CURSO

D'ESTUDOS ELEMENTARES,

OU

COLLECÇÃO DE TRATADINHOS SEPARADOS,

Contendo

AS MAIS UTEIS NOÇÕES

acerca dos principaes ramos de conhecimentos humanos,

POR

CAMILLO TRINOCQ.

ARITHMETICA.

LIVRARIA DE GARNIER IRMÃOS,

RIO DE JANEIRO,
rua do Ouvidor, 69.

PARIS,
rua Richelieu, 10.

CURSO
D'ESTUDOS ELEMENTARES

Collecção de tratadinhos separados,

CONTENDO

AS MAIS UTEIS NOÇÕES

Acerca dos principaes ramos de conhecimentos humanos.

ARITHMETICA.

O CURSO D'ESTUDOS ELEMENTARES

CONTEM :

Primeiro livro de leitura.
Livro de leitura corrente.
Methodo d'escrita e modelos.
Arithmetica. — Problemas e soluções.
Geometria.
Desenho linear.
Grammatica portugueza { theorica. pratica.
Methodo de composição e d'estylo.
Grammatica franceza { theorica. pratica.
Direitos e deveres do cidadão.
Instrucção moral e religiosa.
Geographia { geral. discriptiva.
Mythologia.
Historia Santa.
— da Europa { antiga. da idade media. moderna.
— da America.
— do Brasil.
— de Portugal.
Astronomia.
Geologia.
Physica.
Chymica.
Botanica.
Zoologia.
Physiologia humana.
Hygiene.

ELEMENTOS

DE

ARITHMETICA

POR

CAMILLO TRINOCQ.

LIVRARIA DE GARNIER IRMÃOS.

Rio de Janeiro, rua do Ouvidor, 69. | Paris, rua Richelieu, 10.

1851

Paris. imprensa de Paulo Dupont.
Rua de Grenelle-S.-Honorato, 55.

ARITHMETICA

ELEMENTAR.

PARTE PRIMEIRA.

THEORIA DO CALCULO.

NUMEROS INTEIROS.

NUMERAÇÃO.

I.

Definições preliminares. — Os objectos existentes, ou que na idéa representâmos, são *sós* ou *unidos* a outros da mesma especie, o que constitue o *número*.

Os objectos d'igual especie são os que designâmos com o mesmo nome ; ou, mais geralmente, com as mesmas palavras. Exemplo : homens, casas, arvores, laranjas.

Simplicimamente formâmos os numeros. Tomando um so objecto, temos a *unidade* ou o número *um*. Accrescentando outro objecto d'igual especie ao precedente, formâmos o número *dous*. Ajuntando tambem outro objecto da mesma especie aos dous precedentes, compômos o número *tres*. Augmentando d'esta sorte com um novo objecto da mesma especie os numeros ja formados, obteremos, successivamente, os numeros *quatro*, *cinco*, *seis*, *sete*, *oito*, *nove*, *dez*, etc.

A serie dos numeros é infinita; visto que, por maior que supponhâmos um número, accrescentando-lhe um, comporemos um número inda maior.

Dizemos numeros *abstractos*, quando não designâmos objecto algum em particular. Exemplo : *tres*, *cinco*.

São os numeros chamados *concretos*, quando designâmos os objectos que considerâmos. Exemplo : *tres homens*, *cinco casas*.

Conservando pois a palavra *unidade* para designar um objecto unico qualquer, porêm da mesma especie que os considerâmos reunidos, dizer podêmos, que *o número é a unidade ou a reunião de muitas unidades da mesma especie*.

Os numeros são ditos *inteiros*, quando os considerâmos unidades inteiras, objectos inteiros. Exemplo : *tres bananas*, *cinco dias*

Chamâmos *numeros fraccionarios* ou sim-

plesmente *fracções*, quando so considerâmos partes iguaes da unidade de que se trata. Exemplo : *uma metade de laranja*, *tres quartos d'hora*.

Denominão-se *numeros complexos*, quando se compoem de numeros inteiros da unidade e das subdivisões d'ella. Exemplo : *tres dias, sete horas, dez minutos*.

A Arithmetica *é a sciencia dos numeros*; isto é, o conhecimento de tudo o relativo aos numeros.

Divide-se ella em duas partes : a *numeração* e o *calculo*.

A numeração é a parte d'arithmetica que ensina a formar, a enunciar e a representar os numeros.

Enunciar um número é exprimil-o com a palavra; é dizer, dar-lhe o nome que lhe convem.

Formâmos os nomes de número segundo certas particulares convenções que são objecto da *numeração fallada*.

Representar-mos um número é expressal-o mediante a escrita com signaes e particulares convenções que são objecto da *numeração escrita*.

Duas sortes ha de numerações : numeração fallada e numeração escrita

II.

Numeração fallada. — *Numeração fallada é a arte d'enunciar todos os numeros possiveis com a ajuda d'um limitado número de palavras;* isto é, d'um número de palavras menor que o dos mesmos numeros.

Entendemos por *systema* de numeração fallada o nexo das convenções que fizemos para formar os nomes de número.

Eis em que consiste esse systema :

Havendo dado um nome particular aos dez primeiros numeros : *um, dous, tres, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez,* conviemos olhar o número dez como uma nova unidade de ordem superior chamada dezena, e contar por dezenas como contámos por simples unidades.

Assim, a dezena é a unidade da segunda ordem que vale dez unidades simples. Uma dezena e outra dezena fórmão duas dezenas que se chamão *vinte*. Duas dezenas e uma dezena fórmão tres dezenas ou *trinta*. Tres dezenas e uma dezena fórmão quatro dezenas ou *quarenta*. Quatro dezenas e uma dezena fórmão cinco dezenas ou *cincoenta*. Cinco dezenas e uma dezena fórmão seis dezenas ou *sessenta*.

Seis dezenas e uma dezena fórmão sete dezenas ou *setenta*. Sete dezenas e uma dezena fórmão oito dezenas ou *oitenta*. Oito dezenas e uma dezena fórmão nove dezenas ou *noventa*. Nove dezenas e uma dezena fórmão dez dezenas ou *cem*.

Collocando successivamente entre dez e vinte, vinte e trinta, trinta e quarenta, etc., os nomes dos nove primeiros numeros, formámos os nomes de todos os numeros, desde dez até noventa-e-nove, como se segue :

Dez-um, que o uso substituio por *onze; dez-dous* ou *doze; dez-tres* ou *treze; dez-quatro* ou *quatorze; dez-cinco* ou *quinze; dez-seis; dez-sete; dez-oito; dez-nove; vinte-e-um; vinte-e-dous; vinte-e-tres;.... trinta-e-um; trinta-e-dous; trinta-e-tres;.... quarenta-e-um; quarenta-e-dous;.... cincoenta-e-um; cincoenta-e-dous*, etc.

Ajuntando uma unidade ao número noventa-e-nove, isto é nove dezenas e uma unidade, obteremos dez dezenas, das quaes formaremos uma nova unidade de terceira ordem chamada *centena* ou cento, ou cem; e, se contar-mos por centenas como contámos por dezenas e unidades simples, diremos : *cem, duzentos, trezentos,.... quinhentos,.... novecentos.*

Collocando successivamente entre cem e duzentos, duzentos e trezentos, etc., os nomes dos noventa-e-nove numeros precedentes, formaremos os nomes de todos os numeros desde um até novecentos-e-noventa-e-nove.

O número novecentos-e-noventa-e-nove augmentado de um, dá dez centenas ou *mil*, e é a unidade de quarta ordem. Dez mil fórma a *dezena-de-mil*, unidade da quinta ordem; dez dezenas de mil fórmão a *centena-de-mil*, unidade da sexta ordem.

Collocando successivamente diante de mil e entre dous numeros consecutivos de mil os nomes de todos os numeros inferiores a mil, formaremos os nomes de todos os numeros desde um até novecentos-e-noventa-nove-mil-novecentos-noventa-e-nove.

Considerâmos os mil como formando uma classe superior de unidades, que tem suas unidades, dezenas e centenas como unidades simples. Assim, as unidades simples fórmão a primeira classe d'unidades, e as mil fórmão a segunda classe.

Da mesma maneira mil mil fórmão uma unidade da terceira classe chamada *milhão*, e que tem igualmente suas unidades, dezenas e centenas.

Mil milhões fórmão o *billião*, unidade da quarta classe.

Mil billiões compoem o *trillião*, unidade da quinta classe.

E assim por diante.

Em summa, o systema da numeração fallada basea-se na dupla convenção que dez unidades da mesma ordem fórmão uma unidade de ordem superior, e que a reunião das tres ordens d'unidades compoe uma unidade de classe superior, chamada, por essa razão, *classe ternaria*.

Recebeu esse systema o nome decimal, por ser sua base o número *dez*.

Quasi todos os povos da terra adoptárão o systema decimal, provavelmente porque os homens contárão com os dedos. Talvez mesmo a divisão de cada dedo em tres phalanges désse a idéa das tres ordens: unidades, dezenas, centenas, que compoem cada classe. Seja o que fôr, ajudar-nos podemos d'esse meio para reter os nomes e a successão das unidades das diversas ordens e classes resumidas no seguinte quadro.

5ª CL.	4ª CL.	3ª CLASSE. Milhões.			2ª CLASSE. Mil.			1ª CLASSE. Unidades simples.		
Trilliões.	Billiões.	Centenas de milhão. 9ª *Ordem.*	Dezenas de milhão. 8ª *Ordem.*	Unidades de milhão. 7ª *Ordem.*	Centenas de mil. 6ª *Ordem.*	Dezenas de mil. 5ª *Ordem.*	Unidades de mil. 4ª *Ordem.*	Centenas. 3ª *Ordem.*	Dezenas. 2ª *Ordem.*	Unidades simples. 1ª *Ordem.*

Notar podêmos que uma unidade de qualquer ordem vale dez, cem, mil.... unidades d'uma ordem inferior, quando esta se acha uma, duas, tres.... ordens depois d'aquella. Assim, a unidade de mil vale cem dezenas, que estão na segunda ordem depois d'ella; a centena de mil é mil vezes maior que a centena que existe na terceira ordem após ella; e assim das outras.

Convem a numeração fallada ás tres especies de numeros inteiros, fraccionarios ou *complexos;* isto é, servimo-nos dos mesmos nomes de número, quer os consideremos objectos inteiros, quer partes iguaes que houveramos feito d'esses objectos.

Não acontece o mesmo á numeração escrita, como adiante mostraremos.

III.

Numeração escrita. — Numeração escrita é a arte de representar-mos todos os numeros possiveis mediante um limitado número de signaes chamados algarismos.

São dez esses algarismos, a saber :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0,

e representão os numeros um, dous, tres, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, zero.

As palavras *um, dous, tres*, etc., representão os nomes de número ; os algarismos 1, 2, 3, representão os numeros per si mesmos. Os primeiros são unicamente intendidos pelos povos que fallão portuguez ; os segundos são intendidos de todos os povos que adoptárão esses signaes, que attribuimos aos Arabios, e por este motivo chamâmos *algarismos arabes.*

Consiste o systema da numeração escrita em as duas convenções seguintes :

1° Qualquer algarismo collocado á esquerda de outro, representa unidades d'uma ordem immediatamente superior; 2° o algarismo 0 substitue as unidades das diversas ordens que faltão ao número.

Assim, para representar-mos o número cincoenta-e-quatro, composto de quatro unidades e de cinco dezenas, escrevemos 54. O número quinhentes-trinta-e-oito escreve-se 538; o número seis-mil-quatro-centos-vinte-e-sete, 6,427. O número sessenta, que contem seis dezenas, sem unidades simples, escreve-se 60. O número sete-centos-e-tres, que não contem dezenas, escreve-se 703; o número oito-mil, 8,000; setenta-mil-e-trinta, 70,030; nove-milhões-cinco-mil-duzentos, 9,005,200.

Vêmos pois que, mediante dez algarismos e a convenção estabelecida, poderemos representar todos os numeros imaginaveis.

Convem notemos que a ordem dos algarismos, a partir dos algarismos das unidades simples, é a mesma que a das unidades por elles representadas. Assim, as dezenas são na segunda ordem; as centenas na terceira; as dezenas de mil na quinta.

Para enunciar-mos um número escrito em algarismos, partimos o número em tiras de tres algarismos cada uma, caminhando da direita para a esquerda, pronunciando o nome da classe d'unidades de cada tira, unidades, mil, milhões, etc. A ultima tira á esquerda poderá ter somente um ou dous algarismos. *Depois, volvendo á esquerda, enunciâmos successivamente cada tira como se ella estivesse so, accrescentando o nome da classe d'unida-*

des que lhe corresponde. Se alguma das tiras se compozesse de zeros ou se houvesse um ou dous zeros á esquerda da tira, não fariamos caso algum d'esses zeros em o enunciado do número; isto é, que no primeiro caso, calariamos a classe d'unidades representada pelos tres zeros; e, no segundo caso, as unidades que faltassem na classe. Segundo esta regra, o número 5,087,009,597 se enuncia: 5 billiões, 87 milhões, 9 mil, 597.

Para escrever-mos um número dictado em linguagem ordinaria, convem representemos successivamente cada classe principiando pela das maiores unidades, mediante uma tira, que deve conter tres algarismos para todas as classes, salvo para a mais elevada; a qual póde conter somente uma ou duas ordens d'unidades.

Escrevâmos vinte sete billiões seis centos nove milhões oitenta sete mil e seis.

A classe das mais fortes unidades é a dos billiões: ella so aqui contem duas ordens d'unidades, que serão representadas por 27; a dos dades, que serão representadas por 27; a dos milhões por 609, a dos mil por 087, e a das unidades por 006; o que dá 27, 609, 087, 006.

Questionario. — Que é número? — Que entendemos por objectos da mesma especie? — Como temos a unidade ou o número um? — Como se fórmão o número dous, o número tres, etc.? — A serie dos numeros é infinita? — Que entendemos por número abstracto e número concreto? — Qual é a definição do número? — Que é número inteiro? — Que é número fraccionario ou uma fracção? — E número complexo? — Que é arithmetica? — Como se divide? — Que é numeração? — Que se entende para enunciar um número? — Que se entende para represental-o? — Quantos generos ha d'enumeração?

Que é numeração fallada? — Que entendemos por systema de numeração? — Em que consiste o systema de numeração adoptada? — Como se formárão todos os nomes de número desde um até cem? — até mil? — até um millião? — Que é uma ordem d'unidades? — Que é uma classe d'unidades? — Qual é a base do systema de numeração? — Que nome tem esse systema? — Quem deu idéa d'elle? — Que devemos notar ácerca da ordem das unidades? — A nomenclatura dos numeros, isto é os nomes dos numeros, serve para todas as especies de numeros?

Que é a numeração escrita? — E os algarismos? — Quantos ha? — Em que consiste o systema da numeração escrita? — Qual nota ha a fazer ácerca da ordem dos algarismos? — Como se enuncia um número escrito em algarismos? — Que fazemos quando contem zeros? — Como se escreve um número dictado em linguagem commum?

CALCULO DOS NUMEROS INTEIROS.

I.

Definições preliminares. — É o calculo a parte da Arithmetica que ensina a fazer, sobre os numeros, certas operações com o ficto de formar-mos outros numeros mais promptamente que pela numeração.

Encerra o calculo um assaz grande número d'operações entre as quaes ha quatro chamadas *fundamentaes*, por serem a base de todas as outras, e que todas as outras a ellas se referem.

São as quatro operações fundamentaes: *addição*, *subtracção*, *multiplicação* e *divisão*.

Em cada uma d'essas operações, devemos considerar 1° a *definição*, a qual dá a conhecer o fim que nos propômos; 2° a *regra*, que indica o mais simples e prompto meio para chegar-mos ao fim proposto; 3° o *exemplo*, que so é a applicação da regra; 4° o *uso*, que indica em quaes casos devemos empregar a operação; 5° a *prova*, a qual consiste n'uma segunda operação, que fazemos para certificar-nos que não nos enganámos na primeira.

O calculo differe segundo a natureza dos numeros sobre os quaes se opéra. O dos numeros inteiros se apresenta primeiro como mais simples. O calculo dos numeros fraccionarios e complexos se adjectiva ao dos numeros inteiros, como mostraremos adiante.

Um *problema* de calculo é o enunciado d'uma questão, na qual se trata de achar um ou mais numeros incognitos, operando sobre numeros dados.

Resolver um problema é determinar o número ou os numeros incognitos mediante numeros conhecidos.

A *solução* é a serie dos razoados e operações que fazemos para chegar ao resultado pedido.

Dâmos, algumas vezes, esse nome ao resultado mesmo.

Questionario. — Que é o calculo? — E seu ficto? — Quantas operações fundamentaes ha n'elle? — Porque o chamâmos assim? — Que nomes teem essas quatro operações? — Que é definição d'uma operação? — Que é regra de calculo? — Que entendemos por prova d'uma operação? — Que é um problema de calculo? — E resolver um problema? — E sua solução?

ADDIÇÃO.

I.

Definição e regra geral. — É a Addição uma operação que tem por fim achar um número que contenha tantas unidades como varios outros numeros dados.

Chama-se o resultado *somma* ou *total*.

Para poder-mos fazer uma addição, devemos saber de cór as sommas que produzem

os nove algarismos, accrescentados dous a dous. Eis o que aprendemos mediante a taboada seguinte, chamada *taboada de addição*.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Para formar-mos essa taboada, escrevemos sobre uma linha horizontal os dez algarismos, começando por zero; depois formâmos as outras linhas, ajuntando uma unidade a cada um dos numeros que compoem a linha precedente.

A somma d'um número qualquer da primeira linha horizontal e d'um número qualquer da primeira linha vertical, acha-se no encontro da linha vertical e da linha horizontal, que começão esses dous numeros. Assim 14, somma de 6 e 8, acha-se no encontro da linha vertical que começa por 6, com a linha horizontal, que começa por 8. Vêmos que 14 se acha tambem no encontro da linha vertical começada por 8 com a linha horizontal começada por 6.

O signal da addição é +, que se chama *mais*.

O signal da igualdade ou da equação é =, que se chama *igual*.

Podemos pois escrever abreviadamente :

$6 + 8 = 14. \quad 5 + 9 = 9 + 5 = 14.$

$6 + 3 + 9 + 4 = 22.$

Na pratica diremos : 6 e 3 fazem 9 ; 9 e 9 fazem 18, e 4 fazem 22.

Para addicionar-mos dous ou mais numeros inteiros compostos de tantos algarismos quantos quizermos, escreveremos todos os numeros propostos uns debaixo dos outros ; de sorte que as unidades da mesma ordem fiquem collocadas n'uma mesma columna vertical, unidades debaixo de unidades, dezenas debaixo de dezenas, centenas debaixo de centenas ; depois lançaremos uma risca para separar o todo, do resultado escrito por baixo.

Começando depois pela direita, sommâmos todos os algarismos da primeira columna que é a das unidades simples ; se a somma não excede 9, escrevemol-a por baixo da columna tal qual é ; mas se ella excede 9 ; isto é, se ella ser deve expressa por dous ou mais algarismos, escrevemos somente o algarismo das unidades, e retemos (na memoria) as dezenas que sobejão, para addicional-as com os algarismos da columna seguinte das dezenas, começando pelo que retivemos.

Operâmos n'esta columna das dezenas e nas seguintes como na primeira, até á última columna á esquerda, por baixo da qual escrevemos o resultado tal qual o achámos.

