

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO DE JOINVILLE
CURSO DE ENGENHARIA AEROESPACIAL

PEDRO LUCAS FERNANDES DE ARAUJO SILVA

MÉTODO ADJUNTO APLICADO À OTIMIZAÇÃO DE UM BOCAL
CONVERGENTE-DIVERGENTE DA EQUIPE KOSMOS ROCKETRY

Joinville
2024

PEDRO LUCAS FERNANDES DE ARAUJO SILVA

MÉTODO ADJUNTO APLICADO À OTIMIZAÇÃO DE UM BOCAL
CONVERGENTE-DIVERGENTE DA EQUIPE KOSMOS ROCKETRY

Trabalho apresentado como requisito
para obtenção do título de bacharel
em Engenharia Aeroespacial do
Centro Tecnológico de Joinville da
Universidade Federal de Santa Catarina.

Orientador: Juan P. L. C. Salazar, Ph. D.

Joinville
2024

PEDRO LUCAS FERNANDES DE ARAUJO SILVA

MÉTODO ADJUNTO APLICADO À OTIMIZAÇÃO DE UM BOCAL
CONVERGENTE-DIVERGENTE DA EQUIPE KOSMOS ROCKETRY

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi
julgado adequado para obtenção do título
de bacharel em Engenharia Aeroespacial,
na Universidade Federal de Santa Catarina,
Centro Tecnológico de Joinville.

Joinville (SC), 04 de Julho de 2024.

Banca Examinadora:

Orientador: Juan P. L. C. Salazar, Ph. D.
Orientador
Presidente

Dr. Rafael Gigena Cuenca
Membro(a)
Universidade Federal de Santa Catarina

Dr. Diogo Nardelli Siebert
Membro
Universidade Federal de Santa Catarina

AGRADECIMENTOS

Esse trabalho é o resultado de uma jornada intensa que durou cinco anos e meio e que possibilitará a conquista do esperado título de Engenheiro Aeroespacial. Primeiramente, gostaria de agradecer a toda minha família, que desde o primeiro momento em que decidi cursar a UFSC e me mudar para Santa Catarina, deram toda sua energia e disposição para que esse sonho fosse possível de ser concretizado. Uma menção especial para minha mãe, Gislaine Fernandes, que foi a minha maior motivação ao longo de toda minha vida para que eu chegasse até aqui.

O medo do desconhecido, a distância da família e dos amigos da cidade natal abriram portas para o crescimento, novas relações e, de fato, uma nova família. Gostaria de agradecer a todos os amigos que construí ao longo dessa jornada. Com certeza, o apoio de vocês fez a diferença para que eu persistisse todos os dias.

Ao meu orientador, Juan Pablo, que me apresentou o tema e foi essencial para o entendimento do mesmo, viabilizando enfrentar os desafios que surgiram ao longo do desenvolvimento do trabalho.

Gostaria de agradecer também a todo o time de PBI da Nidec, que fizeram parte do meu último ano de graduação, apoiando-me não só no crescimento profissional dentro da empresa, mas também no incentivo para a conclusão das atividades da graduação.

Uma menção especial à Kosmos Rocketry, que fez parte da minha graduação por quatro anos e, desde o início da minha graduação, possibilitou desenvolver pesquisa dentro da universidade, participar em competições, utilizar um projeto como tema do trabalho de conclusão de curso e também fazer amizades que com toda certeza se estenderão para a vida pessoal e também profissional.

Por fim, não poderia deixar de citar a Bateria Nota Cem, que se tornou minha segunda família. Foram diversas apresentações, ensaios e competições que, de forma positiva, aliviavam o caos da rotina.

RESUMO

O trabalho tem como objetivo otimizar um bocal do motor da Kosmos Rocketry, equipe de desenvolvimento de foguetes experimentais da UFSC Joinville. Uma tubeira deve expandir de forma suave um escoamento. O desempenho da tubeira é baseado principalmente em maximizar o empuxo na saída. Na otimização, muitas configurações de projeto devem ser exploradas, o que não pode ser feito de forma viável apenas com experimentos. O método tradicional de projeto envolve intuição do projetista. A automatização do processo de otimização é baseada na perturbação da geometria para alcançar o valor ótimo da função objetivo. Porém, isso requer um elevado custo computacional com métodos diretos. Dessa forma, o método adjunto mostra-se como uma alternativa para reduzir o custo e o tempo computacional para calcular os gradientes de uma função objetivo em relação aos parâmetros de projeto, acelerando o processo de otimização automático da geometria sem necessidade de alterações manuais pelo projetista.

Palavras-chave: Método adjunto. Otimização automática. Bocal convergente-divergente.

ABSTRACT

This work aims to optimize an engine nozzle from Kosmos Rocketry, an experimental sounding rocket development team at UFSC Joinville. A nozzle must expand smoothly the flow. The nozzle performance is mainly based on maximizing the thrust. In optimization, many design configurations must be explored, which cannot feasibly be done with experiments alone. The traditional design method involves the designer's intuition. The automation of the optimization process is based on the perturbation of the geometry to achieve the optimal value of the objective function. However, this requires a high computational cost with direct methods. In this way, the adjoint method appears as an alternative to reduce the cost and computational time to calculate the gradients of an objective function about the design parameters, accelerating the automatic geometry optimization process without needing manual changes by the designer.

Keywords: Adjoint method. Automatic optimization. Convergent-divergent nozzle.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Motores Raptor no foguete Super Heavy da SpaceX	14
Figura 2 – Esquemático de um motor de foguete	19
Figura 3 – Tipos de bocais de foguete	19
Figura 4 – Método adjunto discreto e contínuo	23
Figura 5 – Estrutura do esquema de ROE	26
Figura 6 – Exemplo de malha estruturada	28
Figura 7 – Exemplo de malha não estruturada	28
Figura 8 – Exemplo de configuração da caixa de deformação na seção divergente do bocal	29
Figura 9 – Estrutura do processo de otimização	30
Figura 10 – Renderização da seção do motor do projeto Morpheus	31
Figura 11 – Meia seção do bocal inicial	33
Figura 12 – Definição das condições do bocal	34
Figura 13 – Malha 1 da simulação direta	35
Figura 14 – Malha 2 da simulação direta	36
Figura 15 – Malha 3 da simulação direta	36
Figura 16 – Definição da caixa de otimização	37
Figura 17 – Estudo da influência da caixa de deformação e limite de deslocamento	38
Figura 18 – Razão de expansão em função do número de Mach	40
Figura 19 – Modelagem do contorno do bocal usando funções de primeiro grau	41
Figura 20 – Número de Mach analítico em função da posição axial	42
Figura 21 – Temperatura analítica em função da posição axial	42
Figura 22 – Pressão analítica em função da posição axial	43
Figura 23 – Número de Mach obtido na simulação direta em função da posição axial	43
Figura 24 – Temperatura obtida na simulação direta em função da posição axial	44
Figura 25 – Pressão obtida na simulação direta em função da posição axial . . .	44
Figura 26 – Gradiente de densidade na direção x para a malha 3	45
Figura 27 – Gradiente de densidade na direção y para a malha 3	45
Figura 28 – Linha sônica para a malha 3	46
Figura 29 – Contorno de pressão para a malha 3	46
Figura 30 – Contorno de densidade para a malha 3	47
Figura 31 – Contorno do número Mach para a malha 2	48
Figura 32 – Contorno da temperatura para a malha 2	48
Figura 33 – Contorno de pressão para a malha 2	49

Figura 34 – Caixa 1 definida para otimização	50
Figura 35 – Força de empuxo em cada iteração para caixa 1	51
Figura 36 – Perfis resultantes da otimização para caixa 1	52
Figura 37 – Malha resultante para a caixa 1	52
Figura 38 – Contorno de Mach para o perfil otimizado com a caixa 1	53
Figura 39 – Contorno de temperatura para o perfil otimizado com a caixa 1	53
Figura 40 – Contorno de pressão para o perfil otimizado com a caixa 1	53
Figura 41 – Caixa 2 definida para otimização	54
Figura 42 – Força de empuxo em cada iteração para a caixa 2	55
Figura 43 – Perfis resultantes da otimização para a caixa 2	56
Figura 44 – Gradiente de densidade na direção x para a caixa 2	56
Figura 45 – Gradiente de densidade na direção y para a caixa 2	57
Figura 46 – Malha resultante para a caixa 2	57
Figura 47 – Contorno de Mach para o perfil otimizado com a caixa 2	57
Figura 48 – Contorno de temperatura para o perfil otimizado com a caixa 2	58
Figura 49 – Contorno de pressão para o perfil otimizado com a caixa 2	58
Figura 50 – Caixa 3 definida para otimização	59
Figura 51 – Força de empuxo em cada iteração para a caixa 3	59
Figura 52 – Perfis resultantes da otimização para a caixa 3	60
Figura 53 – Malha resultante para a caixa 3	60
Figura 54 – Contorno de Mach para o perfil otimizado com a caixa 3	61
Figura 55 – Contorno de temperatura para o perfil otimizado com a caixa 3	61
Figura 56 – Contorno de pressão para o perfil otimizado com a caixa 3	61

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Dimensões iniciais do bocal	32
Tabela 2 – Condições na câmara de combustão	33
Tabela 3 – Propriedade do gás resultante da combustão	34
Tabela 4 – Refino de malha da simulação direta	35
Tabela 5 – Parâmetros das caixas de deformação para a malha escolhida . . .	37
Tabela 6 – Propriedades do escoamento na saída do bocal	39
Tabela 7 – Valores teóricos do fluxo de massa, Mach na saída e empuxo . . .	40
Tabela 8 – Funções que modelam o bocal em função da posição axial	41
Tabela 9 – Resultados residuais para cada malha na simulação direta	47
Tabela 10 – Comparação dos resultados numéricos com o modelo unidimensional	49
Tabela 11 – Mach e velocidade médios na saída para as otimizações com a caixa 1	50
Tabela 12 – Empuxo médio na saída para as otimizações com a caixa 1	51
Tabela 13 – Mach e velocidade médios na saída para as otimizações com a caixa 2	54
Tabela 14 – Empuxo médio na saída para as otimizações com a caixa 2	54
Tabela 15 – Mach e velocidade médios na saída para as otimizações com a caixa 3	58
Tabela 16 – Empuxo médio na saída para as otimizações com a caixa 3	59
Tabela 17 – Diferença percentual do empuxo para o valor teórico e da simulação	62

LISTA DE SÍMBOLOS

p	Pressão do escoamento [Pa]
P_e	Pressão de exaustão [Pa]
P_c	Pressão da câmara de combustão [Pa]
P_a	Pressão ambiente [Pa]
ρ	Densidade do gás [kg/m ³]
ρ_c	Densidade do gás na câmara de combustão [kg/m ³]
$\Re$	Constante específica do gás [J/kg/K]
$\mathcal{R}$	Constante universal dos gases [J/mol/K]
C	Funções da curva do bocal
$\dot{m}$	Fluxo de massa [kg/s]
F_t	Força de empuxo [N]
u	Velocidade axial [m/s]
u_e	Velocidade de exaustão [m/s]
$\mathbf{V}$	Vetor velocidade [m/s]
A	Área da seção transversal [m ²]
A_t	Área da seção transversal da garganta [m ²]
A_e	Área da seção transversal da saída [m ²]
$\mathcal{M}$	Massa molar do gás [g/mol]
T	Temperatura do escoamento [K]
T_e	Temperatura de exaustão [K]
T_c	Temperatura da câmara de combustão [K]
T_a	Temperatura ambiente [Pa]
a	Velocidade do som [m/s]

γ	Razão de calores específicos do gás [-]
M	Número de Mach [-]
M_e	Número de Mach na saída do bocal [-]
t	Tempo [s]
E	Energia por unidade de volume [J/m ³]
e	Energia interna por unidade de massa [J/kg]
c_v	Calor específico a volume constante [J/kg/K]
U	Variáveis conservativas
F	Termo convectivo
J	Função objetivo
R	Equações governantes
α	Variável de projeto
s	Deslocamentos normais à superfície
$\mathbf{n}_s$	Vetor normal à superfície
λ	Multiplicador de Lagrange
L	Função lagrangeana
$\mathbf{D}$	Termo dissipativo
k	Autovalor de uma matriz
$\mathbf{R}$	Matriz de autovetores
$ \Lambda $	Matriz de autovalores absolutos
$\mathbf{X}$	Coordenadas cartesianas
ξ, η, ζ	Coordenadas paramétricas
$l, m \text{ e } n$	Graus dos polinômios de Bernstein
B	Polinômio de Bernstein
r_i	Raio de entrada do bocal [mm]
r_e	Raio de saída do bocal [mm]

r_t	Raio da garganta do bocal [mm]
l_{conv}	Comprimento da seção convergente do bocal [mm]
l_{div}	Comprimento da seção divergente do bocal [mm]

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	Objetivos	16
1.1.1	Objetivo Geral	16
1.1.2	Objetivos Específicos	16
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	17
2.1	Foguete ideal	17
2.2	Geometria do bocal	17
2.3	Tipos de Bocal	19
2.4	Escoamento Isentrópico	20
2.5	Equações Governantes do Escoamento	21
2.6	Problema de Otimização	21
2.7	Stanford University Unstructured (SU2)	22
2.8	Método Adjunto	23
2.8.1	Método Adjunto Discreto	24
2.9	Discretização Numérica	25
2.10	Malha Computacional	27
2.11	Deformação da Geometria	28
3	METODOLOGIA	30
3.1	Projeto Morpheus	31
3.2	Definição da Geometria	32
3.3	Condições de contorno do escoamento	33
3.4	Malha Computacional	35
3.5	Definição da caixa de deformação	36
3.6	Pós-Processamento	38
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	39
4.1	Cálculo Analítico das Condições do Bocal	39
4.2	Simulação Direta	43
4.3	Otimização do Perfil Divergente	49
4.3.1	Caixa 1	50
4.3.2	Caixa 2	54
4.3.3	Caixa 3	58
4.3.4	Comparativo entre as otimizações	62
5	CONCLUSÃO	63

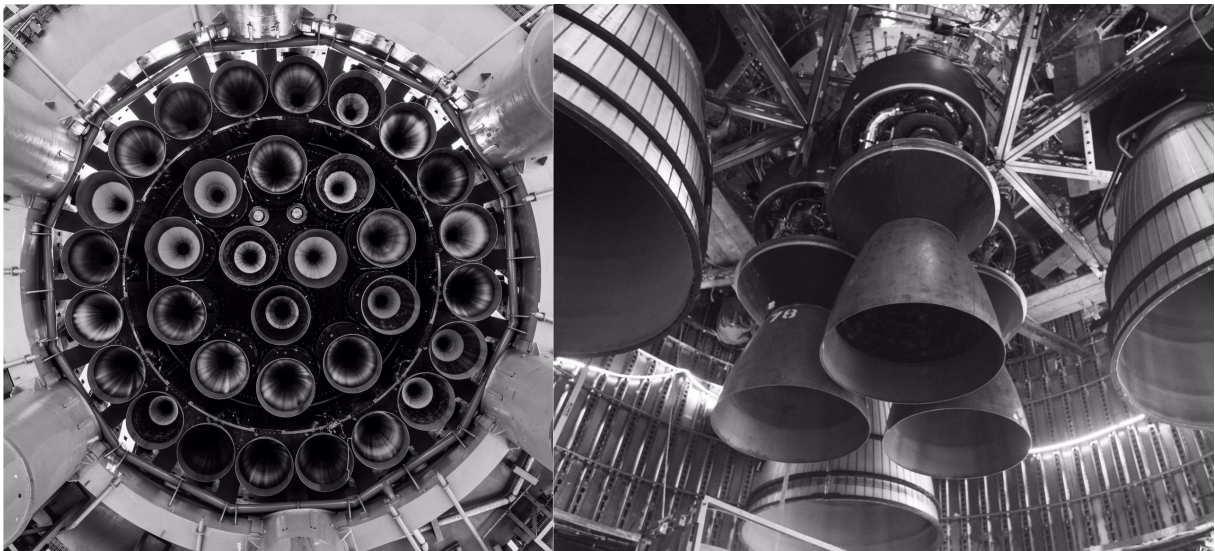
REFERÊNCIAS 65

1 INTRODUÇÃO

O bocal de um motor-foguete é usado para converter a energia termoquímica gerada pela combustão do propelente em energia cinética. O gás proveniente da câmara de combustão é convertido de um estado com baixa velocidade, alta pressão e alta temperatura em outro estado de alta velocidade, baixa pressão e baixa temperatura (BELEGA; NGUYEN, 2015). O formato mais comum de um bocal é o convergente-divergente. Esse formato é utilizado em sistemas de propulsão desde 1890 quando Carl Gustaf Patrik de Laval o desenvolveu a fim de acelerar um jato de vapor para uma condição supersônica (HARRIS, 1984).

Atualmente, os principais sistemas propulsivos de veículos aeroespaciais de grande porte utilizam tubeiras com essa geometria. O foguete mais potente já construído, Starship da empresa SpaceX, utiliza o foguete Super Heavy, que possui 120 metros de altura com um empuxo aproximado de 74,3 MN, o dobro do foguete Saturno V que levou os primeiros astronautas a Lua (O GLOBO, 2024). A Figura 1 mostra esse foguete composto por 33 motores Raptor da SpaceX.

Figura 1 – Motores Raptor no foguete Super Heavy da SpaceX



Fonte: SpaceX (2024)

A indústria aeroespacial, que abrange a aviação e a exploração espacial, apresenta um crescimento acelerado de investimento, com previsão de uma movimentação de 1 trilhão de dólares até 2040 (EXAME, 2023). Esse crescimento é acompanhado do aumento do consumo de combustíveis. A previsão é que serão gastos em 2023 cerca de 229 bilhões de dólares em combustível na indústria de transporte aéreo (IATA, 2022).

Dessa forma, observa-se um interesse das empresas aeroespaciais em reduzir o consumo de combustível melhorando a eficiência do veículo. Nesse contexto, a otimização de estruturas e perfis aerodinâmicos para reduzir forças de arrasto e maximizar o empuxo são soluções válidas para aumentar a eficiência e reduzir o consumo energético (HUHN, 2015).

A utilização da mecânica dos fluidos computacional (CFD) para o projeto de perfis tem sido considerada como uma alternativa válida na prática, mas não garante de fato o perfil otimizado para a aplicação (JAMESON, 2022). Nesse sentido, existe uma necessidade de acoplar a mecânica dos fluidos computacional com métodos de otimização, a fim de obter um processo de otimização automática. Essa automatização faz com que o usuário não tenha uma interação direta no processo de otimização, através por exemplo de tentativa e erro (HUHN, 2015).

O método adjunto é uma resposta adequada para essa problemática, apresentando vantagens em relação a métodos convencionais de cálculo de gradiente (CHIEREGATTI, 2008). Proposto inicialmente por Jameson (1988), o método é amplamente aplicado em diversos campos, incluindo otimização aerodinâmica, projeto de asas, perfil de arrasto mínimo, controle de fluxo, entre outros. Ele permite encontrar soluções mais eficientes e otimizadas, resultando em melhor desempenho das aeronaves ou outras aplicações que envolvam interação com o escoamento. Isso acontece porque o método adjunto fornece as sensibilidades lineares de uma função objetivo em relação a um número de variáveis de projeto que parametrizam a forma da geometria. Essas sensibilidades são usadas para derivar uma solução otimizada, possuindo um custo computacional reduzido para calculá-las (SIKARWAR, 2009).

Segundo Giles e Pierce (2000), o método adjunto é particularmente eficiente em problemas de grande escala e em malhas não estruturadas, que são comumente encontrados em aplicações de aerodinâmica complexa. Neste trabalho, ele será aplicado para a otimização do perfil divergente de um bocal de um motor-foguete. Esse componente pode ser otimizado por diferentes métodos. Rozendaal (1967) utiliza em seu trabalho o método steepest descent ou método de máximo declive para calcular o gradiente da função objetivo para maximizar o empuxo. De acordo com Schneider (2015), esse método é o algoritmo mais clássico na otimização contínua, sendo um método de primeira ordem, utilizando apenas dados da função e do gradiente da função nos pontos obtidos a cada iteração.

Outra técnica que pode ser utilizada na otimização de bocais supersônicos é o método das características, utilizado para escoamento supersônico em regime permanente e invíscido. Em 1929, Prandtl e Adolf Busemann aplicaram pela primeira vez o método das características, uma técnica para resolver numericamente equações diferenciais parciais hiperbólicas, a fim de projetar a forma adequada para um bocal supersônico. Todos projetos para bocais supersônicos de túnel de vento e motores foguete usam a mesma abordagem básica hoje (ANDERSON, 2003). Rao (1958) desenvolveu um método que otimiza o contorno de um bocal de foguete para um determinado comprimento e razão de expansão, de modo que o máximo empuxo seja alcançado, levando em consideração um escoamento isentrópico.

Com isso, propõe-se a aplicação do método adjunto para automatizar o processo de otimização do bocal convergente-divergente que está em desenvolvimento pela equipe Kosmos Rocketry, evidenciando as vantagens do método para o problema em questão.

1.1 OBJETIVOS

Para resolver a problemática de dependência do usuário e custo computacional com problemas de otimização de um bocal, propõe-se neste trabalho os seguintes objetivos.

