



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA CIVIL

Guilherme Gomes Oliveira

Análise dinâmica não linear de estruturas elásticas com pêndulos simples e duplos acoplados

Florianópolis - SC

2023

Guilherme Gomes Oliveira

Análise dinâmica não linear de estruturas elásticas com pêndulos simples e duplos acoplados

Dissertação apresentada ao Programa de
Pós-Graduação em Engenharia Civil da
Universidade Federal de Santa Catarina,
como parte dos requisitos para obtenção
do título de Mestre em Engenharia Civil.
Orientador: Leandro Fadel Miguel, Dr.

Florianópolis - SC

2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Gomes Oliveira, Guilherme

Análise dinâmica não linear de estruturas elásticas com
pêndulos simples e duplos acoplados. / Guilherme Gomes
Oliveira ; orientador, Leandro Fadel Miguel, 2023.

93 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Civil, Florianópolis, 2023.

Inclui referências.

1. Engenharia Civil. 2. Análise dinâmica não linear de
estruturas. 3. Pêndulo simples e duplo. 4. Mecânica de
Lagrange. 5. Análise modal. I. Fadel Miguel, Leandro. II.
Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós
Graduação em Engenharia Civil. III. Título.

Guilherme Gomes Oliveira

Análise dinâmica não linear de estruturas elásticas com pêndulos simples e duplos acoplados

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Hermes Carvalho, Dr.
Universidade Federal de Minas Gerais.

Prof^a. Poliana Dias de Moraes, Dr^a.
Universidade Federal de Santa Catarina.

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Engenharia Civil.

Coordenação do Programa de
Pós-Graduação

Prof. Leandro Fadel Miguel, Dr.
Orientador

Florianópolis - SC
2023

*Este trabalho é dedicado às crianças adultas que,
quando pequenas, sonharam em se tornar cientistas.*

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por sempre estar ao meu lado. O início desse processo não foi nada fácil, mas nunca estive só.

Agradeço à Universidade Federal de Santa Catarina pela acolhida e ao PP-GEC/Estruturas pela oportunidade de desenvolvimento oferecida.

Agradeço também ao CNPq pelo incentivo através da bolsa de estudos.

Agradeço aos professores do programa de pós-graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Santa Catarina, em especial ao professor Leandro Fadel Miguel, que me orientou e conduziu às caminhos percorridos por essa pesquisa.

Agradeço ao meu pai Alencar Oliveira, minha mãe Vanusa Gomes e a minha irmã Myrelle Gomes por sua grande influência em minha formação acadêmica.

Agradeço a minha namorada Ana Paula por todo incentivo, paciência e positividade, especialmente por compreender todo o processo de confecção desse texto de mestrado.

Agradeço ao meu amigo Mario Jr, engenheiro industrial madeireiro, que conheci durante o mestrado.

Agradeço a minha querida prima Núbia Gomes por me acolher na cidade de Florianópolis assim que cheguei para o início da pós-graduação. Sua acolhida, apoio e atenção foram fundamentais no meu período de adaptação. Sem o seu carinho, nada disso seria possível.

Agradeço aos meus amigos que ficaram em Goiás e me incentivaram nessa caminhada.

*“Não vos amoldeis às estruturas deste mundo,
mas transformai-vos pela renovação da mente,
a fim de distinguir qual é a vontade de Deus:
o que é bom, o que Lhe é agradável, o que é perfeito.
(Bíblia Sagrada, Romanos 12, 2)*

Resumo

A compreensão do comportamento estático e dinâmico de uma estrutura é fundamental para a concepção de estruturas mais leves e esbeltas, mantendo o padrão de segurança e qualidade. Assim, torna-se necessário empregar análises mais detalhadas, como formulações não lineares. No entanto, desenvolver um problema não linear pode ser desafiador, uma vez que alguns problemas não lineares não possuem soluções analíticas, recorrendo-se à processos numéricos a fim de apurar esses sistemas. Tais soluções são implementadas por processos incrementais e iterativos, características apropriadas para rotinas computacionais. Considerando essas informações, o objetivo deste trabalho é implementar uma rotina computacional em MATLAB capaz de fornecer análises dinâmicas não lineares de estruturas elásticas com pêndulos simples e duplos acoplados. A rotina implementada baseia-se em conceitos matemáticos, como o uso da matriz Jacobiana para tratar a não linearidade apresentada pelos pêndulos e a aplicação do método Newmark-Newton/Raphson para resolver as equações diferenciais que descrevem os sistemas analisados. Além disso, a implementação do algoritmo ocorre de forma gradativa, iniciando pelo desenvolvimento do pêndulo simples até chegar à acoplagem do pêndulo duplo a uma coluna. A coluna utilizada na análise foi discretizada usando o método dos elementos finitos, possibilitando a concatenação do pêndulo duplo à estrutura. Inicialmente, o algoritmo foi compilado para ângulos menores e, posteriormente, esses valores foram aumentados com o intuito de testar a robustez do algoritmo. Diversas configurações iniciais foram aplicadas ao sistema de pêndulo acoplado à coluna, visando observar a interação entre os sistemas desenvolvidos. Os resultados obtidos foram validados com o *software* de elementos finitos *ABAQUS*. Após a análise dos resultados, conclui-se que o algoritmo desenvolvido é capaz de analisar problemas dinâmicos não lineares com pêndulos simples e duplos acoplados.

Palavras-chaves: Análise não linear de estruturas; Pêndulo simples e duplo; Mecânica de Lagrange; Análise modal.

Abstract

Understanding the static and dynamic behavior of a structure is crucial for designing lighter and slender structures while maintaining safety and quality standards. Thus, it becomes necessary to employ more detailed analyses, such as non-linear formulations. However, developing a non-linear problem can be difficult, since some non-linear problems do not possess analytical answers, requiring numerical processes to purify these systems. Such solutions are implemented through incremental and iterative processes, which are suitable for computational routines. Considering this information, the aim of this study is to implement a computational routine in MATLAB capable of providing non-linear dynamic analyses of elastic structures with single and double pendulums coupled. The implemented routine is based on mathematical concepts, such as the use of the Jacobian matrix to address the non-linearity presented by the pendulums and the application of the Newmark-Newton/Raphson method to solve the differential equations describing the analyzed systems. Moreover, the algorithm implementation occurs gradually, starting from the development of the simple pendulum up to the coupling of the double pendulum to a column. The column used in the analysis is discretized using the finite element method, enabling the concatenation of the double pendulum to the structure. Initially, the algorithm is compiled for smaller angles, and subsequently, these values are increased to test the robustness of the algorithm. Various initial configurations are applied to the pendulum system coupled to the column, aiming to observe the interaction between the developed systems. The obtained results are validated with the finite element software *ABAQUS*. After analyzing the results, it is concluded that the developed algorithm is capable of analyzing non-linear dynamic problems with coupled single and double pendulums.

Key-words: Nonlinear analysis of structures; Single and double pendulum; Lagrange mechanics; Modal analysis.

Lista de ilustrações

Figura 1 – (a) Sistema massa-mola-amortecedor. (b) Pêndulo simples.	18
Figura 2 – Analogia das análises.	20
Figura 3 – Zonas sístimas no Brasil.	22
Figura 4 – Isopletas da velocidade básica de vento no Brasil.	22
Figura 5 – Análise dinâmica de estruturas: (a) Torre de transmissão, (b) Pórtico .	23
Figura 6 – Pêndulo Simples	31
Figura 7 – Pêndulo Duplo	33
Figura 8 – Solução do sistema dinâmico.	35
Figura 9 – Esquema sobre a relação entre o modelo original proposto para descrever uma situação física e o modelo discreto associado ao modelo original. .	35
Figura 10 – Representação do sistema massa-mola com pêndulo duplo acoplado. . .	40
Figura 11 – Fluxograma do algoritmo.	45
Figura 12 – Sequência de modelos aplicada à coluna aplocada ao pêndulo duplo . .	46
Figura 13 – Elemento de barra.	49
Figura 14 – Fluxograma do algoritmo.	51
Figura 15 – Matriz de massa generalizada.	52
Figura 16 – Matriz de rigidez generalizada.	52
Figura 17 – Matriz Jacobiana.	53
Figura 18 – Fluxograma do algoritmo para acoplar o pêndulo à coluna.	54
Figura 19 – Representação gráfica do pêndulo simples com as configurações iniciais.	55
Figura 20 – Evolução temporal de θ_1 validando o pêndulo simples	56
Figura 21 – Representação gráfica do pêndulo duplo com as configurações iniciais .	57
Figura 22 – Evolução temporal de θ_1 validando o pêndulo simples	57
Figura 23 – Evolução temporal de θ_2 validando o pêndulo duplo	58
Figura 24 – Sistema com três graus de liberdade.	59
Figura 25 – Evolução temporal do Massa mola.	59
Figura 26 – Evolução temporal do θ_1	60
Figura 27 – Evolução temporal do θ_2	60
Figura 28 – Modos de vibração da coluna 20 cm por 30 cm obtidos por meio do <i>ABAQUS</i>	61
Figura 29 – - Modos de vibração da coluna de 2 cm de raio obtidos através do <i>ABAQUS</i>	62
Figura 30 – Coluna modela com pêndulo duplo a 30° e 20°.	64
Figura 31 – Evolução temporal de θ_1	64
Figura 32 – Evolução temporal de θ_2	65
Figura 33 – Evolução temporal do Nó 12 referente a coluna.	65

Figura 34 – Coluna modelada com pêndulo duplo a 40° e 30° .	66
Figura 35 – Evolução temporal do θ_1 .	66
Figura 36 – Evolução temporal do θ_2 .	67
Figura 37 – Evolução temporal do Nó 12 da coluna.	67
Figura 38 – Coluna modelada com pêndulo duplo a 60° e 50° .	68
Figura 39 – Evolução temporal de θ_1 .	68
Figura 40 – Evolução temporal de θ_2 .	69
Figura 41 – Evolução temporal do Nó 12 da coluna.	69
Figura 42 – Coluna modelada com pêndulo duplo a 85° e 20° .	70
Figura 43 – Evolução temporal de θ_1 .	70
Figura 44 – Evolução temporal de θ_2 .	71
Figura 45 – Evolução temporal do Nó 12 da coluna.	71
Figura 46 – Aplicando uma força dinâmica a coluna.	72
Figura 47 – Evolução temporal do Nó 12 na coluna.	73
Figura 48 – Evolução temporal de θ_1 .	73
Figura 49 – Evolução temporal de θ_2 em Abaqus.	74
Figura 50 – Análise da coluna com as novas configurações.	74
Figura 51 – Evolução temporal do Nó 12 na coluna.	75
Figura 52 – Evolução temporal de θ_1 .	75
Figura 53 – Evolução temporal de θ_2 em Abaqus.	76
Figura 54 – Coluna modelada com pêndulo duplo a 45° e 45° .	76
Figura 55 – Evolução temporal de θ_1 .	77
Figura 56 – Evolução temporal de θ_2 .	77
Figura 57 – Evolução temporal do Nó 12 da coluna.	78
Figura 58 – Aceleração do Nó 12 da coluna.	78
Figura 59 – Velocidade do Nó 12 da coluna.	79
Figura 60 – Comprimento da coluna.	86
Figura 61 – Seção transversal da coluna.	86
Figura 62 – Frequências obtidas através do <i>ABAQUS</i> .	87
Figura 63 – Frequências obtidas através do <i>MATLAB</i> .	87
Figura 64 – Conferência do ângulo inicial de $\theta_1 = 30^\circ$ e $L_1 = 3m$.	88
Figura 65 – Conferência do ângulo inicial de $\theta_1 = 20^\circ$ e $L_1 = 2m$.	88
Figura 66 – Conferência do ângulo inicial de $\theta_1 = 40^\circ$ e $L_1 = 3m$.	89
Figura 67 – Conferência do ângulo inicial de $\theta_2 = 30^\circ$ e $L_1 = 2m$.	89
Figura 68 – Conferência do ângulo inicial de $\theta_1 = 60^\circ$ e $L_1 = 3m$.	90
Figura 69 – Conferência do ângulo inicial de $\theta_2 = 50^\circ$ e $L_1 = 2m$.	90
Figura 70 – Conferência do ângulo inicial de $\theta_1 = 85^\circ$ e $L_1 = 3m$.	91
Figura 71 – Conferência do ângulo inicial de $\theta_2 = 20^\circ$ e $L_1 = 2m$.	91
Figura 72 – Configuração da força dinâmica.	92

Figura 73 – Configuração da haste 1 em Abaqus.	92
Figura 74 – Configuração da haste 2 em Abaqus.	92
Figura 75 – Configuração da força dinâmica em Abaqus.	92

Lista de tabelas

Tabela 1	–	Abaqus x Matlab - Coluna 20x30 [<i>cm</i>]	61
Tabela 2	–	Abaqus x Matlab - Coluna 2 cm de raio.	62

Lista de abreviaturas e siglas

AMS	Amortecedor de massa sintonizado
NNR	Newmark-Newton/Raphson
MATLAB	<i>MATrix LABoratory</i>
LT	Linha de transmissão
P.T.V	Princípios dos trabalhos virtuais

Lista de símbolos

θ	Posição angular;
$\dot{\theta}$	Velocidade angular;
$\ddot{\theta}$	Aceleração angular;
L	Lagrangiana
$\frac{d(\cdot)}{dt}$	Derivada; primeira em relação ao tempo;
T	Energia cinética do sistema;
V	Energia potencial do sistema;
i	Incremento;
k	Iteração;
c	Constante de amortecimento;
m	Massa do sistema;
Δt	Passo de tempo;
D	Função dissipação de Rayleigh;
l_j	comprimento das hastes dos pêndulos;
c_j	constante de amortecimento dos pêndulos;
$\ddot{x}$	aceleração inicial do sistema;
$\dot{x}$	velocidade inicial do sistema;
k	constante elástica da mola;
g	constante gravitacional;
f	força de excitação do sistema;
$J(n \times n)$	matriz Jacobiana;
ϕ	vetor que expressa a forma modal de vibração;
ω	frequência de vibração;

φ	ângulo de fase;
ζ_i	fator de amortecimento;
F	vetor de forças global;
E	módulo de elasticidade;
I	momento de inércia;
ρ	massa específica do material;
A	área da seção transversal do elemento;
n	número de nós da estrutura discretizada;
Hz	Hertz;
U_e	vetor deslocamento do elemento;
F_e	vetor de forças do elemento.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	18
1.1	Objetivos	21
1.2	Motivação	21
1.3	Estrutura do trabalho	24
2	REVISÃO DE LITERATURA	25
2.1	Mecânica de Lagrange	25
2.2	Mecânica do pêndulo	29
2.2.1	O pêndulo simples	31
2.2.2	O pêndulo duplo amortecido	33
2.2.3	Solução numérica via Newmark - Newton/Raphson	35
2.3	Mecânica do massa mola acoplado ao pêndulo duplo	38
2.3.1	Sistema com 3 graus de liberdade	40
2.3.2	Fluxograma do algoritmo	44
3	METODOLOGIA	46
3.1	Método dos elementos finitos	47
3.1.1	Análise modal	47
3.2	Elemento de discretização da coluna	49
3.3	Fluxograma da análise da coluna	50
3.4	Acoplamento do pêndulo à Coluna	52
3.4.1	Fluxograma do algoritmo	54
4	RESULTADO E DISCUSSÃO	55
4.1	Modelagem do pêndulo simples a 60°	55
4.2	Modelagem do pêndulo duplo a 60° e 50°	57
4.3	Modelagem do massa mola acoplado ao pêndulo duplo	59
4.4	Modelagem da coluna: frequência e modo de vibração	61
4.5	Modelagem do pêndulo duplo acoplado à coluna	63
4.5.1	Coluna modelada com 2 pêndulos a 30° e 20°	63
4.5.2	Coluna modelada com 2 pêndulos a 40° e 30°	66
4.5.3	Coluna modelada com 2 pêndulos a 60° e 50°.	68
4.5.4	Coluna modelada com 2 pêndulos a 85° e 20°	70
4.5.5	Coluna modelada com 2 pêndulos a 0° e aplicando uma força dinâmica na estrutura.	72

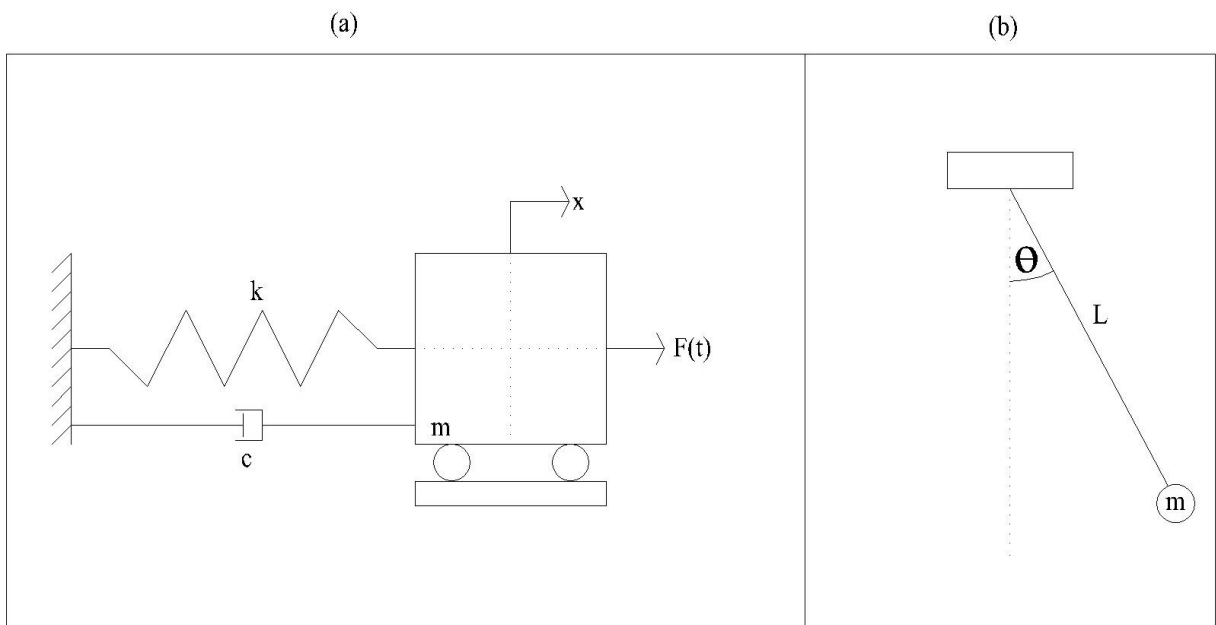
4.5.6	Coluna modelada com 2 pêndulos a 0° e aplicando uma força dinâmica nos pêndulos.	74
4.6	Coluna modelada com 2 pêndulos a 45° e 45°	76
5	CONCLUSÃO	80
	REFERÊNCIAS	81
	ANEXOS	85
	ANEXO A – CONFIGURAÇÃO DA COLUNA PARA ANÁLISE DE FREQUÊNCIA	86
	ANEXO B – CONFIGURAÇÃO DOS ÂNGULOS DOS TESTES . .	88
B.1	Configuração 30° e 20°	88
B.2	Configuração 40° e 30°	89
B.3	Configuração 60° e 50°	90
B.4	Configuração 85° e 20°	91
B.5	Configuração forçando a barra	92
B.6	Configuração forçando o pêndulo	92

1 INTRODUÇÃO

Em estruturas reais, as análises dinâmicas não lineares vêm ganhando espaço na engenharia. Com estruturas cada vez mais altas e esbeltas, evidencia-se a importância do desenvolvimento de rotinas computacionais e programas de cálculo que permitam a realização de análises estruturais cada vez mais próximas da realidade. Segundo [Lapa \(1987\)](#), a análise dinâmica é necessária em situações de exposição da estrutura às ações que variam com o tempo, como vento, pessoas caminhando, tráfego, explosões e abalos sísmicos, conhecidos popularmente como terremotos. No que diz respeito ao desenvolvimento de análises dinâmicas não lineares, cresce o número de pesquisas retratando o comportamento dinâmico de sistemas, através de modelos matemáticos simplificados.

O pêndulo e o sistema massa-mola-amortecedor, como mostrado na Figura 1, são exemplos recorrentes de sistemas dinâmicos relatados na literatura. Esses sistemas podem ser representados por equações diferenciais que descrevem o seu movimento em função do tempo. A solução dessas equações de movimento, em alguns casos, pode ser trabalhosa, dificultando a sua resolução de forma analítica. Recorre-se então a métodos numéricos, como Newmark e Newton-Raphson, para a discretização temporal do sistema ([HISSA, 2022](#)). Esse procedimento numérico implica na transformação dos sistemas formados por equações diferenciais em sistemas com equações algébricas, tornando mais simples a sua solução ([SAVI, 2006](#)). Além disso, os métodos numéricos são processos incrementais iterativos, o que viabiliza a otimização dessas soluções por rotinas computacionais.

Figura 1 – (a) Sistema massa-mola-amortecedor. (b) Pêndulo simples.



Fonte: Autor.

O sistema apresentado na Figura 1 (a) é composto por uma massa m acoplada a uma mola de constante de rigidez igual a k e a um amortecedor linear de constante de amortecimento igual a c . A mola presente nesse sistema é fixa em uma de suas extremidades e na outra ponta acoplada à massa, permitindo o seu livre deslocamento na horizontal quando excitada por uma força $F(t)$, e esse movimento é descrito pela equação diferencial:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t). \quad (1.1)$$

A Figura 1 (b) apresenta a configuração de um pêndulo simples, composto por uma haste de comprimento L , massa m e oscila em função da sua posição de equilíbrio, realizando um movimento oscilatório em função de θ , descrevendo a equação:

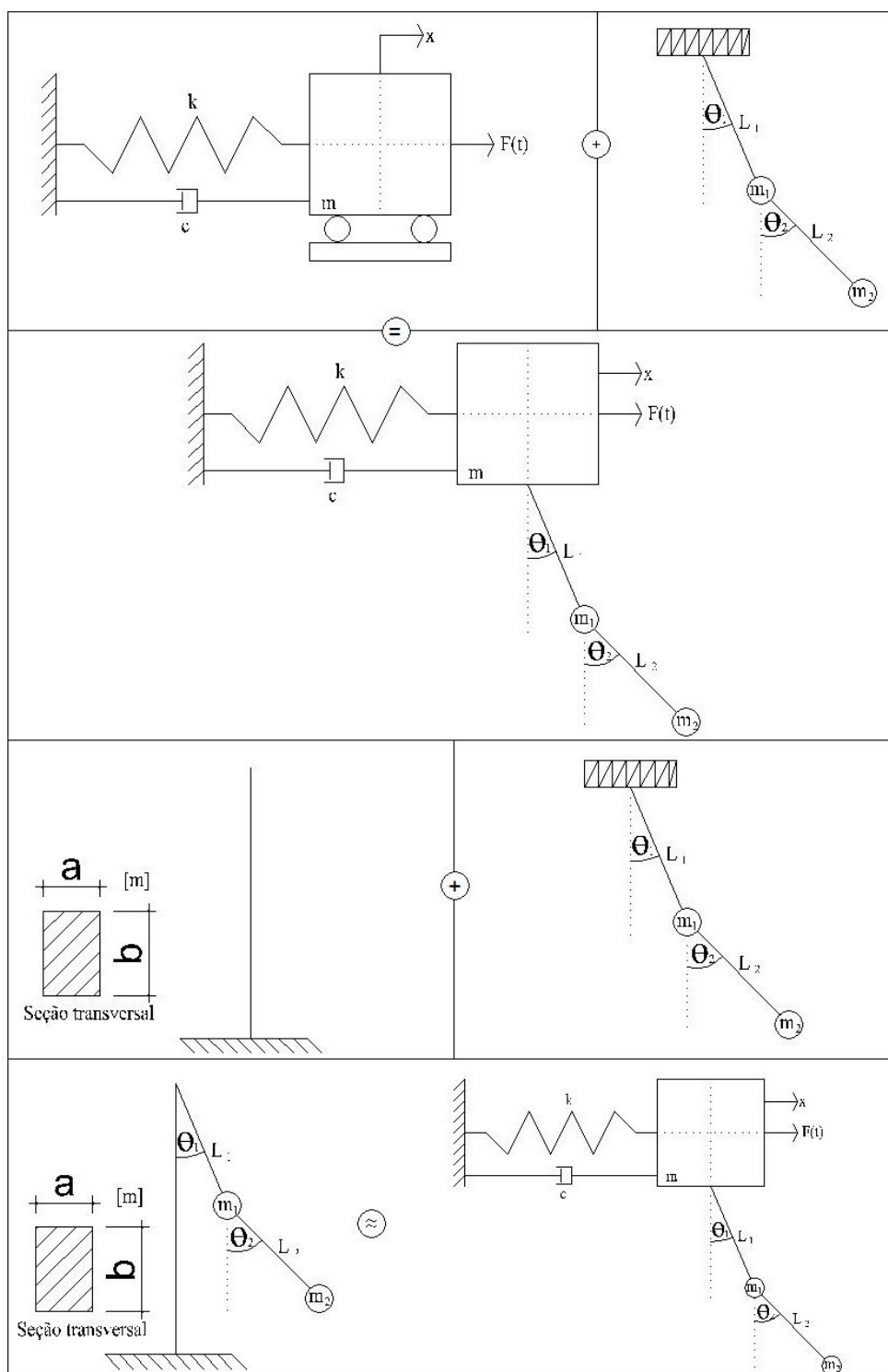
$$mL^2\ddot{\theta} + mgL\sin\theta = 0. \quad (1.2)$$

Neste trabalho, propõe-se implementar uma rotina computacional desenvolvida em [MATLAB \(2018\)](#) para análises dinâmicas não lineares de estruturas elásticas com pêndulos simples e duplos acoplados. Para tal finalidade, estudou-se a implementação de uma coluna com pêndulo duplo ligado ao topo. Além disso, empregou-se conhecimentos matemáticos relevantes como Newmark e Newton-Raphson, associados à matriz Jacobiana, para tratar a não linearidade presente no pêndulo ([HISSA, 2022](#)).

A pesquisa foi desenvolvida seguindo a analogia demonstrada na Figura 2, onde o aprimoramento do problema ocorre de forma gradativa, evoluindo de problemas menores, como o pêndulo simples e duplo, passando pelo desenvolvimento do sistema de 3 graus de liberdade (massa-mola-amortecedor ligado ao pêndulo duplo) até chegar ao problema da coluna acoplada ao pêndulo. Cada sistema exposto na Figura 2 é caracterizado por equações diferenciais previamente implementadas neste trabalho. A obtenção dessas equações foram realizadas usando a mecânica de Lagrange e a discretização da coluna por meio do método dos elementos finitos (MEF). Em um contexto matemático, a discretização da coluna por elementos finitos decorre da obtenção das matrizes de massa $[M]$ e rigidez $[K]$ da estrutura ([SILVA, 2009](#)). Essa organização em forma matricial dos sistemas viabilizou a acoplagem do pêndulo à coluna, como mostrado na Figura 2.

Em síntese, um dos principais desafios ao implementar o algoritmo de análise dinâmica não linear com pêndulos está relacionado à composição conjunta das matrizes de massa $[M]$, rigidez $[K]$ e da matriz Jacobiana. Essa interação das matrizes é demonstrada nesse trabalho, enfatizando a importância da definição dos graus de liberdade da coluna que fará o contato com o pêndulo.

Figura 2 – Analogia das análises.



Fonte: Autor

1.1 Objetivos

O objetivo geral desta pesquisa é desenvolver uma rotina computacional para realizar análises dinâmicas não lineares em estruturas elásticas com pêndulos simples e duplos acoplados. Para atingir esse objetivo geral, os objetivos específicos são:

- desenvolver e validar um algoritmo em MATLAB para analisar o problema do pêndulo simples e do pêndulo duplo, utilizando um *software* comercial baseado no método dos elementos finitos como referência;
- estender o algoritmo do pêndulo duplo para incluir um sistema massa-mola, resultando em um sistema com três graus de liberdade, e validá-lo com o *software* comercial baseado no método dos elementos finitos;
- implementar uma rotina computacional para discretizar uma coluna usando o método dos elementos finitos;
- acoplar o pêndulo duplo à coluna e analisar as respostas dinâmicas geradas pela rotina computacional sob diferentes condições iniciais;
- Validar a acoplagem do pêndulo duplo com a coluna e os resultados das análises dinâmicas usando o *software* comercial de elementos finitos.