O número assim escrito por baixo da linha é a somma pedida. Exemplo :

Querendo addicionar os numeros 256, 349, 742, escrevo os tres numeros propostos em columna vertical, de modo que as unidades fiquem debaixo das unidades, as dezenas debaixo das dezenas, etc. ; depois passo uma linha horizontal por baixo do último, como aqui se mostra.

$$\begin{array}{r} 256 \\ 349 \\ 742 \\ \hline 1,347 \end{array}$$

correspondem ? — Porque começâmos a operação pela direita? — Que aconteceria se a principiassemos pela esquerda ?

Qual é o uso d'esta operação ? — Porque não podêmos addicionar entre si senão numeros de igual especie ? — Como fazemos a prova da addição ?

SUBTRACÇÃO.

I.

Definição e regra. — É a SUBTRACÇÃO uma operação que tem por fim diminuir d'um número todas as unidades de outro.

O resultado chama-se *resto*, *excesso* ou *differença*.

Quando o número a diminuir de outro so tem um algarismo, e que o maior de ambos não excede 18, facilmente obtemos a differença d'esses dous numeros mediante a *taboada da addição*. Exemplo :

Supponhâmos que se busca a differença de 5 e 9; tomâmos 5 na linha horizontal superior e baixâmos á linha vertical correspondente até que achemos 9, e a differença 4 se acha na extremidade esquerda da linha horizontal correspondente a 9.

Quando bem sabemos a *taboada da addição*,

alcançâmos a differença de dous numeros d'essa taboada, buscando na idéa o que devemos ajuntar ao menor para formar o maior.

O signal da subtracção é —, que se enuncia *menos* e se colloca entre os dous numeros a subtrahir. Assim, no exemplo precedente, tivemos $9 - 5 = 4$; na prática dizemos : 5 tirados de 9, restão 4.

A regra que seguimos para fazer uma subtracção qualquer é fundada em dous principios : 1° que temos a differença de dous numeros quando do maior subtrahimos todas as partes do menor; 2° que, accrescentando a dous numeros a mesma quantidade, sua differença resta a mesma.

Para fazer-mos uma subtracção, é necessario : 1° collocar o menor número sob o maior, de modo que as unidades da mesma ordem fiquem umas debaixo das outras, e sublinharmos o todo; 2° começar-mos pela direita, e subtrahir-mos cada algarismo inferior do algarismo que está por cima; escrever cada resto por baixo, e pôr um zero quando nada resta; isto é, quando os dous algarismos correspondentes são iguaes; 3° se um algarismo inferior é maior que o algarismo superior correspondente, accrescentar 10 ao algarismo superior, e subtrahir o algarismo inferior do número assim formado; mas ajuntar, na columna seguinte, uma unidade ao algarismo inferior, a fim que a differença reste a mesma. Exemplo :

Se quizer-mos subtrahir 672 de 836, escreveremos o número superior 836, e por baixo o menor 672, de modo que as unidades da mesma ordem estejão na mesma columna vertical, e sublinharemos o todo, como aqui vêmos.

$$\begin{array}{r} 836 \\ 672 \\ \hline 164 \end{array}$$

Depois, começando pela direita, digo : 2 tirados de 6 ficão 4, que escrevo por baixo da linha e na mesma columna.

Depois 7 tirados de 3 não póde ser; mas augmento 3 com 10 unidades da sua ordem, o que dá 13 dezenas; então 7 tirados de 13, restão 6, que escrevo similhantemente por baixo.

Agora, em logar de dizer 6 tirados de 8, augmento 6 com 1, o que dá 7, e digo : 7 tirados de 8, resta 1.

O resto é 164.

II.

Uso e prova da subtracção. — Empregàmos a subtracção quando conhecer queremos

a differença entre dous numeros, o excesso d'um número sobre outro; diminuir um número dado de outro número dado; conhecendo a somma de duas partes, e uma d'ellas, determinar a outra, etc.; pois é evidente que a questão, em qualquer d'esses casos, consiste em subtrahir-mos do maior dos dous numeros tantas unidades quantas ha no menor.

Faz-se a prova da subtracção addicionando o número menor com o resto; a somma deve ser igual ao maior.

Em caso tal, a addição pode fazer-se de baixo para cima, a fim de nada ter-mos que escrever.

A prova de subtracção póde tambem fazer-se por uma subtracção : se do número maior subtrahir-mos o resto, acharemos o número menor.

Com effeito, considerar podêmos o número maior como somma do menor e do resto. Se pois subtrahir-mos uma das partes; isto é, o resto, acharemos a outra parte; isto é, a menor.

Eis a applicação d'essas provas.

Subtracção.	Prova pela addição.	Prova pela subtracção.
834209	452475	834209
452475	381734	381734
381734	834209	452475

os nove primeiros numeros, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, sobre uma linha horizontal.

Ajuntâmos cada um d'esses numeros a si mesmo; o que dá a segunda linha horizontal, composta, por conseguinte, dos productos de cada um dos nove primeiros numeros por dous.

Accrescentando cada um dos numeros da segunda linha horizontal ao número correspondente da primeira, forma-se a terceira linha, composta dos productos dos nove primeiros numeros por 3.

Continua-se do mesmo modo, ajuntando cada um dos numeros da última linha horizontal formada ao número correspondente da primeira.

Assim, os numeros d'uma linha qualquer horizontal são os productos dos primeiros numeros pelo número que começa esta linha.

Segundo isto, se achar quizermos o producto de 7 por 6, por exemplo, tomaremos o multiplicando 7 na primeira linha horizontal, o multiplicador 6 na primeira columna vertical á esquerda, seguiremos a columna vertical, começando em 7, a linha horizontal, principiando em 6, e o número 42, sobre o qual as duas direcções se reunem, é o producto buscado.

Para multiplicar-mos um número de tantos algarismos quantos quizermos por um número d'um so algarismo, multiplicaremos successi-

vamente, começando pela direita, cada um dos algarismos do multiplicando pelo algarismo do multiplicador.

Se o producto d'um dos algarismos do multiplicando pelo multiplicador não exceder 9, escreveremos o producto tal qual o acharmos; mas, se exceder 9, so escreveremos as unidades, levando as dezenas ao producto seguinte.

Exemplo. Se quizermos multiplicar 5039 por 7,

Escreveremos o multiplicando 5039; e, por baixo d'elle, o multiplicador 7; depois sublinhâmos o todo para separal-o do resultado.

$$\begin{array}{r} 5039 \\ 7 \\ \hline 35273 \end{array}$$

Então, começando pela direita, digo: 7 vezes 9 unidades fazem 63 unidades; escrevo 3 e retenho 6 dezenas para leval-as ao producto seguinte, dizendo:

7 vezes 3 dezenas fazem 21 dezenas, e 6 que retive, fazem 27; escrevo 7 e retenho 2.

7 vezes 0 fazem 0, e 2 que retive, fazem 2, que escrevo.

Emfim, 7 vezes 5 fazem 35, que assento.

O producto pedido é pois 35273.

Eis a multiplicação precedente feita em ordem inversa.

	589
	365
300 vezes 589	1767
60 vezes 589	3534
5 vezes 589	2945
Producto identico,	214985

Quando, no multiplicador, ha zeros collocados entre outros algarismos significativos, não devemos fazer caso dos taes zeros na multiplicação, e passâmos ao algarismo significativo seguinte, observando adiantar o producto parcial correspondente de tantas ordens, mais uma para a esquerda, quantos zeros ha intermediarios.

Applicação. — Se quizermos multiplicar 9407 por 3005.

```
    9407
    3005
  ------
   47035
28221
  --------
28268035
```

Multiplico primeiramente o multiplicando por 5, e tenho 47035; depois, passando de repente

ao algarismo 3, digo 3 vezes 7, 21; e escrevo 1 debaixo do 7, adiantando de duas ordens, mais uma; isto é, tres ordens para a esquerda.

Quando o multiplicando ou o multiplicador, ou mesmo ambos, terminão em zeros, multiplicaremos os dous numeros sem fazer caso dos zeros; mas quando o producto obtivemos, escreveremos á sua direita tantos zeros quantos ha no fim do multiplicando e do multiplicador.

Exemplo. Multipliquemos 45000
Por 7300

```
  135
 315
---------
328500000
```

Multiplico como se houvesse somente 45 para multiplicar por 73; o que dá 3285; e, á direita d'esse producto, escrevo 5 zeros, 3 para o multiplicando, e 2 para o multiplicador.

Quando o número dado pela questão para multiplicando, tem menos algarismos que o indicado para multiplicador, costumâmos (a fim de simplificar e abreviar o calculo) inverter a ordem dos dous factores, e multiplicar pelo multiplicando; isso nada muda ao resultado, se cuidâmos em indicar que elle exprime unidades da mesma natureza que o primitivo multiplicando.

XXI.

Uso e prova da multiplicação. — Entre as questões numerosissimas, em que a multiplicação deve ser empregada, notaremos as seguintes :

1° Fazer um número qualquer um número dado de vezes maior ;

2° Conhecendo o preço d'um so objecto, calcular o preço d'um número dado d'objectos ;

3° Sabendo quantos objectos se podem comprar 1 $ 000 rs, determinar o número d'objectos que se poderião ter por uma quantia dada.

Por exemplo, se sabemos que um objecto custa 25 $ 000 rs, para ter o preço de 348 objectos da mesma especie, multiplicaremos 25 $ 000 por 348. Porque o preço pedido se comporá evidentemente de 348 vezes 25 $ 000 rs.

Se, por 1 $ 000 rs, temos 38 objectos, por 59 $ 000 rs teremos 59 vezes 38 d'esses mesmos objectos ; e, por conseguinte, deveremos multiplicar 38 por 59000.

O arrazoado dá pois sempre a conhecer qual é, dos dous numeros dados, o que tomar devemos para multiplicando.

Nota essencial. Em toda a multiplicação, o multiplicador é sempre um número abstracto, e o producto é sempre da mesma especie que o multiplicando ; o que é evidente por si mesmo ; por isso a multiplicação, nos casos precedentes,

sendo unicamente uma addição abreviada, se escrevessemos em columna tantos numeros iguaes ao multiplicando quanto é indicado pelo multiplicador, esse último número não appareceria no calculo.

Faz-se a prova da multiplicação pela multiplicação dos mesmos numeros, mas invertendo a ordem dos factores ; isto é, tomando o multiplicando pelo multiplicador ; e reciprocamente.

Questionario. — Que é multiplicação ? — Como se chama o resultado d'esta operação ? — Que entendemos por factores d'um producto ? — Como se indica a multiplicação ? — Que se entende multiplicar um número qualquer por um número inteiro ? — Que é taboada de multiplicação ? — Como nos servimos d'essa taboada ? — Dizei a regra da multiplicação dos numeros inteiros por um número d'um so algarismo ? — Como se multiplica um número inteiro por 10, 100, 1000 ? — Qual é a regra da multiplicação dos numeros inteiros ? — Porque se começa a operação pela direita ? — É indifferente começarmos por um algarismo qualquer do multiplicador ? — Como fazemos quando ha no multiplicador zeros collocados entre outros algarismos significativos ? — Como se abrevia a multiplicação quando o multiplicando e o multiplicador acabão em zeros ? — Que costumâmos fazer quando o multiplicando tem menos algarismos que o multiplicador ? — Muda o resultado quando invertemos a ordem dos factores ? — Quaes são os principaes usos da multiplicação ? — Mostrai que, em toda a multiplicação, o multiplicador é sempre um número abstracto ? — Como se faz a prova da multiplicação ?

DIVISAO.

I.

Definição e regra da divisão. — É a DIVISÃO uma operação pela qual buscâmos quantas vezes um número, chamado *dividendo*, contem outro chamado *divisor*.

O resultado da operação ou o número que indica quantas vezes o dividendo contem o divisor, chama-se *quociente*.

Indicâmos esta operação com o signal :, que se enuncía *dividido por*, e que se colloca entre os dous numeros ante o divisor.

A divisão tambem tem por fim o dividir um número chamado *dividendo*, em tantas partes iguaes quantas unidades ha em um número chamado *divisor*.

Assim, dividir 30 por 5, é buscar quantas vezes 30 contem 5 partes iguaes; e então o quociente 6 é uma d'essas partes; a qual, repetida 5 vezes, reproduz 30.

Poderemos, por exemplo, achar o quociente 30 por 5, subtrahindo 5 de 30, tantas vezes quantas são possiveis; o número de subtracções será, evidentemente, o quociente.

$$30-5=25-5=20-5=15-5=10-5=\\5-5=0.$$

Como, depois de fazer-mos 6 subtracções, o dividendo fica exausto, o quociente buscado é 6.

Mas entende-se que se o dividendo contesse o divisor um grande número de vezes, a operação sería longuissima. Convem pois empreguemos outro processo.

Para dividir-mos os numeros de dous algarismos pelos numeros d'um so, basta-nos a taboada de multiplicação.

Ajudar-nos-hemos como se segue. Supponhâmos que se trata de dividir 42 por 7 : sigo a 7ª columna horizontal té ao número 42; então subindo até o fim, a linha vertical, de que 42 faz parte, acho 6, quociente pedido.

Se dividissemos por 7 o número 60, que não se acha na taboada, seguiríamos a 7ª columna horizontal, e achariamos dous numeros 56 e 63, entre os quaes se inclue 60. Ora 56 iguala 7 vezes 8; e 63 iguala 7 vezes 9; logo o quociente buscado acha-se incluso entre 8 e 9; ou é igual a 8, mais alguma cousa menor que uma unidade.

Dividâmos agora um número qualquer com

mais de dous algarismos por um número d'um so algarismo; e seja 5256 por 6 :

$$\begin{array}{r|l} 5256 & 6 \\ \underline{48} & \overline{876} \\ 456 & \\ \underline{42} & \\ 36 & \\ \underline{36} & \\ 0 & \end{array}$$

Cinco mil sendo divididos em 6 partes iguaes, não podem dar mil no quociente ; assim, o quociente encerra, ao muito, centenas.

5 mil e 2 centenas ou 52 centenas, divididas em 6 partes iguaes, dão, para cada parte, 8 centenas. 6 vezes 8 centenas fazem 48 centenas ou 4800 ; deduzindo esse número de 5256, restão 456 a dividir em 6 partes iguaes.

456 encerrão 45 dezenas; as quaes, divididas em 6 partes iguaes, dão para cada parte 7 dezenas. 6 vezes 7 dezenas fazem 42 dezenas ou 420 unidades ; as quaes deduzidas de 456, dão 36 unidades a repartir em 6 partes iguaes.

36 unidades divididas por 6, dão 6 para cada parte. 6 vezes 6 unidades fazem 36 unidades ; as quaes subtrahidas de 36, dão por resto 0. O quociente compõe-se pois de 8 centenas, 7 dezenas e 6 unidades, ou 876 unidades.

Podemos fazer esta divisão (bem como todas as em que o divisor so tem um algarismo) de um modo muito mais abreviado.

Eis como se executa e dispõe a operação :

$$\begin{array}{r|l} 5256 & \underline{6} \\ 876 & \end{array}$$

O sexto de 52 é 8 por 48; escrevo 8 e retenho 4 ; o sexto de 45 é 7 por 42; escrevo 7 e retenho 3 ; o sexto de 36 é 6, escrevo 6 : o quociente é pois 876.

II.

Divisão na qual o divisor tem mais d'um algarismo.— Regra geral.— Para dividir-mos dous numeros inteiros quaesquer um pelo outro, escreveremos o divisor á direita do dividendo, separando-o com um risco vertical, e sublinharemos o divisor com um risco horizontal, para separal-o do quociente que escreveremos por baixo.

Feito isto, separâmos com um ponto, á esquerda do dividendo, tantos algarismos quantos ha no divisor ou um de mais, se o número resultante é menor que o divisor ; o que dá o primeiro dividendo parcial.

Divide-se esse primeiro dividendo parcial pelo divisor (obtem-se o quociente dividindo o no quociente á direita do algarismo ja obtido.

Multiplico o divisor por 2, o que dá 128, e deduzo-o do dividendo parcial; o que dá 57 por resto.

O quociente conterá pois 2 dezenas. Ora as 57 dezenas restantes valem 570 unidades, e 6 que o dividendo contem, fazem 576 unidades, que devem repartir-se em 64 partes iguaes.

Consiste isto ainda em abaixar-mos o seguinte algarismo do dividendo á direita do resto.

Operando emfim sobre esse terceiro dividendo parcial, como sobre os precedentes, digo : o 6º de 57 é 9, que escrevo á direita do ultimo algarismo obtido no quociente; multiplico o divisor por 9, e levo o producto 576 sob o dividendo parcial, para o subtrahir.

O resto 0 indica que nada mais fica a repartir, e que a partilha se fez exactamente. O quociente buscado é pois 529.

Abreviar podemos a divisão, subtrahindo do dividendo parcial, sobre cujo operâmos, o producto do dividendo pelo algarismo obtido no quociente, á medida que esse producto formâmos.

Na pratica opera-se e razoa-se como se segue:

Separo á esquerda do dividendo os tres primeiros algarismos; o que dá o primeiro dividendo parcial 338.

Depois digo : o 6º de 33 é 5, que escrevo no quociente. Eu multiplico todo o divisor por 5, e diminuo ao mesmo tempo o producto do dividendo parcial, dizendo : 5 vezes 4, 20; tirados de 8, não se pode. Accrescento na memoria 20, e digo : 20 tirados de 28, restão 8, que escrevo sob o dividendo, e retenho 2 : depois, 5 vezes 6, 30; aos quaes ajunto 2, visto que accrescentei 20 unidades da ordem precedente ao dividendo parcial, e digo : 30 e 2 que retive fazem 32; tirados de 33, resta 1.

A direita do resto 18 abaixo o algarismo seguinte do dividendo; o que dá por segundo dividendo parcial 185, sobre cujo opero, como sôbre o primeiro, dizendo :

O 6º de 18 é 3, que seria muito forte; escrevo 2 no quociente; depois, multiplicando o divisor por 2 e effeituando a subtracção do producto ao mesmo tempo : 2 vezes 4, 8; tirados de 15, restão 7; escrevo 7 e retenho 1; 2 vezes 6, 12, e 1, que retive, 13; tirados de 18, ficão 5.

Á direita do resto 57, abaixo o algarismo seguinte do dividendo; o que dá por terceiro dividendo parcial 576, sobre o qual opero como nos precedentes.

O 6º de 57 é 9, que escrevo no quociente; depois, 9 vezes 4, 36; tirados de 36, resta 0, e retenho 3; 9 vezes 6, 54, e 3 que retive, 57; tirados de 57, resta 0.

O quociente buscado é 529.

III.

Observações ácerca da regra geral da divisão. — A divisão abreviada, que consiste em tomar-mos somente o primeiro ou os dous primeiros algarismos do dividendo parcial, e o primeiro algarismo do divisor, não pode dar um algarismo muito fraco no quociente.

Com effeito, o caso mais desavantajoso sería o em que o divisor sendo composto d'um algarismo seguido de zeros, tal como 6000, o dividendo parcial sería 47999, por exemplo. Ora a divisão de 47 por 6, segundo a regra geral, daria o algarismo mais forte possivel 7; pois se o augmentassemos de 1, 6×8 daria 48, mais forte que 47.

Quando o divisor é um número consideravel, torna-se importante conhecer-mos, antes d'escrever o algarismo no quociente, se esse algarismo será mais forte, a fim de não nos expormos a recomeçar a operação.

Se, por exemplo, tivessemos por dividendo parcial 57978 e por divisor 6789, diriamos: o 6° de 57 é 9; mas, antes d'escrevel-o no

quociente, verificaremos do modo seguinte se esse algarismo convem: multiplicando na idéa o segundo algarismo 7 por 9, teriamos 63, e, por conseguinte, 6 que retemos; depois, multiplicando o primeiro algarismo 6 por 9, obteriamos 54, e 6 que retemos, 60; por conseguinte, o producto do divisor por 9 sería maior que o dividendo parcial; 9 é pois muito forte; e escreveremos so 8 no quociente.

