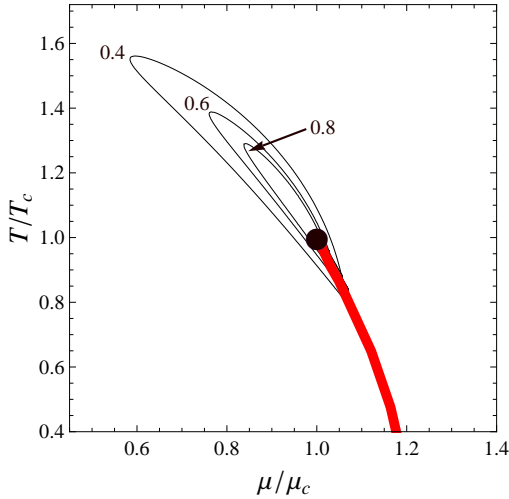


Figura 4.17.: Susceptibilidade do número de quarks em unidades de Λ^2 para eB/m_π^2 . Observamos o mesmo padrão de comportamento do caso $B = 0$.

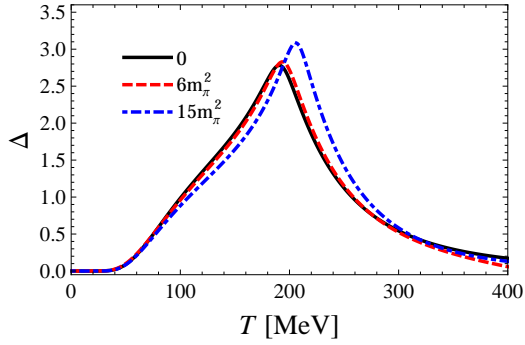


Figura 4.18.: Anomalia do Traço em função de T em $\mu = 0$ para diferentes valores de eB .

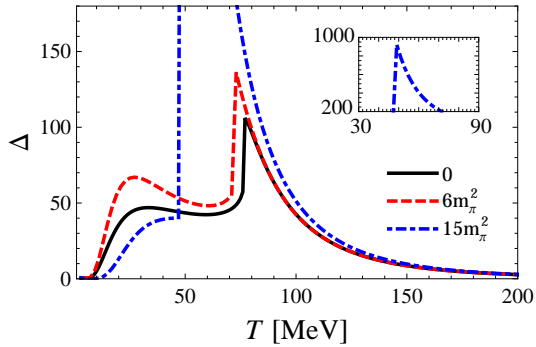


Figura 4.19.: Anomalia do Traço em função de T em $\mu = 328\text{MeV}$ (o valor de μ_c em $B = 0$) para diferentes valores de eB .

4. Matéria Interagente na Presença de Campo Magnético

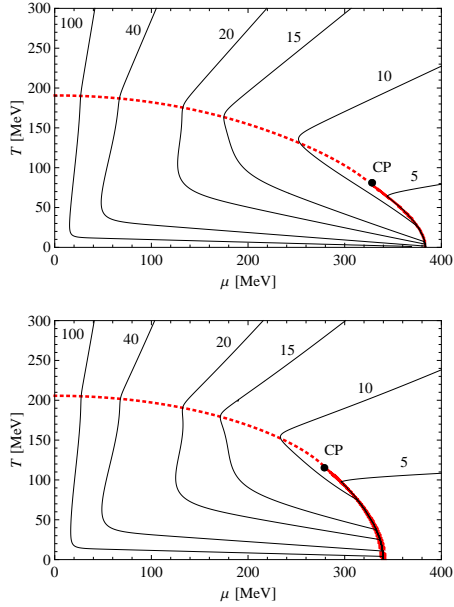


Figura 4.20.: Entropia por bárion, S/A em $B = 0$ (quadro de cima) e $\epsilon B = 15m_\pi^2$ (quadro de baixo). As curvas finas correspondem a $S/A = 5, 10, 15, 20, 40, 100$. A linha grossa sólida representa a transição de primeira ordem enquanto a linha tracejada representa o crossover.