1.1.1 Objetivo Geral

Otimizar um perfil de bocal convergente-divergente do projeto Morpheus da equipe de competição Kosmos Rocketry da UFSC Campus Joinville através do método adjunto a fim de automatizar o processo de otimização e reduzir o custo computacional utilizado, bem como avaliar o impacto de diferentes configurações da otimização usando a mesma função objetivo.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Descrever o funcionamento do bocal bem como os parâmetros envolvidos no seu projeto;
- automatizar o processo de otimização para reduzir interação direta com o usuário e diminuir a sensibilidade às entradas.
- otimizar o perfil divergente do bocal utilizando o método adjunto;
- maximizar o empuxo gerado na saída do bocal utilizando a função objetivo de número de Mach;
- avaliar a influência de diferentes configurações de otimização usando a mesma função objetivo.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 FOGUETE IDEAL

Neste trabalho será considerado um modelo de propulsão ideal, uma vez que permite atingir importantes equações de desempenho de foguetes utilizando relações termodinâmicas simples. Essas equações descrevem um escoamento quase-unidimensional que corresponde a uma simplificação ideal do escoamento bidimensional ou tridimensional. Essa simplificação é uma prática comum no projeto de foguetes, uma vez que são as condições que proporcionariam a melhor eficiência do escoamento (SUTTON; BIBLARZ, 2010).

Segundo Sutton e Biblarz (2010), as principais premissas consideradas em um escoamento ideal são:

- produto da combustão segue a lei dos gases ideais;
- o processo é adiabático, não ocorrendo transferência de calor ao longo das fronteiras do sistema;
- efeitos viscosos e de camada limite são desprezados;
- não existe ocorrência de ondas de choque ao longo da expansão;
- o escoamento acontece em regime permanente e uniforme;
- a velocidade do gás, pressão, temperatura e densidade são uniformes ao longo de uma seção normal ao eixo do bocal;
- a equilíbrio químico é estabelecido dentro da câmara de combustão e a composição dos gases não se altera no bocal (escoamento congelado).

2.2 GEOMETRIA DO BOCAL

O bocal de um foguete, também conhecido como de Laval, é um dispositivo acoplado na saída da câmara de combustão do motor. Ele é responsável pela aceleração dos gases resultantes da queima do propelente do motor e deve apresentar um formato característico para cumprir a sua funcionalidade (FLACK, 2005).

O princípio da conservação da massa permite definir o fluxo de massa $\dot{m}$ como,

$$\dot{m} = \rho u A = \text{cte} , \quad (1)$$

onde u é a velocidade axial do escoamento e A é a seção de área transversal do bocal. Como o produto da combustão é um gás ideal, pode-se utilizar a lei dos gases ideais para relacionar a pressão P , a temperatura T e densidade ρ do escoamento.

$$P = \rho \mathcal{R} T , \quad (2)$$

onde $\mathcal{R}$ é a constante específica do gás calculada pela razão da constante universal dos gases $\mathcal{R}$ e a massa molar do gás $\mathcal{M}$. As premissas elencadas anteriormente que definem o escoamento como adiabático, invíscido e sem mecanismos de dissipação permitem inferir que o escoamento é isentrópico (ANDERSON, 2003). Dessa forma, a seguinte equação é válida:

$$\frac{dp}{d\rho} = a^2, \quad (3)$$

onde p é a pressão do escoamento, ρ é a densidade e a é a velocidade local do som. O conceito de número de Mach pode ser definido como a relação entre a velocidade u do escoamento e a velocidade do som local a como mostrado abaixo:

$$M = \frac{u}{a}. \quad (4)$$

Além disso, a velocidade do som para um gás ideal pode ser definida como:

$$a = \sqrt{\gamma \mathcal{R} T}, \quad (5)$$

em que γ é a razão de calores específicos. De acordo com Anderson (2003), para expandir isentropicamente um bocal de velocidades subsônicas para supersônicas é necessário que ele escoe através de um duto convergente-divergente, fato que é comprovado pela relação área-velocidade. Essa relação é proveniente da manipulação das Equações (1), (3) e (5), sendo expressa abaixo:

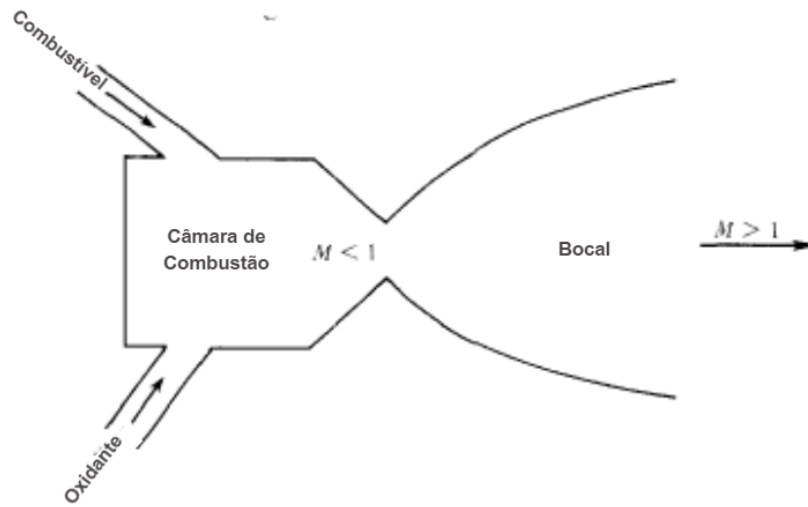
$$\frac{dA}{A} = (M^2 - 1) \frac{du}{u}. \quad (6)$$

A Equação (6) permite inferir as seguintes afirmações:

- para escoamento subsônico ($0 \leq M < 1$), a variação da área e da velocidade tem sinais opostos, ou seja, a velocidade aumenta em um duto convergente e diminui em um duto divergente;
- para escoamento supersônico ($M > 1$), a variação da área e da velocidade tem o mesmo sinal, ou seja, a velocidade aumenta em um duto divergente e diminui em um duto convergente;
- para escoamento sônico ($M = 1$), a área é mínima, acarretada pela condição de $dA = 0$.

A Figura 2 contém uma simplificação de um motor foguete com o bocal convergente-divergente.

Figura 2 – Esquemático de um motor de foguete

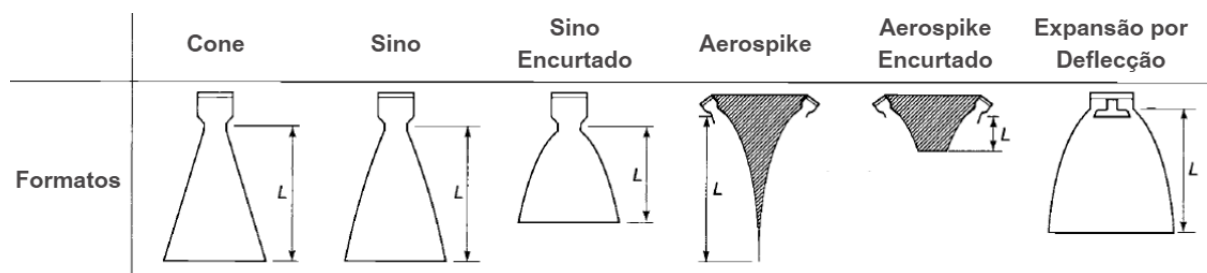


Fonte: Adaptado de Anderson (2003, p. 201)

2.3 TIPOS DE BOCAL

A seção convergente e o contorno da garganta normalmente não são as regiões mais críticas para atingir uma elevada eficiência do escoamento. Por isso, as principais diferenças no desempenho do bocal surgem na seção divergente de escoamento supersônico. É importante que as superfícies das paredes ao longo do bocal sejam lisas e com contornos suaves a fim de reduzir o atrito, a absorção de radiação e a transferência de calor convectivo causados pela rugosidade da superfície. Além disso, é essencial evitar lacunas, buracos, bordas afiadas ou saliências para manter um desempenho ideal (SUTTON; BIBLARZ, 2010). A Figura 3 exemplifica diferentes configurações de bocais, sendo que o aerospike, aerospike encurtado e expansão por deflecção foram utilizados por empresas apenas como testes estáticos mas não como bocais de foguetes primários.

Figura 3 – Tipos de bocais de foguete



Fonte: Adaptado de Sutton e Biblarz (2010, p. 76)

O estudo das configurações de bocais é importante uma vez que permite maximizar a força de empuxo do motor e reduzir a massa do motor a partir da redução do comprimento do bocal (SUTTON; BIBLARZ, 2010).

2.4 ESCOAMENTO ISENTRÓPICO

Como discutido anteriormente, o escoamento através de um bocal pode ser considerado isentrópico para fins de projeto e otimização. O conceito de estagnação em dinâmica de fluidos refere-se a uma condição onde um fluido em movimento é trazido a uma parada completa de maneira isentrópica. Nesse estado, a energia cinética do fluido é convertida em energia de pressão, resultando na máxima pressão e temperatura possíveis para aquele fluxo particular (HILL; PETERSON, 1992).

É possível definir as condições de saída do bocal, considerando uma expansão isentrópica e que a câmara de combustão apresenta condição de estagnação com os gases a uma velocidade próxima de zero. Dessa forma, tem-se as expressões abaixo:

$$\frac{T_c}{T_e} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2, \quad (7)$$

$$\frac{P_c}{P_e} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}, \quad (8)$$

$$\frac{\rho_c}{\rho_e} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2 \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}, \quad (9)$$

onde o subíndice c representa as condições na câmara de combustão e o subíndice e representa as condições na saída do bocal. Partindo das relações isentrópicas e da conservação da massa, é possível definir a relação Área-Número de Mach expressa abaixo:

$$\left(\frac{A_e}{A_t} \right)^2 = \frac{1}{M_e^2} \left[\frac{2}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2 \right) \right]^{(\gamma + 1)/(\gamma - 1)}, \quad (10)$$

em que a razão de expansão, ou seja, a razão entre a área de saída A_e e a área da garganta A_t , é uma função do número de Mach na saída M_e . Portanto, a partir de uma razão de expansão definida no projeto e tendo definido o valor da razão de calores específicos do gás resultante da combustão γ , pode-se calcular o Mach ideal na saída da tubeira, o qual serve como parâmetro para qualificar a otimização.

De acordo com Sutton e Biblarz (2010), o empuxo F_t fornecido pelo motor foguete pode ser calculado pela seguinte equação,

$$F_t = \dot{m} u_e + (P_e - P_a) A_e, \quad (11)$$

em que u_e é a velocidade axial na saída do bocal e P_a é a pressão ambiente.

2.5 EQUAÇÕES GOVERNANTES DO ESCOAMENTO

O escoamento em questão pode ser considerado como um gás ideal e invíscido. Dessa forma, obtém-se as equações de Euler como uma simplificação das equações de Navier-Stokes, como abordado em Anderson (2003). A equação da conservação da massa é descrita abaixo, onde $\mathbf{V}$ é o vetor velocidade do escoamento, t é o tempo e ∇ denota o operador gradiente,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 . \quad (12)$$

A equação da conservação da quantidade de movimento é descrita abaixo,

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V^2) + \nabla p = 0 . \quad (13)$$

A Equação (14) corresponde à equação da conservação de energia, em que E representa a energia total por unidade de volume, mostrada na Equação (15),

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot [(E + p) \mathbf{V}] = 0 , \quad (14)$$

$$E = \rho e + \frac{1}{2} \rho V^2 . \quad (15)$$

A energia interna por unidade de massa e pode ser calculada para um gás caloricamente perfeito pela Equação (16), onde c_v é o calor específico a volume constante,

$$e = c_v T . \quad (16)$$

De acordo com Jameson (1988), as equações de Euler podem ser expressas como abaixo simplificando-se para o caso quase-unidimensional no sistema cartesiano,

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0 , \quad (17)$$

onde

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{pmatrix} , \quad F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(E + p) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad G = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(E + p) \end{pmatrix} . \quad (18)$$

2.6 PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

De acordo com Duffy (2009), o problema geral de otimização pode ser definido como,

$$\begin{aligned} &\text{maximizar } J(U, \alpha) , \\ &\text{sujeito a } R(U, \alpha) = 0 , \end{aligned}$$

onde U representa as variáveis do escoamento, J a função objetivo que se deseja otimizar, R as equações governantes e α as variáveis de projeto que parametrizam a superfície da geometria. Ressalta-se que o problema será definido apenas para condições de igualdade uma vez que não foram aplicadas restrições de desigualdade. Em otimizações baseadas no cálculo de gradientes, é necessário avaliar o gradiente em cada etapa do projeto. A abordagem adjunta propõe equações que permitem o cálculo simplificado das sensibilidades uma vez que uma abordagem direta possui um custo computacional elevado (DUFFY, 2009).

2.7 STANFORD UNIVERSITY UNSTRUCTURED (SU2)

SU2 é um software de código aberto desenvolvido pela universidade de Stanford. Ele foi desenvolvido para solucionar problemas multifísicos governados por equações diferenciais parciais (EDPs) em malhas não estruturadas com foco em aplicações de fluidodinâmica computacional (CFD) e otimização de perfis. Com a implementação do método adjunto, o software tornou-se uma ferramenta muito utilizada para o projeto (PALACIOS et al., 2013).

Os principais módulos do SU2 são:

- *SU2_CFD*: Responsável pela solução direta do escoamento através das equações de Euler;
- *SU2_CFD_AD*: Responsável pela solução adjunta discreta do escoamento através das equações de Euler, com base na função objetivo definida;
- *SU2_DEF*: Perturba a geometria da superfície e deforma o volume da malha que envolve a superfície dado um conjunto de variáveis de projeto no processo de otimização;
- *SU2_DOT_AD*: Calcula o gradiente projetando a sensibilidade da superfície adjunta no espaço de projeto através de uma operação de produto escalar.

Na otimização baseada em gradiente, o otimizador precisa estabelecer uma nova direção de busca e, para isso, é necessário que o gradiente seja avaliado em cada etapa do projeto. O SU2 calcula o gradiente através da regra da cadeia como mostrado abaixo (YANG; RONCH, 2018),

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial s_j}{\partial \alpha_i} \frac{\partial J}{\partial s_j} , \quad (19)$$

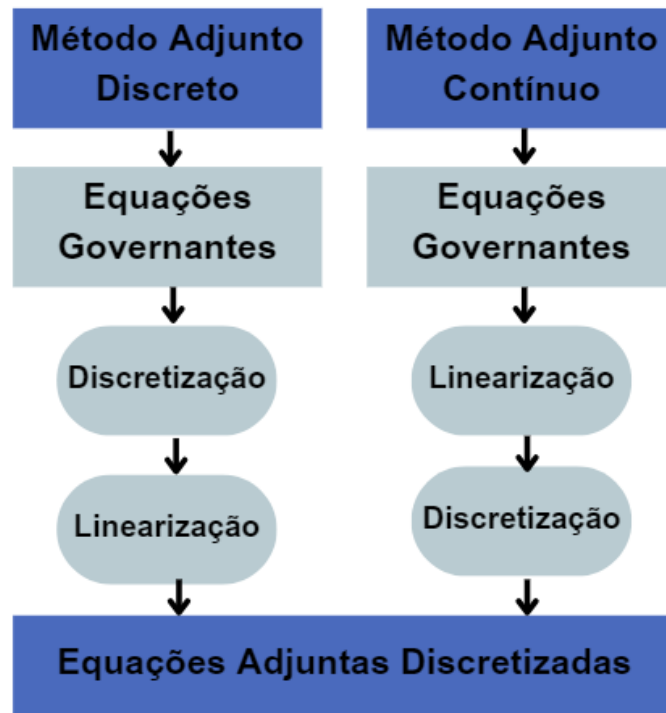
onde se calcula o gradiente da função objetivo J em relação às variáveis de projeto α e s são os deslocamentos normais da superfície local para cada nó de malha na superfície geométrica. O Jacobiano $\partial s_j / \partial \alpha_i$ é a matriz de sensibilidades geométricas,

ou seja, a influência da variação de cada variável de projeto na posição de cada nó da malha. Esse termo pode ser calculado utilizando diferenças finitas já que o custo computacional é muito pequeno pois não envolve a solução das equações diferenciais parciais do escoamento. Já o termo $\partial J / \partial s_j$ é a sensibilidade superficial. Essa variação da função objetivo em relação a uma mudança infinitesimal δs pode ser calculada com a solução das equações adjuntas (MARQUES; HEWITT, 2014).

2.8 MÉTODO ADJUNTO

O método adjunto pode ser dividido em discreto e contínuo. A Figura 4 ilustra esses dois métodos. A diferença entre eles reside na ordem em que é realizada a linearização e a discretização.

Figura 4 – Método adjunto discreto e contínuo



Fonte: Autor

Segundo Palacios et al. (2013), na abordagem contínua as equações adjuntas são deduzidas das equações governante e depois discretizadas, enquanto que na abordagem discreta as equações adjuntas são deduzidas diretamente das equações governantes discretizadas. Ambas abordagens são implementadas no SU2.

Segundo Duffy (2009), as equações adjuntas contínuas não são únicas e, de fato, podem variar devido a escolhas na dedução, o que pode afetar o procedimento de otimização, eliminando propriedades de simetria. Além disso, a abordagem contínua é caracterizada por uma maior dificuldade de convergência quando comparada com a abordagem discreta. Dessa forma, opta-se pela utilização da abordagem adjunta discreta para garantir as propriedades de simetria e facilitar a convergência das simulações.

2.8.1 Método Adjunto Discreto

Sendo $R(U, \alpha)$ o vetor das equações residuais discretizadas para as equações de Euler, tem-se que para uma solução em regime permanente a igualdade $R(U, \alpha) = 0$. A diferenciação do R em relação aos parâmetros de projeto α é dado abaixo,

$$\frac{dR}{d\alpha} = \frac{\partial R}{\partial U} \frac{dU}{d\alpha} + \frac{\partial R}{\partial \alpha} = 0 . \quad (20)$$

Observa-se que o termo $dU/d\alpha$ requer um elevado custo computacional para ser calculado. Para incorporar a restrição $R(U, \alpha) = 0$ na função objetivo, pode-se aplicar o conceito de multiplicador de Lagrange, escrito como λ , cujo valor é inicialmente arbitrário. A função Lagrangeana é definida como,

$$L(U, \alpha) = J(U, \alpha) - \lambda^T R(U, \alpha) , \quad (21)$$

onde J é a função objetivo. Diferenciando essa equação e agrupando os termos com derivadas em U tem-se,

$$\frac{dL}{d\alpha} = \left(\frac{\partial J}{\partial U} - \lambda^T \frac{\partial R}{\partial U} \right) \frac{dU}{d\alpha} + \left(\frac{\partial J}{\partial \alpha} - \lambda^T \frac{\partial R}{\partial \alpha} \right) . \quad (22)$$

É possível escolher o valor de λ^T de forma que se elimine a dependência direta de J com U , evitando o cálculo do termo $(dU/d\alpha)$. Dessa forma, chega-se na equação adjunta abaixo,

$$\frac{\partial J}{\partial U} - \lambda^T \frac{\partial R}{\partial U} = 0 , \quad (23)$$

onde o problema adjunto corresponde à resolução da seguinte equação,

$$\left(\frac{\partial R}{\partial U} \right)^T \lambda = \left(\frac{\partial J}{\partial U} \right)^T . \quad (24)$$

Observa-se que λ tem o formato de vetor. Além disso, o problema adjunto resume-se a um sistema linear que precisa ser resolvido para cada coluna de $(\partial J/\partial U)^T$, que não depende do número de variáveis de projeto mas sim do número de funções objetivo. Pela definição da função lagrangeana pode-se estabelecer a igualdade abaixo,

$$\frac{dL}{d\alpha} = \frac{dJ}{d\alpha} . \quad (25)$$

Por fim, calcula-se a perturbação da função objetivo em relação aos parâmetros de projeto,

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \frac{\partial J}{\partial \alpha} - \lambda^T \frac{\partial R}{\partial \alpha} . \quad (26)$$

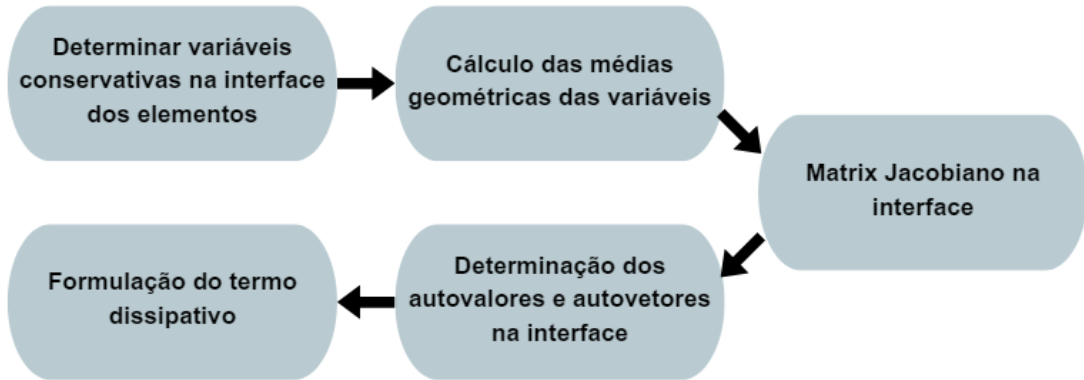
O termo $\partial J/\partial \alpha$ da Equação (26) é independente do número de variáveis de projeto e proporcional ao número de funções objetivo. O método adjunto requer o cálculo de um vetor adjunto diferente para cada função de interesse.

2.9 DISCRETIZAÇÃO NUMÉRICA

Os problemas convectivos podem ser discretizados utilizando esquemas centrais ou upwind. Os esquemas centrais utilizam pontos localizados simetricamente ao redor do ponto central de interesse para aproximar o valor da derivada. Já os esquemas upwind usam pontos na mesma direção ou na direção oposta ao fluxo para aproximar as derivadas (PALACIOS et al., 2013).

