UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS BLUMENAU
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Arlindo Udé Ié

Um convite às Álgebras de Lie

Blumenau
2025

Arlindo Udé Ié

Um convite às Álgebras de Lie

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática do Campus Blumenau da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Licenciado(a) em Matemática.
Orientador: Prof. Bruno Tadeu Costa, Dr.
Coorientador: Prof. Luiz Fernando Bossa, Me.

Blumenau
2025

Ficha de identificação da obra

A ficha de identificação é elaborada pelo próprio autor.
Orientações em:
http://portalbu.ufsc.br/ficha

Arlindo Udé Ié

Um convite às Álgebras de Lie

Este Trabalho Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do Título de Licenciado(a) em Matemática e aprovado em sua forma final pelo Curso de Licenciatura em Matemática.

Blumenau, 5 de dezembro de 2025.

Documento assinado digitalmente
Francis Felix Cordova Puma
Data: 17/12/2025 15:46:32-0300
CPF: ***.649.087-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Francis Felix Cordova Puma, Dr.
Coordenador do Curso

Banca Examinadora

Documento assinado digitalmente
Bruno Tadeu Costa
Data: 17/12/2025 15:14:03-0300
CPF: ***.595.068-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Documento assinado digitalmente
LUIZ FERNANDO BOSSA
Data: 17/12/2025 23:20:49-0300
CPF: ***.114.689-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Luiz Fernando Bossa, Me.

Documento assinado digitalmente
Marcio de Jesus Soares
Data: 17/12/2025 20:17:42-0300
CPF: ***.670.858-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Márcio de Jesus Soares, Dr.

Documento assinado digitalmente
Rafael Aleixo de Carvalho
Data: 17/12/2025 21:20:18-0300
CPF: ***.494.178-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Rafael Aleixo de Carvalho, Dr.
Avaliador

Dedico este trabalho de forma especial ao meu pai, Udé Ié, e ao meu tio, Ansine Sá, que, mesmo não vivendo comigo e estando fisicamente distantes ao longo da minha trajetória, permanecerão como pilares silenciosos da minha força e inspiração. Estendo também esta dedicatória ao meu coorientador, Luiz Fernando Bossa, cuja confiança e liberdade concedidas durante todo o desenvolvimento deste trabalho foram essenciais e indescritíveis, permitindo-me crescer com autonomia e responsabilidade.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por me conceder a força necessária para superar cada dificuldade ao longo desta trajetória. Expresso também minha profunda gratidão aos meus irmãos, Juliano Correia e Mário Té, que me acolheram quando cheguei ao Brasil e com quem aprendi lições que levarei para toda a vida. Estendo meus agradecimentos aos colegas que acompanharam minha caminhada: Castro Bedabwal Embana, com quem compartilhei moradia por três anos e que se tornou alguém de grande importância para mim, ao meu irmão Maniche Udé Ié, Mário Indi Júnior, Wilson Indi, Zito Djemé, Embalo Manga, Quintino Alexandre e Abel Becuba, bem como aos colegas com quem divido a casa atualmente, Carlos Mané e Lamine Na Cresgle. Cada um, à sua maneira, contribuiu para que esta jornada fosse possível.

Registro também meu sincero reconhecimento à equipe do NAE e NUPE-BNU, cuja dedicação e força coletiva tiveram um impacto significativo na minha formação. Sou especialmente grato ao professor Carlos Roberto Moratelli e à Ana Claúdia Racca da Silva, pessoas de valor ímpar que o Senhor colocou em meu caminho e que contribuíram com apoio, incentivo e orientação em momentos essenciais desta caminhada.

Aos meus professores, agradeço por suas contribuições ao meu desenvolvimento acadêmico e pessoal, e de modo especial àqueles que tiveram participação direta na construção deste trabalho. Por fim, manifesto minha profunda gratidão ao meu orientador, Bruno Tadeu Costa, pela oportunidade de desenvolver esta pesquisa, e ao meu coorientador, Luiz Fernando Bossa, pelo apoio constante e pela confiança depositada em mim. A todos vocês, devo a concretização deste sonho.

"O homem não é nada além daquilo que a educação faz dele."
(Immanuel Kant)

RESUMO

Este trabalho oferece um estudo inicial das Álgebras de Lie, com foco em suas propriedades estruturais e nos elementos que definem sua organização interna. São examinados elementos como subálgebras, ideais, constantes de estrutura, centralizadores, homomorfismos e quocientes, além dos Teoremas de Isomorfismo, que facilitam a compreensão das conexões entre essas estruturas. A meta é proporcionar uma perspectiva clara e compreensível dos princípios que embasam a teoria das Álgebras de Lie e seu papel no âmbito da Álgebra contemporânea.

Palavras-chave: Álgebras de Lie; Operação de Colchete.

ABSTRACT

This work offers an initial study of Lie algebras, focusing on their structural properties and the elements that define their internal organization. Elements such as subalgebras, ideals, structure constants, centralizers, homomorphisms, and quotients are examined, in addition to isomorphism theorems, which facilitate understanding of the connections between these structures. The goal is to provide a clear and understandable perspective on the principles underlying Lie algebra theory and its role in contemporary algebra.

Keywords: Lie Algebras; Bracket Operation.

SUMÁRIO

1	**INTRODUÇÃO**	**10**
2	**ÁLGEBRAS DE LIE**	**12**
2.1	DEFINIÇÕES E EXEMPLOS	13
2.2	CLASSIFICAÇÃO DE ÁLGEBRAS DE LIE UNI E BI-DIMENSIONAIS	21
2.3	HOMOMORFISMOS	24
2.4	IDEAL	29
2.5	CENTRALIZADOR	30
2.6	QUOCIENTE	33
2.7	TEOREMAS DE ISOMORFISMO	37
2.8	CONCLUSÃO	46
	REFERÊNCIAS	**48**

1 INTRODUÇÃO

A teoria das Álgebras de Lie emergiu no século XIX, durante um período de intenso progresso na matemática, caracterizado pela procura por estruturas que pudessem elucidar os padrões de simetria observados em vários fenômenos. Em [7], enfatiza que esse período foi marcado por uma significativa expansão conceitual, durante o qual novas áreas foram estruturadas e conexões profundas entre diversos ramos da matemática começaram a ser estabelecidas. Nesse contexto, o conceito de simetria tornou-se fundamental, especialmente nas pesquisas relacionadas à geometria, análise e estudo das equações diferenciais.

Nesse ambiente intelectual, o matemático norueguês Sophus Lie elaborou sua teoria. Movido pelo desejo de entender como algumas transformações contínuas poderiam desvendar características internas de equações diferenciais, ele procurou uma formulação unificada que generalizasse os métodos até então utilizados de forma fragmentada. Da mesma forma que o grupo de permutações cumpria esse papel na teoria das equações algébricas, ele notou que as simetrias encontradas nas equações diferenciais poderiam ser analisadas por meio de estruturas algébricas conhecidas hoje como Álgebras de Lie. Com base nessa ideia, foi criada uma nova disciplina, que hoje é essencial para a matemática e a física teórica.

Essa teoria tem um impacto significativo. No âmbito da matemática, as Álgebras de Lie são instrumentos fundamentais para a análise dos grupos de Lie, das representações lineares, da geometria diferencial e dos aspectos estruturais da topologia. Na física, elas são essenciais para a formulação contemporânea da mecânica quântica, da teoria da relatividade e dos modelos que representam partículas elementares. A extensão dessas aplicações evidencia a relevância de

entender seus fundamentos teóricos e suas conexões com outras teorias algébricas.

A opção por este tema resulta do interesse em entender de maneira integrada como determinadas estruturas algébricas, especialmente provenientes da Álgebra Linear e da teoria de Anéis, se inter-relacionam na formação das Álgebras de Lie. Este trabalho tem como objetivo fornecer uma introdução acessível a essas estruturas, discutir conceitos fundamentais e examinar como a operação de colchete, característica das Álgebras de Lie, se relaciona com outras teorias algébricas.

Este trabalho se concentra no estudo das Álgebras de Lie, examinando suas características internas e elementos estruturais. Além dos Teoremas de Isomorfismo, que organizam e classificam essas estruturas, conceitos como subálgebras, ideais, constantes de estrutura, centralizadores, homomorfismos e quocientes serão estudados. Para um bom entendimento do texto, o leitor deve estar familiarizado com certos conceitos de Álgebra Linear e Teoria de Anéis. Para isso, recomenda-se [2], [3] e [4].

2 ÁLGEBRAS DE LIE

Definição 2.1. Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Uma álgebra sobre $\mathbb{K}$ é um espaço vetorial A sobre $\mathbb{K}$ munido de uma aplicação bilinear

$$\cdot : A \times A \longrightarrow A,$$

denominada *produto*, que associa a cada par $(a, b) \in A \times A$ um elemento $ab \in A$.

- Bilinearidade: para todos $a, b, c \in A$ e $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$a(b + c) = ab + ac, \quad (a + b)c = ac + bc,$$

$$(\lambda a)b = a(\lambda b) = \lambda(ab).$$

- Associatividade: a álgebra é dita associativa se

$$(ab)c = a(bc), \quad \forall\, a, b, c \in A.$$

- Diz-se que A possui unidade se existe $1_A \in A$ tal que

$$1_A a = a 1_A = a, \quad \forall\, a \in A.$$

- Comutatividade: a álgebra é comutativa se

$$ab = ba, \quad \forall\, a, b \in A.$$

De modo geral, uma Álgebra de Lie pode ser compreendida como uma estrutura algébrica definida sobre um espaço vetorial, acompanhada de uma operação bilinear denominada colchete de Lie. Essa operação é responsável por associar, a cada par de elementos do espaço, um novo elemento pertencente ao mesmo espaço. Assim, o colchete atua como uma transformação interna que traduz interações entre elementos, sem recorrer à composição de funções ou multiplicação no sentido tradicional.