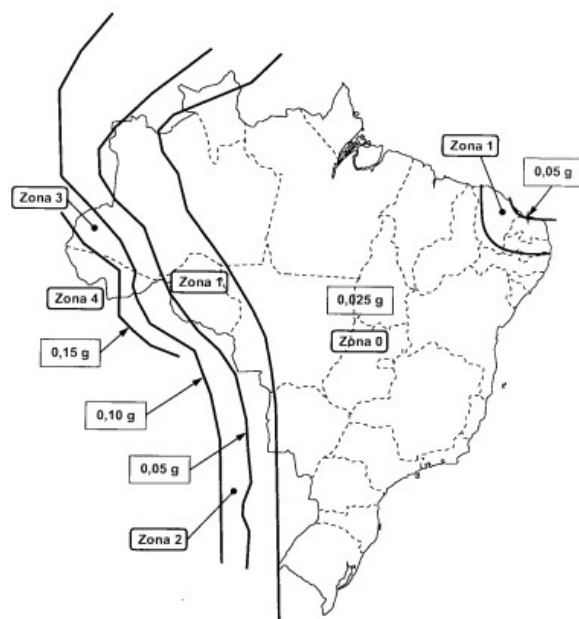
1.2 Motivação

A motivação para o desenvolvimento deste estudo é a análise da interação entre pêndulos e colunas. Essa implementação possibilitará estudos futuros voltados ao dimensionamento e à aplicação de pêndulos como amortecedores de massa sintonizadas (AMS) em estruturas brasileiras.

O Brasil, localizado no centro da placa tectônica sul-americana, apresenta baixa incidência de terremotos, conforme a Rede Sismográfica Brasileira (BRASIL, 2005). A atividade sísmica no país não é considerada relevante ou perigosa (Figura 3), não sendo uma força dinâmica prioritária na construção de edifícios ou torres de transmissão. A maior parte do território brasileiro encontra-se na zona sísmica 0, onde, segundo a norma sísmica brasileira, não são exigidos requisitos de resistência sísmica.

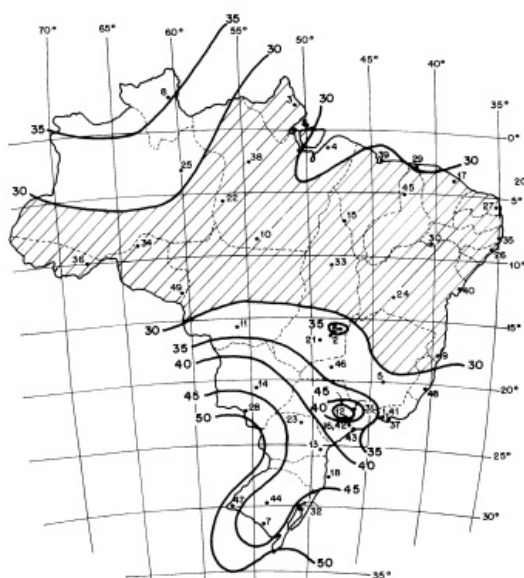
Por outro lado, o vento é uma força natural significativa no país. O Brasil, sendo o 5º maior em extensão territorial, possui diversas torres de transmissão, construídas com estruturas metálicas, que também sofrem com vibrações causadas pelos ventos. Edifícios também são afetados por essa força da natureza. Na região Sul, os ventos são mais fortes (Figura 4), e nas cidades litorâneas, tornam-se uma força dinâmica considerável.

Figura 3 – Zonas sístimas no Brasil.



Fonte: [ABNT \(2006\)](#)

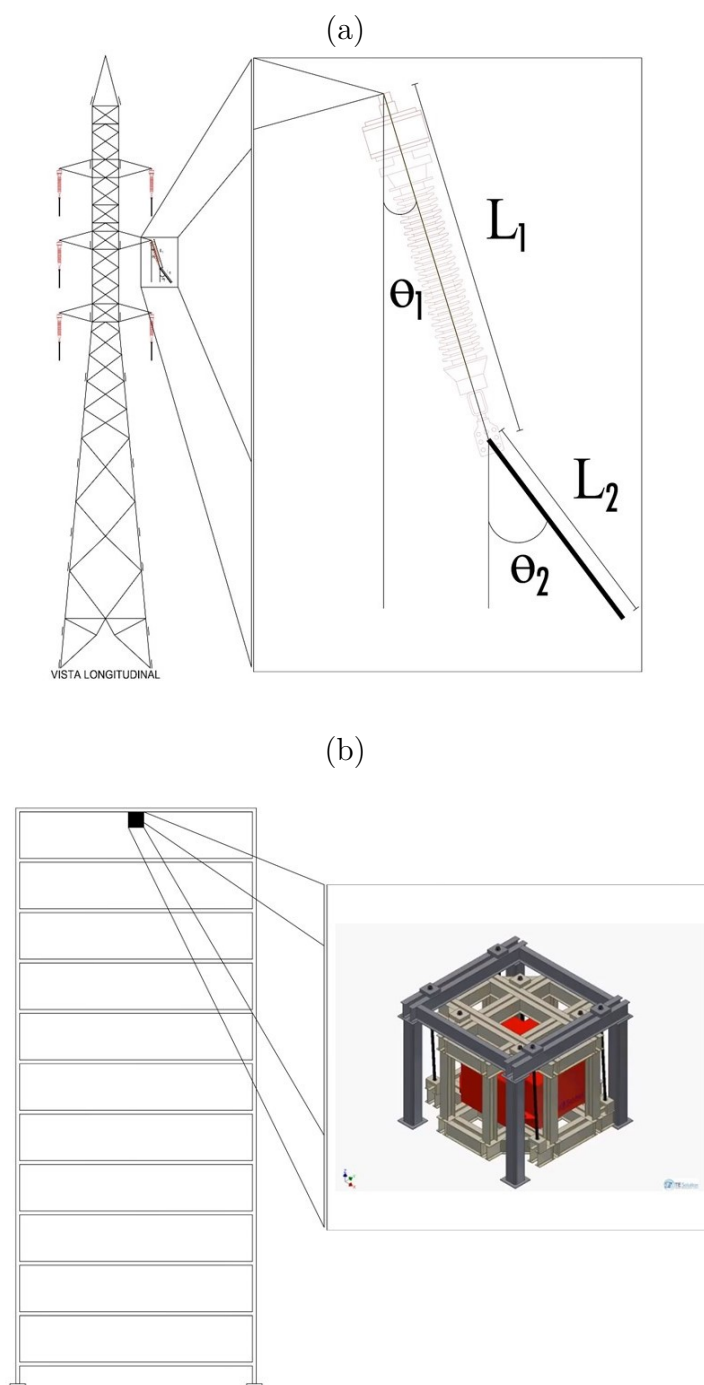
Figura 4 – Isopletas da velocidade básica de vento no Brasil.



Fonte: [ABNT \(1988\)](#).

Um exemplo na região Sul é a cidade de Balneário Camboriú, em Santa Catarina, conhecida por seus altos e esbeltos edifícios, que ficam expostos à força dos ventos na costa brasileira. Assim, tanto as torres de transmissão quanto os edifícios altos podem ser analisados em relação às forças dinâmicas presentes em estruturas com pêndulos simples e duplos acoplados (Figura 5).

Figura 5 – Análise dinâmica de estruturas: (a) Torre de transmissão, (b) Pórtico



Fonte: Autor

A Figura 5 (a) mostra a configuração de uma torre de transmissão conectada a um isolador, que por sua vez está ligado ao cabo de transmissão de eletricidade. Essa configuração é semelhante a um pêndulo duplo, já que o isolador possui uma massa m , um comprimento l e oscila em torno de uma posição de equilíbrio. De maneira análoga, o cabo conectado ao isolador forma uma catenária entre as torres e se assemelha à segunda

haste do pêndulo duplo, com um comprimento l , uma massa m e oscilação em torno de uma posição de equilíbrio. Já a Figura 5 (b) apresenta um edifício com um amortecedor de massa sintonizada em formato de pêndulo duplo acoplado ao topo da estrutura. O dispositivo está contido em uma estrutura de proteção que permite ao AMS se movimentar para dissipar as forças externas.

1.3 Estrutura do trabalho

Este trabalho está dividido em cinco capítulos, finalizando com a bibliografia utilizada na pesquisa. Eles são:

Capítulo 1 - Introdução: Apresenta uma visão geral do assunto abordado, os objetivos da pesquisa e a estrutura da dissertação.

Capítulo 2 - Revisão de literatura: Nesta seção, é discutido sobre a mecânica dos pêndulos simples, duplos e do massa-mola acoplado ao pêndulo. É apresentada a equação diferencial que descreve o movimento do pêndulo simples, bem como as equações diferenciais que descrevem os movimentos do pêndulo duplo e do massa-mola acoplado ao pêndulo, derivadas por meio da mecânica lagrangeana.

Capítulo 3 - Metodologia da pesquisa: São apresentados todos os métodos utilizados para desenvolver a rotina computacional, levando em consideração aspectos como análise modal, frequência e modo de vibração da coluna, elemento de discretização da coluna, acoplamento do pêndulo à coluna e fluxograma do algoritmo.

Capítulo 4 - Resultados e discussões: São apresentados os resultados obtidos por meio da rotina computacional desenvolvida, expondo a validação do pêndulo simples e duplo, bem como do sistema de três graus de liberdade. São discutidos os resultados obtidos na validação das frequências naturais da estrutura e, por fim, é apresentada a escolha de ângulos aleatórios para os testes dos efeitos das forças dinâmicas sobre o elemento estudado.

Capítulo 5 - Conclusões: Nesta seção são apresentadas as conclusões da pesquisa, assim como suas contribuições para outras problemáticas e análises. A estrutura do trabalho está organizada de forma clara e objetiva, permitindo uma fácil compreensão do leitor.

2 Revisão de literatura

Neste capítulo, conduz-se uma investigação do sistema de pêndulos empregando o formalismo de Lagrange e os métodos de Newmark e Newton-Raphson. Diversos modelos e aplicações que envolvem pêndulos são encontrados na literatura científica. Dentre os modelos analisados, ressaltam-se os que se seguem.

2.1 Mecânica de Lagrange

Lagrange estabeleceu uma formulação de mecânica mais usual em comparação à de Newton, uma vez que essa nova abordagem utiliza escalares em vez de vetores, simplificando a resolução de sistemas descritos pela mecânica analítica (GOMES et al., 2021). Para um sistema dinâmico de N partículas, podemos escrever os trabalhos virtuais através do princípio de D'Alembert, que pode ser entendido como um equilíbrio de forças para cada instante de tempo:

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{f}_i) \delta \mathbf{r}_i = 0, \quad (2.1)$$

Aproveitando-se da característica que as forças de vínculo não realizam trabalho virtuais em sistemas holonômicos, podemos expandir $\mathbf{f}$ em $\mathbf{f} = \mathbf{f}^A + \mathbf{f}^V$:

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{f}_i^A) \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i^V \delta \mathbf{r}_i. \quad (2.2)$$

Mas $\sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i^V \delta \mathbf{r}_i$ sempre será zero. Portanto:

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{f}_i^A) \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (2.3)$$

A condição necessária e suficiente para que um sistema permaneça em equilíbrio é que seja nula a soma dos trabalhos virtuais das forças aplicadas ao sistema, num deslocamento reversível qualquer (OLIVEIRA, 2016).

Como o espaço de configuração é $(3N - m)$ dimensional, em função dos m vínculos, podemos tirar vantagem dessa característica na aplicação do princípio dos trabalhos virtuais (P.T.V). Passa-se, então, a examinar os benefícios da aplicação do P.T.V. com a redução de coordenadas admitidas no espaço de configuração. Definindo um vetor $\mathbf{r}_i$ ($i=1:N$ partículas) em termos do novo conjunto de n ($j=1:n$ coordenadas) coordenadas:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, t), \quad (2.4)$$

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_i, t). \quad (2.5)$$

Tomando a derivada de $\mathbf{r}_i$ em relação ao tempo:

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{v}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_3} \dot{q}_3 + \dots + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_n} \dot{q}_n, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}. \quad (2.7)$$

Ao derivar a última expressão em relação a $\dot{q}_j$, resta um único termo não nulo:

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}. \quad (2.8)$$

Agora precisa-se escrever $\partial \mathbf{r}_i$ em termos de coordenadas generalizadas. Para isso faz-se uma expansão de $\mathbf{r}_i(q + \partial q)$ em série de Taylor (em que $\partial \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q + \partial q) - \mathbf{r}_i(q)$). Tomando ∂q infinitesimal, os termos de ordem superior a 1 se anulam:

$$\partial \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (2.9)$$

Substituindo no P.T.V.:

$$\sum_{i=1}^N (m_i \mathbf{r}_i - \mathbf{f}_i^A) \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = 0. \quad (2.10)$$

A ordem da soma não faz diferença, portanto podemos deslocar a segunda para o início

$$\sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{f}_i^A) \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0. \quad (2.11)$$

Ao realizar a distributiva, tem-se:

$$\sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^N \left(m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} - \mathbf{f}_i^A \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \right] \delta q_j = 0. \quad (2.12)$$

Observando que o primeiro termo pode equivaler a:

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) = \ddot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} + \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j}. \quad (2.13)$$

O segundo termo da expressão acima é equivalente ao primeiro termo da equação anterior:

$$\ddot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = -\dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \left(\dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \quad (2.14)$$

Substituindo a equação 2.14 na equação 2.12:

$$0 = \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^N m_i \frac{d}{dt} \left(\dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) - \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i^A \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right]. \quad (2.15)$$

Como é sempre mais conveniente escrever a equação em termos de energia, pois é uma grandeza escalar, então, lembrando da definição de energia cinética:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{r}}_2 \dot{\mathbf{r}}_2 + \dots = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \dot{\mathbf{r}}_i. \quad (2.16)$$

Derivando T em relação a $\dot{q}_j$, tem-se:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \dot{\mathbf{r}}_i + \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}. \quad (2.17)$$

Lembrando que $\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}$, então:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}, \quad (2.18)$$

que é igual ao primeiro termo da expressão. Agora fazendo:

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j}, \quad (2.19)$$

que equivale ao segundo termo. Definindo "forças generalizadas" como:

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i^A \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}, \quad (2.20)$$

são as forças aplicadas na direção das coordenadas generalizadas. Então:

$$\sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j = 0, \quad (2.21)$$

como $\delta q_j \neq 0$, portanto:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = 0, \quad (2.22)$$

para todas as coordenadas generalizadas.

As primeiras equações 2.22 de Lagrange foram apresentadas acima. Elas podem ser aplicadas a quaisquer forças envolvidas no sistema (GOMES et al., 2021). Para forças conservativas, assume-se a existência de uma função das posições dos elementos $V = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t)$,

$$\mathbf{F} = -\nabla V. \quad (2.23)$$

Em que ∇ é o vetor gradiente:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y_i} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z_i} \mathbf{k} = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial z_i} \right) \quad (2.24)$$

Expandindo o produto escalar da (eq. 2.20), então:

$$Q_j = - \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_{i=1}^N \left(F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right). \quad (2.25)$$

E escrevendo as forças com a definição da (eq. 2.23):

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right). \quad (2.26)$$

Como $V = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N)$, é função dos vetores posição $\mathbf{r}$, então podemos escrever V em termos das coordenadas generalizadas. Observa-se que a expressão anterior representa a derivada parcial de V em relação a q_j , logo:

$$Q_j = \frac{\partial V}{\partial q_j}. \quad (2.27)$$

Finalmente,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0, \quad (2.28)$$

Quando além de forças conservativas, existe a presença de forças aplicadas externamente, então as forças generalizadas correspondentes são escritas no lado direito da equação.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = Q_j. \quad (2.29)$$

Definindo $L = T - V$ como função Lagrangeana, ou apenas, Lagrangeano, apresenta-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.30)$$

Essas equações representam um sistema de n equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, sendo n o número de graus de liberdade do sistema.

Após o desenvolvimento dessas equações por Lagrange, diversos trabalhos científicos foram realizados utilizando os benefícios do método, como a utilização mínima de coordenadas e a ausência explícita das forças de vínculo nas equações, o que facilita a resolução de problemas mecânicos. Outra vantagem é o emprego de variáveis escalares, uma vez que as energias cinética e potencial são variáveis escalares. Entre os estudos que serviram de referência para esta dissertação, destacam-se: [Cardoso \(2022\)](#), [Taylor \(2013\)](#), [Oliveira e Ladeira \(2016\)](#), [Aguilar \(2011\)](#), [Júnior \(2018\)](#), [França e Matsumura \(2011\)](#), [Lemos \(2007\)](#) e [Chabu \(2011\)](#).

2.2 Mecânica do pêndulo

Galileu Galilei foi um dos pioneiros na investigação do movimento pendular e na descoberta de sua regularidade, estabelecendo a relação entre o comprimento da haste do pêndulo e seu período de oscilação. A partir deste estudo inicial, diversos pesquisadores contribuíram para o avanço do conhecimento sobre o pêndulo e seus distintos tipos de movimento e comportamento.

[Vankó \(2006\)](#) conduziu uma pesquisa acerca do comportamento caótico de um pêndulo duplo, visando empregar tal experimento em laboratórios de ensino de física básica. Os resultados do estudo apontaram que o experimento com o pêndulo duplo pode ser uma ferramenta valiosa para a observação do movimento descrito pelas equações em relação à realidade.

[Christini, Collins e Linsay \(1996\)](#) realizaram um estudo sobre o controle experimental do caos de alta dimensão em um pêndulo duplo acionado, objetivando investigar as características do sistema dinâmico e as possibilidades de controlá-lo. Os resultados da pesquisa demonstraram que a análise do caos em sistemas de alta dimensão pode ser alcançada com sucesso por meio de técnicas experimentais.

De acordo com [Skeldon \(1994\)](#), o estudo da dinâmica de um pêndulo duplo excitado parametricamente pode ser útil para compreender fenômenos complexos, como ressonância

e instabilidade, em sistemas físicos. Os resultados do estudo podem ter aplicações em diversas áreas, incluindo engenharia e ciências naturais.

Jäckel e Mullin (1998) afirmam que um pêndulo duplo pode exibir um comportamento caótico quando excitado apropriadamente. A análise do sistema dinâmico revelou que o movimento do pêndulo duplo é altamente sensível às condições iniciais, característica marcante dos sistemas caóticos. Ademais, a pesquisa identificou algumas propriedades do caos no pêndulo duplo, como a presença de atrações estranhas e a auto-similaridade das trajetórias orbitais.

Shinbrot et al. (1992) corroboram que um pêndulo duplo pode apresentar um comportamento caótico quando excitado adequadamente. A análise do sistema dinâmico revelou que descrever o movimento do pêndulo duplo por meio de equações diferenciais é altamente trabalhoso. Além disso, a pesquisa realizou simulações numéricas em modelos idealizados que apresentaram bons resultados de convergência com os experimentos reais.

Levien e Tan (1993) conduziram um estudo sobre o comportamento caótico do pêndulo duplo, concluindo que esse experimento pode ser uma ferramenta útil para ensinar conceitos de física, como dinâmica não-linear e caos, além de estimular a curiosidade e o interesse dos estudantes em ciências da natureza. Os resultados da pesquisa demonstraram que, ao variar as condições iniciais do sistema, é possível obter uma ampla variedade de comportamentos dinâmicos, evidenciando a sensibilidade do sistema às perturbações externas e às condições iniciais.

Jafri (2003) realizou uma pesquisa sobre a análise e o controle das bifurcações em um pêndulo duplo, com o objetivo de investigar a dinâmica do sistema em diferentes condições. Os resultados da pesquisa indicaram que as bifurcações podem ser controladas por meio de técnicas de controle de estabilidade, o que é importante para o desenvolvimento de sistemas dinâmicos mais estáveis e confiáveis. Além disso, a análise detalhada das bifurcações pode fornecer informações valiosas sobre a dinâmica do sistema e suas propriedades emergentes, como ressonância e caos.

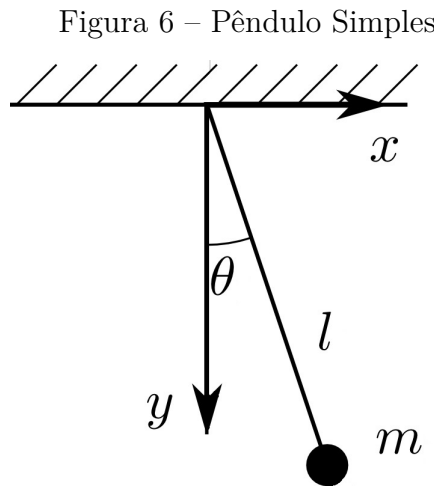
Zhou e Whiteman (1996) realizaram uma pesquisa sobre as diferentes formas de movimento de um pêndulo duplo, analisando os efeitos de parâmetros como massa, comprimento e ângulo inicial. Os resultados da pesquisa mostraram que o pêndulo duplo pode apresentar uma ampla variedade de movimentos, incluindo oscilações periódicas, quase periódicas e caóticas, dependendo das condições iniciais e dos parâmetros do sistema. Além disso, a pesquisa evidenciou que o pêndulo duplo é um exemplo interessante de sistema dinâmico não-linear, que pode ser utilizado para ensinar conceitos de física avançados.

Em resumo, a mecânica do pêndulo e o estudo do pêndulo duplo têm sido objeto de investigação de diversos pesquisadores ao longo dos anos. Esses estudos têm contribuído significativamente para o entendimento do comportamento e da dinâmica de sistemas

caóticos, bem como para o desenvolvimento de técnicas de controle e análise. A análise das propriedades e características desses sistemas fornece informações valiosas que podem ser aplicadas em diversas áreas, incluindo engenharia e ciências naturais.

2.2.1 O pêndulo simples

Um pêndulo simples consiste em uma massa pontual m suspensa por um fio inextensível, massa desprezível e comprimento l , que oscila livremente em torno de um ponto fixo (FIRMO, 2007). O movimento do pêndulo simples é determinado pela interação entre a força peso da massa e a tensão do fio, podendo ser descrito pelas equações de movimento de mecânica analítica (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2013). A Figura 6 ilustra a configuração de um pêndulo simples.



A descrição da posição da massa m usando-se coordenadas cartesianas (x, y) em função de θ , são:

$$x^2 + y^2 = l^2, \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} x &= l \sin \theta; & y &= l \cos \theta, \\ \dot{x} &= l \cos \theta \dot{\theta}; & \dot{y} &= -l \sin \theta \dot{\theta}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

O sistema apresentado na Figura 6 é não linear e possui uma força restauradora simétrica proporcional ao seno do ângulo θ . Para pequenas oscilações, é possível empregar uma aproximação linear (SANTOS et al., 2018). Portanto, ao modelar o sistema do pêndulo simples nota-se que x e y não são completamente independentes, pois a massa não pode mover-se livremente mas está sempre ligada à corda de comprimento l (SCHWICHTENBERG, 2019). Matematicamente, isso significa que existe o vínculo (eq. 2.31).

Sendo a L lagrangiana do pêndulo a subtração da energia cinética T pela energia potencial V do pêndulo simples. Portanto,

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy. \quad (2.33)$$

A equação de Lagrange é válida para qualquer escolha de sistema de coordenada. Contudo, substitui-se as coordenadas em função de θ na equação da lagrangeana 2.33,

$$L = \frac{1}{2}m \left[(l\cos\theta\dot{\theta})^2 + (-l\sin\theta\dot{\theta})^2 \right] + mgl\cos\theta. \quad (2.34)$$

Matematicamente, a lagrangia do pêndulo (eq.2.34) pode ser simplificada, sendo:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m \left[l^2\cos^2\theta\dot{\theta}^2 + l^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2 \right] + mgl\cos\theta \\ L &= \frac{1}{2}m \left[l^2\dot{\theta}^2 (\cos^2\theta + \sin^2\theta) \right] + mgl\cos\theta \\ L &= \frac{1}{2}m \left[l^2\dot{\theta}^2 \right] + mgl\cos\theta \\ L &= \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta \end{aligned} \quad (2.35)$$

Aplica-se agora a equação de Lagrange (eq. 2.30) para $q = \theta$:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right). \quad (2.36)$$

Ao substituir a equação 2.35 na equação 2.36, calculando as derivadas e reorganizando a equação, encontra-se:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0, \quad (2.37)$$

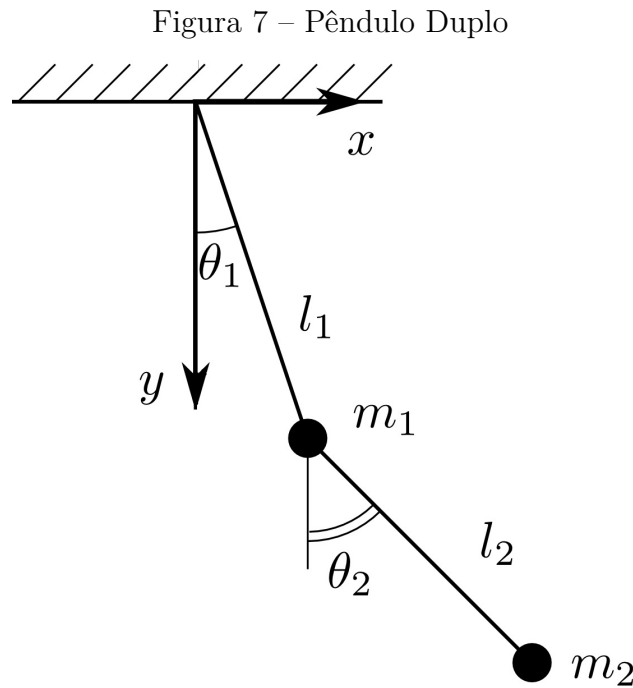
onde:

θ - é a posição angular; g - é a constante gravitacional; $\ddot{\theta}$ - é a aceleração angular e l - é o comprimento da hastes.

Em síntese, no formalismo lagrangiano ao encontrar as coordenadas adequadas para as quais os vínculos tornam-se trivialmente verdadeiros, ignora-se os vínculos. Isso ocorre porque os vínculos são implementados no formalismo lagrangiano usando multiplicadores de Lagrange e, para uma escolha adequada de coordenadas, os termos envolvendo os multiplicadores de Lagrange se anulam.

2.2.2 O pêndulo duplo amortecido

O pêndulo duplo é um sistema composto por duas massas acopladas a um pivô e interligadas por meio de suas extremidades, permitindo a rotação (AGRAWAL, 2001). As massas estão sujeitas à força restauradora causada pela gravidade. A Figura 7 apresenta o sistema de pêndulo duplo, no qual as massas m_1 e m_2 são conectadas por duas hastes rígidas de comprimento l_1 e l_2 . Os ângulos entre as hastes e o eixo vertical são denominados θ_1 e θ_2 .



Fonte: Autor

A mecânica Lagrangeana é uma abordagem matemática utilizada para obter as equações de movimento de sistemas físicos mais complexos, como o pêndulo duplo. Baseia-se no princípio da mínima ação, que estabelece que a trajetória real de um sistema é aquela que minimiza a ação, definida como a integral do lagrangiano do sistema ao longo do tempo.

No caso do pêndulo duplo, o lagrangiano é uma função que depende das posições e velocidades angulares das massas, bem como de seus momentos em relação ao pivô. A partir do lagrangiano, é possível aplicar as equações de Euler-Lagrange para obter as equações de movimento do sistema, que descrevem o comportamento das massas ao longo do tempo. A mecânica Lagrangeana é considerada uma abordagem simplificada para obter essas equações para o pêndulo duplo, tornando-se relevante para o estudo e análise desse sistema.

Ao calcular a energia cinética T do sistema, tem-se:

$$T = \frac{(m_1 + m_2)}{2} (l_1^2 \dot{\theta}_1^2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \frac{m_2}{2} (l_2^2 \dot{\theta}_2^2). \quad (2.38)$$

Obtendo a energia potencial V , tem-se:

$$V = -(m_1 + m_2)gl_1 \cos(\theta_1) - m_2 gl_2 \cos(\theta_2). \quad (2.39)$$

A lagrangeana, como é chamado o método por muitos pesquisadores, é obtida pela equação $L = T - V$. Ou seja, pela subtração da energia cinética T (eq. 2.38) pela energia potencial V (eq. 2.39), resultando na equação 2.40:

$$L = \frac{(m_1 + m_2)}{2} l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2} (l_2^2 \dot{\theta}_2^2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)gl_1 \cos\theta_1 + m_2 gl_2 \cos\theta_2. \quad (2.40)$$

A introdução do amortecimento pode resultar em equações de movimento mais elaboradas, onde essas equações fornecem informações valiosas sobre o comportamento do sistema em situações mais realistas. Para a dedução das equações, foram adotados amortecimentos lineares para as massas.

Após obter a lagrangeana (eq. 2.40), é possível derivar as equações diferenciais em relação a θ_1 e θ_2 .