Para o problema do bocal, optou-se pela escolha de um método upwind, uma vez que são mais estáveis para problemas dominados por convecção, respeitando a direção de propagação da informação. Eles tendem a evitar oscilações não físicas. O método é denominado divisão de diferença de fluxo ROE. O esquema ROE é normalmente usado para esquemas precisos de primeira ordem, mas pode ser estendido para precisão de segunda ordem incorporando técnicas adicionais, como a abordagem MUSCL (Monotonic Upstream-centered Schemes for Conservation Laws). O método pode ser simplificado nos passos mostrados na Figura 5.

Figura 5 – Estrutura do esquema de ROE



Fonte: Autor

Para calcular o fluxo convectivo na interface de cada elemento é utilizado a seguinte expressão,

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[F \left(U_{i+\frac{1}{2}}^- \right) + F \left(U_{i+\frac{1}{2}}^+ \right) \right] - \mathbf{D}_{i+\frac{1}{2}} , \quad (27)$$

onde $\mathbf{D}_{i+\frac{1}{2}}$ é o termo dissipativo artificial e $U_{i+\frac{1}{2}}$ as variáveis de estado na interface do elemento. Para computar os estados na esquerda (-) e direita (+) da interface $i + \frac{1}{2}$ utiliza-se:

$$U_{i+\frac{1}{2}}^- = U_i + \frac{1}{2} (U_i - U_{i-1}) , \quad (28)$$

$$U_{i+\frac{1}{2}}^+ = U_{i+1} - \frac{1}{2} (U_{i+2} - U_{i+1}) . \quad (29)$$

Posteriormente, calcula-se as médias geométricas das variáveis pelas equações abaixo,

$$\tilde{\rho}_{i+\frac{1}{2}} = \sqrt{\rho_{i+\frac{1}{2}}^- \rho_{i+\frac{1}{2}}^+} , \quad (30)$$

$$\tilde{u}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\rho_{i+\frac{1}{2}}^-} u_{i+\frac{1}{2}}^- + \sqrt{\rho_{i+\frac{1}{2}}^+} u_{i+\frac{1}{2}}^+}{\sqrt{\rho_{i+\frac{1}{2}}^-} + \sqrt{\rho_{i+\frac{1}{2}}^+}} , \quad (31)$$

$$\tilde{e}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\rho_{i+\frac{1}{2}}^-} e_{i+\frac{1}{2}}^- + \sqrt{\rho_{i+\frac{1}{2}}^+} e_{i+\frac{1}{2}}^+}{\sqrt{\rho_{i+\frac{1}{2}}^-} + \sqrt{\rho_{i+\frac{1}{2}}^+}} , \quad (32)$$

$$\tilde{a}_{i+\frac{1}{2}} = \sqrt{\gamma \left(\frac{p_{i+\frac{1}{2}}^-}{\rho_{i+\frac{1}{2}}^-} + \frac{p_{i+\frac{1}{2}}^+}{\rho_{i+\frac{1}{2}}^+} \right)} . \quad (33)$$

Em seguida, a matriz jacobiana do fluxo $\mathbf{A}_{i+\frac{1}{2}} (\partial F / \partial U)$ é calculada como mostrado abaixo,

$$\mathbf{A}_{i+\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2}\tilde{u}_{i+\frac{1}{2}}^2 & (3-\gamma)\tilde{u}_{i+\frac{1}{2}} & \gamma-1 \\ \left(\frac{\gamma-1}{2}\tilde{u}_{i+\frac{1}{2}}^3 - \tilde{u}_{i+\frac{1}{2}}c_{i+\frac{1}{2}}^2\right) & \left(c_{i+\frac{1}{2}}^2 - \frac{\gamma-1}{2}\tilde{u}_{i+\frac{1}{2}}^2\right) & \gamma\tilde{u}_{i+\frac{1}{2}} \end{bmatrix}. \quad (34)$$

Os autovalores k dessa matriz são:

$$k_1 = \tilde{u}_{i+\frac{1}{2}} - \tilde{c}_{i+\frac{1}{2}}, \quad k_2 = \tilde{u}_{i+\frac{1}{2}}, \quad k_3 = \tilde{u}_{i+\frac{1}{2}} + \tilde{c}_{i+\frac{1}{2}}. \quad (35)$$

Já os autovetores são dados pela equação,

$$\mathbf{R}_{i+\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \tilde{u}_{i+\frac{1}{2}} - \tilde{c}_{i+\frac{1}{2}} & \tilde{u}_{i+\frac{1}{2}} & \tilde{u}_{i+\frac{1}{2}} + \tilde{c}_{i+\frac{1}{2}} \\ \tilde{e}_{i+\frac{1}{2}} - \tilde{u}_{i+\frac{1}{2}}\tilde{c}_{i+\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}\tilde{u}_{i+\frac{1}{2}}^2 & \tilde{e}_{i+\frac{1}{2}} + \tilde{u}_{i+\frac{1}{2}}\tilde{c}_{i+\frac{1}{2}} \end{bmatrix}. \quad (36)$$

O termo $|\mathbf{\Lambda}|_{i+\frac{1}{2}}$ representa os autovalores absolutos, sendo calculado como,

$$|\mathbf{\Lambda}|_{i+\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} |k_1| & 0 & 0 \\ 0 & |k_2| & 0 \\ 0 & 0 & |k_3| \end{bmatrix}. \quad (37)$$

O termo dissipativo artificial é então calculado por,

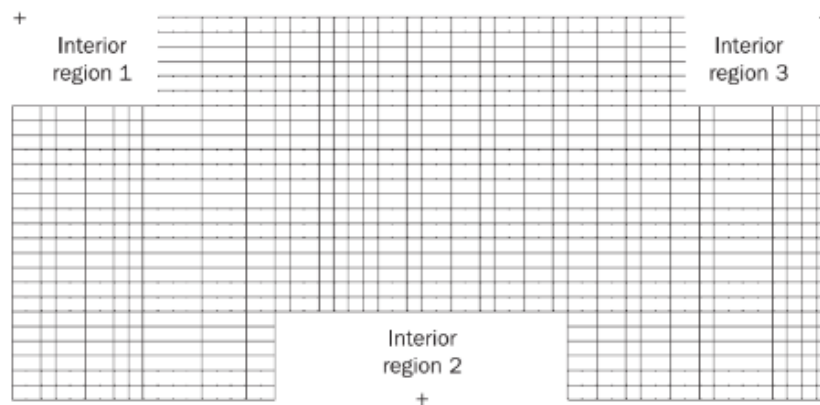
$$\mathbf{D}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\mathbf{R}_{i+\frac{1}{2}}|\mathbf{\Lambda}|_{i+\frac{1}{2}}\mathbf{R}_{i+\frac{1}{2}}^{-1} \left(\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}^{-} - \mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}^{+} \right). \quad (38)$$

2.10 MALHA COMPUTACIONAL

Uma das ferramentas centrais da computação científica é o método dos volumes finitos, técnica numérica usada para resolver equações diferenciais parciais que surgem em vários campos, incluindo dinâmica de fluidos, transferência de calor e outras áreas da engenharia e da física (SHEWCHUK, 2012). É particularmente adequado para leis de conservação e problemas que envolvem geometrias complexas. O ponto central do método é a discretização do domínio por uma malha composta por vários volumes de controle menores (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007).

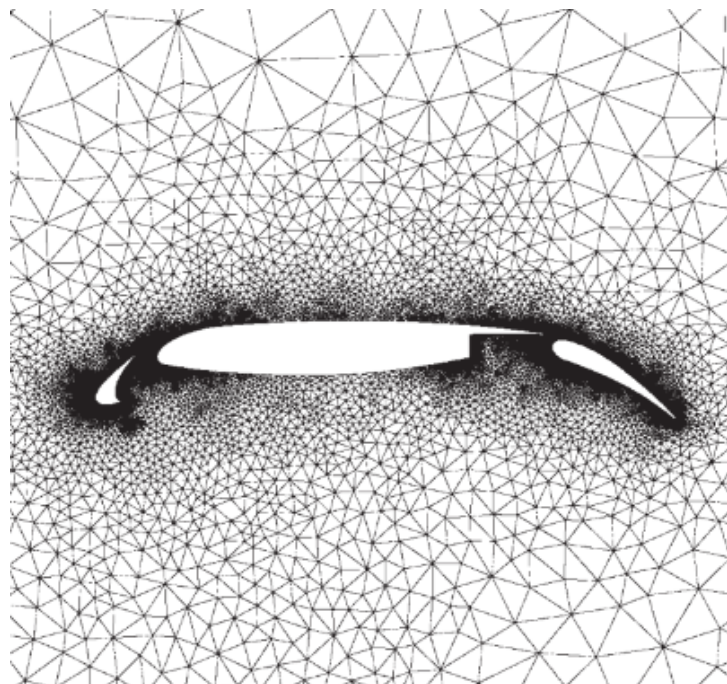
As malhas computacionais podem ser classificadas de diferentes maneiras. Uma das classificações é ligada ao formato dos seus elementos, onde o caso bidimensional os elementos podem ser triangulares ou retangulares. A malha pode ser estruturada ou não estruturada. As malhas estruturadas são regulares e seguem um padrão de ordenamento em que cada nó interno da malha possui o mesmo número de nós vizinhos. A Figura 6 e a Figura 7 ilustram, respectivamente, um exemplo de malha estruturada e não estruturada.

Figura 6 – Exemplo de malha estruturada



Fonte: Versteeg e Malalasekera (2007)

Figura 7 – Exemplo de malha não estruturada



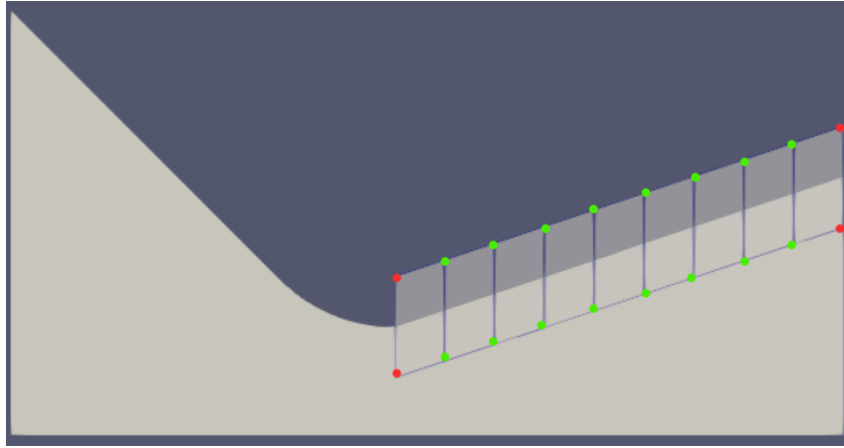
Fonte: Versteeg e Malalasekera (2007)

2.11 DEFORMAÇÃO DA GEOMETRIA

A técnica Free Form Deformation (FFD) ou Deformação de Forma Livre permite deformar qualquer forma de superfície, podendo ser aplicada globalmente ou localmente. Deformações locais podem ser impostas com a ordem desejada de continuidade. Também é possível deformar um modelo sólido de forma que seu volume seja preservado (SEDERBERG; PARRY, 1986). A caixa de deformação tem a topologia cúbica para geometrias em 3D e geometria retangular para superfícies. A Figura 8 ilustra um exemplo de aplicação da caixa de deformação para um bocal em 2D. Ressalta-se que para a otimização em questão será restringido o movimento de todos

os pontos na direção horizontal. Os pontos sob a linha da saída e garganta, mostrados em vermelho, serão restringidos de movimentar-se na vertical enquanto os pontos verdes terão liberdade para se movimentar na vertical. Essa configuração é abordada na Seção 3.5.

Figura 8 – Exemplo de configuração da caixa de deformação na seção divergente do bocal



Fonte: Autor

No software SU2, as funções de curva de Bezier estão disponíveis para deformação da geometria. Na superfície da caixa é definido um conjunto de pontos de controle, cujo número depende da ordem dos polinômios de Bernstein escolhidos (PALACIOS et al., 2013). A caixa sólida é parametrizada pela seguinte expressão:

$$\mathbf{X}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n \mathbf{P}_{i,j,k} B_i^l(\xi) B_j^m(\eta) B_k^n(\zeta) , \quad (39)$$

onde $\mathbf{X}$ representa as coordenadas cartesianas (x, y, z) para determinadas coordenadas paramétricas (ξ, η, ζ) . Os graus da função são representados por l, m e n . $\mathbf{P}_{i,j,k}$ representa as coordenadas cartesianas do ponto de controle (i, j, k) . Já $B_i^l(\xi)$, $B_j^m(\eta)$ e $B_k^n(\zeta)$ são os polinômios de Bernstein que podem ser calculados pelas seguintes expressões:

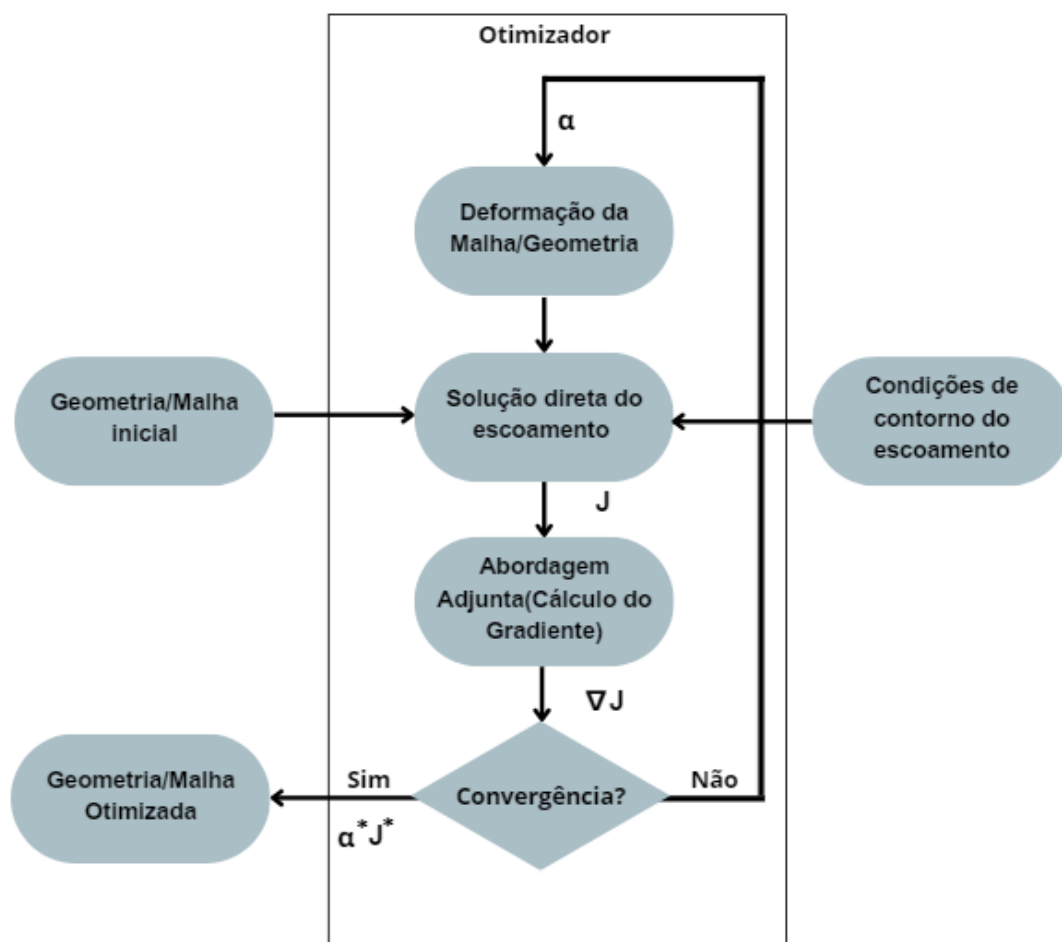
$$\begin{aligned} B_i^l(\xi) &= \frac{l!}{i!(l-i)!} \xi^i (1-\xi)^{l-i} \\ B_j^m(\eta) &= \frac{m!}{j!(m-j)!} \eta^j (1-\eta)^{m-j} . \\ B_k^n(\zeta) &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \zeta^k (1-\zeta)^{n-k} \end{aligned} \quad (40)$$

Os pontos de controle da caixa de deformação são definidos como as variáveis de projeto. Após a deformação da malha, uma nova iteração da simulação é realizada, solucionando o escoamento para encontrar as variáveis de estado U e a função objetivo J .

3 METODOLOGIA

Este trabalho tem como objetivo automatizar o processo de otimização de um perfil de um bocal convergente-divergente utilizado em motores foguete através do método adjunto utilizando o número de Mach na saída como função objetivo, bem como elencar as vantagens computacionais do método. A função de Mach na saída é uma função implementada dentro do software SU2 e garante um aumento do empuxo na saída como mostrado no capítulo 4. O bocal de referência será o projeto da equipe Kosmos Rocketry para o projeto Morpheus. Neste capítulo será apresentada a metodologia utilizada no desenvolvimento deste trabalho, cujas etapas podem ser vistas na Figura 9.

Figura 9 – Estrutura do processo de otimização



Fonte: Autor

A geometria do bocal é definida considerando parâmetros de projeto da câmara de combustão, gases resultantes da combustão e outros requisitos de

projeto que dependem do veículo utilizado. A geometria definida é então discretizada em uma malha com o refinamento desejado. As etapas seguintes fazem parte do otimizador e serão realizadas dentro do software SU2. Inicialmente foram definidas as condições de contorno do escoamento, parâmetros de otimização e a região de otimização. Um código em Python disponibilizado pelo software SU2 permite fazer a integração da solução direta do escoamento, da solução adjunta, do cálculo do gradiente e deformação da geometria seguindo os parâmetros das variáveis de projeto. A otimização acontecerá até que determinadas condições de convergência sejam satisfeitas ou o limite de iterações seja atingido.

3.1 PROJETO MORPHEUS

A equipe Kosmos Rocketry é voltada para pesquisa e extensão na UFSC campus Joinville, desenvolvendo principalmente foguetes de sondagem experimental. Alguns dos projetos desenvolvidos pela equipe são levados para competições internacionais como a Spaceport America Cup (SAC), evento que acontece anualmente nos Estados Unidos e reúne equipes de todo o mundo para promover o desenvolvimento de projetos de engenharia voltados para a área aeroespacial.

Nesse contexto, atualmente a equipe trabalha no desenvolvimento do projeto Morpheus, que consiste em um foguete que terá um apogeu de 30.000 pés (9,1 km). O motor desse projeto é um motor de classe O com um impulso teórico de aproximadamente 34.000 Ns. A Figura 10 contém uma renderização da seção foguete que contém o motor do Morpheus.

Figura 10 – Renderização da seção do motor do projeto Morpheus



Fonte: Kosmos Rocketry (2024)

3.2 DEFINIÇÃO DA GEOMETRIA

A geometria inicial do bocal é a de uma tubeira convergente-divergente cônica. A seção divergente pode apresentar diferentes perfis como abordado na Seção 2.3. A geometria cônica acarreta grandes perdas de eficiência uma vez que a expansão não orienta todo o escoamento na direção do empuxo. Porém, ela representa a forma mais simples de dimensionamento e manufatura de bocal, servindo como uma geometria de base adequada para otimização. O raio de entrada da tubeira (r_i), comprimento da seção convergente (l_{conv}), raio da garganta (r_t), comprimento da seção divergente (l_{div}) e raio de saída (r_e) são as principais dimensões para o projeto do bocal.

O bocal do motor do foguete apresenta todas as dimensões citadas anteriormente definidas, uma vez que elas são resultados da condição de operação do motor, de propriedades dos gases resultantes da combustão e parâmetros de projeto, que considera por exemplo um bocal com menor comprimento possível para reduzir massa. Porém, o perfil do divergente é uma geometria muito sensível e que pode maximizar a eficiência do bocal possuindo as mesmas dimensões.

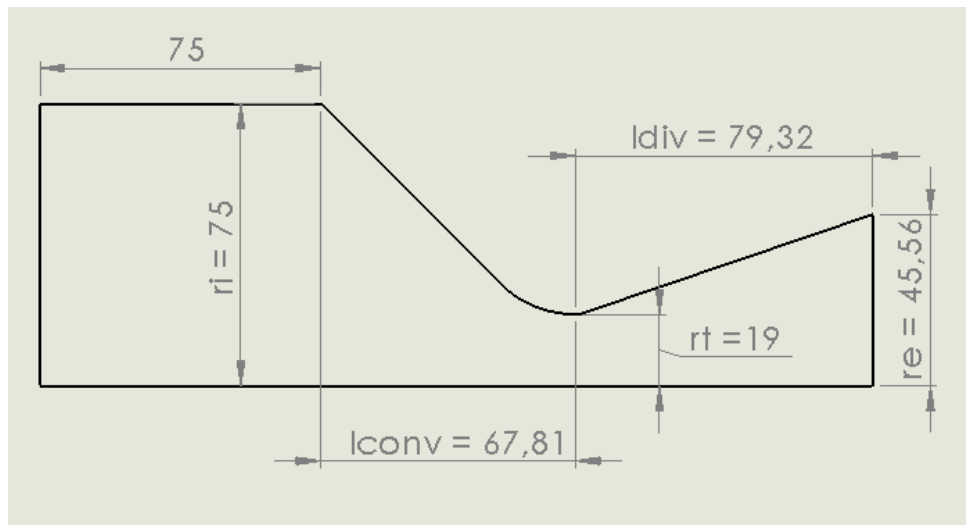
A Tabela 1 apresenta as dimensões do bocal do projeto Morpheus e a Figura 11 mostra a meia seção do bocal cônico considerado inicialmente. Ressalta-se que foi considerado um comprimento de 75 mm para representar uma parcela da câmara de combustão onde serão aplicadas as condições de estagnação.