2.1 DEFINIÇÕES E EXEMPLOS

Definição 2.2. Uma Álgebra de Lie é um espaço vetorial $\mathfrak{g}$ munido de um produto (colchete ou comutador) $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. É bilinear: para quaisquer vetores $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ e escalares $a, b \in \mathbb{K}$, temos

$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$$
$$[X, aY + bZ] = a[X, Y] + b[X, Z]$$

2. Anti-simétrico ou alternado: para todo[1] $X, Y \in \mathfrak{g}$

$$[X, Y] = -[Y, X]$$

3. Satisfaz a identidade de Jacobi: para quaisquer três elementos $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, a seguinte combinação linear dos colchetes de Lie resulta em zero:

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$$

A identidade de Jacobi é uma propriedade fundamental das Álgebras de Lie e pode ser pensada como uma generalização da associatividade. Abaixo, temos um exemplo de produto vetorial para verificar os três axiomas.

Exemplo 2.3. O produto vetorial

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \quad & \mathbb{R}^3 \\ (X, Y) \quad \to & X \times Y \end{aligned}$$

[1] Desde que o corpo de escalares não tenha característica 2.

confere a $\mathbb{R}^3$ uma estrutura de Álgebra de Lie sobre $\mathbb{R}$. De fato, se $X = (x_1, x_2, x_3)$ e $Y = (y_1, y_2, y_3)$ então

$$X \times Y = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$$

é bilinear e alternada. Para verificar a identidade de Jacobi, tome $Z = (z_1, z_2, z_3)$ e escreva $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para denotar o produto interno usual de $\mathbb{R}^3$. Com isso, temos

$$\begin{aligned}
X \times (Y \times Z) &= (x_1, x_2, x_3) \times (y_2z_3 - y_3z_2, y_3z_1 - y_1z_3, y_1z_2 - y_2z_1) \\
&= \big(x_2(y_1z_2 - y_2z_1) - x_3(y_3z_1 - y_1z_3), \\
&\quad x_3(y_2z_3 - y_3z_2) - x_1(y_1z_2 - y_2z_1), \\
&\quad x_1(y_3z_1 - y_1z_3) - x_2(y_2z_3 - y_3z_2)\big) \\
&= \big((x_2z_2 + x_3z_3)y_1 - (x_2y_2 + x_3y_3)z_1, \\
&\quad (x_1z_1 + x_3z_3)y_2 - (x_1y_1 + x_3y_3)z_2, \\
&\quad (x_1z_1 + x_2z_2)y_3 - (x_1y_1 + x_2y_2)z_3\big) \\
&= \big(x_1y_1z_1 + (x_2z_2 + x_3z_3)y_1 - (x_2y_2 + x_3y_3)z_1 - x_1y_1z_1, \\
&\quad x_2y_2z_2 + (x_1z_1 + x_3z_3)y_2 - (x_1y_1 + x_3y_3)z_2 - x_2y_2z_2, \\
&\quad x_3y_3z_3 + (x_1z_1 + x_2z_2)y_3 - (x_1y_1 + x_2y_2)z_3 - x_3y_3z_3\big) \\
&= \langle X, Z\rangle Y - \langle X, Y\rangle Z,
\end{aligned}$$

em que na penúltima passagem somamos $\pm x_iy_iz_i$ em cada coordenada $i = 1, 2, 3$.

Pela simetria do produto interno, temos

$$\begin{aligned}
&X \times (Y \times Z) + Y \times (Z \times X) + Z \times (X \times Y) \\
&= \langle X, Z\rangle Y - \langle X, Y\rangle Z + \langle Y, X\rangle Z - \langle Y, Z\rangle X + \langle Z, Y\rangle X - \langle Z, X\rangle Y = 0
\end{aligned}$$

. Ou seja, vale a identidade de Jacobi para o produto vetorial.

Antes de apresentarmos exemplos, é necessário introduzir algumas noções que serão utilizadas com frequência ao longo deste traba-

lho, especialmente no estudo das estruturas associadas às Álgebras de Lie.

Denotamos por $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ o espaço de todas as Transformações Lineares de um espaço vetorial de dimensão n sobre o corpo $\mathbb{K}$. Em termos mais concretos, esse espaço pode ser identificado como conjunto de todas as matrizes quadradas de ordem n cujos coeficientes pertencem a $\mathbb{K}$, isto é,

$$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) = \{A = (a_{ij})_{n \times n} \mid a_{ij} \in \mathbb{K}\}.$$

Cada elemento de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ representa uma Transformação Linear que atua sobre o espaço vetorial $\mathbb{K}^n$, e as operações de adição e multiplicação escalar são as usuais das matrizes.

De modo geral, quando o espaço vetorial considerado é um espaço de dimensão finita V sobre $\mathbb{K}$, designamos por $\mathfrak{gl}(V)$ a Álgebra das Transformações Lineares de V, isto é, o conjunto de todos os operadores Lineares de V em V:

$$\mathfrak{gl}(V) = \{f : V \to V \mid f \text{ é linear}\}.$$

Nesse contexto, $\mathfrak{gl}(V)$ desempenha o mesmo papel que $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$, mas de forma abstrata, sem a necessidade de escolher uma base. Quando uma base é fixada, o operador linear pode ser representado por uma matriz, e assim obtemos uma correspondência natural entre $\mathfrak{gl}(V)$ e $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$.

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem n sobre um corpo $\mathbb{K}$. Denomina-se *traço* de A e denota-se por $\mathrm{tr}(A)$, a soma dos elementos da diagonal principal de A, isto é,

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

O traço constitui uma aplicação linear de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ em $\mathbb{K}$, pois satisfaz

as propriedades

$$\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B) \quad \text{e} \quad \operatorname{tr}(\lambda A) = \lambda \operatorname{tr}(A),$$

para quaisquer $A, B \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

Agora, podemos definir

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K}) := \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) \mid \operatorname{tr}(A) = 0\},$$

o conjunto de todas as matrizes quadradas de ordem n com coeficientes em $\mathbb{K}$ cujo traço é nulo.

Denotamos por $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{K})$ o conjunto das matrizes que preservam uma forma bilinear alternada, conhecida como forma simplética. Essa estrutura surge naturalmente em contextos em que há simetrias de natureza alternante, sendo fundamental em aplicações geométricas e físicas.

A Álgebra de Lie $\mathfrak{so}(n, \mathbb{K})$ é constituída por todas as matrizes quadradas $A \in M_n(\mathbb{K})$ que satisfazem a condição de antissimetria:

$$A^T = -A.$$

Essa relação implica que os elementos da diagonal principal de A são nulos e que os elementos abaixo da diagonal são os opostos dos correspondentes acima dela.

De forma explícita, uma matriz genérica de $\mathfrak{so}(n, \mathbb{K})$ pode ser escrita como

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbb{K}.$$

No caso particular em que $n = 3$, temos

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

Cada escolha dos parâmetros a_{12}, a_{13}, a_{23} determina uma matriz distinta de $\mathfrak{so}(3, \mathbb{K})$. Também pode ser representada por $\mathfrak{so}(3)$.

Mais geralmente, $\mathfrak{so}(p, q, \mathbb{K})$ indica a Álgebra ortogonal associada a uma forma bilinear de assinatura (p, q), isto é, com p componentes positivas e q negativas.

Observação 2.4. O colchete de Lie denotado por $[X, Y]$ representa uma operação binária em um espaço vetorial, mas, ao contrário da multiplicação usual, ele não é associativo. De fato, uma vez que $[X, X] = 0$ para qualquer elemento X em um espaço vetorial munido de um colchete de Lie, obtemos $[[X, X], Y] = 0$. Porém, $[X, [X, Y]]$ nem sempre é igual a zero.

Definição 2.5. Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie e $\mathfrak{h}$ um subespaço vetorial de $\mathfrak{g}$. Dizemos que $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ se for fechada em relação à operação de colchete de Lie, isto é,

$$[X, Y] \in \mathfrak{h}, \quad \text{para todos } X, Y \in \mathfrak{h}.$$

Em outras palavras, uma subálgebra herda a estrutura algébrica de $\mathfrak{g}$, permanecendo estável sob o colchete definido em $\mathfrak{g}$.

Veremos alguns exemplos de subálgebras da Álgebra de Lie das transformações lineares, conhecida como $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$.

Exemplo 2.6. O conjunto das matrizes antissimétricas $\mathfrak{so}(n, \mathbb{K}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) : X + X^t = 0\}$, em que X^t indica a transposta da matriz X, é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$.

De fato, se X e Y são matrizes antissimétricas, então $X+X^t = 0$ e $Y+Y^t = 0$. Calculando o colchete de Lie de X e Y temos o seguinte:

$$[X, Y] = XY - YX.$$

Agora, aplicando a transposta de $[X, Y]$ temos que

$$[X, Y]^t = (XY - YX)^t = Y^t X^t - X^t Y^t.$$

Substituindo $X^t = -X$ e $Y^t = -Y$ obtemos

$$[X, Y]^t = (-Y)(-X) - (-X)(-Y) = YX - XY = [Y, X] = -[X, Y].$$

Logo, $\mathfrak{so}(n, \mathbb{K})$ é fechada sob a operação de colchete de Lie e, portanto, uma subálgebra de Lie.

Exemplo 2.7. O espaço das matrizes simétricas $\{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) : X = X^t\}$ não é uma subálgebra de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ se $n \geq 2$. De fato, se X e Y são simétricas, então $[X, Y]$ é antissimétrica:

$$\begin{aligned}[X, Y]^t &= (XY - YX)^t = Y^t X^t - X^t Y^t \\ &= YX - XY = [Y, X] = -[X, Y].\end{aligned}$$

Exemplo 2.8. $\mathfrak{sl}(n, K) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, K) : \operatorname{tr} X = 0\}$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$.

De fato, sejam X e Y matrizes com traço zero, ou seja, $\operatorname{tr}(X) = 0$ e $\operatorname{tr}(Y) = 0$. Podemos observar, usando propriedade da função tr, que

$$\operatorname{tr}([X, Y]) = \operatorname{tr}(XY - YX) = \operatorname{tr}(XY) - \operatorname{tr}(YX) = 0,$$

ou seja, $[X, Y]$ tem traço zero. Portanto, $\mathfrak{sl}(n, K)$ é fechado sob a operação de colchetes de Lie.