Em certos casos, não bastaria multiplicar-mos o divisor a partir do segundo algarismo; conviria recomeçar a multiplicação a partir do terceiro, do quarto, ou mesmo d'um algarismo mais adiantado.

O seguinte meio abreviará os apalpamentos. Consiste em dividir-mos mentalmente o dividendo parcial pelo algarismo, que verificâmos. Se o quociente, que obtemos, for menor que o divisor, o algarismo é muito forte. Assim, no exemplo precedente, dividiriamos o dividendo parcial por 9, dizendo: o 9° de 57 é 6 por 54, e restão 3: o 9° de 39 é 4; mas ha 7 no divisor: sem ir mais longe, podemos concluir que o algarismo 9 é mui forte.

A razão d'esse processo é facil de entender: com effeito, o producto do divisor pelo algarismo do quociente, devendo ser igual, ao muito, ao dividendo, se tomâmos um algarismo

Quanto á segunda questão, por exemplo, discorreremos assim : Se eu conhecesse quantas vezes o menor número é contido no maior, multiplicando o menor número pelo número de vezes achado, deveria reproduzir o número maior.

Quanto á quarta, se eu conhecesse o preço d'um so objecto, multiplicando-o pelo número d'objectos, eu deveria achar o preço total.

Por conseguinte, é sempre buscar um número que, multiplicado por um dos dous numeros dados, reproduza o outro.

Nota. Quando o dividendo e o divisor acabão em zeros, supprime-se á direita de cada um d'elles, o mesmo número de zeros, tanto como no em que ha menos, e procedemos na operação sobre os dous numeros resultados.

Exemplo e demonstração. Se dividirmos

$$48000 \left\{ \frac{\text{por } 1600}{30} \right.$$

Supprimo dous zeros nos dous numeros, e divido 480 por 16, o que dá 30 por quociente.

Com effeito, supprimindo no dividendo e no divisor dous zeros, divido, d'uma vez, os dous numeros por 100; por conseguinte, o quociente não se mudará.

Quando a divisão dá um resto, esse resto in-

dica não ser possivel partir exactamente o dividendo em tantas partes iguaes quantas unidades ha no divisor. Diz-se então que o divisor não divide *exactamente* o dividendo, ou que o divisor não é um *divisor exacto* do dividendo.

Não ha pois, n'esse caso, número inteiro que, multiplicado pelo divisor, reproduza o dividendo. O quociente obtido differe do verdadeiro quociente buscado, menos d'uma unidade. Dizemos ser elle exacto, menos quasi uma unidade.

Se quizermos dividir 348 por 7,

$$\begin{array}{r|l} 348 & 7 \\ \cline{2-2} 68 & 49 \\ 5 & \end{array}$$

a operação dá no quociente 49, e, por resto, 5. A divisão não se faz exactamente. O quociente verdadeiro, isto é, o número que, multiplicado por 7, dá por producto 348, é incluso entre 49 e 50; e, por conseguinte, 49 é o quociente, menos quasi uma unidade.

Se tirassemos 5 de 348, obteriamos 343, que serião divisiveis exactamente por 7, e o quociente exacto seria 49.

Da mesma sorte, dividindo 39419 por 579, obteremos por quociente 68, menos quasi uma unidade, e por resto, 47.

O quociente 68 não é pois completo. Brevemente veremos como completar devâmos o quociente.

Quando o divisor é um dos numeros 10, 100, 1000, etc.; isto é, a unidade seguida d'um certo número de zeros, a divisão faz-se rapidissimamente. Consiste ella em repartir-mos os algarismos do dividendo em dous grupos; o da direita contem tantos algarismos quantos zeros ha no divisor, e fórma o resto da divisão. O da esquerda encerra todos os outros algarismos do dividendo, e dá o quociente.

1° Dividir 365 por 10.

Eu divido 365 em dous grupos: 36,5; o da esquerda 36 é o quociente; o da direita 5 é o resto, e so tem um algarismo; porque o divisor so tem um zero.

2° Dividir 78987 por 1000.

Eu divido 78987, em dous grupos: 78,987; o da esquerda 78 é o quociente; o da direita 987 é o resto, e tem tres algarismos; porque ha tres zeros no divisor.

Faz-se a prova da divisão multiplicando o divisor pelo quociente; ou, reciprocamente, o quociente pelo divisor.

Se a divisão não deu resto, o producto deve ser igual ao dividendo.

Se ha resto, é necessario que, ajuntando-se o resto ao producto do quociente e do divisor, a somma seja igual ao dividendo.

Podêmos tambem fazer a prova por uma nova divisão, na qual tomemos por divisor o quociente. O novo quociente deve ser exactamente o antigo divisor; e o resto será o mesmo, se a primeira divisão deu um.

Problema. Um taberneiro pagou por 347 pipas de Bordeos, 29.495 $ 000 rs; a quanto sahe cada pipa?

Solução. Se eu conhecesse o importe d'uma pipa, multiplicando esse número de reis por 347, deveria achar no producto 29.495 $ 000 rs. 29495000 é pois um producto, e 347 um dos factores; tómo pois por dividendo 29495000, e por divisor 347.

Divisão.

29495000	347
1735	85000
000000	

Prova pela multiplicação.

85000
347
―――――
595000
340000
255000
―――――
29495000

Prova pela divisão.

29495000	85000
399500	347
595000	
00000	

Custa a pipa 85 $ 000 rs.

Operou-se como em os numeros abstractos; mas, em summa, restabeleceu-se o nome da unidade.

Questionario. — Que é divisão? — Como se chama o resultado da operação? — Qual é ainda o fim da divisão? — Não poderemos achar o quociente por subtracções successivas? — Como nos podêmos servir da taboada de multiplicação para dividir um número de um ou dous algarismos abaixo de 81, por um número d'um so algarismo? — Como se faz a divisão dos numeros inteiros? — Como se conhece que um algarismo collocado no quociente é muito forte? — Se operassemos como indica a regra geral, deveriamos escrever um algarismo muito fraco no quociente? — Como poderemos verificar se o algarismo, que queremos escrever no quociente, não será muito forte? — Como poderemos saber anticipadamente quantos algarismos haverá no quociente? — Em qual caso empregar devemos a divisão? — Como se reconhece qual dos dous numeros dados deve ser o dividendo? — Como se abrevia a divisão no caso em que o dividendo e o divisor sejão ambos terminados por zeros? — Quando a divisão dá um resto, que significa isso? — Faz-se a divisão mais rapidamente quando o divisor é um dos numeros 10, 100, 1000? — Como se faz a prova da divisão?

FRACÇÕES DECIMAES.

NUMERAÇÃO.

Noções preliminares. — Vimos que as diversas ordens d'unidades inteiras teem valores de dez em dez vezes maiores, á medida que nos elevâmos das unidades simples ás dezenas, das dezenas ás centenas, etc.

Do mesmo modo, baixando das ordens mais elevadas ás unidades simples, as unidades tornão-se de dez em dez vezes mais pequenas. Assim, as centenas são dez vezes mais pequenas que os milhares; as dezenas dez vezes mais pequenas que as centenas; e as unidades dez vezes mais pequenas que as dezenas.

É evidente o poder-mos continuar esta subdivisão, olhando a unidade simples como formada de dez partes iguaes chamadas *decimos;* o decimo como formado de dez partes das quaes são necessarias dez vezes dez ou cem, para se formar a unidade, e que são, por conseguinte, *centesimos;* o centesimo como formado de dez partes chamadas *millesimos;* o millesimo de dez *decimos millesimos;* o decimo millesimo de dez *centesimos millesimos.*

As partes que obtemos dividindo a unidade em dez partes iguaes, cada uma d'estas em outras dez, e assim por diante, chamão-se *fracções decimaes*, ou *numeros decimaes*, ou simplesmente *decimaes.*

Regra para representar numeros decimaes. — Para representar-mos os numeros decimaes, seguimos a mesma convenção que para os numeros inteiros, e collocâmos os decimos á direita das unidades, os centesimos á direita dos decimos, e assim por diante.

Para não confundir-mos a parte inteira com a parte decimal, separâmol-as com uma virgula posta entre as unidades e os decimos: assim, para representar 17 unidades 541 millesimos, escreveremos 17,541, visto que 500 millesimos valem 5 decimos, e que 40 millesimos valem 4 centesimos.

Se alguma ordem de decimaes faltasse entre as unidades inteiras e os decimaes da mais pequena especie do número proposto, substituir-lhe-hemos um zero.

Assim, para exprimir-mos quarenta e nove unidades, quinhentos e sete decimos millesimos, escreveremos 49,0507; porque quinhentos e sete decimo millesimos, valendo cinco centesimos e sete decimo millesimos, não encerrão nem decimos, nem millesimos.

Se não houver inteiros juntos á fracção decimal, poremos á esquerda da virgula um zero que lhe occupará o logar: assim, para exprimir-mos 75 centesimos, escreveremos 0,75.

Regra para enunciar numeros decimaes. — Enunciar podêmos um número decimal de tres maneiras. Seja o número 9,745. 1° Podemos enunciar cada ordem separadamente, e dizer: nove unidades, sete decimos, quatro centesimos, cinco millesimos. 2° Depois de haver enunciado a parte inteira separadamente, enunciar, como número inteiro, o número formado pelos decimaes, juntando-lhe o nome dos decimaes da mais pequena especie, e dizer: nove unidades, sete centos quarenta e cinco millesimos; porque 7 decimos e quatro centesimos valem 70 centesimos mais 4 centesimos; depois, 74 centesimos mais 5 millesimos, valem 740 millesimos mais 5 millesimos; isto é, 745 millesimos, assim como o enunciámos. 3° Enunciar podemos todo o número como se não contivesse virgula, ajuntando-lhe o nome dos decimaes da mais pequena especie, e dizer: nove mil sete centos quarenta e cinco millesimos; porque 9 unidades valem 9000 millesimos, que, com 745 millesimos, fazem 9745 millesimos.

Os zeros, collocados á direita d'um número decimal, não mudão o valor d'esse número. Se, á direita de 7,85, se pôem dous zeros, obtem-se 7,8500, número igual a 7,85 : com effeito, a parte inteira ficou a mesma; 85 centesimos valem dez vezes mais de millesimos ou 850 millesimos, e 850 millesimos valem dez vezes mais de dez millesimos ou 8500 decimos millesimos : em outros termos, ahi ha 100 vezes mais partes; mas ellas são 100 vezes mais pequenas; de sorte que o valor do número decimal ficou o mesmo.

Podemos supprimir os zeros collocados á direita d'um número decimal, sem lhe mudar o valor.

Assim, em vez de 7,8500, podêmos escrever 7,850, ou 7,85, porque se, d'um lado, tomâmos dez vezes ou cem vezes menos partes, do outro, ellas são 10 vezes ou 100 vezes maiores.

Servimo-nos d'essas duas propriedades para reduzir fracções á mesma especie. 1º Sejão os numeros 4,5; 9,307 e 15,0219. Pósso pôr tres zeros, em seguimento do primeiro, e um zero depois do segundo, sem lhe mudar o valor, e teria assim os numeros 4,5000, 9,3070 e

15,0219, os quaes conterão cada um quatro decimaes; e, por conseguinte, representarão todos tres decimos-millesimos. 2º Sejão os 3 numeros 9,20; 17,950 e 28,7000; eu pósso supprimir um zero á direita do segundo, e dous zeros á direita do terceiro, sem lhe mudar o valor. Terei assim os tres numeros 9,20 ; 17,95 e 28,70, que conterão cada um dous decimaes e representarão todos tres centesimos.

ADDIÇÃO DOS DECIMAES.

Para fazer a addição dos decimaes, collocâmos os numeros uns debaixo dos outros, de modo que as unidades da mesma especie fiquem na mesma columna vertical; ajuntão-se depois os numeros com se fossem inteiros, e á direita da somma separão-se tantos decimaes quantos se achão no número que mais contem.

Ajuntemos os numeros 9,75; 0,089; 7,7895; 0,0898 e 332.

$$
\begin{array}{r}
9,75 \\
0,089 \\
7,7895 \\
0,0898 \\
332 \\
\hline
349,7183
\end{array}
$$

Depois d'escrever-mos convenientemente os numeros uns por baixo dos outros, o que acontece sempre quando as virgulas estão na mesma columna, sómmo como se os numeros fôssem inteiros, e tenho por total 3497183; a direita d'este total, separo com uma virgula 4 decimaes, visto haver quatro nos numeros que mais contem; e tenho por resultado 349,7183.

SUBTRACÇÃO DOS DECIMAES.

Para fazer a subtracção dos decimaes, reduzo á mesma especie os numeros propostos; colloco o menor debaixo do maior, attentando que as virgulas fiquem na mesma columna vertical; faço a subtracção como a dos numeros inteiros; visto que separo á direita do resto tantos decimaes quantos ha em um dos dous numeros, e isso com uma virgula que se acha na mesma columna que as virgulas dos numeros dados.

Tiremos de 2464,21 327,07643.

$$\begin{array}{r} 2464{,}21000 \\ 327{,}07643 \\ \hline 2137{,}13357 \end{array}$$

Depois de ter posto tres zeros á direita de 2464,21 para que o número dos decimaes seja o mesmo, diminuo 327,07643 de 2464,21000,

como se esses numeros fossem inteiros; á direita do resto 213713357, separo cinco decimaes, e acho por resultado 2137,13357.

As *provas da addição e subtracção dos decimaes* fazem-se absolutamente do mesmo modo que as provas da addição e subtracção dos numeros inteiros.

MULTIPLICAÇÃO DOS DECIMAES.

Para multiplicar uma fracção decimal por 10, adianto a virgula uma ordem para a direita; porque cada algarismo, achando-se atrazado uma ordem para a esquerda, exprime unidades dez vezes maiores que as que elle representava antes, e o número torna-se dez vezes maior.

Prova-se tambem que, para se multiplicar um número decimal por 100, deve adiantar-se a virgula duas ordens para a direita, etc. Assim:

6,0879	multiplicado	por	10	iguala	60,879
6,0879	id.	por	100	id.	608,79
6,0879	id.	por	1000	id.	6087,9
6,0879	id.	por	10000	id.	60879,

Para dividir uma fracção decimal por 10, é necessario avançar a virgula uma ordem para a esquerda; porque então cada algarismo repredireita do que encerra menos decimaes; depois faço a divisão como a dos numeros inteiros.

Divida-se 184,8 por 0,770.

```
184800  ( 770
 308    (-----
   000  ( 240
```

O resultado é 240 unidades.

Questionario. — Que se chamão fracções decimaes? — Segundo qual principio são formadas as fracções decimaes successivas? — Quaes são seus nomes? — Como se representão, por algarismos, os numeros decimaes? — Que signal se põe entre a parte decimal e a parte inteira? — Por que se substituem as ordens decimaes que faltão? — Que se faz quando não ha parte inteira? — Quaes são os tres modos d'enunciar um número decimal? — Os zeros collocados á direita d'um número decimal mudão-lhe o valor? — Como se reduzem as fracções decimaes á mesma especie? — Como se addicionão as fracções decimaes? — Como se faz a subtracção dos decimaes? — Como se fazem as provas da addição e subtracção decimaes? — Como se multiplica por 10, 100, etc., um número decimal? — Como se divide por 10, 100, etc., um número decimal? — Como se multiplicão dous numeros decimaes um pelo outro? — Como se obtem no quociente a ordem de decimaes que queremos?

—

FRACÇÕES ORDINARIAS.

NUMERAÇÃO.

I.

Noções preliminares. — Dâmos o nome *fracção a uma ou mais partes da unidade dividida em partes iguaes.*

Se a unidade está dividida em quatro partes iguaes, de que cada uma se chama um *quarto*, e se tomem tres d'essas partes, obtem-se a fracção *tres quartos*, que se representa com os dous numeros 3 e 4, collocados um sôbre o outro d'este modo $\frac{3}{4}$. O número inferior 4 chama-se *denominador*, e exprime estar a unidade dividida em 4 partes iguaes. O número superior 3 chama-se *numerador*, e exprime quantas se tomão d'essas partes iguaes. O numerador e o denominador são os dous *termos* da fracção.

Para enunciar uma fracção, enuncia-se primeiro o numerador, depois o denominador, ajuntando-se ao nome d'este a terminação *avos*

Por exemplo, para enunciar $\frac{7}{8}$, direi sete oitavos.

Quando o denominador é um dos tres numeros 2, 3, 4, dá-se-lhe o nome *meio*, *terço*, *quarto*.

Se o numerador é igual ao denominador, a fracção é igual á unidade; assim $\frac{4}{4}$, $\frac{7}{7}$, $\frac{17}{17}$ são fracções iguaes cada uma á unidade; por conseguinte iguaes entre si.

Se o numerador é maior que o denominador, a fracção chama-se *número fraccionario;* pois exprime, sob a fórma d'uma fracção, uma quantidade maior que a unidade. Por exemplo, $\frac{9}{7}$ contem $\frac{7}{7}$, mais $\frac{2}{7}$; ora $\frac{7}{7}$ igualão a unidade; logo $\frac{9}{7}$ é maior que a unidade; e, por conseguinte, é um número fraccionario.

Póde uma fracção ser considerada, 1° como uma parte igual, ou como a collecção de várias partes iguaes da unidade; 2° como o quociente da divisão do numerador pelo denominador.

Assim, a fracção $\frac{7}{9}$ é igual, 1° a 7 vezes o 9° da unidade; 2° ao quociente de 7 dividido por 9, ou a 9ª parte de 7 unidades; porque para se tomar a 9ª parte de 7, póde tomar-se successivamente a 9ª parte de cada uma das unidades que compoem o número 7; ter-se-ha assim 7 vezes o nono da unidade, ou sete nonos ($\frac{7}{9}$).

Multiplicando o numerador d'uma fracção

por um número inteiro, sem mudar o denominador, torna-se a fracção tantas vezes maior quantas ha unidades n'esse número inteiro.

Seja a fracção $\frac{7}{22}$: se eu multiplico o numerador por 3, obtenho $\frac{21}{22}$; fracção tres vezes maior que $\frac{7}{22}$; pois encerra 3 vezes mais partes; e essas partes sempre ficárão as mesmas.

Multiplicando o denominador por um número inteiro, sem mudar o numerador, torna-se a fracção tantas vezes menor quantas unidades ha n'esse número inteiro.

Multiplicando por 3 o denominador da fracção $\frac{7}{22}$, obtenho $\frac{7}{66}$, fracção 3 vezes mais pequena que $\frac{7}{22}$; porque ella encerra o mesmo número de partes, e que essas partes são 3 vezes menores; pois ha d'ellas 3 vezes mais na unidade.

Multiplicando ambos os termos d'uma fracção por um mesmo número, esta fracção não muda o valor.

Se eu multiplico os dous termos de $\frac{7}{22}$ por 3, tenho $\frac{21}{66}$, fracção igual a $\frac{7}{22}$; porque, multiplicando por 3 o numerador, eu tornei a fracção 3 vezes maior; mas, multiplicando o denominador por a 3, volvi 3 vezes mais pequena : logo ella não mudou de valor.

Dividindo o numerador d'uma racção por um número inteiro, torna-se esta fracção tantas vezes mais pequena quantas unidades ha n'esse número inteiro.

Se eu divido por 3 o numerador da fracção $\frac{21}{22}$, obtenho $\frac{7}{22}$, fracção 3 vezes menor que $\frac{21}{22}$; pois ella encerra 3 vezes menos partes; e essas partes não teem mudado de valor.

