



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO, DE CIÊNCIAS EXATAS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE ENG. DE CONTROLE, AUTOMAÇÃO E COMPUTAÇÃO
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO

Vitor Ardengue Cammarosano

**Construção e monitoramento em tempo real de um Pêndulo de Foucault
curto**

Blumenau
2024

Vitor Ardengue Cammarosano

**Construção e monitoramento em tempo real de um Pêndulo de Foucault
curto**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação em Engenharia de Controle e Automação do Centro Tecnológico, de Ciências Exatas e Educação da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito para a obtenção do título de Engenheiro de Controle e Automação.

Prof. Orientador, Dr. Esley Scatena Gonçalves

Blumenau

2024

Ficha catalográfica gerada por meio de sistema automatizado gerenciado pela BU/UFSC.
Dados inseridos pelo próprio autor.

Ardengue Cammarosano, Vitor
Construção e monitoramento em tempo real de um Pêndulo
de Foucault curto / Vitor Ardengue Cammarosano ;
orientador, Esley Scatena Gonçalves, 2024.
69 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) -
Universidade Federal de Santa Catarina, Campus Blumenau,
Graduação em Engenharia de Controle e Automação, Blumenau,
2024.

Inclui referências.

1. Engenharia de Controle e Automação. 2. Pêndulo de
Foucault. 3. Rotação da Terra. I. Gonçalves, Esley Scatena.
II. Universidade Federal de Santa Catarina. Graduação em
Engenharia de Controle e Automação. III. Título.

Vitor Ardengue Cammarosano

**Construção e monitoramento em tempo real de um Pêndulo de Foucault
curto**

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do Título de “Engenheiro de Controle e Automação” e aprovado em sua forma final pelo Curso de Graduação em Engenharia de Controle e Automação.

Blumenau, 18 de dezembro de 2024.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Esley Scatena Gonçalves
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Daniel Alejandro Ponce Saldias
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Fabio Rafael Segundo
Universidade Federal de Santa Catarina

Este trabalho é dedicado aos meus amigos e minha
família.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de começar agradecendo ao meu orientador, e ousar dizer, meu amigo Esley, por toda a ajuda e apoio durante a faculdade. Aquela vez em que me chamou para conversar, há muito tempo, mesmo que eu não tenha aceitado, significou muito para mim.

Um agradecimento especial à minha família, sem a qual não teria sido possível chegar até aqui. Mãe, obrigado por tudo.

Aos meus amigos, foram longos anos, nem sempre fáceis, mas assim é a vida. Ter vocês ao meu lado possibilitou tudo isso. Não cursei esta faculdade sozinho. Obrigado!

Geane, faltam palavras para te agradecer, Obrigado!

José, obrigado. Sem aquele multímetro, não sei como teria feito este trabalho. Sinto falta de passar horas conversando no sofá.

Johann, obrigado por tudo, meu melhor consultor para problemas aleatórios.

Por fim, obrigado à equipe de física por todo o suporte durante a execução deste trabalho.

"From the chuck of the drill-press Foucault suspended a short pendulum consisting of a length of piano wire and a spherical weight. He set the weight to swinging and started the drill-press. The pendulum also continued to vibrate in the same plane. For a time nothing much came of these observations, but in them was the seed of an experiment destined to settle a classic scientific controversy."(STONG, 1960)

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo o desenvolvimento de um pêndulo de Foucault forçado, no qual um sensor HMC5883L é utilizado para detectar variações do campo magnético causadas por um ímã preso à parte inferior da massa do pêndulo. As variações detectadas são processadas por um microcontrolador , que atua sobre um eletroímã para garantir a continuidade das oscilações. A proposta deste projeto inclui um sistema mecânico para melhorar a estabilidade do pêndulo, eliminando efeitos indesejados que possam comprometer a demonstração precisa da rotação da Terra. Além disso, o projeto tem como objetivo servir como material didático para fins pedagógicos e como ferramenta para aplicações em pesquisa. **Palavras-chave:** Pêndulo de Foucault; Rotação da Terra; Monitoramento em tempo real

ABSTRACT

The aim of this work is to develop a forced Foucault pendulum, where an HMC5883L sensor is used to detect magnetic field variations caused by a magnet attached to the bottom of the pendulum's mass. The detected variations are processed by a microcontroller, which controls an electromagnet to ensure the continuity of oscillations. The project proposal includes a mechanical system to enhance the pendulum's stability, eliminating undesirable effects that could compromise the precise demonstration of Earth's rotation. Additionally, the project aims to serve as educational material for pedagogical purposes and as a tool for research applications.

Keywords: Foucault's pendulum; Earth Rotation; Real-time monitoring

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Plano de oscilação de um pêndulo de Foucault	17
Figura 2 – Projeção da tensão $\vec{T}$ e do peso $\vec{P}$ nos eixos	18
Figura 3 – Diagrama de Forças	19
Figura 4 – Rotação do pêndulo no plano	23
Figura 5 – Protótipo de pêndulo forçado	27
Figura 6 – Modelagem do Pêndulo	28
Figura 7 – Suporte do Sensor e do Eletroímã	29
Figura 8 – Modelagem do Pêndulo	30
Figura 9 – Peças impressas para o ajuste do alinhamento	31
Figura 10 – Suporte Pêndulo Instalado	32
Figura 11 – Pêndulo finalizado	33
Figura 12 – Placa Superior	34
Figura 13 – Placa Inferior	35
Figura 14 – Terminação inferior do fio	35
Figura 15 – Ímã posicionado na base da massa	36
Figura 16 – Base com sensor e eletroímã	36
Figura 17 – Perda de energia ao decorrer do tempo	38
Figura 18 – Vista superior do plano de oscilação	38
Figura 19 – Anel de Charron Original.	39
Figura 20 – Anel de Charron Adaptado.	40
Figura 21 – Estimativa do diâmetro do Anel de Charron para a amplitude desejada.	40
Figura 22 – Decaimento do valor de campo detectado nos eixos	42
Figura 23 – Resultado do script em Python presente no Anexo A	47
Figura 24 – Circuito Completo	47
Figura 25 – Rotação do Plano de Oscilação	48
Figura 26 – Rotação do Plano de Oscilação	49

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Modo de Controle (MODE)	42
Tabela 2 – Taxa de Dados de Saída (ODR)	43
Tabela 3 – Faixa de Medição (RNG)	43
Tabela 4 – Taxa de Oversampling (OSR)	43
Tabela 5 – Features and Benefits	64
Tabela 6 – Pin Configurations	65
Tabela 7 – Register List	66
Tabela 8 – Configuration Register A	66
Tabela 9 – Configuration Register B	66
Tabela 10 – Gain Settings	67
Tabela 11 – Mode Register	67
Tabela 12 – Operating Modes	68

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	OBJETIVOS	14
1.1.1	Objetivo Geral	14
1.1.2	Objetivos Específicos	14
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	15
2.1	O EFEITO CORIOLIS	15
2.2	PÊNDULO DE FOUCAULT	16
2.2.1	Equações de Movimento	16
2.2.2	A Física do Movimento	18
2.2.3	Resolução das Equações Diferenciais	21
2.3	O PÊNDULO DE BRAVAIS	24
2.3.1	O Papel da Força de Coriolis no pêndulo de Bravais	24
3	MATERIAIS E MÉTODOS	26
3.1	CONSIDERAÇÕES PARA MODELAGEM 3D	27
3.2	MONTAGEM FÍSICA	30
3.2.1	Detalhes de Construção	32
3.3	MOVIMENTOS ELÍPTICOS	36
3.3.1	Dissipação de Energia	37
3.3.2	Atenuação de movimentos elípticos	39
3.3.3	Definição diâmetro do anel de Charron	40
3.4	ESTUDO DO SENSOR HMC5883L	41
3.4.1	Configuração do HMC5883L	42
3.5	PROGRAMAÇÃO E COLETA DE DADOS	43
3.5.1	Código no microcontrolador (Apêndice B)	43
3.5.1.0.1	Verifica Sinal	45
3.5.1.0.2	Ponto Médio	45
3.5.2	Processamento em Python (Apêndice A)	45
3.5.2.0.1	Cálculo do Ângulo	46
3.5.2.0.2	Média, Desvio Padrão e Desvio Padrão da Média	46
3.5.3	Armazenamento dos Dados	46
3.6	MONITORAMENTO REMOTO	46
3.7	CIRCUITO	47
4	RESULTADOS	48
4.1	CONSIDERAÇÕES FINAIS	50
	REFERÊNCIAS	51
	APÊNDICE A – Código Python	52
	APÊNDICE B – Código Microcontrolador	58

ANEXO A – HMC8553L Datasheet 63

1 INTRODUÇÃO

Alguns experimentos físicos se destacam não só por comprovarem novas teorias, mas também pela sua simplicidade. Podemos citar alguns casos bem conhecidos, tais como a queda de objetos de massas diferentes de cima de uma torre (por Stevin e de Groot em 1586), as franjas de interferência no experimento da dupla fenda (por Young) ou mesmo a determinação da velocidade da luz utilizando os eclipses em Júpiter, por Røemer. Dentre experimentos deste tipo, o Pêndulo de Foucault é um dos mais intrigantes. (Crease, 2006)

O pêndulo de Foucault, criado por Jean Bernard Léon Foucault em 1851, é um experimento clássico que permite visualizar diretamente a rotação da Terra. Foucault construiu um pêndulo de 28 quilogramas suspenso por um fio de 67 metros, foi suspenso no domo do Panthéon, em Paris. Possuía uma oscilação de 16,5 segundos completando uma rotação em 31 horas e 50 minutos. A instalação de um pêndulo de Foucault requer cuidado e precisão para garantir que os efeitos observados sejam realmente causados pela rotação terrestre, evitando outros efeitos espúrios que possam comprometer a experiência.

A explicação dada para o fenômeno observado é a de que o plano de oscilação do pêndulo é fixo, mas um observador na Terra verá o plano do pêndulo rotacionar devido ao movimento de rotação da Terra em torno de seu próprio eixo. Se o observador estiver num dos polos, o período de rotação do plano de oscilação do pêndulo será de 24h. Para outras posições no globo, a relação é dada por

$$T = \frac{24h}{\sin\lambda},$$

onde λ é a latitude do local no qual o pêndulo está montado.

Assim, este experimento não só comprovaria o movimento de rotação da Terra como também mostra que a mesma é redonda e faz previsões para as diferentes latitudes nas quais o experimento é realizado.

Contudo, a sua simplicidade é aparente. Mesmo um pêndulo com uma grande massa e um comprimento de dezenas de metros, com o passar do tempo, sofre os efeitos da resistência do ar, atrito em suas articulações e conseqüente perda de energia mecânica. Ainda, há uma dificuldade em manter o movimento do pêndulo em um plano (evitando movimentos elípticos que comumente acontecem em pêndulos do tipo). Tais efeitos podem se acumular ao longo das horas, o que indubitavelmente diminuirá a amplitude de oscilação do pêndulo e o levará ao repouso, enquanto os movimentos elípticos introduzirão incertezas quanto à rotação do plano de oscilação.

Assim, embora sua concepção inicial seja trivial, a implementação de um Pêndulo de Foucault requer alguns cuidados, tais quais manter a oscilação do pêndulo por meio de uma oscilação forçada, bem como um sistema que minimize os movimentos elípticos. Felizmente, tais problemas são bem conhecidos e inúmeras soluções já foram propostas. Neste projeto, buscamos adaptar algumas soluções utilizando tecnologias acessíveis e que possam ser implementadas na maioria dos locais.

1.1 OBJETIVOS

O presente trabalho tem como objetivo principal o desenvolvimento, em escala reduzida, de um pêndulo de Foucault que permita evidenciar a rotação terrestre, possibilitando sua apresentação em ambiente escolar. A implementação em menor escala impõe desafios adicionais quanto à estabilidade do sistema, à minimização de interferências externas e à manutenção do movimento próximo a um plano único de oscilação. Dessa forma, este projeto integra fundamentos de mecânica, eletromagnetismo e técnicas de controle (controlador proporcional), buscando preservar a clareza conceitual do experimento original de Léon Foucault.

1.1.1 Objetivo Geral

Desenvolver um pêndulo de Foucault em escala reduzida capaz de demonstrar, de forma clara e sistemática, a rotação da Terra, servindo como um instrumento didático para o ensino de ciências em nível escolar.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Projetar e construir um pêndulo forçado, utilizando um sistema de realimentação de energia (por meio de um eletroímã), de modo a compensar as perdas por atrito e manter a amplitude de oscilação constante ao longo do tempo.
- Implementar um sistema de aquisição de dados para registrar as grandezas relevantes do movimento (por exemplo, posição, variação do campo magnético e tempo), assegurando a coleta de informações precisas e confiáveis.
- Determinar experimentalmente a taxa de rotação do plano de oscilação do pêndulo e compará-la ao valor teórico esperado para a latitude de Blumenau, validando, assim, o efeito da rotação terrestre.
- Minimizar a elipticidade das oscilações, de modo que o movimento do pêndulo se aproxime de um plano único, facilitando a análise e a interpretação dos resultados.
- Disponibilizar o protótipo e a documentação resultante do estudo como recurso didático, contribuindo para o enriquecimento das práticas de ensino de física em nível escolar.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O presente capítulo aborda os fundamentos teóricos necessários para a compreensão dos experimentos que demonstram a rotação da Terra e a interação de sistemas dinâmicos em referenciais não inerciais. Esses conceitos não apenas explicam fenômenos naturais complexos, mas também destacam a elegância de experimentos históricos, como o pêndulo de Foucault e o pêndulo de Bravais, que traduzem em termos práticos e visuais a rotação do nosso planeta.

Inicialmente, introduzimos o efeito Coriolis, uma força aparente que surge devido à rotação da Terra. Essa força é responsável por importantes fenômenos na atmosfera e nos oceanos, sendo uma das principais ferramentas para compreender a interação entre sistemas dinâmicos e referenciais rotativos. Em seguida, detalhamos a fundamentação teórica e a história do pêndulo de Foucault, um experimento icônico que combina simplicidade estrutural e profundidade científica para demonstrar de forma direta a rotação terrestre.

O capítulo também aborda o Pêndulo de Bravais, uma alternativa ao Pêndulo de Foucault, que evidencia a rotação da Terra a partir das diferenças nos períodos de oscilação em sentidos opostos. São explorados os efeitos da força de Coriolis nos movimentos desses sistemas pendulares, oferecendo uma compreensão dos princípios físicos que fundamentam esses experimentos.

2.1 O EFEITO CORIOLIS

O efeito de Coriolis é a força atuante em um corpo presente em um sistema de referência não inercial. Como estamos na Terra, e ela está rotacionando, pode-se considerar que todo sistema de referência terrestre é não inercial. Contudo, na maioria das vezes, esse efeito não gera interferências perceptíveis. No entanto, no caso do pendulo de Foucault é o efeito que desejamos ver, pois é a comprovação deste que valida a rotação da Terra.

Este foi descrito pela primeira vez por Gaspard-Gustave Coriolis em 1835, ele estava interessado em melhor compreender sistemas mecânicos rotativos, mais especificamente em entender as forças inerciais totais presentes. Essa força foi inicialmente descrita como uma componente suplementar da força centrífuga.

Matematicamente, a força de Coriolis é expressa pela equação:

$$\vec{F}_{cr} = -2m(\vec{\Omega} \times \vec{v}), \quad (1)$$

onde:

- $\vec{F}_{cr}$ é a força de Coriolis;
- m é a massa do objeto;
- $\vec{\Omega}$ é o vetor de velocidade angular da Terra;
- $\vec{v}$ é a velocidade linear do objeto em relação ao sistema de referência.