Tabela 1 – Dimensões iniciais do bocal

Parâmetro	Valor
r_i	75 mm
r_t	19 mm
r_e	45,56 mm
l_{conv}	67,81 mm
l_{div}	79,32 mm

Fonte: Autor

Figura 11 – Meia seção do bocal inicial



Fonte: Autor

3.3 CONDIÇÕES DE CONTORNO DO ESCOAMENTO

Para definir as condições de contorno do escoamento utilizam-se as condições de operação do motor. Essas condições podem ser consideradas como condições de estagnação uma vez que a velocidade dos gases no interior da câmara de combustão é muito próxima de zero. A pressão e temperatura na câmara de combustão dependem de parâmetros de projeto como por exemplo o material do tubo do motor, tipo de propelente, quantidade de propelente, entre outros. Os valores abordados nesse trabalho são os parâmetros iniciais já definidos para o motor do projeto Morpheus da Kosmos Rocketry. Porém, a metodologia para obter esses valores não será abordada devido ao escopo do trabalho ser a otimização do bocal partindo de um projeto pré-definido. A Tabela 2 apresenta a pressão (P_c) e a temperatura (T_c) na câmara de combustão que correspondem às condições de entrada do gás na tubeira.

Tabela 2 – Condições na câmara de combustão

Parâmetro	Valor
P_c	5 MPa
T_c	1600 K

Fonte: Autor

Para as condições ambiente considera-se uma temperatura (T_a) de 288,15 K e uma pressão (P_a) de 101325 Pa. O propelente utilizado no projeto é composto pelo oxidante nitrato de potássio e o combustível sorbitol. O gás resultante da queima foi considerado como ideal e foi caracterizado utilizando-se o software ProPep 3. A Tabela 3 contém a razão dos calores específicos (γ) e a massa molar do gás resultante da combustão ($\mathcal{M}$).

Tabela 3 – Propriedade do gás resultante da combustão

Parâmetro	Valor
γ	1,137
$\mathcal{M}$	39,9 g/mol

Fonte: Autor

A parede do bocal é considerada adiabática, ou seja, o fluxo de calor através dela é igual a zero. De acordo com Anderson (1995) a seguinte equação abaixo pode ser utilizada,

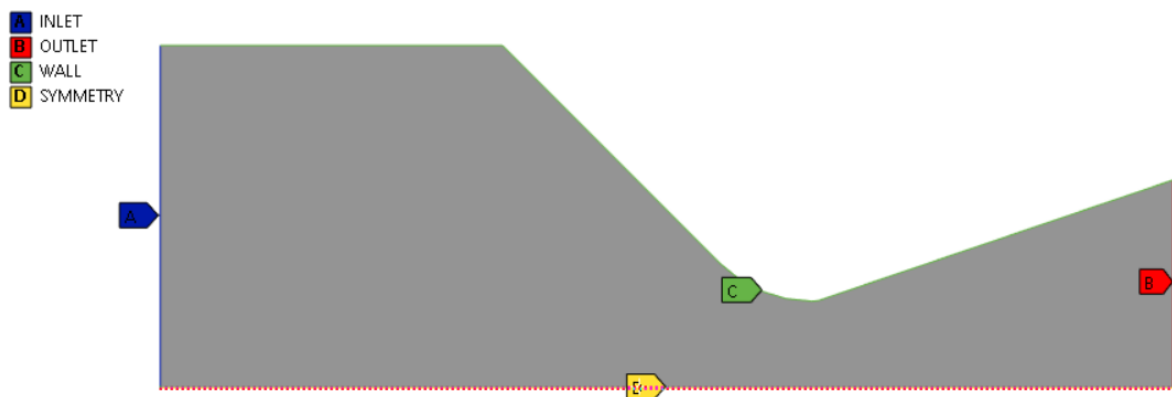
$$\left(\frac{\partial T}{\partial n_s} \right)_{\text{parede}} = 0 . \quad (41)$$

onde n_s representa a direção normal à superfície. A condição de não escorregamento é usada normalmente para modelar escoamentos viscosos. Porém, para o caso invíscido não há atrito que promova aderência à superfície. Para este caso, utiliza-se a condição de não penetrabilidade, em que o escoamento é tangente à superfície sólida (ANDERSON, 1995). Nesse contexto, utiliza-se a equação abaixo,

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_s = 0 . \quad (42)$$

A Figura 12 contém a geometria do bocal com os marcadores nomeados de acordo com a condição de contorno. A entrada (A) é caracterizada pelas propriedades da câmara de combustão, ou seja, T_C e P_C . A saída (B) é definida com as condições ambientes citadas anteriormente. A linha superior (C) é definida como gradiente zero. Por fim, a linha inferior (D) da geometria é caracterizada como simetria uma vez que o escoamento é bidimensional.

Figura 12 – Definição das condições do bocal



Fonte: Autor

Para a simulação direta o limite máximo de iterações foi definido como 10.000 com um parâmetro de convergência de 10^{-13} para o valor residual.

3.4 MALHA COMPUTACIONAL

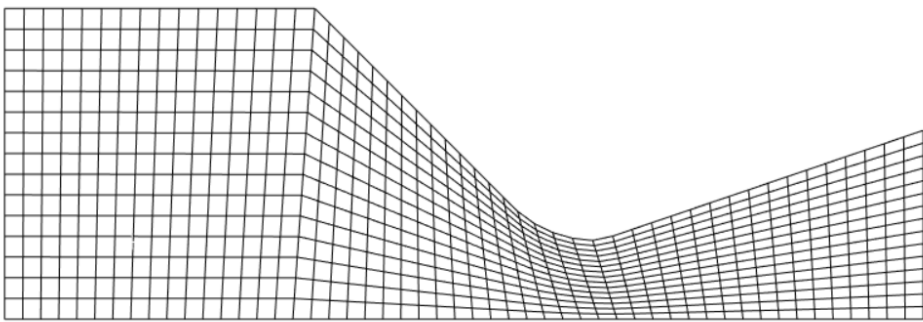
Para a geometria em questão foi utilizada uma malha computacional estruturada e com elementos quadrilaterais. Como o caso é invíscido, não há necessidade de refinar a malha para capturar os efeitos de viscosidade nas proximidades da superfície. A malha foi implementada no software Ansys 2024 utilizando uma licença estudantil. Essa malha é exportada posteriormente no formato .cgns e convertida no formato .su2 aceito pelo software SU2. Essa primeira análise de refino de malha foi realizada para avaliar os resultados da simulação direta e identificar qual a malha com menor custo computacional e resultado aceitável para realizar o processo de otimização. Foram avaliadas 3 malhas, cujas características estão contidas na Tabela 4. As Figuras 13, 14 e 15 ilustram, respectivamente, as Malhas 1, 2 e 3. A seção 4.2 aborda qual malha foi definida para prosseguir com a otimização.

Tabela 4 – Refino de malha da simulação direta

Malha	Dimensão do elemento	Total de nós	Total de elementos
Malha 1	5 mm	832	765
Malha 2	2,5 mm	3162	3030
Malha 3	1 mm	19000	18675

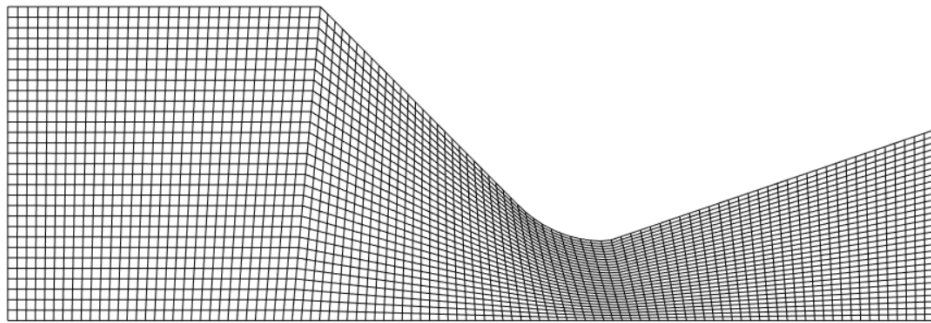
Fonte: Autor

Figura 13 – Malha 1 da simulação direta



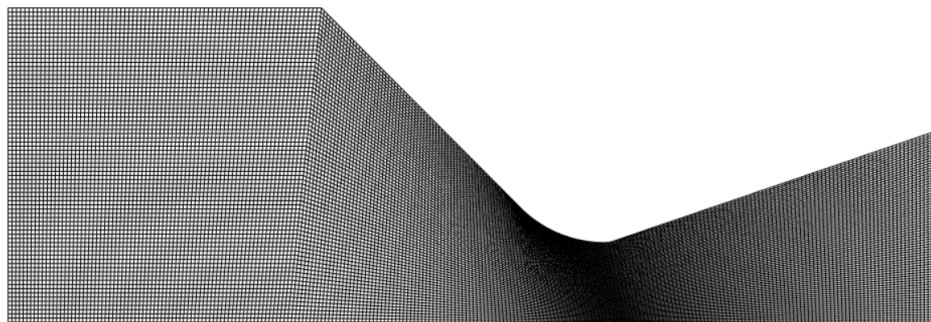
Fonte: Autor

Figura 14 – Malha 2 da simulação direta



Fonte: Autor

Figura 15 – Malha 3 da simulação direta

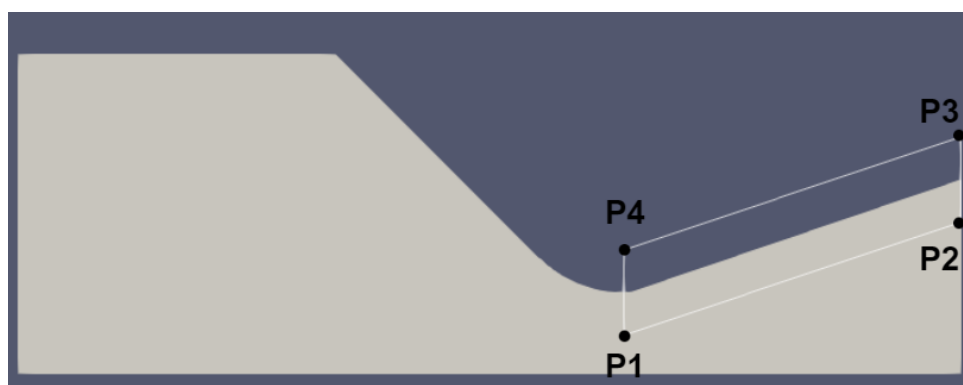


Fonte: Autor

3.5 DEFINIÇÃO DA CAIXA DE DEFORMAÇÃO

A caixa de deformação é definida a partir de 4 pontos na geometria e pelo número de divisões na vertical e horizontal. Os pontos que definem a caixa são P_1 (67,805; 9,00), P_2 (147,122; 35,56), P_3 (147,122; 55,56) e P_4 (67,805; 29,00). A Figura 16 ilustra essa definição dos pontos. Esses pontos mais externos correspondem às linhas verticais da garganta e da saída do bocal. Ressalta-se que se deseja manter a dimensão da garganta do bocal e a dimensão da saída. Dessa forma, restringiu-se o deslocamento das variáveis de projeto que parametrizam esses 4 pontos no software SU2. A distância dos pontos ao contorno original cônico é de 10 mm, que poderá ser o limite máximo de deslocamento da variável de projeto caso não seja estabelecido uma restrição adicional.

Figura 16 – Definição da caixa de otimização



Fonte: Autor

Essa caixa pode apresentar diferentes graus de liberdade, que vão corresponder ao número de divisões na direção y e na direção x, que afetam diretamente o número de variáveis de projeto. Para avaliar a influência da caixa de deformação na otimização do perfil do bocal, foram definidos graus de liberdade distintos para cada caixa. A Tabela 5 contém as informações sobre cada caixa definida na malha escolhida para a otimização. Ressalta-se que as mesmas caixas podem ser definidas para diferentes malhas sem alterações nos seus parâmetros.

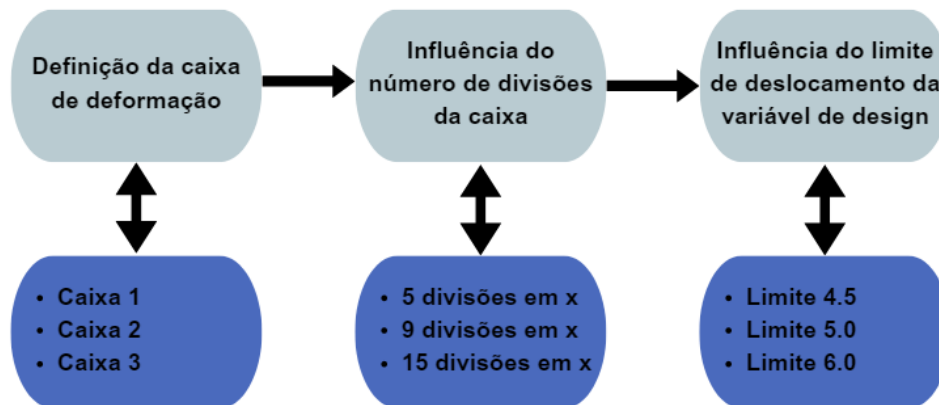
Tabela 5 – Parâmetros das caixas de deformação para a malha escolhida

Caixa	Número de divisões em x	Número de divisões em y	Pontos livres
Caixa 1	5	1	8
Caixa 2	9	1	16
Caixa 3	15	1	28

Fonte: Autor

Além disso, ressalta-se a importância de definir um limite de deslocamento da variável de projeto que seja condizente com a otimização proposta. Em razão disso, propõe-se o estudo da otimização com 3 limites diferentes de deslocamento: 4,5 , 5 e 6 mm. O capítulo 4 aborda com mais detalhes os impactos de um limite mais elevado da variável de projeto no perfil resultante da otimização. A Figura 17 resume essa etapa de análise da influência da caixa de deformação e influência do limite de deslocamento.

Figura 17 – Estudo da influência da caixa de deformação e limite de deslocamento



Fonte: Autor

3.6 PÓS-PROCESSAMENTO

Para realizar o pós-processamento da simulação foi utilizado o software ParaView, que é um software de código aberto voltado para aplicação de visualização de dados de forma qualitativa ou quantitativa, possuindo ferramentas de renderização 3D (PARAVIEW, 2024).

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1 CÁLCULO ANALÍTICO DAS CONDIÇÕES DO BOCAL

A fim de avaliar os resultados da simulação numérica, calcularam-se os valores analíticos das propriedades do escoamento no bocal. A Tabela 6 contém os valores analíticos calculados pelas condições isentrópicas das propriedades do escoamento na saída da tubeira.

Tabela 6 – Propriedades do escoamento na saída do bocal

Parâmetro	Valor
T_e	1050,34 K
P_e	152041,18 Pa
ρ_e	0,6950 kg/m ³

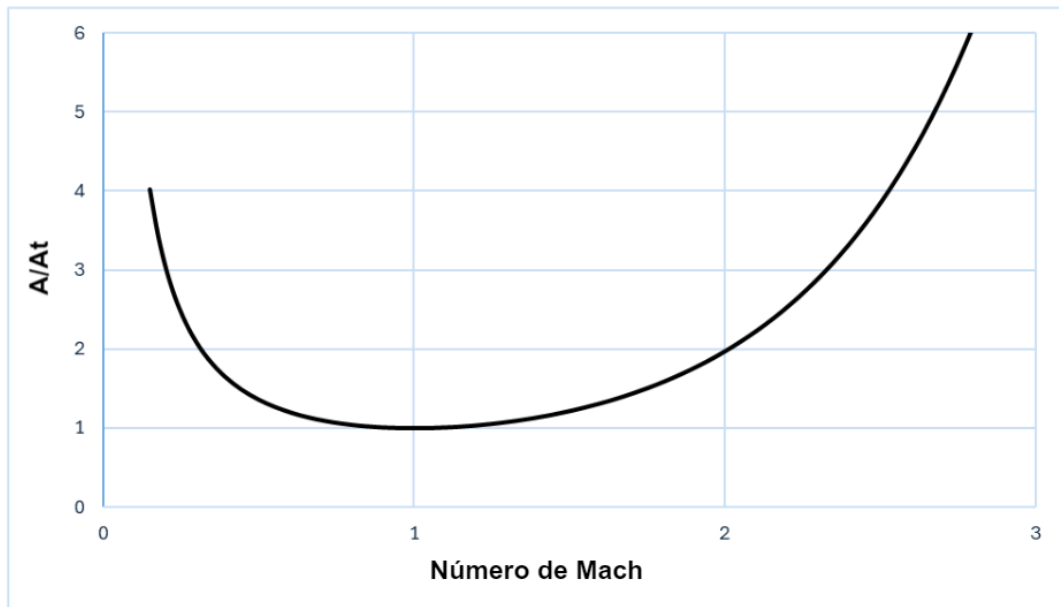
Fonte: Autor

O fluxo de massa ao longo do bocal é constante. Dessa forma, pode-se calcular o fluxo de massa considerando a região da garganta utilizando a seguinte equação,

$$\dot{m} = \frac{A_t P_c}{\sqrt{RT_c}} \sqrt{\gamma} \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}. \quad (43)$$

Além disso, é possível analisar o Mach teórico na saída do bocal. Utilizando como referência a Equação (10), plota-se abaixo a razão de expansão em função do número de Mach ao longo do bocal.

Figura 18 – Razão de expansão em função do número de Mach



Fonte: Autor

A Figura 18 permite identificar um valor aproximado do número de Mach na saída, considerando uma razão de expansão do bocal igual a 5,75. Para determinar o valor é possível solucionar a Equação (44) abaixo. Utilizou-se a função `scipy.optimize.fsolve` da biblioteca SciPy do Python a fim de encontrar a raiz da equação não linear:

$$\left(\frac{A_e}{A_t}\right)^2 - \frac{1}{M_e^2} \left[\frac{2}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2 \right) \right]^{(\gamma+1)/(\gamma-1)} = 0. \quad (44)$$

Com o número de Mach na saída e o fluxo de massa ao longo do bocal, é possível calcular o empuxo teórico a partir da Equação (11). A Tabela 7 contém os valores desses parâmetros.

Tabela 7 – Valores teóricos do fluxo de massa, Mach na saída e empuxo

Parâmetro	Valor
$\dot{m}$	6,24 kg/s
M_e	2,76
F_t	8942,80 N

Fonte: Autor

Para avaliar as propriedades do escoamento ao longo do eixo de simetria no bocal, modelou-se a área do bocal em função da posição axial do eixo de simetria. Como qualquer seção transversal da tubeira é uma circunferência, a área é função do raio que depende da posição axial x ,

$$A = \pi[r(x)]^2 . \quad (45)$$

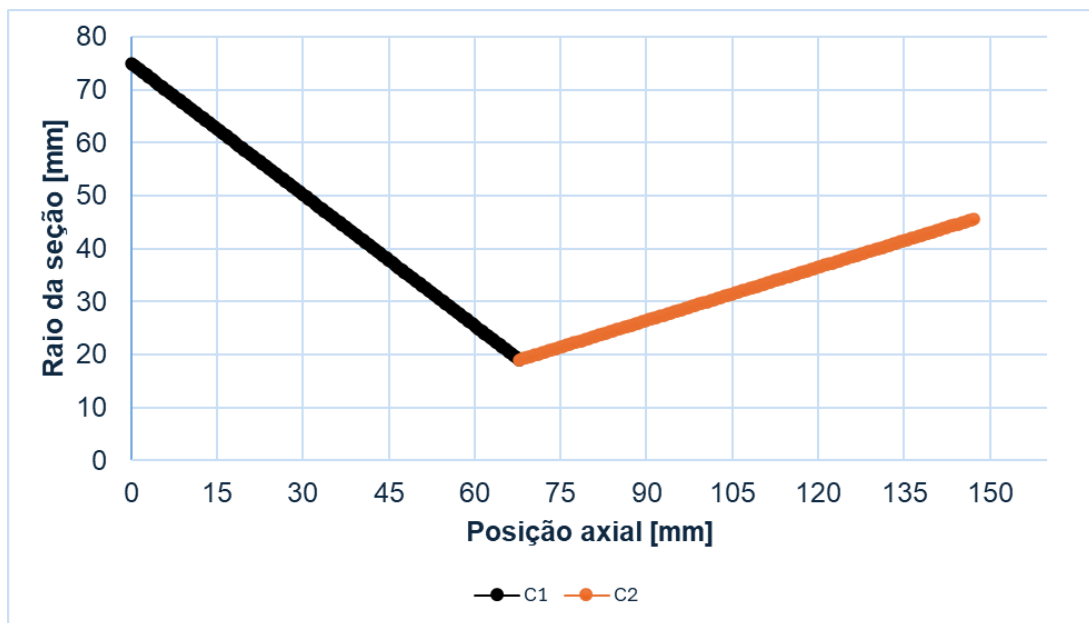
Modelaram-se duas funções de primeiro grau para simplificar a geometria do bocal. Essas funções são mostradas na Tabela 8. A Figura 19 mostra as funções.