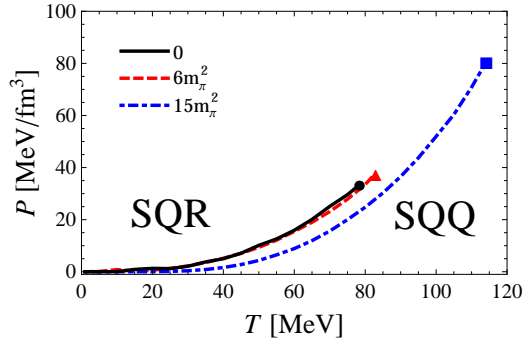


Figura 4.21.: Diagrama de fases no plano $P - T$ para diferentes valores de eB mostrando as regiões de simetria quebrada (SQR) e restaurada (SQQ), que correspondem às fases de “gás” e “líquido” na analogia líquido-gás. As linhas representam transições de primeira ordem que terminam nos respectivos pontos críticos, representados pelos símbolos no final das curvas.

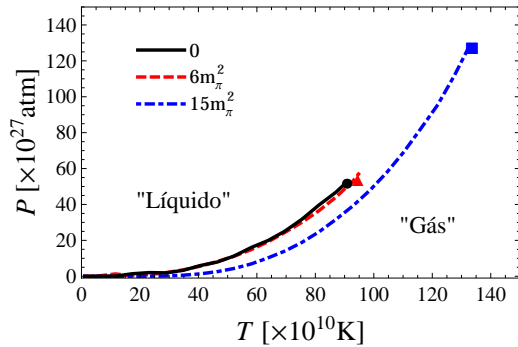


Figura 4.22.: Diagrama de fases no plano $P - T$ em unidades do Sistema Internacional.

4. Matéria Interagente na Presença de Campo Magnético

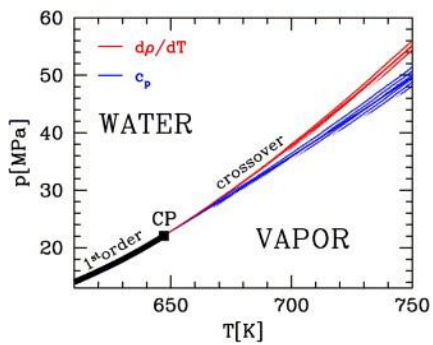


Figura 4.23.: Diagrama de fases da água. Retirado de [6].

5. Conclusões

O estudo de transições de fase no contexto da física de altas energias, em especial na interação forte (com a ajuda de modelos efetivos para a QCD), tem sido alvo de inúmeros trabalhos e pesquisas nos últimos anos [6, 8, 13, 14, 15, 18, 44, 49, 67, 68]. Não era para menos, tendo em vista seu vasto e longo alcance de aplicações na física, indo desde colisões de partículas e íons pesados em aceleradores de partículas espalhados pelo mundo até objetos estelares exóticos, como as estrelas de nêutrons e magnetares. O estudo feito nesta dissertação de mestrado explorou apenas uma pequena parte deste campo da física. Mesmo assim, apesar de todas as simplificações e aproximações feitas nos nossos cálculos (aproximação de campo médio, por exemplo), conseguimos extrair resultados do modelo de Nambu–Jona-Lasinio (versão $SU(2)$) para a transição quiral na matéria hadrônica e de quarks com e sem a presença de campo magnético que podem ser úteis na descrição qualitativa da transição quiral. Estes resultados podem ser comparados com os demais modelos efetivos para a interação forte como o modelo sigma linear, sigma não linear, teoria de perturbação quiral, etc. Comparações com cálculos de QCD na rede também podem ser feitas, embora esta técnica esteja encontrando dificuldades [7] para extrair resultados quando o potencial químico é diferente de zero (conforme já discutimos no capítulo 1), algo que é extremamente simples de se fazer em modelos efetivos.

O modelo de NJL é um dos modelos efetivos mais usados para estudar a transição quiral na matéria de quarks. Vimos no capítulo 3 que a simetria quiral é quebrada dinamicamente por meio de correções radiativas no potencial efetivo do modelo, e (parcialmente) restaurada em altas temperaturas e/ou densidades. Em baixas densidades (baixo potencial químico) e altas temperaturas, encontramos que a restauração de simetria é dada por um crossover (ou transição de segunda ordem, no limite quiral), em acordo com outros trabalhos [44, 68] e com os cálculos de QCD na rede [6]. Na região de altas densidades e baixas temperaturas encontramos uma transição de primeira ordem, o que representa o cenário mais esperado, apesar de não haver, até o momento, experimentos capazes de testar essa região do diagrama de fases, nem