Os principais impactos do efeito Coriolis podem ser observados nos seguintes fenômenos:

- **Circulação Atmosférica:** O efeito Coriolis é essencial para a formação dos ventos predominantes. No hemisfério norte, ele desvia os ventos para a direita, enquanto no hemisfério sul, para a esquerda. Esse desvio contribui para a formação de padrões atmosféricos, como os ventos alísios e os sistemas ciclônicos.
- **Formação de Ciclones:** A rotação da Terra, combinada com a força de Coriolis, explica o sentido de rotação dos ciclones, anti-horário no hemisfério norte e horário no hemisfério sul. Isso ocorre devido ao equilíbrio entre a força de Coriolis e o gradiente de pressão.
- **Correntes Oceânicas:** Nas correntes marítimas, como a Corrente do Golfo e o Sistema Circumpolar Antártico, o efeito Coriolis influencia diretamente a direção e o movimento. As correntes são desviadas, criando padrões circulares conhecidos como giros oceânicos (National Geographic Society, 2024).

O estudo do efeito Coriolis é um exemplo claro de como a interação entre a matemática e a física teórica pode explicar fenômenos complexos da natureza. Além disso, ele destaca a importância de considerar os sistemas de referência na análise de movimentos.

2.2 PÊNDULO DE FOUCAULT

O pêndulo de Foucault, introduzido pelo físico francês Jean Bernard Léon Foucault em 1851, é um dos experimentos que demonstram a rotação da Terra de forma direta, sem a necessidade de observações astronômicas.

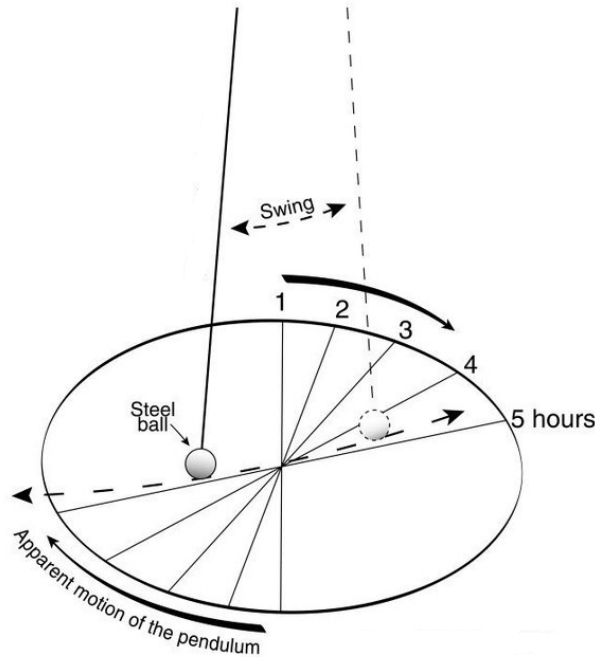
Jean Bernard Léon Foucault iniciou seus estudos ao observar como uma barra metálica vibrava em um plano fixo, mesmo quando a base de suporte era rotativa. Esse experimento inicial o levou a desenvolver um pêndulo que pudesse demonstrar a rotação da Terra. Ele apresentou um pêndulo com 67 metros de comprimento e uma esfera de ferro de 28 kg no Panteão de Paris, observando que o plano de oscilação parecia girar lentamente ao longo do tempo. Esse movimento era causado pela rotação da Terra (Islam, 2005).

O sucesso do experimento popularizou o pêndulo de Foucault, levando à sua replicação em museus, universidades e espaços públicos ao redor do mundo. Além disso, Foucault introduziu o termo "giroscópio" e previu que princípios semelhantes seriam usados em dispositivos de navegação modernos (Witzel, 2005).

2.2.1 Equações de Movimento

O movimento do pêndulo de Foucault é descrito pela força de Coriolis (Seção 2.1), que surge em sistemas de referência não-inerciais. Essa força causa a rotação do plano de oscilação do pêndulo, veja na Figura 1, em uma taxa proporcional ao seno da latitude (λ):

Figura 1 – Plano de oscilação de um pêndulo de Foucault



Fonte: (FísicaEmClasse, 2018) adaptado

$$\Delta\phi = \Omega t \sin(\lambda), \quad (2)$$

onde $\Delta\phi$ é o deslocamento angular, Ω é a velocidade angular da Terra e t é o tempo. Nos polos, o plano completa uma rotação em aproximadamente 24 horas (23h56m), enquanto no equador não há rotação aparente (Diniz, 2023; Plewes, 2018).

Fatores como comprimento do fio, massa do pêndulo e alinhamento do ponto de suspensão influenciam a precisão do experimento. Pêndulos curtos ou mal alinhados podem exibir precessão elíptica ou comportamentos imprevisíveis devido a forças assimétricas no sistema (Plewes, 2018).

Mesmo com todos os cuidados para se soltar a massa do pêndulo para iniciar o experimento, para que forças laterais não introduzam movimentos elípticos teremos a inclusão de um erro de precessão Ω_E . Este erro se dá segundo a seguinte relação (Plewes, 2018):

$$\Omega_E = \frac{3\pi ab}{4TL^2} \quad (3)$$

Na Equação (3) temos que, a é a amplitude do maior eixo da elipse, b a amplitude do menor eixo da elipse, T o período do pêndulo e L o comprimento do pêndulo.

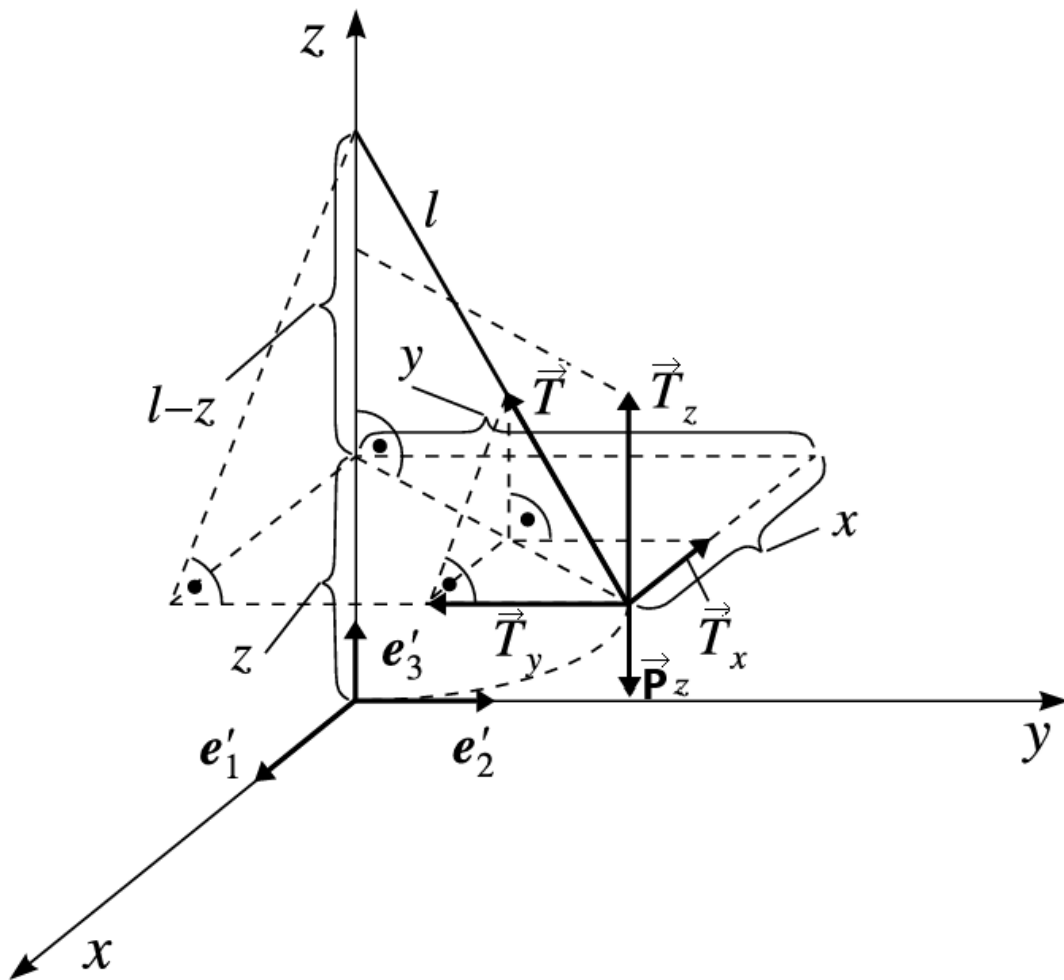
Com base nessa equação podemos ver que precisamos reduzir ao máximo as dimensões dessa elipse que se origina com o movimento do pêndulo, isso será explorado

mais a fundo na Seção 3.3. Plewes mostra em seu artigo que é possível, com um pêndulo de 65,4cm e usando o sensor HMC5883L, detectar com uma confiabilidade alta a rotação da Terra.

2.2.2 A Física do Movimento

No pêndulo temos 3 forças envolvidas no sistema, como mostrado na Figura 2. Estão representadas a força peso $\vec{P}$ e a força de tensão no fio $\vec{T}$. A força de Coriolis

Figura 2 – Projeção da tensão $\vec{T}$ e do peso $\vec{P}$ nos eixos



Fonte: (Greiner, 2010)

Da figura podemos obter:

$$\frac{T}{T_x} = -\frac{l}{x}; \frac{T}{T_y} = -\frac{l}{y}; \frac{T_z}{T} = -\frac{l-z}{l} \quad (4)$$

Dado que a amplitude do pêndulo é pequena, podemos assumir que:

$$l \approx l - z, -\frac{l - z}{l} \approx 1 \quad (5)$$

Logo

$$T_z = T \quad (6)$$

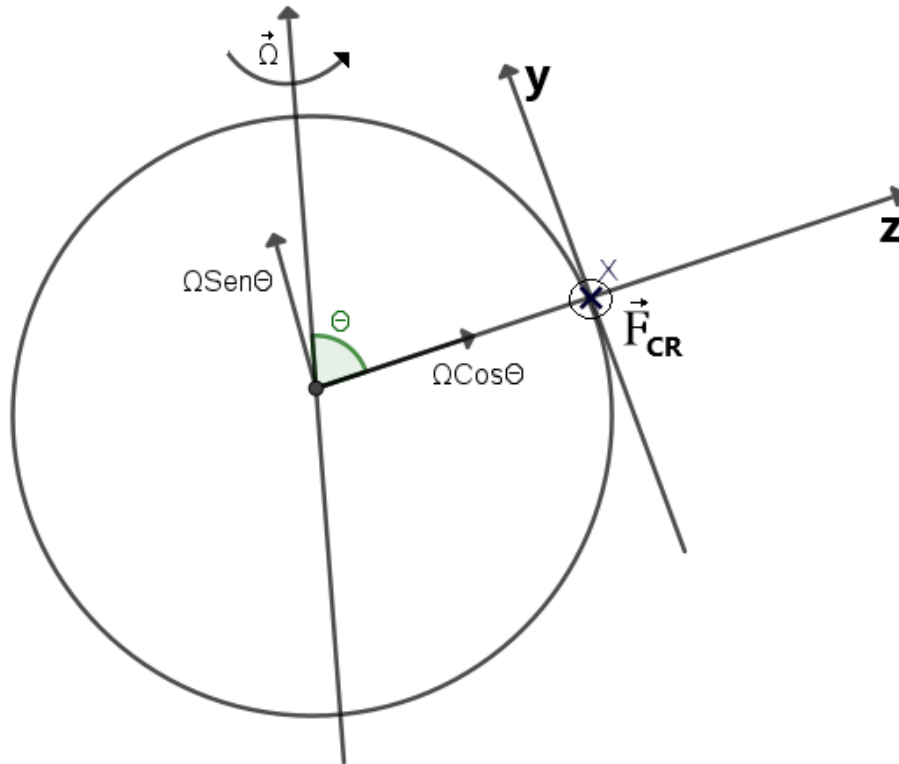
Fonte: (Greiner, 2010)

Temos $\vec{T}$ obtido acima, $\vec{P}$ não é nada além da força peso descrita pela equação:

$$\vec{P} = -mg.\hat{z} \quad (7)$$

Faltando então somente a força $\vec{F}_{CR}$, obtida a seguir

Figura 3 – Diagrama de Forças



Fonte: Autor

Na Figura 3, θ = colatitude, $\theta + \lambda = 90^\circ$, sendo λ a latitude. A força de Coriolis é dada por

$$\vec{F}_{CR} = 2m\vec{v} \times \vec{\Omega} \quad (8)$$

Sendo que:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}} &= \frac{d\vec{r}}{dt} \\ \ddot{\vec{r}} &= \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\end{aligned}\quad (9)$$

Resolvendo esse produto vetorial

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{\Omega} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ 0 & \Omega \sin \theta & \Omega \cos \theta \end{vmatrix} \quad (10)$$

Resolvendo o determinante obtemos o vetor $\vec{F}_{CR}$

$$\vec{F}_{CR} = 2m[\hat{x}(\dot{y}\Omega \cos \theta - \dot{z}\Omega \sin \theta) + \hat{y}(-\dot{x}\Omega \cos \theta) + \hat{z}(\dot{x}\Omega \sin \theta)] \quad (11)$$

Obtemos o sistema a seguir:

$$\begin{cases} \vec{T} = -\frac{T}{l}\hat{x} - \frac{T}{l}\hat{y} + T\hat{z} \\ \vec{P} = -mg\hat{z} \\ \vec{F}_{CR} = 2m[\hat{x}(\dot{y}\Omega \cos \theta - \dot{z}\Omega \sin \theta) + \hat{y}(-\dot{x}\Omega \cos \theta) + \hat{z}(\dot{x}\Omega \sin \theta)] \end{cases} \quad (12)$$

Pela segunda Lei de Newton

$$m\ddot{x} = -T\frac{x}{l} + 2m(\dot{y}\Omega \cos \theta - \dot{z}\Omega \sin \theta) \quad (13)$$

$$m\ddot{y} = -T\frac{y}{l} + 2m(-\dot{x}\Omega \cos \theta) \quad (14)$$

$$m\ddot{z} = -mg + T + \dot{x}2m\Omega \sin \theta \quad (15)$$

Desprezando o movimento em $\hat{z}$, podemos dizer que $\dot{z} = 0$ e $\ddot{z} = 0$, então a partir Equação (15) obtemos:

$$T = mg - 2m\Omega \sin \theta \dot{x} \quad (16)$$

Inserindo Equação (16) nas Equações (13) e (14), foi obtido:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{g}{l}x + \frac{2\Omega \sin \theta}{l}\dot{x}x + 2\Omega \cos \theta \dot{y} \\ \ddot{y} = -\frac{g}{l}y + \frac{2\Omega \sin \theta}{l}\dot{x}y - 2\Omega \cos \theta \dot{x} \end{cases} \quad (17)$$

A Equação (17) representa um sistema de equações diferenciais acopladas e não-lineares; não-linear porque os termos mistos $\dot{x}y$ e $\dot{x}x$ aparecem. Como os produtos dos números pequenos Ω , x e $\dot{y}$ (ou Ω , y e $\dot{x}$) são desprezíveis em comparação com os outros termos, Greiner(2010). A Equação (17) pode ser considerada equivalente a

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{gx}{l} + 2\dot{y}\Omega \cos \theta \\ \ddot{y} = -\frac{gy}{l} - 2\dot{x}\Omega \cos \theta \end{cases} \quad (18)$$

Essas duas equações diferenciais representam uma boa aproximação do movimento do pêndulo pelo plano xy sob a influência da força de Coriolis.