Exemplo 2.9. Seja $\mathrm{So}(p, q, \mathbb{K}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) : XJ + JX^t = 0\}$, onde $J = \begin{pmatrix} -I_{p\times p} & 0 \\ 0 & I_{q\times q} \end{pmatrix}$. Os casos $p = 0$ ou $q = 0$ se reduzem a

$\mathrm{So}(n)$. Utilizando o fato de que $J^2 = I$, obtemos $X \in \mathrm{So}(p, q, \mathbb{K})$ se, e somente se, $X^t = -JXJ$.

Para demonstrar que o subespaço $\mathrm{So}(p, q, \mathbb{K})$ é uma subálgebra de Lie, precisamos mostrar que é fechado sob o colchete de Lie, definido como $[X, Y] = XY - YX$ para $X, Y \in \mathrm{So}(p, q, \mathbb{K})$.

Usando a condição $XJ + JX^t = 0$, podemos expressar X^t em termos de X e J: $X^t = -J^{-1}XJ$ e $J = -JXJ$, já que $J^2 = I$.

Sejam $X, Y \in \mathrm{So}(p, q, \mathbb{K})$. Então $X^t = -JXJ$ e $Y^t = -JYJ$. Precisamos verificar que $[X, Y] \in \mathrm{So(p, q, \mathbb{K})}$.

Calculamos primeiro a transposta:

$$\begin{aligned}[X, Y]^t &= (XY - YX)^t = Y^tX^t - X^tY^t \\ &= (-JYJ)(-JXJ) - (-JXJ)(-JYJ) \\ &= JYJJXJ - JXJJYJ = J(YJXJ - XJYJ)J.\end{aligned}$$

Substituindo na condição para pertencer a $\mathfrak{so}(p, q, \mathbb{K})$:

$$\begin{aligned}[X, Y]J + J[X, Y]^t &= (XY - YX)J + J(JYJJXJ - JXJJYJ) \\ &= (XY - YX)J + JYJJXJ - JXJJYJ \\ &= (XY - YX)J + J(YJXJ - XJYJ)J\end{aligned}$$

Agora, $XJ + JX^t = 0$ implica $XJ = -JX^t$ e $YJ = -JY^t$. Substituindo, concluímos que $[X, Y]J + J[X, Y]^t = 0$, ou seja, $[X, Y] \in \mathrm{So}(p, q, \mathbb{K})$. Portanto $\mathrm{So}(p, q, \mathbb{K})$ é uma subálgebra de Lie.

O exemplo a seguir introduz uma situação particular dentro da teoria das Álgebras de Lie, na qual o colchete entre quaisquer dois elementos se anula.

Exemplo 2.10. Uma Álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é denominada *abeliana* quando, para todos os elementos $X, Y \in \mathfrak{g}$, tem-se

$$[X, Y] = 0.$$

Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie. Se $\dim(\mathfrak{g}) = 1$, então $\mathfrak{g}$ é abeliana. De fato, seja $\{U\}$ uma base de $\mathfrak{g}$. Assim, dados $X, Y \in \mathfrak{g}$, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tais que $X = \alpha U \quad \text{e} \quad Y = \beta U$. Logo, $[X, Y] = [\alpha U, \beta U] = \alpha\beta[U, U] = 0$. Portanto, toda Álgebra de Lie de dimensão 1 é abeliana.

Além disso, se $\mathfrak{h}$ é uma Álgebra de Lie qualquer, então todo subespaço vetorial de dimensão 1 de $\mathfrak{h}$ também será uma Álgebra abeliana. Isso decorre do fato de que, para qualquer elemento gerador U desse subespaço, o colchete $[U, U]$ se anula, preservando a propriedade abeliana.

Essa condição implica que todos os elementos da Álgebra comutam entre si, eliminando qualquer forma de interação não comutativa. Nesse contexto, o colchete de Lie deixa de representar variações ou dependências internas, e a estrutura passa a apresentar um comportamento completamente regular.

Exemplo 2.11. $D(n, \mathbb{K}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) \mid A \text{ é diagonal}\}$ é uma subálgebra abeliana de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$. De fato, sejam $A, B \in D(n, \mathbb{K})$. Escrevemos

$$A = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n) \text{ e } B = \operatorname{diag}(b_1, \ldots, b_n),$$

com $a_i, b_i \in \mathbb{K}$ para $i = 1, \ldots, n$. O produto matricial de A por B é a matriz diagonal cujas entradas na diagonal são os produtos $a_i b_i$, isto é,

$$AB = \operatorname{diag}(a_1 b_1, \ldots, a_n b_n).$$

De modo análogo,

$$BA = \operatorname{diag}(b_1 a_1, \ldots, b_n a_n) = \operatorname{diag}(a_1 b_1, \ldots, a_n b_n) = AB,$$

pois a multiplicação em $\mathbb{K}$ é comutativa. Assim $AB = BA$ e, portanto, o comutador

$$[A, B] = AB - BA$$

é a matriz zero.

2.2 CLASSIFICAÇÃO DE ÁLGEBRAS DE LIE UNI E BIDIMENSIONAIS

Ao examinar as estruturas de Lie, é útil começar o estudo pelos casos de menor dimensão, uma vez que é neles que se revelam as características fundamentais que direcionam toda a teoria. Portanto, vamos considerar as Álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensão até dois.

Como já demonstrado, no caso unidimensional, toda Álgebra de Lie é necessariamente abeliana, pois o colchete entre quaisquer dois elementos se anula. Esse é o exemplo mais básico e funciona como ponto de partida para o estudo de estruturas mais complexas.

Para a segunda dimensão, existem duas possibilidades diferentes: a Álgebra pode permanecer abeliana se o colchete de Lie for nulo, ou pode ter uma relação de colchete não trivial, levando a uma estrutura que não é comutativa. Essa variação constitui o primeiro sinal de diversidade estrutural na teoria, evidenciando que até mesmo em dimensões pequenas podem emergir comportamentos consideravelmente distintos:

1. Se a dimensão da Álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é 1 então, como vimos anteriormente, quaisquer elementos $X, Y \in \mathfrak{g}$ podem ser escritos como $X = cZ$ e $Y = dZ$, onde c e d são escalares e Z é um elemento de base de $\mathfrak{g}$. O colchete de Lie de dois elementos quaisquer de $\mathfrak{g}$ por $[X, Y] = 0$ pois, $[cZ, dZ] = cd[Z, Z] = 0$, já que o colchete de Lie é anti-simétrico ($[Z, Z] = -[Z, Z] = 0$) portanto, $\mathfrak{g}$ é abeliana.

2. Se a $\dim \mathfrak{g} = 2$, existem duas possibilidades:

i) $\mathfrak{g}$ é abeliana, neste caso, o colchete de Lie de quaisquer dois elementos de $\mathfrak{g}$ é zero, ou seja, $[X, Y] = 0$ para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{g}$. Isso representa uma Álgebra abeliana.

ii) Existe uma base $\{X, Y\}$ de $\mathfrak{g}$ tal que $[X, Y] = Y$. E a partir

daí, o colchete de dois elementos quaisquer de $\mathfrak{g}$ é dado por

$$\begin{aligned}
[aX + bY, cX + dY] &= [aX, cX + dY] + [bY, cX + dY] \\
&= [aX, cX] + [aX, dY] + [bY, cX] + [bY, dY] \\
&= ac[X, X] + ad[X, Y] + bc[Y, X] + bd[Y, Y] \\
&= ad[X, Y] + bc[Y, X] \\
&= ad[X, Y] - bc[X, Y] \\
&= (ad - bc)[X, Y] \\
&= (ad - bc)Y
\end{aligned}$$

Agora, para encontrar tal base, vamos supor que $\mathfrak{g}$ não seja abeliana e considere uma base $\{X_0, Y_0\}$ de $\mathfrak{g}$. Nesse caso, tem-se que $[X_0, Y_0] \neq 0$ pois, caso contrário, $\mathfrak{g}$ seria abeliana. Definindo $Y' = [X_0, Y_0]$, escolhemos X' de modo que $\{X', Y'\}$ forme uma base de $\mathfrak{g}$. Assim, existem escalares $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ tais que

$$X' = aX_0 + bY_0 \quad \text{e} \quad Y' = cX_0 + dY_0.$$

Note que

$$[X', Y'] = \alpha Y' para\ \alpha = (ad - bc)$$

com $\alpha \neq 0$ pois, se $\alpha = 0$, teríamos uma Álgebra abeliana, o que contradiz a hipótese. Portanto, definindo $X = \frac{1}{\alpha}X'$ e $Y = Y'$, obtemos uma base $\{X, Y\}$ tal que

$$[X, Y] = Y,$$

a qual caracteriza as Álgebras de Lie bidimensionais não abelianas. Segue o exemplo abaixo de duas Álgebras bidimensionais que não são abelianas.

Exemplo 2.12. Considere

$$\mathfrak{g}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{K} \right\} \text{ e } \mathfrak{g}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{K} \right\},$$

que são Álgebras bidimensionais não-abelianas. Para cada uma delas, vamos calcular a base $\{X, Y\}$ tal que $[X, Y] = Y$.

Para $\mathfrak{g}_1$, tome $X' = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$ e $Y' = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ uma base de $\mathfrak{g}_1$. Usando a definição de colchete temos

$$\begin{aligned}
[X', Y'] &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & ab \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -ab \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2ab \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 2aY'
\end{aligned}$$

Uma vez que $\alpha = 2a$, tomemos

$$X = \frac{1}{2a}X' = \frac{1}{2a}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

e $Y = Y' = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Para $\mathfrak{g}_2$, tome

$$X' = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } Y' = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
[X', Y'] &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & ab \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ab \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = aY
\end{aligned}$$

Logo, $X = \frac{1}{\alpha}X' = \frac{1}{a}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $Y = Y' = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.3 HOMOMORFISMOS

Nesta fase do estudo, focamos em um conceito na teoria das Álgebras de Lie chamado homomorfismo. Essa aplicação é relevante porque cria uma correspondência entre duas Álgebras de Lie, garantindo que a estrutura algébrica, especialmente a operação de colchete, seja mantida.

