

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS BLUMENAU
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Fernando Zimmermann Maciel

Problema de 3 Corpos Circular Restrito

Blumenau
2024

Fernando Zimmermann Maciel

Problema de 3 Corpos Circular Restrito

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática do Campus Blumenau da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Renan Gambale Romano, Dr.

Blumenau

2024

Ficha catalográfica gerada por meio de sistema automatizado gerenciado pela BU/UFSC.
Dados inseridos pelo próprio autor.

Maciel, Fernando Zimmermann
Problema de 3 corpos circular restrito / Fernando
Zimmermann Maciel ; orientador, Renan Gambale Romano, 2024.
118 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) -
Universidade Federal de Santa Catarina, Campus Blumenau,
Graduação em Matemática - Licenciatura, Blumenau, 2024.

Inclui referências.

1. Matemática - Licenciatura. 2. dinâmica celeste. 3.
problema 3 corpos. 4. pontos de lagrange. 5. estabilidade.
I. Romano, Renan Gambale. II. Universidade Federal de
Santa Catarina. Graduação em Matemática - Licenciatura.
III. Título.

Fernando Zimmermann Maciel

Problema de 3 Corpos Circular Restrito

Este Trabalho Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do Título de Licenciado em Matemática e aprovado em sua forma final pelo Curso de Licenciatura em Matemática.

Blumenau, 02 de julho de 2024.

Prof. Francis Felix Cordova Puma, Dr.
Coordenador(a) do Curso

Banca Examinadora:

Prof. Renan Gambale Romano, Dr.
Orientador
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Felipe Vieira, Dr.
Avaliador
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Eleomar Cardoso Júnior, Dr.
Avaliador
Universidade Federal de Santa Catarina

Dedico este trabalho para todos que gostam de mim.

AGRADECIMENTOS

Existem inúmeras pessoas que eu gostaria agradecer por poder estar aqui hoje escrevendo um trabalho e me formando na UFSC, mas infelizmente não posso agradecer a todas, então vou estar citando as mais importantes.

Primeiramente gostaria de agradecer aos meus pais e meus irmãos, que por toda minha vida e trajetória me apoiaram e me possibilitaram de diversas maneiras de chegar aonde cheguei, ao meu pai por todos os sacrifícios diários que ele fez e faz para eu poder ter uma vida melhor e a minha mãe por sempre estar disponível quando eu preciso.

Gostaria de agradecer a todos meus colegas de graduação, que tornaram a jornada na faculdade mais leve e me fizeram sentir pertencente a algum lugar, em particular agradecer a minha turma Ana, Beatriz e João.

Aos professores que me ensinaram e orientaram muito durante esses cinco anos de graduação, aos que me deram lições, conselhos e até mesmo sermões. Esses que me ensinaram não só matemática, mas muitas vezes a como ser um profissional e uma pessoa melhor, em especial agradecer aos professores membros da banca: Felipe, Eleomar e Louise.

Aos meus amigos íntimos Ana, Baldoni, Eduardo, Lucas, Vitor e em especial Gabriel Castellar, que quase diariamente me fazem esquecer a rotina dura de graduação e me fazem viver de maneira mais feliz, que sem eles eu viveria uma vida mais cinza e certamente não conseguiria concluir essa fase de minha vida.

Agradecer especialmente ao meu irmão e inspiração Alexandre, que por toda a vida foi meu melhor amigo e tenho certeza que pelo resto dela também será, um homem batalhador, inspirador e dono de

às vezes bons conselhos e quase sempre ruim no xadrez.

Gostaria de agradecer ao Lee Sang-Hyeok por sempre me inspirar a ser mais focado e esforçado.

Ao meu professor e orientador Renan, que dentro de sala de aula se tornou um amigo e o melhor professor que tive contato em toda minha vida, que leva suas aulas com humor e dedicação, e obviamente por me orientar neste trabalho, sem ele eu não teria nem um tema para começar.

Por último, gostaria de agradecer à minha namorada e futura esposa Michelle, que me apoia de maneiras possíveis e impossíveis, imagináveis e inimagináveis, mensuráveis e imensuráveis e que foi e sempre será a pessoa que mais me apoiou, a pessoa que me impediu de desistir nos momentos mais difíceis.

*“Quando mais escura a noite.
Mais brilhante as estrelas”.
(BRAUM, 2014)*

RESUMO

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi desenvolvido na graduação de Licenciatura em Matemática e concentra-se na análise do problema de 3 corpos restrito, além de uma exploração de seus pontos de equilíbrio. Utilizando uma abordagem qualitativa e embasada na revisão bibliográfica da obra de Carl D. Murray [13], este estudo se dedica à investigação das complexidades envolvidas neste problema. Os resultados obtidos ressaltam a natureza caótica inerente ao problema dos 3 corpos, proporcionando, de forma adicional, uma solução pertinente para o problema de 2 corpos, ampliando assim a compreensão deste campo científico. Ademais, esta pesquisa se aprofunda na análise dos pontos de equilíbrio dentro do contexto restrito do problema de 3 corpos, explorando suas implicações e aplicações práticas. Ao abordar cada aspecto com minúcia e profundidade, este estudo visa a promover uma compreensão mais ampla e fundamentada da interação complexa entre três corpos em um sistema inercial supondo que um deles tenha massa desprezível.

Palavras-chave: Mecânica Celeste. Problema de 3 Corpos. Pontos de Lagrange. Estabilidade.

ABSTRACT

This undergraduate thesis was developed within the Mathematics Teaching undergraduate program and focuses on the analysis of the restricted three-body problem, as well as an exploration of its equilibrium points. Utilizing a qualitative approach grounded in the literature review of Carl D. Murray's [13] work, this study is dedicated to investigating the complexities involved in this problem. The obtained results highlight the chaotic nature inherent in the three-body problem, additionally providing a relevant solution to the two-body problem, thereby enhancing the understanding of this scientific field. Furthermore, this research delves into the analysis of equilibrium points within the restricted context of the three-body problem, exploring their implications and practical applications. By addressing each aspect meticulously and in-depth, this study aims to promote a broader and well-founded understanding of the complex interaction among three bodies in an inertial system, assuming one of them has negligible mass.

Keywords: Celestial Mechanics. Three-Body Problem. Lagrangian Points. Stability.

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1.1—Diagrama de vetores para as forças atuando sobre as duas massas, m_1 e m_2 , com vetores posição $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$	32
Figura 3.2.1—O movimento de m_2 em relação à m_1 define um plano orbital (região cinza) em que o vetor constante $\mathbf{h}$ é sempre perpendicular ao plano. Fonte: Murray, 1999.	37
Figura 3.4.1—Ponto $P(r, \theta)$ na elipse $\mathcal{E}$ com foco F em m_1 . . .	42
Figura 3.4.2—Parábola $\mathcal{P}$	44
Figura 3.4.3—Hiperbole $\mathcal{H}$ em coordenadas polares.	46
Figura 4.1.1—Uma visão do plano que contém as coordenadas (ξ, η, ζ) e as coordenadas sinódicas (x, y, z) da partícula no ponto P , onde as setas indicam o sentido positivo da rotação.	50
Figura 5.1.1—As forças que atuam sobre a partícula de teste P devido à atração gravitacional de duas massas m_1 e m_2	66
Figura 5.1.2—O ponto P denota a localização de uma partícula de teste em um ponto de equilíbrio. A linha pontilhada denota o bissetor perpendicular à reta que conecta as massas m_1 e m_2	68
Figura 5.1.3—Localização dos pontos triangulares de Lagrange L_4 e L_5 (denotados por pequenas circunferências abertas) para $\mu_2 = 0, 2$	73
Figura 5.1.4—Localização dos pontos colineares de Lagrange L_1 , L_2 e L_3 (denotados por pequenas circunferências abertas) para $\mu_2 = 0, 2$	78

Figura 5.1.5–Localização dos cinco pontos de Lagrange(denotados por pequenas circunferências abertas) para $\mu_2 = 0, 2$. Fonte: Elaborada pelo autor.	94
Figura 5.1.6–Superfície tridimensional (formada pela Integral de Jacobi) e a localização dos pontos de Lagrange para $\mu_2 = 0, 2$	95

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	CONCEITOS PRELIMINARES	16
2.1	CINEMÁTICA	16
2.2	LEIS DE NEWTON	19
2.3	ÓRBITAS E ESPAÇO DE INÉRCIA	21
2.4	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS	22
2.5	APROXIMAÇÕES DE LAGRANGE-BÜRMANN E TAY- LOR	28
3	O PROBLEMA DE DOIS CORPOS	31
3.1	EQUAÇÕES DE MOVIMENTO	32
3.2	TORÇÃO	34
3.3	COORDENADAS POLARES	37
3.4	A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA	40
3.4.1	Caso $e = 0$	42
3.4.2	Caso $0 < e < 1$	42
3.4.3	Caso $e = 1$	44
3.4.4	Caso $e > 1$	45
4	O PROBLEMA DE 3 CORPOS RESTRITO . . .	47
4.1	EQUAÇÕES DE MOVIMENTO	47
4.2	INTEGRAL DE JACOBI	61
5	PONTOS DE EQUILÍBRIO DE LAGRANGE . . .	64
5.1	LOCALIZAÇÃO DOS PONTOS DE LAGRANGE . . .	65
5.2	ESTABILIDADE DOS PONTOS DE LAGRANGE . .	95
5.2.1	Estabilidade dos Pontos Colineares	106
5.2.2	Estabilidade dos Pontos Triangulares	109
6	CONCLUSÃO	114
	REFERÊNCIAS	116

1 INTRODUÇÃO

É inegável o fascínio que o ser humano nutre pelo céu, seja ao contemplar um pôr do sol, observar as estrelas pontilhando a escuridão da noite ou aqueles que se dedicam a explorar mais detalhadamente, buscando enxergar o que os olhos comuns não alcançam. Desde os primórdios da história da humanidade, a observação do céu foi uma prática constante. Por volta de 8 mil anos antes de Cristo, quando o homem se via às voltas com a necessidade de caçar para sobreviver, já percebia os movimentos dos astros. A noção de dia e noite emergiu dessa observação, onde o sol foi o primeiro astro a se destacar. A lua, por sua vez, tornou-se o segundo objeto celeste a ser notado, pois iluminava a escuridão da noite.

Na história mais recente, especialmente nos séculos XIII, XIV e XV, estudiosos como Copérnico, Galileu e Newton já conjecturavam e realizavam experimentos para evidenciar a teoria de que a Terra se movia em torno do Sol, uma ideia que confrontava diretamente o conhecimento estabelecido da época. Avançando no tempo, no século XX, o trabalho de Hubble reforçou essas ideias ao demonstrar a existência de outras galáxias além da nossa. Este fascínio continua a se expandir até os dias atuais, com as explorações espaciais e observações cada vez mais distantes, ampliando nosso entendimento do universo e desafiando constantemente os limites do conhecimento humano, como é mostrado em [12].

Com essa vontade por conhecer mais o espaço que surgiu o Problema de 3 Corpos, que é um problema central na física e na matemática, buscando compreender o movimento gerado pela interação gravitacional entre corpos celestes. Apesar de sua formulação simples, possui implicações profundas na compreensão dos sistemas astronômicos, desde o sistema solar até a formação de galáxias, motivando uma

extensa investigação ao longo dos anos [20].

O Problema de 3 Corpos surge como um dos problemas fundamentais em análise matemática e física-matemática, buscando descrever e prever o movimento de múltiplos corpos celestes interagindo gravitacionalmente entre si. A complexidade desse problema, junto à sua aplicabilidade em diversas áreas, como astronomia, física, engenharia e até mesmo na compreensão de fenômenos naturais na Terra, faz dele um tema de pesquisa intrigante e desafiador.

Este trabalho propõe-se a explorar o Problema de 3 Corpos sob uma perspectiva analítica e matemática, utilizando como base uma análise qualitativa para a revisão, estudo, compressão e análise de toda a teoria principal do estudo, bem como seus pré-requisitos.

Como ponto de partida, este estudo se fundamenta na obra “Solar System Dynamics” de Carl D. Murray[13], uma referência que oferece uma visão abrangente e detalhada sobre a dinâmica do sistema solar. A partir dessa base teórica, pretende-se explorar conceitos-chave da análise matemática, como equações diferenciais, teoria dos sistemas dinâmicos e estabilidade, para investigar o comportamento e a evolução dos sistemas de corpos celestes. Dessa forma, esta pesquisa tem como objetivo aprofundar a compreensão teórica do Problema de 3 Corpos.

A estrutura deste trabalho segue uma organização do seguinte modo: no Capítulo 1, a introdução delineia a motivação do estudo dos corpos celestes, apresenta a metodologia adotada e os objetivos a serem alcançados. O Capítulo 2 se dedica em abordar assuntos preliminares para o entendimento do trabalho. No Capítulo 3, inicia-se com a abordagem de um problema fundamental na dinâmica celeste: o problema de dois corpos. Este capítulo não apenas discute a história desse problema, mas também oferece sua solução. O Capítulo 4 foca no tema principal desta pesquisa: o problema de três corpos restrito.

Nele, são analisados diferentes aspectos do problema e são derivadas conclusões com base nos estudos realizados. O Capítulo 5 concentra-se no estudo dos pontos de equilíbrio no sistema de três corpos restrito, buscando quantificar e localizar esses pontos, além de investigar sua estabilidade. Finalmente, no Capítulo 6, são apresentadas as conclusões alcançadas e as perspectivas para trabalhos futuros nesta área.

A metodologia adotada neste estudo e a análise dos problemas propostos desempenharam um papel fundamental na conclusão do objetivo geral deste trabalho, que consiste no aprofundamento dos conceitos de análise e equações diferenciais com aplicabilidade em física. Com o intuito de atender a esse objetivo, torna-se imprescindível estabelecer os objetivos específicos que guiarão o desenvolvimento deste estudo.

1. Revisar conteúdos de Geometria Analítica, Álgebra Linear, Análise e Física;
2. Compreender e resolver o Problema de 2 Corpos;
3. Estudar e compreender o Problema de 3 Corpos Circular Restrito;
4. Localizar e estudar a estabilidade de pontos de equilíbrio no problema de 3 corpos restrito.

2 CONCEITOS PRELIMINARES

Para uma melhor compreensão do presente trabalho, é esperado que o leitor possua conhecimento prévio nas áreas de física, geometria analítica e cálculo diferencial. No entanto, uma revisão das principais ferramentas utilizadas neste estudo será fornecida, neste capítulo, como fundamentos para o desenvolvimento do trabalho. Serão abordados conceitos de Álgebra Linear, Mecânica, Equações Diferenciais e Métodos Numéricos. Elementos da área da Física também serão abordados de maneira introdutória, sendo eles: cinemática, leis fundamentais, centro de massa, momento angular, órbitas e espaços de inércia.

2.1 CINEMÁTICA

Para mais detalhes consulte as referências [14] e [23]. A cinemática se concentra na descrição matemática do movimento dos corpos, sem considerar as causas desse movimento, como forças ou interações. Ela estuda grandezas como posição, velocidade, aceleração e tempo, buscando entender e prever o comportamento dos objetos em movimento. A maioria das grandezas utilizadas são vetoriais e neste trabalho todos os vetores serão denotados por letras em negrito. Abaixo, encontram-se as principais definições que serão usadas.

Definição 2.1.1 (Referencial). *Um referencial é um local específico ou um sistema de coordenadas escolhido como base para descrever o movimento ou a posição de um objeto em relação a ele.*

Definição 2.1.2 (Posição). *Posição é a localização ou coordenada espacial de um objeto em relação a um referencial.*

Pense no plano cartesiano e o referencial sendo a origem, ao colocar uma partícula no ponto $(1, 1)$, essa partícula terá sua posição

descrita pelo vetor $(1, 1)$, porém se o referencial for o ponto $(2, 2)$ a posição da partícula será descrita pelo vetor $(-1, -1)$.

Definição 2.1.3 (Deslocamento). *Deslocamento é a mudança de posição de um corpo em relação ao tempo t . Usualmente descrita por uma função $x(t)$.*

Definição 2.1.4 (Velocidade). *Velocidade é a taxa de variação da posição de um corpo em relação ao tempo, comumente descrita por uma função $v(t)$.*

Note que como $v(t)$ é a taxa de variação de $x(t)$ no instante t , tem-se que $v(t) = \frac{dx}{dt}$. A partir deste ponto, sempre que uma função for derivada em função do tempo, denotaremos com o ponto em cima da função, ou seja, $v(t) = \dot{x}(t)$. Para derivadas em relação às variáveis diferentes, manteremos a notação de Leibniz.

Definição 2.1.5 (Aceleração). *Aceleração é a taxa de variação da velocidade de um corpo em relação ao tempo. Geralmente descrita por uma função $a(t)$.*

Do mesmo modo, tem-se que $a(t) = \dot{v}(t)$.

A partir deste ponto, por conveniência, omite-se t nas expressões.

Definição 2.1.6 (Momento Linear). *Momento linear é uma grandeza física vetorial que descreve a quantidade de movimento do objeto. Usualmente denotado por $\mathbf{p}$ e matematicamente definido por:*

$$\mathbf{p} = m \cdot \mathbf{v},$$

onde m é a massa do objeto.

Definição 2.1.7 (Momento Angular). *Momento Angular é uma grandeza física vetorial associada ao movimento rotacional de um objeto*

em torno de um eixo específico. Geralmente denotado por $\mathbf{L}$ e matematicamente definido por:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}.$$

Onde $\mathbf{r}$ é o vetor posição do corpo, $\mathbf{p}$ seu momento linear e $\times$ denota o produto vetorial.

Note que o momento angular é uma grandeza vetorial porque sua direção é perpendicular ao plano formado pelos vetores $\mathbf{r}$ e $\mathbf{p}$, de acordo com a regra da mão direita.

Definição 2.1.8 (Aceleração de Coriolis). *É uma aceleração fictícia que surge devido à rotação de um sistema de referência não inercial. Quando observamos o movimento de um objeto em um sistema de referência que está girando ou se movendo de forma acelerada em relação a um sistema inercial, aparece uma aceleração aparente conhecida como aceleração de Coriolis. Correntemente denotada por $\mathbf{a}_{cor}$ e matematicamente dada por:*

$$\mathbf{a}_{cor} = -2\mathbf{L} \times \mathbf{v},$$

onde $\mathbf{L}$ é o vetor momento angular e $\mathbf{v}$ é o vetor velocidade.

Definição 2.1.9 (Aceleração Centrífuga). *A aceleração centrífuga é uma aceleração fictícia que surge quando um objeto está em movimento circular, onde atua radialmente para fora a partir do centro de rotação. Regularmente denotada por $\mathbf{a}_c$ e matematicamente dada por:*

$$\mathbf{a}_c = n^2 \cdot r, \tag{2.1}$$

onde n é a velocidade angular e r a distância radial ao eixo de rotação.

Definição 2.1.10 (Centro de Massa de um Sistema com n partículas). *Seja um sistema com n partículas, onde suas massas são $m_1, m_2, \dots$,*

m_n e seus respectivos vetores posição são $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$. Temos que o centro de massa deste sistema será dado pelo vetor posição

$$\mathbf{C}_m = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \dots + m_n\mathbf{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \quad (2.2)$$

Estes serão os conceitos essenciais de cinemática para o desenvolvimento deste trabalho.

2.2 LEIS DE NEWTON

Para mais detalhes consulte as referências [14], [20] e [23]. Isaac Newton, um dos mais influentes cientistas da história, desenvolveu diversas leis de suma importância para a física no século XVII. Em sua juventude, Newton enfrentou dificuldades pessoais e acadêmicas, mas sua genialidade logo se destacou quando ele começou a estudar Matemática e Física. Em seu trabalho “Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica”, publicado em 1687, Newton apresentou suas três leis do movimento, descrevendo o comportamento dos corpos em repouso e em movimento. Ele também formulou a Lei da Gravitação Universal, que descrevia a atração entre corpos massivos, unificando os movimentos celestes e terrestres sob uma mesma lei.

Vale ressaltar que Isaac Newton usou o trabalho de Johannes Kepler, particularmente as Leis de Kepler sobre o movimento planetário, como base fundamental para desenvolver suas Leis do Movimento e a Lei da Gravitação Universal. Kepler havia demonstrado empiricamente que os planetas orbitam o Sol em elipses, com velocidades variáveis e proporcionais às áreas varridas, e que existe uma relação harmônica entre os períodos orbitais e as distâncias ao Sol. Newton, ao formular suas leis, explicou teoricamente essas observações ao introduzir a força gravitacional como uma atração mútua entre corpos com massa, mostrando que as leis empíricas de Kepler eram uma consequência natural de suas próprias leis universais da física. Nesta

seção serão definidas a 3ª Lei de Kepler, 1ª Lei de Newton, a 2ª Lei de Newton e a Lei da Gravitação Universal

Definição 2.2.1 (Lei dos Períodos (3ª Lei de Kepler)). *Os quadrados dos períodos de translação dos planetas são proporcionais aos cubos dos semi-eixos maiores de suas órbitas. Em termos de movimento médio, essa lei é dada como:*

$$n^2 = \mathcal{G} \frac{M}{r^3},$$

onde n é o movimento médio, $\mathcal{G}$ a constante gravitacional, M a massa do sistema e r é o raio médio da órbita.

Definição 2.2.2 (Força). *Força é uma grandeza vetorial que descreve a interação entre dois corpos e pode alterar seu estado de movimento ou de repouso.*

2.2.1 (Lei da Inércia (1ª Lei de Newton)). *Um corpo permanece em seu estado de repouso ou de movimento uniforme em linha reta, a menos que sofra uma alteração por forças externas.*

Em seu livro, Newton descreve a Força a partir da sua segunda lei.

2.2.2 (Lei Fundamental da Dinâmica (2ª Lei de Newton)). *A mudança de movimento de um objeto é diretamente proporcional à força aplicada sobre ele e ocorre na direção da mesma força. Matematicamente, a segunda lei é expressa pela fórmula*

$$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}, \quad (2.3)$$

onde $\mathbf{F}$ é o vetor força aplicada sobre o corpo, m é a massa do corpo e $\mathbf{a}$ o vetor aceleração que corpo adquire como resultado da força.

Em outras palavras, essa lei afirma que a aceleração de um objeto é diretamente proporcional à força resultante que age sobre ele e inversamente proporcional à sua massa. Isso significa que quanto maior a força aplicada sobre um objeto, maior será a sua aceleração.

Em particular, tem-se a Força Gravitacional que é uma das forças fundamentais da natureza. Ela surge devido à atração mútua entre dois corpos com massa. Para descrever essa força, Newton desenvolveu a Lei da Gravitação Universal.

2.2.3 (Lei da Gravitação Universal). *Dados dois corpos, eles atraem-se por uma força que é diretamente proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância que os separa. Matematicamente, tem-se que:*

$$\mathbf{F} = G \frac{m_1 m_2}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r}. \quad (2.4)$$

Aqui $\mathbf{F}$ é a força gravitacional entre os dois corpos, m_1 e m_2 as massas dos dois corpos, e $\mathbf{r}$ o vetor posição relativa.

Estas são as leis de Newton que serão essenciais para o desenvolvimento do trabalho.

2.3 ÓRBITAS E ESPAÇO DE INÉRCIA

Para este trabalho é importante estar familiarizado com os conceitos de espaço de inércia e de órbitas.

Definição 2.3.1 (Espaço de Inércia). *Espaço de inércia é a região do espaço onde um objeto em movimento uniforme continua em movimento uniforme, na ausência de forças externas.*

Definição 2.3.2 (Espaço de Não-Inércia). *Espaço de não-inércia é a região do espaço onde um objeto em movimento uniforme pode não continuar em movimento uniforme, na ausência de forças externas.*

Por exemplo, devido às forças fictícias, como centrífuga ou de Coriolis.

Definição 2.3.3 (Órbita). *Órbita é a trajetória descrita por um objeto celeste em torno de outro devido à influência da gravidade.*

Definição 2.3.4 (Plano Orbital). *Plano onde ocorre a órbita.*

2.4 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Para mais detalhes consulte as referências [2], [1], [6] e [13]. Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) são uma classe fundamental de equações na Matemática que descrevem relações entre uma função desconhecida de uma variável e suas derivadas. Elas são frequentemente usadas para modelar sistemas dinâmicos e fenômenos em uma ampla gama de campos, incluindo física, engenharia, biologia e economia. Nesta seção serão apresentados e demonstrados os conceitos de EDOs que serão utilizados no presente trabalho.

Definição 2.4.1 (Equação Diferencial Ordinária). *Uma equação diferencial ordinária (EDO) é uma equação que envolve derivadas, estabelecendo uma relação entre uma função específica e uma ou mais de suas derivadas. Sua forma geral é expressa por:*

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (2.5)$$

onde t é a variável independente, y é a função desconhecida na variável t , $y' = \frac{dy}{dt}$, $y'' = \frac{d^2y}{dt^2}$ e $y^{(n)} = \frac{d^ny}{dt^n}$.

Definição 2.4.2 (Ordem). *A ordem da equação diferencial será igual à ordem da derivada que possuir a maior ordem na equação em questão.*

Definição 2.4.3 (EDO Linear). *Uma equação diferencial ordinária (EDO) é linear se puder ser expressa na forma*

$$a_n(t)y^{(n)}(t) + \dots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = f(t), \quad (2.6)$$

onde $y(t)$ é a função desconhecida, suas derivadas até a ordem n estão presentes, a_i e f são funções de t .