2.2.3 Resolução das Equações Diferenciais

Assumindo o seguinte conjunto de equações e lembrando que $\Omega \cos \theta = \Omega_z$, e considerando η como uma solução geral para x e y , temos:

$$\begin{aligned}\eta &= x + iy \\ \dot{\eta} &= \dot{x} + i\dot{y} \\ \ddot{\eta} &= \ddot{x} + i\ddot{y}.\end{aligned}\tag{19}$$

Substituindo $\ddot{x}$ e $\ddot{y}$ em $\ddot{\eta}$, temos

$$\ddot{\eta} = \ddot{x} + \frac{gx}{l} - 2i\dot{y}\Omega_z + i\ddot{y} + i\frac{gy}{l} + i2\dot{x}\Omega_z\tag{20}$$

$$\ddot{\eta} + 2i\Omega_z(-\dot{y} + i\dot{x}) + \frac{g}{l}(x + iy) = 0\tag{21}$$

$$\ddot{\eta} + 2i\Omega_z\left(-\frac{\dot{y}}{i} + \frac{i\dot{x}}{i}\right) + \frac{g}{l}\eta\tag{22}$$

$$\ddot{\eta} + 2i\Omega_z\dot{\eta} + \frac{g}{l}\eta = 0\tag{23}$$

Aplicando o método Ansatz à resolução de equações diferenciais, utilizamos este procedimento na Equação (23), obtemos:

$$\begin{aligned}\eta(t) &= e^{pt} \\ \dot{\eta}(t) &= pe^{pt} = p\eta \\ \ddot{\eta}(t) &= p^2e^{pt} = p^2\eta\end{aligned}\tag{24}$$

O parâmetro p surge naturalmente quando assumimos uma solução do tipo $\eta(t) = e^{pt}$. Ao substituir essa forma na equação diferencial, obtemos uma equação algébrica para p , conhecida como equação característica. Os valores possíveis de p , chamados autovalores do sistema, determinam como a solução evolui ao longo do tempo. Em particular, a parte real de p controla se a solução cresce ou decai exponencialmente, enquanto a parte imaginária de p está relacionada à frequência de oscilações, caso estas ocorram. Assim, p encapsula as características dinâmicas da solução, seja ela amortecida, amplificada ou oscilatória.

Substituindo Equação (24) em Equação (23)

$$p^2\eta + 2i\Omega_z p\eta + \frac{g}{l}\eta = 0\tag{25}$$

$$\eta\left(p^2 + 2i\Omega_z p + \frac{g}{l}\right) = 0\tag{26}$$

Temos aqui 3 soluções, sendo que uma delas seria $\eta = 0$ que não temos interesse. As outras duas serão obtidas resolvendo a equação de segundo grau dentro dos parênteses

por Bhaskara, sendo que a frequência natural de oscilação é dada por $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$, Greiner (2010). Para o comprimento do pêndulo usado, o período equivale a aproximadamente 3 segundos, o que resulta em uma frequência $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3} \approx 2rad/s$ e Ω_z a velocidade de rotação da terra $\approx 10^{-4}rad/s$

$$p = \frac{-2i\Omega_z \pm \sqrt{(-2i\Omega_z)^2 - 4\frac{g}{l}}}{2} \quad (27)$$

$$p = \frac{-2i\Omega_z \pm \sqrt{-4\Omega_z^2 - 4\omega_0^2}}{2} \quad (28)$$

$$p = -i\Omega_z \pm i\sqrt{\Omega_z^2 + \omega_0^2} \quad (29)$$

Podemos desconsiderar Ω_z^2 pois $\Omega_z^2 \ll \omega_0^2$. Dito isso, as duas raízes da equação são dadas por:

$$p = -i\Omega_z \pm i\omega_0 \quad (30)$$

Com isso, a solução geral se torna:

$$\eta(t) = C_1 e^{(-i\Omega_z + i\omega_0)t} + C_2 e^{(-i\Omega_z - i\omega_0)t} \quad (31)$$

Reformulando,

$$\eta(t) = e^{-i\Omega_z t} [C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}] \quad (32)$$

As condições iniciais para $t=0$ seriam $x = A$, $y = 0$, $\dot{y} = 0$ e $\dot{x} = 0$. Então para $\eta(0)$

$$\eta(0) = C_1 + C_2 = A, \quad (33)$$

e

$$\dot{\eta}(0) = -i\Omega_z [i\omega_0 C_1 - i\omega_0 C_2] = 0. \quad (34)$$

Combinando as equações (31) e (32), os coeficientes C_1 e C_2 são encontrados:

$$\omega_0 C_1 - \omega_0 C_2 = 0 \quad (35)$$

$$C_1 = C_2 = C = \frac{A}{2} \quad (36)$$

Com isso, a solução final é dada por

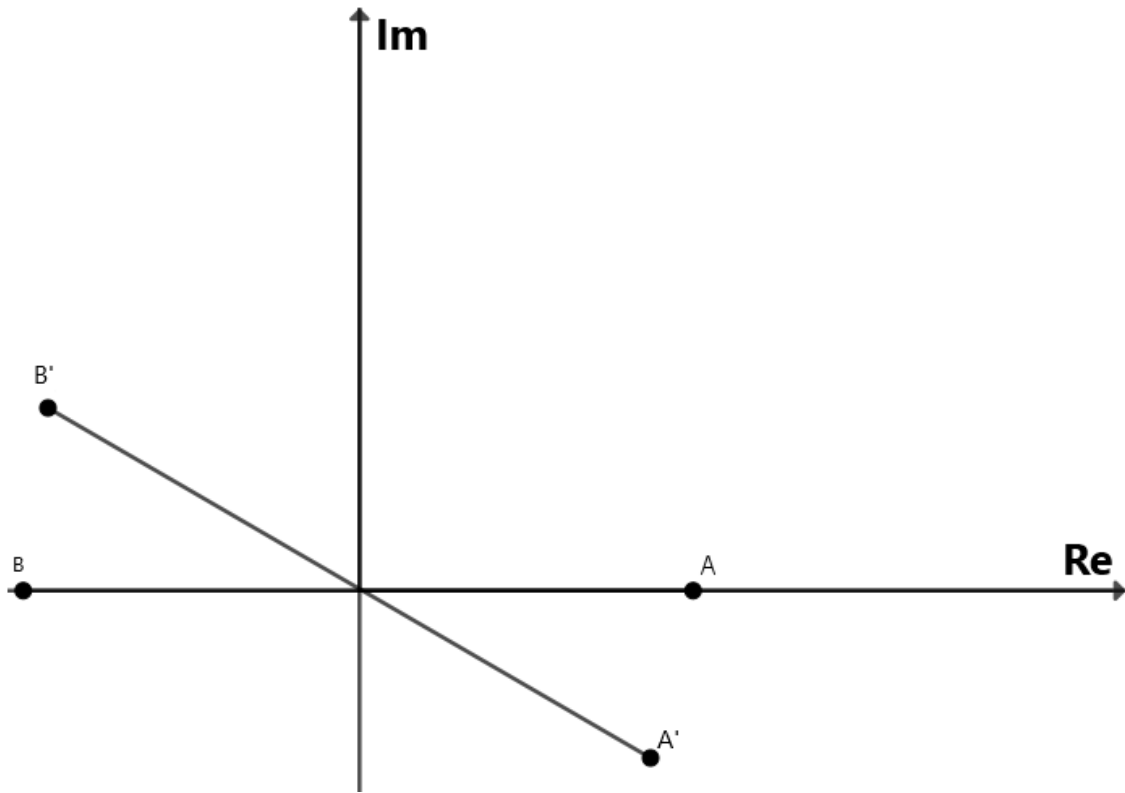
$$\eta(t) = \frac{A}{2} e^{-i\Omega_z t} 2\cos\omega_0 t, \quad (37)$$

ou seja,

$$\eta(t) = A e^{-i\Omega_z t} \cos(\omega_0 t). \quad (38)$$

Analisando a Equação (38) o termo real $\cos(\omega_0 t)$ dita a dinâmica no eixo real e está relacionado com a frequência natural de oscilação do pêndulo. Esse termo causa movimento no eixo real de A até B (Figura 4), enquanto o termo imaginário $\Omega_z t$ dita a dinâmica no eixo Imaginário, causando a rotação do plano de $\overline{AB}$ para $\overline{A'B'}$

Figura 4 – Rotação do pêndulo no plano



Fonte: Autor

Sendo Ω_z a componente z da velocidade angular da Terra em uma dada latitude, vemos que o movimento de rotação observado em um pêndulo de Foucault é causado pela rotação da Terra e a força que causa essa rotação é a Força de Coriolis.

Podemos voltar agora para a substituição que fizemos no início dessa seção e obter a equação do período para que o pêndulo rotacione 360° para qualquer latitude:

$$\Omega_z = \Omega \cos \theta = \frac{2\pi}{T} \quad (39)$$

Sendo $\Omega = \frac{360^\circ}{23:56:4} = \Omega \approx \frac{2\pi}{24h}$, temos:

$$T = \frac{2\pi}{\Omega \cos \theta} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{24h} \cos \theta} \quad (40)$$

Por fim, trocando a colatitude por latitude temos:

$$T = \frac{24h}{\cos \theta} = \frac{24h}{\sin \lambda} \quad (41)$$

Para Blumenau, que está a uma latitude de $26,9^\circ$, o período para que um pêndulo de Foucault complete uma volta é de

$$T = \frac{24h}{\cos \theta} = \frac{24h}{\sin 26,9^\circ} = 53,33h. \quad (42)$$

2.3 O PÊNDULO DE BRAVAIS

O pêndulo de Bravais, assim como o mais famoso pêndulo de Foucault, é um experimento que evidencia a rotação da Terra. Enquanto o pêndulo de Foucault demonstra a rotação terrestre por meio da mudança no plano de oscilação, o pêndulo de Bravais utiliza as diferenças nos períodos de oscilação em sentidos opostos (horário e anti-horário) para o mesmo fim. Diferença essa causada pelas forças de Coriolis.

Quando um pêndulo realiza oscilações cônicas, ou seja, se move em círculos horizontais, ele interage com o referencial rotativo da Terra. Do ponto de vista de um observador terrestre, a rotação do planeta influencia o movimento do pêndulo de forma diferente dependendo do sentido da oscilação:

- No sentido **horário**, a força de Coriolis atua para aumentar a frequência angular aparente (ω_+).
- No sentido **anti-horário**, essa mesma força reduz a frequência angular aparente (ω_-).

As frequências aparentes observadas em cada sentido são expressas pelas equações:

$$\omega_+ = \omega_0 + \Omega \quad (43)$$

$$\omega_- = \omega_0 - \Omega \quad (44)$$

Em que ω_0 é a frequência angular natural do pêndulo e Ω é a componente da velocidade angular da Terra projetada no plano horizontal, que depende da latitude (λ).

A diferença nos períodos de oscilação (ΔT) entre os sentidos horário e anti-horário está diretamente relacionada à rotação terrestre (Babović; Mekic, 2011):

$$\Delta T = T_- - T_+ \approx 2T_0 \frac{\Omega}{\omega_0} \quad (45)$$

Nesta equação:

- T_0 representa o período natural do pêndulo.
- $\Omega = \Omega_T \sin \lambda$, onde Ω_T é a velocidade angular da Terra ($7,29 \times 10^{-5}$ rad/s) e λ é a latitude local.

Essa diferença de períodos permite calcular a velocidade angular da Terra com alta precisão. No experimento de Bravais, por exemplo, o valor obtido para Ω foi apenas 1,5% inferior ao valor esperado, o que confirma a rotação da Terra (Babović; Mekic, 2011).

2.3.1 O Papel da Força de Coriolis no pêndulo de Bravais

A força de Coriolis, que surge devido à rotação do referencial terrestre, é a principal responsável por essa diferença nos períodos. Conforme havíamos visto, ela pode ser escrita como

$$\vec{F}_{CR} = -2m(\vec{\Omega} \times \vec{v}). \quad (46)$$

Sua magnitude depende da velocidade do objeto ($\vec{v}$) e da velocidade angular da Terra ($\vec{\Omega}$), causando um desvio no movimento do pêndulo. No sentido horário, a força de Coriolis atua de forma a "acelerar" o movimento percebido; no sentido anti-horário, ela "retarda" o movimento.

Se a Terra não estivesse girando, a força de Coriolis não existiria, e os períodos de oscilação nos dois sentidos seriam idênticos. A diferença observada nos períodos é, portanto, uma evidência física e direta de que a Terra está girando. Esse comportamento reforça a validade do pêndulo de Bravais como uma alternativa ao pêndulo de Foucault para demonstrar a rotação da Terra, com a vantagem de ser menos suscetível a problemas como desvios no plano de oscilação (Babović; Mekic, 2011).

3 MATERIAIS E MÉTODOS

Inicialmente, foi construído um protótipo simples com o objetivo de validar a viabilidade da proposta. Este protótipo, mostrado na Figura 5, serviu como prova de conceito, demonstrando que seria possível manter o movimento contínuo de um pêndulo utilizando os materiais previamente selecionados.

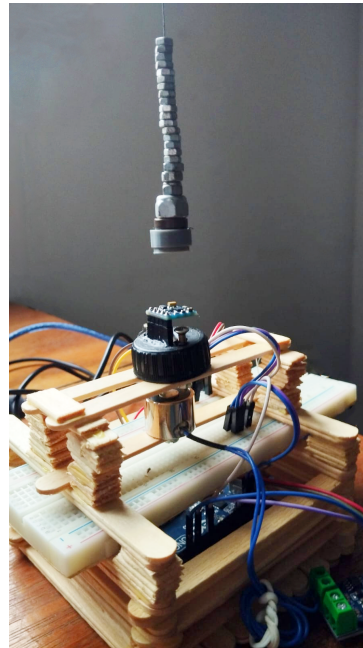
Embora as possíveis fontes de perda de energia tenham sido minimizadas, a resistência do ar fará com que a amplitude de oscilação do pêndulo diminua aos poucos. Como o movimento que queremos observar é muito lento, é importante que o pêndulo continue oscilando pelo maior tempo possível.

Para tanto, fazemos uso de um eletroímã posicionado logo abaixo do ponto de repouso do pêndulo. Este pequeno eletroímã é responsável por 'empurrar' o pêndulo a cada passagem deste. Com isso, o movimento pode ser mantido indefinidamente.

Podemos observar na Figura 5 que o eletroímã foi previamente posicionado abaixo do sensor. Foi identificado que seria necessário aproximar o mesmo para uma maior eficiência, pois a distância até o pêndulo era muito alta para que o eletroímã pudesse fornecer a energia necessária para fazer com que o movimento fosse ininterrupto.

Os resultados obtidos durante os testes confirmaram a adequação dos recursos empregados e forneceram informações fundamentais para o aprimoramento do sistema. Os detalhes sobre os materiais escolhidos e os procedimentos experimentais adotados serão discutidos nas seções a seguir, de forma a proporcionar uma compreensão clara do processo de desenvolvimento.