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad (2.41)$$

Sendo: L - a lagrangeana (eq. 2.40); j - a coordenada generalizada variando de 1 até n , em que n é o número total de graus de liberdade; q - representa as variáveis em questão, em relação ao pêndulo duplo, $q = \theta$.

A primeira equação em relação a θ_1 é:

$$(m_1 + m_2)l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)gl_1 \sin\theta_1 + c_1 l_1^2 \dot{\theta}_1 = 0. \quad (2.42)$$

Usando a analogia para θ_2 , onde:

$$m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 gl_2 \sin\theta_2 + l_2^2 c_2 \dot{\theta}_2 = 0, \quad (2.43)$$

com:

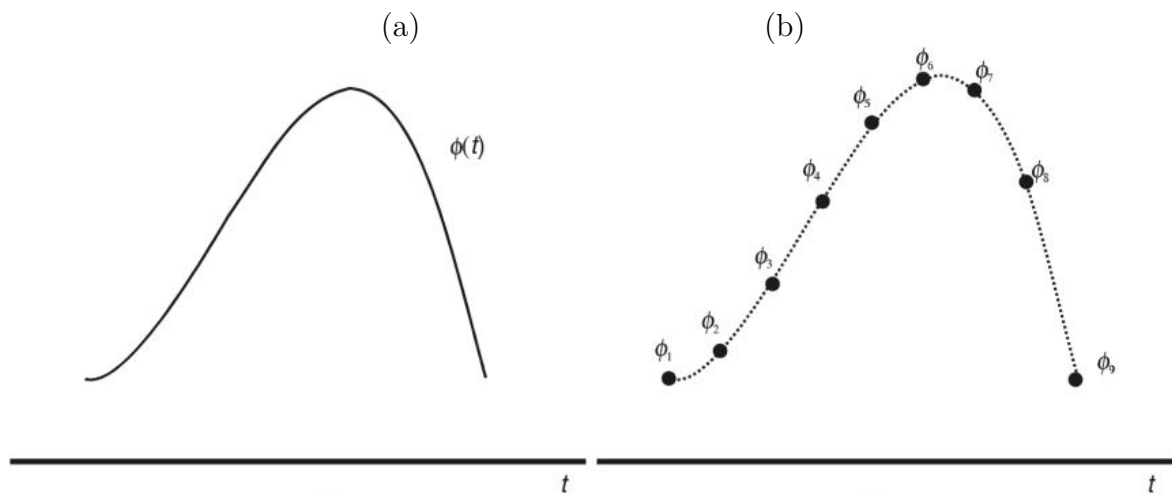
θ_j - Posição angular; $\dot{\theta}_j$ - Velocidade angular; $\ddot{\theta}_j$ - Aceleração angular; g - Constante gravitacional.

De posse das equações 2.42 e 2.43, tem-se um sistema de equações diferenciais que descreve as rotações dos pêndulos.

2.2.3 Solução numérica via Newmark - Newton/Raphson

Neste trabalho, apresentaremos o método de Newmark acoplado ao Newton-Raphson para determinar a solução das equações de movimento, conforme ilustrado na Figura 8.

Figura 8 – Solução do sistema dinâmico.

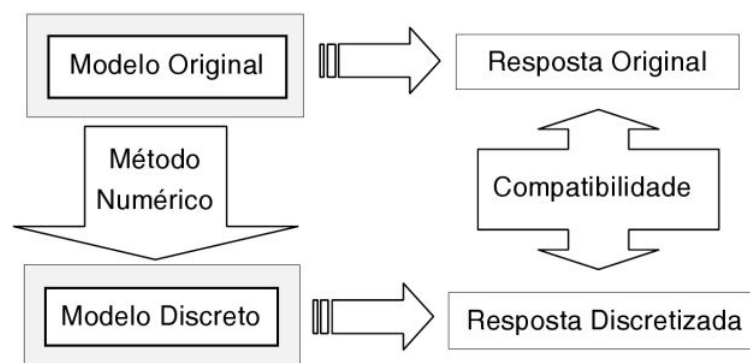


Fonte: Savi (2006).

Uma vez que a solução do sistema dinâmico $\phi(t)$ é apresentada em alguns pontos do domínio contínuo. Na Figura 8 (a), temos a solução contínua e, em (b), a solução numérica aproximada.

A solução numérica de um sistema é viabilizada pela idealização de um sistema análogo ao problema real. Nesse sentido, o sistema análogo utilizado precisa apresentar o mesmo comportamento descrito pelo modelo real, como mostrado na Figura 9.

Figura 9 – Esquema sobre a relação entre o modelo original proposto para descrever uma situação física e o modelo discreto associado ao modelo original.



Fonte: Savi (2006).

Thai e Kim (2011) ressaltam que, na análise dinâmica não linear pelo método de Newmark, a cada iteração i , ocorre um novo incremento de carga, resultando em incrementos de deslocamento $\boldsymbol{\theta}_{(i+1)}$ (eq. 2.44), velocidade $\dot{\boldsymbol{\theta}}_{(i+1)}$ (eq. 2.47) e aceleração $\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{(i+1)}$ (eq. 2.46), para um dado instante genérico $(i+1)$.

$$\boldsymbol{\theta}_{(i+1)} = \boldsymbol{\theta}_i + \dot{\boldsymbol{\theta}}_i \Delta t + \Delta t^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha_N \right) \ddot{\boldsymbol{\theta}}_i + \alpha_N \ddot{\boldsymbol{\theta}}_{(i+1)} \right], \quad (2.44)$$

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{(i+1)} = \ddot{\boldsymbol{\theta}}_i + \Delta t [(1 - \delta_N) \ddot{\boldsymbol{\theta}}_i + \delta_N \ddot{\boldsymbol{\theta}}_{(i+1)}]. \quad (2.45)$$

Com a equação 2.44 é possível determinar a aceleração $\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{(i+1)}$:

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{(i+1)} = \frac{1}{\alpha_N \Delta t^2} (\boldsymbol{\theta}_{(i+1)} - \boldsymbol{\theta}_i - \Delta t \dot{\boldsymbol{\theta}}_i) - \left(\frac{1}{2\alpha_N} - 1 \right) \ddot{\boldsymbol{\theta}}_i. \quad (2.46)$$

Substituindo (eq. 2.46) em (eq. 2.45), encontra-se a velocidade $\dot{\boldsymbol{\theta}}_{(i+1)}$:

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_{(i+1)} = \dot{\boldsymbol{\theta}}_i + \Delta t \left[(1 - \delta_N) \ddot{\boldsymbol{\theta}}_i + \frac{\delta_N}{\alpha_N \Delta t^2} (\boldsymbol{\theta}_{(i+1)} - \boldsymbol{\theta}_i - \Delta t \dot{\boldsymbol{\theta}}_i) - \delta_N \left(\frac{1}{2\delta_N} - 1 \right) \dot{\boldsymbol{\theta}}_i \right]. \quad (2.47)$$

Em conformidade com os valores conhecidos de i , dispõe-se de uma dependência entre as equações $\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{(i+1)}$ e $\dot{\boldsymbol{\theta}}_{(i+1)}$ em função de $\boldsymbol{\theta}_{(i+1)}$.

Ao desenvolver Newmark, efetua-se o particionamento das equações 2.42 e 2.43 em instantes genéricos $(i+1)$.

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_{1(i+1)} + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_{2(i+1)} \cos(\theta_{1(i+1)} - \theta_{2(i+1)}) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_{2(i+1)}^2 \sin(\theta_{1(i+1)} - \theta_{2(i+1)}) \\ + (m_1 + m_2) g l_1 \sin \theta_{1(i+1)} + c_1 l_1^2 \dot{\theta}_{1(i+1)} = 0 \end{aligned} \quad (2.48)$$

e

$$\begin{aligned} m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_{2(i+1)} + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_{1(i+1)} \cos(\theta_{1(i+1)} - \theta_{2(i+1)}) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_{1(i+1)}^2 \sin(\theta_{1(i+1)} - \theta_{2(i+1)}) \\ + m_2 g l_2 \sin \theta_{2(i+1)} + l_2^2 c_2 \dot{\theta}_{2(i+1)} = 0. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Consequentemente, em relação às equações 2.42 e 2.43, e conhecendo as condições iniciais, sendo o deslocamento inicial $\boldsymbol{\theta}(0)$ e velocidade inicial $\dot{\boldsymbol{\theta}}(0)$, é possível determinar a aceleração inicial $\ddot{\boldsymbol{\theta}}(0)$. Simplificam-se as equações 2.42 e 2.43 por l_1 e l_2 , respectivamente, e reorganiza-se na forma matricial:

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}}(0) = [\mathbf{A}](0)^{-1} \mathbf{B}(0). \quad (2.50)$$

Onde:

$$[A] = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)l_1 & m_2l_2\cos(\theta_1(0) - \theta_2(0)) \\ m_2l_1\cos(\theta_1(0) - \theta_2(0)) & m_2l_2 \end{bmatrix}, \quad (2.51)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -m_2l_2\sin(\theta_1(0) - \theta_2(0))\dot{\theta}_2^2(0) - (m_1 + m_2)g\sin(\theta_1(0)) - c_1l_1\dot{\theta}_1(0) \\ m_2l_1\sin(\theta_1(0) - \theta_2(0))\dot{\theta}_1^2(0) - m_2g\sin(\theta_2(0)) - l_2c_2\dot{\theta}_2(0) \end{bmatrix}. \quad (2.52)$$

Ao determinar a aceleração inicial $\ddot{\theta}(0)$ da equação 2.50, inicia-se o algoritmo incremental-iterativo. Por fim, denota-se uma função final e deriva-se em função de $\theta_{(i+1)}$ (eq. 2.44). Observa-se que as equações diferenciais foram substituídas por equações algébricas, uma vez que foram utilizadas as expressões de Newmark para relacionar $\ddot{\theta}_{(i+1)}$ (eq. 2.46) e $\dot{\theta}_{(i+1)}$ (eq. 2.47) com $\theta_{(i+1)}$ (eq. 2.44).

Pode-se concatenar as matrizes anteriores em uma única matriz, sendo:

$$\mathbf{F}_{(i+1)} = \begin{bmatrix} -(m_1 + m_2)l_1\ddot{\theta}_{1(i+1)} + m_2l_2\cos(\Delta\theta)\ddot{\theta}_{2(i+1)} + m_2l_2\sin(\Delta\theta)\dot{\theta}_{2(i+1)}^2 \\ \quad + (m_1 + m_2)g\sin(\theta_{1(i+1)}) + l_1c_1\dot{\theta}_{1(i+1)} \\ -m_2l_2\ddot{\theta}_{2(i+1)} + m_2l_1\cos(\Delta\theta)\ddot{\theta}_{1(i+1)} - m_2l_1\sin(\Delta\theta)\dot{\theta}_{1(i+1)}^2 \\ \quad + m_2g\sin(\theta_{2(i+1)}) + l_2c_2\dot{\theta}_{2(i+1)} \end{bmatrix}. \quad (2.53)$$

A equação (2.54) é uma simplificação para a diferença apresentada entre os ângulos θ .

$$\Delta\theta = \theta_{1(i+1)} - \theta_{2(i+1)}. \quad (2.54)$$

Devido à não linearidade, o método de Newton-Raphson pode ser aplicado. Assim, a função resíduo (Eq. (2.82)) é expandida em série de Taylor, onde i é o incremento e k a iteração:

$$(\mathbf{F}_{(i+1)})_{(k+1)} = (\mathbf{F}_{(i+1)})_k + \frac{\partial(\mathbf{F}_{(i+1)})_k}{\partial\theta_{(i+1)}}(\Delta\theta_{(i+1)})_{(k+1)} \cong 0, \quad (2.55)$$

$$(\mathbf{F}_{(i+1)})_k = -\frac{\partial(\mathbf{F}_{(i+1)})_k}{\partial\theta_{(i+1)}}(\Delta\theta_{(i+1)})_{(k+1)} \cong 0, \quad (2.56)$$

$$(\Delta\theta_{(i+1)})_{(k+1)} = -\frac{(\partial\mathbf{F}_{(i+1)})_k}{\frac{\partial(\mathbf{F}_{(i+1)})_k}{\partial\theta_{(i+1)}}}. \quad (2.57)$$

Faz-se necessário, então, calcular $\frac{\partial(\mathbf{F}_{(i+1)})_k}{\partial\theta_{(i+1)}}$. Nota-se que tem-se as equações (2.48) e (2.49) escrita em forma matricial e duas variáveis $\theta_{1(i+1)}$ e $\theta_{2(i+1)}$. Novamente, observa-se que as equações de Newmark (2.44) e (2.45) fornecem uma dependência de $\ddot{\theta}_{1,2(i+1)}$ e $\dot{\theta}_{1,2(i+1)}$ com $\theta_{1,2(i+1)}$.

Sendo assim, a matriz Jacobiana é expressa por:

$$[J](\theta_{(i+1)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{F}_{1(i+1)}}{\partial \theta_{1(i+1)}} & \frac{\partial \mathbf{F}_{1(i+1)}}{\partial \theta_{2(i+1)}} \\ \frac{\partial \mathbf{F}_{2(i+1)}}{\partial \theta_{1(i+1)}} & \frac{\partial \mathbf{F}_{2(i+1)}}{\partial \theta_{2(i+1)}} \end{bmatrix}. \quad (2.58)$$

Considerando que $\mathbf{F}_{(i+1)}$ (eq. 2.82) está escrita em forma de dois termos, podemos calcular separadamente. Para isso, é necessário utilizar regras de derivação, como a regra da cadeia, decorrente da relação de $\ddot{\theta}_{1,2(i+1)}$ e $\dot{\theta}_{1,2(i+1)}$ com $\theta_{1,2(i+1)}$, e a derivada do produto.

Com $\Delta(\boldsymbol{\theta}_{(i+1)})_{(k+1)}$ em cada iteração, calculamos as correções:

$$(\boldsymbol{\theta}_{(i+1)})_{(k+1)} = (\boldsymbol{\theta}_{(i+1)})_k + (\Delta\boldsymbol{\theta}_{(i+1)})_{(k+1)}, \quad (2.59)$$

$$(\dot{\boldsymbol{\theta}}_{(i+1)})_{(k+1)} = (\dot{\boldsymbol{\theta}}_{(i+1)})_k + \frac{\alpha}{\beta\Delta t}(\Delta\boldsymbol{\theta}_{(i+1)})_{(k+1)}, \quad (2.60)$$

$$(\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{(i+1)})_{(k+1)} = (\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{(i+1)})_k + \frac{1}{\beta\Delta t^2}(\Delta\boldsymbol{\theta}_{(i+1)})_{(k+1)}. \quad (2.61)$$

2.3 Mecânica do massa mola acoplado ao pêndulo duplo

Neste capítulo, são apresentados os conceitos teóricos envolvendo a conexão entre uma massa-mola e um pêndulo duplo. O comportamento dinâmico deste sistema será discutido, incluindo a abordagem de sistemas com mais graus de liberdade e a utilização de ferramentas matemáticas para a resolução destes problemas.

O sistema massa-mola juntamente com o pêndulo duplo apresenta comportamentos dinâmicos comuns, incluindo a trajetória desenvolvida pelo movimento em torno de uma posição de equilíbrio (TIPLER; MOSCA, 2020). De acordo com Halliday, Resnick e Krane (1984), estes dois tipos de movimento harmônico simples são amplamente estudados.

A composição mais simples do sistema massa-mola acoplada ao pêndulo duplo consiste em uma massa $\mathbf{m}$ conectada a uma mola de massa desprezível e constante elástica $\mathbf{k}$, que está fixa em um ponto e permite que a massa-mola se mova livremente na horizontal,

conectada ao pêndulo duplo. Este sistema, representado na Figura 10, pode ser utilizado para representar o comportamento dinâmico de componentes estruturais.

Para descrever o movimento harmônico do sistema, são utilizadas as seguintes grandezas: amplitude (A), frequência (f) e período (T). A amplitude mede a maior distância que o corpo oscilante pode alcançar em relação à posição de equilíbrio, sendo medida em metros (m) no sistema internacional (SI). A frequência representa o número de oscilações realizadas em cada unidade de tempo, sendo medida em Hertz (Hz) no sistema internacional. O período é o tempo gasto para completar uma oscilação, ou seja, o tempo necessário para o sistema passar pela posição de equilíbrio, sendo medido em segundos (s) no sistema internacional.

Ferramentas computacionais são importantes para a compreensão do movimento harmônico simples. Neste contexto, o autor dedicou-se a explorar os aspectos do movimento harmônico simples, especificamente do sistema massa-mola horizontal.

Vários estudos foram realizados para compreender a dinâmica de estruturas leves e flexíveis de edifícios altos submetidos aos efeitos dinâmicos do vento. Desses estudos, alguns se concentraram em compreender as complexidades associadas a essas estruturas. Por exemplo, [Trein \(2005\)](#) realizou um estudo experimental que utilizou túnel de vento com modelos reduzidos para simular situações reais e conduzir análises precisas. [Chávez \(2006\)](#) realizou uma análise dinâmica no domínio do tempo para avaliar os deslocamentos, acelerações e ações do vento em edifícios altos. [Teixeira et al. \(2015\)](#) realizaram um estudo sobre a resposta dinâmica de edifícios residenciais com alturas variando de 30 a 70 metros. [Oliveira \(2014\)](#) conduziu um estudo sobre o efeito do vento em edifícios altos, considerando a interação do vento com as estruturas.

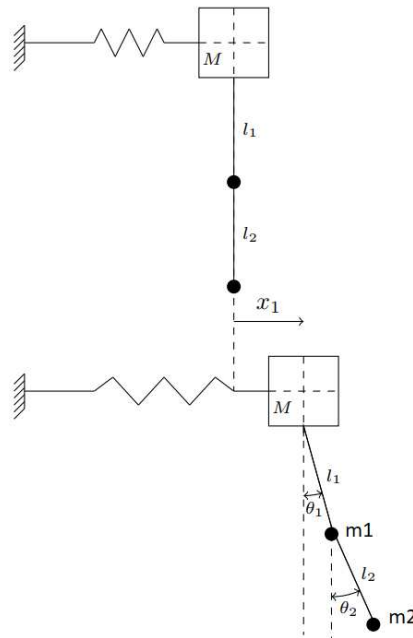
Outros estudos também se concentraram na aplicação de ferramentas computacionais para aprender e compreender o comportamento dinâmico dessas estruturas. Por exemplo, [Filho et al. \(2012\)](#) investigaram o comportamento estático e dinâmico de um edifício misto de 20 pavimentos construído em aço e concreto, utilizando técnicas de discretização e o sistema físico da massa mola, com o método dos elementos finitos. [Santos et al. \(2017\)](#) conduziram um estudo comparativo entre o método do vento sintético e o método Discreto NBR 6123 para análise de edifícios em concreto armado com múltiplos pavimentos. Em geral, os estudos mencionados acima têm como objetivo compreender a dinâmica dessas estruturas e fornecer dados precisos para a análise de edifícios altos sujeitos aos efeitos dinâmicos do vento. Além disso, muitos desses estudos utilizam o sistema massa-mola como base para a modelagem matemática, o que permite representar o comportamento dinâmico de peças estruturais.

2.3.1 Sistema com 3 graus de liberdade

Um sistema com três graus de liberdade é um modelo matemático que representa um sistema físico que possui três variáveis independentes que descrevem seu movimento no espaço e no tempo. Esse tipo de modelo é comumente usado em áreas como engenharia, física e matemática aplicada para descrever o comportamento de sistemas dinâmicos complexos (PAIN, 2005).

As deduções das equações do sistema com 3 graus de liberdade são análogas às deduções das equações que descrevem o pêndulo duplo apresentadas anteriormente. Para a compreensão sistemática de todo o processo, optou-se por desenvolver e ilustrar todo o desenvolvimento das equações.

Figura 10 – Representação do sistema massa-mola com pêndulo duplo acoplado.



Fonte: Autor

Ao obter as coordenadas generalizadas, tem-se:

$$v_{1x} = \dot{x}_1 = \dot{x} + l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1; \quad v_{1y} = \dot{y}_1 = -l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1, \quad (2.62)$$

$$v_{2x} = \dot{x}_2 = \dot{x} + l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2; \quad v_{2y} = \dot{y}_2 = -l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2, \quad (2.63)$$

$$v_{3x} = \dot{x}_3 = \dot{x}; \quad v_{3y} = \dot{y}_3 = 0. \quad (2.64)$$

Ao calcular a energia cinética T do sistema, tem-se:

$$T = \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{m_1(\dot{x}^2 + 2\dot{x}l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + l_1^2\dot{\theta}_1^2)}{2} + \frac{m_2(\dot{x}^2 + l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1\dot{\theta}_1l_2\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) + 2\dot{x}l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + 2\dot{x}l_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2)}{2}. \quad (2.65)$$

Obtendo a energia potencial V , tem-se:

$$V = \frac{Kx^2}{2} - (m_1 + m_2)gl_1\cos\theta_1 - m_2gl_2\cos\theta_2. \quad (2.66)$$

Ao desenvolver as equações em função de cada grau de liberdade do sistema.

Para θ_1 , toma-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0, \quad (2.67)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = m_1\dot{x}l_1\cos\theta_1 + m_1l_1^2\dot{\theta}_1 + m_2l_1^2\dot{\theta}_1 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2\dot{x}l_1\cos\theta_1, \quad (2.68)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) &= m_1\ddot{x}l_1\cos\theta_1 - m_1\dot{x}l_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1 + (m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2l_1l_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) \\ &\quad - m_2l_1l_2\dot{\theta}_2\dot{\theta}_1\sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2l_1l_2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2\ddot{x}l_1\cos\theta_1 - m_2\dot{x}l_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1, \end{aligned} \quad (2.69)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -m_1\dot{x}l_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1 - m_2l_1l_2\dot{\theta}_2\dot{\theta}_1\sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2\dot{x}l_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1 - (m_1 + m_2)gl_1\sin\theta_1, \quad (2.70)$$

Organizando a primeira equação, tem-se:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)\ddot{x}l_1\cos\theta_1 + (m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2l_1l_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2l_1l_2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1 - \theta_2) \\ + (m_1 + m_2)gl_1\sin\theta_1 + c_1l_1^2\dot{\theta}_1 = 0. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Para θ_2 , toma-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0, \quad (2.72)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2l_2^2\dot{\theta}_2 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2\dot{x}l_2\cos\theta_2, \quad (2.73)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) &= m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ &\quad + m_2 \ddot{x} l_2 \cos \theta_2 - m_2 \dot{x} l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2, \end{aligned} \quad (2.74)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2 \dot{x} l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 - m_2 g l_2 \sin \theta_2, \quad (2.75)$$

Ao organizar a segunda equação, tem-se:

$$\begin{aligned} m_2 \ddot{x} l_2 \cos \theta_2 + m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g l_2 \sin \theta_2 \\ + c_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 = 0. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Para x , toma-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad (2.77)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M \dot{x} + m_1 \dot{x} + m_1 l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + m_2 \dot{x} + m_2 l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + m_2 l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2, \quad (2.78)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) &= M \ddot{x} + m_1 \ddot{x} + m_1 l_1 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 - m_1 l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 + m_2 \ddot{x} + m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 \\ &\quad + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 - m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2, \end{aligned} \quad (2.79)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -Kx, \quad (2.80)$$

Organizando a terceira equação, tem-se:

$$\begin{aligned} (M + m_1 + m_2) \ddot{x} + (m_1 + m_2) l_1 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 - (m_1 + m_2) l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 \\ - m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 + kx + c_3 \dot{x} = 0. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Onde:

θ_j - é a posição angular; $\dot{\theta}_j$ - é a velocidade angular; $\ddot{\theta}_j$ - é a aceleração angular; $\ddot{x}$ - é a aceleração do massa mola; x - é a posição do massa mola; k - é a constante elástica da mola; g - é a constante gravitacional; c_j - é a constante de amortecimento; l_j - é o comprimento da haste dos pêndulos.

De posse das equações (2.71), (2.76) e (2.81), faz-se o particionamento delas na matriz $[A]$ e no vetor $\mathbf{B}$.

$$[A] = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)l_1^2 & m_2l_1l_2\cos(\theta_1(0) - \theta_2(0)) & (m_1 + m_2)l_1\cos(\theta_1(0)) \\ m_2l_1l_2\cos(\theta_1(0) - \theta_2(0)) & m_2l_2^2 & m_2l_2\cos(\theta_2(0)) \\ (m_1 + m_2)l_1\cos(\theta_1(0)) & m_2l_2\cos(\theta_2(0)) & (M + m_1 + m_2) \end{bmatrix}, \quad (2.82)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -m_2l_1l_2\sin(\theta_1(0) - \theta_2(0))\dot{\theta}_2^2(0) - (m_1 + m_2)l_1g\sin(\theta_1(0)) - c_1l_1^2\dot{\theta}_1(0) \\ +m_2l_1l_2\sin(\theta_1(0) - \theta_2(0))\dot{\theta}_1^2(0) - m_2l_2g\sin(\theta_2(0)) - c_2l_2^2\dot{\theta}_2(0) \\ (m_1 + m_2)l_1\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1(0)) + m_2l_2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1(0)) - Kx(0) - c_3\dot{x}(0) \end{bmatrix}, \quad (2.83)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)l_1\cos\theta_1\ddot{x} + (m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2l_1l_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\ddot{\theta}_2 + m_2l_1l_2\sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_2^2 \\ + (m_1 + m_2)l_1g\sin\theta_1 + c_1l_1^2\dot{\theta}_1 \\ m_2\ddot{x}l_2\cos\theta_2 + m_2l_1l_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\ddot{\theta}_1 + m_2l_2^2\ddot{\theta}_2 - m_2l_2l_1\sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1^2 + m_2l_2g\sin\theta_2 \\ + c_2l_2^2\dot{\theta}_2 \\ (M + m_1 + m_2)\ddot{x} + (m_1 + m_2)l_1\cos\theta_1\ddot{\theta}_1 + m_2l_2\cos\theta_2\ddot{\theta}_2 - (m_1 + m_2)l_1\dot{\theta}_1^2\sin\theta_1 \\ - m_2l_2\dot{\theta}_2^2\sin\theta_2 + Kx + c_3\dot{x} \end{bmatrix}. \quad (2.84)$$

Desenvolvendo-se a matriz Jacobiana:

$$[J]_{(3,3)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{F}_3}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \mathbf{F}_3}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \mathbf{F}_3}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (2.85)$$

2.3.2 Fluxograma do algoritmo

No início do processo, as equações são separadas em termos, utilizando-se a matriz $[A]$ e o vetor $\mathbf{B}$, onde a matriz $[A]$ é composta pelos termos relacionados à aceleração $\ddot{\theta}_{(j+1)}$. A fim de se resolver o sistema formado pelas equações diferenciais, é necessário convertê-lo em um sistema de equações algébricas. Isolando-se os termos em um sistema algébrico e resolvendo-o, são obtidas as acelerações iniciais.