Definição 2.4.4 (Homogeneidade). *Dada a EDO Linear:*

$$a_n(t)y^{(n)}(t) + \dots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = f(t), \quad (2.7)$$

ela é dita homogênea se $f(t) = 0$, e por sua vez, ela é dita não-homogênea se $f(t) \neq 0$.

Definição 2.4.5 (Sistema de n EDOs lineares). *Um sistema de n EDOs lineares é dado por*

$$\mathbf{X}' = A \cdot \mathbf{X},$$

em que $\mathbf{X}$ é um vetor com n entradas, sendo elas funções desconhecidas e A é uma matriz $n \times n$, cujas as entradas são funções arbitrárias de t .

Definição 2.4.6 (Solução). *Qualquer função f definida em algum intervalo I , que quando substituída na equação diferencial reduz a equação a uma identidade, é chamada de solução para a equação no referido intervalo.*

Neste trabalho não serão fornecidos métodos para chegar à solução de EDOs de primeira ordem, porém quando usados, serão retirados das referências [2] e [1].

2.4.1 (Teorema do Princípio da Superposição). *Dada uma EDO linear não-homogênea de 2^a ordem*

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x).$$

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,$$

então

$$y = y_H + y_P = y_H + C_1y_1 + C_2y_2$$

é a solução geral da equação não-homogênea.

Demonstração. Para facilitar, denote

$$L(y) = y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y.$$

Suponha que y_P seja uma solução particular da equação não-homogênea e que $y_H = C_1y_1 + C_2y_2$ seja a solução geral da equação homogênea associada. Então,

$$L(y_P) = f(x) \quad \text{e} \quad L(y_H) = 0.$$

Tome $y = y_H + y_P$, com isso usando a linearidade da derivada, tem-se que

$$L(y) = L(y_H + y_P) = L(y_H) + L(y_P) = 0 + f(x) = f(x).$$

Portanto y é solução da equação não-homogênea.

Por outro lado, se y é uma solução qualquer da equação não-homogênea, defina $w = y - y_P$. Tem-se que w é uma solução da equação homogênea associada, pois

$$L(w) = L(y - y_P) = L(y) - L(y_P) = f(x) - f(x) = 0.$$

Portanto, existem constantes C_1 e C_2 tais que

$$w = y - y_P = C_1y_1 + C_2y_2$$

e portanto $y = y_H + y_P$, que demonstra o Teorema. □

2.4.2 (Solução para EDO linear de 2ª ordem homogênea). *Aqui será detalhado um método para encontrar uma solução para EDOs lineares de 2ª ordem homogêneas e com coeficientes constantes, o qual vem de [2].*

Dada a EDO linear de 2ª ordem homogênea

$$y'' + a_1y' + a_0y = 0,$$

sendo a_1 e a_0 constantes, assuma que $y = e^{\lambda x}$ com λ constante a determinar seja uma solução para a equação dada. Com isso, tem-se que

$$y' = \lambda e^{\lambda x} \quad e \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}.$$

Substitua esses valores na equação dada, obtendo:

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + a_1 \lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} = 0 \Rightarrow e^{\lambda x} (\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0) = 0.$$

Porém, como $e^{\lambda x}$ é sempre diferente de zero, tem-se que

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0, \tag{2.8}$$

a qual é chamada de equação característica. Após encontrar as raízes da equação característica, se elas forem reais tem-se que

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \tag{2.9}$$

é solução para a equação dada, onde λ_1 e λ_2 são raízes reais da equação característica e C_1 e C_2 são constantes.

Se houver uma única raiz real, $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, tem-se que

$$y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}. \tag{2.10}$$

Por outro lado, se as raízes da equação característica forem números complexos da forma $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ e $\lambda_2 = \alpha - \beta i$, tem-se que

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)), \tag{2.11}$$

em que C_1 e C_2 são constantes.

2.4.3 (Solução para EDO linear de 2ª ordem não-homogênea). *Considere a EDO de 2ª ordem não-homogênea*

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x),$$

sendo a_1 e a_0 constantes. Pelo Teorema (2.4.1) é suficiente encontrar uma solução y_H para a equação homogênea associada e uma solução particular y_P . Encontre y_P apropriada e para encontrar y_H utilize o método descrito em 2.4.2. Com isso, a solução geral será:

$$y = y_H + y_P. \quad (2.12)$$

2.4.4 (Solução para sistema de EDOs lineares). *Aqui será apresentado um método para chegar a solução de sistemas de EDOs lineares, o qual vem de [13].*

Seja o sistema de n EDOs lineares

$$\mathbf{X}' = A \cdot \mathbf{X}, \quad (2.13)$$

onde $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ é uma matriz $n \times n$ de entradas constantes e $\mathbf{X}$ um vetor cujas entradas são n -funções procuradas.

Tem-se que os componentes do vetor $\mathbf{X}$ estão acoplados entre si pela equação (2.13), ou seja, são equações que dependem, em geral, de vários outros elementos do vetor. Por exemplo,

$$X'_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n.$$

Por conta disso, é de interesse desacoplar essas equações e, para isso, cria-se um novo vetor n -dimensional $\mathbf{Y}$ com entradas y_i , ($i = 1, 2, \dots, n$), onde y'_i é dado em função apenas de y_i . Assim, denote a transformação de $\mathbf{X}$ para $\mathbf{Y}$, sendo:

$$\mathbf{Y} = B\mathbf{X}, \quad (2.14)$$

em que B é uma matriz $n \times n$ invertível e tal que

$$BAB^{-1} = \Lambda, \quad (2.15)$$

onde Λ é matriz diagonal $n \times n$ e sua diagonal é composta pelos autovalores de A . Multiplicando à esquerda a equação (2.14) por B^{-1} , tem-se que

$$\begin{aligned} B^{-1}\mathbf{Y} &= B^{-1}B\mathbf{X} \\ B^{-1}\mathbf{Y} &= I\mathbf{X} \\ B^{-1}\mathbf{Y} &= \mathbf{X}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

e por sua vez, lembrando que B é uma matriz constante,

$$\mathbf{X}' = B^{-1}\mathbf{Y}'. \quad (2.17)$$

Substituindo (2.16) e (2.17) na equação diferencial original (2.13), tem-se que

$$B^{-1}\mathbf{Y}' = AB^{-1}\mathbf{Y}. \quad (2.18)$$

Multiplique à esquerda ambos os lados por B , para chegar em

$$\begin{aligned} BB^{-1}\mathbf{Y}' &= BAB^{-1}\mathbf{Y} \\ I\mathbf{Y}' &= BAB^{-1}\mathbf{Y} \\ \mathbf{Y}' &= BAB^{-1}\mathbf{Y}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Porém, por construção, $BAB^{-1} = \Lambda$. Portanto, o sistema de equações transformado é dado em:

$$\mathbf{Y}' = \Lambda\mathbf{Y}. \quad (2.20)$$

Consequentemente, seus componentes podem ser escritos como

$$y'_i = \lambda_i y_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.21)$$

Por sua vez, a solução para (2.21), dada por [13], é:

$$y_i = c_i e^{\lambda_i x} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2.22)$$

em que c_i são constantes. Substitua $\mathbf{Y}'$ na equação (2.16), para retornar o sistema para dependência em $\mathbf{X}$, obtendo:

$$\mathbf{X} = B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 x} \\ c_2 e^{\lambda_2 x} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n x} \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Concluindo, para encontrar as soluções do sistema de EDOs lineares, basta encontrar B e resolver as equações lineares dadas em (2.23).

Estas são as noções de EDOs necessárias para o desenvolvimento deste trabalho.

2.5 APROXIMAÇÕES DE LAGRANGE-BÜRMANN E TAYLOR

Para mais detalhes consulte as referências [3] e [16]. Os métodos de aproximação são técnicas utilizadas para encontrar soluções aproximadas para problemas matemáticos que não podem ser resolvidos de forma exata ou cuja resolução exata é complexa e impraticável. Esses métodos são fundamentais na matemática aplicada, permitindo a resolução de equações diferenciais, a integração de funções complicadas, e a solução de sistemas de equações lineares e não lineares. A importância dos métodos de aproximação reside na sua capacidade de fornecer soluções viáveis em tempo razoável, facilitando a análise e a modelagem de fenômenos reais em diversas áreas, como engenharia, física, economia e ciências da computação. Neste trabalho serão utilizadas aproximação por Séries de Taylor e por Inversão de Lagrange, os quais serão mostrados nesta seção.

2.5.1 (Teorema de Taylor). *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com n derivadas contínuas e $f^{(n+1)}$ definida em todo (a, b) . Seja $x_0 \in [a, b]$ então existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right) + \mathcal{O}(x^{n+1}),$$

onde $\mathcal{O}(x^{n+1}) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$.

Demonstração. Denote $G(t)$, tal que

$$G(t) = f(x) - f(t) - \sum_{k=1}^n \left(\frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x - t)^k \right) + A(x - t)^{n+1},$$

onde A é de tal forma que $G(x_0) = 0$. Portanto tem-se que $G(x) = G(x_0) = 0$. Pelo Teorema de Rolle, dado em [10], existe $c \in (x, x_0)$ tal que $G'(c) = 0$. Derivando G , tem-se

$$\begin{aligned} G'(t) &= -f'(t) - \sum_{k=1}^n \left(\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} (x - t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!} (x - t)^{k-1} \right) \\ &\quad - (n+1)A(x - t)^n. \end{aligned}$$

Desenvolvendo o somatório tem-se

$$G'(t) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n - (n+1)A(x - t)^n.$$

Tomando $t = c$, tem-se

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x - c)^n = (n+1)A(x - c)^n.$$

e portanto

$$A = -\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

Por fim, tomando $t = x_0$ e aplicando o fato que $G(x_0) = 0$ obtém-se o resultado. $\square$

2.5.2 (Teorema de Lagrange-Bürmann). *Se uma variável z pode ser expressa como uma função ζ da forma:*

$$\zeta = z + e\phi(\zeta),$$

com $e < 1$, então ζ pode ser expressado como uma função de z da forma:

$$\zeta = z + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^j}{j!} \frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}} [\phi(z)]^j.$$

Demonstração. Demonstração presente no livro de Lagrange [9] $\square$

Esses serão os métodos utilizados no desenvolvimento deste trabalho.

3 O PROBLEMA DE DOIS CORPOS

Neste capítulo será resolvido o Problema de 2 Corpos, que é a versão mais simples de um Problema de 3 corpos.

Problema de 2 Corpos. *Dado um sistema de 2 corpos, cada um com uma massa, uma posição inicial e uma velocidade inicial, determine as trajetórias e as posições futuras dos dois corpos ao longo do tempo, levando em consideração apenas as forças gravitacionais mútuas entre os corpos.*

O estudo do movimento dos corpos celestes ocorre desde os primórdios da humanidade. Já em 300 a.C., Aristarco de Samos, na Grécia Antiga, propôs a ideia de que a Terra orbitava ao redor do Sol. Mais tarde, em 70 d.C., o matemático Ptolomeu desenvolveu métodos geométricos para descrever os movimentos dos astros em torno do Sol, abordando essencialmente um problema de dois corpos, onde o Sol é um dos corpos e o astro em análise é o outro [7].

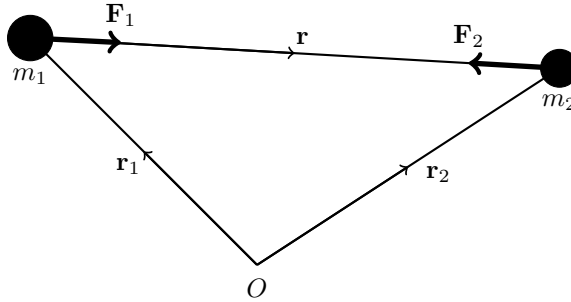
O primeiro matemático a formalizar uma abordagem para o problema dos dois corpos foi Johannes Kepler, em 1609, ao determinar que os planetas do Sistema Solar movem-se em órbitas elípticas ao redor do Sol, e ao estabelecer as Leis de Kepler. Em 1697, Isaac Newton resolveu o problema em seu livro “Philosophiae naturalis principia mathematica”, propondo uma solução que considerava dois corpos massivos interagindo sob a influência de sua gravidade mútua [22]. Ele aplicou equações do movimento para calcular as trajetórias desses corpos e prever seus futuros movimentos. Sob certas condições simplificadoras, como a falta de influências externas significativas, as soluções para o problema de dois corpos podem ser determinadas de forma precisa.

A solução apresentada por Newton em seu livro representou um avanço no desenvolvimento da física e da astronomia e estabeleceu uma

base teórica para a compreensão do movimento dos corpos celestes e fundamentou os princípios da mecânica clássica, que continuam relevantes até hoje [21]. No século XIX, Lagrange e Laplace refinaram as técnicas de resolução do problema de dois corpos e, atualmente, é possível resolver numericamente esse problema com o auxílio de computadores.

3.1 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

Considere duas massas, m_1 e m_2 , com posição relativa dada por $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, sendo $\mathbf{r}_1$ a posição da massa m_1 e $\mathbf{r}_2$ a posição da massa m_2 em um espaço inercial fixo como na Figura 3.1.1. Observe que os vetores posição são funções vetoriais de t , mas omite-se o tempo por conveniência.



Fonte: Maciel, 2024

Figura 3.1.1 – Diagrama de vetores para as forças atuando sobre as duas massas, m_1 e m_2 , com vetores posição $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$.

Pela Lei da Gravitação Universal (2.4), tem-se que as forças gravitacionais exercidas sobre os dois corpos são dadas por:

$$\mathbf{F}_1 = +\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r} \quad \text{e} \quad \mathbf{F}_2 = -\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r}, \quad (3.1)$$

e pela Segunda Lei de Newton (2.3), tem-se que:

$$\mathbf{F}_1 = m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 \quad \text{e} \quad \mathbf{F}_2 = m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2. \quad (3.2)$$

Para analisar como se comporta o centro de massa, o qual é dado por (2.2), é preciso determinar $m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2$. Para isso, some $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ da equação (3.1) e depois substitua em (3.2), para obter

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = 0.$$

Integrando essa igualdade em relação ao tempo, tem-se

$$m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{a},$$

integrando uma segunda vez, tem-se

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = \mathbf{a}t + \mathbf{b},$$

onde $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são as constantes de integração, e por sua vez vetores constantes. Com isso é possível escrever a posição do centro de massa, da seguinte forma:

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{a}t + \mathbf{b}}{m_1 + m_2}, \quad (3.3)$$

e derivá-la para encontrar a sua velocidade

$$\dot{\mathbf{R}} = \frac{\mathbf{a}}{m_1 + m_2}. \quad (3.4)$$

Portanto, o centro de massa do sistema está se movendo em uma velocidade constante (3.4). E em particular se $\mathbf{a}$ for nulo, ele se encontra estacionário. Também podemos concluir a partir de (3.3) que ele se move sobre uma reta.

Para facilitar o estudo do problema, considere a posição de m_2 em relação a m_1 e não mais a origem O . Portanto, é possível considerar o vetor posição de m_2 como sendo $\mathbf{r}$, e por sua vez a sua aceleração

será $\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1$. Utilizando as equações (3.1) e (3.2) e lembrando que $r = \|\mathbf{r}\|$, tem-se

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}}_1 &= \mathcal{G}m_1m_2 \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \frac{1}{m_1} \\ &= \mathcal{G}m_2 \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3}\end{aligned}\tag{3.5}$$

e

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}}_2 &= -\mathcal{G}m_1m_2 \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \frac{1}{m_2} \\ &= -\mathcal{G}m_1 \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3}.\end{aligned}\tag{3.6}$$

Agora utilize as equações (3.5) e (3.6) e também do fato de que $\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1$, para chegar em:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}} &= -\mathcal{G}m_1 \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} - (\mathcal{G}m_2 \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3}) \\ &= -\mathcal{G}(m_1 + m_2) \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3},\end{aligned}$$

e portanto

$$\ddot{\mathbf{r}} + \mathcal{G}(m_1 + m_2) \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0.$$

Seja definida a constante μ sendo $\mu = \mathcal{G}(m_1 + m_2)$. Deste modo, consegue-se chegar à Equação da Aceleração Relativa:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0.\tag{3.7}$$

Esta equação relaciona a posição com a aceleração do movimento de m_2 em relação a m_1 .

3.2 TORÇÃO

Com objetivo de resolver o problema de dois corpos, vamos analisar a torção do movimento relativo de m_2 em relação a m_1 . Para isso olharemos a equação da torção dada em [15]

$$\tau(t) = -\frac{\langle \dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}} \rangle}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|^2}.\tag{3.8}$$

Primeiro, note que de (3.7), tem-se que $\ddot{\mathbf{r}}$ é o próprio vetor $\mathbf{r}$ multiplicado por um escalar negativo, de modo que $\ddot{\mathbf{r}}$ e $\mathbf{r}$ são linearmente dependentes. Portanto o produto vetorial entre eles é $\mathbf{0}$, ou seja

$$\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}. \quad (3.9)$$

Derivando em relação ao tempo a equação (3.9) (usa-se aqui a notação de Leibniz no termo da esquerda apenas para deixar mais claro), chega-se que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}) = \dot{\mathbf{0}} &\Rightarrow \dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \ddot{\ddot{\mathbf{r}}} = \mathbf{0} \\ &\Rightarrow \dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = -\mathbf{r} \times \ddot{\ddot{\mathbf{r}}}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Substituindo a equação (3.10) na equação da Torção (3.8), obtém-se:

$$\begin{aligned} \tau(t) &= -\frac{\langle -\mathbf{r} \times \ddot{\ddot{\mathbf{r}}}, \ddot{\mathbf{r}} \rangle}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|^2} \\ &= \frac{\langle \mathbf{r} \times \ddot{\ddot{\mathbf{r}}}, \ddot{\mathbf{r}} \rangle}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|^2}. \end{aligned}$$

Considere $\mathbf{r} = (x, y, z)$, onde x, y, z são de funções de t , e resolvendo o produto vetorial:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times \ddot{\ddot{\mathbf{r}}} &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \end{pmatrix} \\ &= [y\ddot{z} - z\ddot{y}]\mathbf{i} + [z\ddot{x} - x\ddot{z}]\mathbf{j} + [x\ddot{y} - y\ddot{x}]\mathbf{k} \\ &= \begin{pmatrix} y\ddot{z} - z\ddot{y} \\ z\ddot{x} - x\ddot{z} \\ x\ddot{y} - y\ddot{x} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Agora, efetuando o produto interno $\langle \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}} \rangle$, tomando o produto interno canônico, e o resultado do produto vetorial em (3.11):

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}} \rangle &= (y\ddot{z} - z\ddot{y})\ddot{x} + (z\ddot{x} - x\ddot{z})\ddot{y} + (x\ddot{y} - y\ddot{x})\ddot{z} \\ &= \ddot{x}y\ddot{z} - \ddot{x}y\ddot{z} + \ddot{x}\ddot{y}z - \ddot{x}\ddot{y}z + x\ddot{y}\ddot{z} - x\ddot{y}\ddot{z} = 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\tau(t) = \frac{\langle \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}} \rangle}{|\ddot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|^2} = \frac{0}{|\ddot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|^2} = 0.$$

Conclui-se que a torção do movimento é nula. Assim, m_1 e m_2 estão sempre no mesmo plano, implicando que os vetores posição $\mathbf{r}$ e velocidade $\dot{\mathbf{r}}$ também estão sempre no mesmo plano, o qual é normal (perpendicular) a um vetor $\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ com direção constante. É possível verificar que o sentido e o módulo de $\mathbf{h}$ também são constantes, bastando para isso derivar $\mathbf{h}$ em relação ao tempo. De fato, note que

$$\begin{aligned} \mathbf{h} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{pmatrix} = [y\dot{z} - z\dot{y}]\mathbf{i} + [z\dot{x} - x\dot{z}]\mathbf{j} + [x\dot{y} - y\dot{x}]\mathbf{k} \\ &= \begin{pmatrix} y\dot{z} - z\dot{y} \\ z\dot{x} - x\dot{z} \\ x\dot{y} - y\dot{x} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Derivando ambos os lados da equação (3.12) em relação à t , tem-se:

$$\dot{\mathbf{h}} = \begin{pmatrix} y\ddot{z} + \dot{y}\dot{z} - z\ddot{y} - \dot{z}\dot{y} \\ z\ddot{x} + \dot{z}\dot{x} - x\ddot{z} - \dot{x}\dot{z} \\ x\ddot{y} + \dot{x}\dot{y} - y\ddot{x} - \dot{y}\dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y\ddot{z} - z\ddot{y} \\ z\ddot{x} - x\ddot{z} \\ x\ddot{y} - y\ddot{x} \end{pmatrix} = \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}.$$

Devido (3.9) temos que $\dot{\mathbf{h}} = \mathbf{0}$ e concluímos que $\mathbf{h}$ é constante, pois sua derivada é igual ao vetor nulo. Observe que o plano que contém tanto m_1 e m_2 é perpendicular ao vetor $\mathbf{h}$ (Figura 3.2.1). Esse vetor é comumente chamado de *momento angular integral*.

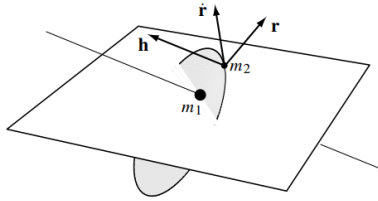


Figura 3.2.1 – O movimento de m_2 em relação à m_1 define um plano orbital (região cinza) em que o vetor constante $\mathbf{h}$ é sempre perpendicular ao plano. Fonte: Murray, 1999.

3.3 COORDENADAS POLARES

Como visto anteriormente, $\mathbf{r}$ e $\dot{\mathbf{r}}$ caem sobre um mesmo plano, que é um plano orbital (2.3.4). Então é possível considerar o movimento de m_2 apenas neste plano. Sendo assim, para facilitar, transforme o sistema de coordenadas cartesianas em coordenadas polares.

Considere o sistema de coordenadas polares (r, θ) com sua origem em m_1 , e uma linha arbitrária de referência dada por $\theta = 0$. Note que mesmo que m_1 e m_2 se movam pelo espaço de inércia, a direção da linha de referência se manterá a mesma. Em um sistema de coordenadas polares, tem-se que $x = r \cos(\theta)$ e $y = r \sin(\theta)$, onde (x, y) é o vetor posição de m_2 .

Defina

$$\hat{\mathbf{r}} = \cos(\theta)\mathbf{i} + \sin(\theta)\mathbf{j}$$

como o vetor unitário adjacente ao vetor do raio e

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\sin(\theta)\mathbf{i} + \cos(\theta)\mathbf{j}$$

como vetor unitário perpendicular ao vetor do raio. Observe que os vetores unitários $\hat{\mathbf{r}}$ e $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ dependem da posição de m_2 e, portanto, são dependentes do tempo t . Tem-se que o vetor posição $\mathbf{r}$ de m_2 em

relação a m_1 será

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}. \quad (3.13)$$

Calcule as derivadas de $\hat{\mathbf{r}}$ e $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, para assim obter:

$$\dot{\hat{\mathbf{r}}} = \dot{\theta}(-\sin(\theta)\mathbf{i}) + \dot{\theta}\cos(\theta)\mathbf{j} = \dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (3.14)$$

e

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = -\dot{\theta}\cos(\theta)\mathbf{i} + [-\dot{\theta}\sin(\theta)\mathbf{j}] = -\dot{\theta}\hat{\mathbf{r}}$$

Com isso, utilizando (3.14), derive (3.13) para encontrar a velocidade de m_2 :

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}.$$

Derivando a equação uma última vez, encontra-se a aceleração

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} &= \ddot{r}\hat{\mathbf{r}} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\ddot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} - r\dot{\theta}\dot{\theta}\hat{\mathbf{r}} \\ &= \ddot{r}\hat{\mathbf{r}} + 2\dot{r}\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} - r\dot{\theta}^2\hat{\mathbf{r}} + r\ddot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &= (\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r)\hat{\mathbf{r}} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\boldsymbol{\theta}}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Nesta etapa, o objetivo é encontrar a equação escalar para o Movimento Relativo de m_2 , para isso compare a equação (3.15) com a equação (3.7). Porém a equação (3.7) não está em coordenadas polares, então primeiro escreva ela com componente em $\hat{\mathbf{r}}$ e $\hat{\boldsymbol{\theta}}$:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\left(\mu\frac{r}{r^3}\hat{\mathbf{r}} + 0\hat{\boldsymbol{\theta}}\right). \quad (3.16)$$

Agora compare os componentes das equações (3.15) e (3.16), para obter

$$\begin{cases} \ddot{r} - \dot{\theta}^2 r = -\frac{\mu}{r^2} \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0. \end{cases} \quad (3.17)$$

Observa-se que a solução do problema de dois corpos, em coordenadas polares, é parametrizada pelo tempo, isto é, procura-se um par de funções $r(t)$ e $\theta(t)$ que satisfaz todas as condições do problema, em

particular, a equação (3.17). Note que a segunda equação de (3.17) pode ser escrita como

$$\frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = 0,$$

de onde segue-se que $\kappa = r^2 \dot{\theta}$ é uma constante independente do tempo. Assim, pode-se encontrar uma solução r em função de θ , removendo a dependência do tempo usando a constante $\kappa = r^2 \dot{\theta}$. Suponha que r seja função de θ e defina $u(\theta) = \frac{1}{r(\theta)}$. Tem-se que

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{u(\theta)} \right) = \frac{-1}{u(\theta)^2} \cdot \frac{du}{d\theta} \dot{\theta} \\ &= -r^2 \frac{du}{d\theta} \dot{\theta} = -\kappa \frac{du}{d\theta}. \end{aligned}$$

Derivando uma última vez,

$$\ddot{r} = -\kappa \frac{d^2 u}{d\theta^2} \dot{\theta},$$

e observando que $\dot{\theta} = \kappa u^2$, tem-se:

$$\ddot{r} = -\kappa \kappa u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} = -\kappa^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2}.$$

E com isso, reescreva a equação (3.17), como:

$$\begin{aligned} -\kappa^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} - \frac{1}{u} \kappa^2 u^4 &= -\mu u^2 \\ -\kappa^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + \frac{1}{u} u^2 \right) &= -\mu u^2 \\ \kappa^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) &= \mu \\ \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u &= \frac{\mu}{\kappa^2}. \end{aligned}$$

Portanto, foi encontrada uma equação diferencial ordinária linear de 2ª ordem não-homogênea (2.4.3)

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu}{\kappa^2}. \quad (3.18)$$

3.4 A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

Como a função $u(\theta)$ satisfaz a EDO (3.18), basta resolver essa equação que será possível descrever como se dá o movimento.

