

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO SOCIOECONÔMICO
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA E RELAÇÕES INTERNACIONAIS
CURSO DE GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS ECONÔMICAS

Haroldo da Costa Brandão Neto

**AVALIAÇÃO DE MODELOS DE ESTIMAÇÃO DA CURVA DE JUROS:
UMA REVISÃO DO CASO BRASILEIRO**

FLORIANÓPOLIS

2024

Haroldo da Costa Brandão Neto

**AVALIAÇÃO DE MODELOS DE ESTIMAÇÃO DA CURVA DE JUROS:
UMA REVISÃO DO CASO BRASILEIRO**

Trabalho de Conclusão do Curso de Graduação
em Ciências Econômicas do Centro
Socioeconômico da Universidade Federal de
Santa Catarina como requisito para a obtenção do
título de bacharel em economia.

Orientador(a): Prof. Dr. João Frois Caldeira

FLORIANÓPOLIS

2024

Ficha de identificação da obra

Neto, Haroldo da Costa Brandão

Avaliação de modelos de estimação da curva de juros :
uma revisão do caso brasileiro / Haroldo da Costa Brandão
Neto ; orientador, João Frois Caldeira, 2024.
39 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) -
Universidade Federal de Santa Catarina, Centro
Socioeconômico, Graduação em Ciências Econômicas,
Florianópolis, 2024.

Inclui referências.

1. Ciências Econômicas. 2. Curva de juros. 3. Modelos
paramétricos. 4. Modelos não paramétricos. I. Caldeira,
João Frois. II. Universidade Federal de Santa Catarina.
Graduação em Ciências Econômicas. III. Título.

Haroldo da Costa Brandão Neto
Avaliação de Modelos de Estimação da Curva de Juros:
Uma revisão do caso brasileiro

Florianópolis, 05 de dezembro de 2024.

O presente Trabalho de Conclusão de Curso foi avaliado e aprovado pela banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. João Frois Caldeira, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Pedro Luiz Paolino Chaim, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Helberte João França Almeida, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Certifico que esta é **a versão original e final** do Trabalho de Conclusão de Curso que foi julgado adequado para obtenção do título de Bacharel em Economia por mim e pelos demais membros da banca examinadora.

Prof. João Frois Caldeira, Dr.
Orientador

Florianópolis, 2024.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, meu irmão e minha mulher pelo amor, confiança, atenção e suporte em todas as etapas da minha vida, contribuindo acima de tudo para a minha formação como pessoa. A vida é infinitamente mais bela ao lado de vocês.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. João Frois Caldeira, por todo o tempo dedicado, ajuda e orientação. Sua contribuição para a minha formação como estudante e futuro economista foi fundamental durante todo o processo.

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo comparar os principais modelos paramétricos e não paramétricos de estimação da estrutura a termo da taxa de juros, aplicando-os para a estrutura a termo da taxa de juros brasileira. Nesse sentido, foi realizada uma revisão de conceitos elementares acerca de títulos de renda fixa, taxas de juros, curva de juros e metodologias para estimação da curva de juros. Do lado de modelos paramétricos, foram utilizados os modelos de Nelson Siegel (1987) e de Svensson (1994); enquanto dos modelos não paramétricos, foi empregado o método de *cubic splines* proposto por McCulloch (1971). Os resultados obtidos demonstram a superioridade dos modelos baseados em *splines* em termos de ajuste da curva quando comparados com os modelos paramétricos. Além disso, foi possível observar que o modelo de Svensson apresenta uma capacidade de ajuste superior ao modelo de Nelson Siegel, sobretudo para maturidades mais curtas e em casos em que a estrutura a termo exibe inflexões mais significativas em termos de inclinação.

Palavras-chave: Estrutura a termo da taxa de juros; modelos paramétricos; modelos não-paramétricos.

ABSTRACT

The present work aims to compare the main parametric and non-parametric models for estimating the term structure of interest rates, applying them to the Brazilian term structure of interest rates. In this regard, a review of elementary concepts about fixed income securities, interest rates, yield curve, and methodologies for estimating the yield curve was conducted. On the parametric models side, Nelson Siegel (1987) and Svensson (1994) models were used; while from non-parametric models, McCulloch's (1971) cubic splines method was employed. The results obtained demonstrate the superiority of spline-based models in terms of curve fitting when compared to parametric models. Furthermore, it was possible to observe that the Svensson model presents a superior fitting capacity compared to the Nelson Siegel model, especially for shorter maturities and in cases where the term structure exhibits more significant inflections in terms of slope.

Keywords: Term structure of interest rates; parametric models; non-parametric models.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BIS	Bank for International Settlements
ETTJ	Estrutura a Termo da Taxa de Juros

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	10
1.1	OBJETIVOS	11
1.1.1	Objetivo Geral.....	11
1.1.2	Objetivos Específicos	12
1.2	METODOLOGIA	12
2	TÍTULOS E A CURVA DE JUROS.....	14
2.1	TÍTULOS ZERO-CUPOM	14
2.2	TAXAS DE JUROS SPOT	14
2.3	TAXAS FORWARD.....	15
2.4	ESTRUTURA A TERMO DA TAXA DE JUROS.....	15
2.5	TEORIAS DE DETERMINAÇÃO DA CURVA DE JUROS	16
2.5.1	TEORIA DAS EXPECTATIVAS PURA	16
2.5.2	TEORIA DA PREFERÊNCIA PELA LIQUIDEZ.....	16
2.5.3	TEORIA DO HABITAT PREFERIDO.....	17
2.5.4	TEORIA DA SEGMENTAÇÃO DE MERCADOS	18
3	MODELOS DE ESTIMAÇÃO DA CURVA DE JUROS	19
3.1	PERSPECTIVA GERAL.....	19
3.2	MODELOS NÃO PARAMÉTRICOS.....	20
3.2.1	INTRODUÇÃO.....	20
3.2.2	CUBIC SPLINES	21
3.3	MODELOS PARAMÉTRICOS.....	23
3.3.1	INTRODUÇÃO.....	23
3.3.2	MODELO DE NELSON-SIEGEL	23
3.3.3	MODELO DE SVENSSON	25
4	DADOS UTILIZADOS.....	27
5	RESULTADOS E COMPARAÇÕES ENTRE MODELOS	30
6	CONCLUSÃO	37
	REFERÊNCIAS	38

1 INTRODUÇÃO

De maneira geral, os agentes econômicos enfrentam algum grau de incerteza durante o processo de decisões como consumo, investimento ou formulação de políticas públicas. Nesse sentido, as expectativas constituem elemento central para a tomada de decisão, permitindo que o agente fundamente, ao menos em parte, sua decisão. Uma das fontes frequentemente utilizadas para extrair informações úteis acerca da economia e avaliar as expectativas do mercado quanto a diversos indicadores econômicos é a curva de juros, ou estrutura a termo da taxa de juros.

A estrutura a termo da taxa de juros consiste na representação da função que relaciona as taxas de juros de determinado instrumento financeiro, como títulos de dívida, às suas respectivas maturidades em determinado ponto no tempo (Bodie; Kane; Marcus, 2021). A partir dessa relação, os participantes do mercado podem extrair informações relevantes acerca da trajetória de variáveis econômicas de grande interesse para os formuladores de política econômica, como o crescimento futuro do produto e as expectativas de inflação; bem como para a gestão de portfólios de renda fixa por parte de administradores de fundos de investimento, através da precificação de ativos e instrumentos derivativos utilizando informações fornecidas pela curva de juros (Caldeira, 2011).

O poder preditivo da estrutura a termo da taxa de juros para estimar o curso de variáveis centrais para a economia já foi testado sob diversas óticas: Estrella e Hardouvelis (1991) apresentam evidências de que a inclinação da curva de juros pode prever mudanças cumulativas no crescimento do produto real em um horizonte de até quatro anos, bem como mudanças marginais no PIB até um ano e meio para a economia americana. Complementarmente, Harvey (1989) demonstra que modelos de previsão baseados na estrutura a termo da taxa de juros foram capazes de explicar mais da metade da variação do PIB em países que compõe o G-7 de 1969 a 1984.

Além disso, a estrutura a termo da taxa de juros contém informações relevantes para estimar a inflação futura, variável de importante interesse para a autoridade monetária e agentes do mercado em geral. De acordo com Minshkin (1990), para maturidades entre nove e doze meses, a curva de juros americana é capaz de fornecer informações significativas acerca da trajetória futura da inflação;

enquanto maturidades menores do que seis meses fornecem informações relevantes sobre a estrutura a termo das taxas reais de juros.

Conforme apresentado, a ETTJ fornece informações fundamentais para análises financeiras e macroeconômicas. Contudo, uma limitação prática é que os dados disponíveis geralmente não permitem a construção direta de uma curva contínua, apresentando-se apenas como um conjunto discreto de pontos e suas respectivas maturidades (Caldeira; 2011). Dessa forma, é necessário utilizar métodos de interpolação para construir uma curva contínua a partir desses dados discretos.

A literatura vigente apresenta diversos métodos utilizados por instituições como bancos centrais para estimar de maneira eficiente a estrutura a termo da taxa de juros. Os métodos amplamente utilizados podem ser divididos entre modelos paramétricos, como os modelos de interpolação paramétrica propostos por Nelson e Siegel (1987) e Svensson (1994); e modelos de interpolação não paramétricos, como modelos baseados em *cubic splines* e *exponencial splines* (Caldeira, 2011). Cada um dos métodos estudados pela literatura possui vantagens e restrições específicas durante o processo de modelagem e estimação, de modo que não há alternativa definitiva que implique no descarte das outras.

