

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS BLUMENAU
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

João Guilherme Comandolli Jordão

Uma Introdução à Relatividade Especial

Blumenau, SC
2024

João Guilherme Comandolli Jordão

Uma Introdução à Relatividade Especial

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática do Campus Blumenau da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.
Orientador: Prof. Renan Gambale Romano

Blumenau, SC

2024

Ficha catalográfica gerada por meio de sistema automatizado gerenciado pela BU/UFSC.
Dados inseridos pelo próprio autor.

Jordão, João Guilherme Comandolli
Uma Introdução à Relatividade Especial / João Guilherme
Comandolli Jordão ; orientador, Renan Gambale Romano, 2024.
85 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) -
Universidade Federal de Santa Catarina, Campus Blumenau,
Graduação em Matemática - Licenciatura, Blumenau, 2024.

Inclui referências.

1. Matemática - Licenciatura. 2. Teoria da Relatividade
Especial. I. Romano, Renan Gambale. II. Universidade
Federal de Santa Catarina. Graduação em Matemática -
Licenciatura. III. Título.

João Guilherme Comandolli Jordão

Uma Introdução à Relatividade Especial

Este Trabalho Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do Título de Licenciado em Matemática e aprovado em sua forma final pelo Curso de Licenciatura em Matemática.

Blumenau, SC, 12 de dezembro de 2024.

Prof. Renan Gambale Romano, Dr.
Subcoordenador(a) do Curso

Banca Examinadora:

Prof. Renan Gambale Romano
Orientador
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Rafael Aleixo de Carvalho, Dr.
Avaliador(a)
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof(a). Esley Scatena Gonçalves, Dr.
Avaliador(a)
Universidade Federal de Santa Catarina

Este trabalho é dedicado a todos que me apoiam, em
momentos bons e ruins.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus por me conceber a existência e o privilégio de experimentar as belezas da vida, além de me incumbir a curiosidade científica por entender como o universo funciona.

Em seguida, agradeço à minha família, especialmente meus pais e meu padrasto, por terem me ajudado a trilhar o caminho para que chegasse até aqui. Sou grato também à minha avó, que apesar de já falecida continua me inspirando e confortando em minhas memórias e espírito.

Sou grato a meus professores do ensino médio, Marcus, Tiago, Mirella e Ilisandro, por me inspirarem e mostrarem a beleza da educação e das exatas, culminando na escolha de tornar-me professor de matemática. Em especial, agradeço ao Anselmo, meu finado professor de Taekwondo que nos deixou cedo demais e me ensinou que a maior força é a gentileza e a compaixão. Sem ele não seria a pessoa que sou hoje.

Agradeço aos colegas de faculdade, especialmente Ana, Fernando, Beatriz, Aline e Manoela, por tornarem estes anos de estudo mais descontraídos e me proporcionarem alívio emocional, como com a fala “também não comecei a estudar ainda”.

A meus mais íntimos e antigos amigos, Vinicius, Gabriel, José, Eric e Andrei, agradeço imensamente. Apesar de não mais os ver com a frequência que gostaria, ainda sempre me proporcionam as mais altas risadas e memoráveis momentos.

Agradeço profundamente meu orientador, Renan, por ser um exemplo de docente em quem me inspirarei pelo resto da vida, que além de me apresentar a Física Matemática, campo de minha profunda predileção, aventurou-se comigo na exploração da relatividade.

Para finalizar, agradeço especialmente à minha namorada, Ama-

bile, por ser meu maior motor nesta vida e quem detém todo meu amor. Seu apoio e companhia, tanto nos momentos mais estressantes e difíceis quanto nos mais calmos e felizes, foi a base que me permitiu chegar até aqui e evoluir como pessoa.

*“Uma coisa eu aprendi: que toda a nossa ciência,
comparada com a realidade, é primitiva e infantil -
e ainda assim é a coisa mais preciosa que temos.”*
(EINSTEIN)

RESUMO

Este trabalho de conclusão de curso foi elaborado em volta da análise da Teoria da Relatividade Especial e as consequência dela sob a física clássica. Por meio de uma abordagem qualitativa e embasada na revisão bibliográfica do livro de R. Gazzinelli, apoiado em outras obras, exploramos tópicos diversos envoltos neste tema tão abrangente. A teoria de Einstein é resultado da reflexão acerca de diversas inconsistências que se apresentaram na Física, como com as Equações de Maxwell para a eletrodinâmica, e como consequência levou a toda uma reformulação da mecânica newtoniana, o que buscamos reproduzir e compreender. Ademais, a relatividade implica na revisão da própria estrutura do nosso universo, levando-nos a vê-lo não mais em três dimensões e sim quatro, com o tempo como uma quarta coordenada, introduzindo o conceito do espaço-tempo de Minkowski.

Palavras-chave: Teoria da Relatividade Especial. Mecânica clássica. Eletrodinâmica. Espaço-tempo.

ABSTRACT

This essay was developed around the analysis of the Special Theory of Relativity and its consequences under classical physics. Through a qualitative approach and based on the bibliographic review of R. Gazzinelli's book, supported by other works, we explored various topics involved in this broad theme. Einstein's theory results of the reflection on several inconsistencies that appeared in Physics, such as Maxwell's Equations for electrodynamics, and as a consequence led to a complete reformulation of Newtonian mechanics, which we seek to reproduce and understand. In addition, relativity implies the revision of the very structure of our universe, leading us to see it no longer in three dimensions but in four, with time as a fourth coordinate, introducing Minkowski's concept of space-time.

Keywords: Especial Theory of Relativity. Classical Mecanics. Eletrodynamics. Space-time.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.2.1—Referenciais R e R'	17
Figura 2.4.1—Experimento de Michelson e Morley.	24
Figura 3.2.1—Relógios em R e R'	31
Figura 5.1.1—Colisão entre as esferas 1 e 2 no referencial inercial R	45
Figura 5.1.2—Colisão entre as esferas 1 e 2 no referencial inercial R'	46
Figura 6.1.1—Caminhos de três partículas e da luz no espaço-tempo. 58	
Figura 6.1.2—Dois pontos de vista de uma partícula se desinte- grando.	59
Figura 6.2.1—Intervalo s_{12} entre os eventos 1 e 2 no espaço-tempo. 61	
Figura 6.3.1—Representação do espaço-tempo (x, t)	63
Figura 6.3.2—Cone de luz.	64
Figura 6.3.3—Evento M ocorrendo no interior da parte superior do cone de luz. Um pulso de luz sempre chega ao local de ocorrência do evento M antes dele próprio acontecer.	65
Figura 6.9.1—Intervalo entre os eventos A e B medidos de dois referenciais.	79

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	CONTEXTUALIZAÇÃO E JUSTIFICATIVAS PARA A TEORIA DA RELATIVIDADE ESPECIAL . . .	16
2.1	REFERENCIAIS INERCIAIS	16
2.2	PRINCÍPIO DA RELATIVIDADE DE GALILEU	16
2.3	INCONSISTÊNCIA COM O ELETROMAGNETISMO	20
2.4	EXPERIMENTO DE MICHELSON E MORLEY . . .	23
3	O QUE É O TEMPO?	28
3.1	SIMULTANEIDADE	29
3.2	RELATIVIDADE DA SIMULTANEIDADE	30
4	AS TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ	33
4.1	AS TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ	33
4.2	DILATAÇÃO DO TEMPO	37
4.3	SINCRONIZAÇÃO DE RELÓGIOS	38
4.4	CONTRAÇÃO DO COMPRIMENTO	40
4.5	TRANSFORMAÇÃO DE VELOCIDADES	41
5	MECÂNICA RELATIVÍSTICA	44
5.1	MASSA RELATIVÍSTICA	44
5.2	EQUIVALÊNCIA ENTRE MASSA E ENERGIA	50
6	ESPAÇO-TEMPO	55
6.1	INTRODUÇÃO AO ESPAÇO-TEMPO	55
6.2	INTERVALOS DE ESPAÇO-TEMPO	59
6.3	CONES DE LUZ	62
6.4	QUADRIVETORES	67
6.5	QUADRIVETOR VELOCIDADE	70
6.6	QUADRIVETOR MOMENTO	72
6.7	LEI DE CONSERVAÇÃO DE MOMENTO-ENERGIA	74
6.8	QUADRIVETOR FORÇA	74

6.9	INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DAS TRANSFOR-	
	MAÇÕES DE LORENTZ	76
7	CONCLUSÃO	81
	REFERÊNCIAS	84

1 INTRODUÇÃO

A Física e a Matemática andam juntas desde os primórdios da humanidade, uma incentivando o desenvolvimento da outra. Segundo Sartori et al. [11], 240 a.C, Eratóstenes (276 - 195 a.C), tendo acesso a documentos na biblioteca de Alexandria, constatou que no solstício de verão, na cidade de Siena (atual Assuã, no Egito), ao meio-dia, o Sol ficava quase perpendicular ao chão, mas em Alexandria, na mesma data e hora, isso não ocorria. Isso o levou a concluir a esfericidade da Terra, pois se fosse plana tal acontecimento não seria possível. Sabendo que os raios de sol deveriam atingir a Terra paralelamente, ele conseguiu calcular com alta precisão (para sua época) a curvatura do planeta usando geometria simples, atestando empiricamente o resultado de que o planeta é redondo, mesmo que tal conhecimento não fosse completamente novo para a época. Este é só um exemplo, dentre incontáveis outros ao longo da história, que mostra o poder que o conhecimento da Matemática e da Física exerce sobre nossa visão do universo.

Ao longo dos séculos seguintes, ambas as áreas se desenvolveram exponencialmente. Munido de alto grau de conhecimento de tais disciplinas, pelo fim do século XVII – como consta em Deppman[3] –, Isaac Newton (1643 - 1727) publicou sua obra prima *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*, um marco na história científica que estruturou a Física e a Matemática pelos próximos dois séculos e foi base para o que hoje conhecemos como Mecânica Clássica. Galileu Galilei (1564 - 1642) foi quem iniciou a discussão sobre como um objeto se comporta sob a ação da gravidade terrestre, e posteriormente Newton, em suas três leis da Mecânica, descreveu a natureza do movimento dos corpos.

A Mecânica Clássica servia perfeitamente na explicação e pre-

visão dos fenômenos que a Física se propunha a estudar, porém o fim do século XIX trouxe consigo descobertas que abalaram profundamente o conhecimento científico até então. Com o desenvolvimento das Equações de Maxwell, tornou-se possível estudar facilmente fenômenos eletromagnéticos diversos, abrindo caminho para um novo campo de pesquisas. Todavia, muitos resultados dessas recentes equações eram contraditórios com os outros campos da Física, principalmente a Mecânica. A busca pelo entendimento dessas inconsistências conduziu à reestruturação de grande parte da filosofia natural que se tinha até então, pela mente e trabalho de Albert Einstein (1879 - 1955), quem desenvolveu a Teoria da Relatividade Especial.

Neste trabalho, iremos nos propor a compartilhar da mesma curiosidade e sede de conhecimento que levaram Einstein a desenvolver sua teoria. Analisaremos as consequências da proposição de que o tempo e o espaço não são absolutos, mas relativos e intrinsecamente unidos, além da conclusão de que a luz é a verdadeira constante universal. Exploraremos a Teoria da Relatividade Especial sob uma perspectiva física e matemática, utilizando como base uma análise qualitativa para a revisão, estudo, compreensão e análise de toda a teoria principal e seus pré-requisitos.

A base em que se fundamenta o presente trabalho é a obra de Ramayana Gazzinelli [7], *Teoria da Relatividade Especial*, um livro didático e com um rico desenvolvimento do tema. Anterior a esta referência, a obra de Nivaldo A. Lemos [9], *Mecânica Analítica*, foi o ponto de partida para os estudos na Física Matemática e que apresentou a Relatividade, merecendo a devida menção. Já em Peter G. Bergman [1], com *Introduction to the Theory of Relativity*, tais estudos foram aprofundados e filtrados.

Este trabalho de conclusão de curso está estruturado da seguinte maneira: o Capítulo 1, desenvolve a motivação para os estudos

que serão elaborados, apresentando a metodologia utilizada e os objetivos. O Capítulo 2 lida com as noções básicas que são necessárias para o entendimento pleno da teoria a ser desenvolvida. O Capítulo 3 traz uma reformulação do conceito de simultaneidade, imprescindível para o pleno entendimento da teoria. O Capítulo 4 apresenta a demonstração e elaboração das Transformações de Lorentz, além da reelaboração de alguns conceitos físicos como consequência. O Capítulo 5 passa a elaborar com mais detalhes as leis físicas, alterando-as para que concordem com os postulados da relatividade e as Transformações de Lorentz. O Capítulo 6, por sua vez, abre uma discussão acerca do rico conceito de espaço-tempo e suas diversas implicações e interpretações. Por último, o Capítulo 7 aborda as conclusões obtidas ao longo da pesquisa e algumas perspectivas para o futuro.

Para finalizar esta introdução, é imprescindível traçarmos os objetivos que buscamos cumprir ao longo do desenvolvimento desta pesquisa:

1. Entender conceitos básicos e contextos que levaram ao desenvolvimento da Teoria da Relatividade Especial.
2. Compreender os postulados da Relatividade Especial e, por meio deles, reexaminar a ideia de simultaneidade.
3. Desenvolver as Transformações de Lorentz e utilizá-la para reconstruir definições e leis físicas.
4. Estruturar o princípio de uma “nova mecânica” com caráter relativístico.
5. Compreender o universo como quadridimensional, de espaço e tempo juntos, e as consequências dessa ideia.

2 CONTEXTUALIZAÇÃO E JUSTIFICATIVAS PARA A TEORIA DA RELATIVIDADE ESPECIAL

Antes de adentrarmos nos estudos da Teoria da Relatividade Especial e suas implicações, devemos entender o que levou à sua formulação, ou seja, qual o contexto e os motivos que levaram a ciência a questionar a formulação da física até então.

Para iniciarmos os estudos propostos neste trabalho de conclusão de curso, devemos começar entendendo dois princípios básicos, mas fundamentais, para a análise de fenômenos mecânicos: o *referencial* e o *referencial inercial*.

As seções seguintes foram baseadas nos capítulos iniciais do livro *Teoria da Relatividade Especial*, de R. Gazzinelli [7].

2.1 REFERENCIAIS INERCIAIS

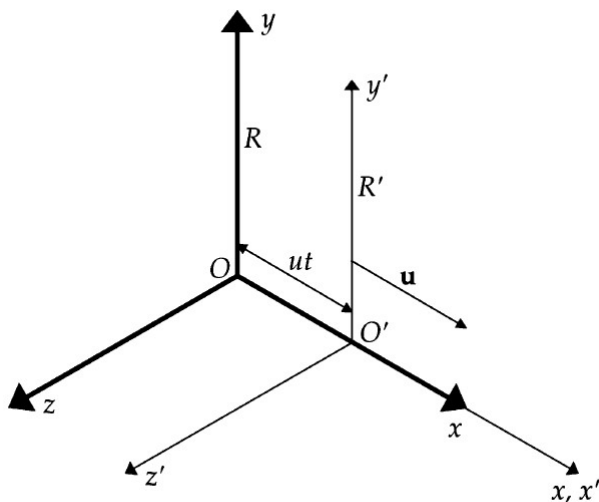
Para registrar a posição de um corpo, temos a necessidade de um sistema de referência, como um sistema de coordenadas cartesianas, o qual pode ser dado a partir de qualquer conjunto de corpos em repouso em relação um ao outro, ou seja, um referencial.