Dividindo o denominador d'uma fracção por um número, torna-se esta fracção tantas vezes maior quantas ha unidades em o número inteiro. Se eu divido por 3 o denominador da fracção $\frac{7}{66}$, obtenho $\frac{7}{22}$, fracção 3 vezes maior; pois contem o mesmo número de partes, e essas partes são 3 vezes maiores; visto haverem 3 vezes menos na unidade.

Dividindo-se os dous termos d'uma fracção pelo mesmo número, não se muda o valor d'esta fracção.

Se eu divido por 3 os dous termos da fracção $\frac{21}{66}$, tenho $\frac{7}{22}$, fracção do mesmo valor; pois dividindo por 3 o numerador, volvi a fracção 3 vezes mais pequena; mas dividindo por 3 o denominador, torno-a o mesmo número de vezes maior : logo ella não mudou de valor.

II.

Reducção das fracções ao mesmo denominador. — Para reduzir duas fracções ao mesmo

denominador, multiplicão-se os dous termos da primeira pelo denominador da segunda, e os dous termos da segunda pelo denominador da primeira.

Sejão $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{5}$ para se reduzirem ao mesmo denominador; multiplico os dous termos 3 e 4 da primeira por 5, e obtenho $\frac{15}{20}$ para a primeira fracção. Multiplico os dous termos 4 e 5 da segunda por 4, e tenho $\frac{16}{20}$ para a segunda fracção.

Esta operação nada muda aos valores respectivos das duas fracções, visto ter eu multiplicado ambos os termos de cada uma pelo mesmo número : de mais, as duas novas fracções devião ter o mesmo denominador; pois que esse denominador é o producto dos dous factores 4 e 5, multiplicados em ordem differente.

$$\frac{3}{4}=\frac{3\times5}{4\times5}=\frac{15}{20}$$

$$\frac{4}{5}=\frac{4\times4}{5\times4}=\frac{16}{20}$$

Para reduzir ao mesmo denominador um número qualquer de fracções, multiplicão-se os dous termos de cada uma pelo producto dos denominadores de todas as outras.

Eu applico esta regra ás fracções seguintes :

$$\frac{3}{4} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{5}{7} \quad \frac{7}{9}$$

1° Faço o producto dos tres denominadores 5, 7 e 9 : 7 vezes 5 são 35, 9 vezes 35 são 315 ; multiplico os dous termos 3 e 4 da primeira fracção $\frac{3}{4}$ por 315, e tenho $\frac{945}{1260}$, fracção igual a $\frac{3}{4}$;

2° Faco o producto dos denominadores 4, 7 e 9, dizendo : 7 vezes 4 são 28, 9 vezes 28 são 252 : multiplico por 252 os termos 4 e 5 da segunda fracção $\frac{4}{5}$, e tenho $\frac{1008}{1260}$, fracção igual a $\frac{4}{5}$;

3° Multiplico os dous termos 5 e 7 da terceira fracção pelo producto 180 dos denominadores 4, 5 e 9 das outras tres fracções, e tenho $\frac{900}{1260}$, fracção igual a $\frac{5}{7}$;

4° Multiplico os dous termos 7 e 9 da quarta fracção por 140, producto dos denominadores 4, 5 e 7 das tres outras, e tenho $\frac{980}{1260}$, fracção igual a $\frac{7}{9}$.

As fracções não mudárão de valor, visto que multipliquei ambos os termos de cada uma pelo mesmo número, e as quatro novas fracções devem ter o mesmo denominador ; attendido que o denominador de cada uma é producto dos quatro denominadores 4, 5, 7, 9, multiplicados n'uma ordem differente.

Posso tambem dispor os calculos da maneira seguinte, e effeitual-os depois :

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 5 \times 7 \times 9}{4 \times 5 \times 7 \times 9} = \frac{945}{1260}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \times 4 \times 7 \times 9}{5 \times 4 \times 7 \times 9} = \frac{1008}{1260}$$

$$\frac{5}{7} = \frac{5 \times 4 \times 5 \times 9}{7 \times 4 \times 5 \times 9} = \frac{900}{1260}$$

$$\frac{7}{9} = \frac{7 \times 4 \times 5 \times 7}{9 \times 4 \times 5 \times 7} = \frac{980}{1260}$$

Posso ainda reduzir um número qualquer de fracções ao mesmo denominador, procedendo como se segue :

$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{7}{9}$
315	252	180	140
$\frac{945}{1260}$	$\frac{1008}{1260}$	$\frac{900}{1260}$	$\frac{980}{1260}$

Faço o producto de todos os denominadores, dizendo : 5 vezes 4 são 20, 7 vezes 20 são 140, 9 vezes 140 são 1260.

Divido separadamente esse producto 1260 pelos denominadores 4, 5, 7 e 9, e colloco cada quociente, assim obtido, sob o denominador correspondente ; por exemplo, sob o denominador 4, o quociente 315, obtido dividindo 1260 por 4; e o mesmo dos outros.

Isto feito, multiplico os dous termos de cada fracção pelo quociente que lhe corresponde; e todas as fracções são reduzidas ao mesmo denominador 1260. Com effeito, 315, por exemplo, é o quociente de 1260 dividido por 4 : logo, multiplicando 315 pelo divisor 4, devo obter o dividendo 1260.

Quando acho um número menor que o producto de todos os denominadores, e divisivel por cada um d'elles, posso tomal-o pelo denominador commum, e operar como no caso precedente.

1° Se eu quizer reduzir ao mesmo denominador as fracções

$$\begin{array}{cccc}
\frac{2}{3} & \frac{3}{4} & \frac{5}{6} & \frac{7}{24} \\
8 & 6 & 4 & 1 \\
\hline
\frac{16}{24} & \frac{18}{24} & \frac{20}{24} & \frac{7}{24}
\end{array}$$

Observo que o maior denominador 24 é divisivel por 3, 4 e 6 : posso pois tomal-o por denominador commum.

24 dividido por 3, 4, 6 e 24, dá os quocientes 8, 6, 4 e 1; multiplico ambos os termos de cada fracção pelo quociente correspondente, e

tenho por fracções reduzidas ao mesmo denominador

$$\frac{16}{24} \quad \frac{18}{24} \quad \frac{20}{24} \quad \frac{7}{24}$$

2° Se eu me proponho reduzir ao mesmo denominador as fracções

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{1}{3} & \frac{3}{4} & \frac{5}{8} & \frac{7}{12} & \frac{15}{16} \\
16 & 12 & 6 & 4 & 3 \\
\hline
\frac{16}{48} & \frac{36}{48} & \frac{30}{48} & \frac{28}{48} & \frac{45}{48}
\end{array}$$

Examino se o maior denominador 16 é divisivel por cada um dos outros; e como não o é por todos, multiplico-o pelos numeros necessarios para obter um producto que seja divisivel por todos os denominadores, e que, por conseguinte, possa servir de denominador commum.

16 não é divisivel por 3; multiplicando-o por 3, terei 48, que é necessariamente divisivel por 3 e 16 : 48 tambem é divisivel por 4, 8 e 12; elle o é pois por todos os denominadores, e póde ser tomado por denominador commum. Eu divido 48 por cada um dos denominadores 3, 4, 8, 12, 16; tenho os quocientes 16, 12, 6, 4, 3; multiplico-os respectivamente pelo numeradores 1, 3, 5, 7, 15; tenho

assim os numeradores 16, 36, 30, 28, 45 das novas fracções, cujo denominador commum é 48.

3º Querendo reduzir ao mesmo denominador as fracções

$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{9}{14}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{13}{16}$	
420	210	140	120	112	105	
$\frac{1260}{1680}$	$\frac{1050}{1680}$	$\frac{980}{1680}$	$\frac{1080}{1680}$	$\frac{896}{1680}$	$\frac{1365}{1680}$	
4	8	12	14	15	16	2
2	4	6	7	15	8	2
	2	3	7	15	4	2
		3	7	15	2	2
		3	7	15		3
			7	5		5
			7			7

Á direita dos denominadores escritos sôbre uma linha horizontal, eu tiro uma linha vertical, e divido successivamente todos os denominadores, em quanto a divisão fazer-se póde exactamente pelos numeros 2, 3, 5, 7, etc.; isto é, pelos numeros que so são divisiveis por elles mesmos e pela unidade, e que se chamão *numeros primarios*, porque servem á formar todos os outros.

Eu tento primeiramente a divisão pelo número 2, que colloco á direita da linha vertical e sôbre a mesma linha que os denominadores; escrevo ou o quociente da divisão de cada número por 2, ou o número mesmo, se não é divisivel por 2: se o denominador mesmo é 2, nada escrevo por baixo. A segunda linha horizontal contendo numeros pares, divido ainda por 2 os numeros que a compoem, e continúo a divisão por 2 de cada nova linha horizontal. Quando esta divisão não é possivel, divido os numeros restantes por 3, depois por 5, por 7, etc. Em nosso exemplo, a divisão por 7 é a última que fazer-se pode.

Os numeros 2, 2, 2, 2, 3, 5, 7, são evidentemente todos os factores primarios de que se formárão os denominadores 4, 8, 12, 14, 15, 16. Se faço pois o producto d'esses factores primarios, terei o menor número divisivel por cada um dos denominadores dados; isto é, o menor dos denominadores communs, ao qual poderei trazer as fracções propostas.

Esse producto é 1680, que tomarei por denominador commum; e sôbre o qual operarei como nos casos precedentes.

Se eu seguido houvesse o geral methodo e tomado por commum denominador o producto de todos os denominadores, em vez de 1680, teria tido $1290240 = 1680 \times 768$: a simplificação é pois evidente.

REDUCÇÃO D'UMA FRACÇÃO A SEUS MENORES TERMOS.

III.

Primeiro methodo, pelas divisões successivas.—Para reduzir uma fracção a seus menores termos, divido o numerador e o denominador por 2, e continúo esta divisão tanto quanto ella ser pode feita exactamente nos dous termos.

Divido depois os dous termos por 3, quanto o podem ser exactamente, e faço o mesmo com os numeros primarios 5, 7, 11, 13, 17, 19, etc.

Se eu quizer reduzir a seus menores termos a fracção

$$\frac{630}{840}$$

Divido os dous termos por 2, e tenho $\frac{315}{420}$.

Não podendo a divisão por 2 ser mais feita exactamente, experimento por 3, e tenho $\frac{105}{140}$.

O denominador 140 não sendo divisivel por 3, ensaio a divisão por 5, e tenho $\frac{21}{28}$.

Nenhum mais dos termos é divisivel por 5; provo a divisão por 7, e tenho, para o valor da fracção $\frac{630}{840}$ reduzida á sua mais simples expres-

são, a fracção $\frac{3}{4}$. Esta fracção é dita irreduzivel, por não ser mais possivel dividir seus dous termos pelo mesmo número.

Segundo methodo, pelo maior divisor commum. — Quando dous numeros são divisiveis separadamente pelo mesmo número, digo que esse número é *commum divisor* dos dous outros. Assim, os numeros 2, 3, 6, que dividem separadamente 18 e 48, são communs divisores d'esses dous numeros.

O *maior divisor commum* dos dous numeros, é o maior dos numeros que os dividem separadamente. Assim, 6 sendo o maior dos numeros que dividem separadamente 18 e 48, é seu maior divisor commum.

Eis os principios nos quaes descança a busca do maior divisor commum :

1° *principio*. Qualquer divisor d'um número é tambem divisor dos multiplos d'esse número. Assim 6, que divide 18, divide 2 vezes 18, 3 vezes 18, etc. Com effeito, 18 é igual a 6 repetido um número inteiro de vezes; logo 2 vezes 18 é igual a 6 repetido um número de vezes dobrado, que é ainda um número inteiro de vezes. Mostraria eu igualmente que um multiplo qualquer de 18 é igual a 6 repetido um número inteiro de vezes; e, por conseguinte, é divisivel por 6.

2° *principio*. Qualquer número, que divide outros dous, tambem lhe divide a somma.

6 divide 24, e divide tambem 36; eu digo que elle dividirá 60, que é a somma de 24 e 36. Com effeito, 24 é igual a 6 repetido um número inteiro de vezes; logo 60 ou 24 mais 36, é igual a 6 repetido tantas vezes quantas entra em 24, mais tantas vezes quantas entra em 36; isto é 10 vezes; logo 60 é multiplo de 6; logo e divisivel por 6.

3° *principio*. Todo divisor commum com dous numeros divide-lhes a differença.

Os dous numeros 60 e 24 são divisiveis por 6; digo que sua differença 36 será tambem divisivel por 6; porque, se de 60, que contem 6 um número inteiro de vezes, tiro 24, que contem 6 um número inteiro de vezes, o resto 36 compor-se-ha evidentemente d'um número inteiro de vezes 6, e será, por conseguinte, divisivel por 6.

4° *principio*. O maior commum divisor entre dous numeros é o mesmo que o maior divisor commum entre o menor d'esses numeros e o resto de sua divisão.

Sejão os dous numeros 180 e 78.

$$\begin{array}{r|l} 180 & 78 \\ \cline{2-2} 24 & 2 \end{array}$$

Dividindo 180 por 78, obtenho por quociente 2 e por resto 24. Eu digo que o maior commum divisor entre 180 e 78 é o mesmo que o maior commum divisor entre 78 e 24. Com effeito

$$180 = 78 \times 2 + 24.$$

Ora todo número que divide 78, divide tambem 78×2 (primeiro principio); se de mais elle divide 180, dividirá 24, que é a differença de 180 e de 2 vezes 78 (3° principio); do qual todos os divisores communs a 180 e 78 são tambem divisores communs a 78 e a 24.

Reciprocamente, todos os divisores communs a 24 e a 78 dividem 24 e 78×2; elles dividirão por conseguinte 180, que é a somma de 78×2 e de 24 (1° e 2° principios); do qual todos os divisores communs a 78 e a 24 são tambem communs a 78 e a 180; logo elles são os mesmos; logo o maior commum divisor entre o dividendo 180 e o divisor 78 é o mesmo que o maior commum divisor 78 e o resto 24.

Regra do maior divisor commum. — Para achar o maior divisor commum entre dous numeros, divido o maior pelo menor; se não ha resto, o menor número é o maior commum divisor. Se ha um resto, divido o menor número por esse resto; se a divisão se faz exactamente, o primeiro resto é o maior divisor commum.

Se a 2ª divisão dá um novo resto, divido o 1º resto pelo 2º, e continúo a dividir sempre o ante-último resto pelo último, té que eu faça a divisão exactamente : então o último resto, empregado como divisor, será o maior divisor commum buscado.

Se o último resto for 1, os dous numeros não terão maior commum divisor, e serão ditos *primarios entre si.*

Applico esta regra aos dous numeros 1296 e 564 :

	2	3	2	1	4
1296	564	168	60	48	12
168	60	48	12	0	

Eu divido 1296 por 564; tenho por quociente 2 e por resto 168. Divido 564 por 168; tenho por quociente 3 e por resto 60. Divido 168 por 60; tenho por quociente 2 e por resto 48. Eu divido 60 por 48; tenho por quociente 1 e por resto 12. Eu divido 48 por 12; tenho por quociente 4 e por resto 0 : o maior commum divisor entre 1296 e 564 é pois 12.

Com effeito, segundo o 4º principio, 12 sendo

o maior divisor commum entre 12 e 48, é tambem o maior commum divisor entre 48 e 60; entre 60 e 168; entre 168 e 564; entre 564 e 1296.

Attento em escrever os quocientes por cima dos divisores, a fim de deixar logar para os restos successivos.

Se, entre os restos, houver um que seja número primario, e que não divida o resto precedente, os dous numeros serão primarios entre si; pois um número primario so tendo a si por divisor e a unidade, se esse resto não divide o resto precedente; e, por conseguinte, entre esses dous numeros propostos, quer dizer, que esses dous numeros não teem maior commum divisor.

Tomo para exemplo 3184 e 729.

	4	2	1
3184	729	268	193
268	193	75	

O resto 193 sendo um número primario e não dividindo o resto precedente, concluírei que 3184 e 729 são primarios entre si; isto é que não teem commum divisor, e a operação não irá mais longe.

Questionario. — Que se chama fracção? — Como se escrevem as fracções? — Como se chama o termo inferior e o termo superior? — Como se enuncia uma fracção? — Quaes são as excepções á regra? — A que é igual toda fracção da qual o numerador iguala o denominador?—Como se chama a fracção cujo numerador é maior que o denominador?—De quantas maneiras se pode considerar uma fracção? — Que mudança experimenta uma fracção quando se multiplica por um número inteiro seu numerador so? — Seu denominador so? — Seus dous termos? — Que mudança experimenta uma fracção quando se divide por um número inteiro seu numerador? — Seu denominador? — Seus dous termos?

Como se reduzem duas fracções ao mesmo denominador? — Esta reducção muda o valor das fracções?— Fazei a mesma reducção por outro modo? — Como se procede quando o maior denominador é divisivel por todos os outros? — Quando não é divisivel senão por alguns dos outros, ou que tem, com elles, factores communs?

Como se reduz uma fracção á mais simples expressão por divisões successivas? — Como se chamão os numeros que não são divisiveis senão por si mesmos e pela unidade? — Que é um commum divisor? — O maior commum divisor?— Quaes são os quatro principios sobre os quaes repousa a busca do maior commum divisor?—Demonstrai, 1° que todo divisor d'um número é divisor dos multiplos d'esse número; — 2° que todo número que divide outros dous, divide-lhe a somma; — 3° que todo divisor commum a dous numeros divide suas differenças; — 4° que o maior commum divisor entre dous numeros é o mesmo que o maior commum divisor entre o menor e o resto de sua divisão. — Qual é a regra para achar o maior commum divisor de dous numeros? — Applicai esta regra aos dous numeros 1296 e 364. — Qual é d'elles o maior divisor commum? — Como se reconhece que dous numeros não o teem? — Como os chamão então? — Em qual caso posso reconhecer, no curso da operação, que não ha commum divisor?

CALCULO DAS FRACÇÕES ORDINARIAS.

I.

Addição. — A addição das fracções apresenta dous casos.

1° Se as fracções teem o mesmo denominador, faço a somma dos numeradores, e dou a esta somma o denominador commum. Assim $\frac{2}{13}+\frac{3}{13}+\frac{5}{13}=\frac{10}{13}$.

Com effeito, o denominador não indica senão a especie das partes; essas partes sendo aqui as mesmas, trata-se somente de saber qual é o número total d'essas partes; o que acho fazendo a somma dos numeradores.

Se as fracções teem denominadores differentes, reduzil-as-hei ao mesmo denominador: ajunto os numeradores, e dou á sua somma o denominador commum.

Se eu quizer sommar as fracções $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{12}$, reduzo-as ao mesmo denominador o menor possivel, e tenho $\frac{24}{60}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{35}{60}$. Sommando os numeradores d'essas ultimas fracções, tenho 104. Assim, a somma buscada é $\frac{104}{60}$, que é um número fraccionario. Esse número sendo maior que a unidade, extrahir-lhe posso a parte inteira; o que farei dividindo o numerador pelo denominador, visto que ha tantas unidades em o número fraccionario quanto o denominador é contido de vezes em o numerador. O quociente indica o número d'unidades inteiras, e o resto, se houver um, colloca-se sob o denominador para formar uma fracção que ajunto á direita da parte inteira.

$$\begin{array}{r|l} 104 & 60 \\ \cline{2-2} 44 & 1 \end{array}$$

Aqui o quociente é **1**, e o resto **44**; tenho pois

$$\frac{104}{60} = 1\,\frac{44}{60}$$

Vêjo que 44 e 60 teem 4 pelo maior commum divisor, e que a fraccão $\frac{44}{60}$, reduzida á sua mais simples expressão, iguala $\frac{11}{15}$; tenho pois

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{4} + \frac{7}{12} = \frac{104}{60} = 1\,\frac{44}{60} = 1\,\frac{11}{15}$$

Para addicionar numeros inteiros juntos a fracções, faço a somma das fracções, extra-

hindo-lhes os inteiros para os juntar á somma dos numeros inteiros, e escrevo a fracção restante á direita da somma dos inteiros.