A análise dos homomorfismos facilita a compreensão das relações entre diferentes Álgebras, permitindo a comparação de suas características estruturais e a criação de novas a partir de outras já existentes. Ademais, esse conceito é necessário para a definição de isomorfismos, quocientes e ideais, expandindo consideravelmente o campo de uso das Álgebras de Lie.

Definição 2.13. Sejam $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ álgebras de Lie sobre um corpo $\mathbb{K}$. Um homomorfismo de álgebras de Lie é uma aplicação linear $\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ tal que preserva o colchete de Lie, isto é,

$$\varphi([X, Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)], \quad \forall\, X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Se $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ é um homomorfismo de álgebras de Lie, então,

- o núcleo de φ, $\ker(\varphi) = \{X \in \mathfrak{g} \mid \varphi(X) = 0\}$, é um ideal de $\mathfrak{g}$;
- a imagem de φ, $\mathrm{im}(\varphi) = \{\varphi(X) \mid X \in \mathfrak{g}\}$, é uma subálgebra de $\mathfrak{h}$;
- se φ é bijetiva, então ela é chamada de isomorfismo de Álgebras de Lie;
- quando o domínio e o contradomínio são iguais, ou seja, quando $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$, o isomorfismo φ é denominado automorfismo de Álgebras de Lie.

Exemplo 2.14. Seja $\varphi : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ a Transformação Linear definida por $\varphi(A) = \mathrm{tr}(A)$, que associa a cada matriz $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ o seu traço. Como é sabido que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ para quaisquer $A, B \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$, e que $\mathbb{K}$ é uma Álgebra de Lie abeliana (uma vez que $\dim(\mathbb{K}) = 1$), temos $\varphi([A, B]) = \varphi(AB - BA) = \mathrm{tr}(AB - BA) = \mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(BA) = 0$. Por outro lado, verifica-se que $[\varphi(A), \varphi(B)] = [\mathrm{tr}(A), \mathrm{tr}(B)] = \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B) - \mathrm{tr}(B)\mathrm{tr}(A) = 0$. Portanto, φ preserva a operação de colchete e, consequentemente, é um homomorfismo de Álgebras de Lie.

Exemplo 2.15. Seja $P \in \mathfrak{gl}(V)$ uma Transformação Linear invertível. A aplicação

$$\Phi_P : \mathfrak{gl}(V) \longrightarrow \mathfrak{gl}(V), \qquad \Phi_P(A) = PAP^{-1},$$

é um Automorfismo de $\mathfrak{gl}(V)$.

Inicialmente, verifiquemos a linearidade. Para quaisquer $A, B \in \mathfrak{gl}(V)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}\Phi_P(\alpha A + \beta B) &= P(\alpha A + \beta B)P^{-1} = \alpha PAP^{-1} + \beta PBP^{-1} \\ &= \alpha\Phi_P(A) + \beta\Phi_P(B).\end{aligned}$$

Logo, Φ_P é linear.
Em seguida, mostremos que Φ_P é bijetiva. Defina $\Psi = \Phi_{P^{-1}}$ por $\Psi(X) = P^{-1}XP$. Então

$$\Psi(\Phi_P(A)) = P^{-1}(PAP^{-1})P = A$$

e

$$\Phi_P(\Psi(A)) = P(P^{-1}AP)P^{-1} = A,$$

para todo $A \in \mathfrak{gl}(V)$. Assim $\Psi = \Phi_P^{-1}$, ou seja, Φ_P é invertível.

Finalmente, verifiquemos que Φ_P preserva o colchete de Lie. Dados $A, B \in \mathfrak{gl}(V)$,

$$\begin{aligned}\Phi_P([A,B]) &= P(AB-BA)P^{-1} = PABP^{-1} - PBAP^{-1} \\ &= PAP^{-1}\,PBP^{-1} - PBP^{-1}\,PAP^{-1} = [\Phi_P(A), \Phi_P(B)].\end{aligned}$$

Portanto, Φ_P é um homomorfismo de Álgebras de Lie e, como é invertível, então, é um automorfismo de $\mathfrak{gl}(V)$.

A seguir, analisaremos algumas estruturas eficazes que definem explicitamente a operação de colchete em relação a uma base fixa do espaço vetorial que a caracteriza, denominadas constantes de estruturas.

Definição 2.16. Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie de dimensão n sobre um corpo $\mathbb{K}$, e seja $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ uma base de $\mathfrak{g}$. Como o colchete de Lie é bilinear e interno em $\mathfrak{g}$, para quaisquer índices i, j existem escalares $c_{ij}^k \in \mathbb{K}$ tais que

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k e_k.$$

Os números c_{ij}^k são chamados de constantes de estrutura das álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ na base escolhida.

Na álgebra, a operação de colchete é totalmente definida por essas constantes. Uma vez determinados os c_{ij}^k, todas as relações de comutação entre os elementos da base podem ser reconstruídas, assim como toda a estrutura da álgebra.

Ademais, as características essenciais do colchete de Lie, a saber, antissimetria e identidade de Jacobi, impõem limitações sobre as constantes de estrutura:

$$c_{ij}^k = -c_{ji}^k \quad \text{e} \quad \sum_{l=1}^{n} \left(c_{ij}^l c_{lk}^m + c_{jk}^l c_{li}^m + c_{ki}^l c_{lj}^m\right) = 0.$$

Exemplo 2.17. Considere $\mathbb{R}^3$ com o colchete dado pelo produto vetorial $[x, y] = x \times y$. Tomando a base canônica $\{e_1, e_2, e_3\}$, escrevemos as constantes de estrutura c_{ij}^k pela relação

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^{3} c_{ij}^k \, e_k, \qquad i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

A partir das igualdades

$$e_1 \times e_2 = e_3, \quad e_2 \times e_3 = e_1, \quad e_3 \times e_1 = e_2,$$

e da antissimetria do produto vetorial, obtemos imediatamente os únicos coeficientes não nulos:

$$\begin{aligned} c_{12}^3 &= 1, & c_{21}^3 &= -1, \\ c_{23}^1 &= 1, & c_{32}^1 &= -1, \\ c_{31}^2 &= 1, & c_{13}^2 &= -1. \end{aligned}$$

Todos os demais c_{ij}^k são iguais a zero.

Exemplo 2.18. Consideremos a álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, formada pelas matrizes reais 2×2 de traço nulo. Tomando a base:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

calculamos o colchete matricial $[A, B] = AB - BA$.
O cálculo direto fornece

$$[E_1, E_2] = E_3, \qquad [E_3, E_1] = 2E_1, \qquad [E_2, E_3] = 2E_2.$$

De acordo com os resultados obtidos, temos

$$\begin{aligned} c_{12}^3 &= 1, & c_{21}^3 &= -1, \\ c_{31}^1 &= 2, & c_{13}^1 &= -2, \end{aligned}$$

$$c_{23}^2 = 2, \qquad c_{32}^2 = -2.$$

Todos os demais coeficientes c_{ij}^k são nulos. Essas constantes obedecem a antissimetria $c_{ij}^k = -c_{ji}^k$ e satisfazem a identidade de Jacobi, confirmando que os elementos E_1, E_2, E_3 formam uma base da Álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

Teorema 2.19. *Sejam $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ Álgebras de Lie de dimensão n sobre um corpo $\mathbb{K}$. Então $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ são isomorfas se, e somente se, existem bases $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de $\mathfrak{g}$ e $\{f_1, \ldots, f_n\}$ de $\mathfrak{h}$ tais que as constantes de estrutura correspondentes coincidam, ou seja,*

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k e_k \quad e \quad [f_i, f_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k f_k,$$

para todos $i, j = 1, \ldots, n$.

Demonstração. Suponha que $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ sejam isomorfas e seja $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ um isomorfismo de Álgebras de Lie. Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base de $\mathfrak{g}$ e defina $f_i = \varphi(e_i)$. Então,

$$\varphi([e_i, e_j]) = [\varphi(e_i), \varphi(e_j)] = [f_i, f_j].$$

Como $[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k e_k$, temos

$$[f_i, f_j] = \varphi([e_i, e_j]) = \varphi\Big(\sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k e_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k \varphi(e_k) = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k f_k,$$

mostrando que $\mathfrak{h}$ possui as mesmas constantes de estrutura.

Suponha que existam bases $\{e_i\}$ em $\mathfrak{g}$ e $\{f_i\}$ em $\mathfrak{h}$ com constantes de estrutura coincidentes c_{ij}^k. Defina $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ por $\varphi(e_i) = f_i$ e estenda linearmente. Então,

$$\varphi([e_i, e_j]) = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k f_k = [f_i, f_j] = [\varphi(e_i), \varphi(e_j)].$$

Portanto, φ preserva o colchete e é bijetiva, ou seja, é um isomorfismo de Álgebras de Lie. □

2.4 IDEAL

No estudo das subálgebras, uma estrutura importante é o ideal. Ele é essencial para entender a estrutura interna das Álgebras de Lie, pois possibilita a definição de quociente. Na prática, os ideais são subálgebras que se mantêm inalteradas sob o colchete com qualquer elemento da Álgebra.

Definição 2.20. Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie e $\mathfrak{h}$ um subespaço vetorial de $\mathfrak{g}$. Dizemos que $\mathfrak{h}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$ se $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ para todo $X \in \mathfrak{g}$ e $Y \in \mathfrak{h}$. Em outras palavras, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] = \{[X, Y] \mid X \in \mathfrak{g},\, Y \in \mathfrak{h}\} \subseteq \mathfrak{h}$.

Exemplo 2.21. Em qualquer Álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, os subespaços $\{0\}$ e $\mathfrak{g}$ são ideais triviais.

1. No caso em que $\mathfrak{h} = \{0\}$, $[X, 0] = 0 \in \mathfrak{h}$ para todo $X \in \mathfrak{g}$. Logo, $\{0\}$ é um ideal.

2. Suponha, por absurdo, que $\mathfrak{g}$ não seja um ideal de $\mathfrak{g}$. Então existiriam $X \in \mathfrak{g}$ e $Y \in \mathfrak{g}$ tais que $[X, Y] \notin \mathfrak{g}$, o que contraria a definição de colchete de Lie. Portanto, $\mathfrak{g}$ é um ideal de si mesma.