Figura 5 – Protótipo de pêndulo forçado



Fonte: Autor

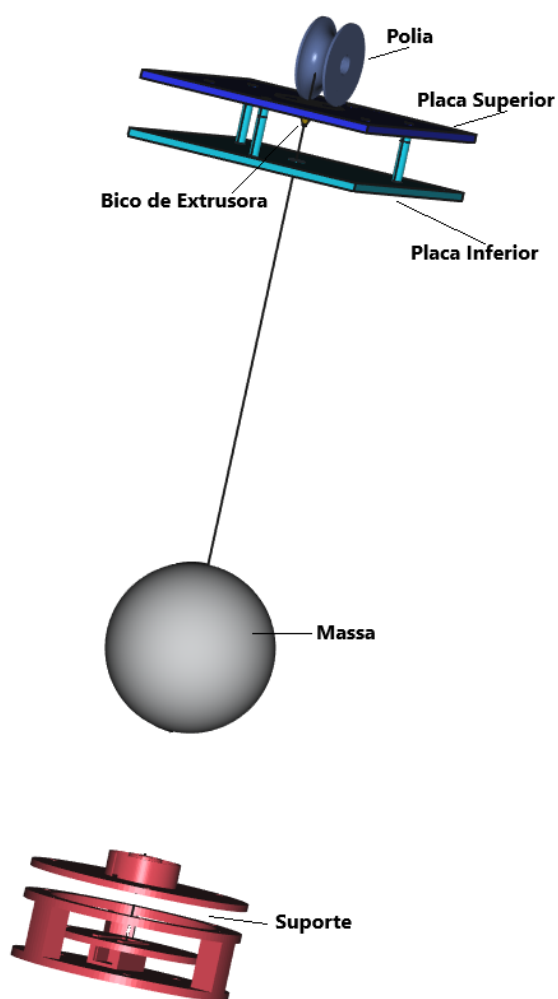
3.1 CONSIDERAÇÕES PARA MODELAGEM 3D

Após o desenvolvimento do protótipo, foram tiradas algumas conclusões:

- A massa do pêndulo deve ser suficientemente grande, pois, devido à alta precisão do sensor, uma massa muito pequena torna-se mais suscetível a perturbações, o que pode gerar ruídos significativos nas leituras. Isso ocorre porque a precessão não se mantém estável, tornando-se extremamente sensível a qualquer interferência no sistema, especialmente a correntes de ar.
- A distância entre o eletroímã e o pêndulo, precisa ser pequena por dois motivos: (i) quanto mais perto menos energia é preciso para puxar ou empurrar o ímã, o que está basicamente na mesma linha do segundo motivo, (ii) de acordo com Plewes(2018), o eletroímã tem que ser ativo pelo menor tempo possível. Em seu experimento, ele ativa o ímã por 5,5 ms. Percebeu-se que uso excessivo do eletroímã tende a fazer com que o movimento fique travado em um plano de oscilação constante.

A Figura 6 apresenta uma visão geral do pêndulo, destacando o posicionamento de todos os componentes do sistema. Esta imagem fornece uma perspectiva completa da montagem, servindo como referência para a compreensão do funcionamento.

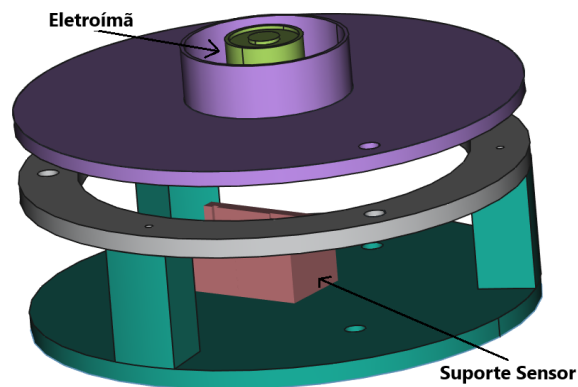
Figura 6 – Modelagem do Pêndulo



Fonte: Autor

A modelagem 3D do suporte foi desenvolvida levando os aspectos acima citados em consideração. Como mostra a Figura 7, o eletroímã é mostrado em verde, no topo, e o suporte para o sensor HMC5883L aparece em bordô, logo abaixo.

Figura 7 – Suporte do Sensor e do Eletroímã

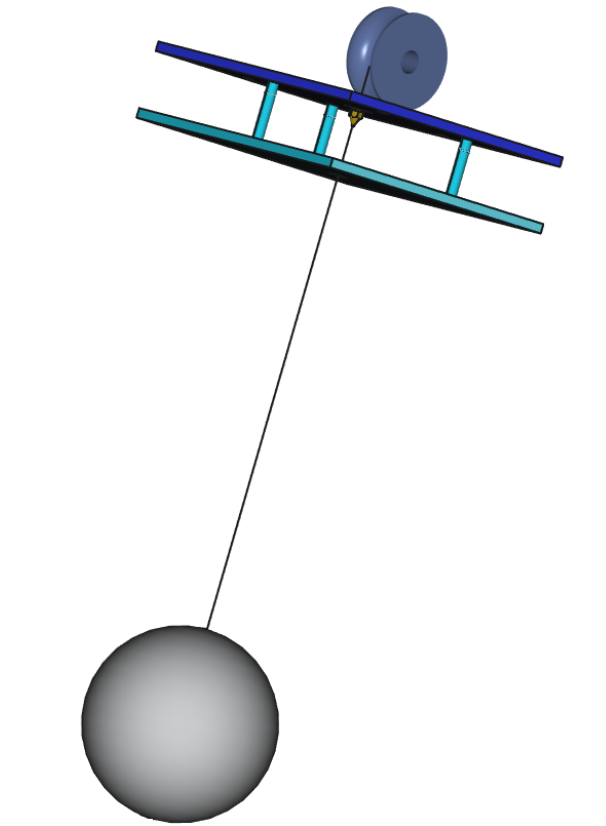


Fonte: Autor

Todas as peças na Figura 7 foram impressas em uma impressora 3D e a montagem final foi feita exatamente como na modelagem.

A segunda modelagem 3D (Figura 8) foi desenvolvida para visualizar a montagem física do sistema. Nessa configuração, o fio de sustentação é guiado pela polia, que o direciona para entrar verticalmente em um bico de extrusora. Em seguida, o fio atravessa a placa inferior por meio de um anel de Charron e, por fim, é fixado à massa através de um parafuso perfurado.

Figura 8 – Modelagem do Pêndulo



Fonte: Autor

A placa superior, que contém a polia soldada, possui no centro um furo onde o bico de extrusora foi parafusado. Já a placa inferior apresenta um furo concêntrico com o da placa superior, desempenhando a função do anel de Charron.

3.2 MONTAGEM FÍSICA

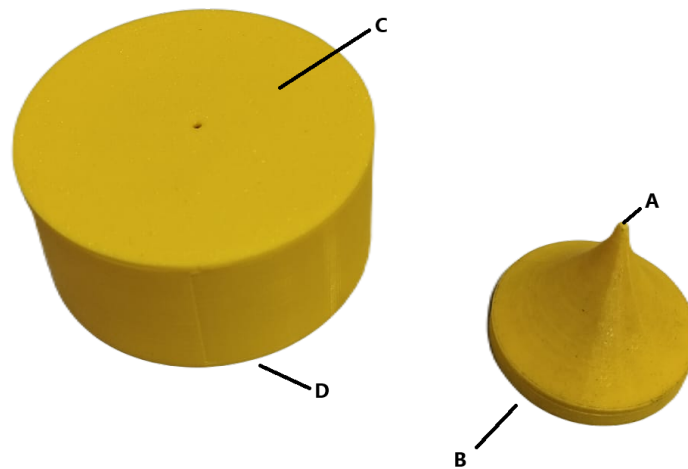
Um dos maiores desafios encontrados durante a montagem do experimento foi o alinhamento dos diversos componentes do sistema. As placas de aço precisam estar paralelas e devidamente niveladas; qualquer pequeno desnível faz com que o cabo de aço percorra uma distância menor até o anel de Charron em uma das direções, prejudicando a estabilidade do sistema.

Caso o eletroímã não esteja centralizado em relação ao pêndulo, surgirá um torque indesejado, resultando em um movimento elíptico. Todos os parafusos possuem arruelas de pressão para permitir um ajuste fino do nível das placas, contribuindo para um alinhamento mais preciso, utilizando um nível de bolha com precisão de $0,5^\circ$.

Duas peças extras foram impressas (Figura 9) para auxiliar no alinhamento do

eletroímã. Na figura, à esquerda, observa-se um cilindro oco sem fundo, cujo lado identificado pela letra D se encaixa na região central do suporte mostrado na Figura 7. À direita, há um cone com um ímã fixado em sua base, indicada pela letra B, possuindo dimensões idênticas às do ímã localizado na base do pêndulo. Quando o cone é posicionado com o lado B voltado para a massa do pêndulo, a ponta do cone, indicada pela letra A, alinha-se com o centro do sistema.

Figura 9 – Peças impressas para o ajuste do alinhamento



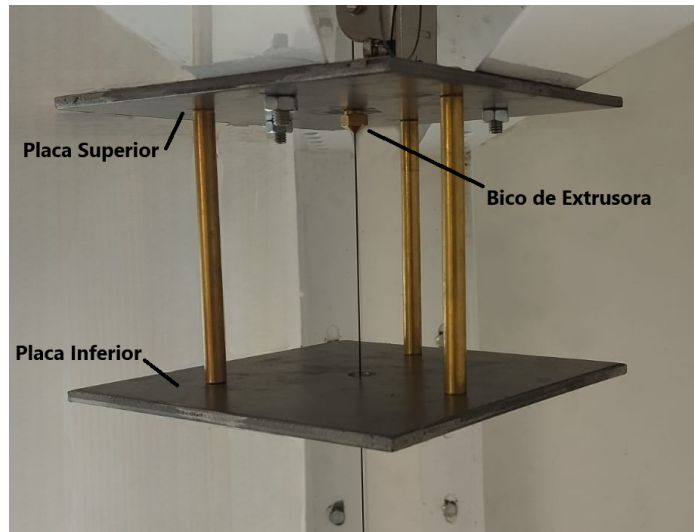
Fonte: Autor

Após posicionar corretamente o ímã, é necessário aguardar o pêndulo estabilizar-se e, então, alinhar a ponta do cone com o pequeno furo no topo do cilindro. Esse procedimento garante a centralidade do conjunto de suporte. Ainda assim, essa etapa não é suficiente para assegurar que o sensor esteja perfeitamente alinhado com o eletroímã.

Este alinhamento foi feito anteriormente, sem que o suporte tenha sido posicionado abaixo do pêndulo. Liga-se o eletroímã e utilizam-se as leituras do eixo z: ao maximizar o valor de campo detectado, garante-se que o sensor está alinhado com o eletroímã, e consequentemente, com o pêndulo.

A Figura 10 mostra o suporte do pêndulo instalado, evidenciando o resultado final da montagem e do alinhamento adequados. Nessa imagem, é possível observar o conjunto totalmente integrado e pronto para a realização dos experimentos.

Figura 10 – Suporte Pêndulo Instalado



Fonte: Autor

3.2.1 Detalhes de Construção

Na Figura 11 vemos o pendulo finalizado fixado na parede com duas mãos-francesas, seu comprimento esta em torno de 2,5 metros, porém, dado que nossa massa não é um ponto uniforme, calcula-se o raio de giração para se determinar uma aproximação melhor do comprimento do pêndulo. Usando o valor de gravidade igual a $9,79m/s^2$ (Grieve; Osinski, 2011).

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (47)$$

$$l = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = \frac{3,257 \cdot 9,79}{39,48} = (2,63 \pm 0,01)m \quad (48)$$

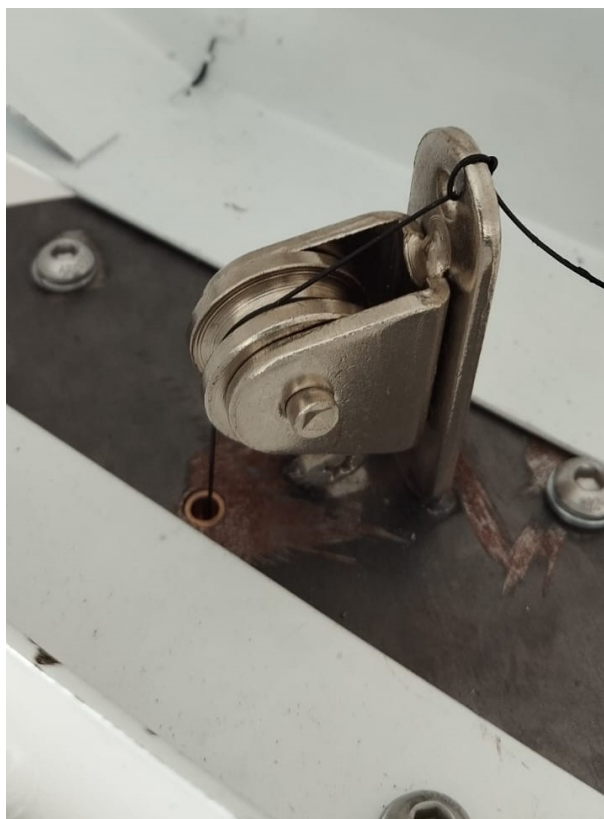
Figura 11 – Pêndulo finalizado



Fonte: Autor

Como apresentado na Figura 12 a polia foi soldada com a base perpendicular à placa, de forma a deixar o vinco da polia centralizado com o furo central. O bico de extrusora foi parafusado neste furo central. O fio foi amarrado num dos furos da base da polia, dando uma volta sobre a mesma no sentido anti-horário e, então, o fio desce através do bico de extrusora para a placa inferior;

Figura 12 – Placa Superior



Fonte: Autor

Após passado pelo bico de extrusora o fio passa pelo anel de Charron, Figura 13. Perceba o anel de tamanho reduzido, este será discutido na Seção 3.3.3, impresso com uma impressora 3D, encaixado no furo da placa inferior que é concêntrico ao furo da placa superior;

Figura 13 – Placa Inferior



Fonte: Autor

A outra ponta do fio passa por um parafuso perfurado ao centro Figura 14 e, depois, este é amarrado em uma porca para impedir que se solte.

Como massa para o pêndulo foi utilizada uma bola de ferro fundido de aproximadamente 7 kg.

A mesma foi perfurada para que o parafuso anterior pudesse ser rosqueado e prender o fio à bola.

Ainda, conforme a Figura 15, foi colocado um ímã na base da bola, o qual servirá de referência para o sensor magnético que será utilizado para detectar a posição do pêndulo.

Com isso, a montagem do sistema de oscilação está completa;

Figura 14 – Terminação inferior do fio



Fonte: Autor

Figura 15 – Ímã posicionado na base da massa



Fonte: Autor

O eletroímã responsável por repor a perda de energia discutida na Seção 3.3.1 e o sensor para fazer a leitura do campo estão destacados na Figura 16;

Figura 16 – Base com sensor e eletroímã



Fonte: Autor

Por fim, vale destacar que em todos os parafusos usados para fixação do suporte foram utilizadas arruelas de pressão para que fosse possível fazer ajustes finos do nível. O suporte para o sensor e o eletroímã contam com parafusos e molas para permitir esse mesmo ajuste fino.

3.3 MOVIMENTOS ELÍPTICOS

Os movimentos elípticos no pêndulo de Foucault representam um desafio significativo para sua operação e para a precisão dos resultados observados. A elipticidade do

movimento, quando presente, gera uma precessão indesejada, que é uma variação no plano de oscilação do pêndulo, desviando-se da trajetória esperada. Esse fenômeno interfere na demonstração pura da rotação da Terra, já que a precessão altera o movimento regular do pêndulo devido a fatores externos, como imperfeições no suporte ou perturbações no ambiente. Esta seção analisa a origem dessa elipticidade, seus impactos no comportamento do pêndulo e como o uso de um anel de Charron (cujo funcionamento será detalhado na Seção 3.3.2), aliado a um sistema eletromagnético de manutenção das oscilações, pode controlar e minimizar esses movimentos. Isso torna o pêndulo mais estável e fiel ao propósito original de demonstrar a rotação da Terra, como idealizado por Foucault.