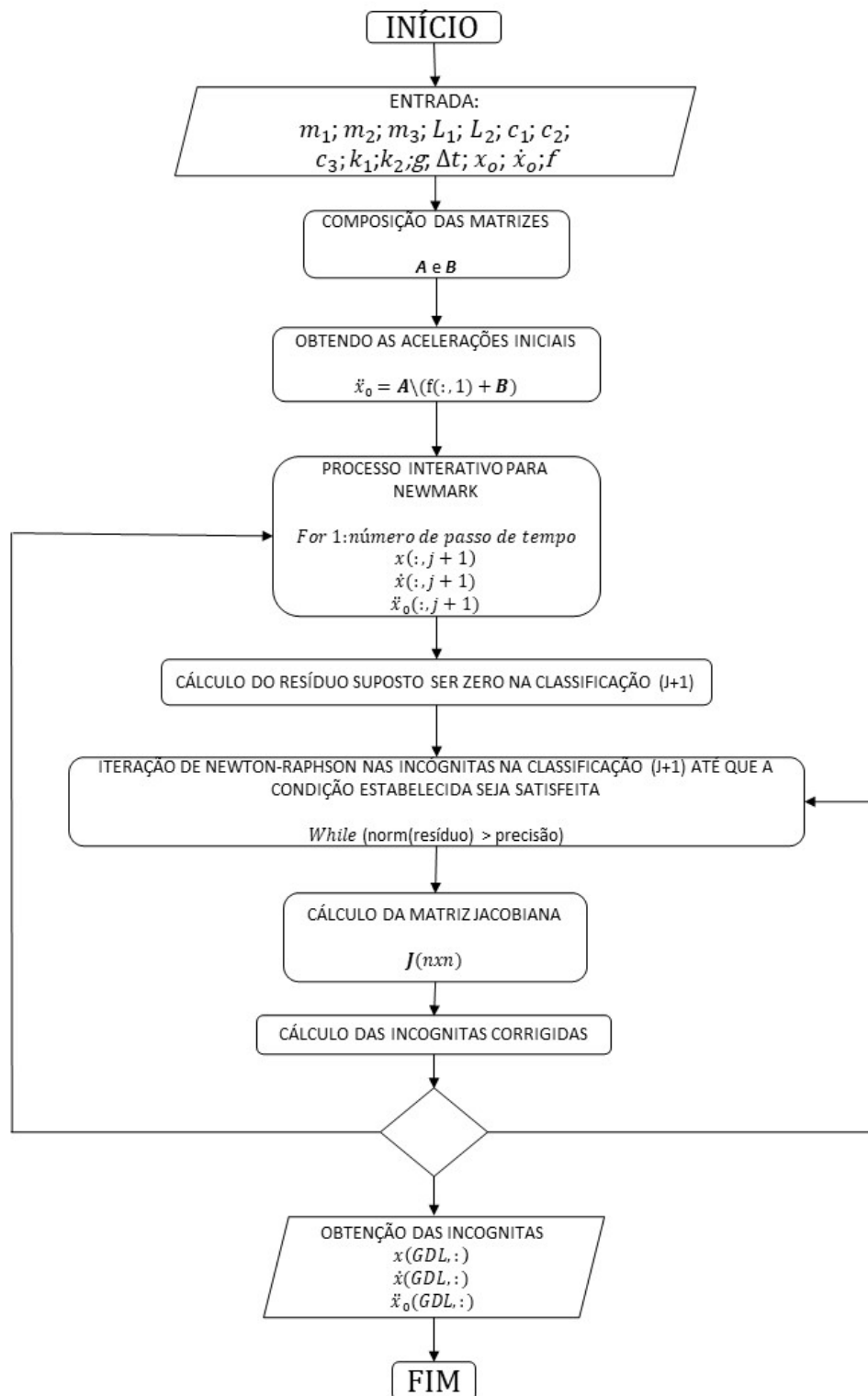
O passo subsequente do algoritmo consiste no processo iterativo de Newton-Raphson, até que a precisão definida pelo operador do algoritmo seja alcançada. A precisão é uma medida do grau de acurácia desejado no resultado obtido. Dentro do processo iterativo do método de Newton-Raphson, a matriz Jacobiana desempenha um papel importante. A matriz Jacobiana é a melhor aproximação linear de uma função diferenciável em torno de um ponto. Essa aproximação é de grande importância na computação numérica, onde a matriz Jacobiana e o seu determinante são usados para resolver sistemas não-lineares pelo método de Newton. Essencialmente, o Jacobiano define a relação dinâmica entre duas representações diferentes de um sistema.

O método de Newton-Raphson, no qual o Jacobiano está inserido, minimiza o valor da função de iteração no ponto fixo e acelera a convergência do método. Em resumo, a matriz Jacobiana é um conceito fundamental no cálculo numérico e o seu uso é crucial na resolução de sistemas não-lineares pelo método de Newton-Raphson. Durante o processo iterativo, o algoritmo é executado até que se atinja o passo de tempo desejado pelo operador do algoritmo. Ao final deste passo, os resultados obtidos são as respostas esperadas, incluindo a aceleração, velocidade e deslocamento do sistema analisado.

Sendo:

m_j - é a massa de cada item do sistema; l_j - é o comprimento das hastes dos pêndulos; c_j - é a constante de amortecimento dos pêndulos; $\ddot{x}$ - é a aceleração inicial do sistema; $\dot{x}$ - é a velocidade inicial do sistema; k - é a constante elástica da mola; g - é a constante gravitacional; f - é a força de excitação do sistema; $J(n \times n)$ - é a matriz Jacobiana.

Figura 11 – Fluxograma do algoritmo.



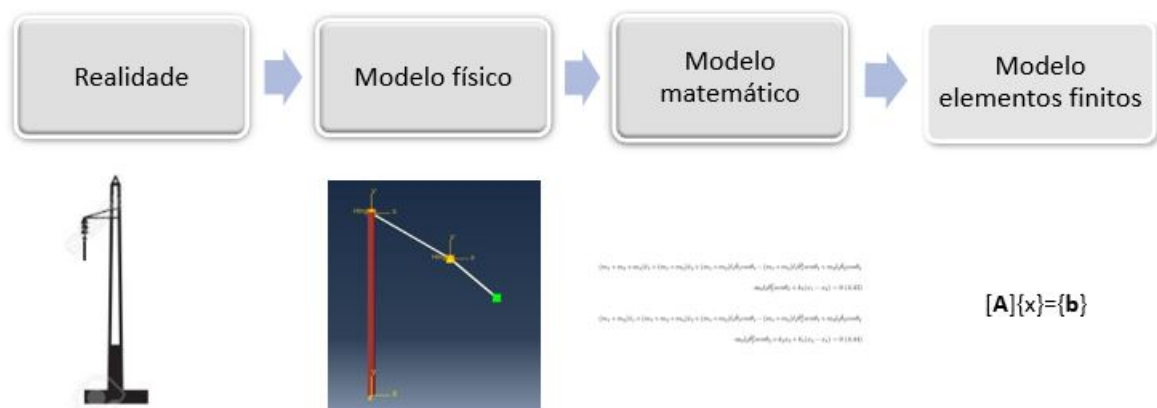
Fonte: Autor

3 Metodologia

Neste capítulo, apresentamos a discretização de uma coluna utilizando o método dos elementos finitos, bem como os procedimentos empregados para a obtenção das análises dinâmicas. A seleção da coluna para essas análises não restringe a aplicação da rotina computacional apenas a esse tipo de estrutura, sendo o comportamento físico da estrutura e sua discretização por elementos finitos os dois únicos requisitos para a realização deste estudo, conforme ilustrado na Figura 5.

A discretização da coluna visa simplificar a realidade. A evolução progressiva dos modelos evidencia a dificuldade em representar de forma precisa o mundo físico. Portanto, a análise de modelos mais simples orienta as análises mais elaboradas, como torres de transmissão e edifícios.

Figura 12 – Sequência de modelos aplicada à coluna aplocada ao pêndulo duplo



Fonte: Autor

Ao analisar a sequência apresentada na Figura 12, no início à esquerda, temos o modelo físico, a ideia real da estrutura, que depende da geometria, do material e da interação do corpo com o ambiente circundante. O modelo físico para esta pesquisa será uma coluna simples com um pêndulo acoplado ao seu topo. O próximo passo da sequência é a representação do modelo físico, onde são caracterizadas as leis físicas que descrevem a estrutura anterior. O modelo matemático é apresentado em seguida, sendo responsável pela dedução das equações diferenciais que descrevem os modelos físicos e as condições de contorno que viabilizam a resolução dessas equações. Por fim, é apresentado o modelo de elementos finitos, caracterizado pela resolução das equações diferenciais por meio de métodos numéricos.

3.1 Método dos elementos finitos

Ao examinar um sistema estrutural usando o método dos elementos finitos, uma estrutura contínua (reticulada, plana ou tridimensional) é aproximada por um conjunto de elementos finitos com geometria simples e propriedades conhecidas, conectados em nós. Ao longo do elemento finito, determina-se o deslocamento da estrutura com base nos deslocamentos dos nós desse elemento. Os deslocamentos dos nós tornam-se as incógnitas do problema, a partir dos quais se pode determinar qualquer tensão ao longo do sistema estrutural, como tensões e deformações. Partindo de um sistema de forças em equilíbrio com o sistema de tensões, obtém-se um conjunto de equações principais que descrevem o equilíbrio do elemento:

$$[K]_e \mathbf{u}_e = \mathbf{F}_e, \quad (3.1)$$

onde: $[K]$ é a matriz de rigidez do elemento local; $\mathbf{u}_e$ é o vetor de deslocamento do elemento local; $\mathbf{F}_e$ é o vetor de forças externas.

Ao agrupar os elementos associados aos mesmos graus de liberdade e introduzir as condições de contorno, obtém-se as condições de equilíbrio do sistema estrutural para o equilíbrio global, que pode ser reescritas na forma (SIMOES, 2015).

$$[K] \mathbf{u} = \mathbf{F}, \quad (3.2)$$

onde: $[K]$ é a matriz de rigidez global da estrutura; $\mathbf{u}$ é o vetor de deslocamento global da estrutura; $\mathbf{F}$ é o vetor de forças externas.

A primeira etapa do método dos elementos finitos envolve a definição do modelo numérico ou modelo de cálculo de análise da estrutura. O primeiro passo dessa etapa consiste em discretizar a estrutura a ser analisada, considerada como um domínio contínuo, em um conjunto discreto de elementos finitos interligados nos pontos nodais, denominado malha de elementos finitos. Em seguida, pode-se definir as propriedades do material, as condições de apoio e as condições de carregamento. A partir dos valores dos deslocamentos dos nós da malha de elementos finitos, calculam-se as deformações e tensões em nível elementar por meio das seguintes expressões (MARTINS, 2021).

3.1.1 Análise modal

Almeida (1990) afirma que toda estrutura possui infinitos modos naturais de vibração, sendo esses modos inerentes à composição estrutural. Entretanto, por meio da discretização, como no caso estudado pelo método dos elementos finitos, a estrutura apresenta um número finito de modos, igual ao número de graus de liberdade do modelo numérico.

A equação clássica de movimento é apresentada a seguir:

$$[M]\ddot{\mathbf{u}}_t + [C]\dot{\mathbf{u}}_t + [K]\mathbf{u}_t = \mathbf{F}, \quad (3.3)$$

onde: $[M]$ é a matriz de massa; $[C]$ é a matriz de amortecimento; $[K]$ é a matriz de rigidez; $\ddot{\mathbf{u}}_t$ é o vetor de aceleração; $\dot{\mathbf{u}}_t$ é o vetor de velocidade; $\mathbf{u}_t$ é o vetor de deslocamento; $\mathbf{F}$ é o vetor de forças externas.

A determinação dos modos naturais de vibração, também conhecidos como frequências naturais, pode ser realizada por meio da análise de vibrações livres, utilizando apenas as matrizes de massa e rigidez na equação de movimento. Portanto, a equação 3.3 é reescrita na forma:

$$[M]\ddot{\mathbf{u}}_t + [K]\mathbf{u}_t = 0. \quad (3.4)$$

Assumindo-se um movimento oscilatório livre como uma simples oscilação, o deslocamento no tempo pode ser expresso como:

$$\mathbf{u} = \phi \sin(\omega t + \varphi), \quad (3.5)$$

onde:

ϕ - é um vetor que expressa a forma modal de vibração;

ω - é a frequência de vibração;

φ - é o ângulo de fase.

Ao relacionar e substituir a equação 3.5 na equação 3.4, tem-se:

$$([K] - \omega^2[M])\phi = 0. \quad (3.6)$$

A equação 3.6 apresentada anteriormente, é um problema recorrente de autovetores e autovalores, onde ω^2 representam os autovalores, sendo eles as frequências naturais e o ϕ representa as formas modais de vibrações.

A raízes não-triviais para ϕ na equação 3.6, acontece se:

$$\det([K] - \omega^2[M]) = 0. \quad (3.7)$$

Assim, o determinante apresentado anteriormente apresenta as frequências e os modos de vibração em função de cada frequência.

Comitaneamente, [Sommer \(2002\)](#) reitera que para a elaboração da matriz de amortecimento $[C]$ para estruturas de n graus de liberdade, utiliza-se a formulação de Rayleigh:

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K]. \quad (3.8)$$

onde: $[C]$ é a matriz de amortecimento; $[M]$ é a matriz de massa; $[K]$ é a matriz de rigidez; α é a taxa de contribuição da matriz de massa; β é a taxa de contribuição da matriz de rigidez.

Assim, tem-se a matriz de amortecimento $[C]$, conhecida como matriz proporcional, devido à sua apresentação como matriz diagonal em uma transformação modal ([CLOUGH; PENZIEN, 1975](#)).

Por meio de operação algébrica na equação 3.8, obtém-se a expressão:

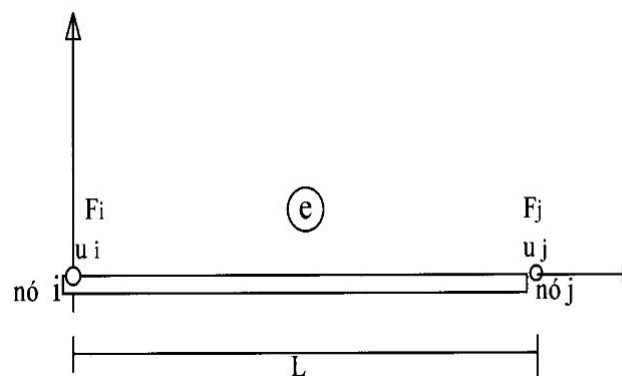
$$\zeta = \frac{\alpha}{2\phi_i} + \frac{\beta\phi_i}{2}, \quad (3.9)$$

onde: ζ_i é o fator de amortecimento associado a cada modo de vibração ϕ_i .

3.2 Elemento de discretização da coluna

A Análise Matricial de Estruturas e, conseqüentemente, o Método dos Elementos Finitos têm como fundamento inicial a relação entre forças e deslocamentos nodais para cada elemento individual. Essa ideia crucial está associada ao conceito de rigidez; assim, a obtenção das matrizes de rigidez e de massa referentes à coluna foram desenvolvidas como elementos de barras, conforme mostrado a seguir:

Figura 13 – Elemento de barra.



Fonte: Autor

$$[K] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

onde:

E - é o módulo de elasticidade longitudinal do aço;

I - é o momento de inércia da colua;

L - é o comprimento do elemento.

$$[M] = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & 3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

onde:

ρ - é a massa específica do material, em específico do aço;

A - é a área da seção transversal do elemento;

L - é o comprimento do elemento.

3.3 Fluxograma da análise da coluna

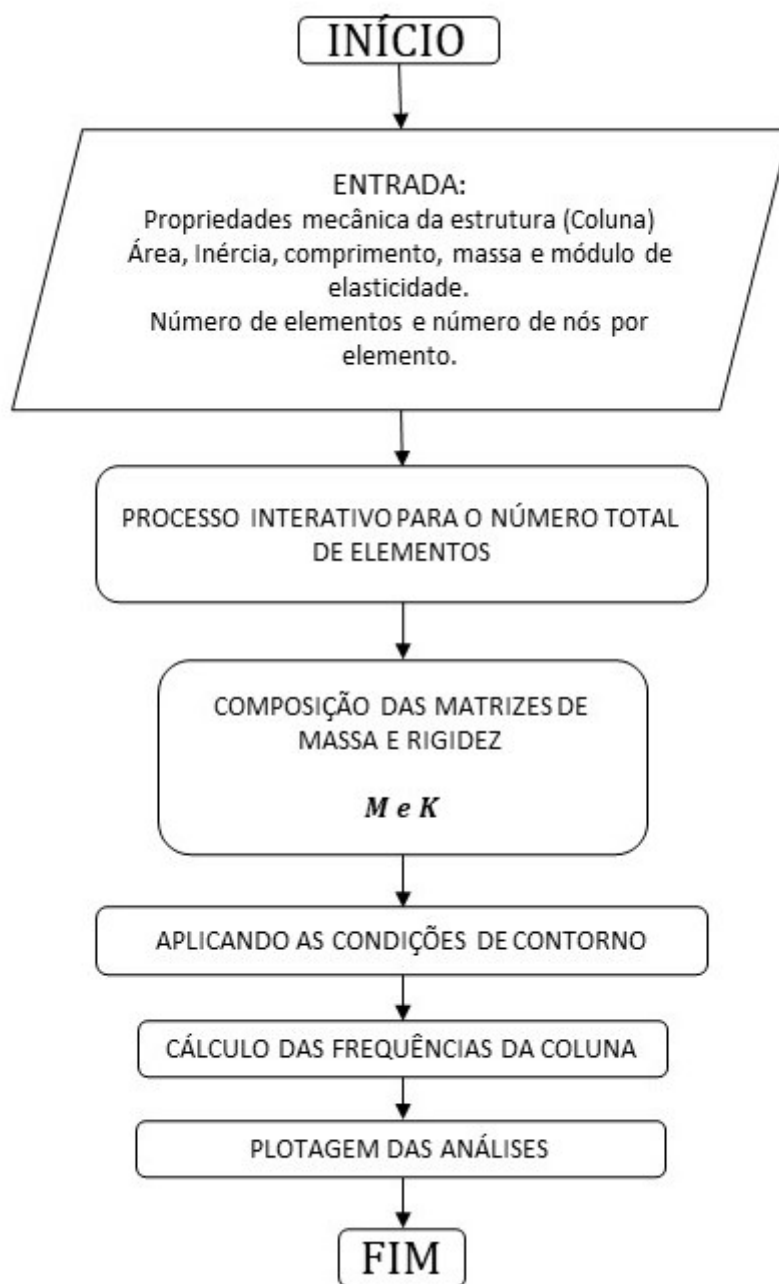
A Figura 14 apresenta um fluxograma ilustrando a análise da coluna por meio do Método dos Elementos Finitos.

O algoritmo inicia com a definição de condições iniciais pelo usuário, como propriedades do material, e executa um processo iterativo para criar o número total de elementos na estrutura, conforme especificado pelo usuário. Posteriormente, o algoritmo compila as matrizes de massa $[M]$ e de rigidez $[K]$, utilizando o capítulo de elemento de discretização da coluna como referência.

Assim que as matrizes $[M]$ e $[K]$ são geradas, as condições de contorno são aplicadas. Tais condições são dependentes do tipo de suporte ao qual a coluna está submetida. Neste caso, a coluna está apoiada com uma condição de engaste na extremidade inferior e livre na extremidade superior.

Por fim, os autovalores representando as frequências da estrutura e os autovetores expressando a maneira como a estrutura vibra quando excitada são extraídos.

Figura 14 – Fluxograma do algoritmo.



Fonte: Autor

onde:

 M : é a massa da coluna; K : é a rigidez da coluna.

3.4 Acoplamento do pêndulo à Coluna

Inicialmente, para acoplar o pêndulo à estrutura, é necessário reorganizar as equações do sistema massa-mola com pêndulo duplo no formato matricial.

A abordagem estrutural para acoplar o pêndulo à estrutura envolve a combinação das matrizes de massa e rigidez da coluna com as respectivas matrizes de massa e rigidez do pêndulo, conforme ilustrado nas figuras abaixo. É importante notar que a posição ao somar as matrizes respeita o grau de liberdade em que ocorre o contato entre o pêndulo e a estrutura, devido à discretização do problema.

Ao discretizar a coluna utilizando o método dos elementos finitos, o nó 12 foi identificado como o elemento de topo da estrutura, nó em que a acoplagem com o pêndulo será realizada, uma vez que o nó 12 também representa o deslocamento horizontal da estrutura.

Figura 15 – Matriz de massa generalizada.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \underbrace{M_{nó} + (m_1 + m_2)}_{(n \times n)} & (m_1 + m_2)l_1 \cos \theta_1 & m_2 l_2 \cos \theta_2 \\ \vdots & \dots & (m_1 + m_2)l_1 \cos \theta_1 & (m_1 + m_2)l_1^2 & m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ \vdots & \dots & m_2 l_2 \cos \theta_2 & m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & m_2 l_2^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \ddot{x}_{nó} \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

(n+2)x(n+2) (nx1)

Fonte: Autor

Figura 16 – Matriz de rigidez generalizada.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \underbrace{K_{estrutura}}_{(n \times n)} & -(m_1 + m_2)l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 / \theta_1 & (-m_2 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1) / \theta_2 \\ \vdots & \dots & \dots & ((m_1 + m_2)g l_1 \sin \theta_1) / \theta_1 & (m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)) / \theta_2 \\ \vdots & \dots & \dots & (-m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)) / \theta_1 & (m_2 g l_2 \sin \theta_2) / \theta_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ x_{nó} \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

(n+2)x(n+2) (nx1)

Fonte: Autor

sendo:

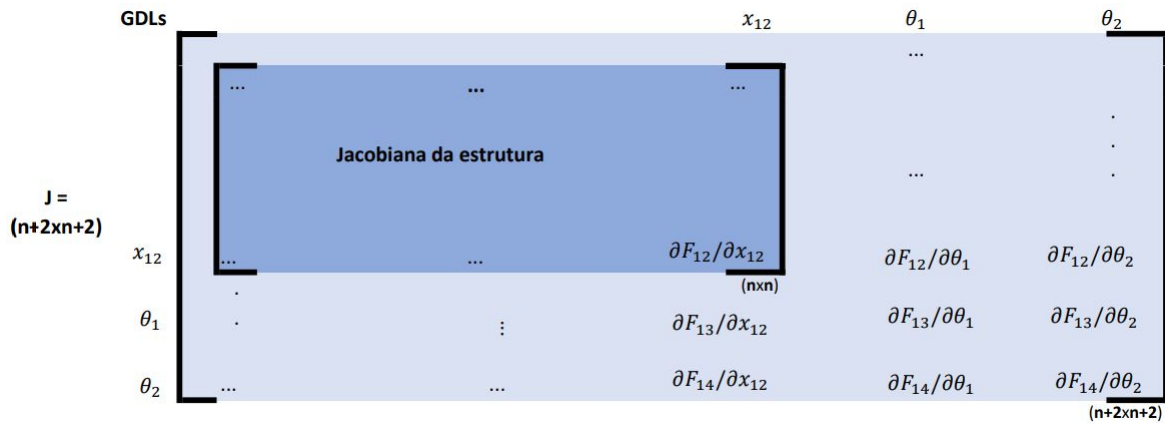
θ_j - Posição angular;

$\dot{\theta}_j$ - Velocidade angular;

- $\ddot{\theta}_j$ - Aceleração angular;
 $\ddot{x}$ - Aceleração do Nó em questão;
 x - Posição do Nó em questão;
 l_j - Comprimento das hastes;
 m - Massa dos elementos;
 g - Constante gravitacional.
 n - número de nós da estrutura discretizada.

É importante enfatizar que a matriz jacobiana desenvolvida anteriormente para tratar a não linearidade do pêndulo precisará contemplar toda a estrutura, incluindo a coluna que apresenta um comportamento linear. Isso pode ser observado na formação da matriz jacobiana, mostrada na Figura 17.

Figura 17 – Matriz Jacobiana.



Fonte: Autor

onde:

$GDLs$ - Graus de liberdades da estrutura com o pêndulo acoplado;

x_{12} - Deslocamento do nó localizado no topo da estrutura;

θ_1 - Posição angular do primeiro pêndulo;

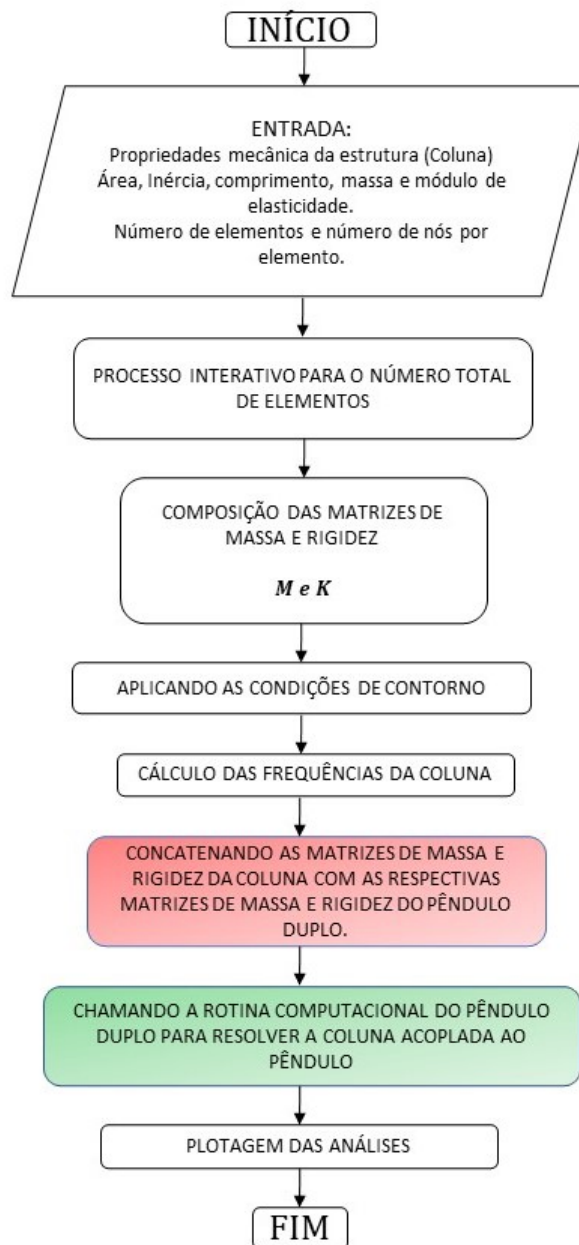
θ_2 - Posição angular do segundo pêndulo.

É relevante lembrar que a diagonal principal da matriz Jacobiana deve estar preenchida, considerando que o algoritmo utilizará a inversa da matriz Jacobiana.

3.4.1 Fluxograma do algoritmo

Finalmente, para proporcionar uma melhor compreensão da rotina computacional, apresenta-se um fluxograma ilustrando o procedimento de cálculo dos sistemas mencionados anteriormente.

Figura 18 – Fluxograma do algoritmo para acoplar o pêndulo à coluna.



Fonte: Autor

Neste contexto:

m - representa a massa da coluna; k - denota a rigidez da coluna.

A tarjeta vermelha ilustra a soma das matrizes de massa, conforme apresentado na Figura 15, e das matrizes de rigidez, conforme exibido na Figura 16.

4 Resultado e discussão

Para verificar a consistência da rotina computacional implementada em MATLAB, optou-se pelo *software ABAQUS* devido à familiaridade do autor. Os resultados dos problemas analisados são apresentados em gráficos que fornecem o deslocamento dos graus de liberdade em função do tempo. Essas análises estão relacionadas aos objetivos específicos do trabalho, que podem ser resumidos como:

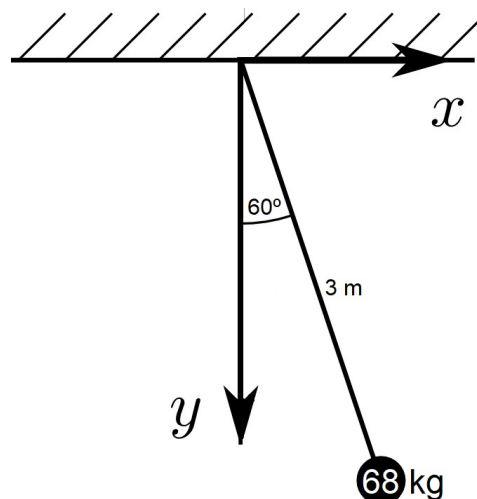
- validar o algoritmo em MATLAB para a análise do problema do pêndulo simples e do pêndulo duplo;
- validar o sistema de três graus de liberdade;
- validar a rotina computacional para a discretização de uma coluna usando o método dos elementos finitos;
- validar a acoplamento do pêndulo duplo à coluna por meio da variação das posições angulares iniciais.

4.1 Modelagem do pêndulo simples a 60°

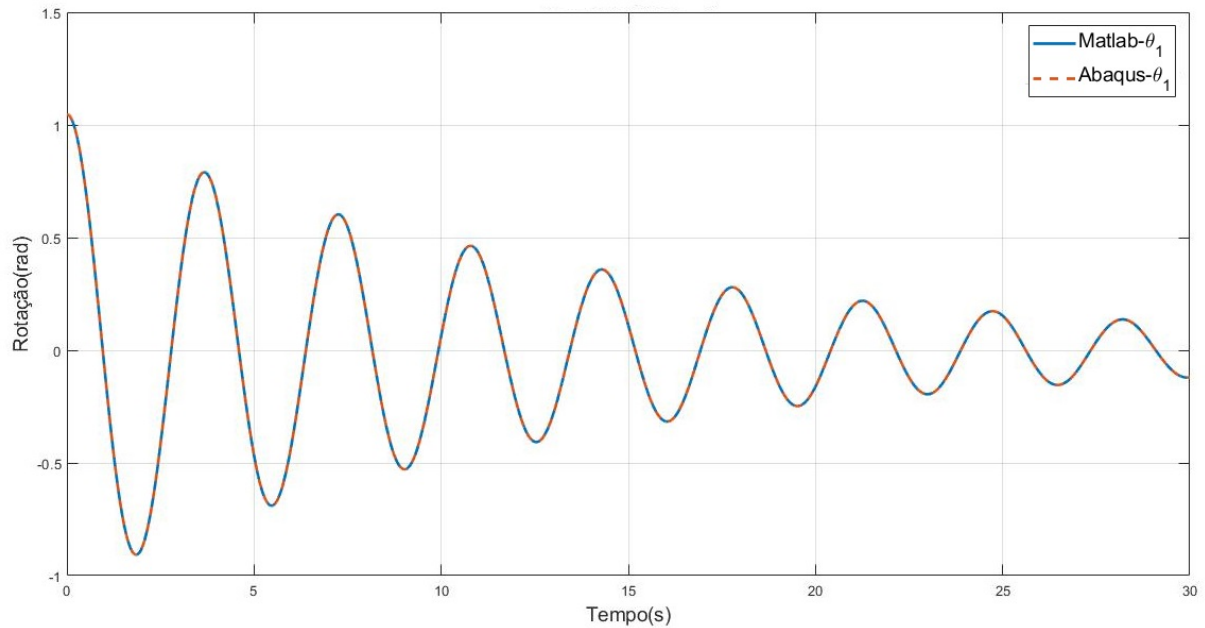
A Figura 19 apresenta a disposição do pêndulo. As condições iniciais para a análise do pêndulo simples são estabelecidas aleatoriamente.