Em particular, todo ideal é uma subálgebra, mas nem toda subálgebra é um ideal. Para verificar esta situação, considere $\mathfrak{so}(2, \mathbb{R})$, a subálgebra das matrizes anti-simétricas de ordem 2:

$$\mathfrak{so}(2, \mathbb{R}) = \{A \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}) \mid A^t = -A\}.$$

Temos que $\mathfrak{so}(2, \mathbb{R})$ não é um ideal de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$. De fato, sejam

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(2, \mathbb{R}) \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}).$$

Note que

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \notin \mathfrak{so}(2, \mathbb{R}).$$

Proposição 2.22. *Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie abeliana. Então todo subespaço $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ é um ideal.*

Demonstração. Se $X \in \mathfrak{h}$ e $Y \in \mathfrak{g}$ temos que $[X, Y] = 0 \in \mathfrak{h}$. □

Proposição 2.23. *A soma e a intersecção de dois ideais de uma Álgebra de Lie ainda é um ideal dessa Álgebra de Lie.*

Demonstração. Sejam $\mathfrak{h}_1$ e $\mathfrak{h}_2$ ideais da Álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. É claro que a soma e a intersecção de dois subespaços é um subespaço. Sendo assim, dados $X \in \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ e $Y \in \mathfrak{g}$, temos $X = X_1 + X_2$ com $X_1 \in \mathfrak{h}_1$ e $X_2 \in \mathfrak{h}_2$. Então, $[X, Y] = [X_1 + X_2, Y] = [X_1, Y] + [X_2, Y] \in \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$.

Além disso, tomando $X \in \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$ e $Y \in g$ temos que $X \in \mathfrak{h}_1$ e $X \in \mathfrak{h}_2$. Então, $[X, Y] \in \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$. □

2.5 CENTRALIZADOR

Depois de verificamos os ideais e sua relevância na estrutura das Álgebras de Lie, apresentaremos outro conceito interessante, o centralizador. Essa construção caracteriza o conjunto de elementos de uma Álgebra de Lie que comutam com todos os elementos de um subconjunto específico.

Definição 2.24. Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie e $\mathfrak{h}$ um subconjunto de $\mathfrak{g}$. O centralizador de $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{g}$ é o conjunto

$$C(\mathfrak{h}) = \{X \in \mathfrak{g};\ [X, Y] = 0,\ \text{para todo } Y \in \mathfrak{h}\}$$

Definição 2.25. Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie. O centralizador de $\mathfrak{g}$ em $\mathfrak{g}$ é chamado centro de $\mathfrak{g}$ e é denotado por

$$C(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g};\ [X, Y] = 0,\ \text{para todo } Y \in \mathfrak{g}\}$$

Proposição 2.26. *Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie e $\mathfrak{h}$ um ideal de $\mathfrak{g}$. Então, $C(\mathfrak{h})$ é um ideal de $\mathfrak{g}$.*

Demonstração. Para que $C(\mathfrak{h})$ seja um ideal, primeiro devemos garantir que ele seja um subespaço vetorial de $\mathfrak{g}$. Com isso, precisamos verificar se ele satisfaz as condições básicas de um subespaço vetorial:

(a) o vetor nulo pertence a $C(\mathfrak{h})$;

(b) fechamento sob adição: Se $X, X' \in C(\mathfrak{h})$, então $X + X' \in C(\mathfrak{h})$;

(c) fechamento sob multiplicação por escalar: Se $X \in C(\mathfrak{h})$ e λ é um escalar, então $\lambda X \in C(\mathfrak{h})$.

Como $0 \in \mathfrak{g}$ e comuta com todos elementos de $\mathfrak{h}$, então $0 \in C(\mathfrak{h})$.

Sejam $X, X' \in C(\mathfrak{h})$. Para todo $Y \in \mathfrak{h}$ temos $[X, Y] = 0$ e $[X', Y] = 0$. Queremos mostrar que $X + X' \in C(\mathfrak{h})$, ou seja, que $[X + X', Y] = 0$ para todo $Y \in \mathfrak{h}$. Usando a bilinearidade do colchete, temos

$$[X + X', Y] = [X, Y] + [X', Y] = 0 + 0 = 0.$$

Portanto, $X + X' \in C(h)$.

Agora, sejam $X \in C(\mathfrak{h})$ e λ um escalar. Queremos mostrar que $\lambda X \in C(\mathfrak{h})$, ou seja, para todo $Y \in \mathfrak{h}$, $[\lambda X, Y] = 0$. Pela bilinearidade do colchete obtemos

$$[\lambda X, Y] = \lambda[X, Y] = \lambda \cdot 0 = 0.$$

Portanto, $\lambda X \in C(\mathfrak{h})$ e, assim, $C(\mathfrak{h})$ é um subespaço vetorial de $\mathfrak{g}$.

Dada a esta análise, vamos mostrar que $C(\mathfrak{h})$ é um ideal de $\mathfrak{g}$. Para que $C(\mathfrak{h})$ seja um ideal de $\mathfrak{g}$, devemos verificar que, para qualquer $X \in C(\mathfrak{h})$ e qualquer $Y \in \mathfrak{g}$, $[X, Y] \in C(\mathfrak{h})$, para todo $Y \in \mathfrak{g}$.

Seja $z \in \mathfrak{h}$. Precisamos verificar que $[[X, Y], Z] = 0$. Usando a identidade de Jacobi para os elementos X, Y e Z, temos que:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

Como $X \in C(\mathfrak{h})$, temos que $[X, Z] = 0$. Sendo assim, a equação de Jacobi se reduz a:

$$[x, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

Como $Z \in \mathfrak{h}$, um ideal de $\mathfrak{g}$, então $[Y, Z] \in \mathfrak{h}$. Logo, $[X, [Y, Z]] = 0$. Isso mostra que $[X, Y]$ anula os elementos de $\mathfrak{h}$, ou seja, $[X, Y] \in C(\mathfrak{h})$ e, portanto, é um ideal de $\mathfrak{g}$. □

Proposição 2.27. *Em uma Álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ bidimensional e não abeliana, o centro é formado apenas pelo vetor nulo.*

Demonstração. Como $\mathfrak{g}$ não é abeliana, existe pelo menos um par de elementos $X, Y \in \mathfrak{g}$ tal que $[X, Y] \neq 0$. Seja $\{e_1, e_2\}$ uma base de $\mathfrak{g}$. Como a Álgebra é não abeliana, podemos supor que $[e_1, e_2] = \alpha e_1 + \beta e_2$ pelo menos um dos coeficientes α ou β não nulo. Agora, suponha que $Z \in C(\mathfrak{g})$, ou seja, Z deve comutar com qualquer elemento da álgebra. Em particular, $[Z, e_1] = 0; [Z, e_2] = 0$. Suponha que $Z = ae_1 + be_2$. Com isso, temos

$$\begin{aligned} 0 = [Z, e_1] &= [ae_1 + be_2, e_1] = a[e_1, e_1] + b[e_2, e_1] \\ &= 0 + b[e_2, e_1] = -b[e_1, e_2] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 0 = [Z, e_2] &= [ae_1 + be_2, e_2] = a[e_1, e_2] + b[e_2, e_2] \\ &= a[e_1, e_2] + 0 = a[e_1, e_2] \end{aligned}$$

Logo, $-b[e_1, e_2] = 0$ e $a[e_1, e_2] = 0$. Porém, $[e_1, e_2] \neq 0$ pois g é não abeliana. Assim, a única solução para essas equações é $a = b = 0$, ou seja, $Z = 0$. Portanto, $C(\mathfrak{g}) = \{0\}$. □

2.6 QUOCIENTE

Prosseguindo com o estudo dos ideais, apresentamos agora o conceito de quociente, que é importante na análise estrutural dessa teoria. A formação do quociente possibilita a criação de novas Álgebras de Lie a partir de outras previamente conhecidas, de maneira semelhante ao que acontece com grupos e anéis.

Como é comum na formação de quocientes, é necessário garantir que essa operação seja bem definida, ou seja, que o resultado não dependa da seleção dos representantes X e Y. Após a demonstração dessa propriedade, o espaço $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ adquire de forma natural uma estrutura de Álgebra de Lie.

Essa construção é essencial para o estudo de isomorfismos, representações e classificação das Álgebras de Lie, pois possibilita uma análise mais simples e estruturada de seus componentes.

Definição 2.28. Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie e $\mathfrak{h}$ um ideal de $\mathfrak{g}$, podemos definir o espaço quociente da seguinte forma

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{h} = \{x + \mathfrak{h}; x \in \mathfrak{g}\}$$

Podemos observar que $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ é um espaço vetorial com as operações definidas por

$$(x + \mathfrak{h}) + (y + \mathfrak{h}) = (x + y) + \mathfrak{h}$$

e

$$\alpha(x + \mathfrak{h}) = (\alpha x) + \mathfrak{h}.$$

Exemplo 2.29. Considere a Álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, o conjunto das matrizes reais $n \times n$, com colchete definido por

$$[X, Y] = XY - YX.$$

Seja $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, o conjunto das matrizes de traço nulo. Como já visto, $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ é um ideal de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, pois

$$\mathrm{tr}([X, Y]) = 0, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}).$$

O espaço quociente

$$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})/\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$$

é formado pelas classes laterais $X + \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$.

Observa-se que duas matrizes pertencem à mesma classe se, e somente se, possuem o mesmo traço. Dessa forma, esse quociente é isomorfo a $\mathbb{R}$.

Portanto, o quociente $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})/\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ é uma Álgebra de Lie abeliana unidimensional.

Exemplo 2.30. Considere a Álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^3$ munida do colchete trivial,

$$[x, y] = 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^3.$$

Nesse caso, $\mathfrak{g}$ é uma Álgebra de Lie abeliana.

Seja $\mathfrak{h} = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$, que é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$. Como o colchete é nulo, todo subespaço é automaticamente um ideal. Logo, $\mathfrak{h}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$.

O quociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ é formado pelas classes

$$(x, y, z) + \mathfrak{h} = (0, 0, z) + \mathfrak{h},$$

isto é, cada classe é determinada apenas pela terceira coordenada.