5. Conclusões

resultados concretos na rede. Com os parâmetros utilizados em nossos cálculos, encontramos o ponto crítico em $T_c = 78.5 \text{ MeV}$ e $\mu_c = 328 \text{ MeV}$. A localização do ponto crítico é sensível à parametrização, mas parametrizações ligeiramente diferentes não causam grandes alterações, como pode ser visto comparando os nossos resultados com os apresentados em [44]. A região da transição de primeira ordem é muito rica em termos de fenômenos físico, por isso procuramos explorar ao máximo suas características como as linhas espinodais e o diagrama de coexistência de fases, onde duas fases com densidades diferentes coexistem na mesma temperatura e no mesmo potencial químico.

Os principais resultados desta dissertação estão relacionados com os efeitos do campo magnético na transição quiral. Vimos no capítulo 4 que a redução dimensional proveniente do campo magnético é a responsável pelo efeito da catálise magnética, ou seja, pelo aumento da massa efetiva dos quarks em $T = \mu = 0$. Isso fez com que a temperatura pseudo-crítica do crossover em $\mu = 0$ aumentasse com o campo magnético (este comportamento, no entanto, difere do encontrado pelos cálculos de QCD na rede). No eixo $T = 0$ do diagrama de fases, o potencial químico de coexistência diminuiu com o aumento de B , o que, juntamente com o aumento de T_{pc} , causou o cruzamento das linhas do diagrama para diferentes valores de B . Este comportamento também foi observado nas referências [65, 66, 67], bem como o fortalecimento da transição de primeira ordem com o aumento do campo magnético. O padrão observado é que o ponto crítico se move na direção de altas temperaturas e baixos potenciais químicos a medida que o campo magnético se torna mais forte. Localizamos o ponto crítico para $eB = 6m_\pi^2$ em $T_c = 81.7 \text{ MeV}$ e $\mu_c = 318 \text{ MeV}$ e em $T_c = 115.6 \text{ MeV}$ e $\mu_c = 279.3 \text{ MeV}$ para $eB = 15m_\pi^2$.

De modo geral o campo magnético não provoca grandes mudanças em grandezas como a pressão, densidade de energia e medida da interação, mas o estudo dessas quantidades nos permitiu confirmar o fortalecimento da transição de primeira ordem na presença de B . A susceptibilidade do número de quarks manteve a mesma forma do caso $B = 0$, com as linhas de contorno se prolongando no entorno do ponto crítico devido aos valores dos expoentes críticos: $\gamma_q = 1$ e $\epsilon = 2/3$ na aproximação de campo médio [50]. As linhas adiabáticas também não sofreram alterações significativas com o campo magnético.

O diagrama de coexistência de fases para diferentes valores de B apresentou um comportamento de certa forma inesperado a princípio. Como vimos na figura 4.14, a

densidade mais alta, ρ_B^H , para $B \neq 0$ oscila em baixas temperaturas em torno do seu valor em $B = 0$. Isso provocou a forma distorcida na curva de coexistência de fases, facilmente vizível no caso $eB = 6m_\pi^2$. Explicamos este comportamento analisando o preenchimento dos níveis de Landau, e encontramos que as oscilações surgem quando há mudanças no último nível de Landau (k_{max}) a ser preenchido. As oscilações mais vizíveis correspondem à troca de $k_{max} = 1$ para $k_{max} = 0$ nos quarks *up* e *down*. Este resultado, até onde temos conhecimento, não havia sido explorado anteriormente. Uma compilação com os principais resultados desta dissertação, juntamente com resultados obtidos por Gabriel Ferrari para o modelo sigma linear, está sendo preparada para publicação [52].