O intuito do presente trabalho reside, portanto, na revisão da literatura atual e na avaliação empírica dos principais métodos paramétricos e não paramétricos no processo de estimação da estrutura a termo da taxa de juros, aplicando-os para a ETTJ brasileira.

1.1 OBJETIVOS

Os objetivos do presente trabalho podem ser divididos em geral e específicos.

1.1.1 Objetivo Geral

Avaliar os métodos paramétricos e não paramétricos mais utilizados no processo de modelagem e estimação da estrutura a termo da taxa de juros através da aplicação destes utilizando dados da curva de juros brasileira.

1.1.2 Objetivos Específicos

Dentre os objetivos específicos, busca-se:

- Apresentar a literatura atual acerca das teorias da estrutura a termo da taxa de juros;
- Apresentar os principais métodos paramétricos e não paramétricos utilizados na estimação da curva de juros;
- Testar individualmente cada um dos métodos utilizando a curva de juros brasileira;
- Avaliar os resultados obtidos com cada modelo, comparando o ajuste entre eles.

1.2 METODOLOGIA

O presente trabalho possui como objetivo empregar modelos de estimação e modelagem da estrutura a termo da taxa de juros. Nesse sentido, o presente trabalho possui uma abordagem majoritariamente quantitativa: serão empregadas técnicas econométricas para a estimação da curva de juros.

Inicialmente, será realizada uma apresentação descritiva da literatura existente acerca da estrutura a termo da taxa de juros, elucidando as teorias que buscam explicar o seu comportamento. Conforme Prodanov e Freitas (2013), procura-se através dessa revisão bibliográfica a exposição e contextualização do tema à luz dos últimos avanços e marcos alcançados pela comunidade científica. Com o mesmo objetivo, serão apresentados e discutidos os principais métodos de modelagem e estimação utilizados atualmente por instituições como bancos centrais e agentes do mercado, sendo esses modelos divididos entre modelos paramétricos e não paramétricos, elucidando a aplicabilidade de cada método segundo a literatura.

Em seguida, serão estimados os modelos e apresentados os resultados efetivamente obtidos com cada uma das técnicas. Os dados utilizados no processo da construção da curva de juros compreendem as taxas efetivas do DI pré para 252 dias úteis, disponibilizadas diretamente pela BM&F, onde são negociados os

contratos futuros. A partir delas, pretende-se estimar as curvas de juros através dos seguintes modelos: *cubic splines*, Nelson-Siegel e Svensson.

Por fim, com as curvas efetivamente estimadas, seus resultados serão sujeitos a análise comparativa. Complementarmente, através de medidas estatísticas de ajuste, serão avaliados os resultados obtidos entre os modelos paramétricos, visando elucidar a capacidade de ajuste de cada um às diferentes maturidades.

2 TÍTULOS E A CURVA DE JUROS

2.1 TÍTULOS ZERO-CUPOM

Um título pode ser descrito como um instrumento financeiro de dívida que concede ao seu detentor o direito sob determinado fluxo de pagamentos futuros em datas predeterminadas (Shiller; Mcculloch, 1987). Tais títulos são frequentemente utilizados por empresas e governos como ferramentas para o financiamento de suas atividades, e em contraste com as ações, não concedem ao seu detentor o direito de propriedade sobre a firma (Caldeira, 2011).

Existem essencialmente duas grandes classes de títulos: aqueles que realizam pagamentos periódicos, denominados cupons, além do seu valor de face; e títulos zero-cupom. Os títulos zero-cupom, também denominados como de desconto puro, consistem em uma classe de títulos renda fixa através da qual o emissor se compromete a realizar um único pagamento futuro ao detentor do título, chamado de principal ou valor de face, sem fluxos de pagamento intermediários. Essa classe de títulos é vendida com desconto, e espera-se que seu preço aumente gradualmente ao longo do tempo até a sua maturidade, momento em que alcança o seu preço máximo (por convenção, \$1) e é realizado o pagamento do principal (Shiller; Mcculloch, 1987). Cabe destacar que essa caracterização parte de um cenário ideal, no qual não há possibilidade de *default* (inadimplência) pelo emissor do título.

2.2 TAXAS DE JUROS SPOT

No âmbito de títulos zero-cupom, a taxa à vista, também denominada spot rate ou *yield to maturity*, é a taxa de juros que vigora hoje para um período correspondente ao vencimento de determinado título (Bodie, Kane, Marcus; 2021). Para o investidor, ela representa o percentual de ganho de capital sobre o preço de compra desse título, que conforme descrito anteriormente, é vendido com desconto e aprecia ao longo do tempo; e pode ser definida como a taxa estável à qual o preço de um título deveria crescer para que este atinja o valor de \$1 no vencimento (Caldeira, 2011). Formalmente, para um título zero-cupom de maturidade τ ($\tau > t$), a relação entre seu preço hoje, $P_t(\tau)$, e a taxa spot $y_t(\tau)$ pode ser expressa pela equação:

$$P_t(\tau) = e^{-y_t(\tau)\tau} \quad (1)$$

De maneira equivalente, podemos determinar as taxas spot a partir dos preços observados no mercado por meio da expressão:

$$y_t(\tau) = -\frac{\log(P_t(\tau))}{\tau} \quad (2)$$

2.3 TAXAS FORWARD

As taxas forward, também chamadas de taxas futuras ou taxas a termo, representam as taxas de juros implícitas em contratos futuros acordados hoje para investimentos que começam em uma data futura. Na prática, estas taxas podem ser obtidas através de operações simultâneas com títulos zero-cupom: uma operação de venda de um título com vencimento na data de início do contrato futuro, combinada com a compra de outro título que vence na data final do contrato (Caldeira, 2011).

Denotando $f_t(\tau_1, \tau_2)$ como a taxa a termo implícita contratada no tempo t para um investimento que inicia em τ_1 (a data de liquidação) e termina em τ_2 (a maturidade), sendo que $\tau_2 > \tau_1 > t$, a taxa *forward* relaciona-se com a taxa spot a partir da seguinte expressão:

$$f_t(\tau_1, \tau_2) = \frac{\tau_2 y_t(\tau_2) - \tau_1 y_t(\tau_1)}{\tau_2 - \tau_1} \quad (3)$$

Contratos baseados em taxas futuras são amplamente utilizados por investidores como forma de proteção com relação às incertezas quanto às taxas de juros futuras.

2.4 ESTRUTURA A TERMO DA TAXA DE JUROS

A estrutura a termo da taxa de juros pode ser definida como a função que relaciona determinada variável financeira ou parâmetro a suas respectivas maturidades (Caldeira, 2011). É possível observar inúmeras estruturas a termo, mas para os propósitos deste trabalho, e se tratando de títulos de renda fixa, a curva de juros consiste na representação gráfica da função que relaciona o prazo de vencimento de um título com a sua taxa de juros correspondente em determinado ponto no tempo.

Apesar do amplo espectro de maturidades presentes nos mercados de títulos de renda fixa, tanto os que pagam cupom quanto os de desconto puro, os dados disponíveis não fornecem uma representação completa da estrutura a termo, mas sim um conjunto discreto de taxas para diferentes maturidades. Dessa maneira, a modelagem da curva de juros precisa levar em consideração algum método de interpolação que sirva para construir uma curva contínua (Caldeira; 2011).

2.5 TEORIAS DE DETERMINAÇÃO DA CURVA DE JUROS

Diversas teorias buscam descrever os comportamentos e formatos das curvas de juros ao longo do tempo. É possível dividi-las em dois grupos principais: a teoria de segmentação de mercados; e a teoria das expectativas, que por sua vez, é composta pela teoria das expectativas pura, a teoria da preferência pela liquidez e a teoria do habitat preferido. No caso do último grupo, as teorias compartilham hipóteses sobre o comportamento das taxas *forward* de curto prazo e partem do princípio de que estas estão intimamente relacionadas com as expectativas de mercado acerca das taxas futuras de curto prazo, mas diferem quanto a como outros fatores influenciam o comportamento da curva de juros (Fabozzi; Mann, 2005).

2.5.1 TEORIA DAS EXPECTATIVAS PURA

A teoria das expectativas pura estabelece a hipótese de que as taxas *forward* correspondentes a determinado período representam as taxas de juros de curto prazo futuras esperadas para esse mesmo período. Dessa forma, o formato da curva de juros em um dado momento refletiria as expectativas correntes do mercado acerca das taxas de curto prazo futuras. Aplicando a teoria para o caso de uma estrutura a termo típica, pode-se inferir que o formato ascendente da curva seria um indicativo de que o mercado espera que as taxas de juros de curto prazo deverão ser mais elevadas no futuro (Fabozzi; Mann, 2005).

2.5.2 TEORIA DA PREFERÊNCIA PELA LIQUIDEZ

Assim como a teoria das expectativas pura, a teoria da preferência pela liquidez também assume que as taxas *forward* representam as expectativas das futuras taxas de curto prazo, mas nesse caso as taxas a termo também refletem um prêmio pela liquidez. Mesmo no caso de um título hipotético em que a saúde do emissor não é uma preocupação, o investimento em títulos ainda embute o risco de preço, por meio do qual o preço de determinado título pode ser menor do que ao longo do horizonte de investimento, risco que tende a ser mais elevado quanto maior a maturidade do título; e o risco de reinvestimento, por meio do qual existe incerteza quanto à taxa de reinvestimento de títulos a serem adquiridos no futuro.