Se me propoem fazer a somma dos numeros $7\,\frac{1}{3}$, $8\,\frac{3}{4}$, $11\,\frac{13}{16}$.

$$\begin{array}{rcc} 7\,\frac{1}{3} & 16 & 16 \\ 8\,\frac{3}{4} & 12 & 36 \\ 11\,\frac{13}{16} & 3 & 39 \\ \hline 27\,\frac{43}{48} & & \frac{91}{48} \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right\} 48$$

Eu colloco os numeros uns sob os outros, as fracções debaixo das fracções, e os numeros inteiros sob os numeros inteiros. Reduzo ao mesmo denominador as tres fracções $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{13}{16}$: tómo por denominador commum 48, que é o menor número divisivel á uma por 3, 4 e 16, o qual colloco como acima se vê. Divido o denominador commum 48 pelo denominador **3** da 1ª fracção, e ponho o quociente 16 sobre a mesma linha que a 1ª fracção: eu faço a mesma operação com cada um dos outros denominadores; depois multiplico cada numerador pelo quociente que lhe corresponde, e colloco cada producto sôbre a mesma linha que o multiplicador: assim, para a 1ª fracção, multiplico o numerador **1** pelo quociente 16, e colloco o producto

16 sobre a mesma linha que o multiplicador 16. Feitas as tres multiplicações, ajunto os productos que são os numeradores das fracções reduzidas, e sua somma é o numerador da somma das fracções. Esta somma é $\frac{91}{48}$ ou 1 $\frac{43}{48}$. Eu accrescento 1 aos numeros inteiros, e tenho para a somma buscada 27 $\frac{43}{48}$.

III.

Subtracção das fracções. — Quando as fracções teem o mesmo denominador, tomo a differença dos numeradores, dando-lhe o denominador commum.

Se de $\frac{15}{22}$ diminuo $\frac{7}{22}$,

Tiro o menor numerador 7 do maior 15; a differença é 8, sob a qual colloco o denominador commum 22; tenho pois por resto $\frac{8}{22}$ ou $\frac{4}{11}$.

Se as duas fracções não teem o mesmo denominador, começarei por reduzil-as a elle; depois faço a differença dos numeradores, e dou-lhe o denominador commum.

Se de $\frac{5}{7}$ eu quizer diminuir $\frac{6}{11}$, reduzo essas fracções ao mesmo denominador, e ellas se tornarão $\frac{55}{77}$ e $\frac{42}{77}$; 55 − 42 = 13 : a differença das fracções é pois $\frac{13}{77}$.

Para subtrahir d'um número inteiro junto a uma fracção, outro número inteiro junto a uma fracção, reduzo as duas fracções ao mesmo denominador; diminuo a que pertence ao mais pequeno número da que está junto ao maior, depois deduzo o menor número do maior.

Se a fracção a diminuir fosse maior, eu ajuntaria á fracção superior uma unidade reduzida ao mesmo denominador, subtrahiria do novo numerador, assim formado, o numerador da fracção inferior, depois faria a diminuição dos numeros inteiros após augmentar com uma unidade o número inteiro inferior.

Se me propoem diminuir 7 $\frac{5}{6}$ de 15 $\frac{5}{7}$.

$$\begin{array}{ccc}
 & & \left.\begin{array}{c} 42 \\ \underline{18} \\ 60 \\ 35 \end{array}\right\} 42 \\
15\,\frac{5}{7} & 6 & \\
7\,\frac{5}{6} & 7 & \\
\hline
7\,\frac{25}{42} & & \frac{25}{42}
\end{array}$$

Eu disponho a operação como para a addição. Em consequencia da reducção das fracções ao mesmo denominador, vejo que tenho a diminuir $\frac{35}{42}$ de $\frac{18}{42}$, o que é impossivel. Empresto ao número 15 uma unidade, que vale $\frac{42}{42}$; ajunto 42 a 18, e tenho 60; deduzo 35 de 60, e tenho de resto o número 25, ao qual dou o denominador 42. Eu subtraho depois 7 augmentado d'um, de 15, e resta-me 7, ao qual ajunto $\frac{25}{42}$; o resto buscado é pois 7 $\frac{25}{42}$.

IV.

Multiplicação das fracções. — Multiplicar uma fracção por um número inteiro é tornar essa fracção tantas vezes maior quantas unidades ha em o número inteiro.

Multiplicar um número por uma fracção, é tomar d'esse número a parte indicada por esta fracção; assim, multiplicar um número por $\frac{3}{4}$ é tomar os $\frac{3}{4}$ d'esse número.

As multiplicações nas quaes um dos factores ao menos é uma fracção apresentão tres casos.

Primeiro caso. Para multiplicar uma fracção por um número inteiro, multiplico o numerador pelo número inteiro, e dou por denominador ao producto o denominador da fracção multiplicanda.

Se eu quizer multiplicar $\frac{7}{8}$ por 5, multiplico 7 por 5, e sob o producto 35 ponho o denominador 8; o producto é pois $\frac{35}{8}$ ou 4 $\frac{3}{8}$.

Com effeito, o producto deve ser 5 vezes maior que $\frac{7}{8}$; ora eu sei que uma fracção

volve-se 5 vezes maior multiplicando seu numerador por 5, sem tocar no denominador: logo $\frac{35}{8}$ ou 4 $\frac{3}{8}$ é o producto buscado.

Segundo caso. Para multiplicar um número inteiro por uma fracção, multiplico o número inteiro pelo numerador da fracção, e dou por denominador ao producto o denominador da fracção multiplicador.

Seja 5 a multiplicar por $\frac{7}{8}$. Multiplico 5 por 7, e dou por denominador ao producto 35 o denominador 8 da fracção multiplicador $\frac{7}{8}$; tenho pois para producto $\frac{35}{8}$ ou 4 $\frac{3}{8}$.

Com effeito, multiplicar 5 por $\frac{7}{8}$ é tomar os $\frac{7}{8}$ de 5; ora o 8º de 5 é $\frac{5}{8}$; 7 vezes o 8º de 5 são pois $\frac{35}{8}$ ou 4 $\frac{3}{8}$.

O producto 4 $\frac{3}{8}$ é evidentemente menor que o multiplicando 5; pois so é os $\frac{7}{8}$; mas é maior que o multiplicador $\frac{7}{8}$, que se volveu 5 vezes maior.

Assim, todas as vezes que o multiplicador é uma fracção propriamente dita, o producto é menor que o multiplicando.

Terceiro caso. Para multiplicar duas fracções uma por outra, faço o producto dos numeradores, e dou-lhe por denominador o producto dos dous denominadores.

Sejão a multiplicar $\frac{4}{5}$ por $\frac{7}{9}$

O producto dos numeradores é $4 \times 7 = 28$.

O producto dos denominadores é $5 \times 9 = 45$.

O producto das duas fracções é pois $\frac{4 \times 7}{5 \times 9} = \frac{28}{45}$.

Com effeito, multiplicar $\frac{4}{5}$ por $\frac{7}{9}$ é tomar os $\frac{7}{9}$ de $\frac{4}{5}$. Multiplicando por 9 o denominador de $\frac{4}{5}$, tenho a fracção $\frac{4}{5 \times 9}$ ou $\frac{4}{45}$, que é 9 vezes menor; e, por conseguinte, a 9ª parte de $\frac{4}{5}$; multiplicando o numerador 4 por 7, tomo 7 vezes o 9º ou os $\frac{7}{9}$ de $\frac{4}{5}$; e tenho $\frac{4 \times 7}{5 \times 9} = \frac{28}{45}$.

Aqui o producto $\frac{28}{45}$ é ainda menor que o multiplicando $\frac{4}{5}$, que vale $\frac{36}{45}$, e tambem menor que o multiplicador $\frac{7}{9}$, que vale $\frac{35}{45}$. Assim, o producto das duas fracções propriamente ditas é menor que qualquer d'ellas.

Nos tres casos da multiplicação, os factores que forem compostos d'um número inteiro junto a uma fracção, deverão ser reduzidos cada um a um so número fraccionario.

Depois farei a operação como foi indicado para cada caso.

Sejão $4\,\frac{5}{7}$ a multiplicar por $9\,\frac{3}{8}$.

Reduzo 4 em 7os, observando que uma unidade vale $\frac{7}{7}$, e que 4 unidades valem $\frac{4 \times 7}{7} = \frac{28}{7}$; $\frac{28}{7} + \frac{5}{7}$ fazem $\frac{33}{7}$; assim $4\,\frac{5}{7} = \frac{33}{7}$.

Acho da mesma sorte $9\,\frac{3}{8} = \frac{75}{8}$.

Logo $4\,\frac{5}{7} \times 9\,\frac{3}{8} = \frac{33}{7} \times \frac{75}{8} = \frac{2475}{56}$.

Fracções de fracções. — Chamão-se assim uma ou mais partes d'uma fracção dividida ella mesma em partes iguaes.

Assim, os $\frac{2}{3}$ de $\frac{5}{7}$ fórmão uma fracção de fracção, pois que exprimem 2 partes da fracção $\frac{5}{7}$, dividida ella mesma em 3 partes iguaes.

Noto que se eu tivesse a multiplicar $\frac{5}{7}$ por $\frac{2}{3}$, tomaria os $\frac{2}{3}$ de $\frac{5}{7}$: assim uma fracção de fracção avalia-se multiplicando as duas fracções uma pela outra. Os $\frac{2}{3}$ de $\frac{5}{7}$ valem pois $\frac{2 \times 5}{3 \times 7} = \frac{10}{21}$.

Para achar os $\frac{2}{3}$ dos $\frac{5}{7}$ dos $\frac{3}{4}$ de 7, considero 7 como igual ao número fraccionario $\frac{7}{1}$. Tomo primeiramente os $\frac{3}{4}$ de $\frac{7}{1}$ que são iguaes a $\frac{3}{4} \times \frac{7}{1}$ ou a $\frac{21}{4}$; depois tomo os $\frac{5}{7}$ de $\frac{21}{4}$, que dão $\frac{5 \times 21}{7 \times 4} = \frac{105}{28}$; emfim, tomo os $\frac{2}{3}$ de $\frac{105}{28}$, que dão $\frac{2 \times 105}{3 \times 28} = \frac{210}{84} = 2\,\frac{42}{84} = 2\,\frac{1}{2}$.

Em geral, para aviliar fracções de fracções, fazemos o producto de todos os numeradores, e dividimol-o pelo producto dos denominadores.

Quando avaliâmos fracções de fracções, e, em geral, nas operações sôbre as fracções, devemos logo indical-as a fim de as poder simplificar, supprimindo os factores communs ao numerador e ao denominador.

Assim, no exemplo precedente tenho, indicando os calculos, $\frac{2}{3}$ dos $\frac{5}{7}$ de $\frac{3}{4}$ de $7 = \frac{2 \times 5 \times 3 \times 7}{3 \times 7 \times 4 \times 1}$.

Véjo que os factores 3 e 7 são communs ao numerador e ao denominador, e que o 2 do numerador é factor do 4 que pertence ao denominador; do que se segue que $\frac{2\times5\times3\times7}{3\times7\times4\times1} = \frac{5}{2}$ $= 2\frac{1}{2}$.

D'este modo cheguei, quasi sem calculos, ao resultado obtido precedentemente por operações assaz longas.

V.

Divisão das fracções. — A divisão das fracções apresenta tres casos.

Primeiro caso. Para dividir uma fracção por um número inteiro, multiplico o denominador pelo número inteiro, sem mudar o numerador.

Seja a dividir $\frac{5}{7}$ por 8.

Multiplico 7 por 8, e ponho o producto 56 sob o numerador 5, e dá-me $\frac{5}{56}$.

Com effeito, multiplicando o denominador por 8, eu volvo a fracção 8 vezes menor, e, por conseguinte, divido-a em 8 partes iguaes.

Segundo caso. Para dividir um número inteiro por uma fracção, multiplico-o pela fracção divisor voltada.

Seja 8 a dividir por $\frac{5}{7}$, eu vólto a fracção $\frac{5}{7}$; ponho o numerador no logar do denominador, e reciprocamente, e dá $\frac{7}{5}$; depois multiplico 8

por $\frac{7}{5}$; o producto $\frac{56}{5}$ ou $11\frac{1}{5}$ é o quociente buscado.

Com effeito, dividir 8 por $\frac{5}{7}$, é buscar um número que, multiplicado por $\frac{5}{7}$, reproduza 8, isto é, um número cujos $\frac{5}{7}$ sejão 8. Pois que os $\frac{5}{7}$ do quociente buscado são 8, um so setimo será cinco vezes mais pequeno que 8, ou igual a $\frac{8}{5}$. Tendo $\frac{1}{7}$ do quociente, obterei com elle os $\frac{7}{7}$ ou o quociente mesmo repetindo 7 vezes um setimo ou $\frac{8}{5}$; pois este quociente será $\frac{8\times7}{5}$ ou $8\times\frac{7}{5}$, isto é o dividendo multiplicado pela fracção voltada.

Terceiro caso. Para dividir uma fracção por outra, multiplico a fracção dividendo pela fracção divisor voltada.

Sejão a dividir $\frac{7}{8}$ por $\frac{5}{9}$.

Eu vólto a fracção $\frac{5}{9}$ e tenho $\frac{9}{5}$; depois multiplico $\frac{7}{8}$ por $\frac{9}{5}$; o producto $\frac{63}{40}$ ou $1\frac{23}{40}$ é o quociente buscado.

Com effeito, dividir $\frac{7}{8}$ por $\frac{5}{9}$, é buscar um número que, multiplicado por $\frac{5}{9}$, reproduza $\frac{7}{8}$, isto é, um número cujos $\frac{5}{9}$ sejão $\frac{7}{8}$. Pois que os $\frac{5}{9}$ do quociente buscado igualão $\frac{7}{8}$, um so nono será cinco vezes mais pequeno que $\frac{7}{8}$ ou igual a $\frac{7}{8\times5}$. Tendo $\frac{1}{9}$ do quociente, obterei com elle os $\frac{9}{9}$ ou o quociente mesmo, repetindo 9 vezes um nono ou $\frac{7}{8\times5}$; o quociente será pois $\frac{7\times9}{8\times5}$, isto é, a fracção dividendo multiplicada pela fracção divisor voltada.

Se os termos da divisão fôssem numeros inteiros juntos a fracções, eu reduzil-os-hia, cada qual, em um so número fraccionario, e operaria depois como disse.

Sejão a dividir $5\frac{7}{8}$ por $3\frac{2}{3}$.

Tenho $5\frac{7}{8} = \frac{47}{8}$, e $3\frac{2}{3} = \frac{11}{3}$;

Assim, $5\frac{7}{8} : 3\frac{2}{3} = \frac{47}{8} : \frac{11}{3} = \frac{47}{8} \times \frac{3}{11} = \frac{141}{88} = 1\frac{53}{88}$.

VI.

Reducção das fracções ordinarias a fracções decimaes, e reciprocamente. — Sejão $\frac{7}{8}$ a reduzir a fracções decimaes : sei que $\frac{7}{8}$ podem ser considerados como resultado da divisão de 7 unidades em 8 partes iguaes, ou como o quociente do seu numerador dividido pelo seu denominador. D'onde resulta que, para reduzir uma fracção a decimaes, basta que eu divida o numerador pelo denominador, convertendo o numerador e os restos successivos em decimos, centesimos, etc.

$$\begin{array}{r|l} 70 & 8 \\ \cline{2-2} 60 & \\ 40 & 0{,}875 \end{array}$$

Assim, $\frac{7}{8} = 0{,}875$.

Quando não posso fazer exactamente a operação, continúo-a até que tenho no quociente a ordem de decimaes na qual parar quero.

Para converter uma fracção decimal em fracção ordinaria, escrever devo a fracção decimal como um número inteiro, e dar-lhe por denominador a unidade seguida de tantos zeros quantos são os algarismos decimaes.

Assim, e évidente que :

$$0{,}7 = \frac{7}{10};\ 0{,}25 = \frac{25}{100};\ 3{,}187 = \frac{3187}{1000}.$$

Questionario. — Quantos casos ha na addição das fracções? — Qual é a regra para juntar-mos as fracções que teem o mesmo denominador ? — Que teem denominadores differentes ? — Como se extrahem unidades inteiras dos numeros fraccionarios? — Como se addicionão numeros inteiros juntos a fracções ?

Como se faz a subtracção das fracções que teem o mesmo denominador ? — Que teem denominadores differentes ? — Qual regra seguimos para deduzir d'um número inteiro junto a uma fracção outro número inteiro junto a uma fracção ? — Que fazemos quando a fracção a subtrahir é maior ?

Que é multiplicar uma fracção por um número inteiro? — Um número inteiro por uma fracção ? — Quantos casos apresenta a multiplicação das fracções ? — Qual é a regra para multiplicar-mos uma fracção por um número inteiro ? — Qual é a regra para multiplicar-mos um inteiro por uma fracção ? — N'esse caso, o producto é maior ou menor que o multiplicando ? — Qual é a regra para multiplicar-mos uma fracção por outra ? — O producto é mais pequeno ou maior que o multiplicando? — Que o multiplicador? — Como operâmos nos tres casos de multiplicação, quando os factores encerrão um número inteiro junto a uma fracção? — Que chamão fracções de fracções? — Que regra seguimos para avaliar fracções de fracções? — Nas operações sobre as fracções, que devemos fazer antes d'effeituar os calculos?

Quaes são os tres casos das divisões das fracções? — Como se divide uma fracção por um inteiro? — Um inteiro por uma fracção? — Uma fracção por outra? — Quando o divisor é fracção, o quociente é menor ou maior que o dividendo? — Como fazemos a divisão, quando o dividendo e o divisor são numeros inteiros juntos a fracções?

Como reduzimos uma fracção ordinaria em fracção decimal? — Como podemos converter uma fracção decimal em fracção ordinaria?

NUMEROS COMPLEXOS.

I.

Definições preliminares. — Numeros complexos são os cujo systema de decomposição não é decimal, e cujas subdivisões não estão sujeitas a uma mesma base. As principaes medidas complexas em uso em Portugal e no Brasil são as do tempo, do circulo, de comprimento, de capacidade e peso.

Assim o *dia*, tempo que a terra põe a gyrar sôbre si mesma, divide-se em 24 *horas*, a hora em 60 *minutos*, o minuto em 60 *segundos*.

A circumferencia do circulo é uma linha curva cujos pontos são igualmente distantes d'um ponto interior chamado centro.

Qualquer circumferencia de circulo, grande ou pequena, divide-se em 360 partes iguaes chamadas *graos*; o *grao* em 60 *minutos*, o minuto em 60 *segundos*, o segundo em 60 *terços*, etc. O grao, o minuto, o segundo, o terço de grao, etc., se marcão assim: °, ', '', ''', etc., para distinguil-os de minuto, segundo e terço do tempo.

A principal medida de comprimento é a *braça*; a qual se divide em 10 *palmos craveiros*, e o palmo em 8 polegadas.