Além deste, o referencial inercial é um tipo especial de sistema de referência no qual é válida a lei de inércia de Newton, isto é: quando tivermos partículas com velocidades uniformes sem forças atuantes sobre elas de forma a manter sua velocidade uniforme, teremos um referencial inercial.

2.2 PRINCÍPIO DA RELATIVIDADE DE GALILEU

A partir deste momento já podemos nos fazer uma pergunta que motivará todos os nossos próximos estudos: como se transforma uma lei física em um certo referencial ao passarmos deste para outro referencial?

Essa transformação entre referenciais, na Física Clássica, é facilmente deduzível. Assumamos dois referenciais $R(x, y, z)$ e $R'(x', y', z')$, de forma que o eixo x de ambos esteja alinhado e paralelo um ao outro, com R' movendo-se com velocidade uniforme em relação a R na direção x . A Figura 2.2.1 ilustra essa configuração.



Fonte: Gazzinelli [7], 2009

Figura 2.2.1 – Referenciais R e R'

Vale apontar que esta escolha de direções não particulariza nosso problema, uma vez que independente da direção do movimento, podemos “girar” os eixos de R e R' de modo que Ox se encontre na sua direção e então ajustar R' .

Neste contexto, podemos definir um *evento* como um fenômeno

que acontece num ponto do espaço de R no instante t , lembrando que para a Física Clássica o tempo é absoluto, ou seja, independe do referencial. Assim, no momento inicial, as coordenadas de um evento em R e R' coincidem ($x = x', y = y', z = z', t = t' = 0$).

No instante $t > 0$, R' move-se com velocidade uniforme u na direção x , logo temos $y = y', z = z'$ e $x = x' + ut$, esta última sendo a própria equação do deslocamento para um movimento uniforme. Adicionando o tempo absoluto a estas equações, temos as chamadas *Transformações de Galileu*:

$$\begin{cases} x = x' + ut \\ y = y', \\ z = z', \\ t = t'. \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Podemos ainda visualizar tais transformações na forma matricial, que pode facilitar cálculos na Álgebra Linear. Unidimensionalmente, a forma que temos é

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}.$$

Se desejamos tratar o caso geral, ou seja, para qualquer direção, teremos

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}.$$

Pode-se perceber que em ambos os casos, uni e tridimensional, as matrizes de transformação são ortogonais, ou seja, se multiplicadas pelas suas transpostas obtém-se a matriz identidade.

Com a simples derivação das três primeiras equações das transformações (2.2.1) em relação a $t = t'$, obtemos as transformações de velocidades na Mecânica Clássica:

$$\begin{cases} u_x = u'_x + u, \\ u_y = u'_y, \\ u_z = u'_z, \end{cases} \quad (2.2.2)$$

sendo $(u_x, u_y, u_z) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$ e $(u'_x, u'_y, u'_z) = \left(\frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'} \right)$.

Graças às transformações das velocidades, concluímos que a partir de um referencial inercial, qualquer outro referencial deslocando-se com velocidade uniforme em relação ao primeiro será também inercial, uma vez que a lei da inércia é também válida no novo referencial.

De acordo com Capiberibe [2], Galileu Galilei verificou que as leis da mecânica se conservam quando passadas de um referencial inercial a outro, exemplificando que se fossem feitos experimentos mecânicos na cabine de um navio em movimento uniforme (ou seja, sem observar o ambiente fora), não seria possível perceber que o navio se move. Este resultado constitui um princípio físico fundamental tido como o *Princípio da Relatividade de Galileu*, que só foi nomeado assim no contexto da teoria da relatividade de Einstein.

Constata-se que a mecânica de Newton, as Transformações de Galileu e o princípio da relatividade de Galileu formam um sistema de leis sólido, que não contradiz a si mesmo. A comprovação desta afirmação não é o objetivo deste trabalho, portanto assumiremos como verdade. Tal sistema se manteve completamente válido até o início do século XX e ainda é utilizado hoje sob algumas condições, só tendo sido questionado a partir da tentativa de encontrar um referencial absoluto para o Eletromagnetismo.

2.3 INCONSISTÊNCIA COM O ELETROMAGNETISMO

Pela segunda metade do século XIX, James Clerk Maxwell (1831 - 1879) unificou o conhecimento de sua época à respeito da eletricidade e do magnetismo em uma única teoria que explicava todos os fenômenos dessa natureza, culminando nas *Equações de Maxwell para o Eletromagnetismo*:

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (\text{Lei de Gauss para o campo elétrico})$$

$$\nabla \cdot B = 0, \quad (\text{Lei de Gauss para o campo magnético})$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \quad (\text{Lei de Faraday})$$

$$\nabla \times B = \mu_0 \left(J + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right), \quad (\text{Lei de Ampère-Maxwell})$$

sendo B = campo magnético, E = campo elétrico, ε_0 a constante de permissividade elétrica no vácuo, μ_0 a constante de permeabilidade magnética no vácuo, ρ a densidade de carga elétrica e J a densidade de corrente.

O problema encontrado foi o seguinte: as Equações de Maxwell não são invariantes quando aplicada a Transformações de Galileu. Na época em que isto foi percebido, a primeira justificativa foi que havia um erro nas equações do Eletromagnetismo, relativamente recentes no período. Mas quando estas foram alteradas de forma que, sob as Transformações de Galileu, fosse mantido o Princípio da Relatividade até então conhecido, várias inconsistências empíricas surgiram, sugerindo que o problema deveria estar em outro lugar.

Veremos mais a frente como Albert Einsteins, em 1905, conseguiu não só identificar como também resolver o problema, mas antes precisamos entender as motivações que levaram à realização de um dos experimentos eletromagnéticos que mais abalou os físicos de sua época, apesar de provavelmente não ter sido conhecido por Einstein.

Por meio de um desenvolvimento das Equações de Maxwell, considerando também a equação da Mecânica Clássica para uma onda que se propaga em certa direção, pode-se concluir o valor da velocidade v de uma onda eletromagnética. Primeiramente, no vácuo temos a densidade de carga e densidade de corrente nulas, ou seja, $\rho = 0$ e $J = 0$. Logo,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot E &= 0, \\ \nabla \cdot B &= 0, \\ \nabla \times E &= -\frac{\partial B}{\partial t}, \\ \nabla \times B &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}.\end{aligned}$$

Aplicando o rotacional em ambos os lados da Lei de Faraday (terceira equação acima), conseguimos

$$\nabla \times (\nabla \times E) = \nabla \times -\left(\frac{\partial B}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times B).$$

Considerando a identidade $\nabla \times (\nabla \times E) = \nabla(\nabla \cdot E) - \nabla^2 E$ e sabendo que $\nabla \cdot E = 0$,

$$\begin{aligned}\nabla(\nabla \cdot E) - \nabla^2 E &= -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \\ \nabla^2 E &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}\end{aligned}\tag{2.3.1}$$

A Equação (2.3.1) é a Equação da Onda em três dimensões. Reescrevendo-a em uma dimensão, conseguimos

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}.\tag{2.3.2}$$

A equação acima possui como solução a função senoidal. Assim, podemos escrever como solução

$$E = E_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right),$$

onde E_0 é a amplitude do campo elétrico, λ o comprimento de onda e v sua velocidade. Diferenciemos duas vezes a solução em relação a x e a t , ou seja, calculemos $\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[E_0 \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \right) \right] &= \frac{\partial}{\partial x} \left[E_0 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \right) \right] \\ &= -E_0 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[E_0 \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \right) \right] &= \frac{\partial}{\partial t} \left[E_0 \left(-\frac{2\pi v}{\lambda} \right) \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \right) \right] \\ &= -E_0 \left(\frac{2\pi v}{\lambda} \right)^2 \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \right). \end{aligned}$$

Agora, prosseguimos substituindo estas últimas equações na Equação da Onda unidimensional (2.3.2), obtendo

$$-E_0 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \right) = \mu_0 \varepsilon_0 \left[-E_0 \left(\frac{2\pi v}{\lambda} \right)^2 \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \right) \right].$$

Como os senos não assumem valor nulo nesse contexto físico, podemos cancelá-los junto do termo $(-E_0)$ e conseguir

$$\begin{aligned}\frac{4\pi^2}{\lambda^2} &= \mu_0 \varepsilon_0 \left(\frac{4\pi^2 v^2}{\lambda^2} \right) \\ 1 &= \mu_0 \varepsilon_0 v^2. \end{aligned}$$

Finalmente, basta isolar a velocidade v , obtendo

$$v^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}. \quad (2.3.3)$$

O valor de v dado pela relação (2.3.3) é muito próximo da velocidade da luz $v = c$ medida em laboratório, o que fez Maxwell concluir que a luz fosse de fato uma onda eletromagnética que se

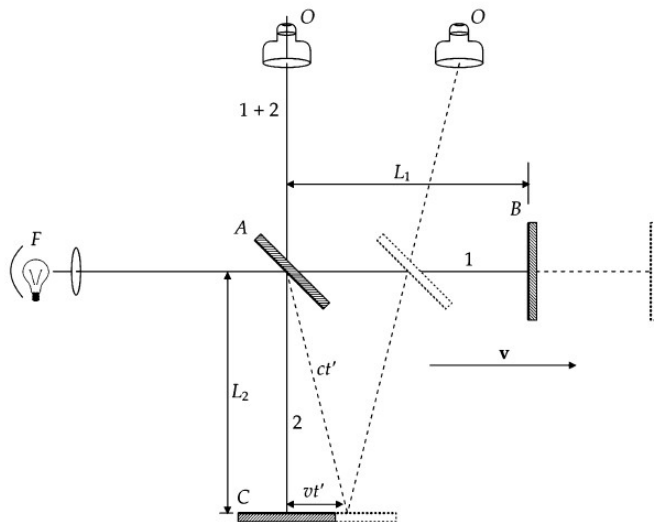
propaga com essa velocidade. Mas agora, então, surge a questão para a Física Clássica: de acordo com que referencial devemos medir c ? Como a velocidade da luz está integrada nas Equações de Maxwell, é somente neste suposto referencial que elas estarão corretas. Para Maxwell e outros físicos da época, a solução era que c deveria ser medida em relação ao *éter*.

Era incabível aos físicos desta época que um campo pudesse ser auto-suportável e propagável no vácuo, o que levou ao conceito do *éter*. Para suportar as oscilações transversais de ondas eletromagnéticas, o *éter* teria características como: preencher todo o espaço, ocupado ou não, estar inerte em relação ao espaço absoluto, ser infinitamente elástico, de massa nula e imperceptível.

O *éter* estando em repouso relativo ao espaço absoluto, as Transformações de Galileu indicam que, se medida a velocidade da luz em um laboratório na Terra com o feixe de luz no mesmo sentido ou no sentido contrário ao do planeta, teríamos valores diferentes. Um resultado negativo em um experimento assim seria obter que c é invariável nas duas situações, indicando que o *éter* é “levado” pela Terra em seu movimento, o que contradiz outros resultados já obtidos na Física até então, como o *fenômeno da aberração da luz das estrelas* e a *experiência de Fizeau*, os quais não serão abordados neste trabalho, mas podem ser encontrados em Gazzinelli[7].

2.4 EXPERIMENTO DE MICHELSON E MORLEY

Um dos experimentos mais famosos para tentar medir a velocidade da terra em relação ao *éter* foi o realizado por Albert Abraham Michelson (1852 - 1931) e Edward W. Morley (1838 - 1923). Eles construíram um aparelho de funcionamento semelhante ao esquematizado na Figura 2.4.1:



Fonte: Gazzinelli [7], 2009

Figura 2.4.1 – Experimento de Michelson e Morley.

Essencialmente, o aparato é constituído por uma fonte de luz F , um espelho parcialmente prateado A e dois espelhos C e B , todos montados sobre uma base rígida. Os espelhos estão a distâncias L_1 e L_2 aproximadamente iguais em relação à A . A placa A divide um feixe de luz que se aproxima em dois outros feixes. O feixe 1 atravessa o espelho, é refletido no espelho B e volta no espelho A , dirigindo-se para a ocular O . O feixe 2, também refletido em A , é dirigido para o espelho C , onde é novamente refletido e atravessa o espelho A , indo na direção da ocular. Os dois feixes, como percorrem o mesmo caminho, recombina-se e formam na ocular um padrão de interferência observável. Se o tempo que o feixe 1 levar para fazer o caminho ABA for o mesmo que para o feixe 2 fazer ACA , os dois estarão em fase, mas se diferir ligeiramente os feixes estarão fora de fase, o que resultará

numa interferência. Se o aparelho estiver em repouso em relação ao éter, os tempos seriam iguais, mas se estiver se movendo à direita com uma velocidade u notaríamos uma diferença, o que demonstraremos a seguir.

Vamos chamar t_1 o tempo necessário para a luz ir de A até o espelho B , e t_2 o caminho da volta. Enquanto a luz está indo de A a B , o aparelho desloca-se uma distância vt_1 , fazendo com que a luz precise percorrer $L + vt_1$ à velocidade c . Considerando que a distância é o produto da velocidade pelo tempo, escrevemos que

$$ct_1 = L + vt_1, \quad \text{ou} \quad t_1 = \frac{L}{c - v}.$$

Similarmente, durante t_2 o espelho B avança uma distância ut_2 , portanto, a distância de retorno da luz é $L - vt_2$ e teremos

$$ct_2 = L - vt_2, \quad \text{ou} \quad t_2 = \frac{L}{c + v}.$$

Concluimos que o tempo total de ida e volta do feixe 1 a A é

$$t_1 + t_2 = \frac{2L_1c}{c^2 - v^2} = \frac{2L_1/c}{1 - v^2/c^2}. \quad (2.4.1)$$

Em seguida, podemos calcular o tempo t_3 que a luz leva para ir de C a A . Analogamente, C move-se para a direita uma distância ut_3 ao mesmo tempo que a luz uma distância ct_3 . Vemos que o comprimento L_2 coincide com o maior cateto AC de um triângulo retângulo, o que nos permite visualizar que

$$(ct_3)^2 = L_2^2 + (vt_3)^2,$$

e desenvolvendo, obtemos

$$L_2^2 = c^2t_3^2 - v^2t_3^2 = (c^2 - v^2)t_3^2 \iff t_3 = \frac{L_2}{\sqrt{c^2 - v^2}}.$$

Para a viagem de volta de C a A , o tempo gasto pelo feixe 2 é o mesmo que na ida, como pode-se até mesmo observar pela simetria do esquema, totalizando $2t_3$. Assim, podemos escrever

$$2t_3 = \frac{2L_2}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2L_2/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (2.4.2)$$

Finalmente, comparemos os tempos gastos pelos feixes 1 e 2 pelas Equações (2.4.1) e (2.4.2). Dado que os numeradores são praticamente iguais (dado que $L_1 \approx L_2$), eles representam o tempo necessário caso o aparelho estivesse inerte. Quanto aos denominadores, o termo v^2/c^2 será quase irrelevante, a menos que v seja comparável ao valor de c , e indicam as variações de tempo causadas pelo movimento do aparelho. Vemos que esses valores de fato não são iguais, que na verdade o tempo para o feixe 2 ir e voltar de A é relativamente menor, mesmo a distância dos espelho B e C sendo praticamente iguais, logo, basta medir essa diferença de forma precisa.