Dessa forma, os investidores demandariam uma compensação pelos riscos inerentes a investir em títulos de maturidades mais longas, e, portanto, as taxas a termo refletiriam não apenas as taxas de curto prazo futuras, mas também um prêmio de risco, que deve crescer conforme crescem as maturidades dos títulos (Fabozzi; Mann, 2005).

2.5.3 TEORIA DO HABITAT PREFERIDO

A teoria do habitat preferido propõe a ideia de que os participantes de mercado possuem preferências por determinados prazos, “habitats”, definidos pela natureza de suas obrigações financeiras. A tese incorpora a concepção de que a curva de juros reflete tanto as expectativas das taxas de juros futuras quanto o prêmio pelo risco, mas rejeita a ideia de que esse prêmio cresça uniformemente com a maturidade: seria através de desbalanços entre oferta e demanda por títulos de determinadas maturidades que os participantes de mercado seriam induzidos a migrar suas posições para maturidades que não correspondem ao seu habitat preferido. No entanto, estes teriam de ser compensados por um prêmio de risco adequado, positivo ou negativo, que compense a percepção do investidor quanto aos riscos de preço ou reinvestimento (Fabozzi; Mann, 2005).

O formato da curva de juros, portanto, seria determinado conjuntamente tanto pelas expectativas do mercado quanto à trajetória futura das taxas de juros quanto pelo prêmio de risco que incentivaria os investidores a migrarem para outros horizontes temporais (Fabozzi; Mann, 2005).

2.5.4 TEORIA DA SEGMENTAÇÃO DE MERCADOS

Por fim, a teoria de segmentação de mercados pode ser descrita como uma versão mais rígida da teoria do habitat preferido, dado que também reconhece a existência de prazos preferidos pelos investidores determinados pela natureza de suas obrigações. No entanto, a teoria da segmentação postula que restrições na gestão de ativos e passivos, sejam estas impostas por regulamentação ou pelos próprios participantes, tem como consequência o fato de que nem investidores e nem tomadores estão dispostos a migrar para outros prazos, independente das possibilidades de ganho existentes entre expectativas e taxas a termo. O formato da curva de juros, portanto, reflete exclusivamente a relação de oferta e demanda para cada segmentação de maturidade (Fabozzi; Mann, 2005).

3 MODELOS DE ESTIMAÇÃO DA CURVA DE JUROS

3.1 PERSPECTIVA GERAL

São diversos os métodos atualmente disponíveis e descritos pela literatura no processo de estimação da estrutura a termo da taxa de juros. A partir dessa seção, busca-se realizar uma exposição inicial dos principais métodos utilizados por agentes e instituições financeiras no processo de modelagem da curva de juros.

O processo de estimação e interpretação da estrutura a termo da taxa de juros têm sido um tópico relevante para as áreas de economia e finanças nas últimas décadas, tornando relativamente extensa a literatura existente sobre o tema. Fundamentalmente, é possível agrupar os modelos de construção e estimação da curva de juros em três vertentes: modelos que examinam a dinâmica da estrutura a partir da perspectiva de equilíbrio geral, modelos que impõem condições de não arbitragem e, por fim, modelos que incorporam variáveis macroeconômicas para acompanhar o nível, a inclinação e a curvatura da curva de juros (Fernandes; Nunes; Reis, 2020).

Dentre os modelos que examinam a dinâmica da curva de juros através da ideia de equilíbrio geral – modelos afins – destacam-se os trabalhos de Vasicek (1977) e Cox (1985), por meio dos quais os autores descrevem que a dinâmica das taxas das maturidades mais curtas determina a estrutura a termo como um todo. A questão com esses modelos, no entanto, é que eles possuem baixo poder preditivo, podendo ser frequentemente superados através de modelos que assumem que as taxas seguem um passeio aleatório; e para além disso, eles tendem a produzir erros de estimação negativamente correlacionados com a inclinação da curva de juros (Duffee, 2002).

No caso de modelos baseados na condição de ausência de arbitragem, temos que estes frequentemente combinam variáveis macroeconômicas e variáveis latentes no processo de construção e estimação da estrutura a termo. Um exemplo notável é o trabalho de Ang e Piazzesi (2003), no qual os autores empregam um modelo de vetores autorregressivos utilizando variáveis macroeconômicas tais como inflação e medidas de crescimento econômico conjuntamente com variáveis latentes. O resultado do trabalho sugere que a imposição de uma condição de não arbitragem é capaz de melhorar a performance preditiva em comparação a modelos

de vetores autorregressivos que não presumem essa condição, e que a incorporação de fatores macroeconômicos descreve principalmente a dinâmica de maturidades de curto e médio prazo, enquanto as variáveis não diretamente observáveis explicam melhor os movimentos da parcela mais longa da curva.

A terceira classe de modelos, os paramétricos, partem fundamentalmente da especificação de uma função valor definida para todas as maturidades e da determinação dos parâmetros utilizados no modelo a partir da minimização dos desvios quadrados dos preços observados em relação aos preços teóricos (Caldeira, 2011). Pode-se destacar dentre estes os modelos propostos por Nelson e Siegel (1987) e Svensson (1994), que descrevem a dinâmica de nível, curvatura e inclinação da curva de juros, incorporando uma série de variáveis macroeconômicas no processo. Tais modelos destacam-se em relação aos seus pares por características como a facilidade de implementação, a boa performance com relação ao seu poder preditivo e a possibilidade de interpretação econômica dos fatores utilizados, mas geralmente apresentam um ajuste pior da estrutura a termo com relação a modelos não-paramétricos (Caldeira, 2011).

Compreendendo que cada um dos modelos descritos na literatura pertinente acerca da curva de juros possui suas próprias particularidades, vantagens e desvantagens, é preciso delimitar eficientemente o objetivo e as intenções do pesquisador com relação à estrutura a termo. Se o empenho visa obter um ajuste perfeito da curva ou realizar previsões acerca de valores futuros dela, por exemplo, essa é uma questão que deve ser bem delimitada, de modo que seja implementado o modelo que idealmente forneça os melhores resultados com relação ao objetivo individual do pesquisador.

3.2 MODELOS NÃO PARAMÉTRICOS

3.2.1 INTRODUÇÃO

Os modelos não paramétricos, também denominados modelos baseados em *splines*, tratam de um conjunto de métodos de interpolação que visam obter o ajuste perfeito da curva de juros em um determinado ponto no tempo através da utilização de polinômios por partes (*piecewise*). Diferente de modelos paramétricos, que partem da especificação de uma forma funcional para todo o conjunto de

maturidades, os métodos não paramétricos partem da definição de uma função *spline* através da qual cada segmento individual da curva de juros é conectado suavemente através dos *knot points*, ou vértices da curva de juros (Caldeira, 2011).

Para o caso de um intervalo fechado, é possível aproximar uma função contínua através da seleção de um polinômio arbitrário, que frequentemente é um polinômio de baixa ordem, como polinômios quadráticos ou cúbicos. Polinômios de alta ordem, por outro lado, geralmente possuem melhor qualidade de ajuste, mas apresentam propriedades insuficientes de suavização (BIS, 2005).

Laurini e Moura (2010) destacam três vantagens importantes dessa classe de modelos em relação aos paramétricos: (i) métodos não paramétricos são tipicamente robustos à erros de má especificação, dado que não assumem uma forma funcional particular; (ii) sua estimação pode ser bastante factível para amostras pequenas, contanto que sejam impostas restrições adequadas à sua forma e; (iii) podem ser utilizados como um primeiro passo na análise dos dados para orientar os esforços de especificação. Além disso, os modelos não paramétricos possuem a capacidade de assegurar a impossibilidade de arbitragem, tornando-os favoráveis para o apreçamento de derivativos (Caldeira; 2011).

3.2.2 CUBIC SPLINES

A utilização de *cubic splines* para a estimação da estrutura a termo da taxa de juros foi introduzida originalmente por McCulloch (1971; 1975), que propôs a interpolação de uma função de desconto para construção da curva de juros, e seu trabalho representa uma contribuição significativa para a literatura posterior acerca do tema.

Conforme apresentado em Caldeira (2011), um *cubic spline* pode ser descrito como um polinômio cúbico por pontos, restrito nos vértices de modo que seu nível e suas duas primeiras derivadas são idênticos. Inicialmente, partimos da especificação de uma série de pontos conhecidos $(\tau_1, y_1), (\tau_2, y_2), \dots, (\tau_n, y_n)$, em que τ_n representa a maturidade e y_n a taxa de juros correspondente. Para cada intervalo entre dois pontos consecutivos, define-se um polinômio cúbico caracterizado por quatro coeficientes distintos $(a_i, b_i,$

c_i e d_i), a partir do qual teremos uma função valor para qualquer maturidade τ_n definida por:

$$y(\tau) = a_i + b_i(\tau - \tau_i) + c_i(\tau - \tau_i)^2 + d_i(\tau - \tau_i)^3 \quad (4)$$

Bem como a sua primeira, segunda e terceira derivada, sendo estas definidas respectivamente como:

$$y'(\tau) = b_i + 2c_i(\tau - \tau_i) + 3d_i(\tau - \tau_i)^2 \quad (5)$$

$$y''(\tau) = 2c_i + 6d_i(\tau - \tau_i) \quad (6)$$

$$y'''(\tau) = 6d_i \quad (7)$$

Então, são impostas restrições de continuidade na função e em suas derivadas nos pontos de junção, visando garantir a suavidade da curva resultante. Tais condições estabelecem que a função deve passar por todos os pontos conhecidos, bem como manter-se continuamente diferenciável ao longo de toda a sua extensão. Assumindo h_i como o intervalo entre pontos consecutivos, de modo que $h_i = \tau_{i+1} - \tau_i$, temos que:

$$a_i = y_i \text{ para } i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (8)$$

$$a_{i+1} = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 \text{ para } i = 1, 2, \dots, n-2 \quad (9)$$

$$b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = b_{i+1} \text{ para } i = 1, 2, \dots, n-2 \quad (10)$$