Sendo: $m_1 = 68 \text{ kg}$, $l_1 = 3 \text{ m}$, $c_1 = 5 \text{ Ns/m}$, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, $\Delta t = 3e^{-4} \text{ s}$ e $\theta_1 = 60^\circ$.

Figura 19 – Representação gráfica do pêndulo simples com as configurações iniciais.



Fonte: Autor

Figura 20 – Evolução temporal de θ_1 validando o pêndulo simples

Fonte: Autor

Segundo [Arnold et al. \(2011\)](#), a força responsável pela diminuição das oscilações é proporcional à velocidade ($c\dot{x}$). A utilização das simulações possibilitou avaliar o comportamento do pêndulo, pois, ao analisar os resultados, observa-se que o algoritmo descreveu de maneira coerente as oscilações propostas neste estudo, justificando assim a importância do uso de simulações computacionais e ferramentas tecnológicas no estudo da dinâmica de sistemas lineares e não lineares ([WILLERS; KREMER; WEBLER, 1995](#)).

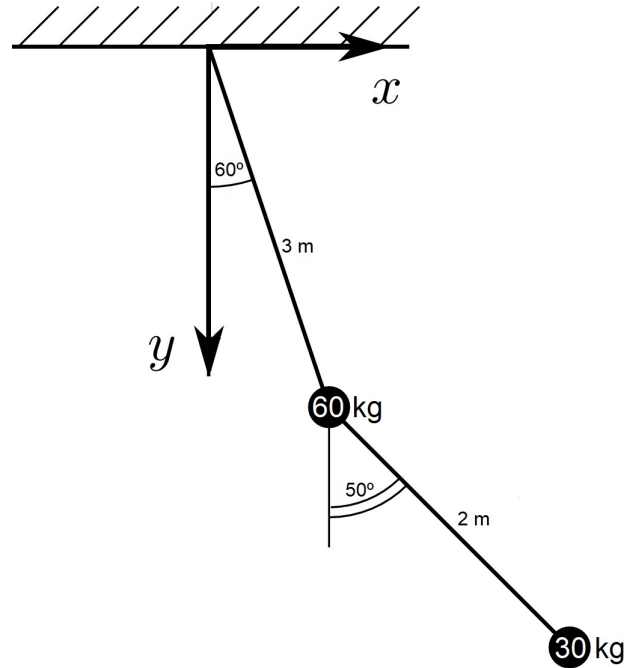
Durante o processo de validação do pêndulo simples, não foi constatada variação significativa nos resultados obtidos da rotina computacional em comparação ao *ABAQUS*. Observando o deslocamento da massa em função do tempo, é possível perceber a sobreposição dos resultados. Vale ressaltar que o algoritmo desenvolvido convergiu com o *ABAQUS*, usando como condição inicial um ângulo expressivo de 60° , que não pertence ao intervalo de linearização.

No entanto, por se tratar de um sistema simples, o algoritmo necessitaria de poucas iterações para a convergência da matriz Jacobiana a cada incremento de tempo. Para essa verificação, foi utilizado um contador para registrar a quantidade de iterações. O contador foi impresso em formato de vetor, sendo que cada posição desse vetor é preenchida pela quantidade de iterações na matriz Jacobiana. Essas iterações apresentaram valores pequenos, sendo que, no máximo, foram utilizadas três iterações para a convergência da matriz Jacobiana.

4.2 Modelagem do pêndulo duplo a 60° e 50°

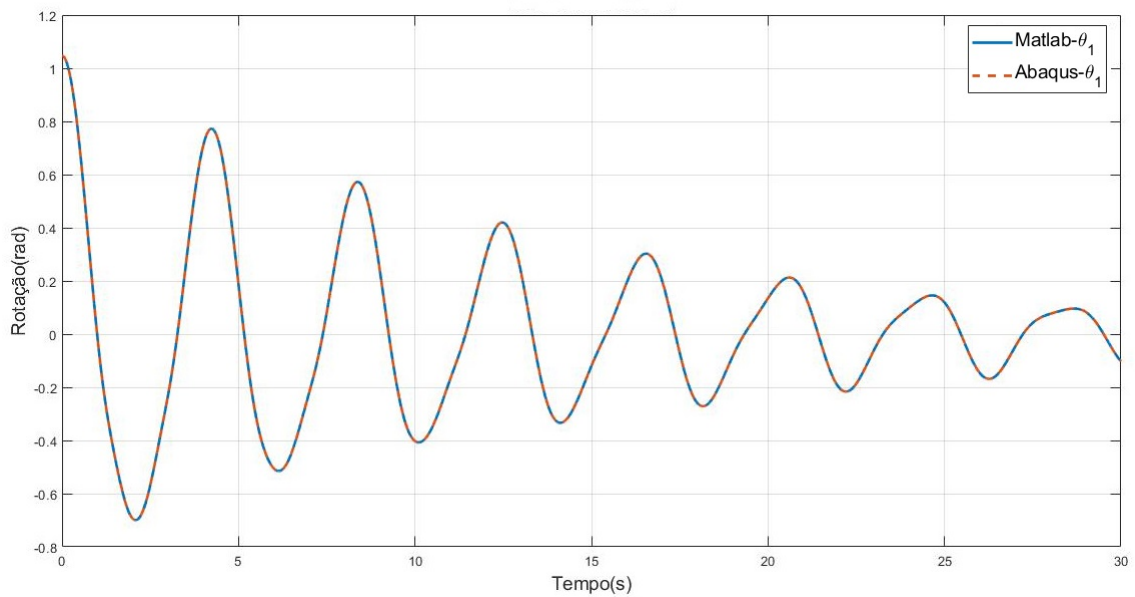
Ao considerar as seguintes condições iniciais: $m_1 = 60 \text{ kg}$, $m_2 = 30 \text{ kg}$, $l_1 = 3 \text{ m}$, $l_2 = 2 \text{ m}$, $c_1 = 5 \text{ Ns/m}$, $c_2 = 5 \text{ Ns/m}$, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, $\Delta t = 3e^{-4} \text{ s}$, $\theta_1 = 60^\circ$ e $\theta_2 = 50^\circ$.

Figura 21 – Representação gráfica do pêndulo duplo com as configurações iniciais

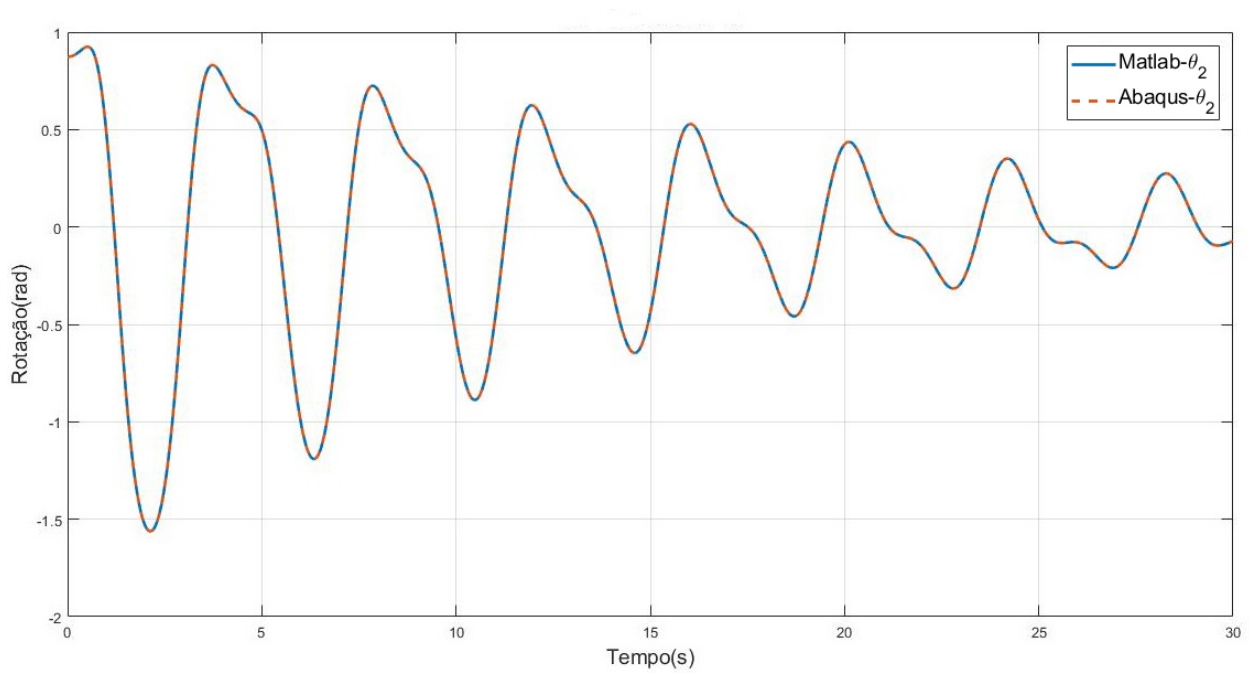


Fonte: Autor

Figura 22 – Evolução temporal de θ_1 validando o pêndulo simples



Fonte: Autor

Figura 23 – Evolução temporal de θ_2 validando o pêndulo duplo

Fonte: Autor

Sousa (2022) descreve a interferência observada entre as oscilações obtidas em simulações do pêndulo duplo, visto que um pêndulo gera perturbação no movimento do outro. No entanto, ainda é possível observar que as interferências apresentam uma certa simetria e que o segundo pêndulo sofre uma maior interferência por possuir uma massa menor que a primeira (BENVEGNI, 2016).

No caso do pêndulo duplo, os resultados apresentados indicam que o método de Newmark-Newton/Raphson é adequado para integrar as equações envolvidas no pêndulo duplo. O algoritmo convergiu de forma satisfatória, mesmo utilizando uma condição de parada rigorosa para Newton/Raphson na ordem de $1e^{11}$. Isso sugere que essa condição de parada poderia ser ajustada visando maior agilidade na obtenção dos resultados do pêndulo duplo.

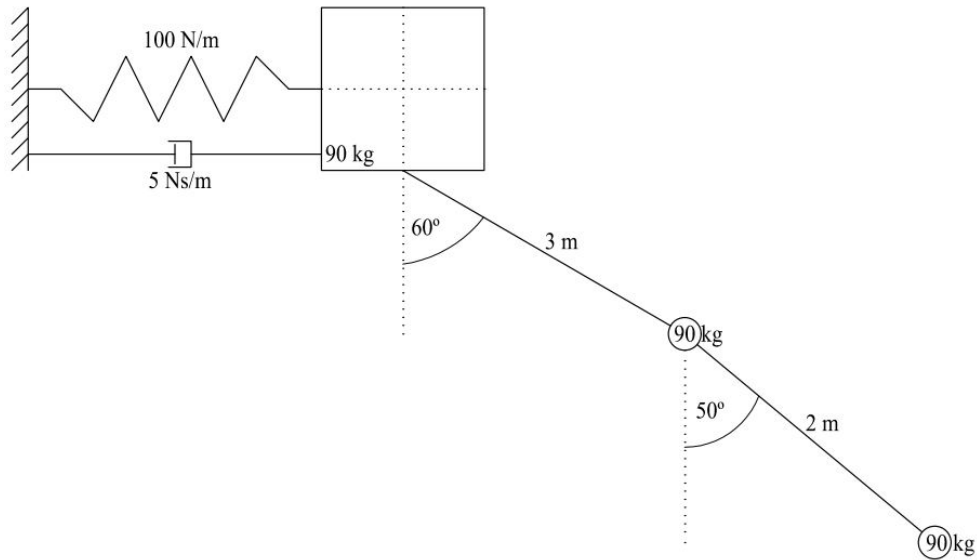
Outro aspecto interessante a destacar é o tempo gasto para a simulação do pêndulo duplo em MATLAB comparado ao *ABAQUS*, uma vez que a rotina desenvolvida em MATLAB apresentou um desempenho notável em relação ao *ABAQUS*. A eficiência em termos de tempo computacional já era esperada, pois a rotina computacional não possui interface gráfica para a visualização do pós-processamento, contando apenas com a exibição dos resultados plotados em forma de gráficos, como mostrado nas Figuras 22 e 23.

Por fim, é possível observar a redução da amplitude do movimento em função da constante de amortecimento.

4.3 Modelagem do massa mola acoplado ao pêndulo duplo

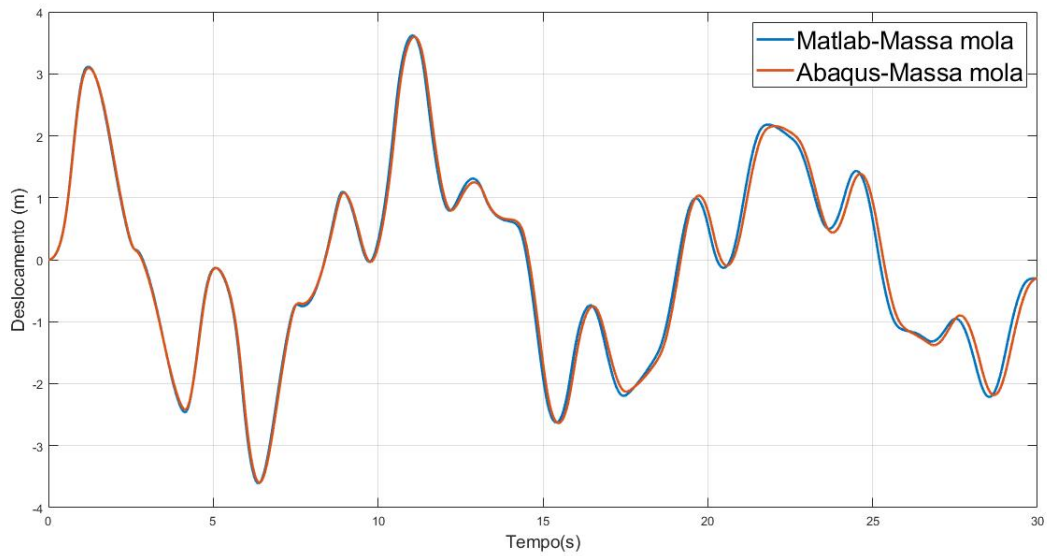
Devido à evolução gradativa da rotina computacional, este tópico apresenta a validação numérica do sistema de três graus de liberdade composto pelo sistema massa-mola e o pêndulo duplo. Considerando as seguintes condições iniciais totalmente aleatórias: $M_1 = 90 \text{ kg}$, $M_2 = 90 \text{ kg}$, $M = 90 \text{ kg}$, $l_1 = 3 \text{ m}$, $l_2 = 2 \text{ m}$, $K = 100 \text{ N/m}$, $c_1 = 5 \text{ Ns/m}$, $c_2 = 5 \text{ Ns/m}$, $c_3 = 10 \text{ Ns/m}$, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, $\Delta t = 3e^{-4} \text{ s}$, $\theta_1 = 60^\circ$ e $\theta_2 = 50^\circ$.

Figura 24 – Sistema com três graus de liberdade.

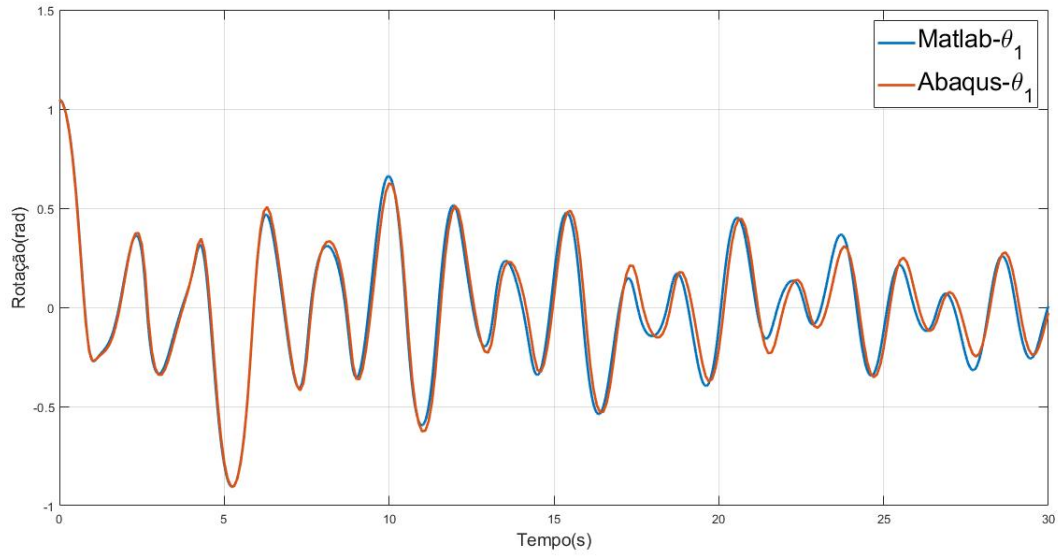


Fonte: Autor

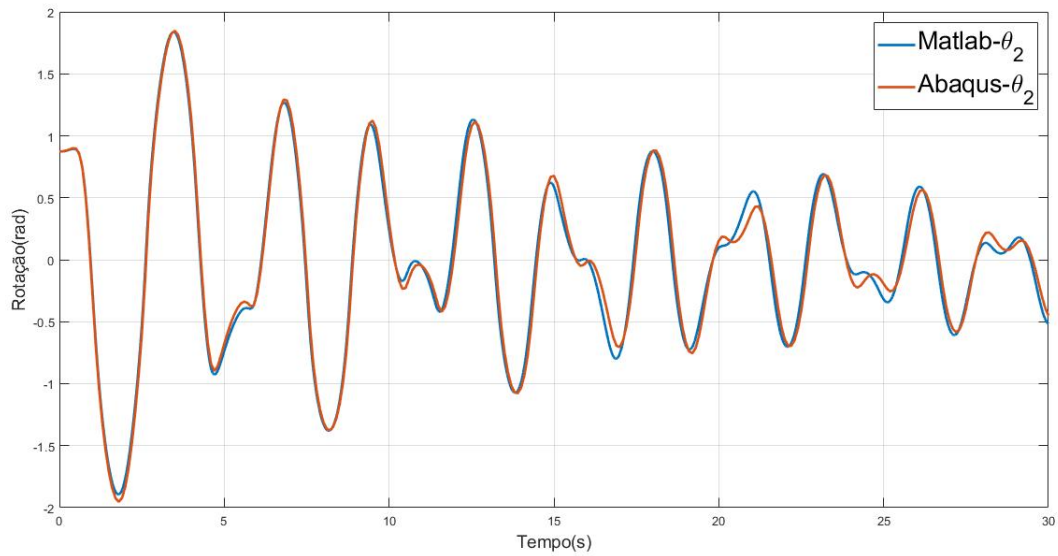
Figura 25 – Evolução temporal do Massa mola.



Fonte: Autor

Figura 26 – Evolução temporal do θ_1 .

Fonte: Autor

Figura 27 – Evolução temporal do θ_2 .

Fonte: Autor

[Silva et al. \(2010\)](#) relatam que há interferência entre o pêndulo duplo e o sistema massa-mola-amortecedor, sendo possível observar as distorções apresentadas na propagação em todos os percursos da evolução temporal do sistema. Recomenda-se que o algoritmo desenvolvido para analisar o pêndulo duplo sobre um carro possua as seguintes características: robustez para lidar com as não linearidades do modelo; projeto simples, uma vez que o sistema possui três graus de liberdade ([FIGUEIREDO; DANTAS,](#)).

O sistema massa-mola parte do ponto de repouso, sendo que as condições iniciais são aplicadas apenas ao pêndulo duplo, ou seja, o pêndulo que movimenta o sistema

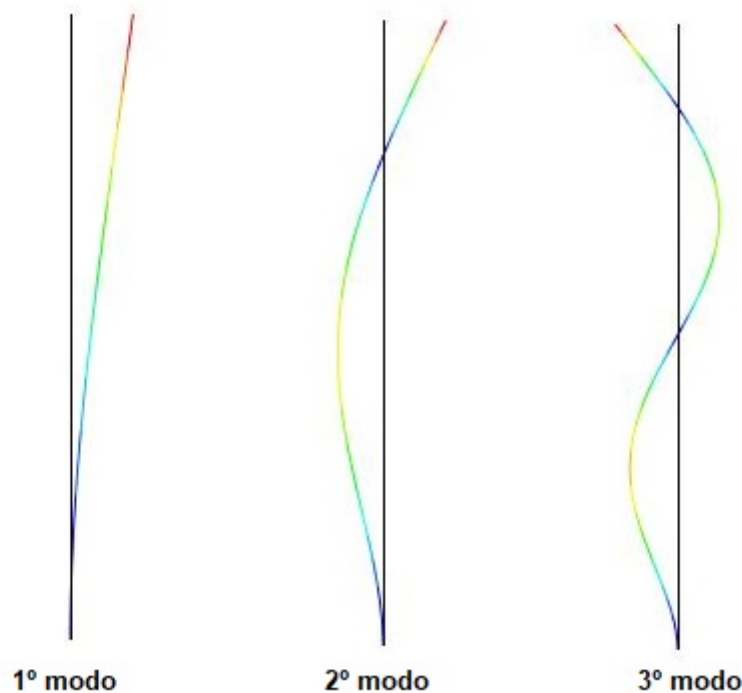
massa-mola. E, embora as posições angulares sejam as mesmas simuladas no pêndulo duplo anterior, a evolução temporal dos ângulos não apresentou semelhança com o caso do pêndulo isolado. Essa divergência é caracterizada pela interferência do movimento do sistema massa-mola no pêndulo.

4.4 Modelagem da coluna: frequência e modo de vibração

Para a determinação da frequência e do modo de vibração, emprega-se as matrizes de massa e rigidez. Dessa forma, a convergência dos resultados comprova a validação entre MATLAB e ABAQUS.

A tabela a seguir exibe os valores encontrados referentes às frequências de uma coluna de aço com módulo de elasticidade de 210 GPa , massa específica de 7850 kg/m^3 , comprimento de 6 metros e seção transversal de 20 cm por 30 cm .

Figura 28 – Modos de vibração da coluna 20 cm por 30 cm obtidos por meio do ABAQUS.



Fonte: Autor

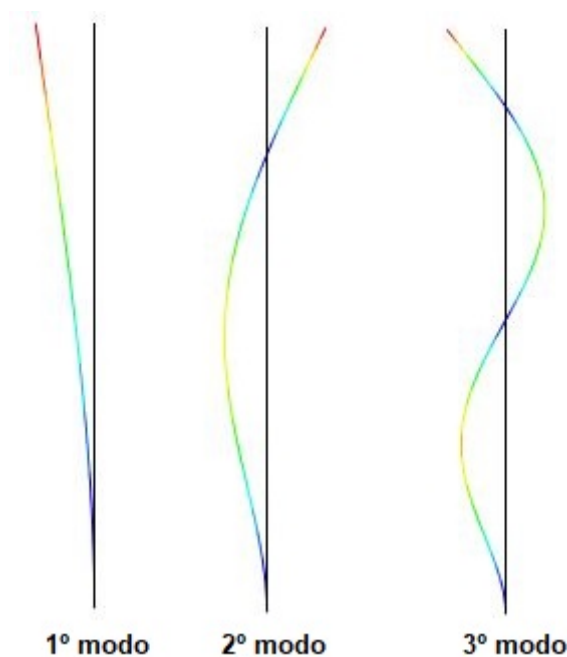
Tabela 1 – Abaqus x Matlab - Coluna $20 \times 30\text{ cm}$

Abaqus (Hz)	Matlab (Hz)	Erro absoluto (Hz)
6.7804	6.7949	0.0145
42.6	42.6038	0.0038
119.58	119.6606	0.0806

A quantidade de frequências naturais apresentadas é determinada pelo usuário. Neste exemplo, são mostradas as três frequências mais baixas da estrutura, apresentando um erro entre MATLAB e *ABAQUS* na casa de até 8%.

Por interesse de análises futuras, apresenta-se também as frequências e os modos de vibração para uma coluna com as mesmas características iniciais, variando apenas a seção transversal para um perfil circular de raio de 2 cm.

Figura 29 – - Modos de vibração da coluna de 2 cm de raio obtidos através do *ABAQUS*.



Fonte: Autor

Tabela 2 – Abaqus x Matlab - Coluna 2 cm de raio.

Abaqus (Hz)	Matlab (Hz)	Erro absoluto (Hz)
0.78449	0.7846	0.00011
4.9144	4.9195	0.0051
13.755	13.8172	0.0622

[Araujo et al. \(2010\)](#) apresentam frequências naturais de colunas de aço obtidas por análises de elementos finitos. Os dados demonstram modos de vibração semelhantes aos obtidos em *ABAQUS* nesta pesquisa. As frequências obtidas são diretamente proporcionais à massa da estrutura ([NINA, 2020](#)). Contudo, é possível observar essa diferença nas frequências da estrutura em função da mudança da característica geométrica da coluna.

É possível observar as frequências obtidas diretamente via *ABAQUS* no ANEXO A deste trabalho.

4.5 Modelagem do pêndulo duplo acoplado à coluna

Inicialmente, os ângulos foram selecionados aleatoriamente com a única finalidade de testar a robustez do algoritmo. A experimentação começou com ângulos baixos e progrediu até as condições iniciais com ângulos maiores. A configuração que provocou movimento na coluna refere-se à ideia de que, anteriormente, os pêndulos iniciaram o movimento e, com as configurações iniciais, o pêndulo foi capaz de mover a coluna em pequena amplitude. À medida que os ângulos aumentavam, a movimentação da coluna também aumentava.

A configuração que provocou movimento na coluna foi realizada com os pêndulos em condições iniciais de equilíbrio e, em seguida, a barra foi submetida a uma força. O objetivo era investigar a interação entre a barra e o pêndulo. Era conhecido que, quando o pêndulo entrava em movimento, ele movimentava a coluna e a questão era verificar se, ao mover a coluna, era possível mover o pêndulo. Essa análise está relacionada com o movimento resultante de uma ação externa que movimenta a estrutura e a estrutura transfere a oscilação para o pêndulo, cumprindo a função de dissipação dessas forças externas.

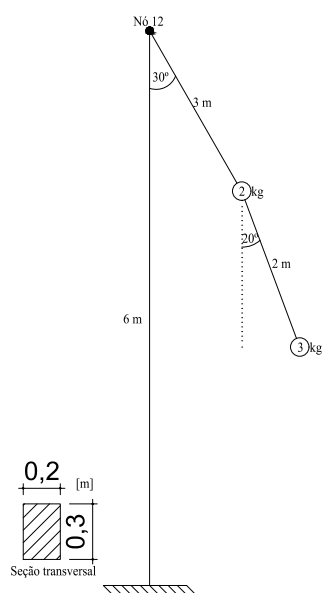
Segundo [Filho et al. \(2019\)](#), a resposta dinâmica de uma coluna submetida a uma carga dinâmica é apresentada por oscilações que variam em função das características físicas e geométricas. O deslocamento da coluna é condicionado à rigidez, assim, os maiores deslocamentos ocorrem para estruturas mais flexíveis.

[Boscolo \(2018\)](#) apresentou análises semelhantes às análises discutidas nesta seção. As respostas apresentadas são referentes a um pêndulo duplo em diversas configurações iniciais ligado a uma haste fixa. Os resultados correspondem aos resultados aqui apresentados.