Tabela 8 – Funções que modelam o bocal em função da posição axial

Função	Valor do raio
C_1	$(5085,75 - 56x)/67,81$
C_2	$(-293,95 + 26,56x)/79,32$

Fonte: Autor

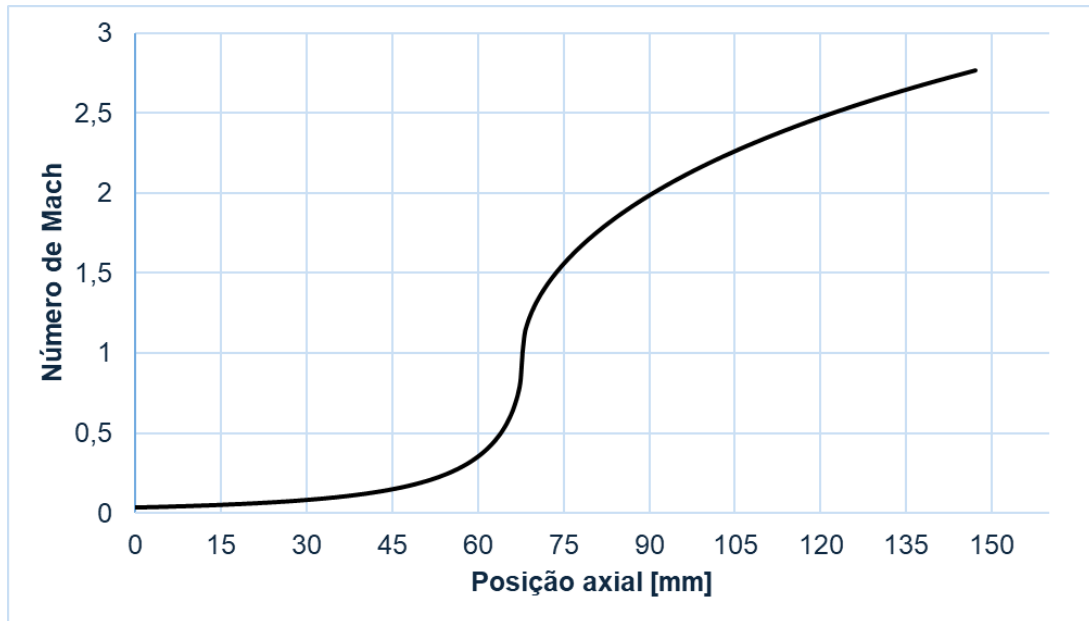
Figura 19 – Modelagem do contorno do bocal usando funções de primeiro grau



Fonte: Autor

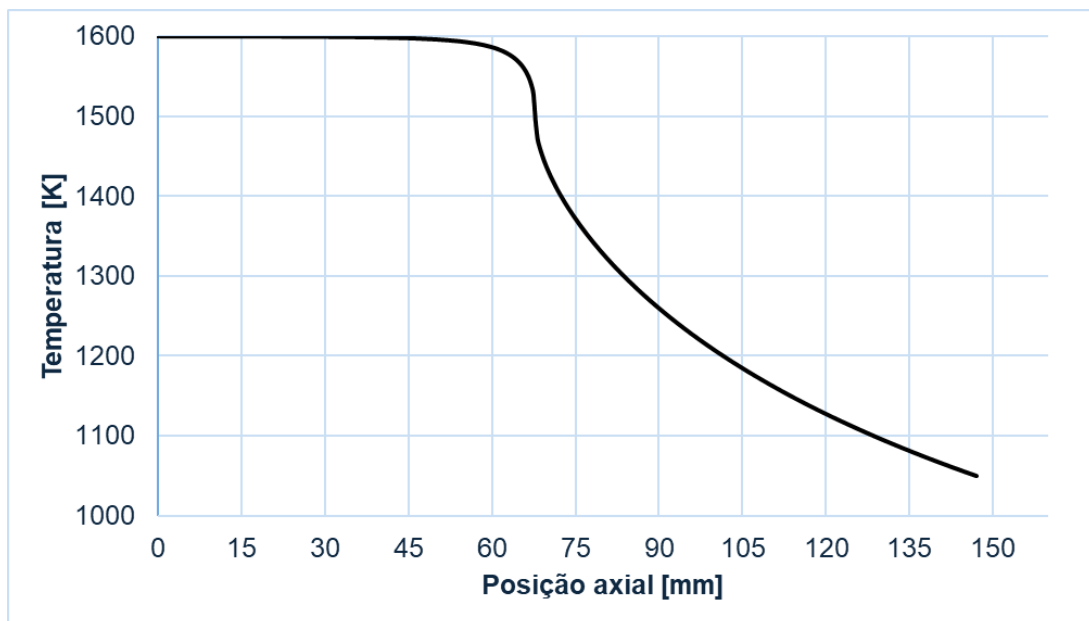
Utilizando as funções que modelam o contorno do bocal para calcular a área em qualquer posição axial, é possível calcular o número de Mach ao longo do eixo de simetria utilizando a Equação (44). Com o número de Mach, pode-se calcular as propriedades termodinâmicas usando as relações isentrópicas. As Figuras 20, 21 e 22 apresentam, respectivamente, os valores analíticos da variação do número de Mach, temperatura e pressão em função da posição axial do bocal.

Figura 20 – Número de Mach analítico em função da posição axial



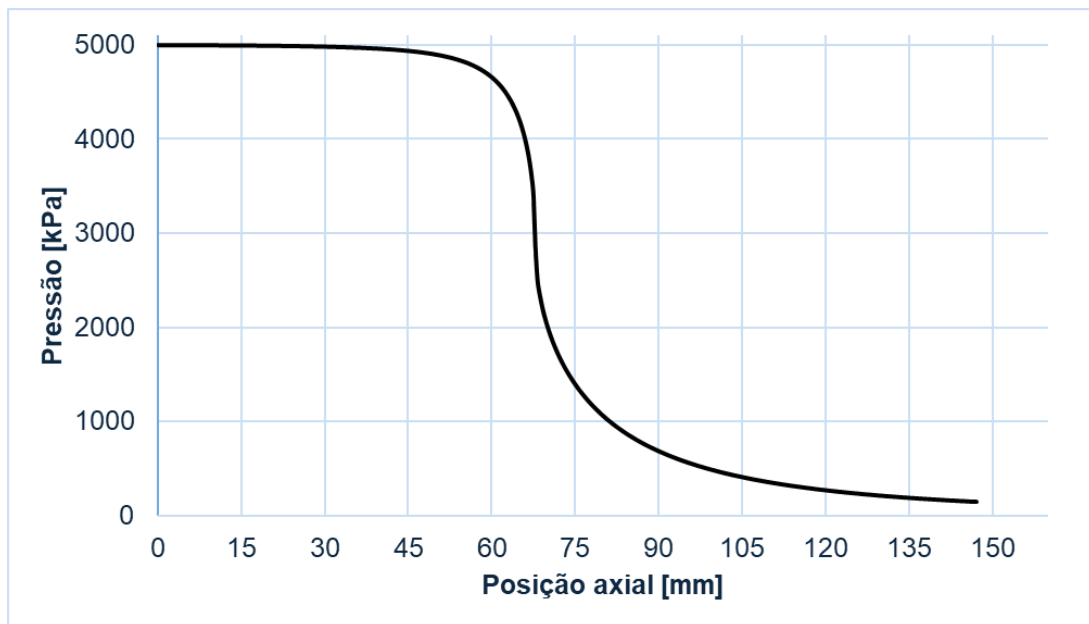
Fonte: Autor

Figura 21 – Temperatura analítica em função da posição axial



Fonte: Autor

Figura 22 – Pressão analítica em função da posição axial

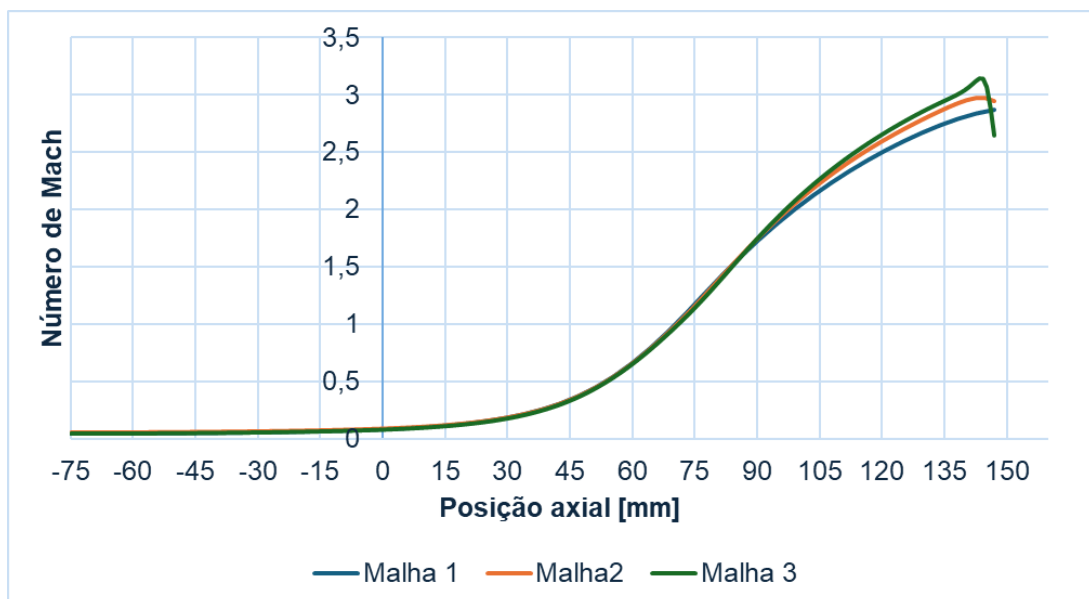


Fonte: Autor

4.2 SIMULAÇÃO DIRETA

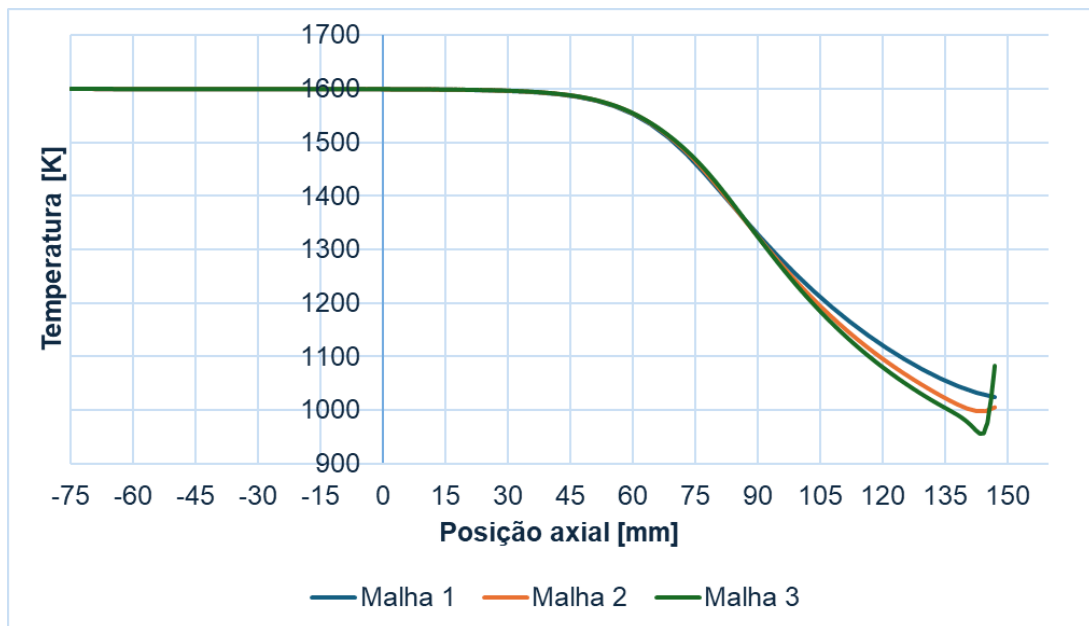
Para reduzir o custo computacional da otimização, realizou-se uma análise de refino de malha com as malhas elencadas na Seção 3.4. Essa análise levou em consideração os resultados de número de Mach, temperatura e pressão da simulação direta do escoamento pelo bocal. As Figuras 23, 24 e 25 apresentam, respectivamente, os resultados para cada malha do número de Mach, temperatura e pressão em função da posição axial do bocal, ao longo da linha de simetria.

Figura 23 – Número de Mach obtido na simulação direta em função da posição axial



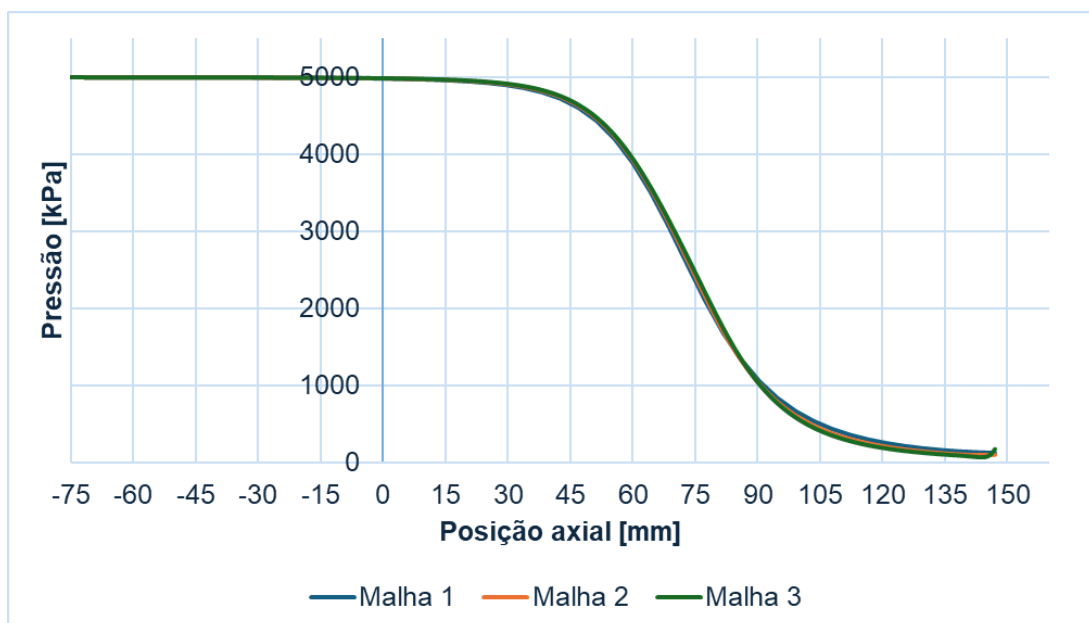
Fonte: Autor

Figura 24 – Temperatura obtida na simulação direta em função da posição axial



Fonte: Autor

Figura 25 – Pressão obtida na simulação direta em função da posição axial

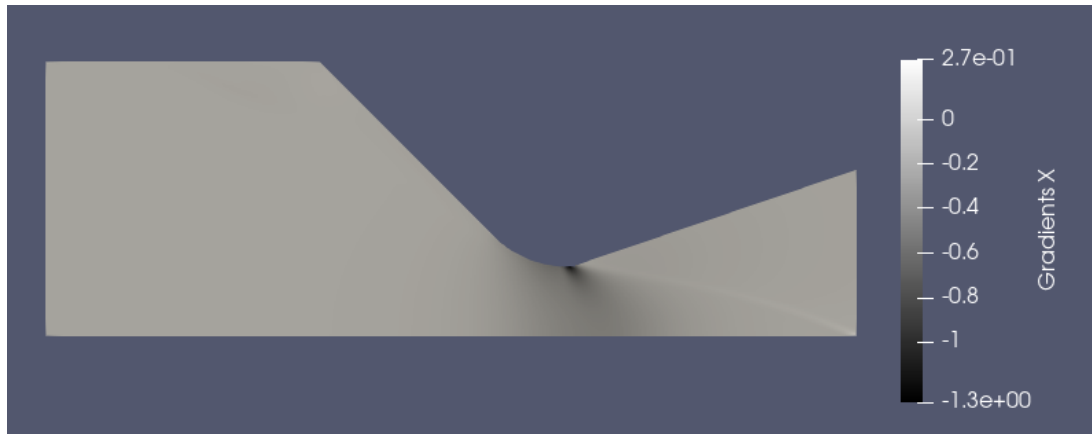


Fonte: Autor

É possível perceber que para as 3 malhas a solução é próxima em todo o domínio com exceção da malha 3 que apresenta uma variação abrupta das propriedades, na saída do bocal, acarretada propagação da onda de compressão ao longo do bocal. As Figuras 26 e 27 representam, respectivamente, o contorno do gradiente de densidade ao longo do bocal na direção x e y para a malha 3, onde é possível visualizar o ponto de variação abrupta das propriedades. As regiões mais

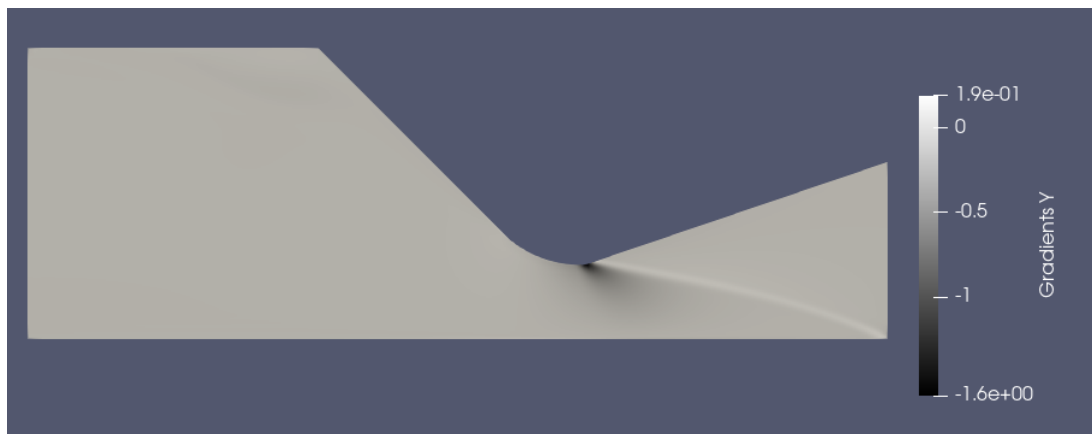
claras e as mais escuras apresentam os maiores valores de gradiente positivo e negativo, respectivamente.

Figura 26 – Gradiente de densidade na direção x para a malha 3



Fonte: Autor

Figura 27 – Gradiente de densidade na direção y para a malha 3



Fonte: Autor

A Figura 28 apresenta uma discretização do domínio com duas cores com uma faixa simétrica igual a zero a fim de representar a linha sônica. É possível observar que a linha sônica não acontece exatamente na garganta, com a região final de contração gerando uma onda de compressão que se propaga dentro da região do bocal.

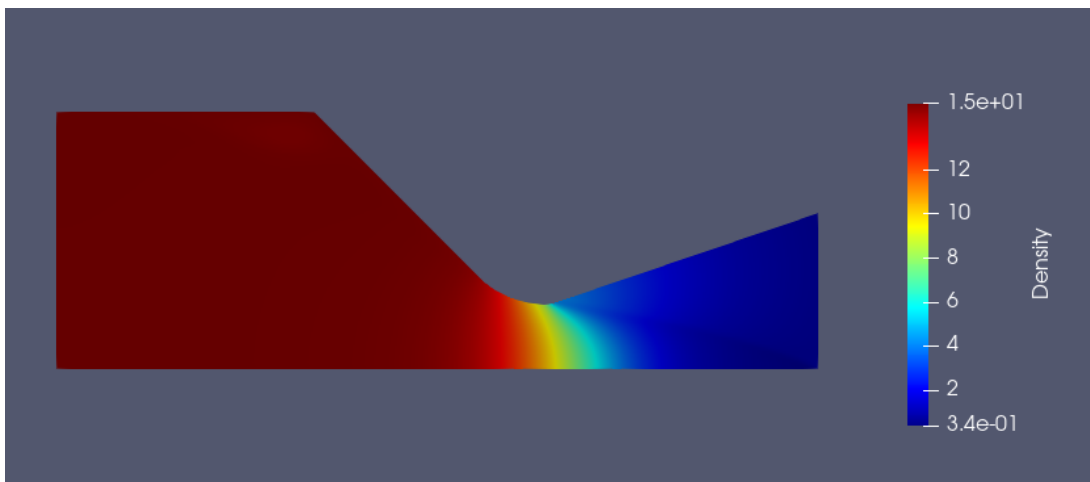
Figura 28 – Linha sônica para a malha 3



Fonte: Autor

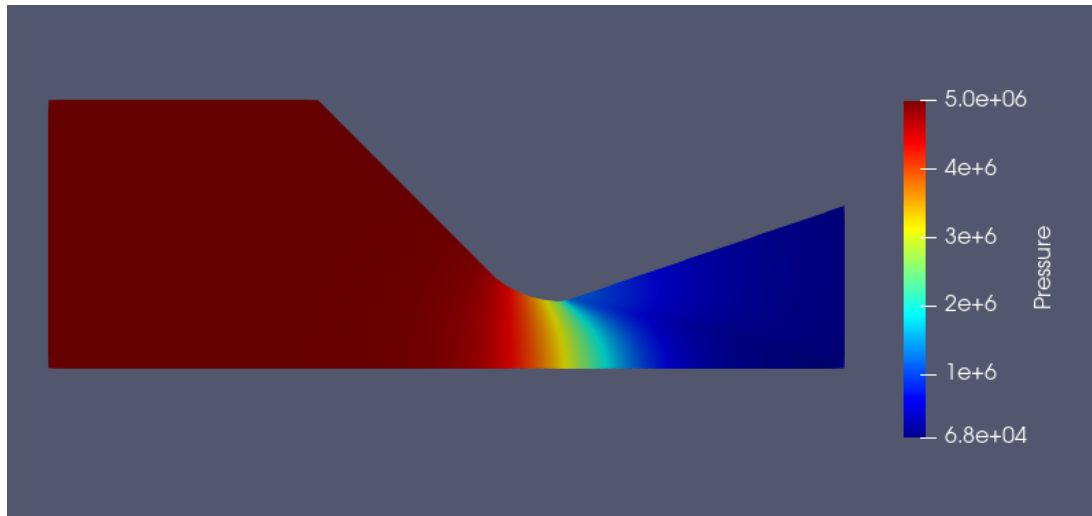
Os contornos de densidade e pressão para a malha 3 são mostrados, respectivamente, nas Figuras 29 e 30.