Proposição 2.31. *Sejam* $\mathfrak{g}$ *uma Álgebra de Lie e* $\mathfrak{h}$ *um ideal de* $\mathfrak{g}$. *Então,* $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ *é uma Álgebra de Lie com o colchete*

$$[(X+\mathfrak{h}),(Y+\mathfrak{h})] = [X,Y]+\mathfrak{h}$$

.

Demonstração. Inicialmente, devemos verificar que o colchete acima está bem definido, ou seja, independe do representante. Suponha que $(X+\mathfrak{h}) = (x_1+\mathfrak{h})$ e $(Y+\mathfrak{h}) = (y_1+\mathfrak{h})$. Disso segue que $x - x_1 \in \mathfrak{h}$ e $y - y_1 \in \mathfrak{h}$. Logo, podemos escrever $x = x_1 + z_1$ e $y = y_1 + z_2$, com $z_1, z_2 \in \mathfrak{h}$.

Assim, temos

$$[X,Y]+\mathfrak{h} = [x_1+z_1,\, y_1+z_2]+\mathfrak{h} = [x_1,y_1]+[x_1,z_2]+[z_1,y_1]+[z_1,z_2]+\mathfrak{h}.$$

Como $\mathfrak{h}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$, segue que $[x_1,z_2],[z_1,y_1],[z_1,z_2] \in \mathfrak{h}$. Portanto,

$$[X,Y]+\mathfrak{h} = [x_1,y_1]+\mathfrak{h},$$

o que mostra que o colchete é bem definido no quociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.

Agora vamos ver se satisfaz a operação de colchete definida em $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$:
Bilinearidade:

$$\begin{aligned}
&[\alpha(X+\mathfrak{h})+\beta(Y+\mathfrak{h}),\, Z+\mathfrak{h}] = [(\alpha X+\beta Y)+\mathfrak{h}, Z+\mathfrak{h}]\\
=&[(\alpha X+\beta Y),Z]+\mathfrak{h} = [\alpha X,Z]+[\beta Y,Z]+\mathfrak{h}\\
=&\alpha[X,Z]+\mathfrak{h}+\beta[Y,Z]+\mathfrak{h} = \alpha[(X+\mathfrak{h}),Z+\mathfrak{h}]+\beta[(Y+\mathfrak{h}),Z+\mathfrak{h}].
\end{aligned}$$

Analogamente, é provada a linearidade para a segunda entrada. Portanto, o colchete em $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ preserva a bilinearidade herdada da Álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.
Antissimetria:

Dados $X+\mathfrak{h}, Y+\mathfrak{h} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, pela definição do colchete no quociente e antissimetria do colchete em $\mathfrak{g}$, obtemos

$$\begin{aligned}[(X+\mathfrak{h}),(Y+\mathfrak{h})] &= [X,Y]+\mathfrak{h} = -[Y,X]+\mathfrak{h} \\ &= -\big([Y,X]+\mathfrak{h}\big) = -[(Y+\mathfrak{h}),(X+\mathfrak{h})].\end{aligned}$$

Portanto, $[(X+\mathfrak{h}),(Y+\mathfrak{h})] = -[(Y+\mathfrak{h}),(X+\mathfrak{h})]$, o que mostra a antissimetria do colchete em $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.
Identidade de Jacobi:

Sejam $X+\mathfrak{h}, Y+\mathfrak{h}, Z+\mathfrak{h} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Considere a soma cíclica em $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$:

$$\big[[X+\mathfrak{h},Y+\mathfrak{h}],Z+\mathfrak{h}\big]+\big[[Y+\mathfrak{h},Z+\mathfrak{h}],X+\mathfrak{h}\big]+\big[[Z+\mathfrak{h},X+\mathfrak{h}],Y+\mathfrak{h}\big].$$

Pela definição do colchete, cada termo corresponde à classe do colchete de representantes em $\mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned}&\big[[X,Y]+\mathfrak{h},\ Z+\mathfrak{h}\big]+\big[[Y,Z]+\mathfrak{h},\ X+\mathfrak{h}\big]+\big[[Z,X]+\mathfrak{h},\ Y+\mathfrak{h}\big] \\ &\qquad = \big([[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y]\big)+\mathfrak{h}.\end{aligned}$$

Como a identidade de Jacobi é satisfeita em $\mathfrak{g}$, temos

$$[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y] = 0 \quad \text{em } \mathfrak{g}.$$

Logo, a soma cíclica acima é a classe zero em $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Portanto,

$$\big[[X+\mathfrak{h},Y+\mathfrak{h}],Z+\mathfrak{h}\big]+\big[[Y+\mathfrak{h},Z+\mathfrak{h}],X+\mathfrak{h}\big]+\big[[Z+\mathfrak{h},X+\mathfrak{h}],Y+\mathfrak{h}\big] = \mathfrak{h},$$

o que mostra que a identidade de Jacobi vale em $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. □

Observação 2.32. É fundamental que $\mathfrak{h}$ seja um ideal de $\mathfrak{g}$. Se fosse apenas uma subálgebra, o colchete poderia não estar bem definido, pois diferentes representantes das classes poderiam produzir resultados distintos.

2.7 TEOREMAS DE ISOMORFISMO

Retomando o estudo dos homomorfismos de Álgebras de Lie, examinaremos agora alguns resultados significativos que investigam suas características estruturais. Posteriormente, introduziremos os Teoremas de Isomorfismo, que definem conexões significativas entre quocientes, imagens e núcleos de homomorfismos. Esses teoremas são fundamentais para entender as correspondências entre os resultados de diferentes Álgebras de Lie e para caracterizar suas estruturas internas.

Proposição 2.33. *Seja $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ um homomorfismo de Álgebras de Lie e suponha que $\mathfrak{h}$ seja abeliana. Então,* $\ker \psi$ *contém todos os comutadores $[X, Y]$ com $X, Y \in \mathfrak{g}$, ou seja, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subseteq \ker \psi$.*

Demonstração. Para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{g}$, pela propriedade de homomorfismo,

$$\psi([X, Y]) = [\psi(X), \psi(Y)].$$

Como $\mathfrak{h}$ é abeliana, o colchete em $\mathfrak{h}$ é sempre nulo, isto é $[\psi(X), \psi(Y)] = 0$. Portanto $\psi([X, Y]) = 0$, logo $[X, Y] \in \ker \psi$. Como isso vale para todos X, Y, temos que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subseteq \ker \psi$. □

Proposição 2.34. *Seja $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ um homomorfismo de Álgebras de Lie. Então,*

1. $\ker \psi$ *é um ideal de $\mathfrak{g}$;*
2. $\operatorname{im} \psi$ *é uma subálgebra de $\mathfrak{h}$.*

Demonstração. 1. Como ψ é linear, $\ker \psi$ é um subespaço vetorial de $\mathfrak{g}$. Sejam $x \in \ker \psi$ e $y \in \mathfrak{g}$. Então

$$\psi([y, x]) = [\psi(y), \psi(x)] = [\psi(y), 0] = 0,$$

logo $[y, x] \in \ker \psi$ para todo $y \in \mathfrak{g}$. Portanto $\ker \psi$ é um ideal.

2. Sejam $a, b \in \operatorname{im}\psi$, então existem $x, y \in \mathfrak{g}$ com $a = \psi(x)$ e $b = \psi(y)$. Temos

$$[a, b] = [\psi(x), \psi(y)] = \psi([x, y]) \in \operatorname{im}\psi,$$

mostrando que $\operatorname{im}\psi$ é fechada pelo colchete. Assim, $\operatorname{im}\psi$ é uma subálgebra de $\mathfrak{h}$. □

Proposição 2.35. *Seja $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ um homomorfismo de Álgebras de Lie. Sejam $\mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{g}$ e $\mathfrak{j} \subseteq \mathfrak{h}$ subespaços quaisquer. Então, valem as seguintes propriedades:*

1. *Se $\mathfrak{i}$ é subálgebra de $\mathfrak{g}$, então $\varphi(\mathfrak{i})$ é subálgebra de $\mathfrak{h}$.*
2. *Se $\mathfrak{i}$ é ideal de $\mathfrak{g}$ e φ é sobrejetivo, então $\varphi(\mathfrak{i})$ é ideal de $\mathfrak{h}$.*
3. *Se $\mathfrak{j}$ é subálgebra de $\mathfrak{h}$, então $\varphi^{-1}(\mathfrak{j})$ é subálgebra de $\mathfrak{g}$.*
4. *Se $\mathfrak{j}$ é ideal de $\mathfrak{h}$, então $\varphi^{-1}(\mathfrak{j})$ é ideal de $\mathfrak{g}$.*
5. *φ é injetivo se, e somente se, $\ker\varphi = \{0\}$.*

Demonstração. 1. Suponha $\mathfrak{i}$ uma subálgebra de $\mathfrak{g}$. Como φ é linear, $\varphi(\mathfrak{i})$ é subespaço de $\mathfrak{h}$. Para $a, b \in \varphi(\mathfrak{i})$ existem $x, y \in \mathfrak{i}$ tais que $a = \varphi(x)$ e $b = \varphi(y)$. Então,

$$[a, b] = [\varphi(x), \varphi(y)] = \varphi([x, y]) \in \varphi(\mathfrak{i}),$$

pois $[x, y] \in \mathfrak{i}$. Portanto, $\varphi(\mathfrak{i})$ é fechada pelo colchete. Logo, é uma subálgebra.

2. Suponha $\mathfrak{i} \lhd \mathfrak{g}$ e que φ seja sobrejetiva. Já sabemos que $\varphi(\mathfrak{i})$ é um subespaço (pela linearidade) e é fechado pelo colchete. Resta verificar a estabilidade com quaisquer elementos arbitrários de $\mathfrak{h}$. Seja

$z \in \mathfrak{h}$ e $a \in \varphi(\mathfrak{i})$. Como φ é sobrejetiva, existe $y \in \mathfrak{g}$ com $\varphi(y) = z$. Também $a = \varphi(x)$ para algum $x \in \mathfrak{i}$. Então

$$[z, a] = [\varphi(y), \varphi(x)] = \varphi([y, x]).$$

Como $\mathfrak{i}$ é ideal, $[y, x] \in \mathfrak{i}$, portanto $\varphi([y, x]) \in \varphi(\mathfrak{i})$, isto é $[z, a] \in \varphi(\mathfrak{i})$. Assim $\varphi(\mathfrak{i})$ é ideal de $\mathfrak{h}$.