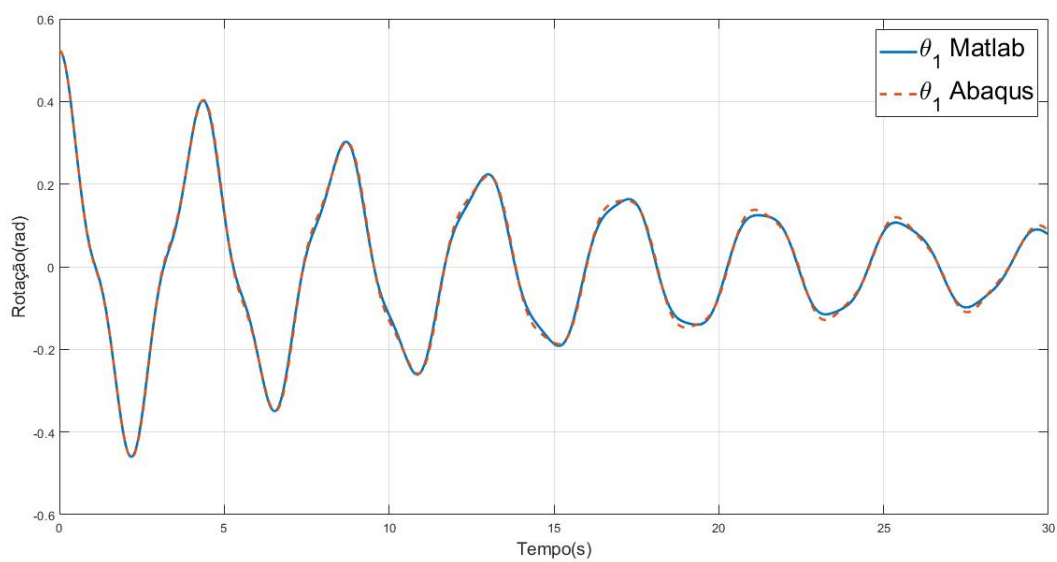
[Oliveira \(2012\)](#) realizou análises mais aprofundadas, visando observar parâmetros para dimensionar pêndulos duplos na condição de amortecedores de massa sintonizados. Essas análises resultaram em situações semelhantes às que foram analisadas aqui. Sendo possível atenuar o movimento da estrutura adotando um amortecimento ao pêndulo.

4.5.1 Coluna modelada com 2 pêndulos a 30° e 20°

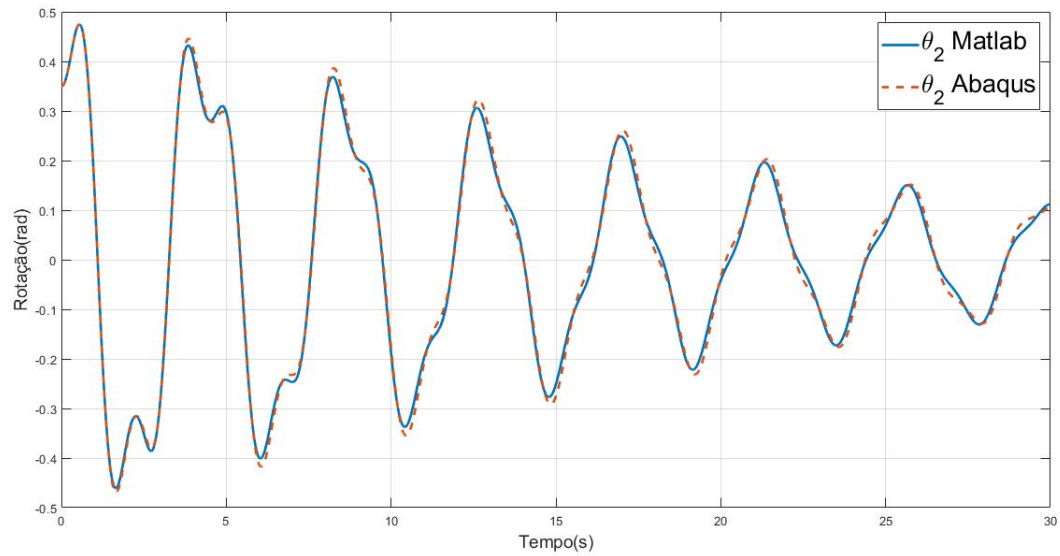
As configurações iniciais para modelar a coluna foram: seção retangular de 20 cm x 30 cm, material constituinte de aço, comprimento da coluna de 6 m, $\theta_1 = 30^\circ$, $\theta_2 = 20^\circ$, comprimento das hastes respectivamente iguais a 3 m e 2 m, primeira massa do pêndulo igual a 2 kg, segunda massa do pêndulo igual a 3 kg, coeficiente de amortecimento de $c_1 = 0,3 \text{ Ns/m}$, $c_2 = 0,3 \text{ Ns/m}$, $E = 210 \text{ GPa}$, gravidade igual a $9,81 \text{ m/s}^2$ e massa específica do aço = 7850 Kg/m^3 .

Figura 30 – Coluna modela com pêndulo duplo a 30° e 20° .

Fonte: Autor

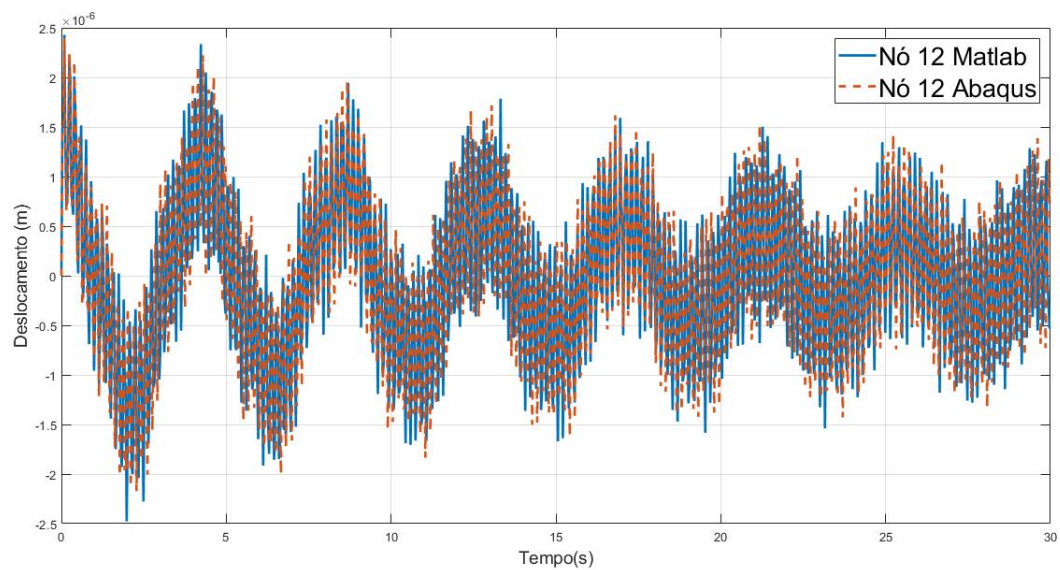
Figura 31 – Evolução temporal de θ_1 .

Fonte: Autor

Figura 32 – Evolução temporal de θ_2 .

Fonte: Autor

Figura 33 – Evolução temporal do Nó 12 referente a coluna.



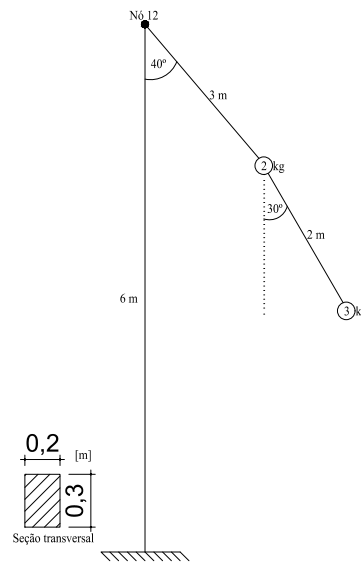
Fonte: Autor

Os ângulos iniciais foram selecionados de forma arbitrária, desde que atendessem ao requisito de estarem fora do regime linear. Fica claro que, devido à elevada rigidez da coluna e ao baixo peso do pêndulo, a oscilação da coluna é praticamente inexistente. Esses ângulos são de grande importância em estruturas reais, pois é crucial evitar que a estrutura oscile a ponto de permitir que os pêndulos ultrapassem essas condições iniciais.

4.5.2 Coluna modelada com 2 pêndulos a 40° e 30°

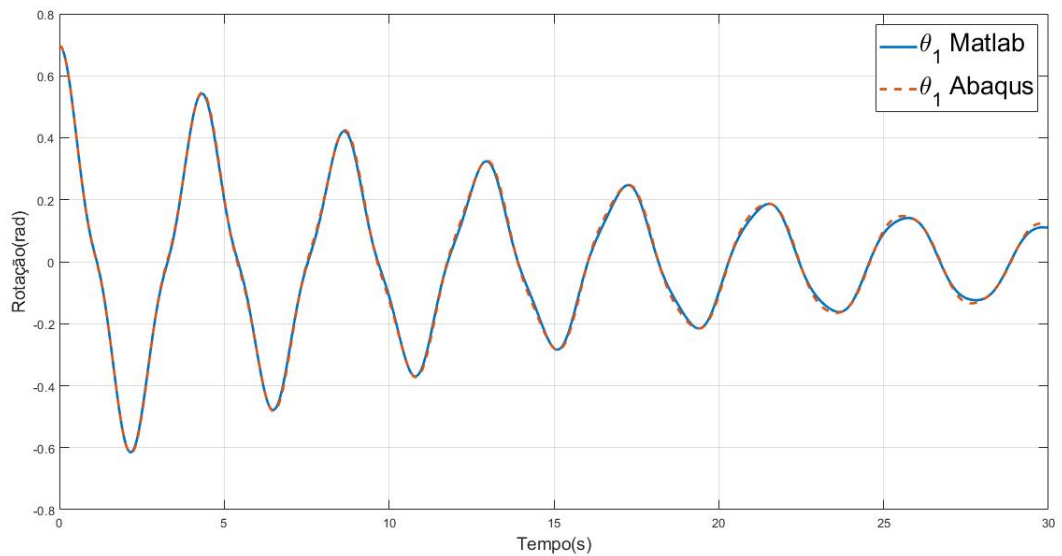
Considerando as condições iniciais a seguir: coluna com 30 cm por 20 cm , $E = 210\text{ GPa}$, massa específica do aço $= 7850\text{ Kg/m}^3$, $M_1 = 2\text{ kg}$, $M_2 = 3\text{ kg}$, $l_1 = 3\text{ m}$, $l_2 = 2\text{ m}$, $c_1 = 0,3\text{ Ns/m}$, $c_2 = 0,3\text{ Ns/m}$, $c_3 = 0,3\text{ Ns/m}$, $g = 9,81\text{ m/s}^2$, $\Delta t = 3e^{-4}\text{ s}$, $\theta_1 = 40^\circ$ e $\theta_2 = 30^\circ$.

Figura 34 – Coluna modelada com pêndulo duplo a 40° e 30° .

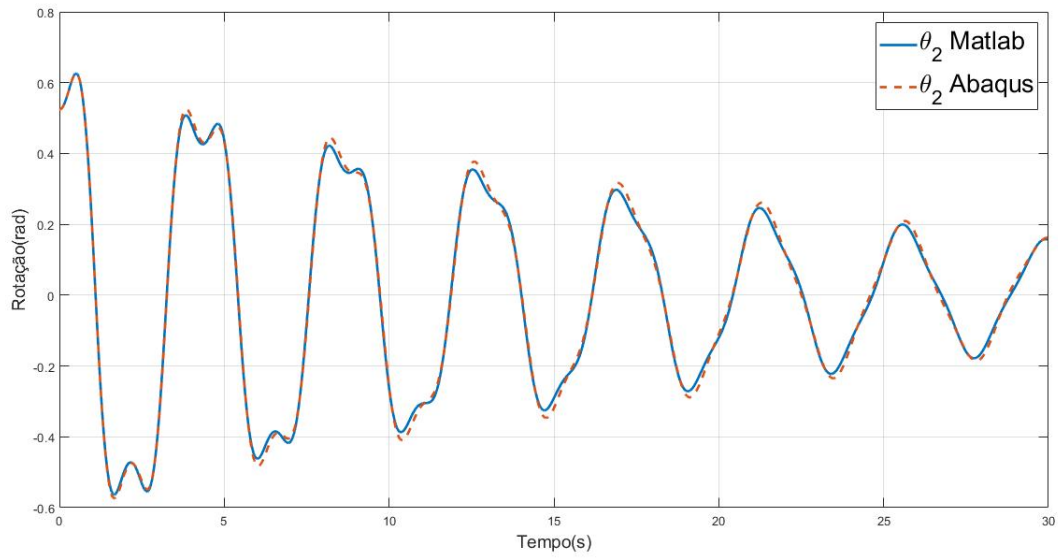


Fonte: Autor

Figura 35 – Evolução temporal do θ_1 .

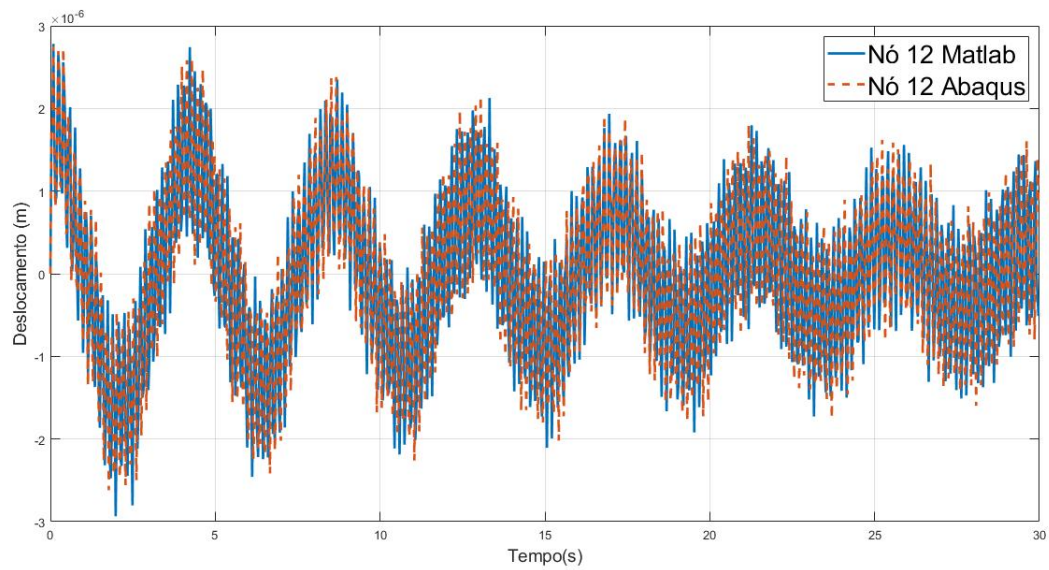


Fonte: Autor

Figura 36 – Evolução temporal do θ_2 .

Fonte: Autor

Figura 37 – Evolução temporal do Nó 12 da coluna.



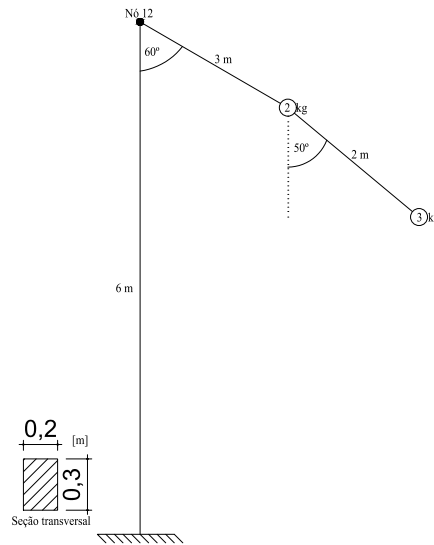
Fonte: Autor

Gradualmente, os ângulos iniciais foram ajustados para aumentar o grau de não linearidade dos pêndulos. Devido ao pequeno deslocamento do nó 12, é possível observar o comportamento inalterado do pêndulo duplo. Isso implica que, ao modelar apenas o pêndulo duplo com as mesmas condições iniciais, os resultados serão os mesmos para θ_1 e θ_2 , devido à mínima influência da coluna no pêndulo em função de sua alta rigidez.

4.5.3 Coluna modelada com 2 pêndulos a 60° e 50° .

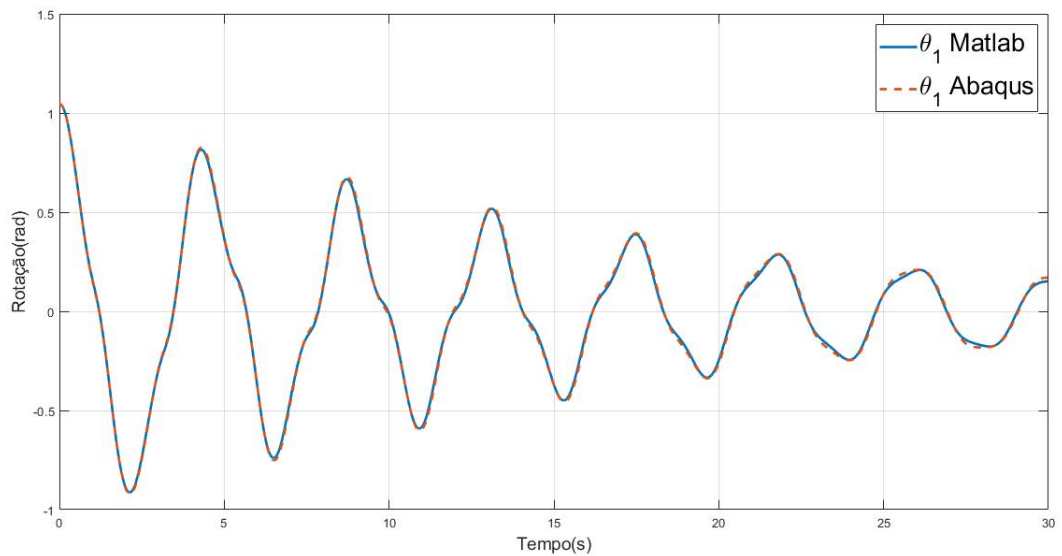
Ao considerar as seguintes condições iniciais: Coluna com 30 cm por 20 cm , $E = 210\text{ GPa}$, massa específica do aço $= 7850\text{ Kg/m}^3$, $M_1 = 2\text{ kg}$, $M_2 = 3\text{ kg}$, $l_1 = 3\text{ m}$, $l_2 = 2\text{ m}$, $c_1 = 0,3\text{ Ns/m}$, $c_2 = 0,3\text{ Ns/m}$, $c_3 = 0,3\text{ Ns/m}$, $g = 9,81\text{ m/s}^2$, $\Delta t = 3e^{-4}\text{ s}$, $\theta_1 = 60^\circ$ e $\theta_2 = 50^\circ$.

Figura 38 – Coluna modelada com pêndulo duplo a 60° e 50° .

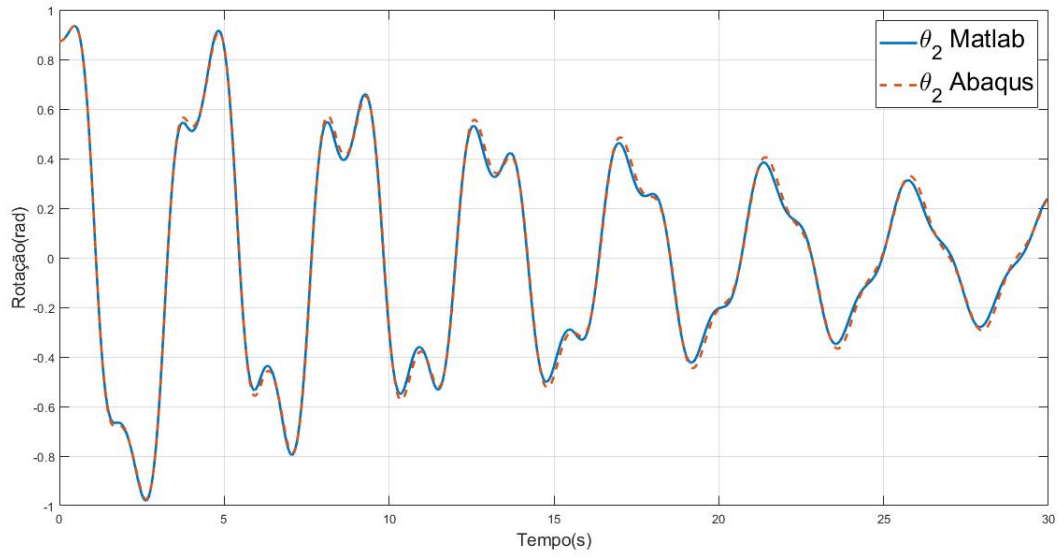


Fonte: Autor

Figura 39 – Evolução temporal de θ_1 .

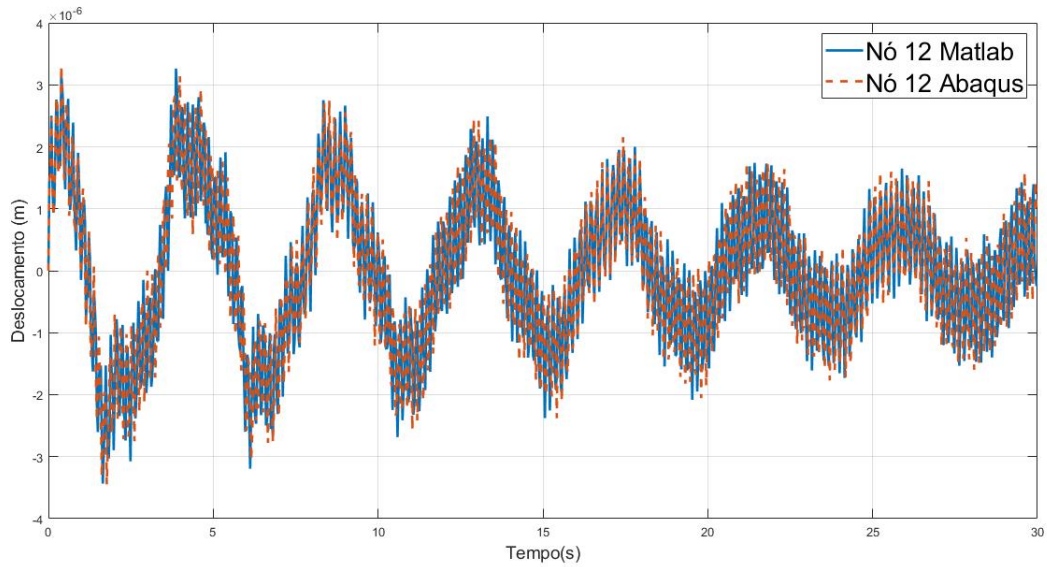


Fonte: Autor

Figura 40 – Evolução temporal de θ_2 .

Fonte: Autor

Figura 41 – Evolução temporal do Nó 12 da coluna.



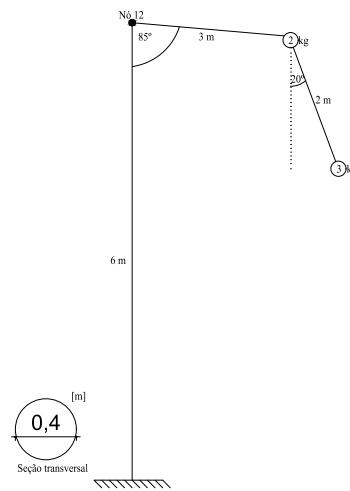
Fonte: Autor

Nesta nova configuração, a validação da eficiência do algoritmo é realizada. Novamente, todos os ângulos estão fora do regime linear, e a rotina computacional, por meio da matriz jacobiana, conseguiu lidar com a não linearidade presente no pêndulo. Apesar das posições angulares impostas ao pêndulo duplo corresponderem às mesmas usadas na validação do pêndulo duplo, é importante lembrar que as massas e a constante de amortecimento são diferentes. Portanto, os resultados não podem ser coincidentes.

4.5.4 Coluna modelada com 2 pêndulos a 85° e 20°

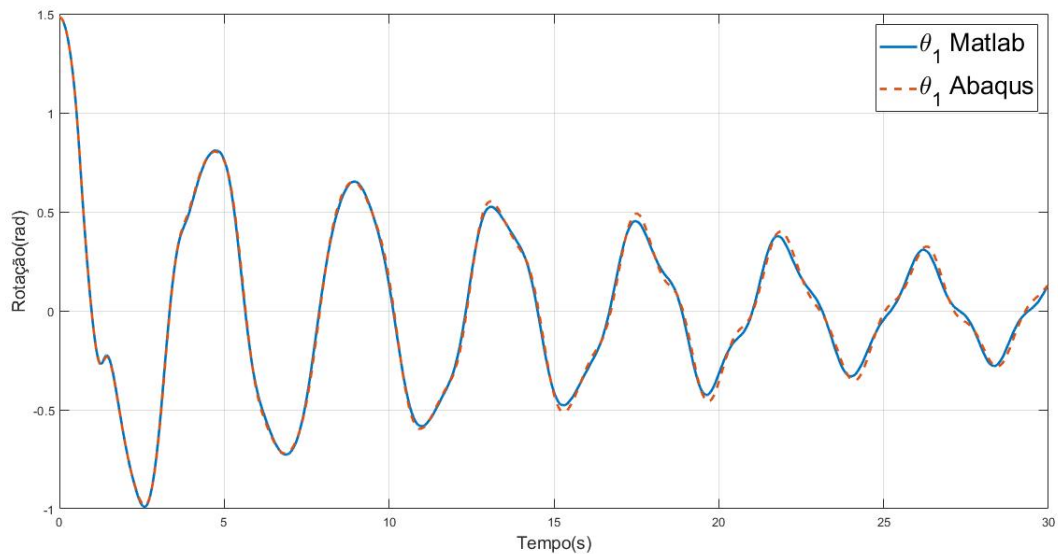
A configuração subsequente foi selecionada por apresentar uma maior distância entre os ângulos iniciais, sendo ambos os ângulos não lineares. Também se modificou a seção transversal da coluna para um perfil circular maciço de 4 cm de diâmetro e as demais configurações sendo: $E = 210 \text{ GPa}$, massa específica do aço = 7850 Kg/m^3 , $M_1 = 2 \text{ kg}$, $M_2 = 3 \text{ kg}$, $l_1 = 3 \text{ m}$, $l_2 = 2 \text{ m}$, $c_1 = 0,3 \text{ Ns/m}$, $c_2 = 0,3 \text{ Ns/m}$, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, $\Delta t = 3e^{-4} \text{ s}$, $\theta_1 = 85^\circ$ e $\theta_2 = 20^\circ$.

Figura 42 – Coluna modelada com pêndulo duplo a 85° e 20° .

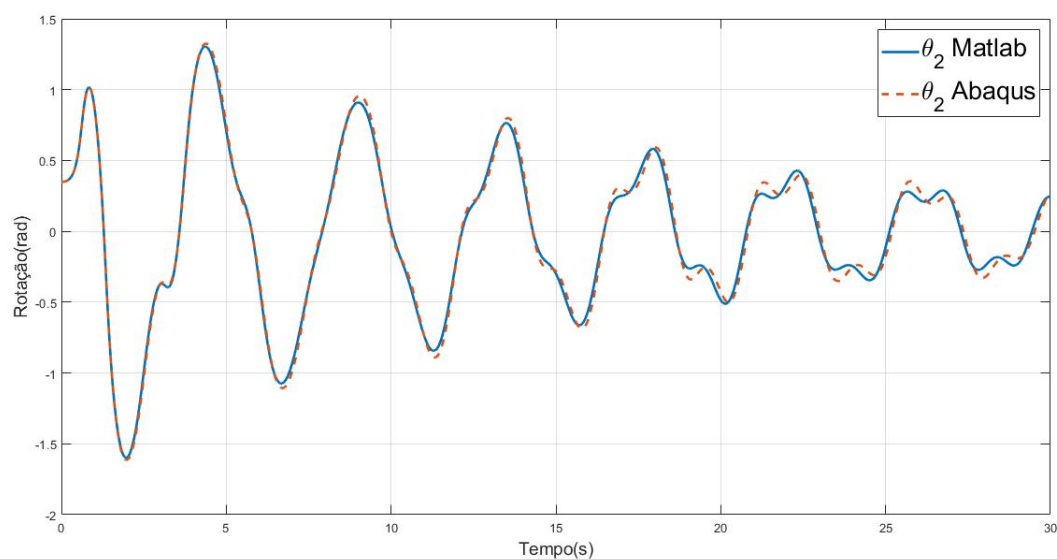


Fonte: Autor

Figura 43 – Evolução temporal de θ_1 .