Além disso, para garantir a diferenciabilidade da função de interpolação, é necessário assegurar que a função forward $f(\tau) = \frac{\partial y(\tau)}{\partial \tau} \tau$ seja contínua, de modo que temos:

$$f(\tau) = a_i + b(2\tau_i - \tau) + c_i(\tau_i - \tau)(3\tau - \tau_i) + d_i(\tau - \tau_i)^2(4\tau - \tau_i) \quad (11)$$

A determinação dos coeficientes do spline, portanto, envolve a resolução de um sistema de equações que incorpora todas estas restrições. Para um conjunto de n pontos, tem-se $3n - 4$ equações com $4n - 4$ parâmetros desconhecidos (Caldeira, 2011). Ao definirmos:

$$b_n = b_{n-1} + 2c_{n-1}h_{n-1} + 3d_{n-1}h_{n-1}^2 \quad (12)$$

Podemos encontrar também a determinação para os conjuntos $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ e $(d_1, d_2, \dots, d_n)$. Para cada segmento i , o sistema pode ser expresso por duas

equações de dois parâmetros desconhecidos, cuja solução pode ser encontrada através das equações (Caldeira; 2011):

$$m_i = \frac{a_{i+1} - a_i}{h_i} \quad (13)$$

$$c_i = \frac{3m_i - b_{i+1} - 2b_i}{h_i} \quad (14)$$

$$d_i = \frac{b_{i+1} + b_i - 2m_i}{h_i} \quad (15)$$

3.3 MODELOS PARAMÉTRICOS

3.3.1 INTRODUÇÃO

No âmbito da estimação da estrutura a termo da taxa de juros, os modelos paramétricos constituem uma classe fundamentada na especificação de uma função valor que abrange todo o espectro de maturidades (Caldeira, 2011). De acordo com o Bank for International Settlements (BIS, 2005), embora existam diferentes abordagens quanto à seleção dessa função, todas as metodologias convergem em um princípio fundamental: a determinação dos parâmetros ocorre por meio de um processo de otimização que minimiza os desvios quadrados entre os preços teóricos e os preços observados no mercado.

Quando comparados com os modelos baseados em *splines*, os modelos paramétricos possuem algumas características que os tornam desejáveis do ponto de vista de bancos centrais e participantes do mercado financeiro. Além da interpretabilidade econômica dos parâmetros, como veremos à seguir, os modelos paramétricos frequentemente assumem especificações parcimoniosas e possuem desempenho notável no âmbito de previsões da curva de juros com dados fora da amostra (Caldeira; 2011).

3.3.2 MODELO DE NELSON-SIEGEL

Publicado em 1987, o trabalho seminal de Nelson e Siegel apresenta uma contribuição fundamental à literatura acerca da estimação da ETTJ. O modelo

originalmente proposto pelos autores surge com o objetivo de descrever a curva de juros através de uma abordagem mais parcimoniosa e compacta, e que ainda assim fosse flexível o suficiente para representar os formatos tradicionalmente mais observados das curvas de juros: monotônico, corcunda e em formato de S.

Além disso, os autores pretendiam solucionar alguns problemas associados aos métodos anteriormente vigentes, como os propostos por McCulloch (1971; 1975) e Vasicek e Fong (1982). Ambos os métodos são baseados em splines, e possuem elevada capacidade de ajuste da curva de juros em termos de observações dentro da amostra, mas apresentam uma tendência a gerar curvas com inflexões acentuadas próximo ao intervalo amostral, o que contrasta com o aspecto suave esperado da curva de juros e implica em baixa capacidade preditiva (Nelson, Siegel; 1987).

A forma funcional proposta pelos autores consiste em um modelo estático que combina linearmente três funções suaves, através do qual a curva de juros pode ser ajustada de forma eficiente para um determinado ponto no tempo (Caldeira, Moura, Santos; 2016). Podemos descrevê-lo como:

$$y(\tau) = \beta_1 + \beta_2 \left(\frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} \right) + \beta_3 \left(\frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau} \right) \quad (55)$$

Em que os fatores β_1 , β_2 e β_3 são interpretados como os termos representativos das taxas de longo, curto e médio prazo; enquanto λ_t representa o termo de decaimento exponencial.

A contribuição de Nelson e Siegel (1987) foi posteriormente reinterpretada por Diebold e Li (2006): os autores propuseram uma abordagem que utiliza o arcabouço de componentes exponenciais de Nelson e Siegel para descrever a curva de juros a partir de um vetor tridimensional de parâmetros que evolui dinamicamente. Esses parâmetros podem ser interpretados como os fatores do modelo, representando o nível, inclinação e curvatura da estrutura a termo da taxa de juros. A forma funcional do modelo pode ser expressa como:

$$y_t(\tau) = \beta_{1t} + \beta_{2t} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_t\tau}}{\lambda_t\tau} \right) + \beta_{3t} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_t\tau}}{\lambda_t\tau} - e^{-\lambda_t\tau} \right) \quad (16)$$

Através do qual temos os fatores latentes dinâmicos β_{1t} , β_{2t} e β_{3t} . Interpretando o modelo, temos que β_{1t} pode ser caracterizado por uma carga

constante e uniforme que não decai a zero no limite, qualificando-o como o termo de longo prazo e, dessa forma, o fator representante do nível da curva de juros. β_{2t} é uma função que inicia em 1, mas dada a carga de $\frac{1-e^{-\lambda_t\tau}}{\lambda_t\tau}$, decai rápido e monotonicamente a zero, caracterizando-o como o termo de curto prazo e consequentemente o fator que representa a curvatura da ETTJ. A carga em β_{3t} , por sua vez, é de $\frac{1-e^{-\lambda_t\tau}}{\lambda_t\tau} - e^{-\lambda_t\tau}$: o termo inicia em 0, aumenta e por fim decai a zero. Dessa forma, β_{3t} é o termo de médio prazo do modelo, representando o fator de curvatura da curva de juros (Diebold, Li; 2006).

Além dos fatores latentes dinâmicos, e similarmente ao modelo original, o parâmetro λ_t descreve a taxa de decaimento exponencial das cargas dos fatores, bem como o ponto máximo da carga de β_{3t} . Valores pequenos de λ_t implicam em uma taxa mais lenta de decaimento, proporcionando um ajuste eficiente nas partes mais longas da curva de juros; enquanto valores altos de λ_t , na medida em que implicam em uma taxa mais rápida de decaimento, proporcionam um melhor ajuste da parte curta da curva de juros (Diebold, Li; 2006).

Uma das contribuições mais significativas do modelo proposto por Diebold e Li (2006) consiste na demonstração do notável poder preditivo do modelo de Nelson Siegel em sua formulação dinâmica, sobretudo quando são considerados horizontes mais longos de previsão. Até a publicação da forma dinâmica do modelo, diversos bancos centrais, como o da Itália, França, Finlândia e Bélgica empregavam o modelo estático de Nelson Siegel, devido a sua simplicidade, parcimônia e interpretabilidade econômica, bem como grande capacidade de ajuste à diversos formatos da curva de juros, conforme detalhado pelo BIS (2005).

3.3.3 MODELO DE SVENSSON

A metodologia desenvolvida por Svensson em 1994 constituiu notável avanço para a literatura da estimação da ETTJ. Trata-se de uma extensão do método proposto por Nelson e Siegel em 1987, a partir do qual o autor propõe a utilização de um quarto parâmetro no modelo, representativo de um segundo componente de curvatura. Dessa forma, a curva de juros seria representada por:

$$y(\tau) = \beta_1 + \beta_2 \left(\frac{1 - e^{-\lambda_1 \tau}}{\lambda_1 \tau} \right) + \beta_3 \left(\frac{1 - e^{-\lambda_1 \tau}}{\lambda_1 \tau} - e^{-\lambda_1 \tau} \right) + \beta_4 \left(\frac{1 - e^{-\lambda_2 \tau}}{\lambda_2 \tau} - e^{-\lambda_2 \tau} \right) \quad (17)$$

As três primeiras funções do modelo mantêm a estrutura fundamental do modelo de Nelson e Siegel (1987). A inovação metodológica consiste na incorporação de uma quarta função, caracterizada pelo parâmetro β_4 e por seu fator de decaimento exponencial próprio λ_2 , que possibilitam a modelagem de um componente adicional de curvatura, proporcionando maior flexibilidade do ajuste às taxas de juros observadas (Svensson, 1994). Dessa forma, o modelo resultaria em um melhor ajuste da curva de juros à custa da necessidade de estimação dos dois novos parâmetros (BIS, 2005).

4 DADOS UTILIZADOS

O conjunto de dados utilizado na elaboração dos modelos consiste em uma série temporal de observações mensais das taxas de juros praticadas em contratos de DI futuro durante o período de janeiro de 2006 a maio de 2024, coletados através da Central de Custódia e Liquidação Financeira de Títulos Privados (CETIP). Nesse caso, foram utilizadas as maturidades de 3, 6, 12, 15, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 60, 72, 84, 96, 108 e 120 meses, permitindo uma representação das partes curta, média e longa da curva de juros.