O movimento do pêndulo de Foucault idealmente deveria ocorrer em um plano fixo, independente da rotação da Terra sob ele. No entanto, na prática, diversos fatores introduzem pequenas forças assimétricas que desviam o pêndulo de sua trajetória linear, criando uma oscilação que adquire uma forma ligeiramente elíptica. As principais causas dessa elipticidade incluem:

- **Assimetria na suspensão:** Qualquer irregularidade na fixação ou na própria estrutura do fio ou cabo de suspensão pode introduzir direções preferenciais de flexão, o que leva o pêndulo a oscilar em trajetórias elípticas.
- **Propriedades intrínsecas do fio:** Em alguns casos, fios metálicos ou de outros materiais podem apresentar rigidez variável, caso o fio não possa ser dobrada com a mesma facilidade em todas as direções pode fazer com que o pêndulo tenda a rodar no sentido em que o fio tem uma menor resistência.

Para mudar o plano de oscilação de um pêndulo simples, é necessário que um torque atue sobre o plano em relação ao seu ponto de suporte. Isso exigiria duas condições: uma força externa com um componente não nulo perpendicular ao plano de oscilação e uma posição fora de seu eixo, no plano do pêndulo, onde essa força externa pudesse ser aplicada.

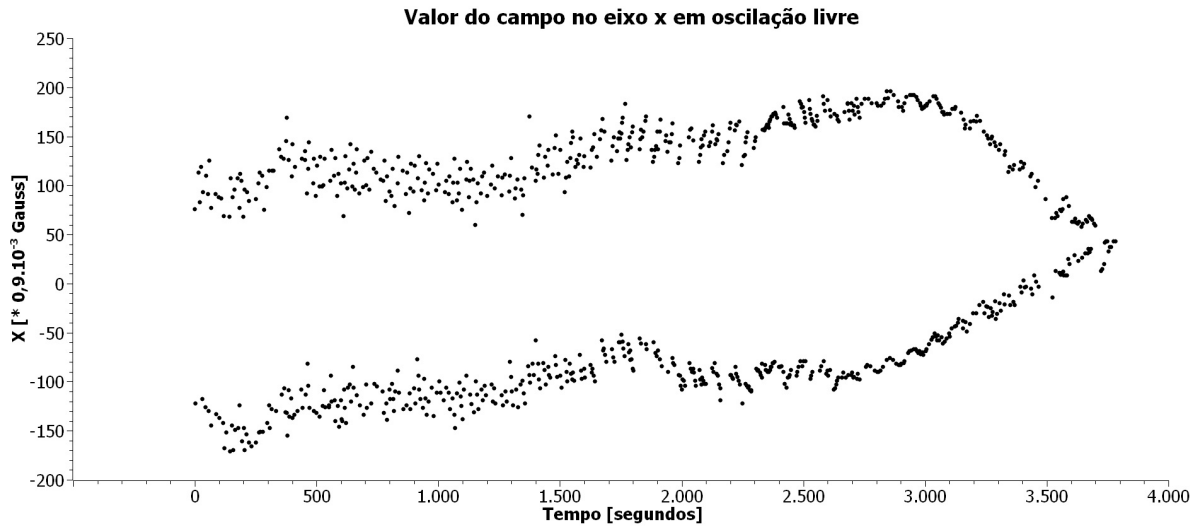
Como explicado anteriormente isso só é possível com um pêndulo feito com materiais ideais o que não é nosso caso. Sendo assim se faz necessário reduzir essas forças indesejadas presentes no plano de oscilação. Dois mecanismos foram utilizados para reduzir essa elipticidade, o anel de Charron e um eletroímã.

3.3.1 Dissipação de Energia

Espera-se que o pêndulo apresente dissipação de energia ao longo do tempo. No entanto, essa dissipação ocorrerá a uma taxa bastante baixa, pois todas as fontes de perda de energia foram minimizadas.

Dessa forma, considera-se que a maior fonte de dissipação de energia possivelmente esteja relacionada à resistência do ar, podemos ver essa dissipação de energia na Figura 17.

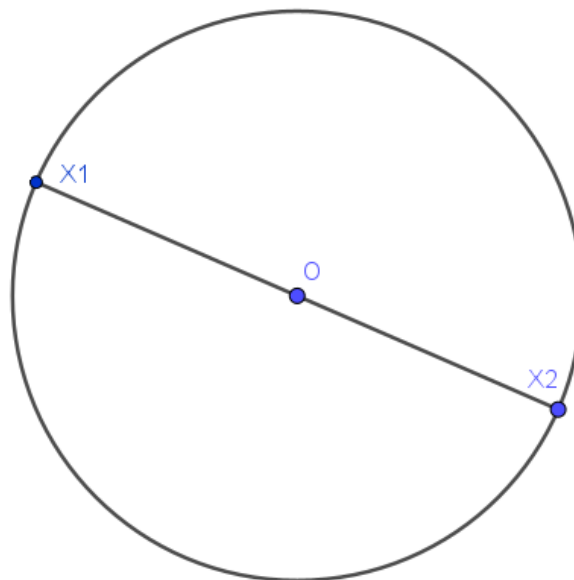
Figura 17 – Perda de energia ao decorrer do tempo



Fonte: Autor

Observa-se que o gráfico apresenta duas linhas para os valores de x . Isso se deve à forma como os dados estão sendo coletados. Esses valores correspondem ao momento em que a massa atinge o limite máximo de sua amplitude, de modo que obtemos dados de ambos os lados da circunferência, conforme ilustrado na Figura 18. A coleta de dados ocorre nos pontos $X1$ e $X2$, e a maneira como isso é feito será discutida na Seção 3.5.

Figura 18 – Vista superior do plano de oscilação



Fonte: Autor

Como os dados desta seção foram coletados sem o uso do eletroímã, observa-se um

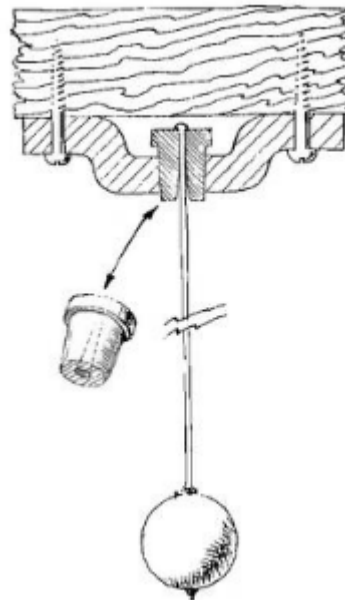
decaimento da amplitude. Apesar de um pouco de ruído, é possível observar na Figura 17 que o valor de campo detectado pelo sensor no eixo X tende a 0. Isso indica que o ímã presente na base do pêndulo se aproxima cada vez mais do centro da oscilação.

3.3.2 Atenuação de movimentos elípticos

O anel de Charron é um dispositivo mecânico posicionado próximo ao ponto de suspensão de um pêndulo de Foucault. Inicialmente M. F. Charron usou uma bucha cônica com um diâmetro que aumentava de acordo com o comprimento como na Figura 19. Para esse trabalho foi usado a adaptação mostrada em Figura 20.

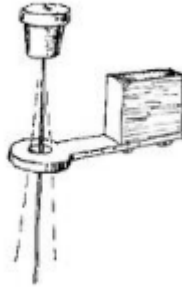
O diâmetro do orifício na extremidade inferior acomodava precisamente o movimento do pêndulo. Observou-se que, quando o pêndulo oscilava de forma linear, o fio apenas fazia contato com a superfície interna da bucha no final de cada oscilação. Por outro lado, se o pêndulo descrevesse uma elipse, e houvesse atrito suficiente entre a bucha e o fio de suspensão, então a borda inferior da bucha funcionaria, por um curto intervalo, como o ponto de suspensão. Nesse caso, o peso descreveria uma elipse um pouco mais estreita durante essa parte do movimento. O mesmo efeito era observado na porção equivalente do movimento de retorno. O efeito acumulativo tendia a reduzir a elipse continuamente, fazendo-a se aproximar da linha reta desejada. (Stong, 1960).

Figura 19 – Anel de Charron Original.



Fonte: (Stong, 1960)

Figura 20 – Anel de Charron Adaptado.



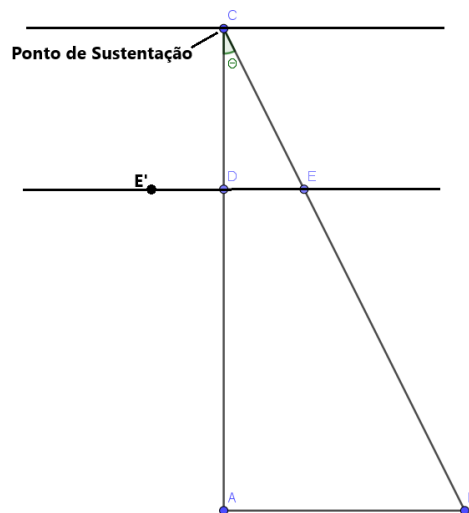
Fonte: (Stong, 1960)

Além do uso do anel de Charron, uma alternativa seria o uso de um ímã de neodímio no centro de oscilação, que também poderia desempenhar a função de reduzir a elipse presente no movimento de oscilação. Isso ocorreria devido à força de atração exercida pelo ímã, que puxaria o pêndulo em direção ao centro a cada passagem. No entanto, essa abordagem não foi utilizada neste trabalho (Diniz, 2023).

3.3.3 Definição diâmetro do anel de Charron

Dado a Figura 21, sendo o ponto C a ponta do bico de extrusora, o segmento $\overline{CD}$ a distância até o centro do anel de Charron, o segmento $\overline{DE}$ metade do diâmetro do anel, $\overline{E'E}$ o diâmetro total do anel e $\overline{CA}$ o comprimento total do pêndulo.

Figura 21 – Estimativa do diâmetro do Anel de Charron para a amplitude desejada.



Fonte: Autor

Os espaçadores têm 10 cm de comprimento, enquanto o anel de Charron, inicialmente utilizado, mede 1 cm, o que resulta em uma amplitude de oscilação, $\overline{AB} * 2$, calculada da seguinte forma:

$$\tan \theta = \frac{\overline{DE}}{\overline{CD}} = \frac{0,005}{0,1} = 0,05 \quad (49)$$

$$\theta = 2,86^\circ \quad (50)$$

$$\tan \theta = \frac{\overline{AB}}{\overline{CA}} = \frac{x}{2,5} \quad (51)$$

$$\overline{AB} = 12,5 \text{ cm} \quad (52)$$

Após testes usando essa amplitude de 12,5 cm percebemos que o sensor tem um melhor desempenho nas proximidades do sensor, devido a isso foi impresso um novo anel de Charron que se encaixa no anel atual. Esse novo anel tem um diâmetro de 6 mm, usando os mesmos métodos demonstrados acima calcula-se a nova amplitude, esta passa a ser 7,5 cm.

3.4 ESTUDO DO SENSOR HMC5883L

O sensor HMC5883L é um magnetômetro de três eixos amplamente utilizado em aplicações que requerem medições precisas do campo magnético local, tais como navegação, orientação e detecção de posição em relação ao campo magnético terrestre. Sua popularidade deriva da integração relativamente simples com microcontroladores, via interface I^2C , e da boa relação custo-benefício, tornando-o uma opção atrativa tanto para projetos amadores quanto para aplicações mais profissionais.

Do ponto de vista construtivo, o HMC5883L emprega elementos magneto-resistivos sensíveis a pequenas variações do campo magnético. Através de circuitos internos, o sensor converte essas variações em sinais elétricos proporcionais ao nível do campo, permitindo assim leituras bastante precisas (na ordem de mili gauss) e a determinação da intensidade e direção do campo magnético em três dimensões.

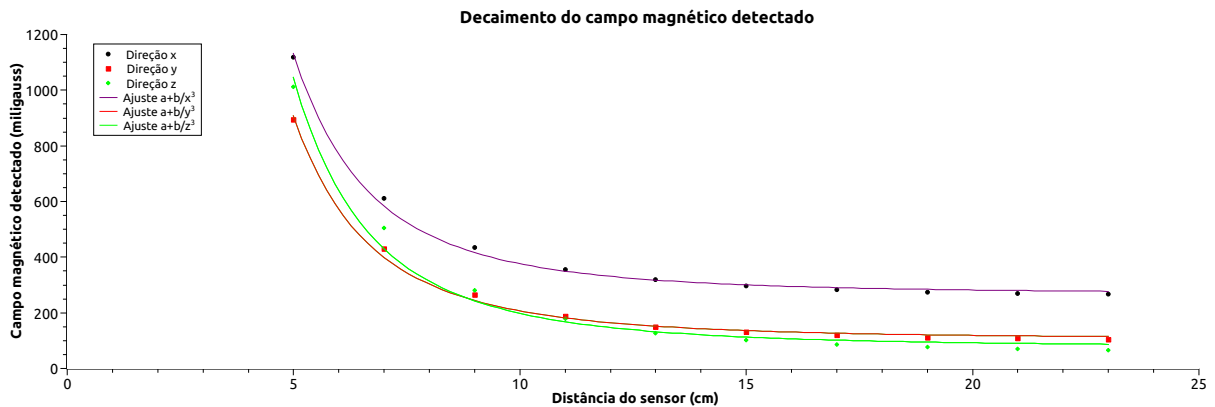
O sensor opera dentro de uma faixa de tensão típica de 3,3 V a 5 V, possui baixo consumo de energia e disponibiliza recursos internos de calibração e compensação. Tais características tornam a leitura do campo magnético relativamente simples, estável e confiável.

O campo magnético de um ímã é descrito por um dipolo magnético, de modo que a intensidade do seu campo será proporcional ao inverso do cubo da distância, isto é, $B \propto \frac{1}{r^3}$.

A Figura 22 apresenta o gráfico dos valores de campo magnético medidos pelo HMC5883L em função da distância até uma fonte magnética. As medições experimentais foram realizadas posicionando-se o sensor a diferentes distâncias da fonte, registrando-se os valores obtidos. Em seguida, um ajuste por regressão dos dados experimentais à função

$y = a/r^3$ foi aplicado, demonstrando excelente concordância entre o modelo teórico e os valores obtidos experimentalmente. Este resultado corrobora a hipótese de que o campo magnético gerado pela fonte diminui de intensidade com o cubo da distância, tal como previsto pelo formalismo teórico de campos dipolares.

Figura 22 – Decaimento do valor de campo detectado nos eixos



Fonte: Autor

A constatação desse decaimento cúbico do campo magnético não só comprova a qualidade das medições realizadas pelo sensor, mas também oferece embasamento empírico sólido para a validade do modelo teórico. Dessa forma, o HMC5883L mostra-se não apenas um componente prático e de fácil integração para projetos, mas também um sensor confiável no sentido de reproduzir fenômenos físicos fundamentais esperados na análise de campos magnéticos.

3.4.1 Configuração do HMC5883L

Como pode ser visto no datasheet presente no Anexo A, o sensor tem algumas configurações que são necessárias de serem feitas antes do seu uso. As principais configurações feitas são as seguintes

Tabela 1 – Modo de Controle (MODE)

Modo de Controle (MODE)	Value
Standby	0x00
Continuous	0x01

No Apêndice B temos o código usado no microcontrolador. Nele fazemos o uso da biblioteca QMC5883LCompass, a a qual possui a função chamada `compass.init()`, que inicializa o sensor com algumas configurações escolhidas. No experimento foram usados os seguintes parâmetros:

- Modo de controle = Contínuo

Tabela 2 – Taxa de Dados de Saída (ODR)

Taxa de Dados de Saída (ODR)	Value
10Hz	0x00
50Hz	0x04
100Hz	0x08
200Hz	0x0C

Tabela 3 – Faixa de Medição (RNG)

Faixa de Medição (RNG)	Value
2G	0x00
8G	0x10

Tabela 4 – Taxa de Oversampling (OSR)

Taxa de Oversampling (OSR)	Value
64	0xC0
128	0x80
256	0x40
512	0x00

- Taxa de dados de saída = 200Hz
- Faixa de medição = 8G
- Taxa de oversampling = 512

3.5 PROGRAMAÇÃO E COLETA DE DADOS

A lógica do experimento é dividida entre duas partes: o código do microcontrolador (Apêndice B), responsável por ler continuamente os valores do campo magnético (x, y, z) e identificar os vales da oscilação (pontos de retorno do pêndulo), e o código em Python (Apêndice A), responsável por receber esses dados via porta serial, calcular os ângulos, estatísticas e salvar os resultados.