Como se trata de uma EDO de segunda ordem linear não-homogênea, basta utilizar o método apresentado em 2.4.3 para encontrar uma solução geral. Com isso, para encontrar a solução u_H , primeiro é preciso achar a equação característica, dada em (2.8):

$$E_c = \lambda^2 + 1 = 0.$$

Encontre o valor de λ :

$$\begin{aligned}\lambda^2 &= -1 \\ \lambda &= \pm\sqrt{-1} = \pm i\end{aligned}$$

Onde, $\lambda = \alpha \pm \beta i$ e $\alpha = 0$ e $\beta = 1$. Com isso, a solução da equação homogênea é dada por

$$\begin{aligned}u_H &= e^{\alpha\theta}(C_1 \cos(\beta\theta) + C_2 \sin(\beta\theta)) \\ u_H u_H &= e^0(C_1 \cos(\theta) + C_2 \sin(\theta)) \\ u_H &= C_1 \cos(\theta) + C_2 \sin(\theta).\end{aligned}$$

E agora para a solução particular, supondo u_P constante, tem-se $u_P = \frac{\mu}{\kappa^2}$, com isso u será

$$u(\theta) = C_1 \cos(\theta) + C_2 \sin(\theta) + \frac{\mu}{\kappa^2}. \quad (3.19)$$

E essa é a função $u(\theta)$ que será utilizada para encontrar a função do Movimento Relativo $r(\theta)$. Para tornar mais fácil de determinar o que descreve essa função, faça algumas mudanças de variáveis. Defina A , tal que $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ e $\omega = \arctan\left(\frac{C_2}{C_1}\right)$. Utilizando a relação trigonométrica, dada em [18], reescreva $C_1 \cos(\theta) + C_2 \sin(\theta)$ como

$A \cos(\theta - \omega)$. Esse A é a amplitude do cosseno, que por regra tem que ser positiva. Defina $e = \frac{A\kappa^2}{\mu}$, e note que $e > 0$. Por fim reescreva a equação (3.19) como

$$u(\theta) = e \frac{\mu}{\kappa^2} \cos(\theta - \omega) + \frac{\mu}{\kappa^2}.$$

Reescrevendo

$$u(\theta) = \frac{\mu}{\kappa^2} \cdot [1 + e \cos(\theta - \omega)],$$

onde e é amplitude do movimento e ω a fase. Agora, retorne a função para r , lembrando que $u = \frac{1}{r}$. Sendo assim:

$$r(\theta) = \frac{\frac{\kappa^2}{\mu}}{1 + e \cos(\theta - \omega)}.$$

Defina $p = \frac{\kappa^2}{\mu}$. Por fim se encontra a função

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \omega)}. \quad (3.20)$$

Esta é a função escalar do Movimento Relativo de m_2 . Portanto, é a função que descreve o movimento de m_2 em relação a m_1 . Para analisar, de fato, essa função, podemos parametrizar a sua amplitude e e ver como ela se comporta. Para isso, separe em quatro casos:

- $e = 0$,
- $0 < e < 1$,
- $e = 1$,
- $e > 1$.

Note que não é necessário analisar o caso $e < 0$, pois a amplitude não pode ser negativa.

3.4.1 CASO $e = 0$

Substituindo $e = 0$ na função do Movimento Relativo (3.20), tem-se

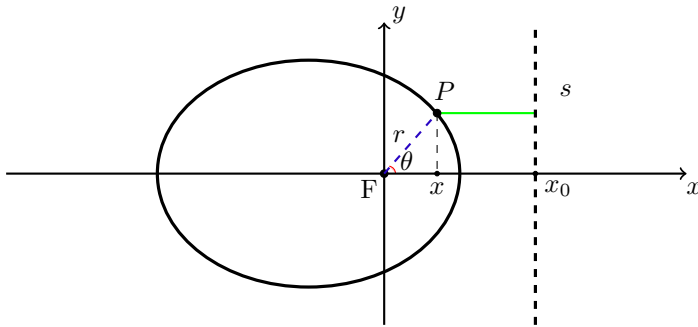
$$r(\theta) = \frac{p}{1 + 0 \cdot \cos(\theta - \omega)} = p$$

A função $r(\theta)$ é uma função em coordenadas polares e é constante, o que implica que ela descreve uma circunferência de raio p . Portanto, o movimento de m_2 em relação a m_1 , quando $e = 0$, é descrito por uma circunferência.

3.4.2 CASO $0 < e < 1$

Para este caso mostra-se que $r(\theta)$ descreve uma elipse.

Seja $\mathcal{E}$ uma elipse, em que um dos seus focos F está localizado em m_1 e $P(r, \theta)$ um ponto qualquer que pertença à $\mathcal{E}$, e s sua reta diretriz associada perpendicular ao eixo x em x_0 (veja a Figura 3.4.1).



Fonte: Maciel, 2024

Figura 3.4.1 – Ponto $P(r, \theta)$ na elipse $\mathcal{E}$ com foco F em m_1 e reta diretriz associada s .

Pela Propriedade Fundamental das Cônicas, dada em [8], tem-se que para todo P pertencente à uma cônica, a distância de P até o

foco F é igual à sua excentricidade vezes a distância de P até a reta diretriz associada, ou seja:

$$d(P, F) = e \cdot d(P, s).$$

Note que $d(P, F)$ é a própria $r(\theta)$, portanto:

$$r(\theta) = e \cdot (x_0 - x).$$

Tem-se que o sistema está em coordenadas polares, portanto $x = r \cos(\theta)$ e com isso

$$\begin{aligned} r &= e \cdot (x_0 - r \cos(\theta)) \\ &= ex_0 - er \cos(\theta). \end{aligned}$$

Assim

$$r + er \cos(\theta) = ex_0 \Rightarrow r \cdot (1 + e \cos(\theta)) = ex_0.$$

E, portanto,

$$r(\theta) = \frac{ex_0}{1 + e \cos(\theta)}. \quad (3.21)$$

Note que a equação (3.21) é a mesma que a equação (3.20), portanto, $p = ex_0$. Agora basta mostrar que $0 < e < 1$. Segue que e é a excentricidade da elipse, e por definição [8] a excentricidade e é dada por $e = \frac{c}{a}$, em que c é a distância focal e a o maior semi-eixo. Por definição, a distância focal c é sempre menor que o maior semi-eixo a , e tanto a como c são positivos. Portanto, c/a é sempre positivo e menor que 1, ou seja, $0 < e < 1$.

Portanto, o movimento de m_2 em relação a m_1 , na situação em que $0 < e < 1$, é descrito por uma elipse, onde $p = ex_0$, sendo p o semi *latus rectum*¹ da elipse e a amplitude e a excentricidade da elipse.

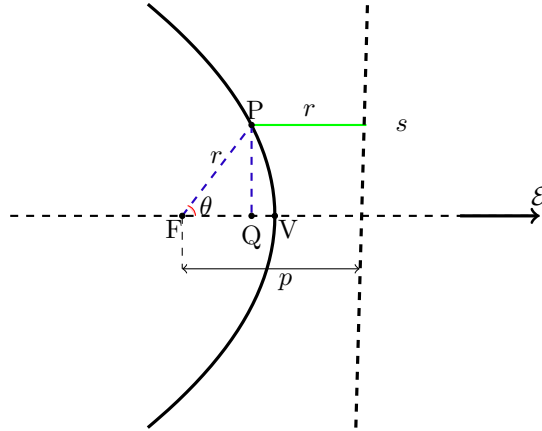
¹ A menor corda que passa por um dos focos de uma cônica.

3.4.3 CASO $e = 1$

Seja $\mathcal{P}$ uma parábola, com foco F e vértice V sobre um eixo de simetria $\mathcal{E}$ e sua reta diretriz s em $x = x_0$. Por definição, tem-se que p é a distância de F até s [11].

Considere o sistema de coordenadas polares (r, θ) centrado em F , tome o ponto $P = (r, \theta)$, tal que P pertence a parábola $\mathcal{P}$. Trace uma reta perpendicular ao eixo $\mathcal{E}$, tal que passe pelo ponto P (veja a Figura 3.4.2). Note que pela Propriedade Fundamental das Cônicas:

$$\begin{aligned} d(P, F) &= d(P, s) \\ r(\theta) &= d(P, s). \end{aligned} \tag{3.22}$$



Fonte: Maciel, 2024

Figura 3.4.2 – Parábola $\mathcal{P}$ em coordenadas polares.

Tome o triângulo retângulo FPQ , tal que o lado $FP = r(\theta)$ e o

lado $FQ = p - r(\theta)$. Portanto tem-se que:

$$\begin{aligned}\cos(\theta) &= \frac{p - r(\theta)}{r(\theta)} \\ r(\theta) \cdot \cos(\theta) &= p - r(\theta) \\ r(\theta) \cdot \cos(\theta) + r(\theta) &= p \\ r(\theta) \cdot (\cos(\theta) + 1) &= p \\ r(\theta) &= \frac{p}{1 + \cos(\theta)}. \quad (3.23)\end{aligned}$$

Portanto, todos os pontos de $\mathcal{P}$ são descritos pela equação (3.23). Com isso, se $e = 1$, temos que o movimento de m_2 em relação a m_1 é descrito por uma parábola.

3.4.4 CASO $e > 1$

Seja $\mathcal{H}$ uma hipérbole, onde um dos seus focos F está localizado em m_1 e $P(r, \theta)$ um ponto qualquer que pertença à $\mathcal{H}$, e s sua reta diretriz associada perpendicular ao eixo x em x_0 (veja a Figura 3.4.3).

Pela Propriedade Fundamental das Cônicas, dada em [8], tem-se que para todo P pertencente à uma cônica, a distância de P até o foco F é igual à sua excentricidade vezes a distância de P até a reta diretriz associada, ou seja:

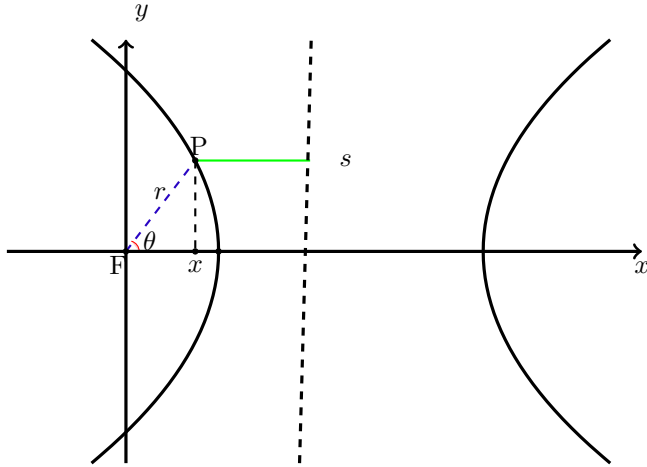
$$d(P, F) = e \cdot d(P, s)$$

Note que $d(P, F)$ é a própria $r(\theta)$, portanto:

$$r(\theta) = e \cdot (x_0 - x)$$

Tem-se que o sistema está em coordenadas polares, portanto $x = r \cos(\theta)$ e com isso

$$\begin{aligned}r &= e \cdot (x_0 - r \cos(\theta)) \\ &= ex_0 - er \cos(\theta).\end{aligned}$$

Figura 3.4.3 – Hipérbole $\mathcal{H}$ em coordenadas polares.

Fonte: Maciel, 2024

E assim

$$\begin{aligned} r + e \cos(\theta) &= ex_0 \\ r \cdot (1 + e \cos(\theta)) &= ex_0. \end{aligned}$$

E portanto

$$r(\theta) = \frac{ex_0}{1 + e \cos(\theta)}. \quad (3.24)$$

Note que a equação (3.24) é a mesma que a equação (3.20), portanto, $p = ex_0$. Agora basta mostrar que $e > 1$. Segue que e é a excentricidade da hipérbole, e por definição [8] a excentricidade e é dada por $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$, onde, a é o comprimento do eixo conjugado e b é o comprimento do eixo transversal. Logo, b^2/a^2 é sempre positivo, ou seja, $e > 1$.

Portanto, o movimento de m_2 em relação a m_1 , quando $e > 1$, é descrito por uma hipérbole, onde $p = ex_0$, sendo p o semi latus rectum da hipérbole e a amplitude e a excentricidade da hipérbole.

4 O PROBLEMA DE 3 CORPOS RESTRITO

No capítulo anterior, foi demonstrado que o movimento de duas massas sofrendo atração gravitacional mútua pode ser solucionado analiticamente e é representado por um caminho geométrico confinado em um espaço inercial. Neste capítulo, será analisado o movimento considerando três corpos, sendo um deles com massa desprezível em comparação com os outros dois. Os dois corpos de massa considerável estão em órbita circular. Este caso particular é conhecido como o Problema dos Três Corpos Circular Restrito.

Problema de 3 Corpos Circular Restrito. *Dado um sistema de 3 corpos, cada um com uma massa e uma posição inicial, sendo a massa de um deles desprezível em comparação com as outras duas e os corpos de massa relevante estão sobre uma órbita circular, determine a trajetória e a posição futura do corpo de massa desprezível ao longo do tempo, levando em consideração as forças gravitacionais mútuas entre os corpos.*

Durante o decorrer da história, o Problema dos Três Corpos chamou a atenção de diversos matemáticos, que tentaram resolvê-lo sem sucesso, mas deixaram grandes contribuições. Entre eles estão Euler, Lagrange, Jacobi, Le Verrier, Hamilton, Poincaré e Birkhoff. Os livros de Szebehely e Marchal são atualmente as referências principais para os resultados mais importantes [13].

4.1 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

Considere o movimento de uma pequena partícula P , de massa desprezível, afetada apenas pela força da gravidade gerada por duas massas m_1 e m_2 . Suponha que essas duas massas estejam em órbita circular em torno do seu centro de massa. As duas massas afetam

gravitacionalmente a partícula, porém como a partícula possui massa desprezível, ela não afeta as duas massas.

Defina o conjunto de eixos ξ , η e ζ em um espaço de inércia (2.3.1) com origem O no centro de massa do sistema, de modo que o eixo ξ caia sobre a linha que conecta m_1 e m_2 no tempo $t = 0$ com o eixo η perpendicular à ξ . Faça isso de forma que o movimento orbital das duas massas caia sobre o plano gerado pelos vetores ξ e η e por fim ζ perpendicular ao plano. Defina as posições de m_1 e m_2 respectivamente como (ξ_1, η_1, ζ_1) e (ξ_2, η_2, ζ_2) , note que as duas massas têm uma separação constante e a mesma velocidade angular sobre elas e sobre o centro de massa do sistema. Com isso, é possível escolher as unidades tais que $\mu = \mathcal{G}(m_1 + m_2) = 1$. Se assumir que $m_1 > m_2$ e definir

$$\bar{\mu} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

tem-se que, neste sistema de unidades, considere

$$\mu_1 = \mathcal{G}m_1 = 1 - \bar{\mu} \quad \text{e} \quad \mu_2 = \mathcal{G}m_2 = \bar{\mu}, \quad (4.1)$$

onde $\bar{\mu} < 1/2$. Com isso, a distância entre as duas massas é a unidade e, o tempo que as massas demoram para completar uma órbita, conhecido como movimento médio n , das duas massas também será a unidade.

Por fim, defina a posição de P como $\mathbf{r} = (\xi, \eta, \zeta)$, e note que

$$\mathbf{r}_1 = (\xi, \eta, \zeta) - (\xi_1, \eta_1, \zeta_1) \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_2 = (\xi, \eta, \zeta) - (\xi_2, \eta_2, \zeta_2), \quad (4.2)$$

respectivamente os vetores posição de O , μ_1 e μ_2 sendo P a referência. (Figura 4.1.1).

Tem-se que a força gravitacional $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ é a força resultante da força gravitacional $\mathbf{F}_1$ que a m_1 exerce sobre a partícula e a força gravitacional $\mathbf{F}_2$ que a m_2 exerce sobre a partícula. Para

encontrar $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ é possível utilizar a Lei da Gravitação Universal, dada em (2.4), de modo que no componente ξ tem-se

$$\mathbf{F}_1 = -\mathcal{G} \frac{m_1 m_p \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_1\|^3} \quad \text{e} \quad \mathbf{F}_2 = -\mathcal{G} \frac{m_2 m_p \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_2\|^3},$$

em que m_p é a massa de P . Pela equação (4.1):

$$\mathbf{F}_1 = \mu_1 m_p \frac{\xi_1 - \xi}{r_1^3} \quad \text{e} \quad \mathbf{F}_2 = \mu_2 m_p \frac{\xi_2 - \xi}{r_2^3}.$$

Utilize o fato de que $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ para obter a força gravitacional:

$$\mathbf{F} = \mu_1 m_p \frac{\xi_1 - \xi}{r_1^3} + \mu_2 m_p \frac{\xi_2 - \xi}{r_2^3} \Rightarrow \frac{\mathbf{F}}{m_p} = \mu_1 \frac{\xi_1 - \xi}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\xi_2 - \xi}{r_2^3}.$$

Porém pela (2.3), tem-se que $\frac{\mathbf{F}}{m_p}$ é a aceleração na componente ξ de P . Analogamente para as componentes η e ζ , conclui-se que as equações de movimento da partícula são dadas por:

$$\ddot{\xi} = \mu_1 \frac{\xi_1 - \xi}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\xi_2 - \xi}{r_2^3}, \quad (4.3)$$

$$\ddot{\eta} = \mu_1 \frac{\eta_1 - \eta}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\eta_2 - \eta}{r_2^3}, \quad (4.4)$$

$$\ddot{\zeta} = \mu_1 \frac{\zeta_1 - \zeta}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\zeta_2 - \zeta}{r_2^3}.$$

E pela Figura 4.1.1, r_1^2 e r_2^2 são dados por:

$$r_1^2 = (\xi_1 - \xi)^2 + (\eta_1 - \eta)^2 + (\zeta_1 - \zeta)^2, \quad (4.5)$$

$$r_2^2 = (\xi_2 - \xi)^2 + (\eta_2 - \eta)^2 + (\zeta_2 - \zeta)^2. \quad (4.6)$$

Note que essas equações são válidas para qualquer configuração do Problema de 3 Corpos Restrito, pois eles não requerem que seja feita qualquer suposição sobre o caminho percorrido pelas duas massas.

Considere um novo sistema de coordenadas (x, y, z) com origem no centro de massa O , mas que está rotacionando em uma taxa n ,

onde n é o movimento médio, na direção positiva. Escolha o eixo x de forma que as duas massas caiam sobre esse eixo com as coordenadas dadas por

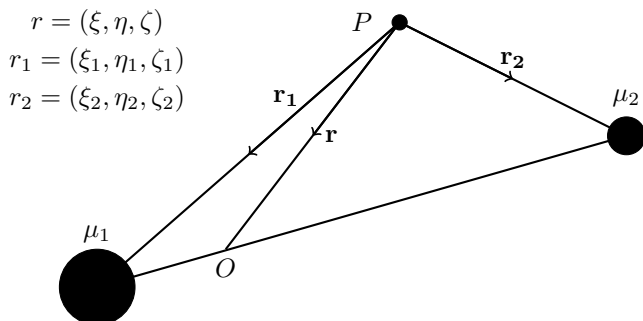
$$(x_1, y_1, z_1) = (-\mu_2, 0, 0) \quad \text{e} \quad (x_2, y_2, z_2) = (\mu_1, 0, 0), \quad (4.7)$$

referentes respectivamente à posição da massa m_1 e m_2 , ambas em relação ao centro de massa. Esse novo sistema de coordenadas será chamado de sistema sinódico. Portanto, das equações (4.5) e (4.6) tem-se

$$r_1^2 = (x + \mu_2)^2 + y^2 + z^2, \quad (4.8)$$

$$r_2^2 = (x - \mu_1)^2 + y^2 + z^2, \quad (4.9)$$

onde (x, y, z) são as coordenadas da partícula no sistema sinódico. Uma forma de escrever as coordenadas do sistema original, é fazendo



Fonte: Maciel, 2024

Figura 4.1.1 – Uma visão do plano que contém as coordenadas (ξ, η, ζ) e as coordenadas sinódicas (x, y, z) da partícula no ponto P , onde as setas indicam o sentido positivo da rotação.

uma rotação sobre o eixo ζ :

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(nt) & -\sin(nt) & 0 \\ \sin(nt) & \cos(nt) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Derivando a equação (4.10) em relação ao tempo, se obtêm

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \cos(nt) - y \sin(nt) + z \cdot 0 \\ x \sin(nt) + y \cos(nt) + z \cdot 0 \\ x \cdot 0 + y \cdot 0 + z \cdot 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \\ \ddot{\zeta} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \dot{x} \cos(nt) - xn \sin(nt) - \dot{y} \sin(nt) - yn \cos(nt) \\ \dot{x} \sin(nt) + xn \cos(nt) + \dot{y} \cos(nt) - yn \sin(nt) \\ \dot{z} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(nt) \cdot (\dot{x} - ny) - \sin(nt) \cdot (\dot{y} + nx) \\ \sin(nt) \cdot (\dot{x} - ny) + \cos(nt) \cdot (\dot{y} + nx) \\ \dot{z} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(nt) & -\sin(nt) & 0 \\ \sin(nt) & \cos(nt) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} - ny \\ \dot{y} + nx \\ \dot{z} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Derivando mais uma vez, tem-se

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \\ \ddot{\zeta} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(nt) \cdot (\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x) - \sin(nt) \cdot (\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y) \\ \sin(nt) \cdot (\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x) + \cos(nt) \cdot (\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y) \\ \ddot{z} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(nt) & -\sin(nt) & 0 \\ \sin(nt) & \cos(nt) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y \\ \ddot{z} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Note que essa mudança para o sistema sinódico trouxe para as equações de movimento os termos $n\dot{x}$ e $n\dot{y}$ que são referentes à

Aceleração de Coriolis, definida em (2.1.8), e termos n^2x e n^2y que são referentes à Aceleração Centrífuga, definida em (2.1). Utilize as substituições para ξ em (4.10) e as equações (4.3) e (4.7) para chegar na seguinte equação:

$$\begin{aligned}
 \ddot{\xi} &= \mu_1 \frac{\xi_1 - \xi}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\xi_2 - \xi}{r_2^3} \\
 &= \mu_1 \frac{x_1 \cos(nt) - y_1 \sin(nt) - x \cos(nt) + y \sin(nt)}{r_1^3} \\
 &\quad + \mu_2 \frac{x_2 \cos(nt) - y_2 \sin(nt) - x \cos(nt) + y \sin(nt)}{r_2^3} \\
 &= \mu_1 \frac{x_1 \cos(nt) - 0 \cdot \sin(nt) - x \cos(nt) + y \sin(nt)}{r_1^3} \quad (4.12) \\
 &\quad + \mu_2 \frac{x_2 \cos(nt) - 0 \cdot \sin(nt) - x \cos(nt) + y \sin(nt)}{r_2^3} \\
 &= \mu_1 \frac{x_1 \cos(nt) - x \cos(nt) + y \sin(nt)}{r_1^3} \\
 &\quad + \mu_2 \frac{x_2 \cos(nt) - x \cos(nt) + y \sin(nt)}{r_2^3}.
 \end{aligned}$$

Rearranjando os termos

$$\ddot{\xi} = \cos(nt) \cdot \left[\mu_1 \frac{x_1 - x}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x_2 - x}{r_2^3} \right] + y \sin(nt) \cdot \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right]. \quad (4.13)$$

Usando agora (4.11), tem-se

$$\begin{aligned}
 &(\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x) \cos(nt) - (\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y) \sin(nt) \\
 &= \cos(nt) \cdot \left[\mu_1 \frac{x_1 - x}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x_2 - x}{r_2^3} \right] + y \sin(nt) \cdot \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right]. \quad (4.14)
 \end{aligned}$$