O contrato futuro de DI consiste em um instrumento futuro que visa negociar a taxa de juros acumulada nos depósitos interfinanceiros (DI) em uma base diária, sendo extensamente utilizado tanto por instituições financeiras, na troca de reservas no curtíssimo prazo por exemplo; quanto por participantes do mercado em geral, como em operações de hedge e arbitragem (Hull, 2016). Como consequência, esses contratos apresentam elevada liquidez e múltiplos prazos disponíveis, características que os tornam uma alternativa viável para a construção da estrutura a termo da taxa de juros brasileira.

A cotação do contrato é feita em taxa de juros efetiva anual com base em 252 dias úteis, mas sua operação é registrada com base no seu preço unitário (PU): no vencimento, o PU vale 100.000 pontos, e cada ponto equivale a R\$1. Dessa forma, as taxas de juros negociadas são expressas em preço unitário, obtidas mediante o desconto do valor futuro do contrato utilizando a taxa de juros efetiva i , vigente no período de n dias úteis até o vencimento do contrato, a partir do qual obtemos o valor presente, conforme Hull (2016). Dessa forma, a cotação é dada por:

$$PU = \frac{100.000}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)^{n/252}} \quad (18)$$

A seguir, através da Tabela 1, são apresentadas estatísticas descritivas acerca de cada uma das maturidades utilizadas no presente trabalho. Inicialmente, é possível observar que a curva de juros brasileira é usualmente ascendente, podendo representar um prêmio de risco crescente, dado que tanto as médias quanto medianas das taxas aumentam conforme crescem as maturidades. Fica evidente também que a amplitude entre taxas mínimas e máximas é bastante elevada, indicando variação substancial no nível da curva de juros ao longo do tempo. Além

disso, é possível notar que a volatilidade decresce monotonicamente em função do aumento das maturidades, fato que está em conformidade com a literatura acerca da curva de juros (Caldeira; 2011).

Tabela 1: Estatísticas Descritivas dos Vértices – janeiro de 2006 a maio de 2024.

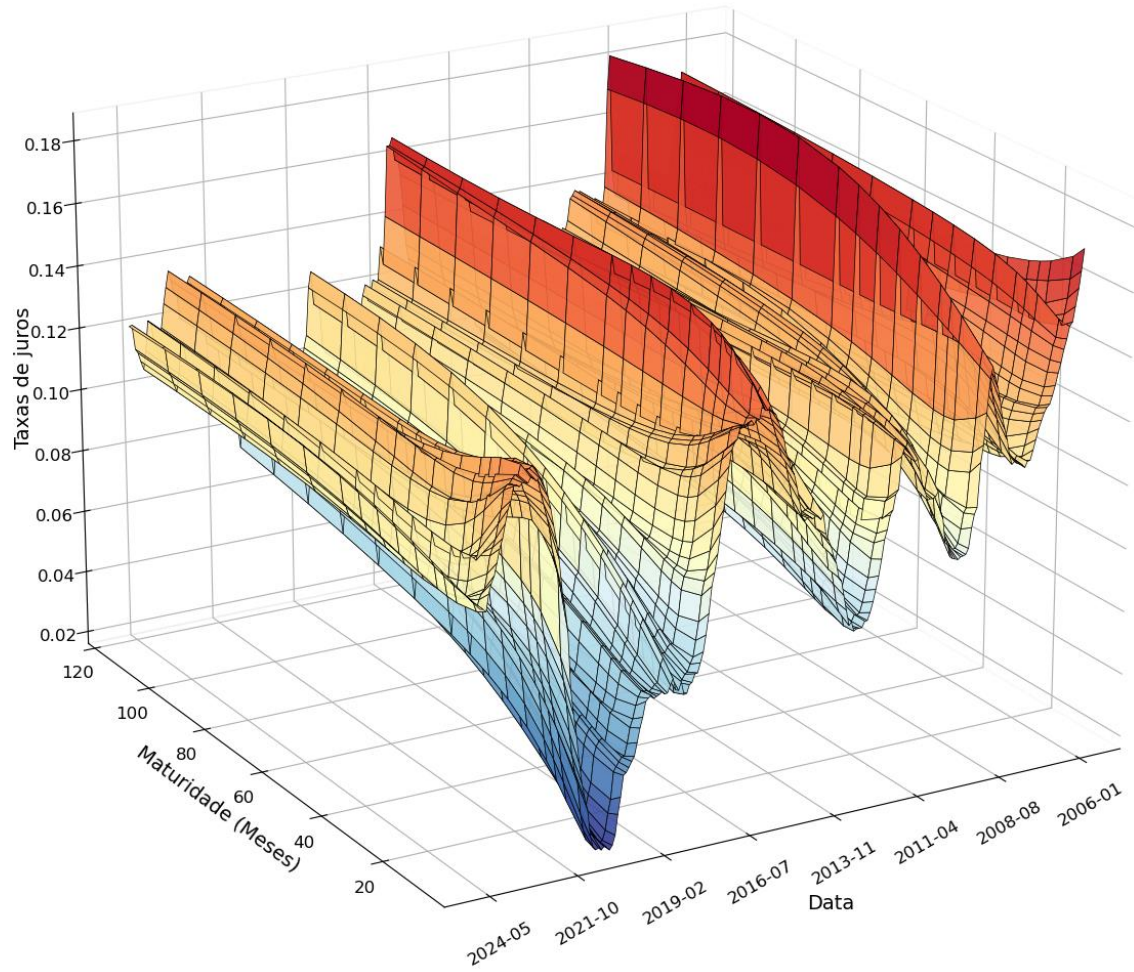
Maturidade (meses)	Média	Mediana	Desvio Padrão	Mínimo	Máximo	Assimetria	Curtose
M3	0.1014	0.1088	0.0345	0.0194	0.1748	-0.5755	-0.3496
M6	0.1017	0.1084	0.0342	0.0196	0.1707	-0.5827	-0.3845
M12	0.1034	0.1102	0.0325	0.0232	0.1660	-0.5767	-0.3395
M15	0.1044	0.1110	0.0316	0.0257	0.1643	-0.5644	-0.2936
M18	0.1054	0.1123	0.0306	0.0284	0.1629	-0.5474	-0.2442
M24	0.1073	0.1137	0.0288	0.0338	0.1663	-0.5045	-0.1502
M30	0.1089	0.1151	0.0274	0.0389	0.1712	-0.4558	-0.0691
M36	0.1102	0.1156	0.0262	0.0434	0.1753	-0.4061	0.0020
M42	0.1113	0.1159	0.0253	0.0473	0.1785	-0.3580	0.0670
M48	0.1123	0.1162	0.0246	0.0507	0.1810	-0.3131	0.1277
M60	0.1137	0.1173	0.0235	0.0562	0.1842	-0.2354	0.2342
M72	0.1148	0.1179	0.0227	0.0603	0.1853	-0.1745	0.3135
M84	0.1155	0.1184	0.0221	0.0635	0.1851	-0.1287	0.3625
M96	0.1161	0.1186	0.0216	0.0655	0.1840	-0.0949	0.3853
M108	0.1166	0.1188	0.0212	0.0667	0.1823	-0.0701	0.3897
M120	0.1170	0.1191	0.0209	0.0677	0.1803	-0.0515	0.3840

Fonte: Elaborado pelo Autor

É possível observar uma redução na magnitude da assimetria negativa conforme avançamos para maturidades intermediárias e longas, sugerindo maior efeito de choques e efeitos da política monetária nas taxas mais curtas.

A seguir, apresentamos através da Figura 1 a estrutura a termo da taxa de juros brasileira referente à base de dados utilizada, permitindo uma melhor visualização da dinâmica, nível e inclinação da curva ao longo do tempo; bem como o comportamento de cada uma das maturidades ao longo da amostra.