Pode-se pensar, “ora, mas é fisicamente impossível que L_1 seja igual a L_2 , essa diferença não seria suficiente para compensar a diferença nos tempos?”, um questionamento relevante. Neste caso, podemos simplesmente girar o aparelho 90° , de modo que AC esteja paralelo e AB perpendicular ao movimento, fazendo com que uma diferença pequena no comprimento seja desconsiderável.

Michelson e Morley realizaram o experimento orientando AB quase paralela ao movimento da Terra em órbita. A velocidade orbital do planeta é de aproximadamente 30 km/s, e se houvesse alguma “corrente de éter” no espaço ela seria pelo menos desse valor em algum momento do dia ou em certos períodos do ano. O experimento foi realizado algumas vezes ao longo da década de 1880, em diferentes dias e horas, cada vez de forma mais precisa, mas sempre com o mesmo resultado: não detectavam diferença de tempo com os feixes de luz, ou seja, a velocidade da Terra pelo éter não foi detectada e o experimento

teve um resultado nulo.

Segundo Capiberibe [2], o pesquisador George Francis FitzGerald (1851-1901) e o pesquisador holandês Hendrick Lorentz, em 1892, sugeriram que se os braços do interferômetro de Michelson e Morley se contraíssem na direção do movimento, seria possível explicar os resultados da experiência. Lorentz tentou justificar essa hipótese agrumetando que a contração poderia ocorrer devido ao choque das moléculas com o éter. O matemático e físico Jules Henri Poincaré (1854 - 1912) criticou a hipótese de FitzGerald e Lorentz, pois simplesmente não havia motivos físicos para supor que o movimento dos corpos pelo éter deveria mudar suas dimensões.

3 O QUE É O TEMPO?

Em seu artigo, “Sobre a eletrodinâmica de corpos em movimento” (do original “*Zur Elektrodynamik bewegter Körper*”, publicado na *Annalen Der Physik* em 1905), Albert Einstein (1879 - 1955) [4] inicialmente apresenta os principais argumentos à favor da Teoria da Relatividade, como a relatividade da Teoria de Maxwell que se observou experiências da eletrodinâmica e os resultados nulos das experiências para se medir a velocidade da Terra em relação ao éter. Ele, então, apresenta os dois postulados que são a base de sua teoria, os quais tornam desnecessária a ideia do éter:

1. As leis da física têm a mesma forma em todos os referenciais inerciais.
2. A velocidade da luz é constante no vácuo e independente do movimento da sua fonte.

Se analisarmos os postulados com atenção, logo veremos as fortes implicações que eles trazem para a Física. O primeiro postulado, ao afirmar que as leis físicas têm a mesma forma em todos os referenciais inerciais, invalida a existência de um *referencial absoluto*, ou seja, não há tempo ou espaço absolutos. Além disso, ele estende o Princípio da Relatividade de Galileu às Equações de Maxwell, que devem então permanecer invariantes sob uma mudança de referencial inercial, o que tem como consequência que a velocidade da luz independe do movimento uniforme relativo dos observadores.

Dada a natureza das implicações dos postulados, é necessário revisar muitos conceitos físicos considerados “simples”, como o próprio tempo.

3.1 SIMULTANEIDADE

Toda medida de tempo baseia-se em uma confirmação de *simultaneidade*. Se dizemos que algo aconteceu às 4 horas, significa que o acontecimento ocorreu simultaneamente com o relógio indicando 4 horas. Para definirmos as noções que precisamos para seguir em nosso estudo, vamos utilizar das mesmas ideias constatadas por Einstein em seu artigo de 1905.

Se em um ponto A no espaço há um relógio, um observador em A pode dizer o tempo de eventos que ocorram nas proximidades de A, coincidindo-os com o valor marcado no relógio. O mesmo ocorre para um observador em um ponto B diferente de A, porém não é possível, sem outras suposições quanto ao tempo, comparar os eventos nestes dois pontos. Temos até então o “tempo A” e o “tempo B”, e só podemos definir um “tempo” comum se estabelecermos *por definição* que o “tempo” necessário para a luz viajar de A a B é o mesmo que para ela viajar de B a A. Seja um raio de luz começando no “tempo A” t_A e indo do ponto A para o B, sendo refletido de B para A no “tempo B” t_B e chegando novamente em A no “tempo A” t'_A . Assim, pela definição, os relógios sincronizam se

$$t_B - t_A = t'_A - t_B.$$

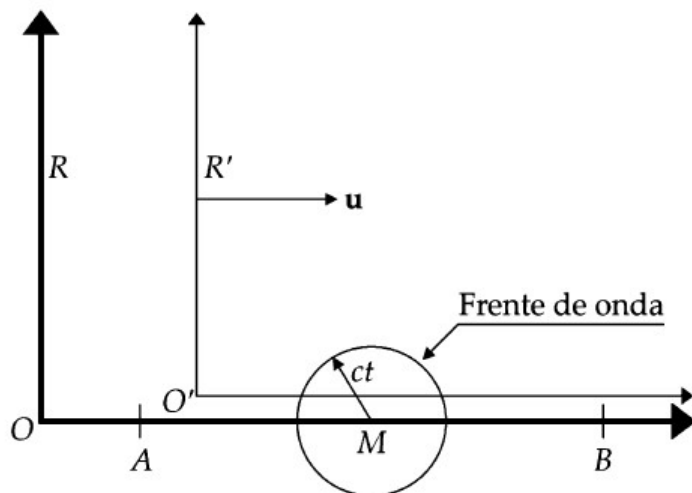
Assumimos então que essa definição de sincronismo está livre de contradições, é válida para um número qualquer de pontos e que as seguintes proposições são universalmente válidas:

1. Comutatividade: Se o relógio em B sincroniza com o relógio em A, o relógio em A sincroniza com o em B.
2. Transitividade: Se o relógio em A sincroniza com o relógio em B e também com um relógio em C, os relógios em B e C estão sincronizados entre si.

Dessa forma, conseguimos uma definição do que é “simultaneidade” e de “tempo”: o “tempo” de um evento é aquele que é dado simultaneamente com um relógio estacionário nas proximidades do evento. Já o *tempo de um referencial* é o tempo indicado por um relógio no próprio referencial, previamente sincronizado com outro relógio que serve de base, como um relógio situado na origem do sistema de coordenadas.

3.2 RELATIVIDADE DA SIMULTANEIDADE

Revisada a simultaneidade como conceito base para o tempo, um questionamento válido é o seguinte: dois eventos simultâneos em um referencial inercial R o são em outro referencial inercial R' ? A resposta é não! Vejamos a seguinte situação, ilustrada na Figura 3.2.1:



Fonte: Gazzinelli [7], 2009

Figura 3.2.1 – Relógios em R e R' .

Um observador está no ponto M em R , enquanto que nos pontos A e B , à mesma distância de M , são colocados relógios com os quais o observador quer sincronizar seu relógio. Ele dispara um flash de luz que vai para ambos os lados e inicia os relógios A e B simultaneamente (os relógios são fotossensíveis e ativam quando recebem um sinal luminoso).

Como em outros exemplos já trabalhados, o referencial R' move-se na direção x com uma velocidade u . Inicialmente, um observador em R' está também no ponto M , mas logo após o disparo do flash ele percebe o referencial R afastar-se para a esquerda, com o ponto A se afastando enquanto B se aproxima. Para ele, a luz que saiu de M chega em B antes de que em A , o que significa que o relógio em B estará adiantado em relação ao em A .

Assim, fica claro que relógios sincronizados em um referencial não estão sincronizados em outro referencial. Já nos é possível calcular a diferença de sincronia entre dois relógios em referencial para um observador situado em outro referencial, porém faremos isso quando estivermos munidos das *Transformações de Lorentz* que veremos adiante, para evitar muitas repetições.

4 AS TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ

O experimento de Michelson-Morley, junto das experiências de aberração das estrelas e de Fizeau, deram evidências consideráveis contra a hipótese do éter. Não somente, mas também as Equações de Maxwell não apresentavam testes negativos, pelo contrário, se mostravam férteis na previsão de fenômenos novos e até na incorporação da óptica como fenômeno eletromagnético. Assim, mudar a Teoria de Maxwell para que se adaptasse às Transformações de Galileu mostrou-se uma ideia pobre, o que indicou que as próprias Transformações de Galileu e a mecânica newtoniana deveriam ser revistas.

Vale apontar que este raciocínio foi feito após a formulação da Teoria da Relatividade Especial por Einstein. Ele próprio deu explicações diferentes da origem de suas ideias, e é provável que nem sequer tinha conhecimento do experimento de Michelson-Morley quando as desenvolveu. Em seu artigo de 1905, ele citou as assimetrias para com a eletrodinâmica de Maxwell e a experiência de Fizeau, o que nos leva a supor que estas foram bases empíricas para sua teoria. Ele tinha uma forte crença na Física como uma unidade, ou seja, que o Princípio da Relatividade deveria ser aplicável indistintamente na Física.

4.1 AS TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ

Desejamos então encontrar as transformações que mantenham invariantes as Equações de Maxwell ao passarmos de um referencial inercial a outro. Para tal, consideremos um fenômeno de luz simples que desenvolveremos de forma a mantê-lo invariante sob a transformação de um referencial inercial a outro.

Suponhamos dois referenciais R e R' , com eixos paralelos e origens que coincidam em $t = t' = 0$. R' move-se paralelamente a Ox a uma velocidade u em relação a R . No momento $t = 0$, um

pulso de luz é emitido de uma fonte de luz na origem de R , portanto, um observador neste referencial vê uma onda esférica de raio ct se propagando a partir de O , enquanto que para um observador em R' , a onda tem raio ct' e parte de O' , uma vez que $t \neq t'$. Para os dois referenciais, as equações que representam o movimento da onda de luz são

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2, \quad (4.1.1a)$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2. \quad (4.1.1b)$$

Se aplicarmos as Transformações de Galileu em R' para obtermos o movimento em R , encontramos uma inconsistência significativa, pois o resultado não é congruente à Equação (4.1.1a):

$$(x - ut)^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \Leftrightarrow x^2 - 2xut + u^2 t^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2.$$

As transformações que buscamos mantém invariante a equação da frente de onda quando partimos de um referencial inercial à outro, além de se aproximar das Transformações de Galileu quando u/c tende a 0, ou seja, quando tratamos de velocidade muito baixas em relação a c . Como o movimento que estamos analisando, da frente de onda, é na direção do eixo x , os eixos y e z não sofrerão alterações e, como trata-se de um movimento uniforme, teremos x e t lineares. Vamos então supor as seguintes transformações:

$$\begin{cases} x' = x - ut, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = t + kx, \end{cases} \quad (4.1.2)$$

onde k é uma constante à ser determinada. Apliquemos agora a transformação de R' para R nas Equações (4.1.1), obtendo

$$x^2 - 2xut + u^2 t^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 + 2c^2 ktx + c^2 k^2 x^2.$$

Vemos que é possível eliminar os termos multiplicados por xt se supormos as igualdades $k = -u/c^2$, ou seja, $t' = t - ux/c^2$.

Para $k = -u/c^2$, temos de (4.1.1) que

$$x^2 - 2xut + u^2t^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 + 2c^2(-u/c^2)tx + c^2(-u/c^2)^2x^2,$$

da onde, desenvolvendo, obtemos

$$x^2 - 2xut + u^2t^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 - 2utx + u^2x^2/c^2.$$

Basta, então, eliminar o termo $-2xut$, obtendo

$$x^2 - u^2x^2/c^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 - u^2t^2.$$

Rearranjando a equação obtida para uma forma mais conveniente, obtemos

$$x^2(1 - u^2/c^2) + y^2 + z^2 = c^2t^2(1 - u^2/c^2).$$

É possível eliminar o termo $(1 - u^2/c^2)$ se, ao invés das transformações (4.1.2), utilizarmos as transformações

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - ut), \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \gamma(t - ux/c^2), \end{cases} \quad (4.1.3)$$

sendo $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$. Segue o desenvolvimento para obter este resultado:

Primeiramente, basta que apliquemos as novas transformações em (4.1.1b), de onde conseguimos

$$[\gamma(x - ut)]^2 + y'^2 + z'^2 = c^2[\gamma(t - ux/c^2)]^2,$$

e desenvolvendo os quadrados,

$$\gamma^2 x^2 - 2\gamma^2 xut + \gamma^2 u^2 t^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \gamma^2 - 2\gamma^2 tux + \gamma^2 u^2 x^2 / c^2.$$

Podemos eliminar os termos $2\gamma^2 xut$ e então organizar a equação de forma que os termos com t e x fiquem isolados, obtendo

$$\gamma^2 x^2 - \gamma^2 u^2 x^2 / c^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \gamma^2 - \gamma^2 u^2 t^2.$$

Do lado esquerdo da igualdade, colocamos $x^2 \gamma^2$ em evidência, enquanto do lado direito fazemos o mesmo com $c^2 t^2 \gamma^2$ (lembrando que $\gamma = (\sqrt{1 - u^2/c^2})^{-1}$), conseguindo

$$\frac{x^2(1 - u^2/c^2)}{1 - u^2/c^2} + y^2 + z^2 = \frac{c^2 t^2(1 - u^2/c^2)}{1 - u^2/c^2}.$$

Para finalizar, como $1 - u^2/c^2 \neq 0$, podemos cancelá-lo e obter

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2.$$

Obtemos assim um resultado idêntico à Equação (4.1.1). Logo, as transformações (4.1.3), chamadas de *Transformações de Lorentz*, possibilitam manter invariante a equação da onda eletromagnética esférica ao passarmos do referencial inercial R ao outro referencial inercial R' . A transformação inversa, de R' para R , é obtida de forma análoga, mas com R se afastando à velocidade $-u$ em relação à R' .

Essas transformações foram deduzidas por Hendrik Antoon Lorentz (1853 - 1928) antes mesmo de Einstein, tendo sido frutífera para explicar o resultado negativo do experimento de Michelson-Morley, dado que uma de suas consequências é a de que corpos em movimento, orientados paralelamente ao seu deslocamento, tem seu comprimento contraído, o que exploraremos mais à frente.

A situação que nos encontramos é a seguinte: as Equações de Maxwell, as Transformações de Lorentz e o Princípio da Relatividade são consistentes. A Mecânica Clássica, porém, não entra neste

conjunto, uma vez que não permanece invariante sob as Transformações de Lorentz. Apesar disso, é possível observar nas Transformações (4.1.3) que quando temos velocidades pequenas o suficiente, ou seja, quando u/c tende a 0, as Transformações de Lorentz aproximam-se consideravelmente das Transformações de Galileu. É por isso que ainda hoje, mesmo com a Teoria da Relatividade de Einstein, utilizamos a Mecânica Clássica em boa parte dos estudos da Física, pois as velocidades envolvidas são muito menores que a da luz para terem impacto significativo nos resultados. Para o estudo de situações com altas velocidades, apesar da aversão dos físicos do século XIX, a Mecânica Clássica precisa passar por uma reformulação. Isto veremos no próximo capítulo, pois antes buscaremos entender como as Transformações de Lorentz afetam algumas leis físicas.