As medidas de capacidade são: para as cousas seccas, o *moio*, contendo 15 *fangas*, a fanga 4 *alqueires*, e o alqueire 4 *quartas*; para os liquidos é a *pipa*, dividindo-se em 25 *almudes*, o almude em 12 *canadas*, e a canada em 4 *quartilhos*. Essas medidas varião, quanto á capacidade, segundo as localidades.

A unidade de peso é a *libra* ou *arratel*, que se divide em 2 *marcos*, o marco em 8 *onças*, a onça em 8 *oitavas*, a oitava em 3 *escropulos*, o escropulo em 24 *grãos*.

Para cousas de peso consideravel emprega-se o *quintal*, que se divide em 4 *arrobas*, e a arroba em 32 *arrateis*.

Assim, segundo a definição, 25 dias 3 horas 36 minutos é um número complexo.

Os numeros complexos podem exprimir-se em numeros incomplexos ou em fracções que exprimem um certo número de partes da unidade principal; e, reciprocamente, uma expressão fraccionaria em número complexo.

Assim, considerâmos o número 25 dias 3 horas 36 minutos : o dia constando de 24 horas, 25 dias conterão 25 vezes 24 horas; multiplico pois 24 por 25, e reduzo assim os 25 dias em horas; ajuntando as 3 horas que encerra o número proposto, obtenho 603 horas. Reduzo do mesmo modo 603 horas em minutos, multiplicando 603 por 60, visto que uma hora tem 60 minutos, e accrescentando ao producto os 36 minutos que encerra o número proposto, terei por resultado pedido 36216 minutos.

Agora pois que 1 dia tem 24 horas, e 1 hora 60 minutos, o dia conterá 24 vezes 60 minutos $=1440$ minutos; e, por conseguinte, o minuto é a 1440ª parte do dia; logo 36216^{m} valerão $\frac{36216 \text{ d.}}{1440}$.

Reciprocamente, seja a expressão fraccionaria $\frac{658 \text{ d.}}{45}$ a reduzir a número complexo. Eu

divido o numerador pelo denominador; o que dá 14 dias e 18 dias de resto, que eu reduzo a horas, multiplicando por 24; obtenho assim 432 horas que divido ainda por 45; alcanço 9 horas no quociente e 27 horas de resto, que reduzo a minutos, multiplicando por 60, o que dá 1620 minutos, os quaes divido similhantemente por 45, e tenho 36 minutos no quociente; a expressão fraccionaria $\frac{658 \text{ d.}}{45}$ reduz-se pois a $14^{d}\ 9^{h}\ 36^{m}$.

O calculo dos numeros complexos póde pois ser reconduzido ao calculo das fracções ordinarias.

II.

Addição de numeros complexos. — Para fazer a addição dos numeros complexos, escrevo as unidades da mesma especie umas por baixo das outras, substituindo com zeros as que faltão; depois começo a somma pelas menores unidades. Se a somma das unidades inferiores não contem uma unidade da ordem immediatamente superior, escrevo-a; se ella contem uma ou muitas d'essas unidades, extraho-as, e so escrevo o excedente, se o houver, e guardo essas unidades para ajuntal-as ás unidades immediatamente superiores.

Appliquemos esta regra ao seguinte exemplo :

27 moios	12 fangas	3 alqueires	2 quartas.
45	13	1	1
9	9	2	3
6	7	3	3
89	13	3	1

A somma das quartas é de 9, ou 2 alqueires e 1 quarta; escrevo 1 quarta e guardo os dous alqueires para juntal-os á columna seguinte.

A columna dos alqueires augmentada dos 2 que guardei, dá por somma 11 alqueires ou 2 fangas 3 alqueires. Escrevo os 3 alqueires e accrescento as 2 fangas á columna seguinte.

A somma das fangas é 43, ou 2 moios 13 fangas : escrevo as 13 fangas, e guardo os 2 moios para a columna seguinte.

Opéro ácerca dos moios como ácerca dos numeros inteiros ordinarios, e tenho por somma 89.

A somma total é pois

$$89^{m}\ 13^{f}\ 3^{alq}\ 1^{q}.$$

III.

Subtracção dos numeros complexos.— Para fazer a subtracção dos numeros complexos, escrevo o menor número sob o maior, attentando em collocar as unidades da mesma ordem umas debaixo das outras. Subtraho successivamente cada número inferior de seu correspondente superior, começando pelas mais pequenas unidades, e escrevendo cada differença por baixo.

Quando um número inferior é maior que seu correspondente superior, augmento este último com tantas unidades quantas são necessarias para formar uma unidade da ordem immediatamente superior; faço depois a subtracção; e quando chego ao número seguinte, diminuo o número superior d'uma unidade.

Se eu me proponho de diminuir 4 braças 5 palmos 7 polegadas, de 8 braças 3 palmos 3 polegadas,

8^{b}	3^{p}	3^{pol}
4	5	7
3	7	4

como não posso diminuir 7^{pol} de 3^{pol}, empresto ao algarismo 3 um palmo, que vale 8 polegadas; as quaes, juntas aos 3^{pol}, fazem 11. Então diminuo 7 de 11, e restão 4, que escrevo por baixo. O algarismo 3 dos palmos é reduzido a 2. Passando aos palmos, não posso tirar 5 de 2; eu empresto ás 8^{b} uma braça, que vale 10 palmos; os quaes, juntos aos 2, dão 12^{p}; então diminúo 5 de 12, e restão 7, que escrevo por baixo; e, emfim, diminuindo 4 de 7, restão 3.

O resto buscado é pois $3^{b}\ 7^{p}\ 4^{pol}$.

As provas da addição e subtracção dos numeros complexos se fazem d'um modo analogo á dos numeros inteiros.

IV.

Multiplicação dos numeros complexos. — Apresenta a multiplicação dos numeros complexos dous casos: o número complexo é multiplicando ou é multiplicador.

Quando o número complexo é multiplicando, o multiplicador so pode ser um número inteiro decimal. Começâmos a multiplicação pelas unidades inferiores; buscâmos quanto esse producto contem unidades da ordem immediatamente superior, escrevemos o excedente se o houver,

e guardâmos as unidades superiores para junta-as ao producto seguinte, continuando da mesma sorte.

Se eu quizer multiplicar

	7^{mezes}	5^{d}	8^{h}	15^{m}
por	6			
3^{a}	7^{m}	2^{d}	1^{h}	30^{m}

Começo a multiplicação pelos minutos, dizendo: 6 vezes 15 são 90, ou 1 hora 30 minutos; escrevo 30 minutos e guardo 1 hora.

6 vezes 8 horas fazem 48, e 1 que guardei 49, ou 2 dias 1 hora: escrevo 1 hora, e guardo 2 dias.

6 vezes 5 dias fazem 30, e 2 que guardei 32, ou 1 mez 2 dias: escrevo 2 dias, e guardo 1 mez.

6 vezes 7 mezes fazem 42, e 1 que guardei 43, ou 3 annos 7 mezes, que escrevo.

O producto é pois $3^{a}\ 7^{m}\ 2^{d}\ 1^{h}\ 30^{m}$.

Quando o número complexo é multiplicador, multiplicâmos primeiramente o multiplicando pelas mais fortes unidades do multiplicador, depois tomâmos metade, o terço, o quarto, etc., do multiplicando, segundo for a ordem a metade, o terço, o quarto, etc., da unidade immediatamente superior; eis o que se chama operar pelas partes aliquotas. Exemplo :

Uma pessoa paga 36 $ 000 por anno de juro por uma somma : quanto deve ella ao cabo de 4 annos 10 mezes 25 dias? Resposta : 176$500 r^s.

	36 $	000 reis.
	$4^a\ 10^m\ 25^d$	
O producto por 4 annos..... =	144,	000
Por 6 mezes, metade d'um anno.................. =	18,	000
Por 3 mezes, metade de 6 mezes =	9,	000
Por 1 mez, terço de 3^m ou de 9$000.................. =	3,	000
Por 15 dias, metade de 1 mez ou 3$000.............. =	1,	500
Por 10 dias, terço de 1 mez ou de 3$000.............. =	1,	000
Tenho para producto total.	176,	$ 500 r^s.

V.

Divisão dos numeros complexos. — A divisão dos numeros complexos apresenta dous casos : o número complexo é dividendo ou divisor.

Quando o número complexo é dividendo, o

divisor é um número inteiro decimal; n'esse caso fazemos a divisão começando pelas mais fortes unidades : se ha um resto, convertel-o-hemos em unidades immediatamente inferiores, accrescentando-lhe as que poderião achar-se no dividendo, e converteremos da mesma sorte cada resto até que cheguemos ás menores unidades. Exemplo :

5 meninos teem juntos 43 annos 11 mezes 15 dias : qual é o medio de sua idade? Resposta : 8 annos 9 mezes 15 dias.

43^a	11^m	15^d	5
3 annos			8^a 9^m 15^d
× 12 mezes			
47 mezes			
2 mezes			
× 30 dias			
75 dias			

Eu divido 43 annos por 5; tenho por quociente 8 annos, e por resto 3; reduzo os 3 annos a mezes, multiplicando 3 por 12; tenho 36, e 11 do dividendo fazem 47 mezes; divido 47 mezes por 5; tenho 9, e de resto 2 mezes; reduzo-os a dias, multiplicando 2 por 30; tenho 60 dias, e 15 do dividendo fazem 75 dias, que divido por 5; eu acho 15 dias por quociente.

Quando o número complexo é divisor, reduzimil-o a unidades da menor especie; depois multiplicâmos o dividendo pelo número necessario d'unidades da mais pequena especie, para fazer uma unidade principal. Exemplo :

Uma pessoa pagou 176$500 rs de juros por uma somma que ella guardou durante 4 annos 10 mezes 25 dias : quanto pagava ella por anno? Resposta : 36$000 rs.

Eu reduzo os annos e os mezes em dias.

$$4^{a} \times 12^{m} = 48^{m} + 10^{m} = 58^{m}.$$

$$58^{m} \times 30^{d} = 1740 + 25^{d} = 1765 \text{ dias}.$$

Eu multiplico a somma pelo número de dias do anno :

$$176\$500 \times 360^{d} = 63{,}540\$000 \text{ r}^{s}.$$

$63{,}540{,}000 \text{ r}^{s} : 1765^{d} = 36{,}000 \text{ r}^{s}$, juro d'um anno.

Questionario. — Que é número complexo? — Que é dia e como o dividem? — Como se dividem as circumferencias? — Que é grao, minuto e segundo de grao? — Qual é a principal medida de comprimento e quaes são suas divisões? — Quaes são as medidas de capacidade e quaes são suas divisões? — Qual é a unidade do peso, e quaes são suas divisões? — Que é quintal, arroba e arratel? — Podemos reduzir um número complexo em expressão fraccionaria, e uma expressão fraccionaria em

número complexo? — Não póde o calculo dos numeros complexos ser reconduzido ao calculo das fracções ordinarias? — Como se faz a addição dos numeros complexos? — Applicai a regra a um exemplo? — Como se faz a subtracção dos numeros complexos? — Dai um exemplo? — A multiplicação dos numeros complexos não apresenta ella alguns casos? — Dizei esses dous casos? — Fazei uma operação segundo o primeiro caso. — Conforme ao segundo. — A divisão dos numeros complexos apresenta ella tambem alguns casos? — Dizei o primeiro caso e dai um exemplo? — Dizei o segundo caso e dai um exemplo?

SEGUNDA PARTE.

APPLICAÇÕES.

PROBLEMAS RESOLVIDOS MEDIANTE AS QUATRO REGRAS.

I.

Regra de tres simples. — Problemas que podem resolver-se com ajuda de uma multiplicação ou divisão.

Primeiro problema. — Um covado de panno custou 2 \$ 400 rs, qual é o preço de 3 covados 7 decimos? Multiplico 2,400, preço do covado, pelo número dos covados 3,7; o producto 8 \$ 880 rs será o preço pedido.

Segundo problema. — Um covado de panno custou 2 \$ 540, quantos covados de panno terei por 9 \$ 398 rs?

O preço 2 \$ 540 rs d'um covado de panno multiplicado pelo número de covados pedido, devendo produzir 9 \$ 398, vejo que esse último número é o dividendo d'uma divisão da qual o divisor é 2 $ 540 rs; é necessario pois dividir 9,398 por 2,540; o quociente é 3,7. Tenho pois 3 covados 7 decimos de panno por 9 $ 398 rs.

Problemas nos quaes, sendo dados tres numeros, trata-se d'achar um quarto, effeituando uma divisão e uma multiplicação. (Esses problemas são de genero dos que se chamão *regras de tres simples*, quando se lhes applicão proporções.)

Terceiro problema. — 4 obreiros fizerão 20 braças de obra; quantas braças farão 9 obreiros durante o mesmo tempo?

Se 4 obreiros fizerão 20 braças de obra, um obreiro faria o quarto de 20 b. ou $\frac{20\text{ b.}}{4}$; os 9 obreiros farão pois 9 vezes $\frac{20\text{ b.}}{4}$ ou $\frac{20\text{ b.}\times 9}{4}$ ou 5×9 ou 45 b.

Bem se vè que so indicàmos as operações até chegar-mos ás que devem dar-nos o resultado. Ja insistimos sôbre este modo de proceder, o qual permitte, antes d'effeituar-mos os calculos, supprimir os factores communs ao numerador e ao denominador do resultado.

N'este $\frac{20\times 9}{4}$ vemos que $\frac{20}{4} = 5$, e que $5 \times 9 = 45$; chegâmos assim mais depressa ao resultado que se fizessemos a multiplicação de 20 por 9, e dividissemos o producto 180 por 4.

Quarto problema. — Tres obreiros fizerão

uma obra em 15 horas: quantas horas gastarão 5 obreiros para executar a mesma obra?

Ja que 3 obreiros fizerão a obra em 15 horas, um so obreiro faria a mesma obra em tres vezes mais tempo; isto é em 15×3; os 5 obreiros porão 5 vezes menos tempo que um obreiro a executar a mesma obra; elles farão pois a obra em $\frac{15\text{ h.}\times 3}{5} = 3\text{ h.} \times 3 = 9$ horas.

II.

Regra de tres composta. — *Quinto problema.* — 2 obreiros, trabalhando 3 h. por dia, fizerão em 5 dias 90 braças de obra: quanto 3 obreiros, trabalhando 7 horas por dia, farão da mesma obra em 2 dias?

2 obreiros, trabalhando 3 horas por dia, fazem em 5 dias 90 braças.

1 obreiro, trabalhando 3 horas por dia, faz em 5 dias metade de 90 b. ou $\frac{90\text{ b.}}{2}$.

3 obreiros, trabalhando 3 horas por dia, fazem em 5 dias 3 vezes $\frac{90\text{ b.}}{2}$ ou $\frac{90\text{ b.}\times 3}{2}$.

3 obreiros, trabalhando 1 hora por dia, fazem em 5 dias o terço de $\frac{90\text{ b.}\times 3}{2}$ ou $\frac{90\text{ b.}\times 3}{2\times 3}$.

Logo 3 obreiros, trabalhando 7 horas por dia, fazem em 5 dias 7 vezes $\frac{90\text{ b.}\times 3}{2\times 3}$ ou $\frac{90\text{ b.}\times 3\times 7}{2\times 3}$.

3 obreiros, trabalhando 7 horas por dia, fazem em 1 dia o 5º de $\frac{90\text{ b.}\times 3\times 7}{2\times 3}$ ou $\frac{90\text{ b.}\times 3\times 7}{2\times 3\times 5}$.

3 obreiros, trabalhando 7 horas por dia, fazem em 2 dias 2 vezes $\frac{90\text{ b.}\times 3\times 7}{2\times 3\times 5}$ ou $\frac{90\text{ b.}\times 3\times 7\times 2}{2\times 3\times 5}$.

Supprimindo os factores 2 e 3, communs aos dous termos d'esta ultima fracção, e dividindo 90 pelo factor 5 que pertence ao denominador, o número de braças buscado reduz-se a 18 b. $\times$ 7 = 126 braças.

III.

Regra de companhia ou de sociedade. — Chama-se assim esta regra, porque serve a dividir entre alguns socios, o lucro ou a perda que resulta de sua sociedade.

O lucro ou a perda de cada socio depende da sua somma de fundo e do tempo durante o qual esta somma ficou na sociedade.

Sexto problema. — As sommas dos tres socios são 300 $\$$ 000 rs, 500 $\$$ 000 rs e 700 $\$$ 000 rs, o total do lucro é 4.500 $\$$ 000 rs, qual é o ganho de cada socio?

Ajunto as tres sommas, e tenho 1.500 $\$$ 000 visto que 1.500 $\$$ 000 produzem 4.500 $\$$ 000 rs de lucro.

1 $\$$ 000 rs produzirá $\frac{4\,500\,000}{1\,500\,000}$ rs ou 3 $\$$ 000 rs.

O 1º socio poz 300 $\$$ 000 rs; seu ganho será de 3 $\$$ 000 rs $\times$ 300 $\$$ 000 rs = 900 $\$$ 000 rs.

O 2º socio poz 500 $\$$ 000 rs; seu ganho será de 3 $\$$ 000 rs $\times$ 500 $\$$ 000 rs = 1.500 $\$$ 000 rs.

O 3º socio poz 700 $\$$ 000 rs; seu ganho será de 3 $\$$ 000 rs $\times$ 700 $\$$ 000 rs = 2.100 $\$$ 000 rs.

Total..... 4.500 $\$$ 000 rs.

Septimo problema. — As sommas dos tres socios são 100 $\$$ 000 rs, 250 $\$$ 000 rs e 50 $\$$ 000 rs; a 1ª somma ficou 3 mezes na sociedade; a 2ª 2 mezes; e 3ª 14 mezes : o beneficio total é 4.500 $\$$ 000 rs. Pede-se o ganho relativo a cada somma.

100 $\$$ 000 rs collocados durante 3 mezes produzem tanto como 3 vezes 100 $\$$ 000 rs ou 300 $\$$ 000 rs collocados durante 1 mez.

250 $\$$ 000 rs collocados durante 2 mezes produzem tanto como 2 vezes 250 $\$$ 000 rs ou 500 $\$$ 000 rs durante 1 mez.

50 $\$$ 000 rs collocados durante 14 mezes produzem tanto como 14 vezes 50 $\$$ 000 rs ou 700 $\$$ 000 rs collocados durante 1 mez.

O total das sommas collocadas durante 1 mez é 1.500 $\$$ 000 rs; a somma a repartir é 4.500 $\$$ 000 rs; visto que por 1.500 $\$$ 000 rs de somma collocada, temos 4.500 $\$$ 000 rs de lucro.

Por 1 $\$$ 000 rs tenho $\frac{4\,500\,000}{1\,500\,000}$ rs ou 3 $\$$ 000 rs.

O 1º socio por 300 $ 000 rs
terá 3 $ 000 rs × 300 $ 000 rs ou 900 $ 000 rs.
O 2º socio por 500 $ 000 rs
terá 3 $ 000 rs × 500 $ 000 rs ou 1.500 $ 000 rs.
O 3º socio por 700 $ 000 rs
terá 3 $ 000 rs × 700 $ 000 rs ou 2.100 $ 000 rs.

Total..... 4.500 $ 000 rs.

IV.

Regra de juros. — *Juro* é o lucro que se dá pelo uso do dinheiro ao que empresta qualquer quantia : é uma retribuição que o emprestador exige do que pede emprestado para compensar as vantajens de que elle gozaria fazendo elle mesmo valer seus fundos. A somma emprestada chama-se *capital* ou *principal*.