Como última observação, é importante ressaltar que tanto o modelo quanto as aproximações usadas neste trabalho são bastante simples. Consideramos apenas quarks *up* e *down* no modelo de NJL, sem a interação vetorial (uma boa revisão com o quark *strange* e o canal vetorial da interação pode ser encontrada em [44]) na aproximação de campo médio (equivalente à aproximação de Hartree e N grande). Além disso, o loop de Polyakov tem sido muito usado para adicionar o confinamento de quarks ao modelo de NJL, característica esta que ignoramos aqui. Existe também a possibilidade de considerar a dependência espaço-temporal do campo σ , que está diretamente relacionado à massa efetiva dos quarks. Desse modo o parâmetro de ordem também apresentaria dependência espaço-temporal. Uma aplicação interessante que carece de estudos até o momento é a investigação da tensão superficial na formação de bolhas nas proximidades da transição de primeira ordem (com implicações na formação de estrelas de quarks), recentemente estudada na referência [71]. Todas estas observações certamente constituem possibilidades de trabalhos futuros e continuações do tema abordado nesta dissertação.

A. Cálculo do Traço do Logaritmo

Neste apêndice vamos calcular $\text{tr} \ln(\not{p} - m - i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi})$ que aparece na eq. (3.11) e também na eq. (2.34) sem o termo com γ_5 . Primeiramente, usamos a bem conhecida relação

$$\text{tr} \ln = \ln \det, \quad (\text{A.1})$$

de modo que tudo o que precisamos fazer é calcular $\det(\not{p} - m - i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi})$. Agora,

$$\not{p} = \gamma^\mu p_\mu = \gamma^0 p_0 - \sum_{i=1}^3 \gamma^i p_i, \quad (\text{A.2})$$

onde as matrizes γ são definidas da seguinte forma (na base de Dirac):

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

o que resulta em

$$\not{p} = \begin{pmatrix} p_0 & 0 & -p_3 & -p_1 + ip_2 \\ 0 & p_0 & -p_1 - ip_2 & p_3 \\ p_3 & p_1 - ip_2 & -p_0 & 0 \\ p_1 + ip_2 & -p_3 & 0 & -p_0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

A. Cálculo do Traço do Logarítmo

Nesta base a matriz quirial γ^5 é definida como $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ de modo que

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Subtraindo as matrizes $m\mathbb{I}$ e $ia\gamma^5$ da eq. (A.3) (\mathbb{I} é a matriz identidade e $a = \vec{\tau} \cdot \vec{\pi}$) obtemos

$$\not{p} - m\mathbb{I} - ia\gamma^5 = \begin{pmatrix} -m + p_0 & 0 & -ia - p_3 & -p_1 + ip_2 \\ 0 & -m + p_0 & -p_1 - ip_2 & -ia + p_3 \\ -ia + p_3 & p_1 - ip_2 & -m - p_0 & 0 \\ p_1 + ip_2 & -ia - p_3 & 0 & -m - p_0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

de modo que só nos resta calcular o determinante da matriz acima. O resultado é

$$\det(\not{p} - m\mathbb{I} - ia\gamma^5) = (-p^2 + m^2 + a^2)^2, \quad (\text{A.5})$$

onde $a^2 = \vec{\pi}^2$, de modo que

$$\ln \det(\not{p} - m\mathbb{I} - i\gamma^5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi}) = 2(-p^2 + m^2 + \vec{\pi}^2). \quad (\text{A.6})$$

B. Convergência da Soma Sobre os Níveis de Landau

A soma sobre os níveis de Landau, k , na equação 4.8 possui infinitos termos. Entretanto, para obtermos um resultado numérico válido é preciso truncar a série em algum valor k_{max} . Felizmente a série converge logo nos primeiros termos em temperaturas baixas, o que faz com que k_{max} seja, em geral, um número pequeno. Além disso, a equação 4.14 mostra que k_{max} é inversamente proporcional ao campo magnético, de modo que em campos muito altos $k_{max} \rightarrow 0$, como vimos na explicação do diagrama de coexistência de fases, figura 4.14. Em todos os cálculos feitos nesta dissertação foram tomados os devidos cuidados para assegurar a convergência da soma sobre os níveis de Landau. Para exemplificar isto, vamos considerar dois casos.

Em baixas temperaturas a convergência da série é rápida, como pode ser visto na figura B.1, onde plotamos o potencial efetivo em $T \rightarrow 0$ para $eB = 5m_\pi^2$ e $\mu = 378$ MeV. Vemos que o potencial efetivo muda sua forma radicalmente ao passar de $k_{max} = 0$ para $k_{max} = 1$, mas apenas ligeiramente ao passar de $k_{max} = 1$ para $k_{max} = 2$. A partir daí não ocorre mais mudanças na forma de \mathcal{F} e nos valores dos eixos coordenados, como pode ser visto no caso $k_{max} = 10$. Nada acontece se continuarmos a aumentar k_{max} . Portanto, concluímos seguramente que a série convergiu.