Utilizando a mesma lógica para a componente $\ddot{\eta}$ e a equação

(4.4):

$$\begin{aligned}
\ddot{\eta} &= \mu_1 \frac{\eta_1 - \eta}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\eta_2 - \eta}{r_2^3} \\
&= \mu_1 \frac{x_1 \sin(nt) + y_1 \cos(nt) - x \sin(nt) - y \cos(nt)}{r_1^3} \\
&\quad + \mu_2 \frac{x_2 \sin(nt) + y_2 \cos(nt) - x \sin(nt) - y \cos(nt)}{r_2^3} \\
&= \mu_1 \frac{x_1 \sin(nt) + 0 \cdot \cos(nt) - x \sin(nt) - y \cos(nt)}{r_1^3} \\
&\quad + \mu_2 \frac{x_2 \sin(nt) + 0 \cdot \cos(nt) - x \sin(nt) - y \cos(nt)}{r_2^3} \\
&= \mu_1 \frac{x_1 \sin(nt) - x \sin(nt) - y \cos(nt)}{r_1^3} \\
&\quad + \mu_2 \frac{x_2 \sin(nt) - x \sin(nt) - y \cos(nt)}{r_2^3} \\
&= \sin(nt) \cdot \left[\mu_1 \frac{x_1 - x}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x_2 - x}{r_2^3} \right] - y \cos(nt) \cdot \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right].
\end{aligned} \tag{4.15}$$

De onde segue-se que

$$\begin{aligned}
&(\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x) \sin(nt) - (\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y) \cos(nt) = \\
&\sin(nt) \cdot \left[\mu_1 \frac{x_1 - x}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x_2 - x}{r_2^3} \right] - y \cos(nt) \cdot \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right].
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Por fim, para a componente $\ddot{\zeta}$ e a equação (4.6):

$$\begin{aligned}
\ddot{\zeta} &= \mu_1 \frac{\zeta_1 - \zeta}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\zeta_2 - \zeta}{r_2^3} \\
&= \mu_1 \frac{z_1 - z}{r_1^3} + \mu_2 \frac{z_2 - z}{r_2^3} \\
&= \mu_1 \frac{0 - z}{r_1^3} + \mu_2 \frac{0 - z}{r_2^3} \\
&= -\mu_1 \frac{z}{r_1^3} - \mu_2 \frac{z}{r_2^3}
\end{aligned}$$

e portanto,

$$\ddot{z} = - \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] z. \quad (4.17)$$

Para continuar a análise é de interesse remover os termos de seno e cosseno das equações, para isso multiplique a equação (4.14) por $\cos(nt)$ e a equação (4.16) por $\sin(nt)$ e por fim some os resultados. Para o lado direito da igualdade tem-se:

$$\begin{aligned} & \left(\cos(nt) \left[\mu_1 \frac{x_1 - x}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x_2 - x}{r_2^3} \right] + y \sin(nt) \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] \right) \cos(nt) \\ & + \left(\sin(nt) \left[\mu_1 \frac{x_1 - x}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x_2 - x}{r_2^3} \right] - y \cos(nt) \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] \right) \sin(nt) \\ & = \cos^2(nt) \left[\mu_1 \frac{x_1 - x}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x_2 - x}{r_2^3} \right] + y \cos(nt) \sin(nt) \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] \\ & + \sin^2(nt) \left[\mu_1 \frac{x_1 - x}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x_2 - x}{r_2^3} \right] - y \sin(nt) \cos(nt) \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] \\ & = \cos^2(nt) \left[\mu_1 \frac{x_1 - x}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x_2 - x}{r_2^3} \right] + \sin^2(nt) \left[\mu_1 \frac{x_1 - x}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x_2 - x}{r_2^3} \right] \\ & = \left[\mu_1 \frac{x_1 - x}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x_2 - x}{r_2^3} \right] (\cos^2(nt) + \sin^2(nt)) \\ & = \left[\mu_1 \frac{x_1 - x}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x_2 - x}{r_2^3} \right]. \end{aligned}$$

Utilize o fato de que $x_1 = -\mu_2$ e $x_2 = \mu_1$ para chegar em:

$$- \left[\mu_1 \frac{x + \mu_2}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x - \mu_1}{r_2^3} \right].$$

Agora faça para o lado esquerdo da igualdade:

$$\begin{aligned}
& ((\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x) \cos(nt) - (\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y) \sin(nt)) \cdot \cos(nt) \\
& + ((\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x) \sin(nt) + (\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y) \cos(nt)) \cdot \sin(nt) \\
& = (\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x) \cos^2(nt) - (\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y) \sin(nt) \cos(nt) \\
& + (\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x) \sin^2(nt) + (\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y) \cos(nt) \sin(nt) \\
& = (\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x) \cos^2(nt) + (\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x) \sin^2(nt) \\
& = (\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x) \cdot (\cos^2(nt) + \sin^2(nt)) \\
& = \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x.
\end{aligned}$$

Portanto, conclui-se que:

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x = - \left[\mu_1 \frac{x + \mu_2}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x - \mu_1}{r_2^3} \right]. \quad (4.18)$$

Faça o mesmo processo, mas agora multiplique a equação (4.14) por $-\sin(nt)$ e a equação (4.16) por $\cos(nt)$ e por fim some os resultados. Para o lado direito da igualdade tem-se:

$$\begin{aligned}
& \left(\cos(nt) \left[\mu_1 \frac{x_1 - x}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x_2 - x}{r_2^3} \right] + y \sin(nt) \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] \right) (-\sin(nt)) \\
& + \left(\sin(nt) \left[\mu_1 \frac{x_1 - x}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x_2 - x}{r_2^3} \right] - y \cos(nt) \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] \right) \cos(nt) \\
& = -\sin(nt) \cos(nt) \left[\mu_1 \frac{x_1 - x}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x_2 - x}{r_2^3} \right] - y \sin^2(nt) \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] \\
& + \cos(nt) \sin(nt) \left[\mu_1 \frac{x_1 - x}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x_2 - x}{r_2^3} \right] - y \cos^2(nt) \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] \\
& = -y \sin^2(nt) \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] - y \cos^2(nt) \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] \\
& = - \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] (\cos^2(nt) + \sin^2(nt)) y \\
& = - \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] y.
\end{aligned}$$

Agora faça para o lado esquerdo da igualdade:

$$\begin{aligned}
& ((\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x) \cos(nt) - (\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y) \sin(nt)) \cdot (-\sin(nt)) \\
& + ((\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x) \sin(nt) + (\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y) \cos(nt)) \cdot \cos(nt) \\
& = -(\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x) \cos(nt) \sin(nt) + (\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y) \sin^2(nt) \\
& + (\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x) \cos(nt) \sin(nt) + (\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y) \cos^2(nt) \\
& = (\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y) \sin^2(nt) + (\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y) \cos^2(nt) = \\
& = (\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y) \cdot (\sin^2(nt) + \cos^2(nt)) = \\
& = \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y.
\end{aligned}$$

Portanto, conclui-se que:

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y = - \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] y.$$

Com isso, tem-se que as equações de movimento do sistema sinódico são:

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x = - \left[\mu_1 \frac{x + \mu_2}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x - \mu_1}{r_2^3} \right], \quad (4.19)$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y = - \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] y, \quad (4.20)$$

$$\ddot{z} = - \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] z. \quad (4.21)$$

As expressões $-2n\dot{y}$ e $+2n\dot{x}$ nas equações (4.19) e (4.20) são os termos de Corioli, que dependem da velocidade da partícula no sistema sinódico.

Agora, é necessário analisar o Potencial da partícula. Para isso, defina a função

$$U(x, y, z) = \frac{n^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}. \quad (4.22)$$

Os termos $x^2 + y^2$ representam o potencial centrífugo, dado em [14], relacionado à energia cinética devido à rotação. Já os termos $1/r_1$

e $1/r_2$ denotam o potencial gravitacional, dado em [23], relacionado à atração entre os corpos e suas massas. Suas derivadas resultam, respectivamente, na força centrífuga e na força gravitacional. A função U é comumente denotada como pseudo-potencial, pois não abrange todas as forças que atuam sobre a partícula e sempre é positiva. Para analisar essas forças, derive parcialmente a função U . Em relação à x tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= 0 \cdot (x^2 + y^2) + \frac{n^2}{2} 2x + \frac{0 \cdot r_1 - \left(\mu_1 \frac{\partial r_1}{\partial x} \right)}{r_1^2} + \frac{0 \cdot r_2 - \left(\mu_2 \frac{\partial r_2}{\partial x} \right)}{r_2^2} \\ &= n^2 x + \frac{- \left(\mu_1 \frac{\partial r_1}{\partial x} \right)}{r_1^2} + \frac{- \left(\mu_2 \frac{\partial r_2}{\partial x} \right)}{r_2^2}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Para identificar $\frac{\partial r_1}{\partial x}$ e $\frac{\partial r_2}{\partial x}$ utilize as equações (4.8) e (4.9):

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_1}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left([(x + \mu_2)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{1}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot [(x + \mu_2)^2 + y^2 + z^2]^{-\frac{1}{2}} \cdot 2(x + \mu_2) \cdot 1 \\ &= \frac{x + \mu_2}{[(x + \mu_2)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{x + \mu_2}{r_1} \end{aligned} \quad (4.24)$$

e

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial r_2}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left([(x - \mu_1)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{1}{2}} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot [(x - \mu_1)^2 + y^2 + z^2]^{-\frac{1}{2}} \cdot 2(x - \mu_1) \cdot 1 \\
 &= \frac{x - \mu_1}{[(x - \mu_1)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}} \\
 &= \frac{x - \mu_1}{r_2}.
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

Substitua as equações (4.24) e (4.25) na equação (4.23), para obter

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U}{\partial x} &= n^2 x + \frac{-\left(\mu_1 \frac{x + \mu_2}{r_1}\right)}{r_1^2} + \frac{-\left(\mu_2 \frac{x - \mu_1}{r_2}\right)}{r_2^2} \\
 &= n^2 x - \mu_1 \frac{x + \mu_2}{r_1^3} - \mu_2 \frac{x - \mu_1}{r_2^3} \\
 &= n^2 x - \left[\mu_1 \frac{x + \mu_2}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x - \mu_1}{r_2^3} \right].
 \end{aligned}$$

Em relação à y , tem-se:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U}{\partial y} &= 0 \cdot (x^2 + y^2) + \frac{n^2}{2} 2y + \frac{0 \cdot r_1 - \left(\mu_1 \frac{\partial r_1}{\partial y}\right)}{r_1^2} + \frac{0 \cdot r_2 - \left(\mu_2 \frac{\partial r_2}{\partial y}\right)}{r_2^2} \\
 &= n^2 y + \frac{-\left(\mu_1 \frac{\partial r_1}{\partial y}\right)}{r_1^2} + \frac{-\left(\mu_2 \frac{\partial r_2}{\partial y}\right)}{r_2^2}.
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

Para resolver $\frac{\partial r_1}{\partial y}$ e $\frac{\partial r_2}{\partial y}$ utilize as equações (4.8) e (4.9):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial r_1}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left([(x + \mu_2)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{1}{2}} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot [(x + \mu_2)^2 + y^2 + z^2]^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y \\
 &= \frac{y}{[(x + \mu_2)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}} \\
 &= \frac{y}{r_1}
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

e

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial r_2}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left([(x - \mu_1)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{1}{2}} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot [(x - \mu_1)^2 + y^2 + z^2]^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y \\
 &= \frac{y}{[(x - \mu_1)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}} \\
 &= \frac{y}{r_2}.
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

Substitua as equações (4.28) e (4.27) na equação (4.26), para obter

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U}{\partial y} &= n^2 y + \frac{-\left(\mu_1 \frac{y}{r_1}\right)}{r_1^2} + \frac{-\left(\mu_2 \frac{y}{r_2}\right)}{r_2^2} \\
 &= n^2 y + -\left(\mu_1 \frac{y}{r_1^3}\right) - \left(\mu_2 \frac{y}{r_2^3}\right) \\
 &= n^2 y - \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] y.
 \end{aligned}$$

Finalmente, em z tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial z} &= 0 + 0 + \frac{0 \cdot r_1 - \left(\mu_1 \frac{\partial r_1}{\partial z} \right)}{r_1^2} + \frac{0 \cdot r_2 - \left(\mu_2 \frac{\partial r_2}{\partial z} \right)}{r_2^2} \\ &= \frac{- \left(\mu_1 \frac{\partial r_1}{\partial z} \right)}{r_1^2} + \frac{- \left(\mu_2 \frac{\partial r_2}{\partial z} \right)}{r_2^2}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Para resolver $\frac{\partial r_1}{\partial z}$ e $\frac{\partial r_2}{\partial z}$ utilize as equações (4.8) e (4.9):

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_1}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left([(x + \mu_2)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{1}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot [(x + \mu_2)^2 + y^2 + z^2]^{-\frac{1}{2}} \cdot 2z \\ &= \frac{z}{[(x + \mu_2)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{z}{r_1} \end{aligned} \quad (4.30)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_2}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left([(x - \mu_1)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{1}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot [(x - \mu_1)^2 + y^2 + z^2]^{-\frac{1}{2}} \cdot 2z \\ &= \frac{z}{[(x - \mu_1)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{z}{r_2}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Substitua as equações (4.31) e (4.30) na equação (4.29), para obter

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial z} &= \frac{-\left(\mu_1 \frac{z}{r_1}\right)}{r_1^2} + \frac{-\left(\mu_2 \frac{z}{r_2}\right)}{r_2^2} \\ &= -\left(\mu_1 \frac{z}{r_1^3}\right) - \left(\mu_2 \frac{z}{r_2^3}\right) \\ &= -\left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3}\right] z.\end{aligned}$$

Com isso, tem-se que as equações (4.19), (4.20) e (4.21) podem ser escritas em função de ∇U , da seguinte forma:

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (4.32)$$

$$\ddot{y} - 2n\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad (4.33)$$

$$\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (4.34)$$

4.2 INTEGRAL DE JACOBI

Na história do Problema de 3 Corpos Restrito diversos matemáticos e físicos contribuíram para seu desenvolvimento, sendo um deles Carl Gustav Jacobi, que estudou o problema no século XIX.

A sua contribuição mais significativa foi encontrar a única integral de movimento no problema de 3 de corpos circular restrito, agora amplamente conhecida como Integral de Jacobi ou Constante de Jacobi. A complexidade do problema reside, em parte, do fato de que o potencial energético da partícula P ser variável, pois depende das massas em movimento m_1 e m_2 . Essa variabilidade dificulta a identificação de outras integrais de movimento, destacando ainda mais a importância da contribuição de Jacobi. Nesta seção, será explorado o processo para obter a Integral de Jacobi e as suas consequências para

o problema. Primeiro multiplique as equações (4.32), (4.33) e (4.34) respectivamente por $\dot{x}$, $\dot{y}$ e $\dot{z}$ para obter:

$$\ddot{x}\dot{x} - 2n\dot{y}\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial x}\dot{x},$$

$$\ddot{y}\dot{y} - 2n\dot{x}\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y},$$

$$\ddot{z}\dot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}\dot{z},$$

Agora somando essas três novas equações, tem-se, pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned}\ddot{x}\dot{x} - 2n\dot{y}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y} - 2n\dot{x}\dot{y} + \ddot{z}\dot{z} &= \frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial U}{\partial z}\dot{z} \\ \ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y} + \ddot{z}\dot{z} &= \frac{dU}{dt}.\end{aligned}$$

Esta equação pode ser integrada em relação ao tempo, obtendo:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 2U - C_j, \quad (4.35)$$

onde C_j é a constante de integração, que por sua vez é a Constante de Jacobi, ou Integral de Jacobi. Na equação (4.35) a parte esquerda é a soma do quadrado da velocidade da partícula P no sistema sinódico, ou seja, é o próprio quadrado da velocidade v . Portanto podemos escrever a equação da seguinte forma:

$$v^2 = 2U - C_j. \quad (4.36)$$

Portanto, tem-se que a Integral de Jacobi é dada por:

$$C_j = 2U - v^2.$$

Ou utilizando a equação (4.22):

$$C_j = n^2(x^2 + y^2) + 2 \cdot \left(\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \right) - v^2. \quad (4.37)$$

Com isso, a Integral de Jacobi é uma constante de movimento, e é importante notar que não é uma integral de energia, pois no problema abordado, nem a energia e nem o momento angular são conservados.

A utilidade da Constante de Jacobi no Problema, de modo geral, é nos pontos onde a velocidade da partícula é zero, ou seja, $v^2 = 0$. Com isso, utilizando a equação (4.37) temos superfícies definidas por

$$C_j = n^2(x^2 + y^2) + 2 \left(\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \right),$$

de modo que essas superfícies demarcam um limite onde a partícula pode se mover no sistema sinódico. Isso se dá pela equação (4.36), onde temos que $2U \geq C_j$, pois, caso contrário, v assumiria um valor complexo não real, o que não pode ocorrer.

Com isso a Integral de Jacobi exclui regiões em que a partícula pode não estar, ou seja, delimita onde ela pode se mover. No limite dessas superfícies, em suas bordas, é onde se encontram os pontos de equilíbrio da partícula, sendo onde ela se encontraria estacionária em relação ao centro de massa do sistema. Essas superfícies, conhecidas como Superfícies de Zero Velocidade ou Superfícies de Hill, não serão abordadas mais profundamente neste trabalho. Recomenda-se a leitura de [19] para mais detalhes. Por último, se limitarmos as Superfícies de Hill no plano xy obtêm-se as Curvas de Zero Velocidade, ou Curvas de Hill.

5 PONTOS DE EQUILÍBRIO DE LAGRANGE

Os estudos realizados sobre o Problema de 3 Corpos Circular Restrito neste trabalho possibilitam chegar a algumas conclusões. Foram derivadas as equações de movimento da partícula em relação ao centro de massa do sistema, que foi descoberto que são não-lineares. Além disso, a análise da Integral de Jacobi ressalta a forte influência das condições iniciais no comportamento do sistema, pois qualquer variação nelas altera significativamente a superfície de movimento possível da partícula. Ao combinar essas informações, que indicam equações não-lineares e uma alta sensibilidade às condições iniciais, podemos concluir que o sistema em questão exibe características caóticas. Consequentemente, uma solução analítica para o problema não é viável.

Como visto no capítulo anterior, não é viável fornecer uma solução analítica para o Problema de 3 Corpos Circular Restrito, portanto, é pertinente fazer uma outra abordagem sobre o problema e estudar quais são e onde estão localizados os pontos de equilíbrio do sistema. Pontos de equilíbrio, ou Pontos de Lagrange, são pontos onde a partícula P pode ser posicionada, com velocidade inicial apropriada, no espaço inercial de forma que ela permanecerá estacionária em relação ao centro de massa do sistema.

Esses pontos de equilíbrio são conhecidos como Pontos de Lagrange, pois foi o matemático Joseph-Louis Lagrange o primeiro a encontrar tais pontos. No século XVIII, Lagrange foi desafiado a investigar o problema de 3 corpos, e os resultados foram publicados em seu trabalho intitulado “Mécanique Analytique” de 1788. Nele Lagrange optou por uma abordagem diferente, procurando pontos no espaço em que as forças gravitacionais que atuavam sobre a partícula se equilibravam com as forças centrífugas, permitindo que sua posição

se mantivesse estável em relação aos corpos em órbita. Ainda, ele descreveu a quantidade de pontos, suas localizações e suas estabilidades [4].

A descoberta dos pontos de Lagrange revolucionou a compreensão dos sistemas gravitacionais. Os pontos de Lagrange se tornaram locais importantes para posicionar satélites artificiais e telescópios espaciais. Assim, o legado de Lagrange vive não apenas na matemática e na física teórica, mas também na exploração espacial.

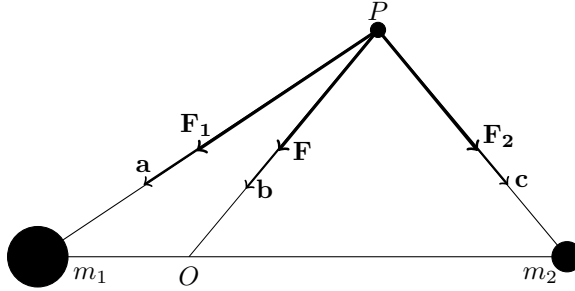
5.1 LOCALIZAÇÃO DOS PONTOS DE LAGRANGE

Para localizar os Pontos de Lagrange restrinja o movimento no plano xy e defina os vetores posição $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ que denotam respectivamente as posições de m_1 , centro de massa O e m_2 , porém com o referencial sendo a partícula P . Note que o módulo de $\mathbf{b}$ é constante, pois P está estacionário em relação ao centro de massa.

Denote por $\mathbf{F}_1$ a força que atua sobre m_1 e $\mathbf{F}_2$ a que atua sobre m_2 . Tem-se uma força centrífuga atuando sobre a partícula na direção $-\mathbf{b}$ e a força gravitacional é dada por

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2. \quad (5.1)$$

Note que $\mathbf{F}$ é colinear ao vetor b e isso só ocorre por conta da hipótese da partícula ser estacionária (veja a Figura 5.1.1).



Fonte: Maciel, 2024

Figura 5.1.1 – As forças que atuam sobre a partícula de teste P devido à atração gravitacional de duas massas m_1 e m_2 .

A posição do centro de massa O é dada por:

$$\mathbf{b} = \frac{m_1 \mathbf{a} + m_2 \mathbf{c}}{m_1 + m_2}.$$

Rearranjando, tem-se:

$$(m_1 + m_2)\mathbf{b} = m_1 \mathbf{a} + m_2 \mathbf{c}. \quad (5.2)$$

Tome o produto vetorial de $\mathbf{F}$ em ambos os lados da igualdade (5.2),

$$\mathbf{F} \times \mathbf{b}(m_1 + m_2) = \mathbf{F} \times (m_1 \mathbf{a} + m_2 \mathbf{c}).$$

Note que como $\mathbf{F}$ e $\mathbf{b}$ são linearmente dependentes, seu produto vetorial é $\mathbf{0}$ e usando o fato da definição de $\mathbf{F}$ em (5.1), tem-se

$$(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) \times (m_1 \mathbf{a} + m_2 \mathbf{c}) = \mathbf{0} \cdot (m_1 + m_2)$$

$$(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) \times m_1 \mathbf{a} + (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) \times m_2 \mathbf{c} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{F}_1 \times m_1 \mathbf{a} + \mathbf{F}_2 \times m_1 \mathbf{a} + \mathbf{F}_1 \times m_2 \mathbf{c} + \mathbf{F}_2 \times m_2 \mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

Novamente, veja que $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{a}$ são linearmente dependentes, portanto o produto vetorial entre eles será $\mathbf{0}$, e o mesmo vale para $\mathbf{F}_2$ e $\mathbf{c}$. Sendo

assim,

$$\begin{aligned}
 0 + \mathbf{F}_2 \times m_1 \mathbf{a} + \mathbf{F}_1 \times m_2 \mathbf{c} + 0 &= 0. \\
 \mathbf{F}_1 \times m_2 \mathbf{c} &= -\mathbf{F}_2 \times m_1 \mathbf{a} \\
 m_2(\mathbf{F}_1 \times \mathbf{c}) &= -m_1(\mathbf{F}_2 \times \mathbf{a}).
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Por fim, como o ângulo formado por $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{c}$ é o oposto do ângulo entre $\mathbf{F}_2$ e $\mathbf{a}$ é possível escrever a forma escalar da equação (5.3) como:

$$m_2 F_1 c = m_1 F_2 a. \tag{5.4}$$

Nesta configuração F_1 e F_2 denotam as normas das forças gravitacionais, portanto são dadas respectivamente por $F_1 = \mathcal{G}m_1 m_p / a^2$ e $F_2 = \mathcal{G}m_2 m_p / c^2$. Substitua essas definições na equação (5.4) para obter

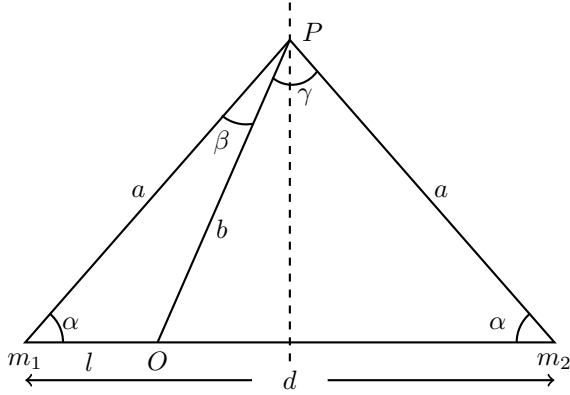
$$\begin{aligned}
 m_2 \frac{\mathcal{G}m_1}{a^2} c &= m_1 \frac{\mathcal{G}m_2}{c^2} a \\
 \frac{c}{a^2} &= \frac{a}{c^2} \\
 c^3 &= a^3 \\
 c &= a.
 \end{aligned}$$

Portanto, o triângulo formado por juntar a partícula com as duas massas é isósceles.