Para regular-mos o juro, convimos ordinariamente do lucro que produz uma somma de 100 $ 000 rs no prazo d'um anno. Esse lucro é a *taxa do juro*. Por exemplo, quando 100 $ 000 rs produzem 5 $ 000 rs de lucro cada anno, dizemos que a taxa do juro é 5 por 100 cada anno, ou simplesmente que o dinheiro é a 5 p. 0/0 (5 por 100).

O *juro legal* para os particulares é de 5 por 100; e para os negociantes, de 6 por 100.

Ha dous generos de juros : juro *simples* e juro *composto*.

O juro é simples quando o capital fico o mesmo em quanto dura o emprestimo.

Quando o juro se junta ao capital para depois produzir juro, dizemos que o juro é composto ou que temos respeito aos *juros dos juros*.

Bom é saibâmos que nos calculos relativos aos juros, suppômos que todos os mezes são compostos cada um de 30 dias, e que o juro d'um dia é a 360a parte do de um anno. Entretanto, quando calculâmos os juros em razão d'um número de dias decorridos, é admittido ser o anno composto de 365 dias.

A regra de juros tem logar quando se nos dá um capital e a taxa do seu juro por anno, e se nos pede o juro; ou dado este e a taxa, se nos pede o capital; ou dado este e o juro, se nos pede a taxa.

Para achar o juro annual d'um capital qualquer a uma taxa dada, multiplique-se o capital pela taxa, e divida-se o producto por 100. Quando o juro é 5 p. 0/0, basta tomarmos o 20º do capital.

Para achar o juro d'uma quantia para um número de dias dados, a uma taxa dada, multiplique-se o capital pela taxa, depois este primeiro producto pelo número de dias, e divida-se o producto total por 36000.

Para achar o capital, conhecendo o juro annual e a taxa, multiplique-se o juro por 100, e divida-se o producto pela taxa.

Para achar a taxa, conhecendo o capital e o juro annual, multiplique-se o juro por 100, e divida-se o producto pelo capital.

V.

Problemas sôbre os juros simples. — *Oitavo problema.* — Calcular quanto um capital de 4.800\$000 reis valerá em 3 annos, a 5 por 100 cada anno.

Solução. — O juro de 4.800\$000 rs sendo cada anno o 20° de 4.800\$000 rs ou 240\$000 rs, os 4.800\$000 rs produzirão em tres annos o triplo de 240\$000 rs, ou 720\$000 rs. Assim, ao cabo de tres annos os 4.800\$000 rs valerão 4.800\$000 rs + 720\$000 rs = 5.520\$000 rs.

Nono problema. — Quanto 4.800\$000 rs valerão em 3 annos 4 mezes ou em 40 mezes?

Solução. — 4.800\$000 rs produzirão :

Em 12 mezes, o 20° de 4.800\$000 rs ou 240\$000 rs.

Em 1 mez o 12° de 240\$000 rs ou 20\$000 rs.

Em 40 mezes, 40 vezes 20\$000 rs, ou 800\$000 rs.

Decimo problema. — Qual é o juro a 6 por 0/0 por anno de 1.200\$000 rs durante 3 annos?

100\$000 rs produzem n'um anno 6\$000.

1\$000 rs produz n'um anno $\frac{6000}{100}$ rs.

1\$000 rs produz em 3 annos 3 vezes $\frac{6000}{100} = \frac{6000\times3}{100} = \frac{6000\times3\times1200000}{100} = 216{,}000$.

Undecimo problema. — Qual é o capital que produz 76\$000 rs a 4 p. 0/0?

Solução. — Visto que 4\$000 rs são o juro annual de 100\$000 rs, 1\$000 rs o será de $\frac{100\,000}{4}$ rs, e 76\$000 rs de $\frac{100\,000}{4} \times$ 76\$000 $= \frac{76\,000\times100}{4} =$ 1.900\$000 rs.

O capital pedido é 1.900\$000 rs.

Duodecimo problema. — A que taxa ou razão deve estar o dinheiro comprando apólice 5 por 0/0 a 105\$000 reis?

A apólice a 5 por 0/0 sendo a 105\$000 rs, 105\$000 rs produzem cada anno 5\$000.

1\$000 rs produz cada anno $\frac{5000}{105000}$.

100\$000 rs produzem por anno $\frac{5000\times100}{105\,000} =$ 4\$761 rs.

A taxa do dinheiro é o que produzem 100\$000 rs n'um anno : logo a taxa de nosso dinheiro esta 4\$761 rs ou 4 3/4, como se diz commummente.

VI.

Regra de desconto. — O *desconto* é a retenção que fazer devemos sôbre o valor d'uma letra pagavel após certo tempo, quando tocar queremos essa letra antes do seu vencimento.

Distinguimos dous generos de desconto: 1° o desconto *interior*, que é igual á differença entre a somma anunciada na letra e o actual valor d'esta somma em dinheiro corrente; isto é, no juro simples do valor actual do capital; 2° o *desconto exterior*, que é o juro tomado sôbre a somma annunciada na letra; isto é, sôbre o capital augmentado co'os juros; e a qual, por conseguinte, abrange o juro do valor actual do capital, mais o juro d'este juro.

Por exemplo, se o dinheiro é a 5 por 0/0, 100 $ 000 rs correntes valem 105 $ 000 rs ao cabo d'um anno. Uma letra de 105 $ 000 rs pago n'um anno, so vale 100 $ 000 rs em dinheiro de contado : elle deve pois experimentar uma retenção de 105 $ 000 rs menos 100 $ 000 rs quando recebel-o queremos instantaneamente. O desconto interior de 105 $ 000 rs é pois de 5 $ 000 rs.

Pelo desconto exterior, diremos :

O desconto de 100 $ 000 rs é 5 $ 000 rs.

O desconto de 1 $ 000 rs é $\frac{5}{100}$ ou $\frac{1}{20}$.

O desconto de 105 $ 000 rs é $\frac{105}{20} = \frac{21}{4} =$ 5 $ 250 rs.

Uma letra de 105 $ 000 rs pagavel n'um anno e que so representa um capital actual de 100 $ 000 rs experimentará n'uma retenção um desconto de 5 $ 250 rs quando recebel-o quizermos actualmente, so receberemos pois em dinheiro de contado 105 $ 000 rs — 5 $ 250 rs = 99 $ 750 rs.

Vêmos pois que o desconto exterior, 5 $ 250 reis, se compõe do juro 5 $ 000 rs do capital 100 $ 000 rs, mais o juro 250 rs de 5 $ 000 rs.

Achariamos por um calculo simplissimo que o desconto exterior a 5 por 0/0 corresponde a um juro ordinario de $5\frac{5}{19}$ por 0/0.

A maior parte das nações estrangeiras tomão o desconto interior. É uso em França tomarem o desconto exterior.

Decimo terceiro problema. — Quanto devemos pagar de desconto em razão de 6 por 0/0 cada anno, para receber logo uma letra de 2.854 $ 600 rs pagavel em 3 annos 4 mezes ou 40 mezes ?

O desconto de 100 $ 000 rs por anno sendo 6 $ 000 rs,

O desconto de 1 $ 000 rs, por anno, é $\frac{6000}{100000}$ rs, ou $\frac{6}{100}$.

O desconto de 2.854 $ 600 rs cada anno é $\frac{6 \times 2.854\,600}{100}$.

O desconto de 2.854$\$$600 rs em 40 mezes é $\frac{6 \times 2.854\,600 \times 40}{100 \times 12}$.

Por conseguinte, acharemos em dinheiro de contado:

2.854$\$$600 rs − 570$\$$920 rs = 2.283$\$$680 rs.

VII.

Regra d'interesses compostos. — *Decimo quarto problema.* — Quanto 4.800$\$$000 rs valerão em 3 annos a 5 por 0/0 cada anno, tendo respeito aos juros dos juros?

1ª *Solução.* — O interesse de 4.800$\$$000 rs durante o 1º anno é 20º de 4.800$\$$000 rs ou 240$\$$000 rs; os 4.800$\$$000 rs valerão pois no fim do 1º anno 4.800$\$$000 rs + 240$\$$000 rs = 5.040$\$$000 rs. Esses 5.040$\$$000 rs no principio do 2º anno, valerão no fim d'este anno, 5.040$\$$000 rs, mais seu juro 252$\$$000 rs, ou 5.292$\$$000 rs. Esta última somma collocada no começo de 3º anno, valerá no fim do 3º anno 5.292$\$$000 rs mais seu juro 264$\$$600 rs ou 5.556$\$$600 rs.

4.800$\$$000 rs valerão pois, ao cabo de 3 annos, 5.556$\$$000 rs.

2ª *Solução.* — O juro annual a 5 por 0/0 o 20º do capital actual vale no fim do anno 1 vez

esta somma, mais $\frac{1}{20}$ d'esta somma; isto é, $\frac{21}{20}$ da somma.

Por conseguinte, 4.800$\$$000 rs no começo do 1º anno, valem, no fim d'este anno, 4.800$\$$000 reis $\times \frac{21}{20}$; 4.800$\$$000 rs $\times \frac{21}{20}$ no começo do 2º anno, valem no fim d'este anno 4.800$\$$000 rs $\times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20}$.

Emfim, 4.800$\$$000 rs $\times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20}$, no principio do 3º anno, valem 4.800$\$$000 rs $\times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} = \frac{4\,800\,000 \times 92\,610}{80\,000} = 60 \times 92{,}610 =$ 5.556$\$$600 rs.

O 2º methodo conduz mais promptamente ao resultado que o primeiro.

Decimo quinto problema.—Uma pessoa que deveria pagar 4.800$\$$000 rs em 2 annos e 11 mezes, propoem de acquitar-se com uma letra de cambio paga em 6 annos 3 mezes: pergunta-se o valor d'essa letra de cambio.

A differença entre 6 annos 3 mezes e 2 annos 11 mezes sendo 3 annos 4 mezes, a questão reduz-se a determinar quanto 4.800$\$$000 rs pagos em uma epoca dada, valem 3 annos 4 mezes mais tarde com os juros dos juros.

No problema precedente achámos que, ao cabo de 3 annos, 4.800$\$$000 reis valem 5.556$\$$000 rs.

O juro de 5.556$\$$000 reis em 12 mezes, sendo o 20º d'esta somma ou 277$\$$830 rs, o juro por 4 mezes será o terço de 277 $ 830 rˢ ou 92 $ 610 rˢ. Ajuntando este juro a 5.556 $ 600, vemos que, ao cabo de 3 annos 4 mezes, os 4.800 $ 000 rˢ valerão 5.649 $ 210 rˢ : a letra de cambio deve pois ser de 5.649 $ 210 rˢ.

VIII.

Regra de troca ou cambio.— Decimo sexto problema.—Um mercador quizera trocar panno a 4 $ 000 rˢ o covado por casimira a 2 $ 400 rˢ o covado, quanto se deve receber de casimira em cambio de 300 covados de panno?

1ª *Solução.* — Os 300 covados de panno valem 300 vezes 4 $ 000 rˢ ou 1.200 $ 000 rˢ, receberemos tantos covados de casimira como 2$400 rˢ, preço do covado de casimira, são contidos de vezes em 1.200 $ 000 rˢ. Dividindo 1.200 $ 000 rˢ por 2,400, o quociente 500 exprimirá o número de covados pedido.

2ª *Solução.* — Um covado de panno vale 4$000 rˢ, um covado de casimira vale 2$400 rˢ.

Por 100 rˢ teremos $\frac{1}{40}$ c. de panno,

ou $\frac{1}{24}$ de casimira;

Logo $\frac{1}{40}$ c. de panno $= \frac{1}{24}$ c. de casimira;

1 c. de panno vale 40 vezes $\frac{1}{24}$ c. $= \frac{40}{24}$ c. $=$ $\frac{5}{3}$ c. de casimira.

300 c. de panno valem pois 300 vezes $\frac{5}{3}$ c. $=$ 500 c. de casimira.

IX.

Regra de mistura ou de liga.— As questões de mistura ou de liga são de duas sortes: n'uma, trata-se de achar o valor medio de varias cousas, conhecendo o número e o valor particular de cada uma; n'outra trata-se de determinar as quantidades de cada especie que entrão na mistura, quando se conhece o valor de cada especie e o valor total da mistura.

Para conhecer o preço medio d'uma mistura ou liga, divide-se o preço total pelo número de cousas misturadas.

Decimo septimo problema.— Misturar-mos 40 medidas de vinho a 660 rˢ a medida, com 60 medidas a 1 $ 160 rˢ; que valerá uma medida d'esta mistura?

As 40 medidas a 660 rˢ fazem

660 rˢ × 40 = 26 $ 400 rˢ.

60 medidas a 1 $160 rˢ fazem

1 $ 160 rˢ × 60 = 69 $ 600 rˢ.

100 — 96 $ 000 rˢ.

Tenho assim 100 medidas de mistura que

valem 96 $ 000 rs; a medida sahirá pois a $\frac{96000}{100}$ = 960 rs.

Decimo oitavo problema. — Propoem de misturar vinhos a 700 rs a medida e a 1 $ 200 rs a medida, de modo que o misto sahia a 1 $ 000 rs a medida.

Cada medida a 700 rs que se venderia 1 $ 000 reis daria 1 $ 000 rs — 700 rs = 300 rs de lucro, e cada medida a 1 $ 200 rs que se venderia 1 $ 000 rs daria 1 $ 200 rs — 1 $ 000 rs = 200 rs de perda. Por conseguinte, para que o ganho compensa a perda, basta mesclar 2 medidas a 700 rs com 3 medidas a 1 $ 200 rs; as 5 medidas de mistura sahirão a 1 $ 000 rs a medida.

700 rs × 2	=	1 $ 400 rs.	
1 $ 200 rs × 3	=	3 $ 600 rs.	
5 medidas valem	pois	5 $ 000 rs.	
1 medida	vale	1 $ 000 rs.	

Este problema tem uma infinidade de soluções. Com effeito, multiplicando os dous numeros 2 e 3 por um terceiro número qualquer, terei novos numeros de medidas que satisfarão evidentemente a questão. Assim, multiplicando 2 e 3 por 2, terei, como precedentemente, os numeros 4 e 6, que resolverão o problema; porque

4	medidas a	700 rs	valem	2 $ 800 rs
6	—	1 $ 200	—	7 $ 200 rs
10	medidas valerão pois			10 $ 000 rs

1 medida, 1 $ 000 rs.

X.

Regra d'uma falsa posição e dobrada falsa posição. — *Decimo nono problema.* — Temos bilhetes de 2 $ 000 rs e de 5 $ 000 rs; trata-se de pagar 26 $ 000 rs com dez d'estes bilhetes.

Se os dez bilhetes fossem de 2 $ 000 rs, ellas so darião 20 $ 000 rs em vez de 26 $ 000; é necessario pois augmentar de 6 $ 000 rs o valor d'esses dez bilhetes, sem lhe mudar o número; mas cada bilhete de 5 $ 000 rs substituido a um bilhete de 2 $ 000 rs augmenta de 3 $ 000 rs o valor de 6 $ 000 rs; é necessario substituir 2 bilhetes de 5 $ 000 rs a 2 bilhetes de 2 $ 000 reis; formar-se-hão pois os 26 $ 000 rs com 8 bilhetes de 2 $ 000 rs e 2 de 5 $ 000 rs.

Vigesimo problema. — Um pae interrogado ácerca da idade do seu filho, responde : Minha idade é o triplo da de meu filho, e, ha dez annos, era o quintuplo. Qual é a idade do filho?

Se o filho tivesse 24 annos, o pae teria 72 annos : ha dez annos, o filho teria tido 14 annos e o pae 62 annos. Ora o quintuplo de 14 annos é 70 annos; número que excede 62 de 8; o erro é pois de 8. Se o filho tivesse 23 annos, o pae teria 69 annos, e 10 annos antes o filho teria tido 13 annos, e o pae 59 annos; ora o quintuplo de 13 é 65, número que excede 59 de 6; assim o filho tendo um anno de menos, o erro será diminuido de dous annos. Deduzindo ainda a idade do filho de tres annos, o erro tomar-se-ha nullo. A idade do filho será pois 20 annos; e a do pae 60 annos. Dez annos antes o pae tinha 50 annos, idade quintupla da do filho, que so então tinha 10 annos.

Vêmos que aqui se fazem duas falsas supposições mediante as quaes chegámos ao resultado buscado.

Não nos alongaremos mais ácerca da resolução dos problemas arithmeticos mediante as quatro regras.

Chama-se tambem este methodo *methodo da unidade*, porque elle consiste ordinariamente a achar o valor da unidade da quantidade buscada; valor que se repete depois tantas vezes quantas o indicão os dados do problema.

As questões que resolvemos são assás numerosas e variadas para provar aos professores que se dão ao elementar ensino, que os proporções lhes são completamente inuteis para

resolver os mais complicados problemas arithmeticos.

Questionario. — Dai-nos um exemplo dos problemas que resolver-se podem com a ajuda d'uma multiplicação ou divisão. — *Exemplo :* Um cavado de panno custou 2$540 rs; quanto custarão tres cavados sete decimos? —Dai um exemplo dos problemas nos quaes, sendo dados tres numeros, trata-se d'achar um quarto, effeituando uma divisão e uma multiplicação? — Que vantajem ha em indicar-mos somente as operações? — Quaes simplificações podemos fazer antes d'effeituar os calculos? — *Exemplo :* Quatro obreiros fizerão vinte braças de obra; quanto nove obreiros farão d'essa obra no mesmo tempo? —*Quarto problema.* Tres obreires fizerão uma obra em quinze horas; quantas cinco obreiros empregárão em executar a mesma obra?

Resolvei o problema seguinte: Dous obreiros, trabalhando tres horas por dia, fizerão em cinco dias noventa braças de obra; quanto tres obreiros, trabalhando sete horas por dia, farão da mesma obra em dous dias?

Que é uma regra de sociedade? — De que depende o beneficio ou a perda de cada socio? — *Primeiro exemplo :* As sommas de tres socios são de 300$000 rs, 500$000 rs e 700$000 rs; o beneficio total é de 4.500$000 rs: qual é o ganho de cada socio? — *Segundo exemplo:* As sommas dos tres socios são de 100$000 rs, 250$000 rs, e 50$000 rs: a primeira somma ficou tres mezes na sociedade; a segunda dous mezes, a terceira quatorze mezes; o beneficio total é de 4.500$000 rs: pede-se o ganho relativo a cada somma.

Que é o juro? — O capital? — A taxa do juro? — Qual é a taxa do juro legal? — Quantas sortes ha de juros? — No calculo dos juros, quantos dias se contão para cada mez? — Para um anno? — Em qual caso se contão os 365 no anno? — Quando tem logar a regra de juros? — Como se acha o juro annual d'um capital qualquer? — O que basta quando é 5 p. 0/0? — Como se acha o juro d'uma quantia para um número de dias dados? — Conhecendo o juro annual e a taxa, como se acha o capital? — Conhecendo o capital e o juro annual, como se acha a taxa? — *Primeiro exemplo :* Quanto um capital de 4.800 $ 000 rs valerá em tres anno a 5 por 0/0 por anno? — Dai a solução d'esse problema. — *Segundo exemplo :* Qual é o juro a 6 por 0/0 por anno de 1.200 $ 600 rs durante 3 annos? — *Terceiro exemplo :* Qual é o capital que produz 76 $ 000 rs a 4 p. 0/0? — *Quarto exemplo :* A que taxa pômos a juro o dinheiro, comprando da renda 5 por 0/0 a 105 $ 000 rs.

Que é desconto? — Quantas sortes ha d'elle? — Que é desconto interior? — Desconto exterior? — *Exemplo :* Quanto se deve pagar o desconto a 6 por 0/0 por anno, para se receber logo o valor d'uma letra de 2.854 $ 600 rs pagavel em 3 annos e 4 mezes?