Em altas temperaturas a convergência da série é bem mais lenta, como mostra a figura B.2 para $T = 190$ MeV, $\mu = 0$ e $eB = 5m_\pi^2$. As linhas sólida, pontilhada e tracejada mostram os casos $k_{max} = 0$, $k_{max} = 5$ e $k_{max} = 10$. As linhas tracejada-pontilhadas mostram os casos $k_{max} = 50$ e $k_{max} = 100$. Elas caem exatamente uma em cima da outra, de modo que não é possível distingui-las na figura. Desse modo podemos concluir que a série convergiu já em $k_{max} = 50$.

B. Convergência da Soma Sobre os Níveis de Landau

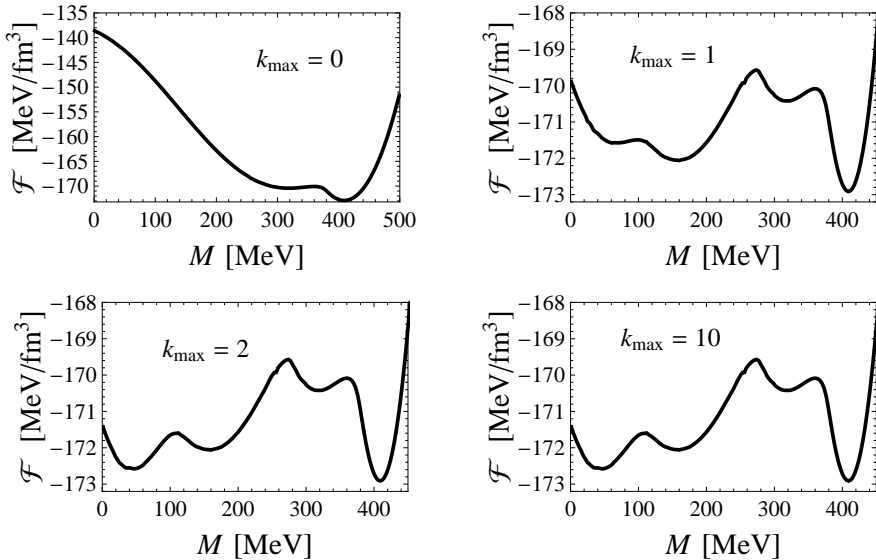


Figura B.1.: Potencial efetivo em $T \rightarrow 0$ para $eB = 5m_\pi^2$. A forma do potencial muda conforme o valor de k_{max} , mas converge rapidamente a partir de $k_{max} = 2$.

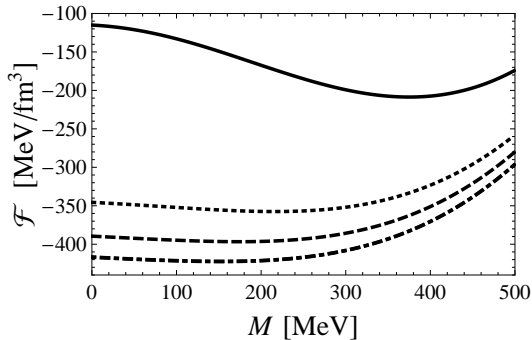


Figura B.2.: Potencial efetivo em $T = 190$ MeV para $eB = 5m_\pi^2$ e $\mu = 0$. A forma do potencial muda conforme o valor de k_{max} , mas converge em $k_{max} \approx 50$. De cima para baixo: $k_{max} = 0$, $k_{max} = 5$, $k_{max} = 10$, $k_{max} = 50$ e $k_{max} = 100$ (estas duas últimas linhas são coincidentes).