Para P ser estacionária, além de sua força gravitacional e centrífuga serem linearmente dependentes, tem-se que elas devem ser iguais em módulo. Portanto,

$$n^2 b = F_1 \cos(\beta) + F_2 \cos(\gamma), \tag{5.5}$$

onde $n^2 b$ é a força centrífuga e $F_1 \cos(\beta) + F_2 \cos(\gamma)$ a força gravitacional, e por sua vez, β é o ângulo entre $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{b}$, e γ o ângulo entre $\mathbf{F}_2$ e $\mathbf{b}$ (veja a Figura 5.1.2).



Fonte: Maciel, 2024

Figura 5.1.2 – O ponto P denota a localização de uma partícula de teste em um ponto de equilíbrio. A linha pontilhada denota o bisetor perpendicular à reta que conecta as massas m_1 e m_2 .

Utilize do fato que F_1 e F_2 são forças gravitacionais na equação (5.5), para obter:

$$\begin{aligned} n^2 b &= \mathcal{G} \frac{m_1}{a^2} \cos(\beta) + \mathcal{G} \frac{m_2}{a^2} \cos(\gamma) \\ &= \frac{\mathcal{G}}{a^2} (m_1 \cos(\beta) + m_2 \cos(\gamma)), \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} n^2 &= \frac{\mathcal{G}}{a^2 b} (m_1 \cos(\beta) + m_2 \cos(\gamma)) \\ &= \frac{\mathcal{G}}{a^2 b^2} (b m_1 \cos(\beta) + b m_2 \cos(\gamma)) \end{aligned} \tag{5.6}$$

Entretanto, analisando o triângulo formado ligando P , O e m_1 mostrado na Figura 5.1.2, tem-se pela lei dos cossenos que

$$b^2 = a^2 + l^2 - 2al \cos(\alpha), \tag{5.7}$$

e

$$l^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\beta), \quad (5.8)$$

em que l é a distância entre m_1 e O . Somando (5.7) com (5.8) tem-se:

$$\begin{aligned} b^2 + l^2 &= 2a^2 + l^2 + b^2 - 2al \cos(\alpha) - 2ab \cos(\beta) \\ 0 &= 2a^2 - 2al \cos(\alpha) - 2ab \cos(\beta), \end{aligned}$$

e, por sua vez,

$$\begin{aligned} 2a^2 &= 2ab \cos(\beta) + 2al \cos(\alpha) \\ 2a^2 &= 2a(b \cos(\beta) + l \cos(\alpha)) \\ a &= b \cos(\beta) + l \cos(\alpha). \end{aligned}$$

Finalmente,

$$b \cos(\beta) = a - l \cos(\alpha). \quad (5.9)$$

Agora, analisando o triângulo formado ligando P , O e m_2 , pela lei dos cossenos tem-se

$$(d - l)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma), \quad (5.10)$$

e

$$b^2 = a^2 + (d - l)^2 - 2a(d - l) \cos(\alpha), \quad (5.11)$$

onde d é a distância entre m_1 e m_2 . Somando (5.10) com (5.11) tem-se:

$$\begin{aligned} (d - l)^2 + b^2 &= 2a^2 + b^2 + (d - l)^2 - 2ab \cos(\gamma) - 2a(d - l) \cos(\alpha) \\ 0 &= 2a^2 - 2ab \cos(\gamma) - 2a(d - l) \cos(\alpha), \end{aligned}$$

e, por sua vez,

$$\begin{aligned} 2a^2 &= 2a(d - l) \cos(\alpha) + 2ab \cos(\gamma) \\ 2a^2 &= 2a((d - l) \cos(\alpha) + b \cos(\gamma)) \\ a &= (d - l) \cos(\alpha) + b \cos(\gamma) \\ b \cos(\gamma) &= a - (d - l) \cos(\alpha). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Analisando agora o triângulo retângulo, mostrado na Figura 5.1.2 formado por P , m_1 e a reta perpendicular à reta que liga m_1 e m_2 e que passa por P , tem-se que a base desse triângulo é $d/2$, portanto

$$\cos(\alpha) = \frac{\frac{d}{2}}{a} = \frac{d}{2a}. \quad (5.13)$$

Além disso, pela definição de centro de massa, é possível obter

$$l = \frac{m_2}{m_1 + m_2}d, \quad (5.14)$$

e

$$d - l = \frac{m_1}{m_1 + m_2}d. \quad (5.15)$$

Agora substitua (5.9) e (5.12) na equação (5.6) para obter

$$n^2 = \frac{\mathcal{G}}{a^2 b^2} [m_1(a - l \cos(\alpha)) + m_2(a - (d - l) \cos(\alpha))].$$

Faça a substituição utilizando a determinação de $\cos(\alpha)$ dada em (5.13), obtendo assim

$$n^2 = \frac{\mathcal{G}}{a^2 b^2} \left[m_1 \left(a - l \frac{d}{2a} \right) + m_2 \left(a - (d - l) \frac{d}{2a} \right) \right],$$

agora utilize as equações (5.14) e (5.15) para chegar em

$$\begin{aligned}
 n^2 &= \frac{\mathcal{G}}{a^2 b^2} \left[m_1 \left(a - \frac{m_2 d}{m_1 + m_2} \cdot \frac{d}{2a} \right) + m_2 \left(a - \frac{m_1 d}{m_1 + m_2} \cdot \frac{d}{2a} \right) \right] \\
 &= \frac{\mathcal{G}}{a^2 b^2} \left[m_1 \left(a - \frac{m_2 d^2}{2a(m_1 + m_2)} \right) + m_2 \left(a - \frac{m_1 d^2}{2a(m_1 + m_2)} \right) \right] \\
 &= \frac{\mathcal{G}}{a^2 b^2} \left[m_1 a - \frac{m_1 m_2 d^2}{2a(m_1 + m_2)} + m_2 a - \frac{m_1 m_2 d^2}{2a(m_1 + m_2)} \right] \\
 &= \frac{\mathcal{G}}{a^2 b^2} \left[m_1 a + m_2 a - \frac{2m_1 m_2 d^2}{2a(m_1 + m_2)} \right] \\
 &= \frac{\mathcal{G}}{a^3 b^2} \left[m_1 a^2 + m_2 a^2 - \frac{m_1 m_2 d^2}{(m_1 + m_2)} \right] \\
 &= \frac{\mathcal{G}}{a^3 b^2} \left[(m_1 + m_2) a^2 - \frac{m_1 m_2 d^2}{m_1 + m_2} \right] \\
 &= \frac{\mathcal{G}}{a^3 b^2} (m_1 + m_2) \left(a^2 - \frac{m_1 m_2 d^2}{(m_1 + m_2)^2} \right).
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

Porém, pela lei dos cossenos, aplicada no triângulo com vértices em P , O e m_1 , tem-se que

$$b^2 = a^2 - 2la \cos(\alpha) + l^2.$$

Utilizando (5.13), se tem

$$b^2 = a^2 - 2la \frac{d}{2a} + l^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - ld + l^2.$$

Substitua l nesta equação pela regra estabelecida na equação (5.14),

obtendo assim

$$\begin{aligned}
 b^2 &= a^2 - \left(\frac{m_2 d}{m_1 + m_2} \right) d + \left(\frac{m_2 d}{m_1 + m_2} \right)^2 \\
 &= a^2 - \frac{m_2 d^2}{m_1 + m_2} + \frac{m_2^2 d^2}{(m_1 + m_2)^2} \\
 &= a^2 + d^2 \left(\frac{m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) \\
 &= a^2 + d^2 \left(\frac{m_2^2 - m_2(m_1 + m_2)}{(m_1 + m_2)^2} \right) \\
 &= a^2 + d^2 \left(\frac{m_2^2 - m_2 m_1 - m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} \right) \\
 &= a^2 - \frac{m_1 m_2 d^2}{(m_1 + m_2)^2}.
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

Com isso, é possível substituir (5.17) em (5.16), para obter:

$$\begin{aligned}
 n^2 &= \frac{\mathcal{G}}{a^3 b^2} (m_1 + m_2) b^2 \\
 n^2 &= \frac{\mathcal{G}}{a^3} (m_1 + m_2).
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

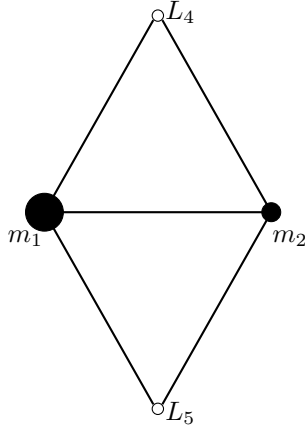
Entretanto, o plano está rotacionando com velocidade angular n . Pela 3ª Lei de Kepler, definida em (2.2.1), tem-se:

$$n^2 = \frac{\mathcal{G}}{d^3} (m_1 + m_2). \tag{5.19}$$

Como consequência, se comparar (5.18) e (5.19), tem-se que $a = d$. O que implica que todos os lados do triângulo que é formado ligando m_1 , P e m_2 são de igual medida, portanto trata-se de um triângulo equilátero.

Concluindo, o sistema tem um ponto de equilíbrio no ápice de um triângulo equilátero de base formada pela linha que une m_1 e m_2 . Esse resultado também implica na existência de outro ponto de equilíbrio localizado abaixo do ponto já encontrado, ou seja, um

ponto que está no ápice de outro triângulo equilátero com as mesmas medidas, esses pontos são os pontos de equilíbrio de Lagrange L_4 e L_5 (veja a Figura 5.1.3).



Fonte: Maciel, 2024

Figura 5.1.3 – Localização dos pontos triangulares de Lagrange L_4 e L_5 (denotados por pequenas circunferências abertas) para $\mu_2 = 0, 2$.

Note que uma das suposições feitas para encontrar L_4 e L_5 é que os pontos de equilíbrio não pertencem a mesma reta que liga m_1 e m_2 , portanto ainda podem existir pontos de Lagrange que caem sobre esta reta. Para encontrar esses outros pontos de equilíbrio, primeiro multiplique (4.8) por μ_1 , obtendo assim:

$$\mu_1 r_1^2 = \mu_1 (x + \mu_2)^2 + \mu_1 y^2. \quad (5.20)$$

E agora multiplique (4.9), por μ_2 , obtendo assim:

$$\mu_2 r_2^2 = \mu_2 (x - \mu_1)^2 + \mu_2 y^2. \quad (5.21)$$

Na sequência, some (5.20) e (5.21) e utilize do fato que $\mu_1 + \mu_2 = 1$, para chegar em:

$$\begin{aligned}
 \mu_1 r_1^2 + \mu_2 r_2^2 &= \mu_1(x + \mu_2)^2 + \mu_1 y^2 + \mu_2(x - \mu_1)^2 + \mu_2 y^2 \\
 &= \mu_1(x^2 + 2\mu_2 x + \mu_2^2) + \mu_2(x^2 - 2\mu_1 x + \mu_1^2) + y^2(\mu_1 + \mu_2) \\
 &= \mu_1 x^2 + 2\mu_1 \mu_2 x + \mu_1 \mu_2^2 + \mu_2 x^2 - 2\mu_1 \mu_2 x + \mu_1^2 \mu_2 + y^2 \cdot 1 \\
 &= x^2(\mu_1 + \mu_2) + \mu_1 \mu_2^2 + \mu_1^2 \mu_2 + y^2 \\
 &= x^2 \cdot 1 + \mu_1 \mu_2(\mu_1 + \mu_2) + y^2 \\
 &= x^2 + \mu_1 \mu_2 \cdot 1 + y^2 \\
 &= x^2 + \mu_1 \mu_2 + y^2
 \end{aligned}$$

e, portanto,

$$x^2 + y^2 = \mu_1 r_1^2 + \mu_2 r_2^2 - \mu_1 \mu_2. \quad (5.22)$$

Agora utilize a função U , definida em (4.22), a equação (5.22) e o fato que $n = 1$, como visto no Capítulo anterior, para obter

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{n^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \\
 &= \frac{1}{2}(\mu_1 r_1^2 + \mu_2 r_2^2 - \mu_1 \mu_2) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \\
 &= \mu_1 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{r_1^2}{2} \right) + \mu_2 \left(\frac{1}{r_2} + \frac{r_2^2}{2} \right) - \frac{1}{2} \mu_1 \mu_2.
 \end{aligned} \quad (5.23)$$

É vantajoso escrever U desta forma pois se perde a dependência de x e y da função, o que torna as derivadas parciais de mais simples obtenção e também tem-se que r_1 e r_2 são sempre quantidades positivas, diferentemente de x e y .

Agora, outra suposição é que a aceleração e a velocidade da partícula são nulas, pois por hipótese ela é estacionária, ou seja, $\ddot{x} = \dot{x} = \ddot{y} = \dot{y} = 0$. Com este fato, substitua as acelerações e as velocidades nas equações (4.32) e (4.33), obtendo assim

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0 - 2n \cdot 0 = 0,$$

e

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 0 - 2n \cdot 0 = 0.$$

Portanto, tem-se que as derivadas parciais de $U(r_1, r_2)$ são, pela regra da cadeia,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial r_1} \frac{\partial r_1}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial r_2} \frac{\partial r_2}{\partial x} = 0, \quad (5.24)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial r_1} \frac{\partial r_1}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial r_2} \frac{\partial r_2}{\partial y} = 0. \quad (5.25)$$

Utilize (5.23) para calcular a derivada parcial de $U(r_1, r_2)$ em r_1 , para obter:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial r_1} &= \mu_1 \left(\frac{0 \cdot r_1 - 1 \cdot 1}{r_1^2} + \frac{2r_1}{2} \right) + 0 + 0 \\ &= \mu_1 \left(-\frac{1}{r_1^2} + r_1 \right). \end{aligned} \quad (5.26)$$

Agora, novamente utilizando (5.23), calcule a derivada parcial de $U(r_1, r_2)$ em relação à r_2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial r_2} &= 0 + \mu_2 \left(\frac{0 \cdot r_2 - 1 \cdot 1}{r_2^2} + \frac{2r_2}{2} \right) + 0 \\ &= \mu_2 \left(-\frac{1}{r_2^2} + r_2 \right). \end{aligned} \quad (5.27)$$

Por fim, utilizando (5.24), (5.26), (5.27) e as derivadas parciais $\frac{\partial r_1}{\partial x}$ e $\frac{\partial r_2}{\partial x}$, calculadas anteriormente respectivamente em (4.24) e (4.25), para chegar em:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \mu_1 \left(-\frac{1}{r_1^2} + r_1 \right) \frac{x + \mu_2}{r_1} + \mu_2 \left(-\frac{1}{r_2^2} + r_2 + 1 \right) \frac{x - \mu_1}{r_2} = 0. \quad (5.28)$$

Com isso, para encontrar $\frac{\partial U}{\partial y}$ basta utilizar (5.25), (5.26), (5.27) e as derivadas parciais $\frac{\partial r_1}{\partial y}$ e $\frac{\partial r_y}{\partial x}$, calculadas anteriormente respectivamente em (4.1) e (4.26), para chegar em:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \mu_1 \left(-\frac{1}{r_1^2} + r_1 + 1 \right) \frac{y}{r_1} + \mu_2 \left(-\frac{1}{r_2^2} + r_2 + 1 \right) \frac{y}{r_2} = 0. \quad (5.29)$$

Analisando as equações (5.28) e (5.29), tem-se que uma das soluções se dá quando

$$-\frac{1}{r_1^2} + r_1 = -\frac{1}{r_2^2} + r_2 = 0,$$

ou seja,

$$r_1 = \frac{1}{r_1^2} \Rightarrow r_1^3 = 1 \Rightarrow r_1 = 1,$$

e

$$r_2 = \frac{1}{r_2^2} \Rightarrow r_2^3 = 1 \Rightarrow r_2 = 1.$$

Portanto, tem-se que $r_1 = r_2 = 1$, utilizando este fato nas equações (4.8) e (4.9), tem-se

$$\begin{aligned} (x + \mu_2)^2 + y^2 &= 1, \\ (x - \mu_1)^2 + y^2 &= 1. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Subtraia a segunda equação da primeira e utilize o fato que $\mu_1 + \mu_2 = 1$

para conseguir uma solução para x , sendo assim

$$\begin{aligned}
 (x + \mu_2)^2 + y^2 - (x - \mu_1)^2 - y^2 &= 1 - 1 \\
 x^2 + 2x\mu_2 + \mu_2^2 - x^2 + 2x\mu_1 - \mu_1^2 &= 0 \\
 2x(\mu_1 + \mu_2) - \mu_1^2 + \mu_2^2 &= 0 \\
 2x \cdot 1 &= \mu_1^2 - \mu_2^2 \\
 2x &= (1 - \mu_2)^2 - \mu_2^2 \\
 2x &= 1^2 - 2\mu_2 + \mu_2^2 - \mu_2^2 \\
 2x &= 1 - 2\mu_2 \\
 x &= \frac{1}{2} - \mu_2.
 \end{aligned} \tag{5.31}$$

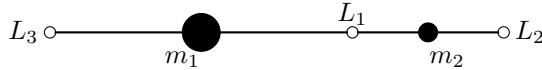
Utilize essa determinação de x em (5.30) para achar y :

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{1}{2} - \mu_2 + \mu_2\right)^2 + y^2 &= 1 \\
 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 &= 1 \\
 \frac{1}{4} + y^2 &= 1 \\
 y^2 &= 1 - \frac{1}{4} \\
 y^2 &= \frac{4-1}{4} \\
 y^2 &= \frac{3}{4} \\
 y &= \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

Com isso, sendo $r_1 = r_2 = 1$, tem-se que os pontos definidos pelas equações (5.31) e (5.32) formam um triângulo equilátero com as massas μ_1 e μ_2 , que são os pontos L_4 e L_5 encontrados anteriormente, quando y assume o valor positivo tem-se L_4 que é o ápice do triângulo de “cima” e quando y assume o valor negativo tem-se o ponto L_5

que é o ápice do triângulo de “baixo”, que são denotados com essa numeração por convenção e são conhecidos como Pontos Triangulares de Lagrange.

Agora, para de fato encontrar os outros pontos, podemos ver que dada a equação (5.29) fica claro que $y = 0$ é uma solução para (5.25), implicando que existem pontos de equilíbrio que caem sobre o eixo x , onde devem satisfazer a equação (5.24). Para isso tem-se três possibilidades, o ponto está entre as massas μ_1 e μ_2 , o ponto está à esquerda de μ_1 ou o ponto está à direita de μ_2 , como mostra a Figura 5.1.4. O ponto que se encontra entre as duas massas é chamado, por convenção, de L_1 . Portanto, é possível encontrar uma localização aproximada para L_1 buscando os parâmetros para L_1 e encontrando uma solução para (5.28).



Fonte: Maciel, 2024

Figura 5.1.4 – Localização dos pontos colineares de Lagrange L_1 , L_2 e L_3 (denotados por pequenas circunferências abertas) para $\mu_2 = 0, 2$.

Como o objetivo é achar a posição de L_1 , suponha que a partícula P esteja em L_1 . Tem-se que $y = 0$ e

$$r_1 + r_2 = 1, \quad (5.33)$$

e por sua vez, utilizando a equação (4.8), é possível estabelecer que

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (x + \mu_2)^2 + 0^2 \Rightarrow r_1^2 = (x + \mu_2)^2 \\ \Rightarrow r_1 &= |x + \mu_2| \Rightarrow r_1 = x + \mu_2, \end{aligned} \quad (5.34)$$

e também, utilizando agora (5.34) e os fatos de que $r_1 + r_2 = 1$ e

$\mu_1 + \mu_2 = 1$, tem-se

$$\begin{aligned} x + \mu_2 + r_2 = 1 &\Rightarrow x + 1 - \mu_1 + r_2 = 1 \\ &\Rightarrow r_2 = 1 - 1 - x + \mu_1 \Rightarrow r_2 = -x + \mu_1. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Note que em (5.34) foi escolhido o valor positivo do módulo, porém poderia ser escolhido o valor negativo, o que mudaria neste caso é que o valor de r_2 seria o oposto do apresentado, pois em L_1 tem-se que r_1 e r_2 possuem sentidos opostos. É importante manter a mesma orientação para os demais pontos analisados, portanto tem-se que na Figura 5.1.4 para esquerda será o sentido positivo e para direita o sentido negativo.

Agora derive em x as equações (5.34) e (5.35), para obter:

$$\frac{\partial r_1}{\partial x} = 1 - 0 = 1, \quad (5.36)$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial x} = 0 - 1 = -1. \quad (5.37)$$

Substitua os valores de (5.33), (5.34), (5.35), (5.36) e (5.37), na equação (5.28), da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mu_1 \left(-\frac{1}{(r_2 - 1)^2} + 1 - r_2 \right) \frac{r_1}{r_1} - \mu_2 \left(-\frac{1}{r_2^2} + r_2 \right) \frac{r_2}{r_2} &= 0 \\ \Rightarrow \mu_1 \left(-\frac{1}{(r_2 - 1)^2} + 1 - r_2 \right) - \mu_2 \left(-\frac{1}{r_2^2} + r_2 \right) &= 0. \end{aligned}$$

Reorganize a equação acima de modo que:

$$\begin{aligned} \mu_2 \left(-\frac{1}{r_2^2} + r_2 \right) &= \mu_1 \left(-\frac{1}{(r_2 - 1)^2} + 1 - r_2 \right) \\ \Rightarrow \mu_2 \left(\frac{-1 + r_2^3}{r_2^2} \right) &= \mu_1 \left(\frac{-1 + (1 - r_2)^2 - r_2(1 - r_2)^2}{(1 - r_2)^2} \right), \end{aligned}$$

e assim

$$\begin{aligned}
 \frac{\mu_2}{\mu_1} &= \frac{\frac{-1+1-2r_2+r_2^2-r_2+2r_2^2-r_2^3}{1-2r_2+r_2^2}}{\frac{-1+r_2^3}{r_2^2}} \\
 &= \left(\frac{-3r_2+3r_2^2-r_2^3}{(1-r_2)^2} \right) \cdot \left(\frac{r_2^2}{(r_2-1)(r_2^2+r_2+1)} \right) \\
 &= \frac{-3r_2^3+3r_2^4-r_2^5}{-(1+r_2+r_2^2)(1-r_2)^3} \\
 &= \frac{-3r_2^3(1-r_2+r_2^2/3)}{-(1+r_2+r_2^2)(1-r_2)^3} \\
 \Rightarrow \frac{\mu_2}{3\mu_1} &= r_2^3 \frac{(1-r_2+r_2^2/3)}{(1+r_2+r_2^2)(1-r_2)^3}.
 \end{aligned} \tag{5.38}$$

Agora defina α como:

$$\alpha = \left(\frac{\mu_2}{3\mu_1} \right)^{\frac{1}{3}}. \tag{5.39}$$

De tal modo, isso é possível reescrever (5.38) de forma que

$$\alpha = \left(r_2^3 \frac{(1-r_2+r_2^2/3)}{(1+r_2+r_2^2)(1-r_2)^3} \right)^{\frac{1}{3}}. \tag{5.40}$$

Utilize o Teorema de Taylor, dado em (2.5.1), com $n = 4$ e $c = 0$ na equação (5.40). Como é um cálculo muito trabalhoso utilize a ferramenta computacional WolframAlpha¹ para chegar em:

$$\alpha = r_2 + \frac{1}{3}r_2^2 + \frac{1}{3}r_2^3 + \frac{53}{81}r_2^4 + \mathcal{O}(r_2^5) \tag{5.41}$$

Utilize o Teorema de Lagrange-Bürmann, dado em (2.5.2), para inverter a série (5.41) e expressar r_2 como função de α . Reescrevendo

¹ <https://www.wolframalpha.com/widgets/view.jsp?id=f9476968629e1163bd4a3ba839d60925>. Acesso em 03/06/2024

(5.41) de forma que

$$\begin{aligned} -r_2 &= -\alpha + \frac{1}{3}r_2^2 + \frac{1}{3}r_2^3 + \frac{53}{81}r_2^4 + \mathcal{O}(r_2^5) \\ r_2 &= \alpha - \frac{1}{3}r_2^2 - \frac{1}{3}r_2^3 - \frac{53}{81}r_2^4 - \mathcal{O}(r_2^5) \\ r_2 &= \alpha - \frac{1}{3} \left(r_2^2 + r_2^3 + \frac{53}{27}r_2^4 + \mathcal{O}(r_2^5) \right), \end{aligned}$$

onde no Teorema de Lagrange-Bürmann, $\zeta = r_2$, $z = \alpha$, $e = -\frac{1}{3} < 1$ e $\phi(r_2) = r_2^2 + r_2^3 + \frac{53}{27}r_2^4 + \mathcal{O}(r_2^5)$, o que implica que r_2 pode ser dado da seguinte forma:

$$r_2 = \alpha + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1/3)^j}{j!} \frac{d^{j-1}}{d\alpha^{j-1}} [\phi(\alpha)]^j.$$

E é possível escrever uma aproximação para r_2 sendo :

$$r_2 = \alpha + \sum_{j=1}^3 \frac{(-1/3)^j}{j!} \frac{d^{j-1}}{d\alpha^{j-1}} [\phi(\alpha)]^j + \sum_{j=4}^{\infty} \frac{(-1/3)^j}{j!} \frac{d^{j-1}}{d\alpha^{j-1}} [\phi(\alpha)]^j.$$