Quanto 4.800 $ 000 rs valerão em 5 annos a 5 por 0/0 por anno, tendo-se respeito aos juros dos juros? — Dai uma segunda soluçã o d'esse problema. — *Segundo exemplo :* Uma pessoa que deveria pagar 4.800 $ 000 rs em 2 annos 11 mezes, propõe acquitar-se com uma letra de cambio pagavel em 6 annos 3 mezes : pergunta-se o valor d'esta letra de cambio.

Um mercador quereria trocar panno a 4 $ 000 rs a covado por casimira a 2 $ 400 rs : quanto deverá receber de casimira em troca de 300 covados de panno?

Mistura-se 40 medidas de vinho a 660 rs a medida, com 60 medidas a 1 $ 160 rs : quanto valerá uma medida d'esta mistura?

Propomo-nos misturar vinhos a 700 rs e a 1 $ 200 rs, de

modo que a mistura sahia a 1,000 rs a medida. — Esse problema tem muitas soluções?

Temos bilhetes de 2 $ 000 rs e de 5 $ 000 rs : como pagarão 26 $ 000 rs com dez d'esses bilhetes?

Um pae, interrogado ácerca da idade de seu filho, responde : Minha idade é o triplo da de meu filho; e ha dez annos que ella era o quintuplo : qual é a idade do filho? — Que se chama methodo da unidade? — Que vantajens procura ella?

RAZÕES E PROPORÇÕES

Noções geraes. — Como todos os problemas da arithmetica podem resolver-se sem ajuda das proporções, so daremos noções geraes.

Chama-se *razão* o resultado da comparação de duas quantidades. Ora como comparar podemos duas quantidades para saber quanto uma excede a outra, ou para saber quantas vezes uma contem outra, existem duas especies de razões.

Chama-se a primeira *razão arithmetica*, ou por differença. A segunda chama-se *razão geometrica*, ou por quociente. So nos occuparemos aqui d'esta última, a qual chamaremos simplesmente razão.

A razão de 12 a 4 é 3; a de 28 a 7 é 4; a de 10 a 2 é 5. Para achar-mos a razão de dous numeros, é necessario dividil-os um pelo outro; o que serve de dividendo é dito *antecedente* da razão, e o divisor é d'ella o *consequente*.

Se o antecedente fôsse mais pequeno que o consequente, claro é que a razão sería uma fracção, visto indicar quantas vezes o antecedente contem o consequente.

Assim, a razão de 3 a 5 é $\frac{3}{5}$; a de 7 a 11 é $\frac{7}{11}$, etc., etc.

Podêmos, segundo o que precede, escrever uma razão de tres modos differentes. Para exprimir a razão de 12 a 4, poderemos pôr 3 ou $\frac{12}{4}$ ou 12 : 4.

A última fórma é a mais frequentemente usada.

Chama-se proporção a juntura de 4 membros taes como a razão do 1º ao 2º é igual á razão do 3º ao 4º. Assim as razões $\frac{18}{3}$, $\frac{30}{5}$ sendo iguaes, fórmão uma proporção que escrevemos assim : 18 : 3 :: 30 : 5; o que enuncia-se : 18 é para 3 como 30 é para 5.

A propriedade fundamental das proporções é que o producto do primeiro e último termo, chamados *extremos*, é igual ao producto do segundo e terceiro, chamados *meios*.

Se os 4 numeros

3 : 9 :: 4 : 12

fórmão uma proporção, o producto de 3 para 12 é igual ao de 9 para 4.

Reciprocamente :

Se 4 numeros 3, 9, 4, 12 são taes como o producto dos extremos 3 e 12 é igual ao dos meios 9 e 4, esses 4 numeros devem formar uma proporção, e teremos 3 : 9 :: 4 : 12.

Basta, para que quatro numeros formem uma proporção, que o producto dos extremos seja igual ao dos meios.

Da propriedade enunciada precedentemente resulta que, com tres numeros quaesquer d'uma proporção, poderemos determinar o quarto.

Se o termo incognito é um extremo, achal-o-hemos multiplicando os dous meios entre si, e dividindo seu producto pelo extremo conhecido.

Se, a contrario, o termo incognito é um meio, achal-o-hemos dividindo pelo meio conhecido o producto dos dous extremos.

Assim, para achar o quarto termo proporcional aos tres membros 3, 15, 4, multiplicarei 15 por 4, e dividirei seu producto 60 por 3; o que me dará por quociente 20, e tenho a proporção 3 : 15 :: 4 : 20; porque o producto dos extremos é igual ao dos meios.

Pelo contrario, para achar o meio incognito d'uma proporção cujos dous extremos serião 3 e 20, e o meio conhecido 15, multiplico 3 por 20, e divido seu producto por 15, o que me dá 4. Tenho pois a proporção 3 : 15 :: 4 : 20; porque o producto dos extremos é igual ao dos meios.

Acontecer póde que n'uma proporção os dous termos medios sejão iguaes, como vêr podemos nas proporções :

$$
\begin{array}{ccccccc}
7 & : & 21 & :: & 21 & : & 63 \\
12 & : & 6 & :: & 6 & : & 3
\end{array}
$$

Essas proporções chamão-se proporções *continuas*.

Em tal caso o producto do medio multiplicado por si mesmo é igual ao producto dos dous extremos.

Segundo o que precedentemente dissemos, podêmos fazer aos quatro termos d'uma proporção todas as mudanças que não obstem ao producto dos extremos ser igual ao dos meios. Uma proporção 3 : 15 :: 5 : 25 póde escrever-se como se vê nos 8 modos seguintes :

$$
\begin{array}{ccccccc}
3 & : & 15 & :: & 5 & : & 25 \\
3 & : & 5 & :: & 15 & : & 25 \\
5 & : & 3 & :: & 25 & : & 15 \\
5 & : & 25 & :: & 3 & : & 15 \\
25 & : & 5 & :: & 15 & : & 3 \\
25 & : & 15 & :: & 5 & : & 3 \\
15 & : & 25 & :: & 3 & : & 5 \\
15 & : & 3 & :: & 25 & : & 5
\end{array}
$$

Quando duas proporções teem uma razão commum as duas outras razões, fórmão uma proporção, pois ellas são, entre si, iguaes.

Assim, nas duas proporções

$$
\begin{array}{ccccccc}
16 & : & 4 & :: & 20 & : & 5 \\
12 & : & 3 & :: & 20 & : & 5
\end{array}
$$

a razão 20 : 5 sendo commum, teremos 16 : 4 :: 12 : 3.

Se multiplicâmos termo por termo duas proporções, os quatro productos serão em proporção. Se tomâmos as duas proporções

$$
\begin{array}{ccccccc}
2 & : & 9 & :: & 6 & : & 27 \\
3 & : & 7 & :: & 15 & : & 35
\end{array}
$$

teremos

$$2 \times 3 : 9 \times 7 :: 6 \times 15 : 27 \times 35$$

ou $\quad 6 : 63 :: 90 : 945$

porque as duas proporções, que escolhemos, podem pôr-se sob a fórma

$$
\begin{array}{cc}
\frac{2}{9} & \frac{6}{27} \\
\frac{3}{7} & \frac{15}{35}
\end{array}
$$

Ora o producto de $\frac{2}{9}$ por $\frac{3}{7}$ sendo igual ao de $\frac{6}{27}$ por $\frac{15}{35}$ teremos $\frac{2 \times 3}{9 \times 7} = \frac{6 \times 15}{27 \times 35}$, ou $2 \times 3 : 9 \times 7 :: 6 \times 15 : 27 \times 35$.

Gozão as proporções mais outras propriedades, cujo conhecimento é dispensavel ás pessoas a quem esta obra é destinada. Abster-nos-hemos de revistal-as.

Questionario. — Que se chama razão? — Ha razões de muitas especies? — Que nome tem a primeira? — E a segunda? — Como achâmos a razão de dous numeros? —Que aconteceria, se o antecedente fôsse maior que o consequente? — Ha modos varios d'escrever-mos uma razão? — Que chamâmos proporção? — Qual e a propriedade fundamental das proporções? — Para que quatro membros formem proporção, que necessitão? — Com tres termos d'uma proporção podemos determinar o quarto? — Como o acharemos? — Que nome teem as proporções cujos termos medios são iguaes? — Que acontece n'esse caso? — E quando duas proporções teem uma razão commum? — E quando se multiplicão termo por termo duas proporções? — As proporções gozão ainda outras propriedades?

POTENCIAS E RAIZES DOS NUMEROS.

I.

Raizes quadradas dos numeros. — Acabaremos esta obra dando tambem algumas noções geraes ácerca das potencias e raizes dos numeros.

Chamão-se *potencias* d'um número os diversos productos obtidos em a multiplicação d'esse número algumas vezes por si mesmo.

Assim, a *primeira potencia* de 4 é 4; e a *segunda* é 4×4 ou 16.

A *terceira potencia* seria $4 \times 4 \times 4$ ou 64, é assim por diante.

A segunda potencia d'um número chama-se o *quadrado* d'esse número; o qual obteremos (como dissemos) multiplicando esse número uma vez por si mesmo: assim o quadrado de 3 é 9; o de 5 é 25, o de 7 é 49, etc., etc.

O número que, multiplicado por si mesmo, fornece um número dado, é a *raiz quadrada* do número dado. Assim, a raiz quadrada de 9 é 3, a de 25 é 5, a de 49 é 7, etc., etc.

Vêmos (segundo o que acima dissemos) que para formar o quadrado d'um número, basta conheçâmos as regras da multiplicação.

A extracção da raiz quadrada exige arrazoados, cuja explicação não tem aqui logar. Calal-os-hemos, indicando todavia o modo que seguir devemos para descobrir a raiz quadrada d'um número.

Os 9 primeiros numeros inteiros sendo

1 2 3 4 5 6 7 8 9

cujos quadrados são

1 4 9 16 25 36 49 64 81

resulta d'elles que, reciprocamente, os numeros da segunda linha teem por raizes quadradas o da primeira. Reconheceremos pois á inspecção d'essas duas linhas qual é a raiz quadrada d'um número que so contem dous algarismos.

Mas supponhâmos que o número do qual extrahir queremos a raiz quadrada contenha alguns algarismos :

Consideremos por exemplo 6084.

	raiz.
60.84	78
49	148
118.4	
118 4	
000 0	

Para achar a raiz quadrada de 6084, divido esse número em tiras de cada uma dous algarismos, começando pela direita (a ultima tira á esquerda poderia achar-se composta d'um so álgarismo) e busco nas duas linhas do paragrapho antecedente a raiz do maior quadrado contido em 60; acho 7, que assento a direita de 6084, e diminuo 49, que é o quadrado de 7, da primeira tira á esquerda 60.

Á ilharga do resto 11, abaixo a tira seguinte 84, da qual separo o último algarismo 4, com um ponto; depois divido 118 por 14, dobro da raiz ja achada, e ponho o quociente 8 ao

lado da raiz 7 e á ilharga do dobro d'essa raiz 14. Multiplico o número assim formado 148 pelo quociente 8, e diminúo o producto de 1184.

Como 0 é o resto, concluo ser 78 a raiz quadrada exacta de 6084; e, esse último número, um quadrado perfeito. Para verificar-mos a operação, bastar-nos-hia formar o quadrado de 78. Deveriamos reproduzir 6084.

Supponhâmos que temos um resto depois de abaixar-mos todas as tiras.

34.78	58
25	108
978	
864	
114	

Em caso tal o resto 114 annuncía que 3478 não é um quadrado perfeito, e 58 é a exacta raiz do maior quadrado perfeito contido em 3478.

Para a operação verificar-mos, formar deveriamos o quadrado de 58, ajuntando-lhe o resto 114. O resultado deveria ser igual a 3478.

Podêmos, mediante as decimaes, aproximarnos á raiz quadrada dos numeros inteiros que não são quadrados perfeitos.

Em geral, para ter, a quasi um decimo, a um centesimo, a um millesimo, etc., etc., a raiz quadrada d'um número inteiro, collocaremos á sua direita, dous, quatro, seis zeros, etc. Tomaremos a raiz do numero assim formado, separando á direita d'esta raiz um, dous, tres algarismos decimaes, etc.

Acharemos tambem que a raiz quadrada

de 7 a $\frac{1}{1000}$ quasi e 2,645
a de 29 a $\frac{1}{100}$ quasi é 5,38
a de 8 a $\frac{1}{100}$ quasi é 2,82
e a de 227 a $\frac{1}{1000}$ quasi é 15,0665

Recordando o que ácerca da multiplicação das fracções ordinarias dissemos, comporemos o quadrado d'uma fracção, formando separadamente o quadrado do numerador e o do denominador. Assim, o quadrado de $\frac{3}{5}$ é $\frac{9}{25}$, o de $\frac{2}{3}$ é $\frac{4}{9}$, e o de $\frac{3}{7}$, $\frac{9}{49}$.

Reciprocamente, tomaremos a raiz quadrada d'uma fracção, tomando separadamente a do numerador e a do denominador. Assim, a raiz quadrada de $\frac{16}{25}$ é $\frac{4}{5}$; e a de $\frac{9}{49}$ é $\frac{3}{7}$, etc., etc.

Supponhâmos que o denominador so seja um quadrado perfeito $\frac{11}{25}$; tomaremos a raiz 3 de 11 a quasi uma unidade, e dividil-a-hemos pela

raiz exacta de 25; o que dará $\frac{3}{5}$ para raiz de $\frac{11}{25}$ a quasi $\frac{1}{5}$.

Emfim, se nenhum de ambos os termos da fracção for quadrado perfeito, como $\frac{3}{7}$, traremos aos casos precedentes, multiplicando ambos os termos da fracção pelo denominador 7, e teremos $\frac{21}{49}$, resultado sobre o qual operarêmos como sobre a fracção $\frac{21}{49}$; achâmos assim $\frac{4}{7}$, que é a raiz de $\frac{3}{7}$ a quasi $\frac{1}{7}$.

II.

Raizes cubicas. — Chama-se a terceira potencia d'um número o cubo d'esse número. Assim o cubo de 3 é 3 × 3 × 3 ou 27; o de 5 é 5 × 5 × 5 ou 125 : reciprocamente, o número que multiplicado duas vezes seguidamente por si mesmo, reproduz um número dado, é a raiz cubica do número dado.

Assim, a raiz cubica de 125 é 5; a de 27 é 3, e a de 216 é 6.

Os 9 primeiros numeros sendo :

1 2 3 4 5 6 7 8 9

cujos cubos são :

1 8 27 64 125 216 343 512 729

resulta d'elles que os numeros da primeira inha são as raizes dos da segunda.

Proponhâmo-nos d'extrahir a raiz cubica do número 262,144.

262.144	64	64
216	$6 \times 6 \times 3$ ou 108	64
461.44		256
262.144		384
000.000		4096
		64
		16384
		24576
		262144

Divido o número proposto em tiras de tres algarismos cada uma, caminhando da direita para a esquerda. A última tira á esquerda poderia so ter um ou dous algarismos : busco a raiz cubica de 262 a quasi uma unidade; acho 6 que ponho á direita do número proposto, e diminuo de 262 o cubo 216 do algarismo achado á raiz. Á ilharga do resto 46 abaixo a tira seguinte á direita da qual separo dous algarismos, e divido 461 pelo triplo do quadrado (108) da raiz ja achada que é 6, e tenho por quociente 4, que escrevo á raiz, e fórmo o cubo de 64. Acho 262144, que diminuido do número proposto, dá por resto 0.

A raiz cubica do número proposto é pois 64.

Se o número do qual queremos extrahir a raiz cubica não é cubo perfeito, poderemos, mediante decimaes, approximar-nos a essa raiz cubica.

Assim, para obter a $\frac{1}{10}$, a $\frac{1}{100}$, a $\frac{1}{1000}$ quasi a raiz cubica d'um número inteiro, collocaremos á sua direita tres, seis, nove zeros, etc., tomando a raiz do número assim formado, e separando á direita de esta raiz, um, dous, tres algarismos decimaes.

A extracção da raiz cubica de fracções ordinarias apresenta tres casos.

1º Se os dous termos da fracção são cubos perfeitos, tomâmos separadamente a raiz do numerador e a do denominador.

Assim a raiz cubica de $\frac{125}{216}$ é $\frac{5}{6}$
a de $\frac{343}{729}$ é $\frac{7}{9}$.

2º Se o denominador so é cubo perfeito, como na fracção $\frac{7}{216}$, tomâmos a quasi menos d'uma unidade a raiz 2 do numerador, e dividimol-a pela raiz exacta 6 do denominador : temos assim $\frac{2}{6}$ por raiz cubica de $\frac{7}{216}$ a $\frac{1}{6}$ quasi.

3º Emfim, se os dous termos da fracção não são cubos perfeitos, conduzimos esse caso ao precedente, multiplicando duas vezes de seguida os dous termos da fracção pelo seu denominador.

Assim a raiz cubica de $\frac{5}{7}$ será evidentemente a mesma que a de $\frac{245}{343}$. Ora, achâmos que a raiz d'esta é $\frac{6}{7}$ a menos de $\frac{1}{7}$; logo $\frac{6}{7}$ é tambem a $\frac{1}{7}$ quasi a raiz cubica de $\frac{5}{7}$.

Questionario. — Que se chama potencia d'um número? — Como se chama a segunda potencia d'um número? — De que modo a obtemos? — Que devemos conhecer para formar o quadrado d'um número? — A extracção da raiz quadrada apresenta mais difficuldades? — Quaes são os quadrados dos nove primeiros numeros? — Como acharemos a raiz quadrada de mais de dous algarismos? — Como se verifica a operação? — E se houver resto, como a examinaremos? — Por quaes meios nos approximaremos da raiz quadrada dos numeros inteiros que não são quadrados perfeitos? — Como formaremos o quadrado d'uma fracção ordinaria?

Como se chama a 3ª potencia d'um número? — Quaes são os cubos dos 9 primeiros numeros? — Como extrahiremos a raiz cubica do número 264,144? — Por qual meio poderemos approximar-nos á raiz cubica quando a extracção não dá cubo perfeito? — A extracção da raiz cubica de fracções ordinarias não apresenta varios casos? — Quaes são?

FIM.

INDICE.

PARTE PRIMEIRA. — THEORIA DO CALCULO.

NUMEROS INTEIROS.

FRACÇÕES DECIMAES.

FRACÇÕES ORDINARIAS.

NUMEROS COMPLEXOS.

SEGUNDA PARTE. — APPLICAÇÕES.

PROBLEMAS RESOLVIDOS MEDIANTE AS QUATRO REGRAS.

RAZÕES E PROPORÇÕES.

POTENCIAS E RAIZES DOS NUMEROS.

O CURSO D'ESTUDOS ELEMENTARES

CONTEM :

Primeiro livro de leitura.
Livro de leitura corrente.
Methodo d'escrita e modelos.
Arithmetica ; — problemas e soluções.
Geometria.
Desenho linear.

Grammatica portugueza	theorica. pratica.

Methodo de composição e d'estylo.

Grammatica franceza	theorica. pratica.

Direitos e deveres do cidadão.
Instrucção moral e religiosa.

Geographia	geral. discriptiva.

Mythologia.
Historia Santa.

—	da Europa	antiga. da idade media moderna.
—	da America.	
—	do Brasil.	
—	de Portugal.	

Astronomia.
Geologia.
Physica.
Chymica.
Botanica.
Zoologia.
Physiologia humana.
Hygiene.

[illegible] Paul Dupont,
[illegible]