4.2 DILATAÇÃO DO TEMPO

Vamos supor dois eventos ocorrendo no mesmo ponto x_0 do referencial R nos instantes t_1 e t_2 , vamos determinar como os tempos variam quando medidos por um relógio em R' . Aplicando as Transformações de Lorentz, temos

$$\begin{aligned}t'_1 &= \gamma(t_1 - ux_0/c^2), \\t'_2 &= \gamma(t_2 - ux_0/c^2).\end{aligned}$$

Assim, o intervalo de tempo entre os eventos em R' é dado por

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \gamma(t_2 - t_1) = \gamma \Delta t_0, \quad (4.2.1)$$

sendo Δt_0 o *tempo próprio*, ou seja, o intervalo de tempo medido no referencial R por um único relógio presente no ponto onde ocorre o evento. Como $\gamma \geq 1$, temos que $\Delta t' \geq \Delta t_0$. Logo, concluímos que o intervalo de tempo próprio entre dois eventos é sempre menor do que o intervalo medido em outro referencial.

Um exemplo interessante da dilatação temporal é o famoso exemplo do *paradoxo dos gêmeos*, como explica Feynman [6]. Imaginemos dois gêmeos, Renan e Renato, que quando chegam à uma determinada idade, Renan parte em uma nave espacial que viaja à uma velocidade muito alta. Para Renato, todos os relógios de Renan, seu batimento cardíaco, seus pensamentos, tudo parece passar mais devagar, como sugere a Equação (4.2.1), enquanto para Renan o tempo corre normalmente. Fato é, no entanto, que se Renan voltar e encontrar Renato, estará mais novo que ele. Há quem diga que esta situação é um paradoxo, afinal, do ponto de vista de Renan é Renato quem está se movendo e poderia parecer mais novo, porém não é o que ocorre realmente. Para que os irmãos possam se encontrar novamente, Renan precisa dar meia volta em sua nave e, posteriormente, parar. Logo, ele sente todas as consequências da desaceleração de sua nave. A regra implicada é, portanto, que aquele que sentiu as acelerações que ficaria mais jovem.

4.3 SINCRONIZAÇÃO DE RELÓGIOS

Foi constatado anteriormente que relógios sincronizados em um referencial inercial não estarão sincronizados para um observador em outro referencial inercial, e agora iremos calcular a diferença de sincronização dos relógios.

Consideremos dois relógios, previamente sincronizados e posicionados nos pontos x_1 e x_2 . Vamos supor dois eventos que ocorrem nos pontos x_1 e x_2 nos instantes t_1 e t_2 , respectivamente, marcados pelos relógios locais. Considerando um observador se movendo com uma velocidade u em relação a R – o observador está no referencial R' –, pelas Transformações de Lorentz, ele observará em seu relógio

os eventos nos instantes

$$\begin{cases} t'_1 = \gamma(t_1 - \frac{u}{c^2}x_1) \\ t'_2 = \gamma(t_2 - \frac{u}{c^2}x_2). \end{cases}$$

Já o intervalo de tempo entre os eventos será

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \gamma(\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x) = \gamma(\Delta t - \frac{u}{c^2}L_0),$$

sendo L_0 a distância própria entre os relógios. No caso de os eventos serem simultâneos em R , teremos $\Delta t = 0$, logo,

$$\Delta t' = -\gamma \frac{u}{c^2} L_0. \quad (4.3.1)$$

Percebe-se que os eventos só serão simultâneos também em R' se $u/c \rightarrow 0$, ou seja, se a velocidade do observador for baixa em relação à da luz. No entanto, (4.3.1) nos dá o intervalo de tempo $\Delta t'$ medido por um relógio em R' , o que não é exatamente o que buscamos. Acontece que, para o observador em R' , o intervalo de tempo medido por ele sofre uma dilatação pelo fator γ em relação ao medido no R , já visto em (4.2.1). Sendo assim, para o observador no referencial em movimento, será

$$\Delta t' = \gamma \Delta t. \quad (4.3.2)$$

Unindo a equação (4.3.2) à (4.3.1), o intervalo de tempo medido nos relógios em R será, para o observador em R' ,

$$\Delta t = -\frac{u}{c^2} L_0. \quad (4.3.3)$$

Como tínhamos por hipótese que os eventos eram simultâneos em R , Δt na verdade mede a diferença de sincronização dos relógios de R para o observador em R' . Observa-se que $\Delta t = t_2 - t_1 < 0$, o que indica que para o observador no referencial R' o evento ocorre mais cedo no relógio em x_2 , ou, em outras palavras, o relógio em x_2 está adiantado se comparado ao relógio em x_1 .

4.4 CONTRAÇÃO DO COMPRIMENTO

Outra consequência direta dos postulados instituídos por Einstein é a contração do comprimento dos corpos. Tomemos uma régua em repouso no referencial R , de comprimento próprio $L_0 = x_2 - x_1$. O referencial R' move-se à velocidade u relativo à R , portanto, um observador naquele referencial que mede o comprimento da régua encontra o valor L . Pela Transformação (4.1.3), a relação entre L_0 e L é dada por:

$$\begin{cases} x_1 = \gamma(x'_1 + ut'_1), \\ x_2 = \gamma(x'_2 + ut'_2). \end{cases}$$

Temos então que o comprimento L_0 medido em R é

$$L = x_2 - x_1 = \gamma(x'_2 - x'_1) + \gamma u(t'_2 - t'_1). \quad (4.4.1)$$

Todavia, como o observador em R' está se movendo, ocorre uma imprecisão na medição das extremidades da régua, correspondente a seu deslocamento. Para evitar isso, deverá pegar as medidas no mesmo instante $t'_1 = t'_2$, o que altera a Equação (4.4.1) para

$$L_0 = \gamma L. \quad (4.4.2)$$

Novamente, dado que $\gamma \geq 1$, observamos que o comprimento da régua medido em qualquer referencial que não o seu de repouso será menor que o comprimento próprio.

Um exemplo semelhante ao do paradoxo dos gêmeos para a dilatação temporal pode ser dado para a contração do comprimento. Imaginemos que um trem esteja percorrendo os trilhos à uma velocidade muito alta e ao fim do caminho há uma garagem na qual o trem deseja parar, no entanto, ela é menor que o trem. Ele conseguirá entrar na garagem de forma que uma porta na entrada se feche completamente? Como pode-se imaginar devido às nossas discussões anteriores,

sim, ele conseguirá, mas o problema toma proporções matematicamente mais complexas que não abordaremos aqui. Para entender mais detalhadamente essa resposta, pode-se conferir Kneubil [8].

4.5 TRANSFORMAÇÃO DE VELOCIDADES

Também as velocidades sofrem alterações em sua forma quando consideramos as Transformações de Lorentz. Vamos supor uma partícula P com velocidade v no referencial inercial R , havendo novamente um outro referencial inercial R' movendo-se à uma velocidade u uniforme em relação à R na direção Ox (vale lembrar que podemos simplesmente rotacionar o referencial para que o movimento seja nesta direção). O deslocamento da partícula é dado por $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ em um tempo Δt . Uma vez que a velocidade nada mais é do que a razão entre a variação do deslocamento e a variação do tempo, os componentes vetoriais da velocidade em R' são

$$v'_x = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\gamma(\Delta x - u\Delta t)}{\gamma\left(\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x\right)} = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} - u}{1 - \frac{u\Delta x}{c^2\Delta t}} = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2}v_x},$$

$$v'_y = \frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \frac{\Delta y}{\gamma\left(\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x\right)} = \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\gamma\left(1 - \frac{u}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)} = \frac{v_y}{\gamma\left(1 - \frac{u}{c^2}v_x\right)},$$

$$v'_z = \frac{\Delta z'}{\Delta t'} = \frac{\Delta z}{\gamma\left(\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x\right)} = \frac{\frac{\Delta z}{\Delta t}}{\gamma\left(1 - \frac{u}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)} = \frac{v_z}{\gamma\left(1 - \frac{u}{c^2}v_x\right)}.$$

É claro, se desejamos realizar a transformação inversa, ou seja, tendo a velocidade da partícula em R' determiná-la em R , basta

utilizar $-u$ no lugar de u na Equação (4.3.3), o que resulta

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{u}{c^2} v'_x}, \quad v_y = \frac{v'_y}{\gamma \left(1 + \frac{u}{c^2} v'_x\right)}, \quad v_z = \frac{v'_z}{\gamma \left(1 + \frac{u}{c^2} v'_x\right)}. \quad (4.5.1)$$

Uma consequência interessante destas transformações aparece quando analisamos a soma de velocidades, pois veremos como a Teoria da Relatividade é fortemente fixada pelas próprias equações. Lembrando que a velocidade da luz é de cerca de 300.000 km/s, vamos pensar na seguinte situação: em uma nave espacial com velocidade 160.000 km/s há um objeto se movendo também a 160.000 km/s, então com que velocidade um observador do lado de fora da nave perceberia o objeto? Podemos imaginar a princípio que a resposta seria 320.000 km/s, o que é mais veloz que a luz, porém isso não deveria acontecer, de acordo com a Teoria da Relatividade.

Vamos supor que o objeto dentro da nave possua uma velocidade $v'_x = \frac{1}{2}c$ do ponto de vista de um observador dentro da nave, isto é, nesse contexto específico o movimento é retilíneo em x , enquanto a nave tem velocidade $u = \frac{1}{2}c$ em relação à um observador fora dela. Neste exemplo, o observador fora da nave estaria no referencial R , vendo o objeto à uma velocidade v'_x , e a nave seria o referencial R' . Substituindo os valores na Equação (4.5.1), obtemos

$$v_x = \frac{1/2c + 1/2c}{1 + \frac{1/2c}{c^2} 1/2c} = \frac{c}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{4}{5}c$$

Vemos que realmente não é possível atingir a velocidade da luz, como se “metade mais metade” não fosse um. Considerar velocidades pequenas é ainda mais simples, pois neste caso $(1 + \frac{u}{c^2}v) \approx 1$.

Podemos, inclusive, pensar no caso extremo em que o observador fora da nave tenta observar a própria luz, ou seja, sendo $v' = c$ e

a nave movendo-se à uma velocidade u . Teremos então

$$v = \frac{c + u}{1 + \frac{u}{c^2}c} = \frac{c + u}{\frac{c + u}{c}} = c \frac{u + c}{u + c} = c.$$

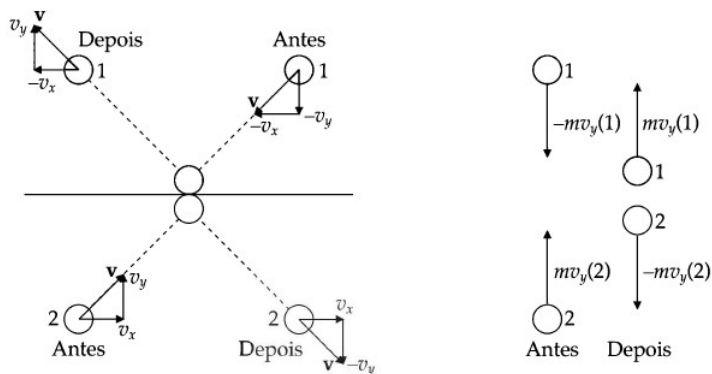
Logo, mesmo algo se movendo na velocidade da luz dentro da nave em movimento, vai parecer se mover à velocidade da luz do ponto de vista do observador fora da nave, o que corrobora com a teoria desenvolvida por Einstein.

5 MECÂNICA RELATIVÍSTICA

Como foi visto anteriormente, na substituição das Transformações de Galileu pelas Transformações de Lorentz, as leis da Mecânica Clássica não permanecem invariantes, o que faz com que tenhamos de alterá-las. A primeira que iremos estudar a seguir é um dos resultados mais notórios da Teoria da Relatividade Especial: a variação da massa de um corpo em relação à sua velocidade. Para chegarmos à essa conclusão, analisemos como o princípio da conservação de momento, momento linear ou quantidade de movimento se altera com as Transformações de Lorentz.

5.1 MASSA RELATIVÍSTICA

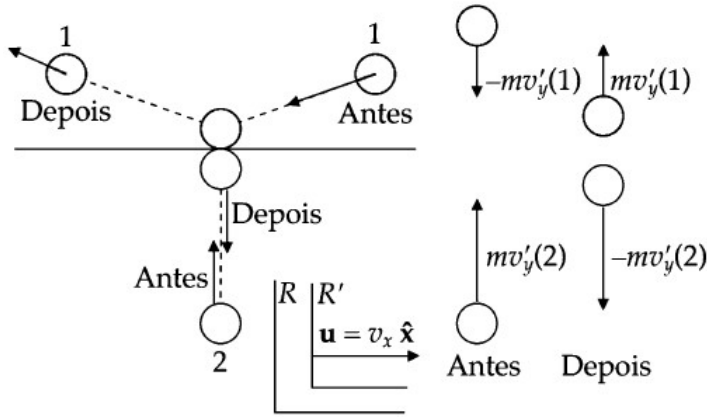
Vamos considerar a colisão entre duas esferas de massa m e velocidades v e $-v$ no referencial R que já estamos acostumados. Como mostra a Figura 5.1.1, o somatório das componentes das velocidades das esferas permanece nula antes e depois da colisão, o que significa que há a conservação de momento no choque.



Fonte: Gazzinelli [7], 2009

Figura 5.1.1 – Colisão entre as esferas 1 e 2 no referencial inercial R .

Analisado o referencial R , vamos agora considerar o referencial R' , que se move na direção Ox com velocidade $u = v_x$, ou seja, igual à componente horizontal da velocidade das esferas. A Figura 5.1.2 ilustra o ponto de vista da colisão das esferas neste referencial.



Fonte: Gazzinelli [7], 2009

Figura 5.1.2 – Colisão entre as esferas 1 e 2 no referencial inercial R' .