3. Suponha $\mathfrak{j}$ subálgebra de $\mathfrak{h}$. A pré-imagem $\varphi^{-1}(\mathfrak{j})$ é subespaço de $\mathfrak{g}$ (pois φ é linear). Para $x, y \in \varphi^{-1}(\mathfrak{j})$ temos $\varphi(x), \varphi(y) \in \mathfrak{j}$. Então

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)] \in \mathfrak{j},$$

já que $\mathfrak{j}$ é subálgebra. Logo $[x, y] \in \varphi^{-1}(\mathfrak{j})$ e $\varphi^{-1}(\mathfrak{j})$ é subálgebra.

4).Suponha $\mathfrak{j} \lhd \mathfrak{h}$. Já temos que $\varphi^{-1}(\mathfrak{j})$ é subespaço. Tome $x \in \varphi^{-1}(\mathfrak{j})$ e $y \in \mathfrak{g}$. Então $\varphi(x) \in \mathfrak{j}$ e $\varphi(y) \in \mathfrak{h}$, e

$$\varphi([y, x]) = [\varphi(y), \varphi(x)] \in [\mathfrak{h}, \mathfrak{j}] \subseteq \mathfrak{j},$$

pois $\mathfrak{j}$ é ideal. Assim $[y, x] \in \varphi^{-1}(\mathfrak{j})$, o que mostra que $\varphi^{-1}(\mathfrak{j})$ é ideal de $\mathfrak{g}$.

5. É a caracterização padrão da injetividade: se φ é injetiva e $\varphi(x) = 0$ então, $x = 0$. Logo $\ker \varphi = \{0\}$. Reciprocamente, se $\ker \varphi = \{0\}$ e $\varphi(x) = \varphi(y)$ então, $\varphi(x - y) = 0$ implica $x - y = 0$, ou seja, $x = y$. Isso prova que φ é injetiva. □

Na teoria das Álgebras de Lie, bem como na Álgebra abstrata em geral, os teoremas de isomorfismo são necessários. Eles definem conexões estruturais significativas entre quocientes, imagens e núcleos de homomorfismos, o que possibilita entender como diversas álgebras se inter-relacionam por meio de Transformações Lineares que mantêm a estrutura.

Esses resultados oferecem instrumentos fundamentais para examinar as características internas e externas de uma Álgebra de Lie,

particularmente na criação de novas estruturas a partir de subálgebras e ideais. Em particular, os três teoremas de isomorfismo mostram como o núcleo e a imagem de um homomorfismo determinam totalmente a estrutura da Álgebra quociente correspondente, permitindo determinar quando duas Álgebras de Lie são essencialmente idênticas em termos de estrutura.

Em seguida, forneceremos uma explicação detalhada dos três Teoremas Clássicos de Isomorfismo das Álgebras de Lie, juntamente com suas respectivas demonstrações e exemplos.

Teorema 2.36 (1º Teorema de Isomorfismo)**.** *Seja* $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ *um homomorfismo de Álgebras de Lie. Então,*

$$\mathfrak{g}/\ker(\varphi) \cong \mathrm{im}(\varphi).$$

Demonstração. Verificamos se a operação está bem definida: sejam $X, Y \in \mathfrak{g}$ tais que $X + \ker\phi = Y + \ker\phi$, Então $X - Y \in \ker(\phi)$, isto é, $\phi(X - Y) = 0$, o que implica $\phi(X) = \phi(Y)$. Assim, $\overline{\phi}(X + \ker(\phi)) = \overline{\phi}(Y + \ker(\phi))$.

1. homomorfismo:
$$\overline{\phi}([X + \ker\phi, Y + \ker\phi]) = \overline{\phi}([X, Y] + \ker\phi) = \phi([X, Y])$$
$$= [\phi(X), \phi(Y)] = [\overline{\phi}(X + \ker\phi), \overline{\phi}(Y + \ker\phi)]$$

2. Injetividade: $\overline{\phi}(X + \ker\phi) = 0 \Rightarrow \phi(X) = 0 \Rightarrow X \in \ker\phi$.

3. Sobrejetividade: para todo $\phi(X) \in \mathrm{im}(\phi)$, existe $X + \ker\phi \in \mathfrak{g}/\ker\phi$ de modo que $\overline{\phi}(X + \ker\phi) = \phi(X)$.

□

Exemplo 2.37. Considere a Álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^3$ munida do produto vetorial e o homomorfismo

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \varphi(x, y, z) = (x, y, 0).$$

Observa-se que φ é linear e preserva o colchete de Lie, pois o produto vetorial é compatível com projeções lineares.
O núcleo de φ é dado por $\ker(\varphi) = \{(0,0,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\}$, que é um ideal de $\mathfrak{g}$.
A imagem de φ é $\mathrm{im}(\varphi) = \{(x,y,0) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$, que pode ser identificada com $\mathbb{R}^2$ munida do colchete. Assim, pelo 1° Teorema de Isomorfismo, segue que

$$\mathbb{R}^3/\ker(\varphi) \cong \mathrm{im}(\varphi).$$

Exemplo 2.38. Considere a aplicação

$$\varphi : \mathfrak{gl}(2,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \varphi(A) = \mathrm{tr}(A),$$

onde $\mathfrak{gl}(2,\mathbb{R})$ é a álgebra de Lie com o colchete dado por $[A,B] = AB - BA$ e $\mathbb{R}$ é equipada com o colchete trivial $[x,y] = 0$ para todos $x,y \in \mathbb{R}$. Então:

(a) φ é um homomorfismo de Álgebras de Lie;

(b) $\ker(\varphi) = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ (as matrizes 2×2 de traço zero) e $\mathrm{im}(\varphi) = \mathbb{R}$;

(c) o homomorfismo induz um Isomorfismo de Álgebras de Lie

$$\mathfrak{gl}(2,\mathbb{R})/\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}.$$

Demonstração. (a) φ é homomorfismo de Álgebras de Lie. Primeiro notamos que φ é linear, pois o traço é uma forma linear em $\mathfrak{gl}(2,\mathbb{R})$:

$$\varphi(\alpha A + \beta B) = \mathrm{tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha\,\mathrm{tr}(A) + \beta\,\mathrm{tr}(B), \qquad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R},\ \forall A,B.$$

Para verificar a preservação do colchete, calculamos para quaisquer $A, B \in \mathfrak{gl}(2,\mathbb{R})$:

$$\varphi([A,B]) = \mathrm{tr}(AB - BA) = \mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(BA).$$

A propriedade do traço $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. Portanto

$$\varphi([A, B]) = 0.$$

No lado direito, como $\mathbb{R}$ é considerada com o colchete trivial, temos $[\varphi(A), \varphi(B)]_{\mathbb{R}} = 0$. Logo $\varphi([A, B]) = [\varphi(A), \varphi(B)]_{\mathbb{R}}$ para todos A, B, ou seja, φ preserva o colchete e é um homomorfismo de Álgebras de Lie.

(b) Núcleo e imagem. Por definição,

$$\ker(\varphi) = \{A \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}) : \mathrm{tr}(A) = 0\},$$

que é precisamente $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Quanto à imagem, note que para qualquer escalar $t \in \mathbb{R}$ temos $\varphi(tI) = \mathrm{tr}(tI) = 2t$, onde I é a matriz identidade. Assim todo real aparece como múltiplo de $\mathrm{tr}(I)$, portanto $\mathrm{im}(\varphi) = \mathbb{R}$.

(c) Construção do Isomorfismo $\mathfrak{gl}(2)/\ker\phi \cong \mathrm{im}\,\phi$. Definimos a aplicação natural

$$\Psi : \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})/\ker(\phi) \longrightarrow \mathrm{im}(\phi) = \mathbb{R}$$

por

$$\Psi\big(A + \ker(\phi)\big) := \phi(A) = \mathrm{tr}(A).$$

Precisamos verificar que Ψ está bem definida, é bijetora e preserva o colchete (portanto é um isomorfismo de Álgebras de Lie).
Suponha que $A + \ker(\phi) = B + \ker(\phi)$. Então $A - B \in \ker(\phi)$, isto é, $\mathrm{tr}(A - B) = 0$. Logo $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$, ou seja $\phi(A) = \phi(B)$, portanto $\Psi(A + \ker\phi) = \Psi(B + \ker\phi)$. Assim Ψ é bem definida.
Homomorfismo de Álgebras de Lie: como Ψ é induzida por ϕ linear e ϕ preserva o colchete, temos

$$\Psi\big([A + \ker\phi,\ B + \ker\phi]\big) = \Psi\big([A, B] + \ker\phi\big) = \phi([A, B]) = 0.$$

Do outro lado, $[\Psi(A+\ker\phi), \Psi(B+\ker\phi)]_{\mathbb{R}} = [\phi(A), \varphi(B)]_{\mathbb{R}} = 0$. Portanto Ψ preserva o colchete (de forma trivial, já que a imagem é abeliana).
Injetividade: seja $A+\ker\phi$ uma classe tal que $\Psi(A+\ker\phi) = 0$. Isso significa $\phi(A) = 0$, ou seja $A \in \ker\phi$. Assim $A+\ker\phi = \ker\phi$ é a classe nula no quociente. Logo, o núcleo de Ψ é a classe zero; portanto, Ψ é injetora.
Sobrejetividade: por construção $\mathrm{im}(\varphi) = \mathbb{R}$ e para cada $r \in \mathbb{R}$ existe A com $\phi(A) = r$. Logo, $r = \Psi(A+\ker\phi)$; assim Ψ é sobrejetora.