Inicialmente, o microcontrolador envia constantemente os dados brutos (x, y, z e *trigger*) via comunicação serial ao computador. Esses dados são armazenados em um arquivo dedicado. Em seguida, o código em Python processa os dados, calcula ângulos, média, desvio padrão e desvio padrão da média, gerando um segundo arquivo com esses resultados processados.

A variável *trigger* mencionada anteriormente é do tipo inteiro e é usada para indicar o momento em que o pêndulo atinge o ponto máximo de sua excursão.

3.5.1 Código no microcontrolador (Apêndice B)

O microcontrolador implementa uma máquina de estados simples para detectar mudanças no sinal magnético ao longo do tempo, utilizando as leituras do eixo z .

Todo o controle do eletroímã é realizado com base nos dados das leituras no eixo z . A oscilação do pêndulo gera uma onda senoidal que serve como referência para o controle. Os vales desse sinal indicam os pontos de amplitude máxima, enquanto os cumes correspondem aos momentos em que o pêndulo passa pelo centro do sistema.

Na função *void loop*, destacada abaixo, observa-se que a função *Verifica Sinal* não desempenha nenhum papel no controle do eletroímã. O controle é realizado de forma proporcional à amplitude apresentada pelo pêndulo no momento, utilizando as leituras de z (com um offset arbitrário de -4000 aplicado para manter o sinal sempre negativo).

Na função *void loop*, destacada abaixo, observa-se que a função *Verifica Sinal* não desempenha nenhum papel no controle do eletroímã. O controle é realizado de forma proporcional à amplitude apresentada pelo pêndulo no momento, utilizando as leituras de z (com um offset arbitrário de -4000 aplicado para manter o sinal sempre negativo). Esse valor de -4000 foi escolhido especificamente para garantir que o valor de z nunca passe pelo zero, evitando ambiguidade na identificação do comportamento do pêndulo e simplificando a lógica de controle.

O comportamento do eletroímã é ajustado com base no valor da amplitude atual do pêndulo:

- Quando a diferença entre as duas últimas leituras é positiva, indicando que o pêndulo está se aproximando do centro, o eletroímã é mantido desligado.
- Assim que a diferença torna-se negativa, indicando que o pêndulo passou pelo centro, o eletroímã é ativado. A ativação continua até que a leitura de z atinja o limite definido pela função *ponto médio*.
- Após ultrapassar esse limite, o eletroímã é desligado até o próximo ciclo.

Esse controle proporcional permite ajustar a ativação do eletroímã conforme a amplitude do pêndulo, garantindo eficiência no sistema e minimizando interferências na oscilação natural.

```
1 void loop()
2 {
3     GetValues();
4     PlotXYZ();
5
6     double z_dif = z_data[1] - z_data[0];
7
8     VerificaSinal();
9
10    int pontoMedioZ = PontoMedioZ(z_value, 0.18);
11    if (z_dif > 0) // && z_value > pontoMedioZ
12    {
13        Desliga();
```

```
14     }
15     else if ( z_dif < 0  && z_value > pontoMedioZ)
16     {
17         Empurra();
18     }
19     else
20     {
21         Desliga();
22     }
23
24     delay(50);
25 }
```

3.5.1.0.1 Verifica Sinal

Este trecho do código monitora o sinal z para identificar pontos de vale. Quando o estado $c = 1$ detecta que o sinal começou a diminuir, muda-se para $c = 2$. Em $c = 2$, aguarda-se o momento em que o sinal volta a subir. Ao detectar essa mudança de tendência, retorna-se ao estado $c = 1$ e define-se $trigger = 1$, sinalizando a ocorrência de um vale, o que indica os pontos de retorno do pêndulo.

3.5.1.0.2 Ponto Médio

Outra parte do código microcontrolador calcula um "ponto médio" dinâmico a partir dos últimos 100 valores de z . Esse valor serve como referência para controlar o tempo de acionamento do eletroímã, garantindo que ele atue apenas pelo intervalo necessário, reduzindo interferências na trajetória do pêndulo. Esta função também recebe como parâmetro um fator para que seja calculado um percentual desse ponto médio, o que faz com que o limite de acionamento do eletroímã seja facilmente alterado.

3.5.2 Processamento em Python (Apêndice A)

O código em Python recebe os dados brutos do microcontrolador, identificando o momento exato em que $trigger = 1$, o que indica que um vale do sinal foi encontrado. Nesse instante, o script em Python calcula o ângulo do plano de oscilação, bem como as estatísticas associadas aos conjuntos de dados, armazenando tais resultados em outro arquivo.

3.5.2.0.1 Cálculo do Ângulo

Para determinar o ângulo, consideram-se dois pontos consecutivos (x_0, y_0) e (x_1, y_1) . Calcular o vetor deslocamento $(\Delta x, \Delta y)$ e aplicar atan2 fornece o ângulo em relação ao eixo x . Após converter o ângulo para graus, caso seja negativo, ajusta-se para o intervalo $[0^\circ, 180^\circ]$, obtendo assim o ângulo desejado.

3.5.2.0.2 Média, Desvio Padrão e Desvio Padrão da Média

Dado um conjunto de amostras de ângulo, é possível calcular a média, o desvio padrão e o desvio padrão da média (dividindo o desvio padrão por $\sqrt{N}$). Enquanto a média fornece um valor central, o desvio padrão indica a dispersão dos dados, e o desvio padrão da média quantifica a incerteza na estimativa da média.

3.5.3 Armazenamento dos Dados

Ao final, dois arquivos são gerados:

- Um arquivo com os dados brutos provenientes da porta serial (valores de x, y, z e *trigger*).
- Um arquivo contendo o valor médio de θ , além do desvio padrão e do desvio padrão da média, obtidos após o processamento em Python.

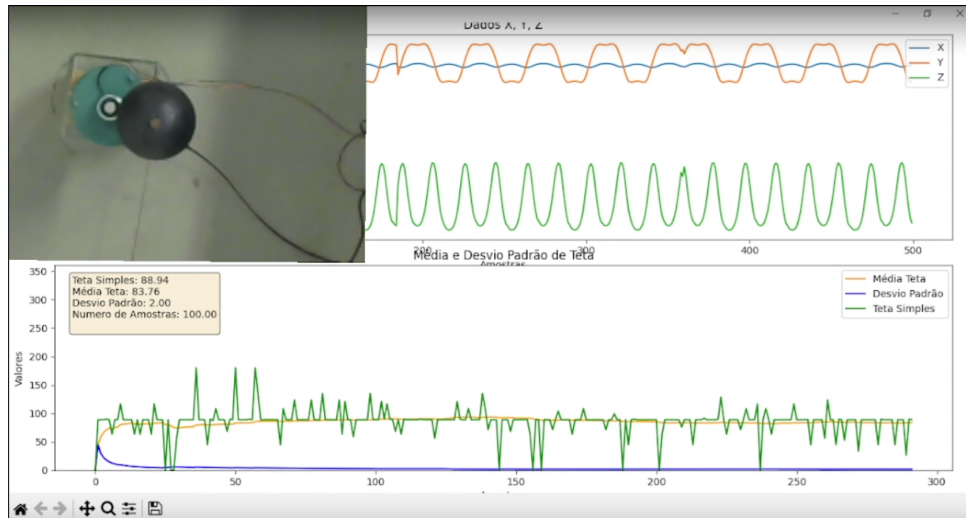
Dessa forma, tem-se toda a cadeia de aquisição e processamento do sinal: do microcontrolador, que realiza a leitura e detecção de vales (Apêndice B), até o Python, que calcula ângulos e estatísticas (Apêndice A), fornecendo uma visão completa do comportamento do pêndulo.

3.6 MONITORAMENTO REMOTO

Devido à longa duração do experimento, foi configurado um computador com acesso remoto para permitir pequenas modificações no sistema sem a necessidade de intervenção física constante. Como cada alteração no código requer várias horas até que o sistema alcance um novo estado de equilíbrio e permita verificar se o resultado desejado foi atingido, essa ferramenta mostrou-se essencial para otimizar o processo de ajustes e evitar interrupções prolongadas no andamento do experimento.

O uso combinado dos gráficos em tempo real e a vista de cima com uma câmera possibilitou o controle do experimento a qualquer momento. Uma captura de tela com os gráficos gerados está presente na Figura 23

Figura 23 – Resultado do script em Python presente no Anexo A

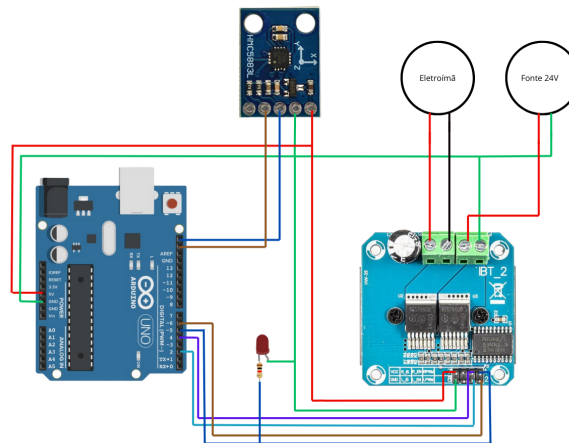


Fonte: Autor

3.7 CIRCUITO

A Figura 24 apresenta o esquema elétrico do sistema. Nele, o microcontrolador está conectado ao sensor HMC5883L por meio dos pinos I^2C (SDA e SCL). Além disso, utiliza-se uma ponte H para o acionamento do eletroímã, alimentado por uma fonte externa de 18,6V, permitindo assim controlar o sentido da corrente aplicada. O circuito inclui ainda um LED conectado ao mesmo pino que aciona a ponte H, fornecendo uma indicação visual do momento em que o eletroímã é energizado.

Figura 24 – Circuito Completo



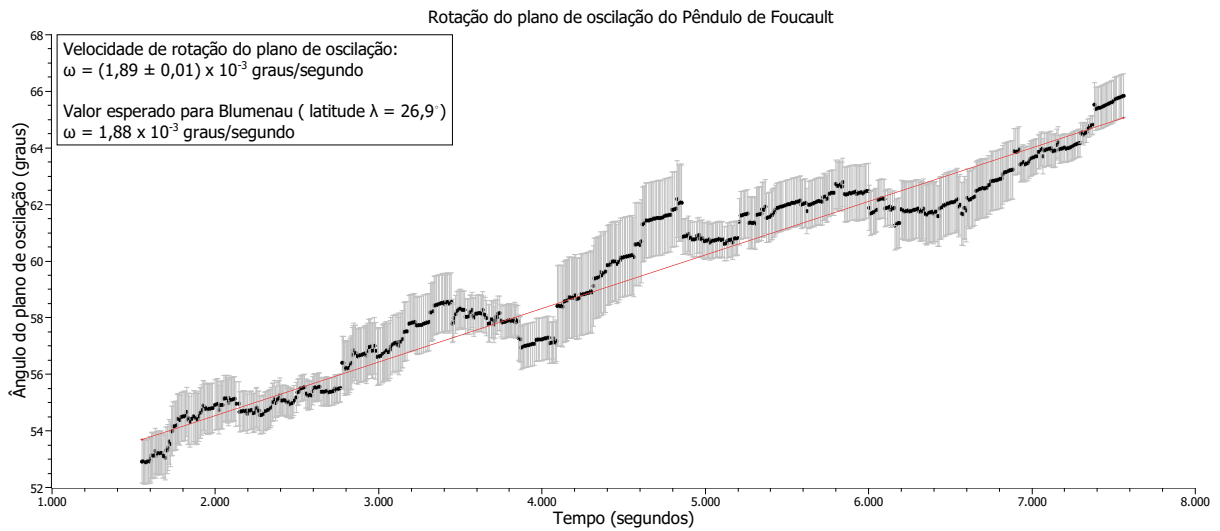
Fonte: Autor

4 RESULTADOS

De modo a termos uma base comparativa, foi calculado o tempo necessário para uma volta completa do pêndulo. Considerando que Blumenau está a uma latitude de $26,9^\circ$, de acordo com a Equação (42) temos: $T = \frac{24h}{\sin 26,9^\circ} = 53,33h$. Um período de rotação de 53,3h resulta em $6,75^\circ/hora$.

Observou-se que o pêndulo leva algumas horas para parar de oscilar, mesmo sem o uso do eletroímã. Portanto para reduzir fontes de erro e verificar se estava realmente funcionando, foi conduzido um experimento sem o eletroímã. Os dados obtidos são apresentados na Figura 25.

Figura 25 – Rotação do Plano de Oscilação



Fonte: Autor

Ao realizar o ajuste linear, obtém-se uma reta definida por $y = A \cdot x + B$, com os seguintes valores ajustados: o coeficiente angular (A , inclinação) é $0,001891 \pm 1,34 \times 10^{-5}$ e o coeficiente linear (B) é $50,764 \pm 0,066$.

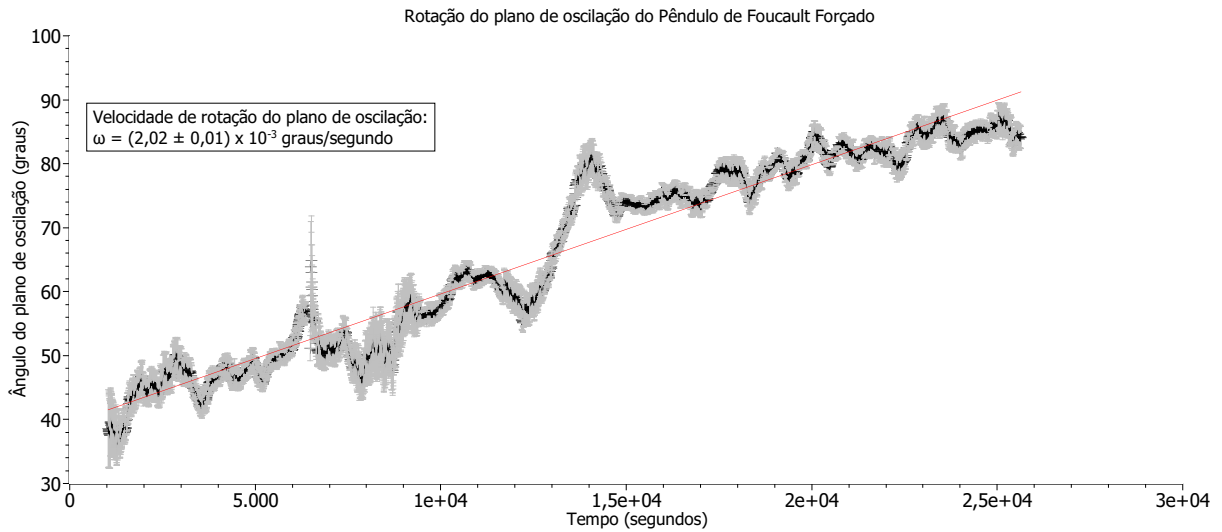
Resultando em: $\omega = (1,89 \pm 0,01) \cdot 10^{-3} \text{ graus/segundo}$ que equivale a $6,80^\circ/hora$. Resultado esse apenas 0,74% a mais em relação ao esperado.