Figura 1: Curva de juros brasileira de jan/2006 a mai/2024

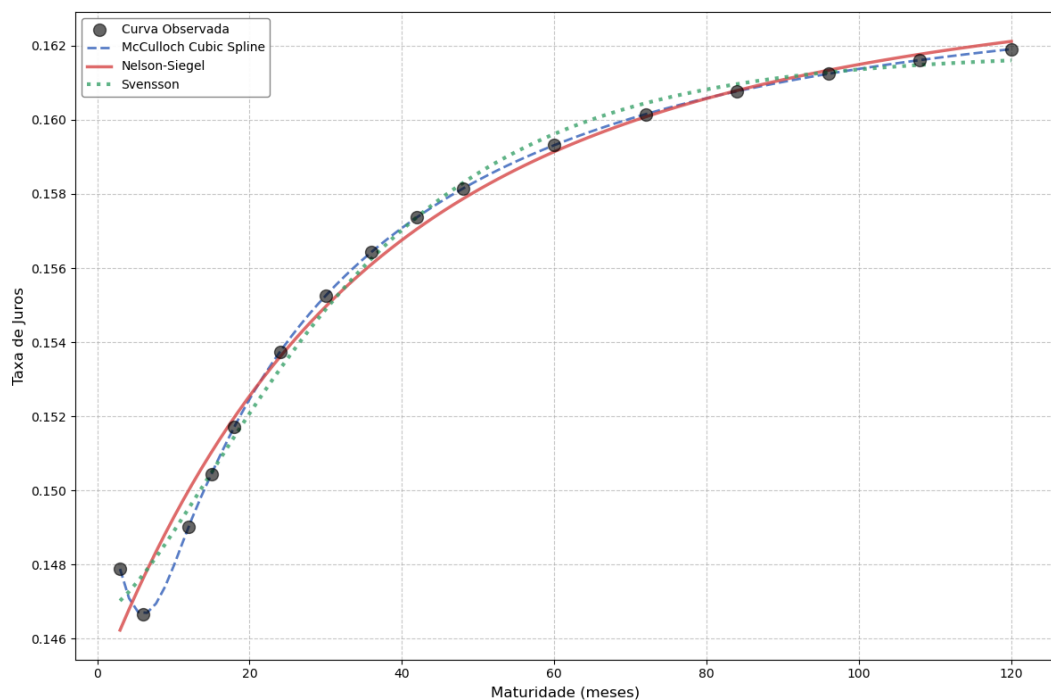


Fonte: Elaborado pelo Autor

5 RESULTADOS E COMPARAÇÕES ENTRE MODELOS

A seguir, apresentamos as curvas estimadas através de cada um dos métodos debatidos ao longo do trabalho, visando comparar o ajuste de cada modelo através de momentos em que as curvas apresentam formatos distintos, com inclinações positivas, negativas e com múltiplas inversões. Do lado dos métodos paramétricos, as curvas são construídas a partir dos modelos propostos por Nelson e Siegel (1987) e Svensson (1994); enquanto para os modelos não paramétricos a estimação da curva de juros foi realizada através de *cubic splines*, conforme originalmente introduzidos por McCulloch (1971; 1975). A escolha dos modelos foi motivada por sua ampla utilização tanto por Bancos Centrais quanto por participantes do mercado em geral, conforme destacado pelo Relatório do BIS (2005).

Figura 2: Curva de Juros Observada e Ajustada – 30/06/2006



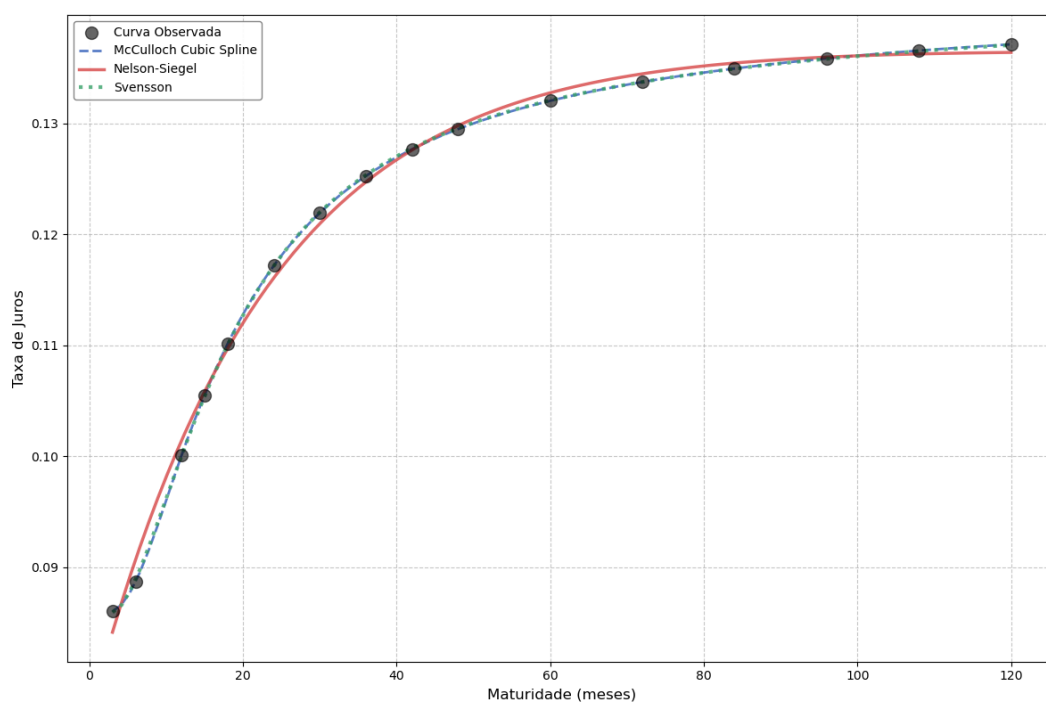
Fonte: Elaborado pelo Autor

A Figura 2 traz a curva de juros para o dia 30/06/2006, momento em que a estrutura a termo assumia um formato razoavelmente mais típico de inclinação positiva, mas incorporava uma inversão na parte mais curta. Inicialmente, fica evidente a superioridade do método de *cubic splines* quando consideramos observações dentro da amostra: o método é capaz de ajustar perfeitamente a curva

a todos os pontos observados de maneira suave. No caso dos modelos paramétricos, ambos os modelos sofrem com a inflexão na parte curta da curva, mas no geral apresentam boa capacidade de ajuste, com uma pequena vantagem para o modelo de Svensson, sobretudo em maturidades mais curtas, resultado atribuível a incorporação de um fator adicional de curvatura no modelo.

De maneira geral, quando consideramos momentos em que a estrutura a termo da taxa de juros apresenta um formato com inclinação positiva e bem definida, os resultados esperados são similares aos da Figura 2. Ambos os métodos apresentam uma boa capacidade de ajuste, frequentemente com alguma vantagem para o modelo de Svensson. A seguir, a Figura 3 representa um período cujo formato da ETTJ é parecido com a Figura 2: são esperadas taxas mais altas para maturidades mais longas, mas dessa vez, não há inflexão significativa na parte mais curta da curva:

Figura 3: Curva de Juros Observada e Ajustada – 30/10/2009

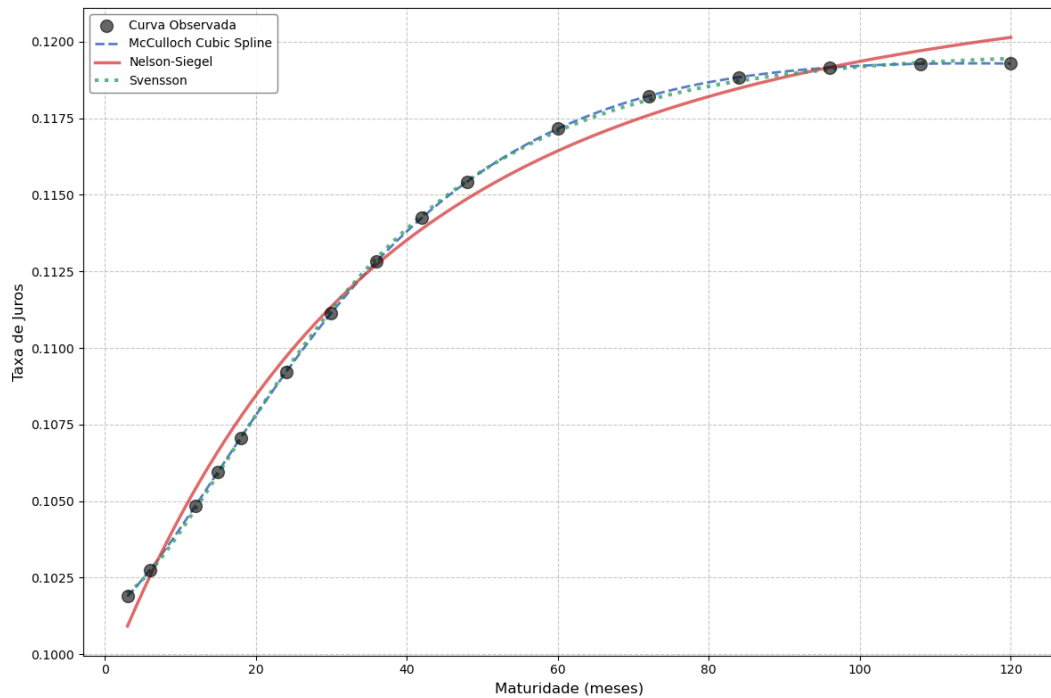


Fonte: Elaborado pelo Autor

Os resultados são similares aos observados na Figura 2. Para curvas típicas e bem definidas, ambos os modelos paramétricos capturam bem a dinâmica da curva de juros, com um ajuste ligeiramente superior observado através do modelo de Svensson. Por outro lado, a Figura 4 ilustra um momento em que a curva assume uma forma tipicamente ascendente, como na Figura 3, mas com um formato um

pouco mais plano em sua parte mais longa. Nesse caso, o resultado parece indicar uma superioridade mais significativa em termos de ajuste pelo modelo de Svensson, sobretudo entre as maturidades de 40 a 96 meses, em que é possível observar que o modelo de Nelson Siegel apresentou uma qualidade inferior de ajuste:

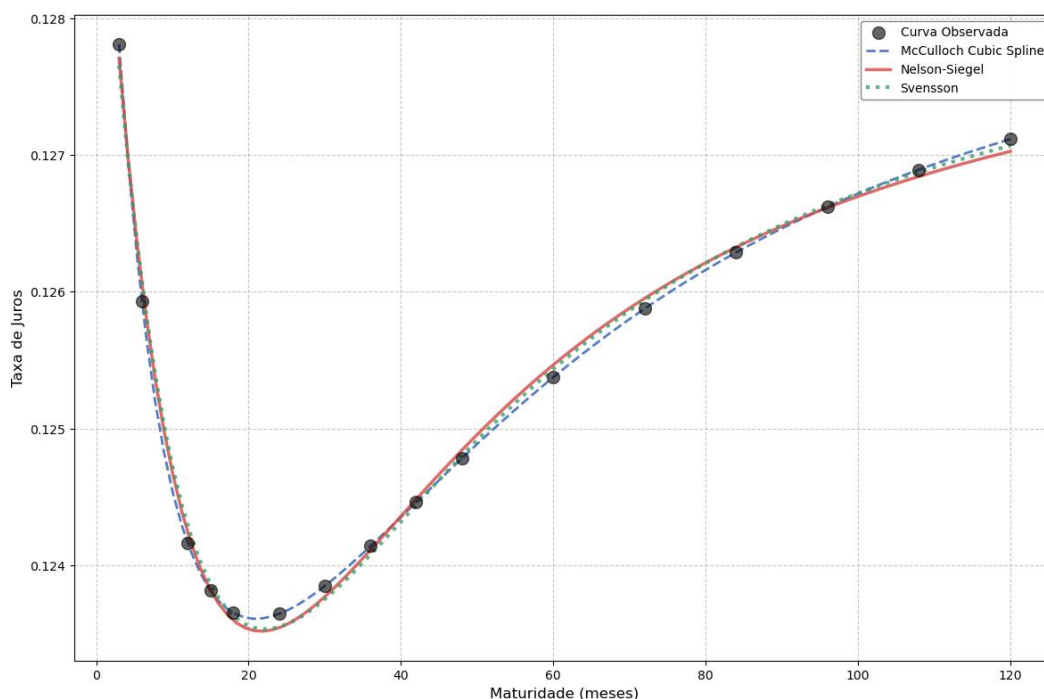
Figura 4: Curva de Juros Observada e Ajustada – 31/05/2024



Fonte: Elaborado pelo Autor

A Figura 5 ilustra a curva referente ao dia 31/01/2007. Nesse momento, a curva de juros refletia taxas mais elevadas nas maturidades mais curtas com relação às mais longas, também sem inflexões significativas em sua inclinação. Assim como nos casos discutidos anteriormente para curvas ascendentes, os resultados sugerem que ambos os modelos possuem uma boa capacidade de ajuste, com uma vantagem sutil do modelo de Svensson em relação ao modelo de Nelson Siegel.

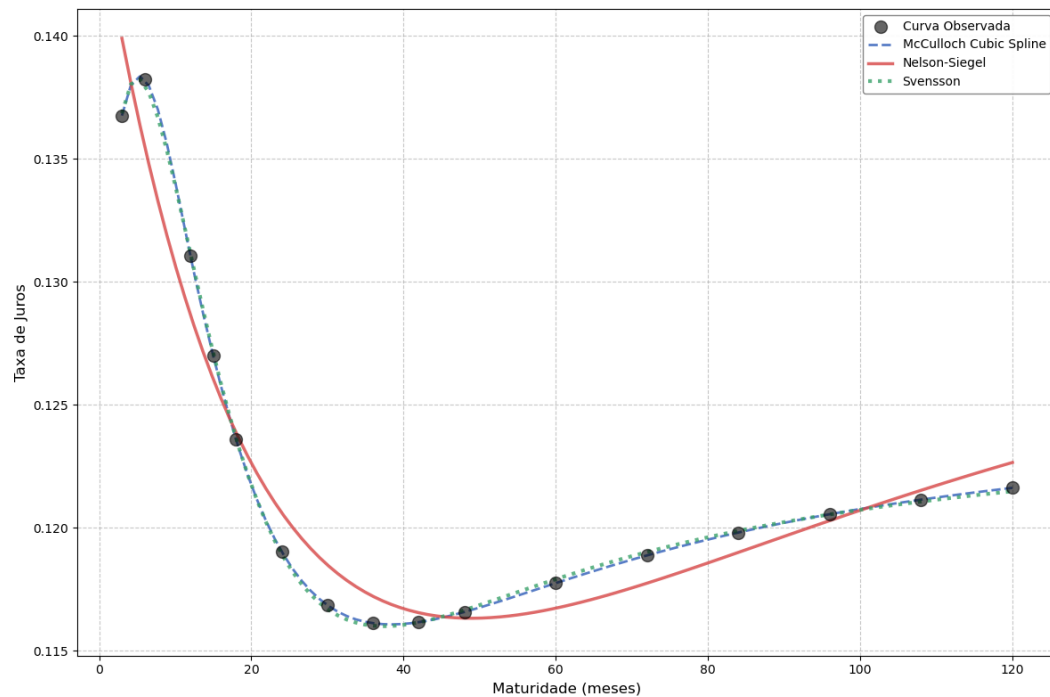
Figura 5: Curva de Juros Observada e Ajustada – 31/01/2007



Fonte: Elaborado pelo Autor

A Figura 6 traz a curva referente ao dia 30/09/2022, momento em que a ETTJ possui um formato invertido com inflexão significativa na região mais curta, refletindo as expectativas de desaceleração econômica por parte do mercado. É possível observar um aumento nas taxas observadas para maturidade de 3 para 6 meses seguida por uma redução acentuada nas taxas para maturidades de 12 meses e períodos subsequentes. Nesse caso, a qualidade do ajuste pelo modelo de Svensson se mostra consideravelmente superior à do modelo de Nelson Siegel, não apenas no que diz respeito às taxas de prazo mais curto, mas especialmente nas zonas em que ocorre a transição da curvatura. A ausência de um fator adicional para a curvatura parece ter um impacto razoável para o ajuste de Nelson Siegel em curvas que apresentam inflexões significativas, de modo que o modelo apresenta grande penalização na qualidade do ajuste.

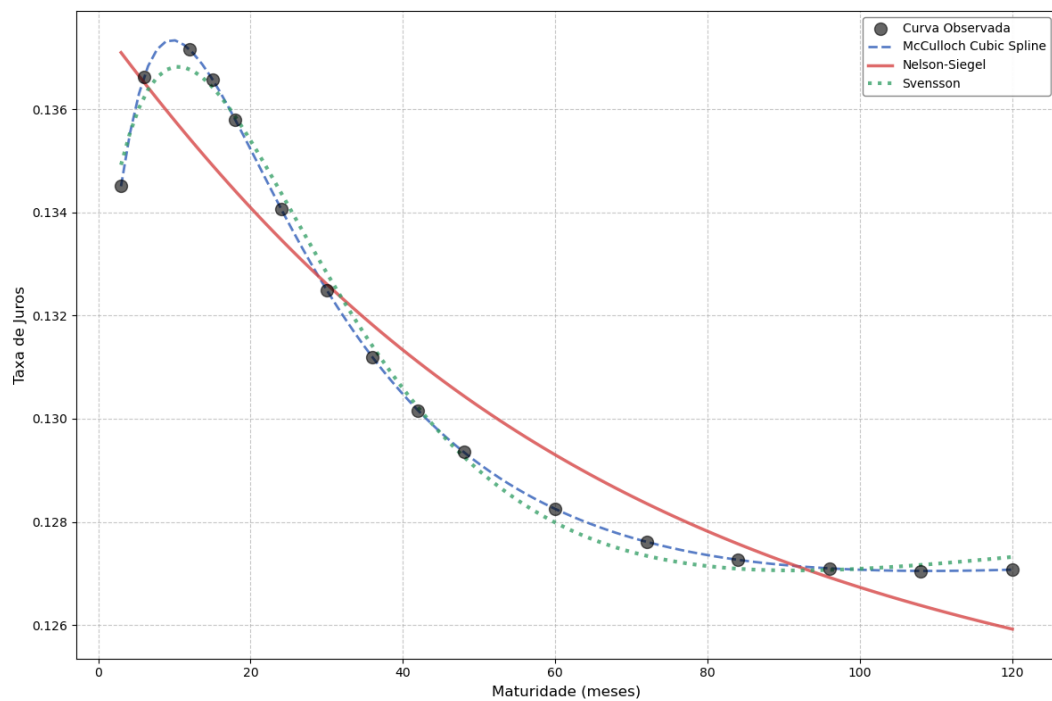
Figura 6: Curva de Juros Observada e Ajustada – 30/09/2022



Fonte: Elaborado pelo Autor

Um comportamento equivalente pode ser observado através da Figura 7, que traz a curva referente ao dia 30/04/2015:

Figura 7: Curva de Juros Observada e Ajustada – 30/04/2015



Fonte: Elaborado pelo Autor

De maneira similar à Figura 6, a Figura 7 ilustra o resultado da implementação de um fator adicional pelo modelo de Svensson quando comparado com Nelson e Siegel. Ainda assim, nesse caso ambos os modelos paramétricos tiveram uma penalização razoável em termos de ajuste, sobretudo no momento da inflexão entre o período de 6 e 12 meses.

Como forma de complementar a análise gráfica do ajuste de cada modelo, através da Tabela 2, apresentamos algumas medidas estatísticas de ajuste para os modelos de Nelson Siegel e Svensson, visando complementar a análise gráfica realizada até então. São apresentados, respectivamente, o erro médio absoluto (*Mean Absolute Error*), o erro percentual médio absoluto (*Mean Average Percentage Error*) e a raiz do erro quadrático médio (*Root Mean Squared Error*) para cada um dos modelos paramétricos. Os resultados obtidos sugerem que, de maneira geral, o modelo de Svensson oferece um ajuste superior ao modelo de Nelson-Siegel, sobretudo quando consideramos as maturidades mais curtas, o que pode ser atribuído em parte pela implementação de um componente adicional de curvatura ao modelo. No entanto, quando consideramos maturidades mais longas, como após 84 meses, os resultados parecem indicar certa convergência entre o ajuste obtido com cada um dos modelos.