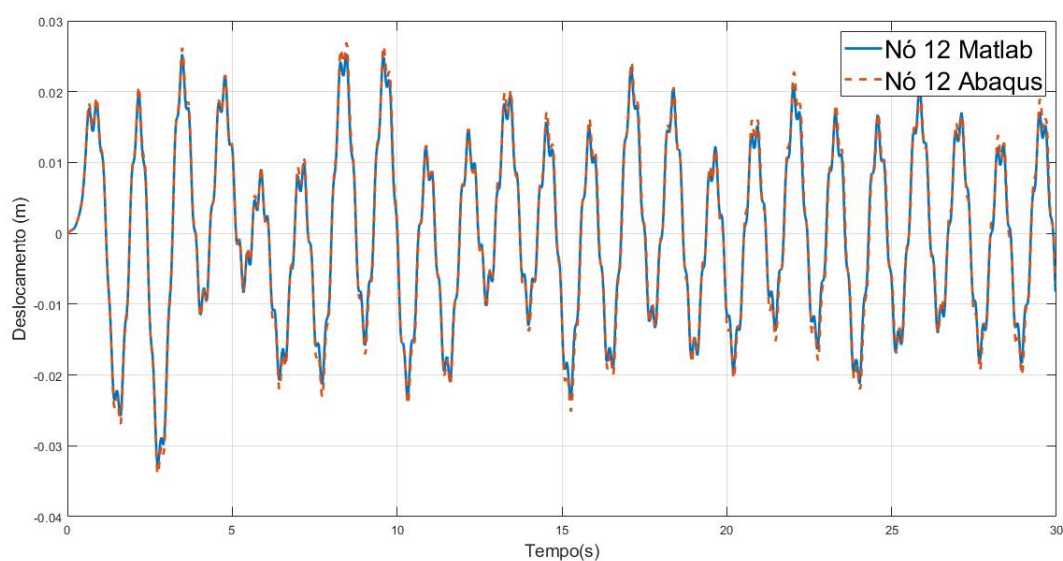


Fonte: Autor

Figura 44 – Evolução temporal de θ_2 .

Fonte: Autor

Figura 45 – Evolução temporal do Nó 12 da coluna.



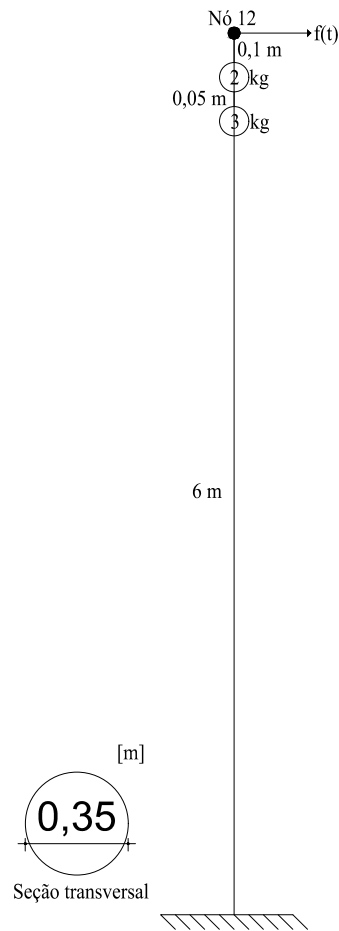
Fonte: Autor

A alteração do perfil da coluna, juntamente com a redução de sua inércia, teve como objetivo permitir uma maior interferência do pêndulo em relação à coluna. Após a modificação da coluna, foi possível observar um aumento considerável no deslocamento do topo da coluna em centímetros. Mesmo com essa alteração significativa, a rotina computacional conseguiu lidar com essa nova configuração.

4.5.5 Coluna modelada com 2 pêndulos a 0° e aplicando uma força dinâmica na estrutura.

Neste novo teste, o pêndulo duplo foi posicionado em condições de equilíbrio com ângulos iniciais iguais a zero e a seção circular maciça de 3,5 cm de diâmetro. Posteriormente, uma força dinâmica foi aplicada à coluna, e a interação entre a coluna e o pêndulo duplo foi observada. Sendo: $E = 210 \text{ GPa}$, massa específica do aço = 7850 Kg/m^3 , $M_1 = 1 \text{ kg}$, $M_2 = 2 \text{ kg}$, $l_1 = 10 \text{ cm}$, $l_2 = 5 \text{ cm}$, $c_1 = 0,3 \text{ Ns/m}$, $c_2 = 0,3 \text{ Ns/m}$, $f(t) = 1000 * \sin(\pi) \text{ N}$, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, $\Delta t = 3e^{-4} \text{ s}$, $\theta_1 = 0^\circ$ e $\theta_2 = 0^\circ$.

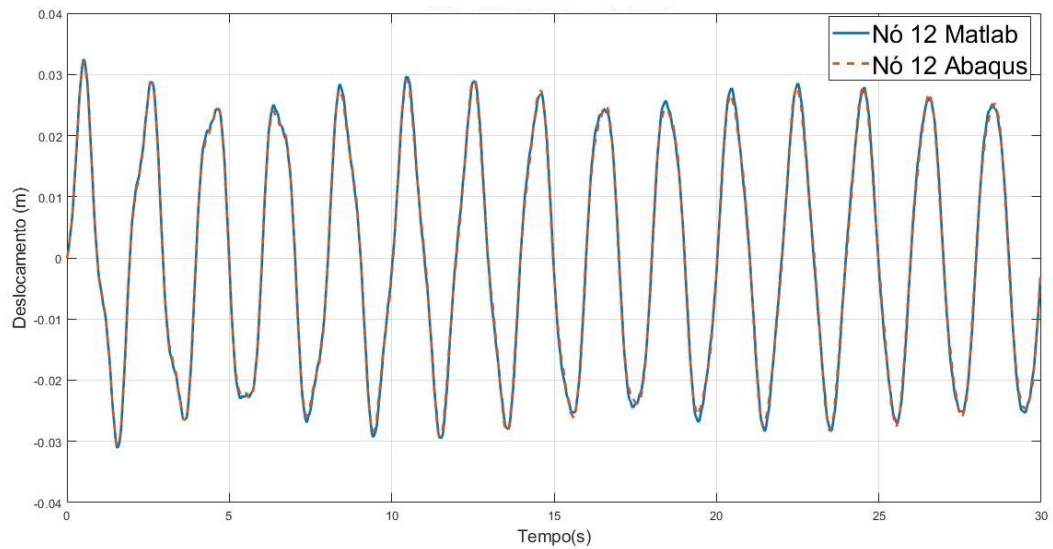
Figura 46 – Aplicando uma força dinâmica a coluna.



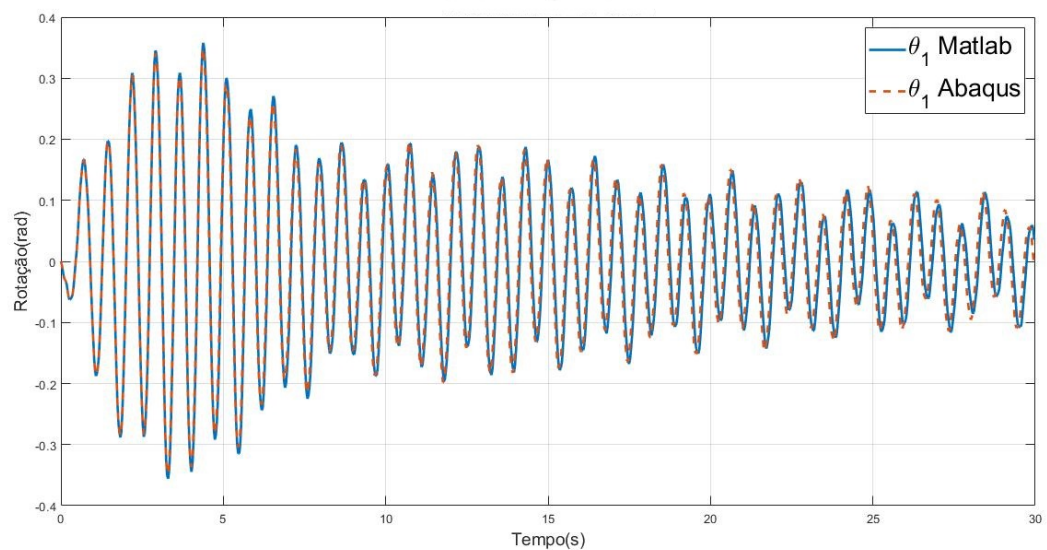
Fonte: Autor

A redução das hastes dos pêndulos e a consequente alteração das massas foram realizadas com o objetivo de aumentar o deslocamento dos pêndulos sem alterar a intensidade da força dinâmica aplicada à coluna.

Figura 47 – Evolução temporal do Nó 12 na coluna.

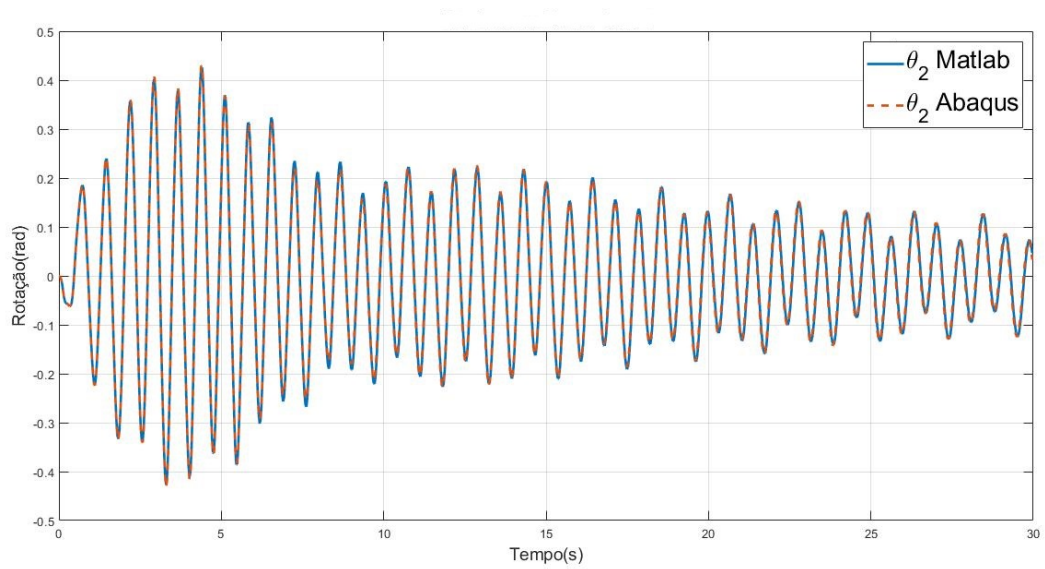


Fonte: Autor

Figura 48 – Evolução temporal de θ_1 .

Fonte: Autor

Observa-se que, ao oscilar o pêndulo, a evolução temporal do θ_2 ultrapassa 0,26 rad, que, ao converter para graus, resulta em 15°, ângulo este que já está fora do intervalo de linearização. A importância desses testes reside na interação entre a coluna e o pêndulo, na qual se observa que, ao forçar a coluna, o pêndulo responde com oscilações. Essa configuração é relevante para situações reais de abalos sísmicos, nas quais a força da natureza perturba a estrutura e esta transfere a perturbação ao pêndulo, provocando sua oscilação.

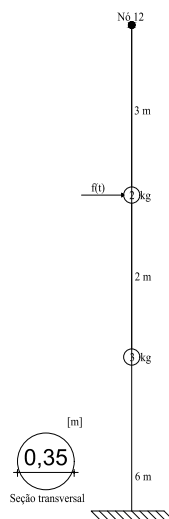
Figura 49 – Evolução temporal de θ_2 em Abaqus.

Fonte: Autor

4.5.6 Coluna modelada com 2 pêndulos a 0° e aplicando uma força dinâmica nos pêndulos.

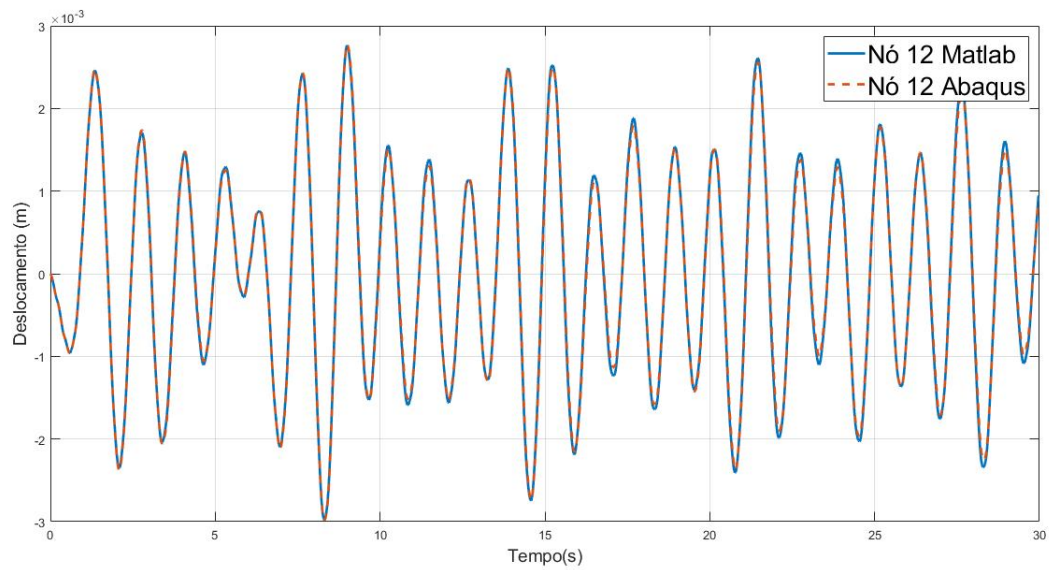
No penúltimo teste, optou-se por retornar às configurações iniciais do pêndulo e aplicar uma força dinâmica no próprio pêndulo em condições de equilíbrio. Sendo: Sendo: $M_1 = 2 \text{ kg}$, $M_2 = 3 \text{ kg}$, $M = 90 \text{ kg}$, $l_1 = 3 \text{ m}$, $l_2 = 2 \text{ m}$, $c_1 = 0,3 \text{ Ns/m}$, $c_2 = 0,3 \text{ Ns/m}$, $f(t) = 15 * \sin(\pi) \text{ N}$, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, $\Delta t = 3e^{-4} \text{ s}$, $\theta_1 = 0^\circ$ e $\theta_2 = 0^\circ$.

Figura 50 – Análise da coluna com as novas configurações.

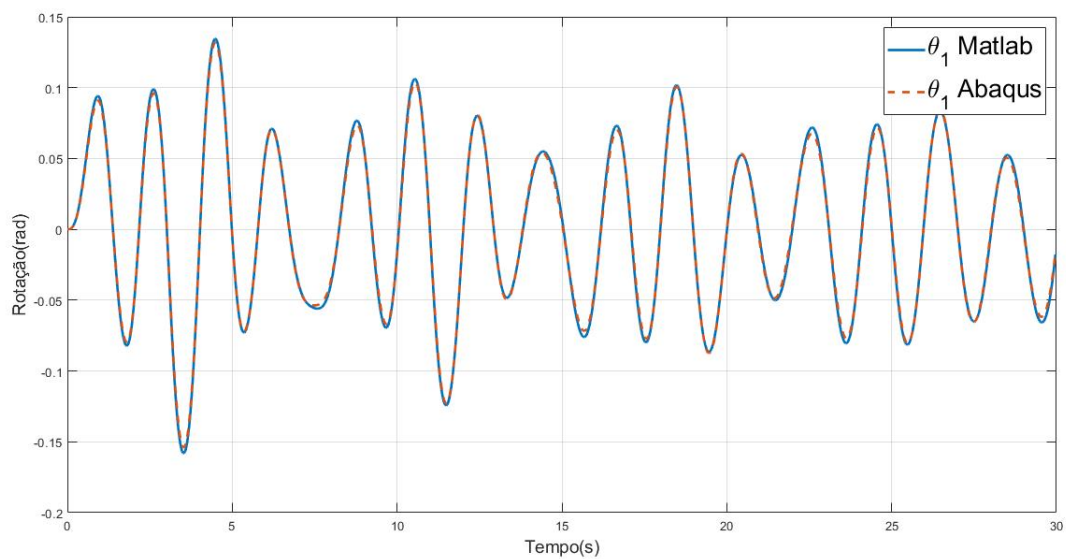


Fonte: Autor

Figura 51 – Evolução temporal do Nó 12 na coluna.

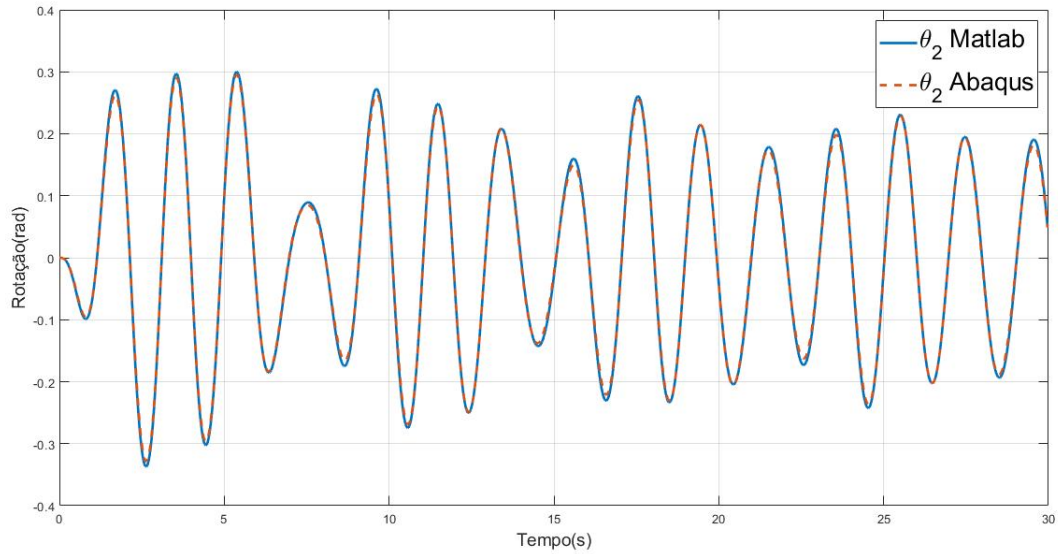


Fonte: Autor

Figura 52 – Evolução temporal de θ_1 .

Fonte: Autor

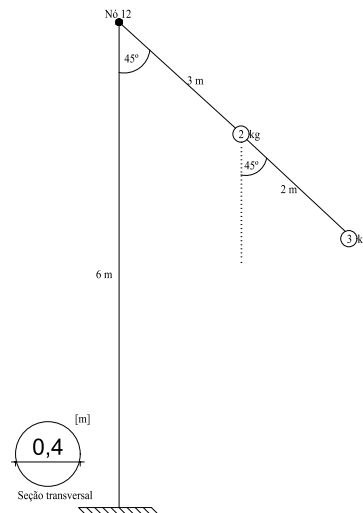
Essa configuração reproduz situações em que o pêndulo é perturbado por ações externas e transfere essas ações, provocando deslocamentos na estrutura. Na realidade, essa perturbação externa ocorreria por meio de forças dinâmicas, como o vento, por exemplo. O deslocamento da coluna, por mais que apresente uma rigidez pequena, não ultrapassa a casa dos milímetros, uma vez que, nessa configuração, a força está sendo aplicada no pêndulo, mais especificamente na primeira massa do pêndulo duplo.

Figura 53 – Evolução temporal de θ_2 em Abaqus.

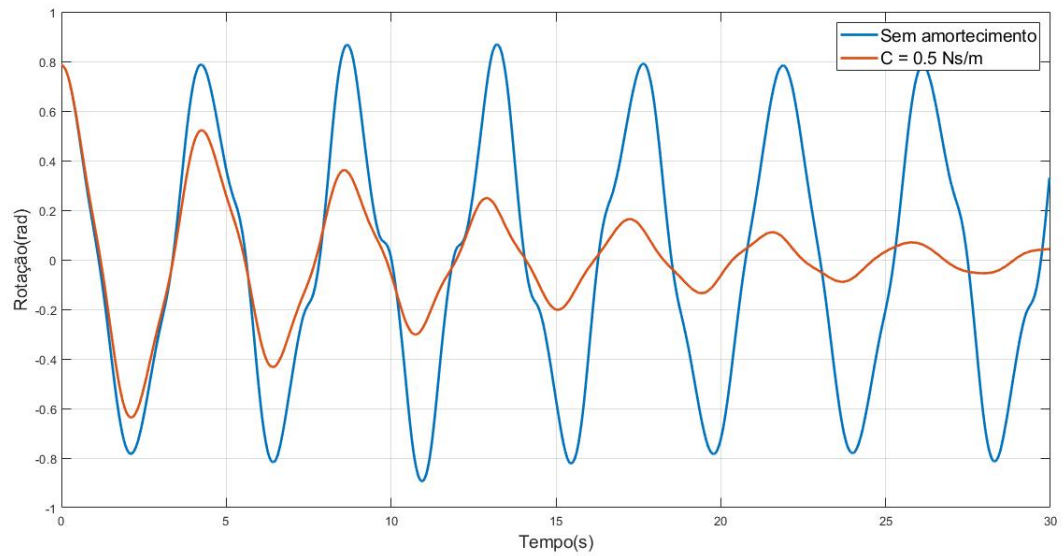
Fonte: Autor

4.6 Coluna modelada com 2 pêndulos a 45° e 45°

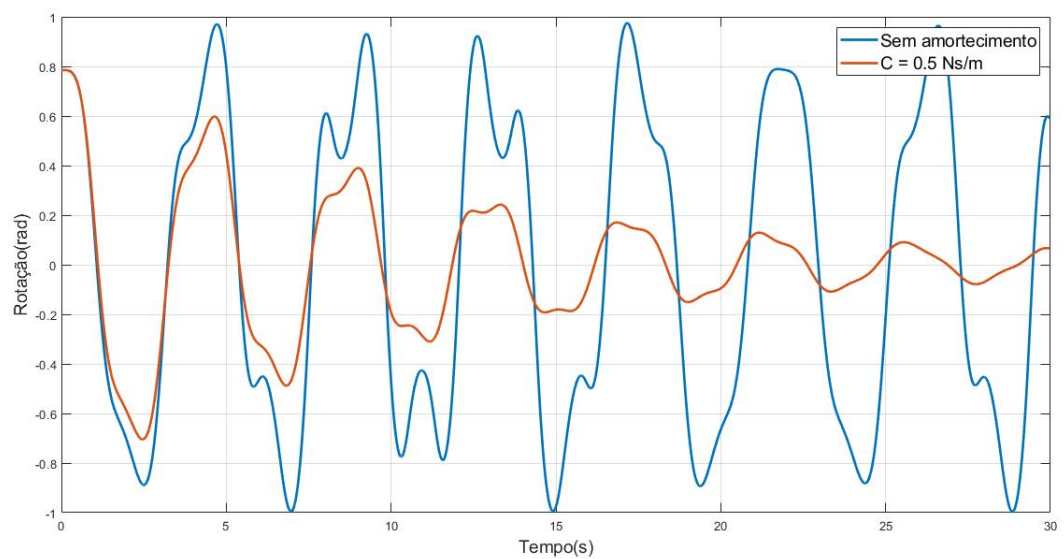
Finalmente, é apresentado o teste que modifica as constantes de amortecimento para observar o comportamento da estrutura com e sem amortecimento nos pêndulos duplos. Para essa análise, foi utilizado um perfil circular com diâmetro de 4 cm e as demais condições iniciais foram: $E = 210\text{ GPa}$, massa específica do aço = 7850 Kg/m^3 , $M_1 = 2\text{ kg}$, $M_2 = 3\text{ kg}$, $l_1 = 3\text{ m}$, $l_2 = 2\text{ m}$, $c_1 = 0,5\text{ Ns/m}$, $c_2 = 0,5\text{ Ns/m}$, $g = 9,81\text{ m/s}^2$, $\Delta t = 3e^{-4}\text{ s}$, $\theta_1 = 45^\circ$ e $\theta_2 = 45^\circ$.

Figura 54 – Coluna modelada com pêndulo duplo a 45° e 45° .

Fonte: Autor

Figura 55 – Evolução temporal de θ_1 .

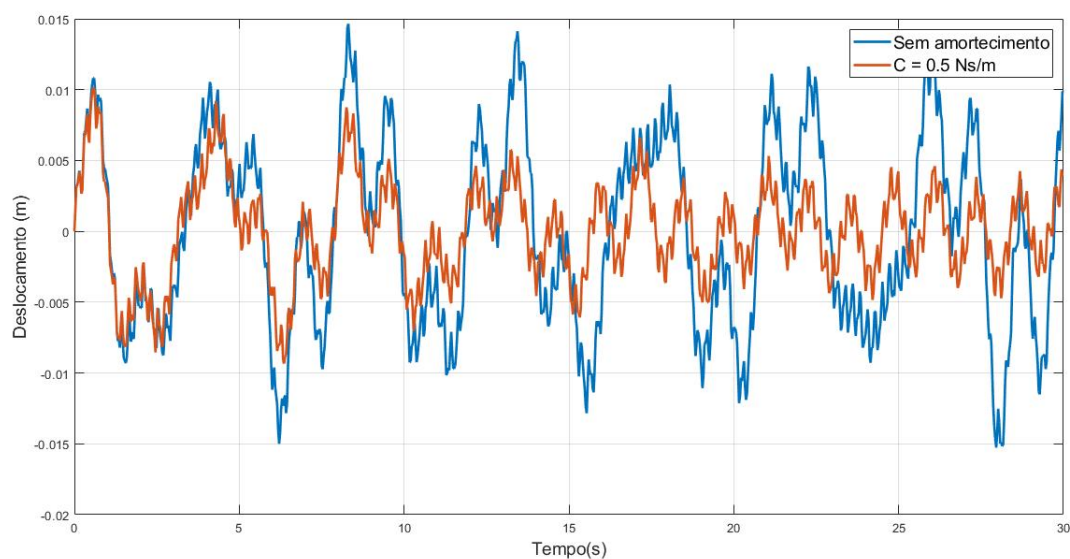
Fonte: Autor

Figura 56 – Evolução temporal de θ_2 .

Fonte: Autor

A oscilação do pêndulo duplo em estruturas reais dificilmente ultrapassaria o ângulo de 45° , sendo esse requisito fundamental para a utilização dessa configuração inicial. Além disso, a utilização de ângulos maiores que 45° nas análises anteriores está ligada à robustez do algoritmo e à confiabilidade caso essas condições extremas de ângulos maiores que 45° ocorram.

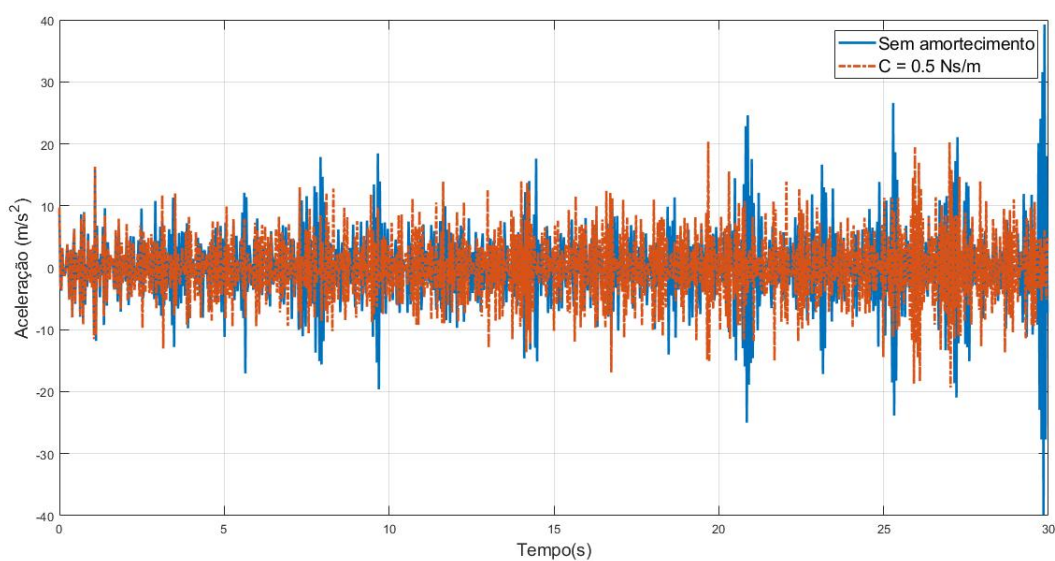
Figura 57 – Evolução temporal do Nó 12 da coluna.