Vamos calcular, utilizando as Transformações de Lorentz, as componentes das velocidades nesse referencial:

- **Antes do choque**

Para v'_x da esfera 1:

$$v'_x(1) = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2} v_x} = \frac{-u - u}{1 - \frac{u}{c^2} (-u)} = \frac{-2u}{1 + \frac{u^2}{c^2}}.$$

Para v'_y da esfera 1:

$$v'_y(1) = \frac{v_y}{\gamma \left(1 - \frac{u}{c^2} v_x\right)} = \frac{-v_y(1)}{\gamma \left(1 + \frac{u^2}{c^2}\right)}.$$

Para v'_x da esfera 2:

$$v'_x(2) = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2} v_x} = \frac{u - u}{1 - \frac{u}{c^2} (u)} = 0.$$

Para v'_y da esfera 2:

$$v'_y(2) = \frac{v_y}{\gamma \left(1 - \frac{u}{c^2} v_x\right)} = \frac{v_y(2)}{\gamma \left(1 + \frac{u^2}{c^2}\right)}.$$

• **Após o choque**

Para v'_x da esfera 1:

$$v'_x(1) = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2} v_x} = \frac{-u - u}{1 - \frac{u}{c^2}(-u)} = \frac{-2u}{1 + \frac{u^2}{c^2}}.$$

Para v'_y da esfera 1:

$$v'_y(1) = \frac{v_y}{\gamma \left(1 - \frac{u}{c^2} v_x\right)} = \frac{v_y(1)}{\gamma \left(1 + \frac{u^2}{c^2}\right)}.$$

Para v'_x da esfera 2:

$$v'_x(2) = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2} v_x} = \frac{u - u}{1 - \frac{u}{c^2}(u)} = 0.$$

Para v'_y da esfera 2:

$$v'_y(2) = \frac{v_y}{\gamma \left(1 - \frac{u}{c^2} v_x\right)} = \frac{-v_y(2)}{\gamma \left(1 + \frac{u^2}{c^2}\right)}.$$

Utilizando a definição da Física Clássica que

$$\text{momento} = \text{massa} \cdot \text{velocidade},$$

a colisão das esferas no referencial R' conserva as componentes horizontais das velocidades, porém o mesmo não ocorre para as verticais,

uma vez que o somatório do momento total antes não é o mesmo que o momento total após o choque:

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \sum p_{y,\text{antes}} && \Rightarrow \sum p_{y,\text{depois}} \\
 &\Leftrightarrow mv'_y(1) + mv'_y(2) && \Leftrightarrow mv'_y(1) + mv'_y(2) \\
 &\Leftrightarrow \frac{-mv_y(1)}{\gamma \left(1 + \frac{u^2}{c^2}\right)} + \frac{mv_y(2)}{\gamma \left(1 + \frac{u^2}{c^2}\right)} && \Leftrightarrow \frac{mv_y(1)}{\gamma \left(1 + \frac{u^2}{c^2}\right)} + \frac{-mv_y(2)}{\gamma \left(1 + \frac{u^2}{c^2}\right)} \\
 &\Leftrightarrow \frac{m(-v_y(1) + v_y(2))}{\gamma \left(1 + \frac{u^2}{c^2}\right)} && \Leftrightarrow \frac{m(v_y(1) - v_y(2))}{\gamma \left(1 + \frac{u^2}{c^2}\right)}
 \end{aligned}$$

Isto mostra que a conservação do momento clássico não é compatível com as Transformações de Lorentz, o que nos leva a buscar uma nova definição que seja compatível e que tenda ao momento clássico para velocidades muito menores que c . Analisando as componentes das velocidades que calculamos anteriormente, vimos que o problema se encontrava na componente y da velocidade:

$$p_y = mv_y = m \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}.$$

O que podemos constatar é que Δy é constante sob as Transformações de Lorentz em qualquer referencial inercial que se mova paralelamente ao eixo Ox , porém Δt já vimos que depende do referencial, sendo isto que buscaremos consertar. Vamos substituir o tempo atual (medido por um relógio no referencial R) pelo tempo próprio t_0 da partícula a qual desejamos calcular o momento. Como $\Delta y/\Delta t_0$ é invariante sob as Transformações de Lorentz, uma vez que Δt_0 é o tempo próprio da partícula e Δy é perpendicular ao movimento, temos que

$$\frac{\Delta y}{\Delta t_0} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta t_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \gamma v_y$$

também é invariante sob as Transformações de Lorentz para um referencial que se move com velocidade paralela à Ox . Sendo assim, a componente vertical do momento pode ser definida por

$$p_y = m\gamma v_y = \frac{mv_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

ou, na forma vetorial,

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m\gamma\mathbf{v}. \quad (5.1.1)$$

Temos, então, uma expressão para o momento que é compatível com as Transformações de Lorentz. Além disso, temos que $p \rightarrow \infty$ quando v se aproxima de c e $p \rightarrow mv$ para velocidades v muito menores que a da luz. Conseguimos, assim, a expressão conhecida como *massa relativística*: $M(v) = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$.

A *massa de repouso* m_0 de um corpo é uma invariante de Lorentz, ou seja, assim como o tempo próprio t_0 , é a mesma em qualquer referencial inercial. Já a massa relativística, é variável e dependente de γ .

O que o momento relativístico, dado pela Equação (5.1.1), nos leva a interpretar é que nenhum corpo massivo pode atingir a velocidade da luz, pois dessa forma seu momento seria infinito, o que exigiria uma quantia infinita de energia. Sendo assim, a velocidade c da luz é a mais alta com que se pode transmitir um sinal por ondas eletromagnéticas ou partículas materiais. Todavia, c é somente a velocidade da luz no vácuo. Já num meio transparente de índice de refração n , a velocidade da luz é c/n e, aqui, a velocidade de uma partícula pode ultrapassar a velocidade da luz. Isto tem como consequência, por exemplo, o chamado *Efeito Cherenkov*, o qual não nos

aprofundaremos neste trabalho, mas pode ser visto em Gazzinelli [7], capítulo 4.7.

5.2 EQUIVALÊNCIA ENTRE MASSA E ENERGIA

Uma vez que a conservação do momento da Física Clássica não é consistente com a Teoria da Relatividade, a segunda lei de Newton, dada por $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, também não o pode ser. Como já temos o momento relativístico, vamos utilizar a mesma expressão para a força que Newton utilizou em suas formulações:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad (5.2.1)$$

e entender as implicações disto.

Vamos iniciar pela energia cinética. A variação da energia de um corpo é numericamente igual ao trabalho realizado por ele, e o trabalho é como designamos a transferência de energia a um corpo por meio da aplicação de uma força. Assim,

$$\Delta E_c = \int_{v_0}^v \vec{F} \cdot d\vec{s}.$$

Considerando o movimento em uma única direção e partindo do repouso,

$$E_c = \int_0^v F ds. \quad (5.2.2)$$

Dado que $p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, usando (5.2.1), temos

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = m_0 \frac{d}{dt} \left[v \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right]. \quad (5.2.3)$$

Utilizando a regra do produto e da cadeia em (5.2.3), temos

$$\begin{aligned}
 F &= m_0 \left[\frac{dv}{dt} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} + v \left(-\frac{2v}{c^2} \frac{dv}{dt} \left(-\frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \right) \right] \\
 &= m_0 \left[\frac{dv}{dt} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{v^2}{c^2} \frac{dv}{dt} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \right] \\
 &= m_0 \frac{dv}{dt} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{\frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)} \right] \\
 &= m_0 \frac{dv}{dt} \frac{1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)} \\
 &= m_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \frac{dv}{dt}.
 \end{aligned}$$

Logo, teremos

$$F = m_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \frac{dv}{dt} \quad (5.2.4)$$

Observe que os termos da equação acima estão na variável t , mas o integrando para a energia, dado na Equação (5.2.2), está na variável de integração s . Assim, usando a regra da cadeia, podemos ver que

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds} \quad (5.2.5)$$

e substituindo isso na Equação (5.2.4), F em termos da variável s , isto é,

$$F = m_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{3}{2}} v \frac{dv}{ds}. \quad (5.2.6)$$

Integrando agora na variável s e usando o Teorema Fundamental do Cálculo, temos que

$$E_c = \int_0^v F ds = \int_0^v m_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{3}{2}} v \frac{dv}{ds} ds = c^2 m_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} - c^2 m_0.$$

É importante considerar que aqui estamos utilizando v como a velocidade de uma partícula, e não mais a velocidade relativa entre os referenciais. Considerando isso para nossas notações, temos então que

$$E_c = \gamma m_0 c^2 - m_0 c^2. \quad (5.2.7)$$

Analisando novamente o caso em que a velocidade v é muito menor que c , temos que $v^2/c^2 \ll 1$. Aqui nos será conveniente aproximar γ por uma série de Taylor na vizinhança de $v = 0$:

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \left(\frac{v^2}{c^2}\right)^2 + \dots$$

Uma vez que $v^2/c^2 \ll 1$, os termos após o segundo da série são muito pequenos e, portanto, iremos desconsiderá-los. Assim,

$$E_c = m_0 c^2 (\gamma - 1) = m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots - 1\right) \simeq \frac{1}{2} m_0 v^2,$$

que é a equação da energia cinética para a Física Clássica.

Uma interessante reorganização da Equação (5.2.7) é

$$\gamma m_0 c^2 = m_0 c^2 + E_c,$$

pois nos permite, assim como Einstein o fez, interpretar o termo $m_0 c^2$ como a *energia de repouso* da partícula e $\gamma m_0 c^2$ como a *energia total* da partícula. Esta energia de repouso

$$E_0 = m_0 c^2 \quad (5.2.8)$$

nos diz que a massa inercial de um corpo é uma medida de seu conteúdo de energia, sendo a Equação (5.2.8) a maior representante do princípio da equivalência entre massa e energia.

Na Teoria da Relatividade Especial, a conservação da massa não pode ser tratada separadamente da conservação de energia. A

equivalência entre massa e energia implica na substituição dessas duas leis por uma nova: *a lei de conservação de massa-energia*, que significa a conservação de $m_0c^2 + E_c$. Em qualquer processo físico, como um choque entre partículas, parte da energia cinética pode se transformar em massa de repouso ou vice-versa.

Na maioria dos casos, mudanças na energia constituem mudanças muito pequenas, quase desprezíveis, na massa, uma vez que é raro conseguirmos gerar tanta energia de uma certa quantia de material. Todavia, podemos utilizar uma bomba atômica como um exemplo desses raros casos, pois ela gera uma energia explosiva de 20 quilotons de TNT, e a sujeira deixada após a explosão é um grama mais leve que a massa inicial do material reagente, significando que a energia liberada tinha um grama de massa, de acordo com a relação $\Delta E = \Delta(m_0c^2)$.

A expressão da energia total, $E = \gamma m_0c^2$, pode ser reorganizada de uma maneira mais conveniente para certas situações, com base no momento $\mathbf{p}$ da partícula em questão. Considerando

$$E = \gamma m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{e} \quad \mathbf{p} = \gamma m_0\mathbf{v},$$

elevamos ambas as equações ao quadrado, obtendo

$$E^2 = \frac{(m_0c^2)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (5.2.9a)$$

$$p^2 = \frac{m_0^2v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (5.2.9b)$$

Para eliminar o termo v^2 , fazemos o seguinte desenvolvimento na expressão (5.2.9a)

$$E^2 = \frac{(m_0c^2)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Leftrightarrow 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{(m_0c^2)^2}{E^2},$$

podendo então substituir a expressão obtida na Equação (5.2.9b), da qual poderemos isolar v^2 fazendo

$$p^2 = \frac{m_0^2 v^2}{(m_0 c^2)^2} \Leftrightarrow v^2 = \frac{(pm_0 c^2)^2}{m_0^2 E^2}.$$

Agora, basta que façamos a substituição em (5.2.9a):

$$E^2 = \frac{(m_0 c^2)^2}{1 - \frac{(pm_0 c^2)^2}{m_0^2 E^2}} = \frac{(m_0 c^2)^2}{\frac{m_0^2 E^2 c^2 - (pm_0 c^2)^2}{m_0^2 E^2 c^2}},$$

de onde desenvolvemos para encontrar

$$E^2 \left(\frac{m_0^2 E^2 c^2 - (pm_0 c^2)^2}{m_0^2 E^2 c^2} \right) = (m_0 c^2)^2.$$

Cancelando E^2 , que sabemos não ser nulo, obtemos

$$\frac{m_0^2 c^2 (E^2 - p^2 c^2)}{m_0^2 c^2} = (m_0 c^2)^2,$$

da qual podemos cancelar $m_0^2 c^2$ no lado esquerdo da igualdade e facilmente obter

$$E^2 = p^2 c^2 + (m_0 c^2)^2. \quad (5.2.10)$$

O benefício de considerar a equação (5.2.10) está em não ser mais necessário separar a energia total $\gamma m_0 c^2$ da energia de repouso $m_0 c^2$ e energia cinética, pois muitas vezes isso sequer é possível. A energia total E e o momento p , no entanto, são relacionados de maneira bem mais simples.

O fóton, por exemplo, é a partícula de luz com massa $m_0 = 0$, portanto, para esta partícula temos

$$E = pc.$$

6 ESPAÇO-TEMPO

A Teoria da Relatividade mostra que as relações entre tempo e espaço, quando medidas em um referencial e depois em outro, são de certa forma contraintuitivas ao nosso senso comum. Portanto, é fundamental que entendamos com totalidade as relações entre espaço e tempo que as Transformações de Lorentz implicam, o que buscaremos fazer neste capítulo.

6.1 INTRODUÇÃO AO ESPAÇO-TEMPO

Como vimos anteriormente e repetiremos aqui com fins de facilitar a leitura desta seção em diante, as Transformações de Lorentz entre as posições e o tempo (x, y, z, t) quando medidas em um referencial R , e seus correspondentes (x', y', z', t') em um referencial R' movendo-se com velocidade u na direção do eixo x , é dada como em (4.1.3):

$$\begin{cases} x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \end{cases}$$

Algo interessante de se notar é que há uma certa semelhança entre estas transformações e a rotação em um ângulo φ de coordenadas em torno do eixo Oz ,

$$\begin{cases} x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi, \\ y' = y \cos \varphi - x \sin \varphi, \\ z' = z, \end{cases} \quad (6.1.1)$$

no sentido de que ambas misturam as variáveis em seus cálculos. Para calcular x' e y' após a rotação, precisamos de x e y , e para calcular x' e t' nas Transformações de Lorentz também precisamos de x e t . Para entendermos melhor o que essa comparação propõe, vamos utilizar a analogia feita por Feynman [6]:

Quando olhamos para um objeto, existe uma coisa óbvia que podemos chamar de “largura aparente” e outra que podemos chamar de “profundidade”. Mas as duas idéias, largura e profundidade, não são propriedades fundamentais do objeto, se dermos um passo para o lado e olharmos para a mesma coisa por um ângulo diferente, obtemos uma largura e profundidade diferentes e podemos desenvolver algumas fórmulas para calcular as novas dimensões a partir das antigas e dos ângulos envolvidos. As Equações (6.1.1) são estas fórmulas. Alguém pode dizer que uma dada profundidade é um tipo de “mistura” de todas as profundidades e de todos os comprimentos. Se fosse sempre impossível se mover e sempre vissemos um dado objeto da mesma posição, então todo esse negócio seria irrelevante – sempre veríamos a largura e a profundidade “verdadeiras”, e elas pareceriam ter propriedades bem diferentes, porque uma se apresenta como um ângulo ótico subtendido e a outra envolve uma certa focalização dos olhos ou até mesmo intuição; elas pareceriam ser coisas muito diferentes e nunca se misturariam. É porque podemos andar ao redor do objeto que percebemos que a profundidade e a largura são, de um modo ou outro, somente dois aspectos diferentes da mesma coisa.

A pergunta que fazemos então é: podemos olhar as Transformações de Lorentz do mesmo jeito? Há também uma mistura, mas de posição e tempo, ou seja, uma medida de espaço e uma de tempo gera uma nova medida de espaço. Conforme a analogia vista, a forma real de um objeto é, na verdade, maior que as dimensões que enxergamos, pois estas dependem de como o olhamos, sendo que quando mudamos para outra posição, nosso cérebro imediatamente recalcula a largura e a profundidade. Todavia, não conseguimos fazer o mesmo com coordenadas e tempo. É como se estivéssemos “presos” no mesmo lugar,

tendo de observar um objeto pelo mesmo ângulo desde sempre. Se pudéssemos tratar o tempo e o espaço da mesma forma que largura e comprimento, vendo-os de outras formas, veríamos um pouco “atrás”, assim como quando viramos a cabeça para ver algo de outro lado.