Tabela 2 - Medidas de Ajuste dos Modelos Paramétricos

Maturidades	Nelson Siegel			Svensson		
	MAE	MAPE	RMSE	MAE	MAPE	RMSE
M3	0.00127	0.01597	0.00195	0.00055	0.00689	0.00075
M6	0.00058	0.00669	0.00078	0.00029	0.00689	0.00044
M12	0.00089	0.01026	0.00136	0.00044	0.00504	0.00064
M15	0.00072	0.00801	0.00118	0.00020	0.00221	0.00032
M18	0.00062	0.00659	0.00094	0.00016	0.00163	0.00024
M24	0.00044	0.00442	0.00059	0.00038	0.00387	0.00050
M30	0.00038	0.00374	0.00053	0.00038	0.00379	0.00054
M36	0.00042	0.00414	0.00063	0.00026	0.00262	0.00042
M42	0.00047	0.00448	0.00072	0.00015	0.00145	0.00026
M48	0.00052	0.00494	0.00077	0.00015	0.00142	0.00023
M60	0.00054	0.00496	0.00075	0.00033	0.00309	0.00043
M72	0.00045	0.00409	0.00061	0.00037	0.00347	0.00053
M84	0.00028	0.00246	0.00041	0.00028	0.00250	0.00044
M96	0.00018	0.00162	0.00028	0.00012	0.00106	0.00022
M108	0.00034	0.00304	0.00050	0.00016	0.00145	0.00021
M120	0.00065	0.00567	0.00089	0.00044	0.00395	0.00063

Fonte: Elaborado pelo Autor

Tendo em vista os resultados apresentados tanto nos gráficos como na Tabela 2, é possível observar que a incorporação de um fator adicional permite uma melhor capacidade de ajuste ao modelo de Svensson quando comparado ao modelo de Nelson Siegel. No entanto, ambos os modelos paramétricos apresentados são capazes de capturar grande parte da dinâmica da curva de juros de maneira eficaz, com exceções para momentos de inflexões muito significativas entre maturidades próximas, de modo que a escolha entre eles pode depender de um *trade-off* entre precisão e parcimônia.

Considerando os modelos não paramétricos, especificamente via *cubic splines*, temos que estes apresentam perfeito ajuste aos valores observados para cada maturidade, mas o fazem à custa de uma implementação mais complexa e carecem da interpretabilidade econômica de fatores como nível, curva e inclinação, aspectos importantes para operações de *hedge* em carteiras de renda fixa, por exemplo (Caldeira; 2011).

6 CONCLUSÃO

O presente trabalho teve como objetivo apresentar os principais métodos paramétricos e não paramétricos de estimação da estrutura a termo da taxa de juros, utilizando contratos futuros de DI como dados representativos da curva de juros brasileira, e comparar a qualidade do ajuste de cada método.

Inicialmente, apresentamos alguns conceitos elementares que servem de base teórica para a compreensão da curva de juros, como títulos de desconto puro, taxas de juros à vista, taxas de juros à termo, a estrutura a termo da taxa de juros as principais teorias que buscam explicar a sua dinâmica. Apresentamos também as classes de modelos utilizados para estimar a ETTJ, descrevendo as características fundamentais e diferenças entre os modelos paramétricos e os não paramétricos, destacando os mais utilizados por Bancos Centrais e participantes do mercado financeiro no geral.

Os modelos selecionados para representar a classe dos paramétricos foram métodos propostos por Nelson Siegel e Svensson; enquanto para representação dos não paramétricos foi utilizado o método de *cubic splines* proposto por McCulloch. Os resultados obtidos com cada modelo estão aderentes com a literatura vigente: o modelo de quatro fatores de Svensson apresenta superioridade em termos de ajuste quando comparado com o modelo de Nelson Siegel, principalmente para maturidades mais curtas. Conforme consideramos maturidades mais longas, os resultados parecem sugerir que os modelos paramétricos aparentam certa convergência, sendo que ambos capturam parte significativa da dinâmica da curva de juros. Ademais, é possível perceber que a modelagem via *cubic splines* apresenta o melhor resultado em termos de ajuste das curvas, de modo que o método consegue atingir o ajuste perfeito ETTJ para os dados da amostra, mas o faz à custa de uma implementação mais complexa e sem a interpretabilidade econômica oferecida pelos métodos paramétricos.

Considerando trabalhos posteriores, sugere-se utilizar os mesmos modelos para uma análise mais extensa que contemple não apenas o ajuste de cada um dos modelos aos dados presentes na amostra, mas o poder preditivo de cada um deles para dados fora da amostra.

REFERÊNCIAS

- ANG, Andrew; PIAZZESI, Monika. A no-arbitrage vector autoregression of term structure dynamics with macroeconomic and latent variables. **Journal of Monetary Economics**, v. 50, n. 4, p. 745-783, 2003.
- BODIE, Zvi; KANE, Alex; MARCUS, Alan. **ISE Investments**. 12. ed. [S. l.]: McGraw-Hill, 2021. 1040 p. ISBN 9781260571158.
- BANK FOR INTERNATIONAL SETTLEMENTS - BIS. **Zero-coupon yield curves**: technical documentation. BIS Papers n. 25. Bank for International Settlements (Department Monetary and Economic), Oct. 2005.
- CALDEIRA, João F. Estimação da estrutura a termo da curva de juros no brasil através de modelos paramétricos e não paramétricos. **Análise Econômica**, [S. l.], v. 29, n. 55, 2011. DOI: 10.22456/2176-5456.13198. Disponível em: <https://seer.ufrgs.br/index.php/AnaliseEconomica/article/view/13198>. Acesso em: 13 maio 2024.
- CALDEIRA, João F.; MOURA, Guilherme V.; SANTOS, André A.P. Predicting the yield curve using forecast combinations. **Computational Statistics & Data Analysis**, [S.L.], v. 100, p. 79-98, ago. 2016.
- COX, John C.; INGERSOLL, Jonathan E.; ROSS, Stephen A. A theory of the term structure of interest rates. **Econometrica**, v. 53, n. 2, p. 385-407, 1985.
- DIEBOLD, F. X.; LI, C. Forecasting the term structure of government bond yields. **Journal of Econometrics**, v. 130, n. 2, p. 337–364, 2006.
- DUFFEE, Gregory. Term premia and interest rate forecast in affine models. **Journal of Finance**, v. 57, n. 1, p. 405-443, 2002.
- ESTRELLA, Arturo.; HARDOUVELIS, Gikas A. The term structure as a predictor of real economic activity. **Journal of Finance**, v. 46, n. 2, p. 555–576, 1991. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/2328836>. Acesso em: 10 maio 2024.
- FABOZZI, F. J.; MANN, S. V. The handbook of fixed income securities. 8. ed. Nova Iorque, NY, USA: McGraw-Hill Professional, 2012.
- FERNANDES, Marcelo; NUNES, Clemens; REIS, Yuri. What Drives the Nominal Yield Curve in Brazil? **Brazilian Review of Econometrics**, v. 40, n. 2, Abril 2021.
- HARVEY, Campbell Russell. The term structure and world economic growth. **Journal of Fixed Income**, v.1, n.1, p.7–19, 1991. Disponível em: [https://people.duke.edu/~charvey/Research/Published_Papers/P6_The_term_structu](https://people.duke.edu/~charvey/Research/Published_Papers/P6_The_term_structure.pdf)re.pdf. Acesso em: 07 maio 2024.
- HULL, J. C. **Opções, Futuros e Outros Derivativos**. 9. ed. Bookman, 2016. 968 p.

LAURINI, M. P.; MOURA, M. Constrained smoothing BB-splines for the term structure of interest rates. **Insurance: Mathematics and Economics**, v. 46, n. 2, p. 339–350, 2010.

MCCULLOCH, J. H. Measuring the term structure of interest rates. **Journal of Business**, v. 44, n. 1, p. 19–31, 1971.

MINSHKIN, Frederic Stanley. What does the term structure tell us about future inflation? **Journal of Monetary Economics**, v. 25, n. 1, p. 77–95, 1990. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0304393290900467>. Acesso em: 10 maio 2024.

NELSON, Charles; SIEGEL, Andrew. Parsimonious modeling of yield curves. **The Journal of Business**, v. 60, n. 4, p. 473–489, 1987. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/2352957>. Acesso em: 13 maio 2024.

PRODANOV, Cleber Cristiano; FREITAS, Ernani Cesar de. **Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas de pesquisa e do trabalho acadêmico**. 2. ed. Novo Hamburgo/RS: Feevale, 2013. Disponível em: <http://www.feevale.br/Comum/midias/8807f05a-14d0-4d5b-b1ad1538f3aef538/Ebook%20Metodologia%20do%20Trabalho%20Cientifico.pdf> Acesso em: 25 jun 2024.

SHILLER, R. J.; MCCULLOCH, J. H. The term structure of interest rates. **NBER Working Paper Series** n. 2341. National Bureau of Economic Research, 1987

SVENSSON, Lars. E. O. Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-1994. **IMF Working Papers** n. 94/114. International Monetary Fund, 1994. Disponível em: <https://www.elibrary.imf.org/view/journals/001/1994/114/001.1994.issue-114-en.xml>. Acesso em: 10 maio 2024.

VASICEK, Oldrich. An equilibrium characterization of the term structure. **Journal of Financial Economics**, v. 5, n. 2, p. 177-188, 1977.

VASICEK, O. A. & FONG, H. G. Term structure modeling using exponential splines. **Journal of Finance**, 37(2):339–48, 1982.