Note que $[\phi(\alpha)]^j$ tem ordem $2j$ e portanto $\frac{d^{j-1}}{d\alpha^{j-1}} [\phi(\alpha)]^j$ tem ordem $j+1$. Como $j \geq 4$, tem-se que o último somatório é de ordem 5. Portanto

$$\begin{aligned} r_2 = & \alpha + \frac{(-1/3)^1 \phi(\alpha)}{1!} + \frac{(-1/3)^2}{2!} \cdot \frac{d[\phi(\alpha)]^2}{d\alpha} + \frac{(-1/3)^3}{3!} \cdot \frac{d^2[\phi(\alpha)]^3}{d\alpha^2} \\ & + \mathcal{O}(\alpha^5). \end{aligned} \tag{5.42}$$

Para dar continuidade ao desenvolvimento desta aproximação é necessário fazer alguns cálculos complementares, sendo assim, calcule

$[\phi(\alpha)]^2$:

$$\begin{aligned}
 [\phi(\alpha)]^2 &= \left(\alpha^2 + \alpha^3 + \frac{53}{27}\alpha^4 + \mathcal{O}(\alpha^5) \right)^2 \\
 &= \alpha^4 + \alpha^5 + \frac{53}{27}\alpha^6 + \mathcal{O}(\alpha^7) + \alpha^5 + \alpha^6 + \frac{53}{27}\alpha^7 + \mathcal{O}(\alpha^8) \\
 &\quad + \frac{53}{27} \left(\alpha^6 + \alpha^7 + \frac{53}{27}\alpha^8 + \mathcal{O}(\alpha^9) \right) + \mathcal{O}(\alpha^{10}) \\
 &= \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^5 + \mathcal{O}(\alpha^6) \\
 &= \alpha^4 + 2\alpha^5 + \mathcal{O}(\alpha^6).
 \end{aligned}$$

Diretamente tem-se

$$\frac{d[\phi(\alpha)]^2}{d\alpha} = 4\alpha^3 + 10\alpha^4 + \mathcal{O}(\alpha^5). \quad (5.43)$$

Calcule $[\phi(\alpha)]^3$, obtendo:

$$\begin{aligned}
 [\phi(\alpha)]^3 &= [\phi(\alpha)]^2 \cdot \phi(\alpha) \\
 &= (\alpha^4 + 2\alpha^5 + \mathcal{O}(\alpha^6)) \left(\alpha^2 + \alpha^3 + \frac{53}{27}\alpha^4 + \mathcal{O}(\alpha^5) \right) \\
 &= \alpha^6 + \alpha^7 + \frac{53}{27}\alpha^8 + 2\alpha^7 + 2\alpha^8 + \frac{106}{27}\alpha^9 + \mathcal{O}(\alpha^8) \\
 &= \alpha^6 + \mathcal{O}(\alpha^7).
 \end{aligned}$$

Imediatamente tem-se

$$\begin{aligned}
 \frac{d[\phi(\alpha)]^3}{d\alpha} &= 6\alpha^5 + \mathcal{O}(\alpha^6), \\
 \frac{d^2[\phi(\alpha)]^3}{d\alpha^2} &= 30\alpha^4 + \mathcal{O}(\alpha^5). \quad (5.44)
 \end{aligned}$$

Com isso, agora é possível desenvolver a equação (5.42) utilizando os

valores encontrados em (5.43) e (5.44):

$$\begin{aligned}
 r_2 &= \alpha + \frac{(-1/3)^1}{1!} \left(\alpha^2 + \alpha^3 + \frac{53}{27}\alpha^4 + \mathcal{O}(\alpha^5) \right) \\
 &+ \frac{(-1/3)^2}{2!} \cdot (4\alpha^3 + 10\alpha^4 + \mathcal{O}(\alpha^5)) \\
 &+ \frac{(-1/3)^3}{3!} \cdot (30\alpha^4 + \mathcal{O}(\alpha^5)) + \mathcal{O}(\alpha^5) \\
 &= \alpha + \frac{(-1/3)}{1} \left(\alpha^2 + \alpha^3 + \frac{53}{27}\alpha^4 + \right) + \frac{(1/9)}{2} \cdot (4\alpha^3 + 10\alpha^4) \\
 &+ \frac{(-1/27)^3}{6} \cdot (30\alpha^4) + \mathcal{O}(\alpha^5) \\
 &= \alpha - \frac{1}{3} \left(\alpha^2 + \alpha^3 + \frac{53}{27}\alpha^4 + \right) + \frac{1}{18} \cdot (4\alpha^3 + 10\alpha^4) \\
 &- \frac{1}{162} \cdot (30\alpha^4) + \mathcal{O}(\alpha^5) \\
 &= \alpha - \frac{1}{3}\alpha^2 - \frac{1}{3}\alpha^3 - \frac{53}{81}\alpha^4 + \frac{2}{9}\alpha^3 + \frac{5}{9}\alpha^4 - \frac{5}{27}\alpha^4 + \mathcal{O}(\alpha^5) \\
 &= \alpha - \frac{1}{3}\alpha^2 + \left(-\frac{1}{3} + \frac{2}{9} \right) \alpha^3 + \left(-\frac{53}{81} + \frac{5}{9} - \frac{5}{27} \right) \alpha^4 + \mathcal{O}(\alpha^5) \\
 &= \alpha - \frac{1}{3}\alpha^2 + \left(\frac{-3+2}{9} \right) \alpha^3 + \left(\frac{-53+45-15}{81} \right) \alpha^4 + \mathcal{O}(\alpha^5) \\
 &= \alpha - \frac{1}{3}\alpha^2 - \frac{1}{9}\alpha^3 - \frac{23}{81}\alpha^4 + \mathcal{O}(\alpha^5).
 \end{aligned}$$

Com isso, utilizando o fato de que $r_1 = 1 - r_2$ na hipótese de L_1 , tem-se que as posições r_1 e r_2 , respectivamente das massas μ_1 e μ_2 , são dadas por:

$$\begin{aligned}
 r_1 &= 1 - \alpha + \frac{1}{3}\alpha^2 + \frac{1}{9}\alpha^3 + \frac{23}{81}\alpha^4 + \mathcal{O}(\alpha^5), \\
 r_2 &= \alpha - \frac{1}{3}\alpha^2 - \frac{1}{9}\alpha^3 - \frac{23}{81}\alpha^4 + \mathcal{O}(\alpha^5).
 \end{aligned}$$

Como L_1 é colinear às duas massas e está entre elas, com qualquer uma das duas equações acima, é possível determinar onde está localizado L_1 .

Agora o objetivo é encontrar uma aproximação de onde o ponto que está localizado à direita de m_2 , o qual é denotado por convenção como L_2 (veja a Figura 5.1.4). Portanto, suponha que P está em L_2 , isso implica que $y = 0$ e

$$r_1 - r_2 = 1, \quad (5.45)$$

e por sua vez, utilizando a equação (4.8), é possível chegar que

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (x + \mu_2)^2 + 0^2 \Rightarrow r_1^2 = (x + \mu_2)^2 \\ \Rightarrow r_1 &= |x + \mu_2| \Rightarrow r_1 = x + \mu_2 \end{aligned} \quad (5.46)$$

e também, utilizando agora (5.46) e os fatos de que $r_1 - r_2 = 1$ e $\mu_1 + \mu_2 = 1$, tem-se

$$\begin{aligned} x + \mu_2 - r_2 &= 1 \Rightarrow x + 1 - \mu_1 - r_2 = 1 \Rightarrow -r_2 = 1 - 1 - x + \mu_1 \\ \Rightarrow -r_2 &= -x + \mu_1 \Rightarrow r_2 = x - \mu_1. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Agora derive em x as equações (5.46) e (5.47), para obter:

$$\frac{\partial r_1}{\partial x} = 1 + 0 = 1, \quad (5.48)$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial x} = 1 - 0 = 1. \quad (5.49)$$

Na sequência, substitua os valores (5.45), (5.46), (5.47), (5.48) e (5.49) na equação (5.28), da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mu_1 \left(-\frac{1}{(r_2 + 1)^2} + 1 + r_2 \right) \frac{r_1}{r_1} + \mu_2 \left(-\frac{1}{r_2^2} + r_2 \right) \frac{r_2}{r_2} &= 0 \\ \Rightarrow \mu_1 \left(-\frac{1}{(r_2 + 1)^2} + 1 + r_2 \right) + \mu_2 \left(-\frac{1}{r_2^2} + r_2 \right) &= 0 \end{aligned}$$

Reorganize a equação acima de modo que:

$$\begin{aligned}
 \mu_2 \left(-\frac{1}{r_2^2} + r_2 \right) &= -\mu_1 \left(-\frac{1}{(r_2 + 1)^2} + 1 + r_2 \right) \\
 -\frac{\mu_2}{\mu_1} &= \frac{\frac{-1 + (1 + r_2)^3}{(1 + r_2)}}{\frac{-1 + r_2^3}{r_2^2}} \\
 &= \frac{-1 + (1 + r_2)^3}{(1 + r_2)^2} \cdot \frac{r_2^2}{-1 + r_2^3} \\
 &= \frac{(-1 + 1 + 3r_2 + 3r_2^2 + r_2^3)r_2^2}{(1 + r_2)^2(-1 + r_2^3)} \\
 &= \frac{(3 + 3r_2 + r_2^2)r_2^3}{(1 + r_2)^2((-1 + r_2^3))} \\
 \frac{\mu_2}{3\mu_1} &= r_2^3 \frac{(1 + r_2 + r_2^2/3)}{(1 + r_2)^2(1 - r_2^3)}.
 \end{aligned} \tag{5.50}$$

Utilize a definição de α dada em (5.39), para escrever (5.50) como

$$\alpha = \left(r_2^3 \frac{(1 + r_2 + r_2^2/3)}{(1 + r_2)^2(1 - r_2^3)} \right)^{\frac{1}{3}},$$

portanto basta utilizar novamente a ferramenta do WolframAlpha para aproximar pelo Teorema de Taylor, obtendo:

$$\alpha = r_2 - \frac{1}{3}r_2^2 + \frac{1}{3}r_2^3 + \frac{1}{81}r_2^4 + \mathcal{O}(r_2^5).$$

Utilizando novamente o Teorema de Lagrange-Bürmann, escreva r_2 em função de α :

$$r_2 = \alpha + \frac{1}{3}r_2^2 - \frac{1}{3}r_2^3 - \frac{1}{81}r_2^4 + \mathcal{O}(r_2^5),$$

onde no Teorema de Lagrange-Bürmann, $\zeta = r_2$, $z = \alpha$, $e = \frac{1}{3} < 1$ e $\phi(r_2) = r_2^2 - r_2^3 - \frac{r_2^4}{27} + \mathcal{O}(r_2)^5$, o que implica que r_2 dado da seguinte forma:

$$r_2 = \alpha + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(1/3)^j}{j!} \frac{d^{j-1}}{d\alpha^{j-1}} [\phi(\alpha)]^j.$$

E é possível escrever uma aproximação para r_2 :

$$\begin{aligned}
 r_2 &= \alpha + \sum_{j=1}^3 \frac{(1/3)^j}{j!} \frac{d^{j-1}}{d\alpha^{j-1}} [\phi(\alpha)]^j + \sum_{j=4}^{\infty} \frac{(1/3)^j}{j!} \frac{d^{j-1}}{d\alpha^{j-1}} [\phi(\alpha)]^j \\
 &= \alpha + \frac{(1/3)^1}{1!} \phi(\alpha) + \frac{(1/3)^2}{2!} \cdot \frac{d[\phi(\alpha)]^2}{d\alpha} + \frac{(1/3)^3}{3!} \cdot \frac{d^2[\phi(\alpha)]^3}{d\alpha^2} \\
 &\quad + \sum_{j=4}^{\infty} \frac{(1/3)^j}{j!} \frac{d^{j-1}}{d\alpha^{j-1}} [\phi(\alpha)]^j,
 \end{aligned} \tag{5.51}$$

para continuar o desenvolvimento desta aproximação é necessário fazer alguns cálculos complementares, sendo assim, calcule $[\phi(\alpha)]^2$:

$$\begin{aligned}
 [\phi(\alpha)]^2 &= \left(\alpha^2 - \alpha^3 - \frac{1}{27} \alpha^4 + \mathcal{O}(\alpha^5) \right)^2 \\
 &= \alpha^4 - \alpha^5 - \frac{1}{27} \alpha^6 + \mathcal{O}(\alpha^7) - \alpha^5 + \alpha^6 \\
 &\quad + \frac{1}{27} \alpha^7 - \mathcal{O}(\alpha^8) - \frac{1}{27} \alpha^6 + \frac{1}{27} \alpha^7 + \frac{1}{27^2} \alpha^8 - \frac{1}{27} \mathcal{O}(\alpha^8) + \mathcal{O}(\alpha^7) \\
 &\quad - \mathcal{O}(\alpha^8) - \frac{1}{27} \mathcal{O}(\alpha^9) + \mathcal{O}(\alpha^{10}) \\
 &= \alpha^4 - \alpha^5 - \frac{1}{27} \alpha^6 - \alpha^5 + \alpha^6 + \frac{1}{27} (2\alpha^7 - \alpha^6 + \alpha^8) + \mathcal{O}(\alpha^6) \\
 &= \alpha^4 - \alpha^5 - \alpha^5 + \mathcal{O}(\alpha^6) \\
 &= \alpha^4 - 2\alpha^5 + \mathcal{O}(\alpha^6).
 \end{aligned}$$

Diretamente tem-se

$$\frac{d[\phi(\alpha)]^2}{d\alpha} = 4\alpha^3 - 10\alpha^4 + \mathcal{O}(\alpha^5). \tag{5.52}$$

Calcule agora $[\phi(\alpha)]^3$:

$$\begin{aligned}
 [\phi(\alpha)]^3 &= [\phi(\alpha)]^2 \cdot \phi(\alpha) \\
 &= (\alpha^4 - 2\alpha^5 + \mathcal{O}(\alpha^6)) \cdot \left(\alpha^2 - \alpha^3 - \frac{1}{27}\alpha^4 + \mathcal{O}(\alpha^5) \right) \\
 &= \alpha^6 - \alpha^7 - \frac{1}{27}\alpha^8 - 2\alpha^7 + 2\alpha^8 + \frac{2}{27}\alpha^9 + \mathcal{O}(\alpha^8) \\
 &= \alpha^6 + \mathcal{O}(\alpha^7).
 \end{aligned}$$

Diretamente tem-se

$$\begin{aligned}
 \frac{d[\phi(r\alpha)]^3}{d\alpha} &= 6\alpha^5 + \mathcal{O}(\alpha^6), \\
 \frac{d^2[\phi(r\alpha)]^3}{d\alpha^2} &= 30\alpha^4 + \mathcal{O}(\alpha^5).
 \end{aligned} \tag{5.53}$$

Com isso, agora é possível desenvolver a equação (5.51) utilizando os

valores encontrados em (5.52) e (5.53), portanto, tem-se

$$\begin{aligned}
 r_2 &= \alpha + \frac{(1/3)^1}{1!} \left(\alpha^2 - \alpha^3 - \frac{1}{27} \alpha^4 + \mathcal{O}(\alpha^5) \right) \\
 &+ \frac{(1/3)^2}{2!} (4\alpha^3 - 10\alpha^4 + \mathcal{O}(\alpha^5)) \\
 &+ \frac{(1/3)^3}{3!} (30\alpha^4 + \mathcal{O}(\alpha^5)) + \mathcal{O}(\alpha^5) \\
 &= \alpha + \frac{1/3}{1} \left(\alpha^2 - \alpha^3 - \frac{1}{27} \alpha^4 \right) + \frac{1/9}{2} (4\alpha^3 - 10\alpha^4) \\
 &+ \frac{1/27}{6} (30\alpha^4) + \mathcal{O}(\alpha^5) \\
 &= \alpha + \frac{1}{3} \left(\alpha^2 - \alpha^3 - \frac{1}{27} \alpha^4 \right) + \frac{1}{18} (4\alpha^3 - 10\alpha^4) \\
 &+ \frac{1}{162} (30\alpha^4) + \mathcal{O}(\alpha^5) \\
 &= \alpha + \frac{1}{3} \alpha^2 - \frac{1}{3} \alpha^3 - \frac{1}{81} \alpha^4 + \frac{2}{9} \alpha^3 - \frac{5}{9} \alpha^4 + \frac{5}{27} \alpha^4 + \mathcal{O}(\alpha^5) \\
 &= \alpha + \frac{1}{3} \alpha^2 \left(-\frac{1}{3} + \frac{2}{9} \right) \alpha^3 + \left(-\frac{1}{81} - \frac{5}{9} + \frac{5}{27} \right) \alpha^4 + \mathcal{O}(\alpha^5) \\
 &= \alpha + \frac{1}{3} \alpha^2 \left(\frac{-3+2}{9} \right) \alpha^3 + \left(\frac{-1-45+15}{81} \right) \alpha^4 + \mathcal{O}(\alpha^5) \\
 &= \alpha + \frac{1}{3} \alpha^2 - \frac{1}{9} \alpha^3 - \frac{31}{81} \alpha^4 + \mathcal{O}(\alpha^5).
 \end{aligned}$$

Com isso, utilizando o fato de que $r_1 = 1 + r_2$ na hipótese de L_2 , tem-se que as posições de r_1 e r_2 , respectivamente das massas μ_1 e μ_2 são dadas por:

$$\begin{aligned}
 r_1 &= 1 + \alpha + \frac{1}{3} \alpha^2 - \frac{1}{9} \alpha^3 - \frac{31}{81} \alpha^4 + \mathcal{O}(\alpha^5), \\
 r_2 &= \alpha + \frac{1}{3} \alpha^2 - \frac{1}{9} \alpha^3 - \frac{31}{81} \alpha^4 + \mathcal{O}(\alpha^5).
 \end{aligned}$$

Portanto, se chega numa conclusão que aquela do estudo de L_1 , isto é, como L_2 é colinear as duas massas, e está à direita de μ_2 , com

qualquer uma das duas equações acima, é possível determinar onde está localizado L_2 .

Por fim, basta encontrar o ponto de equilíbrio que está à esquerda de μ_1 , denotado por L_3 , para isso utilize a mesma estratégia de L_1 e L_2 , suponha que P em L_3 e chegue numa aproximação para r_1 e r_2 . Supondo que a partícula em esteja L_3 , tem-se que $y = 0$ e

$$r_2 - r_1 = 1, \quad (5.54)$$

e por sua vez, utilizando a equação (4.8), é possível determinar que

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (x + \mu_2)^2 + 0^2 \Rightarrow r_1^2 = (x + \mu_2)^2 \\ \Rightarrow r_1 &= |x + \mu_2| \Rightarrow r_1 = -(x + \mu_2) \Rightarrow r_1 = -x - \mu_2, \end{aligned} \quad (5.55)$$

e também, utilizando agora (5.55) e os fatos de que $r_2 - r_1 = 1$ e $\mu_1 + \mu_2 = 1$, tem-se

$$\begin{aligned} r_2 - (-x - \mu_2) &= 1 \Rightarrow r_2 + x + \mu_2 = 1 \Rightarrow r_2 + x + 1 - \mu_1 = 1 \\ \Rightarrow r_2 &= 1 - 1 - x + \mu_1 \Rightarrow r_2 = -x + \mu_1. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Derive com relação à variável x as equações (5.55) e (5.56), para obter:

$$\frac{\partial r_1}{\partial x} = -1 - 0 = -1, \quad (5.57)$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial x} = -1 + 0 = -1. \quad (5.58)$$

Agora substitua os valores (5.54), (5.55), (5.56), (5.57) e (5.58) na equação (5.28), da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &\mu_1 \left(-\frac{1}{r_1^2} + r_1 \right) \frac{-r_1}{r_1} + \mu_2 \left(-\frac{1}{(1+r_1)^2} + r_1 + 1 \right) \frac{-r_2}{r_2} = 0 \\ \Rightarrow &\mu_1 \left(-\frac{1}{r_1^2} + r_1 \right) (-1) + \mu_2 \left(-\frac{1}{(1+r_1)^2} + r_1 + 1 \right) (-1) = 0 \\ \Rightarrow &\mu_1 \left(-\frac{1}{r_1^2} + r_1 \right) + \mu_2 \left(-\frac{1}{(1+r_1)^2} + r_1 + 1 \right) = 0. \end{aligned}$$

Reorganize a equação acima de modo que:

$$\begin{aligned}
 \mu_2 \left(-\frac{1}{(1+r_1)^2} + 1 + r_1 \right) &= -\mu_1 \left(-\frac{1}{r_1^2} + r_1 \right) \\
 &= \frac{-\left(\frac{-1}{r_1^2} + r_1\right)}{\frac{-1}{(1+r_1)^2} + 1 + r_1} \\
 &= \frac{\frac{1}{r_1^2} - r_1}{\frac{-1}{(1+r_1)^2} + 1 + r_1} \\
 &= \frac{\frac{1-r_1^3}{r_1^2}}{\frac{-1+(1+r_1)^2+r_1(1+r_1)^2}{(1+r_1)^2}} \\
 &= \frac{1-r_1^3}{r_1^2} \cdot \frac{(1+r_1)^2}{-1+(1+r_1)^2+r_1(1+r_1)^2} \\
 &= \frac{(1-r_1^3)(1+r_1)^2}{3r_1^3+3r_1^4+r_1^5} \\
 &= \frac{(1-r_1^3)(1+r_1)^2}{r_1^3(3+3r_1+r_1^2)}.
 \end{aligned} \tag{5.59}$$

Defina β , tal que

$$r_1 = \beta + 1, \tag{5.60}$$

com isso é possível reescrever (5.59) de forma que

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{(1-(1+\beta)^3)(2+\beta)^2}{(1+\beta)^3(6+3\beta+(1+\beta)^2)}. \tag{5.61}$$

Utilize novamente a ferramenta do WolframAlpha para achar uma aproximação de (5.61) pelo Teorema de Taylor, obtendo:

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = -\frac{12}{7}\beta + \frac{144}{49}\beta^2 - \frac{1567}{343}\beta^3 + \mathcal{O}(\beta^4).$$

Agora isole β para poder usar o Teorema de Lagrange-Bürmann e

obtenha:

$$\begin{aligned} -\frac{12}{7}\beta &= -\frac{144}{49}\beta^2 + \frac{1567}{343}\beta^3 + \mathcal{O}(\beta^4) + \frac{\mu_2}{\mu_1} \\ \beta &= -\frac{7}{12} \cdot \frac{\mu_2}{\mu_1} - \frac{7}{12} \left(-\frac{144}{49}\beta^2 + \frac{1567}{343}\beta^3 + \mathcal{O}(\beta^4) \right) \\ \beta &= \frac{-7}{12} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right) + \frac{7}{12} \left(\frac{144}{49}\beta^2 - \frac{1567}{343}\beta^3 + \mathcal{O}(\beta^4) \right), \end{aligned}$$

pelo Teorema de Lagrange-Bürmann $\zeta = \beta$, $z = -\frac{7}{12} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)$, $e = \frac{7}{12} < 1$ e $\phi(\beta) = \frac{144}{49}\beta^2 - \frac{1567}{343}\beta^3 + \mathcal{O}(\beta^4)$, o que implica que β pode ser dado da seguinte forma:

$$\beta = z + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(7/12)^j}{j!} \frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}} [\phi(z)]^j.$$

E é possível escrever uma aproximação para β sendo:

$$\beta = z + \sum_{j=1}^3 \frac{(7/12)^j}{j!} \frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}} [\phi(z)]^j + \sum_{j=4}^{\infty} \frac{(7/12)^j}{j!} \frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}} [\phi(z)]^j$$

Note que $[\phi(\alpha)]^j$ tem ordem $2j$ e portanto $\frac{d^{j-1}}{d\alpha^{j-1}} [\phi(\alpha)]^j$ tem ordem $j+1$. Como $j \geq 4$, tem-se que o último somatório é de ordem 5. Portanto

$$\begin{aligned} \beta &= z + \frac{(7/12)^1}{1!} \phi(z) + \frac{(7/12)^2}{2!} \cdot \frac{d[\phi(z)]^2}{dz} + \frac{(7/12)^3}{3!} \cdot \frac{d^2[\phi(z)]^3}{dz^2} \\ &\quad + \mathcal{O}(z^5), \end{aligned} \tag{5.62}$$

Do mesmo modo que foi feito para os outros dois pontos, calcule $[\phi(z)]^2$:

$$\begin{aligned} [\phi(z)]^2 &= \left(\frac{144}{49}z^2 - \frac{1567}{343}z^3 + \mathcal{O}(z^4) \right)^2 \\ &= \frac{20736}{2401}z^4 - 2 \left(\frac{225648}{16807} \right) z^5 + \mathcal{O}(z^6). \end{aligned}$$

Diretamente tem-se

$$\frac{d[\phi(z)]^2}{dz} = 4 \cdot \frac{20736}{2401} z^3 + \mathcal{O}(z^4). \quad (5.63)$$