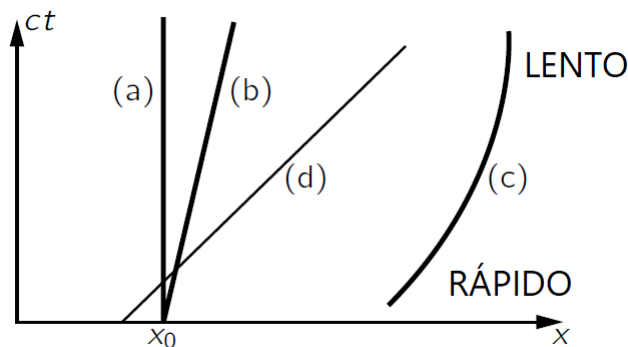
Vamos então tentar pensar em objetos em um novo tipo de universo, de espaço e tempo unidos, do mesmo jeito que os objetos no nosso universo espacial são reais e podem ser vistos de direções diferentes. Vamos pensar nesses objetos ocupando um certo espaço durante um certo intervalo de tempo como dentro de uma “bolha”, e estas “bolhas” conseguimos ver por outros pontos de vista dependendo de nossa velocidade. Esta nova entidade geométrica, este novo universo no qual as “bolhas” existem é chamado de *espaço-tempo*, e um ponto qualquer (x, y, z, t) no espaço-tempo é denominado *evento*.

Quem introduziu o conceito de espaço-tempo foi Hermann Minkowski (1864-1909), professor de Einstein em Zurique, na Suíça, pouco tempo após o artigo de 1905 sobre a Teoria da Relatividade. Em 1908, em um congresso científico realizado em Colônia, Alemanha, ele ainda afirmou que [10]

as considerações sobre espaço e tempo que desejo expor-vos brotaram do terreno da Física Experimental. Aí reside a sua força. A sua tendência é radical. Daqui em diante os conceitos de espaço e de tempo, considerados como autônomos, vão desvanecer-se como sombrar e somente se reconhecerá existência independente a uma espécie de união entre os dois.

Agora, imaginemos o seguinte: vamos utilizar um único eixo horizontal para as três coordenadas espaciais (x, y, z) e um eixo vertical para o tempo t . Como uma partícula se comportaria em um diagrama como esse? Se uma partícula está parada, ela mantém as mesmas coordenadas ao longo do tempo, o que significa que seu “caminho” será uma reta paralela ao eixo t , como pode-se observar na figura 6.1.1(a). Já uma partícula que se descola um pouco, conforme

o tempo passa x aumenta também, como é visível na figura 6.1.1(b). Uma outra partícula, que começa movendo-se rapidamente mas fica mais lenta conforme o tempo passa, tem um deslocamento como na figura 6.1.1(c). Por fim, a luz, tendo uma velocidade constante, é representada por uma reta como na figura 6.1.1(d).

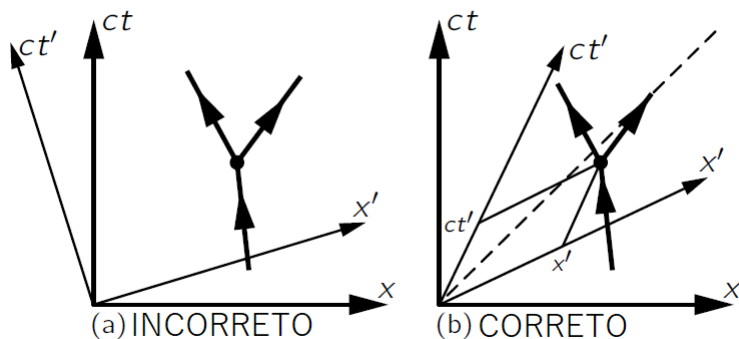


Fonte: Feynman [5], 2015

Figura 6.1.1 – Caminhos de três partículas e da luz no espaço-tempo.

A partir da nossa ideia nova, pensemos no caso em que um certo evento ocorre a uma partícula, por exemplo a sua súbita desintegração, em algum ponto do espaço-tempo, em duas novas partículas que seguem caminhos diferentes. Como este evento ocorre em um certo x e t , poderíamos pensar que bastaria utilizar um novo par de eixos e rotacioná-los de forma a encontrar os novos x e t do sistema, como proposto na Figura 6.1.2(a). Todavia, isto está errado, pois é fato que as Transformações (6.1.1) não é exatamente igual às Transformações de Lorentz, apesar de serem semelhantes. Na verdade, e provaremos isso posteriormente, não é possível tratar o espaço-tempo como uma geometria real e ordinária. O que acontece na verdade é que a um corpo em movimento devem ser atribuídos eixos igualmente inclinados

ao raio de luz, utilizando um tipo de projeção paralela aos eixos x' e t' como mostra a Figura 6.1.2(b).



Fonte: Feynman [5], 2015

Figura 6.1.2 – Dois pontos de vista de uma partícula se desintegrando.

6.2 INTERVALOS DE ESPAÇO-TEMPO

A geometria do espaço-tempo não é euclidiana no senso comum, mas há uma geometria muito parecida, especial em certos pontos. Há funções de coordenadas e tempo que independem do sistema utilizado, por exemplo: com rotações simples, se colocarmos um ponto na origem e outro em algum outro lugar, os dois sistemas (antes e após uma rotação) teriam a mesma origem, e a distância dela ao outro ponto é também invariante. Esta é uma propriedade que não depende da maneira como a medimos, e o quadrado da distância é $x^2 + y^2 + z^2$. No espaço-tempo há igualmente algo que se mantém inalterada, que é a combinação $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$, ou seja, ela mantém-se a mesma

após as Transformações de Lorentz:

$$\begin{aligned}
 & c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 \\
 &= c^2 \left(\frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right)^2 - \left(\frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right)^2 - y^2 - z^2 \\
 &= \frac{c^2(t^2 - 2xut/c^2 + u^2x^2/c^4) - (x^2 - 2xut + u^2t^2)}{1 - u^2/c^2} - y^2 - z^2 \\
 &= \frac{c^2t^2 - 2xut + u^2x^2/c^2 - x^2 + 2xut - u^2t^2}{1 - u^2/c^2} - y^2 - z^2 \\
 &= \frac{c^2t^2(1 - u^2/c^2) - x^2(1 - u^2/c^2)}{1 - u^2/c^2} - y^2 - z^2 \\
 &= c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2.
 \end{aligned} \tag{6.2.1}$$

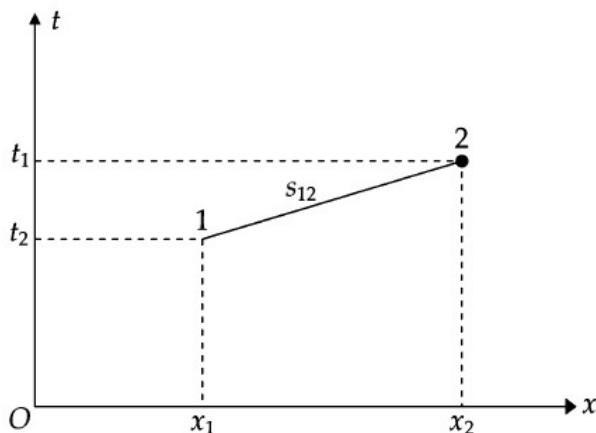
Esta quantidade – geralmente denotada por s – é algo real tal como a distância, sendo chamada de *intervalo* entre dois pontos (ou eventos) no espaço-tempo, sendo um deles, neste caso, a origem. O intervalo entre dois eventos quaisquer pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
 s_{12}^2 &= c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 \\
 &= c^2\Delta t^2 - \Delta l^2,
 \end{aligned} \tag{6.2.2}$$

sendo $c\Delta t$ a separação temporal – aqui é interessante notar que c dá a esse termo a dimensão de comprimento, pois sua unidade de medida “cancela” a do tempo – e Δl a separação espacial entre dois eventos.

Podemos ainda escrever a relação (6.2.2) em forma diferencial, ficando

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt^2 - dl^2.$$



Fonte: Gazzinelli [7], 2009

Figura 6.2.1 – Intervalo s_{12} entre os eventos 1 e 2 no espaço-tempo.

Algo notório da expressão para o intervalo s_{12} é que é possível obter termos negativos dele, o que comprova o caráter não-euclidiano da geometria na qual estamos adentrando.

O intervalo entre a emissão de um pulso luminoso na origem de um referencial R e sua chegada em um ponto (x, y, z, t) é dado pela Equação (6.2.1), mas já sabemos também pela Equação da frente de onda esférica (4.1.1a) que

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0.$$

Ora, a equação acima é exatamente o quadrado do intervalo entre dois eventos, logo, $s^2 = 0$, o que significa que s é uma grandeza escalar e independe do referencial inercial. Em outras palavras, s é um *absoluto*, e, portanto é uma invariante de Lorentz. Da mesma forma, o intervalo s_{12} entre dois eventos quaisquer também é um absoluto, logo, tem o mesmo valor quando calculado em qualquer referencial

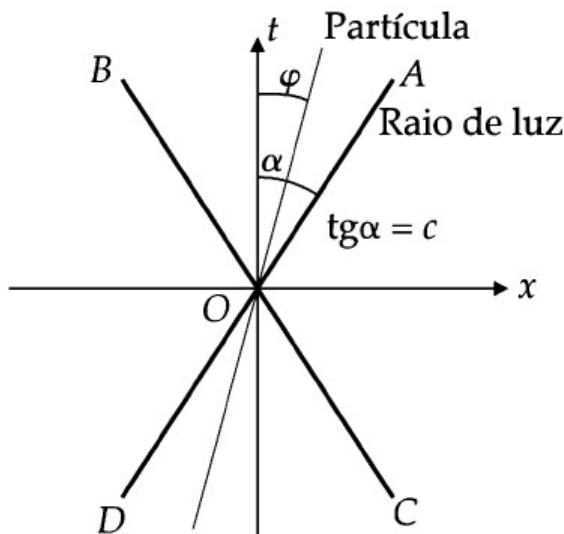
inercial.

A diferença entre o espaço-tempo e o espaço regular é de fato interessante. Considerando a Equação (6.2.2), se assumirmos um evento na origem e outro que tenha tempo nulo, somente com coordenadas espaciais, o intervalo ao quadrado seria negativo e teríamos um intervalo imaginário, dada a raiz quadrada de um número negativo. Aqui vemos uma grande diferença para com o quadrado da distância no espaço ordinário, pois este é estritamente positivo, enquanto o quadrado do intervalo pode ser tanto negativo quanto positivo. Quando um intervalo entre dois pontos é imaginário, dizemos que ele é do *tipo-espaço*, dado que o intervalo tem mais caráter espacial. Por outro lado, quando temos eventos próximos espacialmente um do outro mas que diferem no tempo, o quadrado do intervalo que encontramos é positivo, e este denominamos intervalo *tipo-tempo*.

6.3 CONES DE LUZ

O que entenderemos agora é como visualizar o passado e o futuro no espaço-tempo. Primeiramente, vamos impor que o evento $O(0, 0, 0, 0)$ do referencial $R(x, y, z, t)$ é a origem do tempo e das coordenadas espaciais. O que faremos é analisar as relações entre os outros eventos em R com o evento O . Graficamente, vamos adotar o eixo vertical para o tempo t e o eixo horizontal x para as coordenadas espaciais (x, y, z) . O movimento retilíneo na direção x de uma partícula, o qual encontra com o ponto $x = 0$ em $t = 0$, é representado por uma reta que passa por O e tem inclinação φ em relação ao eixo t , sendo a tangente de φ a velocidade da partícula $u = tg \varphi$, enquanto a equação da reta é $x = ut$. A luz age da mesma forma, passando por $x = 0$ em $t = 0$ e é representada pela reta $x = ct$ de inclinação $c = tg \alpha$. Uma vez que nada pode ultrapassar a velocidade da luz, nenhuma reta que represente o movimento de uma partícula poderá

ter um ângulo de inclinação maior que α .

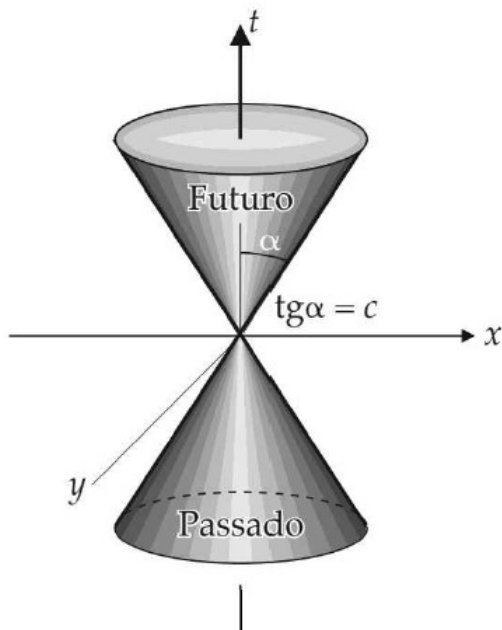


Fonte: Gazzinelli [7], 2009

Figura 6.3.1 – Representação do espaço-tempo (x, t) .

Na Figura 6.3.1, as retas BOC e AOD representam os movimentos de sinais de luz em sentidos opostos do eixo x . O movimento de qualquer partícula será representado por uma reta dentro do ângulo formado entre as retas BOC e AOD . Se desejamos representar o movimento de todos os possíveis pulsos de luz no plano xy , basta rotacionar a Figura 6.3.1 em torno do eixo t , obtendo assim o *cone de luz* (Figura 6.3.2) que é o lugar de representação de todos os raios de luz que passam pela origem e estão no plano xy . Se fossemos considerar os casos mais gerais, em que um raio de luz é enviado em qualquer direção do espaço, teríamos uma considerável complicação, pois teríamos quatro variáveis para representar, (x, y, z, t) . A figura resultante seria um

hipercone que, logicamente, não pode ser representado graficamente.

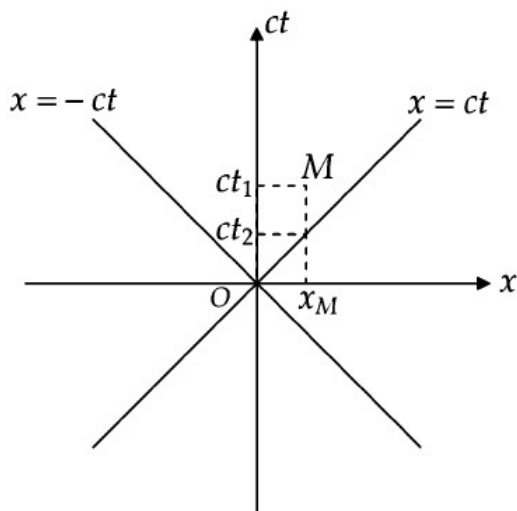


Fonte: Gazzinelli [7], 2009

Figura 6.3.2 – Cone de luz.

Comumente, ao trabalhar com o conceito de intervalo, é conveniente trocar t por ct , já que este possui dimensão de comprimento. Para entendermos como o cone de luz representa a divisão do espaço-tempo em passado e futuro, suponhamos o evento M no referencial R , interior à folha superior do cone de luz. Um pulso de luz partindo de O tem sua trajetória na superfície do cone, dada pela reta $x = ct$. O sinal chega à coordenada x_M , local em que ocorre o evento M , no instante ct_1 , antes da ocorrência real do evento M , no instante ct_2 . Vemos, assim, que qualquer que seja o evento M dentro da folha su-

terior do cone de luz, sempre haverá um pulso de luz passando por O que chegará ao local de M antes que o evento ocorra, caracterizando M como um evento futuro em relação à O .