Fonte: Autor

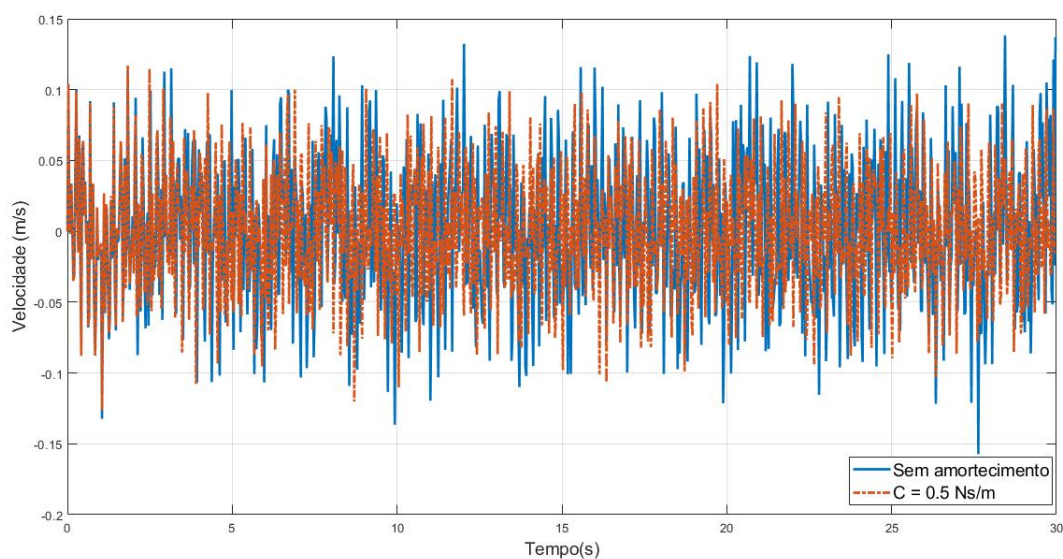
É possível observar na Figura 57 que a estrutura apresenta uma atenuação de seu movimento com o tempo, devido à inserção dos amortecedores no pêndulo duplo. Como resultado da redução do deslocamento da estrutura, há também uma redução da aceleração e da velocidade, respectivamente apresentadas nas Figuras 58 e 59 (KRONBAUER, 2013). A velocidade está relacionada ao estado limite último da estrutura e a aceleração está ligada ao estado limite de serviço.

Figura 58 – Aceleração do Nó 12 da coluna.



Fonte: Autor

Figura 59 – Velocidade do Nó 12 da coluna.



Fonte: Autor

O objetivo original do teste é analisar as variações das oscilações da coluna, uma vez que ela não pode oscilar perto de suas frequências naturais, evitando, assim, o fenômeno de ressonância. Esse controle estrutural poderá ser realizado futuramente em estruturas reais usando a rotina computacional implementada neste trabalho, alterando as constantes de amortecimento dos pêndulos.

5 Conclusão

Neste estudo, propôs-se o desenvolvimento de um algoritmo em MATLAB para realizar análise dinâmica não linear de estruturas com pêndulos simples e duplos acoplados. O objetivo consiste em fornecer medições de deslocamentos e outras grandezas relacionadas ao movimento dos pêndulos, a fim de analisar as vibrações que ocorrem nas estruturas.

O princípio do pêndulo é amplamente utilizado em diversas áreas da engenharia e dispositivos, sendo, portanto, objeto de pesquisa para compreender o comportamento dinâmico dessas estruturas.

Analisaram-se as equações diferenciais de movimento para pêndulos simples e duplos, utilizando as leis de Newton, as equações de energia cinética e potencial e as equações de Lagrange. Propôs-se uma solução utilizando o método incremental iterativo de Newmark-Newton/Raphson e comparou-se essa solução com a solução fornecida pelo *software* de elementos finitos *ABAQUS*. O sistema resultante, composto por duas equações diferenciais de segunda ordem, apresenta não linearidade devido à presença do produto de incógnitas e de funções trigonométricas dessas incógnitas, tornando a solução analítica desafiadora e a solução numérica trabalhosa.

Durante os testes realizados, observou-se a capacidade robusta da rotina computacional em lidar com problemas altamente não lineares. Nesse sentido, a combinação e ampliação das matrizes de massa, rigidez e, especialmente, a matriz jacobiana para solução dos problemas não lineares demonstraram-se eficientes. É importante destacar que em problemas reais, os ângulos trabalhados podem chegar a 50° , portanto, o algoritmo apresentou robustez ao trabalhar com ângulos hipotéticos de 85° .

Nas análises realizadas, os pêndulos foram configurados em diversas condições iniciais, variando a interação entre a estrutura e os pêndulos. Conforme esperado, a interação ocorreu sem problemas e foi validada pelo *software* de elementos finitos *ABAQUS*, concluindo assim um estudo inteiramente acadêmico capaz de lidar com não linearidades presentes em análises dinâmicas.

Nesse contexto, essa pesquisa foca no avanço do estudo de como as estruturas reagem às cargas altamente variáveis ao longo do tempo.

Referências

- ABNT. Associação brasileira de normas técnicas - nbr 6123: Forças devidas ao vento em edificações. 1988. Citado na página 22.
- ABNT. Associação brasileira de normas técnicas - nbr 15421:2006 – projeto de estruturas resistentes a sismos. 2006. Citado na página 22.
- AGRAWAL, O. A new lagrangian and a new lagrange equation of motion for fractionally damped systems. *Journal of Applied Mechanics*, v. 68, p. 339–341, 03 2001. Citado na página 33.
- AGUIAR, M. A. de. Tópicos de mecânica clássica. *Livraria da Física, 1a edição*, p. 18, 2011. Citado na página 29.
- ALMEIDA, M. T. d. Vibrações mecânicas para engenheiros. *Edgar Blücher Ltda, São Paulo*, v. 2, p. 166–172, 1990. Citado na página 47.
- ARAÚJO, R. R. de et al. Análise não-linear dinâmica de colunas de aço estaiadas e protendidas. *Mecânica Computacional*, v. 29, n. 73, p. 7183–7194, 2010. Citado na página 62.
- ARNOLD, F. J. et al. Estudo do amortecimento do pêndulo simples: uma proposta para aplicação em laboratório de ensino. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 33, p. 4311–4311, 2011. Citado na página 56.
- BENVEGNUM, L. B. Desenvolvimento de um algoritmo para medição óptica de vibração em pêndulos duplos. 2016. Citado na página 58.
- BOSCOLO, A. L. O pêndulo duplo caótico: resultados experimentais e simulações numéricas. Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2018. Citado na página 63.
- BRASIL, P. *RSBR - Rede sismográfica brasileira*. 2005. Disponível em: <<http://rsbr.gov.br/index.html>>. Citado na página 21.
- CARDOSO, D. *Mecânica analítica*. [S.l.]: Editora Senac São Paulo, 2022. Citado na página 29.
- CHABU, V. B. Introdução à mecânica lagrangiana. 2011. Citado na página 29.
- CHÁVEZ, E. S. Análise estrutural de edifício alto submetido às pressões flutuantes induzidas pela ação do vento. Universidade Federal de Minas Gerais, 2006. Citado na página 39.
- CHRISTINI, D. J.; COLLINS, J. J.; LINSAY, P. S. Experimental control of high-dimensional chaos: The driven double pendulum. *Physical Review E*, v. 54, n. 5, p. 4824–4827, November 1996. Citado na página 29.
- CLOUGH, R.; PENZIEN, J. *Of structures*. [S.l.]: McGraw-Hill, 1975. Citado na página 49.

- FIGUEIREDO, R. A.; DANTAS, M. J. H. Dinâmica do sistema carro-pêndulo. Citado na página 60.
- FILHO, G. d. S. et al. Estudo do comportamento dinâmico de edifícios mistos (aço-concreto) submetidos à ação não determinística do vento. Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2012. Citado na página 39.
- FILHO, L. P. P. et al. Vibrações não lineares de colunas esbeltas parcialmente enterradas. Universidade Federal de Goiás, 2019. Citado na página 63.
- FIRMO, D. L. Construção e caracterização dinâmica de um pêndulo duplo caótico. Universidade Federal de Minas Gerais, 2007. Citado na página 31.
- FRANÇA, L. N. F.; MATSUMURA, A. Z. *Mecânica geral: com introdução à mecânica analítica e exercícios resolvidos*. [S.l.]: Editora Blucher, 2011. Citado na página 29.
- GOMES, M. P. P. et al. Formulação lagrangiana e hamiltoniana para sistemas dissipativos: aplicada no lançamento oblíquo sujeito a resistência do ar. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 28.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; KRANE, K. S. *Física 3*. [S.l.]: LTC, 1984. v. 3. Citado na página 38.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. Fundamentos de física, vol. 1. 8ª edição. Rio de Janeiro: LTC, 2013. Citado na página 31.
- HISSA, L. D. Estudo de sistemas dinâmicos não lineares. 2022. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 19.
- JÄCKEL, P.; MULLIN, T. A numerical and experimental study of codimension-2 points in a parametrically excited double pendulum. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, v. 454, p. 3257 – 3274, 1998. Citado na página 30.
- JAFRI, F. A. *Analysis and Control of Bifurcations in a Double Pendulum*. Tese (Doutorado) — University of Cincinnati, 2003. Citado na página 30.
- JÚNIOR, L. A. D. *Mecânica analítica e a geometria simplética*. Tese (Doutorado), 2018. Citado na página 29.
- KRONBAUER, F. Uso de amortecedores de massa sintonizados para a redução de vibrações em estruturas submetidas a eventos sísmicos. 2013. Citado na página 78.
- LAPA, J. A. M. Análise dinâmica linear e não-linear de estruturas. 1987. Citado na página 18.
- LEMOES, N. A. *Mecânica analítica*. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2007. Citado na página 29.
- LEVIEN, R. B.; TAN, S. M. Double pendulum: An experiment in chaos. *American Journal of Physics*, v. 61, n. 11, p. 1038–1044, 1993. Disponível em: <<https://doi.org/10.1119/1.17335>>. Citado na página 30.
- MARTINS, A. M. B. *Método dos Elementos Finitos*. In *ANÁLISE AVANÇADA DE ESTRUTURAS*. [S.l.]: Gráfica ediliber., 2021. vol.II (1a ed.). Citado na página 47.

- MATLAB. 9.7.0.1190202 (R2018b). Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc., 2018. Disponível em: <<https://www.mathworks.com>>. Citado na página 19.
- NINA, J. C. C. *Análise Não Linear da Instabilidade e Vibração de uma Coluna Pultrudada Reforçada com Fibras*. Tese (Doutorado) — PUC-Rio, 2020. Citado na página 62.
- OLIVEIRA, A. R. A emergência da mecânica aplicada no século xix. 2016. Citado na página 25.
- OLIVEIRA, B. D. d. C. *Efeito do Vento como Ação Dinâmica em Edifícios Altos*. Tese (Doutorado), 2014. Citado na página 39.
- OLIVEIRA, F. d. S. Critérios de projeto para amortecedor tipo pêndulo para controle de vibrações em edifícios altos. 2012. Citado na página 63.
- OLIVEIRA, T. de; LADEIRA, D. G. Principio de d’alembert e equações de lagrange. 2016. Citado na página 29.
- PAIN, S. The physics of vibrations and waves. 2005. Citado na página 40.
- SANTOS, A. F. M. d. et al. Modelagem lagrangiana e simulações de sistemas mecânicos constituídos por massa-mola e pêndulos. [sn], 2018. Citado na página 31.
- SANTOS, V. H. d. et al. *Comparação do método discreto da NBR 6123 e do método do vento sintético para edificações em concreto armado de múltiplos pavimentos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2017. Citado na página 39.
- SAVI, M. A. *Dinâmica não-linear e caos*. [S.l.]: Editora E-papers, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 35.
- SCHWICHTENBERG, J. *No-Nonsense Classical Mechanics: a student-friendly introduction*. [S.l.]: No-Nonsense Books, 2019. Citado na página 31.
- SHINBROT, T. et al. Chaos in a double pendulum. *American Journal of Physics*, v. 60, n. 6, p. 491–499, 1992. Disponível em: <<https://doi.org/10.1119/1.16860>>. Citado na página 30.
- SILVA, A. R. D. d. Sistema computacional para análise avançada estática e dinâmica de estruturas metálicas. Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil. Departamento de Engenharia . . . , 2009. Citado na página 19.
- SILVA, G. L. d. et al. Controle e estabilização do duplo pêndulo invertido sobre um carro. Universidade Federal do Amazonas, 2010. Citado na página 60.
- SIMOES, L. M. C. *ANÁLISE DE ESTRUTURAS*. [S.l.]: Gráfica ediliber., 2015. : Vol. vol.II (1a ed.). Citado na página 47.
- SKELDON, A. Dynamics of a parametrically excited double pendulum. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 75, n. 4, p. 541–558, 1994. ISSN 0167-2789. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0167278994000999>>. Citado na página 29.
- SOMMER, R. M. R. Análise de vibrações em pisos mistos aço/concreto. Universidade Federal de Minas Gerais, 2002. Citado na página 49.

SOUSA, M. G. d. Resolução dos pêndulos simples, duplo e triplo por meio das equações de euler-lagrange e diagonalização de matrizes. Universidade Federal do Tocantins, 2022. Citado na página 58.

TAYLOR, J. R. *Mecânica clássica*. [S.l.]: Bookman Editora, 2013. Citado na página 29.

TEIXEIRA, F. P. et al. Modelagem do comportamento estrutural estático e dinâmico e avaliação de conforto humano de edifícios de concreto armado. Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2015. Citado na página 39.

THAI, H.-T.; KIM, S.-E. Nonlinear static and dynamic analysis of cable structures. *Finite elements in analysis and design*, Elsevier, v. 47, n. 3, p. 237–246, 2011. Citado na página 36.

TIPLER, P. A.; MOSCA, G. *Física para la ciencia y la tecnología, Vol. 1: Mecánica, oscilaciones y ondas, termodinámica*. [S.l.]: Reverté, 2020. Citado na página 38.

TREIN, C. A. Modelagem dinâmica equivalente de edificios altos submetidos à ação do vento. 2005. Citado na página 39.

VANKÓ, P. Investigation of a chaotic double pendulum in the basic level physics teaching laboratory. *European Journal of Physics*, v. 28, p. 61, 11 2006. Citado na página 29.

WILLERS, S. C. A.; KREMER, D. I. M.; WEBLER, G. Modelagem matemática do pêndulo simples amortecido. *Experiências e reflexões educativas na Rede Sinodal de Educação*, v. 17, p. 139, 1995. Citado na página 56.

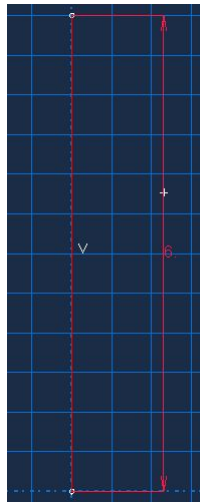
ZHOU, Z.; WHITEMAN, C. Motions of a double pendulum. *Nonlinear Anal.*, Elsevier Science Ltd., GBR, v. 26, n. 7, p. 1177–1191, abr. 1996. ISSN 0362-546X. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0362-546X\(94\)00253-E](https://doi.org/10.1016/0362-546X(94)00253-E)>. Citado na página 30.

Anexos

ANEXO A – Configuração da coluna para análise de frequência

Configurando o comprimento de 6 metros da coluna em *ABAQUS*.

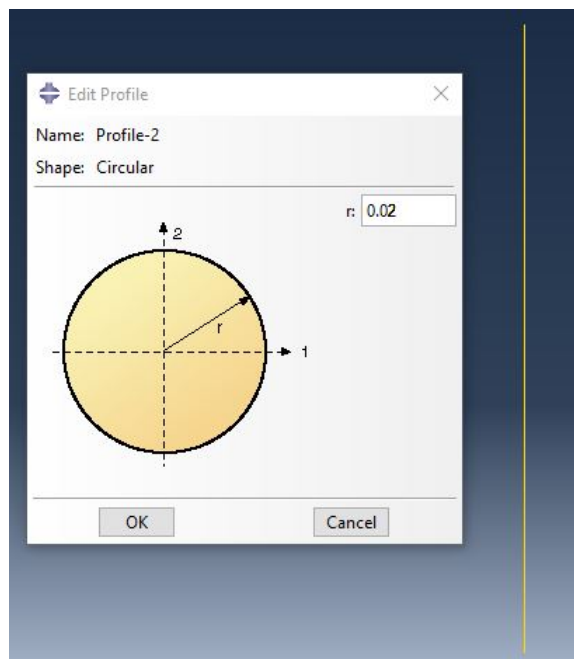
Figura 60 – Comprimento da coluna.



Fonte: Autor

Criando a seção circular com raio de 2 cm.

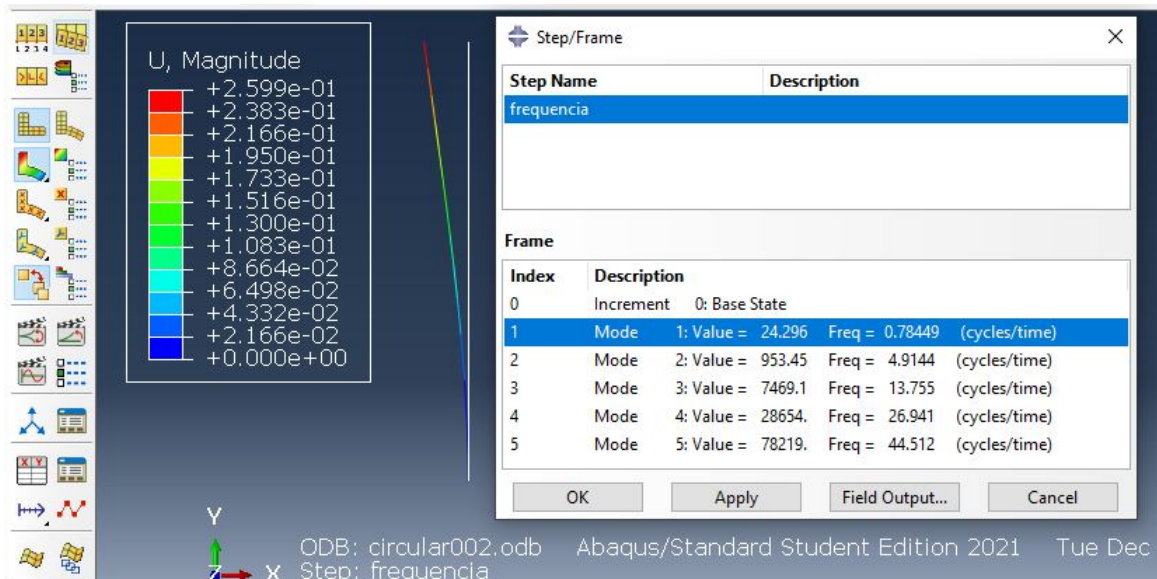
Figura 61 – Seção transversal da coluna.



Fonte: Autor

Logo abaixo, tem-se as frequências da estrutura obtida em *MATLAB* e em *ABAQUS*.

Figura 62 – Frequências obtidas através do *ABAQUS*.



Fonte: Autor

Figura 63 – Frequências obtidas através do *MATLAB*.

```
Aguarde!! A estrutura será analisada!
***** ANÁLISE MODAL *****
Determinado as 3 primeiras frequências em 6.33e-05 s.

freq_Hz =

    0.7846
    4.9195
   13.8172

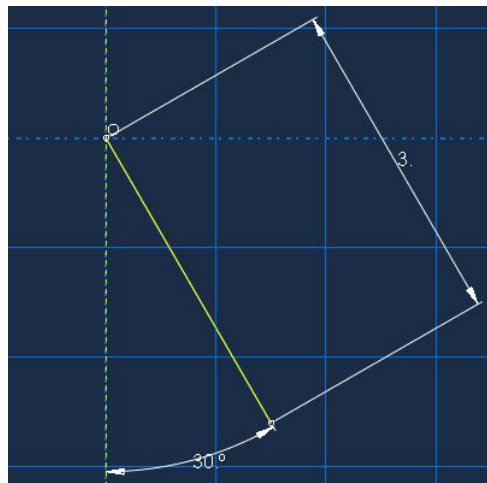
Iniciando o processamento da estrutura por Newmark
*****
Estrutura calculada por Newmark em 0.814677 s.
```

Fonte: Autor

ANEXO B – Configuração dos ângulos dos testes

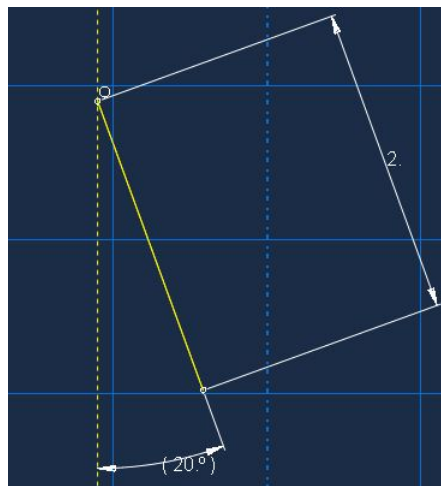
B.1 Configuração 30° e 20°

Figura 64 – Conferência do ângulo inicial de $\theta_1 = 30^\circ$ e $L_1 = 3m$



Fonte: Autor

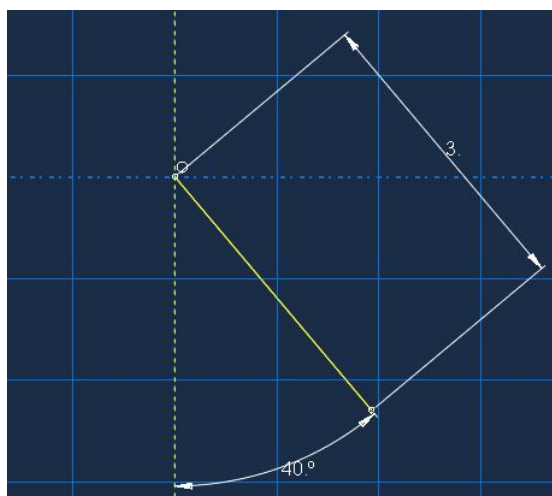
Figura 65 – Conferência do ângulo inicial de $\theta_1 = 20^\circ$ e $L_1 = 2m$



Fonte: Autor

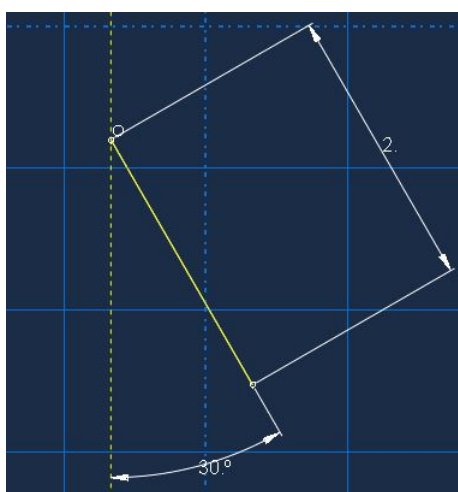
B.2 Configuração 40° e 30°

Figura 66 – Conferência do ângulo inicial de $\theta_1 = 40^\circ$ e $L_1 = 3m$.



Fonte: Autor

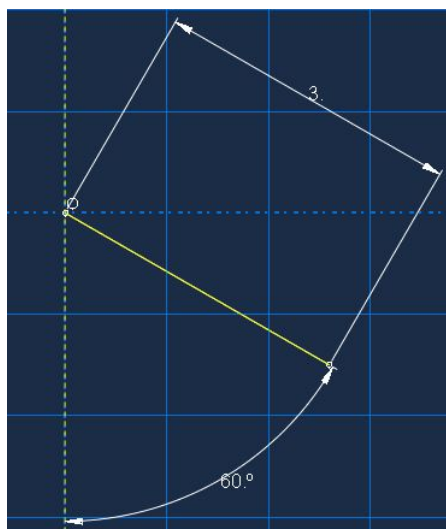
Figura 67 – Conferência do ângulo inicial de $\theta_2 = 30^\circ$ e $L_1 = 2m$.



Fonte: Autor

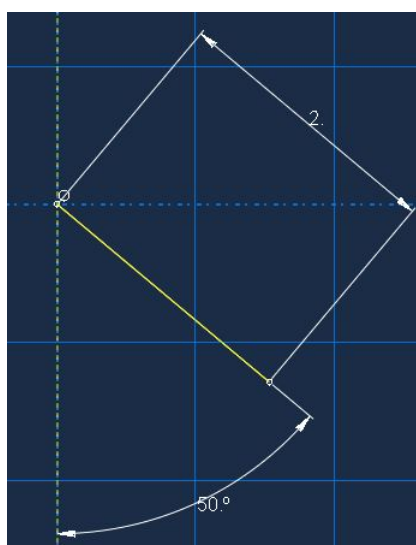
B.3 Configuração 60° e 50°

Figura 68 – Conferência do ângulo inicial de $\theta_1 = 60^\circ$ e $L_1 = 3m$.



Fonte: Autor

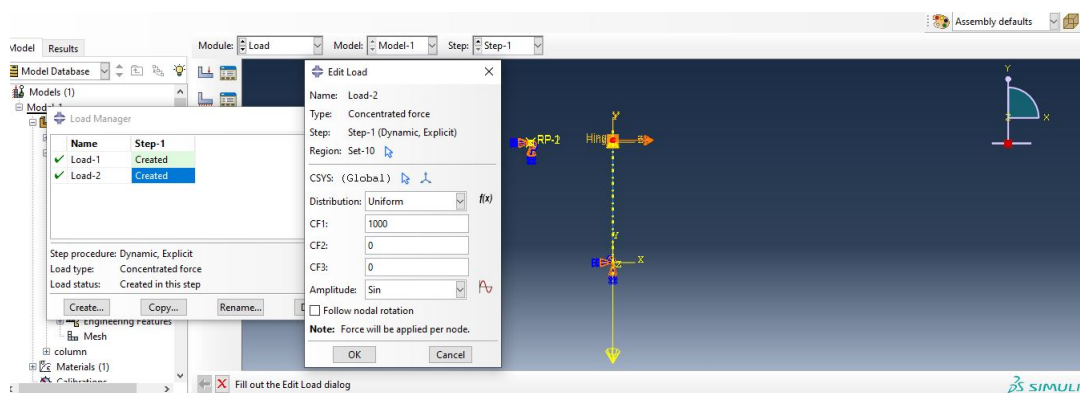
Figura 69 – Conferência do ângulo inicial de $\theta_2 = 50^\circ$ e $L_1 = 2m$.



Fonte: Autor

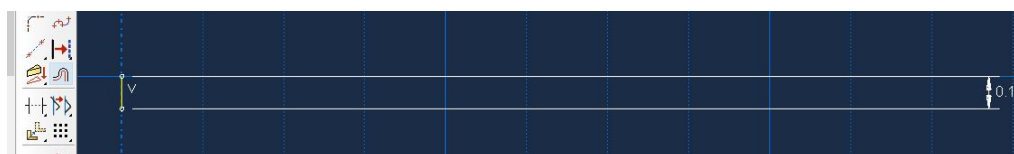
B.5 Configuração forçando a barra

Figura 72 – Configuração da força dinâmica.



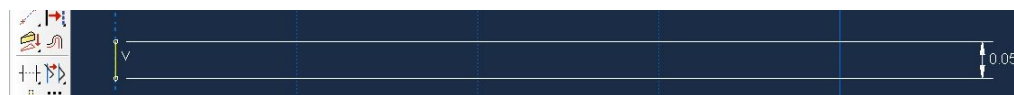
Fonte: Autor

Figura 73 – Configuração da haste 1 em Abaqus.



Fonte: Autor

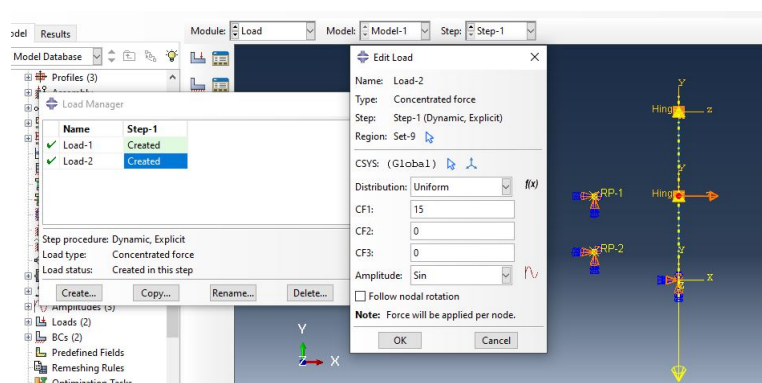
Figura 74 – Configuração da haste 2 em Abaqus.



Fonte: Autor

B.6 Configuração forçando o pêndulo

Figura 75 – Configuração da força dinâmica em Abaqus.



Fonte: Autor