Este resultado mostra que o experimento teve sucesso em demonstrar a rotação da Terra com uma precisão muito satisfatória. Isso implica que toda a construção do pêndulo está boa, qualquer efeito que pudesse estar provindo de um erro de montagem não é suficiente para causar erros na medida.

No experimento conduzido com o uso do eletroímã encontramos resultados um pouco diferentes como visto na Figura 26

Ao realizar o ajuste linear, obtém-se uma reta definida por $y = A \cdot x + B$, com os seguintes valores ajustados: o coeficiente angular (A , inclinação) é $0,002022 \pm 2,78 \times 10^{-6}$

Figura 26 – Rotação do Plano de Oscilação



Fonte: Autor

e o coeficiente linear (B) é $39,383 \pm 0,043$.

Conduzido por aproximadamente 6 horas, a inclinação obtida de $\omega = (2,02 \pm 0,01) \cdot 10^{-3} \text{ graus/segundo} = 7,27^\circ/\text{hora}$. Isso dá uma diferença percentual de 7,73% em relação ao esperado, ainda sendo um resultado satisfatório.

Após alguns testes, ficou claro que as menores perturbações fazem com que o sistema não funcione adequadamente.

O uso do eletroímã por mais tempo do que o absolutamente necessário para manter a oscilação com amplitude suficiente para que o fio encoste no anel altera a dinâmica do sistema. O resultado anterior foi obtido ligando o eletroímã para empurrar a massa depois que essa passa pelo centro, por 18% da amplitude no eixo z. Ou seja, ao chegar em 18% da amplitude em z o eletroímã é desligado.

Foram realizados experimentos com diversas configurações para ativar o eletroímã. Em especial, um pequeno pulso de energia para fazer com que o eletroímã puxe a massa quando esta se encontra na amplitude máxima causa uma ressonância, fazendo com que a amplitude aumente consideravelmente.

No fim, chega-se a conclusão que, assim como Schumacher(2009), a melhor configuração para o eletroímã é um pequeno empurrão logo após o pêndulo passar pelo centro.

O sistema com o uso do anel de Charron leva aproximadamente 30 minutos para entrar em estabilidade, mesmo fazendo um lançamento elíptico, após esse tempo percebe-se claramente uma grande redução desse movimento indesejado.

Outro ponto que vale ser destacado é o nivelamento do ímã na base da massa, assim como o alinhamento do eletroímã. No caso do ímã da base, uma leve inclinação para qualquer lado causa grandes variações na leitura do campo no eixo z, uma vez que

este é usado como gatilho para o acionamento do eletroímã e os vales dessas leituras usados para marcar o tempo em que as medidas tem que ser feitas. Não ter uma leitura limpa desses dados se mostra bastante problemático impactando todo o sistema, fazendo com que o controle do processo não funcione.

4.1 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento do projeto demonstrou com sucesso a viabilidade de construção de um pêndulo de Foucault em escala reduzida, capaz de evidenciar a rotação da Terra de maneira clara e didática. A implementação combinou elementos de engenharia mecânica, eletrônica e computação para minimizar desafios como dissipação de energia e movimentos elípticos, garantindo a estabilidade do sistema e a precisão dos resultados.

Os experimentos realizados validaram as premissas teóricas, com resultados que corroboram o esperado para a latitude de Blumenau, apresentando uma diferença de apenas 0,74% em relação ao valor teórico. Essa precisão reflete o cuidado na construção do protótipo, na configuração dos sensores e no alinhamento dos componentes.

É importante notar que não foi obtido sucesso em manter o pêndulo oscilando até que ele completasse 360° de rotação. Com o passar do tempo o pêndulo passava a ficar preso em um plano parando a rotação. A seguir, discorre-se sobre alguns fatores que podem explicar esse comportamento.

Para montagem foi usada uma base metálica com 3 apoios separados em 120° . Esse suporte, que tem regulagem de altura, foi usado para posicionar o suporte do sensor próximo ao pêndulo. Além de se ter uma mesa com peças metálicas próxima do experimento, segundo Schumacher(2009) esses objetos podem causar interferência no sistema. Não houve tempo para se fazer um longo teste após a remoção do suporte metálico.

Outro ponto observado foi o desgaste do anel de Charron, impresso em plástico, que começou a apresentar sinais de deformação em um ponto específico com o passar do tempo. Esse desgaste pode ter introduzido erros adicionais no sistema. A substituição dessa peça por uma fabricada em um material mais resistente é uma possível melhoria que poderia aumentar a estabilidade e a eficiência do experimento.

Por fim, demonstrou-se que, mesmo com uma abordagem mais simples em termos de equipamentos, utilizando materiais amplamente disponíveis e de baixo custo, é possível obter resultados satisfatórios para verificar a rotação do plano de oscilação de um pêndulo de Foucault e, conseqüentemente, inferir o movimento de rotação da Terra. Isso contrasta com propostas mais precisas e complexas, como as apresentadas nos estudos de Babovic, Plewes, Witzel e Schumacher, que utilizam metodologias e equipamentos mais avançados.

REFERÊNCIAS

BABOVIĆ, Vukota M.; MEKIC, S. The Bravais pendulum: The distinct charm of an almost forgotten experiment. **European Journal of Physics**, v. 32, n. 4, p. 1077–1086, 2011.

CREASE, Robert. **Os dez mais belos experimentos científicos**. Tradução: Claudio Angelo. São Paulo: Zahar, 2006. ISBN 978-8571109461.

DINIZ, Eduardo Moraes. On the Foucault Pendulum. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 45, e20220325, 2023.

FÍSICAEMCLASSE. **O formato da Terra e seu movimento de rotação**. [S.l.: s.n.], 2018. <https://fisicaemclasse.blogspot.com/2018/09/o-formato-da-terra-e-seu-movimento-de.html>. Acesso em: 11 dez. 2024.

GREINER, Walter. **Classical Mechanics: Systems of Particles and Hamiltonian Dynamics**. 2nd. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010. Translated from the German *Mechanik: Teil 2*, published by Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt am Main, Germany, ©1989. ISBN 978-3-642-03433-6.

GRIEVE, Richard A. F.; OSINSKI, Gordon R. Impact Craters on Earth. In: GUPTA, Harsh K. (ed.). **Encyclopedia of Solid Earth Geophysics**. [S.l.]: Springer Science+Business Media B.V., 2011. p. 594–598.

ISLAM, E. The Making of India's First Short-Length Sustained Foucault Pendulum and the New Design. **Propagation: A Journal of Science Communication**, v. 145, p. 145–151, 2005.

NATIONAL GEOGRAPHIC SOCIETY. **Coriolis Effect**. [S.l.: s.n.], 2024. Acessado em: 24 de novembro de 2024. Disponível em: <https://education.nationalgeographic.org/resource/coriolis-effect/>.

PLEWES, D. B. Magnetic Monitoring of a Small Foucault Pendulum. **Review of Scientific Instruments**, v. 89, n. 6, p. 065112, 2018.

SCHUMACHER, Reinhard A.; TARBET, Brandon. A Short Foucault Pendulum Free of Ellipsoidal Precession. **arXiv**, mar. 2009. Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA 15213.

STONG, C. L. **The Scientific American Book of Projects for New York 1960** Simon and Schuster. 1. ed. Rockefeller Center, 630 Fifth Avenue New York 20, N. Y.: The Murray Printing Company, 1960. p. 605.

WITZEL, John. Pendulums and Our Spinning World. **IEEE Instrumentation & Measurement Magazine**, v. 8, n. 3, p. 57–60, 2005.

APÊNDICE A – Código Python

```
1 import serial
2 import datetime
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 from matplotlib.animation import FuncAnimation
5 import numpy as np
6 import keyboard # Biblioteca para detectar teclas pressionadas
7 import os
8 import csv
9 import math
10
11 # Configurações da comunicação serial
12 PORT = "COM3" # Substitua pela porta correta do seu Arduino
13 BAUD_RATE = 9600 # Deve ser o mesmo definido no Arduino
14 OUTPUT_FILE_CSV = "arduino_log.csv"
15 OUTPUT_FILE_TETA_CSV = "arduino_log_teta.csv"
16
17 # Variáveis globais para armazenar dados
18 x_data, y_data, z_data = [], [], []
19 teta_amostras, teta_media_data, teta_std_data = [], [], []
20 teta_amostras_show = []
21 count = 0
22 x,y = [0,0], [0,0]
23
24 def CalcAngulo(x_value, y_value):
25     # Armazena os valores com base no estado
26
27     global count # Declara que 'count' é global
28     global x, y # Declara que 'x' e 'y' são globais
29
30     x[count] = x_value
31     y[count] = y_value
32
33     count += 1
34
35     teta = None
36
37     if count == 2:
38         count = 0
39         x_dif = x[1] - x[0]
40         y_dif = y[1] - y[0]
```

```
41 angulo_radianos = math.atan2(y_dif, x_dif)
42 angulo_graus = angulo_radianos * (180.0 / math.pi)
43 teta = angulo_graus
44
45 # Ajusta o ângulo se for negativo
46 if teta < 0:
47     teta += 180
48
49 return teta # Retorna o ângulo calculado (opcional)
50
51
52 # Função para salvar os dados em CSV com data e hora separadas
53 def save_to_csv_date_time(log_entry, file_name, headers):
54     """
55     Salva a entrada de log em um arquivo CSV com data e hora
56     separadas, preservando os dados existentes.
57
58     :param log_entry: Lista com os dados a serem salvos (ex: [date,
59     time, x, y, z, teta, trigger]).
60     :param file_name: Nome do arquivo CSV onde os dados serão salvos.
61     :param headers: Lista com os cabeçalhos do arquivo.
62     """
63
64     # Verifica se o arquivo existe para decidir sobre o cabeçalho
65     file_exists = os.path.exists(file_name)
66
67     with open(file_name, mode='a', newline='', encoding='utf-8') as
68         file:
69         writer = csv.writer(file)
70
71         # Escreve o cabeçalho apenas se o arquivo não existir
72         if not file_exists:
73             writer.writerow(headers)
74
75         # Escreve os dados
76         writer.writerow(log_entry)
77
78 # Função para atualizar o gráfico de X, Y, Z
79 def update_xyz(frame, ser, x_data, y_data, z_data, ax_xyz):
80     try:
81         # Lê dados da porta serial
82         line = ser.readline().decode('utf-8').strip()
83         if line:
```

```
80 #print(f"Recebido: {line}") # Exibe no terminal
81 try:
82 x, y, z, trigger = map(float, line.split(";"))
83
84 # Atualiza os dados de X, Y, Z
85 x_data.append(x)
86 y_data.append(y)
87 z_data.append(z)
88
89 # Mantém no máximo 500 amostras
90 if len(x_data) > 500:
91 x_data.pop(0)
92 y_data.pop(0)
93 z_data.pop(0)
94
95 # Atualiza o gráfico X, Y, Z
96 ax_xyz.clear()
97 ax_xyz.plot(range(len(x_data)), x_data, label="X")
98 ax_xyz.plot(range(len(y_data)), y_data, label="Y")
99 ax_xyz.plot(range(len(z_data)), z_data, label="Z")
100 ax_xyz.legend(loc="upper right")
101 ax_xyz.set_title("Dados X, Y, Z")
102 ax_xyz.set_xlabel("Amostras")
103 ax_xyz.set_ylabel("Valores (Auto Range)")
104
105 # Salva os dados no arquivo CSV
106 now = datetime.datetime.now()
107 log_entry = [now.date(), now.time(), x, y, z, trigger]
108 save_to_csv_date_time(log_entry, OUTPUT_FILE_CSV, ["Data", "Hora",
109     , "X", "Y", "Z", "Trigger"])
110 except ValueError:
111 print(f"Erro no formato da linha: {line}")
112 except UnicodeDecodeError:
113 print("Erro ao decodificar a linha recebida.")
114
115 # Função para atualizar o gráfico de Teta
116 def update_teta(frame, ser, teta_amostras, teta_media_data,
117     teta_std_data, ax_teta):
118 try:
119 # Lê dados da porta serial
120 line = ser.readline().decode('utf-8').strip()
121 if line:
```

```
120 try:
121 x, y, z, trigger = map(float, line.split(";"))
122
123 # Armazena o valor de Teta se trigger for 1
124 if trigger == 1:
125 resultado = CalcAngulo(x, y)
126 if resultado is not None:
127 teta_amstras.append(resultado)
128 teta_amstras_show.append(resultado)
129
130 # Mantém no máximo 100 amostras
131 if len(teta_amstras) > 100:
132 teta_amstras.pop(0)
133 if len(teta_amstras_show) > 1000:
134 teta_amstras_show.pop(0)
135
136 # Calcula a média e o desvio padrão das amostras
137 media_teta = np.mean(teta_amstras)
138 std_teta = np.std(teta_amstras, ddof=1) if len(teta_amstras) >
    1 else 0
139 std_teta = std_teta / math.sqrt(len(teta_amstras))
140
141
142 # Atualiza os dados da média e do desvio padrão
143 teta_media_data.append(media_teta)
144 teta_std_data.append(std_teta)
145
146 # Mantém no máximo x amostras para o gráfico
147 if len(teta_media_data) > 1000:
148 teta_media_data.pop(0)
149 teta_std_data.pop(0)
150
151 # Atualiza o gráfico de Teta
152 ax_teta.clear()
153
154 # Plota os dados atualizados
155 ax_teta.plot(range(len(teta_media_data)), teta_media_data, label=
    "Média Teta", color="orange")
156 ax_teta.plot(range(len(teta_std_data)), teta_std_data, label="
    Desvio Padrão", color="blue")
157 ax_teta.plot(range(len(teta_amstras_show)), teta_amstras_show,
    label="Teta Simples", color="green")
```



```
158
159 # Exibe os valores abaixo da legenda
160 texto_valores = (
161 f"Teta Simples: {resultado:.2f}\n"
162 f"Média Teta: {media_teta:.2f}\n"
163 f"Desvio Padrão: {std_teta:.2f}\n"
164 f"Numero de Amostras: {len(teta_amostras):.2f}\n"
165 )
166 ax_teta.text(
167 0.02, 0.95, texto_valores, transform=ax_teta.transAxes, fontsize
    =10,
168 verticalalignment='top', bbox=dict(boxstyle="round", facecolor="
    wheat", alpha=0.5)
169 )
170
171 # Configura a legenda e o título
172 ax_teta.legend(loc="upper right", fontsize=10)
173 ax_teta.set_title("Média e Desvio Padrão de Teta")
174 ax_teta.set_xlabel("Amostras")
175 ax_teta.set_ylabel("Valores")
176 ax_teta.set_ylim(0, 360) # Travando o eixo Y de 0 a 360
177
178 # Salva os dados de Teta no arquivo CSV
179 now = datetime.datetime.now()
180 log_entry = [now.date(), now.time(), media_teta, std_teta]
181 save_to_csv_date_time(log_entry, OUTPUT_FILE_TETA_CSV, ["Data", "
    Hora", "Média Teta", "Desvio Padrão"])
182 except ValueError:
183 print(f"Erro no formato da linha: {line}")
184 except UnicodeDecodeError:
185 print("Erro ao decodificar a linha recebida.")
186
187
188 def main():
189 try:
190 # Conecta a porta serial
191 with serial.Serial(PORT, BAUD_RATE, timeout=1) as ser:
192 print(f"Conectado a porta {PORT} com baud rate {BAUD_RATE}")
193 print("Pressione 'q' para sair do programa.")
194
195 # Configuração dos gráficos
196 fig, (ax_xyz, ax_teta) = plt.subplots(2, 1, figsize=(10, 8))
```

```
197 ani_xyz = FuncAnimation(  
198 fig, update_xyz, fargs=(ser, x_data, y_data, z_data, ax_xyz),  
    interval=50, cache_frame_data=False  
199 )  
200 ani_teta = FuncAnimation(  
201 fig, update_teta, fargs=(ser, teta_amostras, teta_media_data,  
    teta_std_data, ax_teta), interval=50, cache_frame_data=False  
202 )  
203 plt.tight_layout()  
204  
205 # Loop principal para verificar a tecla 'q'  
206 while not keyboard.is_pressed('q'):  
207     plt.pause(0.01) # Atualiza os gráficos e verifica o teclado  
208  
209     print("Saindo do programa...")  
210     plt.close() # Fecha os gráficos  
211 except serial.SerialException as e:  
212     print(f"Erro ao acessar a porta serial: {e}")  
213 except KeyboardInterrupt:  
214     print("\nGravação interrompida pelo usuário.")  
215  
216 if __name__ == "__main__":  
217     main()
```