Fonte: Gazzinelli [7], 2009

Figura 6.3.3 – Evento M ocorrendo no interior da parte superior do cone de luz. Um pulso de luz sempre chega ao local de ocorrência do evento M antes dele próprio acontecer.

O intervalo entre M e O é dado por $s^2 = (ct)^2 - x^2 > 0$. Uma vez que s é um invariante de Lorentz, em qualquer outro referencial R' teríamos também $s'^2 > 0$ e $s'^2 = (ct')^2 - x'^2 > 0$, logo, M ocorrer após O é uma relação absoluta. Os eventos, tanto na superfície do cone quanto em seu interior, terão ocorrido depois do evento O para todo observador de qualquer referencial inercial, constituindo assim o *futuro absoluto* de O . Dadas estas propriedades, o evento O pode

afetar o evento M , podendo inclusive haver uma relação causal entre estes eventos, ou seja, que O seja o próprio motivo da ocorrência de M . É interessante observar que neste intervalo encontramos $s^2 > 0$ e $(ct)^2 > x^2$, o que significa que a parte temporal do intervalo é maior que a espacial, caracterizando um intervalo *tipo-tempo*. Utilizando um raciocínio análogo, podemos demonstrar que a folha inferior do cone e sua parte interna constituem o *passado absoluto de O* , ou seja, é o lugar de todos os eventos que antecedem O .

Podemos nos perguntar: o que acontece fora da região delimitada pelo cone de luz? Ela se trata da região do espaço-tempo que não podemos afetar à partir de O nem pode nos afetar em O , pois nada pode ir além da velocidade da luz. No entanto, o que ocorre nessa região *pode* nos afetar *depois*. Imagine, por exemplo, que o sol está explodindo “agora”, levaria oito minutos para que percebêssemos e não poderia nos afetar de forma alguma antes disso.

O “agora” não é um conceito simples e concreto, como já discutimos anteriormente neste trabalho. É algo misterioso, além da nossa capacidade de definir ou controlar, mas que pode nos influenciar no futuro — ou que poderíamos ter influenciado, caso tivéssemos agido com antecedência suficiente no passado. Se observarmos a estrela Alfa Centauro, a veremos como era quatro anos atrás, pois este foi o tempo necessário para a sua luz chegar até nós; podemos somente imaginar como ela está “agora”, ou seja, no mesmo tempo que o nosso sistema de coordenadas. Ainda assim, a vemos como era quatro anos atrás, e o que ocorre com ela neste exato instante irá nos afetar só daqui em quatro anos. Sendo assim, Alfa Centauro “agora” é meramente um conceito de nossas mentes, não é algo fisicamente definível, pois temos de esperar para observar. Além disso, o “agora” depende do nosso referencial, pois se, por exemplo, Alfa Centauro estivesse se movendo, um observador lá não concordaria conosco pois colocaria os eixos de

seu sistema de coordenadas em um certo ângulo, e o seu “agora” seria um tempo diferente. Já vimos que, de fato, a simultaneidade não é absoluta, pois pode e vai variar conforme o referencial.

6.4 QUADRIVETORES

Para conseguirmos desenvolver o formalismo que desejamos para o espaço-tempo, vamos estudar o conceito de quadrivetores. Primeiramente, substituiremos a variável ct pela variável $\tau = ict$, sendo $i = \sqrt{-1}$, para simplificar algumas operações futuras. O vetor posição de um evento (x, y, z, τ) será representado por suas quatro componentes

$$r_\alpha, \quad \alpha \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Aqui definiremos uma nova série de notações que auxiliarão no estudo dos quadrivetores. Utilizaremos uma letra grega como subíndice para apontar uma variação de 1 a 4, enquanto os vetores terão subíndice latino, indo de 1 a 3.

O quadrado do módulo do quadrivector posição é

$$\sum_1^4 r_\alpha^2 = x^2 + y^2 + z^2 + \tau^2.$$

Para contornar a necessidade de sempre escrever o símbolo de somatório, utilizaremos a útil notação de Einstein, na qual um subíndice repetido indica um somatório sobre ele (o subíndice é chamado de *índice mudo*):

$$\sum_1^4 r_\alpha^2 = r_\alpha r_\alpha.$$

Com isso, podemos escrever

$$r_\alpha^2 = r_\alpha r_\alpha = x^2 + y^2 + z^2 + \tau^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2.$$

Como já vimos anteriormente, as Transformações de Lorentz são transformação das coordenadas (x, y, z, t) de um evento em um referencial inercial para outro referencial inercial. A partir de agora, podemos escrevê-las de uma maneira mais polida utilizando matrizes:

$$\begin{pmatrix} r'_1 \\ r'_2 \\ r'_3 \\ r'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad (r'_\alpha) = \mathbf{A}(r_\alpha), \quad (6.4.1)$$

onde $\beta = u/c$.

A matriz $\mathbf{A}$ aqui é especialmente simples, pois estamos tratando de Transformações de Lorentz entre dois referenciais em movimento relativo uniforme na direção do eixo x , logo, as direções y e z não se alteram. Se fossemos analisar o caso mais geral, em que o movimento pode se dar em qualquer direção, teríamos uma matriz mais complicada, a qual não faremos aqui.

Vamos calcular as Transformações de Lorentz a partir da Equação (6.4.1), para conferirmos sua veracidade. A partir da multiplicação matricial, podemos descobrir os valores r'_α :

- Multiplicando a primeira linha da matriz $\mathbf{A}$ pela matriz coluna r_α , obtemos

$$r'_1 = \gamma r_1 + i\beta\gamma r_4 \quad \text{ou} \quad x' = \gamma x + i\beta\gamma(ict) = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}};$$

- Multiplicando a segunda linha da matriz $\mathbf{A}$ pela matriz coluna r_α , obtemos

$$r'_2 = r_2 \quad \text{ou} \quad y' = y;$$

- Multiplicando a terceira linha da matriz $\mathbf{A}$ pela matriz coluna r_α , obtemos

$$r'_3 = r_3 \quad \text{ou} \quad z' = z;$$

- Multiplicando a quarta linha da matriz $\mathbf{A}$ pela matriz coluna r_α , obtemos

$$r'_4 = -i\beta\gamma r_1 + \gamma r_4 \quad \text{ou} \quad x' = -i\beta\gamma x + \gamma(ict) = \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

De fato, concluímos que a forma matricial concorda com as transformações que estamos acostumados. Se quisermos realizar a operação inversa, aplicando a transformação do referencial R' para o referencial R , basta utilizar u por $-u$ na matriz $\mathbf{A}$ da Equação (6.4.1), de onde obteremos a matriz transposta $\tilde{\mathbf{A}}$:

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r'_1 \\ r'_2 \\ r'_3 \\ r'_4 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad (r_\alpha) = \tilde{\mathbf{A}}(r'_\alpha).$$

Finalmente, podemos definir o que é um quadrivetor: um quadrivetor é qualquer conjunto de quatro grandezas que se transformam sob as Transformações de Lorentz, tal qual as componentes do quadrivetor posição. A notação que utilizaremos para um quadrivetor será com o símbolo da componente entre parênteses, (a_α) , para designar uma matriz coluna com quatro componentes. Portanto, se aplicarmos as Transformações de Lorentz sob o quadrivetor (a_α) , teremos

$$a'_1 = \frac{a'_1 + i\beta a_4}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad a'_2 = a_2, \quad a'_3 = a'_3, \quad a'_4 = \frac{a_4 - i\beta a_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Os quadrivetores são semelhantes aos vetores em muitos aspectos. O produto escalar, por exemplo, é dado por

$$(a_\alpha)(b_\alpha) = a_\alpha b_\alpha = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + a_4 b_4,$$

sendo $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ vetores padrão no espaço tridimensional.

Algo interessante de adicionar é que o quadrado do módulo de um quadrivetor, $a_\alpha a_\alpha$, não é necessariamente positivo, como ocorre tridimensionalmente. Portanto, podemos dividi-los da mesma maneira que os intervalos, em tipo-espaço e tipo-tempo. Se $a_\alpha a_\alpha > 0$, a parte espacial é predominante sobre a temporal e temos um *quadrivetor tipo-espaço*; caso tenhamos $a_\alpha a_\alpha < 0$, é o caso de um *quadrivetor tipo-tempo*.

Agora que temos o conhecimento conceitual, vamos definir alguns quadrivetores fundamentais na Teoria da Relatividade Especial.

6.5 QUADRIVETOR VELOCIDADE

No Capítulo 5, sobre Mecânica Relativística, averiguamos que para manter válido o princípio da conservação de momento, era necessário trocar o tempo t do referencial do observador pelo tempo próprio t_0 da partícula. Reutilizaremos este lema para definir o quadrivetor velocidade:

$$(u_\alpha) = \left(\frac{dr_\alpha}{dt_0} \right),$$

aplicando a regra da cadeia,

$$\frac{dr_\alpha}{dt_0} = \frac{dr_\alpha}{dt} \frac{dt}{dt_0} = \gamma \frac{dr_\alpha}{dt}$$

e substituindo o quadrivetor posição, temos

$$\left(\frac{dr_\alpha}{dt_0} \right) = \gamma \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, \frac{d\tau}{dt} \right) = \gamma(\mathbf{v}, ic) \quad (6.5.1)$$

onde

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{d}{dt}(ict) = ic.$$

Adicionalmente, vamos provar que $u_\alpha u_\alpha$ é um invariante de Lorentz:

$$\begin{aligned} u_\alpha u_\alpha &= (\gamma^2 v_x^2 + \gamma^2 v_y^2 + \gamma^2 v_z^2) - \gamma^2 c^2 = \gamma^2 (v^2 - c^2) \\ &= \frac{v^2 - c^2}{1 - v^2/c^2} = \frac{v^2 - c^2}{\frac{c^2 - v^2}{c^2}} = -\frac{c^2(v^2 - c^2)}{v^2 - c^2} = -c^2. \end{aligned}$$

Tal invariância aponta que os u_α compõe um quadrvetor.

Na Equação (6.5.1), a velocidade $\mathbf{v}$ presente é a da partícula no espaço tridimensional (x, y, z) , porém a sua velocidade no espaço-tempo é dada pelo módulo de u_α ,

$$\sqrt{|u_\alpha u_\alpha|} = \sqrt{|-c^2|} = c.$$

Este resultado é verdadeiramente fascinante, pois significa que todos os objetos movem-se sempre no espaço-tempo à velocidade da luz.

Outro resultado interessante é o que obtemos ao analisar a relação entre o tempo próprio de um relógio com o tempo do relógio do observador, que é dada pela Equação (4.2.1) (na forma diferencial): $dt = \gamma dt_0$. Vamos desenvolver algebricamente essa equação, começando pela derivação de ambos os lados em t :

$$1 = \gamma \left(\frac{dt_0}{dt} \right),$$

de onde podemos dividir ambos os lados por γ e obter

$$(\gamma)^{-1} = \left(\frac{dt_0}{dt} \right).$$

Após elevar a equação ao quadrado, obtemos

$$1 - \frac{u^2}{c^2} = \left(\frac{dt_0}{dt} \right)^2,$$

a partir de onde, com uma simples soma de frações, conseguimos

$$\frac{c^2 - u^2}{c^2} = \left(\frac{dt_0}{dt} \right)^2.$$

Com um simples desenvolvimento, obtemos então

$$c^2 = c^2 \left(\frac{dt_0}{dt} \right)^2 + u^2.$$

A equação que obtivemos mostra que se a velocidade u de um objeto no espaço (x, y, z) aumenta, a passagem do tempo em seu relógio em relação ao relógio do observador, (dt_0/dt) , “compensará” inversamente, ou seja, diminuirá. Quanto mais tal objeto se aproxima da velocidade da luz, mais lento será seu relógio, até parar completamente. Vemos, portanto, que o tempo não passa para um objeto que se desloca no espaço ordinário à velocidade da luz.

6.6 QUADRIVETOR MOMENTO

Já que definimos as componentes u_α no tempo próprio, podemos determinar as componentes do *quadrivetor momento* como o produto da massa de repouso m_0 pela velocidade u_α :

$$(p_\alpha) = m_0(u_\alpha) = (\gamma m_0 v_x, \gamma m_0 v_y, \gamma m_0 v_z, i c \gamma m_0),$$

sendo que (p_α) é de fato um quadrivetor pois m_0 é um escalar invariante e (u_α) um quadrivetor.

Como atestamos na última subseção, o quadrado do módulo de um quadrivetor deve ser um invariante de Lorentz, propriedade que se mantém aqui:

$$p_\alpha p_\alpha = m_0^2 u_\alpha u_\alpha = -m_0^2 c^2. \quad (6.6.1)$$

Relembrando a Equação (5.2.10):

$$E^2 = p^2 c^2 + (m_0 c^2)^2,$$

podemos reorganizar-la como

$$p^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m_0^2 c^2 \quad \text{e} \quad p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m_0^2 c^2 = p_\alpha p_\alpha.$$

Logo,

$$(p_\alpha) = \left(p_1, p_2, p_3, i \frac{E}{c} \right) = \left(\mathbf{p}, i \frac{E}{c} \right). \quad (6.6.2)$$

Vemos que o quadrivetor (p_α) compõe-se dos conceitos de energia e momento, e por isso é também chamado de *quadrivetor momento-energia*. Na passagem de um referencial inercial para outro, suas componentes se transformam respeitando a Equação (6.4.1):

$$p'_x = \frac{p_x - Eu/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad p'_y = p_y, \quad p'_z = p_z, \quad E' = \frac{E - up}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

Está claro como as componentes da energia e do momento estão interligadas. Momento e energia não são grandezas invariantes separadas na Teoria da Relatividade Especial, porém o quadrado do módulo do quadrivetor momento-energia, $p_\alpha p_\alpha$, sim.

No formalismo de quadrivetores que vimos até aqui, o momento relativístico se deu como o produto do invariante massa de repouso pelo quadrivetor velocidade, cujo módulo também é invariante. As três componentes espaciais de tal produto formam o momento clássico $\mathbf{p}$ e a última componente, que é temporal, é a energia total, exceto por i/c . Esta é uma definição mais simplificada, pois envolve a massa de repouso da partícula, uma característica própria, e concorda melhor com a filosofia da Teoria da Relatividade Especial, por trazer grandezas invariantes sob as Transformações de Lorentz.

A energia total E , todavia, não é uma grandeza escalar, mas sim a quarta componente de um quadrivetor, logo, não é um invariante de Lorentz. Pode-se dizer o mesmo da massa relativística, $M(v)$, proporcional à energia pela relação de Einstein $E = M(v)c^2$. Por tal motivo, utilizaremos o termo “massa” para nos referir à massa

de repouso da partícula, característica própria da mesma e invariável, e deixaremos “massa relativística” para quando quisermos usar o conceito $M(v) = \gamma m_0$, última componente do quadrivetor momento (tirando o fator c^2) e que não é um invariante de Lorentz.