Referências Bibliográficas

- [1] H. Satz, arXiv:1207.0341v1 [hep-ph].
- [2] <http://www.bnl.gov/rhic/>
- [3] <http://lhc.web.cern.ch/lhc/>
- [4] <http://public.web.cern.ch/public/>
- [5] Kerson Huang, *Fundamental Forces of Nature The Story of Gauge Fields*, First Edition (World Scientific Publishing, 2007).
- [6] Y. Aoki, G. Endrodi, Z. Fodor, S.D. Katz and K.K. Szabo, *Nature* 443, 675 (2006); Y. Aoki, Z. Fodor, S.D. Katz and K.K. Szabo, *Phys. Lett. B* 643, 46 (2006).
- [7] P. de Forcrand, PoS (LAT2009) 010, 2009 [arXiv:1005.0539].
- [8] K. Fukushima and T. Hatsuda, *Rept. Prog. Phys.* 74, 014001 (2011).
- [9] A. R. Bodmer, *Phys. Rev. D* 4 (1971), 1601; E. Witten, *Phys. Rev. D* 30 (1984), 272 .
- [10] K. Fukushima, D. E. Kharzeev and H. J. Warringa, *Phys. Rev. D* 78, 074033 (2008); D. E. Kharzeev and H. J. Warringa, *Phys. Rev. D* 80, 0304028 (2009); D. E. Kharzeev, *Nucl. Phys. A* 830, 543c (2009).
- [11] R. Duncan and C. Thompson, *Astron. J.*, 32, L9 (1992); C. Kouveliotou et al., *Nature* 393, 235 (1998).
- [12] T. Vaschupati, *Phys. Lett. B* 265, 258 (1991).
- [13] A.J. Mizher, M.N. Chernoub and E.S. Fraga, *Phys. Rev. D* 82 105016 (2010).

Referências Bibliográficas

- [14] R. Gatto and M. Ruggieri, Phys. Rev. D 83, 034016 (2011); K. Fukushima, M. Ruggieri and R. Gatto, ibid. 81 114031 (2010); R. Gatto and M. Ruggieri, ibid 82, 054027 (2010).
- [15] S.S. Avancini, D.P. Menezes and C. Providência, Phys. Rev. C 83, 065805 (2011).
- [16] M. D’Elia, S. Mukherjee and F. Sanfilippo, Phys. Rev. D 82, 051501 (2010).
- [17] G.S. Bali, F. Bruckmann, G. Endrodi, Z. Fodor, S.D. Katz, S. Krieg, A. Schafer and K.K. Szabo, arXiv: 1111.4956 [hep-lat]; G.S. Bali, F. Bruckmann, G. Endrodi, Z. Fodor, S.D. Katz, S. Krieg, A. Schafer; arxiv: 1206.4205 [hep-lat].
- [18] E.S. Fraga and L.F. Palhares, arxiv: 1201.5881.
- [19] <http://www.fair-center.eu/>
- [20] <http://nica.jinr.ru/>
- [21] V. Koch, Int.J.Mod.Phys. E **6**, 203-250 (1997).
- [22] G. Jona-Lasinio, Nuovo Cimento **34** (1964) 1790.
- [23] M.E.B. Pinto, Non-Perturbative Methods Applied to Chiral Symmetry Breaking (Ph. D. Thesis, 1992).
- [24] C. Itzykson e J.B. Zuber, *Quantum Field Theory* (MacGraw Hill, 1980).
- [25] N. Goldenfeld, *Lectures on phase transitions and the renormalization group*, First Edition (Addison-Wesley Publishing Company, 1992).
- [26] J.J. Binney, N.J. Dowrick, A.J. Fisher e M.E.J. Newman, *The theory of critical phenomena*, First Edition (Oxford University Press, 1992).
- [27] H.B. Callen, *Thermodynamics and an introduction to thermostatistics*, Second Edition (John Wiley & Sons, 1985).
- [28] L.H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Second Edition (Cambridge University Press, 1996).
- [29] D. Bailin, A. Love, *Introduction to gauge field theory*, Revised Edition (Institute of Physics Pub., 1993).