Figura 29 – Contorno de pressão para a malha 3



Fonte: Autor

Figura 30 – Contorno de densidade para a malha 3



Fonte: Autor

Dessa forma, escolheu-se a malha 2 para prosseguir com a otimização, uma vez que ela apresenta 6 vezes menos elementos que a malha 3 e apresentou a melhor convergência entre as malhas. No SU2 os valores residuais são calculados com base na densidade usando uma escala logarítmica. A Tabela 9 contém os valores residuais para cada malha. Ressalta-se que mesmo com o aumento do número de iterações para a malha 3 os valores residuais não apresentaram uma redução significativa.

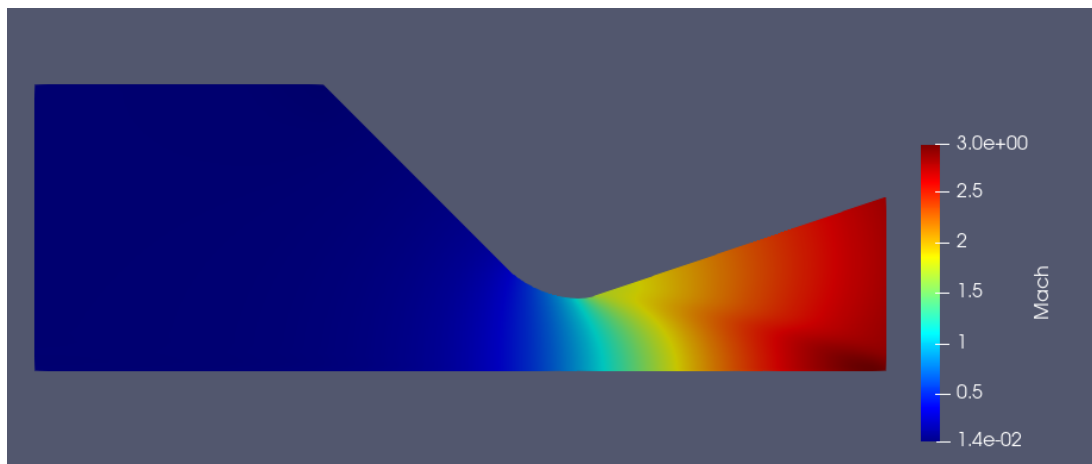
Tabela 9 – Resultados residuais para cada malha na simulação direta

Malha	$\log_{10} \text{res}(\rho)$
Malha 1	-8,1993
Malha 2	-11,2824
Malha 3	-2,4931

Fonte: Autor

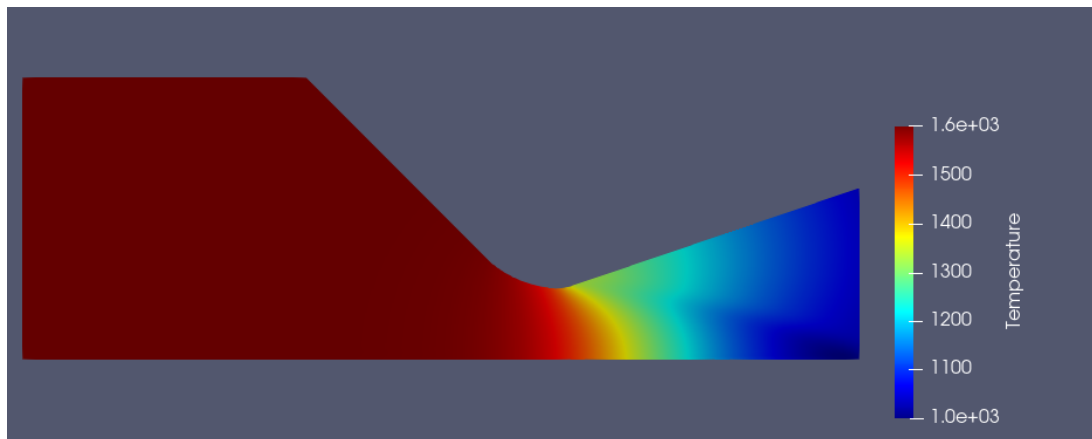
Os contornos de número de Mach, temperatura e pressão para a malha 2 estão contidos, respectivamente, nas Figuras 31, 32 e 33.

Figura 31 – Contorno do número Mach para a malha 2



Fonte: Autor

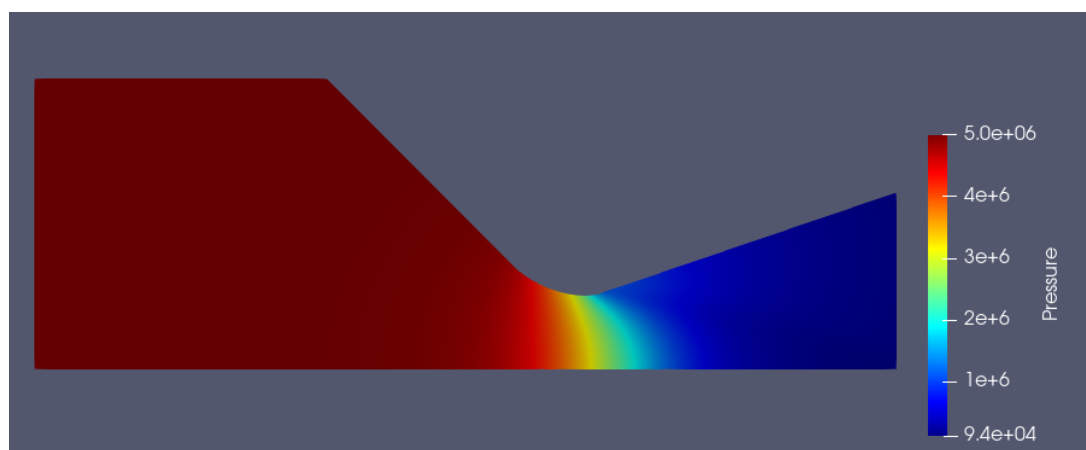
Figura 32 – Contorno da temperatura para a malha 2



Fonte: Autor

A partir dos resultados da simulação, é possível calcular os valores médios dos parâmetros tanto na região da garganta quanto na saída do bocal, essencial para o cálculo da força de empuxo, F_t . A Tabela 10 apresenta a comparação dos resultados numéricos da malha 2 e o modelo unidimensional, com a variação percentual em relação ao resultado teórico.

Figura 33 – Contorno de pressão para a malha 2



Fonte: Autor

Tabela 10 – Comparação dos resultados numéricos com o modelo unidimensional

Variável	Resultado numérico médio	Resultado teórico	Variação percentual
M_e	2,752	2,76	-0,29 %
u_e	1342,80 m/s	1378,79 m/s	-2,61 %
T_e	1053,18 K	1050,34 K	0,27 %
P_e	156400,87 Pa	152041,18 Pa	2,86 %
$\dot{m}$	6,24 kg/s	6,24 kg/s	0,00 %
T_t	1499,70 K	1497,42 K	0,15 %
P_t	2,94 MPa	2,88 MPa	2,08 %
M_t	0,9841	1,00	-1,59 %
F_t	8739,05 N	8942,78	-2,27 %

Fonte: Autor

4.3 OTIMIZAÇÃO DO PERFIL DIVERGENTE

Para otimizar o perfil divergente, foi utilizado como função objetivo o número de Mach na saída do bocal. O software SU2 apresenta uma série de funções objetivos implementadas, sendo que para o número de Mach o nome da função é SURFACE_MACH. Ressalta-se que a função de empuxo é implementada no SU2 apenas para o caso tridimensional. Dessa forma, optou-se por utilizar uma função já implementada no software para o caso bidimensional para prosseguir com a otimização. Para o processo de otimização o parâmetro de convergência definido foi o de 10^{-12} para a função objetivo e um limite máximo de iteração de otimização de 300.

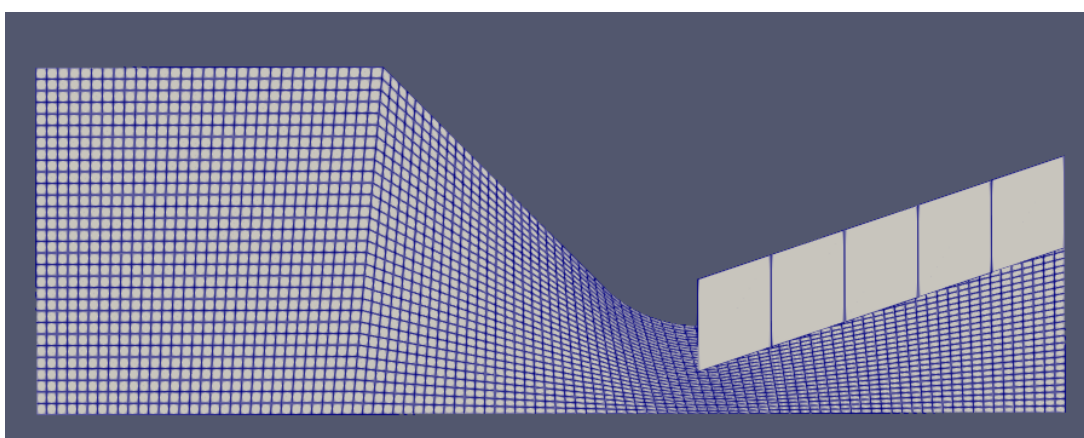
Como citado anteriormente, foram definidas 3 caixas de deformação distintas, sendo as caixas 1, 2 e 3 com, respectivamente, 5, 9 e 15 divisões. Para cada caixa foram realizadas otimizações com diferentes limites das variáveis de projeto a fim de explorar a coerência do método de otimização bem como entender as restrições que o usuário deve implementar para gerar otimizações condizentes com o modelo ideal. Os

limites para as variáveis de projeto utilizados foram de 4,5 mm, 5 mm e 6 mm. Esses limites representam o valor máximo que cada ponto dentro da caixa de deformação pode variar, sendo que ao longo do perfil divergente qualquer seção transversal deve possuir um raio menor que o raio de saída do bocal.

4.3.1 Caixa 1

Definida com 5 graus de liberdade, a caixa 1 é ilustrada na Figura 34. Logo em seguida, a Tabela 11 contém os valores médios do número de Mach e velocidade de exaustão para as simulações com diferentes limites de variáveis de projeto.

Figura 34 – Caixa 1 definida para otimização



Fonte: Autor

Tabela 11 – Mach e velocidade médios na saída para as otimizações com a caixa 1

Limite da variável de projeto	Mach médio na saída	Velocidade de exaustão
4,5	2,77	1357,15 m/s
5,0	2,78	1357,63 m/s
6,0	2,79	1357,88 m/s

Fonte: Autor

É possível observar que para todos os limites houve um aumento da velocidade de exaustão, com o limite igual a 6 mm possuindo o maior aumento. Isso também acontece para o empuxo médio obtido. A Tabela 12 mostra os resultados do empuxo médio para cada limite bem como o ganho percentual em relação aos valores obtidos na simulação direta. Observa-se que o maior ganho percentual foi para a simulação com maior número de Mach médio na saída, ou seja, a simulação com o limite igual a 6 mm.

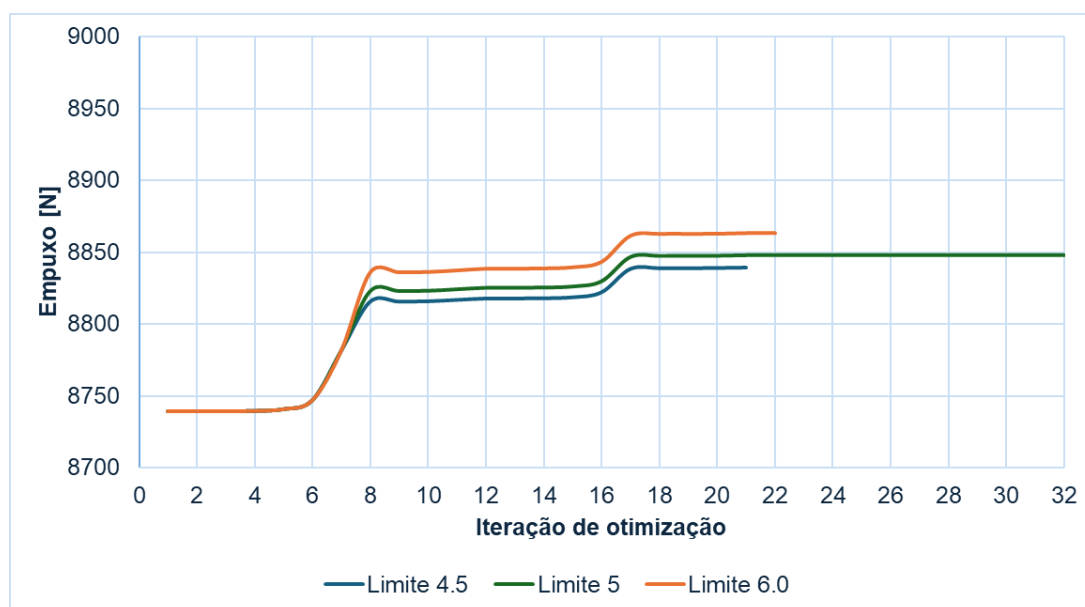
Tabela 12 – Empuxo médio na saída para as otimizações com a caixa 1

Limite da variável de projeto	Empuxo médio na saída	Ganho percentual
4,5	8839,58 N	1,15 %
5,0	8847,83 N	1,24 %
6,0	8863,32 N	1,42 %

Fonte: Autor

A Figura 35 apresenta a força de empuxo média para cada iteração das simulações com diferentes limites das variáveis de projeto. As simulações com limite 4,5 mm e 6 mm apresentaram cerca de 10 iterações a menos que a com limite igual a 5 mm.

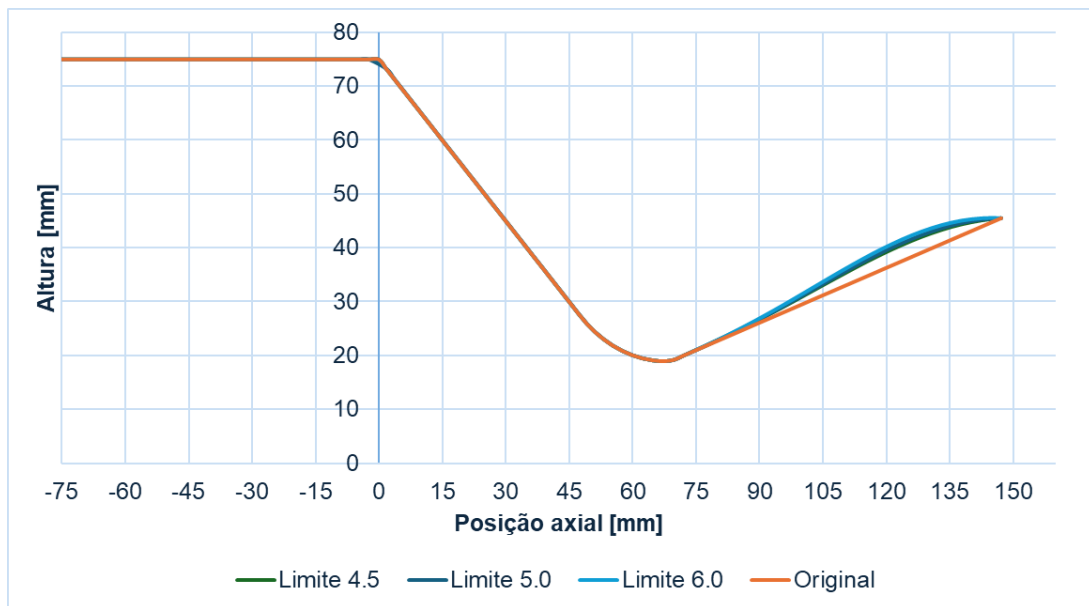
Figura 35 – Força de empuxo em cada iteração para caixa 1



Fonte: Autor

Plotaram-se os perfis resultantes do bocal para cada simulação na Figura 36. Para os 3 casos o perfil foi muito similar, não apresentando nenhuma anomalia ou mesmo uma área seção transversal intermediária ao longo do perfil maior que a seção de saída.

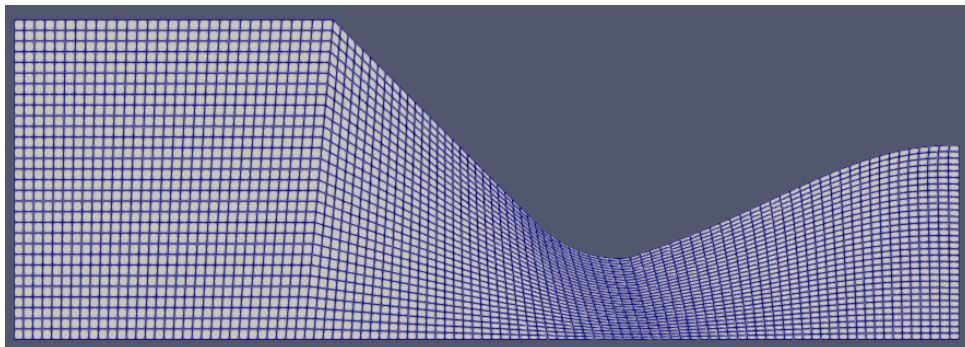
Figura 36 – Perfis resultantes da otimização para caixa 1



Fonte: Autor

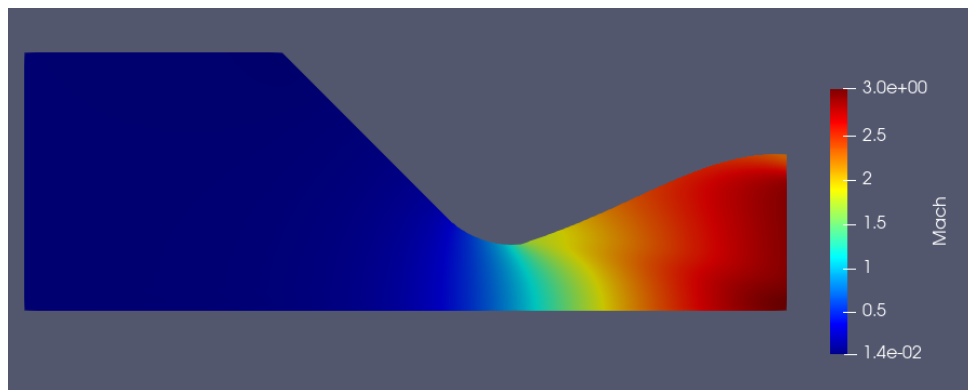
A malha e os contornos resultantes da simulação foram plotados para o limite igual a 6 mm, uma vez que foi a simulação que apresentou os melhores resultados de Mach na saída e empuxo. A Figura 37 ilustra a malha resultante. Já as Figuras 38, 39 e 40 apresentam, respectivamente, os contornos de Mach, temperatura e pressão.