Calcule agora $[\phi(z)]^3$:

$$\begin{aligned} [\phi(z)]^3 &= [\phi(z)]^2 \cdot \phi(z) \\ &= \left(\frac{20736}{2401} z^4 - 2 \left(\frac{225648}{16807} \right) z^5 \right) \left(\frac{144}{49} z^2 - \frac{1567}{343} z^3 + \mathcal{O}(z^5) \right) \\ &= \frac{2985984}{117649} z^6 + \mathcal{O}(z^7) \end{aligned}$$

Diretamente tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d[\phi(z)]^3}{dz} &= 6 \cdot \frac{2985984}{117649} z^5 + \mathcal{O}(z^6), \\ \frac{d^2[\phi(z)]^3}{dz^2} &= 30 \cdot \frac{2985984}{117649} z^4 + \mathcal{O}(z^5) = \mathcal{O}(z^4). \end{aligned} \quad (5.64)$$

Com isso, agora é possível desenvolver a equação (5.62) utilizando os valores encontrados em (5.63) e (5.64), portanto, tem-se

$$\begin{aligned} \beta &= z + \frac{(7/12)^1}{1!} \left(\frac{144}{49} z^2 - \frac{1567}{343} z^3 + \mathcal{O}(z^4) \right) \\ &\quad + \frac{(7/12)^2}{2!} \left(4 \cdot \frac{20736}{2401} z^3 + \mathcal{O}(z^4) \right) + \frac{(7/12)^3}{3!} (\mathcal{O}(z^5)) + \mathcal{O}(z^5) \\ &= z + \frac{(7/12)}{1} \left(\frac{144}{49} z^2 - \frac{1567}{343} z^3 \right) + \frac{(49/144)}{2} \left(4 \cdot \frac{20736}{2401} z^3 \right) \\ &\quad + \mathcal{O}(z^5) \\ &= z + \frac{7}{12} \left(\frac{144}{49} z^2 - \frac{1567}{343} z^3 \right) + \frac{49}{288} \left(4 \cdot \frac{20736}{2401} z^3 \right) + \mathcal{O}(z^5) \\ &= z + \frac{12}{7} z^2 - \frac{1567}{588} z^3 + \frac{288}{49} z^3 + \mathcal{O}(z^4) \\ &= z + \frac{12}{7} z^2 + \left(-\frac{1567}{588} + \frac{288}{49} \right) z^3 + \mathcal{O}(z^4) \\ &= z + \frac{12}{7} z^2 + \left(\frac{-1567 + 3456}{588} \right) z^3 + \mathcal{O}(z^4) \\ &= z + \frac{12}{7} z^2 + \frac{1889}{588} z^3 + \mathcal{O}(z^4). \end{aligned}$$

Faça a substituição dos termos z , lembrando que $z = -\frac{7}{12} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)$, obtendo:

$$\begin{aligned}
 \beta &= -\frac{7}{12} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right) + \frac{12}{7} + \left[-\frac{7}{12} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right) \right]^2 + \frac{1889}{588} + \left[-\frac{7}{12} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right) \right]^3 \\
 &\quad + \mathcal{O} \left(\left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^4 \right) \\
 &= -\frac{7}{12} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right) + \frac{12}{7} \cdot \frac{47}{144} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^2 + \frac{1889}{588} \left(-\frac{343}{1728} \right) \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^3 \\
 &\quad + \mathcal{O} \left(\left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^4 \right) \\
 &= -\frac{7}{12} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right) + \frac{7}{12} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^2 - \frac{13223}{20736} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^3 + \mathcal{O} \left(\left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^4 \right).
 \end{aligned} \tag{5.65}$$

Agora substitua a equação (5.65) de volta para r_1 , usando a definição (5.60), com isso

$$r_1 = 1 - \frac{7}{12} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right) + \frac{7}{12} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^2 - \frac{13223}{20736} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^3 + \mathcal{O} \left(\left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^4 \right).$$

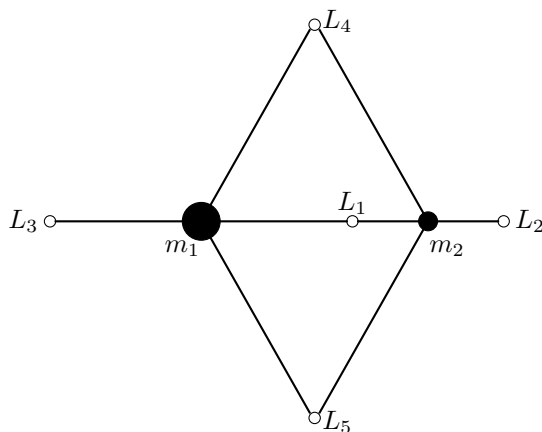
Por sua vez, utilizando o fato de que $r_2 - r_1 = 1$ na hipótese de L_3 tem-se que as posições r_1 e r_2 , respectivamente das massas μ_1 e μ_2 são dadas por:

$$\begin{aligned}
 r_1 &= 1 - \frac{7}{12} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right) + \frac{7}{12} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^2 - \frac{13223}{20736} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^3 + \mathcal{O} \left(\left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^4 \right), \\
 r_2 &= 2 - \frac{7}{12} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right) + \frac{7}{12} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^2 - \frac{13223}{20736} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^3 + \mathcal{O} \left(\left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^4 \right),
 \end{aligned}$$

Portanto, se chega na mesma conclusão que os outros dois pontos de equilíbrio, tem-se que L_3 é colinear às duas massas e está à

esquerda de μ_1 . Com qualquer uma das duas equações acima é possível determinar a localização de L_3 .

Concluindo, foram encontrados todos os cinco Pontos de Equilíbrio de Lagrange, sendo eles: L_1 , L_2 e L_3 denotados de pontos colineares, e L_4 e L_5 chamados de pontos triângulares. Esta configuração está apresentada na Figura 5.1.5



Fonte: Maciel, 2024

Figura 5.1.5 – Localização dos cinco pontos de Lagrange (denotados por pequenas circunferências abertas) para $\mu_2 = 0,2$.
Fonte: Elaborada pelo autor.

E também veja o modelo tri-dimensional para $\mu_2 = 0,2$, na Figura 5.1.6. Note que os pontos colineares caem sobre os pontos de sela da superfície.

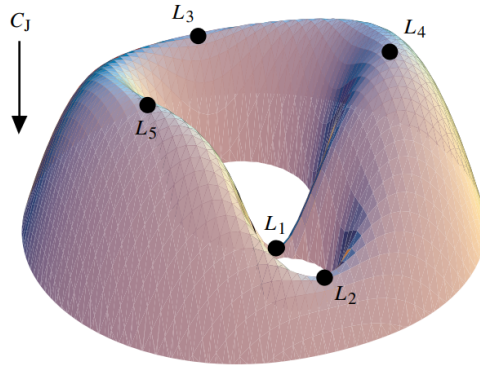


Figura 5.1.6 – Superfície tridimensional (formada pela Integral de Jacobi) e a localização dos pontos de Lagrange para $\mu_2 = 0, 2$.

Fonte: Murray, 1999.

5.2 ESTABILIDADE DOS PONTOS DE LAGRANGE

Determinar a existência de pontos de equilíbrio em um sistema dinâmico não é suficiente, é necessário também avaliar a estabilidade desses pontos. Quando um sistema é sujeito a uma força derivada de um potencial, a soma da energia cinética e potencial permanece constante [13]. Nesse contexto, o movimento estável ocorre em posições de equilíbrio que representam mínimos de potencial. Objetos posicionados nessas áreas permanecerão próximos, mesmo diante de pequenos deslocamentos. Já em posições instáveis o objeto tende a fugir dessa área.

Defina a localização de um ponto de Lagrange sendo (x_0, y_0) e considere uma partícula de teste colocada próxima à (x_0, y_0) , isto é, com posição $(x_0 + X, y_0 + Y)$, sendo (X, Y) um vetor “pequeno”. Então, observe que $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial X}$, que $\ddot{x}_0 = \dot{x}_0 = \ddot{y}_0 = \dot{y}_0 = 0$, da

equação (4.32) tem-se

$$\ddot{X} - 2n(\dot{Y} + \dot{y}_0) = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (5.66)$$

e substitua y na equação (4.33)

$$\ddot{Y} - 2n(\dot{x}_0 + \dot{X}) = \frac{\partial U}{\partial y}. \quad (5.67)$$

Utilize o Teorema de Taylor em duas variáveis para escrever $\frac{\partial U}{\partial x}$ e $\frac{\partial U}{\partial y}$ em torno do ponto (x_0, y_0) , isto é, vale

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_0 + x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_0 + y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_0 + \mathcal{O}^2(x, y), \quad (5.68)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_0 + x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_0 + y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_0 + \mathcal{O}^2(x, y), \quad (5.69)$$

onde $\mathcal{O}^2(x, y)$ é um polinômio de grau maior ou igual à 2 nas variáveis x e y e o índice 0 denota o valor das derivadas parciais em (x_0, y_0) . Para encontrar uma aproximação das equações (5.66) e (5.67), despreze o termo de ordem superior, pois a análise será feita apenas na vizinhança de (x_0, y_0) , obviamente essa suposição não funcionaria se o deslocamento do ponto de equilíbrio fosse muito grande, obtendo assim as equações:

$$\ddot{X} - 2n\dot{Y} \approx \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_0 + X \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) \right)_0 + Y \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) \right)_0$$

$$\ddot{X} - 2n\dot{Y} \approx X \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_0 + Y \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right)_0,$$

$$\ddot{Y} - 2n\dot{X} \approx \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_0 + X \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) \right)_0 + Y \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) \right)_0$$

$$\ddot{X} - 2n\dot{Y} \approx X \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right)_0 + Y \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)_0,$$

onde o índice 0 denota os valores das derivadas parciais no ponto de equilíbrio, e lembre que $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_0 = 0$, pois os pontos de equilíbrio satisfazem as equações (5.68) e (5.69). Por fim, utilizando o fato de que $n = 1$, tem-se duas EDO's lineares da forma:

$$\ddot{X} - 2\dot{Y} = XU_{xx} + YU_{xy}, \quad (5.70)$$

$$\ddot{Y} + 2\dot{X} = XU_{xy} + YU_{yy},$$

em que tem-se as constantes

$$U_{xx} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_0, \quad U_{xy} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right)_0, \quad U_y = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)_0.$$

É possível escrever um sistema de equações para $\ddot{X}$, $\dot{X}$, $\ddot{Y}$ e $\dot{Y}$, da seguinte forma:

$$\begin{cases} 0 \cdot X + 0 \cdot Y + 1 \cdot \dot{X} + 0 \cdot \dot{Y} &= \dot{X} \\ 0 \cdot X + 0 \cdot Y + 0 \cdot \dot{X} + 1 \cdot \dot{Y} &= \dot{Y} \\ U_{xx} \cdot X + U_{xy} \cdot Y + 0 \cdot \dot{X} + 2 \cdot \dot{Y} &= \ddot{X} \\ U_{xx} \cdot X + U_{xy} \cdot Y - 2 \cdot \dot{X} + 0 \cdot \dot{Y} &= \ddot{Y} \end{cases}$$

O que pode ser escrito na forma matricial, sendo assim:

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ U_{xx} & U_{xy} & 0 & 2 \\ U_{xy} & U_{yy} & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix}, \quad (5.71)$$

ou seja, basta resolver o sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Para isso, utilize o método apresentado em 2.4.4, com $n = 4$. Primeiro defina

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ U_{xx} & U_{xy} & 0 & 2 \\ U_{xy} & U_{yy} & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

e calcule a equação característica de A que é dada por [13]:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ U_{xx} & U_{xy} & -\lambda & 2 \\ U_{xy} & U_{yy} & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (5.72)$$

Para o cálculo deste determinante utilize o Teorema de Laplace para uma matriz 4×4 , dado em [17], para isso faça duas novas matrizes F e M , sendo a primeira eliminando a linha e coluna que passam por $a_{11} = -\lambda$ e a segunda eliminando a linha e coluna que passam por $a_{13} = 1$. Portanto, tem-se:

$$F = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ U_{xx} & U_{xy} & -\lambda & 2 \\ U_{xy} & U_{yy} & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ U_{xy} & -\lambda & 2 \\ U_{yy} & -2 & -\lambda \end{bmatrix},$$

$$M = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ U_{xx} & U_{xy} & -\lambda & 2 \\ U_{xy} & U_{yy} & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda & 1 \\ U_{xx} & U_{xy} & 2 \\ U_{xy} & U_{yy} & -\lambda \end{bmatrix}.$$

Com isso, (5.72) fica da forma:

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda \cdot \det(F) + 1 \cdot \det(M) = 0.$$

Segue que

$$\begin{aligned} 0 &= -\lambda[-\lambda^3 + 0 - 2U_{xy} - (-\lambda U_{yy} + 4\lambda - 0)] \\ &\quad + [0 - 2\lambda U_{xy} + U_{xx}U_{yy} - (U_{xy}^2 + 0 + \lambda^2 U_{xx})] \\ &= -\lambda[-\lambda^3 - 2U_{xy} + \lambda U_{yy} - 4\lambda] - 2\lambda U_{xy} + U_{xx}U_{yy} + U_{xy}^2 - \lambda^2 U_{xx} \\ &= \lambda^4 + 2\lambda U_{xy} - \lambda^2 U_{yy} + 4\lambda^2 - 2\lambda U_{xy} + U_{xx}U_{yy} - U_{xy}^2 - \lambda^2 U_{xx} \\ &= \lambda^4 + \lambda^2(4 - U_{xx} - U_{yy}) + U_{xx}U_{yy} - U_{xy}^2. \end{aligned}$$

Portanto, tem-se que a equação característica é

$$\lambda^4 + \lambda^2(4 - U_{xx} - U_{yy}) + U_{xx}U_{yy} - U_{xy}^2 = 0. \quad (5.73)$$

Esta é uma equação biquadrada, portanto para resolvê-la tome $u = \lambda^2$, e substitua u em (5.73), de forma que

$$u^2 + u(4 - U_{xx} - U_{yy}) + U_{xx}U_{yy} - U_{xy}^2 = 0,$$

o que transforma a equação característica numa equação do 2º grau. Substituindo na fórmula quadrática, dada em [5], tem-se

$$u = \frac{U_{xx} + U_{yy} - 4 \pm [(4 - U_{xx} - U_{yy})^2 - 4(U_{xx}U_{yy} - U_{xy}^2)]^{\frac{1}{2}}}{2}$$

e, tem-se as duas soluções

$$u_1 = \frac{U_{xx} + U_{yy} - 4 + [(4 - U_{xx} - U_{yy})^2 - 4(U_{xx}U_{yy} - U_{xy}^2)]^{\frac{1}{2}}}{2}$$

e

$$u_2 = \frac{U_{xx} + U_{yy} - 4 - [(4 - U_{xx} - U_{yy})^2 - 4(U_{xx}U_{yy} - U_{xy}^2)]^{\frac{1}{2}}}{2}.$$

Use o fato de que $\lambda = \pm u^{\frac{1}{2}}$, para definir todos os autovalores da seguinte forma:

$$\lambda_{1,2} = \pm \left[\frac{1}{2}(U_{xx} + U_{yy} - 4) - \frac{1}{2} [(4 - U_{xx} - U_{yy})^2 - 4(U_{xx}U_{yy} - U_{xy}^2)]^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.74)$$

e

$$\lambda_{3,4} = \pm \left[\frac{1}{2}(U_{xx} + U_{yy} - 4) + \frac{1}{2} [(4 - U_{xx} - U_{yy})^2 - 4(U_{xx}U_{yy} - U_{xy}^2)]^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (5.75)$$

Com isso, tem-se que os autovetores de A são os que satisfazem (5.72), com $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ e λ_4 dados por (5.74) e (5.75). Agora defina a matriz B , tal que B é formado pelos autovetores (coluna) de A , sendo assim, a partir de (2.23) e (5.71) escreva:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} = B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 x} \\ c_2 e^{\lambda_2 x} \\ c_3 e^{\lambda_3 x} \\ c_4 e^{\lambda_4 x} \end{pmatrix}.$$

Para X isso pode ser escrito como:

$$X = \sum_{j=1}^4 \bar{\alpha}_j e^{\lambda_j t}, \quad (5.76)$$

onde $\bar{\alpha}_j$ são entradas constantes da matriz B .

A partir de (5.76), tem-se:

$$\dot{X} = \sum_{j=1}^4 \bar{\alpha}_j \lambda_j e^{\lambda_j t}, \quad (5.77)$$

e segue que

$$\ddot{X} = \sum_{j=1}^4 \bar{\alpha}_j \lambda_j^2 e^{\lambda_j t}. \quad (5.78)$$

De forma similar, Y pode ser escrito como:

$$Y = \sum_{j=1}^4 \bar{\beta}_j e^{\lambda_j t}, \quad (5.79)$$

onde $\bar{\beta}_j$ são entradas da matriz B e são funções de $\bar{\alpha}_j$, pois só podem haver quatro constantes na solução.

Diretamente de (5.79):

$$\dot{Y} = \sum_{j=1}^4 \bar{\beta}_j \lambda_j e^{\lambda_j t}, \quad (5.80)$$

e por sua vez

$$\ddot{Y} = \sum_{j=1}^4 \bar{\beta}_j \lambda_j^2 e^{\lambda_j t}.$$

Para encontrar a relação entre $\bar{\beta}_j$ e $\bar{\alpha}_j$ substitua as definições de $X, \ddot{X}, Y$ e $\dot{Y}$ dadas em (5.76), (5.78), (5.79) e (5.80) na equação (5.70), para obter

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^4 \bar{\alpha}_j \lambda_j^2 e^{\lambda_j t} - 2 \sum_{j=1}^4 \bar{\beta}_j \lambda_j e^{\lambda_j t} - U_{xx} \sum_{j=1}^4 \bar{\alpha}_j e^{\lambda_j t} - U_{xy} \sum_{j=1}^4 \bar{\beta}_j e^{\lambda_j t} &= 0 \\ \Rightarrow \sum_{j=1}^4 (\bar{\alpha}_j \lambda_j^2 e^{\lambda_j t} - 2 \bar{\beta}_j \lambda_j e^{\lambda_j t} - U_{xx} \bar{\alpha}_j e^{\lambda_j t} - U_{xy} \bar{\beta}_j e^{\lambda_j t}) &= 0 \\ \Rightarrow \sum_{j=1}^4 (\bar{\alpha}_j \lambda_j^2 - 2 \bar{\beta}_j \lambda_j - U_{xx} \bar{\alpha}_j - U_{xy} \bar{\beta}_j) e^{\lambda_j t} &= 0. \end{aligned} \tag{5.81}$$

Como o termo $e^{\lambda_j t}$ nunca será 0, então para satisfazer a igualdade basta exigir:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_j \lambda_j^2 - 2 \bar{\beta}_j \lambda_j - U_{xx} \bar{\alpha}_j - U_{xy} \bar{\beta}_j &= 0 \\ -\bar{\beta}_j (2 \lambda_j + U_{xy}) + \bar{\alpha}_j (\lambda_j^2 - U_{xx}) &= 0 \\ \bar{\beta}_j (2 \lambda_j + U_{xy}) - \bar{\alpha}_j (\lambda_j^2 - U_{xx}) &= 0 \end{aligned}$$

e portanto

$$\bar{\beta}_j = \bar{\alpha}_j \frac{\lambda_j^2 - U_{xx}}{2 \lambda_j + U_{xy}}.$$

Com isso, tem-se que a solução é dada pelas equações (5.76), (5.77), (5.79) e (5.80), portanto para definir a estabilidade dos pontos de equilíbrio basta analisar os autovalores de forma individual, para isso defina as quantidades:

$$\bar{A} = \frac{\mu_1}{(r_1^3)_0} + \frac{\mu_2}{(r_2^3)_0}, \tag{5.82}$$

$$\bar{B} = 3 \left[\frac{\mu_1}{(r_1^5)_0} + \frac{\mu_2}{(r_2^5)_0} \right] y_0^2, \quad (5.83)$$

$$\bar{C} = 3 \left[\mu_1 \frac{(x_0 + \mu_2)}{(r_1^5)_0} + \mu_2 \frac{(x_0 - \mu_1)}{(r_2^5)_0} \right] y_0, \quad (5.84)$$

$$\bar{D} = 3 \left[\mu_1 \frac{(x_0 + \mu_2)^2}{(r_1^5)_0} + \mu_2 \frac{(x_0 - \mu_1)^2}{(r_2^5)_0} \right], \quad (5.85)$$

onde $(r_1)_0$ e $(r_2)_0$ são o módulo dos vetores posição das massas em relação ao ponto de equilíbrio. Com essas quantidades é possível re-escrever U_{xx} , U_{xy} e U_{yy} , mas para isso, primeiro desenvolva essas derivadas parciais, lembrando que U_x é dada por (4.32):

$$U_{xx} = n^2 - \mu_1 \left[\frac{(r_1^3)_0 - (x_0 + \mu_2) \left(\frac{\partial r_1^3}{\partial x} \right)_0}{(r_1^6)_0} \right] \\ - \mu_2 \left[\frac{(r_2^3)_0 - (x_0 - \mu_1) \left(\frac{\partial r_2^3}{\partial x} \right)_0}{(r_2^6)_0} \right].$$

Note que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial r_1^3}{\partial x} \right)_0 &= \frac{\partial}{\partial x_0} \left[[(x_0 + \mu_2)^2 + y_0^2 + z_0^2]^{\frac{1}{2}} \right]^3 \\ &= \frac{\partial}{\partial x_0} [(x_0 + \mu_2)^2 + y_0^2 + z_0^2]^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{3}{2} [(x_0 + \mu_2)^2 + y_0^2 + z_0^2]^{\frac{1}{2}} (2x_0 + 2\mu_2) \\ &= \frac{3}{2} (r_1)_0 \cdot 2(x_0 + \mu_2) \\ &= 3(r_1)_0(x_0 + \mu_2), \end{aligned} \quad (5.86)$$

e

$$\left(\frac{\partial r_2^3}{\partial x} \right)_0 = 3(r_2)_0(x_0 - \mu_1). \quad (5.87)$$

Agora retorne para equação (5.85), substitua os valores encontrados em (5.86) e (5.87), de forma que:

$$\begin{aligned}
 U_{xx} &= n^2 - \mu_1 \left[\frac{(r_1^3)_0 - (x_0 + \mu_2) \cdot 3(r_1)_0(x_0 + \mu_2)}{(r_1^6)_0} \right] \\
 &\quad - \mu_2 \left[\frac{(r_2^3)_0 - (x_0 - \mu_1) \cdot 3(r_2)_0(x_0 - \mu_1)}{(r_2^6)_0} \right] \\
 &= n^2 - \mu_1 \left[\frac{(r_1^3)_0 - 3(r_1)_0(x_0 + \mu_2)^2}{(r_1^6)_0} \right] \\
 &\quad - \mu_2 \left[\frac{(r_2^3)_0 - 3(r_2)_0(x_0 - \mu_1)^2}{(r_2^6)_0} \right] \\
 &= n^2 - \mu_1 \left[\frac{(r_1^2)_0 - 3(x_0 + \mu_2)^2}{(r_1^5)_0} \right] \\
 &\quad - \mu_2 \left[\frac{(r_2^2)_0 - 3(x_0 - \mu_1)^2}{(r_2^5)_0} \right] \\
 &= n^2 - \mu_1 \frac{(r_1^2)_0}{(r_1^5)_0} - \mu_1 \frac{-3(x_0 + \mu_2)^2}{(r_1^5)_0} - \mu_2 \frac{(r_2^2)_0}{(r_2^5)_0} - \mu_2 \frac{-3(x_0 - \mu_1)^2}{(r_2^5)_0} \\
 &= n^2 - \frac{\mu_1}{(r_1^3)_0} - \frac{\mu_2}{(r_2^3)_0} + \mu_1 \frac{3(x_0 + \mu_2)^2}{(r_1^5)_0} + \mu_2 \frac{3(x_0 - \mu_1)^2}{(r_2^5)_0} \\
 &= n^2 - \left(\frac{\mu_1}{(r_1^3)_0} + \frac{\mu_2}{(r_2^3)_0} \right) + 3 \left(\mu_1 \frac{(x_0 + \mu_2)^2}{(r_1^5)_0} + \mu_2 \frac{(x_0 - \mu_1)^2}{(r_2^5)_0} \right).
 \end{aligned}$$

Utilize o fato de que $n = 1$ e substitua as definições de $\bar{A}$ e $\bar{D}$ dadas em (5.82) e (5.85), para chegar em

$$U_{xx} = 1 - \bar{A} + \bar{D}. \quad (5.88)$$

Agora para reescrever U_{xy} , utilize novamente (4.32) para chegar em

$$U_{xy} = 0 - \mu_1 \left[\frac{0 - (x_0 + \mu_2) \frac{\partial(r_1^3)_0}{\partial y_0}}{(r_1^6)_0} \right] - \mu_2 \left[\frac{0 - (x_0 - \mu_1) \frac{\partial(r_2^3)_0}{\partial y_0}}{(r_2^6)_0} \right], \quad (5.89)$$

novamente será preciso calcular a derivada parcial de $(r_1^3)_0$ e $(r_2^3)_0$, porém desta vez em função de y_0 . Sendo assim tem-se