6.7 LEI DE CONSERVAÇÃO DE MOMENTO-ENERGIA

A Equação (6.6.1) nos confirmou que $p_\alpha p_\alpha$ é um invariante de Lorentz, sendo equivalente à $-m^2 c^2$. Relacionando este resultado à Equação (6.6.2), temos que

$$-m_0^2 c^2 = p^2 - \frac{E^2}{c^2},$$

ou, alternativamente,

$$-m_0^2 c^4 = p^2 c^2 - E^2 = I$$

sendo I uma nova notação para simbolizar o invariante do quadrivetor momento-energia, ou, de forma mais elegante, *invariante momento energia*. Ligada a esse invariante está a *lei de conservação de momento-energia*. Ela determina limitações às possíveis interações entre corpos e constitui, junto com a lei de conservação de massa-energia, o par de leis fundamentais para a análise de reações nucleares. Como este caminho diverge dos nossos objetivos neste trabalho, não desenvolveremos além daqui, mas uma continuação pode ser encontrada em Gazzinelli [7], Capítulo 5.8.

6.8 QUADRIVETOR FORÇA

O quadrivetor força, também chamado de *força de Minkowski*, é obtido a partir da derivação do quadrivetor momento em relação ao tempo próprio t_0 da partícula:

$$F_\alpha = \frac{dp_\alpha}{dt_0} = \frac{d(m_0 dr_\alpha / dt_0)}{dt_0} \quad (6.8.1)$$

Vemos que, como os dois membros envolvem quadrvetores e a massa de repouso, invariantes sob as Transformações de Lorentz, as próprias Equações (6.8.1) são invariantes.

O que vamos demonstrar agora é como as componentes espaciais do quadrvetor força tendem às componentes da força da Mecânica Clássica quando lidamos com baixas velocidades, assim, a Equação (6.8.1) pode ser considerada a versão relativística da segunda lei de Newton. Vamos considerar a componente x da velocidade, relembrando que $dt = \gamma dt_0$:

$$F_x = \frac{dp_x}{dt_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{d}{dt} \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

ou

$$\frac{d}{dt} \frac{m_0 c_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = F_x \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (6.8.2)$$

O termo à esquerda desta última igualdade é a derivada do momento em relação ao tempo, enquanto o termo à direita vamos identificar como a força comum f_x , ou seja,

$$f_x = F_x \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Rapidamente notamos que, para v muito menor que c , a Equação (6.8.2) se transforma na segunda lei de Newton:

$$\frac{dp_x}{dt} = f_x.$$

Podemos escrever equações para as outras componentes espaciais y e z de forma análoga, logo, não desenvolveremos aqui. A força comum $f_i (i = x, y, z)$ não é uma invariante de Lorentz, logo, as equações escritas com ela não cumprem formalmente com os postulados da Teoria da Relatividade Especial.

6.9 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DAS TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ

É fato que o módulo de um vetor $\mathbf{a}$ ser invariante sob uma rotação é consequência da invariância da métrica euclidiana, $\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$. As Transformações de Lorentz são transformações lineares das coordenadas (x, y, z, τ) nas quais o quadrado do intervalo, ds^2 , também permanece invariante. Pela própria definição de intervalo, que introduzimos e estudamos no início deste capítulo, ele é a distância entre dois pontos ou eventos no espaço-tempo, logo, é lógico que interpretemos as Transformações de Lorentz também como uma rotação no espaço-tempo. Não só isso, vamos entender como isso funciona, e efetivamente funciona.

Vamos considerar o contexto padrão que temos assumido em diversas situações: há dois referenciais inerciais R e R' , de eixos x e x' alinhados, com R' deslocando-se na direção Ox com velocidade uniforme u em relação a R e origens coincidentes no instante $t = t' = 0$. Geometricamente, a transformação de R para R' condiz com uma rotação no plano (x, τ) , uma vez que as coordenadas y e z devem continuar invariáveis. Assumindo que o ângulo de rotação é φ , a transformação das coordenadas se dá por

$$x' = x \cos \varphi + \tau \sin \varphi, \quad (6.9.1)$$

$$\tau' = \tau \cos \varphi - x \sin \varphi. \quad (6.9.2)$$

Em eventos que ocorrem no eixo τ' , ou seja, para $x' = 0$,

$$\begin{aligned} x \cos \varphi &= -\tau \sin \varphi, \\ \operatorname{tg} \varphi &= -\frac{x}{\tau} = -\frac{x}{ict} = i \frac{u}{c}, \end{aligned} \quad (6.9.3)$$

logo, o ângulo de rotação φ do referencial R' em relação a R no espaço-tempo é dependente da velocidade relativa entre eles. Das relações

acima, conseguimos estabelecer o $\cos \varphi$ e o $\sin \varphi$ em função de u/c :

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{\sec^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}};$$

$$\sin \varphi = \cos \varphi \operatorname{tg} \varphi = \frac{i \frac{u}{c}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Substituindo tais igualdades nas Equações (6.9.1) e passando de τ para t , podemos desenvolver e obter as equações das Transformações de Lorentz:

$$\begin{aligned} x' &= x \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} + (ict) \frac{i \frac{u}{c}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} & (ict)' &= (ict) \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - x \frac{i \frac{u}{c}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ x' &= \frac{x + i^2 \frac{ctu}{c}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} & ict' &= \frac{ict - \frac{ixu}{c}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ x' &= \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, & ict' &= \frac{\frac{i(c^2t - xu)}{c}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ & & t' &= \frac{\frac{c}{i(c^2t - xu)}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \frac{1}{ic} \\ & & t' &= \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \end{aligned}$$

Como consequência, concluímos que as Transformações de Lorentz entre dois referenciais inerciais com velocidade relativa u estão

de acordo com uma rotação no plano $x\tau$ do espaço-tempo, em um ângulo φ tal que $\operatorname{tg} \varphi = i(u/c)$.

Podemos ainda adicionar a velocidade relativística em nossa representação. Suponhamos um referencial R'' deslocando-se a uma velocidade u_2 em relação ao referencial R' , o qual desloca-se com velocidade u_1 em relação à R . A velocidade $u = u_1 + u_2$ de R'' em relação à R corresponderá a duas sucessivas rotações, φ_1 e φ_2 , do referencial R . A rotação total φ será, então,

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{tg} \varphi_2}{1 - \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2}.$$

Fazendo a substituição dos valores $\operatorname{tg} \varphi$, $\operatorname{tg} \varphi_1$ e $\operatorname{tg} \varphi_2$ com o que temos na Equação (6.9.3), obteremos

$$i \frac{u}{c} = \frac{i \frac{u_1}{c} + i \frac{u_2}{c}}{1 - i^2 \frac{u_1}{c} \frac{u_2}{c}},$$

de onde podemos desenvolver para

$$i \frac{u}{c} = \frac{i(u_1 + u_2)}{1 + \frac{u_1 u_2}{c^2}}.$$

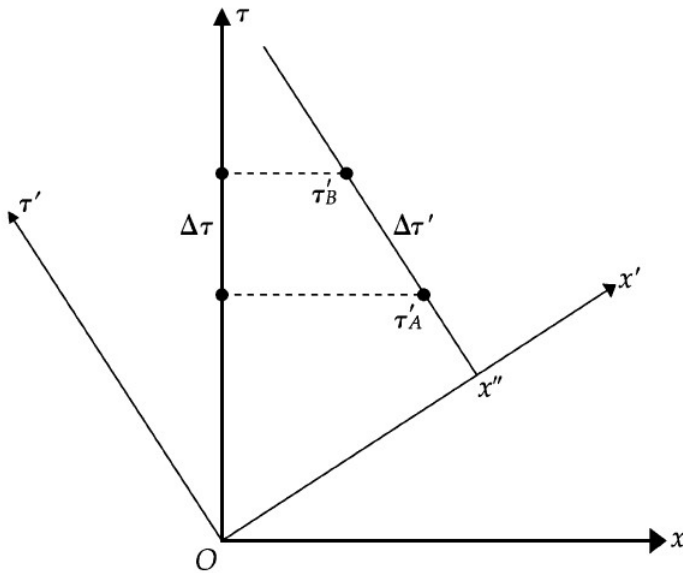
Cancelando c de ambos os lados da equação, conseguimos

$$u = \frac{u_1 + u_2}{1 + \frac{u_1 u_2}{c^2}}.$$

Considerando que u_1 é a velocidade de R' em relação a R , u_2 a velocidade de R'' em relação à R' e u a velocidade de R'' em relação à R , a equação acima apresenta-se na exata forma da lei de adição de velocidades (4.5.1).

Dado o caráter imaginário do ângulo de rotação, a interpretação geométrica das Transformações de Lorentz que desenvolvemos é complexa de visualizar, por isso, trabalhemos um exemplo: suponhamos

um relógio em repouso em um ponto x' do referencial R' . O intervalo entre os eventos A e B , os quais ocorrem no ponto x' , nos instantes τ'_A e τ'_B , respectivamente, é $\Delta\tau'$. Do referencial R , um observador medirá um intervalo $\delta\tau$ menor que $\Delta\tau'$ (Figura 6.9.1), porém sabemos que o tempo $\Delta\tau'$ é o tempo próprio, logo, deve ser menor que o tempo medido em qualquer outro referencial. Essa inconsistência gráfica vem exatamente da impossibilidade de retratar o ângulo imaginário φ .



Fonte: Gazzinelli [7], 2009

Figura 6.9.1 – Intervalo entre os eventos A e B medidos de dois referenciais.

A representação gráfica das Transformações de Lorentz evidencia a simetria dos referenciais R e R' , apesar de aparentar para a dilatação do tempo ou a contração do comprimento. De fato, não pode haver diferença entre rotacionar R para obter R' ou vice-versa,

o que significa que qualquer um dos dois referenciais inerciais pode ser tomado como o *referencial próprio* para o tempo ou comprimento.

7 CONCLUSÃO

A Física e a Matemática, ao longo do desenvolvimento humano, andam lado a lado para desvendar os mistérios do universo em que vivemos. O desenvolvimento do método científico é recente para a humanidade e, por isso, estamos sujeitos a ver diversas hipóteses e teorias firmes sendo derrubadas de seus pedestais. A Física newtoniana vigorou por dois séculos como detentora das leis que descreviam a natureza do movimento dos corpos, funcionando perfeitamente para os fenômenos que buscava-se entender. Todavia, quando passamos a estudar as interações elétricas e magnéticas entre partículas com as Equações de Maxwell, percebemos que havia algo errado no que tínhamos até então; a tentativa de medição da velocidade absoluta da Terra foi um fracasso; o éter, que conjecturávamos permear todo o universo, tornou-se uma ideia infértil, e a Relatividade de Galileu não corroborava com a Teoria da Eletrodinâmica. Foi atestado empírica e teoricamente que o erro não estava nas novas leis de Maxwell, logo, a Mecânica Clássica de fato não sustentava mais a realidade em sua totalidade.

Einstein, acreditando plenamente na unidade da Física, conjecturou que as leis da Física devem ter a mesma forma em todos os referenciais inerciais e que a velocidade da luz é constante e independente de sua fonte. O resultado destes postulados é que a Física newtoniana como a concebíamos estava incompleta. Apesar de servir como aproximação em contextos com velocidades baixas, para velocidades próximas à da luz diversos efeitos que até fogem ao senso comum foram demonstrados, como a dilatação do tempo e dos comprimentos, o que nos obriga a revisar os conceitos mais básicos e reestruturar a dinâmica entre os corpos.

As transformações de Lorentz, desenvolvidas antes mesmo da

teoria de Einstein, são o que teorizamos atualmente que ocorre com as coordenadas de referenciais inerciais. Elas implicam que a velocidade da luz é o limite do movimento, sendo impossível que corpos atinjam-na efetivamente. Se o fizessem, seriam percebidas consequências, como a parada completa do tempo do objeto em movimento, o aumento de sua massa ao ponto de acumular uma quantidade de movimento infinita e diversos outros efeitos.

Ademais, as transformações de Lorentz induziram a uma nova filosofia em relação ao nosso universo. Não mais o entendemos como tridimensional, mas sim quadrimensional, com o tempo como uma quarta coordenada. Isso nos levou a introduzir os quadrivetores, entidades matemáticas que nos auxiliam a trabalhar matematicamente a teoria desenvolvida. Pela forma da transformação das coordenadas, foi possível interpretar geometricamente a passagem de um referencial a outro como uma rotação no espaço-tempo, mesmo que seja impossível de visualizar em sua totalidade devido ao caráter imaginário do ângulo de rotação.

Em poucas palavras, este trabalho serviu como uma análise acerca da Teoria da Relatividade Especial, buscando compreender algumas de suas diversas características, implicações e aplicações. Por meio do estudo de conjecturas e postulados físicos, aliados ao formalismo matemático, conseguimos elucidar parte desta teoria tão rica e importante para o desenvolvimento científico.

A Teoria da Relatividade é vasta, e o que foi visto neste trabalho foi – como seu título sugere – uma introdução. Portanto, há um horizonte de possibilidades em pesquisas e estudos a serem explorados dentro deste tema. Esse trabalho apresenta-se com um caráter especialmente teórico e, portanto, um caminho lógico é desenvolver mais profundamente a matemática da Relatividade Especial, aprofundando a álgebra de quadrivetores, introduzindo o cálculo tensorial

ou até mesmo trazendo o grupo de Lorentz. Ademais, como focamos no estudo da Teoria da Relatividade Especial, outra lógica evolução seria estudar a Relatividade Geral, a qual inclui as leis da gravitação aos conceitos relativísticos. Einstein fez a adição da gravidade à sua teoria em um outro artigo publicado em 1915, mas para seu entendimento é necessário um entendimento mais aprofundado de Geometria Diferencial. Portanto, sem dúvidas há ainda uma vasta trilha de conhecimentos a serem investigados.

REFERÊNCIAS

- [1] Peter Gabriel Bergmann. *Introduction to the Theory of Relativity*. Courier Corporation, 1976.
- [2] Ayni R Capiberibe. *O Princípio da Relatividade: Física (Lições)*. Vol. 4. ALRISHA, 2020.
- [3] Airtton Deppman. *Notas de Mecânica Clássica*. 2018.
- [4] Albert Einstein. “On the electrodynamics of moving bodies”. Em: *Annalen Der Physik*. (1905).
- [5] Richard P Feynman, Robert B Leighton e Matthew Sands. *The Feynman lectures on physics, Vol. I: The new millennium edition: mainly mechanics, radiation, and heat*. Vol. 1. Basic books, 2015.
- [6] Richard Phillips Feynman, Robert B Leighton e Matthew Sands. *Lições de Física de Feynman: edição definitiva*. Bookman, 2008.
- [7] Ramayana Gazzinelli. *Teoria da Relatividade Especial*. Editora Blucher, 2009.
- [8] Fabiana Botelho Kneubil. “Revisitando o velho problema do trem relativístico que entra (ou não) em uma garagem”. Em: *Revista Brasileira de Ensino de Física* 44 (2022), e20220162.
- [9] Nivaldo A Lemos. *Mecânica Analítica*. Editora Livraria da Física, 2013.

-
- [10] Hermann Minkowski. “Espaço e tempo”. Em: *O Princípio da Relatividade* 31 (1908), pp. 93–114.
- [11] Gabriel C Sartori, Lucas F Bizerra, Marcos CD Neves, Maria CG Paulino, Maria RL Maraschi, Milena CP Ferruzi, Nuria C Scarpin, Raphael F Almeida e Samuel S Santos. “Eratóstenes de Cirene e Aristarchus de Samos: A esfericidade da Terra e o terraplanismo cognitivo de hoje”. Em: *VI SNEA* (2022).