Portanto, Ψ é bijetora e um homomorfismo de Álgebras de Lie, isto é, um isomorfismo. Concluímos que

$$\mathfrak{gl}(2,\mathbb{R})/\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R},$$

como desejado. □

Teorema 2.39 (2° Teorema do Isomorfismo)**.** *Sejam $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie e $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \subseteq \mathfrak{g}$ dois ideais de $\mathfrak{g}$. Então,*

$$(\mathfrak{h}_1+\mathfrak{h}_2)/\mathfrak{h}_1 \cong \mathfrak{h}_2/(\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2).$$

Demonstração. Definimos:

$$\phi : \mathfrak{h}_2 \to (\mathfrak{h}_1+\mathfrak{h}_2)/\mathfrak{h}_1, \quad \phi(x) = (0+x)+\mathfrak{h}_1$$

Analisar se ϕ é homomorfismo de Álgebras de Lie:
Para $x, y \in \mathfrak{h}_2$:

$$\begin{aligned}\phi([x,y]) &= [x,y]+\mathfrak{h}_1 \\ &= [x+\mathfrak{h}_1, y+\mathfrak{h}_1] \\ &= [\phi(x), \phi(y)]\end{aligned}$$

Determinar se ϕ é sobrejetor:
Dado $(y+h)+\mathfrak{h}_1 \in (\mathfrak{h}_1+\mathfrak{h}_2)/\mathfrak{h}_1$ com $y \in \mathfrak{h}_2$, $h \in \mathfrak{h}_1$, temos que

$$\phi(y) = y+\mathfrak{h}_1 = (y+\mathfrak{h}_1+h+\mathfrak{h}_1) = (y+h)+\mathfrak{h}_1$$

Logo, ϕ é sobrejetora e sua imagem $\operatorname{Im}\phi$ é igual ao contradomínio $(\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2)/\mathfrak{h}_1$.

Encontrar o núcleo:

$$\begin{aligned}\ker\phi &= \{x \in \mathfrak{h}_2 \mid \phi(x) = 0 + \mathfrak{h}_1\} \\ &= \{x \in \mathfrak{h}_2 \mid x + \mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_1\} \\ &= \{x \in \mathfrak{h}_2 \mid x \in \mathfrak{h}_1\} \\ &= \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2\end{aligned}$$

Pelo primeiro teorema do isomorfismo, temos:

$$\mathfrak{h}_2/\ker\phi \cong \operatorname{Im}\phi$$

ou seja:

$$\mathfrak{h}_2/(\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2) \cong (\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2)/\mathfrak{h}_1 \qquad \square$$

Exemplo 2.40. Considere a Álgebra de Lie abeliana $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^2$, com colchete trivial, isto é, $[x, y] = 0$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^2$. Definimos os ideais

$$\mathfrak{h}_1 = \mathbb{R} \times \{0\} \quad \text{e} \quad \mathfrak{h}_2 = \{0\} \times \mathbb{R}.$$

Demonstração. Como $\mathfrak{g}$ é abeliana, todo subespaço vetorial é ideal. Temos

$$\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2 = \mathbb{R}^2 \quad \text{e} \quad \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2 = \{(0,0)\}.$$

Logo,

$$(\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2)/\mathfrak{h}_1 = \mathbb{R}^2/(\mathbb{R} \times \{0\}) \cong \mathbb{R},$$

pois o quociente identifica vetores que diferem apenas na primeira coordenada.

Por outro lado,

$$\mathfrak{h}_2/(\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2) = (\{0\} \times \mathbb{R})/\{0\} \cong \mathbb{R}.$$

Assim, pelo 1° teorema de isomorfismo, segue que

$$(\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2)/\mathfrak{h}_1 \cong \mathfrak{h}_2/(\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2).$$

□

Teorema 2.41 (3º Teorema do Isomorfismo)**.** *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma Álgebra de Lie e sejam* $\mathfrak{i}, \mathfrak{h}$ *ideais de* $\mathfrak{g}$ *tais que* $\mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{h}$*. Então,*

$$(\mathfrak{g}/\mathfrak{i})/(\mathfrak{h}/\mathfrak{i}) \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{h}.$$

Demonstração. Definamos o homomorfismo

$$\varphi : \mathfrak{g}/\mathfrak{i} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h}, \quad \varphi(x + \mathfrak{i}) = x + \mathfrak{h}.$$

Primeiramente, φ está bem definido, pois se $x + \mathfrak{i} = y + \mathfrak{i}$, então $x - y \in \mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{h}$, de modo que $x + \mathfrak{h} = y + \mathfrak{h}$. Além disso, φ é um homomorfismo de Álgebras de Lie, pois para quaisquer $x, y \in \mathfrak{g}$,

$$\varphi([x+\mathfrak{i}, y+\mathfrak{i}]) = \varphi([x,y]+\mathfrak{i}) = [x,y]+\mathfrak{h} = [x+\mathfrak{h}, y+\mathfrak{h}] = [\varphi(x+\mathfrak{i}), \varphi(y+\mathfrak{i})].$$

Mostremos agora que φ é sobrejetivo. De fato, dado $x+\mathfrak{h} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, temos $\varphi(x + \mathfrak{i}) = x + \mathfrak{h}$, logo $\mathrm{im}(\varphi) = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Determinemos o núcleo de φ:

$$\begin{aligned}\ker(\varphi) &= \{\, x + \mathfrak{i} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{i} \mid \varphi(x + \mathfrak{i}) = \mathfrak{h} \,\} = \{\, x + \mathfrak{i} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{i} \mid x + \mathfrak{h} = \mathfrak{h} \,\} \\ &= \{\, x + \mathfrak{i} \mid x \in \mathfrak{h} \,\} = \mathfrak{h}/\mathfrak{i}.\end{aligned}$$

Aplicando o 1° Teorema do Isomorfismo para o homomorfismo φ, obtemos

$$(\mathfrak{g}/\mathfrak{i})/\ker(\varphi) \cong \mathrm{im}(\varphi).$$

substituindo as identidades encontradas, segue que

$$(\mathfrak{g}/\mathfrak{i})/(\mathfrak{h}/\mathfrak{i}) \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{h}.$$

□

Exemplo 2.42. Considere a Álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ das matrizes triangulares superiores 2×2 sobre um corpo $\mathbb{K}$, com colchete dado pelo comutador. Definimos

$$\mathfrak{i} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{K} \right\}, \quad \mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} b & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{K} \right\}.$$

Então $\mathfrak{i}$ e $\mathfrak{h}$ são ideais de $\mathfrak{g}$ e satisfazem $\mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{h}$.

O quociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ identifica todas as matrizes que diferem por um elemento estritamente superior. Assim, cada classe pode ser representada por uma matriz diagonal.

O quociente $\mathfrak{h}/\mathfrak{i}$ corresponde às classes das matrizes diagonais de $\mathfrak{h}$. Portanto, o quociente

$$(\mathfrak{g}/\mathfrak{i})/(\mathfrak{h}/\mathfrak{i})$$

é gerado pela classe da matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix},$$

sendo uma álgebra de Lie unidimensional e abeliana.

Por outro lado, o quociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ também é unidimensional e abeliano, pois elimina todas as entradas da primeira linha. Assim, pelo 1° teorema, segue que

$$(\mathfrak{g}/\mathfrak{i})/(\mathfrak{h}/\mathfrak{i}) \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{h}.$$

2.8 CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou um estudo introdutório das Álgebras de Lie, visando proporcionar uma visão geral acessível e conceitualmente sólida dessa estrutura algébrica de grande importância. Procurou-se criar a base teórica necessária para entender as Álgebras de Lie e suas características fundamentais.

Durante o desenvolvimento, abordamos conceitos fundamentais como subálgebras, ideais, quocientes, homomorfismos e teoremas de isomorfismo, enfatizando a importância da operação de colchete na definição dessas estruturas. A apresentação de exemplos concretos ajudou a mostrar como as Álgebras de Lie aparecem de forma natural em vários contextos algébricos, destacando a relevância de seus aspectos estruturais.

A pesquisa destacou que as Álgebras de Lie são essenciais para o estudo de simetrias e transformações contínuas, exercendo uma função importante tanto na matemática pura quanto em suas aplicações na física teórica. Assim, este trabalho não só se propôs a apresentar os conceitos fundamentais da teoria, mas também a incentivar o leitor a expandir seus estudos nesse campo, que continua sendo ativo e essencial para o progresso da matemática moderna.

Portanto, pode-se concluir que as Álgebras de Lie constituem um campo rico e estruturado, cuja compreensão requer a combinação de diversos ramos da Álgebra, e cujo estudo possibilita investigações mais avançadas em geometria, análise e física matemática.

REFERÊNCIAS

[1] Maria Cláudia Aguitoni. "Álgebras de Lie, grupos de Lie e espaços girovetoriais de Lie". Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Maringá (UEM), 2010. Disp. em: `http://repositorio.uem.br:8080/jspui/handle/1/5497`.

[2] José Luiz Boldrini, Sueli I. R. Costa, Luiz Antônio Gualberto e José Wetzler. *Álgebra Linear*. São Paulo: Harper & Row, 1980.

[3] R. Aleixo de Carvalho e Felipe Vieira. *Álgebra*. 1ª ed. Universidade Federal de Santa Catarina: Livraria da Física, 2023.

[4] Flávio Ulhoa Coelho. *Curso de Álgebra Linear*. São Paulo: Edusp, 2001.

[5] Bruno Silveira Dias. *Álgebras de Lie e suas representações*. Trabalho de Conclusão de Curso (graduação). Florianópolis, SC, 2019. Disp. em: `https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/203179`.

[6] Elon Lages Lima. *Álgebra Linear*. 9ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2018.

[7] Luiz A. B. San Martin. *Álgebras de Lie*. Versão de 29 de março de 2020. Prefácio da segunda edição de setembro de 2009. Disponível em: `https://www.ime.unicamp.br/~lino/Alglie0.pdf`. IMECC, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), 2020.

[8] Tailson Jeferon Paim dos Santos. *Álgebra Linear*. Salvador: FTC–EAD, s.d. Disp. em: `http://www.mtm.ufsc.br/~daniel/7105/04-AlgebraLinear.pdf`.

[9] Giordanni Zoppellaro. "Álgebras de Lie Nilpotentes e Solúveis". Dissertação de Mestrado. Belo Horizonte: Universidade Federal de Minas Gerais, 2017.