APÊNDICE B – Código Microcontrolador

```

1  #include <QMC5883LCompass.h>
2  #include <math.h>
3  #include <limits.h>
4
5  QMC5883LCompass compass;// biblioteca do sensor QMC5883L
6
7  #define R_PWM 53
8  #define L_PWM 52
9
10 #define R_Enable 51
11 #define L_Enable 50
12
13 #define VCC_PonteH 47
14
15 #define Led1 22
16 #define Led2 24
17
18 #define VETOR_SIZE 100
19
20 bool trigger = 0; //indica que uma nova mediada de angulo foi
    feita
21
22 int buffer[VETOR_SIZE];
23 int write_index = 0;    // Índice para a próxima escrita
24 int current_size = 0;   // Quantos valores já foram inseridos (at
    é o máximo de 100)
25 int index = 0;
26 int c = 1;
27
28 unsigned long previousMillis = 0;
29
30 double x_value, y_value, z_value;
31 double x_offset, y_offset, z_offset;
32
33 double z_data[2] = {0.0, 0.0};
34 double x_data[2] = {0.0, 0.0};
35 double y_data[2] = {0.0, 0.0};
36 double z_MinMax[100] = {};
37 double z_dif_dif[2] = {0.0, 0.0};
38 double somaQuadrados = 0;

```

```
39
40 double x_0, y_0;
41 double teta = 0;
42
43
44 void setup() {
45     Serial.begin(9600); //
46
47     compass.init(); //inicia o sensor magnético
48     compass.setSmoothing(10, true);
49     x_offset = 5;
50     y_offset = -290;
51     z_offset = -4000;
52     compass.setCalibrationScales(0.1,0.1,0.1);// define a
        escala dos dados do sensor magnético
53
54     pinMode(R_PWM, OUTPUT);
55     pinMode(L_PWM, OUTPUT);
56     pinMode(L_Enable, OUTPUT);
57     pinMode(R_Enable, OUTPUT);
58     pinMode(VCC_PonteH, OUTPUT);
59     pinMode(R_PWM, OUTPUT);
60     pinMode(Led1, OUTPUT);
61     pinMode(Led2, OUTPUT);
62
63     digitalWrite(L_Enable, HIGH);
64     digitalWrite(R_Enable, HIGH);
65     digitalWrite(VCC_PonteH, HIGH);
66
67     delay(1000);
68 }
69
70 void loop()
71 {
72     GetValues(); // Pega os valores do sensor
73     PlotXYZ(); // Plota valores no terminal, "x ; y ; z ;
        trigger"
74
75     double z_dif = z_data[1] - z_data[0];
76
77     VerificaSinal();
78
```

```
79     int pontoMedioZ = PontoMedioZ(z_value, 0.18);
80     if (z_dif > 0) // && z_value > pontoMedioZ
81     {
82         Desliga();
83     }
84     else if ( z_dif < 0  && z_value > pontoMedioZ)
85     {
86         Empurra();
87     }
88     else
89     {
90         Desliga();
91     }
92
93     delay(50);
94 }
95
96 void Desliga()
97 {
98     digitalWrite(R_PWM, LOW);
99     digitalWrite(L_PWM, LOW);
100
101     digitalWrite(Led1, LOW);
102 }
103
104 void Puxa()
105 {
106     digitalWrite(R_PWM, LOW);
107     digitalWrite(L_PWM, HIGH);
108
109     digitalWrite(Led1, HIGH);
110 }
111
112 void Empurra()
113 {
114     digitalWrite(R_PWM, HIGH);
115     digitalWrite(L_PWM, LOW);
116
117     digitalWrite(Led1, HIGH);
118 }
119
120 void GetValues()
```

```
121 {
122     compass.read();
123
124     z_data[0] = z_data[1];
125     x_value = compass.getX() + x_offset;
126     y_value = compass.getY() + y_offset;
127     z_value = compass.getZ() + z_offset;
128     z_data[1] = z_value;
129 }
130
131 void PlotXYZ()
132 {
133     Serial.print(x_value );
134     Serial.print(" ; ");
135     Serial.print(y_value );
136     Serial.print(" ; ");
137     Serial.print(z_value );
138     Serial.print(" ; ");
139     Serial.println(trigger);
140 }
141
142 int PontoMedioZ(int z_value, double factor) {
143     // Adiciona o valor no buffer
144     buffer[write_index] = z_value;
145     write_index = (write_index + 1) % VETOR_SIZE;
146
147     // Caso o buffer ainda não esteja cheio, incrementa
148     // current_size
149     if (current_size < VETOR_SIZE)
150     {
151         current_size++;
152     }
153
154     // Determina min e max nos valores atuais do buffer
155     int min_value = INT_MAX;
156     int max_value = INT_MIN;
157
158     for (int i = 0; i < current_size; i++) {
159         int val = buffer[i];
160         if (val < min_value) min_value = val;
161         if (val > max_value) max_value = val;
162     }
```

```
162
163     // Calcula o ponto médio (double) e depois arredonda
164     double midpoint_double = (min_value + max_value) / 2.0;
165
166     midpoint_double = (midpoint_double - max_value) * (factor
167         );
168
169     // Arredonda para inteiro
170     int midpoint = (int)round(midpoint_double);
171     return max_value + midpoint;
172 }
173 void VerificaSinal()
174 {
175     switch (c)
176     {
177         case 1:
178             if (z_data[1] < z_data[0])
179             {
180                 c = 2;
181             }
182             trigger = 0;
183             break;
184         case 2:
185             if (z_data[1] > z_data[0])
186             {
187                 c = 1;
188                 trigger = 1;
189             }
190             break;
191     };
192 }
```

ANEXO A – HMC8553L Datasheet

HMC5883L: 3-AXIS DIGITAL COMPASS IC

The Honeywell HMC5883L is a surface-mount, multi-chip module designed for low-field magnetic sensing with a digital interface for applications such as low-cost compassing and magnetometry. The HMC5883L includes Honeywell's state-of-the-art, high-resolution HMC118X series magneto-resistive sensors plus an ASIC containing amplification, automatic degaussing strap drivers, offset cancellation, and a 12-bit ADC that enables 1° to 2° compass heading accuracy. The I²C serial bus allows for easy interface.

The HMC5883L is a 3.0x3.0x0.9mm surface mount 16-pin leadless chip carrier (LCC). Applications for the HMC5883L include:

- Mobile Phones
- Netbooks
- Consumer Electronics
- Auto Navigation Systems
- Personal Navigation Devices

The HMC5883L utilizes Honeywell's Anisotropic Magnetoresistive (AMR) technology, which provides advantages over other magnetic sensor technologies. These anisotropic, directional sensors feature precision in-axis sensitivity and linearity. Honeywell's Magnetic Sensors are among the most sensitive and reliable low-field sensors in the industry.

Features and Benefits

SPECIFICATIONS

All specifications are tested at 25°C unless stated otherwise.

Power Supply

- **Supply Voltage:** V_{DD} Referenced to AGND: 2.16V (min), 2.5V (typical), 3.6V (max).
- **Average Current Draw:**
 - Idle Mode: 2 μ A
 - Measurement Mode: 100 μ A

Performance

- **Field Range:** Full scale ± 8 Gauss.

Features	Benefits
3-Axis Magnetoresistive Sensors and ASIC in a 3.0x3.0x0.9mm LCC Surface Mount Package	Small size for highly integrated products. Just add a micro-controller interface, plus two external SMT capacitors. Designed for high-volume, cost-sensitive OEM designs. Easy to assemble and compatible with high-speed SMT assembly.
12-Bit ADC Coupled with Low Noise AMR Sensors	Achieves 2 milli-gauss field resolution in ± 8 Gauss fields. Enables 1° to 2° degree compass heading accuracy.
Built-In Self Test	Enables low-cost functionality test after assembly in production.
Low Voltage Operations (2.16 to 3.6V) and Low Power Consumption (100 μ A)	Compatible for battery-powered applications.
Built-In Strap Drive Circuits	Set/Reset and Offset Strap Drivers for degaussing, self-test, and offset compensation.
I ² C Digital Interface	Popular two-wire serial data interface for consumer electronics.
Lead-Free Package Construction	RoHS compliance.
Wide Magnetic Field Range (± 8 Oe)	Sensors can be used in strong magnetic field environments with 1° to 2° degree compass heading accuracy.
Software and Algorithm Support Available	Compassing heading, hard iron, soft iron, and auto-calibration libraries available.
Fast 160 Hz Maximum Output Rate	Enables pedestrian navigation and LBS applications.

Tabela 5 – Features and Benefits

- **Sensitivity (Gain):** 230 to 1370 LSb/Gauss.
- **Digital Resolution:** 0.73 to 4.35 milli-Gauss per LSb.
- **Output Rate:** Continuous Measurement Mode: 0.75 to 75 Hz. Single Measurement Mode: 160 Hz max.
- **Measurement Period:** 6 ms (typical).
- **Turn-On Time:** 200 μ s (Ready for I²C commands), 50 ms (Ready for measurements).

ABSOLUTE MAXIMUM RATINGS

- **Supply Voltage V_{DD} :** -0.3V to 4.8V
- **Operating Temperature:** -30°C to 85°C

- **Storage Temperature:** -40°C to 125°C
- **ESD Voltage:**
 - Human Body Model: 2000V
 - Charged Device Model: 750V

PIN CONFIGURATIONS

Pin	Name	Description
1	SCL	Serial Clock – I ² C Master/Slave Clock
2	VDD	Power Supply (2.16V to 3.6V)
3	NC	Not to be Connected
4	S1	Tie to V _{DDIO}
8	SETP	Set/Reset Strap Positive – S/R Capacitor Connection
9	GND	Supply Ground
10	C1	Reservoir Capacitor Connection
12	SETC	Set/Reset Capacitor Connection – Driver Side
16	SDA	Serial Data – I ² C Master/Slave Data

Tabela 6 – Pin Configurations

REGISTERS

This device is controlled and configured via a number of on-chip registers, which are described in this section. In the following descriptions, *set* implies a logic 1, and *reset* or *clear* implies a logic 0, unless stated otherwise.

The table below lists the registers and their access. All address locations are 8 bits.

Configuration Register A

The configuration register is used to configure the device for setting the data output rate and measurement configuration. CRA0 through CRA7 indicate bit locations, with CRA denoting the bits that are in the configuration register. CRA7 denotes the first bit of the data stream. The default value of this register is 0x10.

Description of Bits

- **CRA7:** Reserved for future function. Set to 0 when configuring CRA.
- **MA1 to MA0:** Select the number of samples averaged (1 to 8) per measurement output:

Address Location	Name	Access
00	Configuration Register A	Read/Write
01	Configuration Register B	Read/Write
02	Mode Register	Read/Write
03	Data Output X MSB Register	Read
04	Data Output X LSB Register	Read
05	Data Output Z MSB Register	Read
06	Data Output Z LSB Register	Read
07	Data Output Y MSB Register	Read
08	Data Output Y LSB Register	Read
09	Status Register	Read
10	Identification Register A	Read
11	Identification Register B	Read
12	Identification Register C	Read

Tabela 7 – Register List

CRA7	CRA6	CRA5	CRA4	CRA3	CRA2	CRA1	CRA0
(0)	MA1 (0)	MA0 (0)	DO2 (1)	DO1 (0)	DO0 (0)	MS1 (0)	MS0 (0)

Tabela 8 – Configuration Register A

- 00 = 1 (Default)
- 01 = 2
- 10 = 4
- 11 = 8

- **DO2 to DO0:** Data Output Rate Bits. These bits set the rate at which data is written to all three data output registers.
- **MS1 to MS0:** Measurement Configuration Bits. These bits define the measurement flow of the device, specifically whether or not to incorporate an applied bias into the measurement.

Configuration Register B

The configuration register B is used for setting the device gain. CRB0 through CRB7 indicate bit locations, with CRB denoting the bits that are in the configuration register. CRB7 denotes the first bit of the data stream. The default value of this register is 0x20.

CRB7	CRB6	CRB5	CRB4	CRB3	CRB2	CRB1	CRB0
GN2 (0)	GN1 (0)	GN0 (1)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)

Tabela 9 – Configuration Register B

Description of Bits

- **GN2 to GN0:** Gain Configuration Bits. These bits configure the gain for the device. The gain configuration is common for all channels.
- **CRB4 to CRB0:** These bits must be cleared for correct operation.

Gain Settings

The table below shows nominal gain settings. Use the “Gain” column to convert counts to Gauss. The “Digital Resolution” column represents the resolution in milli-Gauss per least significant bit (LSb).

GN2	GN1	GN0	Recommended Sensor Field Range	Gain (LSb/Gauss)	Digital Resolution (mG/LSb)
0	0	0	± 0.88 Ga	1370	0.73
0	0	1	± 1.3 Ga (default)	1090	0.92
0	1	0	± 1.9 Ga	820	1.22
0	1	1	± 2.5 Ga	660	1.52
1	0	0	± 4.0 Ga	440	2.27
1	0	1	± 4.7 Ga	390	2.56
1	1	0	± 5.6 Ga	330	3.03
1	1	1	± 8.1 Ga	230	4.35

Tabela 10 – Gain Settings

Mode Register

The mode register is an 8-bit register from which data can be read or to which data can be written. This register is used to select the operating mode of the device. MR0 through MR7 indicate bit locations, with MR denoting the bits that are in the mode register. MR7 denotes the first bit of the data stream. The default value of this register is 0x01.

MR7	MR6	MR5	MR4	MR3	MR2	MR1	MR0
HS (0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	MD1 (0)	MD0 (1)

Tabela 11 – Mode Register

Description of Bits

- **MR7 to MR2 (HS):** Reserved for high-speed I²C. Set this bit to enable High-Speed I²C (3400 kHz).
- **MR1 to MR0 (MD1, MD0):** Mode Select Bits. These bits select the operating mode of the device.

Operating Modes

The operating modes and their configurations are shown below:

MD1	MD0	Operating Mode
0	0	Continuous-Measurement Mode. The device continuously performs measurements and places the result in the data register. RDY goes high when new data is placed in all three registers. Measurements are available at a frequency of f_{DG} .
0	1	Single-Measurement Mode (Default). The device performs a single measurement, sets RDY high, and returns to idle mode. The measurement remains in the data register until it is read or another measurement is initiated.
1	0	Idle Mode. The device is placed in idle mode.
1	1	Idle Mode. The device is placed in idle mode.

Tabela 12 – Operating Modes