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial r_1^3}{\partial y} \right)_0 &= \frac{\partial}{\partial y_0} \left[[(x_0 + \mu_2)^2 + y_0^2 + z_0^2]^{\frac{1}{2}} \right]^3 \\
 &= \frac{\partial}{\partial y_0} [(x_0 + \mu_2)^2 + y_0^2 + z_0^2]^{\frac{3}{2}} \\
 &= \frac{3}{2} [(x_0 + \mu_2)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{1}{2}} (2y_0) \\
 &= 3(r_1)_0 y_0,
 \end{aligned} \tag{5.90}$$

e

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial r_2^3}{\partial y} \right)_0 &= \frac{\partial}{\partial y_0} \left[[(x_0 - \mu_1)^2 + y_0^2 + z_0^2]^{\frac{1}{2}} \right]^3 \\
 &= \frac{\partial}{\partial y_0} [(x_0 - \mu_1)^2 + y_0^2 + z_0^2]^{\frac{3}{2}} \\
 &= \frac{3}{2} [(x_0 - \mu_1)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{1}{2}} (2y_0) \\
 &= 3(r_2)_0 y_0,
 \end{aligned} \tag{5.91}$$

Retornando para a equação (5.89) e substitua os valores encontrados em (5.90) e (5.91), de forma que:

$$\begin{aligned}
 U_{xy} &= -\mu_1 \left[\frac{-(x_0 + \mu_2)3(r_1)_0 y_0}{(r_1^6)_0} \right] - \mu_2 \left[\frac{-(x_0 - \mu_1)3(r_2)_0 y_0}{(r_2^6)_0} \right] \\
 &= 3y_0 \mu_1 \left[\frac{(x_0 + \mu_2)}{(r_1^5)_0} \right] + 3y_0 \mu_2 \left[\frac{(x_0 - \mu_1)}{(r_2^5)_0} \right] \\
 &= 3 \left[\mu_1 \frac{(x_0 + \mu_2)}{(r_1^5)_0} + \mu_2 \frac{(x_0 - \mu_1)}{(r_2^5)_0} \right] y_0,
 \end{aligned}$$

substitua pela definição de $\overline{C}$ dada em (5.84), para chegar em

$$U_{xy} = \overline{C}. \tag{5.92}$$

Por fim, para reescrever U_{yy} utilize novamente do fato que (4.33) para chegar em

$$U_{yy} = n^2 - \left[\left(\mu_1 \frac{\frac{\partial(r_1^3)_0}{\partial y_0}}{(r_1^6)_0} + \mu_2 \frac{\frac{\partial(r_2^3)_0}{\partial y_0}}{(r_2^6)_0} \right) y_0 + \left(\frac{\mu_1}{(r_1^3)_0} + \frac{\mu_2}{(r_2^3)_0} \right) \right].$$

Vários termos nessa expressão já foram calculados anteriormente, faça as substituições utilizando as equações (5.90) e (5.91), a definição (5.82) e do fato que $n = 1$, tendo assim

$$\begin{aligned} U_{yy} &= 1^2 - \left[\left(\mu_1 \frac{-3(r_1)_0 y_0}{(r_1^6)_0} + \mu_2 \frac{-3(r_2)_0 y_0}{(r_2^6)_0} \right) y_0 + \bar{A} \right] \\ &= 1^2 - \left[-3 \left(\frac{\mu_1}{(r_1^5)_0} + \frac{\mu_2}{(r_2^5)_0} \right) y_0^2 + \bar{A} \right] \\ &= 13 \left(\frac{\mu_1}{(r_1^5)_0} + \frac{\mu_2}{(r_2^5)_0} \right) y_0^2 - \bar{A}, \end{aligned}$$

por fim, utilize a (5.83), de modo que

$$U_{yy} = 1 - \bar{A} + \bar{B}. \quad (5.93)$$

Note que as quantidades (5.88), (5.92) e (5.93) são números reais, assim como X , Y , $\dot{X}$ e $\dot{Y}$ são valores reais, pois se tratam de posição e velocidade, mesmo assim os autovalores λ_j podem assumir valores complexos, ou seja possuem a forma:

$$\lambda_{1,2} = \pm(j_1 + ik_1), \quad \lambda_{3,4} = \pm(j_2 + ik_2),$$

onde j e k são números reais e $i = \sqrt{-1}$. Dada essa forma de representar os autovalores e o fato que os vetores posição e velocidade relativos ao ponto de equilíbrio, dados em (5.76), (5.77), (5.79) e (5.80), envolvem uma combinação linear de termos $e^{\lambda_j t}$, tem-se que isso implica que cada dupla de termos $e^{+(j+ik)t}$ terá um termo equivalente $e^{-(j+ik)t}$, pois $\lambda_1 = -\lambda_2$ e $\lambda_3 = -\lambda_4$.

Se $j = 0$, então as soluções encontradas para posição e velocidade serão dadas por termos em senos e cossenos, pois $e^{\pm ikt} = \cos(t) \pm \text{sen}(t)$, portanto a solução será oscilatória. Se j for um valor positivo, tem-se

$$e^{(j+ik)t} = e^{jt+ikt} = e^{jt} \cdot e^{ikt},$$

por sua vez o termo e^{jt} terá crescimento exponencial, então a solução é instável. Portanto o ponto de equilíbrio é estável se todos os autovalores forem números imaginários puros, caso contrário, o ponto de equilíbrio será instável. Agora basta analisar com as condições de cada ponto de equilíbrio.

5.2.1 ESTABILIDADE DOS PONTOS COLINEARES

Considere os pontos de Lagrange colineares L_1 , L_2 e L_3 , neste caso tem-se que $y_0 = 0$ e pelas determinações de (4.8) e (4.9) tem-se que $(r_1^2)_0 = (x_0 + \mu_2)^2$ e $(r_2^2)_0 = (x_0 - \mu_1)^2$. Diretamente do fato que $y_0 = 0$ e de (5.83) e (5.84), tem-se que

$$\overline{B} = 0$$

e

$$\overline{C} = 0.$$

Ainda é possível reescrever $\overline{D}$, dado em (5.85), substituindo os valores de $(r_1^2)_0$ e $(r_2^2)_0$, nos pontos colineares, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \overline{D} &= 3 \left[\mu_1 \frac{(r_1^2)_0}{(r_1^5)_0} + \mu_2 \frac{(r_2^2)_0}{(r_2^5)_0} \right] \\ &= 3 \left[\frac{\mu_1}{(r_1^3)_0} + \mu_2 \frac{\mu_2}{(r_2^3)_0} \right]. \end{aligned}$$

Utilizando a definição (5.82), tem-se

$$\overline{D} = 3\overline{A}.$$

Substitua as novas definições de $\overline{B}$, $\overline{C}$ e $\overline{D}$ em (5.88), (5.92) e (5.93), para obter:

$$U_{xx} = 1 - \overline{A} + 3\overline{A} = 1 + 2\overline{A},$$

$$U_{xy} = 0,$$

$$U_{yy} = 1 - \overline{A} + 0 = 1 - \overline{A}.$$

Com isso, tem-se que a equação característica, dada em (5.73), se torna:

$$\begin{aligned} \lambda^4 + \lambda^2(4 - 1 - 2\overline{A} - 1 + \overline{A}) + (1 + 2\overline{A})(1 - \overline{A}) - 0^2 &= 0 \\ \Rightarrow \lambda^4 + \lambda^2(2 - \overline{A}) + (1 + \overline{A} - 2\overline{A}^2) &= 0. \end{aligned} \quad (5.94)$$

Por propriedade de polinômios, dada em [5], o produto das raízes do polinômio deve ser igual ao termo constante do polinômio dividido pelo coeficiente líder, portanto

$$(\lambda_1 \lambda_2)(\lambda_3 \lambda_4) = 1 + \overline{A} - 2\overline{A}^2, \quad (5.95)$$

onde, pelas equações (5.74) e (5.75), $\lambda_1 = -\lambda_2$ e $\lambda_3 = -\lambda_4$.

Suponha que todas as raízes do polinômio (5.94) sejam imaginários puros, ou seja, que os pontos de equilíbrio colineares sejam estáveis. Portanto, as raízes têm forma ik . Deste modo:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= ik_1 & \lambda_2 &= -ik_1, \\ \lambda_1^2 &= -k_1^2 & \lambda_2^2 &= -k_1^2, \end{aligned}$$

e, portanto, $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 < 0$.

Analogamente, para λ_3 e λ_4 , tem-se $\lambda_3^2 = \lambda_4^2 < 0$. Isso implica que

$$(1 + \overline{A} - 2\overline{A}^2) > 0, \quad (5.96)$$

pois é dado a partir de uma multiplicação de dois valores negativos em (5.95). Reescreva $(1 + \overline{A} - 2\overline{A}^2)$ como $(1 - \overline{A})(1 + 2\overline{A})$, portanto a

desigualde (5.96) ocorre quando os dois termos são simultaneamente positivos ou negativos. Note que não existe intervalo tal que ambos os termos são negativos, então ambos precisam ser positivos, e isto ocorre quando

$$-\frac{1}{2} < \bar{A} < 1. \quad (5.97)$$

Porém, se analisar a definição de $\bar{A}$ dada em (5.82), os valores de $(r_1)_0$ e $(r_2)_0$ para os pontos colineares e o fato de que $\mu_1 = 1 - \mu_2$, tem-se que:

$$\bar{A} = \frac{1 - \mu_2}{|x_0 + \mu_2|^3} + \frac{\mu_2}{|x_0 - 1 + \mu_2|^3}.$$

Como $0 < \mu_2 < 1/2$, por definição, é possível definir os limites de μ_2 tendendo para 0 e para $1/2$, para analisar quais valores $\bar{A}$ pode assumir, sendo assim

$$\lim_{\mu_2 \rightarrow 0} \bar{A} = \frac{1}{|x_0|^3} \quad (5.98)$$

e

$$\lim_{\mu_2 \rightarrow 1/2} \bar{A} = \frac{1}{2|x_0 + \frac{1}{2}|^3} + \frac{1}{2|x_0 - \frac{1}{2}|^3}. \quad (5.99)$$

Note que tanto em (5.98) e (5.99), tem-se que $\bar{A} > 1$, se $|x_0| < 1$, pois $\bar{A}$ se dá por uma divisão de 1 por um número menor que 1. Porém, nos pontos colineares, $|x_0|$ é a distância do ponto de equilíbrio até o centro de massa. Como o centro de massa está entre as duas massas, L_1 vai estar mais perto do centro de massa do que m_1 ou m_2 . L_2 e L_3 também estarão situados no sistema definido pelas duas massas, sendo assim os pontos de equilíbrio têm uma distância até o centro de massa menor que 1, já que a distância entre m_1 e m_2 está normalizada em 1, portanto os pontos colineares de Lagrange sempre estão localizados em uma distância do centro de massa menor que 1, ou seja, $|x_0| < 1$. Com isso, tem-se que $\bar{A} > 1$, para qualquer μ_2 , o que causa contradição com (5.97), portanto a hipótese que os pontos colineares são estáveis é falsa. Conclui-se, assim, que os pontos de equilíbrio colineares L_1 , L_2 e L_3 são instáveis.

5.2.2 ESTABILIDADE DOS PONTOS TRIANGULARES

Considere os pontos triangulares de Lagrange L_4 e L_5 , neste tem-se que $(r_1)_0 = (r_2)_0 = 1$, $x_0 = \frac{1}{2} - \mu_2$ e $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, dados em (5.31) e (5.32). Para definir a estabilidade destes pontos é necessário estudar o comportamento dos autovalores, para isso calcule $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ e $\bar{D}$ dados em (5.82), (5.83), (5.84) e (5.85), sendo assim:

$$\bar{A} = \mu_1 + \mu_2 = 1, \quad (5.100)$$

$$\bar{B} = 3(\mu_1 + \mu_2) \left(\frac{\pm\sqrt{3}}{2} \right)^2 = 3(\mu_1 + \mu_2) \frac{3}{4} = \frac{9}{4}(\mu_1 + \mu_2) = \frac{9}{4}, \quad (5.101)$$

$$\begin{aligned} \bar{C} &= 3 \left[\mu_1 \left(\frac{1}{2} - \mu_2 + \mu_2 \right) + \mu_2 \left(\frac{1}{2} - \mu_1 - \mu_2 \right) \right] \left(\frac{\pm\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= \frac{\pm 3\sqrt{3}}{2} \left[\frac{1}{2} \mu_1 + \mu_2 \left(\frac{1}{2} - (\mu_1 + \mu_2) \right) \right] \\ &= \frac{\pm 3\sqrt{3}}{2} \left[\frac{1}{2} \mu_1 + \mu_2 \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \right] \\ &= \frac{\pm 3\sqrt{3}}{2} \left[\frac{1}{2} \mu_1 - \frac{1}{2} \mu_2 \right] \\ &= \frac{\pm 3\sqrt{3}}{4} [\mu_1 - \mu_2] \\ &= \frac{\pm 3\sqrt{3}}{4} [1 - \mu_2 - \mu_2] \\ &= \frac{\pm 3\sqrt{3}}{4} [1 - 2\mu_2], \end{aligned} \quad (5.102)$$

e

$$\begin{aligned}
\overline{D} &= 3 \left[\mu_1 \left(\frac{1}{2} - \mu_2 + \mu_2 \right)^2 + \mu_2 \left(\frac{1}{2} - \mu_1 - \mu_2 \right)^2 \right] \\
&= 3 \left[\mu_1 \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \mu_2 \left(\frac{1}{2} - (\mu_1 + \mu_2) \right)^2 \right] \\
&= 3 \left[\frac{1}{4} \mu_1 + \mu_2 \left(\frac{1}{2} - 1 \right)^2 \right] \\
&= 3 \left[\frac{1}{4} \mu_1 + \mu_2 \left(-\frac{1}{2} \right)^2 \right] \\
&= 3 \left[\frac{1}{4} \mu_1 + \frac{1}{4} \mu_2 \right] \\
&= \frac{3}{4} [\mu_1 + \mu_2] \\
&= \frac{3}{4}.
\end{aligned} \tag{5.103}$$

Com isso, basta calcular os valores de U_{xx} , U_{xy} e U_{yy} , dados em (5.88), (5.92) e (5.93), para isso utilize as definições calculadas em (5.100), (5.101), (5.102) e (5.103):

$$U_{xx} = 1 - 1 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4},$$

$$U_{xy} = \frac{\pm 3\sqrt{3}}{4} [1 - 2\mu_2]$$

e

$$U_{yy} = 1 - 1 + \frac{9}{4} = \frac{9}{4}.$$

Agora é possível definir os autovalores referentes aos pontos triangulares substituindo U_{xx} , U_{xy} e U_{yy} na equação (5.74), de tal forma:

$$\begin{aligned}
 \lambda_{1,2} &= \pm \left[\frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} + \frac{9}{4} - 4 \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \left[\left(4 - \frac{3}{4} - \frac{9}{4} \right)^2 - 4 \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{9}{4} - \left(\frac{\pm 3\sqrt{3}}{4} (1 - 2\mu_2) \right)^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &= \pm \left[\frac{1}{2} \left(\frac{12}{4} - 4 \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \left[\left(4 - \frac{12}{4} \right)^2 - 4 \left(\frac{27}{16} - \frac{3 \cdot 9}{16} (1 - 2\mu_2)^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &= \pm \left[\frac{1}{2} (3 - 4) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \left[(4 - 3)^2 - 4 \left(\frac{27}{16} - \frac{27}{16} (1 - 4\mu_2 + 4\mu_2^2) \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &= \pm \left[\frac{1}{2} (-1) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \left[1^2 - 4 \cdot \frac{27}{16} (1 - (1 - 4\mu_2 + 4\mu_2^2)) \right]^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &= \pm \left[\frac{1}{2} (-1) - \frac{1}{2} \left[1 - \frac{27}{4} (1 - 1 + 4\mu_2 - 4\mu_2^2) \right]^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &= \pm \left[\frac{1}{2} (-1) - \frac{1}{2} [1 - 27(\mu_2 - \mu_2^2)]^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{2} (-1) - \frac{1}{2} \sqrt{1 - 27(\mu_2 - \mu_2^2)}} \\
 &= \frac{\sqrt{-1 - \sqrt{1 - 27(\mu_2 - \mu_2^2)}}}{\sqrt{2}}.
 \end{aligned}$$

Analogamente, $\lambda_{3,4}$, dados por (5.75), tem forma:

$$\lambda_{3,4} = \frac{\sqrt{-1 + \sqrt{1 - 27(\mu_2 - \mu_2^2)}}}{\sqrt{2}}.$$

Note que todos os autovalores são imaginários puros, se e somente se,

$$1 - 27(\mu_2 - \mu_2^2) \geq 0 \quad \text{e} \quad 1 - 27(\mu_2 - \mu_2^2) < 1.$$

Tem-se que a primeira desigualdade implica a segunda, pois dado

$$1 - 27(\mu_2 - \mu_2^2) = 0 < 1,$$

então basta analisar a desigualdade restrita, portanto

$$\begin{aligned} 1 - 27(\mu_2 - \mu_2^2) &> 0 \\ -27(\mu_2 - \mu_2^2) &> -1 \\ 27(\mu_2 - \mu_2^2) &< 1, \end{aligned}$$

porém, tem-se que o termo $\mu_2 - \mu_2^2$ é sempre positivo, pois por definição $\mu_2 < 1/2$, ou seja, está sendo subtraído de 1 um número positivo, portanto é natural que:

$$1 - 27(\mu_2 - \mu_2^2) < 1.$$

Com isso a condição de estabilidade dos pontos triangulares se restringe à primeira desigualdade, ou seja, os pontos triangulares são estáveis, se e somente se,

$$1 - 27(\mu_2 - \mu_2^2) \geq 0$$

Portanto é possível analisar para quais valores de μ_2 essa condição é válida, para isso encontre as raízes da equação quadrática

$$27\mu_2^2 - 27\mu_2 + 1 = 0.$$

Para isso utilize a fórmula quadrática, dada em [5]:

$$\begin{aligned}
 \mu_2 &= \frac{-(-27) \pm \sqrt{(-27)^2 - 4 \cdot 27 \cdot 1}}{2 \cdot 27} \\
 &= \frac{27 \pm \sqrt{729 - 108}}{52} \\
 &= \frac{27 \pm \sqrt{621}}{52} \\
 &= \frac{27 \pm \sqrt{3 \cdot 69}}{52} \\
 &= \frac{27 \pm 3\sqrt{69}}{52} \\
 &= \frac{9 \pm \sqrt{69}}{18}.
 \end{aligned}$$

Portanto tem-se:

$$\mu_{2_1} \approx \frac{9 + 8,3}{18} = \frac{17,3}{18} = 0,9811111111,$$

porém esse valor fere a natureza de μ_2 que é menor que $\frac{1}{2}$. Analisando a outra raiz possível, tem-se

$$\mu_{2_2} \approx \frac{9 - 8,3}{18} = \frac{0,7}{18} \approx 0,0385.$$

Concluindo, os pontos triangulares de Lagrange L_4 e L_5 são estáveis, se for satisfeita a condição

$$\mu_2 \leq \frac{9 - \sqrt{69}}{18} \approx 0,0385,$$

caso contrário, os pontos serão instáveis.

6 CONCLUSÃO

Ao longo da história, o entendimento do espaço tem sido uma fonte de fascínio e de descobertas para a humanidade. Nessa jornada está a compreensão da dinâmica celeste, um campo da física que envolve o estudo das interações gravitacionais entre corpos. A história por trás dos problemas de dois corpos e três corpos restritos circular não apenas adicionou uma motivação para o estudo, mas também destacou a evolução do pensamento científico ao longo dos séculos. Desde os tempos antigos, quando os astrônomos observavam os movimentos dos planetas, até as contribuições revolucionárias de Kepler e Newton, a humanidade tem buscado entender os mistérios do cosmos. Este trabalho de conclusão de curso se aprofundou nesse estudo, explorando os pré-requisitos matemáticos e físicos necessários para entender a dinâmica de sistemas celestes, desde o clássico problema de 2 corpos até o problema de 3 corpos restrito circular. Os pré-requisitos abordados neste estudo, incluindo física, equações diferenciais ordinárias, álgebra linear e métodos numéricos, desempenham um papel fundamental na análise e resolução de problemas na dinâmica celeste. A física fornece as leis fundamentais que governam o movimento dos corpos, enquanto as EDOs permitem modelar esses movimentos de maneira matemática. A álgebra linear e os métodos numéricos são ferramentas essenciais para resolver sistemas de equações robustas que surgem na análise desses problemas.

A investigação sobre a localização de pontos de equilíbrio em sistemas de três corpos restrito circular foi um aspecto crucial deste trabalho. Esses pontos de equilíbrio representam configurações especiais onde as forças gravitacionais entre os corpos resultam em movimentos estáveis. A identificação e análise desses pontos são essenciais para entender a estabilidade de sistemas complexos, como sistemas planetá-

rios e satélites artificiais. Além disso, a análise da estabilidade desses pontos de equilíbrio forneceu aprofundamento sobre o entedimento de sistemas celestes e como se dá a escolha de satélites artificiais.

Em resumo, este trabalho ofereceu uma contribuição significativa para o entendimento teórico e prático da dinâmica celeste. Ao combinar uma análise detalhada dos pré-requisitos matemáticos e físicos com uma investigação profunda dos problemas de dois corpos e três corpos restritos circulares, esta pesquisa lançou luz sobre os mistérios do cosmos e preparou o caminho para novas descobertas e realizações.

Além da pesquisa proposta neste trabalho, ainda existem possibilidades de investigações relacionadas ao campo de estudo que podem ser aplicadas futuramente. Uma direção é o aprofundamento em outras configurações do problema de três corpos restrito, como o elíptico, em que as interações gravitacionais são modeladas de forma mais caótica. Além disso, investigar sobre a teoria do caos na matemática, que oferece uma fascinante área de pesquisa, buscando entender e prever comportamentos aparentemente aleatórios em sistemas dinâmicos. Em paralelo, a busca por outros problemas com aplicabilidade em física e outras áreas do conhecimento, que possam ser resolvidos analiticamente, abrindo o caminho para novas descobertas e aplicações práticas.

REFERÊNCIAS

- [1] W. E. BOYCE e R. C. DIPRIMA. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. ISBN, 2015.
- [2] H. E. BRIETZKE. *Equações Diferenciais II*. UFRGS, 2014.
- [3] R. L. BURDEN e D. J. FAIRES. *Análise numérica*. CENGAGE Learning, 2008.
- [4] D. CAPPECHI e A. DRAGO. “On Lagrange’s History of Mechanic”. Em: 40 (2005), pp. 19–35.
- [5] G. L. CORTÊS. “Polinômios e equações polinômiais: propriedades e aplicações”. Diss. de mestr. Brasil, 2020.
- [6] C.I. DOERING e A. O. LOPES. *Equações diferenciais ordinárias*. IMPA, 2016.
- [7] M. HOSKIN. *The Cambridge Illustrated History of Astronomy*. Cambridge University Press, 1996.
- [8] A. B. de JESUS e V. CONQUISTA. *Identificação das Cônicas*. 2018.
- [9] J. L. LAGRANGE. *Nouvelle méthode pour résoudre des équations littérales par le moyen de séries*. Mém. Acad. Roy. des Sci. et Belles-Lettres de Berlin, 1770.
- [10] E. L. LIMA. *Um curso de análise vol. 2*. IMPA, 2014.

-
- [11] H. R. MACEDO. *Estudo sistemático das parábolas*. 2015.
- [12] A. C. MILONE. *Introdução à Astronomia e Astrofísica*. INPE, 2018.
- [13] C. D. MURRAY e S. F. DERMOTT. *Solar system dynamics*. Cambridge University Press, 1999.
- [14] H. M. NUSSENZVEIG. *Curso de Física Básica 1: Mecânica*. 1a. Vol. 1. São Paulo: Edgard Blucher, 1997.
- [15] L. RODRÍGUEZ. *Introdução à Geometria Diferencial*. IMPA, 1977.
- [16] M. A. G. RUGGIERO. *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais*. Makron, 1997.
- [17] F. SÁ. “Estudo dos determinantes”. Em: *Caderno Da Licença* 5 (2014), pp. 70–84.
- [18] J. STEWART. *Cálculo*. Trad. por Sonia M. C. Vasconcellos Lia L. P. Montenegro. 5ª ed. Vol. 1. São Paulo, Brazil: Editora Cengage Learning, 2010.
- [19] V. G. SZEBEHELY. “Zero velocity curves and orbits in the restricted problem of three bodies”. Em: *Astronomical Journal* (1963).
- [20] R. S. WESTFALL. *Never at Rest: A Biography of Isaac Newton*. Cambridge University Press, 1983.

-
- [21] D. T. WHITESIDE. “Isaac Newton: birth of a mathematician”. Em: *Notes and Records of the Royal Society of London* 19 (1964), pp. 3–16.
- [22] S. WOLFRAM. *A New Kind of Science*. Champaign, IL: Wolfram Media, 2002. Cap. Notes for Chapter 7: Mechanisms in Programs and Nature. Section: Chaos Theory and Randomness from Initial Conditions.
- [23] H. D. YOUNG e R. A. FREEDMAN. *Física 1: Mecânica*. 12a. Vol. 1. São Paulo: Addison Wesley, Pearson, 2009.