Figura 37 – Malha resultante para a caixa 1



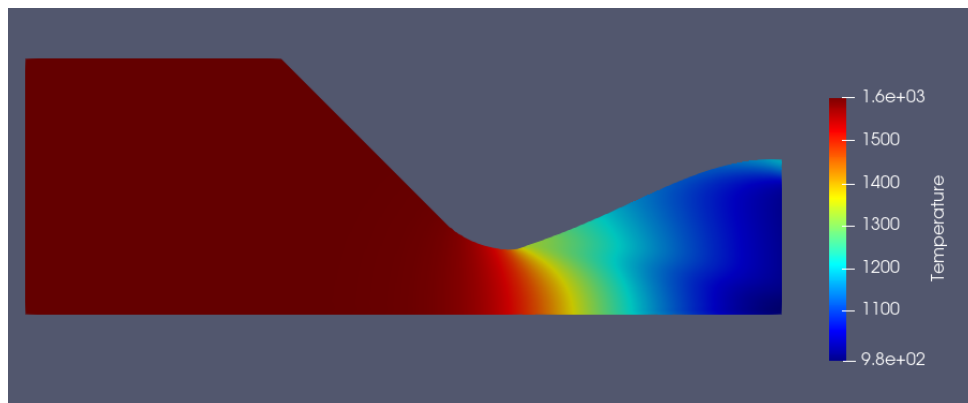
Fonte: Autor

Figura 38 – Contorno de Mach para o perfil otimizado com a caixa 1



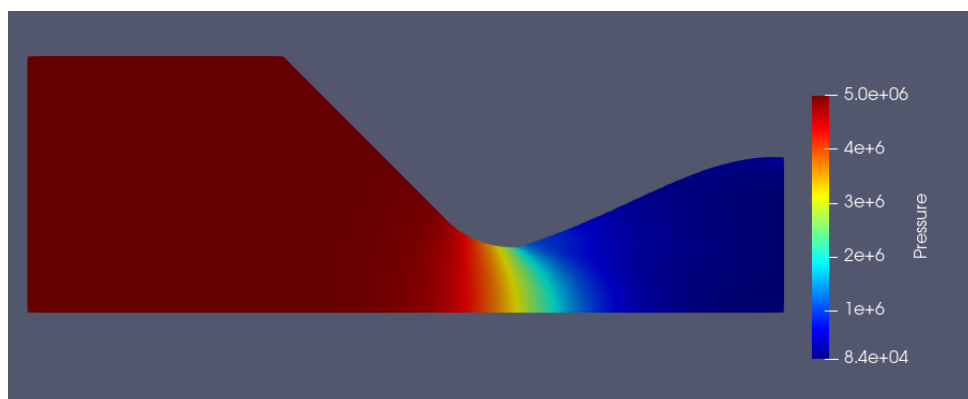
Fonte: Autor

Figura 39 – Contorno de temperatura para o perfil otimizado com a caixa 1



Fonte: Autor

Figura 40 – Contorno de pressão para o perfil otimizado com a caixa 1

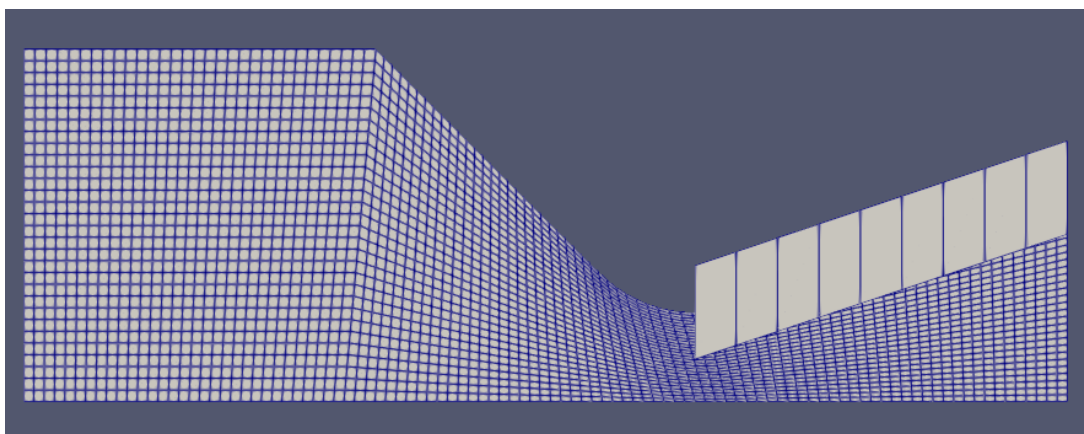


Fonte: Autor

4.3.2 Caixa 2

Definida com 9 graus de liberdade, a caixa 2 é ilustrada na Figura 41. Logo em seguida, a Tabela 13 contém os valores médios do número de Mach e velocidade de exaustão para as simulações com diferentes limites de variáveis de projeto.

Figura 41 – Caixa 2 definida para otimização



Fonte: Autor

Tabela 13 – Mach e velocidade médios na saída para as otimizações com a caixa 2

Limite da variável de projeto	Mach médio na saída	Velocidade de exaustão
4,5	2,80	1366,56 m/s
5,0	2,81	1366,47 m/s
6,0	2,83	1364,33 m/s

Fonte: Autor

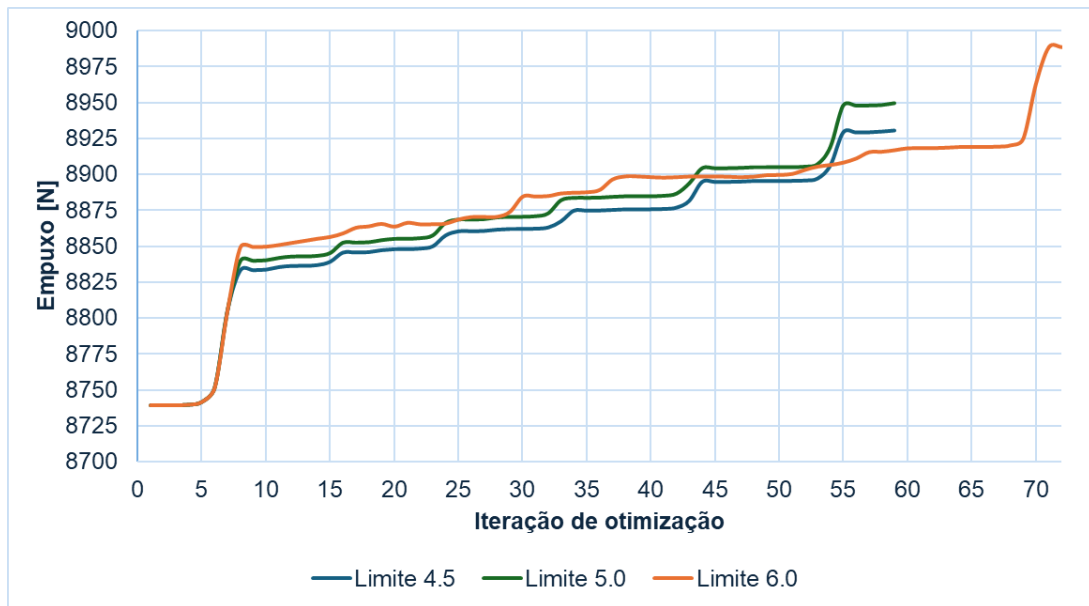
A Tabela 14 mostra os resultados do empuxo para esse segundo conjunto de otimização. Já a Figura 42 apresenta a força de empuxo média para cada iteração das simulações com diferentes limites das variáveis de projeto. As simulações com limite 4,5 mm e 5 mm apresentaram um custo computacional significativamente menor que a com limite igual a 6 mm.

Tabela 14 – Empuxo médio na saída para as otimizações com a caixa 2

Limite da variável de projeto	Empuxo médio na saída	Ganho percentual
4,5	8930,41 N	2,19 %
5,0	8949,39 N	2,41 %
6,0	8988,45 N	2,85 %

Fonte: Autor

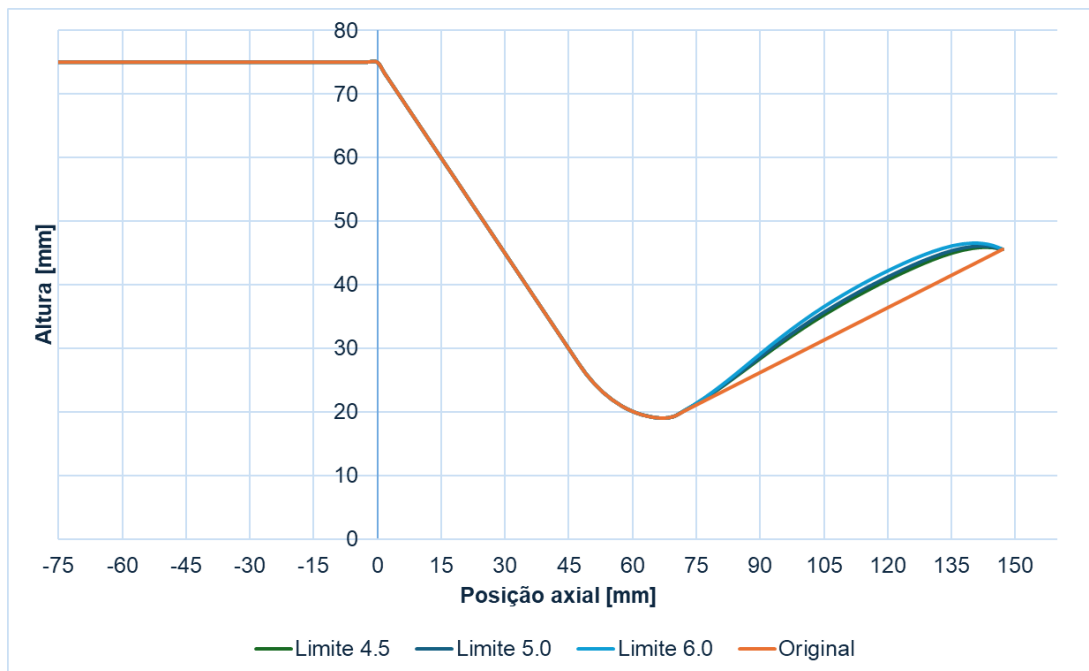
Figura 42 – Força de empuxo em cada iteração para a caixa 2



Fonte: Autor

Os perfis resultantes estão contidos na Figura 43. Destaca-se que para essa caixa de otimização todos os limites apresentaram seções antes da saída do bocal com raio maior que o raio da saída, o que não é o adequado para o problema. Esse fenômeno acontece por influência da quina existente entre a garganta e o perfil reto do divergente que leva a formação de onda de compressão no escoamento supersônico. Isso resulta em descontinuidades mais acentuadas de pressão e número de Mach na saída do bocal.

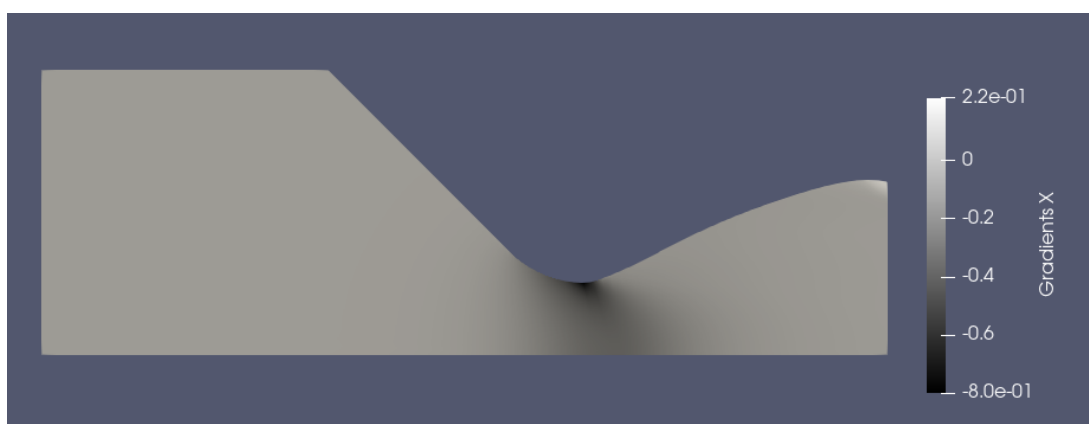
Figura 43 – Perfis resultantes da otimização para a caixa 2



Fonte: Autor

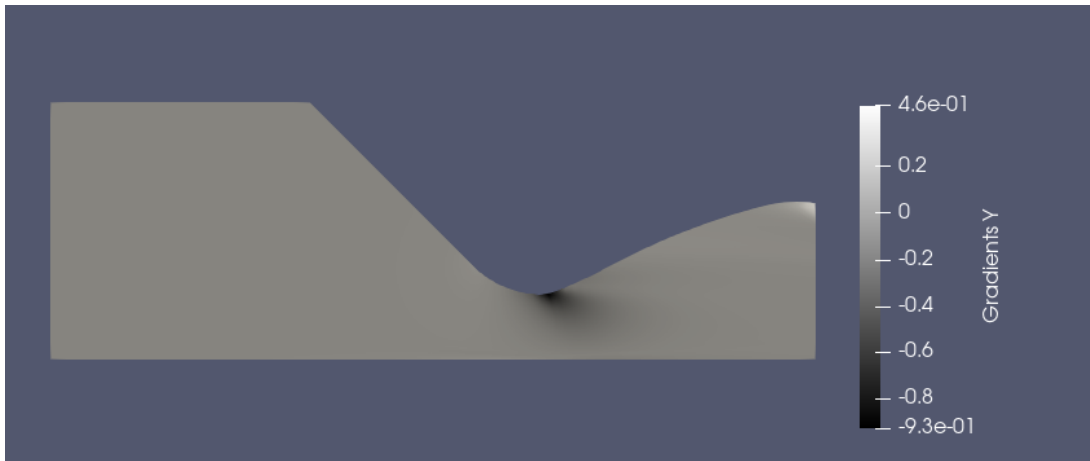
As Figuras 44 e 45 mostram, respectivamente, o contorno do gradiente de número de densidade na direção x e y para evidenciar essa mudança brusca das propriedades na região com a altura do bocal maior que a saída. As regiões mais claras e as mais escuras apresentam os maiores valores de gradiente positivo e negativo, respectivamente.

Figura 44 – Gradiente de densidade na direção x para a caixa 2



Fonte: Autor

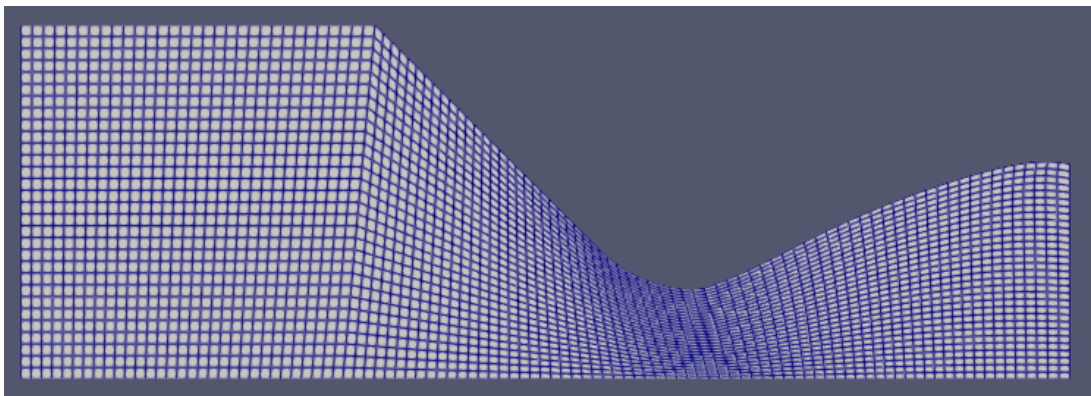
Figura 45 – Gradiente de densidade na direção y para a caixa 2



Fonte: Autor

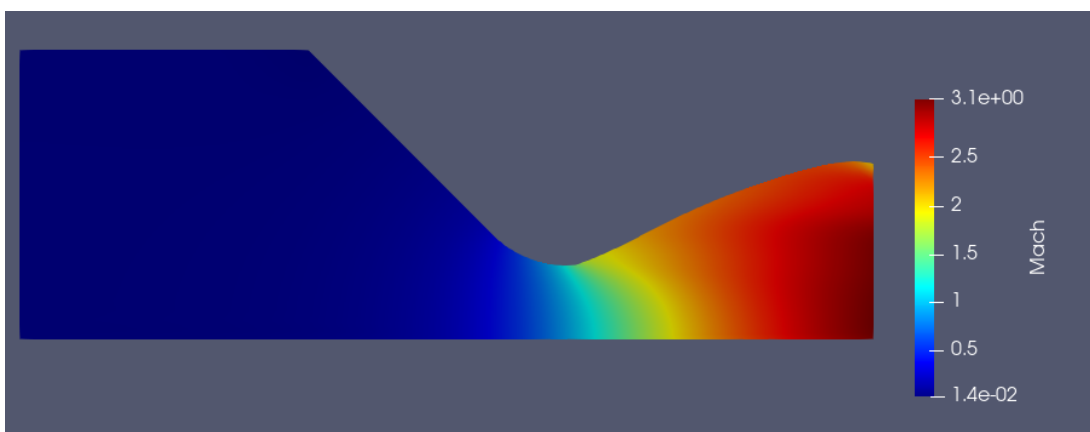
A malha para o limite de 5 mm está ilustrada na Figura 46. Já os contornos de Mach, temperatura e pressão para o mesmo limite são ilustrados, respectivamente, nas Figuras 47, 48 e 49.

Figura 46 – Malha resultante para a caixa 2



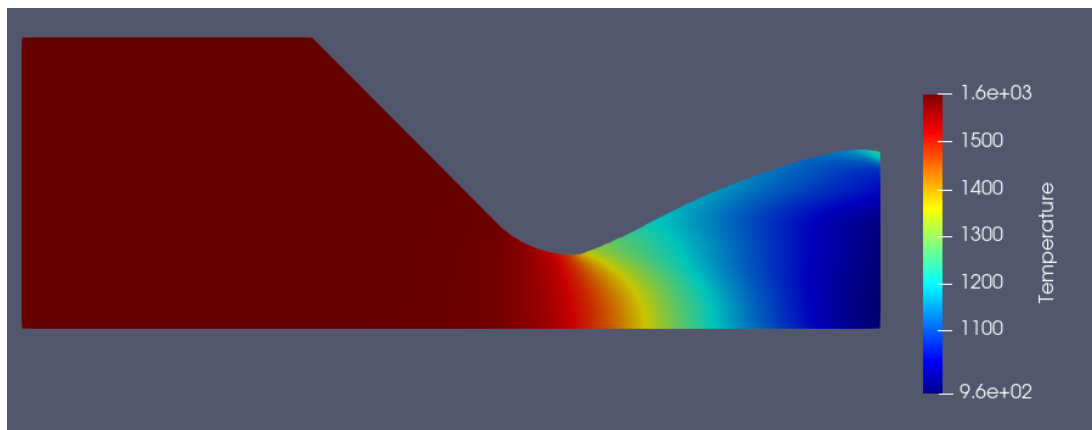
Fonte: Autor

Figura 47 – Contorno de Mach para o perfil otimizado com a caixa 2



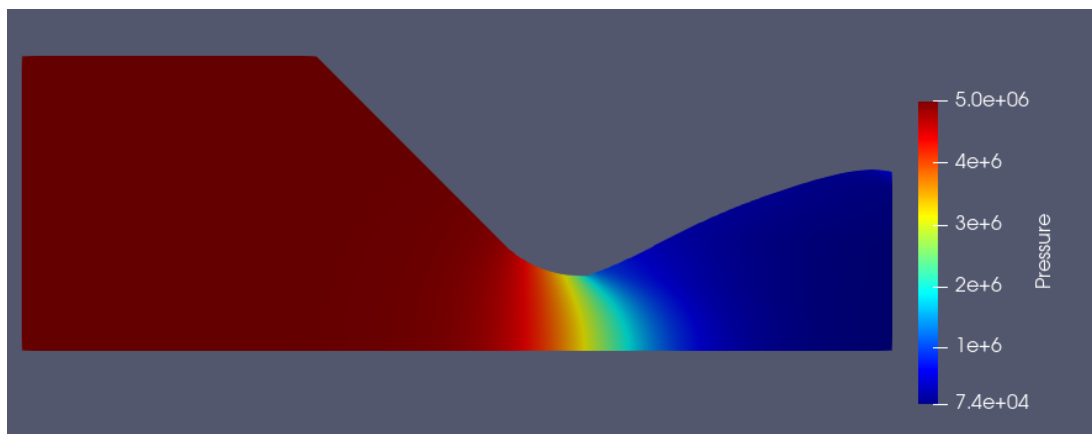
Fonte: Autor

Figura 48 – Contorno de temperatura para o perfil otimizado com a caixa 2



Fonte: Autor

Figura 49 – Contorno de pressão para o perfil otimizado com a caixa 2



Fonte: Autor

4.3.3 Caixa 3

Definida com 15 graus de liberdade, a caixa 3 é ilustrada na Figura 50. Logo em seguida, a Tabela 15 contém os valores médios do número de Mach e velocidade de exaustão para as simulações com diferentes limites de variáveis de projeto.

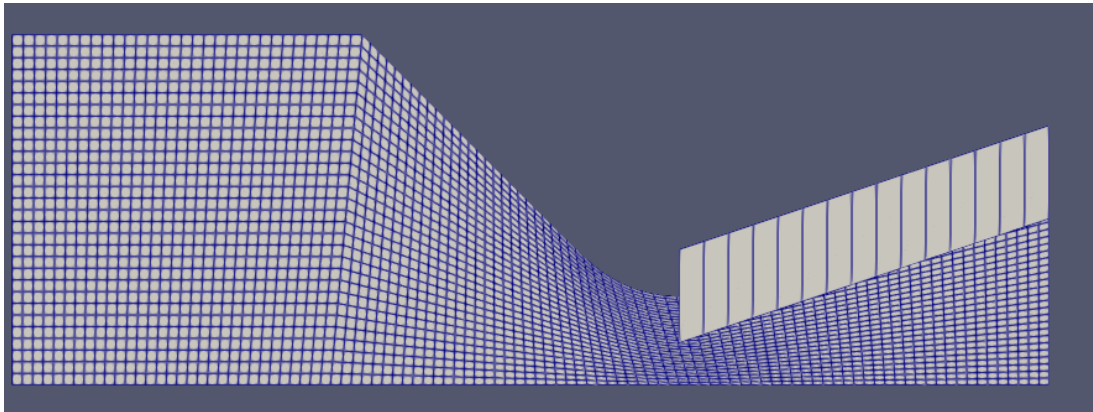
Tabela 15 – Mach e velocidade médios na saída para as otimizações com a caixa 3

Limite da variável de projeto	Mach médio na saída	Velocidade de exaustão
4,5	2,91	1357,41 m/s
5,0	2,92	1350,32 m/s
6,0	2,90	1356,89 m/s

Fonte: Autor

A Tabela 16 mostra os resultados do empuxo para esse terceiro conjunto de otimização. Já a Figura 51 apresenta a força de empuxo média para cada iteração das simulações com diferentes limites das variáveis de projeto.