- [30] S. Salinas, *Física Estatística*, (Editora da USP).
- [31] A. Zee, *Quantum field theory in a nutshell*, Second Edition (Princeton University Press, 2010).
- [32] J. I. Kapusta, C. Gale, *Finite Temperature Field Theory*, Second Edition (Cambridge University Press, 2006).
- [33] A. Das, *Finite Temperature Field Theory*, (World Scientific Publishing, 1997).
- [34] M. Quiros, arXiv:hep-ph/9901312v1.
- [35] J. Zinn-Justin, arXiv:hep-ph/0005272v1.
- [36] Y. Nambu e G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. 122 (1961) 345.
- [37] Y. Nambu e G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. 124 (1961) 246.
- [38] H. Kleinert, On the Hadronization of Quark Theories, Lectures presented at the Erice Summer Institute 1976; in: Understanding the Fundamental Constituents of Matter, A. Zichichi (ed.), Plenum Press, New York 1978, p. 289.
- [39] M.K. Volkov, Ann. Phys. (NY) 157 (1984) 282.
- [40] T. Hatsuda and T. Kunihiro, Phys. Lett. B 145 (1984) 7.
- [41] C. Ratti, M. A. Thaler and W. Weise, Phys. Rev. D 73, 014019 (2006) [arXiv:hep-ph/0506234].
- [42] W. j. Fu, Z. Zhang and Y. x. Liu, Phys. Rev. D 77, 014006 (2008) [arXiv:0711.0154 [hep-ph]].
- [43] M. Ciminale, R. Gatto, N. D. Ippolito, G. Nardulli and M. Ruggieri, arXiv:0711.3397 [hep-ph].
- [44] M. Buballa, arXiv:hep-ph/0402234v2 (2005).
- [45] D.J. Gross e A. Neveu, Phys.Rev. **D10** (1974) 3235.
- [46] K. Hagiwara et al, Review of Particle Physics, Phys. Rev. D 66 (2002) 010001.
- [47] B. Holstein, Phys. Lett. B 244 (1990) 83.

Referências Bibliográficas

- [48] M. Gell-Mann, R.J. Oakes, and B. Renner, Phys. Rev. 175 (1968) 2195.
- [49] J.K. Boomsma, and D. Boer, arXiv:0911.2164v2 [hep-ph] (2010).
- [50] B.J. Schaefer, and J. Wambach, Phys. Rev. D 75, 085015 (2007).
- [51] L. Ferroni, V. Koch and M.B. Pinto, Phys. Rev. C 82, 055205 (2010).
- [52] G.N. Ferrari, A.F. Garcia, e M.B. Pinto, arxiv: 1207.3714v1 [hep-ph].
- [53] Gusynin, V., Miransky, V., Shovkovy, Phys. Rev. Lett. 73, 3499 (1994).
- [54] Igor A. Shovkovy, arxiv: 1207.5081 [hep-ph].
- [55] Kharzeev, D.E., McLerran, L.D.: Warringa, Nucl. Phys. A803, 227 (2008).
- [56] Skokov, V., Illarionov, A.Y., Toneev, Int. J. Mod. Phys. A24, 5925 (2009).
- [57] Thompson, C., Duncan, R.C.: Astrophys. J. 408, 194 (1993).
- [58] Duncan, R.C., Thompson, C.: Astrophys. J. 392, L9 (1992).
- [59] T. Vachaspati, Phys. Lett. B265, 258 (1991).
- [60] Enqvist, K., Olesen, P.: Phys. Lett. B319, 178 (1993).
- [61] Cheng, B.l., Olinto, A.V.: Phys. Rev. D50, 2421 (1994).
- [62] Baym, G., Bodeker, D., McLerran, L.D.: Phys. Rev. D53, 662 (1996).
- [63] E.S. Fraga, and A.J. Mizher, Phys. Rev. D 78, 025016 (2008).
- [64] D.P. Menezes, M.B. Pinto, S.S. Avancini, A.P. Martinez, and C.Providência, Phys. Rev. C 79, 035807 (2009).
- [65] S.S. Avancini, D.P. Menezes, M.B. Pinto and C. Providência, Phys. Rev. D 85, 091901 (2012).
- [66] Sh. Fayazbakhsh, S. Sadeghian and N. Sadooghi arxiv: 1206.6051.
- [67] J. O. Andersen and A. Tranberg, arxiv: 1204.3360.
- [68] O. Scavenius, Á. Mócsy, I.N. Mishustin and D.H. Rischke, Phys. Rev. C 64, 045202 (2001).

- [69] M. Stephanov, K. Rajagopal and E. Shuryak, Phys. Rev. Lett. 81, 4816 (1998).
- [70] I.N. Mishustin, L.M. Satarov, H. Stöcker, and W. Greiner, Phys. Rev. C62, 034901 (2000).
- [71] M.B. Pinto, V. Koch, and J. Randrup, arxiv: 1207.5186v1 [hep-ph].