Figura 50 – Caixa 3 definida para otimização



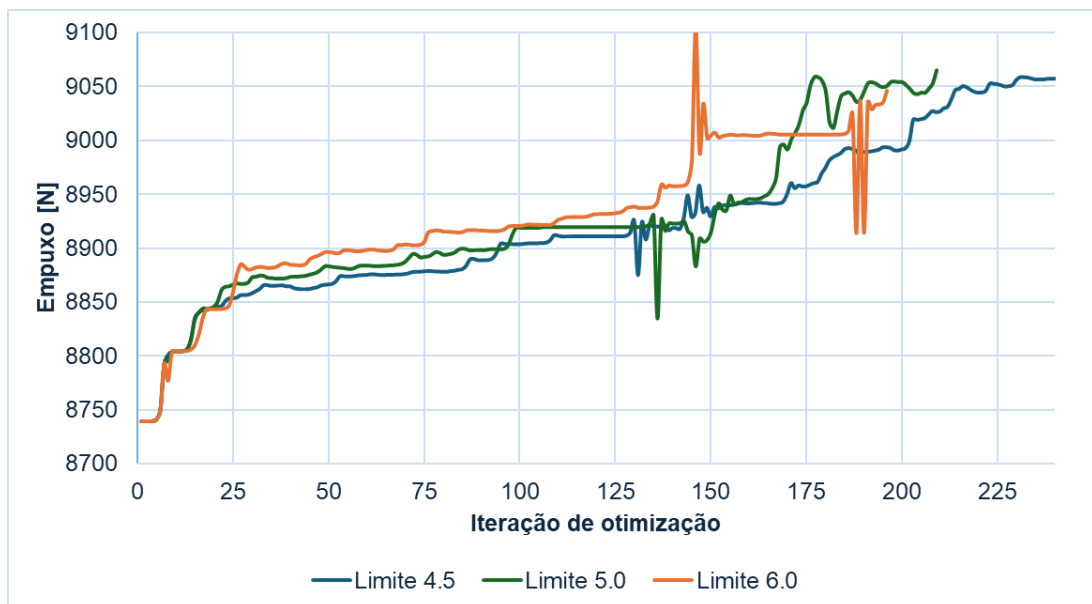
Fonte: Autor

Tabela 16 – Empuxo médio na saída para as otimizações com a caixa 3

Limite da variável de projeto	Empuxo médio na saída	Ganho percentual
4,5	9054,98 N	3,62 %
5,0	9065,50 N	3,74 %
6,0	9063,18 N	3,71 %

Fonte: Autor

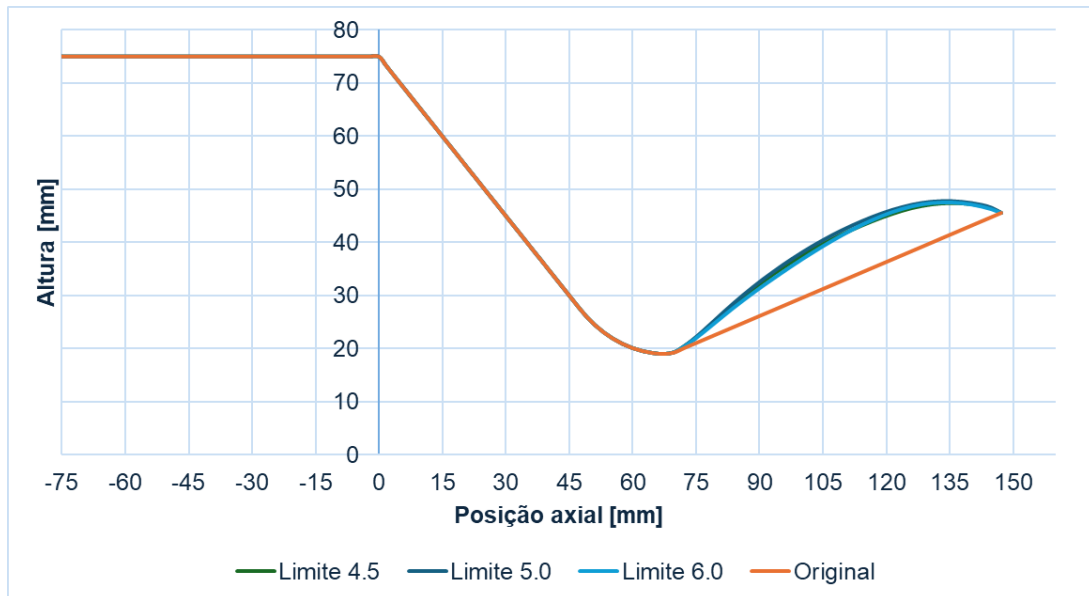
Figura 51 – Força de empuxo em cada iteração para a caixa 3



Fonte: Autor

Observa-se que para os 3 limites existem oscilações relevantes da força de empuxo ao longo das iterações. Essas oscilações acontecem principalmente em razão do perfil atingir um raio de seção com valores que excedem o raio da saída do bocal. Os perfis resultantes estão contidos na Figura 52.

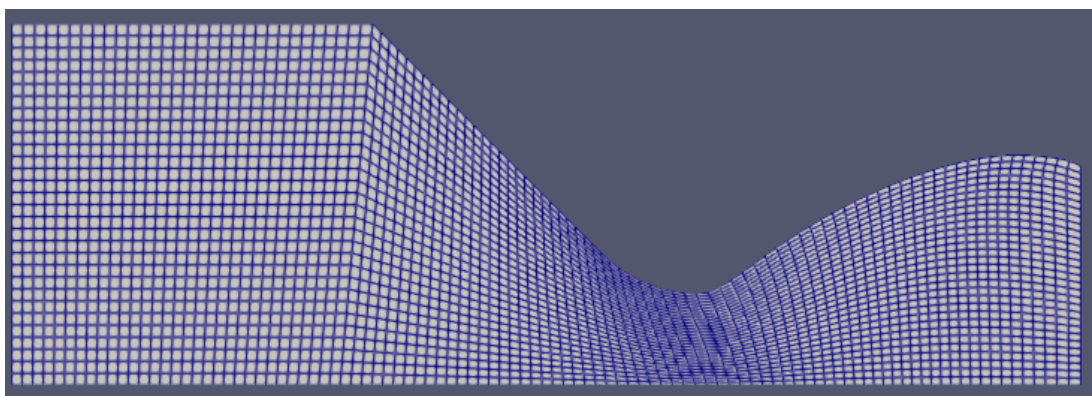
Figura 52 – Perfis resultantes da otimização para a caixa 3



Fonte: Autor

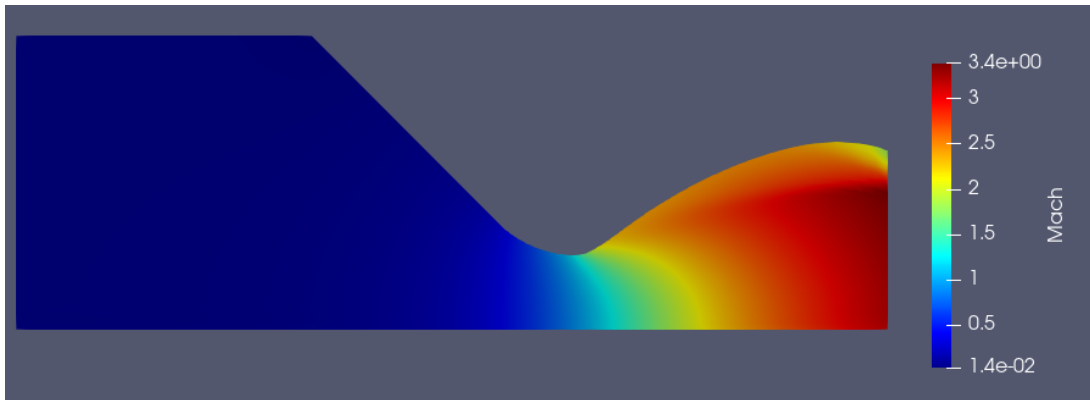
A malha resultante da otimização para o limite de 5 mm é ilustrada na Figura 53. Já os contornos de Mach, temperatura e pressão para o mesmo limite do terceiro conjunto de otimização são ilustrados, respectivamente, nas Figuras 54, 55 e 56.

Figura 53 – Malha resultante para a caixa 3



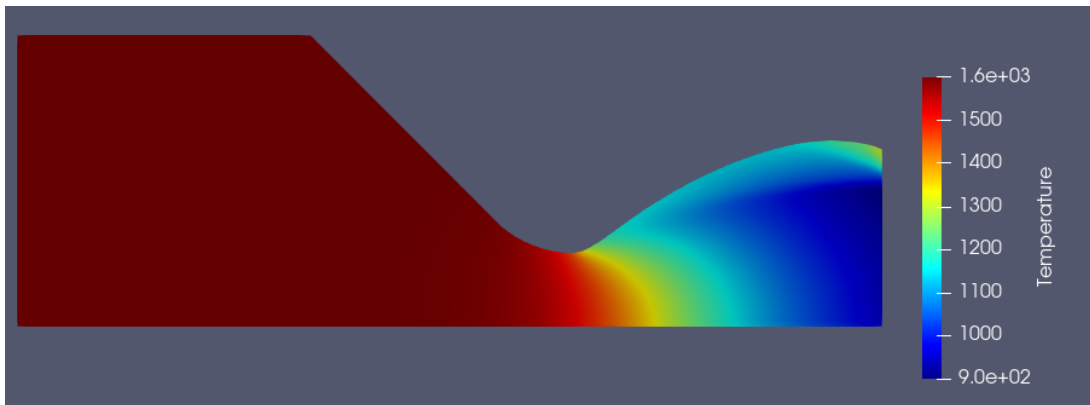
Fonte: Autor

Figura 54 – Contorno de Mach para o perfil otimizado com a caixa 3



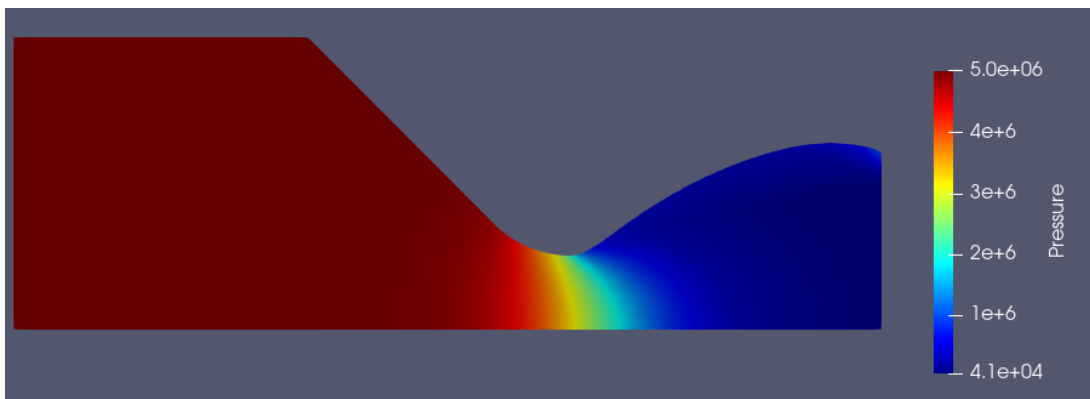
Fonte: Autor

Figura 55 – Contorno de temperatura para o perfil otimizado com a caixa 3



Fonte: Autor

Figura 56 – Contorno de pressão para o perfil otimizado com a caixa 3



Fonte: Autor

4.3.4 Comparativo entre as otimizações

Os conjuntos de otimizações utilizaram as mesmas condições de convergência para a função objetivo, iteração máxima e as mesmas restrições de movimentação para as caixas de deformação. As diferenças consistiam no número de graus de liberdade e os limites das variáveis de projeto. Todas elas proporcionaram um aumento do número de Mach na saída, que é a função objetivo. Porém, a simulação mais adequada para o problema em questão deve considerar a força de empuxo resultante e a orientação do escoamento na direção do empuxo. Os resultados dos conjuntos de otimização estão reunidos na Tabela 17.

Tabela 17 – Diferença percentual do empuxo para o valor teórico e da simulação

Caixa	Limite	Teórico	Simulação direta
1	4,5	-1,15 %	1,15 %
1	5,0	-1,06 %	1,24 %
1	6,0	-0,89 %	1,42 %
2	4,5	-0,14 %	2,19 %
2	5,0	0,07 %	2,41 %
2	6,0	0,51 %	2,85 %
3	4,5	1,25 %	3,62 %
3	5,0	1,37 %	3,74 %
3	6,0	1,35 %	3,71 %

Fonte: Autor

Como citado anteriormente, as otimizações com as caixas 2 e 3 resultaram em perfis que possuem seções transversais com raio maior que a seção de saída, em decorrência da influência da quina existente entre a garganta e o perfil reto do divergente que leva a formação de onda de compressão no escoamento supersônico. Dessa forma, o aumento dos graus de liberdade necessita de uma definição mais adequada da caixa de deformação (FFD), restringindo mais pontos próximos da garganta e da saída de se deslocarem ou reduzindo o limite da variável de projeto. Além disso, é possível definir uma caixa com maior extensão que englobe tanto a garganta quanto a saída, mas inserindo a restrição de pressão total e fluxo de massa para não ocorrer a alteração das dimensões dos comprimentos da garganta e saída.

5 CONCLUSÃO

O método adjunto tem se mostrado como um eficiente método de otimização em termos de custo computacional. Isso acontece em decorrência da eliminação da dependência direta do problema em relação ao número total de variáveis do escoamento.

Neste trabalho, foi aplicado uma otimização baseada no método adjunto discreto de um bocal convergente-divergente da equipe Kosmos Rocketry da UFSC Campus Joinville com o software de código aberto SU2. As condições consideradas foram de uma combustão ideal, com um escoamento bidimensional invíscido de um gás caloricamente perfeito. A otimização buscava maximizar o empuxo da tubeira através da modificação do perfil divergente do bocal utilizando como função objetivo do número de Mach na saída do bocal. A otimização adjunta discreta é baseada no cálculo do gradiente da função objetivo e a deformação da geometria e malha dentro de uma caixa de deformação livre. A caixa foi definida restringindo a movimentação apenas dos pontos correspondentes à linha da garganta e à seção da saída da tubeira.

Nos três conjuntos de otimização o número de Mach na saída teve um aumento para todos os limites de deformação da variável de projeto. Esse aumento também aconteceu no empuxo do bocal. Porém, as caixas com maiores graus de liberdade na direção x resultaram em perfis do divergente com seções que apresentavam um raio maior que o raio na saída. Esse resultado acarreta um escoamento que não é completamente orientado na direção do empuxo. Dessa forma, alguns resultados de empuxo para as caixas 2 e 3 foram maiores que o empuxo teórico. Já a caixa 1 resultou em uma otimização adequada para o problema em questão, com perfis que ficam distante de cerca de 1% do valor teórico e que apresentam uma expansão com maior direcionamento do escoamento no sentido do empuxo.

Nesse sentido, nota-se a necessidade de impor maiores restrições sobre o deslocamento da variável de projeto para as caixas definidas. Isso pode ser realizado por meio de fixação de um maior número de pontos próximos as regiões da garganta e saída, bem como reduzir o limite da variável de projeto. Outra forma de contornar essa adversidade seria definir uma caixa que englobe tanto a garganta quanto a saída, mas com imposição de restrição da pressão total e fluxo de massa ao longo da tubeira.

A otimização em questão partiu de uma geometria inicial mais simples possível do perfil divergente, que seria o perfil cônico. Porém, a geometria apresentava uma quina na transição da garganta com o divergente, o que gera uma onda de compressão no escoamento supersônico. Nesse contexto, ressalta-se que o método adjunto pode ser aplicado em perfis semi-dimensionados, gerados, por exemplo, pelo método das

características a fim de estabelecer um paralelo de eficiência e garantia de uma geometria final mais otimizada para a aplicação em questão.

REFERÊNCIAS

ANDERSON, J. D. **Computational Fluid Dynamics: The Basics with Applications**. 1. ed. New York: McGraw-Hill, 1995.

ANDERSON, J. D. **Modern Compressible Flow: With Historical Perspective**. 3. ed. New York: McGraw-Hill, 2003.

BELEGA, E. A.; NGUYEN, T. D. Analysis of flow in convergent-divergent rocket engine nozzle using computational fluid dynamics. In: **International Conference of Scientific Paper AFASES 2015**. Brasov, Romania: Military Technical Academy, Bucharest, Romania and Paul Sabatier University, Toulouse, France, 2015. Disponível em: https://www.afahc.ro/ro/afases/2015/afases_2015/mecanica/Belega_Nguyen.pdf. Acesso em: 01 jun. 2024.

CHIEREGATTI, B. G. **Otimização aerodinâmica de aerofólios utilizando o método adjunto**. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Mecânica) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.

DUFFY, A. C. **An Introduction to Gradient Computation by the Discrete Adjoint Method**. 2009.

EXAME. **Indústria espacial movimentará US \$ 1 tri até 2040 — aqui está o porquê**. Exame Invest, 2023. Disponível em: <https://exame.com/invest/mercados/industria-aeroespacial-vai-movimentar-1-trilhao-nos-proximos-anos-aqui-esta-o-porque/>. Acesso em: 3 jun. 2023.

FLACK, R. D. **Fundamentals of Jet Propulsion with Applications**. 1. ed. New York: Cambridge University Press, 2005.

GILES, M. B.; PIERCE, N. A. An introduction to the adjoint approach to design. **Flow, Turbulence and Combustion**, v. 65, n. 3-4, p. 393–415, fev. 2000.

HARRIS, F. R. The parsons centenary—a hundred years of steam turbines. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers**, v. 198, n. 1, p. 1–16, 1984.

HILL, P. G.; PETERSON, C. R. **Mechanics and Thermodynamics of Propulsion**. 2. ed. Massachusetts: Addison-Wesley, 1992.

HUHN, F. X. M. **Aerodynamic shape optimization with the adjoint method**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Aeroespacial) — Técnico Lisboa, Lisboa, 2015.

IATA. **Global Outlook for Air Transport**. Brasília, DF, 2022. 23 p.

JAMESON, A. Aerodynamic design via control theory. **Journal of Scientific Computing**, v. 3, n. 3, p. 233–260, jun. 1988.

JAMESON, A. **Computational aerodynamics**. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 2022.

MARQUES, S.; HEWITT, P. Aerofoil optimisation using cst parameterisation in su2. In: **Royal Aeronautical Society Applied Aerodynamics Group Conference**. Bristol, United Kingdom: Paper presented at Royal Aeronautical Society Applied Aerodynamics Group Conference, 2014. p. 1–11. Acesso em: 04 jun. 2024.

O GLOBO. **Starship da SpaceX é o foguete mais potente já feito, com 743 meganewtons de propulsão; conheça**. Texas, 2024. Disponível em: <https://l1nk.dev/yD1JP>. Acesso em: 04 jun. 2024.

PALACIOS, F. et al. Stanford university unstructured (su²): An open-source integrated computational environment for multi-physics simulation and design. In: **51st AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition**. Grapevine (Dallas/Ft. Worth Region), Texas: Aerospace Research Center, 2013. p. 1–60. Disponível em: <https://arc.aiaa.org/doi/book/10.2514/MASM13>. Acesso em: 04 jun. 2024.

PARAVIEW. **ParaView: Open-source data analysis and visualization application**. 2024. Disponível em: <https://www.paraview.org/>. Acesso em: 06 jun. 2024.

RAO, G. V. R. Exhaust nozzle contour for optimum thrust. **ARS Journal**, v. 28, n. 6, p. 377–384, mai. 1958.

ROZENDAAL, H. L. **A Generalized Method for the Design of Optimum Rocket Nozzles**. Ph.D. Dissertation — Iowa State University of Science and Technology, Ann Arbor, Michigan, 1967.

SCHNEIDER, R. M. **Métodos de Máximo Declive para Minimização Quadrática**. Dissertação de Mestrado — Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, Florianópolis, 2015.

SEDERBERG, T. W.; PARRY, S. R. Free-form deformation of solid geometric models. In: **Proceedings of the 13th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques**. Dallas, Texas, USA: ACM, 1986. p. 151–160. Disponível em: https://people.eecs.berkeley.edu/~sequin/CS285/PAPERS/Sederberg_Parry.pdf. Acesso em: 01 jun. 2024.

SHEWCHUK, J. R. **Lecture Notes on Delaunay Mesh Generation**. Berkeley, CA: Department of Electrical Engineering and Computer Sciences, University of California at Berkeley, 2012.

SIKARWAR, N. **The Use of Adjoint Methods in Jet Nozzle Design**. Master of Science Thesis — The Pennsylvania State University, Pennsylvania, 2009.

SpaceX. **SpaceX**. 2024. Acesso em: 06 jun. 2024. Disponível em: <https://www.spacex.com/>.

SUTTON, G. P.; BIBLARZ, O. **Rocket Propulsion Elements**. 8. ed. Hoboken, New Jersey: Wiley, 2010.

VERSTEEG, H. K.; MALALASEKERA, W. **An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method**. 2. ed. Harlow: Pearson Education Limited, 2007.

YANG, G.; DA RONCH, A. Aerodynamic shape optimisation of benchmark problems using su2. In: **AIAA SciTech Forum, 8–12 January 2018, Kissimmee, Florida**. Southampton: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2018. p. 1–28. Disponível em: <https://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/6.2018-0412>. Acesso em: 12 mai. 2024.